

Р. Фейнман

КВАНТОВАЯ ЭЛЕКТРОДИНАМИКА

Перевод с английского
А. А. Рухадзе

Под редакцией
В. П. Силина



**Новокузнецкий
физико-математический
институт**

1998

СО Д Е Р Ж А Н И Е

Предисловие редактора перевода	5
Предисловие автора	7
Взаимодействие света с веществом — квантовая электродинамика	
<i>Лекция первая</i>	9
Обсуждение метода Ферми	9
<i>Лекция вторая</i>	10
Правила квантовой электродинамики	10
<i>Лекция третья</i>	13
<i>Лекция четвертая</i>	17
Поглощение света	17
<i>Лекция пятая</i>	23
Правила отбора в дипольном приближении (23)	
<i>Лекция шестая</i>	30
Равновесное излучение (30). Рассеяние света (30). Собственная энергия	34
Краткий обзор основных принципов и результатов специальной теории относительности	
<i>Лекция седьмая</i>	35
<i>Лекция восьмая</i>	40
Решения уравнений Максвелла для вакуума	40
Релятивистская механика частицы	43
Релятивистское волновое уравнение	
<i>Лекция девятая</i>	48
Система единиц	48
Уравнение Клейна—Гордона, Паули и Дирака	48
<i>Лекция десятая</i>	56
Алгебра γ -матриц	56
Преобразование «эквивалентности»	60
Релятивистская инвариантность	61
Гамильтонова форма уравнения Дирака	51
<i>Лекция одиннадцатая</i>	63
Нерелятивистский предел уравнения Дирака	68
<i>Лекция двенадцатая</i>	69
Решение уравнения Дирака для свободной частицы	
<i>Лекция тринадцатая</i>	75
Определение спина движущегося электрона	79
Нормировка волновых функций	83
<i>Лекция четырнадцатая</i>	85
Методы вычисления матричных элементов	85
Физическая интерпретация состояний с отрицательной энергией	87

**Задачи квантовой электродинамики для случая
заданного потенциала внешнего поля**

<i>Лекция пятнадцатая</i>	93
Рождение и аннигиляция пар	93
Сохранение энергии	94
Функция распространения	95
<i>Лекция шестнадцатая</i>	99
Применение функции распространения $K_+(2, 1)$	99
Вероятность перехода	101
Рассеяние электрона в кулоновском поле	102
Плотность состояний и сечение рассеяния (104)	
<i>Лекция семнадцатая</i>	107
Вычисление функции распространения для свободной частицы	107
<i>Лекция восемнадцатая</i>	114
Импульсное представление	114
Матричные элементы	115
Релятивистская трактовка взаимодействия частиц со светом	
<i>Лекция девятнадцатая</i>	119
Излучение атомов	120
Рассеяние γ -лучей атомными (связанными) электро- нами	121
Плотности конечных состояний	123
Эффект Комптона	124
Вычисление $ M ^2$ (124)	
<i>Лекция двадцатая</i>	126
<i>Лекция двадцать первая</i>	131
Обсуждение формулы Клейна — Нишины	131
Усреднение по поляризациям (132). Полное сече- ние рассеяния	134
Двухфотонная аннигиляция пары	135
<i>Лекция двадцать вторая</i>	137
Аннигиляция покоящегося позитрона	137
Тормозное излучение	139
Рождение пар	144
<i>Лекция двадцать третья</i>	146
Метод суммирования матричных элементов по спино- вым состояниям	146
Эффекты экранировки кулоновского поля ядра в атомах	150
Взаимодействие нескольких электронов	
<i>Лекция двадцать четвертая</i>	153
Использование функции $\delta_+(s^2)$	156
<i>Лекция двадцать пятая</i>	159
Обоснование «правил» квантовой электродинамики	159

Рассеяние электронов на электронах	162
Суммирование по четырем направлениям поляризации фотона	165
Обсуждение и интерпретация различных «поправочных» членов	
<i>Лекция двадцать шестая</i>	167
Взаимодействие двух электронов	167
Взаимодействие электрона с позитроном	171
Позитроний	172
Двухфотонный обмен между электронами и позитронами	174
<i>Лекция двадцать седьмая</i>	176
Собственная энергия электрона	176
Метод вычисления интегралов, встречающихся в квантовой электродинамике	182
<i>Лекция двадцать восьмая</i>	183
Интеграл собственной энергии при наличии внешнего поля	183
Рассеяние электрона на внешнем потенциале	186
<i>Лекция двадцать девятая</i>	189
Устранение фиктивной «инфракрасной катастрофы»	195
<i>Лекция тридцатая</i>	198
Другой подход к проблеме инфракрасной катастрофы	198
Радиационные эффекты для атомных электронов	199
<i>Лекция тридцать первая</i>	205
Процессы с замкнутой петлей; поляризация вакуума	205
Рассеяние света на потенциале	208
Принцип Паули и уравнение Дирака	
<i>Лекция тридцать первая (продолжение)</i>	211

Фейнман Р.

Квантовая электродинамика

Пер. с англ. — Н.: ИО НФМИ, 1998.— 216 с.

ISBN 5-80323-188-6

Издательский Отдел Новокузнецкого Физико-математического институт
454014, Новокузнецк, ул Чехова, 15 Лицензия № 058723 от 13 07 93.
Подписано к печати 18 05 98 Отпечатано в типографии НФМИ

ISBN 5-80323-188-6

© Р. Фейнман, 1961

© ИО НФМИ, 1998

ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА ПЕРЕВОДА

Предлагаемая советскому читателю книга одного из крупнейших американских физиков-теоретиков Р. Фейнмана интересна во многих отношениях. Автор книги известен как физик, много работавший над основными теоретическими проблемами релятивистской квантовой теории поля и теории элементарных частиц и много сделавший в этой области. Широкую известность получил диаграммный метод Фейнмана, который в свое время существенно упростил электродинамическую теорию возмущений и без которого современная квантовая теория поля фактически невычислима. Настоящая книга представляет собой запись прочитанных Фейнманом лекций. Автор в своих лекциях поставил перед собой задачу дать сравнительно краткое изложение методов и основных результатов квантовой электродинамики, рассчитанное в первую очередь на физиков-экспериментаторов. Действительно, вся книга построена таким образом, что от читателя не требуется большой теоретической подготовки. В частности, в лекциях Фейнмана изложены результаты специальной теории относительности и обсуждается нерелятивистская проблема взаимодействия света с веществом. С другой стороны, как это можно видеть из содержания, книга освещает широкий круг основных положений релятивистской квантовой теории электромагнитного поля. Думается, что здесь читатель найдет то необходимое, что позволит ему научиться вычислять вероятности различных электромагнитных процессов и понимать основные проблемы квантовой электродинамики.

Простота изложения квантовой электродинамики является основным отличием этой книги от многих других. Это, без сомнения, привлечет к ней внимание многих читателей и в том числе, как хотелось бы надеяться, также и тех, для кого современная квантовая электродинамика до сих пор казалась недоступной.

Хотя в лекциях Р. Фейнмана не затрагиваются многие проблемы, волнующие физиков-теоретиков, строящих теорию мезонных и нуклонных полей, однако и для них эта книга также может представлять интерес. В пользу этого говорит своеобразная постановка задач, что можно видеть, например, при обсуждении в книге проблемы связи спина со статистикой. Кроме того, нужно подчеркнуть методический интерес предлагаемого Р. Фейнманом способа изложения квантовой электродинамики.

Р. Фейнман мало приводит ссылок на оригинальные работы. Это связано с тем, что перед нами записи лекций, отнюдь не претендующие на изложение всех аспектов рассматриваемых проблем. Мы не сочли возможным дополнять эти лекции списками литературы, поскольку это нарушило бы стиль изложения, во многом являющийся конспективным.

В. П. Силин

ПРЕДИСЛОВИЕ АВТОРА

Настоящая книга представляет собой третью часть трехсеместрового курса лекций по квантовой механике, прочитанных в Калифорнийском технологическом институте в 1953 г. Некоторые вопросы взаимодействия света с веществом уже обсуждались во втором семестре этого курса. Они также включены в настоящую книгу в качестве первых шести лекций. Релятивистская теория начинается с седьмой лекции.

Цель этих лекций — изложить основные результаты и вычислительные методы квантовой электродинамики, насколько это возможно, наиболее простым и прямым способом. Многие из аспирантов, подготавливающиеся к получению ученой степени в области экспериментальной физики, не слушают специального, расширенного курса лекций по теоретической физике. Для них, в основном, и предназначается эта книга. Можно надеяться, что здесь они познакомятся с методами вычисления сечений различных фотонных процессов, которые играют важную роль в анализе экспериментов при высоких энергиях, проводимых, в частности, на синхротроне Калифорнийского технологического института. По этой причине в лекциях мало внимания уделяется многим вопросам квантовой электродинамики, которые могли бы оказаться полезными для физиков-теоретиков, бьющихся над решением более сложных проблем взаимодействия π -мезонов и нуклонов. Такие вопросы, как соотношения между различными формулировками квантовой электродинамики, включая операторные представления полей, подробное описание свойств

S-матрицы и др., в этих лекциях не затрагиваются. Эти вопросы можно найти в более полных курсах квантовой теории поля. Тем не менее этот курс сам по себе является достаточно полным в том смысле, в каком можно считать полным курс механики, в котором излагаются законы Ньютона, хотя опущены такие вопросы, как принцип наименьшего действия или уравнения Гамильтона.

Попытка изложить элементарную квантовую механику и квантовую электродинамику в течение только одного года являлась своего рода экспериментом. Он основывался на той мысли, что по мере изучения новых разделов физики студентам все чаще приходится возвращаться назад к вопросам, изложенным в более ранних курсах программы. В первых двух семестрах излагалась обычная квантовая механика, причем в качестве основного источника использовалась книга Шиффа¹ (гл. X, XII—XIV, относящиеся к квантовой электродинамике опускались). Однако для того, чтобы облегчить переход к последней части курса, в данной книге детально излагаются теория функций распространения и теория рассеяния на потенциале, в соответствии с уравнениями (15.3) и (15.5). Необычным моментом является также запись нерелятивистского уравнения Паули в том виде, в каком оно записано на стр. 13.

Наш эксперимент нужно считать неудачным. Весь материал оказался слишком большим для одного года, и в настоящее время большая часть материала этих лекций читается после полного годового курса квантовой механики.

Лекции первоначально были записаны А. Гибсом. Затем они были исправлены и отредактированы Г. Юра и Е. Хагинсом.

Р. Фейнман

Пасадена, Калифорния;
ноябрь 1961 г.

¹) L.-Schiff, *Quantum Mechanics*, London — Toronto — London, 1955. (Имеется перевод: Л. Шифф, *Квантовая механика*, ИЛ, 1957.) — *Прим. ред.*

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ СВЕТА С ВЕЩЕСТВОМ — КВАНТОВАЯ ЭЛЕКТРОДИНАМИКА

Лекция первая

Под квантовой электродинамикой принято понимать теорию взаимодействия света с веществом. Из-за большого числа возможных эквивалентных методов формулировки квантовой электродинамики предмет этот на первый взгляд выглядит сложнее, чем он в действительности оказывается. Одним из наиболее простых методов формулировки квантовой электродинамики является метод Ферми. Мы будем исходить из других предпосылок, непосредственно постулируя законы излучения и поглощения фотонов. Такая формулировка наиболее удобна для приложений.

ОБСУЖДЕНИЕ МЕТОДА ФЕРМИ¹⁾

Предположим, что все атомы вселенной помещены в некотором кубе. Классически такой куб можно рассматривать как обладающий собственными колебаниями, описываемыми с помощью распределения гармонических осцилляторов, взаимодействующих с веществом.

Переход к квантовой электродинамике заключается в простом предположении, что эти осцилляторы являются не классическими, а квантовыми. Тогда энергия таких осцилляторов составит $(n + 1/2) \hbar \omega$, где $n = 0, 1, \dots$; при этом энергия основного состояния равна $1/2 \hbar \omega$. Куб считается заполненным фотонами с распределе-

¹⁾ См. E. Fermi, Rev. Mod. Phys., 4, 87 (1932).

нием энергии $h\nu$. Взаимодействие фотонов с веществом приводит к изменению числа фотонов n на ± 1 (излучение или поглощение).

Поле в кубе можно представить в виде плоских стоячих волн, сферических волн или плоских бегущих волн $e^{ik \cdot x}$. Можно сказать, что полное поле в кубе состоит из кулоновского поля, ответственного за *мгновенное* взаимодействие зарядов по закону e^2/r_{ij} , и поля, связанного с *поперечными волнами*. Кулоновское взаимодействие можно включить непосредственно в уравнение Шредингера. Формализм теории основан на уравнениях Максвелла, записанных в гамильтоновой форме, операторах поля и т. д.

Метод Ферми приводит к расходящемуся выражению для собственной энергии e^2/r_{ii} . Соответствующим выбором системы координат эту расходимость можно устранить, но тогда возникает расходимость от поперечных волн (интерпретация которой является менее простой). Эта трудность теории составляет одну из центральных проблем современной квантовой электродинамики.

Лекция вторая

ПРАВИЛА КВАНТОВОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ

Не вдаваясь пока в обоснование «правил квантовой электродинамики», сформулируем их следующим образом:

1. Амплитуда вероятности того, что атомная система при переходе из одного состояния в другое *поглотит* фотон, будет *в точности* равна амплитуде вероятности такого же перехода, совершаемого под действием потенциала классического электромагнитного поля фотона, при выполнении условий:

- классическое поле волны нормировано таким образом, что плотность энергии равна произведению $h\nu$ на вероятность обнаружения фотона в единице объема;
- в разложении действительного классического поля волны на комплексные составляющие, пропорциональные $e^{i\omega t}$ и $e^{-i\omega t}$, удерживается лишь член, пропорциональный $e^{-i\omega t}$;

в) потенциал, входящий в оператор возмущения, действует лишь *один* раз, т. е. учитываются лишь члены первого порядка по напряженности электромагнитного поля.

Замена слова «поглощение» на «излучение» в правиле 1 соответствует лишь тому, что в разложении поля волны вместо члена $e^{-i\omega t}$ мы должны удержать член $e^{i\omega t}$.

2. Число состояний с заданной поляризацией в единице объема равно

$$\frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3}.$$

Заметим, что это выражение в точности совпадает с числом нормальных колебаний в единице объема (в 1 см^3) в классической теории.

3. Фотоны подчиняются статистике Бозе—Эйнштейна. Это означает, что состояния тождественных фотонов должны быть симметричны (по отношению к перестановке фотонов). Наконец, статистический вес n тождественных фотонов равен 1, а не $n!$, как это имеет место в классической теории.

Таким образом, при надлежащей нормировке фотон можно сопоставить с решением классических уравнений Максвелла.

Из множества возможных форм наиболее удобной формой является представление электромагнитного поля в виде совокупности плоских волн. Плоскую волну всегда можно представить с помощью лишь одного векторного потенциала (скалярный потенциал соответствующим выбором калибровки можно приравнять нулю). Векторный потенциал действительного классического волнового поля запишем в виде

$$\mathbf{A} = a\mathbf{e} \cos(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}).$$

Потенциал \mathbf{A} следует нормировать таким образом, чтобы вероятность обнаружения фотона в единице объема равнялась единице. При этом средняя плотность энергии будет $\hbar\omega$.

Учитывая соотношение

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = \frac{\omega a}{c} \mathbf{e} \sin(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}),$$

а также замечая, что в плоской волне

$$|\mathbf{B}| = |\mathbf{E}|,$$

находим среднюю плотность энергии поля

$$\frac{1}{8\pi} (\overline{|\mathbf{E}|^2} + \overline{|\mathbf{B}|^2}) = \frac{1}{4\pi} \frac{\omega^2 a^2}{c^2} \overline{\sin^2(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})} = \frac{1}{8\pi} \frac{\omega^2 a^2}{c^2}.$$

Приравнивая это выражение к $\hbar\omega$, определяем постоянную нормировки

$$a = \sqrt{\frac{8\pi\hbar c^2}{\omega}}.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \sqrt{\frac{8\pi\hbar c^2}{\omega}} \mathbf{e} \cos(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) = \\ &= \sqrt{\frac{4\pi\hbar c^2}{2\omega}} \mathbf{e} \{e^{-i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})} + e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})}\}. \end{aligned}$$

В результате получаем амплитуду вероятности поглощения фотона атомной системой

$$\sqrt{\frac{4\pi\hbar c^2}{2\omega}} e^{-i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})}.$$

В случае *излучения* фотона в этом выражении следует изменить знак показателя экспоненты.

Пример. Предположим, что атом, находящийся в некотором начальном возбужденном состоянии Ψ_i с энергией E_i , совершает переход в конечное состояние Ψ_f с энергией E_f . Вероятность перехода в единицу времени при этом определяется векторным потенциалом $a\mathbf{e}e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})}$, соответствующим излучению фотона. Следуя правилам квантовой механики («золотое» правило Ферми), имеем

$$\frac{\text{Вероятность перехода}}{\text{сек}} = \frac{2\pi}{\hbar} |\langle f | \text{Потенциал} | i \rangle|^2 \cdot (\text{Плотность состояний}),$$

$$\text{Плотность состояний} = \frac{k^2 dk d\Omega}{(2\pi)^3 d(\hbar\omega)} = \frac{\omega^2 d\Omega}{(2\pi c)^3 \hbar}.$$

Матричный элемент $U_{fi} = \langle f | \text{Потенциал} | i \rangle$ можно вычислить по теории возмущений. Более детально

этот вопрос обсуждается в следующей лекции. Здесь мы заметим лишь, что к одному и тому же физическому результату могут приводить различные потенциалы. (Это оправдывает выбор калибровки для фотонов в виде $\varphi = 0$.)

Лекция третья

Представление фотона с помощью потенциалов

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = a e e^{-i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})},$$

$$\varphi = 0,$$

по существу, соответствует выбору определенной калибровки. Свобода такого выбора является следствием инвариантности уравнения Паули по отношению к квантовомеханическому калибровочному преобразованию.

Квантовомеханическое преобразование является простым обобщением классического, которое гласит, что если

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t},$$

и

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A},$$

то при замене

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla\chi, \quad \varphi' = \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \chi}{\partial t},$$

где χ — скалярная функция, поля \mathbf{E} и \mathbf{B} остаются инвариантными.

В квантовой механике вводится дополнительное преобразование волновой функции

$$\Psi' = e^{-i\chi} \Psi, \quad \chi_1 = \frac{e}{c} \frac{1}{\hbar} \chi.$$

Инвариантность уравнения Паули доказывается следующим образом. Уравнение Паули имеет вид

$$-\frac{\hbar}{i} \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \frac{1}{2m} \left[\sigma \cdot \left(\mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right) \right] \left[\sigma \cdot \left(\mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right) \right] \Psi + e\varphi \Psi.$$

Далее, так как

$$\frac{\partial}{\partial x} \Psi' = \frac{\partial}{\partial x} e^{-ix_1} \Psi = e^{-ix_1} \frac{\partial}{\partial x} \Psi - i \frac{\partial \chi_1}{\partial x} \Psi e^{-ix_1},$$

$$p (e^{-ix_1} \Psi) = e^{-ix_1} (p - \hbar \nabla \chi_1) \Psi,$$

получаем

$$\left(p - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right) e^{-ix_1} \Psi = e^{-ix_1} \left(p - \hbar \nabla \chi_1 - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right) \Psi.$$

В результате дифференцирования по времени появляется дополнительный член $\hbar (\partial \chi_1 / \partial t) \Psi e^{-ix_1}$, который можно объединить с членом $e \varphi e^{-ix_1} \Psi$. Таким образом, преобразования

$$\Psi' = e^{-ix_1} \Psi = e^{-i \frac{e}{\hbar c} x} \Psi,$$

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla \chi, \quad \varphi' = \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \chi}{\partial t}$$

оставляют уравнение Паули инвариантным.

В уравнении Паули векторный потенциал фотона \mathbf{A} играет роль возмущения, вызывающего переходы из состояния i в состояние f . Матричный элемент перехода U_{fi} для любого зависящего от времени возмущения вида

$$\Delta H = e^{i\omega t} U(x, y, z)$$

определяется выражением

$$\begin{aligned} U_{fi} &= \int \Psi_f^* \Delta H \Psi_i dV = \\ &= \int \varphi_f^*(\mathbf{x}) e^{iE_f t / \hbar} e^{i\omega t} U(\mathbf{x}) e^{-iE_i t / \hbar} \varphi_i(\mathbf{x}) dV. \end{aligned}$$

Отсюда видно, что результат возмущения ΔH оказывается таким же, как и в случае не зависящего от времени возмущения $U(x, y, z)$, вызывающего переходы между начальным и конечным состояниями, энергии которых соответственно равны E_i — $\hbar\omega$ и E_f . Как хорошо известно¹⁾, наиболее существенный вклад дают состояния, в которых $E_f = E_i - \hbar\omega$.

¹⁾ См., например, Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшиц, Квантовая механика, ч. I, М.—Л., 1948.

Используя полученные выше результаты для вероятности перехода в единицу времени, находим

$$P_{fi} d\Omega = \frac{2\pi}{\hbar} |U_{fi}|^2 \frac{\omega^2 d\Omega}{(2\pi)^3}.$$

Чтобы определить величину U_{fi} , запишем

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2m} \left(\mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)^2 - \frac{e\hbar}{2mc} (\boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla \times \mathbf{A}) + eV = \\ &= \frac{1}{2m} \mathbf{p} \cdot \mathbf{p} + eV - \frac{e}{2mc} (\mathbf{p} \cdot \mathbf{A} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{p}) - \\ &\quad - \frac{e\hbar}{2mc} (\boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla \times \mathbf{A}) + \frac{e^2}{2mc^2} \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}. \end{aligned}$$

Утверждение сформулированного в предыдущей лекции правила о том, что потенциал действует лишь один раз, эквивалентно учету членов первого порядка по полю. В таком приближении член $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}$ должен быть опущен. Используя выражение $\mathbf{A} = a e e^{-i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})}$ и операторные соотношения

$$-i\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{k} \times e e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} e^{-i\omega t}, \quad (3.1)$$

$$\mathbf{p} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} = e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} (\mathbf{p} + \hbar \mathbf{k}), \quad (3.2)$$

или

$$\mathbf{p} \cdot e e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} = e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} (\mathbf{p} \cdot \mathbf{e} + \hbar \mathbf{k} \cdot \mathbf{e}),$$

где $\mathbf{k} \cdot \mathbf{e} = 0$ (это следует из уравнений Максвелла при выбранной калибровке поля), можно написать

$$\begin{aligned} U_{fi} &= a \int \varphi_j^* \left[-\frac{e}{2mc} (\mathbf{p} \cdot e e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} + e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \mathbf{e} \cdot \mathbf{p}) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{i e \hbar}{2mc} \boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{k} \times \mathbf{e}) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \right] \varphi_i dV. \end{aligned}$$

Эта формула является точной. Ее можно упростить, используя так называемое «дипольное» приближение. Для получения такого приближения рассмотрим член $(e/2mc) (\mathbf{p} \cdot e e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}})$, который по порядку величины равен скорости электрона в атоме или, точнее, току. Разложим экспоненту в ряд

$$e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} = 1 + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} + \frac{1}{2} (i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x})^2 + \dots$$

Величина $k \cdot x$ порядка a_0/λ , где a_0 — линейный размер атома, а λ — длина волны фотона. При $a_0/\lambda \ll 1$ всеми членами выше первого порядка по a_0/λ в этом разложении можно пренебречь. В дипольном приближении пренебрегают также последним слагаемым в выражении для U_{fi} . Такое пренебрежение обосновано уже благодаря следующей оценке порядка величины этого члена: $(\hbar k/mc) = (\hbar kc/mc^2) \approx (mv^2/2mc^2)$. Несмотря на то что этот член действительно пренебрежимо мал, такая оценка является завышенной. Более строгое соотношение имеет вид

$$\frac{i\hbar}{2mc} \sigma \cdot (k \times e) e^{ik \cdot x} \approx \\ \approx \frac{v}{c} [\text{Матричный элемент оператора } \sigma \cdot (k \times p)],$$

где матричный элемент равен

$$\int \varphi_f^* \sigma \cdot (k \times p) \varphi_i dV.$$

С хорошей степенью точности можем записать

$$\varphi_f^* = \varphi_f^*(x) U_f^*(\text{спин}),$$

а

$$\varphi_i = \varphi_i(x) U_i(\text{спин}).$$

Тогда в рассматриваемом приближении указанный матричный элемент будет равен нулю, так как

$$\int \varphi_f^*(x) \varphi_i(x) U_f^*(\sigma \cdot k \times p) U_i dV = 0$$

вследствие ортогональности состояний.

Ниже мы будем пользоваться дипольным приближением. При этом

$$U_{fi} = -a \frac{e}{c} \frac{p_{fi} \cdot e}{m},$$

где

$$p_{fi} \cdot e = \int \varphi_f^* (p \cdot e) \varphi_i dV = e \cdot \int \varphi_f^* p \varphi_i dV.$$

Таким образом, имеем

$$P_{fi} d\Omega = \frac{2\pi}{\hbar} \left[\frac{e}{mc} a \right]^2 (p_{fi} \cdot e)^2 \frac{\omega^2}{(2\pi)^2} d\Omega.$$

Используя операторное соотношение $p_{fi}/m = \hbar\omega_{fi}x_{fi}$, находим¹⁾

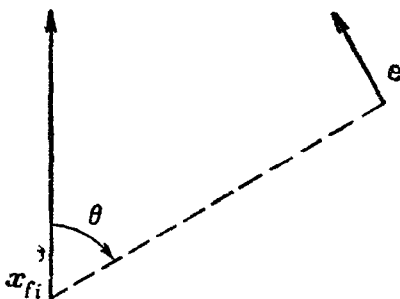
$$P_{fi}d\Omega = a^2 \frac{e^2\omega^4}{(2\pi)^2} (\mathbf{e} \cdot \mathbf{x}_{fi})^2 d\Omega,$$

где $x_{fi} = \int \varphi_f^* x \varphi_i dV$. Полная вероятность получается путем интегрирования P_{fi} по телесному углу $d\Omega$. В результате имеем

$$\begin{aligned} \frac{\text{Полная вероятность}}{\text{сек}} &= \int a^2 \frac{e^2\omega^4}{(2\pi)^2} (\mathbf{e} \cdot \mathbf{x}_{fi})^2 d\Omega = \\ &= a^2 \frac{e^2\omega^4}{2\pi} \int_0^\pi |\mathbf{x}_{fi}|^2 \sin^3 \theta d\theta = a^2 \frac{4e^2\omega^4}{6\pi} |\mathbf{x}_{fi}|^2. \end{aligned}$$

Величина $(\mathbf{e} \cdot \mathbf{x}_{fi})$ здесь представлена в виде (фиг. 1)

$$(\mathbf{x}_{fi} \cdot \mathbf{e}) = |\mathbf{x}_{fi}| \sin \theta.$$



Фиг. 1.

Подставляя значение для a^2 , получаем

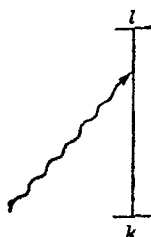
$$\frac{\text{Полная вероятность}}{\text{сек}} = \frac{4}{3} \frac{e^2}{\hbar c} \frac{\omega^3}{c^2} |\mathbf{x}_{fi}|^2.$$

Лекция четвертая

Поглощение света. Амплитуда вероятности перехода за время T из состояния k в состояние l (фиг. 2) согласно теории возмущений, равна

¹⁾ Здесь $\hbar\omega_{fi} \equiv E_f - E_i$. Кроме того, автор использовал закон сохранения энергии $\hbar\omega = E_i - E_f$. Ср. с четвертой лекцией. — Прим. ред.

$$a_{lk} = -\frac{i}{\hbar} \int_0^T e^{iE_l t/\hbar} U_{lk}(t) e^{-iE_k t/\hbar} dt,$$



Ф и г. 2.

где временная зависимость функции $U_{lk}(t)$ определяется выражением

$$U_{lk}(t) = u_{lk} e^{-i\omega t}.$$

(В соответствии с правилами квантовой электродинамики, изложенными во второй лекции, знак показателя экспоненты отрицательный, и учитываются лишь линейные члены по потенциалу.) Используя эту временную зависимость и выполняя интегрирование, получаем

$$a_{lk} = -\frac{e^{\frac{i}{\hbar}(E_l - E_k - \hbar\omega)T} - 1}{E_l - E_k - \hbar\omega} u_{lk}.$$

Вероятность перехода при этом дается выражением

$$|a_{lk}|^2 = \frac{4 \sin^2(\Delta T/2\hbar)}{\Delta^2} |u_{lk}|^2,$$

где $\Delta = E_l - E_k - \hbar\omega$. Это выражение представляет собой вероятность поглощения фотона с частотой ω , распространяющегося в направлении (θ, φ) . Функциональная зависимость от направления распространения фотона содержится в матричном элементе u_{lk} . В дипольном приближении, например, такая зависимость определяется формулой (4.3).

Если падающее излучение содержит целую область частот и направлений распространения, причем

$$P(\omega, \theta, \varphi) d\omega d\Omega = \left. \begin{array}{l} \text{Вероятность того, что частота фотона,} \\ \text{распространяющегося в телесном угле} \\ d\Omega \text{ вокруг направления } (\theta, \varphi), \text{ лежит} \\ \text{в интервале } \omega, \omega + d\omega \end{array} \right\}$$

то для вычисления полной вероятности поглощения фотона в этом телесном угле необходимо проинтегрировать по всем частотам. В результате для полной вероятности поглощения фотона получим выражение

$$\int_0^{\infty} \frac{4 \sin^2(\Delta T/2\hbar)}{\Delta^2} |u_{lk}|^2 P(\omega, \theta, \varphi) d\omega d\Omega.$$

При больших T величина $(\Delta)^{-2} \sin^2(\Delta T/2\hbar)$ отлична от нуля лишь при значениях $\hbar\omega$, близких к разности $E_l - E_k$. Именно эта область частот дает основной вклад в интеграл. Учитывая это, функции $P(\omega, \theta, \varphi)$ и $|u_{lk}|^2$ можно вынести из-под знака интегрирования. В результате получим

$$\text{Вероятность перехода} = \frac{2\pi}{\hbar} |u_{lk}|^2 P(\omega_{lk}, \theta, \varphi) d\Omega, \quad (4.1)$$

где

$$\hbar\omega_{lk} = E_l - E_k.$$

Выражение (4.1) можно также записать через интенсивность падающего излучения (поток энергии через единицу поверхности в единицу времени), если вспомнить, что

$$\text{Интенсивность} = i(\omega, \theta, \varphi) d\omega d\Omega = \hbar\omega c P(\omega, \theta, \varphi) d\omega d\Omega.$$

При этом имеем

$$\text{Вероятность перехода} = \frac{2\pi}{\hbar} |u_{lk}|^2 \frac{1}{\hbar\omega c} i(\omega_{lk}, \theta, \varphi) d\Omega. \quad (4.2)$$

Используя дипольное приближение, в котором

$$u_{lk} = \sqrt{\frac{2\pi}{\omega_{lk}}} \frac{e}{mc} (\mathbf{p}_{lk} \cdot \mathbf{e}) = \sqrt{\frac{2\pi}{\omega_{lk}}} \frac{e}{c} \hbar\omega_{lk} (\mathbf{x}_{lk} \cdot \mathbf{e}),$$

для полной вероятности поглощения фотона (в единицу времени) получаем выражение

$$\frac{4\pi^2 e^2}{\hbar c} (\mathbf{x}_{lk} \cdot \mathbf{e})^2 \cdot i(\omega_{lk}, \theta, \varphi) d\Omega. \quad (4.3)$$

Между вероятностью спонтанного излучения фотона при переходе атомной системы из состояния l в состояние k , равной

$$\frac{\text{Вероятность спонтанного излучения}}{\text{сек}} = \\ = \frac{2\pi}{\hbar} (2\pi c)^{-3} |u_{kl}|^2 \omega_{lk}^2 d\Omega,$$

и вероятностью поглощения фотона при обратном переходе системы из состояния k в состояние l (для переходов между такими состояниями $|u_{lk}| = |u_{kl}|$), определяемой формулой (4.1), существует соотношение. Проще всего это соотношение установить, используя функцию $n(\omega, \theta, \varphi)$, характеризующую вероятность заполнения заданного состояния фотона. Так как число состояний фотонов в телесном угле $d\Omega$ и в интервале частот $d\omega$ равно $\frac{\omega^3 d\omega d\Omega}{(2\pi c)^3}$, то для вероятности обнаружения фотона в этой области имеем

$$P(\omega, \theta, \varphi) d\omega d\Omega = n(\omega, \theta, \varphi) \frac{\omega^3}{(2\pi c)^3} d\omega d\Omega.$$

Выражая вероятность поглощения фотона через $n(\omega, \theta, \varphi)$, получаем

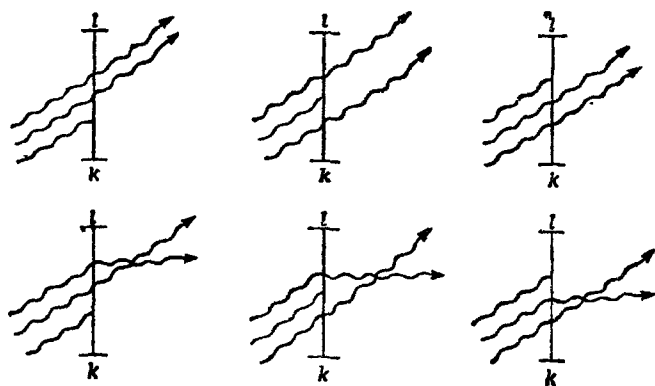
$$\frac{\text{Вероятность перехода}}{\text{сек}} = \\ = \frac{2\pi}{\hbar} |u_{lk}|^2 n(\omega, \theta, \varphi) \frac{\omega_{kl}^2}{(2\pi c)^3} d\Omega. \quad (4.4)$$

Это соотношение можно интерпретировать следующим образом. Так как величина $n(\omega, \theta, \varphi)$ представляет собой вероятность того, что состояние фотона занято, то все остальные члены в правой части соотношения (4.4) должны давать вероятность поглощения фотона из этого состояния в единицу времени. Сравнение соотношения (4.4) с вероятностью спонтанного излучения фотона показывает, что

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Вероятность поглощения фотона из некоторого состояния в} \\ \text{единицу времени (на один фотон в этом состоянии)} \end{array} \right\} = \\ = \left\{ \begin{array}{l} \text{Вероятности спонтанного излучения фотона в это же} \\ \text{состояние} \end{array} \right\}.$$

Из дальнейшего будет видно, что соотношение (4.4) остается справедливым и в том случае, когда в одном состоянии возможно существование нескольких фотонов при условии, если $n(\omega, \theta, \varphi)$ рассматривать как среднее число фотонов в данном состоянии.

Если вначале в одном и том же состоянии находятся два фотона, то из-за неразличимости фотонов статистический вес начального состояния будет равен $1/2!$. Однако амплитуда вероятности поглощения фотона при этом будет в два раза больше, чем в случае одного фотона в начальном состоянии. Умножая статистический вес на квадрат амплитуды вероятности поглощения фотона, находим, что вероятность перехода в единицу времени в этом случае также в два раза больше, чем вероятность перехода в случае одного фотона в начальном состоянии. Если в одном и том же начальном состоянии находятся три фотона, а поглощается лишь один, то имеется шесть различных возможностей протекания процесса, представленные на фиг. 3.

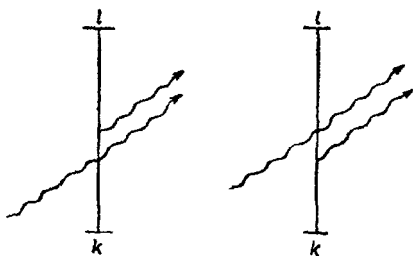


Фиг. 3.

Каждый из трех падающих фотонов может быть поглощен, и, кроме того, оставшиеся непоглощенные фотоны могут быть взаимно заменены. Статистический вес начального состояния при этом равен $1/3!$, а конечного состояния — $1/2!$. Амплитуда вероятности процесса равна 6 (в единицах амплитуды вероятности процесса

в случае одного фотона). Таким образом, полная вероятность перехода в три раза $\left(\frac{1}{3!} \cdot \frac{1}{2!} \cdot 6^2 = 3\right)$ больше, чем вероятность перехода в случае одного фотона в начальном состоянии. В общем случае, при наличии n фотонов в начальном состоянии вероятность перехода в n раз больше, чем вероятность перехода в случае одного фотона в начальном состоянии. Это и показывает, что соотношение (4.4) остается справедливым, если под $n(\omega, \theta, \varphi)$ понимать среднее число фотонов в данном состоянии.

Падающий фотон может индуцировать переход, сопровождающийся излучением фотона. Такие процессы (включающие один падающий фотон) представлены с помощью диаграмм на фиг. 4.



Фиг. 4.

На атом падает один фотон, а излучаются два фотона, неразличимых между собой. Статистический вес конечного состояния равен $1/2!$, а амплитуда вероятности процесса равна 2 (в единицах вероятности спонтанного излучения), так что вероятность рассматриваемого индуцированного излучения в два раза больше спонтанного. В случае, когда падают n фотонов, статистический вес начального состояния равен $1/n!$, конечного — $1/(n+1)!$, а амплитуда вероятности индуцированного излучения в $(n+1)!$ раз превышает амплитуду вероятности спонтанного излучения. Поэтому вероятность индуцированного излучения (в единицу времени) в $n+1$ раз больше спонтанного. Можно сказать, что множитель n происходит за счет индуцированных переходов, а 1 соответствует спонтанному переходу.

Так как потенциал, использованный нами для вычисления вероятности перехода, был нормирован на один фотон в единице объема, а сама вероятность перехода пропорциональна квадрату потенциала, ясно, что, когда в одном состоянии находятся n фотонов, правильное выражение для вероятности поглощения фотона можно получить путем нормировки потенциала на n фотонов в единице объема (т. е. увеличив амплитуду в \sqrt{n} раз). Это кладется в основу так называемой квазиклассической теории излучения. В этой теории поглощение фотона рассчитывается по теории возмущения с использованием потенциала, нормированного на фактическую энергию поля, т. е. при наличии n фотонов на энергию $n\hbar\omega$. Однако выражение для вероятности индуцированного излучения, которое, как было показано, пропорционально $n+1$, в квазиклассической теории получается неправильным. Ошибка возникает от пренебрежения спонтанной частью вероятности перехода. В квазиклассической теории излучения учет спонтанной части вероятности излучения достигается с помощью общих соображений, основанных на том, что такой учет приводит к формуле распределения Планка, подтвержденной экспериментом. Впервые соотношения между вероятностями излучения и поглощения фотонов квазиклассическим способом были получены Эйнштейном.

Лекция пятая

Правила отбора в дипольном приближении. В дипольном приближении интересующий нас матричный элемент имеет вид:

$$x_{if} = \int \Psi_f^* x \Psi_i dV.$$

Вектор x_{if} имеет компоненты x_{if} , y_{if} и z_{if} , причем

$$\text{Вероятность перехода} \approx |x_{if}|^2 + |y_{if}|^2 + |z_{if}|^2.$$

Правила отбора определяются условиями обращения в нуль этого матричного элемента. Например, если начальным и конечным состоянием атома водорода являются S -состояния (сферически симметричные), то

$x_{if} = 0$ и переходы между этими состояниями «запрещены». Для переходов между P - и S -состояниями $x_{if} \neq 0$; такие переходы являются «разрешенными».

В общем случае для одноэлектронных переходов правило отбора гласит: $\Delta L = \pm 1$.

В этом легко убедиться, если заметить, что координаты x , y и z по существу представляют собой полином Лежандра P_1 . Если орбитальный момент электрона в начальном состоянии равен n , то волновая функция содержит полином P_n . Далее, из соотношения

$$P_1 P_n = \frac{1}{2n+1} [nP_{n-1} + (n+1)P_{n+1}]$$

следует, что интересующий нас матричный элемент отличен от нуля лишь в том случае, когда орбитальный момент электрона в конечном состоянии равен $n \pm 1$, а волновая функция, следовательно, содержит полином P_{n+1} или P_{n-1} .

Гамильтониан сложного атома (число электронов в котором больше единицы) имеет вид

$$H = \sum_{\alpha} \frac{1}{2m} \left(\mathbf{p}_{\alpha} - \frac{e}{c} \mathbf{A}(\mathbf{x}_{\alpha}) \right)^2 + \text{Кулоновские члены.}$$

Вероятность перехода в таком атоме пропорциональна

$$|\mathbf{p}_{mn}|^2 = \left| \sum_{\alpha} (\mathbf{p}_{\alpha})_{mn} \right|^2, \text{ где суммирование распространяется}$$

по всем электронам в атоме. Можно показать, что величина $(\mathbf{p}_{\alpha})_{mn}$ с точностью до постоянного множителя равна $(\mathbf{x}_{\alpha})_{mn}$, и, следовательно, вероятность перехода пропорциональна

$$|\mathbf{x}_{mn}|^2 = \left| \sum_{\alpha} (\mathbf{x}_{\alpha})_{mn} \right|^2.$$

В частности, для атома с двумя электронами матричный элемент в дипольном приближении равен

$$\int \Psi_f^*(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) (\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) \Psi_i(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) d^3\mathbf{x}_1 d^3\mathbf{x}_2.$$

Величина $\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2$ при преобразованиях системы координат ведет себя так же, как и волновая функция некоторого «объекта» с моментом, равным 1. Если в на-

чальном состоянии этот «объект» и атом не взаимодействуют друг с другом, то произведение $(x_1 + x_2) \Psi_i(x_1, x_2)$ формально можно рассматривать как волновую функцию всей системы в целом («объект» \leftarrow атом) со следующими возможными значениями полного момента: $J_i + 1$, J_i и $J_i - 1$. Тогда указанный матричный элемент будет отличен от нуля лишь в том случае, когда момент конечного состояния J_f принимает одно из трех значений $J_i \pm 1$ или J_i . Таким образом, общее правило отбора гласит: $\Delta J = \pm 1, 0$.

Четность. Четность есть свойство волновой функции, характеризующее ее поведение при зеркальном отражении всех координат. Так, если

$$\Psi(-x_1, -x_2, \dots) = +\Psi(x_1, x_2, \dots),$$

то волновая функция четна (четность равна $+1$); если же

$$\Psi(-x_1, -x_2, \dots) = -\Psi(x_1, x_2, \dots),$$

то волновая функция нечетна (четность равна -1).

Производя замену x на $-x'$ в матричном элементе дипольного приближения, получаем

$$x_{if} = \int \Psi_f^*(x) x \Psi_i(x) d^3x = \int \Psi_f^*(-x') (-x') \Psi_i(-x') d^3x'.$$

Если четность волновой функции Ψ_f такая же, как у Ψ_i , то отсюда следует, что

$$x_{if} = -x_{if} = 0.$$

Таким образом, в разрешенных переходах четность должна меняться. В атоме с одним электроном четность определяется орбитальным моментом L , поэтому переход с $\Delta L = 0$ запрещен. В атоме со многими электронами четность уже не определяется орбитальным моментом L (она определяется алгебраической, а не векторной суммой орбитальных моментов отдельных электронов) и переходы с $\Delta L = 0$ могут происходить. Переходы $0 \rightarrow 0$, однако, всегда запрещены, так как момент фотона равен единице.

Четность волновой функции всегда является определенной (равна либо $+1$, либо -1). В этом можно

убедиться из инвариантности гамильтониана по отношению к преобразованию инверсии (в отсутствие внешнего магнитного поля). Так, если $H\Psi(\mathbf{x}) = E\Psi(\mathbf{x})$, то справедливо также уравнение $H\Psi(-\mathbf{x}) = E\Psi(-\mathbf{x})$. Отсюда следует, что если состояние не вырождено, то $\Psi(-\mathbf{x}) = \Psi(\mathbf{x})$, или $\Psi(-\mathbf{x}) = -\Psi(\mathbf{x})$. Для вырожденного же состояния, вообще говоря, $\Psi(-\mathbf{x}) \neq \pm \Psi(\mathbf{x})$, но при этом полное решение можно выбрать в виде линейных комбинаций

$$\Psi(\mathbf{x}) + \Psi(-\mathbf{x}), \text{ четность } +1,$$

и

$$\Psi(\mathbf{x}) - \Psi(-\mathbf{x}), \text{ четность } -1.$$

Запрещенные линии. В достаточно разреженных газах могут проявиться запрещенные спектральные линии. Так что запрет не является абсолютным для всех случаев. Он просто означает, что время жизни запрещенного состояния значительно больше, чем разрешенного, но отнюдь не бесконечно. Таким образом, если столкновения частиц в газе достаточно редки (столкновения второго рода обычно вызывают безызлучательные переходы в запрещенных состояниях), то за время свободного пробега запрещенные переходы могут проявиться.

В дипольном приближении в матричном элементе

$$\int \Psi_f^*(\mathbf{e} \cdot \mathbf{p}) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \Psi_i d^3x,$$

который является почти точным, экспонента $e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}$ заменяется на 1. Если при этом матричный элемент обращается в нуль, то переход, как описывалось выше, является запрещенным. В следующем, квадрупольном, приближении $e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}$ следует заменить на $1 - i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}$. В результате для матричного элемента получаем выражение

$$-i \int \Psi_f^*(\mathbf{e} \cdot \mathbf{p})(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) \Psi_i d^3x.$$

Для света, распространяющегося вдоль оси z и поляризованного по оси x , отсюда получаем

$$-ik \int \Psi_f^*(p_x z) \Psi_i d^3x = -ik_f(p_x z)_i.$$

Вероятность перехода при этом пропорциональна величине

$$k^2 |f(\rho_x z)_i|^2,$$

в то время как в дипольном приближении она была пропорциональна величине

$$|f(\rho_x)_i|^2.$$

Таким образом, в квадрупольном приближении вероятность перехода по крайней мере в $(ka)^2 \approx a^2/\lambda^2$ раз меньше, чем в дипольном приближении, где a — линейный размер атома, а λ — длина волны излучаемого света.

Задача. Показать, что

$$H(xz) - (xz)H = \frac{\hbar}{mi}(p_x z + x p_z),$$

и, следовательно,

$$\frac{\hbar}{mi}(p_x z + x p_z)_{mn} = (xz)_{mn}(E_m - E_n).$$

Заметим, что величину $p_x z$ можно записать в виде суммы

$$p_x z = \frac{1}{2}(p_x z + x p_z) + \frac{1}{2}(p_x z - x p_z).$$

Первое слагаемое в этом выражении с точностью до постоянной эквивалентно величине xz (см. задачу), которая преобразуется подобно волновой функции с орбитальным моментом 2, т. е. четно. Второе же слагаемое совпадает с проекцией оператора орбитального момента L_y , которая преобразуется подобно волновой функции с орбитальным моментом 1, т. е. нечетно. Поэтому правила отбора, соответствующие первому слагаемому, имеют вид: $\Delta J = \pm 2, \pm 1, 0$, причем четность при переходе не меняется. Излучение этого типа называется электрическим квадрупольным излучением. Правила отбора, соответствующие второму слагаемому, гласят: $\Delta J = \pm 1, 0$, и четность при переходах сохраняется. Такое излучение называется маг-

нитным дипольным излучением. Заметим, что при $\Delta J = \pm 2$ эти два типа излучений нельзя различить, ни по изменению орбитального момента, ни по изменению четности. В случаях же $\Delta J = \pm 1, 0$ они различимы лишь по поляризации излучения. Оба типа излучений могут иметь место одновременно; при этом возникает интерференция.

В случае электрического квадрупольного излучения из правил отбора следует, что переходы $\frac{1}{2} \rightarrow \frac{1}{2}$ и $0 \rightarrow 1$ запрещены (хотя при этом может быть $\Delta J = \pm 1$), так как для этих переходов векторный орбитальный момент не может измениться на 2.

Переходя к более высоким приближениям, можно установить законы преобразования орбитального момента электрона или фотона и получить правила отбора для изменения четности и полного момента ΔJ для различных мультипольных переходов (см. табл. 1).

Общие правила отбора для ΔJ для различных мультипольных переходов можно явно выразить при помощи следующего соотношения:

$$|J_f - J_i| \leq l \leq J_f + J_i,$$

где 2^l — порядок мультипольности, или, другими словами, l — векторное изменение орбитального момента.

Оказывается, что в так называемых благоприятных по четности переходах, в которых произведение четностей начального и конечного состояний равно $(-1)^{J_f - J_i}$, а минимальный порядок мультипольности составляет $J_f - J_i$, вероятности переходов одной мультипольности, приведенные в третьем — шестом столбцах в табл. 1, приблизительно равны между собой¹⁾. В неблагоприятных же переходах, в которых указанное произведение четностей равно $(-1)^{J_f - J_i + 1}$, а минимальный порядок мультипольности есть $|J_f - J_i| + 1$, такое равенство может и не иметь места.

¹⁾ Для γ -излучения ядер это, однако, неверно. Причиной является преобладание магнитного излучения в каждом порядке мультипольности.

Таблица 1

Классификация переходов и правила отбора

	Мультипольность перехода	Электрический дипольный	Магнитный дипольный	Электрический квадрупольный	Магнитный квадрупольный	Электрический октупольный
Характеристики фотона	Орбитальный момент	1	1	2	2	3
	Четность	-1	+1	+1	-1	-1
Правила отбора для излучающей системы	Изменение четности	Да	Нет	Нет	Да	Да
	Изменение полного момента ΔJ	$\pm 1; 0$	$\pm 1; 0$	$\pm 2; \pm 1; 0$	$\pm 2; \pm 1; 0$	$\pm 3; \pm 2; \pm 1; 0$
	Запрещенные переходы	$0 \rightarrow 0$	$0 \rightarrow 0$	$0 \rightarrow 0$ $1 \rightarrow \frac{1}{2}$ $0 \rightarrow 1$	$0 \rightarrow 0$ $1 \rightarrow \frac{1}{2}$ $0 \rightarrow 1$	$0 \rightarrow 0$ $1 \rightarrow \frac{1}{2}$ и т.д.

Лекция шестая

Равновесное излучение. Если система находится в термодинамическом равновесии, то отношение числа атомов (на единицу объема) в состояниях l и k , энергии которых отличаются на величину $\hbar\omega$, согласно статистической механике, равно

$$\frac{N_l}{N_k} = e^{-\frac{E_l - E_k}{kT}} = e^{-\frac{\hbar\omega}{kT}}.$$

Так как система находится в равновесии, то число переходов из состояния k в состояние l в единицу времени с поглощением фотонов $\hbar\omega$ равно числу обратных переходов из l в k с излучением таких же фотонов. Вероятность поглощения фотона пропорциональна n_ω , а вероятность излучения $n_\omega + 1$, где n_ω — число фотонов с частотой ω в единице объема. Учитывая это, из условия равновесия имеем

$$N_k n_\omega = N_l (n_\omega + 1),$$

или

$$\frac{n_\omega + 1}{n_\omega} = \frac{N_k}{N_l} = e^{\frac{\hbar\omega}{kT}},$$

$$n_\omega = \frac{1}{e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1}.$$

Это и есть закон Планка для распределения излучения черного тела.

Рассеяние света. Здесь мы обсудим явление рассеяния света атомом, сопровождающееся изменением направления распространения (и, возможно, энергии) (фиг. 5). Это явление можно рассматривать как поглощение падающего фотона атомом и последующее излучение нового фотона. Принимающие участие в этом процессе фотоны можно представить с помощью векторных потенциалов

$$A_1 = \sqrt{\frac{2\pi}{\omega_1}} e_1 e^{-i(\omega_1 t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})},$$

$$A_2 = \sqrt{\frac{2\pi}{\omega_2}} e_2 e^{i(\omega_2 t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})}.$$

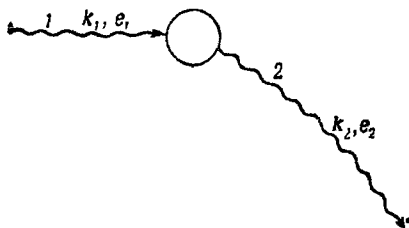
Нам нужно определить вероятность перехода атома из начального состояния k в конечное состояние l за время T под действием возмущения $A = A_1 + A_2$. Эта вероятность вычисляется так же, как и любая другая вероятность перехода, с помощью величины A_{lk} , где

$$A_{lk} = \delta_{kl} \exp \left[-i \left(\frac{E_l}{\hbar} \right) T \right] - \\ - \frac{i}{\hbar} \int_0^T \exp \left[-i \left(\frac{E_l}{\hbar} \right) (T - t_3) \right] U_{lk}(t_3) \exp \left[-i \left(\frac{E_k}{\hbar} \right) t_3 \right] dt_3 + \\ + \sum_n \int_0^T \int_0^{t_4} \exp \left[-i \left(\frac{E_l}{\hbar} \right) (T - t_4) \right] U_{ln}(t_4) \times \\ \times \exp \left[-i \left(\frac{E_n}{\hbar} \right) (t_4 - t_3) \right] U_{nk}(t_3) \exp \left[-i \left(\frac{E_k}{\hbar} \right) t_3 \right] dt_3 dt_4.$$

Используя дипольное приближение и пренебрегая спинами частиц, получаем

$$U = \Delta H = \frac{e}{2mc} (\mathbf{p} \cdot \mathbf{A}) + \frac{e^2}{mc^2} \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}.$$

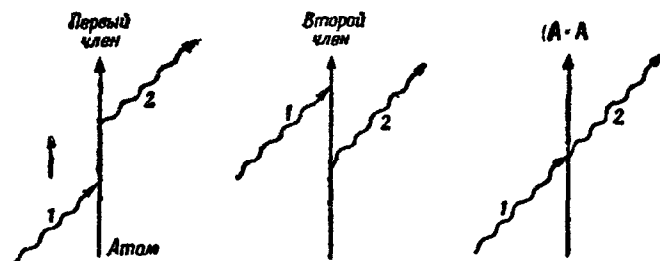
В каждом из интегралов, входящих в выражение для A_{lk} , должны фигурировать векторные потенциалы A_1 и A_2 , причем обязательно каждый из них и только лишь один раз. Отсюда следует, что в первом



Фиг. 5.

интеграле, линейном по U_{lk} , слагаемое $\mathbf{p} \cdot \mathbf{A}$ возмущения U отсутствует. Из произведения $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A} = (\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2) \cdot (\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2)$ вклад дает лишь перекрестный член $2\mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{A}_2$. Во второй интеграл член $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}$

вовсе не дает вклада. Второй интеграл является суммой двух членов. В первом из них возмущение U_{ln} содержит $\mathbf{p} \cdot \mathbf{A}_2$, а U_{nk} содержит $\mathbf{p} \cdot \mathbf{A}_1$. Во втором члене, наоборот, U_{ln} содержит $\mathbf{p} \cdot \mathbf{A}_1$, а U_{nk} содержит $\mathbf{p} \cdot \mathbf{A}_2$. Временная последовательность в этих двух членах схематически представлена на фиг. 6.



Фиг. 6.

Вычислим теперь более детально вклад в интеграл, возникающий от первого члена. Имеем

$$(\mathbf{p} \cdot \mathbf{A}_1)_{nk} = \sqrt{\frac{2\pi}{\omega_1}} (\mathbf{p} \cdot \mathbf{e}_1)_{nk} e^{-i\omega_1 t},$$

$$(\mathbf{p} \cdot \mathbf{A}_2)_{ln} = \sqrt{\frac{2\pi}{\omega_2}} (\mathbf{p} \cdot \mathbf{e}_2)_{ln} e^{i\omega_2 t}.$$

Учитывая это, для искомого интеграла получаем

$$\sum_n \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_1 \omega_2}} (\mathbf{p} \cdot \mathbf{e}_2)_{ln} (\mathbf{p} \cdot \mathbf{e}_1)_{nk} \times$$

$$\times \int_0^T \int_0^{t_4} \exp \left[-i \left(\frac{E_l}{\hbar} \right) (T - t_4) + i\omega_2 t_4 \right] \times$$

$$\times \exp \left[-i \left(\frac{E_n}{\hbar} \right) (t_4 - t_3) - i\omega_1 t_3 \right] \exp \left[-i \left(\frac{E_k}{\hbar} \right) t_3 \right] dt_3 dt_4.$$

Этот интеграл аналогичен рассмотренному выше в связи с вычислением вероятности перехода (см. четвертую лекцию) и сводится к следующему выражению:

$$\sum_n \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_1 \omega_2}} (\mathbf{p} \cdot \mathbf{e}_1)_{ln} (\mathbf{p} \cdot \mathbf{e}_2)_{nk} e^{i\varphi} \sin \frac{T\Delta}{\hbar} \frac{1}{(E_k - E_n + \hbar\omega_1) \Delta},$$

где $\Delta = E_l + \hbar\omega_2 - E_k - \hbar\omega_1$, а фаза φ не зависит от n . Здесь мы пренебрегли членом со знаменателем $(E_n - \hbar\omega_1 - E_k)(E_l + \hbar\omega_2 - E_n)$, так как, согласно изложенному выше, существенны лишь переходы, в которых $E_l + \hbar\omega_2 \approx E_k + \hbar\omega_1$. Окончательный результат можем записать в виде

$$\frac{\text{Вероятность перехода}}{\text{сек}} = \frac{2\pi}{\hbar} |M|^2 \frac{\omega_2^2 d\Omega_2}{2\pi^2} = \sigma d\Omega_2, \quad (6.1)$$

где величина $|M|^2$ получается из $|A_{lk}|^2$ путем интегрирования по ω_2 . При этом для полного сечения рассеяния σ справедливо выражение

$$\begin{aligned} \sigma d\Omega_2 = & \frac{e^4}{m^2 c^4} \frac{\omega_2}{\omega_1} d\Omega_2 \left| \frac{1}{m} \sum_n \left\{ \frac{(\mathbf{p} \cdot \mathbf{e}_1)_{ln} (\mathbf{p} \cdot \mathbf{e}_1)_{nk}}{E_k + \hbar\omega_1 - E_n} + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{(\mathbf{p} \cdot \mathbf{e}_1)_{ln} (\mathbf{p} \cdot \mathbf{e}_2)_{nk}}{E_k - E_n - \hbar\omega_2} \right\} + (\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2) \delta_{lk} \right|^2. \end{aligned} \quad (6.2)$$

Первое слагаемое под знаком модуля в этом выражении обусловлено только что рассмотренным «первым членом», а второе — «вторым членом». Наконец, последнее слагаемое возникло из произведения А.А.

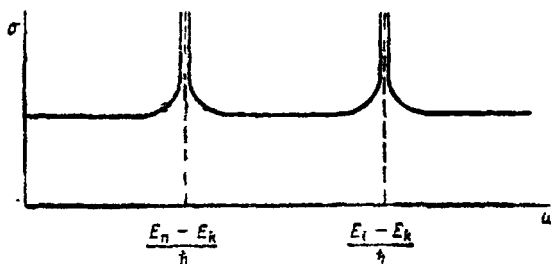
В случае $l \neq k$ рассеяние некогерентно. Такое рассеяние света носит название комбинационного рассеяния света. Если же $l = k$, то рассеяние света является когерентным.

Заметим далее, что в случае, когда все атомы находятся в основном состоянии и $l \neq k$, энергия атома при рассеянии света может лишь возрасть, а частота света ω уменьшаться. Это дает «стоксовские линии». Обратный эффект дает «антистоксовские линии».

Предположим, что $\omega_1 = \omega_2$ (когерентное рассеяние) и что величина $\hbar\omega_1$ близка к разности $E_k - E_n$, где E_n — некоторый возможный уровень энергии атома. При этом один из членов в сумме по n в формуле (6.2) становится неограниченно большим и преобладает над остальными. В таком случае говорят, что имеет место «резонансное рассеяние». На кривой зависимости σ от ω при таких значениях ω сечение рассеяния имеет острый максимум (фиг. 7).

Из формулы для рассеяния света можно получить показатель преломления для газообразной среды. Это достигается (так же, как и для других видов рассеяния) путем рассмотрения рассеяния света вперед.

Собственная энергия. Другим явлением, которое следует рассматривать в квантовой электродинамике, является возможность излучения и последующего поглощения одного и того же фотона атомом. Этот



Фиг. 7

эффект описывается диагональным матричным элементом A_{kk} . В результате такого излучения и поглощения возникает сдвиг уровня энергии, причем

$$\Delta E = \sum_n \left\{ \frac{(\mathbf{p} \cdot \mathbf{e})_{kn} (\mathbf{p} \cdot \mathbf{e})_{nk}}{E_k - E_n - \hbar \omega} \frac{d^3 \mathbf{k}}{(2\pi \hbar)^3} \frac{2\pi}{\omega} \right\},$$

где \mathbf{e} — вектор поляризации фотона. Этот интеграл расходится. Более точное релятивистское вычисление также приводит к расходящемуся интегралу. Это означает, что используемые нами методы описания электромагнитных эффектов не являются полностью удовлетворительными. Позднее мы обсудим необходимые изменения теории для устранения указанной трудности, связанной с расходимостью собственной энергии. Возникающий в результате конечный сдвиг уровня энергии ΔE оказывается весьма малым. Такой сдвиг был экспериментально обнаружен Лэмбом и Резерфордом.

КРАТКИЙ ОБЗОР ОСНОВНЫХ ПРИНЦИПОВ И РЕЗУЛЬТАТОВ СПЕЦИАЛЬНОЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

Лекция седьмая

Принцип относительности гласит, что во всех системах координат, движущихся друг относительно друга с постоянной скоростью v , все физические явления протекают одинаковым образом. Это означает, что никакими экспериментами, проводимыми внутри замкнутого пространственного объема, движущегося с постоянной скоростью v (например, относительно центра гравитации материи всей Вселенной), нельзя определить саму эту скорость. Этот принцип подтверждается экспериментом. Уравнения Ньютона удовлетворяют принципу относительности. Они не меняются при преобразованиях Галилея

$$x' = x - vt, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = t,$$

так как содержат лишь вторые производные по времени. Уравнения Максвелла, однако, не инвариантны относительно преобразований Галилея. Ранние исследователи, основываясь на этом, пытались определить абсолютную скорость Земли (опыт Майкельсона — Морли). Полный провал всех попыток обнаружить такой эффект привел к постулату Эйнштейна, утверждавшего, что уравнения Максвелла имеют один и тот же вид во всех системах координат и что скорость света, в частности, также не зависит от системы координат. Преобразования системы координат, оставляющие уравнения Максвелла инвариантными, называются преобразованиями Лоренца и имеют вид:

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}} = x \operatorname{ch} u - ct \operatorname{sh} u,$$

$$y' = y,$$

$$z' = z,$$

$$t' = \frac{t - (xv/c^2)}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}} = -\frac{x}{c} \operatorname{sh} u + t \operatorname{ch} u,$$

где $\operatorname{th} u = v/c$. Начиная с этого места, мы будем пользоваться системой единиц, в которой скорость света $c=1$. Приведенная выше форма записи показывает, что преобразования Лоренца аналогичны преобразованию вращения системы координат:

$$x' = x \cos \theta + y \sin \theta,$$

$$y' = -x \sin \theta + y \cos \theta.$$

Два последовательных преобразования v_1 и v_2 (или u_1 и u_2) складываются в том смысле, что одно преобразование v_3 (или u_3) дает ту же самую результирующую систему координат, если

$$v_3 = v_1 + v_2, \text{ или } \operatorname{th} u_3 = \operatorname{th}(u_1 + u_2).$$

Эйнштейн постулировал (специальная теория относительности), что уравнения Ньютона следует модифицировать таким образом, чтобы они также оставались инвариантными при преобразованиях Лоренца.

Интересным следствием преобразований Лоренца является замедление хода часов в движущейся системе координат. Это явление называется сокращением времени.

При преобразованиях от одной системы координат к другой удобно пользоваться тензорным анализом. С этой целью определим 4-вектор как набор четырех величин, преобразующихся так же, как и x , y , z и t . Для обозначений компонент 4-вектора будем пользоваться индексом μ . Например,

$$x_1 = x, \quad x_2 = y, \quad x_3 = z, \quad x_4 = t.$$

Следующие величины являются 4-векторами:

$$-\frac{\partial}{\partial x}, \quad -\frac{\partial}{\partial y}, \quad -\frac{\partial}{\partial z}, \quad +\frac{\partial}{\partial t} \quad (\nabla_\mu) \text{ — 4-мерный градиент;}$$

$$j_x, j_y, j_z, \rho \quad (j_\mu) \text{ — плотность тока (и заряда)}$$

A_x, A_y, A_z, φ (A_μ) — потенциал (векторный и скалярный);

p_x, p_y, p_z, E (p_μ) — 4-вектор энергии — импульса ¹⁾.

Инвариантом называется такая величина, которая не меняется при преобразованиях Лоренца. Если a_μ и b_μ — два 4-вектора, то их скалярное произведение

$$a \cdot b \equiv \sum_{\mu} a_{\mu} b_{\mu} \equiv a_4 b_4 - a_1 b_1 - a_2 b_2 - a_3 b_3$$

является инвариантом. Чтобы каждый раз не писать символ суммирования, будем пользоваться следующим условным обозначением: по дважды повторяющимся индексам будет подразумеваться суммирование в соответствии с формулой для скалярного произведения двух 4-векторов. Лоренцовскую инвариантность уравнения непрерывности можно легко показать, записав его в виде скалярного произведения двух 4-векторов Δ_μ и j_μ :

$$\begin{aligned} \nabla_{\mu} j_{\mu} &= \nabla_4 j_4 - \nabla_1 j_1 - \nabla_2 j_2 - \nabla_3 j_3 = \\ &= \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial j_x}{\partial x} + \frac{\partial j_y}{\partial y} + \frac{\partial j_z}{\partial z} = 0. \end{aligned}$$

Следствием инвариантности этого скалярного произведения является закон сохранения заряда во всех системах координат в случае, когда он сохраняется в какой-либо одной.

Инвариантом является также и величина

$$p_{\mu} p_{\mu} = p \cdot p = E^2 - p_x^2 - p_y^2 - p_z^2 = E^2 - \mathbf{p}^2 = m^2$$

(E — полная энергия, m — масса покоя, mc^2 — энергия покоя, \mathbf{p} — импульс). Таким образом,

$$E^2 = \mathbf{p}^2 c^2 + m^2 c^4.$$

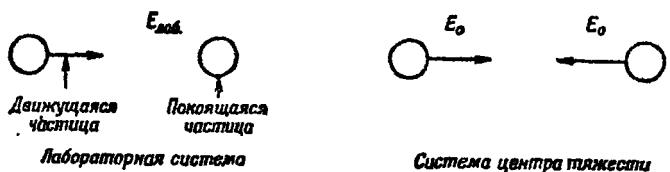
Интересно отметить, что инвариантной величиной

¹⁾ Энергия E здесь представляет собой полную энергию, т. е. включает и энергию покоя mc^2 ,

является фаза волновой функции свободной частицы $\exp\left[-\frac{i}{\hbar}(Et - \mathbf{p} \cdot \mathbf{x})\right]$. Действительно,

$$Et - \mathbf{p} \cdot \mathbf{x} = Et - p_x x - p_y y - p_z z = p_\mu x_\mu.$$

Инвариантность произведения $p_\mu p_\mu$ можно использовать для преобразования энергии из лабораторной системы



Фиг. 8.

координат в систему центра тяжести (см фиг. 8). Рассмотрев для простоты случаи тождественных частиц, имеем

$$p_\mu p_\mu = E_{\text{лаб}} m = E_0^2 + p_0^2.$$

С другой стороны,

$$p_0^2 = E_0^2 - m^2.$$

Поэтому

$$E_{\text{лаб}} m = 2E_0^2 - m^2,$$

и, следовательно,

$$E_0 = \sqrt{\frac{m}{2}(E_{\text{лаб}} + m)}.$$

Уравнения электродинамики $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ и $\mathbf{E} = -\frac{1}{c}(\partial \mathbf{A} / \partial t) - \nabla \varphi$ легко записываются в тензорной форме:

$$B_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} = -\nabla_y A_z + \nabla_z A_y,$$

$$B_y = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} = -\nabla_z A_x + \nabla_x A_z,$$

$$B_z = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} = -\nabla_x A_y + \nabla_y A_x,$$

$$E_x = -\frac{\partial A_x}{\partial t} - \frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\nabla_t A_x + \nabla_x A_t,$$

$$E_y = -\frac{\partial A_y}{\partial t} - \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\nabla_t A_y + \nabla_y A_t,$$

$$E_z = -\frac{\partial A_z}{\partial t} - \frac{\partial \varphi}{\partial z} = -\nabla_t A_z + \nabla_z A_t.$$

Здесь использован тот факт, что скалярный потенциал φ является четвертой компонентой 4-вектор-потенциала A_μ . Из вышеизложенного следует, что величины B_x, B_y, B_z, E_x, E_y и E_z представляют собой компоненты 4-тензора второго ранга

$$F_{\mu\nu} = \nabla_\mu A_\nu - \nabla_\nu A_\mu. \quad (7.1)$$

Тензор $F_{\mu\nu}$ является антисимметричным ($F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu}$), причем его диагональные элементы ($\mu = \nu$) равны нулю. Независимыми являются всего шесть компонент (три компоненты соответствуют \mathbf{E} и три $-\mathbf{B}$) из шестнадцати:

$$F_{\mu\nu} = \begin{vmatrix} 0 & -B_z & B_y & E_x \\ B_z & 0 & -B_x & E_y \\ -B_y & B_x & 0 & E_z \\ -E_x & -E_y & -E_z & 0 \end{vmatrix}.$$

Уравнения Максвелла $\nabla \times \mathbf{B} = 4\pi\mathbf{J} + (\partial\mathbf{E}/\partial t)$ и $\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho$ записываются в виде

$$\nabla_\mu F_{\mu\nu} = 4\pi j_\nu, \quad (7.2)$$

где $\nu = 1, 2, 3, 4$, т. е. $j_1 = j_x, j_2 = j_y, j_3 = j_z, j_4 = \rho$, а μ — немой индекс суммирования. Три первые компоненты ($\nu = 1, 2, 3$) этого уравнения соответствуют уравнению Максвелла для тока, четвертая же компонента ($\nu = 4$) соответствует уравнению Пуассона.

Подставляя выражение (7.1) в уравнение (7.2), получаем уравнение для 4-вектор-потенциала A_μ :

$$\nabla_\mu \nabla_\mu A_\nu - \nabla_\mu \nabla_\nu A_\mu = 4\pi j_\nu.$$

Потенциал A_μ определен соотношением (7.1) неоднозначно. Действительно, потенциал

$$A'_\mu = A_\mu + \nabla_\mu \chi, \quad (7.3)$$

где χ — скалярная функция координат, также удовлетворяет этому соотношению. Такое изменение или преобразование потенциала называется калибровочным или градиентным преобразованием. На потенциал мы будем накладывать дополнительное ограничение, так называемое условие Лоренца¹⁾:

$$\nabla_{\mu} A_{\mu} = 0, \quad (7.4)$$

сужая тем самым неоднозначность. Это условие является весьма удобным, так как оно, кроме того, упрощает уравнение для A_{μ}

$$(\nabla \cdot \nabla) A_{\nu} = 4\pi j_{\nu}, \quad (7.5)$$

где $(\nabla \cdot \nabla) \equiv \nabla_{\mu} \nabla_{\mu}$. Легко видеть, что это уравнение представляет собой совокупность двух трехмерных волновых уравнений

$$\begin{aligned} \nabla^2 A - \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} &= -4\pi j, \\ \nabla^2 \varphi - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} &= -4\pi \rho. \end{aligned} \quad (7.5a)$$

Иногда уравнения (7.5a) записывают в виде $\square^2 A_{\mu} = -4\pi j_{\mu}$ (\square^2 — оператор д'Аламбера, равный $\nabla^2 - \partial^2/\partial t^2 = -\nabla \cdot \nabla$). Калибровка (7.4) соответствует обычно используемой в классической электродинамике:

$$\nabla \cdot \mathbf{A} - \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0. \quad (7.4a)$$

Лекция восьмая

РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ МАКСВЕЛЛА ДЛЯ ВАКУУМА

Решения волнового уравнения для вакуума

$$\square^2 A_{\mu} = -4\pi j_{\mu} = 0$$

можно записать в виде плоской волны

$$A_{\mu} = e_{\mu} e^{-ik \cdot x},$$

¹⁾ Это условие все еще оставляет неоднозначным потенциал A_{μ} . Можно еще выбрать функцию χ , удовлетворяющую уравнению $\square^2 \chi = 0$.

где e_μ и k_μ — постоянные векторы, причем k_μ удовлетворяет условию

$$k_\mu k_\mu = k \cdot k = 0.$$

В этом можно легко убедиться, если учесть, что действие оператора ∇_μ на функцию $e^{-ik \cdot x}$ сводится к умножению на ik_μ . (На e_μ оператор ∇_μ не действует, так как система координат прямоугольная.) Таким образом,

$$\begin{aligned} -\square^2 A_\mu &= \nabla_\nu (\nabla_\nu A_\mu) = \nabla_\nu (-ie_\nu k_\nu e^{-ik \cdot x}) = \\ &= -e_\mu (k_\nu k_\nu) e^{-ik \cdot x}. \end{aligned}$$

Заметим, что операция $\nabla_\nu A_\mu$ образует тензор второго ранга, операция $\nabla_\nu (\nabla_\nu A_\mu)$ — тензор третьего ранга, в котором произведено сокращение по индексу ν и получен тензор первого ранга, или вектор.

Вектор k_μ с компонентами

$$k_\mu = \omega, k_x, k_y, k_z = \mathbf{k}$$

называется вектором распространения. В трехмерных обозначениях

$$e^{-ik \cdot x} = e^{-i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})},$$

а условие $k \cdot k = 0$ записывается в виде

$$\omega^2 - \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = 0.$$

Задача. Покажите, что из условия Лоренца

$$\nabla_\mu A_\mu = 0$$

следует соотношение $k \cdot e = 0$.

При использовании трехмерных обозначений обычно вектор поляризации \mathbf{e} выбирают так, чтобы $\mathbf{k} \cdot \mathbf{e} = 0$, а скалярный потенциал полагают равным нулю ($\phi = 0$). Это условие, однако, является не единственно возможным. Вследствие релятивистской инвариантности оно может соблюдаться лишь в какой-либо одной системе координат. Отсюда следует кажущийся парадокс — обособленность системы координат, в которой $\mathbf{k} \cdot \mathbf{e} = 0$, что несовместимо с теорией относительности. Этот «парадокс», однако, легко разрешается с помощью так называемого калибровочного преобразования, которое ос-

тавляет неизменными поля $F_{\mu\nu}$ при изменении вектора e . Условие $k \cdot e = 0$ в некоторой системе координат достигается путем выбора определенной калибровки. Действительно, согласно формуле (7.3), калибровочное преобразование в трехмерной форме имеет вид

$$A' = A + \nabla\chi, \quad \varphi' = \varphi + \frac{\partial\chi}{\partial t},$$

где χ — скалярная функция. Условие Лоренца (7.4), $\nabla \cdot A = 0$, при этом сохраняет свой вид, если

$$\nabla \cdot A' = \nabla \cdot A + \nabla \cdot \nabla\chi = 0$$

или если функция χ удовлетворяет уравнению

$$\square^2\chi = 0.$$

Решение этого уравнения можно выбрать в виде $\chi = \alpha e^{-ik \cdot x}$, где α — произвольная постоянная. В результате

$$A'_\mu = A_\mu + \nabla_\mu(\alpha e^{-ik \cdot x}) = (e_\mu + \alpha k_\mu) e^{-ik \cdot x}.$$

Таким образом, с помощью калибровочного преобразования получили новый вектор поляризации

$$e'_\mu = e_\mu + \alpha k_\mu.$$

Отсюда в трехмерной форме:

$$e' = e + \alpha k,$$

$$e'_4 = e_4 + \alpha \omega.$$

Таким образом, независимо от используемой системы координат величину

$$k \cdot e' = k \cdot e + \alpha k \cdot k = k \cdot e + \alpha \omega^2$$

можно сделать равной нулю путем соответствующего выбора константы α .

Инвариантность полей по отношению к калибровочному преобразованию следует из соотношения

$$\begin{aligned} F'_{\mu\nu} &= \nabla_\mu A'_\nu - \nabla_\nu A'_\mu = \nabla_\mu A_\nu + \nabla_\mu \nabla_\nu \chi - \nabla_\nu A_\mu - \\ &\quad - \nabla_\nu \nabla_\mu \chi = F_{\mu\nu}, \end{aligned}$$

так как

$$\nabla_\mu \nabla_\nu \chi \equiv \nabla_\nu \nabla_\mu \chi.$$

РЕЛЯТИВИСТСКАЯ МЕХАНИКА ЧАСТИЦЫ

Компоненты обычной трехмерной скорости не преобразуются подобно компонентам 4-вектора. 4-вектором является величина

$$\frac{dz_\mu}{ds} = \frac{dt}{ds}, \quad \frac{dx}{ds}, \quad \frac{dy}{ds}, \quad \frac{dz}{ds},$$

где

$$dz_\mu = dt, \quad dx, \quad dy, \quad dz$$

— элемент пути частицы, а ds — собственное время, определяемое соотношением

$$ds^2 = dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2.$$

Вектор dz_μ/ds называется 4-вектором скорости и обозначается через u_μ . Разделив ds^2 на dt^2 , получим связь между собственным временем и обычным локальным временем

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = 1 - v^2.$$

Компоненты обычной трехмерной скорости связаны с компонентами 4-вектора скорости следующим образом:

$$\frac{dx}{ds} = \frac{dx}{dt} \frac{dt}{ds} = \frac{v_x}{\sqrt{1-v^2}},$$

$$\frac{dy}{ds} = \frac{v_y}{\sqrt{1-v^2}},$$

$$\frac{dz}{ds} = \frac{v_z}{\sqrt{1-v^2}},$$

$$\frac{dt}{ds} = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}.$$

Легко показать, что $u_\mu u_\mu = 1$. Действительно,

$$\begin{aligned} u_\mu u_\mu &= \frac{1}{1-v^2} - \frac{v_x^2}{1-v^2} - \frac{v_y^2}{1-v^2} - \frac{v_z^2}{1-v^2} = \\ &= \frac{1-v^2}{1-v^2} = 1, \end{aligned}$$

4-импульс определяется соотношением

$$p_{\mu} = m u_{\mu} = \frac{m}{\sqrt{1-v^2}}, \frac{mv_x}{\sqrt{1-v^2}}, \frac{mv_y}{\sqrt{1-v^2}}, \frac{mv_z}{\sqrt{1-v^2}}.$$

Замечая, что $p_4 = m/\sqrt{1-v^2}$ совпадает с полной энергией частицы E , находим следующее соотношение для трехмерного импульса \mathbf{p} :

$$\mathbf{p} = E \cdot \mathbf{v},$$

где \mathbf{v} — обычная трехмерная скорость.

Подобно скорости, компоненты трехмерной силы (определяемой как временная производная от импульса) также не образуют компонент 4-вектора, 4-вектором является величина

$$f_{\mu} = \frac{dp_{\mu}}{ds},$$

с компонентами

$$f_{\mu} = \frac{d}{dt} \left(\frac{mv_{\mu}}{\sqrt{1-v^2}} \right) \frac{dt}{ds} = \frac{F_{\mu}}{\sqrt{1-v^2}} \quad (\mu = 1, 2, 3),$$

где F_{μ} — обычная сила; четвертая же компонента равна

$$\begin{aligned} f_4 &= \frac{\text{Мощность}}{\sqrt{1-v^2}} = \frac{\text{Скорость изменения энергии}}{\sqrt{1-v^2}} = \\ &= \frac{d}{dt} \left(\frac{m}{\sqrt{1-v^2}} \right). \end{aligned}$$

Последнее следует из трехмерного соотношения:

$$\begin{aligned} \text{Мощность} &= \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} = \left(\frac{d}{dt} \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1-v^2}} \right) \cdot \mathbf{v} = \\ &= \frac{m}{2} \left[\frac{v^2}{(1-v^2)^{3/2}} + \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} \right] \frac{dv^2}{dt} = \\ &= \frac{mv}{(1-v^2)^{3/2}} \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt} \frac{m}{\sqrt{1-v^2}}, \end{aligned}$$

а также из того факта, что $m/\sqrt{1-v^2}$ представляет собой полную энергию частицы,

Таким образом, релятивистским обобщением уравнения Ньютона является уравнение

$$\frac{d}{ds} (p_\mu) = f_\mu = m \frac{d^2 z_\mu}{ds^2}. \quad (8.1)$$

Трехмерная сила Лоренца имеет вид

$$\mathbf{F} = e(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}), \quad (8.2)$$

причем работа этой силы в единицу времени (скорость изменения энергии) равна

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{v} = e\mathbf{E} \cdot \mathbf{v}.$$

Учитывая приведенное выше определение 4-вектора силы, получаем

$$\mathbf{f} = \frac{e}{\sqrt{1-v^2}} (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

и

$$f_4 = \frac{e}{\sqrt{1-v^2}} \mathbf{E} \cdot \mathbf{v}.$$

Задача. Покажите, что выражения для \mathbf{f} и f_4 эквивалентны 4-вектору:

$$f_\nu = eu_\mu F_{\mu\nu}$$

и что релятивистское уравнение Ньютона можно записать в виде

$$m \frac{d^2 z_\mu}{ds^2} = e \frac{dz_\nu}{ds} F_{\mu\nu}. \quad (8.3)$$

Докажите также соотношение

$$\frac{d}{ds} \left(\frac{dz_\mu}{ds} \right)^2 = 0.$$

В трехмерной форме уравнение движения частицы записывается в виде

$$\frac{d}{dt} \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1-v^2}} = e(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}). \quad (8.4)$$

Это можно показать, воспользовавшись уравнением Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial v_\mu} - \frac{\partial L}{\partial x_\mu} = 0,$$

где функция Лагранжа определена соотношением

$$L = -m\sqrt{1-v^2} - e\varphi + e\mathbf{A} \cdot \mathbf{v}. \quad (8.5)$$

Канонически сопряженный координате x импульс при этом дается выражением $\partial L/\partial v$, т. е.

$$\mathbf{p} = \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1-v^2}} + e\mathbf{A}.$$

Соответствующий гамильтониан частицы имеет вид

$$H = e\varphi + \sqrt{(\mathbf{p} - e\mathbf{A})^2 + m^2}, \quad (8.6)$$

откуда $(H - e\varphi)^2 - (\mathbf{p} - e\mathbf{A})^2 = m^2$. Придать гамильтоновой формулировке уравнений движения ковариантный или четырехмерный вид весьма трудно. Однако принцип наименьшего действия, который гласит, что действие

$$S = \int L dt$$

должно быть минимальным, приводит непосредственно к релятивистским уравнениям движения, если его представить в виде

$$\begin{aligned} S &= \int L dt = m \int ds + e \int A_\mu \frac{dz_\mu}{ds} ds = \\ &= \int \left[m \left(\frac{dz}{d\alpha} \frac{dz}{d\alpha} \right)^{1/2} + e A_\mu \frac{dz_\mu}{d\alpha} \right] d\alpha. \end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались определением

$$\left(\frac{dz}{d\alpha} \right)^2 = \frac{dz_\mu}{d\alpha} \frac{dz_\mu}{d\alpha}.$$

Интересно заметить, что к таким же уравнениям движения приводит действие

$$S' = \frac{m}{2} \int \left(\frac{dz_\mu}{d\alpha} \right)^2 d\alpha + e \int A_\mu \frac{dz_\mu}{d\alpha} d\alpha.$$

Задачи. 1. Покажите, что функция Лагранжа (8.5) приводит к уравнениям движения (8.4) и что соответствующий этим уравнениям гамильтониан определяется формулой (8.6). Найдите, кроме того, выражение для импульса p .

2. Покажите, что условие $\delta S = 0$ (вариация S), где S определяется приведенным выше выражением, приводит к тем же самым уравнениям движения.

РЕЛЯТИВИСТСКОЕ ВОЛНОВОЕ УРАВНЕНИЕ

Лекция девятая

СИСТЕМА ЕДИНИЦ

В дальнейшем мы всюду будем пользоваться следующими обозначениями. Определим единицы массы, времени и длины таким образом, чтобы

$$c = 1 \quad (c = 2,99793 \cdot 10^{10} \text{ см/сек}),$$

$$\hbar = 1 \quad (\hbar = 1,0544 \cdot 10^{-27} \text{ эрг}\cdot\text{сек}).$$

В табл. 2 указана связь используемых нами обозначений с обычными. Полезно знать следующие численные значения:

Масса протона $M_p = 1836,1 m = 938,2 \text{ Мэв}$;

Массовая единица атомного веса = $931,2 \text{ Мэв}$;

Масса атома водорода $M_H = 1,00815$ массовой единицы;

Масса нейтрона $M_N = 784 \text{ кэв} + M_H$;

$kT = 1 \text{ эв}$ при $T = 11,606^\circ \text{ К}$;

Число Авогадро $N_a = 6,025 \cdot 10^{23}$;

$N_a e = 96,520 \text{ кулон}$.

УРАВНЕНИЯ КЛЕЙНА—ГОРДОНА, ПАУЛИ И ДИРАКА

Согласно классической релятивистской механике, гамильтониан частицы имеет следующий вид:

$$H = \sqrt{(\mathbf{p} - e\mathbf{A})^2 + m^2} + e\varphi. \quad (9.1)$$

При переходе в выражении (9.1) к квантовомеханическим операторам путем замены \mathbf{p} на $i\nabla$ возникает трудность, связанная с тем, что операция извлечения

Таблица 2

Обозначения и единицы

Используемое обозначение	Смысл	Обычно принятое обозначение	Численное значение
m	Масса электрона	m	
	Энергия	mc^2	510,99 кэв
	Импульс	mc	1704 эрстед·см
	Частота	mc^2/\hbar	
	Волновое число	mc/\hbar	
$1/m$	Длина (комптоновская длина волны)/ 2π	\hbar/mc	$3,8615 \cdot 10^{-11}$ см
	Время	\hbar/mc^2	
e^2	Постоянная тонкой структуры (безразмерная)	$e^2/\hbar c$	1/137,038
e^2/m	Классический радиус электрона	e^2/mc^2	$2,8176 \cdot 10^{-11}$ см
$1/me^2$	Боровский радиус	$a_0 = \hbar^2/me^2$	0,52945 Å

квадратного корня остается неопределенной. Таким образом, получить релятивистский квантовомеханический гамильтониан частицы непосредственно из классического (9.1) нельзя. Однако можно определить квадрат оператора гамильтониана:

$$(H - e\varphi)^2 - (\mathbf{p} - e\mathbf{A})^2 = m^2.$$

Производя при этом замену $H = i(\partial/\partial t)$, получаем

$$\left(+\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial t} + e\varphi\right)^2 \Psi - \left(\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} - e\mathbf{A}\right)^2 \Psi = m^2 \Psi. \quad (9.2)$$

Квадрат оператора вычисляется в соответствии с обычной алгеброй операторов. Уравнение (9.2) впервые было предложено Шредингером как возможное релятивистское уравнение движения частицы. Это уравнение принято называть уравнением Клейна—Гордона. В релятивистски ковариантной форме оно имеет вид

$$(i\nabla_\mu - eA_\mu)(i\nabla_\mu - eA_\mu)\Psi = m^2\Psi. \quad (9.2a)$$

Это уравнение не учитывает «спина» электрона и поэтому не пригодно для описания тонкой структуры спектра атома водорода. В настоящее время считается, что оно применимо к π -мезону (к частице с нулевым спином). Чтобы выяснить, насколько это уравнение применимо к атому водорода, положим $A = 0$, $\varphi = -(Ze/r)$ и $\Psi = \chi(r) e^{-iEt}$. При этом уравнение (9.2a) принимает вид

$$\left(E - \frac{Ze^2}{r}\right)^2 \chi + \nabla^2 \chi = m^2 \chi.$$

Пусть $E = m + W$, где $W \ll m$ и $V = Ze^2/r$; тогда

$$(W - V)\chi + \nabla^2 \frac{\chi}{2m} = -\frac{(W - V)^2}{2m} \chi.$$

Если пренебречь правой частью этого уравнения по сравнению с первым членом в левой части, получим обычное нерелятивистское уравнение Шредингера. Считая $(W - V)^2/2m$ возмущением, можно вычислить тонкую структуру спектра атома водорода и сравнить ее с правильной.

Упражнение. В случае уравнения Клейна — Гордона

$$\rho = i\left(\Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial t} - \Psi \frac{\partial \Psi^*}{\partial t}\right) - e\varphi \Psi \Psi^* \quad \text{— плотность заряда,}$$

$$\mathbf{j} = -i(\Psi^* \nabla \Psi - \Psi \nabla \Psi^*) - e\mathbf{A} \Psi \Psi^* \quad \text{— плотность тока.}$$

Покажите, что (ρ, \mathbf{j}) образует 4-вектор, причем $\nabla_\mu j_\mu = 0$.

Уравнение Клейна — Гордона приводит к результату, который первоначально показался настолько неразумным, что в свое время это послужило достаточным основанием отвергнуть такое уравнение. Этот результат связан с возможностью существования состояний с отрицательной энергией. Чтобы убедиться, что уравнение Клейна — Гордона действительно предсказывает

такие состояния, рассмотрим уравнение для свободной частицы, которое записывается в виде

$$\square^2 \Psi = m^2 \Psi,$$

где \square^2 — оператор д'Аламбера. Решение этого уравнения в ковариантной форме можно представить в виде $\Psi = A e^{-i p_\mu x^\mu}$, где $p_\mu p_\mu = m^2$. Учитывая соотношение

$$p_\mu p_\mu = p_4 p_4 - p_x p_x - p_y p_y - p_z p_z = E^2 - \mathbf{p} \cdot \mathbf{p},$$

получаем

$$E = \pm \sqrt{m^2 + \mathbf{p} \cdot \mathbf{p}}.$$

Указанная трудность, связанная с появлением состояний с отрицательной энергией E , побудила Дирака сформулировать новое релятивистское уравнение движения. Уравнение Дирака правильно объяснило спектр атома водорода и оказалось приемлемым для описания электрона. Однако, вопреки первоначальному замыслу Дирака, оно также привело к существованию состояний с отрицательной энергией, которые на сегодняшний день вполне удовлетворительно интерпретируются. Эту интерпретацию можно распространить и на уравнение Клейна — Гордона.

Упражнение. Покажите, что если функция $\Psi = e^{-iEt} \chi(x, y, z)$ является решением уравнения Клейна—Гордона при постоянных A и φ , то функция $\Psi = e^{iEt} \chi^*$ будет решением того же уравнения, в котором A и φ заменены на $-A$ и $-\varphi$. Это указывает на одну из возможных интерпретаций решений с отрицательной энергией. Именно такое решение соответствует частице, заряд которой равен по величине и противоположен по знаку заряду электрона, а масса равна массе электрона.

Вместо того чтобы следовать оригинальному выводу уравнения Дирака, мы воспользуемся здесь несколько иным подходом. Уравнение Клейна — Гордона представляет собой ковариантную запись уравнения Шре-

дингера. По аналогии с этим уравнение Дирака можно получить путем ковариантной записи уравнения Паули.

В этом методе члены, учитывающие «спин», автоматически включаются в релятивистское уравнение частицы. Понятие спина частицы впервые было введено Паули, но тогда еще было не ясно, почему магнитный момент электрона следует считать равным $e\hbar/2mc$. Это значение естественным образом следует из уравнения Дирака. Поэтому часто утверждают, что лишь уравнение Дирака смогло объяснить правильное значение магнитного момента электрона. В действительности, однако, это неверно, ибо дальнейшее исследование уравнения Паули показало, что и из него также естественным образом следует правильное значение магнитного момента электрона, как значение, приводящее к наибольшей простоте теории. В связи с тем что уравнение Дирака учитывает спин частицы, а уравнение Клейна — Гордона не учитывает его и вследствие того, что последнее долгое время считалось неправильным, распространено мнение, будто спин частицы — чисто релятивистское понятие. В действительности это неверно. Уравнение Клейна — Гордона является правильным релятивистским уравнением, но только для частиц с нулевым спином.

Уравнение Шредингера имеет вид

$$H\Psi = E\Psi,$$

где

$$H = \frac{1}{2m} (i\nabla + e\mathbf{A})^2 + e\varphi;$$

а уравнение Клейна—Гордона

$$[(H - e\varphi)^2 - (i\nabla + e\mathbf{A})^2] \Psi = m^2\Psi. \quad (9.3)$$

Уравнение Паули также имеет вид $H\Psi = E\Psi$, причем

$$H = \frac{1}{2m} [\boldsymbol{\sigma} \cdot (i\nabla + e\mathbf{A})]^2 + e\varphi. \quad (9.4)$$

Таким образом, оператор $(i\nabla + e\mathbf{A})^2$ в уравнении Шредингера заменяется в уравнении Паули оператором $[\boldsymbol{\sigma} \cdot (i\nabla + e\mathbf{A})]^2$. Учитывая это, по аналогии с уравнением Клейна—Гордона можно записать возможную

форму релятивистского уравнения Паули:

$$(H - e\varphi)^2 \Psi - \{\sigma \cdot (i\nabla + e\mathbf{A})\}^2 \Psi = m^2 \Psi. \quad (9.4a)$$

В действительности это уравнение является неправильным; однако правильное уравнение мало отличается от него и получается после учета того, что оператор $H = i(\partial/\partial t)$:

$$\begin{aligned} & \left[i \frac{\partial}{\partial t} - e\varphi + \sigma \cdot (i\nabla + e\mathbf{A}) \right] \times \\ & \times \left[i \frac{\partial}{\partial t} - e\varphi - \sigma \cdot (i\nabla + e\mathbf{A}) \right] \Psi = m^2 \Psi. \quad (9.5) \end{aligned}$$

Это одна из форм уравнения Дирака.

Волновая функция Ψ в уравнении Паули, на которую действует оператор Гамильтона, является матрицей

$$\Psi = \begin{pmatrix} \Psi_+ \\ \Psi_- \end{pmatrix}.$$

Уравнение, схожее с первоначально предполагавшимся Дираком, можно получить следующим образом. Для удобства запишем

$$\begin{aligned} i \frac{\partial}{\partial t} - e\varphi &= \pi_4, \\ -i\nabla - e\mathbf{A} &= \pi. \end{aligned}$$

Введем далее функцию χ , определяемую соотношением $(\pi_4 + \sigma \cdot \pi) \Psi = m\chi$.

При этом из уравнения (9.5) следует, что $(\pi_4 - \sigma \cdot \pi) \chi = m\Psi$. Эти соотношения можно переписать, вводя функции (лишь для удобства записи)

$$\begin{aligned} \chi + \Psi &= \Psi_a, \\ \chi - \Psi &= \Psi_b. \end{aligned}$$

Складывая и вычитая соотношения для Ψ и χ , получаем

$$\begin{aligned} \pi_4 \Psi_a - \sigma \cdot \pi \Psi_b &= m\Psi_a, \\ -\pi_4 \Psi_b + \sigma \cdot \pi \Psi_a &= m\Psi_b. \end{aligned} \quad (9.6)$$

Эти два уравнения можно объединить в одно уравнение, используя специальные обозначения. Запишем

волновую функцию в виде матрицы

$$\Psi = \begin{pmatrix} \Psi_{a_1} \\ \Psi_{a_2} \\ \Psi_{b_1} \\ \Psi_{b_2} \end{pmatrix}. \quad (9.7)$$

Функции Ψ_a и Ψ_b здесь представлены в виде матриц, а именно:

$$\Psi_a = \begin{pmatrix} \Psi_{a_1} \\ \Psi_{a_2} \end{pmatrix}, \quad \Psi_b = \begin{pmatrix} \Psi_{b_1} \\ \Psi_{b_2} \end{pmatrix}.$$

Тогда, если ввести вспомогательные матрицы¹⁾

$$\gamma_4 = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right), \quad \Upsilon = \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & & \\ 0 & 0 & \sigma & \\ \hline & & 0 & 0 \\ -\sigma & & 0 & 0 \end{array} \right), \quad (9.8)$$

уравнения для Ψ_a и Ψ_b можно записать в виде

$$\gamma_4 \pi_4 \Psi - \Upsilon \cdot \pi \Psi = m \Psi,$$

представляющем собой четыре уравнения для четырех волновых функций. Используя четырехмерные обозначения, запишем уравнение Дирака в виде

$$\gamma_\mu \pi_\mu \Psi = m \Psi,$$

или

$$\gamma_\mu (i \nabla_\mu - e A_\mu) \Psi = m \Psi. \quad (9.9)$$

Упражнение. Докажите соотношения

$$\gamma_\mu \gamma_\nu + \gamma_\nu \gamma_\mu = \begin{cases} 0 & \text{при } \nu \neq \mu, \\ 2 & \text{при } \nu = \mu = 4, \\ -2 & \text{при } \nu = \mu = 1, 2, 3 \end{cases}$$

¹⁾ В качестве примера приведем

$$\gamma_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Аналогичный вид имеют матрицы γ_y и γ_z .

и следствия, вытекающие из них,

$$\begin{aligned} \gamma_t^2 = 1, \quad \gamma_x^2 = \gamma_y^2 = \gamma_z^2 = -1, \\ \gamma_t \gamma_x = -\gamma_x \gamma_t, \quad \gamma_x \gamma_y = -\gamma_y \gamma_x \quad \text{и т. д.} \end{aligned}$$

Аналогичную форму уравнения Дирака можно получить также несколько иначе—путем сравнения с уравнением Клейна—Гордона. Так, используя обозначения $H = i(\partial/\partial t) = i\nabla_4$ и $e\varphi = eA_4$, запишем уравнение (9.3) в ковариантной форме:

$$(i\nabla_\mu - eA_\mu)^2 \Psi = m^2 \Psi. \quad (9.10)$$

Аналогичным образом можно записать и уравнение Паули (9.4а). Действительно, вводя, наряду с указанными выше, также обозначение $\sigma = \gamma$ и полагая $\sigma_4 = \gamma_4$ (чтобы полностью определить 4-вектор σ), уравнение (9.4а) можно записать в форме, аналогичной (9.10),

$$\{\gamma_\mu (i\nabla_\mu - eA_\mu)\}^2 \Psi = m^2 \Psi. \quad (9.11)$$

Это уравнение следует сравнить с уравнением (9.9).

Уравнение Паули (9.4) отличается от уравнения Шредингера тем, что вместо трехмерного скалярного произведения $(\mathbf{p} - e\mathbf{A})^2$ содержит квадрат величины $\sigma \cdot (\mathbf{p} - e\mathbf{A})$. Аналогично вместо четырехмерного скалярного произведения $(p_\mu - eA_\mu)^2$, содержащегося в уравнении (9.10), уравнение (9.11) содержит квадрат величины $\gamma_\mu (p_\mu - eA_\mu)$, где 4-вектор γ_μ заменяет обычный трехмерный вектор σ . Полученное уравнение (9.11) эквивалентно уравнению (9.9). [Уравнение (9.11) получается из уравнения (9.9) путем применения к обеим частям оператора $\gamma_\mu (i\nabla_\mu - eA_\mu)$ и дальнейшего упрощения правой части путем использования уравнения (9.9).]

Упражнение. Покажите, что уравнение (9.11) эквивалентно уравнению

$$(i\nabla_\mu - eA_\mu)^2 \Psi - \frac{i}{2} e \gamma_\mu \gamma_\nu F_{\nu\mu} \Psi = m^2 \Psi,$$

Лекция десятая

АЛГЕБРА γ -МАТРИЦ

В предыдущей лекции при получении уравнения Дирака

$$\gamma_\mu (i \nabla_\mu - e A_\mu) \Psi = m \Psi \quad (10.1)$$

мы воспользовались специальным представлением для матриц γ :

$$\gamma_t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \gamma = \begin{pmatrix} 0 & \sigma \\ -\sigma & 0 \end{pmatrix}, \quad (10.2)$$

где каждый элемент этих четырехрядных матриц в свою очередь является двухрядной матрицей

$$1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ и т. д.}$$

Лучшим способом определения матриц γ , однако, является определение их с помощью коммутационных соотношений, так как последние являются тем наиболее важным, что необходимо при использовании матриц γ . Коммутационные соотношения определяют эти матрицы неоднозначно, и приведенное выше представление (10.2) является лишь одним из возможных представлений. Коммутационные соотношения для матриц записываются в виде

$$\begin{aligned} \gamma_t^2 &= 1, & \gamma_x^2 &= \gamma_y^2 = \gamma_z^2 = -1, \\ \gamma_t \gamma + \gamma \gamma_t &= 0, & \gamma_x \gamma_y + \gamma_y \gamma_x &= 0, \\ \gamma_x \gamma_z + \gamma_z \gamma_x &= 0, & \gamma_y \gamma_z + \gamma_z \gamma_y &= 0, \end{aligned} \quad (10.3)$$

или в общем виде

$$\begin{aligned} \gamma_\mu \gamma_\nu + \gamma_\nu \gamma_\mu &= 2\delta_{\mu\nu}, \\ \delta_{\mu\nu} &= \begin{cases} 0 & \text{при } \mu \neq \nu, \\ +1 & \text{при } \mu = \nu = 4, \\ -1 & \text{при } \mu = \nu = 1, 2, 3. \end{cases} \end{aligned} \quad (10.4)$$

Заметим, что из этого определения $\delta_{\mu\nu}$ с учетом правила образования скалярного произведения следует соотношение

$$\delta_{\mu\nu} a_\nu = a_\mu.$$

Путем перемножения матриц γ можно получить новые матрицы. Так, например, матрицы (10.3) образованы путем попарного перемножения матриц γ . Билинейные комбинации

$$\gamma_x \gamma_y, \quad \gamma_x \gamma_z, \quad \gamma_y \gamma_z, \quad \gamma_x \gamma_t, \quad \gamma_y \gamma_t, \quad \gamma_z \gamma_t$$

образуют независимую от $\gamma_x, \gamma_y, \gamma_z$ и γ_t систему матриц (т. е. их нельзя представить в виде линейной комбинации последних). Аналогично независимыми из тройных произведений матриц γ являются матрицы

$$\gamma_x \gamma_y \gamma_z = \gamma_5 \gamma_t,$$

$$\gamma_y \gamma_z \gamma_t = -\gamma_x \gamma_5,$$

$$\gamma_z \gamma_t \gamma_x = -\gamma_y \gamma_5,$$

$$\gamma_t \gamma_x \gamma_y = -\gamma_z \gamma_5.$$

Эти и только эти тройные произведения дают новые матрицы. Если два из сомножителей в тройном произведении одинаковы, то его можно упростить. Так, например, $\gamma_t \gamma_y \gamma_t = -\gamma_t \gamma_t \gamma_y = -\gamma_y$. Единственным независимым произведением четырех матриц γ является матрица, называемая γ_5 :

$$\gamma_5 = \gamma_x \gamma_y \gamma_z \gamma_t.$$

Произведение из более чем четырех матриц γ обязательно содержит два одинаковых сомножителя и поэтому его можно упростить. Таким образом, из матриц γ можно образовать 16 линейно независимых матриц (включая единичную матрицу); их линейные комбинации могут содержать 16 произвольных констант. Это означает, что любую такую комбинацию всегда можно представить в виде четырехрядной матрицы. (Математически весьма интересно, что все четырехрядные матрицы можно включить в алгебру γ -матриц, называемую алгеброй Клиффорда или гиперкомплексной алгеброй. Простейшим примером такой алгебры является так называемая алгебра кватернионов, или алгебра двухрядных спиновых матриц Паули.)

Упражнение. Проверьте следующие соотношения:

$$i\gamma_x\gamma_y = \begin{pmatrix} \sigma_z & 0 \\ 0 & \sigma_z \end{pmatrix}, \quad i\gamma_y\gamma_z = \begin{pmatrix} \sigma_x & 0 \\ 0 & \sigma_x \end{pmatrix}, \quad (10.5)$$

$$i\gamma_z\gamma_x = \begin{pmatrix} \sigma_y & 0 \\ 0 & \sigma_y \end{pmatrix}$$

и покажите, что

$$\gamma_t\boldsymbol{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma} \\ \boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix} \equiv \boldsymbol{\alpha} \quad (\text{определение } \boldsymbol{\alpha}).$$

Определим часто встречающуюся матрицу γ_5 :

$$\gamma_5 = \gamma_x\gamma_y\gamma_z\gamma_t = i \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (10.6)$$

Воспользовавшись этим определением, покажите, что

$$\gamma_5\gamma_t = i \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_5\boldsymbol{\gamma} = -i \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma} & 0 \\ 0 & -\boldsymbol{\sigma} \end{pmatrix}, \quad (10.7)$$

$$\gamma_5^2 = -1, \quad \gamma_5\gamma_\mu + \gamma_\mu\gamma_5 = 0.$$

Для дальнейшего полезно ввести удобное обозначение

$$\hat{a} = a_\mu\gamma_\mu \equiv a_t\gamma_t - \mathbf{a}\cdot\boldsymbol{\gamma}. \quad (10.8)$$

Можно показать, что

$$\hat{a}\hat{b} = -\hat{b}\hat{a} + 2\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} \quad (\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = a_\mu b_\mu),$$

$$a^2 = a_\mu a_\mu, \quad (10.9)$$

$$\hat{a}\gamma_5 = -\gamma_5\hat{a}.$$

Первое из этих соотношений, например, проверяется следующим образом. Имеем

$$\hat{a}\hat{b} = (a_t\gamma_t - \mathbf{a}\cdot\boldsymbol{\gamma})(b_t\gamma_t - \mathbf{b}\cdot\boldsymbol{\gamma}).$$

Второй множитель можно пронести вперед, используя коммутационные соотношения (10.3). Так, например, при пронесении первого слагаемого ($b_t\gamma_t$) второго

множителя через первый множитель вследствие того, что матрица γ_t коммутирует сама с собой и антикоммутирует с матрицами γ_x , γ_y и γ_z , получим

$$b_t \gamma_t (a_t \gamma_t + a \cdot \gamma).$$

Поступая аналогичным образом и с остальными слагаемыми, имеем

$$\begin{aligned} \hat{a} \hat{b} &= b_t \gamma_t [(-a_t \gamma_t + a \cdot \gamma) + 2a_t \gamma_t] + \\ &+ b_x \gamma_x [(a_t \gamma_t - a \cdot \gamma) + 2a_x \gamma_x] + \\ &+ b_y \gamma_y [(a_t \gamma_t - a \cdot \gamma) + 2a_y \gamma_y] + \\ &+ b_z \gamma_z [(a_t \gamma_t - a \cdot \gamma) + 2a_z \gamma_z] = \\ &= -\hat{b} \hat{a} + 2(b_t a_t \gamma_t^2 + b_x a_x \gamma_x^2 + b_y a_y \gamma_y^2 + \\ &+ b_z a_z \gamma_z^2) = -\hat{b} \hat{a} + 2b \cdot a. \end{aligned}$$

Упражнения. 1. Покажите, что

$$\gamma_x \hat{a} \gamma_x = \hat{a} + 2a_x \gamma_x,$$

$$\gamma_\mu \gamma_\mu = 4,$$

$$\gamma_\mu \hat{a} \gamma_\mu = -2\hat{a},$$

$$\gamma_\mu \hat{a} \hat{b} \gamma_\mu = 4a \cdot b,$$

$$\gamma_\mu \hat{a} \hat{b} \hat{c} \gamma_\mu = -2\hat{c} \hat{b} \hat{a}.$$

2. Воспользовавшись разложением в степенные ряды, проверьте соотношения

$$e^{\frac{u}{2} \gamma_t \gamma_x} = \operatorname{ch} \frac{u}{2} + \gamma_t \gamma_x \operatorname{sh} \frac{u}{2},$$

(10.10)

$$e^{\frac{\theta}{2} \gamma_x \gamma_y} = \cos \frac{\theta}{2} + \gamma_x \gamma_y \sin \frac{\theta}{2}.$$

3. Покажите, что

$$e^{-\frac{u}{2} \gamma_t \gamma_z} \gamma_t e^{\frac{u}{2} \gamma_t \gamma_z} = \gamma_t \operatorname{ch} u + \gamma_z \operatorname{sh} u,$$

$$e^{-\frac{u}{2} \gamma_t \gamma_z} \gamma_z e^{\frac{u}{2} \gamma_t \gamma_z} = \gamma_z \operatorname{ch} u + \gamma_t \operatorname{sh} u,$$

$$\begin{aligned}
 e^{-\frac{\mu}{2}\gamma_t\gamma_z}\gamma_y e^{\frac{\mu}{2}\gamma_t\gamma_z} &= \gamma_y, \\
 e^{-\frac{\mu}{2}\gamma_t\gamma_z}\gamma_x e^{\frac{\mu}{2}\gamma_t\gamma_z} &= \gamma_x.
 \end{aligned}
 \tag{10.11}$$

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ «ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ»

Изменится ли уравнение Дирака (10.1), если для матриц γ воспользоваться другим представлением, удовлетворяющим условиям коммутации (10.3)? Чтобы ответить на этот вопрос, произведем преобразование волновой функции $\Psi = S\Psi'$, где S — постоянная матрица, имеющая обратную матрицу S^{-1} ($SS^{-1} = 1$). В результате уравнение Дирака приобретет вид

$$\gamma_\mu \pi_\mu S\Psi' = mS\Psi'. \tag{10.12}$$

Благодаря тому, что матрица S коммутирует с оператором π_μ (согласно определению π_μ), это уравнение можно записать в виде

$$\gamma_\mu S\pi_\mu \Psi' = mS\Psi'.$$

Умножая это уравнение на обратную матрицу S^{-1} , получаем

$$S^{-1}\gamma_\mu S\pi_\mu \Psi' = m\Psi',$$

или

$$\gamma'_\mu \pi_\mu \Psi' = m\Psi',$$

где $\gamma'_\mu = S^{-1}\gamma_\mu S$. Преобразование $\gamma'_\mu = S^{-1}\gamma_\mu S$ называется преобразованием «эквивалентности». Легко проверить, что полученные таким путем матрицы γ'_μ также удовлетворяют коммутационным соотношениям (10.3). Произведения матриц γ'_μ преобразуются так же, как и произведения матриц γ_μ

$$\gamma'_\mu \gamma'_\nu = (S^{-1}\gamma_\mu S)(S^{-1}\gamma_\nu S) = S^{-1}(\gamma_\mu \gamma_\nu)S.$$

Поэтому все соотношения, содержащие γ -матрицы (в частности, коммутационные соотношения), сохраняют свой вид в новом представлении. Это свидетельствует о том, что, как уравнение Дирака (10.1), так и все следствия, вытекающие из него, полностью эквивалентны во всех представлениях γ -матриц,

РЕЛЯТИВИСТСКАЯ ИНВАРИАНТНОСТЬ

Релятивистскую инвариантность уравнения Дирака можно показать, если сначала допустить, что матрицы γ_μ преобразуются подобно 4-вектору, т. е.

$$\begin{aligned}\gamma'_x &= \frac{\gamma_x - v\gamma_t}{\sqrt{1-v^2}}, & \gamma'_t &= \frac{\gamma_t - v\gamma_x}{\sqrt{1-v^2}}, \\ \gamma'_y &= \gamma_y, & \gamma'_z &= \gamma_z.\end{aligned}$$

Подобно 4-вектору преобразуется и оператор π_μ , так как он является линейной комбинацией 4-векторов ∇_μ и A_μ . Левая часть уравнения Дирака $\gamma_\mu \pi_\mu$ представляет собой скалярное произведение двух 4-векторов и является инвариантом по отношению к преобразованиям Лоренца. Правая часть, m , также является инвариантом. Преобразование матрицы γ_μ подобно 4-вектору означает переход к новому представлению γ'_μ . Согласно соотношениям (10.11), этого можно достичь также при помощи преобразования «эквивалентности»; последнее свидетельствует о том, что в преобразовании матриц γ_μ , вообще говоря, нет необходимости. Следовательно, во всех лоренцовых системах координат можно пользоваться одним и тем же представлением для матриц γ_μ . Таким образом, при преобразованиях Лоренца имеются две возможности:

1) можно преобразовать матрицы γ_μ подобно 4-вектору, оставляя неизменной волновую функцию (за исключением лоренцова преобразования координат в аргументе);

2) можно воспользоваться обычным (стандартным) представлением для матриц γ_μ также и в преобразованной системе координат, но при этом волновую функцию следует преобразовать согласно преобразованию «эквивалентности».

ГАМИЛЬТОНОВА ФОРМА УРАВНЕНИЯ ДИРАКА

Чтобы показать, что уравнение Дирака в нерелятивистском пределе переходит в уравнение Шредингера, удобно представить его в гамильтоновой форме.

Уравнение (10.1) можно записать в виде

$$\gamma_t \left(-\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial t} - e\varphi \right) \Psi - \gamma \left(\frac{1}{i} \nabla - e\mathbf{A} \right) \Psi = m\Psi.$$

Умножив это уравнение на γ_t и перегруппировав члены, получим

$$-\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial t} \Psi = \left\{ \gamma_t \gamma \left(\frac{1}{i} \nabla - e\mathbf{A} \right) + e\varphi + \gamma_t m \right\} \Psi = H\Psi.$$

Согласно формулам (10.5), имеем

$$H = \alpha \cdot \left(\frac{1}{i} \nabla - e\mathbf{A} \right) + e\varphi + m\beta,$$

где $\beta = \gamma_t$, $\alpha = \gamma_t \gamma$. Из формул (10.5) следует, что все матрицы α и β антикоммутируют между собой, причем $\alpha_x^2 = \alpha_y^2 = \alpha_z^2 = \beta^2 = 1$.

Следует заметить, что матрицы α и β в используемом нами представлении являются эрмитовыми, поэтому и гамильтониан H в этом представлении эрмитов.

Упражнение. Покажите, что плотность заряда $\rho = \Psi^* \Psi$ и плотность тока $\mathbf{j} = \Psi^* \boldsymbol{\alpha} \Psi$ удовлетворяют уравнению непрерывности ¹⁾

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0.$$

¹⁾ Учитывая четырехкомпонентность волновой функции Ψ , имеем

$$\rho = \Psi^* \Psi = (\Psi_1^* \Psi_2^* \Psi_3^* \Psi_4^*) \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \\ \Psi_3 \\ \Psi_4 \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^4 \Psi_i^* \Psi_i,$$

$$j_x = \sum \Psi_i^* (\alpha_x)_{ij} \Psi_j = \Psi_4^* \Psi_1 + \Psi_3^* \Psi_2 +$$

$$+ \Psi_2^* \Psi_3 + \Psi_1^* \Psi_4.$$

Лекция одиннадцатая

Следует отметить, что матрицы α и β являются эрмитовыми только в определенных представлениях. В частности, они эрмитовы в том представлении, которое использовалось нами до сих пор. Это представление в дальнейшем будет называться обычным (стандартным). Чтобы плотность заряда и тока можно было записать в виде

$$\begin{aligned}\rho &= \Psi^* \Psi, \\ \mathbf{j} &= \Psi^* \boldsymbol{\alpha} \Psi,\end{aligned}\quad (11.1)$$

необходимо потребовать эрмитовость матриц α и β . Эти соотношения справедливы не во всех представлениях матриц α и β .

Уравнение Дирака имеет вид

$$- \frac{\hbar}{i} \frac{\partial \Psi}{\partial t} = H \Psi,$$

где

$$H = \beta m c^2 + e \varphi + c \boldsymbol{\alpha} \left(\frac{\hbar}{i} \nabla - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right) \quad (11.2)^1$$

(здесь восстановлены \hbar и c). Учитывая четырехкомпонентность волновой функции Ψ , для среднего значения x получаем

$$\begin{aligned}\langle x \rangle &= \int \Psi^* x \Psi dV = \\ &= \int (\Psi_1^* x \Psi_1 + \Psi_2^* x \Psi_2 + \Psi_3^* x \Psi_3 + \Psi_4^* x \Psi_4) dV.\end{aligned}$$

¹⁾ Заметим, что гамильтониан (11.2) отличается от гамильтониана, приведенного в книге Шиффа, знаком перед первым и третьим слагаемыми. Компоненты волновой функции $\Psi_1, \Psi_2, \Psi_3, \Psi_4$ в книге Шиффа при этом соответствуют компонентам нашей волновой функции $-\Psi_{b_1}, -\Psi_{b_2}, -\Psi_{a_1}, \Psi_{a_2}$. Это является следствием того, что представление, используемое Шиффом, отличается от нашего представления преобразованием «эквивалентности» $S = i\beta \alpha_x \alpha_y \alpha_z$. Легко проверить, что $S^2 = -1$, и, следовательно, $S^{-1} = -S$ и

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Аналогично можно показать, что

$$\langle \alpha \rangle = \int \Psi^* \alpha \Psi dV,$$

$$\langle \alpha_x \rangle = \int (\Psi_4^* \Psi_1 + \Psi_3^* \Psi_2 + \Psi_2^* \Psi_3 + \Psi_1^* \Psi_4) dV.$$

Матричные элементы оператора определяются так же, как и выше. Так, например,

$$(\alpha)_{mn} = \int \Psi_m^* \alpha \Psi_n dV.$$

Производная по времени от оператора A равна

$$\dot{A} = i(HA - AH) + \frac{\partial A}{\partial t}.$$

Для оператора x отсюда получаем

$$\dot{x} = i(Hx - xH) = \alpha. \quad (11.3)$$

Здесь учтено, что x коммутирует со всеми слагаемыми оператора H , за исключением $p \cdot \alpha$.

Из равенства $\alpha^2 = 1$ следует, что собственные значения оператора α равны ± 1 ; это в свою очередь означает, что собственные значения оператора скорости x равны $\pm c$. Если учесть, что для точного определения скорости необходимо точно знать положения частицы для двух моментов времени, то этот результат покажется правдоподобным. Действительно, согласно принципу неопределенности, импульс частицы в таком случае является полностью неопределенным, т. е. все его значения равновероятны. Из релятивистского соотношения между импульсом и скоростью следует, что при этом наиболее вероятны скорости, близкие к скорости света. В пределе среднее значение скорости равно скорости света ¹⁾.

Аналогично имеем

$$\begin{aligned} \overline{(p - eA)_x} &= i(Hp_x - p_x H) - ie(HA_x - A_x H) - e \frac{\partial A_x}{\partial t} = \\ &= -e \frac{\partial \varphi}{\partial x} + e \alpha \frac{\partial A}{\partial x} - e(\alpha \cdot \nabla) A_x - e \frac{\partial A_x}{\partial t}. \end{aligned}$$

¹⁾ Эти рассуждения, однако, недостаточно убедительны из-за коммутации операторов x и p . Последнее означает, что эти две величины можно измерить одновременно.

Второе и третье слагаемые в правой части этого выражения можно записать в виде

$$e \left(\alpha_x \frac{\partial A_x}{\partial x} + \alpha_y \frac{\partial A_y}{\partial x} + \alpha_z \frac{\partial A_z}{\partial x} - \alpha_x \frac{\partial A_x}{\partial x} - \alpha_y \frac{\partial A_x}{\partial y} - \alpha_z \frac{\partial A_x}{\partial z} \right).$$

Легко видеть, что эта величина является x -компонентой вектора

$$e\alpha \times (\nabla \times \mathbf{A}) = e\alpha \times \mathbf{B}.$$

Оставшиеся два слагаемых дают x -компоненту вектора электрического поля \mathbf{E} . Таким образом, имеем

$$\overline{(\mathbf{p} - e\mathbf{A})} = e(\mathbf{E} + \alpha \times \mathbf{B}) = \mathbf{F},$$

где \mathbf{F} —аналог силы Лоренца. Это уравнение иногда рассматривается как аналог уравнения Ньютона. Однако в связи с тем, что это уравнение непосредственно не связано с $\dot{\mathbf{x}}$, в пределе малых скоростей оно прямо не переходит в уравнение Ньютона. Поэтому такая аналогия не является удачной.

Можно показать справедливость следующих соотношений, смысл которых пока еще остается недостаточно ясным или совсем не ясным:

$$\frac{d}{dt} \left(\mathbf{x} + \frac{i}{2m} \beta \alpha \right) = \frac{\beta}{m} (\mathbf{p} - e\mathbf{A}),$$

$$\frac{d}{dt} \left(t + \frac{i}{2m} \beta \right) = \frac{\beta}{m} (H - e\varphi),$$

$$i \frac{d}{dt} \alpha_x \alpha_y \alpha_z = -2m\beta \alpha_x \alpha_y \alpha_z,$$

$$-\frac{d}{dt} \beta \sigma = 2\beta \alpha_x \alpha_y \alpha_z (\mathbf{p} - e\mathbf{A}).$$

В последнем соотношении под σ следует понимать матрицу

$$\begin{pmatrix} \sigma & 0 \\ 0 & \sigma \end{pmatrix},$$

т. е.

$$\sigma_z = -i\alpha_x \alpha_y \text{ и т. д.}$$

По аналогии с классической физикой можно ожидать, что оператор орбитального момента имеет вид

$$\mathbf{L} = \mathbf{x} \times (\mathbf{p} - e\mathbf{A}).$$

Заметим, что в классической физике

$$\mathbf{p} - e\mathbf{A} = \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1-v^2}}.$$

Из предыдущих формул для $\dot{\mathbf{x}}$ и $\overline{(\mathbf{p} - e\mathbf{A})}$ получаем выражение для производной по времени от оператора \mathbf{L} :

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{L}} &= \dot{\mathbf{x}} \times (\mathbf{p} - e\mathbf{A}) + \mathbf{x} \times \overline{(\dot{\mathbf{p}} - e\dot{\mathbf{A}})} = \\ &= \boldsymbol{\alpha} \times (\mathbf{p} - e\mathbf{A}) + \mathbf{x} \times \mathbf{F}. \end{aligned}$$

Последнее слагаемое в правой части можно трактовать как момент вращения. В случае центральной силы \mathbf{F} это слагаемое равно нулю. Однако из-за наличия первого слагаемого $\dot{\mathbf{L}} \neq 0$. Это означает, что даже в поле центральных сил орбитальный момент частицы \mathbf{L} не сохраняется.

Рассмотрим теперь производную по времени от оператора σ , определяемого в виде

$$\begin{pmatrix} \sigma & 0 \\ 0 & \sigma \end{pmatrix},$$

где $\sigma_z = -i\alpha_x\alpha_y$ и т. д. Компонента σ_z коммутирует с членами β , $e\varphi$ и α_z оператора Гамильтона H и антикоммутирует с членами α_x и α_y . Поэтому

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}_z &= (H\alpha_x\alpha_y - \alpha_x\alpha_y H) = \alpha_x\pi_x\alpha_x\alpha_y - \alpha_x\alpha_y\alpha_x\pi_x + \\ &+ \alpha_y\pi_y\alpha_x\alpha_y - \alpha_x\alpha_y\alpha_y\pi_y, \end{aligned}$$

где

$$\pi = -(i\nabla + e\mathbf{A}).$$

Учитывая соотношения

$$\begin{aligned} \alpha_x\pi_x\alpha_x\alpha_y &= \alpha_x\alpha_x\alpha_y\pi_x = \alpha_y\pi_x, \\ -\alpha_x\alpha_y\alpha_x\pi_x &= \alpha_x\alpha_x\alpha_y\pi_x = \alpha_y\pi_x, \\ \alpha_y\pi_y\alpha_x\alpha_y &= -\alpha_y\alpha_y\alpha_x\pi_x = -\alpha_x\pi_x, \\ -\alpha_x\alpha_y\alpha_y\pi_y &= -\alpha_x\pi_y, \end{aligned}$$

находим

$$\dot{\sigma}_z = 2(\alpha_y \pi_x - \alpha_x \pi_y).$$

Легко видеть, что это является z -компонентой вектора $-2\alpha \times \pi$. Окончательно получаем

$$\frac{1}{2} \dot{\sigma} = -\alpha \times \pi = -\alpha \cdot (\mathbf{p} - e\mathbf{A}).$$

Это выражение совпадает по величине с первым слагаемым в правой части формулы для $\dot{\mathbf{L}}$, но имеет обратный знак. Поэтому имеем

$$\frac{d}{dt} \left(\mathbf{L} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma} \right) = \mathbf{x} \times \mathbf{F}.$$

В поле центральных сил это выражение равно нулю. Оператор $\mathbf{L} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}$ можно трактовать как оператор полного момента частицы, причем \mathbf{L} соответствует орбитальному моменту, а $\frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}$ — спиновому моменту частицы. Таким образом, в поле центральных сил сохраняющейся величиной является полный момент частицы.

Задачи. 1. Покажите, что в постоянном магнитном поле ($\varphi = 0$, $\partial \mathbf{A} / \partial t = 0$) величина

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{p} - e\mathbf{A})$$

является интегралом движения. Последнее является следствием аномального гиромагнитного отношения для электрона. Это означает также, что циклотронная частота электрона равна скорости его вращения в магнитном поле.

2. Покажите, что в постоянном магнитном поле ($\varphi = 0$ и $\partial \mathbf{A} / \partial t = 0$) в случае стационарного состояния компоненты Ψ_1 и Ψ_2 волновой функции

$$\Psi = \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \\ \Psi_3 \\ \Psi_4 \end{pmatrix}$$

равны компонентам Ψ_1 и Ψ_2 волновой функции в уравнении Паули. Покажите также, что между кинетической энергией частицы $E_{\text{Паули}}$ в уравне-

нии Паули и полной энергией $E_{\text{Дирак}} = W + m$ в уравнении Дирака имеется связь

$$E_{\text{Дирак}} = \sqrt{2mE_{\text{Паули}} + m^2}$$

и объясните это соотношение.

НЕРЕЛЯТИВИСТСКИЙ ПРЕДЕЛ УРАВНЕНИЯ ДИРАКА

Рассмотрим стационарное состояние частицы и предположим, что внешние электрическое и магнитное поля постоянны. Эти ограничения не являются необходимыми, но сильно упрощают выкладки. В этом случае

$$\begin{aligned}\Psi &= e^{-iE \cdot t} \Psi(\mathbf{x}), \\ H\Psi &= E\Psi,\end{aligned}$$

где H — дираковский оператор Гамильтона, а

$$E = m + W.$$

Таким образом,

$$H\Psi = (m + W)\Psi = \alpha \cdot (\mathbf{p} - e\mathbf{A})\Psi + \beta m\Psi + e\varphi\Psi.$$

Если вспомнить выражения для матриц α и β , приведенные в предыдущей лекции, а волновую функцию Ψ представить в виде (9.7), то это уравнение можно записать в виде двух уравнений (9.6):

$$(m + W)\Psi_a = \sigma \cdot \pi \Psi_b + m\Psi_a + V\Psi_a, \quad (11.4)$$

$$(m + W)\Psi_b = \sigma \cdot \pi \Psi_a - m\Psi_b + V\Psi_b. \quad (11.5)$$

Здесь, так же как и выше, $\pi = (\mathbf{p} - e\mathbf{A})$, а $V = e\varphi$. Разрешая уравнение (11.5) относительно Ψ_b , получаем

$$\Psi_b = \frac{1}{2m + W - V} (\sigma \cdot \pi) \Psi_a. \quad (11.6)$$

Заметим, что из соотношения (11.6) в нерелятивистском пределе $W \ll 2m$, $V \ll 2m$ следует $\Psi_b \sim (v/c) \Psi_a$. Основываясь на этом, компоненты Ψ_a и Ψ_b часто называют соответственно большой и малой компонентами волновой функции Ψ . Подставляя выражение (11.6) в уравнение (11.4), получаем

$$W\Psi_a = (\sigma \cdot \pi) \frac{1}{2m + W - V} (\sigma \cdot \pi) \Psi_a + V\Psi_a. \quad (11.7)$$

Пренебрегая величинами W и V по сравнению с $2m$, имеем

$$W\Psi_a = \frac{1}{2m} (\sigma \cdot \pi)^2 \Psi_a + V\Psi_a.$$

Это уравнение совпадает с уравнением Паули (9.4).

Чтобы выяснить пределы применимости уравнения Паули, получим уравнение следующего приближения, т. е. с точностью до членов $\sim v^2$.

Лекция двенадцатая

В уравнениях (11.6) и (11.7), полученных в предыдущей лекции, произведем разложение по малому параметру $(W - V)/2m$. С точностью до членов $\sim v^4$ имеем

$$\frac{1}{2m + W - V} \approx \frac{1}{2m} - \frac{W - V}{(2m)^2}. \quad (12.1)$$

Уравнение (11.7) в этом приближении принимает вид

$$\begin{aligned} (W - V) \Psi_a &= \frac{1}{2m} (\sigma \cdot \pi)^2 \Psi_a - \\ &- \frac{1}{4m^2} (\sigma \cdot \pi) (W - V) (\sigma \cdot \pi) \Psi_a. \end{aligned} \quad (12.2)$$

Из условия нормировки $\int (\Psi_a^2 + \Psi_b^2) dV = 1$ получаем

$$\int \Psi_a^* \left[1 + \frac{(\sigma \cdot \pi)^2}{4m^2} \right] \Psi_a dV = 1. \quad (12.3)$$

При помощи замены

$$\chi = \left[1 + \frac{(\sigma \cdot \pi)}{8m^2} \right] \Psi_a \quad (12.4)$$

нормировочный интеграл упрощается и принимает вид (с точностью до членов $\sim v^2$)

$$\int \chi^* \chi dV = 1.$$

Эта замена облегчает также физическую интерпретацию уравнения (12.2). Действительно, перепишем урав-

нение (12.2) в следующем виде:

$$\begin{aligned} & \left[1 + \frac{(\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\pi})^2}{8m^2}\right] (\mathcal{W} - V) \left[1 + \frac{(\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\pi})^2}{8m^2}\right] \Psi_a = \\ & = \frac{1}{2m} (\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\pi})^2 \Psi_a + \frac{1}{8m^2} [(\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\pi})^2 (\mathcal{W} - V) - \\ & - 2(\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\pi}) (\mathcal{W} - V) (\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\pi}) + (\mathcal{W} - V) (\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\pi})^2] \Psi_a. \end{aligned}$$

Используя замену (12.4) и производя сокращение на $1 + (\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\pi})^2/8m^2$, получаем

$$\begin{aligned} (\mathcal{W} - V) \chi &= \frac{1}{2m} (\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\pi})^2 \chi - \frac{1}{8m^2} (\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\pi})^4 \chi + \\ &+ \frac{1}{8m^2} [(\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\pi})^2 (\mathcal{W} - V) - 2(\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\pi}) (\mathcal{W} - V) (\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\pi}) + \\ &+ (\mathcal{W} - V) (\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\pi})^2] \chi. \end{aligned} \quad (12.5)$$

Воспользуемся теперь алгеброй операторов, чтобы свести уравнение (12.5) к виду, наиболее удобному для интерпретации. В частности, вспомним соотношение

$$A^2B - 2ABA + BA^2 = A(AB - BA) - (AB - BA)A.$$

Далее, так как $\boldsymbol{\pi} = (\mathbf{p} - e\mathbf{A})$ и

$$(\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\pi}) (\mathcal{W} - V) - (\mathcal{W} - V) (\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\pi}) = -i(\boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla) V = i(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{E}),$$

получаем (полагая в предыдущем соотношении $\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\pi} = A$ и $\mathcal{W} - V = B$):

$$i(\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\pi}) (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{E}) - i(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{E}) (\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\pi}) = \nabla \cdot \mathbf{E} + 2\boldsymbol{\sigma} \cdot (\boldsymbol{\pi} \times \mathbf{E}).$$

Наконец, учитывая, что в рассматриваемом случае $\nabla \times \mathbf{E} \sim \partial \mathbf{B} / \partial t = 0$, уравнение (12.5) можно представить в следующем виде:

$$\begin{aligned} \mathcal{W} \chi &= V \chi + \frac{1}{2m} \underset{(1)}{(\mathbf{p} - e\mathbf{A}) \cdot (\mathbf{p} - e\mathbf{A})} \chi - \frac{e}{2m} \underset{(3)}{(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B})} \chi - \\ &- \frac{1}{8m^2} \underset{(4)}{(\mathbf{p} \cdot \mathbf{p})^2} \chi + \frac{e^2}{8m^2} [\underset{(5)}{\nabla \cdot \mathbf{E}} + 2\underset{(6)}{\boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{p} - e\mathbf{A}) \times \mathbf{E}}] \chi. \end{aligned} \quad (12.6)$$

Каждое слагаемое в правой части этого волнового уравнения имеет определенный физический смысл.

Первое слагаемое представляет собой обычную скалярную потенциальную энергию частицы.

Второе слагаемое соответствует кинетической энергии.

Третье слагаемое характеризует, точно так же как и в уравнении Паули, влияние спина частицы.

Четвертое слагаемое представляет собой релятивистскую поправку к кинетической энергии частицы. Такая поправка получается из разложения

$$\begin{aligned} E &= \sqrt{m^2 + \mathbf{p}^2} = m \left(1 + \frac{\mathbf{p}^2}{m^2} \right)^{1/2} = \\ &= m + \frac{\mathbf{p}^2}{2m} - \frac{\mathbf{p}^4}{8m^3} + \dots \end{aligned}$$

Последний член в этом разложении соответствует четвертому слагаемому в уравнении (12.6).

Пятое и шестое слагаемые характеризуют спин-орбитальное взаимодействие. Чтобы показать это, рассмотрим выражение $\boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{p} \times \mathbf{E})$ (часть шестого слагаемого). В случае, когда поле $\mathbf{E} \sim \mathbf{r}/r^3$, это выражение пропорционально $\boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{p} \times \mathbf{r})/r^3$. Произведение $\mathbf{p} \times \mathbf{r}$ можно трактовать при этом как орбитальный момент частицы \mathbf{L} , а полученное выражение $\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{L}/r^3$ — как характеризующее спин-орбитальное взаимодействие. Для электрона, находящегося в S -состоянии ($\mathbf{L} = 0$), это выражение равно нулю. С другой стороны, если учесть, что $\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi Ze\delta(r)$, заключаем, что пятое слагаемое в уравнении (12.6) дает ненулевой вклад *лишь* в случае, когда электрон находится в S -состоянии (т. е. когда волновая функция отлична от нуля при $r = 0$). Таким образом, пятое и шестое слагаемые вместе характеризуют спин-орбитальное взаимодействие для всех состояний электрона. Магнитный момент электрона $e/2m$ фигурирует в коэффициентах перед третьим, пятым и шестым слагаемыми в уравнении (12.6).

Шестое слагаемое в уравнении (12.6) можно также трактовать классически. Действительно, заряд, движущийся со скоростью \mathbf{v} в электрическом поле \mathbf{E} , испытывает действие эффективного магнитного поля $\mathbf{B} = \mathbf{v} \times \mathbf{E} = (1/m) (\mathbf{p} - e\mathbf{A}) \times \mathbf{E}$, и рассматриваемый член представляет собой взаимодействие магнитного момен-

та электрона с этим полем $(e/2m) (\sigma \cdot \mathbf{B})$. Получить множитель 2 классическим путем, однако, невозможно. Еще до появления уравнения Дирака Томас показал, что простые классические соображения недостаточны для получения правильного значения рассматриваемого слагаемого. Иное положение имеет место для аномальных магнитных моментов нейтрона и протона, введенных Паули (см. ниже задачу 3). В модифицированном уравнении Паули аномальные магнитные моменты этих частиц в соответствующих слагаемых фигурируют с правильным множителем 2.

Задачи. 1. Используя уравнение (12.6), найдите поправки первого порядка к спектру атома водорода. Полученные результаты сравните с точным спектром¹⁾. Обратите внимание на разное поведение волновых функций в начале координат. Это отличие в действительности проявляется в слишком малой области пространства и поэтому не играет существенной роли. В начале координат точная волновая функция электрона в атоме водорода, полученная в результате решения уравнения Дирака, ведет себя как

$$r^{\sqrt{1-(Z/137)^2}-1} \approx r^{-1/40000},$$

в то время как из уравнения Шредингера находим $\Psi \rightarrow \text{const } r \rightarrow 0$.

2. Считая, что A и φ зависят от времени и полагая $\mathcal{W} = i(\partial/\partial t)$, получите временное уравнение Паули в используемом в настоящей лекции приближении.

3. Для описания протонов и нейтронов можно пользоваться модифицированным уравнением Паули. Оно получается введением в уравнение Дирака дополнительного члена, соответствующего аномальному магнитному моменту частицы,

$$\gamma_\mu (i \nabla_\mu - e A_\mu) \Psi + \mu \gamma_\mu \gamma_\nu F_{\mu\nu} \Psi = m \Psi.$$

¹⁾ См. примечание на стр. 8.

Умножая это уравнение на β , запишем его в более привычной «гамильтоновой» форме

$$i \frac{\partial}{\partial t} \Psi = H_{\text{Дирак}} \Psi + \mu\beta (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B} - \alpha \cdot \mathbf{E}) \Psi.$$

Покажите, что в том же приближении, в котором найдено уравнение (12.6), отсюда можно получить для протонов уравнение

$$\begin{aligned} i \frac{\partial \Psi}{\partial t} = & \left\{ V + \frac{1}{2M} (\mathbf{p} - e\mathbf{A})^2 + \left(\mu + \frac{e}{2M} \right) (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B}) + \right. \\ & + \frac{1}{8M^2} (\mathbf{p} \cdot \mathbf{p})^2 + \frac{1}{4M^2} \left(2\mu + \frac{e}{2M} \right) (\nabla \cdot \mathbf{E} + \\ & \left. + 2\boldsymbol{\sigma} (\mathbf{p} - e\mathbf{A}) \cdot \mathbf{E} \right\} \Psi; \end{aligned} \quad (12.7)$$

аналогичное уравнение имеет место для нейтронов (с зарядом $e = 0$).

4. Уравнение (12.7) можно использовать для описания рассеяния нейтронов на электронах атома. В большинстве случаев рассеяние нейтронов на ядрах атома является изотропным. Однако вследствие того, что нейтроны рассеиваются также и электронами атома, возникает интерференция ядерного рассеяния и электронного. Для случая медленных нейтронов этот эффект был обнаружен экспериментально. Этот эффект объясняется с помощью пятого слагаемого в уравнении (12.6) [в модифицированном виде (12.7) с зарядом $e = 0$]. Из-за того, что электроны находятся вне ядра атома, $\nabla \cdot \mathbf{E} \neq 0$. Используя борновское приближение, можно вычислить амплитуду рассеяния нейтронов на электронах атома, обусловленную пятым слагаемым. Однако в то время, когда этот эффект был впервые открыт, его объяснили, предположив, что потенциал взаимодействия нейтрона с электроном имеет вид $c\delta(\mathbf{R})$, где $\delta(\mathbf{R})$ — функция Дирака, а \mathbf{R} — расстояние между нейтроном и электроном.

Вычислите амплитуду рассеяния в борновском приближении, исходя из потенциала $c\delta(\mathbf{R})$, и результат сравните с точным, полученным с по-

мощью пятого слагаемого в уравнении (12.6). Покажите, что

$$c = \frac{4\pi\mu_N e^2}{4M_N^2}.$$

Чтобы $c\delta(\mathbf{R})$ можно было интерпретировать как потенциал, усредненный потенциал \bar{V} следует определить таким образом, чтобы при действии на сферу радиуса e^2/m он давал бы тот же результат.

Используя значение $\mu_N = -1,9135 (e/2M_N)$, покажите, что результирующий потенциал V с точностью до экспериментальных погрешностей согласуется с экспериментальными данными, т. е. $V = 4400 \pm 400 \text{ эв}^1$.

5. Пренебрегая членами $\sim v^2$, покажите, что

$$\int \Psi_f^* \alpha f(\mathbf{R}) \Psi_i dV \rightarrow$$

$$\rightarrow \int \chi_f^* [(\mathbf{p}f + f\mathbf{p}) \frac{1}{2m} + \frac{\sigma}{2m} \times \nabla f] \chi_i dV.$$

¹⁾ См. L. Foldy, Phys. Rev., 87, 693 (1952).

РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ДИРАКА

ДЛЯ СВОБОДНОЙ ЧАСТИЦЫ

Лекция тринадцатая

При решении уравнения Дирака для свободной частицы удобно пользоваться четырехмерной формой записи:

$$\gamma_{\mu} (i\nabla_{\mu} - eA_{\mu}) \Psi = m\Psi.$$

Используя обозначения десятой лекции

$$\hat{A} = \gamma_{\mu} A_{\mu} = \gamma_t A_t - \gamma \mathbf{A},$$

$$\hat{\nabla} = \gamma_{\mu} \nabla_{\mu} = \gamma_t \nabla_t - \gamma \nabla,$$

запишем уравнение Дирака в виде

$$(i\hat{\nabla} - e\hat{A}) \Psi = m\Psi. \quad (13.1)$$

(Напомним, что величина $\hat{a} = \gamma_{\mu} a_{\mu}$ является инвариантом при преобразованиях Лоренца.)

В четырехмерной форме следует записать также и плотность тока и заряда. В используемом нами представлении матриц γ для плотности тока и заряда имеем

$$\mathbf{j} = \Psi^* \boldsymbol{\alpha} \Psi, \quad \rho = \Psi^* \Psi.$$

Определив релятивистски сопряженную с Ψ функцию¹⁾ в обычном представлении

$$\tilde{\Psi} = \Psi^* \beta, \quad (13.2)$$

¹⁾ Волновая функция Ψ является четырехкомпонентным столбцом

$$\Psi = \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \\ \Psi_3 \\ \Psi_4 \end{pmatrix}.$$

Сопряженная с Ψ функция Ψ^* в обычном представлении является строкой $\Psi_1^*, \Psi_2^*, \Psi_3^*, \Psi_4^*$. При умножении этой функции на матрицу β получим такую же строку, но с изменением знаков у третьей и четвертой компонент,

запишем плотности тока и заряда в четырехмерной форме

$$j_\mu = \tilde{\Psi} \gamma_\mu \Psi, \quad \rho = \tilde{\Psi} \beta \Psi.$$

Эти соотношения легко проверить, используя выражение (13.2) и учитывая, что $\beta^2 = 1$, а $\beta \gamma_\mu = \alpha_\mu$.

Упражнения. 1. Покажите, что релятивистски сопряженная с Ψ функция $\tilde{\Psi}$ удовлетворяет уравнению

$$\tilde{\Psi} (-i\hat{\nabla} - e\hat{A}) = m \tilde{\Psi}. \quad (13.3)$$

2. Используя уравнения (13.1) и (13.3), покажите, что $\nabla_\mu j_\mu = 0$ (уравнение непрерывности).

В общем случае сопряженный с оператором N оператор \tilde{N} образуется следующим образом: все матрицы γ в операторе \tilde{N} располагаются в обратном порядке, и у каждого мнимого множителя i (но не у тех, которые содержатся в самих матрицах γ) знак меняется на обратный. Так, например, если $N = \gamma_x \gamma_y$, то $-N = \tilde{N} = \gamma_y \gamma_x$, а если $N = i\gamma_5 = i\gamma_x \gamma_y \gamma_z \gamma_t$, то $\tilde{N} = -i\gamma_t \gamma_z \gamma_y \gamma_x = -i\gamma_5 = -N$. Наконец, вместо свойства эрмитости операторов, столь полезного в нерелятивистской квантовой механике, в релятивистской механике необходимо иметь в виду следующее свойство:

$$(\tilde{\Psi}_2 N \Psi_1)^* = \tilde{\Psi}_1 \tilde{N} \Psi_2. \quad (13.4)$$

Для свободной частицы, т. е. в отсутствие внешних полей, $\hat{A} = 0$, уравнение Дирака принимает вид

$$i\hat{\nabla} \Psi = m\Psi. \quad (13.5)$$

Решение этого уравнения будем искать в виде

$$\Psi = u e^{-i\rho \cdot x} = u e^{-i\rho_\mu x_\mu}. \quad (13.6)$$

Так как Ψ является четырехкомпонентной волновой

функцией, то выражение (13.6) следует понимать как

$$\begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \\ \Psi_3 \\ \Psi_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} e^{-i p \cdot x}.$$

Величина u , представляющая собой столбец из четырех компонент u_1 , u_2 , u_3 и u_4 , называется дираковским спинором. Выясним теперь, каким условиям должны удовлетворять компоненты p и u для того, чтобы выражение (13.6) было решением уравнения Дирака. Действие оператора ∇_μ на отдельные компоненты волновой функции Ψ сводится к умножению каждой компоненты на величину $-i p_\mu$. Следовательно, имеем

$$\nabla_\mu \Psi = \nabla_\mu u e^{-i p_\nu x_\nu} = -i p_\mu u e^{-i p_\nu x_\nu} = -i p_\mu \Psi.$$

Учитывая это, из уравнения (13.5) получаем

$$i \gamma_\mu (-i p_\mu \Psi) = \gamma_\mu p_\mu \Psi = \hat{p} \Psi = m \Psi. \quad (13.7)$$

Отсюда следует, что выражение (13.6) является решением уравнения Дирака при условии $\hat{p} u = m u$. Для простоты выкладок предположим, что частица движется в плоскости xu , так что

$$p_1 = p_x, \quad p_2 = p_y, \quad p_3 = 0, \quad p_4 = E.$$

При этом $\hat{p} = \gamma_t E - \gamma_y p_y - \gamma_x p_x$. Учитывая, что в используемом нами представлении

$$\gamma_t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \gamma = \begin{pmatrix} 0 & \sigma \\ -\sigma & 0 \end{pmatrix},$$

имеем

$$\begin{aligned} & \hat{p} - m = \\ & = \begin{pmatrix} E - m & 0 & 0 & -p_x + i p_y \\ 0 & E - m & -(p_x + i p_y) & 0 \\ 0 & p_x - i p_y & -(E + m) & 0 \\ p_x + i p_y & 0 & 0 & -(E + m) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (13.8)$$

В результате уравнение (13.7) в компонентах принимает следующий вид:

$$(E - m) u_1 - (p_x - i p_y) u_4 = 0, \quad (13.9a)$$

$$(E - m) u_2 - (p_x + i p_y) u_3 = 0, \quad (13.9б)$$

$$(p_x - i p_y) u_2 - (E + m) u_3 = 0, \quad (13.9в)$$

$$(p_x + i p_y) u_1 - (E + m) u_4 = 0. \quad (13.9г)$$

Из уравнений (13.9а) и (13.9г) можно независимо определить отношение u_1/u_4 . Выражение (13.6) будет решением уравнения Дирака, если величина u_1/u_4 , определенная двумя способами, одна и та же. Поэтому

$$\frac{u_1}{u_4} = \frac{p_x - i p_y}{E - m} = \frac{E + m}{p_x + i p_y},$$

или

$$p_x^2 + p_y^2 + m^2 = E^2. \quad (13.10)$$

Это условие является вполне естественным. Оно гласит, что 4-импульс частицы p_μ должен быть выбран так, чтобы удовлетворить релятивистскому соотношению для полной энергии.

Аналогично, определив из уравнений (13.9б) и (13.9в) величину u_2/u_3 , найдем

$$\frac{u_2}{u_3} = \frac{p_x + i p_y}{E - m} = \frac{E + m}{p_x - i p_y}.$$

Отсюда также получаем условие (13.10).

Более изящно условие (13.10) можно получить, исходя непосредственно из уравнения (13.7). Умножая уравнение (13.10) на \hat{p} , получаем

$$\hat{p}(\hat{p}u) = \hat{p}(tu) = t(\hat{p}u) = t^2 u.$$

Используя далее соотношение (10.9), имеем

$$\hat{p}\hat{p} = p \cdot p = E^2 - p_x^2 - p_y^2.$$

Из сравнения этих соотношений следует либо

$$E^2 - p_x^2 - p_y^2 = m^2,$$

либо

$$u = 0.$$

Первое совпадает с условием (13.10), а второе дает тривиальное (а поэтому не интересное) решение.

Уравнение Дирака для свободной частицы имеет два линейно независимых решения. Это следует из того факта, что после подстановки решения в виде (13.6) уравнение Дирака распадается на две пары уравнений (13.9) соответственно для u_1 и u_4 и для u_2 и u_3 . Поэтому удобно выбрать линейно независимые решения таким образом, чтобы в каждом из этих решений две компоненты спинора u равнялись нулю. Такие два решения для спинора u можно записать в виде

$$\begin{pmatrix} F \\ 0 \\ 0 \\ p_+ \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ F \\ p_- \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (13.11)$$

где введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned} F &= E + m, \\ p_+ &= p_x + ip_y, \\ p_- &= p_x - ip_y. \end{aligned} \quad (13.12)$$

Эти решения ненормированы.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ СПИНА ДВИЖУЩЕГОСЯ ЭЛЕКТРОНА

Какой смысл имеют полученные два линейно независимых решения уравнения Дирака? Для однозначного определения волновой функции необходимо знать ряд физических величин. Известно, например, что в системе координат, в которой частица находится в стационарном состоянии, возможны две ориентации спина. На математическом языке существование двух решений уравнения $\hat{p}u = tu$ означает существование некоторого оператора, коммутирующего с оператором \hat{p} . Ниже будет установлен вид этого оператора. Заметим, что γ_5 антикоммутирует с матрицей \hat{p} , т. е. $\gamma_5 \hat{p} = -\hat{p} \gamma_5$. Заметим также, что из соотношения

$$\hat{W} \hat{p} = -\hat{p} \hat{W} + 2\hat{W} \cdot p \quad (10.9)$$

следует, что с матрицей \hat{p} антикоммутирует любой оператор \hat{W} , для которого $W \cdot p = 0$. Матрица $\gamma_5 \hat{W}$ как произведение двух антикоммутирующих с матрицей \hat{p} операторов коммутирует с ней, т. е.

$$(\gamma_5 \hat{W}) \hat{p} = -\gamma_5 \hat{p} \hat{W} = \hat{p} (\gamma_5 \hat{W}).$$

Найдем теперь собственные значения оператора $i\gamma_5 \hat{W}$ (множитель i введен для того, чтобы собственные значения были действительны). Обозначая собственные значения через s , имеем

$$(i\gamma_5 \hat{W}) u = su. \quad (13.13)$$

Чтобы найти возможные значения s , умножим уравнение (13.13) на оператор $i\gamma_5 \hat{W}$. Получим

$$\begin{aligned} (i\gamma_5 \hat{W})(i\gamma_5 \hat{W})u &= -\gamma_5 \hat{W} \gamma_5 \hat{W} u = -W \cdot W u = \\ &= i\gamma_5 W su = s^2 u, \end{aligned}$$

или

$$-W \cdot W = s^2.$$

Отсюда следует, что в случае, когда $W \cdot W = -1$, собственные значения оператора $i\gamma_5 \hat{W}$ равны ± 1 . Выбор скалярного произведения $W \cdot W = -1$ объясняется следующими соображениями: в системе координат, в которой частица покоится, $p = 0$, а $p_4 = E$. Тогда

$$p \cdot W = p_4 W_4 = 0, \quad \text{или} \quad W_4 = 0.$$

При этом $W \cdot W = -W \cdot W = -1$ или $W \cdot W = 1$. Таким образом, в системе координат, в которой частица покоится, W — обычный трехмерный единичный вектор (четвертая компонента W равна нулю).

Выберем оператор \hat{W} так, чтобы в случае, когда частица движется в плоскости xy , он совпадал с γ_z . При этом

$$i\gamma_5 \gamma_z u = su.$$

Используя алгебраические соотношения, выведенные в десятой лекции, для частицы в стационарном сос-

тоянии¹⁾, получаем

$$i\gamma_5 \gamma_z u = i\gamma_x \gamma_y \gamma_t u = i\gamma_x \gamma_y u =$$

$$= \left(\begin{array}{c|c} \sigma_z & 0 \\ \hline 0 & \sigma_z \end{array} \right) u = su.$$

Такой выбор делает оператор $i\gamma_5 \hat{W}$ совпадающим с σ_z ; тем самым становится ясной его связь со спином частицы. Спинор u , удовлетворяющий одновременно двум уравнениям $\hat{p}u = tu$ и $i\gamma_5 \hat{W}u = su$, является однозначно определенным. Такой спинор описывает частицу с импульсом p_μ и со спином (в системе координат, движущейся вместе с частицей) вдоль направления вектора W_μ ($s = 1$), либо против ($s = -1$).

Упражнение. Покажите, что первая из волновых функций (13.11) соответствует решению с $s = +1$, а вторая — с $s = -1$.

Волновую функцию для свободно движущейся частицы можно получить также путем эквивалентного преобразования волнового уравнения [см. уравнение (10.12)]. Если известен дираковский спинор для покоящейся частицы со спином, направленным по оси z , то спинор для частицы, движущейся со скоростью v в направлении вектора k , получается посредством преобразования

$$u(k) = Su, \quad u = \frac{1}{\sqrt{2m}} u_0,$$

$$u_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{либо} \quad u_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

¹⁾ Для частицы в стационарном состоянии $\gamma_t u = u$.

[Множитель $1/\sqrt{2m}$ введен для нормировки; см. формулу (13.14).] Согласно формулам (10.11), матрица преобразования S определяется выражением

$$S = e^{\frac{u}{2} \gamma_t \gamma_k}, \quad \text{ch } u = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}.$$

Учитывая соотношения

$$e^{\frac{u}{2} \gamma_t \gamma_k} = \text{ch } \frac{u}{2} + \gamma_t \gamma_k \text{sh } \frac{u}{2}$$

и

$$\frac{1}{\sqrt{2m}} \text{ch } \frac{u}{2} = \left(\frac{m}{\sqrt{1-v^2}} + m \right)^{1/2} = \sqrt{E+m},$$

$$\frac{1}{\sqrt{2m}} \text{sh } \frac{u}{2} = \sqrt{E-m},$$

получаем

$$u(\mathbf{k}) = (\sqrt{E+m} + \gamma_t \gamma_k \sqrt{E-m}) u_0.$$

Полагая $F = E + m$ и $\alpha = \gamma_t \gamma$ и замечая, что $\sqrt{E^2 - m^2} = p_k$, имеем

$$u(\mathbf{k}) = \frac{1}{\sqrt{F}} (E + m + \alpha \cdot \mathbf{p}) u_0.$$

В случае, когда \mathbf{p} лежит в плоскости xy , эти спиноры совпадают со спинорами (13.11) с учетом нормирующего множителя $1/\sqrt{F}$.

Так как для покоящейся частицы $\gamma_t u_0 = u_0$, то спинор $u(\mathbf{k})$ можно записать в виде

$$u(\mathbf{k}) = \frac{1}{\sqrt{F}} (E \gamma_t - \gamma \cdot \mathbf{p} + m) u_0,$$

или

$$u(\mathbf{k}) = \frac{1}{\sqrt{F}} (\hat{p} + m) u_0.$$

Легко видеть, что $u(\mathbf{k})$ является решением уравнения Дирака для свободной частицы

$$(\hat{p} - m) u(\mathbf{k}) = 0. \quad (13.7)$$

Действительно, так как $p^2 = m^2$,

$$\frac{1}{\sqrt{F}} (\hat{p} - m) (\hat{p} + m) u_0 = \frac{1}{\sqrt{F}} (p^2 - m^2) u_0 = 0.$$

НОРМИРОВКА ВОЛНОВЫХ ФУНКЦИЙ

В нерелятивистской квантовой механике плоские волны нормируются таким образом, чтобы вероятность обнаружения частицы в единице объема равнялась единице, т. е. $\Psi^* \Psi = 1$. Аналогичную нормировку для плоских волн можно было бы ввести и в релятивистском случае

$$\Psi^* \Psi = u^* u = \tilde{u} \gamma_\mu u = 1.$$

Однако из-за того, что величина $\Psi^* \Psi$ преобразуется подобно четвертой компоненте 4-вектора (она является четвертой компонентой 4-вектора плотности тока), такая нормировка релятивистски не инвариантна. Чтобы нормировка была релятивистски инвариантной, величину $u^* u$ следует приравнять четвертой компоненте соответствующего 4-вектора. Такой величиной является, например, E — четвертая компонента 4-вектора импульса p_μ , так что волновую функцию частицы можно нормировать следующим образом:

$$\tilde{u} \gamma_\mu u = 2E.$$

Коэффициент пропорциональности 2 выбран для удобства дальнейших выкладок. Вычислим величину $(\tilde{u} \gamma_\mu u)$ для состояния с $s = +1$. Имеем

$$\begin{aligned} (\tilde{u} \gamma_\mu u) &= (F \ 0 \ 0 \ -p_-) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F \\ 0 \\ 0 \\ p_+ \end{pmatrix} C_1^2 = \\ &= (F \ 0 \ 0 \ -p_-) \begin{pmatrix} F \\ 0 \\ 0 \\ -p_+ \end{pmatrix} C_1^2 = (F^2 + p_- p_+) C_1^2 = \\ &= 2E(E + m) C_1^2, \end{aligned}$$

где C_1 — постоянная нормировки для волновых функций (13.11). Чтобы величина $(\tilde{u} \gamma_\mu u)$ равнялась $2E$, мы

Матричные элементы операторов γ для переходов в случае движения частицы в плоскости xz

Матрица N	$\begin{pmatrix} \mu N \mu \\ s_1 = +1 \\ s_2 = +1 \end{pmatrix}$	$\sqrt{F_1 F_2} \begin{pmatrix} \mu_2 N \mu_1 \\ s_1 = +1 \\ s_2 = +1 \end{pmatrix}$	$\sqrt{F_1 F_2} \begin{pmatrix} \mu_2 N \mu_1 \\ s_1 = +1 \\ s_2 = -1 \end{pmatrix}$	$\sqrt{F_1 F_2} \begin{pmatrix} \mu_2 N \mu_1 \\ s_1 = -1 \\ s_2 = +1 \end{pmatrix}$
1	$2m$	$F_2 F_1 - p_{1+} p_{2-}$	0	
γ_x	$2p_x$	$F_2 p_{1+} + p_{2-} F_1$	0	
γ_y	$2p_y$	$-i F_2 p_{1+} + i p_{2-} F_1$	0	
γ_z	0	0	$-p_{1+} F_2 + p_{2-} F_1$	
γ_t	$2E$	$F_2 F_1 + p_{1+} p_{2-}$	0	
$\gamma_y \gamma_z$	0	0	$-i F_2 F_1 + i p_{1+} p_{2+}$	
$\gamma_z \gamma_x$	0	0	$F_2 F_1 + p_{1+} p_{2+}$	
$\gamma_x \gamma_y$	$-2iE$	$-i F_2 F_1 - i p_{1+} p_{2-}$	0	
$\gamma_t \gamma_x$	$2ip_y$	$F_2 p_{1+} - p_{2-} F_1$	0	
$\gamma_t \gamma_y$	$-2ip_x$	$-i F_2 p_{1+} - i p_{2-} F_1$	0	
$\gamma_t \gamma_z$	0	0	$-p_{1+} F_2 - p_{2+} F_1$	
$\gamma_0 \gamma_x = \gamma_t \gamma_y \gamma_z$	0	0	$-i F_2 F_1 - i p_{1+} p_{2+}$	
$\gamma_0 \gamma_y = \gamma_t \gamma_z \gamma_x$	0	0	$F_2 F_1 - p_{1+} p_{2+}$	
$\gamma_0 \gamma_z = \gamma_t \gamma_x \gamma_y$	$-2im$	$-i F_2 F_1 + i p_{1+} p_{2-}$	0	
$\gamma_0 \gamma_t = \gamma_x \gamma_y \gamma_z$	0	0	$i F_2 p_{1+} + i F_1 p_{2+}$	
$\gamma_0 = \gamma_x \gamma_y \gamma_z \gamma_t$	0	0	$i F_2 p_{1+} - i F_1 p_{2+}$	

Примечание. $p_{2+} = p_{2x} + ip_{2y} = p_2 e^{i\theta_2}$, $p_{2-} = p_{2x} - ip_{2y} = p_2 e^{-i\theta_2}$, $F_2 = E_2 + m$, $F_1 = E_1 + m$, $p^2 = (E - m) F$.

Матричные элементы комплексно сопряжены матричным элементам для случая $s_1 = +1$, $s_2 = -1$ (третья строка).

Матричные элементы комплексно сопряжены матричным элементам для случая $s_1 = +1$, $s_2 = +1$ (четвертый столбец).

и имеют обратный знак

должны выбрать постоянную нормировки $C_1 = (E + m)^{-1/2} = F^{-1/2}$. С учетом этой нормировки для величины $(\tilde{u}u)$ получаем

$$\begin{aligned} (\tilde{u}u) &= \frac{1}{F} (F \ 0 \ 0 \ -p_-) \begin{pmatrix} F \\ 0 \\ 0 \\ p_+ \end{pmatrix} = \frac{1}{F} (F^2 - p_- p_+) = \\ &= \frac{2m^2 + 2mE}{E + m} = 2m. \end{aligned}$$

Такой же результат получается и для состояния с $s = -1$. Следовательно, условие нормировки можно также записать в виде

$$(\tilde{u}u) = 2m. \quad (13.14)$$

Аналогичным образом можно показать справедливость следующих соотношений:

$$(\tilde{u}\gamma_x u) = 2p_x,$$

$$(\tilde{u}\gamma_y u) = 2p_y,$$

$$(\tilde{u}\gamma_z u) = 0.$$

Для дальнейшего весьма удобно иметь матричные элементы операторов γ для переходов между различными начальными и конечными состояниями. Они приведены в табл. 3.

Предельные случаи. В случае, когда состояние 1 соответствует покоящемуся позитрону, из табл. 3, полагая $F_1 = 0$ и $p_{1+} = p_{1-} = 1$, находим величину $\sqrt{F_2} (\tilde{u}_2 N u_1)$. Если же покоящемуся позитрону соответствуют состояния 1 и 2, то из табл. 3 находим величину $(\tilde{u}_2 N u_1)$ при $F_1 = F_2 = 0$ и $p_{1+} = p_{2+} = 1$.

Лекция четырнадцатая

МЕТОДЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ МАТРИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Матричный элемент оператора M между начальным состоянием с волновой функцией u_1 и конечным состоянием с волновой функцией u_2 обозначается через

$$(\tilde{u}_2 M u_1).$$

Величина матричного элемента не зависит от выбора представлений, если только эти представления связаны между собой унитарным преобразованием «эквивалентности». Действительно, так как при этом

$$u'_1 = Su_1,$$

$$u'_2 = Su_2,$$

$$M' = SMS^{-1},$$

$$\tilde{u}'_2 = \tilde{u}_2 \tilde{S},$$

то

$$\tilde{u}'_2 M' u'_1 = \tilde{u}_2 \tilde{S} S M S^{-1} S u_1 = \tilde{u}_2 M u_1.$$

Здесь мы воспользовались свойством унитарности матрицы S , согласно которому $\tilde{S} = S^{-1}$.

Прямой метод вычисления матричных элементов сводится просто к записи всех величин в матричной форме и проведении всех алгебраических операций. Таким способом были вычислены величины, приведенные в табл. 3.

В некоторых случаях, однако, конечный результат можно получить, как это будет показано ниже, более просто, используя другие методы вычисления. Из условия нормировки

$$\tilde{u}u = 2m,$$

при учете уравнения $\hat{p}u = tu$, следует, что

$$(\tilde{u}\hat{p}u) = 2m^2,$$

а

$$(\tilde{u}\gamma_\mu \hat{p}u) = m(\tilde{u}\gamma_\mu u).$$

С другой стороны, принимая во внимание уравнение $\tilde{u}\hat{p} = \hat{p}\tilde{u} = t\tilde{u}$, имеем

$$(\tilde{u}\hat{p}\gamma_\mu u) = m(\tilde{u}\gamma_\mu u).$$

Складывая последние два выражения, получаем

$$[\tilde{u}(\gamma_\mu \hat{p} + \hat{p}\gamma_\mu)u] = 2m(\tilde{u}\gamma_\mu u).$$

Согласно алгебраическому соотношению (10.9),

$$\hat{a}\hat{b} = -\hat{b}\hat{a} + 2a \cdot b,$$

имеем ($\gamma_\mu = \hat{1}$)

$$\hat{p}\gamma_\mu + \gamma_\mu\hat{p} = 2p_\mu.$$

Так как p_μ является c -числом, находим

$$2p_\mu(\tilde{u}u) = 2m(\tilde{u}\gamma_\mu u).$$

Наконец, учитывая условие нормировки $(\tilde{u}u) = 2m$, получаем

$$(\tilde{u}\gamma_\mu u) = 2p_\mu.$$

Отсюда, в частности, следует общее соотношение

$$\frac{(\tilde{u}\gamma_\mu u)}{(\tilde{u}u)} = \frac{p_\mu}{m} = \frac{E}{m},$$

которое показывает, что (возможное) условие нормировки

$$(\tilde{u}\gamma_t u) = \frac{E}{m}$$

эквивалентно требованию $\tilde{u}u = 1$.

Задача. При помощи методов, аналогичных только что использованным, покажите, что

$$(\tilde{u}\gamma_5 u) = 0.$$

ФИЗИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ СОСТОЯНИЙ С ОТРИЦАТЕЛЬНОЙ ЭНЕРГИЕЙ

Выше было показано, что уравнение Дирака для свободной частицы имеет ненулевые решения лишь при выполнении условия

$$E^2 = \mathbf{p}^2 + m^2,$$

т. е.

$$E = \pm \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}.$$

Физический смысл состояний с положительной энергией совершенно ясен, но этого нельзя сказать о состояниях с отрицательной энергией.

В свое время Шредингер предлагал просто исключить такие состояния из теории, как не имеющие физического смысла. Однако по поводу такого исключения

было высказано два существенных возражения. Первое из них — физическое, точнее, теоретическое. Уравнение Дирака допускает возможность переходов системы, находящейся в начальном состоянии с положительной энергией, в конечные состояния с отрицательной энергией. Исключение из теории таких переходов привело бы к внутреннему противоречию теории. Второе возражение является математическим. Оно заключается в том, что исключение состояний с отрицательной энергией приводит к нарушению полноты набора волновых функций. Разложение произвольной функции по неполному набору функций невозможно. Указанные обстоятельства привели Шредингера к непреодолимым трудностям.

Задача. Пусть при $t < 0$ частица, движущаяся по оси x , находилась в состоянии с положительной энергией и со спином $s = +1$. В момент времени $t = 0$ включается постоянный потенциал $A \parallel z$ ($A_x = A_y = 0$), который в момент $t = T$ выключается. Найти вероятность того, что в момент времени $t = T$ частица будет находиться в состоянии с отрицательной энергией.

Ответ.

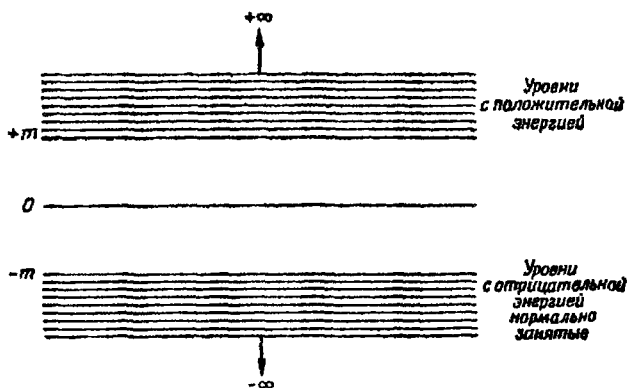
$$\left. \begin{array}{l} \text{Вероятность обнаружения частицы} \\ \text{в состоянии с отрицательной энер-} \\ \text{гией при } t = T \end{array} \right\} =$$

$$= \frac{A^2}{A^2 + m^2} \sin^2 [(m^2 + A^2)^{1/2} T].$$

Следует заметить, что при $E = -m$, $1/\sqrt{F} \rightarrow \infty$. Однако, когда $E = -m$, обращаются в нуль также и компоненты дираковского спинора u , поэтому такой предельный переход в окончательных формулах всегда возможен. Правильные результаты можно получить, не прибегая к такому предельному переходу, а просто в компонентах дираковского спинора u положить $F = 0$, $p_{\pm} = 1$ и нормирующий множитель $1/\sqrt{F}$ опустить.

В области положительных значений уровни энергии свободной частицы образуют непрерывный спектр, про-

стирающийся от $E = m$ до $E = +\infty$, а в области отрицательных значений, если таковые допустить, — непрерывный спектр от $E = -m$ до $E = -\infty$. Между $E = -m$ и $E = m$ уровни энергии свободной частицы отсутствуют (см. фиг. 9). Дирак высказал идею, что все состояния с отрицательной энергией обычно заняты. Все объяснения довольно туманного резервуара состояний



Фиг. 9.

с отрицательной энергией, если он и существует, как правило, содержат элементы чисто психологического характера, и поэтому не очень убедительны. Тем не менее, если встать на эту точку зрения, можно сделать несколько весьма важных выводов.

1. Так как все состояния с отрицательной энергией заняты, переходы электронов из состояний с положительной энергией в такие состояния происходить не могут.

2. Электроны в резервуаре состояний с отрицательной энергией не наблюдаемы. При переходе электрона в состояние с положительной энергией в резервуаре образуется «дырка», которая обнаруживает себя. Такая «дырка» ведет себя как позитрон, т. е. электрон с положительным зарядом.

3. Принцип Паули позволяет говорить о заполненности резервуара состояний с отрицательной энергией. Если бы в каждом состоянии могло находиться произвольное число электронов (а не только один), то такой

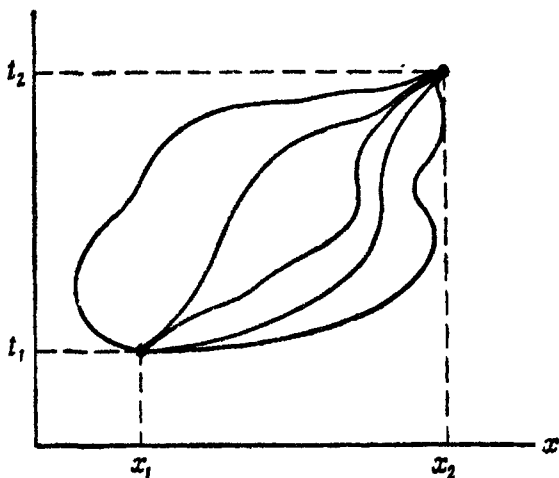
резервуар состояний заполнить было бы невозможно. В связи с этим теорию Дирака часто рассматривают как «доказательство» принципа Паули.

Иная интерпретация состояний с отрицательной энергией была предложена автором этих лекций. Основная идея этой интерпретации состоит в том, что состояния с отрицательной энергией рассматриваются как состояния, в которых движение электронов носит *попятный характер во времени*.

В классическом уравнении движения

$$m \frac{d^2 z_\mu}{ds^2} = e \frac{dz_\nu}{ds} F_{\mu\nu},$$

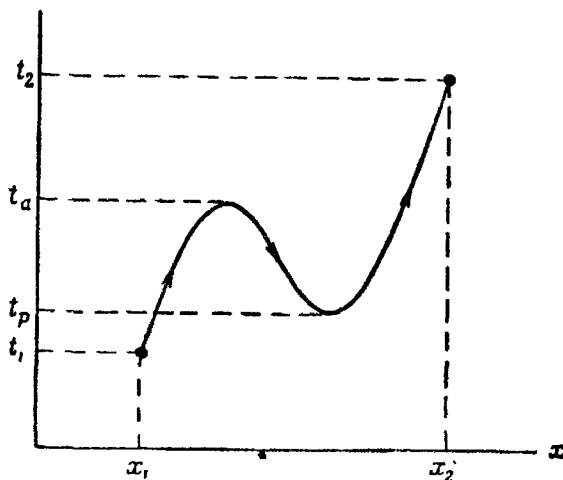
изменение направления собственного времени s эквивалентно изменению знака заряда частицы, так что попятно движущийся электрон подобен позитрону, движущемуся в обычном направлении.



Ф и г. 10.

В элементарной квантовой механике при вычислении полной амплитуды вероятности перехода электрона из точки x_1, t_1 в точку x_2, t_2 производится суммирование по всем возможным траекториям электрона между этими точками при условии, что время для всех них

течет в обычном направлении. Такие траектории частицы представлены кривыми на фиг. 10. Изложенная же выше точка зрения автора на состояния с отрицательной энергией допускает также возможность существования траекторий вида, представленного на фиг. 11.



Фиг. 11.

Для наблюдателя, воспринимающего течение времени обычным путем из прошедшего в будущее, последовательность событий на фиг. 11 выглядит следующим образом:

- $t_1 \rightarrow t_p$ — имеется лишь начальный электрон
- $t_p \rightarrow$ — имеется начальный электрон и происходит рождение электронно-позитронной пары;
- $t_p \rightarrow t_a$ — имеются начальный электрон и образованная электронно-позитронная пара;
- $t_a \rightarrow$ — происходит аннигиляция позитрона с начальным электроном;
- $t_a \rightarrow t_2$ — остается лишь один, вновь рожденный электрон.

При квантовомеханических применениях изложенной идеи необходимо следовать двум правилам.

1. При вычислении матричных элементов перехода для позитронов волновые функции начального и конеч-

ного состояний необходимо поменять местами. Так, матричный элемент перехода электрона из состояния прошедшего во времени $\Psi_{\text{прош}}$ в состояние будущего $\Psi_{\text{буд}}$ определяется выражением

$$\int \tilde{\Psi}_{\text{буд}} M \Psi_{\text{прош}} dV.$$

Если же электрон совершает попятное движение из будущего в прошедшее, то для матричного элемента перехода имеем

$$\int \tilde{\Psi}_{\text{прош}} M \Psi_{\text{буд}} dV.$$

2. Волновая функция свободного электрона в состоянии с положительной энергией E имеет вид $e^{-ip \cdot x}$ причем $p_4 = E$. Если же энергия E отрицательна, то волновая функция $e^{-ip \cdot x}$ описывает позитрон с энергией $-E$ (т. е. $|E|$) и 4-импульсом $-p_\mu$.

ЗАДАЧИ КВАНТОВОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ ДЛЯ СЛУЧАЯ ЗАДАННОГО ПОТЕНЦИАЛА ВНЕШНЕГО ПОЛЯ

Лекция пятнадцатая

РОЖДЕНИЕ И АННИГИЛЯЦИЯ ПАР

В последней лекции обсуждались две возможности перехода электрона из состояния Ψ_1 в состояние Ψ_2 . Именно:

С л у ч а й I. Оба состояния Ψ_1 и Ψ_2 соответствуют положительной энергии. При этом Ψ_1 соответствует состоянию электрона в «прошедшем», а Ψ_2 — состоянию электрона в «будущем». Такой переход представляет собой рассеяние электрона.

С л у ч а й II. Состояния Ψ_1 и Ψ_2 соответствуют отрицательной энергии, причем Ψ_1 соответствует состоянию позитрона в «будущем», а Ψ_2 — состоянию позитрона в «прошедшем». Такой переход представляет собой рассеяние позитрона.

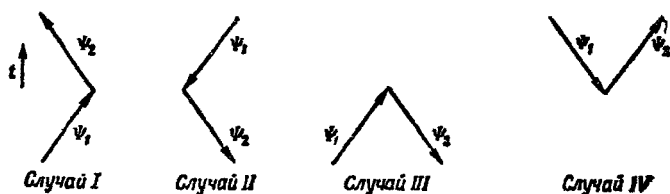
Существование состояний с отрицательной энергией обуславливает два новых возможных перехода:

С л у ч а й III. Состояние Ψ_1 соответствует положительной энергии, а Ψ_2 — отрицательной энергии, причем Ψ_1 соответствует состоянию электрона в «прошедшем», а Ψ_2 — состоянию позитрона в «прошедшем». Таким образом, в прошедшем имелись две частицы, а в будущем — ни одной. Такой переход представляет собой процесс аннигиляции пары.

С л у ч а й IV. Состояние Ψ_1 соответствует отрицательной энергии, а Ψ_2 — положительной энергии. При этом Ψ_1 соответствует состоянию позитрона в «будущем», а Ψ_2 — состоянию электрона в «будущем». Такой переход описывает рождение пары.

Перечисленные четыре случая можно представить в виде диаграмм (фиг. 12). Заметим, что на каждой из

диаграмм стрелками указаны переходы из состояния Ψ_1 в состояние Ψ_2 , причем время во всех случаях течет снизу вверх. В принятой нами интерпретации состояний с отрицательной энергией стрелки на диаграммах показывают направление движения электрона. Говоря обычным языком, стрелки на диаграммах направлены по направлению возрастания времени или против



Ф и г. 12.

него в зависимости от того, положительна или отрицательна величина \hat{p} , или, что то же самое, соответствует ли состояние электрону или позитрону.

СОХРАНЕНИЕ ЭНЕРГИИ

Энергетические соотношения для рассеяния электронов (случай I) были получены в предыдущих лекциях. Можно показать, что эти соотношения справедливы также и для рассеяния позитронов (случай II). Чтобы убедиться в этом, напомним, что в случае I при переходе электрона из состояния с энергией E_1 в состояние с энергией E_2 под действием возмущения вида $e^{-i\omega t}$ происходит изменение энергии электрона на положительную величину ω . Действительно, амплитуда рассеяния пропорциональна величине

$$\begin{aligned} \int (e^{-iE_2 t})^* e^{-i\omega t} e^{-iE_1 t} dt &= \\ &= \int e^{i(E_2 - \omega - E_1)t} dt. \end{aligned} \quad (15.1)$$

Как было показано выше, между значениями E_2 и $E_1 + \omega$ имеется резонанс, приводящий к тому, что основной вклад в рассеянии дают состояния с $E_2 \approx E_1 + \omega$. В случае II возникает такой же интеграл с той лишь разницей, что E_2 и E_1 отрицательны. При этом по-

электрон переходит из состояния с энергией $E_{\text{прош}} = -E_2$ в состояние с энергией $E_{\text{буд}} = -E_1$. Если оператор возмущения имеет такой же вид, как и выше, то амплитуда рассеяния будет велика опять-таки лишь при $E_2 = E_1 + \omega$ или $-E_{\text{прош}} = -E_{\text{буд}} + \omega$, т. е. $E_{\text{буд}} = E_{\text{прош}} + \omega$. Таким образом, так же как и при рассеянии электрона, энергия позитрона под действием возмущения увеличивается на величину ω .

ФУНКЦИЯ РАСПРОСТРАНЕНИЯ

В нерелятивистском случае волновое уравнение (уравнение Шредингера) с учетом возмущающего потенциала имеет вид

$$i \frac{\partial \Psi}{\partial t} = H_0 \Psi + V \Psi, \quad (15.2)$$

где H_0 — невозмущенный гамильтониан системы, а V — оператор возмущения. Можно показать, что для свободной частицы ядро (функция распространения), характеризующее амплитуду перехода из пространственно-временной точки 1 в точку 2, определяется выражением

$$K_0(2, 1) = \begin{cases} N \exp \left[\frac{i}{2} m \frac{(x_2 - x_1)^2}{t_2 - t_1} \right] & \text{при } t_2 > t_1, \\ 0 & \text{при } t_2 < t_1, \end{cases} \quad (15.3)$$

где N — нормировочный множитель, зависящий от временного интервала $t_2 - t_1$ и массы частицы:

$$N = \sqrt{\frac{m}{2\pi i (t_2 - t_1)}}.$$

Существенно заметить, что при $t_2 < t_1$ ядро (15.3), по определению, равно нулю. Можно показать, что функция $K_0(2, 1)$ удовлетворяет уравнению

$$\left[i \frac{\partial}{\partial t_2} - H_0(2) \right] K_0(2, 1) = i \delta(2, 1). \quad (15.4)$$

Функция распространения $K_V(2, 1)$, определяющая амплитуду перехода частицы при наличии возмущения V ,

удовлетворяет уравнению

$$\left[i \frac{\partial}{\partial t_2} - H_0(2) - V(2) \right] K_V(2, 1) = i \delta(2, 1). \quad (15.5)$$

Можно показать, что функцию $K_V(2, 1)$ можно представить в виде ряда

$$K_V(2, 1) = K_0(2, 1) - i \int K_0(2, 3) V(3) K_0(3, 1) d^3x_3 dt_3 - \\ - \int K_0(2, 4) V(4) K_0(4, 3) V(3) K_0(3, 1) d^3x_4 dt_4 d^3x_3 dt_3 + \dots \quad (15.6)$$

В случае, когда полный гамильтониан системы $H = H_0 + V$ не зависит от времени и собственные функции стационарного состояния φ_n известны, функция распространения $K_V(2, 1)$ будет иметь вид следующей суммы:

$$K_V(2, 1) = \sum_n e^{-iE_n(t_2 - t_1)} \varphi_n(\mathbf{x}_2) \varphi_n^*(\mathbf{x}_1). \quad (15.7)$$

Изложенная идея непосредственно обобщается на релятивистский случай (уравнение Дирака). Как уже указывалось выше, путем соответствующего выбора гамильтониана уравнение Дирака можно записать в гамильтоновой форме:

$$i \frac{\partial \Psi}{\partial t} = H \Psi = \alpha \cdot (\mathbf{p} - e\mathbf{A}) \Psi + e\varphi \Psi + m\beta \Psi.$$

Функция распространения $K^A(2, 1)$ при этом определяется решением уравнения

$$\left[i \frac{\partial}{\partial t_2} - e\varphi_2 - \alpha \cdot (-i\nabla - e\mathbf{A}_2) - m\beta \right] K^A(2, 1) = \\ = i\beta \delta(2, 1). \quad (15.8)$$

Матрица β в правой части уравнения (15.8) введена для релятивистской инвариантности функции распространения [обратите внимание на аналогию этого уравнения с нерелятивистским уравнением (15.5)]. Умножая уравнение (15.8) на матрицу β , запишем это уравнение в более простой форме:

$$(i\hat{\nabla}_2 - e\hat{A}_2 - m) K^A(2, 1) = i\delta(2, 1). \quad (15.9)$$

Уравнение для функции распространения свободной частицы $K_+(2, 1)$ получается из уравнения (15.9), если в нем положить просто $\hat{A}_2 = 0$:

$$(i\hat{\nabla}_2 - m)K_+(2, 1) = i\delta(2, 1). \quad (15.10)$$

Функция $K_+(2, 1)$ является обобщением нерелятивистской функции распространения $K_0(2, 1)$, а (15.10) — обобщением нерелятивистского уравнения (15.4).

Так же, как и функцию $K_V(2, 1)$, которую можно было представить в виде ряда (15.6), функцию $K^A(2, 1)$ можно представить как

$$\begin{aligned} K^A(2, 1) = & K_+(2, 1) - i \int K_+(2, 3) e^{\hat{A}(3)} K_+(3, 1) d\tau_3 - \\ & - \int K_+(2, 3) e^{\hat{A}(3)} K_+(3, 4) e^{\hat{A}(4)} \times \\ & \times K_+(4, 1) d\tau_3 d\tau_4 + \dots \end{aligned} \quad (15.11)$$

Заметим, что функция распространения $K^A(2, 1)$ является четырехрядной матрицей, и поэтому она определяет все компоненты волновой функции Ψ . Весьма существенное значение имеет порядок различных членов в разложении (15.11). Элемент интегрирования в формуле (15.11) представляет собой элемент объема в четырехмерном пространстве:

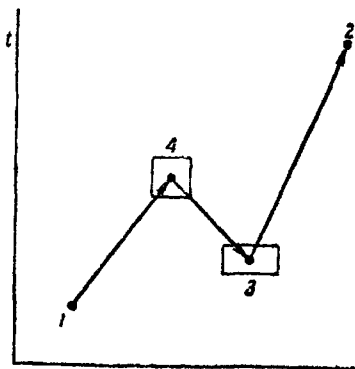
$$d\tau = dx_1 dx_2 dx_3 dx_4.$$

Потенциал $-ie\hat{A}(1)$ можно интерпретировать как амплитуду рассеяния частицы в единице объема и в единицу времени в 4-мерной точке 1. Таким образом, разложение (15.11) по своему смыслу полностью аналогично разложению (15.6).

Задача. Покажите, что функция $K^A(2, 1)$, представленная в виде ряда (15.11), удовлетворяет уравнениям (15.8) и (15.9).

В нерелятивистской теории траектории, характеризующие попятное движение частиц во времени, исключены. В релятивистском же случае это не так. Существование и физическая интерпретация отрицательных собственных значений энергии в уравнении Дирака позволяют включить в теорию такие траектории частиц.

Так, например, условие $t_4 > t_3$ (фиг. 13) подразумевает существование виртуальной пары. При этом отрезок от t_4 до t_3 соответствует движению позитрона.



Ф и г. 13.

В стационарном случае, если известны волновые функции всех возможных состояний системы, можно определить функцию распространения $K_+^A(2, 1)$ в виде

$$K_+^A(2, 1) = \begin{cases} \sum_{E_n > 0} e^{-iE_n \cdot (t_2 - t_1)} \varphi_n(\mathbf{x}_2) \tilde{\varphi}_n(\mathbf{x}_1) & \text{при } t_2 > t_1, \\ - \sum_{E_n < 0} e^{-iE_n \cdot (t_2 - t_1)} \varphi_n(\mathbf{x}_2) \tilde{\varphi}_n(\mathbf{x}_1) & \text{при } t_2 < t_1. \end{cases} \quad (15.12)$$

Укажем еще на одно решение уравнения (15.9):

$$K_0^A(2, 1) = \begin{cases} \sum_{E_n > 0} e^{-iE_n \cdot (t_2 - t_1)} \varphi_n(\mathbf{x}_2) \tilde{\varphi}_n(\mathbf{x}_1) + \\ + \sum_{E_n < 0} e^{-iE_n \cdot (t_2 - t_1)} \varphi_n(\mathbf{x}_2) \tilde{\varphi}_n(\mathbf{x}_1) & \text{при } t_2 > t_1, \\ 0 & \text{при } t_2 < t_1. \end{cases} \quad (15.13)$$

Выражение (15.12) можно истолковать в соответствии с позитронной трактовкой состояний с отрицательной энергией. Так, при «обычной» последовательности времен ($t_2 > t_1$) вклад в функцию распространения дают

лишь состояния с положительной энергией, т. е. электронные состояния. При «обратной» же последовательности времен ($t_2 < t_1$) вклад дают лишь состояния с отрицательной энергией, т. е. позитронные состояния. С другой стороны, выражение (15.13) не имеет столь удовлетворительной интерпретации. Несмотря на то что функция распространения $K_0^A(2, 1)$, определенная выражением (15.13), математически также является решением уравнения (15.9) (как будет показано ниже), для ее физической интерпретации приходится ввести понятие электрона в состоянии с отрицательной энергией.

Чтобы показать, что функции (15.12) и (15.13) являются решениями одного и того же неоднородного уравнения, заметим, что их разность для *любых* времен t_2 равна

$$\sum_{E_n < 0} e^{iE_n t_1} e^{-iE_n t_2} \varphi_n(\mathbf{x}_2) \tilde{\varphi}_n(\mathbf{x}_1).$$

Каждый член этой суммы является решением однородного уравнения [т. е. уравнения (15.9) с нулевой правой частью]. Возможность существования двух указанных решений уравнения (15.9) является следствием того, что граничные условия нами не полностью фиксировались. В дальнейшем мы всегда будем пользоваться функцией $K_+^A(2, 1)$.

Функция распространения $K_+^A(2, 1)$, определенная выражением (15.12), позволяет трактовать случаи III и IV (рождение и аннигиляцию пары), рассмотренные в самом начале этой лекции. В каждом из этих случаев потенциал $-ie\hat{A}(3)$ действует в точке пересечения траекторий электрона и позитрона.

Лекция шестнадцатая

ПРИМЕНЕНИЕ ФУНКЦИИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ $K_+(2, 1)$

Волновую функцию системы в точке \mathbf{x}_2 и в момент времени t_2 в нерелятивистской теории можно вычислить с помощью нерелятивистской функции распрост-

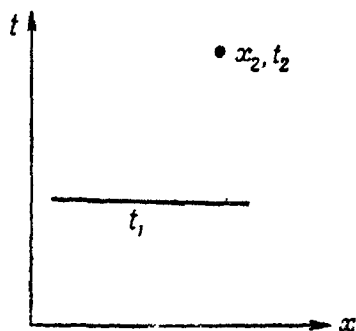
ранения $K_0(x_2, t_2; x_1, t_1)$, если известна волновая функция в какой-либо предшествующий момент t_1 (Фиг. 14):

$$\Psi(x_2, t_2) = \int K_0(x_2, t_2; x_1, t_1) \Psi(x_1, t_1) d^3x_1.$$

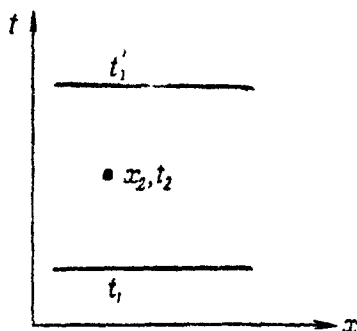
Можно было ожидать, что в релятивистском случае это соотношение обобщается:

$$\Psi(x_2, t_2) = \int K_+(x_2, t_2; x_1, t_1) \gamma_t \Psi(x_1, t_1) d^3x_1.$$

Это, однако, оказывается не так. В релятивистском случае недостаточно знать волновую функцию только лишь в предшествующий момент времени, так как



Фиг. 14.



Фиг. 15.

функция распространения $K_+(2, 1)$ отлична от нуля и для $t_2 < t_1$. Волновая функция в точке x_2, t_2 (см. Фиг. 15) при этом определяется выражением (см. функцию распространения $K_+^A(2, 1)$ в предшествующей лекции):

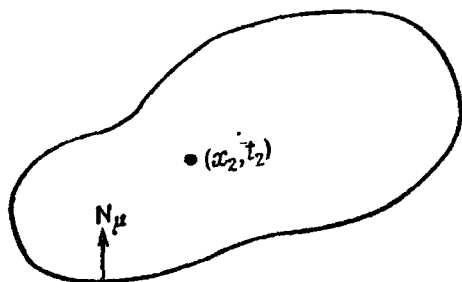
$$\Psi(x_2, t_2) = \int K_+(x_2, t_2; x_1, t_1) \gamma_t \Psi(x_1, t_1) d^3x_1 - \int K_+(x_2, t_2; x_1, t_1') \gamma_t \Psi(x_1, t_1') d^3x_1, \quad (16.1)$$

где

$$t_1 < t_2 < t_1'.$$

Первое слагаемое представляет вклад состояний с положительной энергией и зависит от предшествующих моментов времени, а второе слагаемое — вклад состояний с отрицательной энергией и зависит от последующих моментов времени. Выражение (16.1)

можно обобщить, замечая, что для определения функции $\Psi(x_2, t_2)$ необходимо знать волновую функцию



Ф и г. 16.

$\Psi(x_1, t_1)$ на четырехмерной поверхности, окружающей точку x_2, t_2 (фиг. 16):

$$\Psi(x_2, t_2) = \int K_+(2, 1) \hat{N}(1) \Psi(1) d^4x_1, \quad (16.2)$$

где N_μ — 4-вектор нормали к поверхности, окружающей точку x_2, t_2 .

ВЕРОЯТНОСТЬ ПЕРЕХОДА

Амплитуда вероятности того, что система под действием потенциала \hat{A} из состояния f перейдет в состояние g , определяется выражением, подобным выражению, полученному в нерелятивистской теории:

$$a_{21} = \iint \tilde{g}(2) \beta K_+^A(2, 1) \beta f(1) d^3x_1 d^3x_2. \quad (16.3)$$

Воспользовавшись разложением функции $K_+^A(2, 1)$ по степеням $K_+(2, 1)$ [см. формулу (15.11)] и замечая, что амплитуда вероятности перехода между состояниями f и g , для свободной частицы равна нулю (вследствие ортогональности состояний f и g), в первом приближении (борновское приближение) для выражения (16.3) получаем

$$a_{21} = -i \iiint \tilde{g}(2) \beta K_+(2, 3) e^{\hat{A}(3)} K_+(3, 1) \beta f(1) d\tau_3 d^3x_1 d^3x_2.$$

Удобно ввести обозначения

$$f(3) = \int K_+(3, 1) \beta f(1) d^3x_1,$$

$$\tilde{g}(3) = \int \tilde{g}(2) \beta K_+(2, 3) d^3x_2.$$

Они показывают, что волновая функция частицы непосредственно перед рассеянием совпадает с волновой функцией свободной частицы f , а после рассеяния — с волновой функцией свободной частицы g . Тем самым исключаются вычисления, связанные со свободным движением частицы. Амплитуду вероятности перехода в первом приближении можно записать в виде

$$-i \int \tilde{g}(3) e^{\hat{A}(3)} f(3) d\tau_3 \quad (16.4)$$

(интегрирование проводится как по времени, так и по пространству). Поправка второго приближения запишется в виде

$$-\frac{1}{2} \iint \tilde{g}(4) e^{\hat{A}(4)} K_+(4, 3) e^{\hat{A}(3)} f(3) d\tau_3 d\tau_4.$$

Если функция $f(3)$ соответствует состоянию с отрицательной энергией, то вместо электрона в прошедшем она описывает позитрон в будущем, а указанная амплитуда вероятности перехода при этом описывает рождение пары.

РАСSEЯНИЕ ЭЛЕКТРОНА В КУЛОНОВСКОМ ПОЛЕ

Здесь мы воспользуемся изложенной выше теорией для вычисления рассеяния электрона на бесконечно тяжелом ядре с зарядом Ze . Предположим, что импульс падающего электрона направлен вдоль оси x , а рассеянного — лежит в плоскости xy (фиг. 17). Имеем

$$\hat{p}_1 = \gamma_t E_1 - \gamma_x p_{1x},$$

$$\hat{p}_2 = \gamma_t E_2 - \gamma_x p_{2x} - \gamma_y p_{2y}.$$

Потенциал, создаваемый стационарным зарядом Ze , равен

$$\varphi = \frac{Ze}{r}, \quad \mathbf{A} = 0,$$

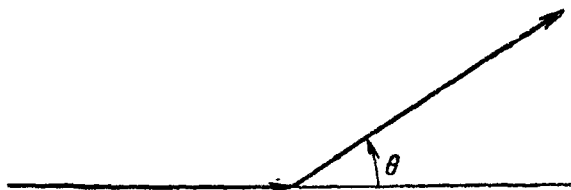
т. е.

$$\hat{A} = \gamma_t \frac{Ze}{r}.$$

Волновые функции начального и конечного состояний электрона являются плоскими волнами:

$$f(1) = u_1 e^{-ip_1 \cdot x}, \quad g(2) = u_2 e^{-ip_2 \cdot x}$$

(они являются четырехкомпонентными спинорами). При этом, согласно выражению (16.4), для амплитуды



Ф и г. 17.

вероятности перехода из состояния f в состояние g (с изменением импульса $p_1 \rightarrow p_2$) в первом приближении имеем

$$M = -i \int \tilde{u}_2 e^{ip_2 \cdot x} \frac{Ze^2}{r} \gamma_t \tilde{u}_1 e^{-ip_1 \cdot x} d^3x dt.$$

Отделяя временную и пространственную зависимости волновых функций, получаем

$$M = -i (\tilde{u}_2 \gamma_t u_1) \left[\int e^{-ip_2 \cdot x} \frac{Ze^2}{r} e^{ip_1 \cdot x} d^3x \right] \times \\ \times \left[\int_0^T e^{iE_2 t} e^{-iE_1 t} dt \right].$$

Первый интеграл представляет собой фурье-компоненту потенциала $V(\mathbf{Q})$, вычисленную в нерелятивистской теории рассеяния. Имеем

$$M = -i (\tilde{u}_2 \gamma_t u_1) V(\mathbf{Q}) \left\{ \frac{e^{i(E_2 - E_1)t} - 1}{i(E_2 - E_1)} \right\}, \quad (16.5)$$

где

$$V(\mathbf{Q}) = \frac{4\pi Ze^2}{Q^2}, \quad \mathbf{Q} = \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2.$$

Вероятность перехода в единицу времени определяется формулой

$$\begin{aligned} & \frac{\text{Вероятность перехода}}{\text{сек}} = \\ & = \frac{2\pi}{(\Pi N)} |M|^2 \times (\text{Плотность конечных состояний}). \end{aligned} \quad (16.6)$$

Это результат временной теории возмущений [множитель $(\Pi N)^{-1}$ является следствием того, что волновые функции частиц не нормированы на единицу в единице объема]. Величина (ΠN) представляет собой произведение нормирующих множителей N волновых функций всех электронов в начальном и конечном состояниях. Для одного электрона

$$N = (\tilde{u} \gamma_i u). \quad (16.7)$$

Отсюда в используемой нами нормировке имеем $N=2E$.

Необходимость введения множителя (ΠN) обусловлена принятой нормировкой волновых функций

$$(\tilde{u} u) = 2m \text{ или } (\tilde{u} \gamma_i u) = 2E;$$

при вычислении вероятности перехода их следует нормировать обычным нерелятивистским способом: $\Psi^* \Psi = 1$ или $\tilde{u} \gamma_i u = 1$ (при этом $N = 1$).

Вычисленный таким образом матричный элемент M релятивистски инвариантен, и поэтому в дальнейшем мы основное внимание будем уделять именно ему. Если известен матричный элемент M , вероятность перехода можно вычислить по формуле (16.6).

Плотность состояний и сечение рассеяния. Для рассматриваемой нами задачи рассеяния электрона

$$M = -i (\tilde{u}_2 \gamma_i u_1) \frac{4\pi Ze^2}{Q^2}.$$

Для вероятности перехода при этом имеем

$$\begin{aligned} \frac{\text{Вероятность перехода}}{\text{сек}} &= \frac{2\pi}{(2E_1)(2E_2)} |(\tilde{u}_2 \gamma_i u_1)|^2 \times \\ &\times \left| \frac{4\pi Ze^2}{Q^2} \right|^2 \frac{E_2 p_2 d\Omega}{(2\pi)^3}. \end{aligned} \quad (16.8)$$

Здесь учтено, что

$$\text{Плотность конечных состояний} = \frac{d^3 p_2}{(2\pi)^3 dE_2} = \frac{p_2^2 dp_2 d\Omega}{(2\pi)^3 dE_2},$$

или [так как $E_2^2 = p_2^2 + m^2$, а следовательно, $dp_2/dE_2 = E_2/p_2$]

$$\text{Плотность конечных состояний} = \frac{E_2 p_2 d\Omega}{(2\pi)^3}.$$

В случае, когда падающая плоская волна нормирована на одну частицу в единице объема, сечение рассеяния связано с вероятностью перехода в единицу времени следующим соотношением¹⁾:

$$\frac{\text{Вероятность перехода}}{\text{сек}} = \sigma v_1 = \sigma \frac{p_1}{E_1},$$

или

$$\sigma = \left(\frac{E_1}{p_1}\right) \times \frac{\text{Вероятность перехода}}{\text{сек}}.$$

Существенное отличие релятивистской трактовки рассеяния электрона от нерелятивистской обусловлено матричным элементом $(\tilde{u}_2 \gamma_t u_1)$. Согласно табл. 3, для частицы, движущейся в плоскости xu , при $s_1 = +1$, $s_2 = +1$ имеем

$$|(\tilde{u}_2 \gamma_t u_1)|^2 = \frac{1}{F_1 F_2} |F_1 F_2 + p_{1+} p_{2-}|^2,$$

где

$$F_1 = F_2 = E + m.$$

[В процессе рассеяния энергия сохраняется, т. е. $E_1 = E_2$. Это можно усмотреть из временной зависимости матричного элемента (16.5)], а

$$p_{1+} = p, \quad p_{2-} = pe^{-i\theta}.$$

Из равенства $E_1 = E_2$ следует, что импульс частицы

$$\begin{aligned} 1) \quad p_1 &= \frac{mv_1}{\sqrt{1-v_1^2}} \rightarrow p_1^2 = \frac{m^2 v_1^2}{1-v_1^2} \rightarrow p_1^2 = \\ &= (m^2 + p_1^2) v_1^2 = E_1^2 v_1^2. \end{aligned}$$

Следовательно, $v_1 = p_1/E_1$.

при рассеянии по величине не меняется.) Таким образом,

$$\begin{aligned} |(\tilde{u}_2 \gamma_t u_1)|^2 &= \frac{1}{(E+m)^2} |(E+m)^2 + p^2 e^{-i\theta}|^2 = \\ &= \frac{1}{(E+m)^2} \left\{ 4E^2 (E+m)^2 \left[1 - \frac{p^2}{E^2} \sin^2 \frac{\theta}{2} \right] \right\} = \\ &= (2E)^2 \left[1 - v^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right]. \end{aligned}$$

При $s_1 = +1$, $s_2 = -1$ или при $s_1 = -1$, $s_2 = +1$ указанный матричный элемент оператора γ_t равен нулю. При $s_1 = s_2 = -1$ этот матричный элемент по абсолютной величине такой же, как и при $s_1 = s_2 = +1$. Отсюда следует, что спин частицы при рассеянии не меняется (в борновском приближении), и, следовательно, сечение рассеяния не зависит от спина

$$\sigma = \frac{4Z^2 e^4 E^2}{Q^4} \left[1 - v^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right] d\Omega,$$

где

$$Q = 2p \sin \frac{\theta}{2}.$$

Критерий применимости борновского приближения, использованного при выводе этой формулы, имеет вид $Ze^2/\hbar v \ll 1$. В ультрарелятивистском случае, когда $v \approx c$, имеем $Z \ll 137$. Что же касается нерелятивистского случая, то рассеяние частицы в кулоновском поле можно рассчитать точно (т. е. в любом приближении по потенциалу). Точное решение уравнения Дирака в нерелятивистском случае выражается через гипергеометрические функции. Рассеяние в кулоновском поле в нерелятивистском случае впервые было рассчитано Моттом и получило название моттовского рассеяния. При средних энергиях (~ 200 кэв) вероятность изменения спина частицы при рассеянии оказывается заметной. Этот эффект можно использовать для получения поляризованных электронов.

Задачи. 1. Вычислите сечение резерфордского рассеяния в случае уравнения Клейна — Гордона (для частицы с нулевым спином),

Ответ.

$$\sigma = \frac{4Z^2 e^4 E^2}{Q^4} d\Omega.$$

2. Покажите, что формула для сечения рассеяния электронов остается в силе и для рассеяния позитронов (при вычислении матричных элементов используйте функции позитронных состояний).

Лекция семнадцатая

ВЫЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ДЛЯ СВОБОДНОЙ ЧАСТИЦЫ

Как было показано в пятнадцатой лекции, функция распространения частицы при отсутствии внешних потенциалов и в стационарном случае, когда гамильтониан не зависит от времени, определяется выражением

$$K_+(2, 1) = \begin{cases} \sum_{E_n > 0} \varphi_n(\mathbf{x}_2) \tilde{\varphi}_n(\mathbf{x}_1) e^{-iE_n(t_2 - t_1)} & \text{при } t_2 > t_1, \\ -\sum_{E_n < 0} \varphi_n(\mathbf{x}_2) \tilde{\varphi}_n(\mathbf{x}_1) e^{-iE_n(t_2 - t_1)} & \text{при } t_2 < t_1. \end{cases}$$

Собственные функции $\varphi_n(\mathbf{x})$ в случае свободной частицы имеют вид

$$u_p e^{i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}}.$$

Поэтому сумма по энергиям E_n превращается в интеграл по импульсу \mathbf{p} . Функция u_p представляет собой спинор, соответствующий состоянию электронов с импульсом \mathbf{p} , положительной или отрицательной энергией и заданной проекцией спина (либо $+1$; либо -1). Учитывая это, функцию распространения для свободной частицы при $t_2 > t_1$ запишем в виде

$$K_+(2, 1) = \sum_{\text{По спинам}} \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} u_p \tilde{u}_p e^{i\mathbf{p} \cdot (\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)} e^{-iE_p(t_2 - t_1)},$$

где $E_p = +\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$. Множитель $1/(2\pi)^3$ представ-

ляет собой плотность состояний частицы в единице пространственного объема, приходящуюся на единицу фазового объема. Множитель $1/2E_p$ обусловлен используемой нормировкой волновых функций, согласно которой $u\tilde{u}=2m$ или $u\gamma_t\tilde{u}=2E_p$. Спиноры u_p в приведенном выражении соответствуют состояниям с положительной энергией. Для состояний с отрицательной энергией ($E_p=-\sqrt{p^2+m^2}$), видоизменяя соответственно спиноры u_p , при $t_2 < t_1$ получаем

$$K_+(2, 1) = - \sum_{\text{По спинам}} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} u_p \tilde{u}_p e^{ip \cdot (x_2 - x_1)} e^{+iE_p(t_2 - t_1)}.$$

Вычислим сначала функцию распространения для случая $t_2 > t_1$. Для этого найдем величину $u_p \tilde{u}_p$ для состояний с положительной энергией, импульсом частицы p , лежащим в плоскости xy , и спином, направленным вверх ($s = +1$). В этих условиях

$$u_p = \frac{1}{\sqrt{E+m}} \begin{pmatrix} E+m \\ 0 \\ 0 \\ p_x + ip_y \end{pmatrix},$$

$$\tilde{u}_p = \frac{1}{\sqrt{E+m}} (E+m, 0, 0, -p_x + ip_y).$$

Заметим, что в произведении $u_p \tilde{u}_p$ сомножители расположены в обратном порядке. В результате это произведение является матрицей, а не числом. В соответствии с правилами матричной алгебры получаем

$$u_p \tilde{u}_p = \frac{1}{E+m} \begin{pmatrix} (E+m)^2 & 0 & 0 & (E+m)(-p_x + ip_y) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ (E+m)(p_x + ip_y) & 0 & 0 & (p_x + ip_y)(-p_x + ip_y) \end{pmatrix}.$$

Учитывая соотношение

$$(p_x + ip_y)(-p_x + ip_y) = -p^2 = -E^2 + m^2,$$

Окончательно находим

$$u_p \tilde{u}_p = \begin{pmatrix} E + m & 0 & 0 & -p_x + ip_y \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ p_x + ip_y & 0 & 0 & -E + m \end{pmatrix} \text{ при } s = +1.$$

Совершенно аналогично для состояний со спином частицы, направленным вниз ($s = -1$), получаем

$$u_p = \frac{1}{\sqrt{E+m}} \begin{pmatrix} 0 \\ E+m \\ p_x - ip_y \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\tilde{u}_p = \frac{1}{\sqrt{E+m}} (0, E+m, -p_x - ip_y, 0),$$

$$u_p \tilde{u}_p = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E+m & -p_x - ip_y & 0 \\ 0 & p_x - ip_y & -E+m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Можно показать, что сумма матриц $u_p \tilde{u}_p$ для состояний $s = +1$ и $s = -1$ равна

$$E\gamma_t - p_x\gamma_x - p_y\gamma_y + m.$$

При произвольном направлении импульса \mathbf{p} к этому выражению следует добавить член $-p_z\gamma_z$. Таким образом, в общем случае имеем

$$(u_p \tilde{u}_p)_{s=+1} + (u_p \tilde{u}_p)_{s=-1} = E\gamma_t - \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\gamma} + m = \hat{\mathbf{p}} + m.$$

Так как при получении этой формулы знак энергии не учитывался, она справедлива при любом знаке энергии.

Положим далее $t_2 - t_1 = t$ и $x_2 - x_1 = x$. Для $t > 0$ функция распространения принимает вид

$$K_+(2, 1) = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} (E_p \gamma_t - \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\gamma} + m) \frac{1}{2E_p} e^{-i(E_p t - \mathbf{p} \cdot \mathbf{x})}.$$

Вследствие того, что переменная интегрирования \mathbf{p} содержится в экспоненте в виде $E_p = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$, этот интеграл не сводится к элементарным функциям. Заметим, что его можно записать также в следующем виде:

$$K_+(2,1) = (i\gamma_t \frac{\partial}{\partial t} + i\gamma_x \frac{\partial}{\partial x} + i\gamma_y \frac{\partial}{\partial y} + i\gamma_z \frac{\partial}{\partial z} + m) \times \\ \times \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3 2E_p} e^{-i(E_p t - \mathbf{p} \cdot \mathbf{x})} = \\ = i(i\hat{\nabla} + m) I_+(t, \mathbf{x}),$$

где

$$I_+(t, \mathbf{x}) = -i \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3 2E_p} e^{-i(E_p t - \mathbf{p} \cdot \mathbf{x})}.$$

При такой форме записи вместо четырех интегралов приходится вычислять лишь один. В качестве упражнения можно проверить, что для $t < 0$ получается аналогичный результат с той лишь разницей, что у t знак меняется на обратный. Поэтому, если в выражении для $I_+(t, \mathbf{x})$ заменить t на $|t|$, оно станет пригодным для всех t .

Этот интеграл можно вычислить, и в результате получим

$$I_+(t, \mathbf{x}) = -\frac{1}{4\pi} \delta(s^2) + \frac{m}{8\pi s} H_1^{(2)}(ms),$$

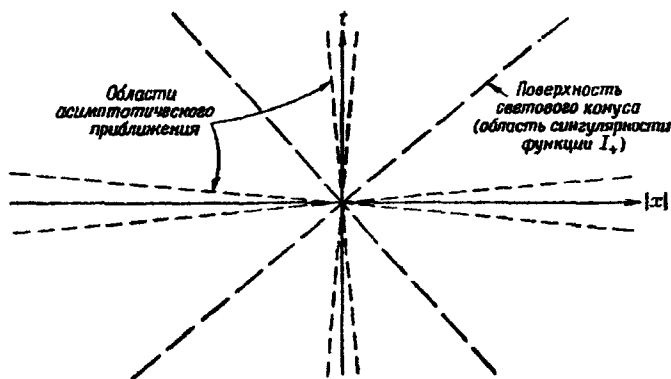
где $s = +\sqrt{t^2 - x^2}$ для $t > |x|$ и $s = -i\sqrt{x^2 - t^2}$ для $t < |x|$, $\delta(s^2)$ — функция Дирака, а $H_1^{(2)}(ms)$ — функция Ханкеля¹⁾. Приведем также несколько иное выражение для функции $I_+(t, \mathbf{x})$:

$$I_+(t, \mathbf{x}) = -\frac{1}{8\pi^2} \int_0^\infty d\alpha \exp \left\{ -\frac{i}{2} \left[\frac{m^2}{\alpha} + \alpha(t^2 - x^2) \right] \right\}.$$

Обе эти формы функции $I_+(t, \mathbf{x})$ слишком сложны для практических применений. Ниже, однако, мы покажем, что переход к импульсному представлению приводит к существенным упрощениям.

¹⁾ См. R. P. Feynman, Phys. Rev., 76, 749 (1949). (Имеется перевод в сборнике: «Новейшее развитие квантовой электродинамики», ИЛ, 1954, стр. 138.)

Заметим, что функция $I_+(t, x)$ не зависит от направления вектора x , а зависит лишь от его величины $|x|$. На пространственно-временной диаграмме (фиг. 18) пространственная ось соответствует $|x|$, а диагональные линии образуют поверхность светового конуса, окружающего временную ось t ; внутри этого конуса расположена область физически доступных значений $t - |x|$ (временеподобная область). Можно



Ф и г. 18.

показать, что при больших значениях s функция $I_+(t, x)$ асимптотически стремится к e^{-ims} . Во временеподобной области большим значениям s соответствует $t^2 \gg |x|^2$. Область, в которой справедливо асимптотическое приближение, лежит, грубо говоря, внутри узкого конуса (на фиг. 18 отмечен пунктиром) вокруг оси t , причем

$$I_+(t, x) \rightarrow \exp[-ims] \approx \exp\left[-im\left(t - \frac{x^2}{2t}\right)\right] \approx \exp[-imt].$$

Предпоследнее выражение, по существу, совпадает с функцией распространения для свободной частицы, используемой в нерелятивистской теории. Если возможные «траектории» частицы не ограничивать временеподобной областью, как это делается в новой релятивистской теории, то существует также и другая область, в которой справедливо асимптотическое при-

ближение функции $I_+(t, \mathbf{x})$. Эта область лежит внутри узкого конуса (на фиг. 18 отмечен пунктиром) вокруг оси $|x|$, причем большим значениям s соответствует $|x|^2 \gg t^2$. В этой области

$$I_+(t, \mathbf{x}) \rightarrow e^{-ims} \approx \exp[-im\sqrt{t^2 - |x|^2}] \approx e^{-m|x|}.$$

Отсюда видно, что расстояние по оси $|x|$, на котором эта величина становится пренебрежимо малой, порядка комптоновской длины волны частицы (напомним, что величина m , когда она представляет обратную длину, заменяется на mc/\hbar), так что реально достижимые значения $t - |x|$ вне светового конуса не очень велики.

Перейдем теперь к импульсному представлению. Это легко сделать, если воспользоваться интегральным соотношением

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-ip_4 t}}{p_4^2 - E_p^2 + i\varepsilon} dp_4 = -\frac{\pi i}{E_p} e^{-iE_p |t|}.$$

Мнимый добавочный член в знаменателе $i\varepsilon$ введен только для обеспечения правильного обхода особых точек $p_4^2 = E_p^2$ на пути интегрирования. При неправильном обходе особых точек знак в показателе экспоненты в правой части этого соотношения меняется.

Задача. Вычислить приведенный выше интеграл при помощи контурного интегрирования или каким-либо другим методом.

Воспользовавшись приведенным выше соотношением для функции $I_+(t, \mathbf{x})$, получаем

$$I_+(t, \mathbf{x}) = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} d p_4 \frac{e^{-ip_4 t} e^{i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}}}{p_4^2 - E_p^2 + i\varepsilon}.$$

Учитывая, что $E_p^2 = \mathbf{p}^2 + m^2$, имеем

$$I_+(t, \mathbf{x}) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ip \cdot x}}{p^2 - m^2 + i\varepsilon},$$

где p — уже 4-вектор, так что $p^2 = p_\mu p_\mu$, а $d^4 p = d p_4 d p_1 d p_2 d p_3$. В дальнейшем добавочный член $i\varepsilon$ бу-

дет опускаться. Вместо введения такого добавочного члена можно просто считать, что m имеет бесконечно малую отрицательную мнимую часть. Переход к импульсному представлению при этом совершается следующим образом (здесь мы производим преобразование Фурье как по пространству, так и по времени, так что в действительности это представление энергии — импульса):

$$\begin{aligned} i_+(p) &= \int I_+(t, \mathbf{x}) e^{+ip \cdot x} d^4x = \\ &= \int \frac{d^4\xi d^4x}{(2\pi)^4} \frac{e^{-i(\xi-p) \cdot x}}{\xi^2 - m^2}, \end{aligned}$$

где переменная интегрирования ξ заменяет переменную p в приведенном выше интегральном соотношении. Если учесть, что

$$\int e^{-i(\xi-p) \cdot x} d^4x = (2\pi)^4 \delta(\xi - p),$$

то после интегрирования по ξ получим

$$i_+(p) = \frac{1}{p^2 - m^2}.$$

Наконец, применяя оператор $i(i\hat{\nabla} + m)$ к функции $I_+(t, \mathbf{x})$, находим функцию распространения свободной частицы (считая $\mathbf{x} = \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1$)

$$\begin{aligned} K_+(2, 1) &= i(i\hat{\nabla} + m) I_+(t, \mathbf{x}) = i \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} (i\hat{\nabla} + m) \times \\ &\times \frac{e^{-ip \cdot x}}{p^2 - m^2} = i \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{\hat{p} + m}{p^2 - m^2} e^{-ip \cdot x}. \end{aligned}$$

Здесь учтено, что действие оператора $i\hat{\nabla}$ на функцию $e^{-ip \cdot x}$ сводится к умножению на \hat{p} . Воспользовавшись тождеством

$$\frac{1}{\hat{p} - m} = \frac{1}{\hat{p} - m} \frac{\hat{p} + m}{\hat{p} + m} = \frac{\hat{p} + m}{p^2 - m^2},$$

функцию распространения можем также записать в виде

$$K_+(2, 1) = i \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ip \cdot x}}{\hat{p} - m}.$$

Преобразуя функцию $K_+(2, 1)$ к импульсному представлению, так же как это было сделано для функции $I_+(t, x)$, получаем

$$k(p) = \int K_+(2, 1) e^{i p \cdot x} d^4 x = \frac{i}{\hat{p} - m}.$$

Это и есть искомое выражение. Фактически такое преобразование можно произвести более изящным способом. Так, функция $K(2, 1)$ является функцией Грина для оператора $(i\hat{\nabla} - m)$, т. е.

$$(i\hat{\nabla} - m) K(2, 1) = i\delta(2, 1). \quad (17.1)$$

В импульсном представлении оператору $i\hat{\nabla}$ соответствует \hat{p} , а функции $\delta(2, 1)$ — единица. Учитывая это, уравнение (17.1) можно сразу записать в импульсном представлении

$$(\hat{p} - m) k(p) = i,$$

или

$$k(p) = \frac{i}{\hat{p} - m}, \quad (17.2)$$

что и требовалось показать.

Тот факт, что уравнение (17.1) для функции $K(2, 1)$ имеет несколько решений, в выражении (17.2) отражается в сингулярности функции $(\hat{p} - m)^{-1}$ при $p^2 = m^2$. Для определения однозначного решения следует указать способ обхода полюсов в этом интеграле. В частности, нужное нам решение будет выделено, если мы предположим, что m имеет бесконечно малую отрицательную мнимую часть.

Лекция восемнадцатая

ИМПУЛЬСНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ

В связи с тем, что функция распространения для свободной частицы в импульсном представлении имеет очень простой вид

$$k(p) = \frac{i}{\hat{p} - m},$$

целесообразно переписать в импульсном представлении все полученные выше формулы. В особенности это оказывается удобным для задач, в которых рассматриваются свободные быстро движущиеся частицы. При переходе к импульсному представлению необходимо произвести 4-мерное преобразование Фурье. Фурье-образ потенциала определим в виде

$$\hat{a}(q) = \int \hat{A}(x) e^{iq \cdot x} d^4x. \quad (18.1)$$

Для обратного преобразования при этом имеем

$$\hat{A}(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int \hat{a}(q) e^{-iq \cdot x} d^4q. \quad (18.2)$$

Функция $a(q)$ интерпретируется как амплитуда вероятности того, что электромагнитное поле обладает импульсом q . В качестве примера рассмотрим кулоновское поле, для которого $\mathbf{A} = 0$, а $\varphi = Ze/r$. Подставляя эти выражения в формулу (18.1), получаем

$$\hat{a}(q) = \frac{4\pi Ze}{(\mathbf{Q} \cdot \mathbf{Q})} \delta(q_4) \gamma_t.$$

Здесь вектор \mathbf{Q} — трехмерная часть 4-вектора импульса q , а функция $\delta(q_4)$ возникает вследствие независимости потенциала $\hat{A}(x)$ от времени.

Матричные элементы. Одним из преимуществ импульсного представления является простота вычислений матричных элементов. Напомним, что в пространственном представлении матричный элемент первого приближения определяется интегралом

$$M = -i \int \tilde{g}(2) e^{\hat{A}(2)} f(1) d\tau_2.$$

Для свободной частицы отсюда имеем

$$M = -i \int \tilde{u}_2 e^{ip_2 \cdot x_2} e^{\hat{A}(2)} u_1 e^{-ip_1 \cdot x_1} d\tau_2. \quad (18.3)$$

В импульсном представлении это выражение существенно упрощается:

$$M = -i (\tilde{u}_2 e^{\hat{a}(q)} u_1), \quad (18.3a)$$

где величина

$$\hat{q} = \hat{p}_2 - \hat{p}_1.$$

Матричный элемент второго приближения в пространственном представлении имеет вид

$$- \iint \tilde{g}(2) e^{\hat{A}(2)} K_+(2,1) e^{\hat{A}(1)} f(1) d\tau_1 d\tau_2.$$

Подставляя в это выражение функции свободной частицы и используя фурье-преобразования для потенциалов, (18.2), получаем

$$- \iiint \tilde{u}_2 e^{i\hat{p}_2 \cdot x_2} e^{\hat{a}(q_2)} e^{-iq_2 \cdot x_2} K_+(2,1) e^{\hat{a}(q_1)} \times \\ \times e^{-iq_1 \cdot x_1} u_1 e^{-i\hat{p}_1 \cdot x_1} d\tau_1 d\tau_2 \frac{d^4 q_1}{(2\pi)^4} \frac{d^4 q_2}{(2\pi)^4}. \quad (18.4)$$

Воспользуемся также фурье-преобразованием для функции распространения $K_+(2,1)$ (см. предыдущую лекцию):

$$K_+(2,1) = \int \frac{i}{\hat{p} - m} e^{-i\hat{p}(\tau_2 - x_1)} \frac{d^4 p}{(2\pi)^4}.$$

Подставим это выражение в формулу (18.4) и произведем интегрирование по τ_1 . Имеем

$$\int e^{i\hat{p} \cdot x_1} e^{-iq_1 \cdot x_1} e^{-i\hat{p}_1 \cdot x_1} d\tau_1 = (2\pi)^4 \delta^4(p - q_1 - p_1), \quad (18.5)$$

где функция $\delta^4(x) = \delta(t)\delta(x)\delta(y)\delta(z)$. Интеграл по τ_1 равен нулю для всех \hat{p} , за исключением $\hat{p} = \hat{p}_1 + \hat{q}_1$. Это позволяет проинтегрировать выражение (18.4) по p . В результате получим

$$- \iiint \tilde{u}_2 e^{i\hat{p}_2 \cdot x_2} e^{\hat{a}(q_2)} e^{-iq_2 \cdot x_2} e^{-i(\hat{p}_1 + \hat{q}_1) \cdot x_1} \times \\ \times \frac{1}{\hat{p}_1 + \hat{q}_1 - m} e^{\hat{a}(q_1)} u_1 d\tau_2 \frac{d^4 q_1}{(2\pi)^4} \frac{d^4 q_2}{(2\pi)^4}.$$

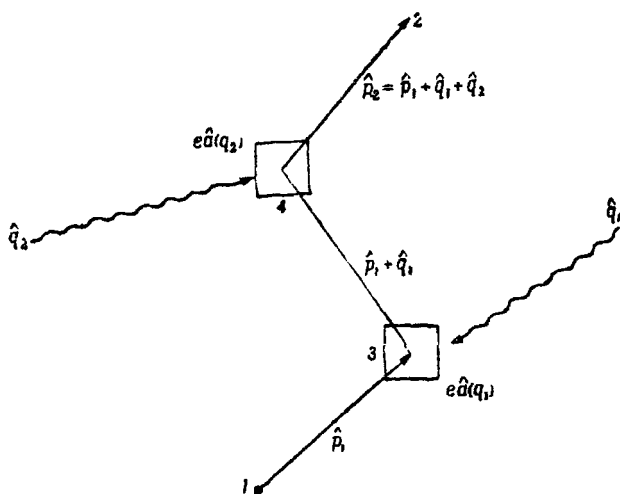
Интегрирование по τ_2 дает вторую δ -функцию [аналогично формуле (18.5)], которая отлична от нуля лишь при

$$\hat{p}_2 - \hat{q}_2 = \hat{p}_1 + \hat{q}_1.$$

Поэтому после интегрирования по q_2 окончательно получим

$$(-i)^2 i \int \tilde{u}_2 e^{\hat{a}(q_2)} \frac{1}{\hat{p}_1 + \hat{q}_1 - m} e^{\hat{a}(q_1)} u_1 \frac{d^4 q_1}{(2\pi)^4}. \quad (18.6)$$

Это выражение можно было написать сразу, используя диаграмму взаимодействия (фиг. 19). Электрон с волновой функцией u_1 и импульсом \hat{p}_1 движется как свободная частица из точки 1 в точку 3. В точке 3 он рассеивается на фотоне с импульсом \hat{q}_1 [под действием потенциала $-ie\hat{a}(q_1)$]. Поглотив импульс фотона, электрон затем движется из точки 3 в точку 4 как свободная частица с импульсом, равным $\hat{p}_1 + \hat{q}_1$,



Ф и г. 19

согласно закону сохранения. В точке 4 электрон рассеивается на втором фотоне с импульсом \hat{q}_2 [под действием потенциала $-ie\hat{a}(q_2)$ он получает дополнительный импульс \hat{q}_2]. И, наконец, из точки 4 в точку 2 электрон движется как свободная частица с волновой функцией u_2 и импульсом $\hat{p}_2 = \hat{p}_1 + \hat{q}_1 + \hat{q}_2$. Из диаграммы взаимодействия становится ясным также, что интегрирование следует проводить лишь по импульсу q_1 , так как при заданных \hat{p}_1 и \hat{p}_2 величина \hat{q}_2 определяется однозначно $\hat{q}_2 = \hat{p}_2 - \hat{p}_1 - \hat{q}_1$. Согласно закону сохранения энергии, $p_1^2 = m^2$ и $p_2^2 = m^2$. В проме-

жучном же состоянии, так как оно является виртуальным, нельзя требовать, чтобы $(\hat{p}_1 + \hat{q}_1)^2 = m^2$. Из записи оператора $(\hat{p}_1 + \hat{q}_1 - m)^{-1}$ в виде $\hat{p}_1 + \hat{q}_1 + m / [(\hat{p}_1 + \hat{q}_1)^2 - m^2]$ следует, что вклад промежуточных состояний во взаимодействие электронов тем меньше, чем больше в них нарушается закон сохранения энергии.

Результаты (18.3а) и (18.6) можно подытожить в виде следующих правил вычисления матричных элементов $M = (\tilde{u}_2 N u_1)^{1)}$.

1. Каждому виртуальному состоянию электрона с импульсом \hat{p} соответствует в N оператор $i/(\hat{p} - m)$.

2. Каждому фотону с импульсом q соответствует в N оператор $-ie\hat{a}(q)$.

3. По всем импульсам q_i , не определенным из законов сохранения, проводится интегрирование, $d^4 q_i / (2\pi)^4$.

Напомним, что при вычислении интегралов контур интегрирования следует выбирать, обходя особые точки вполне определенным образом. Для этого m в подынтегральном выражении заменяется на $m - i\varepsilon$, а в окончательных формулах полагается $\varepsilon = 0$.

В релятивистском случае приходится вычислять всего лишь несколько первых членов ряда теории возмущений. Часто оказывается достаточно точным предположение об однократном взаимодействии быстрых электронов (и позитронов) с потенциалом электромагнитного поля (борновское приближение).

После того как матричный элемент M определен, вероятность перехода в единицу времени вычисляется с помощью формулы

$$P = \frac{2\pi}{(\Pi N)} \cdot |M|^2 \times (\text{Плотность конечных состояний}),$$

где (ΠN) — нормирующий множитель, определенный в шестнадцатой лекции.

¹⁾ Численные множители для различных вероятностей перехода см. в работе: R. P. Feynman, Phys. Rev., 84, 123 (1951).

РЕЛЯТИВИСТСКАЯ ТРАКТОВКА ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ЧАСТИЦ СО СВЕТОМ

Лекция девятнадцатая

Во второй лекции мы сформулировали правила квантовой электродинамики для описания взаимодействия нерелятивистских частиц со светом. Эти правила указывают, какими потенциалами поля следует пользоваться при вычислениях вероятностей переходов по теории возмущений. Как было описано в предыдущей лекции, эти же потенциалы поля используются и в релятивистской теории при вычислениях матричных элементов. Для описания поглощения фотона в нерелятивистской теории используется потенциал

$$A_{\mu} = \sqrt{4\pi e^2} \frac{1}{\sqrt{2\omega}} e_{\mu} e^{ik \cdot x} \begin{cases} k_4 = \omega, \\ \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = 0, \\ \hbar = c = 1. \end{cases} \quad (19.1)$$

Излучение же фотона описывается потенциалом, комплексно сопряженным с этим. Эти потенциалы нормированы на один фотон в единице объема. Такая нормировка не инвариантна при преобразованиях Лоренца. Поэтому ниже мы будем нормировать потенциалы поля, по аналогии с нормировкой волновых функций электронов, на 2ω фотонов в единице объема. Для этого в выражении (19.1) следует опустить множитель $1/\sqrt{2\omega}$:

$$A_{\mu} = \sqrt{4\pi e^2} e_{\mu} e^{ik \cdot x}. \quad (19.1a)$$

Матричный элемент, вычисленный с помощью таких

потенциалов, является инвариантным. Однако для получения правильной формулы для вероятности перехода в некоторой заданной системе координат следует снова восстановить множитель $1/2\omega$ (для каждого фотона в начальном и конечном состояниях). Такой множитель составляет часть общего нормировочного множителя (ПН), содержащего также нормировочные множители электронных волновых функций.

В импульсном представлении амплитуда вероятности поглощения (излучения) фотона с поляризацией e_μ равна $-i\sqrt{4\pi e^2} \hat{e}$. Вектор поляризации e_μ является единичным 4-вектором, ортогональным волновому вектору (вектору распространения), т. е. $e \cdot e = -1$, а $e \cdot q = 0$.

ИЗЛУЧЕНИЕ АТОМОВ

Вероятность перехода в единицу времени определяется выражением

$$\frac{\text{Вероятность перехода}}{\text{сек}} = 2\pi \cdot |H|^2 \times (\text{Плотность конечных состояний}),$$

где H — матричный элемент релятивистского оператора Гамильтона,

$$H = \alpha \cdot (-i\nabla - e \cdot A),$$

между начальным и конечным состояниями, т. е.

$$\langle f | H | i \rangle = \sqrt{4\pi e^2} \int \Psi_f^* [\alpha \cdot e e^{ik \cdot x}] \Psi_i dV. \quad (19.2)$$

Задача. Покажите, что в нерелятивистском пределе выражение (19.2) сводится к виду

$$\begin{aligned} \frac{1}{2m} \int \Psi_f^* [e \cdot p e^{ik \cdot x} + e^{ik \cdot x} p \cdot e + \\ + e \cdot (\sigma \times k) e^{ik \cdot x}] \Psi_i dV. \end{aligned}$$

Такой же результат был получен и с помощью уравнения Паули,

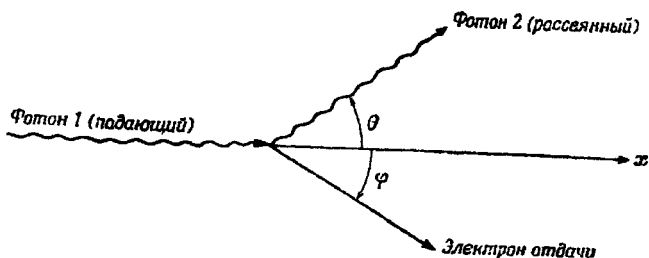
РАССЕЯНИЕ γ -ЛУЧЕЙ АТОМНЫМИ (СВЯЗАННЫМИ) ЭЛЕКТРОНАМИ

Перейдем теперь к релятивистскому рассмотрению рассеяния фотонов на электронах. Приблизительно электроны будем считать свободными (энергии, при которых становится необходимым релятивистское рассмотрение, как правило, существенно превышают энергии связи электронов в атоме). Это приводит к формуле Клейна — Нишины для сечения комптоновского рассеяния.

Потенциал падающего фотона представим в виде

$$A_{1\mu} = e_{1\mu} e^{-iq_1 \cdot x}, \text{ а рассеянного — } A_{2\mu} = e_{2\mu} e^{-iq_2 \cdot x}.$$

Излучение всегда поляризовано перпендикулярно направлению распространения (фиг. 20). Поэтому



Ф и г. 20

$$e_1 \cdot q_1 = e_2 \cdot q_2 = 0,$$

а также

$$q_1 \cdot q_1 = q_1^2 = 0 \text{ и } q_2 \cdot q_2 = q_2^2 = 0. \quad (19.3)$$

В качестве волновых функций электрона в начальном и конечном состояниях выберем функции

$$\Psi_1 = u_1 e^{-ip_1 \cdot x},$$

$$\Psi_2 = u_2 e^{-ip_2 \cdot x},$$

где u_1, u_2, p_1 и p_2 удовлетворяют соотношениям

$$\begin{aligned} \hat{p}_1 u_1 &= m u_1, & \hat{p}_2 u_2 &= m u_2, \\ p_1 \cdot p_1 &= m^2, & p_2 \cdot p_2 &= m^2. \end{aligned} \quad (19.4)$$

Закон сохранения энергии — импульса (четыре соотношения) записывается в виде

$$\hat{p}_1 + \hat{q}_1 = \hat{p}_2 + \hat{q}_2. \quad (19.5)$$

Выбирая систему координат так, чтобы электрон в начальном состоянии покоился, имеем

$$\hat{p}_1 = m\gamma_t, \quad (19.6a)$$

$$\hat{p}_2 = E_2\gamma_t - p_2 \cos \varphi \gamma_x - p_2 \sin \varphi \gamma_y, \quad (19.6b)$$

$$\hat{q}_1 = \omega_1(\gamma_t - \gamma_x), \quad (19.6в)$$

$$\hat{q}_2 = \omega_2(\gamma_t - \gamma_x \cos \theta - \gamma_y \sin \theta). \quad (19.6г)$$

Последние два соотношения являются следствием того обстоятельства, что для фотона как энергия, так и импульс равны его частоте (в системе единиц, где $c=1$). Импульсы электронов и фотонов разложены на отдельные компоненты.

Падающий поток фотонов можно разложить на два потока с разными поляризациями; обозначим их через A и B :

$$(A) \rightarrow \hat{e}_1 = \gamma_z, \quad (B) \rightarrow \hat{e}_1 = \gamma_y.$$

У фотонов сорта A электрический вектор параллелен оси z , а у фотонов сорта B — оси y . Аналогично можно разложить и рассеянный поток фотонов:

$$(A') \rightarrow \hat{e}_2 = \gamma_z, \quad (B') \rightarrow \hat{e}_2 = \gamma_y \cos \theta - \gamma_x \sin \theta.$$

Из законов сохранения энергии — импульса следует, что все физические величины полностью определяются углом рассеяния электрона φ или углом рассеяния фотона θ . Если не интересоваться направлением движения рассеянного электрона, то, определив его импульс из уравнения (19.5),

$$\hat{p}_2 = \hat{p}_1 + \hat{q}_1 - \hat{q}_2,$$

и возведя это выражение в квадрат, получим

$$\begin{aligned} p_2^2 &= m^2 = (\hat{p}_1 + \hat{q}_1 - \hat{q}_2)(\hat{p}_1 + \hat{q}_1 - \hat{q}_2) = \\ &= p_1^2 + q_1^2 + q_2^2 + 2p_1 \cdot q_1 - 2p_1 \cdot q_2 - 2q_1 \cdot q_2 = \\ &= m^2 + 0 + 0 + 2m\omega_1 - 2m\omega_2 - 2\omega_1\omega_2(1 - \cos \theta), \end{aligned}$$

При выводе этого соотношения мы воспользовались формулами (19.3), (19.6а) — (19.6г). Это соотношение можно записать в виде

$$m(\omega_1 - \omega_2) = \omega_1 \omega_2 (1 - \cos \theta),$$

или

$$\frac{m}{\omega_2} - \frac{m}{\omega_1} = 1 - \cos \theta. \quad (19.7)$$

Таким образом, мы получили хорошо известную формулу для комптоновского сдвига частоты.

ПЛОТНОСТИ КОНЕЧНЫХ СОСТОЯНИЙ

Следуя методам, изложенным в первых лекциях курса, можно получить следующие формулы для плотностей конечных состояний (на единицу интервала энергии). Так, в случае, когда система с полной энергией E и полным импульсом \mathbf{p} распадается на две частицы в конечном состоянии

$$\text{Плотность состояний} = \frac{1}{(2\pi)^3} E_1 \cdot E_2 \frac{p_1^2 d\Omega_1}{E p_1^2 - E_1 (\mathbf{p} \cdot \mathbf{p}_1)}, \quad (19.8)$$

где E_1 и \mathbf{p}_1 — соответственно энергия и импульс частицы 1, E_2 — энергия частицы 2, m_1 и m_2 — массы частиц 1 и 2, а $d\Omega_1$ — телесный угол, в который рассеивается частица 1. Согласно законам сохранения, $E_1 + E_2 = E$ и $\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = \mathbf{p}$.

Полезно также записать формулу (19.8) через конечную энергию частицы 1 и азимутальный угол φ_1 (вместо θ_1, φ_1). Имеем

$$\text{Плотность состояний} = \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{E_1 E_2}{|\mathbf{p}|} dE_1 d\varphi_1. \quad (19.9)$$

Частные случаи. а) При $m_2 = \infty$ ($E_2 = E = \infty$)

$$\text{Плотность состояний} = \frac{1}{(2\pi)^3} E_1 |\mathbf{p}_1| d\Omega_1. \quad (19.10)$$

б) В системе центра тяжести ($\mathbf{p} = 0$)

$$\text{Плотность состояний} = \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{E_1 E_2}{E_1 + E_2} d\Omega_1. \quad (19.11)$$

В случае, когда система распадается на три частицы в конечном состоянии,

$$\begin{aligned} & \text{Плотность состояний} = \\ & = \frac{1}{(2\pi)^6} E_3 E_2 \frac{p_1^2 p_2^2 dp_1 d\Omega_1 d\Omega_2}{p_3^2 (E - E_1) - E_2 p_2 \cdot (p - p_1)}. \end{aligned} \quad (19.12)$$

Частный случай. При $m_3 = \infty$

$$\text{Плотность состояний} = \frac{1}{(2\pi)^6} E_2 |p_2| p_1^2 dp_1 d\Omega_1 d\Omega_2. \quad (19.13)$$

В случае комптон-эффекта в конечном состоянии имеются две частицы: частице 1 соответствует фотон 2, а частице 2 — электрон 2.

Поэтому, согласно формуле (19.8),

$$\text{Плотность состояний} = \frac{1}{(2\pi)^3} \omega_2 E_2 \frac{\omega_2^2 d\Omega_\omega}{(m + \omega_1) \omega_2^2 - \omega_2 (\omega_1 \omega_2 \cos \theta)}.$$

ЭФФЕКТ КОМПТОНА

Вычисление $|M|^2$. Воспользуемся формулой (19.7), чтобы исключить угол θ из выражения для плотности конечных состояний. В результате получим

$$\text{Плотность состояний} = \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{E_2 \omega_2^2}{m \omega_1} d\Omega_\omega.$$

Вероятность перехода в единицу времени определяется выражением

$$\begin{aligned} \frac{\text{Вероятность перехода}}{\text{сек}} &= \sigma c = \frac{2\pi}{2E_1 2E_2 2\omega_1 2\omega_2} \cdot |M|^2 \times \\ &\times \frac{1}{(2\pi)^3} \cdot \frac{E_2 \omega_2^2}{m \omega_1} d\Omega_\omega. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\sigma = \frac{\omega_2^2 d\Omega_\omega}{(2\pi)^2 16m^2 \omega_1^2} \cdot |M|^2.$$

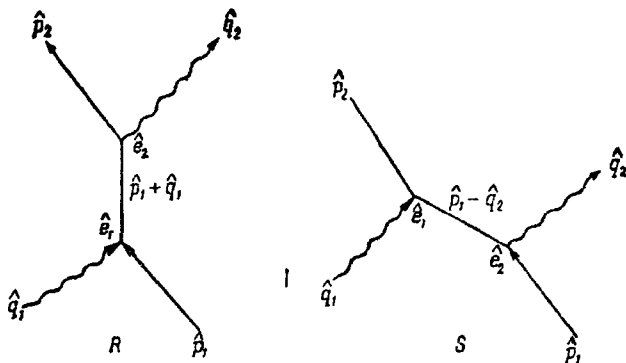
При вычислении матричного элемента M следует иметь в виду два пути, по которым может происходить рас-

сеяние: сначала электрон поглощает падающий фотон, а затем излучает рассеянный фотон (см. диаграмму R на фиг. 21); сначала электрон излучает рассеянный фотон, а затем поглощает падающий (см. диаграмму S на фиг. 21).

В импульсном представлении матричный элемент M для первого из этих процессов имеет вид

$$i (-i \sqrt{4\pi e^2})^2 \left\{ \tilde{u}_2 \hat{e}_2 \frac{1}{\hat{p}_1 + \hat{q}_1 - m} \hat{e}_1 u_1 \right\}.$$

Различные множители, входящие в это выражение, если читать его справа налево, можно интерпретировать следующим образом: а) начальный электрон находится в состоянии u_1 ; б) затем он рассеивается на



Ф и г. 21

потенциале фотона (т. е. поглощает фотон); в) получив импульс \hat{q}_1 от фотона, электрон движется как свободный с суммарным импульсом $\hat{p}_1 + \hat{q}_1$; г) затем электрон излучает фотон с поляризацией \hat{e}_2 и д) переходит в конечное состояние u_2 .

Упражнение. Напишите матричный элемент для второго процесса (S). Полный матричный элемент является суммой двух матричных элементов (для процессов R и S). Запишите эти матричные элементы в явном виде и, пользуясь таблицей матричных элементов (табл. 3), вычислите $|M|^2$.

Лекция двадцатая

Как было показано выше, для диаграммы R матричный элемент M равен

$$-i4\pi e^2 \left\{ \tilde{u}_2 \hat{e}_2 \frac{1}{\hat{p}_1 + \hat{q}_1 - m} \hat{e}_1 u_1 \right\} = -i4\pi e^2 (\tilde{u}_2 R u_1),$$

а для диаграммы S (см. упражнение в предыдущей лекции) —

$$-i4\pi e^2 \left\{ \tilde{u}_2 \hat{e}_1 \frac{1}{\hat{p}_1 - \hat{q}_2 - m} \hat{e}_2 u_1 \right\} = -i4\pi e^2 (\tilde{u}_2 S u_1),$$

Полный матричный элемент является суммой этих двух матричных элементов. Поэтому для сечения рассеяния имеем

$$\sigma = \frac{e^4}{4m^2} \frac{\omega_2^2}{\omega_1^2} |\tilde{u}_2 (R + S) u_1|^2 d\Omega_2.$$

Задача теперь состоит в конкретном вычислении матричных элементов операторов R и S . Рассмотрим сначала оператор R . Воспользовавшись тождеством

$$\frac{1}{\hat{p} - m} = \frac{\hat{p} + m}{p^2 - m^2},$$

преобразуем оператор R к виду

$$R = \frac{\hat{e}_2 (\hat{p}_1 + \hat{q}_1 + m) \hat{e}_1}{(\hat{p}_1 + \hat{q}_1)^2 - m^2} = \frac{\hat{e}_2 (\hat{p}_1 + \hat{q}_1 + m) \hat{e}_1}{2m\omega_1}.$$

При упрощении знаменателя R мы воспользовались следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} (\hat{p}_1 + \hat{q}_1)^2 - m^2 &= p_1^2 + 2p_1 \cdot q_1 + q_1^2 - m^2, \\ p_1^2 &= m^2, \quad q_1^2 = 0, \quad 2p_1 \cdot q_1 = 2m\omega_1. \end{aligned}$$

Матричные элементы между состояниями частиц с различными спинами и для различных поляризаций фотонов можно теперь вычислить, исходя непосредственно из выражения для R . Однако мы сначала произведем некоторые предварительные преобразования, упрощающие вычисления. Воспользовавшись тождеством

$$\hat{a} \hat{b} = 2a \cdot b - \hat{b} \hat{a},$$

легко показать, что

$$\hat{e}_2 \hat{p}_1 \hat{e}_1 = \hat{e}_2 (2p_1 \cdot e_1) - \hat{e}_2 \hat{e}_1 p_1.$$

Так как у вектора p_1 отлична от нуля лишь четвертая, временная, компонента, а у вектора e_1 — первые три, пространственные, компоненты, то $p_1 \cdot e_1 = 0$. Учитывая, что $\hat{p}_1 u_1 = m u_1$, получаем

$$\tilde{u}_2 \hat{e}_2 \hat{p}_1 \hat{e}_1 u_1 = -\tilde{u}_2 \hat{e}_2 \hat{e}_1 \hat{p}_1 u_1 = -(\tilde{u}_2 \hat{e}_2 \hat{e}_1 u_1) m.$$

Таким образом, первое слагаемое в матричном элементе оператора R сокращается с последним (так как они разного знака). Поэтому R можно заменить эквивалентным оператором

$$R = \frac{\hat{e}_2 \hat{q}_1 \hat{e}_1}{2m\omega_1}.$$

В точности такие же преобразования показывают, что оператор S эквивалентен оператору

$$S = \frac{\hat{e}_1 \hat{q}_2 \hat{e}_2}{2m\omega_2}.$$

Подставляя в эти выражения $\hat{q}_1 = \omega_1(\gamma_t - \gamma_x)$ и $\hat{q}_2 = \omega_2(\gamma_t - \gamma_x \cos \theta - \gamma_y \sin \theta)$ и умножая на $2m$, для суммы этих операторов получаем

$$2m(R + S) = \hat{e}_2(\gamma_t - \gamma_x)\hat{e}_1 + \hat{e}_1(\gamma_t - \gamma_x \cos \theta - \gamma_y \sin \theta)\hat{e}_2.$$

Эту сумму можно также записать в иной, несколько более удобной форме, если учесть, что матрицы \hat{e}_1 , \hat{q}_1 и \hat{e}_2 , \hat{q}_2 антикоммутируют между собой (т. е. $e_1 \cdot q_1 = e_2 \cdot q_2 = 0$), а $\hat{e}_2 \hat{e}_1 = -\hat{e}_1 \hat{e}_2 + 2e_1 \cdot e_2$. Таким образом, имеем

$$\begin{aligned} 2m(R + S) &= -\hat{e}_2 \hat{e}_1 (\gamma_t - \gamma_x) - \\ &\quad - \hat{e}_1 \hat{e}_2 (\gamma_t - \gamma_x + \gamma_x - \gamma_x \cos \theta - \gamma_y \sin \theta) = \\ &= -2e_2 \cdot e_1 (\gamma_t - \gamma_x) - \hat{e}_1 \hat{e}_2 [\gamma_x (1 - \cos \theta) - \gamma_y \sin \theta]. \end{aligned}$$

Используя эту форму записи для суммы операторов, можно легко вычислить матричные элементы. В ка-

честве примера рассмотрим случай такой поляризации, когда для падающего фотона $\hat{e}_1 = \gamma_z$, а для рассеянного $\hat{e}_2 = \gamma_y \cos \theta - \gamma_x \sin \theta$. Этот случай соответствует переходу фотона из состояния A в состояние B' (см. предыдущую лекцию) и будет обозначаться через (AB') . Так как при этом $e_2 \cdot e_1 = 0$, то

$$2m(R+S) = -\gamma_z (\gamma_y \cos \theta - \gamma_x \sin \theta) [\gamma_x (1 - \cos \theta) - \gamma_y \sin \theta].$$

Раскрывая это выражение и используя коммутационные соотношения для матриц γ , получаем

$$\begin{aligned} 2m(R+S) &= -\gamma_z [\gamma_y \gamma_x \cos^2 \theta + \cos \theta \sin \theta + \\ &+ \sin \theta (1 - \cos \theta) + \gamma_x \gamma_y \sin^2 \theta] = \\ &= -\gamma_z (\gamma_x \gamma_y - \gamma_x \gamma_y \cos \theta + \sin \theta) = \\ &= -\gamma_x \gamma_y \gamma_z (1 - \cos \theta) - \gamma_z \sin \theta. \end{aligned}$$

Матричный элемент этого оператора в случае, когда спин падающего электрона направлен вверх ($s_1 = +1$), а рассеянного — вниз ($s_2 = -1$), легко находится с помощью табл. 3. Имеем

$$\begin{aligned} -2m(F_1 F_2)^{1/2} (\tilde{u}_2 \gamma_x \gamma_y \gamma_z u_1) &= -i F_2 p_{1+} - i F_1 p_{2+}, \\ -2m(F_1 F_2)^{1/2} (\tilde{u}_2 \gamma_z u_1) &= + p_{1+} F_2 - p_{2+} F_1. \end{aligned}$$

Заметим, что, так как в рассматриваемом случае электрон 1 покоится, $p_{1+} = p_{x1} + i p_{y1} = 0$. Поэтому окончательно для полного матричного элемента в случае перехода (AB') и при условии $s_1 = +1$ и $s_2 = -1$ получаем выражение

$$2m(F_1 F_2)^{1/2} (\tilde{u}_2 (R+S) u_1) = -(1 - \cos \theta) i F_1 p_{2+} - \sin \theta p_{2+} F_1.$$

Совершенно аналогичным образом получают матричные элементы и для других комбинаций поляризаций и спинов (см. табл. 4). В качестве упражнения можно проверить эти формулы.

Для получения амплитуды рассеяния $|M|^2$ при заданной поляризации фотонов следует просуммировать квадраты матричных элементов по всем спиновым состояниям рассеянного электрона и усреднить

Таблица 4

Поляризация	AA'	AB'	BA'	BB'
\hat{e}_1 \hat{e}_2	γ_z γ_z	γ_z $\gamma_y \cos \theta - \gamma_x \sin \theta$	γ_y γ_z	γ_y $\gamma_y \cos \theta - \gamma_x \sin \theta$
Матрица	$2\gamma_f - \gamma_x(1 + \cos \theta)$	$-\gamma_x \gamma_y \gamma_z(1 - \cos \theta)$	$-\gamma_x \gamma_y \gamma_z(1 - \cos \theta)$	$2\cos \theta \gamma_f -$ $-\gamma_x(1 + \cos \theta)$ $-\gamma_y \sin \theta$
$2m(R+S)$	$-\gamma_y \sin \theta$	$-\gamma_z \sin \theta$	$+\gamma_z \sin \theta$	
Матричные	$2F_1 F_2 - (1 + \cos \theta) F_1 P_2 -$	0	0	$2 \cos \theta F_1 F_2 -$ $-(1 + \cos \theta) F_1 P_2 -$
элементы	$-i \sin \theta F_1 P_2 -$	0	0	$-i \sin \theta F_1 P_2 -$
$2m \sqrt{F_1 F_2} \tilde{u}_2 (R+S) u_1$	0	$-i(1 - \cos \theta) F_1 P_2 +$	$-i(1 - \cos \theta) F_1 P_2 +$	0
	0	$-\sin \theta F_1 P_2 +$	$+\sin \theta F_1 P_2 +$	0

Примечание. Матричные элементы для случая $s_1 = -1$, $s_2 = -1$ комплексно сопряжены матричным элементам для случая $s_1 = +1$, $s_2 = +1$, а матричные элементы для случая $s_1 = -1$, $s_2 = +1$ комплексно сопряжены матричным элементам для случая $s_1 = +1$, $s_2 = -1$.

по спиновым состояниям падающего электрона. Можно показать, что в результате этого получится просто квадрат отличного от нуля матричного элемента перехода при заданной поляризации фотонов. Например, в случае перехода (AA') имеем

$$|M|^2 = |\tilde{u}_2(R+S)u_1|^2 = \\ = \frac{1}{4m^2 F_1 F_2} |2F_1 F_2 - (1 + \cos \theta) F_1 p_{2-} - i \sin \theta F_1 p_{2+}|^2.$$

Используя соотношения

$$p_{2-} = p_{1-} + q_{1-} - q_{2-} = q_{1-} - q_{2-} = \\ = \omega_1 - \omega_2 \cos \theta + i \omega_2 \sin \theta$$

и

$$\frac{m}{\omega_2} - \frac{m}{\omega_1} = 1 - \cos \theta,$$

после несложных алгебраических преобразований амплитуду рассеяния сведем к виду, приведенному в табл. 5, где даны также значения $|M|^2$ и для других

Таблица 5

Поляризация	$ M ^2$
AA'	$[(\omega_1 - \omega_2)^2 / \omega_1 \omega_2] + 4$
AB'	$[(\omega_1 - \omega_2)^2 / \omega_1 \omega_2]$
BA'	$[(\omega_1 - \omega_2)^2 / \omega_1 \omega_2]$
BB'	$[(\omega_1 - \omega_2)^2 / \omega_1 \omega_2] + 4 \cos^2 \theta$

поляризаций. Легко видеть, что все четыре выражения, приведенные в табл. 5, можно записать единым образом:

$$|M|^2 = \frac{(\omega_1 - \omega_2)^2}{\omega_1 \omega_2} + 4(e_1 \cdot e_2)^2.$$

Заметим, что эти формулы не пригодны для описания рассеяния фотонов, поляризованных по кругу. Так, например, если $\hat{e}_1 = 1/\sqrt{2}(i\gamma_z + \gamma_y)$, то для правильного учета эффекта интерференции фотонов, возникающего из-за наличия мнимой части у \hat{e}_1 , все вычисления следует провести заново вплоть до возведения матричных элементов в квадрат.

Наконец, для сечения рассеяния плоскополяризованных фотонов получаем формулу

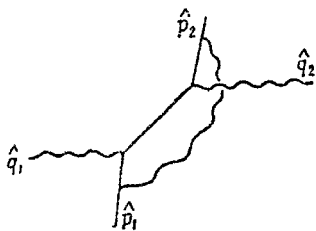
$$\sigma = \frac{e^4}{4m^2} \frac{\omega_2^2}{\omega_1^2} \left[\frac{\omega_2}{\omega_1} + \frac{\omega_1}{\omega_2} - 2 + 4(e_1 \cdot e_2)^2 \right] d\Omega_{\omega_1}.$$

Это и есть известная формула Клейна—Нишины для сечения рассеяния поляризованного света. Для неполяризованного света это выражение необходимо усреднить по всем поляризациям.

Следует заметить, что вследствие общности преобразования функции $K_+(2, 1)$ к импульсному представлению в приведенном выводе учтены также диаграммы рассеяния, типа представленной на фиг. 22. Наш вывод учитывает все диаграммы рассеяния, за исключением эффектов высшего порядка, которые обсуждаются ниже



Фиг. 22.



Фиг. 23.

(они соответствуют, например, излучению и последующему поглощению третьего фотона, как это представлено на фиг. 23).

Лекция двадцать первая

Обсуждение формулы Клейна—Нишины. В «томсоновском пределе» $\omega_1 \ll m$. При этом энергия отдачи, получаемая электроном, очень мала и $\omega_1 \approx \omega_2$. Это видно из соотношения

$$m\omega_1 - m\omega_2 = \omega_1\omega_2(1 - \cos\theta). \quad (21.1)$$

Формула Клейна—Нишины в этом пределе переходит в формулу Релея—Томсона для рассеяния света

$$\sigma = \frac{e^4}{m^2} (e_1 \cdot e_2)^2 d\Omega_{\omega}. \quad (21.2)$$

Заметим, что энергия кванта ω в соответствии с первоначально принятыми предположениями для комптоновского рассеяния все еще очень велика по сравнению с энергией связи электронов в атоме.

Такой результат получается и при классическом рассмотрении. Под действием электрического поля фотона $\mathbf{E} = E_0 \mathbf{e}_1 e^{i\omega t}$ электрон получает ускорение

$$\mathbf{a} = \frac{e}{m} E_0 \mathbf{e}_1 e^{i\omega t}.$$

Согласно классической теории ускоренно движущийся электрон создает вокруг себя рассеянное излучение

$$\mathbf{E}_s = -\frac{e}{R} \left(\begin{array}{l} \text{Проекция запаздывающего ускорения на пло-} \\ \text{скость, перпендикулярную направлению на-} \\ \text{блюдения} \end{array} \right).$$

Рассеянное излучение, поляризованное в направлении вектора \mathbf{e}_2 , определяется компонентой ускорения электрона в этом направлении. При этом интенсивность рассеянного излучения (умноженная на R^2) с поляризацией \mathbf{e}_2 (в единицу телесного угла и на единицу интенсивности падающего света) определяется выражением

$$I = \frac{e^4}{m^2} (\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2)^2. \quad (21.2a)$$

Формулу (21.2) можно записать в обычной системе единиц через \hbar и c (σ имеет размерность площади, или квадрата длины), если учесть, что

$$e^4 = (e^2)^2 = \left(\frac{e^2}{\hbar c} \right)^2,$$

$$m^2 = \left(\frac{mc}{\hbar} \right)^2 = \text{Квадрат обратной длины},$$

$$\frac{e^4}{m^2} = \left(\frac{e^2}{mc^2} \right)^2 = r_0^2 \approx 8 \cdot 10^{-26} \text{ см}^2.$$

Усреднение по поляризациям. Часто желательно знать сечение рассеяния света независимо от поляризаций падающего и рассеянного излучений. Такое сечение можно получить, просуммировав вероятности рассеяния по поляризациям рассеянного света и усреднив по поляризациям падающего. Так, предположим,

что падающее излучение имеет поляризацию типа A . Вероятности (или сечения) рассеяния для двух возможных типов поляризаций рассеянного света A' и B' обозначим символически соответственно через AA' и AB' . Полная вероятность рассеяния света при этом равна $AA' + AB'$. Предположим теперь, что падающее излучение содержит равновероятно как поляризацию типа A , так и поляризацию типа B . Полную вероятность рассеяния при этом можно получить как сумму $1/2 \times$ (Вероятность рассеяния для поляризации типа A) $+ 1/2 \times$ (Вероятность рассеяния для поляризации типа B). Это соответствует рассеянию неполяризованного света, причем

$$\sigma \left(\begin{array}{c} \text{Усредненное по} \\ \text{поляризациям} \end{array} \right) = \frac{1}{2} (AA' + AB') + \frac{1}{2} (BA' + BB') = \\ = \frac{e^4}{2m^2} \left(\frac{\omega_2}{\omega_1} \right)^2 \left(\frac{\omega_2}{\omega_1} + \frac{\omega_1}{\omega_2} - \sin^2 \theta \right) d\Omega_{\omega_2} \quad (21.3)$$

С другой стороны, если измерять поляризацию рассеянного света (при условии, что падающее излучение не поляризовано), то зависимость отношения вероятностей различных типов поляризаций рассеянного света от частоты и угла рассеяния будет описываться формулой

$$\frac{\text{Вероятность поляризации типа } A'}{\text{Вероятность поляризации типа } B'} = \\ = \frac{1/2 (AA' + BA')}{1/2 (AB' + BB')} = \frac{\frac{\omega_2}{\omega_1} + \frac{\omega_1}{\omega_2}}{\frac{\omega_2}{\omega_1} + \frac{\omega_1}{\omega_2} - 2 \sin^2 \theta}.$$

Отсюда видно, что излучение, рассеянное вперед (под углом $\theta=0$), остается неполяризованным. Однако любому отличному от нуля углу рассеяния соответствует своя определенная степень поляризации рассеянного света. В низкочастотном пределе ($\omega_1 \approx \omega_2$) при $\theta = \pi/2$ достигается полная поляризация. Это означает, что неполяризованный свет при рассеянии под углом 90° становится плоскополяризованным¹⁾.

¹⁾ W. Heitler, Quantum Theory of Radiation, Oxford, 1954. (Имеется перевод: В. Гайтлер, Квантовая теория излучения, ИЛ, 1956); V. Rossi, K. Greissen, Phys. Rev., 61, 121 (1942).

Полное сечение рассеяния. Если выражение (21.3), представляющее собой сечение рассеяния света (усредненное по поляризациям), проинтегрировать по телесному углу

$$d\Omega = 2\pi d(\cos \theta) = \frac{2\pi m}{\omega_2^2} d\omega_2,$$

то получим полное сечение рассеяния. Учитывая, что $\cos \theta$ меняется в пределах от -1 до $+1$, из соотношения (21.1),

$$\cos \theta = 1 - \frac{m}{\omega_2} + \frac{m}{\omega_1}, \quad (21.1a)$$

находим, что переменная ω_2 при этом меняется в пределах от $m\omega_1/(m + 2\omega_1)$ до ω_1 . Выражение (21.3) можно записать в виде

$$d\sigma_T = \frac{e^4}{2m^2} \frac{2\pi}{\omega_1^2} m d\omega_2 \left\{ \frac{\omega_2}{\omega_1} + \frac{\omega_1}{\omega_2} - \frac{2m}{\omega_2} + \frac{2m}{\omega_1} + \frac{m^2}{\omega_1^2} + \frac{m^2}{\omega_2^2} - \frac{2m^2}{\omega_1 \omega_2} \right\}.$$

Последние пять слагаемых в этой формуле можно получить из члена $-\sin^2 \theta = \cos^2 \theta - 1$ [$\cos^2 \theta$ был заменен с помощью соотношения (21.1a)]. В результате несложного интегрирования получаем¹⁾

$$\sigma_T = \frac{\pi e^4}{m^2} \left[\left(\frac{m}{\omega_1} - \frac{2m^2}{\omega_1^2} - \frac{2m^3}{\omega_1^3} \right) \ln \left(1 + \frac{2\omega_1}{m} \right) + \frac{m}{2\omega_1} + \frac{4m^2}{\omega_1^2} - \frac{m^3}{2\omega_1(m + 2\omega_1)^2} \right].$$

В пределе высоких частот ($\omega_1 \rightarrow \infty$) имеем

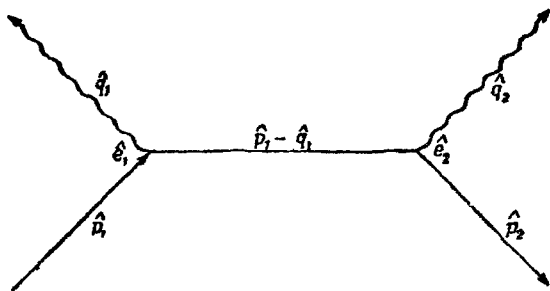
$$\sigma_T \sim \frac{1}{\omega_1} \ln \omega_1 \rightarrow 0.$$

Таким образом, комптоновское рассеяние является пренебрежимо малым в области высоких частот, когда преобладающим эффектом становится рождение пар.

¹⁾ См. примечание на стр. 133.

ДВУХФОТОННАЯ АННИГИЛЯЦИЯ ПАРЫ

С точки зрения квантовой электродинамики явление двухфотонной аннигиляции пары полностью аналогично комптоновскому рассеянию. Чтобы удовлетворить законам сохранения энергии и импульса при аннигиляции пары в отсутствии внешнего потенциала, необходимо испускание по крайней мере двух фотонов. Диаграмму этого взаимодействия можно представить в виде фиг. 24.



Ф и г. 24.

Эту диаграмму следует сравнить с соответствующей диаграммой комптоновского рассеяния (см. предыдущую лекцию). Отличие между ними заключается лишь в изменении направления распространения фотона \hat{q}_1 на обратное, а также в том, что \hat{p}_2 в рассматриваемом случае представляет импульс позитрона с обратным знаком (так как частица 2 соответствует позитрону). Поэтому имеем

$$\begin{aligned}\hat{p}_1 &= (E_- \gamma_t - \mathbf{p}_- \cdot \boldsymbol{\gamma}), \\ \hat{p}_2 &= -(E_+ \gamma_t - \mathbf{p}_+ \cdot \boldsymbol{\gamma}),\end{aligned}$$

где обе величины E_- и E_+ , соответствующие энергиям электрона и позитрона, положительны. Из законов сохранения следует, что

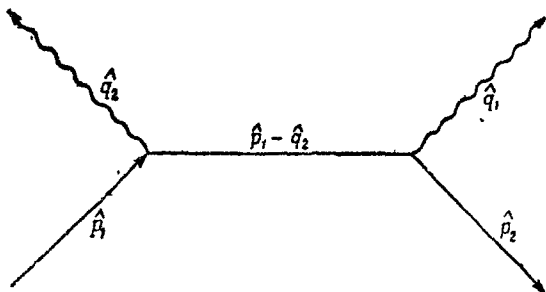
$$\hat{p}_2 = \hat{p}_1 - \hat{q}_1 - \hat{q}_2 \quad (21.4)$$

(точно так же, как и в случае комптоновского рассеяния, но с изменением направления \hat{q}_1 на обратное).

Матричный элемент взаимодействия при этом равен

$$M_1 = -i4\pi e^2 \left(\tilde{u}_2 \hat{e}_2 \frac{1}{\hat{p}_1 - \hat{q}_1 - m} \hat{e}_1 u_1 \right).$$

Может иметь место также и другое возможное взаимодействие, которое нельзя отличить от первого при помощи измерений. Диаграмма этого взаимодействия получается из первой путем взаимной перестановки фотонов



Ф и г. 25₁

(фиг. 25); она также похожа на диаграмму комптоновского рассеяния. Для матричного элемента этого взаимодействия имеем

$$M_2 = -i4\pi e^2 \left(\tilde{u}_2 \hat{e}_1 \frac{1}{\hat{p}_1 - \hat{q}_2 - m} \hat{e}_2 u_1 \right).$$

Сумма таких двух матричных элементов с учетом плотности конечных состояний определяет сечение двухфотонной аннигиляции пары

$$\sigma \times (\text{Скорость позитрона}) = \frac{2\pi}{2E_+ 2E_- 2\omega_1 2\omega_2} |M_1 + M_2|^2 \times \\ \times (\text{Плотность конечных состояний}).$$

Это соотношение записано в системе координат, в которой электрон покоится, а позитрон движется. Плотность конечных состояний равна

$$\frac{\omega_1 \omega_2}{(2\pi)^3} \omega_1^2 \frac{d\Omega_1}{\omega_2 \omega_1 - Q_2 \cdot Q_1}.$$

Так как частица 2 соответствует позитрону,

то $\hat{p}_2 = -\hat{p}_+$, а закон сохранения импульса (21.4) имеет вид

$$\hat{p}_1 + \hat{p}_+ = \hat{q}_1 + \hat{q}_2.$$

Поэтому

$$m^2 + 2(p_1 \cdot p_+) + m^2 = 0 + 2(q_1 \cdot q_2) + 0.$$

Это соотношение сводится к виду

$$2m^2 + 2mE_+ = 2\omega_1\omega_2 - 2Q_1 \cdot Q_2.$$

Записав скорость позитрона в виде $|\mathbf{p}_+|/E_+$, для сечения аннигиляции получим

$$\sigma = \frac{2\pi\omega_1^2 d\Omega_1 |M_1 + M_2|^2}{2E_- \cdot 2|\mathbf{p}_+| \cdot 4(2\pi)^3 m(E_+ + m)} = \frac{\omega_1^2 d\Omega_1 |M_1 + M_2|^2}{64\pi^2 m^2 |\mathbf{p}_+| (m + E_+)}.$$

Из сравнения диаграмм взаимодействия следует, что при изменении знака у величины \hat{q}_1 матричные элементы двухфотонной аннигиляции пары совпадают с соответствующими матричными элементами комптоновского рассеяния. Это приводит к изменению знака у ω_1 в выражении для сечения аннигиляции пары. Поэтому формула для сечения двухфотонной аннигиляции пары имеет вид

$$\sigma = \frac{e^4 \omega_1^2 d\Omega_1}{4m^2 |\mathbf{p}_+| (E_+ + m)} \left[\frac{\omega_2}{\omega_1} + \frac{\omega_1}{\omega_2} + 2 - 4(\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2)^2 \right],$$

т. е. подобна формуле Клейна—Нишины.

Лекция двадцать вторая

АННИГИЛЯЦИЯ ПОКОЯЩЕГОСЯ ПОЗИТРОНА

Сечение аннигиляции электронно-позитронной пары, полученное в предыдущей лекции, расходится при стремлении скорости позитрона к нулю ($\sigma \sim 1/v$; это имеет место и для сечений других процессов, в которых происходит поглощение падающей частицы). Чтобы вычислить время жизни позитрона в окружении электронов с плотностью ρ (напомним, что в полученной выше формуле для сечения аннигиляции плотность электронов считалась равной одному электрону в единице объема) при $v_+ \rightarrow 0$, воспользуемся

соотношением

$$\frac{\text{Вероятность перехода}}{\text{сек}} = \sigma v_+ \rho,$$

и учтем тот факт, что при $v_+ \rightarrow 0$, $E_+ \rightarrow m$, а $\omega_1 \rightarrow \omega_2 \rightarrow m$ (из законов сохранения энергии и импульса следует, что в случае, когда электрон и позитрон почти покоятся, испускаемые фотоны имеют одинаковые по величине и противоположные по направлению импульсы). Имеем

$$\frac{\text{Вероятность перехода}}{\text{сек}} = \sigma v_+ \rho = \frac{e^4}{2m^2} (\sin^2 \theta) \rho d\Omega, \quad (22.1)$$

где θ — угол между векторами поляризации фотонов ($\cos \theta = \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2$). Такая зависимость от угла θ показывает, что фотоны, испускаемые при аннигиляции, поляризованы во взаимно перпендикулярных плоскостях. Чтобы получить полную вероятность перехода в единицу времени для любых направлений распространения и поляризаций испускаемых фотонов, выражение (22.1) следует проинтегрировать по телесному углу ($\int d\Omega = 4\pi$) и усреднить по всем направлениям поляризации ($\overline{\sin^2 \theta} = 1/2$); в результате получим

$$\begin{aligned} \frac{\text{Полная вероятность перехода}}{\text{сек}} &= \frac{1}{\tau} = \frac{\pi e^4}{m^2} \rho = \\ &= \pi \left(\frac{e^2}{mc^2} \right)^2 c \rho = \pi r_0^2 c \rho, \quad (22.2) \end{aligned}$$

где r_0 — классический радиус электрона, а τ — время жизни позитрона (здесь \hbar и c восстановлены).

Задачи. 1. Получите результаты этого раздела, исходя непосредственно из матричных элементов для покоящихся частиц (электрона и позитрона). Покажите, что двухфотонная аннигиляция может происходить лишь в синглетном состоянии пары (с антипараллельными спинами). В триплетном состоянии возможна лишь трехфотонная аннигиляция и время жизни такого состояния значительно больше (см. задачу 2).

2. Определите время жизни электронно-позитронной пары в триплетном состоянии (с парал-

лельными спинами) по отношению к трехфотонному распаду: а) установите формулу для скорости распада; б) запишите M в возможно простой форме; в) составьте таблицу матричных элементов (подобную табл. 3, но с учетом того, что $\hat{p}_1 = m\gamma_i$, а $\hat{p}_2 = -m\gamma_i$); г) вычислите матричные элементы для восьми случаев поляризаций фотонов; д) определите скорости распада для каждого из этих случаев; е) просуммируйте скорости распада по всем поляризациям; ж) получите спектр испускаемых фотонов; з) получите полную вероятность распада в единицу времени путем интегрирования по спектру фотонов и по углам; и) наконец, сравните результат с формулой Пауэлла и Ора¹⁾,

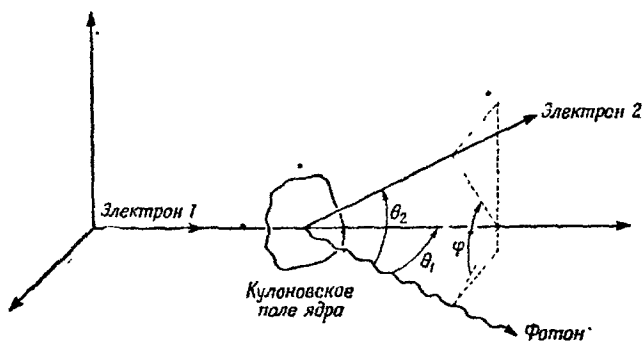
3. Известно, что матричные элементы должны быть инвариантны по отношению к калибровочному преобразованию $\hat{e}' = \hat{e} + \alpha \hat{q}$, где α — произвольная постоянная, \hat{q} — импульс фотона, а \hat{e} и \hat{e}' — его поляризации. Покажите, что матричные элементы комптоновского рассеяния обращаются в нуль при замене в них \hat{e} на \hat{q} .

ТОРМОЗНОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ

Электрон, пролетающий через кулоновское поле ядра, претерпевает отклонение. Согласно классической теории, такое отклонение является следствием ускорения электрона и должно сопровождаться излучением. В соответствии же с квантовой электродинамикой это означает, что у падающего электрона в поле ядра имеется определенная вероятность перехода в новое состояние с испусканием фотона. Взаимодействие с полем ядра является совершенно необходимым для удовлетворения законов сохранения энергии и импульса. В вакууме электрон не может испустить фотон и перейти в новое состояние. На фиг. 26 представлена диаграмма процесса и указаны углы разлета электрона и фотона.

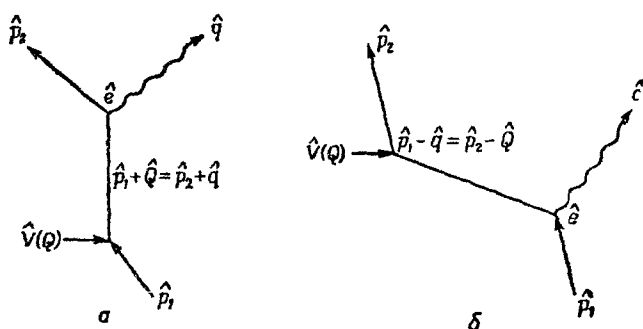
¹⁾ A. Ore, J. L. Powell, Phys. Rev., 75, 1696 (1949).

Будем считать, что кулоновский потенциал ядра участвует во взаимодействии лишь один раз (борновское приближение). Законность такого приближения обсуждалась в шестнадцатой лекции. Возможны два (неразличимых) пути, по которым может протекать явление тормозного излучения: а) сначала электрон



Ф и г. 26.

взаимодействует с кулоновским полем ядра, а затем излучает фотон или б) электрон сначала излучает фотон и лишь затем взаимодействует с кулоновским полем ядра. Диаграммы этих процессов представлены на фиг. 27. В результате взаимодействия с ядром электрон



Ф и г. 27.

получает импульс \hat{Q} . Из законов сохранения энергии и импульса при этом имеем

$$\hat{p}_1 + \hat{Q} = \hat{p}_2 + \hat{q}, \text{ или } \hat{Q} = \hat{p}_2 - \hat{p}_1 + \hat{q}.$$

В восемнадцатой лекции было показано, что вследствие независимости кулоновского потенциала от времени фурье-образ потенциала пропорционален $\delta(Q_4)$. Это означает, что возможны лишь переходы, при которых $Q_4 = 0$, т. е. энергия начального электрона должна равняться сумме энергий фотона и конечного электрона $E_1 = E_2 + \omega$. Вероятность перехода определяется выражением

$$\frac{\text{Вероятность перехода}}{\text{сек}} = \sigma v_1 = \frac{2\pi}{2E_1 2E_2 2\omega} |\mathfrak{M}|^2 \cdot D.$$

Считая ядро бесконечно тяжелым, имеем

$$D = \frac{1}{(2\pi)^6} E_2 p_2 d\Omega_2 \omega^2 d\omega d\Omega_\omega.$$

Заметим, что испускаемые фотоны образуют целый спектр, т. е. энергия фотона не определяется однозначно (как, например, это было при комптоновском рассеянии).

Полагая $\mathfrak{M} = (\tilde{u}_2 M u_1)$, получаем

$$M = -i \sqrt{4\pi e^2} \left[\hat{e} \frac{1}{\hat{p}_1 + \hat{Q} - m} \hat{V}(Q) + \right. \\ \left. + \hat{V}(Q) \frac{1}{\hat{p}_2 - \hat{Q} - m} \hat{e} \right], \quad (22.3)$$

где первое слагаемое соответствует диаграмме взаимодействия *a* на фиг. 27, а второе — диаграмме взаимодействия *b* на фиг. 27. Смысл каждого из множителей, например первого слагаемого, легко понять, читая его справа налево. Электрон, находящийся в начальном состоянии u_1 , рассеивается на кулоновском потенциале ядра и получает дополнительный импульс \hat{Q} , после чего он движется как свободная частица с импульсом $\hat{p}_1 + \hat{Q}$ до тех пор, пока не испустит фотон с поляризацией \hat{e} .

В системе координат, в которой ядро покоится, для фурье-образа кулоновского потенциала имеем

(см. восемнадцатую лекцию «Импульсное представление»)

$$\hat{V}(Q) = \frac{4\pi Ze^2}{Q^2} \delta(Q_4) \gamma_t = V(Q) \delta(Q_4) \gamma_t.$$

[Для фурье-образа какого-либо другого потенциала по пространственным переменным будем пользоваться соответствующим обозначением $v(Q)$.] Освободившись от операторов в знаменателе формулы (22.3), получим¹⁾

$$M = -i \sqrt{4\pi e^2} v(Q) \left[\hat{e} \frac{\hat{p}_1 + \hat{Q} + m}{-2p_1 \cdot Q - Q^2} \gamma_t + \gamma_t \frac{\hat{p}_2 - \hat{Q} + m}{2p_2 \cdot Q - Q^2} \hat{e} \right]. \quad (22.4)$$

Излучаемый фотон может иметь любое из двух направлений поляризации, а электрон в начальном и конечном состояниях — любую из двух возможных проекций спина. Матричные элементы для различных возможных переходов можно вычислить, воспользовавшись табл. 3, точно так же, как это было сделано в двадцатой лекции при выводе формулы Клейна—Нишины. Так как эти вычисления не содержат ничего нового, мы опустим их. После 1) суммирования по поляризациям фотона, 2) суммирования по конечным спиновым состояниям электрона и 3) усреднения по начальным спиновым состояниям электрона для дифференциального сечения тормозного излучения получим следующее выражение:

$$d\sigma = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{Ze^2}{Q^2} \right)^2 e^2 \frac{d\omega}{\omega} \frac{p_2}{p_1} \sin \theta_2 d\theta_2 \sin \theta_1 d\theta_1 d\varphi \times \\ \times \left\{ \frac{p_2^2 \sin^2 \theta_2 (4E_1^2 - Q^2)}{(E_2 - p_2 \cos \theta_2)^2} + \frac{p_1^2 \sin^2 \theta_1 (4E_2^2 - Q^2)}{(E_1 - p_1 \cos \theta_1)^2} - \right. \\ \left. \frac{2p_1 p_2 \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cos \varphi (4E_1 E_2 - Q^2 + 2\omega^2) - 2\omega^2 (p_2^2 \sin^2 \theta_2 + p_1^2 \sin^2 \theta_1)}{(E_2 - p_2 \cos \theta_2) (E_1 - p_1 \cos \theta_1)} \right\} \quad (22.5)$$

¹⁾ $(\hat{p}_1 + \hat{Q} - m)(\hat{p}_1 + \hat{Q} + m) = p_1^2 + 2p_1 \cdot Q + Q^2 - m^2 =$
 $= 2p_1 \cdot Q + Q^2 = -2p_1 \cdot Q + Q^2 = -2p_1 \cdot Q - Q^2$, так как $Q_4 = 0$.

В пределе малых энергий испускаемого фотона (малых по сравнению с энергией покоя электрона, но больших по сравнению с энергией связи электрона в атоме) это выражение принимает простой вид, легко интерпретируемый с помощью сечения упругого рассеяния электрона в кулоновском поле. Запишем матрицу (22.3) через \hat{q} (вместо \hat{Q}):

$$M = -i\sqrt{4\pi e^2} \left[\hat{e} \frac{1}{\hat{p}_2 + \hat{q} - m} \hat{V}(Q) + \hat{V}(Q) \frac{1}{\hat{p}_1 - \hat{q} - m} \hat{e} \right] = \\ = -i\sqrt{4\pi e^2} \left[\hat{e} \frac{\hat{p}_2 + \hat{q} + m}{2p_2 \cdot q} \hat{V}(Q) + \hat{V}(Q) \frac{\hat{p}_1 - \hat{q} + m}{-2p_1 \cdot q} \hat{e} \right].$$

Используя соотношения $\hat{e} \hat{p}_2 = -\hat{p}_2 \hat{e} + 2e \cdot p_2$, $\hat{p}_1 \hat{e} = -\hat{e} \hat{p}_1 + 2e \cdot p_1$ и пренебрегая в числителе величинной \hat{q} вследствие ее малости, находим

$$M \approx -i\sqrt{4\pi e^2} V(Q) \left[\frac{-\hat{p}_2 \hat{e} \gamma_t + 2e \cdot p_2 \gamma_t + m \hat{e} \gamma_t}{2p_2 \cdot q} + \right. \\ \left. + \frac{-\gamma_t \hat{e} \hat{p}_1 + 2p_1 \cdot e \gamma_t + m \hat{e} \gamma_t}{-2p_1 \cdot q} \right] \delta(Q_4) = \\ = -i\sqrt{4\pi e^2} V(Q) \left[\frac{e \cdot p_1}{q \cdot p_1} - \frac{e \cdot p_2}{q \cdot p_2} \right] \gamma_t \delta(Q_4).$$

При получении этого выражения мы учли, что матричный элемент M вычисляется между состояниями свободного электрона u_1 и u_2 , и поэтому $\tilde{u}_2 \hat{p}_2 = \tilde{u}_2 m$, $\hat{p}_1 u_1 = m u_1$.

Дифференциальное сечение излучения фотона при этом можно записать в виде

$$d\sigma = \frac{1}{v} \left[\frac{2\pi}{2E_1 2E_2} |V(Q)|^2 \frac{E_2 p_2 d\Omega_2}{(2\pi)^3} \right] \times \\ \times \left[\frac{e^2 d\omega d\Omega_\omega}{\pi \omega} \left(\frac{p_2 \cdot e}{p_2 \cdot \frac{q}{\omega}} - \frac{p_1 \cdot e}{p_1 \cdot \frac{q}{\omega}} \right)^2 \right].$$

Первый множитель в квадратных скобках представляет собой вероятность перехода при упругом рассеянии электрона (см. шестнадцатую лекцию). Поэтому второй множитель в квадратных скобках можно интерпретировать как вероятность излучения фотона

в интервал частот $d\omega$ и в телесный угол $d\Omega_\omega$ при упругом рассеянии электрона с изменением импульса p_1 на p_2 .

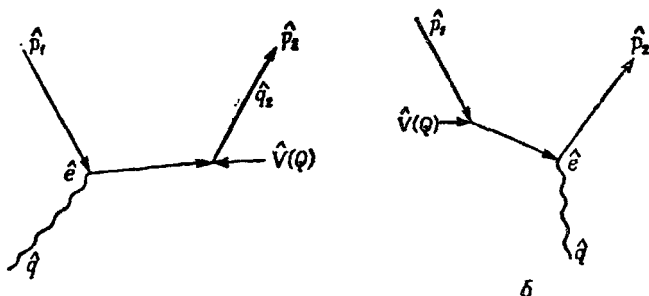
Задача. Используя изложенный метод, вычислите сечение излучения двух фотонов малой энергии. Импульсами фотонов q_i можно пренебречь в числителе, но не в знаменателе матричного элемента.

Ответ. В дифференциальном сечении излучения одного фотона, приведенном выше, возникает третий множитель, соответствующий вероятности излучения второго фотона.

РОЖДЕНИЕ ПАР

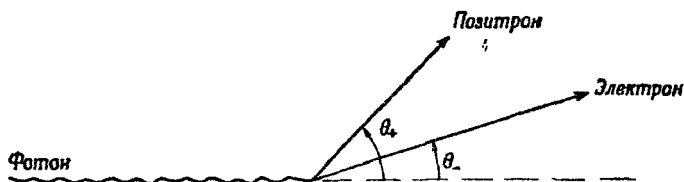
Из законов сохранения энергии и импульса легко показать, что один фотон с энергией, большей $2m$, в отсутствие какой-либо частицы не может образовать электронно-позитронную пару. Два фотона, соединяясь, могут образовать пару, однако вследствие очень малой плотности фотонов вероятность такого процесса крайне мала. Однако один фотон может образовать пару во внешнем поле, например в поле ядра, которому он может передать часть своего импульса. Как и в тормозном излучении, здесь также возможны два неразличимых пути, по которым такой процесс может протекать: а) падающий фотон сначала рождает пару, а затем электрон из этой пары взаимодействует с полем ядра или б) фотон сначала рождает пару, а затем позитрон из этой пары взаимодействует с полем ядра. Диаграммы этих двух взаимодействий представлены на фиг. 28. Стрелки на этих диаграммах указывают, что \hat{p}_1 соответствует импульсу позитрона, а \hat{p}_2 — импульсу электрона. Заметим, что эти диаграммы (если не принимать во внимание направление возрастания времени) выглядят точно так же, как и диаграммы для тормозного излучения. Так, в случае (а) частица с импульсом \hat{p}_1 сначала рассеивается на кулоновском потенциале ядра, а затем взаимодействует с фотоном; в случае же (б) порядок взаимодействий обратный. Отличие между

явлением рождения пары и тормозным излучением, если принять во внимание направление возрастания времени, заключается в том, что 1) \hat{p}_1 соответствует импульсу позитрона (электрона, совершающего попятное движение) и 2) \hat{q} соответствует импульсу поглощаемого, а не излучаемого фотона. Поэтому матричный элемент для



Фиг. 28.

процесса рождения пары можно получить из матричного элемента для тормозного излучения, если заменить в нем \hat{p}_1 на $-\hat{p}_+$, а \hat{q} на $-\hat{q}$. Величина \hat{p}_+ будет соответствовать импульсу позитрона, а \hat{q} — импульсу поглощаемого фотона. Плотность конечных состояний,



Фиг. 29.

естественно, отличается от плотности конечных состояний при тормозном излучении, так как в рассматриваемом случае в конечном состоянии имеются две частицы — электрон и позитрон. В результате получаем

$$d\sigma = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{Ze^2}{Q^2} \right)^2 e^2 \left(p_+ p_- \sin \theta_+ d\theta_+ \sin \theta_- d\theta_- - \frac{d\varphi}{\omega^3} \right) \times \quad (22.6)$$

где выражение в фигурных скобках совпадает с аналогичным выражением в формуле (22.5) для тормозного излучения, если принять во внимание, что

$$\begin{aligned} p_2 &\rightarrow p_-, & \theta_2 &\rightarrow -\theta_-, & E_2 &\rightarrow E_-, \\ p_1 &\rightarrow -p_+, & \theta_1 &\rightarrow -\theta_+, & E_1 &\rightarrow -E_+, \\ & & & & \omega &\rightarrow -\omega. \end{aligned}$$

Углы разлета пары показаны на фиг. 29 (φ — угол между плоскостями электрон — фотон и позитрон — фотон).

Лекция двадцать третья

МЕТОД СУММИРОВАНИЯ МАТРИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ПО СПИНОВЫМ СОСТОЯНИЯМ

При вычислении сечений различных процессов в квантовой электродинамике сначала обычно определяют сечение для «поляризованных» электронов, т. е. для электронов с определенными проекциями спинов в начальном и конечном состояниях. Практически, однако, падающий пучок частиц часто «неполяризован», а проекции спинов рассеянных частиц не измеряются. В таком случае полное сечение процесса получается из сечения для «поляризованных» электронов путем суммирования соответствующих вероятностей перехода по конечным спиновым состояниям электрона и усреднения по начальным. Так как в начальном состоянии все проекции спина равновероятны, а в конечном состоянии проекции спина частицы не интерферируют между собой, такая процедура усреднения является правильной. Формально, если

$$\sigma \sim |(\tilde{u}_2 M u_1)|^2,$$

то имеем

$$\sigma_{\text{пол}} \sim \frac{1}{2} \sum_{\text{По спинам 1}} \sum_{\text{По спинам 2}} |(\tilde{u}_2 M u_1)|^2, \quad (23.1)$$

где $\sum_{\text{По спинам 2}}$ означает суммирование по конечным спиновым состояниям частицы 2 при определенном знаке энергии, т. е. по двум из четырех возможных

состояний частицы. Аналогично, $\sum_{\text{По спинам } l}$ соответствует суммированию по начальным спиновым состояниям частицы при определенном знаке энергии. Здесь мы изложим простой метод вычисления таких сумм.

В соответствии с обычными правилами матричной алгебры имеет место следующее соотношение:

$$\sum_{\text{По всем } u_1} (\tilde{u}_2 A u_1) (\tilde{u}_1 B u_2) = 2m (\tilde{u}_2 A B u_2), \quad (23.2)$$

где A и B — любые операторы или матрицы. Множитель $2m$ в правой части этого выражения возникает вследствие принятой нормировки $\tilde{u}u = 2m$, а суммирование распространяется по *всем* состояниям электрона, описываемым функцией u_1 . Однако в выражении (23.1) мы должны учитывать не все состояния u_1 , а лишь те, которые удовлетворяют уравнению $\hat{p}_1 u_1 = m u_1$. Иными словами, такие состояния соответствуют положительным собственным значениям оператора \hat{p}_1 , равным $+m$. Из соотношения $\hat{p}_1^2 = m^2$ следует, что оператор \hat{p}_1 имеет также и отрицательные собственные значения $-m$, т. е. существуют также два других решения уравнения $\hat{p}_1 u = -m u$, которые вместе с двумя, указанными выше, образуют полный набор из четырех функций u . Последние состояния мы будем называть состояниями с отрицательной энергией.

Далее, если матричные элементы оператора B в соотношении (23.2) для состояний u_1 с отрицательной энергией равны нулю, то эта сумма совпадает с суммой $\sum_{\text{По спинам } l}$, т. е. с суммой по состояниям с положительной энергией. Рассмотрим соотношение

$$\sum_{\text{По всем } u_1} (\tilde{u}_2 A u_1) (\tilde{u}_1 (\hat{p}_1 + m) B u_2) = (\tilde{u}_2 A (\hat{p}_1 + m) B u_2) 2m.$$

Учитывая, что

$$\tilde{u}_1 (\hat{p}_1 + m) = \begin{cases} 0 & \text{для состояний с отрицательной энергией,} \\ 2m \tilde{u}_1 & \text{для состояний с положительной энергией,} \end{cases}$$

левую часть этого соотношения можно также записать в виде

$$\sum_{\text{По спинам } 1} (\tilde{u}_2 A u_1) 2m (\tilde{u}_1 B u_2).$$

Сокращая на множитель $2m$, получаем

$$\sum_{\text{По спинам } 1} (\tilde{u}_2 A u_1) (\tilde{u}_1 B u_2) = (\tilde{u}_2 A (\hat{p}_1 + m) B u_2).$$

Оператор $(\hat{p}_1 + m)$ называется проектирующим оператором. Аналогично, имеем

$$\sum_{\text{По спинам } 2} (\tilde{u}_2 X u_2) = \sum_{\text{По всем } u_2} \frac{1}{2m} (\tilde{u}_2 (\hat{p}_2 + m) X u_2),$$

где X — опять-таки любая матрица. Вспоминая, что, согласно нормировке $\tilde{u}_2 u_2 = 2m$, легко видеть, что сумма по всем u_2 представляет собой след, т. е. шпур матрицы $(\hat{p}_2 + m) X$. Заметим, что порядок матриц X и $\hat{p}_2 + m$ при этом не существен.

Таким образом, из полученных выше формул имеем

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \sum_{\text{По спинам } 1} \sum_{\text{По спинам } 2} |\tilde{u}_2 M u_1|^2 = \\ & = \frac{1}{2} \sum_{\text{По спинам } 1} \sum_{\text{По спинам } 2} (\tilde{u}_2 M u_1) (\tilde{u}_1 \tilde{M} u_2) = \\ & = \frac{1}{2} \text{Sp} [(\hat{p}_2 + m) M (\hat{p}_1 + m) \tilde{M}], \end{aligned} \quad (23.3)$$

где символ Sp означает шпур матрицы в квадратных скобках. Это соотношение является справедливым, когда импульсы \hat{p}_1 и \hat{p}_2 соответствуют либо электронам, либо позитронам.

Приведем шпуры некоторых часто встречающихся матриц:

$$\text{Sp}[1] = 4, \quad \text{Sp}[\gamma_\mu] = 0, \quad \text{Sp}[xy] = \text{Sp}[yx],$$

$$\text{Sp}[x + y] = \text{Sp}[x] + \text{Sp}[y],$$

$$\text{Sp}[\gamma_\nu \gamma_\mu] = \begin{cases} 0 & \text{при } \mu \neq \nu, \\ +4 & \text{при } \mu = \nu = 4, \\ -4 & \text{при } \mu = \nu = 1, 2, 3, \end{cases}$$

$$\text{Sp} [\hat{a} \hat{b}] = \frac{1}{2} \text{Sp} [\hat{a} \hat{b} + \hat{b} \hat{a}] = \text{Sp} [a \cdot b] = 4a \cdot b,$$

$$\text{Sp} [\hat{a} \hat{b} \hat{c}] = 0$$

(эти формулы легко можно проверить).

Шпур произведения *нечетного* числа операторов со «шляпкой» (или операторов γ) равен нулю. Учитывая это, получаем

$$\begin{aligned} \text{Sp} [(\hat{p}_1 + m_1)(\hat{p}_2 - m_2)] &= \text{Sp} [\hat{p}_1 \hat{p}_2] + \text{Sp} [m_1 \hat{p}_2 - \\ &- \hat{p}_1 m_2 - m_1 m_2] = 4(p_1 \cdot p_2 - m_1 m_2), \end{aligned} \quad (23.4)$$

$$\begin{aligned} \text{Sp} [(\hat{p}_1 + m_1)(\hat{p}_2 - m_2)(\hat{p}_3 + m_3)(\hat{p}_4 - m_4)] &= \\ = 4(p_1 \cdot p_2 - m_1 m_2)(p_3 \cdot p_4 - m_3 m_4) - 4(p_1 \cdot p_3 - m_1 m_3) \times \\ \times (p_2 \cdot p_4 - m_2 m_4) + 4(p_1 \cdot p_2 - m_1 m_2)(p_2 \cdot p_3 - m_2 m_3). \end{aligned} \quad (23.5)$$

В качестве примера применим изложенный метод к кулоновскому рассеянию. Как было показано выше, сечение рассеяния для поляризованных электронов имеет вид

$$\sigma = \frac{Z^2 e^4}{Q^4} \left| (\tilde{u}_2 \gamma_t u_1) \right|^2.$$

Учитывая, что $\tilde{\gamma}_t = \gamma_t$, для сечения рассеяния неполяризованных электронов согласно соотношению (23.3), получаем

$$\sigma_{\text{неполяриз}} = \frac{1}{2} \frac{Z^2 e^4}{Q^4} \text{Sp} [(\hat{p}_2 + m) \gamma_t (\hat{p}_1 + m) \gamma_t].$$

Шпур этот можно вычислить непосредственно по формуле (23.5), положив в ней $m_2 = m_4 = 0$, а $\hat{p}_2 = \hat{p}_4 = \gamma_t$. Его можно вычислить также и другим способом. Так как $\gamma_t \hat{p}_1 = 2E_1 - \hat{p}_1 \gamma_t$, то

$$(\hat{p}_2 + m) \gamma_t (\hat{p}_1 + m) \gamma_t = (\hat{p}_2 + m) (2E_1 \gamma_t - \hat{p}_1 + m).$$

Используя приведенные выше формулы, можно показать, что шпур этой матрицы равен

$$-4p_1 \cdot p_2 + 8E_1 E_2 + 4m^2.$$

Но так как $p_1 \cdot p_2 = E_1 E_2 - \mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2$, $\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2 = p^2 \cos \theta$ и

$E_1 = E_2$, отсюда имеем

$$4E^2 + 4m^2 + 4p^2 \cos \theta.$$

Наконец, учитывая, что $m^2 = E^2 - p^2$, для сечения рассеяния неполяризованных электронов получаем окончательную формулу

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{неполяриз}} &= \frac{1}{2} \frac{Z^2 e^4}{Q^4} [8E^2 + 4p^2 (\cos \theta - 1)] = \\ &= \frac{4Z^2 e^4}{Q^4} E^2 \left[1 - v^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right], \end{aligned}$$

где $v^2 = p^2/E^2$. Это выражение совпадает с полученным выше совершенно другим методом.

ЭФФЕКТЫ ЭКРАНИРОВКИ КУЛОНОВСКОГО ПОЛЯ ЯДРА В АТОМАХ

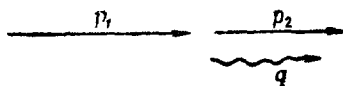
Сечения тормозного излучения и рождения пары содержат множитель $|V(\mathbf{Q})|^2$, где $V(\mathbf{Q})$ — фурье-образ потенциала ядра, т. е.

$$V(\mathbf{Q}) = \int V(\mathbf{R}) e^{-i\mathbf{Q} \cdot \mathbf{R}} d^3\mathbf{R}.$$

Для случая кулоновского потенциала

$$V(\mathbf{Q}) = \frac{4\pi Ze^2}{Q^2},$$

где \mathbf{Q} — импульс, передаваемый ядру, т. е. $\mathbf{Q} = \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2 - \mathbf{q}$. С уменьшением Q величина $V(\mathbf{Q})$



Фиг. 30.

возрастает. Минимальное значение Q достигается в случае, когда все три импульса частиц лежат на одной прямой (фиг. 30). При этом

$$\begin{aligned} |Q_{\text{мин}}| &= |\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2 - \mathbf{q}| = \\ &= |\mathbf{p}_1| - |\mathbf{p}_2| - (E_1 - E_2). \end{aligned}$$

В пределе очень высоких энергий, когда $E \gg m$, а

$$E - p \approx \frac{m^2}{2E},$$

получаем

$$Q_{\min} = \frac{m^2}{2} \left[\frac{1}{E_2} - \frac{1}{E_1} \right] \approx \frac{m^2 q}{2E_1 E_2}.$$

Отсюда видно, что при $E_1 \rightarrow \infty$ импульс $Q_{\min} \rightarrow 0$. Это обстоятельство помогает понять причину возрастания сечений тормозного излучения и рождения пары с ростом энергии.

Из интегрального выражения для $V(Q)$ видно, что основной вклад в интеграл дают расстояния $R \lesssim 1/Q$. С уменьшением Q увеличивается область существенных значений R . С увеличением же R становится существенным эффект экранировки кулоновского поля ядра. Значение $1/Q_{\min}$, при котором становится существенной экранировка кулоновского поля ядра, можно оценить следующим образом. Радиус атома приближенно равен $a_0 Z^{-1/2}$, где a_0 — боровский радиус. Поэтому при условии

$$R_{\text{эфф}} = \frac{1}{Q_{\min}} > a_0 Z^{-1/2},$$

или, что то же самое,

$$\frac{E_1 E_2}{q} > \frac{1}{2} \cdot 137 \cdot m Z^{-1/2},$$

эффект экранировки поля является существенным, и, наоборот, он не существует при выполнении обратного неравенства. В случае, когда выполняется это неравенство, необходимо пользоваться потенциалом, учитывающим экранировку кулоновского поля ядра. При этом для фурье-образа потенциала получаем

$$V(Q) = \frac{4\pi e^2}{Q^2} [Z - F(Q)],$$

где $F(Q)$ — форм-фактор атома, определяемый выражением

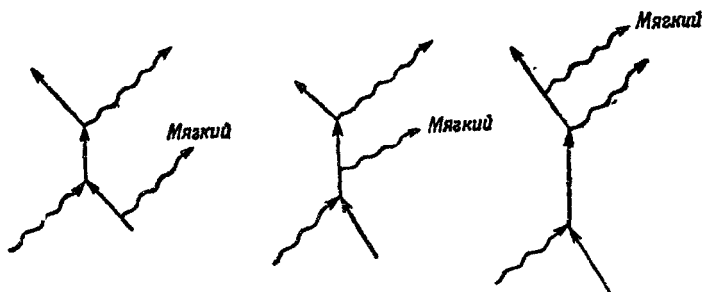
$$F(Q) = \int n(R) e^{-iQ \cdot R} d^3R,$$

а $n(R)$ — плотность электронов в атоме как функция R ,

Задача. При рассмотрении явления тормозного излучения было показано, что сечение излучения фотонов с малой энергией приближенно можно записать в виде

$$\sigma = \sigma_0 e^2 4\pi d\Omega \frac{d\omega}{\pi\omega} \left[\frac{p_2 \cdot e}{p_2 \cdot q/\omega} - \frac{p_1 \cdot e}{p_1 \cdot q/\omega} \right]^2, \quad (23.6)$$

где σ_0 — сечение рассеяния электрона (в отсутствие излучения). Рассмотрите явление комптоновского рассеяния для фотонов с большой энергией, при котором излучается третий фотон с малой энергией. Все три возможные диаграммы взаимодействия представлены на фиг. 31. Покажите,



Фиг. 31.

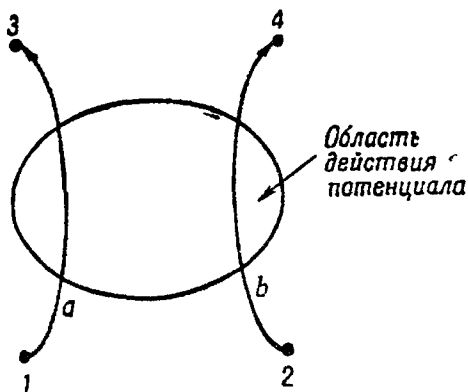
что сечение этого явления также определяется выражением (23.6), если вместо σ_0 подставить его значение, найденное по формуле Клейна — Нишины. (При этом следует учитывать малость q .)

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ НЕСКОЛЬКИХ ЭЛЕКТРОНОВ

Лекция двадцать четвертая

Хотя уравнение Дирака описывает движение лишь одной частицы, следуя принципам квантовой электродинамики, мы можем получить амплитуду вероятности взаимодействия двух и более частиц (при условии, что ядерные силы можно не учитывать).

Рассмотрим сначала движение двух электронов через область действия внешнего потенциала и предположим, что они не взаимодействуют друг с другом (фиг. 32). Амплитуду вероятности, характеризующую

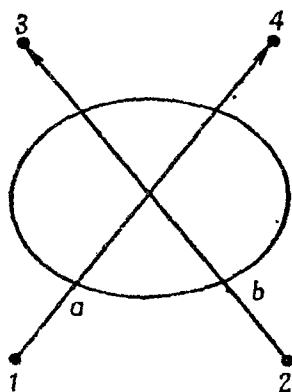


Фиг. 32.

переход электрона a из точки 1 в точку 3, а электрона b из точки 2 в точку 4, обозначим через $K(3, 4; 1, 2)$. При условии полного отсутствия взаимодействия электронов между собой функцию $K(3, 4; 1, 2)$ можно записать в виде произведения $K_+^{(a)}(3, 1) K_+^{(b)}(4, 2)$,

где $K_+^{(a)}(3, 1)$ характеризует движение электрона a , а $K_+^{(b)}(4, 2)$ — движение электрона b .

В соответствии с принципом Паули возможно также движение и другого типа, экспериментально не отличающееся от первого. Оно отличается от первого взаимной перестановкой частиц в точках 3 и 4 (см. фиг. 33). Согласно принципу Паули, волновая функция системы



Фиг. 33.

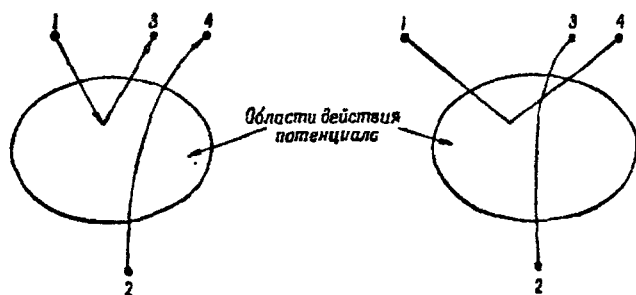
нескольких электронов при перестановке пространственных координат каких-либо двух частиц должна менять знак. Поэтому полная амплитуда вероятности перехода (описывающая оба указанных выше движения) дается выражением

$$K = K_+^{(a)}(3, 1) \cdot K_+^{(b)}(4, 2) - K_+^{(a)}(4, 1) \cdot K_+^{(b)}(3, 2).$$

Аналогичное положение имеет место и в следующем случае. Начальный электрон входит в область действия потенциала. Потенциал рождает электронно-позитронную пару. Наконец, из этой области выходят два электрона и один позитрон. В рассматриваемом случае также возможны два типа движения, представленные на фиг. 34. И опять полная амплитуда вероятности перехода есть разность амплитуд, соответствующих этим двум движениям.

Для получения вероятностей переходов как в рассмотренных выше случаях, так и в любых подобных,

нужно взять квадраты модулей амплитуд вероятностей и умножить их на P_V . Величина P_V представляет собой вероятность того, что вакуум остается вакуумом. Вследствие возможности рождения и аннигиляции пар такая вероятность отлична от единицы. Величину P_V



Ф и г. 34

можно вычислить, воспользовавшись табл. 6 для вероятностей рождения различного числа электронно-позитронных пар в вакууме. Именно P_V можно определить, потребовав, чтобы сумма всех этих вероятностей равнялась единице (так как истинные процессы не должны зависеть от того, что происходит в вакууме). Величина P_V зависит от внешнего потенциала, ибо «вероятности», взятые только как квадраты амплитуд (без множителя P_V), представляют собой относительные вероятности рождений различного числа пар в поле внешнего потенциала.

Таблица 6

Число пар в конечном состоянии	Вероятность
0	$P_V \cdot 1^2$
1	$P_V \cdot K_+(2, 1) ^2$
2	$P_V \cdot K_+(3, 1)K_+(4, 2) - K_+(4, 1)K_+(3, 2) ^2$
3	и т. д.
и т. д.	

Использование функции $\delta_+(s^2)$. Ограничимся сначала рассмотрением амплитуды вероятности одного из возможных переходов (т. е. принципа Паули не будем учитывать). Амплитуды вероятности других переходов всегда можно получить из нее путем перестановки соответствующих пространственных координат и изменений знака. Полная же амплитуда вероятности перехода равна сумме всех полученных таким путем амплитуд.

В нерелятивистском борновском приближении для амплитуды вероятности перехода имеем

$$K(3, 4; 1, 2) = K^{(0)} + K^{(1)},$$

где, согласно изложенному в предыдущих лекциях,

$$K^{(0)} = K_0^{(a)}(3, 1) K_0^{(b)}(4, 2),$$

а

$$K^{(1)} = -i \int K^{(0)}(3, 4; 5, 6) V(5, 6) K^{(0)}(5, 6; 1, 2) \times \\ \times d^3X_5 d^3X_6 dt_5.$$

Так как взаимодействие между частицами в нерелятивистском случае является мгновенным, то $t_5 = t_6$. Потенциал взаимодействия является кулоновским и имеет вид

$$V(5, 6) = \frac{e^2}{r_{5,6}}.$$

Вводя в качестве множителя функцию $\delta(t_5 - t_6)$, можно пользоваться независимыми переменными t_5 и t_6 . В результате получим

$$K^{(1)} = -i \iint K_0(3, 5) K_0(4, 6) \times \\ \times \frac{e^2}{r_{5,6}} \delta(t_5 - t_6) K_0(5, 1) K_0(6, 2) d\tau_5 d\tau_6,$$

где дифференциал $d\tau$ включает как временную, так и пространственные переменные. Естественно было бы думать, что релятивистскую функцию распространения (амплитуду вероятности перехода) можно получить путем замены в нерелятивистском выражении K_0 на K_+ и учета запаздывающего потенциала взаимодействия путем замены $\delta(t_5 - t_6)$ на $\delta(t_5 - t_6 - r_{5,6})$. Однако введение такой δ -функции не совсем верно.

Дело в том, что ее фурье-образ содержит как положительные, так и отрицательные частоты, в то время как энергия фотона всегда положительна. Действительно,

$$\delta(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega X} \frac{d\omega}{2\pi}.$$

Чтобы исправить это, определим функцию

$$\delta_+(X) = \int_0^{\infty} e^{-i\omega X} \frac{d\omega}{\pi},$$

содержащую лишь положительные частоты в фурье-разложении. В результате интегрирования этого выражения получаем

$$\begin{aligned} \delta_+(X) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\pi i} \frac{1}{X - i\epsilon} = \\ &= \delta(X) + \frac{1}{\pi i} \times \left(\text{Главное значение } \frac{1}{X} \right). \end{aligned}$$

Вводя сокращенные обозначения $t_5 - t_6 \equiv t$ и $r_{5,6} = r$ и учитывая, что возможны как $t_5 \geq t_6$, так и $t_5 \leq t_6$, запаздывающий потенциал взаимодействия запишем в виде

$$V(5, 6) = \frac{e^2}{2r} [\delta_+(t - r) + \delta_+(-t - r)].$$

Упражнение. Покажите, что

$$\frac{1}{2r} |\delta_+(t - r) + \delta_+(-t - r)| = \delta_+(t^2 - r^2).$$

Записав разность $t^2 - r^2$ в релятивистски инвариантной форме как $s_{5,6}^2$, для запаздывающего потенциала получим выражение $e^2 \delta_+(s_{5,6}^2)$. Наряду с этим необходимо учитывать также магнитное взаимодействие частиц, пропорциональное произведению $-\mathbf{v}_a \cdot \mathbf{v}_b$. В дираковских обозначениях это произведение записывается как $-\alpha_a \cdot \alpha_b$. Оказывается, удобно записать это выражение в эквивалентной форме $-(\beta\alpha)_a \cdot (\beta\alpha)_b$. Запаздывающий потенциал в этих обозначениях пропорционален произведению $\beta_a \beta_b$. Матрицы β возникают при

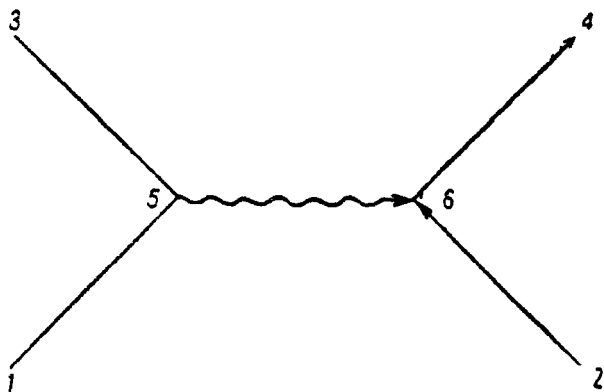
использовании релятивистской функции распространения. В результате полный потенциал взаимодействия частиц принимает вид

$$e^2 \delta_+(s_{5,6}^2) [\beta_a \cdot \beta_b - (\beta\alpha)_a \cdot (\beta\alpha)_b] = e^2 \delta_+(s_{5,6}^2) \gamma_\mu^{(a)} \gamma_\mu^{(b)},$$

а поправка первого порядка к нулевой функции распространения равна

$$\begin{aligned} K^{(1)}(3, 4; 1, 2) &= -ie^2 \iint K_+^{(a)}(3, 5) K_+^{(b)}(4, 6) \gamma_\mu^{(a)} \gamma_\mu^{(b)} \times \\ &\quad \times \delta_+(s_{5,6}^2) K_+^{(a)}(5, 1) K_+^{(b)}(6, 2) d\tau_5 d\tau_6 = \\ &= -ie^2 \iint [K_+(3, 5) \gamma_\mu K_+(5, 1)]_a \delta_+(s_{5,6}^2) \times \\ &\quad \times [K_+(4, 6) \gamma_\mu K_+(6, 2)]_b d\tau_5 d\tau_6. \end{aligned} \quad (24.1)$$

Индексы у матриц γ_μ и функций K_+ указывают, на какие переменные эти величины воздействуют.



Фиг. 35.

Взаимодействия, описываемые функцией распространения (24.1), можно представить в виде диаграммы на фиг. 35. Она описывает обмен виртуальным фотоном между двумя электронами. Виртуальный фотон может быть поляризован вдоль любой из осей x , y , z и t . Тот факт, что функция распространения содержит скалярное произведение $(\gamma_\mu)_a (\gamma_\mu)_b$, показы-

вает, что по всем возможным поляризациям фотона производится суммирование. Из интегрального выражения для функции распространения (24.1) следует, что амплитуда вероятности перехода фотона из точки 5 в точку 6 (или из 6 в 5 в зависимости от последовательности времен) равна $\delta_+(s_{5,6}^2)$. Формулу (24.1) можно рассматривать как еще одно выражение основных законов квантовой электродинамики.

Упражнение. Покажите, что

$$\delta_+(s^2) = -4\pi \int e^{-ik \cdot x} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4 (k^2 + i\epsilon)}.$$

В импульсном представлении отсюда получаем

$$\delta_+(s^2) \rightarrow -\frac{4\pi}{k^2}.$$

Лекция двадцать пятая

ОБОСНОВАНИЕ «ПРАВИЛ» КВАНТОВОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ

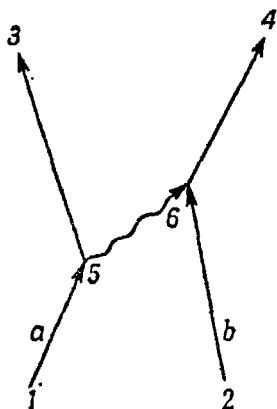
Из результатов предыдущей лекции следует, что правила квантовой электродинамики можно сформулировать следующим образом: 1) амплитуда вероятности излучения (или поглощения) фотона в импульсном представлении равна $e\gamma_\mu$, 2) амплитуда вероятности перехода (функция распространения) фотона из точки 1 в точку 2 равна $\delta_+(s_{1,2}^2)$, где

$$\delta_+(s_{1,2}^2) = -4\pi \int \frac{e^{-ik \cdot (x_2 - x_1)}}{k^2 + i\epsilon} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} = -\frac{4\pi}{k^2 + i\epsilon}. \quad (25.1)$$

Интересно отметить, что функция $\delta_+(s_{1,2}^2)$ совпадает с функцией $I_+(s_{1,2}^2)$, введенной выше при рассмотрении функции распространения свободной частицы, если в последней массу частицы m формально положить равной нулю. Более прямую связь этой функции с уравнениями Максвелла можно увидеть, записав волновое уравнение $\square^2 A_\mu = 4\pi j_\mu$ в импульсном представлении:

$$-k^2 a_\mu = 4\pi j_\mu, \quad \text{или} \quad a_\mu = -\frac{4\pi}{k^2} j_\mu. \quad (25.2)$$

Рассмотрим теперь связь этих результатов с «правилами» квантовой электродинамики, изложенными во второй лекции. Следуя этим правилам, можно вычислить амплитуду вероятности того, что частица a излучает фотон, а частица b поглощает этот фотон (фиг. 36). Амплитуда вероятности того, что частица a ,



Фиг. 36.

двигаясь из точки 1 в точку 5, излучает в последней фотон с поляризацией \hat{e} и волновым вектором \mathbf{k} и затем переходит из точки 5 в точку 3, определяется выражением

$$\left[K_+(3, 5) \hat{e} \sqrt{\frac{4\pi e^2}{2|\mathbf{k}|}} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_5} e^{i|\mathbf{k}|t_5} K_+(5, 1) \right]_a.$$

Пусть в это же время частица b , двигаясь из точки 2 в точку 6, в точке 6 поглощает фотон с поляризацией \hat{e} и волновым вектором \mathbf{k} , и затем из точки 6 переходит в точку 4. Амплитуда вероятности такого процесса дается выражением

$$\left[K_+(4, 6) \hat{e} \sqrt{\frac{4\pi e^2}{2|\mathbf{k}|}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_6} e^{-i|\mathbf{k}|t_6} K_+(6, 2) \right]_b.$$

Амплитуда вероятности того, что оба рассматриваемых процесса имеют место, а это эквивалентно тому, что частица b при $t_6 > t_5$ поглощает фотон, излучаемый час-

тицей a , равна произведению амплитуд вероятности каждого из этих процессов. Если же $t_5 > t_6$, то частица a поглощает фотон, испускаемый частицей b , и в приведенных выше выражениях для амплитуд вероятности знаки во всех экспонентах изменяются на обратные.

Чтобы получить амплитуду вероятности перехода при обмене произвольным фотоном между частицами a и b , необходимо проинтегрировать по всем направлениям распространения и просуммировать по всем поляризациям фотона, а также проинтегрировать по t_5 и t_6 с учетом указанных выше ограничений. Суммирование по всем поляризациям достигается заменой \hat{e} на γ_μ и суммированием по μ . Это соответствует суммированию по четырем направлениям поляризации и будет объяснено ниже. В результате получим

$$\left. \begin{array}{l} \text{Амплитуда веро-} \\ \text{ятности перехода} \\ \text{при обмене фото-} \\ \text{ном } a \rightarrow b \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} 4\pi e^2 \sum_{\mu} \int e^{-ik \cdot (r_5 - r_6)} e^{i|\mathbf{k}| \cdot (t_5 - t_6)} \times \\ \times [K_+(3, 5) \gamma_{\mu} K_+(5, 1)]_a [K_+(4, 6) \times \\ \times \gamma_{\mu} K_+(6, 2)]_b \frac{1}{2|\mathbf{k}|} \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} dt_5 dt_6 \\ \text{при } t_5 < t_6, \\ 4\pi e^2 \sum_{\mu} \int e^{ik \cdot (r_5 - r_6)} e^{-i|\mathbf{k}| \cdot (t_5 - t_6)} \times \\ \times [K_+(3, 5) \gamma_{\mu} K_+(5, 1)]_a [K_+(4, 6) \times \\ \times \gamma_{\mu} K_+(6, 2)]_b \frac{1}{2|\mathbf{k}|} \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} dt_5 dt_6 \\ \text{при } t_5 > t_6. \end{array} \right. \quad (25.3)$$

Сравнивая это выражение с результатами предыдущей лекции, находим

$$\delta_+(s_{5,6}^2) = \begin{cases} 4\pi \int e^{-ik \cdot (r_5 - r_6)} e^{i|\mathbf{k}| \cdot (t_5 - t_6)} \frac{1}{2|\mathbf{k}|} \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} & \text{при } t_6 > t_5, \\ 4\pi \int e^{ik \cdot (r_5 - r_6)} e^{-i|\mathbf{k}| \cdot (t_5 - t_6)} \frac{1}{2|\mathbf{k}|} \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} & \text{при } t_6 < t_5. \end{cases}$$

Воспользовавшись фурье-преобразованием

$$e^{-i|\mathbf{k}| \cdot |t|} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2i|\mathbf{k}|}{\omega^2 - |\mathbf{k}|^2 + i\epsilon} e^{-i\omega t} \frac{d\omega}{2\pi}$$

эту формулу можно записать в виде, явно учитывающем пространственно-временную симметрию,

$$\delta_+(s_{5,6}^2) = -4\pi \int \frac{e^{-ik \cdot (x_5 - x_6)} d^4k}{k_4^2 - \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} + i\varepsilon} \frac{d^4k}{(2\pi)^4}. \quad (25.4)$$

Сравнивая формулу (25.4) с формулой в последнем упражнении предыдущей лекции, заключаем, что правила, изложенные во второй лекции, находятся в полном соответствии с развитой выше релятивистской квантовой электродинамикой.

РАССЕЯНИЕ ЭЛЕКТРОНОВ НА ЭЛЕКТРОНАХ

В этом разделе мы воспользуемся изложенной выше теорией для вычисления сечения рассеяния электронов на электронах. Диаграммы для двух неразличимых процессов рассеяния представлены на фиг. 37.

Амплитуду рассеяния в импульсном представлении можно получить следующим образом. Запишем выражение (25.3) в виде [с учетом соотношения (25.4)]

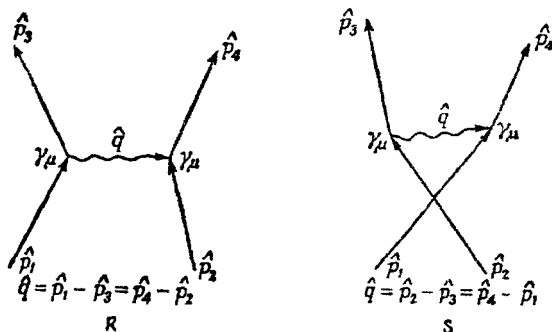
$$e^2 \sum_{\mu} \int [K_+(3,5) \gamma_{\mu} K_+(5,1)]_a \frac{-4\pi}{q^2} [K_+(4,6) \gamma_{\mu} K_+(6,2)]_b \times \\ \times \frac{d^4q}{(2\pi)^4} d\tau_5 d\tau_6.$$

Так как волновые функции электронов в состояниях 1, 2, 3 и 4 являются плоскими волнами с импульсами \hat{p}_1 , \hat{p}_2 , \hat{p}_3 и \hat{p}_4 , то легко видеть, что спинорные части выражений в квадратных скобках в импульсном представлении соответственно равны $(\tilde{u}_3 \gamma_{\mu} u_1)$ и $(\tilde{u}_4 \gamma_{\mu} u_2)$. Интегрирования по τ_5 и τ_6 приводят к законам сохранения, приведенным внизу на диаграммах (см. фиг. 37). Таким образом, матричный элемент взаимодействия можно записать в виде

$$M = i4\pi e^2 \left[\frac{(\tilde{u}_4 \gamma_{\mu} u_2) (\tilde{u}_3 \gamma_{\mu} u_1)}{(\hat{p}_1 - \hat{p}_3)^2} - \frac{(\tilde{u}_4 \gamma_{\mu} u_1) (\tilde{u}_3 \gamma_{\mu} u_2)}{(\hat{p}_4 - \hat{p}_2)^2} \right].$$

Первое слагаемое соответствует диаграмме R , а второе — диаграмме S на фиг. 37. Суммирование подразумевается по повторяющимся индексам μ . В системе центра тяжести вероятность перехода в единицу времени определяется выражением

$$\frac{\text{Вероятность перехода}}{\text{сек}} = \sigma v_1 = \frac{2\pi}{(2E)^4} |M|^2 \frac{E^2 p^3 d\Omega}{(2\pi)^3 2E p^3}$$



Фиг. 37.

(см. девятнадцатую лекцию «Плотности конечных состояний»). Воспользуемся теперь изложенным выше методом (двадцать третья лекция) для усреднения этого выражения по начальным спиновым состояниям электрона и суммирования по конечным. Так, например, в результате суммирования по спиновым состояниям для матриц $\tilde{R}R$ и $\tilde{R}S + R\tilde{S}$ получаем

$$\tilde{R}R \rightarrow \frac{\text{Sp} [(\hat{p}_4 + m) \gamma_\mu (\hat{p}_2 + m) \gamma_\nu] \text{Sp} [(\hat{p}_3 + m) \gamma_\mu (\hat{p}_1 + m) \gamma_\nu]}{[(\hat{p}_1 - \hat{p}_3)^2]^2},$$

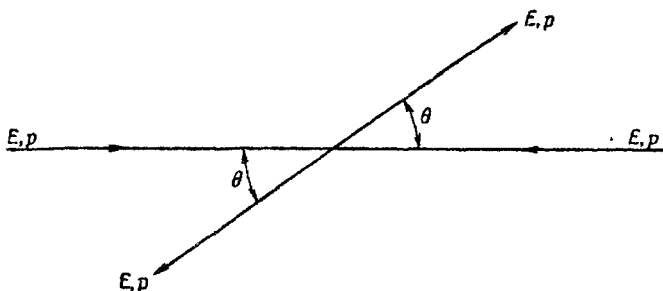
$$\tilde{R}S + R\tilde{S} \rightarrow - \frac{\text{Sp} [(\hat{p}_4 + m) \gamma_\nu (\hat{p}_1 + m) \gamma_\mu (\hat{p}_3 + m) \gamma_\nu (\hat{p}_2 + m) \gamma_\mu]}{(\hat{p}_1 - \hat{p}_3)^2 (\hat{p}_4 - \hat{p}_1)^2}.$$

Правильное использование соотношений для шпуров, выписанных в двадцать третьей лекции, приводит к следующему выражению для дифференциального сечения рассеяния (для непосредственного вычисления

М можно также воспользоваться табл. 3):

$$d\sigma = \frac{2e^4pd\Omega}{E^3} \left[\frac{4x^2 + 8x \cos \theta + 2(1 - \cos^2 \theta) + 4\cos \theta}{(1 - \cos \theta)} + \right. \\ \left. + \frac{4x^2 - 8x \cos \theta + 2(1 - \cos^2 \theta) - 4\cos \theta}{(1 + \cos \theta)^2} - \frac{4(1+x)(x-3)}{(1 - \cos \theta)(1 + \cos \theta)} \right],$$

где $x = E^2/p^2$. Рассмотренное рассеяние электронов на электронах называют также мёллеровским рассеянием (фиг. 38).



Фиг. 38.

Задачи. 1. С помощью изложенного метода вычислите сечение рассеяния позитронов на электронах.

2. Найдите сечение соударения μ -мезона с электроном. Считайте, что μ -мезон удовлетворяет уравнению Дирака для частицы со спином $s = 1/2$ и не имеет аномального магнитного момента. Следует иметь в виду, что в рассматриваемом случае частицы не являются тождественными, и поэтому они не взаимозаменяемы.

3. Вычислите возможное сечение рассеяния электрона на протоне, принимая протон за бесструктурную частицу с аномальным магнитным моментом. Уравнение Дирака для протона имеет вид ¹⁾ (см. двенадцатую лекцию)

$$\left(i\hat{\nabla} + M - e\hat{A} - \frac{\mu}{4M} \gamma_\mu \gamma_\nu F_{\mu\nu} \right) \Psi = 0.$$

¹⁾ Для протона $\mu = 1,7896$.

При этом величину

$$e\hat{A} + \frac{e\mu}{4M} \gamma_\mu \gamma_\nu (\nabla_\mu A_\nu - \nabla_\nu A_\mu)$$

можно рассматривать как оператор возмущения. Взаимодействие протона с фотоном описывается выражением (в импульсном представлении)

$$e\hat{e} + \frac{e\mu}{4M} (\hat{q}\hat{e} - \hat{e}\hat{q}), \text{ или } e\gamma_\mu + \frac{e\mu}{4M} (\hat{q}\gamma_\mu - \gamma_\mu\hat{q}).$$

Суммирование по четырем направлениям поляризации фотона. В классической электродинамике продольные волны всегда можно исключить, оставляя в теории лишь поперечные волны и мгновенное кулоновское взаимодействие. Такой же подход используется в методе Ферми (см. первую лекцию). Сейчас мы покажем, что суммирование по четырем направлениям поляризации фотона также эквивалентно учету лишь поперечных волн и мгновенного кулоновского взаимодействия. Выберем систему координат x, y, z , направляя одну ось вдоль вектора \mathbf{Q} (импульс фотона), а две другие оси располагая в плоскости, перпендикулярной \mathbf{Q} . Матричный элемент рассеяния электронов на электронах при этом можно записать в виде

$$-\frac{M}{i4\pi e^2} = (\tilde{u}_4 \gamma_t u_2) \frac{1}{q^2} (\tilde{u}_3 \gamma_t u_1) - (\tilde{u}_4 \gamma_Q u_2) \frac{1}{q^2} (\tilde{u}_3 \gamma_Q u_1) - \\ - \sum (\tilde{u}_4 \gamma_{tr} u_2) \frac{1}{q^2} (\tilde{u}_3 \gamma_{tr} u_1),$$

где γ_Q и γ_{tr} представляют собой проекции матриц γ на направление вектора \mathbf{Q} и на направление, перпендикулярное к нему. Суммирование ведется по проекциям на два взаимноперпендикулярных направления, перпендикулярных вектору \mathbf{Q} . Матричный элемент оператора $\hat{q} = q_4 \gamma_t - Q \gamma_Q$ всегда равен нулю (это является следствием калибровочной инвариантности)¹⁾. Поэтому

¹⁾ В нашем специальном случае, например, в этом легко можно убедиться непосредственно:

$$(\tilde{u}_4 \hat{q} u_2) = (\tilde{u}_4 (\hat{p}_2 - \hat{p}_4) u_2) = (\tilde{u}_4 \hat{p}_2 u_2) - (\tilde{u}_4 \hat{p}_4 u_2) = \\ = m (\tilde{u}_4 u_2) - m (\tilde{u}_4 u_2) = 0.$$

γ_Q можно заменить на $(q_4/Q) \gamma_t$. В результате получим

$$\begin{aligned} \frac{M}{4\pi e^2} &= (\tilde{u}_4 \gamma_t u_2) \frac{1}{q^2} \left(1 - \frac{q_4^2}{Q^2}\right) (\tilde{u}_3 \gamma_t u_1) - \\ &- \sum_{1,2} (\tilde{u}_4 \gamma_{tr} u_2) \frac{1}{q^2} (\tilde{u}_3 \gamma_{tr} u_1) = - (\tilde{u}_4 \gamma_t u_2) \frac{1}{Q^2} (\tilde{u}_3 \gamma_t u_1) - \\ &- \sum_{1,2} (\tilde{u}_4 \gamma_{tr} u_2) \frac{1}{q^2} (\tilde{u}_3 \gamma_{tr} u_1). \end{aligned}$$

Заметим далее, что $1/Q^2$ представляет собой фурье-образ кулоновского поля, а γ_t — четвертую компоненту плотности тока (плотность заряда). Таким образом, первое слагаемое в этом выражении соответствует кулоновскому взаимодействию, в то время как второе слагаемое соответствует взаимодействию частиц, обусловленному поперечными волнами.

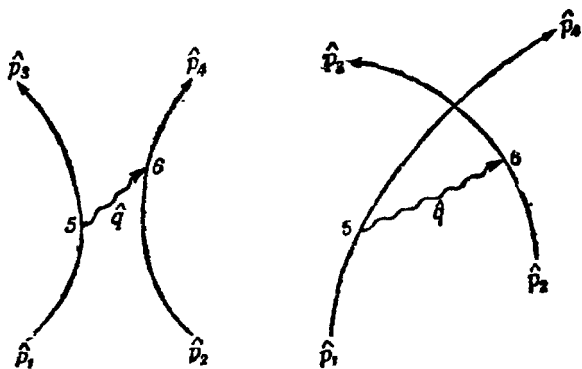
ОБСУЖДЕНИЕ И ИНТЕРПРЕТАЦИЯ РАЗЛИЧНЫХ «ПОПРАВОЧНЫХ» ЧЛЕНОВ

Лекция двадцать шестая

Для многих случаев взаимодействия электронов квантовая электродинамика, оказывается, приводит к таким же результатам, как и более простые теории, за исключением небольших «поправочных» членов. Цель настоящей лекции состоит в обсуждении нескольких таких случаев.

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ДВУХ ЭЛЕКТРОНОВ

Простейшие диаграммы взаимодействия двух электронов представлены на фиг. 39. Амплитуда вероят-



Фиг. 39.

ности такого взаимодействия в импульсном представлении, как было показано выше, пропорциональна величине

$$(\tilde{u}_3 \gamma_\mu u_1) (\tilde{u}_4 \gamma_\mu u_2) \frac{1}{q^2},$$

где $q \equiv (\mathbf{Q}, q_4)$, а \mathbf{Q} — импульс, передаваемый от одного электрона к другому. Далее, так как $\hat{q} = \hat{p}_1 - \hat{p}_3$, то

$$(\tilde{u}_3 \hat{q} u_1) = (\tilde{u}_3 (\hat{p}_1 - \hat{p}_3) u_1) = 0.$$

Исходя из этого тождества, в предыдущей лекции мы пришли к выводу, что написанная выше амплитуда вероятности взаимодействия эквивалентна

$$= (\tilde{u}_3 \gamma_t u_1) (\tilde{u}_4 \gamma_t u_2) \frac{1}{Q^2} - \sum_{1,2} (\tilde{u}_3 \gamma_{tr} u_1) (\tilde{u}_4 \gamma_{tr} u_2) \frac{1}{q^2}.$$

Воспользовавшись преобразованием Фурье, можно показать, что первое слагаемое в этом выражении соответствует фурье-образу кулоновского, мгновенного потенциала. Второе же слагаемое при этом представляет поправку к кулоновскому взаимодействию частиц. Через γ_{tr} обозначены проекции матриц γ на направления, перпендикулярные вектору \mathbf{Q} .

В случае медленных электронов указанную поправку к кулоновскому взаимодействию можно упростить и дать ей наглядную интерпретацию. Заметим, что в этом случае

$$\mathbf{Q} = \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_3,$$

а

$$\begin{aligned} q_4 = E_1 - E_2 &\approx \left[m + \frac{p_1^2}{2m} \right] - \left[m + \frac{p_3^2}{2m} \right] = \frac{p_1^2 - p_3^2}{2m} = \\ &= \frac{p_1 + p_3}{2m} (p_1 - p_3) \approx v (p_1 - p_3). \end{aligned}$$

Таким образом, $q_4^2 \sim v^2 Q^2$ и поэтому q^2 в знаменателе поправочного члена с большой степенью точности можно заменить на Q^2 . (В системе центра тяжести q_4 точно равно нулю.) В результате поправочный член принимает вид

$$+ \sum_{1,2} (\tilde{u}_3 \gamma_{tr} u_1) (\tilde{u}_4 \gamma_{tr} u_2) \frac{1}{Q^2},$$

причем

$$(\tilde{u}_3 \gamma_{tr} u_1) \equiv u_3^* a_{tr} u_1.$$

Напомним теперь, что $u \equiv \begin{pmatrix} u_a \\ u_b \end{pmatrix}$, где u_a соответствует большому, а u_b — малым компонентам волновой функции, и в нерелятивистском приближении

$$u_b \approx \frac{1}{2m} (\sigma \cdot \pi) u_a.$$

Далее, учитывая, что

$$a = \begin{pmatrix} 0 & \sigma \\ \sigma & 0 \end{pmatrix},$$

получаем (между состояниями с положительной энергией)

$$\begin{aligned} u_3^* a_{tr} u_1 &= (u_{3a}^* u_{3b}^*) \begin{pmatrix} 0 & \sigma \\ \sigma & 0 \end{pmatrix}_{tr} \begin{pmatrix} u_{1a} \\ u_{1b} \end{pmatrix} = \\ &= (u_{3a}^* \sigma u_{1b} + u_{3b}^* \sigma u_{1a})_{tr} = \\ &= \frac{1}{2m} [u_{3a}^* \sigma (\sigma \cdot \pi_1) + (\sigma \cdot \pi_3) \sigma u_{1a}]_{tr}. \end{aligned}$$

В свободном пространстве $\pi = \mathbf{p}$, так что, например, для x -компоненты этой матрицы имеем

$$\begin{aligned} \sigma_x (\sigma_x p_{1x} + \sigma_y p_{1y} + \sigma_z p_{1z}) + (\sigma_x p_{3x} + \sigma_y p_{3y} + \sigma_z p_{3z}) \sigma_x = \\ = (\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_3)_x + i [\sigma_z (\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_3)_y - \sigma_y (\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_3)_z]. \end{aligned}$$

При получении этого выражения мы воспользовались коммутационными соотношениями для матриц σ . Отсюда легко видеть, что полную амплитуду вероятности поправочного взаимодействия к кулоновскому потенциалу можно записать в виде

$$\begin{aligned} \sum_{1,2} \frac{1}{Q^2} \left\{ u_{3a}^* \left[\frac{\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_3}{2m} - i \frac{\sigma \times (\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_3)}{2m} \right]_{tr} u_{1a} \right\} \times \\ \times \left\{ u_{4a} \left[\frac{\mathbf{p}_4 + \mathbf{p}_2}{2m} - i \frac{\sigma \times (\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_4)}{2m} \right]_{tr} u_{2a} \right\}. \end{aligned}$$

Первые слагаемые в каждой из квадратных скобок соответствуют токам, обусловленным движением электронов поперек вектора \mathbf{Q} , а вторые — поперечным ком-

понентам дипольного магнитного момента каждого из электронов. Таким образом, оказывается, что амплитуда поправочного взаимодействия двух электронов целиком обусловлена взаимодействиями токов, токов и дипольных магнитных моментов и просто дипольных магнитных моментов между собой. Такие взаимодействия возникают также на основании классической теории, и впервые они были описаны Брейтом еще до появления квантовой электродинамики. В связи с этим такие взаимодействия часто называются брейтовскими.

Рассмотрим член, соответствующий диполь-дипольному взаимодействию. Так как $\mathbf{Q} = \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_3 = \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_4$, то

$$\sum_{1,2} (\boldsymbol{\sigma}_1 \times \mathbf{Q})_{\text{tr}} (\boldsymbol{\sigma}_2 \times \mathbf{Q})_{\text{tr}} \frac{1}{Q^2}.$$

Учитывая, что вектор $\boldsymbol{\sigma} \times \mathbf{Q} = 0$, если $\boldsymbol{\sigma}$ и \mathbf{Q} параллельны, суммирование в этом выражении можно распространить по всем трем проекциям. В результате этот поправочный член можно записать в виде скалярного произведения

$$\frac{(\boldsymbol{\sigma}_1 \times \mathbf{Q}) \cdot (\boldsymbol{\sigma}_2 \times \mathbf{Q})}{Q^2}.$$

С помощью преобразования Фурье¹⁾ легко убедиться, что этот член, как и отмечалось выше, соответствует импульсному представлению взаимодействия двух магнитных диполей.

Заметим, что использованное выше приближение $q_4 \sim vQ$ применимо лишь для переходов между состояниями с положительной энергией. В случае, когда одно из состояний соответствует позитрону, имеем

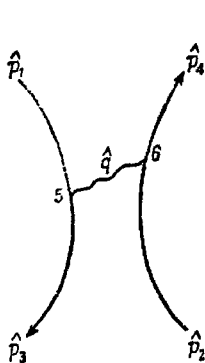
¹⁾ Заметим, что подынтегральное выражение в преобразовании Фурье $Q^{-2} (\boldsymbol{\sigma}_1 \times \mathbf{Q}) \cdot (\boldsymbol{\sigma}_2 \times \mathbf{Q}) e^{-i\mathbf{Q} \cdot \mathbf{x}}$ можно также записать в виде $-Q^{-2} (\boldsymbol{\sigma}_1 \times \nabla) \cdot (\boldsymbol{\sigma}_2 \times \nabla) e^{-i\mathbf{Q} \cdot \mathbf{x}}$. Это позволяет воспользоваться интегрированием по частям и существенно упрощает как само интегрирование, так и результат. Далее, так как фурье-образ Q^{-2} равен $1/r$, то получаем, что рассматриваемый член взаимодействия в координатном представлении сводится к виду $-(\boldsymbol{\sigma}_1 \times \nabla) (\boldsymbol{\sigma}_2 \times \nabla) \times (1/r)$, т. е. представляет собой классическое выражение для энергии взаимодействия магнитных диполей.

$$q_4 = E_1 - E_2 = 2m \neq 0.$$

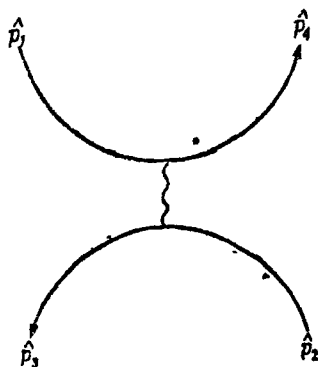
В связи с тем, что величина $2m$ является слишком большой, поправочный член в этом случае становится еще меньше. Тем не менее, его необходимо проанализировать.

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ЭЛЕКТРОНА С ПОЗИТРОНОМ

Так как электрон и позитрон не являются тождественными частицами, казалось бы, что на основании принципа Паули не должна существовать обменная диаграмма взаимодействия, т. е. возможна лишь одна диаграмма, представленная на фиг. 40. В действительности (на основании некоторых феноменологических соображений) возможна еще одна диаграмма взаимодействия, представленная на фиг. 41. Она соответствует виртуальной аннигиляции электрона и позитрона



Фиг. 40.



Фиг. 41.

с рождением фотона, который затем образует новую пару. Чтобы получить согласие теории с экспериментом, необходимо считать, что пара электрон — позитрон часть своего времени находится в виде виртуального фотона.

Как указывалось выше, позитрон можно рассматривать как электрон, совершающий попятное движение во времени. С этой точки зрения диаграммы на фиг. 40 и 41 отличаются лишь перестановкой «конечных»

состояний \hat{p}_3 и \hat{p}_4 . Принцип Паули, обобщенный на этот случай, продолжает действовать; амплитуды вероятности взаимодействия, соответствующего этим двум диаграммам, должны вычитаться, так как они отличаются только лишь перестановкой частиц в конечном состоянии (в смысле направления стрелок).

ПОЗИТРОНИИ

Электрон и позитрон в течение короткого времени могут находиться в связанном состоянии, образуя водородоподобный атом, называемый позитронием. Основным состоянием позитрония является S -состояние, которое может быть как синглетным, так и триплетным в зависимости от взаимной ориентации спинов. Как было указано в задачах двадцать второй лекции, 1S -состояние позитрония может аннигилировать с образованием двух фотонов, в то время как 3S -состояние распадается с образованием по крайней мере трех фотонов. Время жизни позитрония по отношению к двухфотонной аннигиляции равно $(1/8) \cdot 10^{-9}$ сек, а по отношению к трехфотонной аннигиляции составляет $(1/7) \cdot 10^{-6}$ сек.

Задача. Покажите, воспользовавшись вычисленным выше сечением аннигиляции пары, а также водородными волновыми функциями с приведенной массой для позитрония, что время жизни позитрония по отношению к двухфотонной аннигиляции равно $(1/8) \cdot 10^{-9}$ сек.

Диаграмма взаимодействия, представленная на фиг. 40, приводит к кулоновскому потенциалу, носящему характер притяжения и обеспечивающему существование связанного состояния позитрония. Из этой же диаграммы возникает поправочный член (брейтовское взаимодействие), дающий вклад в диполь-дипольное или спин-спиновое взаимодействия, которые в 1S - и 3S -состояниях различны (взаимодействия токов между собой и токов со спинами в обоих состояниях одинаковы). Это различие во взаимодействиях приводит к тонкой структуре уровней 3S - и 1S -состояний, составляющей, как можно показать, $4,8 \cdot 10^{-4}$ эв.

Так как спин фотона равен 1, а спин позитрония в 1S -состоянии равен 0, то, согласно закону сохранения момента, процесс, представленный на фиг. 41, в 1S -состоянии позитрония запрещен. В 3S -состоянии, однако, такой процесс возможен. Поправочное взаимодействие, которое включено в эту диаграмму, мало и приводит к дополнительному расщеплению тонкой структуры уровней 3S - и 1S -состояний. Можно показать, что это расщепление по знаку совпадает со спиновым расщеплением и составляет $3,7 \cdot 10^{-4}$ эв. Часто говорят, что это расщепление обусловлено «новой силой аннигиляции».

Чтобы определить поправочный член, обусловленный диаграммой взаимодействия на фиг. 41, необходимо вычислить величину

$$- (\tilde{u}_4 \gamma_\mu u_1) (\tilde{u}_3 \gamma_\mu u_2) \frac{1}{q^2}.$$

В рассматриваемом случае $q^2 \approx 4 m^2$ (так как в системе центра тяжести $Q=0$), а матричные элементы равны 0 или 1 (считая частицы, составляющие позитроний, практически покоящимися). Поэтому эта величина является числом. Это приводит к тому, что потенциал взаимодействия электрона с позитроном в координатном пространстве, соответствующий этому члену (используя фурье-преобразование), является δ -функцией расстояния между ними. По этой причине такое взаимодействие между электроном и позитроном часто называют «короткодействующим», или контактным.

Полное расщепление уровней тонкой структуры позитрония, обусловленное указанными выше эффектами, оказывается равным

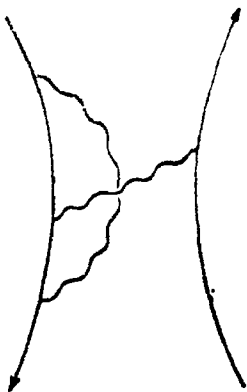
$$\frac{1}{2} \alpha^2 \cdot \text{ридберг} \cdot \frac{7}{3},$$

где α — постоянная тонкой структуры ($\alpha=1/137$). В частотной шкале энергий это составляет $2,044 \cdot 10^5$ Мгц.

Существует, однако, еще одна поправка, не упомянутая выше и обусловленная диаграммой взаимодействия на фиг. 42. Согласно этой диаграмме, электрон или позитрон могут излучить и затем поглотить собственный фотон. Если учесть и эту диаграмму взаимо-

действия, то для расщепления тонкой структуры позитрония получим¹⁾

$$\frac{1}{2} \alpha^2 \cdot \text{ридберг} \cdot \left\{ \frac{7}{3} - \left[\frac{32}{9} + 2 \ln 2 \right] \frac{\alpha}{\pi} \right\}.$$



Ф и г. 42.

Это составляет $2,0337 \cdot 10^5$ Мгц. Экспериментальное значение для расщепления тонкой структуры позитрония равно $(2,035 \pm 0,003) \cdot 10^5$ Мгц. Таким образом, хотя последняя поправка и мала по сравнению с основной поправкой в α раз, однако ее учет совершенно необходим для получения согласия теории с экспериментом. Так же как и у атома водорода, сдвиг уровней позитрония называют лэмбовским сдвигом. Лэмб впервые экспериментально обнаружил малое расщепление уровней $^2S_{1/2}$ и $^2P_{1/2}$ в атоме водорода. Последнее, вообще говоря, в основном обусловлено самодействием электрона и более детально обсуждается ниже.

ДВУХФОТОННЫЙ ОБМЕН МЕЖДУ ЭЛЕКТРОНАМИ И ПОЗИТРОНАМИ

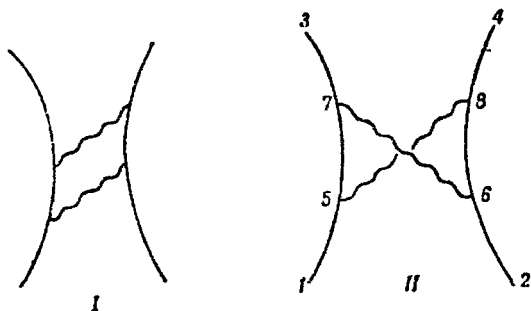
Легко видеть, что процессы, представленные на диаграммах фиг. 43, соответствуют двухфотонному обмену между частицами. На сегодняшний день рассматривать процессы столь высокого порядка для достижения

¹⁾ R. Karplus, A. Klein, Phys. Rev., 87, 848 (1952).

согласия теории с экспериментом нет необходимости. Однако в будущем с уточнением экспериментальных результатов это может стать необходимым.

Амплитуды вероятности для этих процессов можно легко записать, однако их конкретное вычисление несколько громоздко. Амплитуда вероятности перехода, соответствующего, например, диаграмме II на фиг. 43, в координатном представлении имеет вид

$$\begin{aligned}
 & -e^4 \iiint [K_+(3,7) \gamma_\nu K_+(7,5) \gamma_\mu K_+(5,1)] \times \\
 & \times [K_+(4,8) \gamma_\mu K_+(8,6) \gamma_\nu K_+(6,2)] \times \\
 & \times \delta_+(s_{7,6}^2) \delta_+(s_{5,8}^2) d\tau_5 d\tau_6 d\tau_7 d\tau_8.
 \end{aligned}$$



Фиг. 43.

Отсюда в импульсном представлении получаем

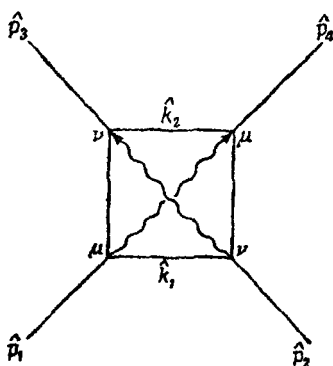
$$\begin{aligned}
 & - (4\pi)^2 e^4 \int \left(\tilde{u}_3 \gamma_\nu \frac{1}{\hat{p}_1 - \hat{k}_1 - m} \gamma_\mu u_1 \right) \times \\
 & \times \left(\tilde{u}_4 \gamma_\mu \frac{1}{\hat{p}_2 - \hat{k}_2 - m} \gamma_\nu u_2 \right) \frac{d^4 k_1}{k_1^2 k_2^2 (2\pi)^4},
 \end{aligned}$$

где (фиг. 44)

$$\hat{p}_2 - \hat{k}_2 + \hat{k}_1 = \hat{p}_4, \quad \text{или} \quad \hat{k}_2 = \hat{p}_2 + \hat{k}_1 - \hat{p}_4.$$

Эти соотношения связывают между собой величины \hat{k}_1 и \hat{k}_2 , но не определяют их независимо, т. е. импульс между двумя фотонами делится произвольным

образом. Именно по этой причине амплитуда вероятности перехода содержит интегрирование по k_1 .



Фиг. 44.

Лекция двадцать седьмая

СОБСТВЕННАЯ ЭНЕРГИЯ ЭЛЕКТРОНА ¹⁾

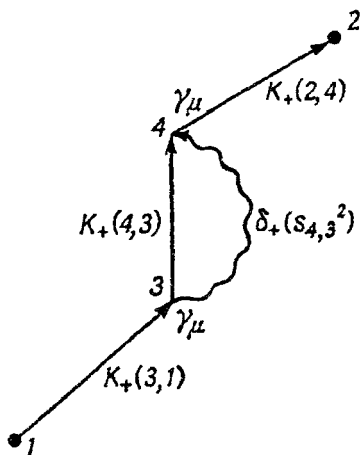
В предыдущей лекции была высказана мысль о том, что электрон может сначала излучить, а затем поглотить один и тот же фотон, как это показано на фиг. 45. Поэтому функция распространения, описывающая свободное движение электрона из точки 1 в точку 2, должна учитывать такую возможность. Такая функция распространения, учитывающая лишь эффекты первого порядка (т. е. излучение и поглощение одного фотона), имеет вид

$$K(2, 1) = K_+(2, 1) - ie^2 \iint K_+(2, 4) \gamma_\mu K_+(4, 3) \gamma_\mu \times \\ \times K_+(3, 1) \delta_+(s_{4,3}^2) d\tau_4 d\tau_3. \quad (27.1)$$

Поправочный член в этом выражении записывается, исходя из диаграммы на фиг. 45, по аналогии с матричным элементом рассеяния. В рассматриваемом случае импульсы электрона в начальном и конечном состояниях равны друг другу. Поэтому все недиагональные матричные элементы оператора возмущения равны нулю. Отличен от нуля лишь тот диагональный матрич-

¹⁾ См. примечание на стр. 110.

ный элемент, для которого начальная и конечная волновые функции принадлежат одному и тому же состоянию электрона. Как было показано при построении теории возмущений, под действием возмущения, не



Ф и г. 45.

зависящего от времени, может измениться лишь фаза таких волновых функций, причем изменение фазы пропорционально времени действия возмущения T . В результате волновая функция принимает вид

$$e^{-iE_n T} e^{-i(\Delta E)T} \quad (27.2)$$

Так как эффект возмущения мал, $(\Delta E)T \ll 1$, вторую экспоненту в этом выражении можно разложить в ряд, ограничиваясь лишь первыми членами разложения, $1 - i(\Delta E)T + \dots$. Поправочный член в формуле (27.1) как раз и соответствует второму члену этого разложения. Эти два представления, однако, еще не эквивалентны, так как содержат различные нормировочные множители.

Чтобы получить правильное выражение для поправочного члена, необходимо учитывать следующие обстоятельства.

Во-первых, ясно, что амплитуда вероятности рассматриваемого процесса зависит лишь от пространственно-временного интервала между точками 3 и 4 и

совершенно не зависит от абсолютных значений координат и времени в этих точках. Поэтому, если произвести замену переменных таким образом, чтобы $d\tau_4$ представлял собой элемент интервала (пространственно-временного) между точками 3 и 4, то поправочный член в формуле (27.1) запишется в виде

$$\iint \tilde{f}(4) \gamma_\mu K_+(4, 3) \gamma_\mu \delta_+(s_{4,3}^2) f(3) d^3x_3 dt_3 d\tau_4, \quad (27.3)$$

где функции $K_+(4, 3)$ и $\delta_+(s_{4,3}^2)$ зависят лишь от интервала между точками 3 и 4.

Во-вторых, выражение (27.2) содержит зависящую от времени часть волновой функции, $e^{-iE_n t}$, так как по предположению используемые волновые функции не должны содержать множителей, зависящих от времени. Так как функции $f(3)$ и $f(4)$ в выражении (27.3) уже включают в себя временную зависимость, то в выражении (27.2) указанная временная зависимость должна быть опущена.

В-третьих, нормировка волновых функций в указанных двух приближениях является разной. При получении выражения (27.2) использовалась нормировка

$$\int \Psi^* \Psi dV = 1.$$

При получении же формул (27.1) и (27.3) принималась нормировка

$$\int u^* u dV = \frac{2E}{cm^2} V. \quad (27.4)$$

Таким образом, приведенные выше приближения будут эквивалентны, если выражение (27.3) разделить на нормирующий интеграл (27.4). В результате получим

$$-i(\Delta E) T = \frac{-ie^2 \iint \tilde{f}(4) \gamma_\mu K_+(4, 3) \gamma_\mu \delta_+(s_{4,3}^2) f(3) d\tau_4 d^3x_3 dt_3}{2EV}.$$

Интегрирование по d^3x_3 дает в числителе множитель V , который сокращается с соответствующим множителем в знаменателе. В результате же интегрирования по dt_3 возникает множитель T , который сокращается с таким же множителем в левой части соотношения. Окончательно имеем

$$2E(\Delta E) = + e^2 \int \tilde{u} \gamma_\mu K_+(4, 3) \gamma_\mu \delta_+(s_{4,3}^2) u d\tau_4. \quad (27.5)$$

Заметим, что этот интеграл является релятивистски инвариантным. Далее, так как величина $|\mathbf{p}|$ в рассматриваемом взаимодействии не меняется, а $E^2 = \mathbf{p}^2 + m^2$, то все изменение ΔE можно отнести за счет изменения массы электрона:

$$2E(\Delta E) = 2m(\Delta m).$$

Используя это соотношение и переходя в формуле (27.5) к импульсному представлению, получаем

$$\Delta m = \frac{4\pi e^2}{2mi} \int \tilde{u} \left(\gamma_\mu \frac{1}{\hat{p} - \hat{k} - m} \gamma_\mu \right) u \frac{d^4 k}{(2\pi)^4 k^2}. \quad (27.6)$$

Используя уравнение $\hat{p}u = mu$ и соотношения десятой лекции, подынтегральное выражение можно переписать в виде

$$\gamma_\mu \frac{1}{\hat{p} - \hat{k} - m} \gamma_\mu = \frac{\gamma_\mu (\hat{p} - \hat{k} + m) \gamma_\mu}{\hat{p}^2 - 2p \cdot k + k^2 - m^2} = \frac{2m + 2\hat{k}}{k^2 - 2p \cdot k}.$$

В результате выражение (27.6) принимает вид

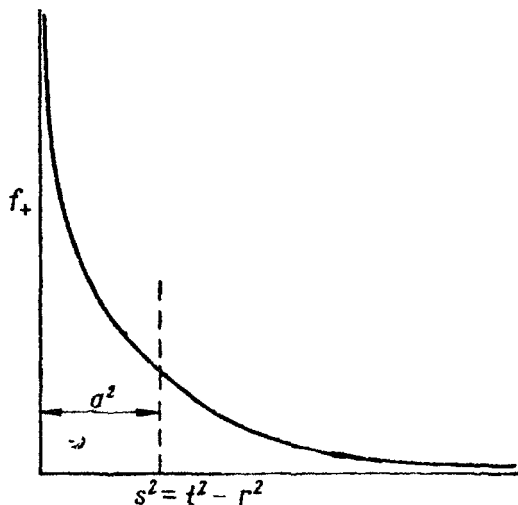
$$\Delta m = \frac{4\pi e^2}{i} \int \frac{2m + 2\hat{k}}{k^2 - 2p \cdot k} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4 k^2}. \quad (27.6a)$$

Интеграл (27.6a) является расходящимся интегралом; и именно это обстоятельство в течение 20 лет являлось главным препятствием в квантовой электродинамике. Чтобы разрешить эту задачу, требуется изменить основные законы квантовой электродинамики. Так, приходится допустить, что функция распространения фотона равна не $1/k^2$, а $(1/k^2)c(k^2)$, где функция $c(k^2)$ подобрана таким образом, чтобы $c(0) = 1$ и $c(k^2) \rightarrow 0$ при $k^2 \rightarrow \infty$. В координатном представлении это изменение записывается в виде

$$\delta_+(s_{1,2}^2) \rightarrow f_+(s_{1,2}^2) = \int \frac{c(k^2)}{k^2} e^{-ik \cdot x} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4}. \quad (27.7)$$

Новая функция $f_+(s^2)$ существенно отличается от функции $\delta_+(s^2)$ лишь в области малых интервалов s . Так как множитель $c(k^2)$ обрезает высокие частоты в разложении Фурье (27.7), то функция искажается

лишь при малых значениях аргумента. В рассматриваемом случае размер интервала, в котором происходит существенное изменение функции, можно грубо оценить следующим образом. Рассмотрим большую величину λ^2 и предположим, что $c(k^2) \approx 1$ при $k^2 \ll \lambda^2$. При этом искажения будут проявляться для интервалов [из-за экспоненты в формуле (27.7)] $s^2 \approx 1/\lambda^2$. Если эту величину обозначить через a^2 , то общее поведение функции $f_+(s^2)$ можно представить кривой на фиг. 46. Таким образом, величина a^2 играет роль



Фиг. 46.

«полуширины» для функции $f_+(s^2)$. Если $a^2 \ll 1$, как это и предполагается, то

$$t^2 - r^2 = a^2 \quad \text{и} \quad t - r \approx \frac{a^2}{2r}. \quad (27.8)$$

Последнее выражение и представляет собой искомый размер интервала существенного изменения функции распространения.

Физический смысл функции $f_+(s^2)$ можно понять следующим образом. Первоначальная функция $\delta_+(s^2)$ отличается от нуля лишь при $s^2 = t^2 - r^2 = 0$. Иными словами, электромагнитный сигнал может пройти рас-

стояние r лишь за время t , определяемое условием $t^2 - r^2 = 0$, или $t = r$ (т. е. скорость света равна 1). Это утверждение перестает быть справедливым для функции $f_+(s^2)$. В какой степени оно нарушается, можно определить измеряя величины $t - r$. Согласно соотношению (27.8), для всех значений $r \gg a$ величина $t - r$ пренебрежимо мала. Таким образом, при достаточно больших λ^2 можно считать, что законы электродинамики остаются неизменными практически для любых расстояний.

Практически удобное (и общее) представление функции $c(k^2)$ при $\lambda^2 \gg m^2$ имеет вид

$$c(k^2) = \int G(\lambda) d\lambda \frac{-\lambda^2}{k^2 - \lambda^2}.$$

В простейшем случае можно взять

$$c(k^2) = -\frac{\lambda^2}{k^2 - \lambda^2}.$$

При этом для функции распространения фотона получаем выражение

$$\frac{1}{k^2} \frac{-\lambda^2}{k^2 - \lambda^2} = \frac{1}{k^2} - \frac{1}{k^2 - \lambda^2}.$$

Второй член соответствует функции распространения фотона с массой λ . Однако знак минус перед этим членом с этой точки зрения не получил объяснения.

Удобно представить новую функцию распространения фотона в виде интеграла

$$-\int_0^{\lambda^2} \frac{dL}{(k^2 - L)^2}. \quad (27.9)$$

Заменяя функцию $1/k^2$ в выражении (27.6а) новой функцией распространения, получаем интеграл

$$\int \frac{2m + 2\hat{k}}{k^2 - 2\rho \cdot k} \frac{d^4k}{k^2} \left(\frac{-\lambda^2}{k^2 - \lambda^2} \right), \quad (27.10)$$

который можно представить в виде суммы двух интегралов. Эти интегралы отличаются тем, что в одном из них в числителе стоит величина m , а в другом \hat{k} , т. е. k_0 (так как $\hat{k} = \gamma_0 k_0$).

МЕТОД ВЫЧИСЛЕНИЯ ИНТЕГРАЛОВ, ВСТРЕЧАЮЩИХСЯ В КВАНТОВОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ

В будущем нам придется вычислять интегралы, подобные приведенным выше. Разработан весьма эффективный метод вычисления таких интегралов. В этом разделе мы остановимся на описании этого метода.

Все будет основываться на следующих двух интегралах ¹⁾:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(1; k_a)}{(k^2 + i\varepsilon - L)^2} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} = (32\pi^2 iL)^{-1} (1; 0), \quad (27.11)$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{[ax + b(1-x)]^2} = \frac{1}{ab}. \quad (27.12)$$

Символ $(1; k_a)$ в соотношении (27.11) употребляется для более компактной записи и означает, что в числителе подынтегрального выражения стоит либо 1, либо k_a , а символ $(1; 0)$ в правой части соотношения показывает, что этот интеграл равен соответственно либо $(32\pi^2 iL)^{-1}$, либо 0. Приступая к доказательству первого из этих соотношений, прежде всего заметим, что в случае, когда в числителе стоит k_a , подынтегральное выражение является нечетной функцией k . Интеграл в этом случае будет равен нулю. В случае, когда в числителе стоит 1, этот интеграл вычисляется контурным интегрированием. Запишем интеграл в виде

$$\iiint \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^3k d\omega}{[\omega^2 + i\varepsilon - (L + k^2)]^2}.$$

При $\varepsilon \ll L + k^2$ полюсы подынтегрального выражения расположены в точках $\omega = \pm [V L + k^2 - i\varepsilon]$. В результате контурного интегрирования по ω (контур берется в верхней полуплоскости) получаем

¹⁾ См. работу Фейнмана, указанную в примечании на стр. 110. Заметим, что величина d^4k в этой статье эквивалентна величине $4\pi^2 d^4k / (2\pi)^4$ в наших обозначениях.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{\omega^2 + i\varepsilon - (L + k^2)} = 2\pi i [-2(L + k^2)^{-1/2}]^{-1}.$$

Дважды дифференцируя по L , имеем

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{[\omega^2 + i\varepsilon - (L + k^2)]^2} = \frac{6\pi}{16i} (L + k^2)^{-5/2}.$$

Используя это, находим

$$\begin{aligned} \iint_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^3k}{(L + k^2)^{5/2}} &= 4\pi \int_0^{\infty} \frac{k^2 dk}{(L + k^2)^{5/2}} = \\ &= 4\pi \frac{k^3}{3L(L + k^2)^{3/2}} \Big|_0^{\infty} = \frac{4\pi}{3L}, \end{aligned}$$

что и доказывает соотношение (27.11). Заменяя переменную интегрирования в соотношении (27.11) на $k - p$, получаем

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(1; k_\sigma) d^4k}{(2\pi)^4 (k^2 - 2p \cdot k - \Delta)^3} = \frac{(1; p_\sigma)}{32\pi^2 i (p^2 + \Delta)}. \quad (27.13)$$

Далее, дифференцируя обе части этого соотношения либо по Δ , либо по p_j , непосредственно находим

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(1; k_\sigma; k_\sigma k_j) d^4k}{(2\pi)^4 (k^2 - 2p \cdot k - \Delta)^4} = - \frac{[1; p_\sigma; p_\sigma p_j - \frac{1}{2} \delta_{\sigma j} (p^2 + \Delta)]}{96\pi^2 i (p^2 + \Delta)^2}.$$

Последующие дифференцирования этого соотношения приводят к интегралам, содержащим более высокие степени k в числителе и более высокие степени величины $(k^2 - 2p \cdot k - \Delta)$ в знаменателе.

Лекция двадцать восьмая

ИНТЕГРАЛ СОБСТВЕННОЙ ЭНЕРГИИ ПРИ НАЛИЧИИ ВНЕШНЕГО ПОЛЯ

В предыдущей лекции было показано, что собственная энергия электрона эквивалентна изменению его массы на величину

$$\Delta m = \frac{4\pi e^2}{2mi} \int \tilde{u} (2m + 2k) u \left(\frac{-\lambda^2}{k^2 - \lambda^2} \right) \frac{1}{k^2} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4}. \quad (28.1)$$

Это соотношение можно выразить с помощью интегралов

$$I = - \int_0^{\lambda^2} dL \int \frac{(1; k_\sigma)}{(k^2 - 2p \cdot k)(k^2 - L)^2} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4}. \quad (28.2)$$

Было также показано, что

$$\int \frac{(1; k_\sigma)}{(k^2 - 2p \cdot k - \Delta)^2} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} = (32\pi^2 i)^{-1} \frac{(1; p_\sigma)}{p^2 + \Delta}. \quad (28.3)$$

Воспользовавшись определенным интегралом

$$\frac{1}{ab^2} = \int_0^1 \frac{2(1-x) dx}{[ax + b(1-x)]^2}, \quad (28.4)$$

подынтегральное выражение (28.2) можно записать в виде

$$\frac{1}{(k^2 - 2p \cdot k)(k^2 - L)^2} = \int_0^1 \frac{2(1-x) dx}{[k^2 - 2xp \cdot k - L(1-x)]^2}.$$

В результате интеграл (28.2) принимает вид

$$I = - \int_0^{\lambda^2} dL \int \int_0^1 \frac{d^4 k (1; k_\sigma) 2(1-x) dx}{[k^2 - 2xp \cdot k - L(1-x)]^2 (2\pi)^4}. \quad (28.5)$$

Интегрирование по k можно выполнить, используя формулу (28.3) и заменяя p на xp и Δ на $L(1-x)$. Получаем

$$I = - \int_0^{\lambda^2} dL \int_0^1 \frac{(1; p_\sigma) 2(1-x) dx}{32\pi^2 i [x^2 p^2 + L(1-x)]}, \quad p^2 = m^2.$$

Интеграл по L берется элементарно и приводит к выражению

$$I = - 2(32\pi^2 i)^{-1} \int_0^1 dx (1; xp_\sigma) \ln \left[\frac{(1-x)\lambda^2 + m^2 x^2}{m^2 x^2} \right].$$

При $\lambda^2 \gg m^2$ в числителе под логарифмом можно пренебречь членом $m^2 x^2$ [в действительности в области $x \approx 1$ член $m^2 x^2$ уже не мал по сравнению с $(1-x)\lambda^2$, однако при $\lambda^2 \gg m^2$ эта область является настолько узкой, что ошибка, возникающая в результате такого пренебрежения, очень мала]. После интегрирования по x получаем¹⁾

$$I \approx - (32\pi^2 i)^{-1} \left\{ 2 \left[\ln \left(\frac{\lambda^2}{m^2} \right) + 2 \right]; p_0 \left[\ln \left(\frac{\lambda^2}{m^2} \right) - \frac{1}{2} \right] \right\}$$

при $\lambda^2 \gg m^2$.

Для величины изменения массы электрона, согласно формуле (28.1), имеем

$$\Delta m = \frac{4\pi^2}{2m i} (-32\pi^2 i)^{-1} \left(\tilde{u} \left\{ 2m \left[2 \ln \left(\frac{\lambda^2}{m^2} \right) + 2 \right] + 2 \hat{p} \left[\ln \left(\frac{\lambda^2}{m^2} \right) - \frac{1}{2} \right] \right\} u \right).$$

Учитывая, что $\hat{p} u = m u$, а $\tilde{u} u = 2m$, это выражение можно упростить, т. е.

$$\frac{\Delta m}{m} = \frac{e^2}{2\pi} \left[3 \ln \frac{\lambda}{m} + \frac{3}{4} \right]. \quad (28.6)$$

Заметим теперь, что так как $e^2/2\pi$ порядка 10^{-3} , то даже при очень больших λ по сравнению с m изменение массы электрона Δm не очень велико. Полученный результат можно интерпретировать следующим образом. Изменение массы электрона зависит от λ и, таким образом, теоретически его нельзя определить. С другой стороны, можно представить себе, что существуют экспериментальная и теоретическая массы, связанные между собой соотношением

$$m_{\text{эксп}} = m_{\text{теор}} + \Delta m. \quad (28.7)$$

1)

$$\int_0^1 \ln [x^{-2} (1-x)] dx = 1; \quad \int_0^1 x \ln [x^{-2} (1-x)] dx = -\frac{1}{4}.$$

Все наши измерения позволяют определить массу $m_{\text{эксп}}$, учитывающую самодействие электрона. Массу же $m_{\text{теор}}$ без учета самодействия определить невозможно. Более точно можно сформулировать положение следующим образом:

$\left. \begin{array}{l} \text{Теория, использующая массу} \\ m_{\text{теор}} \text{ и учитывающая} \\ \text{самодействие} \sim e^2/\hbar c \end{array} \right\}$	$\left. \begin{array}{l} \text{экви-} \\ \text{валент-} \\ \text{на} \end{array} \right\}$	$\left. \begin{array}{l} \text{Теории, использующей} \\ \text{массу } m_{\text{эксп}} \\ \text{за вычетом } \Delta m \\ \text{для свободной частицы,} \\ \text{и учитывающей самодей-} \\ \text{ствие} \sim e^2/\hbar c \end{array} \right\}$

В случае, когда электрон свободный, самодействие $\sim e^2/\hbar c$ в точности сокращается с членом Δm , и в теории фигурирует лишь масса $m_{\text{эксп}}$. Если же электрон не свободный, то самодействие $\sim e^2/\hbar c$ не полностью компенсируется членом Δm , и в теории остается малая поправка к массе $m_{\text{эксп}}$. Этот эффект приводит к лэмбовскому сдвигу уровней в атоме водорода. Чтобы научиться вычислять такого рода эффекты, мы здесь рассмотрим эффект самодействия в задаче рассеяния электрона на внешнем потенциале.

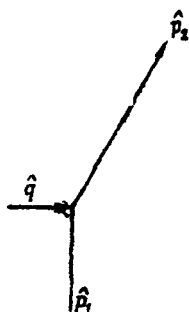
РАСSEЯНИЕ ЭЛЕКТРОНА НА ВНЕШНЕМ ПОТЕНЦИАЛЕ

Диаграмма взаимодействия для случая рассеяния электрона на внешнем потенциале представлена на фиг. 47. В отсутствие эффекта самодействия этот процесс характеризуется следующими соотношениями:

$$\text{Потенциал (кулоновский): } \hat{a}(q) = \gamma_t \frac{4\pi Ze}{Q^2} \delta(q_4);$$

$$\text{Закон сохранения: } \hat{p}_2 = \hat{p}_1 + \hat{q};$$

$$\text{Матричный элемент: } M = -ie(\tilde{u}_2 \hat{a} u_1).$$

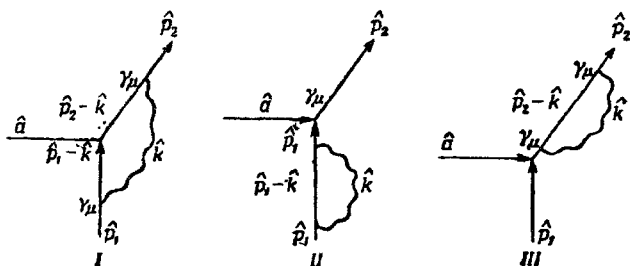


Фиг. 47.

Самодействие первого порядка учитывается в диаграммах, представленных

на фиг. 48. Амплитуды вероятности этих процессов записываются обычным способом. Так, например; в случае диаграммы I имеем

$$M_1 = \frac{4\pi e^2}{i} \int (\tilde{u}_2 \gamma_\mu \frac{1}{\hat{p}_2 - \hat{k} - m} \hat{a} \frac{1}{\hat{p}_1 - \hat{k} - m} \gamma_\mu u_1) \frac{1}{k^2} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4}.$$



Фиг. 48.

Освобождаясь от операторов в знаменателях и вводя множитель сходимости, отсюда получаем

$$M_1 = \frac{4\pi e^2}{i} \int \frac{(\tilde{u}_2 \gamma_\mu [\hat{p}_2 - \hat{k} + m] \hat{a} [\hat{p}_1 - \hat{k} + m] \gamma_\mu u_1)}{(k^2 - 2p_2 \cdot k)(k^2 - 2p_1 \cdot k)} \times \\ \times \frac{-\lambda}{k^2 - \lambda^2} \frac{1}{k^2} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4}. \quad (28.8)$$

Легко видеть, что этот интеграл расходится на нижнем пределе, т. е. при малых импульсах фотона k (эта расходимость, получившая название «инфракрасной катастрофы», имеет ясную физическую интерпретацию и будет обсуждаться ниже). Чтобы сделать интеграл сходящимся, в подынтегральном выражении функцию k^{-2} временно заменим на $(k^2 - \lambda_{\text{мин}}^2)^{-1}$, где $\lambda_{\text{мин}}^2 \ll m^2$. Это эквивалентно обрезанию интеграла на нижнем пределе при $k \approx \lambda_{\text{мин}}$. Физическая интерпретация такого обрезания будет дана в последующих лекциях. Для облегчения интегрирования по k вос-

пользуемся тождеством

$$-\int_{\lambda_{\text{мин}}^2}^{\lambda^2} \frac{dL}{(k^2 - L)^2} = \frac{1}{k^2 - \lambda_{\text{мин}}^2} - \frac{1}{k^2 - \lambda^2} =$$

$$= \frac{\lambda_{\text{мин}}^2 - \lambda^2}{(k^2 - \lambda_{\text{мин}}^2)(k^2 - \lambda^2)} \approx \frac{-\lambda_2}{k^2 - \lambda^2} \frac{1}{k^2 - \lambda_{\text{мин}}^2},$$

так как $\lambda^2 \gg m^2 \gg \lambda_{\text{мин}}^2$. При учете этого тождества выражение (28.8) сводится к интегралам вида

$$-\int_{\lambda_{\text{мин}}^2}^{\lambda^2} dL \int \frac{(1; k_\sigma; k_\sigma k_\tau) (2\pi)^{-4} d^4 k}{(k^2 - 2p_1 \cdot k)(k^2 - 2p_2 \cdot k)(k^2 - L)^2}.$$

Для вычисления этих интегралов используем тождество

$$\frac{1}{ab} = \int_0^1 \frac{dy}{[ay + b(1-y)]^2}.$$

Имеем

$$\frac{1}{(k^2 - 2p_1 \cdot k)(k^2 - 2p_2 \cdot k)} = \int_0^1 \frac{dy}{(k^2 - 2\hat{p}_y \cdot k)^2},$$

где $\hat{p}_y = y\hat{p}_1 + (1-y)\hat{p}_2$. Интегрирование следует проводить последовательно по k , L и y . Представляя выражение (28.8) в виде суммы таких интегралов и вычисля матричные элементы между состояниями u_2 и u_1 , получаем

$$M_1 = \frac{e^2}{2\pi} \left[2 \left(\ln \frac{m}{\lambda_{\text{мин}}} - 1 \right) \left(1 - \frac{2\theta}{\text{tg} 2\theta} \right) + \theta \text{tg} \theta + \right.$$

$$\left. + \frac{4}{\text{tg} 2\theta} \int_0^\theta \alpha \text{tg} \alpha d\alpha \right] \hat{a} +$$

$$+ \frac{e^2}{2\pi} \left[\frac{1}{4m} (\hat{q} \hat{a} - \hat{a} \hat{q}) \frac{2\theta}{\sin 2\theta} + r \hat{a} \right], \quad (28.9)$$

где $r = \ln(\lambda/m) + (9/4) - 2 \ln(m/\lambda_{\text{мин}})$, а $q^2 = 4m^2 \sin^2 \theta$.

В тридцатой лекции будет показано, что диаграммы взаимодействия II и III (см. фиг. 48) приводят к вкладу $M_2 + M_3 = -(e^2/2\pi) r \hat{a}$, который в точности

сокращается с аналогичным членом в M_1 . В пределе малых q , когда $\theta \approx \sqrt{q^2/2m}$ суммарный матричный элемент $M = M_1 + M_2 + M_3$ приближенно можно представить в виде

$$M \approx \frac{e^2}{4\pi} \left[\frac{1}{2m} (\hat{q} \hat{a} - \hat{a} \hat{q}) + \frac{4q^2}{3m^2} \hat{a} \left(\ln \frac{m}{\lambda_{\text{мин}}} - \frac{3}{8} \right) \right]. \quad (28.10)$$

Величину $\hat{q} \hat{a} - \hat{a} \hat{q}$ можно переписать

$$\hat{q} \hat{a} - \hat{a} \hat{q} = \gamma_\mu \gamma_\nu (q_\mu a_\nu - a_\mu q_\nu).$$

Так как вектору q_μ в координатном представлении соответствует оператор ∇_μ , то получаем

$$\gamma_\mu \gamma_\nu (\nabla_\mu A_\nu - \nabla_\nu A_\mu) = + \gamma_\mu \gamma_\nu F_{\mu\nu}$$

[см. формулу (7.1)]. В конце двенадцатой лекции указывалось, что влияние аномального магнитного момента частицы можно учесть, если из обычного потенциала $\hat{a} = \gamma_\mu A_\mu$ в уравнении Дирака вычесть $\mu \gamma_\mu \gamma_\nu F_{\mu\nu}$. Это приводит к матричному элементу, в точности совпадающему с первым слагаемым выражения (28.10). Поэтому указанную часть поправки от самодействия можно трактовать как поправку к магнитному моменту электрона

$$\mu_{\text{электр}} = \frac{e}{2m} \left[1 + \frac{e^2}{2\pi} \right].$$

Заметим, что этот результат [так же как и соответствующие слагаемые в формулах (28.9) и (28.10)] не зависит от обрезającego параметра λ . Поэтому λ можно считать бесконечно большой величиной¹⁾.

Лекция двадцать девятая

В предыдущей лекции было показано, что при рассеянии частицы на внешнем потенциале основной эффект обусловлен самим потенциалом \hat{a} . Поправочный член, возникающий из диаграммы I (см. фиг. 48), входит в выражение (28.9) для матричного элемента;

¹⁾ См. примечание на стр. 110.

$$\frac{e^2}{2\pi} \left[2 \left(\ln \frac{m}{\lambda_{\text{мин}}} - 1 \right) \left(1 - \frac{2\theta}{\text{tg } 2\theta} \right) + \theta \text{tg } \theta + \right. \\ \left. + \frac{4}{\text{tg } 2\theta} \int_0^{\theta} \alpha \text{tg } \alpha \, d\alpha \right] \hat{a} + \frac{e^2}{8\pi m} (\hat{q} \hat{a} - \hat{a} \hat{q}) \frac{2\theta}{\sin 2\theta} + \frac{e^2}{2\pi} r \hat{a}.$$

Нам осталось показать, что суммарный вклад в матричный элемент от диаграмм II и III (см. фиг. 48) с учетом изменения массы электрона равен

$$-\frac{e^2}{2\pi} r \hat{a}.$$

Этот член в точности сокращается с последним членом приведенного выше выражения. Напомним, что учет изменения массы электрона и самодействия, представленного на диаграммах I, II и III, необходим, так как теория должна содержать не «теоретическую», а экспериментальную массу.

Заменим в уравнении Дирака

$$(i\hat{\nabla} - m_{\text{теор}}) \Psi = e\hat{A}\Psi$$

теоретическую массу $m_{\text{теор}}$ на $m - \Delta m$, где m — экспериментальная масса. Получим

$$(i\hat{\nabla} - m) \Psi = e(\hat{A} + \Delta m) \Psi.$$

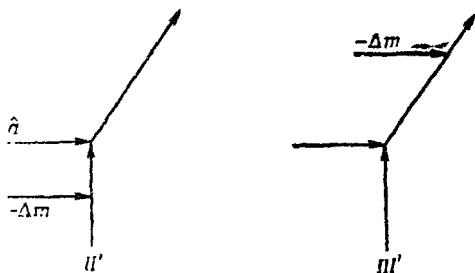
Так как величина изменения массы электрона Δm является просто числом, то в импульсном представлении она будет пропорциональна δ -функции импульса. Из уравнения Дирака следует, что Δm играет роль потенциала, диагонального в импульсном представлении и отличного от нуля лишь при нулевом импульсе. Действие такого потенциала можно представить в виде диаграмм, показанных на фиг. 49. Знак минус указывает, что результат действия потенциала Δm вычитается из поправок, обусловленных диаграммами I, II и III (см. фиг. 48).

Амплитуда вероятности процесса, представленного на диаграмме II, оказывается равной

$$\tilde{u}_2 \hat{a} \frac{1}{\hat{p}_1 - m} \left(\frac{4\pi e^2}{i} \int \gamma_\mu \frac{1}{\hat{p}_1 - \hat{k} - m} \gamma_\mu u_1 \frac{1}{k^2 - \lambda_{\text{МНН}}^2} \times \right. \\ \left. \times \frac{-\lambda^2}{k^2 - \lambda^2} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \right),$$

а амплитуда вероятности процесса на диаграмме II' (фиг. 49) равна

$$-\tilde{u}_2 \hat{a} \frac{1}{\hat{p}_1 - m} (\Delta m) u_1.$$



Ф и г. 49.

Величина в круглых скобках в выражении для амплитуды вероятности процесса, изображенного на диаграмме II, в точности равна $(\Delta m) u_1$. Поэтому кажется, что приведенные выражения взаимно сокращаются. Аналогичное положение имеет место для диаграмм III и III'. Это, однако, неверно, причем ошибка возникает вследствие того, что обе приведенные выше амплитуды вероятностей оказываются расходящимися из-за наличия множителя $\hat{p} - m$ в знаменателе. Поэтому их разность является неопределенной. Как будет показано, при правильном вычитании их разность оказывается конечной.

Предлагаемый метод вычитания, фактически, учитывает суммарный эффект самодействия и изменения массы в диаграммах II, III, II' и III'. Он основывается на том, что реальный электрон никогда не является действительно свободным. Электрон постоянно испытывает рассеяния. Время между актами рассеяния считается большим, но конечным. Достаточно вычис-

лить эффект самодействия и изменения массы между произвольными двумя актами рассеяния, ибо совершенно очевидно, что результат одинаков для любой пары. Такой эффект, вычисленный для одного интервала между актами рассеяния, далее, для простоты, связывается с эффективным потенциалом, действующим в каждом акте рассеяния (число актов рассеяния равно числу интервалов между ними). Возникающая при этом поправка к потенциалу от одного акта рассеяния учитывает все эффекты, представленные на диаграммах II, III, III' и III''.

Если электрон не полностью свободен, то $p^2 \neq m^2$, и можно записать

$$p^2 = m^2(1 + \epsilon)^2,$$

где, согласно принципу неопределенности,

$$m\epsilon = \frac{\hbar}{T}.$$

Здесь T — временной интервал между актами рассеяния электрона. Так как время T велико, величина ϵ является малой. Запишем $\hat{p} = (1 + \epsilon)\hat{p}_0$, где p_0 — импульс свободного электрона.

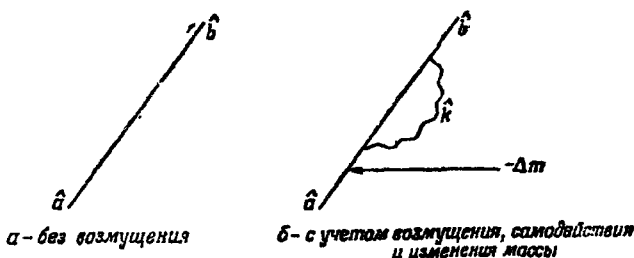
Если рассеивающие потенциалы в точках a и b в импульсном представлении обозначить соответственно через \hat{a} и \hat{b} (для любых двух актов рассеяний), то амплитуда вероятности перехода электрона из начального состояния в точке a в конечное состояние в точке b при отсутствии каких-либо возмущений с точностью до членов порядка ϵ будет определяться выражением

$$\hat{b} \frac{1}{\hat{p} - m} \hat{a} = \hat{b} \frac{\hat{p} + m}{p^2 - m^2} \hat{a} = \frac{\hat{b} (\hat{p} + m) \hat{a}}{2m^2\epsilon}.$$

Если же учесть возмущения, обусловленные самодействием и изменением массы электрона, то получим

$$i4\pi e^2 \int \hat{b} \frac{1}{\hat{p} - m} \gamma_\mu \frac{1}{\hat{p} - \hat{k} - m} \gamma_\mu \frac{1}{\hat{p} - m} \hat{a} \frac{d^4 k}{k^2 - \lambda_{\text{МНН}}^2} \frac{-\lambda^2}{k^2 - \lambda^2} - \\ - \hat{b} \frac{1}{\hat{p} - m} (\Delta m) \frac{1}{\hat{p} - m} \hat{a}.$$

Сравнение этого выражения с предыдущим, не учитывающим возмущения, позволяет определить интересующий нас поправочный член (фиг. 50).



Фиг. 50.

Задача. Покажите, что для двух некоммутирующих (или коммутирующих) операторов A и B справедливо следующее соотношение:

$$\frac{1}{A+B} = \frac{1}{A} - \frac{1}{A} B \frac{1}{A} + \frac{1}{A} B \frac{1}{A} B \frac{1}{A} + \dots$$

Воспользовавшись результатом этой задачи, можем записать

$$\frac{1}{\hat{p} - \hat{k} - m} = \frac{1}{\hat{p}_0 + \varepsilon \hat{p}_0 - \hat{k} - m} \approx \frac{1}{\hat{p}_0 - \hat{k} - m} - \frac{1}{\hat{p}_0 - \hat{k} - m} \varepsilon \hat{p}_0 \frac{1}{\hat{p}_0 - \hat{k} - m} + \dots$$

Для приведенной выше амплитуды вероятности перехода (с учетом возмущений) при этом получаем

$$\begin{aligned} & i4\pi e^2 \int \hat{b} \frac{\hat{p} + m}{2m^2\varepsilon} \gamma_\mu \frac{1}{\hat{p}_0 - \hat{k} - m} \gamma_\mu \frac{\hat{p} + m}{2m^2\varepsilon} \hat{a} \frac{d^4k}{k^2 - \lambda_{\text{МНН}}^2} \frac{-\lambda^2}{k^2 - \lambda^2} - \\ & - i4\pi e^2 \int \hat{b} \frac{\hat{p} + m}{2m^2\varepsilon} \gamma_\mu \frac{1}{\hat{p}_0 - \hat{k} - m} \hat{p}_0 \frac{1}{\hat{p}_0 - \hat{k} - m} \gamma_\mu \frac{d^4k}{k^2 - \lambda_{\text{МНН}}^2} \times \\ & \times \frac{\hat{p} + m}{2m^2} \hat{a} \left(\frac{-\lambda^2}{k^2 - \lambda^2} \right) - \hat{b} \frac{\hat{p} + m}{2m^2\varepsilon} (\Delta m) \frac{\hat{p} + m}{2m^2\varepsilon} \hat{a}. \end{aligned}$$

Первое и последнее слагаемые этого выражения с точностью до членов порядка ε тождественно равны

друг другу и взаимно сокращаются. Второе же слагаемое содержит интеграл, по существу уже вычисленный при рассмотрении диаграммы I (см. фиг. 48). Он отличается лишь тем, что вместо величин \hat{a} , \hat{p}_1 и \hat{p}_2 входит \hat{p}_0 , причем в рассматриваемом случае $\hat{q} = \hat{p}_2 - \hat{p}_1 = 0$. В результате для этого слагаемого получаем выражение

$$-\frac{e^2}{2\pi} r \hat{b} \frac{\hat{p} + m}{2m^2 e} \hat{p}_0 \frac{\hat{p} + m}{2m^2} \hat{a}.$$

С точностью до членов порядка ϵ величину \hat{p} в числителе можно заменить на \hat{p}_0 . Если учесть, кроме того, что, так как $\hat{p}_0 u = m u$,

$$(\hat{p}_0 + m) \hat{p}_0 (\hat{p} + m) \equiv 2m^2 (\hat{p} + m);$$

таким образом, приведенное выражение для второго слагаемого можно записать в виде

$$-\frac{e^2}{2\pi} r \hat{b} \frac{\hat{p} + m}{2m^2 e} \hat{a}.$$

Это выражение отличается от соответствующего выражения, полученного без учета возмущений, множителем $-(e^2/2\pi)r$. Таким образом, как и утверждалось выше, *поправочный член*, обусловленный диаграммами II, III, II' и III', получается в результате простой замены рассеивающего потенциала \hat{a} на $-(e^2/2\pi)r\hat{a}$.

Следует отметить, что рассмотренная трудность, связанная с правильным учетом самодействия и изменения массы, представляет собой проблему «расходимости», специфичную для квантовой электродинамики. Такая же трудность возникает и в нерелятивистской квантовой механике, если ввести, например, ненулевой исходный потенциал, т. е. считать, что свободный электрон все время движется в однородном ненулевом потенциальном поле. Можно легко проверить, что при этом возникнет «поправка к энергии» свободного электрона, совершенно аналогичная рассмотренной здесь поправке к массе. Далее, вычисляя амплитуду вероятности рассеяния с помощью волновых функций свобод-

ного электрона, используя при этом «теоретическую энергию» и учитывая эффект «изменения энергии», получаем разность двух различных расходящихся членов. В этом простом случае расходящиеся члены при правильном вычитании, в действительности, сокращаются. Эта проблема полностью аналогична рассмотренной здесь проблеме.

В заключение приведем полное выражение для поправочного члена, обусловленного эффектами самодействия и изменения массы электрона

$$\frac{e^2}{2\pi} \left[2 \left(\ln \frac{m}{\lambda_{\text{мин}}} - 1 \right) \left(1 - \frac{2\theta}{\text{tg } 2\theta} \right) + \theta \text{tg } \theta + \frac{4}{\text{tg } 2\theta} \times \right. \\ \left. \times \int_0^\theta \alpha \text{tg } \alpha d\alpha \right] \hat{a} + \frac{e^2}{8\pi m} (\hat{q} \hat{a} - \hat{a} \hat{q}) \frac{2\theta}{\sin 2\theta}.$$

УСТРАНЕНИЕ ФИКТИВНОЙ «ИНФРАКРАСНОЙ КАТАСТРОФЫ»

Из полученного выражения для поправочного члена следует, что сечение рассеяния электрона на внешнем потенциале без излучения фотона с точностью до членов порядка e^2 определяется формулой

$$\sigma = \sigma_0 \left\{ 1 - \frac{e^2}{2\pi} \left[2 \left(\ln \frac{m}{\lambda_{\text{мин}}} - 1 \right) \left(1 - \frac{2\theta}{\text{tg } 2\theta} \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + (\text{Члены, не зависящие от } \lambda_{\text{мин}}) \right] \right\},$$

где σ_0 — сечение рассеяния на невозмущенном потенциале \hat{a} . При $\lambda_{\text{мин}} \rightarrow 0$ сечение рассеяния логарифмически расходится. Эта расходимость и была названа выше «инфракрасной катастрофой».

Физическая причина возникновения такой расходимости связана с тем, что рассеяние электрона без излучения фотона невозможно. При рассеянии электрона обязательно происходит изменение его электромагнитного поля в окружающем пространстве, обусловленное изменением импульса электрона от начального значения p_1 до конечного значения p_2 . Изменение поля обязательно сопровождается излучением.

В теории тормозного излучения было показано, что сечение излучения одного фотона малой энергии при рассеянии электрона определяется выражением

$$\sigma = \sigma_0 \frac{e^2}{\pi} \frac{d\Omega_\omega}{4\pi} \left(\frac{\omega p_1 \cdot e}{p_1 \cdot q} - \frac{\omega p_2 \cdot e}{p_2 \cdot q} \right)^2 \frac{d\omega}{\omega}.$$

Задача. Покажите, что в результате усреднения по всем направлениям испускаемого фотона и суммирования по его поляризациям сечение тормозного излучения принимает вид

$$\sigma = \sigma_0 \frac{2e^2}{\pi} \left[1 - \frac{2\theta}{\operatorname{tg} 2\theta} \right] \frac{d\omega}{\omega},$$

где $\sin^2 \theta = -(\hat{p}_2 - \hat{p}_1)^2 / 4m^2$. Отсюда для вероятности излучения произвольного фотона с энергией, лежащей в интервале от $k = \lambda_{\text{мин}}$ до $k = k_m$, получаем выражение

$$\sigma_0 \frac{2e^2}{\pi} \left(1 - \frac{2\theta}{\operatorname{tg} 2\theta} \right) \int_0^{k_m} \frac{d\omega}{\omega} = \sigma_0 \frac{2e^2}{\pi} \left(1 - \frac{2\theta}{\operatorname{tg} 2\theta} \right) \ln \frac{k_m}{\lambda_{\text{мин}}},$$

которое оказывается логарифмически расходящимся.

Из этого обстоятельства вытекает, что возникшая выше проблема расходимости сечения рассеяния электрона на внешнем потенциале в действительности является следствием некорректной постановки вопроса: какова вероятность рассеяния электрона без излучения фотона? Между тем, вопрос следует ставить так: какова вероятность рассеяния электрона без излучения фотона с энергией, большей k_m ? В действительности, при рассеянии электрона всегда происходит излучение нескольких очень мягких фотонов.

Чтобы ответить на второй вопрос, фактически нужно определить вероятность рассеяния электрона без излучения фотона, а также вероятности излучения одного, двух и более мягких фотонов с энергией, меньшей k_m (последние, однако, порядка e^4 и выше, и поэтому ими пренебрегают).

Каждая из этих вероятностей по отдельности расходится, но искусственным введением $\lambda_{\text{мин}}$ их всегда

можно сделать конечными. Сумма же этих вероятностей, однако, уже не расходится. В этом можно убедиться, складывая приведенные выше выражения. В результате получим

$$\begin{aligned} & \text{Сечение рассеяния электрона без излучения фотона} \\ & \text{с энергией } > k_m = \\ & = \sigma_0 \left\{ 1 - \frac{e^2}{\pi} \left[2 \left(\ln \frac{m}{\lambda_{\text{мин}}} - 1 \right) \left(1 - \frac{2\theta}{\text{tg } 2\theta} \right) + \right. \right. \\ & \left. \left. + (\text{Члены, не зависящие от } \lambda_{\text{мин}}) \right] \right\} + \\ & + \sigma_0 \frac{2e^2}{\pi} \left(1 - \frac{2\theta}{\text{tg } 2\theta} \right) \ln \frac{k_m}{\lambda_{\text{мин}}} + (\text{Члены порядка } e^4) = \\ & = \sigma_0 \left[\left(1 - \frac{e^2}{\pi} 2 \ln \frac{m}{k_m} \right) \left(1 - \frac{2\theta}{\text{tg } 2\theta} \right) \right] + \\ & + (\text{Члены, не зависящие от } \lambda_{\text{мин}} \text{ и порядка } e^4). \end{aligned}$$

Это выражение вообще не зависит от $\lambda_{\text{мин}}$ и тем самым устраняет «инфракрасную катастрофу». Блохом и Нордсиком было показано, что изложенная идея устранения «инфракрасной катастрофы» применима во всех порядках по e^2 ¹⁾.

Интересно отметить, что главный член квантово-электродинамической поправки к сечению рассеяния электрона, равный

$$- \frac{2e^2}{\pi} \left[1 - \frac{2\theta}{\text{tg } 2\theta} \right] \ln \frac{m}{k_m},$$

можно получить и в рамках классической электродинамики, если учесть длинноволновое излучение при рассеянии электрона. Остальные члены дают малый вклад. Современные эксперименты по рассеянию электронов обладают достаточной степенью точности, чтобы определить вклад от главного члена поправки к сечению, но недостаточно точны для определения вклада от малых членов. Поэтому такие эксперименты еще не в состоянии провести нетривиальную проверку квантовой электродинамики.

¹⁾ F. Bloch, A. Nordsieck, Phys. Rev., 52, 54 (1937).

Изложенное рассмотрение применимо к любому процессу, в котором происходит отклонение свободного электрона. Лучший способ решения таких задач состоит в проведении всех вычислений с помощью $\lambda_{\text{мин}}$ и затем выяснении возможностей разумного исключения $\lambda_{\text{мин}}$.

Задача. Нарисуйте диаграммы и выпишите соответствующие интегралы для радиационных поправок (порядка e^2) к формуле Клейна — Нишины. По возможности упростите формулы для поправок и полученные результаты сравните с результатами Брауна и Фейнмана¹⁾.

Лекция тридцатая

ДРУГОЙ ПОДХОД К ПРОБЛЕМЕ ИНФРАКРАСНОЙ КАТАСТРОФЫ

Вместо того, чтобы вводить искусственную массу, предположим, что фотоны малой энергии не дают вклада в сечение рассеяния. Поэтому из приведенных выше формул должны быть исключены вклады от всех фотонов, величина импульса которых меньше некоторого числа $k_0 \gg \lambda_{\text{мин}}$. Согласно изложенному выше, эффективный потенциал взаимодействия равен

$$\hat{a} \left\{ 1 + \frac{e^2}{2\pi} \left[2 \ln \left(\frac{m}{\lambda_{\text{мин}}} - 1 \right) \left(1 - \frac{2\theta}{\text{tg } 2\theta} \right) \right] + \theta \text{tg } \theta + \right. \\ \left. + \left[\frac{4}{\text{tg } 2\theta} \int_0^\theta y \text{tg } y dy \right] \right\}. \quad (30.1)$$

Из этого выражения нужно вычесть величину

$$\frac{e^2}{2\pi} \int_0^{k_0} \gamma_\mu (\hat{p}_2 - \hat{k} + m) (k^2 - 2p_2 \cdot k)^{-1} \hat{a} (\hat{p}_1 - \hat{k} + m) \times \\ \times (k^2 - 2p_1 \cdot k)^{-1} \gamma_\mu \frac{d^4 k}{k^2 - \lambda_{\text{мин}}^2}. \quad (30.2)$$

¹⁾ L. Brown, R. P. Feynman, Phys. Rev., 85, 231 (1952).

Предположим, что $k_0 \ll p_1$ (либо p_2) и пренебрежем членами порядка \hat{k} и k^2 в числителе подынтегрального выражения. Учитывая, далее, соотношение $\hat{p}_1 \hat{\gamma}_\mu = 2p_\mu - \hat{\gamma}_\mu \hat{p}_1$, этот интеграл приближенно можно записать в виде

$$x = -\frac{e^2}{2\pi} \frac{\hat{a}}{2} \int \left[\frac{p_{2\mu}}{p_2 \cdot \hat{k}} - \frac{p_{1\mu}}{p_1 \cdot \hat{k}} \right]^2 \frac{d^4 k}{k^2 - \lambda_{\text{мин}}^2}. \quad (30.3)$$

Отсюда получаем

$$x = \frac{e^2}{2\pi} \left\{ \left[1 - \frac{2\theta}{\text{tg } 2\theta} \right] 2 \ln \left(\frac{2k_0}{\lambda_{\text{мин}}} - 1 \right) + \frac{4\theta}{\text{tg } 2\theta} \times \right. \\ \left. \times \left[\frac{1}{2\theta} \int_0^{2\theta} \frac{y}{\text{tg } y} dy - 1 \right] \right\} \hat{a}. \quad (30.4)$$

Именно эту величину нужно вычесть из выражения (30.1).

Учитывая соотношение $\sin^2 \theta = q^2/4m^2$, в пределе малых q формула (30.4) принимает вид

$$x = \frac{e^2}{2\pi} \frac{2q^2}{3m^2} \left[\ln \frac{2k_0}{\lambda_{\text{мин}}} - \frac{5}{6} \right] \hat{a}.$$

Вычитая эту величину из выражения (30.1), для эффективного потенциала взаимодействия (также для малых q) получаем

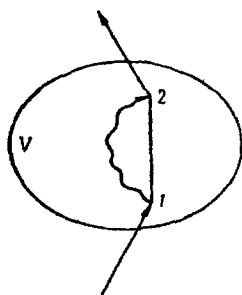
$$\hat{a} \left\{ 1 + \frac{e^2}{4\pi} \frac{4q^2}{3m^2} \left[\ln \frac{m}{\lambda_{\text{мин}}} - \frac{3}{8} - \ln \frac{2k_0}{\lambda_{\text{мин}}} + \frac{5}{6} \right] \right\}. \quad (30.5)$$

Последний множитель (в квадратных скобках) равен $\{\ln(m/2k_0) + (11/24)\}$.

РАДИАЦИОННЫЕ ЭФФЕКТЫ ДЛЯ АТОМНЫХ ЭЛЕКТРОНОВ

Рассмотрим атом водорода ψ_0 , кулоновским потенциалом $V = e^2/r$ и с волновой функцией электрона $\varphi_0(\mathbf{R}) e^{-iE_0 t} = \varphi_0(x_\mu)$. Будем считать, что волновая функция нормирована обычным способом. Учет эффекта собственной энергии электрона сводится к сдвигу энергетического уровня на величину

$$\Delta E = e^2 \int \tilde{\varphi}_0(\mathbf{x}_2, t_2) \gamma_\mu K_+^V(2, 1) \gamma_\mu \delta_+(s_{1,2}^2) \varphi_0(\mathbf{x}_1, t_1) \times \\ \times d^3\mathbf{x}_1 d^3\mathbf{x}_2 dt_2 - (\Delta m) \int \tilde{\varphi}(\mathbf{x}, t) \varphi(\mathbf{x}, t) d^3\mathbf{x}. \quad (30.6)$$



Фиг. 51.

При написании первого члена этого выражения мы руководствовались диаграммой на фиг. 51. Второй же член, как уже неоднократно отмечалось в предыдущих лекциях, соответствует свободному электрону. Функция распространения $K_+(2, 1)$ недостаточно хорошо определена и не позволяет нам точно вычислить интеграл (30.6). Для приближенного вычисления можно использовать выражение

$$K_+^V(2, 1) = \begin{cases} \sum_{+E_n} e^{-iE_n(t_2-t_1)} \varphi_n(\mathbf{x}_2) \tilde{\varphi}_n(\mathbf{x}_1) & \text{при } t_2 > t_1, \\ - \sum_{-E_n} e^{-iE_n(t_2-t_1)} \varphi_n(\mathbf{x}_2) \tilde{\varphi}_n(\mathbf{x}_1) & \text{при } t_2 < t_1. \end{cases}$$

Функцию распространения фотона разложим в интеграл Фурье

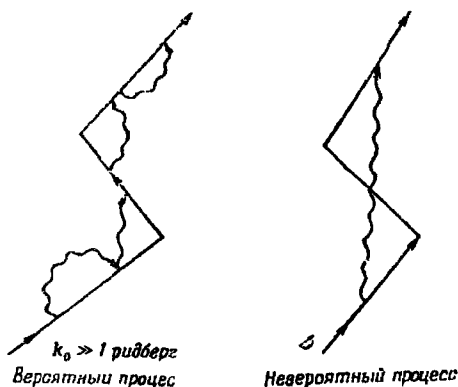
$$\delta_+(s_{1,2}^2) = \begin{cases} 4\pi \int \exp[-i|\mathbf{k}| \cdot (t_2 - t_1) + i\mathbf{k}(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)] \times \\ \times \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2|\mathbf{k}|} & \text{при } t_2 > t_1, \\ 4\pi \int \exp[+i|\mathbf{k}| \cdot (t_2 - t_1) + i\mathbf{k}(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)] \times \\ \times \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2|\mathbf{k}|} & \text{при } t_2 < t_1. \end{cases}$$

Используя эти формулы, выражение (30.6) записываем в виде

$$\Delta E = \sum_{+E_n} \int [\alpha_\mu e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{R}}]_{0n} \frac{1}{E_n + |\mathbf{k}| - E_0} [\alpha_\mu e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{R}}]_{n0} \frac{d^3\mathbf{k}}{4\pi|\mathbf{k}|} - \\ - \sum_{-E_n} \int [\alpha_\mu e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{R}}]_{0n} \frac{1}{|E_n| + |\mathbf{k}| + E_0} [\alpha_\mu e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{R}}]_{n0} \frac{d^3\mathbf{k}}{4\pi|\mathbf{k}|} - \\ - (\Delta m\text{-член}). \quad (30.7)$$

В этой форме записи используются матрицы $\alpha_4 = 1$, $\alpha_{1,2,3} = \alpha$, и волновая функция φ^* вместо функции $\tilde{\varphi}$.

Другой подход к описанию движения электрона в атоме водорода состоит в следующем. Рассмотрим электрон как свободную частицу, время от времени испытывающую рассеяние на кулоновском потенциале ядра. Каждый акт рассеяния вызывает изменение фазы волновой функции на величину порядка $1 \text{ ридберг}/\hbar$. Интервал времени между актами рассеяния при этом порядка $T \sim \hbar / \text{ридберг}$. Будем считать, что минимальный импульс фотона «самодействия» k_0 значительно больше 1 ридберг . При этом весьма вероятно, что за время между двумя актами рассеяния на потенциале электрон успеет излучить и затем снова поглотить фотон «самодействия». Однако очень маловероятно, чтобы за время между излучением и поглощением фотона



Фиг. 52.

произошли два или более акта рассеяния (см. фиг. 52) В результате такого самодействия электрона возникает поправка к потенциалу ядра, определяемая формулой (30.5) для малых q (к этой формуле нужно добавить поправку, обусловленную аномальным магнитным моментом). В импульсном представлении такая поправка равна

$$\frac{e^2}{4\pi} \frac{4q^2}{3m^2} \left(\ln \frac{m}{2k_0} + \frac{11}{24} \right) \hat{V}.$$

Запишем это выражение в координатном представлении, пользуясь связью

$$q^2 \hat{V} = (q_4^2 - Q^2) \hat{V} \rightarrow \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \right) V.$$

В результате получим

$$- \frac{e^2}{3\pi m^2} \left(\ln \frac{m}{2k_0} + \frac{11}{24} \right) \nabla^2 V.$$

Так как для кулоновского потенциала $\nabla^2 V = 4\pi Ze^2 \delta(\mathbf{R})$, то эта поправка оказывается существенной лишь для S -состояний электрона, ибо при $\mathbf{R} = 0$ отличными от нуля являются лишь волновые функции S -состояний.

Выбор величины k_0 определяется неравенством $m \gg k_0 \gg 1$ ридберг. Вполне удовлетворительным является значение $k_0 = 137$ ридберг. При этом значении k_0 , однако, нужно учесть вклад фотонов с импульсом $k < k_0$. Это достигается разделением полного вклада [формула (30.7)] на три отдельные части. Две из них, как будет показано ниже, оказываются не зависящими от потенциала V и сокращаются с аналогичными членами, возникающими от изменения массы свободного электрона Δm , и лишь одна из них дает вклад, который нужно учесть. Вследствие малости $|\mathbf{k}|$ при анализе формулы (30.7) во всех случаях можно пользоваться нерелятивистским приближением.

1. *Вклад от состояний с отрицательной энергией.* Пренебрегая величиной $|\mathbf{k}|$ по сравнению с m , имеем

$$(|E_n| + |\mathbf{k}| + E_0) \approx 2m.$$

Матричный элемент оператора α_4 пренебрежимо мал; поэтому достаточно ограничиться учетом лишь матричных элементов оператора α . В результате суммирования по состояниям с отрицательной энергией получаем

$$\sum_{-E_n} \int \frac{\alpha_{0n} \cdot \alpha_{n0}}{2m} |\mathbf{k}| d|\mathbf{k}|.$$

Распространяя суммирование также и на состояния с положительной энергией, получаем пренебрежимо

малую поправку порядка v^2/c^2 . Следовательно, приближенно эту сумму можно записать в виде

$$\sum_{\text{По всем состояниям}} \int \frac{\alpha_{0n} \cdot \alpha_{n0}}{2m} |\mathbf{k}| d|\mathbf{k}| = \int (\alpha \cdot \alpha)_{00} \frac{|\mathbf{k}| d|\mathbf{k}|}{2m} = \\ = \frac{3|\mathbf{k}^0|^2}{4m}.$$

Это выражение не зависит от потенциала V и в точности сокращается с аналогичным членом, возникающим от Δt .

2. Вклад от состояний с положительной энергией; продольная часть ($\alpha_\mu \rightarrow \alpha \cdot \mathbf{k} / |\mathbf{k}|$). В качестве упражнения читатель может проверить соотношение

$$\alpha \cdot \mathbf{k} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{R}} = H e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{R}} - e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{R}} H.$$

Отсюда имеем

$$\left(\frac{\alpha \cdot \mathbf{k}}{|\mathbf{k}|} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{R}} \right)_{n0} = \frac{E_n - E_0}{|\mathbf{k}|} (e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{R}})_{n0}.$$

Вклад от этих членов, просуммированный по всем состояниям с положительной энергией, равен

$$\int \left[1 - \frac{(E_n - E_0)^2}{|\mathbf{k}|^2} \right] (e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{R}})_{0n} (e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{R}})_{0n} \frac{1}{E_n + |\mathbf{k}| - E_0} \frac{d^3\mathbf{k}}{(4\pi) \cdot |\mathbf{k}|} = \\ = \int (E_n - E_0 + |\mathbf{k}|) (e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{R}})_{0n} (e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{R}})_{n0} \frac{d^3\mathbf{k}}{4\pi \cdot |\mathbf{k}|^2} = \\ = \int (H e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{R}} - e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{R}} H)_{0n} (e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{R}})_{n0} \frac{d^3\mathbf{k}}{4\pi \cdot |\mathbf{k}|^2}.$$

Так как $H = \mathbf{p}^2/2m$ (потенциал V коммутирует с экспонентой), получаем

$$\int \left[\frac{(\mathbf{p} + \mathbf{k})^2}{2m} - \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + |\mathbf{k}| \right] \frac{d^3\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|^2}.$$

Это выражение также не зависит от потенциала V и сокращается с аналогичным членом в Δt .

3. Вклад от состояний с положительной энергией; поперечная часть. Благодаря тому, что длина волны фотона k_0^{-1} велика по сравнению с размерами атома, можно воспользоваться дипольным приближе-

нием¹⁾. При этом главный член в формуле (30.7) принимает вид

$$\int (\alpha_{tr})_{0n} (\alpha_{tr})_{n0} \frac{1}{E_n + |\mathbf{k}| - E_0} \frac{d^3\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|}. \quad (30.8)$$

Используя тождество

$$\frac{1}{E_n + |\mathbf{k}| - E_0} = \frac{1}{|\mathbf{k}|} - \frac{E_n - E_0}{|\mathbf{k}|(E_n + |\mathbf{k}| - E_0)},$$

вклад от члена $1/|\mathbf{k}|$ можно отделить от остальной части интеграла и, как не зависящий от потенциала V , сократить с аналогичным членом в Δm . Далее, усредняя по направлениям, в нерелятивистском приближении получаем

$$\overline{(\alpha_{tr})_{0n} (\alpha_{tr})_{n0}} = \frac{2}{3} (\alpha)_{0n} \cdot (\alpha)_{n0} = \frac{2}{3m^2} (\mathbf{p})_{0n} \cdot (\mathbf{p})_{n0}.$$

В результате выражение (30.8) принимает вид

$$\frac{2}{3m^2} (\mathbf{p})_{0n} \cdot (\mathbf{p})_{n0} (E_n - E_0) \ln \frac{k_0 + E_n - E_0}{E_n - E_0}.$$

Используя соотношение

$$(\mathbf{p})_{n0} (E_n - E_0) = (\mathbf{p}H - H\mathbf{p})_{n0} = (\nabla V)_{n0}$$

и учитывая, что $k_0 \gg (E_n - E_0)$, часть этого выражения после суммирования по состояниям с положительной энергией (поперечная часть) можно представить в виде

$$(\ln k_0) \sum_{E_n} (\mathbf{p})_{0n} \cdot (\nabla V)_{n0} = \frac{1}{2} (\ln k_0) (\nabla^2 V)_{00}.$$

Эта часть сокращается с членом, пропорциональным $\ln k_0$ в формуле (30.7а). Оставшаяся же часть приводит к следующему конечному выражению для поправки к энергии:

$$\frac{2e^2}{3m^2\pi} \sum_{+E_n} (\mathbf{p})_{n0} \cdot (\mathbf{p})_{0n} (E_n - E_0) \left\{ \ln \frac{m}{2(E_n - E_0)} + \frac{11}{24} \right\} +$$

+ (Поправка, обусловленная аномальным магнитным моментом электрона).

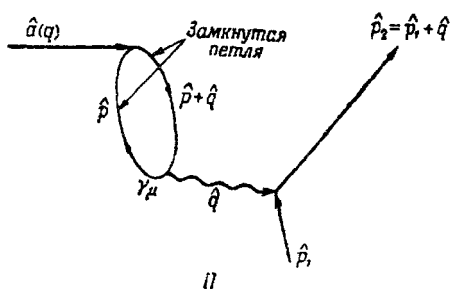
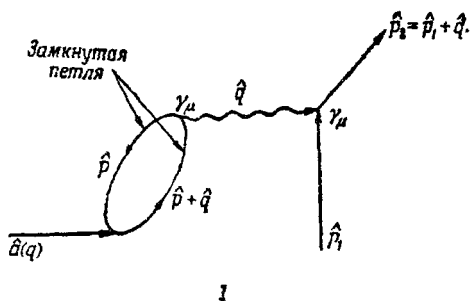
¹⁾ См. Н. Bethe, Phys. Rev., 72, 339 (1947).

Для сравнения найденной поправки с экспериментально наблюдаемым лэмбовским сдвигом суммирование в этой формуле производилось численно.

Лекция тридцать первая

ПРОЦЕССЫ С ЗАМКНУТОЙ ПЕТЛЕЙ; ПОЛЯРИЗАЦИЯ ВАКУУМА

При рассмотрении рассеяния электрона на потенциале мы не учли еще один процесс первого порядка



Ф и г. 53.

по e^2 . Именно, вместо прямого рассеяния частицы на потенциале сначала происходит рождение пары, затем при ее аннигиляции рождается фотон, на котором и происходит рассеяние электрона. Описанный процесс представляется с помощью диаграмм I и II (фиг. 53), различающихся между собой последовательностью со-

бытий во времени. Полная амплитуда вероятности этого процесса определяется выражением

$$i4\pi e^2 \sum_{\text{По всем } u} (\tilde{u}_2 \gamma_\mu u_1) \frac{1}{q^2} \int \left(\tilde{u} \frac{1}{\hat{p}-m} \gamma_\mu \frac{1}{\hat{p}+\hat{q}-m} \hat{a} u \right) \frac{d^4 p}{(2\pi)^4}, \quad (31.1)$$

где u — спинорная часть волновой функции частицы замкнутой петли. Первая скобка представляет амплитуду вероятности рассеяния электрона на фотоне, вторая — амплитуду вероятности образования пары, в результате аннигиляции которой и рождается рассеивающий фотон, и, наконец, множитель $1/q^2$ соответствует функции распространения этого фотона. Выражение (31.1) содержит интегрирование по импульсу p одной из частиц пары (например, позитрона), и это является следствием того, что при рождении пары импульс одной из частиц остается произвольным. Суммирование в этой формуле распространяется по всем четырем спиновым состояниям u , причем для процессов на диаграмме I суммирование проводится лишь по двум спиновым состояниям; то же выполняется для процессов на диаграмме II . Таким образом, можно непосредственно воспользоваться методом нахождения шпуров без введения проекционных операторов. В результате получим

$$i4\pi e^2 (\tilde{u}_2 \gamma_\mu u_1) \frac{1}{q^2} \int \text{Sp} \left[\frac{1}{\hat{p}-m} \gamma_\mu \frac{1}{\hat{p}+\hat{q}-m} \hat{a} \right] \frac{d^4 p}{(2\pi)^4}. \quad (31.2)$$

В этой формуле учтены оба процесса, представленные на диаграммах I и II (здесь нет необходимости рассматривать каждую из этих диаграмм, отличающихся последовательностью событий во времени, по отдельности, как это делается обычно). Интеграл в формуле (31.2) также расходится, однако устранить расходимость с помощью введения фотонного множителя сходимости, использованного в предыдущих лекциях, в рассматриваемом случае невозможно, так как интегрирование здесь ведется по импульсу позитрона p в промежуточном состоянии. Трудность, связанную с расходимостью, можно обойти, если из интеграла (31.2) вычесть аналогичный интеграл, заменив предварительно

m на M . При $M \gg m$ это соответствует обрезанию интеграла по p на верхнем пределе. В результате такой процедуры для амплитуды вероятности рассматриваемого процесса получаем¹⁾

$$(\tilde{u}_2 \gamma_\mu u_1) a_\mu \frac{e^2}{\pi} \left[-\frac{1}{3} \ln \left(\frac{M}{m} \right)^2 - \left(1 - \frac{\theta}{\operatorname{tg} \theta} \right) \times \right. \\ \left. \times \frac{4m^2 + 2q^2}{3q^2} + \frac{1}{9} \right], \quad (31.3)$$

где $q^2 = 4m^2 \sin^2 \theta$. При малых q это выражение принимает вид

$$(\tilde{u}_2 \gamma_\mu u_1) a_\mu \frac{e^2}{\pi} \left[-\frac{1}{3} \ln \left(\frac{M}{m} \right)^2 + \frac{2q^2}{15} \right]. \quad (31.4)$$

Учитывая, что $(\tilde{u}_2 \gamma_\mu u_1) a_\mu = (\tilde{u}_2 \hat{a} u_1)$ и рассматривая лишь расходящуюся часть этой поправки, для эффективного рассеивающего потенциала получаем выражение

$$\hat{a} \left\{ 1 + \frac{e^2}{\pi} \left[-\frac{1}{3} \ln \left(\frac{M}{m} \right)^2 \right] \right\}. \quad (31.5)$$

Первое слагаемое в фигурных скобках (1) соответствует потенциалу без учета радиационных поправок, а второе, порядка e^2 , представляет собой радиационную поправку. Это слагаемое можно рассматривать как величину малого изменения влияния всех потенциалов взаимодействия в результате изменения заряда. По аналогии с изменением массы, описанным в двадцать восьмой лекции, можно ввести экспериментальный и теоретический заряды, $e_{\text{эксп}}$ и $e_{\text{теор}}$, связанные между собой соотношением

$$e_{\text{эксп}} = e_{\text{теор}} + \Delta e, \quad (31.6)$$

где

$$\Delta e^2 = -\frac{e^2}{3\pi} \ln \left(\frac{M}{m} \right)^2.$$

Эту процедуру называют «перенормировкой» заряда. Второй член выражения (31.4)

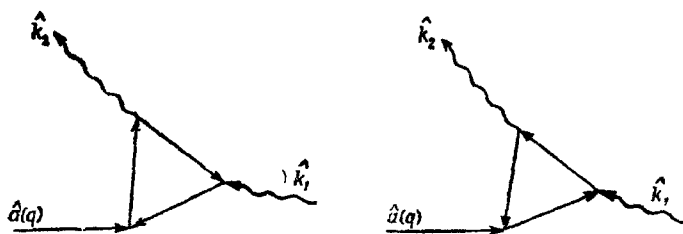
¹⁾ См. примечание на стр. 110.

$$\frac{2}{15} \frac{e^2}{\pi} q^2 \hat{a}$$

является еще более интересным, так как в координатном представлении он соответствует поправке к потенциалу ($2e^2/15\pi(\nabla^2 V)$). Эта поправка вносит вклад в лэмбовский сдвиг, равный 27 Мгц. Учет ее приводит к замене в формуле (30.7а) величины $\left\{ \ln \frac{m}{2(E_n - E_0)} + \frac{11}{24} \right\}$ на величину $\left\{ \ln \frac{m}{2(E_n - E_0)} + \frac{11}{24} - \frac{1}{5} \right\}$. Последний член ($-1/5$) в этом выражении обусловлен, как говорят, «поляризацией вакуума».

РАССЕЯНИЕ СВЕТА НА ПОТЕНЦИАЛЕ

Два возможных (и не различимых) процесса рассеяния фотона на внешнем потенциале представлены на диаграммах фиг. 54. Эти диаграммы отличаются друг



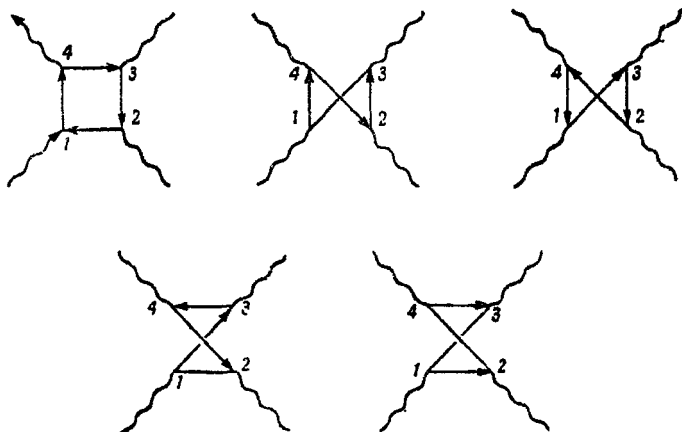
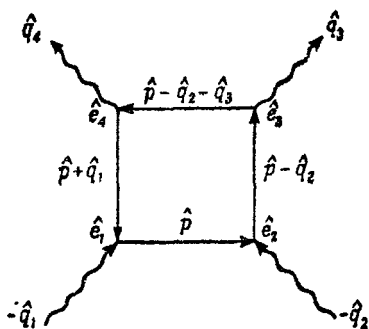
Фиг. 54.

от друга изменением направлений стрелок электронных линий. Такое изменение направлений стрелок соответствует замене электронов на позитроны. В результате знак связи с потенциалом в каждой вершине меняется на обратный. Так как всего три такие вершины, то мы заключаем, что амплитуда вероятности второго процесса равна амплитуде вероятности первого процесса с обратным знаком. Полная вероятность рассеяния фотона на потенциале будет равна нулю. В общем случае все процессы, включающие замкнутые петли с нечетным количеством вершин, имеют равную нулю полную амплитуду вероятности.

Задача. Выпишите амплитуды вероятности для каждого из процессов, представленных на диаграммах фиг. 54, и покажите, что они равны по величине, но отличаются по знаку.

Однако процессы более высокого порядка, как, например, представленные на фиг. 55, могут иметь место. Амплитуда вероятности одного из этих процессов записывается в виде

$$- (4\pi e^2)^2 \int \text{Sp} \left[\hat{e}_1 \frac{1}{\hat{p}-m} \hat{e}_2 \frac{1}{\hat{p}-\hat{q}_2-m} \hat{e}_3 \times \right. \\ \left. \times \frac{1}{(\hat{p}-\hat{q}_2-\hat{q}_3-m)} \hat{e}_4 \frac{1}{\hat{p}+\hat{q}_1-m} \right] \frac{d^4 k}{(2\pi)^4}.$$



Фиг. 55

Переставляя порядок фотонов, аналогично можно записать и остальные пять амплитуд. Этот интеграл оказывается логарифмически расходящимся. Однако сумма шести амплитуд уже не содержит расходящихся членов. Сходящимися оказываются и амплитуды вероятностей более сложных процессов, включающих замкнутые петли.

ПРИНЦИП ПАУЛИ И УРАВНЕНИЕ ДИРАКА

В двадцать четвертой лекции была вычислена вероятность того, что под действием потенциала вакуум остается вакуумом. В интервале времени между t_1 и t_2 в поле потенциала происходят рождения и аннигиляции пар (процессы с замкнутой петлей). Амплитуда вероятности рождения и аннигиляции одной пары определяется выражением (в первом исчезающем приближении):

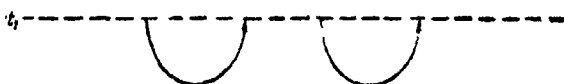
$$L \sim \iint \text{Sp} [K_+(1, 2) \hat{a}(2) K_+(2, 1) \hat{a}(1)] d\tau_1 d\tau_2.$$

Амплитуда вероятности рождения и аннигиляции двух пар пропорциональна произведению амплитуд вероятностей рождения и аннигиляции каждой из пар в отдельности. Однако чтобы при интегрировании по $d\tau_1$ и $d\tau_2$ каждая пара не учитывалась дважды, такое произведение нужно разделить на $2!$. Таким образом амплитуда вероятности рождения и аннигиляции двух пар равна $L^2/2!$. В случае рождения и аннигиляции трех пар она равна $L^3/3!$ и т. д. В результате для полной амплитуды вероятности того, что вакуум остается вакуумом, получаем сумму

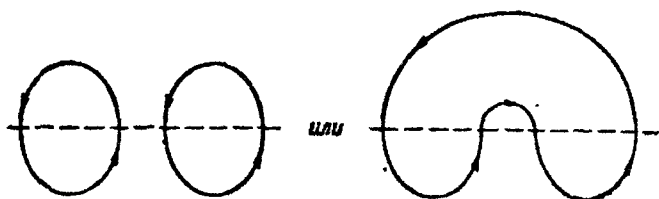
$$c_v = 1 - L + \frac{L^2}{2!} - \frac{L^3}{3!} + \dots = e^{-L}. \quad (31.7)$$

Первый член в этой сумме (1) соответствует вероятности перехода вакуум — вакуум без рождения виртуальных пар. Отрицательные знаки у амплитуд вероятностей

тей с нечетным числом виртуальных пар можно объяснить, исходя из принципа Паули, следующим образом. Предположим, что при $t < t_1$ диаграмма процесса имеет вид, представленный на фиг. 56. Такой процесс может быть завершен двумя различными способами, как это показано на фиг. 57. Правую диаграмму на



Фиг. 56.



Фиг. 57.

фиг. 57 можно получить из левой путем взаимной перестановки двух электронов. Поэтому, согласно принципу Паули, амплитуда вероятности второго процесса должна вычитаться из первой. Правая диаграмма соответствует процессу с одной замкнутой петлей, в то время как левая описывает процесс с двумя замкнутыми петлями. Отсюда заключаем, что все амплитуды вероятностей процессов с нечетным числом замкнутых петель имеют отрицательные знаки.

Вероятность того, что вакуум остается вакуумом равна

$$P_v = |c_v|^2 = e^{-2\text{Re}L}.$$

Можно показать, что действительная часть L ($\text{Re } L$) положительна. Так как эта вероятность не может быть больше единицы, то, очевидно, ряд (31.7) должен быть знакпеременным.

Таким образом, мы здесь привели два аргумента в пользу того, что выражение (31.7) должно иметь вид e^{-L} . Один из них основывается на свойствах функции K_+ , на уравнении Дирака и знаке действительной час-

ти L . Второй же исходит из принципа Паули. Следовательно, используемая нами трактовка уравнения Дирака может быть последовательной лишь в том случае, если электроны подчиняются статистике Ферми — Дирака. Таким образом, между релятивистским уравнением Дирака и принципом Паули существует неразрывная связь. Паули дал более глубокое доказательство необходимости такой связи, но и этот аргумент достаточно убедителен.

Вопрос о связи между принципом Паули и уравнением Дирака (связь между спином частицы и статистикой) является столь интересным, что мы попытаемся дать другое доказательство такой связи, не основываясь на процессах с замкнутыми петлями. Именно, мы докажем, что предположения о полной независимости электронов и о том, что волновые функции системы электронов есть простые произведения волновых функций отдельных электронов (даже если пренебречь взаимодействием между ними), являются непоследовательными. Так, если допустить это, то мы имеем

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Вероятность того, что} \\ \text{вакуум остается вакуумом} \end{array} \right\} = P_V,$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Вероятность рождения в} \\ \text{вакууме одной пары} \end{array} \right\} = P_V \sum_{\text{По всем парам}} |K_{1 \text{ пары}}|^2,$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Вероятность рождения в} \\ \text{вакууме двух пар} \end{array} \right\} = P_V \sum_{\text{По всем парам}} |K_{1 \text{ пары}}|^2 \cdot |K_{1 \text{ пары}}|^2.$$

.....

Далее, сумма всех этих вероятностей представляет собой вероятность того, что в вакууме что-либо да произойдет, и поэтому она должна быть равна единице

$$1 = P_V [1 + (\text{Вероятность 1 пары}) + \\ + (\text{Вероятность 2 пар}) + \dots]. \quad (31.8)$$

Вероятность перехода электрона из точки a в точку b без рождения какой-либо пары равна $P_V |K_+(b, a)|^2$. Вероятность такого перехода с рождением одной пары

равна $P_V |K_+(b, a)|^2 |K(1 \text{ пары})|^2$. Вероятность такого перехода с рождением двух пар равна $P_V |K_+(b, a)|^2 |K(2 \text{ пар})|^2$ и т. д. Таким образом, для полной вероятности перехода электрона из точки a в точку b с рождением произвольного числа пар имеем [см. формулу (31.8)]

$$P_V |K_+(b, a)|^2 [1 + |K(1 \text{ пары})|^2 + |K(2 \text{ пар})|^2 + \dots] = |K_+(b, a)|^2. \quad (31.9)$$

Далее, так как электрон обязательно куда-либо переходит, то

$$\int |K_+(b, a)|^2 db = 1.$$

Однако для функции распространения электрона, подчиняющегося уравнению Дирака, имеет место неравенство

$$\int |K_+(b, a)|^2 db > 1, \quad (31.10)$$

что противоречит предшествующему равенству. Это противоречие можно устранить, если допустить, что электроны подчиняются статистике Ферми — Дирака и не являются независимыми. Таким образом, первоначальный электрон и электрон пары не являются независимыми, и поэтому недопустимо, чтобы последний находился в том же состоянии, что и электрон в точке b . В результате имеем

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Вероятность перехода электрона} \\ \text{из точки } a \text{ в точку } b \text{ с рожде-} \\ \text{нием 1 пары} \end{array} \right\} < < |K_+(b, a)|^2 |K(1 \text{ пары})|^2. \quad (31.11)$$

В случае частиц, описываемых уравнением Клейна — Гордона, имеет место неравенство, обратное (31.10). Следовательно, частицы со спином нуль (а также с целочисленным спином) не подчиняются статистике Ферми — Дирака, но независимыми их тоже считать нельзя. В случае симметричных волновых функций для системы частиц (статистика Бозе — Эйнштейна) неравенство (31.11) также имеет обратный знак. В случае

статистики Бозе — Эйнштейна нахождение частицы в каком-либо заданном состоянии (скажем, b) увеличивает вероятность рождения другой частицы в этом же состоянии. Таким образом, уравнение Клейна — Гордона однозначно связано со статистикой Бозе — Эйнштейна.

Было бы интересно попытаться углубить приведенные выше соображения и показать, что разница между интегралом $\int |K_+(b, a)|^2 db$ и 1 в точности компенсируется при учете принципа Паули. Подобное фундаментальное соотношение во многом должно было бы иметь ясное и простое истолкование.