

Lewis H. Ryder

QUANTUM
FIELD THEORY

University of Kent at Canterbury

Л. Райдер

КВАНТОВАЯ
ТЕОРИЯ ПОЛЯ

Перевод с английского
канд. физ.-мат. наук С. И. Азакова
под редакцией
д-ра. физ.-мат. наук Р. А. Мир-Касимова

ПЛАТОН
1998

Предисловие редактора перевода	5
Предисловие	7
Глава 1. Введение: краткий обзор физики частиц	9
§ 1.1. Квантовая теория поля	9
§ 1.2. Гравитация	10
§ 1.3. Сильные взаимодействия	11
§ 1.4. Слабые взаимодействия	13
§ 1.5. Лептонные квантовые числа	14
§ 1.6. Адронные квантовые числа	17
§ 1.7. Резонансы	19
§ 1.8. Кварковая модель	19
§ 1.9. $SU(2)$, $SU(3)$, $SU(4)$, ...	22
§ 1.10. Динамические свидетельства существования кварков	26
§ 1.11. Цвет	29
§ 1.12. КХД	33
§ 1.13. Слабые взаимодействия	35
Литература	36
Глава 2. Одночастичные релятивистские волновые уравнения	38
§ 2.1. Релятивистские обозначения	38
§ 2.2. Уравнение Клейна — Гордона	41
§ 2.3. Уравнение Дирака	43
§ 2.4. Предсказание античастиц	58
§ 2.5. Конструкция спиноров Дирака: алгебра γ -матриц	62
§ 2.6. Нерелятивистский предел и магнитный момент электрона	70
§ 2.7. Роль группы Пуанкаре: операторы спина и предел нулевой массы	73
§ 2.8. Уравнения Максвелла и Прока	83
§ 2.9. Уравнения Максвелла и дифференциальная геометрия	88
Литература	97
Глава 3. Лагранжева формулировка, симметрии и калибровочные поля	100
§ 3.1. Лагранжева формулировка механики частицы	101
§ 3.2. Действительное скалярное поле; вариационный принцип и теория Нётер	103
§ 3.3. Комплексные скалярные поля и электромагнитное поле	113

§ 3.4. Топология и вакуум: эффект Ааронова — Бома	121
§ 3.5. Поле Янга — Миллса	128
§ 3.6. Геометрия калибровочных полей	137
Литература	151
Глава 4. Каноническое квантование и интерпретация в терминах частиц	154
§ 4.1. Действительное поле Клейна — Гордона	154
§ 4.2. Комплексное поле Клейна — Гордона	164
§ 4.3. Поле Дирака	165
§ 4.4. Электромагнитное поле	170
§ 4.5. Массивное векторное поле	181
Литература	184
Глава 5. Функциональные интегралы и квантовая механика	186
§ 5.1. Формулировка квантовой механики на основе функциональных интегралов	186
§ 5.2. Теория возмущений и S -матрица	194
§ 5.3. Кулоновское рассеяние	204
§ 5.4. Функциональное исчисление: дифференцирование	207
§ 5.5. Другие свойства функциональных интегралов	208
Приложение: некоторые полезные интегралы	214
Литература	216
Глава 6. Квантование методом функциональных интегралов и правила Фейнмана (скалярное и спинорное поля)	218
§ 6.1. Производящий функционал для скалярных полей	218
§ 6.2. Функциональное интегрирование	223
§ 6.3. Функции Грина свободных частиц	226
§ 6.4. Производящие функционалы для взаимодействующих полей	234
§ 6.5. Теория ϕ^4	238
§ 6.6. Производящий функционал для связанных диаграмм	246
§ 6.7. Фермионы и функциональные методы	249
§ 6.8. S -матрица и редуцированная формула	256
§ 6.9. Пион-нуклонная амплитуда рассеяния	263
§ 6.10. Сечение рассеяния	272
Литература	280
Глава 7. Квантование с помощью функциональных интегралов: калибровочные поля	282
§ 7.1. Пропагаторы и калибровочные условия в КЭД	282
§ 7.2. Неабелевы калибровочные поля и метод Фаддеева — Попова	288
§ 7.3. Оператор собственной энергии и вершинная функция	303
§ 7.4. Тожества Уорда — Такахаши в КЭД	311
§ 7.5. Преобразование Бекки — Руэ — Сторы	318
§ 7.6. Тожества Славнова — Тейлора	321
§ 7.7. Духи и унитарность	324
Литература	330
Глава 8. Спонтанное нарушение симметрии и модель Салама — Вайнберга	333
§ 8.1. Что такое вакуум?	334
§ 8.2. Теорема Голдстоуна	339

§ 8.3. Спонтанное нарушение калибровочных симметрий . . .	345
§ 8.4. Сверхпроводимость	350
§ 8.5. Модель Салама — Вайнберга	352
Литература	362
Глава 9. Перенормировка	364
§ 9.1. Расходимости в теории φ^4	364
§ 9.2. Размерная регуляризация теории	370
§ 9.3. Перенормировка теории φ^4	375
§ 9.4. Ренормализационная группа	383
§ 9.5. Расходимости и размерная регуляризация в КЭД	388
§ 9.6. Однопетлевая перенормировка в КЭД	398
§ 9.7. Перенормируемость КЭД	409
§ 9.8. Асимптотическая свобода теорий Янга — Миллса	416
§ 9.9. Перенормировка теорий Янга — Миллса без спонтанного нарушения симметрии	426
§ 9.10. Киральные аномалии	430
§ 9.11. Перенормировка теорий Янга — Миллса со спонтанным нарушением симметрии	441
Приложение А: интегрирование в d измерениях	450
Приложение Б: гамма-функция	453
Литература	456
Глава 10. Топологические объекты в теории поля	460
§ 10.1. Клик синус-Гордона	461
§ 10.2. Вихревые линии	465
§ 10.3. Монополь Дирака	473
§ 10.4. Монополь t^* Хофта — Полякова	478
§ 10.5. Инстантоны	487
Литература	499
Литература, добавленная при переводе	502
Предметно-именной указатель	505

Л. Райдер

КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ ПОЛЯ

Книга английского физика представляет собой полное и современное введение в квантовую теорию поля. Изложение на протяжении большей части книги опирается на формализм континуального интегрирования, являющийся основным методом в теории калибровочных полей. Автор использует язык дифференциальной геометрии и топологии, методы которых интенсивно проникают в квантовую теорию поля. Рассматриваются многие конкретные примеры, большинство выкладок дается подробно. Книга может служить учебным пособием.

Лицензия ЛР №024851 от 17.07.93 г.
Подписано к печати 06.02.98 г. Формат 60x88/16
Печ. л. 32 Заказ №
Издательство "ПЛАТОН"
400062, г.Волгоград, ул.Кирова, 71/15

ISBN 5-66022-361-3

© Л. Райдер
© «ПЛАТОН», 1998

Предисловие редактора перевода

Физические концепции и формальный аппарат квантовой теории поля (КТП) представляют собой единственную логически последовательную основу для описания взаимодействий элементарных частиц. Подчеркнем, что понятие элементарности меняется со временем. Согласно современным представлениям, основными структурными составляющими материи являются кварки и лептоны, описываемые фермионными квантовыми полями. В последние два десятилетия КТП развивалась чрезвычайно интенсивно. Наряду с квантовой электродинамикой (КЭД), которая в течение многих лет была единственным конкретным, экспериментально хорошо проверенным примером КТП, возникли новые теории. Это прежде всего единая теория электромагнитного и слабого взаимодействия и теория сильных (цветовых) взаимодействий — квантовая хромодинамика (КХД). Обе теории являются калибровочными теориями (теориями Янга — Миллса). Им отвечают группы внутренней симметрии $SU(2) \times U(1)$ и $SU(3)$. Эти теории находят все новые экспериментальные подтверждения. Многие физики разделяют мнение, что мы близки к формулировке единой калибровочной теории всех указанных выше взаимодействий (так называемой теории великого объединения — ТВО), во всяком случае число претендентов на роль соответствующей группы симметрии весьма невелико. Естественно, что изменения затронули и структуру КТП. В центре внимания оказались калибровочные поля, спонтанное нарушение симметрии (СНС), вопросы квантования и перенормировки полей Янга — Миллса. В аппарате теории появились новые методы, как возникшие в результате ее собственного развития, так и заимствованные из статистической физики, теории нелинейных дифференциальных уравнений, топологии и др.

В настоящей книге сделана попытка изложить как общие, устоявшиеся положения КТП, так и отразить новые тенденции, о которых сказано выше. Она предназначена прежде всего студентам

старших курсов университетов, специализирующихся по КТП и теории элементарных частиц. Книга будет также полезна экспериментаторам и специалистам по смежным дисциплинам, таким, как теория ядра, квантовая статистика и др. Предполагается, что читатель владеет квантовой механикой и теорией относительности в рамках стандартного университетского курса. Автор стремится максимально упростить изложение, приводит много конкретных примеров, большинство выкладок проводится подробно.

Данную книгу рационально рассматривать как дополнение к известному вводному курсу Н. Н. Боголюбова и Д. В. Ширкова «Квантовые поля». При чтении первой главы книги, которая представляет собой обзор физики элементарных частиц, целесообразно воспользоваться также книгой Л. Б. Окуня «Физика элементарных частиц», написанной более полно и содержащей более четкие формулировки.

При переводе исправлен ряд опечаток и неточностей в расчетах, указанных самим автором, а также замеченных нами.

Несколько замечаний о библиографии. Автор в основном ссылается на обзоры и монографии и не ставит перед собой задачу установления приоритета. Цитируются и оригинальные работы, однако при этом отсутствуют ссылки на многие основополагающие работы. Например, это касается открытия цветовых состояний, разработки теории ренормгруппы и др. В связи с этим при переводе был добавлен (помещенный в конце книги) дополнительный список литературы, в котором указываются в основном книги советских авторов. Заметим, что в книгах [15, 50, 57] имеются литературные комментарии. Рекомендуем читателю следить за обзорными статьями, публикуемыми в журналах «Физика элементарных частиц и атомного ядра», «Успехи физических наук» и других изданиях. Это позволит ему ознакомиться с новыми разделами теории взаимодействия частиц, а также с историей развития этой области физики.

Перевод выполнен кандидатом физико-математических наук С. И. Азаковым.

Р. М. Мир-Касимов

Предисловие

Природа совершенствуется при помощи средств, доставляемых ею же самою, так что и то искусство, которое, как ты говоришь, делает природу красивее, есть тоже детище природы.

У. Шекспир. Зимняя сказка, действие 4, сцена 4¹⁾

Omnia disce, videbis postea nihil esse superfluum.

(Всё штудируйте, после увидите — нет ничего лишнего.)

Каноник Хью, аббатство св. Виктора, Париж, XII в.

Данная книга предназначена тем студентам, которые решили стать специалистами в области физики элементарных частиц, но пока что не знакомы в достаточной мере с квантовой теорией поля. От них требуется знание квантовой механики и специальной теории относительности. Таким образом, нашими читателями могут быть начинающие аспиранты и даже хорошо подготовленные студенты старших курсов, специализирующиеся по теоретической физике.

Я старался сделать изложение предельно простым, насколько это позволяет изучаемый предмет, демонстрируя при этом детально большую часть расчетов. В соответствии с современными тенденциями я почти на протяжении всей книги использовал функциональные методы (хотя имеется глава, в которой излагается каноническое квантование). Ряд глав отведен калибровочным теориям, которые в настоящее время играют ключевую роль в нашем понимании природы элементарных частиц. Всегда, когда я чувствовал необходимость коснуться физики элементарных частиц, я старался не сбиваться на изложение непосредственно этой области физики. Данная книга носит педагогический, а не энциклопедический характер, и многие вопросы, например такие, как алгебра токов и ЧСАТ, дискретные симметрии и суперсимметрии, остались вне ее рамок. Хотя указанные вопросы и важны, я полагаю, что их исключение оправданно.

Мне хочется многим выразить свою признательность. Прсф. П. Хиггс и проф. Дж. Тейлор дали мне ряд важных советов при написании черновых вариантов некоторых глав, и я воспользовался (хотя, без сомнения, и не в полной мере) их глубоким пониманием теории поля. Мне посчастливилось посещать лекции проф. Я. Весса по теории поля в 1974 г., и я благодарен ему и Управле-

¹⁾Перевод П. А. Каншина. Цитировано по изданию: Шекспир У. Полное собрание сочинений. — Киев — Петербург — Харьков, Южно-Русское книгоиздательство Ф. А. Иогансона, 1902.

нию академического сотрудничества ФРГ за то, что мой приезд в Карлсруэ стал возможным. Я также очень благодарен д-ру Драммонду, д-ру Эйчисону, проф. Рикайзену и д-ру Эвансу за прочтение различных разделов и полезные замечания. Мне хочется поблагодарить мисс Мэри Уоттс за превращение тяжелой и непривлекательной рукописи в стройный машинописный текст, за неизменное мягкое чувство юмора и доброжелательность. Я также благодарю мистера Бернарда Дулина за рисунки диаграмм, выполненные столь аккуратно. Я благодарен покойному отцу Эрику Дойлу, указавшему мне цитату Хью из аббатства св. Виктора. Я благодарен организаторам первого и второго британского теоретического института по физике высоких энергий за предоставленную мне возможность стимулирующих обсуждений. Мне хочется выразить свою благодарность д-ру Миттону из издательства Кембриджского университета за его постоянную поддержку и терпимость к моей неспособности вовремя закончить работу. Я благодарен многим, но особенно М. Кахиллу, за указание на многочисленные ошибки и опечатки в первых оттисках книги.

Наконец, самую большую благодарность я выражаю моей жене за безграничное терпение и поддержку в течение долгого времени.

Льюис Райдер

Кентербери, Кент
Август 1984 г.

1

Введение: краткий обзор физики частиц

§ 1.1. Квантовая теория поля

Квантовая теория поля всегда была занятием специалистов по физике частиц. В последние годы ее очарованию поддались также некоторые физики, изучающие конденсированные среды, но взгляд автора на цели такой книги остается традиционным: теорию поля изучают, надеясь, что она прольет свет на природу фундаментальных частиц материи и их взаимодействий. Несомненно (аргументы в пользу этого будут приведены), что структура, включающая в себя квантовую теорию, которая оказалась поразительно успешной в разрешении многих проблем атомной физики в начале внешнего столетия, и теорию поля — язык, с помощью которого мы постигаем столь же поразительную картину реальности, открытую Фарадеем, Максвеллом и Герцем, — несомненно, структура, покоящаяся на этих двух основаниях, должна явиться хорошим инструментом для проникновения в фундаментальную структуру материи.

Она и в самом деле является таким инструментом. Квантовая электродинамика, первое дитя этого союза, предсказывает (мы называем лишь один из ее успехов) аномальный магнитный момент электрона с точностью до шестого знака после запятой. Чего еще можно желать от физической теории? Квантовая электродинамика была построена примерно в 1950 г., много лет позже создания квантовой механики¹⁾. Но первоначальная гипотеза Планка о квантах (1901) в действительности состояла в том, что квантованым должно быть электромагнитное поле. Кванты этого поля мы называем фотонами. До 1925 г. идея кванта прилагалась к механике атомного движения, в результате чего было выработано пред-

¹⁾ Имеется в виду современная формулировка квантовой электродинамики, основанная на ковариантной теории возмущений. Однако создание квантовой электродинамики началось гораздо раньше. См. в этой связи статью Г. Вентцеля в книге [59] в списке литературы, добавленной при переводе. — Прим. ред.

ставление о корпускулярно-волновом дуализме и предложено волновое уравнение Шредингера для электронов. Лишь после этого была проведена полная систематическая трактовка квантованного электромагнитного поля. Можно сказать, что круг замкнулся, был совершен возврат к исходной гипотезе Планка и завершено квантование в важнейшей области классической физики.

Теперь благодаря квантованию различие между частицами и полями оказалось затуманенным. «Точечные» частицы стали размытыми, они теперь описывались волновым уравнением, а (электромагнитное) поле, которое в классической физике представляли как непрерывную среду, приобрело свойства частицы (фотона). Можно задать вопрос: если заряженные частицы (например, электроны) взаимодействуют между собой посредством электромагнитного поля, а квантование делает частицу и поле весьма похожими друг на друга, то имеется ли *существенное* различие между полями и частицами? Поиски ответа на этот вопрос приводят нас к физике элементарных частиц. Главное в том, что квантами поля, *которым описывается взаимодействие* между частицами материи, являются фотоны. Электроны же «просто существуют», а поскольку они взаимодействуют друг с другом (в противном случае мы бы не подозревали об их существовании), *становятся необходимыми* электромагнитное поле и, следовательно, фотоны. Но оказывается, что существуют еще мюоны, протоны и другие заряженные частицы, которые тоже взаимодействуют посредством электромагнитного поля. Причины существования всех этих частиц пока не известны, но мы можем обрисовать положение следующими словами: *имеется некий спектр состояний, отвечающих частицам (e , μ , p , Σ , Ω и т. д.), и поле, посредством которого эти частицы взаимодействуют*, или, короче, взаимодействие. Такой подход к электродинамике может, как считается, служить образцом, руководствуясь которым мы достигнем полного понимания природы взаимодействия элементарных частиц. Нужно просто применить такой же подход к другим известным нам взаимодействиям.

В классической физике известно еще только одно взаимодействие — гравитационное, а поэтому рассмотрим сначала его.

§ 1.2. Гравитация

Гравитационное поле описывается общей теорией относительности. Однако квантование этой теории наталкивается на серьезные препятствия. Во-первых, это математические трудности. Эйнштейновские полевые уравнения гораздо сложнее уравнений Максвелла и даже нелинейны. Поэтому оказывается под угрозой совместимость с принципом суперпозиции, т. е. с математическим выражением дуализма волна — частица, который требует существования ли-

нейного векторного пространства¹). Во-вторых, имеются трудности концептуального характера. В теории Эйнштейна гравитационное поле проявляется как кривизна пространства-времени. Таким образом, если в электродинамике поле является, так сказать, актером на сцене пространства-времени, то в теории гравитации само пространство-время становится актером. Следовательно, речь идет в каком-то смысле о квантовании пространства-времени. Каков же смысл этого? И в-третьих, имеются практические проблемы. Уравнения Максвелла предсказывают электромагнитное излучение, которое впервые наблюдал Герц. Квантование поля означает возможность наблюдать отдельные фотоны. Они были впервые обнаружены в фотоэффекте, классический анализ которого был дан Эйнштейном. Аналогично этому эйнштейновские уравнения для гравитационного поля предсказывают гравитационное излучение. Таким образом, в принципе должна существовать возможность обнаружения отдельных *гравитонов*, т. е. квантов гравитационного поля. Однако, хотя и был сделан ряд заявлений о том, что гравитационное излучение наблюдалось, они не получили общего признания. Наблюдение отдельных гравитонов — гораздо более трудная задача, которая, по-видимому, останется для следующего поколения! Основная причина этого состоит в том, что гравитация намного слабее других сил природы. Имея это в виду, физики, занимающиеся элементарными частицами, пренебрегают *гравитационными силами* и довольны, что могут сделать это, поскольку трудностей, о которых мы говорили выше, и без того достаточно! В то же время разработанные недавно методы квантования неабелевых калибровочных полей, сыгравшие важную роль в объяснении сильных и слабых ядерных взаимодействий, по-видимому, применимы и к теории гравитации. Мы изложим кратко эти вопросы в подходящем разделе настоящей книги.

§ 1.3. Сильные взаимодействия

Помимо электромагнитных и гравитационных сил в природе существуют также ядерные силы; это так называемые сильные и слабые ядерные силы. Вопрос состоит в том, могут ли эти силы быть описаны *полями*? Юкава высказал предположение, что сильное взаимодействие между протоном и нейтроном в ядре может быть описано полем, но квант этого поля (в отличие от фотона) должен обладать *конечной массой*²). Это связано с тем, что ядерные

¹) Неясно, имеет ли автор в виду классическую теорию или теорию квантованных полей, в которой принцип суперпозиции выполняется для вектора состояния. — *Прим. ред.*

²) При построении своей теории ядерных сил Х. Юкава использовал идею И. Е. Тамма и Д. Д. Иваненко о том, что короткодействующие ядерные силы возникают в результате обмена квантами с нулевой массой. Сама мысль о том.

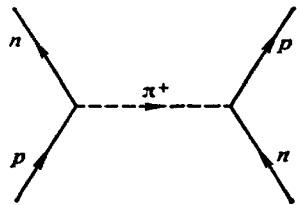


Рис. 1.1. Обмен квантом поля сильного взаимодействия (пионом) между протоном и нейтроном.

силы имеют конечный радиус действия. На рис. 1.1 представлена диаграмма Фейнмана (объяснение см. в гл. 6), соответствующая обмену виртуальным квантом поля (π^+) между протоном и нейтроном. Согласно принципу неопределенности, такой обмен может произойти при условии

$$\Delta E \Delta t = (m_\pi c^2) \Delta t \approx \hbar,$$

где m_π — масса кванта поля (пиона), а Δt — время, в течение которого он существует.

Если радиус действия силы равен r , то мы можем положить $r = c(\Delta t)$, откуда при $r \approx 10^{-15}$ м получаем

$$m_\pi c^2 \approx \frac{\hbar c}{r} \approx 200 \text{ МэВ}.$$

Когда (в 1947 г.) был открыт π^+ -мезон с массой $140 \text{ МэВ}/c^2$, участвующий в сильном ядерном взаимодействии, это рассматривалось как триумф теории Юкавы. Однако точка зрения, что пион является квантом поля сильных взаимодействий, начала сталкиваться с затруднениями.

1. При высоких энергиях пионный обмен не давал удовлетворительного описания протон-нейтронного взаимодействия.

2. Взаимодействие между самими пионами не может быть (вследствие несохранения четности) объяснено однопионным обменом.

3. После открытия странных частиц (50-е и начало 60-х годов) и классификации частиц на основе группы $SU(3)$ было обнаружено, что пионы являются всего лишь тремя из восьми членов супермультиплетета, в который входят также K - и η -мезоны — «обычные» элементарные частицы «материи». Если кванты поля существенно отличаются от квантов «материи», то они определенно не должны входить в один и тот же супермультиплет.

4. В модели кварков (1964) пионы являются связанными состояниями пар кварк — антикварк, так же как и все остальные мезоны, — их привилегированное положение исчезло полностью! (Фотон, например, совершенно определенно не состоит из кварков!)

В нижеследующих разделах мы даем краткий обзор спектра элементарных частиц и кварковой модели. Отметим, однако, что кварковая модель, вычеркивая пион из списка кандидатов на роль

что силы, действующие между частицами, могут быть результатом обмена квантами поля, была высказана ранее П. А. М. Дираком, В. А. Фоком и Б. Подольским. — Прим. ред.

кванта поля сильного взаимодействия, дает нам также путеводную нить для поисков его преемника, поскольку «истинное» сильное взаимодействие происходит не между нуклонами, а между кварками. Чем обусловлено взаимодействие между кварками?

Имеются указания (см. § 1.11) на то, что кварк обладает квантовым числом, которое весьма сходно с электрическим зарядом, но отличается от него тем, что 1) имеет три степени свободы — три «типа» заряда и 2) ненаблюдаемо в свободном состоянии — это значит, что ненаблюдаемы отдельные кварки и ненаблюдаемы, возможно, потому, что системы, обладающие таким квантовым числом (его ненулевым значением), запрещены в свободном состоянии. Это квантовое число называется цветом, причем соответствующие степени свободы условно называют красным, белым и синим или красным, зеленым и синим и т. д. Считается, что цвет, как и электрический заряд, приводит к возникновению квантованного поля, безмассового и со спином единица, подобно фотону. Посредством этого поля кварки взаимодействуют. Кванты данного поля называют глюонами, а динамику кварк-глюонной системы — квантовой хромодинамикой (КХД) по аналогии с квантовой электродинамикой (КЭД). КХД ответственна, например, за объединение трех кварков в протоны или нейтроны. Неудивительно, что силы, действующие между протоном и нейтроном, лишь приблизительно описываются пионным обменом — в действительности эта сила должна быть довольно сложной, она есть «остаточная» сила межкваркового взаимодействия!

§ 1.4. Слабые взаимодействия

Чтобы завершить предварительное рассмотрение, мы должны упомянуть также о четвертом известном взаимодействии природы — слабом ядерном взаимодействии, ответственном за бета-распад. В первоначальной теории Ферми это взаимодействие являлось *точечным* взаимодействием между четырьмя частицами, участвующими в нем (в распаде нейтрона $n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e$). Иными словами, не было необходимости рассматривать какое-либо поле, поскольку не было каких-либо явлений, распространяющихся из одной точки в другую. (Напомним, что понятие «поля» в физике возникло отчасти в связи с поисками более удовлетворительного объяснения «дальнодействия»; если нет дальнодействия, то, очевидно, не нужно и поле.) Теория Ферми оказалась очень хорошей. В самом деле, в течение нескольких десятилетий не было никаких прямых указаний на то, что эта теория, модифицированная с учетом нарушения четности, неверна. И тем не менее она считалась неверной в первую очередь потому, что она неперенормируема (см. гл. 9). Одним из недавних триумфов физики элементарных частиц стало появление

достойного преемника теории Ферми. Эта новая теория была разработана в 60-е годы Глешоу, Вайнбергом и Саламом. В ней электромагнетизм и слабое взаимодействие объединяются нетривиальным образом. Слабое поле приобретает *кванты*, а именно W - и Z -бозоны, которые более чем в 80 раз тяжелее протона. Кроме того, предсказываются *реакции с участием нейтральных токов*, такие, как $\nu + p \rightarrow \nu + p +$ (нейтральные адроны), а также четвертая разновидность кварков (очарованные). Обнаружение всех этих объектов окончательно утвердило теорию Салама — Вайнберга в роли истинной теории слабых взаимодействий. Не последним по важности аспектом теории является то обстоятельство, что это *объединенная* теория, теория «электрослабых» взаимодействий (новый термин). Слабое и электромагнитное взаимодействия теперь объединены. Следующим естественным объектом для размышлений представляется некая «теория великого объединения» (ТВО), которая объединяла бы электрослабое взаимодействие с сильным взаимодействием (КХД), однако в момент, когда пишутся эти строки (1983), нет определенных свидетельств в пользу того, что великое объединение сил природы действительно существует.

Таковы основные положения современных теорий фундаментальных частиц и взаимодействий. В последующих разделах данной главы они будут изложены более детально для тех читателей, которым современная картина физики высоких энергий не очень хорошо знакома. Наша цель состоит в том, чтобы дать простое изложение физических соображений, которые привели к введению кварковой модели и следуют из нее. Тогда будет ясна необходимость исследования квантовых полей, и мы сможем ввести ряд понятий, которые используются в приложениях теории поля в физике частиц. Изложение не претендует на полноту, однако в конце главы даны ссылки на литературу, в которой можно найти детальное изложение рассматриваемых вопросов. Читателям, знакомым с физикой частиц, мы рекомендуем перейти к гл. 2. В оставшейся части данной главы я буду пользоваться без адекватного объяснения некоторыми терминами и техническими методами. Это относится, в частности, к диаграммам Фейнмана. Я прошу читателя быть снисходительным к этому и по мере возможности извлечь максимальную пользу из соответствующих разделов, пока он не встретит необходимые объяснения далее в книге.

§ 1.5. Лептонные квантовые числа

Фундаментальные частицы разделяются на три основные категории: те, которые испытывают сильные взаимодействия, — их называют *адронами*; те, которые в сильных взаимодействиях не участвуют, — их называют *лептонами*; и наконец, кванты полей, отвечающих взаимодействиям (см. выше). Адроны подразделяются

Таблица 1.1.

Адроны	{	Барions	$p, n, \Lambda, \Sigma, \Omega, \Lambda_c, \dots$ и т. д. (сотни)
		Мезоны	$\pi, K, \rho, \psi/J, Y \dots$ и т. д. (сотни)
Лептоны			$e^-, \nu_e, \mu^-, \nu_\mu, \tau^-, [\nu_\tau], \dots$ (только 6?)
Кванты поля			Фотоны γ Слабые бозоны W^\pm, Z^0 [Глюоны]

Частицы в квадратных скобках пока не обнаружены.

на *барионы*, обладающие полуцелым спином, и *мезоны*, обладающие целым спином (в единицах \hbar ; спин — чисто квантовая величина). Все сказанное наглядно представлено в табл. 1.1. Обнаружены сотни барионов и мезонов. Обнаружено пять лептонов и предполагается (по эстетическим соображениям), что τ -лептон, подобно e и μ , сопровождается соответствующим нейтрино ν_τ . Существуют барионы и мезоны с различными спинами — были обнаружены значения $7/2$ для барионов и 3 для мезонов. Однако все лептоны обладают спином $1/2$. Все кванты полей имеют спин 1 . Предполагается, что все известные адроны являются составными состояниями шести типов кварков (см. ниже); поэтому представляется естественным, что существуют также шесть лептонов.

Чтобы разделение частиц со спином $1/2$ на барионы и лептоны имело смысл, не должны происходить переходы между этими различными типами частиц. Например, протон не должен распадаться на позитрон (античастицу электрона):

Распад $p \rightarrow e^+ + \gamma$ запрещен; (1.1)

и действительно, этот распад не наблюдался. Из-за чего он может быть запрещен? Электрический заряд, равно как и энергия и угловой момент, в таком распаде сохранялся бы. Должно существовать *сохраняющееся квантовое¹⁾ число* — назовем его *барионным числом* B , — такое, что барионам отвечает значение $B = 1$, а всем остальным частицам — значение $B = 0$. Тогда в силу требования сохранения барионного числа распад (1.1), очевидно, был бы запрещен²⁾.

¹⁾ Принято называть сохраняющиеся величины «квантовыми числами». Однако совсем не очевидно, что барионное число имеет какое-либо отношение к квантовой теории. Если бы это было так, то в силу распада (1.1) вещество было бы нестабильным при $\hbar \rightarrow 0$.

²⁾ Для теорий великого объединения характерно, что барионное число не сохраняется абсолютно. Иными словами, эти теории предсказывают нестабильность протона. Обнаружение распада протона явилось бы важным свидетельством правильности ТВО.

Читатель может возразить, что это не *объяснение*, а лишь выражение на другом языке того факта, что распад не происходит. Возможно, это и так, но новый язык по крайней мере более экономичен! Вместо того чтобы вводить барионное число, мы могли бы ввести *лептонное число* L — лептоны обладают значением $L = 1$, всем остальным частицам соответствует значение $L = 0$, и требованием сохранения числа L запрещается распад протона. Имеются, однако, и другие факты. Мюоны (которые являются аналогами электрона с большей массой) не распадаются на электроны:

Распад $\mu^- \rightarrow e^- + \gamma$ запрещен. (1.2)

По какой причине не происходит этот распад? Должна существовать сохраняющаяся величина — *мюонное число* L_μ ; частице μ^- соответствует значение $L_\mu = 1$, а всем остальным частицам $L_\mu = 0$, так что распад (1.2) не происходит. Иными словами, мюоны *не являются* полными «аналогами электрона с большей массой». Вместо мюонного мы можем ввести очевидным образом «электронное число» L . Это приводит к очень интересному следствию. Нейтральный пион распадается на электрон и нейтрино или на мюон и нейтрино:

$$\pi^0 \rightarrow e^- + \bar{\nu}_e, \quad \pi^0 \rightarrow \mu^- + \bar{\nu}_\mu.$$

Мы снабдили эти нейтрино (они на самом деле — антинейтрино) индексами e и μ для удобства ссылок. Если L_μ сохраняется в этих распадах, то из этого следует, что $\bar{\nu}_e$ и $\bar{\nu}_\mu$ являются *различными частицами*, поскольку π^0 и e^- имеют $L_\mu = 0$, равно как и $\bar{\nu}_e$, однако частица $\bar{\nu}_\mu$ должна иметь $L_\mu = -1$. (Это означает, что ν_μ имеет $L_\mu = 1$, в связи с чем частицам, испускаемым в процессе π^0 -распада, дано название антинейтрино.)

Столь простые соображения о стабильности приводят к выводу о том, что в природе существуют два различных типа нейтрино. Экспериментально было подтверждено, что ν_e и $\bar{\nu}_\mu$ — действительно различные частицы. Аналогичные рассуждения можно провести в случае τ -лептона, открытого в 1976 г. в экспериментах на встречных пучках e^+e^- . События типа $e^+e^- \rightarrow \mu^\pm e^\pm + \text{«недостающая энергия»}$ были в конце концов сопоставлены процессу

$$e^+e^- \rightarrow \tau^+\tau^-$$

The diagram shows a vertical line representing the production of a tau lepton pair ($\tau^+\tau^-$). From the top of this line, a horizontal line extends to the right, representing the decay into a muon pair ($\mu^-\bar{\nu}_\mu, \nu_\mu$). From the bottom of the vertical line, another horizontal line extends to the right, representing the decay into an electron pair ($e^+\nu_e, \bar{\nu}_e$).

что делает необходимым введение сохраняющейся величины L_τ и, следовательно, третьего независимого нейтрино ν_τ .

§ 1.6. Адронные квантовые числа

Перейдем теперь от лептонов к адронам. Здесь мы также находим целесообразным ввести сохраняющиеся квантовые числа, однако при этом приходится провести более тонкие рассуждения. Когда впервые в 1954 г. в лабораторных условиях были получены «странные частицы», то среди прочих наблюдался процесс

$$\pi^- + p \rightarrow \Lambda + K^0, \quad (1.3)$$

очень большое сечение которого указывало на то, что он непременно должен идти за счет *сильного взаимодействия*. Однако времена жизни частиц Λ и K^0 по отношению к распаду

$$\Lambda \rightarrow p + \pi^-, \quad K^0 \rightarrow \pi^+ + \pi^- \quad (1.4)$$

столь велики ($\sim 10^{-10}$ с), что могут соответствовать лишь процессу, протекающему за счет *слабого взаимодействия*, хотя все частицы, участвующие в распадах, — адроны. Почему? Распады адронов на адроны меньшей массы определенно должны происходить за счет сильного взаимодействия при условии, однако, что при этом не нарушается закон сохранения какой-либо величины. Таким образом, мы вводим квантовое число S , именуемое «странностью», приписывая значения $S = 0$ частице π и протону, значение $S = -1$ частице Λ и значение $S = +1$ частице K^0 . При этом устанавливаем следующее правило: *S сохраняется в сильных взаимодействиях и не сохраняется в слабых*. Тогда, как легко видеть, алгебраическая сумма значений S в обеих частях реакции (1.3) равна нулю, так что странность S сохраняется, причем, как мы видели, это сильное взаимодействие. Однако в распадах (1.4) значения S изменяются с -1 на 0 и с $+1$ на 0 , так что они *не могут* идти за счет сильного взаимодействия, а происходят за счет слабого.

Аналогичная ситуация имеет место при более высоких энергиях. В 1975 г. было обнаружено, что в водородной пузырьковой камере происходит следующая реакция с участием нейтрино:

$$\nu_\mu + p \rightarrow \mu^- + \Lambda + \pi^+ + \pi^+ + \pi^+ + \pi^-.$$

Это не может быть *только* слабым взаимодействием с участием лептонов, поскольку для всех таких процессов установлено правило $\Delta S = \Delta Q$, где ΔS и ΔQ — изменения странности и заряда адронов, а в рассматриваемой реакции $\Delta S = -\Delta Q$. Отсюда было сделано заключение [8, 9], что на самом деле происходит серия реакций:

$$\begin{aligned} \nu_\mu + p &\rightarrow \mu^- + \Sigma_c^{++}, \\ \Sigma_c^{++} &\rightarrow \Lambda_c^+ + \pi^+, \\ \Lambda_c^+ &\rightarrow \Lambda + \pi^+ + \pi^+ + \pi^-. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Распад Σ_c^{++} на Λ_c^+ является сильным, а распад Λ_c^+ на Λ и пионы — слабым. Возникает необходимость ввести новое квантовое число — «очарование» C ; частице Λ_c^+ отвечают значения $C = 1$ и $S = 0$, а частице Λ — значения $C = 0$ и $S = -1$. Для данного распада выполнено правило $\Delta C = \Delta S = -1$. Состоянию Σ_c^{++} также отвечает значение $C = 1$, и число C сохраняется в сильных взаимодействиях.

§ 1.7. Резонансы

В 50—60-е годы среди сильновзаимодействующих частиц наблюдался «демографический взрыв». Частично он произошел благодаря открытию странных частиц, но более значительный вклад был внесен открытием резонансов, сотни которых известны в настоящее время. Приведем лишь один пример. Первый резонанс (открытый Ферми в 1952 г.) был обнаружен как резкий пик в сечении пион-нуклонного рассеяния



Ход сечения изображен на рис. 1.2. Острый максимум на кривой сечения σ интерпретируется в соответствии с обычной теорией Брейта — Вигнера как резонанс, обозначаемый в настоящее время через Δ , так что в действительности реакция имеет вид

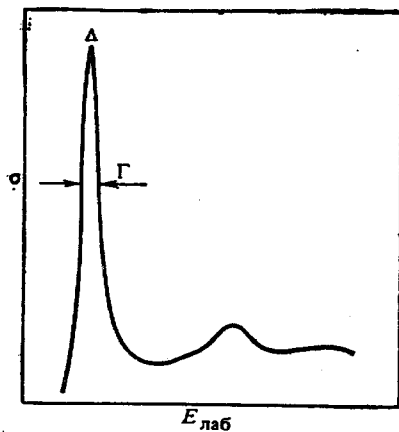
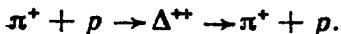


Рис. 1.2. Сечение упругого π^+p -рассеяния как функция энергии пиона в лабораторной системе. Пик с полушириной Γ интерпретируется как резонанс Δ .

Ширину $\Gamma \approx 110$ МэВ можно измерить непосредственно по кривой, откуда на основании соотношения неопределенностей получаем время жизни

$$\tau \sim \frac{\hbar}{\Gamma} \approx 10^{-23} \text{ с.}$$

Такое время характерно для сильных взаимодействий, за счет которых распадаются резонансы. Резонансы — это состояния с определенными спином и четностью, массой, зарядом и т. д.; их следует рассматривать наравне с другими элементарными частицами. «Стабильные частицы», т. е. те, которые распадаются за счет слабого или электромагнитного взаимодействия, — это просто самые легкие

из набора частиц с данными значениями изоспина (см. ниже), странности, очарования и т. д. Для того чтобы «стабильные» частицы распадались, эти квантовые числа должны измениться; следовательно, они могут распадаться только за счет слабого (или электромагнитного) взаимодействия. В действительности большинство частиц являются резонансами; читатель несомненно встречал их перечни в книгах по физике частиц.

§ 1.8. Кварковая модель

Чтобы прийти к какой-то ясности относительно всех этих частиц, выполним следующее упражнение. Выберем частное значение спина и четности J^P и составим диаграмму значений заряда Q и стран-

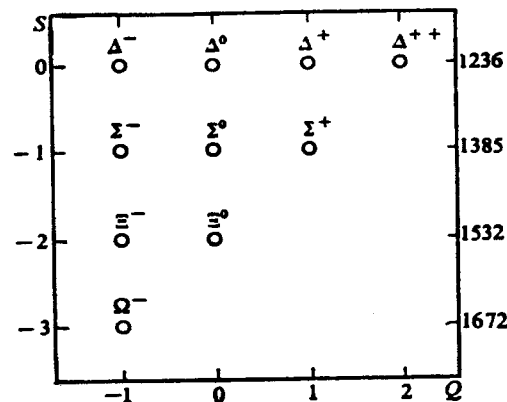


Рис. 1.3. Частицы с $J^P = 3/2^+$. На оси справа указаны массы в единицах МэВ/ c^2 .

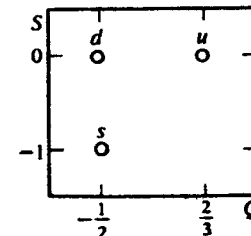


Рис. 1.4. Кварки u , d и s .

ности S всех частиц (и резонансов), обладающих этим значением J^P . В качестве примера на рис. 1.3 показаны частицы с $J^P = 3/2^+$. Имеются десять частиц, которые составляют правильную схему. Это выполняется при *любом* значении J^P (после того как обнаружены все частицы). Всегда возникают правильные схемы, но они чаще состоят из восьми частиц, а не из десяти. Какова причина этого?

Дело в том, что частицы являются составными состояниями, построенными из более фундаментальных объектов, которые называются кварками. В настоящее время считается, что существуют шесть кварков, различающихся значениями Q , S , C , а также «ис-

тины» и «прелести». Они обозначаются буквами u, d, s, c, t, b^1 . Квантовые числа кварков u, d и s приведены на рис. 1.4. Согласно кварковой модели, барионы — это связанные состояния трех кварков (qqq), а мезоны — связанные состояния пар кварк — антикварк ($q\bar{q}$). Кварки обладают спином $1/2$. Теперь мы можем увидеть, как возникает супермультиплет из десяти барионов. Барионы составлены из трех тождественных фермионов, так что возможные состояния могут классифицироваться в соответствии с их симметрией относительно перестановок символов, обозначающих кварки. Всего имеются $3^3 = 27$ состояний. Одно из них полностью антисимметрично:

$$uds + dsu + sud - usd - sdu - dus. \quad (1.6)$$

(Здесь, очевидно, буквами обозначены волновые функции и состояние не нормировано.) Существуют следующие десять полностью симметричных состояний:

$$\begin{aligned} &uuu, \\ &ddd, \\ &sss, \\ &uud + \mu du + duu, \\ &uus + usu + suu, \\ &udd + ddu + dud, \\ &uss + ssu + sus, \\ &dds + dsd + sdd, \\ &dss + ssd + sds, \\ &uds + dsu + sud + usd + sdu + dus. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Мы указали 11 из 27 состояний. Остальные 16 состояний распадаются на два набора, состоящие из 8 состояний. Каждый из них обладает смешанной симметрией — например, симметричен относительно перестановки двух первых символов, симметричен относительно перестановки двух последних. Таким образом, трехкварковые состояния существуют в виде различных супермультиплетов, содержащих 10, 8, 8 и 1 состояний. Супермультиплет $\{10\}$ изображен на рис. 1.3, так что мы можем написать $\Delta^{++} = (uuu)$, $\Sigma^0 = uds$ и т. д. При этом необходимо произвести соответствующую симметризацию. Протон и нейтрон ($p = (uud)$, $n = (udd)$) являются состояниями из супермультиплета $\{8\}$. Дальнейшие подробности читатель может найти в литературе [2—5]. Аналогично существуют $3^3 = 9$ мезонных состояний. Одно из них $(u\bar{u} + d\bar{d} + s\bar{s})$ инвари-

¹⁾ Для двух последних квантовых чисел, имеющих английские названия truth и beauty (или также top и bottom), нет общепринятых русских наименований. Кварки, несущие соответствующие квантовые числа, обычно называют по первым буквам английских названий: t -кварк и b -кварк. — Прим. ред.

антно относительно перестановок кварков, а оставшиеся 8 дают известные псевдоскалярные ($J^P = 0^-$) и векторные ($J^P = 1^-$) мезоны с суммарным спином кварков 0 и 1 и с нулевым угловым моментом, отвечающим относительно движению кварков. Добавление орбитального углового момента дает высшие спиновые состояния; это верно также и для барионов.

Все состояния, предсказываемые кварковой моделью (по крайней мере составленные из кварков u, d и s), были обнаружены, и не были обнаружены никакие другие состояния. При учете четвертого кварка, c -кварка, предсказывается также много других состояний. Некоторое число таких состояний уже обнаружено, однако не все, в первую очередь из-за того, что c -кварк тяжелее, чем u -, d - и s -кварки, вследствие чего рождение этих частиц более затруднено.

Итак, имеются очень веские свидетельства того, что барионы и мезоны являются составными состояниями кварков. Существование почти всех известных частиц может быть объяснено, если постулировать существование четырех кварков, однако имеются указания [10, 11] на существование пятого, а также, если считать, что кварки появляются парами, на существование шестого кварка.

Далее, распады частиц объясняются просто как распады кварков. Например, распад нейтрона

$$\begin{aligned} n &\rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e \\ &\text{происходит благодаря распаду } d\text{-кварка} \\ d &\rightarrow u + e^- + \bar{\nu}_e, \end{aligned} \quad (1.8)$$

а (лептонный) распад Λ [$\Lambda = (uds)$]

$$\begin{aligned} \Lambda &\rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e \\ &\text{происходит благодаря } s\text{-распаду} \\ s &\rightarrow u + e^- + \bar{\nu}_e. \end{aligned} \quad (1.9)$$

Отсюда мы можем заключить, что u -кварк самый легкий. Так как частица Λ заметно тяжелее n , то, по-видимому, частица s заметно тяжелее, чем d . Этим объясняются ранее обнаруженные правила отбора. Правило $\Delta S = \Delta Q$ (Q — заряд адрона) объясняет распад Σ^- и отсутствие распада Σ^+ :

$$\Sigma^- \rightarrow n + e^- + \bar{\nu}_e, \quad \text{Распад } \Sigma^+ \rightarrow p + e^+ + \nu_e \text{ запрещен.}$$

Однако эти же факты гораздо проще объяснить, заметив, что $\Sigma^- = (dds)$, $\Sigma^+ = (uus)$, так что распад *отдельного кварка* объясняет, почему Σ^- распадается, а Σ^+ нет (имеется в виду распад на частицы, указанные выше). Аналогично $\Xi^- (= ssd)$ не распадается непосредственно на нейтрон:

Распад $E^- \rightarrow n + e^- + \bar{\nu}_e$ запрещен.

Так и должно быть, если барионные распады происходят благодаря распаду отдельного кварка. Ранее отсутствие распада объяснялось правилом отбора $|\Delta S| = 1$.

§ 1.9. $SU(2)$, $SU(3)$, $SU(4)$,...

Частицы Δ (см. рис. 1.3) имеют следующий кварковый состав:

$$\Delta^- = (ddd), \quad \Delta^0 = (udd), \quad \Delta^+ = (uud), \quad \Delta^{++} = (uuu)$$

(мы не учитываем необходимость симметризации и нормировки, которые здесь несущественны). Массы этих частиц очень близки друг к другу: $m(\Delta^{++}) - m(\Delta^-) \approx 8 \text{ МэВ}/c^2$, так что, считая энергию связи во всех резонансах одинаковой, мы приходим к выводу, что u - и d -кварки почти вырождены. Существует соответствующая симметрия, смешивающая u и d кварки. Если ввести обозначение

$$\psi = \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}$$

и принять

$$\psi \rightarrow M\psi, \quad (1.10)$$

где M — матрица 2×2 , то в пределе точного вырождения мы получим смешивание четырех Δ -частиц, *ненаблюдаемое* в отсутствие электромагнитного взаимодействия, т. е. получим симметрию системы. Ради математической простоты будем полагать, что преобразования (1.10) образуют группу. Это означает, что матрицы M либо унитарны, либо ортогональны (эрмитовы матрицы не подчиняются групповому закону). Предположим, что они унитарны, т. е. образуют группу $U(2)$, группу унитарных матриц в двух (комплексных) измерениях. Тогда симметрия $U(2)$ должна проявляться в спектре адронов. На самом деле всегда рассматривают просто группу $SU(2)$, которая отвечает множеству матриц M с единичным детерминантом; это всегда можно сделать, выделив фазовый множитель, соответствующий барионному числу. Унитарная матрица 2×2 с единичным детерминантом может быть записана в виде

$$M = \exp\left(i \frac{\vec{\tau}}{2} \cdot \vec{\theta}\right), \quad (1.11)$$

где $\vec{\theta} = (\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ — три произвольных параметра, а $\vec{\tau} = (\tau_1, \tau_2, \tau_3)$ — матрицы со следом, равным нулю:

$$\tau_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (1.12)$$

называемые матрицами Паули. Для них выполняются коммутационные соотношения

$$\frac{\tau_1}{2} \frac{\tau_2}{2} - \frac{\tau_2}{2} \frac{\tau_1}{2} \equiv \left[\frac{\tau_1}{2}, \frac{\tau_2}{2} \right] = i \frac{\tau_3}{2} \quad (1.13)$$

и два других, получающиеся отсюда циклической перестановкой. Это те же коммутационные соотношения, которым удовлетворяют и операторы углового момента $\vec{J} = \vec{r} \times \vec{p}$:

$$[J_1, J_2] = iJ_3 \text{ и циклические перестановки.}$$

(Мы положили $\hbar = 1$.) Это показывает, что $SU(2)$ -симметрия является симметрией относительно вращений, а соответствующая сохраняющаяся величина есть *вектор*, подобный угловому моменту; он называется *изоспином*. Это показывает также, что группа $SU(2)$ в общем (с точностью до топологических свойств) совпадает с группой вращений $O(3)$, т. е. группой ортогональных матриц в трех (действительных) измерениях. Факт эквивалентности этих групп хорошо известен в математике. Углы $\vec{\theta}$ в формуле (1.11) — это углы вращения в «изоспиновом пространстве».

Таким образом, вырождение кварков приводит к существованию вырожденных адронных мультиплетов, и из приведенного рассуждения следует, что мультиплеты образуют базис неприводимых представлений группы $SU(2)$. Известно, что эта группа имеет представления с размерностью 1, 2, 3, 4, ... , и в действительности частицы Ω , E , Σ и Δ на рис. 1.3 образуют базис этих первых четырех представлений.

Изложенное можно, конечно, обобщить на случай большего количества кварков. В (гипотетическом) случае, когда s -кварк вырожден с u - и d -кварками, мы приходим к инвариантности относительно преобразований

$$\psi \rightarrow M\psi; \quad \psi = \begin{pmatrix} u \\ d \\ s \end{pmatrix},$$

где M теперь — унитарные матрицы 3×3 , образующие группу $SU(3)$. Размерности неприводимых представлений группы даются соотношением [12 — 15]

$$N = \frac{1}{2} (p+1)(q+1)(p+q+2), \quad (1.14)$$

где p и q — положительные целые числа или нуль. В случае $p = 3, q = 0$ имеем $N = 10$, что соответствует представлению, изображенному на рис. 1.3; случай $p = q = 1$ дает $N = 8$, т. е. знаменитое «октетное» представление; а случаи $p = 1, q = 0$ и $p = 0, q = 1$ дают трехмерные представления для кварков и антикварков.

Напомним, что неприводимое представление, изображенное на рис. 1.3, было получено из соображений симметрии, и можно задать вопросом, как это связано с теорией представлений групп. Ответ состоит в том, что представления группы $SU(n)$ могут быть получены с помощью тензоров с p верхними и q нижними индексами, по которым произведена симметризация или антисимметризация. Существует тесная связь между представлениями группы $SU(n)$ и группой перестановок. Такой способ нахождения представлений называют методом схем Юнга.

Данное представление группы $SU(3)$ содержит, вообще говоря, несколько представлений группы $SU(2)$. Иными словами, $SU(3)$ -мультиплет содержит несколько изоспиновых мультиплетов, различающихся значением странности S . Это ясно видно на рис. 1.3 и 1.4. На рис. 1.5 и 1.6 изображено представление $(p, q) = (1, 1)$, т. е. 8-мерное представление группы $SU(3)$, соответствующее псевдоскалярным мезонам. Оси координат отвечают гиперзаряду Y , определяемому формулой

$$Y = B + S, \tag{1.15}$$

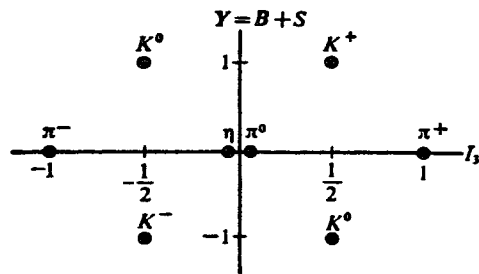


Рис. 1.5. Псевдоскалярный октет $J^P = 0^-$ группы $SU(3)$. Массы (нейтральных) частиц в единицах $MэВ/c^2$ таковы: $m(\pi) = 135$, $m(K) = 498$, $m(\eta) = 549$.

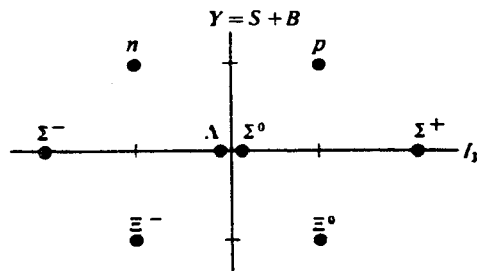


Рис. 1.6. Барийный октет $J^P = 1/2^+$. Массы нейтральных частиц в единицах $MэВ/c^2$ таковы: $m(N) = 939$, $m(\Sigma) = 1192$, $m(\Lambda) = 1115$, $m(\Xi) = 1315$.

и I_3 , третьей компоненте изоспина, связанной с электрическим зарядом Q соотношением

$$Q = I_3 + Y/2. \tag{1.16}$$

Последнее соотношение называют формулой Гелл-Манна — Нишиджимы.

Симметрия $SU(3)$ является точной только в пределе, когда все частицы, входящие в супермультиплет, вырождены. Значения масс частиц на рис. 1.3 и 1.5 говорят о том, что симметрия является лишь приближенной.

Включим теперь в рассмотрение четвертый кварк c . Поскольку

$$\psi = \begin{pmatrix} u \\ d \\ s \\ c \end{pmatrix}, \tag{1.17}$$

мы теперь имеем дело с (лишь весьма приближенной!) $SU(4)$ -симметрией. Как и выше, трехкварковые и кварк-антикварковые состояния попадают в определенные представления группы $SU(4)$, каждое из которых содержит несколько представлений группы $SU(3)$, различающихся значением очарования C . Формула Гелл-Манна — Нишиджимы теперь приобретает вид

$$Q = I_3 + \frac{B + S + C}{2}. \tag{1.18}$$

Представление размерности 20 группы $SU(4)$, соответствующее бариянам со спином $1/2$, изображено на рис. 1.7. Изосинглетное (cud) состояние отождествляется с Λ_c^+ -частицей, фигурирующей

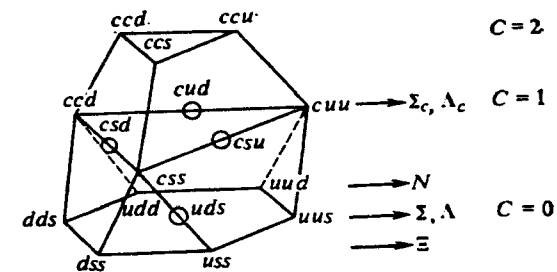


Рис. 1.7. Барьоны $1/2^+$ в 20-мерном представлении группы $SU(4)$. Справа указаны частицы, обнаруженные к настоящему времени. Сюда входят следующие мультиплеты группы $SU(3)$: $\{3\}$ при $C = 2$, $\{6\}$ и $\{3\}$ при $C = 1$ и $\{8\}$ при $C = 0$, т. е. октет с нулевым очарованием, изображенный на рис. 1.6.

в реакциях (1.5). Она обладает очарованием $C = 1$, как и частица Σ_c с изоспином 1, соответствующим зарядовым состояниям $\Sigma_c^0, \Sigma_c^+, \Sigma_c^{++}$. Другие барионы со спином $1/2$ и $C = 1$ пока еще не обнаружены, не найдены также барионы с $C = 2$. Частица Λ_c имеет массу $2262 \text{ МэВ}/c^2$, а частица Σ_c — массу $2428 \text{ МэВ}/c^2$. Они заметно тяжелее $SU(3)$ -октета с $C = 0$, а это говорит о том, что c -кварк должен быть гораздо тяжелее кварков u, d и s . Соответственно этому $SU(4)$ -симметрия является довольно неточной.

§ 1.10. Динамические свидетельства существования кварков

Классификация частиц является серьезным указанием на существование кварков. Но это не единственное свидетельство их существования. Эксперименты по глубоко-неупругому рассеянию электронов и протонов показали, что электрон рассеивается не на всем протоне, а на его точечноподобной составляющей, называемой *партоном*. Физики, занимающиеся частицами, не устояли перед соблазном отождествить партоны с кварками.

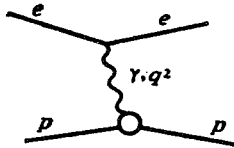


Рис. 1.8. Рассеяние электронов на протонах за счет обмена одним фотоном.

Напомним, что под экспериментальным исследованием *структуры* понимается измерение *формфакторов*. В случае рассеяния точечных электронов на протонах посредством механизма однофотонного обмена, изображенного на рис. 1.8, сечение имеет вид

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{точечн}} \left(\frac{G_E^2 + \frac{q^2}{4M^2} G_M^2}{1 + \frac{q^2}{4M^2}} + \frac{q^2}{4M^2} 2G_M^2 \text{tg}^2 \frac{\theta}{2} \right), \quad (1.19)$$

где $(d\sigma/d\Omega)_{\text{точечн}}$ дается формулой Мотта, приложенной к рассеянию электронов на точечных протонах, $G_E(q^2)$ и $G_M(q^2)$ — электрические и магнитные формфакторы, q^2 — квадрат 4-импульса фотона q (определенного в гл. 2), θ — угол, на который рассеивается электрон в лабораторной системе, а M — масса протона. Измерив величину $d\sigma/d\Omega$ и сравнив ее с $(d\sigma/d\Omega)_{\text{точечн}}$ при разных θ , можно определить формфакторы $G_E(q^2)$ и $G_M(q^2)$, которые, как оказывается, имеют дипольный характер:

$$G(q^2) = \left(\frac{1}{1 + q^2/M_q^2} \right)^2, \quad (1.20)$$

где $M_q^2 = 0,71 \text{ (ГэВ}/c^2)^2$. Функция (1.20) является фурье-образом величины

$$\rho(r) = \int e^{-iq \cdot r} G(q^2) d^3q \quad (1.21)$$

(формула нерелятивистская, q есть 3-импульс), которая оказывается экспоненциальным распределением заряд

$$\rho(r) \approx \exp(-M_q r). \quad (1.22)$$

Следовательно, такова структура протона, обнаруженная в данном эксперименте. Отсутствие сингулярности при $r \rightarrow 0$ указывает на отсутствие у протона *твердой сердцевины*. [Это нетривиальный результат: если бы вместо выражения (1.20) мы имели простой полюс, то получили бы вместо выражения (1.22) потенциал Юкавы $\rho(r) \approx [\exp(-M_q r)]/r$, который сингулярен при $r = 0$.] Таким образом, протон не похож на сливу с косточкой в середине. Он скорее похож на желе или на клубнику, в которой зернышки рассеяны равномерно, но *не концентрируются* в центре. Обратимся к неупругому рассеянию, в котором конечное состояние является произвольным адронным состоянием:

$$e^- + p \rightarrow e^- + (\text{адронное состояние}).$$

Диаграмма Фейнмана для этого процесса изображена на рис. 1.9. Величина M^* — это инвариантная масса конечного адронного состояния (определение см. в гл. 2). Можно показать, что

$$q^2 = M^2 - M^{*2} + 2M\nu, \quad (1.23)$$

где q — 4-импульс фотона, ν — энергия, теряемая электроном, $\nu = E_0 - E$, а M — масса протона. Мы имеем также

$$q^2 = 4EE_0 \sin^2(\theta/2).$$

В случае упругого рассеяния $M^* = M$ и $q^2 = 2M\nu$. Следовательно, q^2 и ν связаны между собой, т. е. с точки зрения эксперимента между собой связаны угол θ и потеря энергии $E_0 - E$. В этом случае формфакторы являются функциями только q^2 . В слу-

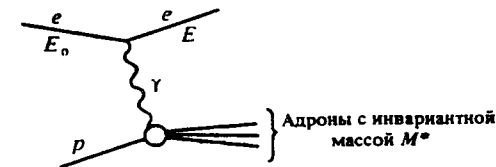


Рис. 1.9. Неупругое электрон-протонное рассеяние. Начальная и конечная энергии электрона равны E_0 и E .

чае неупругого рассеяния в конечном состоянии регистрируется только электрон и нет регистрируемого адронного состояния. Величина M^* эффективно является независимой переменной, так что q^2 и ν независимы и формфакторы $F(q^2)$ должны быть заменены так называемыми *структурными факторами* $W(q^2, \nu)$, зависящими от двух переменных q^2 и ν . Дифференциальное сечение рассеяния дается выражением

$$\frac{d^2\sigma}{d\Omega d\nu} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{точечн}} [W_2(\nu, q^2) + 2W_1(\nu, q^2) \text{tg}^2(\theta/2)].$$

Измерив это сечение, можно найти структурные функции $W_{1,2}$.

Можно изобразить графически величины W_1 и νW_2 как функции безразмерной переменной

$$\omega = \frac{2M\nu}{q^2}.$$

Установлено, что при больших ν и q^2 и конечных ω величины W_1 и νW_2 оказываются функциями только ω и не зависят от q^2 и ν по отдельности (рис. 1.10). Данное явление называется *скейлингом Бёркена*.

Скейлинг рассматривается как указание на то, что рассеяние происходит на точечноподобных составляющих протона, называемых партонами. Действительно, если это в самом деле так, то рассеяние e^- на отдельном партоне с массой m должно быть упругим, и тогда, согласно формуле (1.23), $q^2 = 2m\nu$. Исходя из этого, нетрудно показать, что структурные функции зависят только от ω . Если принять эту интерпретацию, то можно определить спин протона, так как нетрудно показать, что

$$\frac{(2\nu^2/q^2) W_2 - W_1}{2W_1} \xrightarrow{q^2, \nu \rightarrow \infty} 0, \text{ если спин партона} = \frac{1}{2},$$

$$\xrightarrow{q^2, \nu \rightarrow \infty} \infty, \text{ если спин партона} = 0.$$

Эксперимент показывает, что данное отношение стремится к нулю;

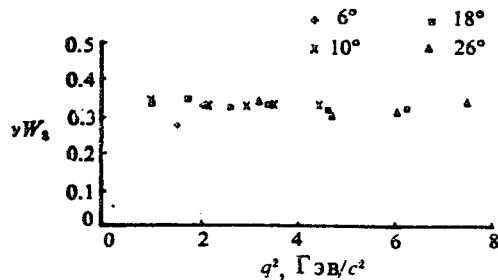


Рис. 1.10. Зависимость величины νW_2 от q^2 при $\omega = 4$ [2].

следовательно, партоны обладают спином $1/2$ и поэтому отождествляются с кварками. Эти замечательные эксперименты дают динамические доказательства существования кварков.

§ 1.11. Цвет

Существует довольно трудная проблема, которую, возможно, читатель уже заметил. Она связана со статистикой кварков. Рассмотрим адроны, принадлежащие представлению $\{10\}$ группы $SU(3)$, изображенному на рис. 1.3. Напомним, что три кварка находятся в состоянии, *симметричном* относительно подстановки значков Q и S группы $SU(3)$. Полная волновая функция одного из этих адронов, скажем Δ^{++} , записывается в виде

$$\Psi_{\Delta^{++}} = \Psi_{\text{спин}} \Psi_{SU(3)} \Psi_{\text{простр}}$$

т. е. является произведением волновых функций, выражающих зависимость от пространственных, спиновых и «внутренних» $SU(3)$ -переменных. Мы уже отметили, что $SU(3)$ -часть симметрична; в данном случае это просто *ишш*. Три кварка находятся в состоянии $S = 3/2$, $L = 0$. Таким образом, в случае трех параллельных спинов, очевидно, величина $\Psi_{\text{спин}}$ симметрична, а величина $\Psi_{\text{простр}}$ симметрия которой определяется множителем $(-1)^L$, также симметрична при $L = 0$. Следовательно, полная волновая функция трех кварков симметрична относительно всех трех значков; но это запрещено статистикой Ферми — Дирака. Таким образом, либо кварки не подчиняются статистике Ферми, либо приведенные рассуждения неверны или, скорее, неполны. Это и есть проблема статистики кварков.

Гелл-Манн показал, что эту проблему можно разрешить, введя дополнительную степень свободы, называемую *цветом*¹⁾. Каждый кварк обладает помимо «значков», отвечающих спину и Q, S, C, \dots , еще и *дополнительным* значком, принимающим три значения R, W, B (красный, белый и синий), и волновая функция Δ -частицы приобретает вид

$$\Psi_{\Delta} = \Psi_{\text{спин}} \Psi_Q \Psi_S \Psi_{\text{простр}} \Psi_{\text{цвет}} \quad (1.24)$$

Мы просто ставим условие, что первые три функции симметричны, а $\Psi_{\text{цвет}}$ антисимметрична относительно перестановки цветовых значков. Можно сказать, что теперь число кварков равно не 4 (или

¹⁾ Характерное для кварков дополнительное квантовое число было введено в работах Н. Н. Боголюбова, Б. В. Струминского и А. Н. Тавхелидзе, И. Намбу и М. Хана, а также И. Миямото. Термин «цвет» был предложен позднее М. Гелл-Манном, одним из авторов гипотезы о существовании кварков. См. [10] в списке литературы, добавленной при переводе. — *Прим. ред.*

5, 6, ...), а этому числу, умноженному на 3. Например, в 4-кварковой модели мы теперь имеем четыре аромата (общее название для Q, S, C, \dots) и три цвета, так что набор кварков можно записать в виде

$$\begin{pmatrix} u_R & u_W & u_B \\ d_R & d_W & d_B \\ s_R & s_W & s_B \\ c_R & c_W & c_B \end{pmatrix}. \quad (1.25)$$

Так же как и в случае группы преобразований для ароматов $SU(4)_{\text{аромат}}$, мы постулируем, что цветовой группой является $SU(3)_{\text{цвет}}$. Таким образом, мы имеем два типа симметрий, действующих на два типа кварковых символов:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} u_R & u_W & d_B \\ d_R & d_W & d_B \\ s_R & s_W & s_B \\ c_R & c_W & c_B \end{array} \xrightarrow{SU(3)_{\text{цвет}}} \\ \downarrow SU(4)_{\text{аромат}} \end{array}$$

Аналогично полностью антисимметричной по ароматическим переменным волновой функции (1.6) мы можем записать полностью антисимметричную цветовую волновую функцию, входящую в выражение (1.24):

$$\Psi_{\text{цвет}} = RWB + WBR + BRW - RBW - BWR - WRB. \quad (1.26)$$

Поскольку эта полностью антисимметричная функция преобразуется относительно $SU(3)_{\text{цвет}}$ как синглет, мы приходим к интересному выводу, что, в то время как кварки обладают цветом [преобразуются по нетривиальному представлению группы $SU(3)_{\text{цвет}}$], барионы не преобразуются по представлениям группы $SU(3)_{\text{цвет}}$, т. е. бесцветны, что и наблюдается! Аналогичные рассуждения справедливы для мезонов. Следовательно, адроны бесцветны. Это может иметь отношение к удержанию (конфайнменту) кварков: может быть, имеет место именно удержание цвета, так что частицы, обладающие цветом, не появляются в свободном состоянии, а частицы без цвета появляются.

Такое введение цвета имеет историческую параллель, которая, возможно, придаст изложенному больше убедительности. Рассмотрим боровские орбиты двух электронов в атоме гелия. Они тождественны, и мы можем задаться вопросом, не нарушается ли принцип запрета Паули, согласно которому электроны должны находиться в различных состояниях (или, что эквивалентно, двухчастичная волновая функция должна быть антисимметричной). Если не учитывать другие переменные, то нарушение имеет место, но

мы спасаем принцип Паули, вводя спин электронов, при условии, что два электрона находятся в антисимметричном спиновом состоянии, соответствующем нулевому полному спину. Спин электрона в проблеме гелия играет ту же роль, что и цвет в проблеме кварков.

Таким образом, введение цвета решает проблему кварковой статистики. Однако существуют ли независимые указания на существование цвета? Такие указания имеются в двух случаях, которые мы сейчас рассмотрим.

I. Распад $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$.

Приняв, что π^0 -мезон составлен из кварков, т. е. что $\pi^0 = (1/\sqrt{2})(u\bar{u} - d\bar{d})$, можно точно вычислить скорость его распада на два фотона. Амплитуда распада определяется диаграммой, изображенной на рис. 1.11. Амплитуда, очевидно, аддитивна по отношению ко всем различным типам кварков (т. е. цветам), которые могут давать вклад. В результате она называется пропорциональной N_c , т. е. числу цветов. Вычисления дают значение ширины распада пиона

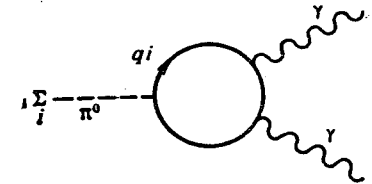


Рис. 1.11. Диаграмма Фейнмана, соответствующая распаду $\pi^0 \rightarrow 2\gamma$ через промежуточные кварковые состояния.

$$\Gamma(\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma) = 7,87(N_c/3)^2 \text{ эВ},$$

сравнимое с экспериментальным значением

$$\Gamma = 7,95 \pm 0,05 \text{ эВ}.$$

Мы заключаем, что $N_c = 3$.

II. Эксперименты по аннигиляции e^+e^- .

Эти впечатляющие эксперименты на встречных пучках проводились в Станфорде и других местах в течение ряда лет. Электроны и позитроны аннигилируют в виртуальные фотоны, которые превращаются в пары e^+e^- , $\mu^+\mu^-$, $\tau^+\tau^-$ или в адроны всех типов. Рождение адронов должно идти по схеме

$$e^+e^- \rightarrow q\bar{q} \rightarrow \text{адроны}. \quad (1.27)$$

Сначала рождаются кварки, которые объединяются с другими кварками или антикварками таким образом, что конечными продуктами реакции оказываются адроны. Это представлено на рис. 1.12. Действительно, имеются определенные указания на

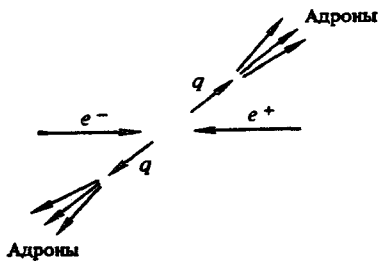


Рис. 1.12. Аннигиляция пары e^+e^- в адроны.

то, что адроны рождаются именно этим путем, поскольку при таком механизме они должны возникнуть в парах *струи*, направленных в противоположных направлениях. Существование этих струй надежно установлено [20].

Далее, если кварки являются точечными частицами подобно e^- и μ^- , то, поскольку процесс электромагнитный, его амплитуда зависит только от *заряда* кварка, так что отношение сечений должно выражаться в виде

$$\frac{\sigma(e^+e^- \rightarrow q\bar{q})}{\sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-)} = N_c Q_q^2,$$

где Q_q — заряд кварка, а N_c — число цветов. Полагая $N_c = 3$, находим отношение сечения рождения адронов к сечению рождения мюонных пар:

$$R = \frac{\sigma(e^+e^- \rightarrow \text{адроны})}{\sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-)} = 3 \sum Q_q^2 = 3 \left(\frac{4}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} \right) \text{ для трех ароматов} = 2. \quad (1.28)$$

Мы здесь предположили, что эксперименты проводятся при низких энергиях, при которых рождаются только три первых аромата

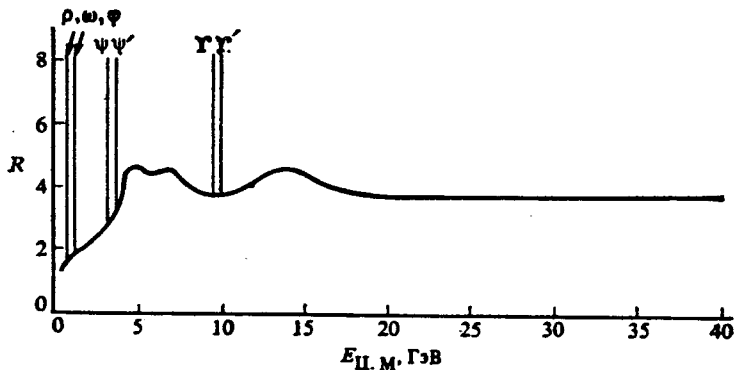


Рис. 1.13. Примерная зависимость величины R от энергии в системе центра масс.

u, d и s . С ростом энергии будет расти и R . Например, если рождаются c - и b -кварки с зарядами $2/3$ и $-1/3$, то R возрастает до значения $11/3$.

На рис. 1.13 представлена примерная зависимость величины R от энергии пары e^+e^- в системе центра масс. Как нетрудно видеть, R возрастает от значения, примерно равного 2, при 2,5 ГэВ до значения, несколько превышающего 4, при 4,7 ГэВ, т. е. на пороге рождения очарования. Выше 20 ГэВ величина R падает до значения, примерно равного $11/3$, что говорит как о существовании кварков u, d, s, c и b , так и о существовании цвета. Максимумы на рис. 1.13 соответствуют мезонным состояниям $q\bar{q}$ со спином 1.

§ 1.12. КХД

Считается, что цвет подобен электрическому заряду, т. е. отвечает некоему динамическому полю с безмассовым квантовым аналогом фотона, который получил название *глюона*. Таким образом, подоб-

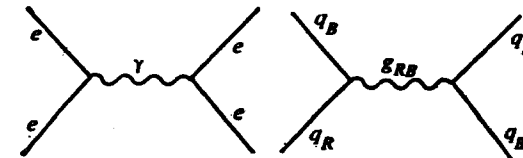


Рис. 1.14. Взаимодействие электрон — электрон через обмен виртуальным фотоном и взаимодействие кварк — кварк через обмен виртуальным глюоном.

но электрон-электронному взаимодействию, состоящему в обмене фотоном, мы имеем кварк-кварковое взаимодействие, состоящее в обмене глюоном (рис. 1.14). Различие в том, что сами фотоны не имеют заряда, а глюоны, вследствие того что цвет есть «3-мерная» величина и взаимодействие является обменным, несут цветовой заряд. Существуют восемь глюонов, которые принадлежат 8-мерному представлению группы $SU(3)_{\text{цвет}}$.

Таким образом, благодаря цвету существует механизм, связывающий кварки в адроны. Динамическая схема, описывающая такое взаимодействие, называется квантовой хромодинамикой (КХД). В гл. 3 будет показано, что электродинамика является калибровочной теорией; следовательно, таковой является и хромодинамика. Группой симметрии КЭД служит абелева группа $U(1)$, а в КХД соответствующую роль играет неабелева группа $SU(3)$. Квантование неабелевых калибровочных теорий будет рассмотрено в гл. 7.

Имеются экспериментальные свидетельства существования глюонов; в полной аналогии с тормозным излучением (когда ускоренные электрические заряды испускают фотоны) кварки должны таким же образом испускать глюоны. Поэтому кварк, образованный в e^+e^- -экспериментах при высоких энергиях, может излучать

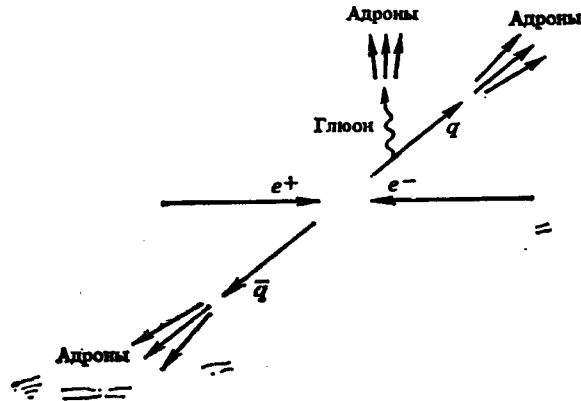


Рис. 1.15. Три адронные струи, соответствующие кварк-глюонному тормозному излучению в процессе аннигиляции электрон-позитронной пары.

глюоны, как показано на рис. 1.15. Затем эти глюоны, подобно кваркам, превращаются в струи адронов. Следовательно, наряду с 2-струйными событиями, о которых говорилось выше, должны существовать 3-струйные события. Имеются некоторые указания [20] на то, что такие 3-струйные события, рассматриваемые как свидетельство существования глюонов, действительно имеют место.

Почему глюоны не появляются в свободном состоянии? В точности такой же вопрос существует и для кварков. Тот факт, что, несмотря на обширные и интенсивные поиски, кварки никогда не наблюдались, является широко известной и наиболее неподатливой проблемой кварковой модели. Полагают, что существует особый механизм, который удерживает кварки в комбинациях (qqq) или $(q\bar{q})$, т. е. внутри адронов. Это явление называется *удержанием* (конфайнментом) *кварков*. Как уже говорилось выше, может оказаться, что в действительности удерживается цвет. Следствием этого явилось бы и удержание глюонов, которые также обладают цветом, и мы получили бы ответ на вопрос, почему не обнаружены глюоны. Тем не менее пока не существует удовлетворительной теории удержания кварков.

§ 1.13. Слабые взаимодействия

Теория слабых взаимодействий подробно излагается в гл. 8. Здесь же достаточно сказать о гипотезе Кабиббо [2—5]. Как мы уже видели, происходят распады, при которых кварки s и d переходят в кварк u [формулы (1.8) и (1.9)]:

$$s \rightarrow u + e^- + \bar{\nu}_e; \quad d \rightarrow u + e^- + \bar{\nu}_e.$$

и вследствие этого происходят распады адронов как с изменением странности ($|\Delta S| = 1$, $\Delta S = \Delta Q$), так и с сохранением странности ($\Delta S = 0$), например:

$$\pi^+ \rightarrow \pi^0 + e^+ + \nu_e, \quad K^+ \rightarrow \pi^0 + e^+ + \nu_e,$$

или распады n и Λ , о которых мы уже говорили. Однако интенсивность этих распадов неодинакова. Константа связи $G^{(1)}$ для распадов с $|\Delta S| = 1$ составляет примерно 0,1 константы $G^{(0)}$ для распадов с $\Delta S = 0$. Если положить

$$G^{(1)} = G \sin \theta_C, \\ G^{(0)} = G \cos \theta_C,$$

где θ_C — *угол Кабиббо*, для которого найдено значение $0,247 \pm \pm 0,008$, то оказывается, что величина G равна константе связи для распада мюона $\mu^- \rightarrow \nu_\mu + e^- + \bar{\nu}_e$. Это говорит о нетривиальном содержании гипотезы Кабиббо. Изящный способ описания лептонной моды распада адронов основывается на предположении, что происходит переход между u -кварком и d -кварком, «повернутым на угол Кабиббо», который обозначается через d_C :

$$d_C = \cos \theta_C d + \sin \theta_C s. \quad (1.29)$$

В теории Салама — Вайнберга, которая будет изложена в гл. 8, частицы u и d_C (точнее, их левые компоненты) связываются с 2-мерным представлением группы $SU(2)$:

$$\psi_L = \begin{pmatrix} u \\ d_C \end{pmatrix}_L, \quad (1.30)$$

отвечающим так называемому «слабому изоспину». Оказывается, что существует очень интересная связь между такой структурой и существованием четвертого, очарованного кварка c . Данный вопрос будет рассмотрен в соответствующем месте.

Этим мы заканчиваем вводный обзор физики частиц. Его целью было ввести некоторые из важнейших понятий и обосновать необходимость изучения квантовых полей. Мы начнем это изучение в следующей главе с анализа волновых уравнений для частиц со спином 0 (это простейший, но не физический случай), со спином

1/2 (это кварки и лептоны) и со спином 1 (это фотон, глюоны и промежуточные векторные бозоны).

Литература для дальнейшего изучения

Интересная, хотя и упрощенная оценка роли полей в физике дана в книге:

1. *Einstein A., Infeld L.* The Evolution of Physics, Cambridge University Press, 1971. [Имеется перевод в кн.: *Эйнштейн А.* Собрание научных трудов. — М.: Наука, 1967, т. 4.]

Введение в физику частиц дано в книгах:

2. *Perkins D. H.* Introduction to High Energy Physics. 2nd ed., Addison-Wesley, 1982. [Имеется перевод: *Перкинс Д.* Введение в физику высоких энергий. — М.: Мир., 1975.]
3. *Segrè E.* Nuclei and Particles, 2nd ed., W. A. Benjamin, 1977.
4. *Tassie L. J.* The Physics of Elementary Particles, Longman, 1973.
5. *Ryder L. H.* Elementary Particles and Symmetries, Revised and enlarged Edition, Gordon and Breach, 1986. [Имеется перевод предыдущего издания: *Райдер Л.* Элементарные частицы и симметрии. — М.: Наука, 1983.]

Открытие τ -лептона описано в следующих изданиях:

6. *Lynch H. L.* — in: Quarks and Leptons (Cargèse, 1979), eds. M. Lévy et al., Plenum Press, 1980.
7. *Wolf G.* — in: Weak Interactions (Enrico Fermi School, Varenna, 1977), ed. M. Baldo Ceolin, North-Holland Publishing Company, 1979.

Обзор по физике очарованных частиц дается в работах:

8. *Muller F.* — in: Quarks and Leptons (Cargèse, 1979), eds. M. Lévy et al., Plenum Press, 1980.
9. *Muller F.* — in: The New Aspects of Subnuclear Physics (Erice, 1980), ed. A. Zichichi, Plenum Press, 1981. См. также [7].

Обзоры мира шести кварков и шести лептонов:

10. *Gallard M. K., Maiani L.* — in: Quarks and Leptons (Cargèse, 1979), eds. M. Lévy et al., Plenum Press, 1980.
11. *Fritzsch H.* — in: Weak Interactions (Enrico Fermi School, Varenna, 1977), ed. M. Baldo Ceolin, North-Holland Publishing Co., 1979.

Различные аспекты теории групп и ее приложений к физике частиц излагаются в работах:

12. *Behrends R. E. et al.* Reviews of Modern Physics, 34, 1, (1962). [Имеется перевод в кн.: Теория групп и элементарные частицы. — М.: Мир, 1967.]
13. *De Swart J. J.* Reviews of Modern Physics, 34, 916 (1963).
14. *Berman S. M.* — in: Symmetries in Elementary Particle Physics, ed. A. Zichichi, Academic Press, 1965.
15. *Wybourne B. G.* Classical Groups for Physicists, John Wiley and Sons, 1974.
16. *Close F. E.* An Introduction to Quarks and Partons, Academic Press, 1979. [Имеется перевод: *Клоуз Ф.* Кварки и партоны. — М.: Мир, 1982.]

Эксперименты по глубоконеупругому рассеянию и партонная модель рассмотрены в книге Клоуза [16], а также в книге:

17. *Feynman R. P.* Photon — Hadron Interactions, W. A. Benjamin, 1972.

Свидетельства существования цвета приведены в книге [16], а также в работах:

18. *Gell-Mann M.* — in: Elementary Particle Physics, ed. P. Urban, Springer-Verlag, 1972.
19. *Adler S. L.* — in: Lectures on Elementary Particles and Quantum Field Theory, Vol. 1 (1970 Brandeis Summer Institute), eds. S. Deser, M. Grisaru, H. Pendleton, MIT Press, 1970.
20. *Lynch H. L., Ellis J., Sachrajda C., Bøggild H.* — in: Quarks and Leptons (Cargèse, 1979), eds. M. Lévy et al., Plenum Press, 1980.

В следующих книгах содержится хорошее изложение вопросов, рассмотренных в настоящей главе:

21. *Okun L. B.* Leptons and Quarks, North-Holland, 1982. [См. также: *Окунь Л. Б.* Лептоны и кварки. — М.: Наука, 1981.]
22. *Halzen F., Martin A. D.* Quarks and Leptons, Wiley, 1984. [Имеется перевод: *Халзен Ф., Мартин А.* Кварки и лептоны. — М.: Мир, 1987.]

2

Одночастичные релятивистские волновые уравнения

§ 2.1. Релятивистские обозначения

Любая теория, описывающая фундаментальную структуру материи, должна, конечно, согласовываться с теорией относительности, равно как и с квантовой теорией. Поэтому мы сначала условимся об обозначениях для релятивистских теорий. Предполагается, что читатель хорошо знаком со специальной теорией относительности.

Рассмотрим два события (x, y, z, t) и $(x + dx, y + dy, z + dz, t + dt)$ в пространстве-времени. Мы можем обобщить понятие расстояния между двумя точками в пространстве и перейти к «интервалу» между двумя точками в пространстве-времени. Обозначим его через ds . Чтобы интервал ds был одним и тем же для всех (инерциальных) наблюдателей, он должен быть инвариантным относительно преобразований Лоренца и вращений, откуда следует, что он имеет вид

$$ds^2 = c^2 dt^2 - (dx^2 + dy^2 + dz^2). \quad (2.1)$$

Конечно, можно было бы принять $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2 dt^2$, но определение (2.1) будет удобнее в дальнейшем. При таком определении событиям, разделенным *временеподобным* интервалом, соответствуют значения $ds^2 > 0$; событиям, разделенным *пространственноподобным* интервалом, соответствуют значения $ds^2 < 0$; событиям, разделенным *нулевым*, или *светоподобным*, интервалом, соответствуют значения $ds^2 = 0$.

В трехмерном пространстве величины (x, y, z) рассматриваются как компоненты 3-вектора, а величина $dr^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$ инвариантна относительно вращений. Эта квадратичная форма есть сумма квадратов, а потому положительно определена. При обобщении на четырехмерное пространство мы сталкиваемся с трудностями, так как в этом случае инвариантный интервал не является положительно определенным. Поэтому примем определения

$$x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, x, y, z), \quad (2.2)$$

$$x_\mu = (x_0, x_1, x_2, x_3) = (ct, -x, -y, -z)$$

и введем правило, согласно которому инвариант получается суммированием по одному верхнему и одному нижнему индексу:

$$ds^2 = \sum_{\mu=0}^3 dx^\mu dx_\mu = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2. \quad (2.3)$$

Определенный выше 4-вектор x^μ с верхним индексом называется *контравариантным*, а 4-вектор с нижним индексом x_μ — *ковариантным* вектором. Скалярное произведение контравариантного и ковариантного векторов есть инвариант (скаляр). Чтобы упростить обозначения, мы примем *правило суммирования*: по индексу, который фигурирует один раз в верхнем положении и один раз в нижнем положении, всегда производится суммирование от 0 до 3:

$$\sum_{\mu=0}^3 V^\mu V_\mu \rightarrow V^\mu V_\mu. \quad (2.4)$$

Можно установить соотношение между x^μ и x_μ (или между контравариантным вектором и его ковариантным партнером), если ввести *метрический тензор* $g_{\mu\nu}$:

$$x_\mu = g_{\mu\nu} x^\nu = g_{\mu 0} x^0 + g_{\mu 1} x^1 + g_{\mu 2} x^2 + g_{\mu 3} x^3, \quad (2.5)$$

где использовано указанное выше правило суммирования. Из (2.2) видно, что $x_0 = x^0$, $x_1 = -x^1$ и т. д. В результате из (2.5) следует, что тензор $g_{\mu\nu}$ может быть записан в виде диагональной матрицы:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (2.6)$$

где строки и столбцы соответствуют компонентам 0, 1, 2 и 3. Поскольку детерминант матрицы $g_{\mu\nu}$ отличен от нуля, существует обратная ей матрица. Она записывается в виде

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (2.7)$$

и имеет те же элементы, что и $g_{\mu\nu}$ в пространстве Минковского (в декартовых координатах). Однако это равенство не справедливо в общем случае.

Ясно, что метрический тензор $g_{\mu\nu}$ несет всю информацию о геометрии пространства-времени, в данном случае пространства-времени Минковского. Однако в частной теории относительности метрический тензор играет лишь пассивную роль и его можно даже вообще не вводить. В общей же теории относительности метрический тензор играет активную роль, поскольку в этом случае геометрия пространства-времени не фиксируется заранее, а зависит от распределения материи в нем. Например, эйнштейновские полевые уравнения представляют собой дифференциальные уравнения для $g_{\mu\nu}$.

В физике частиц принято пользоваться системой единиц, в которой $c = 1$, так что выражение (2.3) принимает вид

$$ds^2 = dx^\mu dx_\mu = dt^2 - (dx^2 + dy^2 + dz^2). \quad (2.8)$$

Введем теперь следующие дифференциальные операторы:

$$\begin{aligned} \partial_\mu &= \frac{\partial}{\partial x^\mu} = (\partial_0, \partial_1, \partial_2, \partial_3) = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) = \\ &= \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \nabla \right), \end{aligned} \quad (2.9)$$

$$\partial^\mu = g^{\mu\nu} \partial_\nu = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, -\nabla \right),$$

что дает лоренц-инвариантный дифференциальный оператор второго порядка

$$\square = \partial^\mu \partial_\mu = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2, \quad (2.10)$$

который называют оператором Даламбера (даламбертианом).

Далее, 4-вектор энергии-импульса частицы имеет вид

$$p^\mu = \left(\frac{E}{c}, \mathbf{p} \right), \quad p_\mu = \left(\frac{E}{c}, -\mathbf{p} \right). \quad (2.11)$$

Отсюда получаем инвариант

$$p^2 = p^\mu p_\mu = \frac{E^2}{c^2} - \mathbf{p} \cdot \mathbf{p} = m^2 c^2, \quad (2.12)$$

или в системе единиц, где $c = 1$,

$$p^2 = E^2 - \mathbf{p}^2 = m^2. \quad (2.13)$$

Мы будем также использовать обозначение $p \cdot x$ для величины $p_\mu x^\mu$:

$$p \cdot x = p_\mu x^\mu = Et - \mathbf{p} \cdot \mathbf{r}. \quad (2.14)$$

§ 2.2. Уравнение Клейна — Гордона

Теперь мы можем написать волновое уравнение для частицы без спина, т. е. для скалярной частицы. Ввиду отсутствия спина она описывается однокомпонентной величиной, которую мы обозначим через φ . Волновое уравнение получается из соотношения (2.12) подстановкой соответствующих дифференциальных операторов вместо E и \mathbf{p} способом, обычным в квантовой теории:

$$\blacksquare E \rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t}, \quad \mathbf{p} \rightarrow -i\hbar \nabla. \quad (2.15)$$

Тогда соотношение (2.12) дает

$$\left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \right) \varphi + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \varphi = 0,$$

или в системе единиц, в которой $\hbar = c = 1$, с учетом выражения (2.10):

$$(\square + m^2)\varphi = 0. \quad (2.16)$$

Это так называемое уравнение Клейна — Гордона. Заметим, что если использовать нерелятивистское приближение $E = p^2/2m$ (здесь E — только кинетическая энергия) для выражения (2.12), то подстановка (2.15) приводит к уравнению Шредингера для свободной частицы

$$\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \varphi = -i\hbar \frac{\partial \varphi}{\partial t}. \quad (2.17)$$

Отсюда мы заключаем, что уравнение Шредингера является нерелятивистским приближением для уравнения Клейна — Гордона.

В случае уравнения Шредингера мы имеем следующие выражения для плотности вероятности:

$$\rho = \varphi^* \varphi \quad (2.18)$$

и для тока вероятности:

$$\mathbf{j} = -\frac{i\hbar}{2m} (\varphi^* \nabla \varphi - \varphi \nabla \varphi^*). \quad (2.19)$$

Они удовлетворяют уравнению непрерывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = \frac{\partial}{\partial t} (\varphi^* \varphi) - \frac{i\hbar}{2m} (\varphi^* \nabla^2 \varphi - \varphi \nabla^2 \varphi^*) = \\ = \varphi^* \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{i\hbar}{2m} \nabla^2 \varphi \right) + \varphi \left(\frac{\partial \varphi^*}{\partial t} + \frac{i\hbar}{2m} \nabla^2 \varphi^* \right) = 0,$$

где мы использовали уравнение Шредингера и комплексно сопряженное ему уравнение. Как выглядят соответствующие выражения в случае уравнения Клейна — Гордона? При последовательном релятивистском рассмотрении ρ не является скаляром, как в выражении (2.18), а преобразуется как временная компонента 4-вектора, пространственные компоненты \mathbf{j} которого даются выражением (2.19). Таким образом, ρ имеет вид

$$\rho = \frac{i\hbar}{2m} \left(\varphi^* \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \varphi \frac{\partial \varphi^*}{\partial t} \right). \quad (2.20)$$

Далее, используя выражение

$$\mathbf{j}^{\mu} = (\rho, \mathbf{j}) = \frac{i\hbar}{m} \varphi^* \left(\overset{\leftrightarrow}{\partial}_0, -\overset{\leftrightarrow}{\nabla} \right) \varphi = \frac{i\hbar}{m} \varphi^* \overset{\leftrightarrow}{\partial}^{\mu} \varphi, \quad (2.21)$$

где по определению

$$A \overset{\leftrightarrow}{\partial}^{\mu} B \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} \left[A \overset{\leftrightarrow}{\partial}^{\mu} B - (\overset{\leftrightarrow}{\partial}^{\mu} A) B \right], \quad (2.22)$$

причем учтены обозначения (2.9), мы приходим к уравнению непрерывности

$$\partial_{\mu} \mathbf{j}^{\mu} = \frac{i\hbar}{2m} (\varphi^* \square \varphi - \varphi \square \varphi^*) = 0, \quad (2.23)$$

поскольку φ^* также удовлетворяет уравнению Клейна — Гордона. Итак, ρ и \mathbf{j} являются искомыми плотностью и током вероятности. Однако мы при этом сразу сталкиваемся с трудностью, состоящей в том, что плотность ρ , определенная выражением (2.20), в отличие от выражения (2.18), соответствующего уравнению Шредингера, не является положительно определенной величиной. Поскольку уравнение Клейна — Гордона есть уравнение второго порядка, величины φ и $\partial \varphi / \partial t$ могут быть фиксированы в данный момент времени так, чтобы величина ρ была отрицательной. Поэтому интерпретация ρ как плотности вероятности невозможна. Следовательно, невозможно и интерпретация уравнения Клейна — Гордона как *одночастичного уравнения* с волновой функцией φ . В гл. 4 мы встанем на другую точку зрения и будем рассматривать его как *полевое уравнение* и увидим, что в результате квантования в конечном итоге достигается последовательная многочастичная интерпретация.

Заметим, что функция φ принимает комплексные значения. Если считать функцию действительной, то величина ρ , даваемая выражением (2.20), обращается в нуль, и то же самое верно для \mathbf{j} . В следующей главе будет показано, что правильная интерпретация комплексной функции φ такова: она описывает *заряженные* частицы. Действительные функции φ соответствуют электрически нейтральным частицам. В этом случае ρ и \mathbf{j} — плотности заряда и тока, а не плотности вероятности и тока вероятности.

Существует еще одна проблема, связанная с уравнением Клейна — Гордона. Дело в том, что соотношение (2.12), рассматриваемое как уравнение для E , имеет решения вида

$$E = \pm (m^2 c^4 + p^2 c^2)^{1/2}. \quad (2.24)$$

Поэтому уравнение Клейна — Гордона наряду с решениями, соответствующими положительным энергиям, имеет также решения, соответствующие *отрицательным энергиям*. В случае свободной частицы, энергия которой постоянна, эту трудность можно преодолеть, поскольку мы по своему выбору можем считать энергию частицы положительной, а состояние с отрицательной энергией отбросить. Однако взаимодействующая частица может обмениваться энергией с окружающей ее средой, и нет ничего, что помешало бы ей «провалиться» в состояние с бесконечной отрицательной энергией, излучив при этом бесконечное количество энергии. Этого, конечно, не случается, а потому уравнение Клейна — Гордона наталкивается на серьезную трудность. Ниже мы увидим, что обе указанные трудности снимаются, если рассматривать φ как квантовое поле.

Перейдем теперь от скалярных частиц к частицам со спином, начиная с частиц со спином $1/2$, которые описываются уравнением Дирака.

§ 2.3. Уравнение Дирака

В отличие от уравнения Клейна — Гордона уравнение Дирака является уравнением первого порядка и справедливо только для частиц со спином $1/2$. Уравнение Клейна — Гордона отражает лишь релятивистское соотношение между энергией, импульсом и массой и поэтому должно быть справедливым для частиц с любым спином. Уравнение Дирака (а также уравнения Максвелла и Прока, которые будут выведены ниже) имеет совершенно иное происхождение и может быть получено из трансформационных свойств спиноров относительно группы Лоренца. Чтобы не слишком углубляться в этот предмет, рассмотрим сначала кратко связь между группой вращений и группой $SU(2)$ и введем понятия спиноров. Затем мы обобщим эти идеи на случай группы Лоренца.

$SU(2)$ и группа вращений

Произвольное пространственное вращение имеет вид

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = (R) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \text{ или } r' = Rr; \quad (2.25)$$

здесь R — матрица вращения. Поскольку при вращениях расстояние до начала координат не меняется, мы имеем $x'^2 + y'^2 + z'^2 = x^2 + y^2 + z^2$, или $r'^T r' = r^T r$ (T — транспонирование), и, следовательно,

$$\begin{aligned} r^T R^T R r &= r^T r, \\ R^T R &= 1, \end{aligned} \quad (2.26)$$

т. е. R есть ортогональная 3×3 -матрица. Эти матрицы образуют группу; если R_1 и R_2 — ортогональные матрицы, то и $R_1 R_2$ — ортогональная матрица:

$$(R_1 R_2)^T R_1 R_2 = R_2^T R_1^T R_1 R_2 = 1.$$

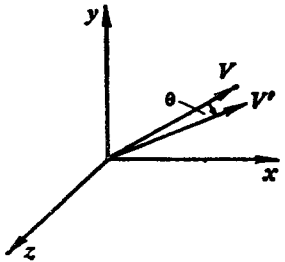


Рис. 2.1.

Эта группа обозначается через $O(3)$. Для матриц в n измерениях соответствующей группой является группа $O(n)$. Унитарные матрицы также образуют группу, обозначаемую символом $U(n)$. Эрмитовы же матрицы группу не образуют, если только они не коммутируют между собой.

В качестве примера рассмотрим вращение вектора V вокруг оси z (рис. 2.1). Рассматриваемое как *активное вращение* (т. е. вращаются векторы, а координатные оси остаются неподвижными), оно является левым; рассматриваемое как *пассивное вращение* (т. е. вращаются координатные оси, а векторы остаются неподвижными), оно является правым. Имеем

$$\begin{pmatrix} V'_x \\ V'_y \\ V'_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{pmatrix}, \quad (2.27)$$

так что можно для матриц вращения принять обозначение

$$R_z(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.28)$$

Аналогичные матрицы вращений вокруг осей x и y имеют вид

$$R_x(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & \sin \varphi \\ 0 & -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}, \quad (2.29)$$

$$R_y(\psi) = \begin{pmatrix} \cos \psi & 0 & -\sin \psi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \psi & 0 & \cos \psi \end{pmatrix}.$$

Заметим, что эти матрицы не коммутируют между собой:

$$R_x(\varphi)R_z(\theta) \neq R_z(\theta)R_x(\varphi), \quad (2.30)$$

т. е. группа вращений $O(3)$ является *неабелевой* группой. Это группа Ли, т. е. непрерывная группа с бесконечным числом элементов, поскольку значения параметров вращения, а именно углов, образуют континуум. Легко видеть, что произвольное вращение задается тремя параметрами: матрица R имеет девять элементов, а соотношение (2.26) накладывает на них шесть условий. В качестве этих параметров можно выбрать, например, три угла Эйлера. Трём параметрам отвечают три *генератора*, определяемые так:

$$J_z = \frac{1}{i} \left. \frac{dR_z(\theta)}{d\theta} \right|_{\theta=0} = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$J_x = \frac{1}{i} \left. \frac{dR_x(\varphi)}{d\varphi} \right|_{\varphi=0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.31)$$

$$J_y = \frac{1}{i} \left. \frac{dR_y(\psi)}{d\psi} \right|_{\psi=0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Эти генераторы эрмитовы, а инфинитезимальные вращения задаются, например, соотношениями

$$R_z(\delta\theta) = 1 + iJ_z\delta\theta, \quad R_x(\delta\varphi) = 1 + iJ_x\delta\varphi. \quad (2.32)$$

Коммутатор $R_z(\delta\theta)R_x(\delta\varphi)R_z^{-1}(\delta\theta)\delta R_x^{-1}(\delta\varphi)$ этих двух вращений [ср. с (2.30)] может быть вычислен с помощью легко проверяемых коммутационных соотношений

$$J_x J_y - J_y J_x \equiv [J_x, J_y] = iJ_z + \text{циклические перестановки}. \quad (2.33)$$

В первом порядке данный коммутатор сводится к вращению вокруг оси z . В соотношениях (2.33), содержащих множитель \hbar , можно узнать соотношение коммутации для компонент углового момента. Таким образом, операторы углового момента являются генераторами вращений.

Матрицы вращения на конечный угол теперь можно выписать непосредственно. Матрица, отвечающая вращению вокруг оси z на угол $\theta = N\delta\theta$ ($N \rightarrow \infty$), очевидно, равна

$$R_z(\theta) = [R_z(\delta\theta)]^N = (1 + iJ_z \delta\theta)^N = \left(1 + iJ_z \frac{\theta}{N}\right)^N = e^{iJ_z \theta}. \quad (2.34)$$

Как нетрудно убедиться, это дает требуемую матрицу (2.28). Определяя экспоненту как соответствующий степенной ряд, мы будем иметь

$$\begin{aligned} e^{iJ_z \theta} &= 1 + iJ_z \theta - J_z^2 \frac{\theta^2}{2!} - iJ_z^3 \frac{\theta^3}{3!} + \dots = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \theta \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{\theta^2}{2!} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \\ &+ \frac{\theta^3}{3!} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \dots = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

т. е. матрицу (2.28). Конечное вращение вокруг оси n на угол θ обозначается так:

$$R_n(\theta) = e^{iJ \cdot n \theta} = e^{iJ \cdot n \theta}, \quad (2.35)$$

где $\theta = n\theta$. Мы уже достаточно много знаем о группе вращений. Теперь рассмотрим группу $SU(2)$, состоящую из унитарных 2×2 -матриц с единичным детерминантом

$$UU^* = 1, \quad \det U = 1. \quad (2.36)$$

Если положить

$$U = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad (2.37)$$

то условие унитарности запишется в виде $U^* = U^{-1}$ или, с учетом того что $\det U = 1$, в виде

$$\begin{pmatrix} a^* & c^* \\ b^* & d^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

и, следовательно, $a^* = d$, $b^* = -c$. Тогда $U = |a|^2 + |b|^2$, так что мы имеем

$$U = \begin{pmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{pmatrix}, \quad |a|^2 + |b|^2 = 1. \quad (2.38)$$

Матрица U рассматривается как матрица преобразования в двумерном комплексном пространстве с базисным спинором $\xi = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}$:

$$\xi \rightarrow U\xi, \quad \xi^* \rightarrow \xi^* U^*. \quad (2.39)$$

Очевидно, что выражение

$$\xi \xi^* = |\xi_1|^2 + |\xi_2|^2$$

инвариантно относительно преобразования (2.39). В то же время для внешнего произведения имеем

$$\xi \xi^* \rightarrow \begin{pmatrix} |\xi_1|^2 & \xi_1 \xi_2^* \\ \xi_2 \xi_1^* & |\xi_2|^2 \end{pmatrix} \rightarrow U \xi \xi^* U^*. \quad (2.40)$$

Заметим, что $\xi \xi^*$ — эрмитова матрица.

Из соотношений (2.39) явствует, что спиноры ξ и ξ^* преобразуются по-разному; однако на основании условия унитарности матрицы U мы можем показать, что матрицы $\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} -\xi_2^* \\ \xi_1^* \end{pmatrix}$ преобразуются одинаково по отношению к группе $SU(2)$. Сравнивая соотношения (2.38) и (2.39), получаем

$$\xi_1' = a\xi_1 + b\xi_2, \quad (2.41)$$

$$\xi_2' = -b^*\xi_1 + a^*\xi_2,$$

и, следовательно,

$$-\xi_2^{*\prime} = a(-\xi_2^*) + b\xi_1^*, \quad (2.42)$$

$$\xi_1^{*\prime} = -b^*(-\xi_2^*) + a^*\xi_1^*.$$

Заметим, что справедливо равенство

$$\begin{pmatrix} -\xi_2^* \\ \xi_1^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1^* \\ \xi_2^* \end{pmatrix} = \zeta \xi^*, \quad (2.43)$$

где

$$\zeta = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.44)$$

Таким образом, мы показали, что величины ξ и $\zeta\xi^*$ преобразуются одинаково по отношению к группе $SU(2)$. Символически это записывается так:

$$\xi \sim \zeta\xi^* \quad (2.45)$$

(тильда « \sim » означает здесь «преобразуется как»). Следовательно,

$$\xi^+ \sim (\zeta\xi)^T = (-\xi_2, \xi_1), \quad (2.46)$$

$$\xi\xi^+ \sim \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\xi_2 & \xi_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\xi_1\xi_2 & \xi_1^2 \\ -\xi_2^2 & \xi_1\xi_2 \end{pmatrix}. \quad (2.47)$$

Обозначим эту матрицу через $-H$. Из формулы (2.40) явствует, что при преобразованиях группы $SU(2)$ мы имеем

$$H \rightarrow UHU^+, \quad (2.48)$$

кроме того, матрица H имеет нулевой след.

Теперь мы можем построить из вектора положения \mathbf{r} бесследовую 2×2 -матрицу, преобразующуюся относительно группы $SU(2)$ подобно матрице H . Она имеет вид

$$h = \sigma \cdot \mathbf{r} = \begin{pmatrix} z & x - iy \\ x + iy & -z \end{pmatrix}, \quad (2.49)$$

где σ — известные нам матрицы Паули:

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; \quad (2.50)$$

матрица h — эрмитова, а преобразование

$$h \rightarrow U h U^+ = h' \quad (2.51)$$

сохраняет эрмитовость и равенство нулю следа матрицы h , если матрица U унитарна. Кроме того, если матрица U принадлежит группе $SU(2)$ и потому имеет детерминант, равный 1, то $\det h' = \det h$, или

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = x^2 + y^2 + z^2. \quad (2.52)$$

Иными словами, унитарное преобразование (2.51) матрицы h индуцирует вращение вектора положения \mathbf{r} . Отождествляя H и h , мы окончательно заключаем, что

$SU(2)$ -преобразование над спинором $\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} \equiv O(3)$ -преобразование

над вектором $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, где

$$x = \frac{1}{2} (\xi_2^2 - \xi_1^2), \quad y = \frac{1}{2i} (\xi_1^2 + \xi_2^2), \quad z = \xi_1 \xi_2. \quad (2.53)$$

Параметры $SU(2)$ -преобразования $|a|$ и $|b|$ — это комплексные числа, удовлетворяющие единственному условию: $|a|^2 + |b|^2 = 1$. Таким образом, имеются три действительных параметра, т. е. столько же, сколько и в случае вращений. Найдем явную связь между двумя этими наборами параметров. Возводя в квадрат соотношения (2.41) и образуя их произведение, а также используя полученные выше выражения для x , y и z [формула (2.53)], мы получаем для преобразований группы $SU(2)$

$$\begin{aligned} x' &= \frac{1}{2} (a^2 + a^{*2} - b^2 - b^{*2}) x - \frac{i}{2} (a^2 - a^{*2} + b^2 - b^{*2}) y - \\ &\quad - (a^* b^* + ab) z, \\ y' &= \frac{i}{2} (a^2 - a^{*2} - b^2 + b^{*2}) x + \frac{1}{2} (a^2 + a^{*2} + b^2 + b^{*2}) y - \\ &\quad - i(ab - a^* b^*) z, \end{aligned} \quad (2.54)$$

$$z' = (ab^* + ba^*) x + (ba^* - ab^*) iy + (|a|^2 - |b|^2) z.$$

Положим теперь $a = e^{i\alpha/2}$, $b = 0$ (эти значения параметров удовлетворяют условию $|a|^2 + |b|^2 = 1$). Соотношения (2.54) дают

$$\begin{aligned} x' &= x \cos \alpha + y \sin \alpha, \\ y' &= -x \sin \alpha + y \cos \alpha, \\ z' &= z, \end{aligned}$$

т. е. вращение вокруг оси z на угол α [формула (2.27)]. Таким образом, мы имеем следующее соответствие между $SU(2)$ -матрицей (2.38) и $O(3)$ -матрицей (2.28):

$$U = \begin{pmatrix} e^{i\alpha/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\alpha/2} \end{pmatrix} \leftrightarrow R = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.55)$$

Пользуясь генераторами J_z [формула (2.31)] и σ_z [формула (2.50)], мы можем написать

$$U = e^{i\alpha J_z/2}, \quad R = e^{i\alpha \sigma_z}, \quad (2.56)$$

где, как обычно, экспоненциальное выражение для U определяется разложением в степенной ряд.

Аналогично, полагая $a = \cos(\beta/2)$, $b = \sin(\beta/2)$, мы имеем соответствие

$$U = \begin{pmatrix} \cos(\beta/2) & \sin(\beta/2) \\ -\sin(\beta/2) & \cos(\beta/2) \end{pmatrix} \leftrightarrow R = \begin{pmatrix} \cos \beta & 0 & -\sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \beta & 0 & \cos \beta \end{pmatrix}, \quad (2.57)$$

которое можно записать в виде

$$U = e^{i\sigma_y \beta/2}, \quad R = e^{iJ_y \beta}, \quad (2.58)$$

и, наконец, полагая $a = \cos(\gamma/2)$, $b = i \sin(\gamma/2)$, получаем

$$U = \begin{pmatrix} \cos(\gamma/2) & i \sin(\gamma/2) \\ i \sin(\gamma/2) & \cos(\gamma/2) \end{pmatrix} \leftrightarrow R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \gamma & \sin \gamma \\ 0 & -\sin \gamma & \cos \gamma \end{pmatrix} \quad (2.59)$$

или

$$U = e^{i\sigma_x \gamma/2}, \quad R = e^{iJ_x \gamma}. \quad (2.60)$$

Следовательно, в общем случае соответствие между $SU(2)$ -преобразованием в спинорном пространстве $\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}$ и $O(3)$ -преобразованием в

пространстве $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ имеет вид

$$U = e^{i\sigma \cdot n \theta/2} = \cos(\theta/2) + i\sigma \cdot n \sin(\theta/2) \leftrightarrow R = e^{iJ \cdot n \theta}. \quad (2.61)$$

Данное соответствие между группами $SU(2)$ и $O(3)$ означает, что эти группы должны иметь аналогичную структуру и, следовательно, их генераторы должны удовлетворять одинаковым соотношениям коммутации. Действительно, как нетрудно убедиться, матрицы Паули удовлетворяют соотношениям

$$\left[\frac{\sigma_x}{2}, \frac{\sigma_y}{2} \right] = i \frac{\sigma_z}{2} + \text{циклические перестановки}. \quad (2.62)$$

Это те же самые соотношения, что и соотношения (2.33) для операторов J . Мы видим также, что множители $1/2$, входящие в соотношения (2.62), — это те же множители, которые входят в соотношение (2.61). Они указывают на то, что спинор поворачивается на половину того угла, на который поворачивается вектор. В этом причина глобального топологического различия между группами $SU(2)$ и $O(3)$, которое проявляется в том, что, как можно видеть из соотношений (2.55) — (2.61), при увеличении угла α , например, на 2π мы имеем $U \rightarrow -U$, $R \rightarrow R$. Таким образом, два элемента U и $-U$ группы $SU(2)$ соответствуют одному вращению R группы $O(3)$. Имеет место 2-в-1-отображение элементов группы $SU(2)$ в элементы группы $O(3)$. В частности,

$$\begin{array}{ccc} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \searrow & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \nearrow & \end{array}$$

$SU(2)$ $O(3)$

$SL(2, C)$ и группа Лоренца

Аналогично соответствию между группой $SU(2)$ и группой вращений существует соответствие между группой $SL(2, C)$ и группой Лоренца, которое мы сейчас рассмотрим. Далее мы используем это соответствие для вывода уравнения Дирака.

Чистые преобразования Лоренца («бусты») — это преобразования, которые связывают две инерциальные системы отсчета, движущиеся с относительной скоростью v . Если относительное движение происходит вдоль общей оси x , то мы имеем следующие соотношения:

$$x' = \frac{x + vt}{(1 - v^2/c^2)^{1/2}}, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = \frac{t + vx/c^2}{(1 - v^2/c^2)^{1/2}}.$$

Полагая $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$, $\beta = v/c$, $x^0 = ct$, $x^1 = x$ и т. д., эти соотношения можно записать в виде

$$x^{0'} = \gamma(x^0 + \beta x^1), \quad x^{1'} = \gamma(\beta x^0 + x^1), \quad x^{2'} = x^2, \quad x^{3'} = x^3.$$

Учитывая, что $\gamma^2 - \beta^2 \gamma^2 = 1$, мы можем положить

$$\gamma = \text{ch } \varphi, \quad \gamma\beta = \text{sh } \varphi, \quad (2.63)$$

параметризуя тем самым преобразование с использованием переменной φ , такой, что $\text{th } \varphi = v/c$. Имеем

$$\begin{pmatrix} x^{0'} \\ x^{1'} \\ x^{2'} \\ x^{3'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{ch } \varphi & \text{sh } \varphi & 0 & 0 \\ \text{sh } \varphi & \text{ch } \varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}. \quad (2.64)$$

Будем называть эту матрицу матрицей буста и обозначим ее через B . Генератор K_x преобразования буста вдоль оси x определяется по аналогии с (2.31):

$$K_x = \frac{1}{i} \frac{\partial B}{\partial \varphi} \Big|_{\varphi=0} = -i \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.65)$$

Другие генераторы буста имеют аналогичный вид:

$$K_y = -i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad K_z = -i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.66)$$

В этих 4×4 -матричных обозначениях генераторы вращений (2.31) записываются в виде

$$J_x = -i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_y = -i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$J_z = -i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.67)$$

Преобразование Лоренца самого общего вида состоит из бустов в трех направлениях и вращений вокруг трех осей, которым отвечают генераторы, приведенные выше. Их коммутаторы можно вычислить непосредственно, что дает

$$\begin{aligned} [K_x, K_y] &= -iJ_z + \text{циклические перестановки}, \\ [J_x, K_x] &= 0 \text{ и т. д.}, \\ [J_x, K_y] &= iK_z + \text{циклические перестановки}, \end{aligned} \quad (2.68)$$

а также соотношения (2.33), в которые входят только операторы J . Интересным следствием, вытекающим из этих соотношений, является то, что *чистые преобразования Лоренца не образуют группу*, так как генераторы K не образуют замкнутую алгебру относительно коммутаций. Так, коммутатор двух инфинитезимальных бустов в различных направлениях

$$e^{iK_x \delta\varphi} e^{iK_y \delta\psi} e^{-iK_x \delta\psi} e^{-iK_y \delta\varphi} = 1 - [K_x, K_y] \delta\varphi \delta\psi + K_x^2 (\delta\varphi)^2 K_y^2 (\delta\psi)^2 + \dots$$

в силу соотношений (2.68) содержит *вращение* вокруг оси z . В этом причина томасовской прецессии [4].

Как преобразуются спиноры Паули при преобразованиях Лоренца? Мы можем угадать вид этих преобразований, учитывая, что операторы

$$K = \pm i \frac{\sigma}{2} \quad (2.69)$$

удовлетворяют приведенным выше коммутационным соотношениям, и поэтому существуют два типа спиноров, соответствующих двум знакам в формуле (2.69). Это будет понятнее, если проанализировать природу группы Лоренца с шестью генераторами J и K . Определим генераторы

$$A = \frac{1}{2} (J + iK), \quad (2.70)$$

$$B = \frac{1}{2} (J - iK).$$

Соотношения коммутации (2.68) и (2.33) приобретают вид

$$\begin{aligned} [A_x, A_y] &= iA_z + \text{циклические перестановки}, \\ [B_x, B_y] &= iB_z + \text{циклические перестановки}, \\ [A_i, B_j] &= 0 \quad (i, j = x, y, z). \end{aligned} \quad (2.71)$$

Это означает, что каждый из наборов генераторов A и B генерирует группу $SU(2)$ и эти две группы коммутируют между собой. Группа Лоренца по существу неотличима от группы $SU(2) \otimes SU(2)$, и состояния, преобразующиеся определенным образом, должны нумероваться значениями двух угловых моментов (j, j') , первый из которых соответствует генератору A , а второй — генератору B . В частном случае один из этих моментов может быть равен нулю:

$$(j, 0) \rightarrow J^{(j)} = iK^{(j)} \quad (B = 0), \quad (2.72)$$

$$(0, j) \rightarrow J^{(j)} = -iK^{(j)} \quad (A = 0),$$

и это фактически соответствует двум возможностям в формуле (2.69). Мы можем теперь определить два типа спиноров.

$$\text{Тип I: } \left(\frac{1}{2}, 0\right): J^{(1/2)} = \frac{\sigma}{2}, \quad K = -i \frac{\sigma}{2}.$$

Обозначим этот спинор через ξ . Если (θ, φ) — параметры вращения и чисто лоренцевы преобразования, то ξ преобразуется так:

$$\xi \rightarrow \exp\left(i \frac{\sigma}{2} \cdot \theta + \frac{\sigma}{2} \cdot \varphi\right) \xi = \exp\left[i \frac{\sigma}{2} \cdot (\theta - i\varphi)\right] \xi \equiv M\xi. \quad (2.73)$$

$$\text{Тип II: } \left(0, \frac{1}{2}\right): J^{(1/2)} = \frac{\sigma}{2}, \quad K^{(1/2)} = i \frac{\sigma}{2}.$$

Этот спинор обозначается через η и преобразуется так:

$$\eta \rightarrow \exp \left[i \frac{\sigma}{2} \cdot (\theta + i\varphi) \right] \eta \equiv N\eta. \quad (2.74)$$

Важно то обстоятельство, что это *неэквивалентные* представления группы Лоренца, т. е. не существует матрицы S , такой, что $N = SMS^{-1}$. В действительности они связаны соотношением

$$N = \zeta M^* \zeta^{-1}, \quad (2.75)$$

где $\zeta = -i\sigma_2$, что совпадает с данным выше определением (2.44). Соотношение (2.75) легко получить, заметив, что

$$\sigma_2 \sigma^* \sigma_2 = -\sigma_2^2 \sigma = -\sigma.$$

Имеем

$$\zeta M^* \zeta^{-1} = \sigma_2 \exp \left[-\frac{i}{2} \sigma^* \cdot (\theta + i\varphi) \right] \sigma_2 = \sigma_2^2 \exp \left[\frac{i}{2} \sigma \cdot (\theta + i\varphi) \right] = N.$$

Заметим, что $\det M = \det N = 1$, так что M и N — комплексные 2×2 -матрицы с единичным детерминантом. Такие матрицы образуют группу $SL(2, C)$. Эта группа шестипараметрическая, так как матрицы, образующие ее, имеют вид

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad ad - bc = 1,$$

т. е. содержат четыре комплексных числа, на которые наложены два условия. Эти шесть параметров связаны с тремя углами и тремя скоростями, от которых зависит произвольное преобразование Лоренца. Подытожим то, что мы установили. Помимо 3-векторов существуют 2-компонентные спиноры Паули, которые преобразуются определенным образом [формула (2.61)] при вращениях. Однако по отношению к произвольным преобразованиям Лоренца 2-компонентные спиноры разделяются на два *различных* типа, преобразующиеся по формулам (2.73) и (2.74). В более старой литературе [1—4] они назывались спинорами с точкой и спинорами без точки. Они соответствуют представлениям $(1/2, 0)$ и $(0, 1/2)$ группы Лоренца. Уравнение Дирака по существу представляет собой соотношение между этими спинорами.

Введем операцию пространственного отражения, при которой скорость, входящая в лоренцев буст, меняет знак: $v \rightarrow -v$. При этом генераторы K меняют знак: $K \rightarrow -K$ подобно компонентам вектора, а генератор J не меняет знака: $J \rightarrow +J$, таким образом, он ведет себя как *аксиальный вектор или псевдовектор*, т. е. так, как должен вести себя вектор углового момента при преобразованиях пространственного отражения. Отсюда следует, что представления $(j, 0)$ и $(0, j)$ меняются местами:

$(j, 0) \leftrightarrow (0, j)$ при преобразованиях пространственного отражения, (2.76)

и, стало быть,

$$\xi \leftrightarrow \eta.$$

Коль скоро мы ввели операцию пространственного отражения, то уже недостаточно рассматривать 2-спиноры ξ и η по отдельности, а следует рассматривать 4-спинор

$$\psi = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}. \quad (2.77)$$

При преобразованиях Лоренца 4-спинор ψ преобразуется следующим образом:

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} e^{\frac{i}{2} \sigma \cdot (\theta - i\varphi)} & 0 \\ 0 & e^{\frac{i}{2} \sigma \cdot (\theta + i\varphi)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D(\Lambda) & 0 \\ 0 & \bar{D}(\Lambda) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}, \quad (2.78)$$

где

$$\bar{D}(\Lambda) = \zeta D^*(\Lambda) \zeta^{-1}, \quad (2.79)$$

а через Λ обозначено преобразование Лоренца (2.64), которое мы можем записать в виде

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu}. \quad (2.80)$$

При пространственном отражении величина ψ преобразуется следующим образом:

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}. \quad (2.81)$$

Четыре-спинор ψ есть *неприводимое* представление группы Лоренца, *расширенной по пространственным отражениям*. Заметим, однако, что представление (2.78) *неунитарно*. Это связано с тем, что неунитарна матрица $\exp(\sigma \cdot \varphi)$. Вообще говоря, в квантовой механике интересуются только *унитарными* представлениями групп симметрии [8], поскольку только для них вероятность перехода между двумя состояниями не зависит от того, в какой системе отсчета производятся измерения. Следовательно, мы пришли к результату, неудовлетворительному с фундаментальной точки зрения. Это связано с тем, что группа Лоренца в отличие от группы вращений является *некомпактной*. Грубо говоря, дело в том, что скорости, являющиеся параметрами лоренцевых бустов, принимают значения на открытом промежутке от $v/c = 0$ до $v/c = 1$, тогда как углы вращения изменяются от $\theta = 0$ до $\theta = 2\pi$ и эти крайние

точки отождествляются, так что линия замыкается в окружность. Групповое пространство группы вращений конечно, а групповое пространство группы Лоренца бесконечно, так что группа Лоренца некомпактна. Кроме того, справедлива теорема о том, что унитарные представления некомпактных групп бесконечномерны. То, что мы видели выше, является отрицательным примером, иллюстрирующим эту теорему: конечномерное и неунитарное представление группы Лоренца. В действительности Вигнер уже много лет назад указал на то, что фундаментальной группой для физики частиц является не (однородная) группа Лоренца, рассмотренная выше, а *неоднородная* группа Лоренца, которую обычно называют *группой Пуанкаре*. Она состоит из лоренцевых бустов и вращений, а также трансляций в пространстве и во времени. Анализ этой группы приводит к правильному пониманию природы спина, а также неожиданным образом углубляет наше представление о ней. Ниже мы рассмотрим группу Пуанкаре более подробно.

Теперь рассмотрим преобразование (2.78) для случая лоренцева буста ($\theta = 0$) и одновременно введем новые обозначения для 2-спиноров ξ и η :

$$\xi \rightarrow \varphi_R, \quad \eta \rightarrow \varphi_L, \quad (2.82)$$

где индексы R и L означают «левый» и «правый». Имеем

$$\varphi_R \rightarrow e^{\frac{1}{2}\sigma \cdot \varphi} \varphi_R = \left[\text{ch} \left(\frac{\varphi}{2} \right) + \sigma \cdot \mathbf{n} \text{sh} \left(\frac{\varphi}{2} \right) \right] \varphi_R, \quad (2.83)$$

где \mathbf{n} — единичный вектор в направлении лоренцева буста. Предположим, что исходный спинор относится к частице в состоянии покоя, т. е. это $\varphi_R(0)$, а преобразованный спинор — к частице с импульсом \mathbf{p} , т. е. это $\varphi_R(\mathbf{p})$. Из (2.63) имеем $\text{ch}(\varphi/2) = [(\gamma + 1)/2]^{1/2}$, $\text{sh}(\varphi/2) = [(\gamma - 1)/2]^{1/2}$, так что (2.83) приобретает вид

$$\varphi_R(\mathbf{p}) = \left[\left(\frac{\gamma + 1}{2} \right)^{1/2} + \sigma \cdot \mathbf{p} \left(\frac{\gamma - 1}{2} \right)^{1/2} \right] \varphi_R(0). \quad (2.84)$$

Поскольку для частицы с (полной) энергией E , массой m и импульсом \mathbf{p} мы имеем $\gamma = E/m$ ($c = 1$), выражение (2.84) записывается в виде

$$\varphi_R(\mathbf{p}) = \frac{E + m + \sigma \cdot \mathbf{p}}{[2m(E + m)]^{1/2}} \varphi_R(0). \quad (2.85)$$

Аналогичным образом находим

$$\varphi_L(\mathbf{p}) = \frac{E + m - \sigma \cdot \mathbf{p}}{[2m(E + m)]^{1/2}} \varphi_L(0). \quad (2.86)$$

Когда частица находится в состоянии покоя, то невозможно определить, является ее спин левым или правым, и, следовательно, $\varphi_R(0) = \varphi_L(0)$. Далее, из (2.85) и (2.86) следует, что

$$\varphi_R(\mathbf{p}) = \frac{E + \sigma \cdot \mathbf{p}}{m} \varphi_L(\mathbf{p}), \quad (2.87)$$

и, значит,

$$\varphi_L(\mathbf{p}) = \frac{E - \sigma \cdot \mathbf{p}}{m} \varphi_R(\mathbf{p}). \quad (2.88)$$

Мы можем переписать эти уравнения в виде

$$-m\varphi_R(\mathbf{p}) + (\rho_0 + \sigma \cdot \mathbf{p}) \varphi_L(\mathbf{p}) = 0, \quad (2.89)$$

$$(\rho_0 - \sigma \cdot \mathbf{p}) \varphi_R(\mathbf{p}) - m\varphi_L(\mathbf{p}) = 0,$$

или в матричной форме:

$$\begin{pmatrix} -m & \rho_0 + \sigma \cdot \mathbf{p} \\ \rho_0 - \sigma \cdot \mathbf{p} & -m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_R(\mathbf{p}) \\ \varphi_L(\mathbf{p}) \end{pmatrix} = 0. \quad (2.90)$$

Вводя 4-спинор

$$\psi(\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} \varphi_R(\mathbf{p}) \\ \varphi_L(\mathbf{p}) \end{pmatrix} \quad (2.91)$$

и 4×4 -матрицы

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma^i \\ \sigma^i & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.92)$$

перепишем уравнение (2.90) в виде

$$(\gamma^\mu p_\mu + m)\psi(\mathbf{p}) = 0 \quad (2.93)$$

[заметим, что $p_\mu = (E, -\mathbf{p})$ в силу формулы (2.11) и поэтому $\gamma^0 p_0 + \gamma^i p_i = \gamma^0 p_0 - \boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{p}$]

или

$$\blacksquare (\gamma^\mu p_\mu - m)\psi(\mathbf{p}) = 0. \quad (2.94)$$

Это — уравнение Дирака для массивных частиц со спином $1/2$. В случае безмассовых частиц очевидно, например, из (2.89), что уравнение (2.94) распадается на два уравнения, каждое для одного 2-компонентного спинора:

$$\begin{aligned} (\rho_0 + \sigma \cdot \mathbf{p}) \varphi_L(\mathbf{p}) &= 0, \\ (\rho_0 - \sigma \cdot \mathbf{p}) \varphi_R(\mathbf{p}) &= 0. \end{aligned} \quad (2.95)$$

Эти уравнения называются *уравнениями Вейля*, а φ_L и φ_R — спинорами Вейля. Поскольку для безмассовой частицы $p_0 = |\mathbf{p}|$, для нее эти уравнения запишутся в виде

$$\sigma \cdot \hat{\mathbf{p}} \varphi_L = -\varphi_L, \quad \sigma \cdot \hat{\mathbf{p}} \varphi_R = \varphi_R.$$

Оператор $\sigma \cdot \hat{\mathbf{p}}$ соответствует проекции спина на направление импульса. Эта величина называется *спиральностью*. Таким образом, спиноры Вейля являются собственными состояниями оператора спиральности, причем левые спиноры имеют отрицательную, а правые — положительную спиральность.

Ранее всегда считалось, что нейтрино являются безмассовыми частицами и, следовательно, описываются одним из уравнений Вейля. Но в последнее время высказываются предположения, что нейтрино обладают массой¹⁾. Пока вопрос остается открытым.

Вывод уравнения Дирака, представленный выше, отличается от вывода, данного самим Дираком. Цель Дирака состояла в том, чтобы найти уравнение, свободное от указанных выше трудностей, присущих уравнению Клейна — Гордона. Вернемся к этим проблемам.

§ 2.4. Предсказание античастиц

Мы уже видели, что уравнение Клейна — Гордона страдает двумя недостатками: плотность вероятности не является положительно определенной и существуют состояния с отрицательной энергией. По этим причинам уравнение Клейна — Гордона было отброшено, и Дирак искал вместо него уравнение, которое было бы уравнением *первого порядка*. В те дни в этом видели очень желательное преимущество. Он нашел уравнение (2.94) и установил, что матрицы γ^μ должны быть 4×4 -матрицами. Полезно воспроизвести его рассуждения. Запишем сперва уравнение Дирака в координатном пространстве. Подстановка $i\partial_\mu$ вместо p_μ в (2.94) дает

$$\blacksquare (i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi = 0. \quad (2.96)$$

Это — дифференциальное уравнение первого порядка. Действуя на него оператором $i\gamma^\mu \partial_\mu$, получаем

$$[-(\gamma^\mu \partial_\mu)(\gamma^\nu \partial_\nu) - i(\gamma^\mu \partial_\mu)m]\psi = 0,$$

$$(\gamma^\mu \gamma^\nu \partial_\mu \partial_\nu + m^2)\psi = 0.$$

Поскольку $\partial_\mu \partial_\nu = \partial_\nu \partial_\mu$, произведение матриц $\gamma^\mu \gamma^\nu$ можно заменить их симметричной комбинацией

¹⁾ Краткий обзор по данному вопросу можно найти в статье *Marcino W. J. Comments on Nuclear and Particle Physics*, 9, 169 (1981).

$$\frac{1}{2} (\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu) \equiv \frac{1}{2} \{\gamma^\mu, \gamma^\nu\}, \quad (2.97)$$

что дает

$$\frac{1}{2} \{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} \partial_\mu \partial_\nu \psi + m^2 \psi = 0.$$

В то же время, чтобы выполнялось вытекающее из теории относительности соотношение энергия — импульс — масса, каждая из компонент ψ должна удовлетворять уравнению Клейна — Гордона

$$(\square + m^2)\psi(x) = 0. \quad (2.98)$$

Отсюда следует, что коэффициенты при $\partial_\mu \partial_\nu$ должны равняться $g^{\mu\nu}$ и, стало быть,

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}. \quad (2.99)$$

Это общее соотношение, которому должны удовлетворять коэффициенты γ^μ . Выбирая последовательно значения $\mu = \nu = 0$, $\mu = \nu = i$ и $\mu \neq \nu$, получаем

$$(\gamma^0)^2 = 1, \quad (\gamma^i)^2 = -1, \quad \gamma^\mu \gamma^\nu = -\gamma^\nu \gamma^\mu \quad (\nu \neq \mu). \quad (2.100)$$

Как нетрудно убедиться, матрицы (2.92) удовлетворяют этим соотношениям. [Читатель может в качестве упражнения доказать, что не существует 2×2 -матриц, удовлетворяющих соотношениям (2.100).] Очевидно также, что если четыре матрицы γ^μ удовлетворяют соотношениям (2.99), то матрицы

$$\gamma'^\mu = S\gamma^\mu S^{-1}, \quad (2.101)$$

где S — унитарная 4×4 -матрица, тоже удовлетворяют этим соотношениям. При этом решением уравнения Дирака является величина

$$\psi' = S\psi. \quad (2.102)$$

Построим теперь ток вероятности j^μ , аналогичный току (2.21) для уравнения Клейна — Гордона, и посмотрим, будет ли плотность вероятности положительной. Запишем уравнение Дирака в виде (2.96):

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi = 0,$$

где $\gamma^\mu \partial_\mu = \gamma^0 \partial_0 + \gamma^i \partial_i$. Возьмем уравнение, эрмитово-сопряженное данному, и заметим, что из (2.92) или (2.100) следуют равенства

$$\gamma^{0\dagger} = \gamma^0, \quad \gamma^{i\dagger} = -\gamma^i. \quad \text{Это дает}$$

$$\psi^\dagger (-i\overleftarrow{\gamma}^0 \partial_0 + i\overleftarrow{\gamma}^i \partial_i - m) = 0.$$

(Здесь ψ^\dagger — вектор-строка, а операторы $\bar{\partial}_0$ и $\bar{\partial}_i$ действуют на него влево.) Такое выражение выглядит не очень привлекательно, поэтому мы умножим его справа на γ^0 и воспользуемся соотношением $\gamma^i \gamma^0 = -\gamma^0 \gamma^i$, входящим в число соотношений (2.100); получим

$$\bar{\psi} (i\gamma^\mu \bar{\partial}_\mu + m) = 0, \quad (2.103)$$

где

$$\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0 \quad (2.104)$$

есть величина, называемая *присоединенным*¹⁾ спинором по отношению к ψ . Теперь на основании уравнений (2.96) и (2.103) мы можем показать, что ток

$$j_\mu = \bar{\psi} \gamma^\mu \psi \quad (2.105)$$

сохраняется:

$$\partial_\mu j^\mu = (\partial_\mu \bar{\psi}) \gamma^\mu \psi + \bar{\psi} \gamma^\mu (\partial_\mu \psi) = (i\bar{m}\bar{\psi}) \psi + \bar{\psi} (-im\psi) = 0. \quad (2.106)$$

Плотность j^0 имеет вид

$$j^0 = \bar{\psi} \gamma^0 \psi = \psi^\dagger \psi = |\psi_1|^2 + |\psi_2|^2 + |\psi_3|^2 + |\psi_4|^2$$

и является *положительной*. Таким образом, величина j^0 может служить плотностью вероятности для рассматриваемой частицы и уравнение Дирака преодолело тот барьер, который для уравнения Клейна — Гордона оказался непреодолимым.

Перейдем теперь к другой трудности, с которой сталкивается уравнение Клейна — Гордона, а именно к проблеме состояний с отрицательными энергиями. Здесь мы, по-видимому, не столь удачливы. Действительно, из (2.94) легко видеть, что дираковская частица в состоянии покоя удовлетворяет уравнениям

$$\gamma^0 p_0 \psi = m\psi, \quad (2.107)$$

$$p_0 \psi = m\gamma^0 \psi.$$

Собственные значения матрицы γ^0 , очевидно, равны $+1$ (дважды) и -1 (дважды), так что имеются два решения с положительной энергией ($+m$) и два решения с отрицательной энергией ($-m$). В действительности, как нетрудно показать, выписав все четыре компоненты уравнения (2.94), собственные значения оператора E таковы:

¹⁾ Чаще величину $\bar{\psi}$ называют сопряженным или дираковски-сопряженным спинором. — Прим. ред.

$$E = + (m^2 + p^2)^{1/2} \quad \text{дважды,}$$

$$E = - (m^2 + p^2)^{1/2} \quad \text{дважды.}$$

При каждом значении p имеются два решения с положительной энергией, соответствующие состояниям частицы со спином $1/2$, и два дополнительных решения с отрицательной энергией. Эту потенциальную катастрофу Дирак обратил в триумф.

Энергетический спектр решений представлен на рис. 2.2. С ним связана та же самая проблема, что и в случае уравнения Клейна — Гордона. Электрон, находящийся в состоянии с положительной

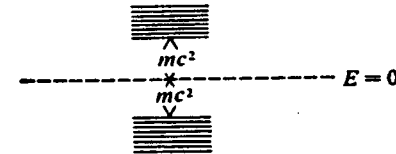


Рис. 2.2. Энергетический спектр решений уравнения Дирака.

энергией, может¹⁾ скачком перейти в состояние с отрицательной энергией и далее скатиться до значения $E = -\infty$, отдав при этом бесконечно большую энергию (скажем, в виде электромагнитного излучения). Решение этой проблемы, данное Дираком, основывается на том, что электроны обладают спином $1/2$ и вследствие этого подчиняются *принципу исключения Паули*. Дирак предположил, что все состояния с отрицательной энергией *заполнены* и принцип исключения не дает возможности ни одному электрону проникнуть в «море» состояний с отрицательной энергией.

«Море Дирака» и есть *вакуум*. Таким образом, согласно теории Дирака, вакуум — это не «ничто», а бесконечное море электронов, протонов, нейтрино, нейтронов и всех других частиц со спином $1/2$, обладающих отрицательной энергией.

Из этой остроумной теории вытекает один важный вывод. Предположим, что в море электронов имеется вакантное место — «дырка» с энергией $-|E|$. Электрон с энергией E может заполнить эту дырку, излучив энергию $2E$ и восстановив вакуум:

$$e^- + \text{дырка} \rightarrow \text{энергия}. \quad (2.108)$$

Таким образом, «дырка» эффективно обладает зарядом $+e$ и положительной энергией, ее называют *позитроном*; это — *античастица*.

¹⁾ В случае, если электрон взаимодействует с другой частицей или полем, скажем с электромагнитным полем. Уравнение Дирака, написанное выше, справедливо только для *свободных* электронов, но проблема состояний с отрицательной энергией остается и после включения взаимодействий.

тица электрона. Теория Дирака предсказывает существование античастиц для всех частиц со спином $1/2$, и в свое время были найдены e^+ , p , \bar{n} , $\bar{\nu}$ и т. д. Оказывается, что у бозонов тоже имеются античастицы, но чтобы показать это, необходимо рассматривать «волновую функцию» φ уравнения Клейна — Гордона как квантованное поле, что мы сделаем в гл. 4.

Предсказание и открытие античастиц является одним из выдающихся эпизодов в истории физики частиц, оно внушило глубокую веру в уравнение Дирака. Последнее оказалось необычайно успешным в своих предсказаниях и приложениях [11, 12], но в данной книге мы ограничимся изучением, во-первых, формальной конструкции и свойств спиноров Дирака и, во-вторых, успешного предсказания магнитного момента электрона.

Мы закончим все сказанное об античастицах замечанием, что хотя уравнение Дирака успешно решает проблему отрицательных энергий, оно уже *не является уравнением для одной частицы*, поскольку описывает как частицы, так и античастицы. Единственный последовательный подход состоит в том, чтобы рассматривать спинор ψ как *поле*, такое, что величина $|\psi|^2$ есть мера числа частиц в заданной точке. Это поле, естественно, является квантовым полем. В гл. 4 мы увидим, как при таком подходе снова достигается интерпретация теории, основанная на представлении о частицах и античастицах, равно как и правильная связь спина со статистикой.

§ 2.5. Конструкция спиноров Дирака: алгебра γ -матриц

Прежде всего выясним трансформационные свойства билинейных выражений, подобных $\bar{\psi}\psi$, $\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$ и т. д., по отношению к преобразованиям Лоренца. Начнем с выражения $\bar{\psi}\psi$ и покажем, что это скалярная величина. Будем работать в базисе (2.91):

$$\psi = \begin{pmatrix} \varphi_R \\ \varphi_L \end{pmatrix}. \quad (2.109)$$

При преобразованиях Лоренца (θ , φ) (включающих вращения) мы имеем из (2.78)

$$\varphi_R \rightarrow \exp \left[\frac{i}{2} \sigma \cdot (\theta - i\varphi) \right] \varphi_R, \quad (2.110)$$

$$\varphi_L \rightarrow \exp \left[\frac{i}{2} \sigma \cdot (\theta + i\varphi) \right] \varphi_L.$$

Следовательно,

$$\varphi_R^\dagger \rightarrow \varphi_R^\dagger \exp \left[-\frac{i}{2} \sigma \cdot (\theta + i\varphi) \right], \quad (2.111)$$

$$\varphi_L^\dagger \rightarrow \varphi_L^\dagger \exp \left[-\frac{i}{2} \sigma \cdot (\theta - i\varphi) \right].$$

Отсюда видно, что величина

$$\psi^\dagger \psi = \varphi_R^\dagger \varphi_R + \varphi_L^\dagger \varphi_L \quad (2.112)$$

не является инвариантом. Однако присоединенный спинор $\bar{\psi}$, определенный соотношением (2.104), имеет следующие компоненты:

$$\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0 = \begin{pmatrix} \varphi_R^\dagger & \varphi_L^\dagger \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_L^\dagger & \varphi_R^\dagger \end{pmatrix}, \quad (2.113)$$

и, как легко видеть, величина

$$\bar{\psi}\psi = \varphi_L^\dagger \varphi_R + \varphi_R^\dagger \varphi_L \quad (2.114)$$

инвариантна (т. е. является скаляром) относительно преобразований Лоренца. Кроме того, при пространственном отражении мы имеем

$$\varphi_R \leftrightarrow \varphi_L. \quad (2.115)$$

Следовательно, $\bar{\psi}\psi \rightarrow \bar{\psi}\psi$, и эта величина является истинным скаляром, т. е. не меняет знака при пространственном отражении.

Определим теперь 4×4 -матрицу

$$\gamma^5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (2.116)$$

(Напомним, что каждый ее элемент представляет собой 2×2 -матрицу.) Это определение γ^5 -матрицы в базисе (2.109). В произвольном базисе она определяется следующим образом:

$$\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \gamma_5. \quad (2.117)$$

Далее мы видим, что

$$\bar{\psi}\gamma^5\psi = \begin{pmatrix} \varphi_L^\dagger & \varphi_R^\dagger \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_R \\ \varphi_L \end{pmatrix} = \varphi_L^\dagger \varphi_R - \varphi_R^\dagger \varphi_L. \quad (2.118)$$

Из соотношений (2.110), (2.111) и (2.115) явствует, что последнее выражение инвариантно относительно преобразований Лоренца. Однако оно меняет знак при пространственном отражении. По этой причине его называют *псевдоскалярной* величиной.

Рассмотрим далее величину $\bar{\psi}\gamma^{\mu}\psi$, которая должна, по-видимому, преобразоваться при преобразованиях Лоренца как 4-вектор. Ее временная и пространственные компоненты таковы:

$$\bar{\psi}\gamma^0\psi = \varphi_R^{\dagger}\varphi_R + \varphi_L^{\dagger}\varphi_L, \quad (2.119)$$

$$\bar{\psi}\gamma\psi = \begin{pmatrix} \varphi_R^{\dagger} & \varphi_L^{\dagger} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -\sigma \\ \sigma & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_R \\ \varphi_L \end{pmatrix} = -\varphi_R^{\dagger}\sigma\varphi_L + \varphi_L^{\dagger}\sigma\varphi_R. \quad (2.120)$$

При пространственных вращениях ($\theta \neq 0$, $\varphi = 0$) имеем

$$\bar{\psi}\gamma^0\psi \rightarrow \bar{\psi}\gamma^0\psi. \quad (2.121)$$

Если при этом параметры θ инфинитезимальны, то

$$\begin{aligned} \bar{\psi}\gamma\psi &\rightarrow -\varphi_R^{\dagger} e^{-\frac{i}{2}\sigma\cdot\theta} \sigma e^{\frac{i}{2}\sigma\cdot\theta} \varphi_L + \varphi_L^{\dagger} e^{-\frac{i}{2}\sigma\cdot\theta} \sigma e^{\frac{i}{2}\sigma\cdot\theta} \varphi_R = \\ &= -\varphi_R^{\dagger} \left(1 - \frac{i}{2}\sigma\cdot\theta\right) \sigma \left(1 + \frac{i}{2}\sigma\cdot\theta\right) \varphi_L + \varphi_L^{\dagger} \left(1 - \frac{i}{2}\sigma\cdot\theta\right) \times \\ &\times \sigma \left(1 + \frac{i}{2}\sigma\cdot\theta\right) \varphi_R = -\varphi_R^{\dagger} (\sigma - \theta \times \sigma) \varphi_L + \varphi_L^{\dagger} (\sigma - \theta \times \sigma) \varphi_R = \\ &= \bar{\psi}\gamma\psi - \theta \times (\bar{\psi}\gamma\psi). \end{aligned} \quad (2.122)$$

[В качестве полезного упражнения читатель может проверить этот расчет, используя коммутационные соотношения (2.62), записав их в виде

$$[\sigma_i, \sigma_j] = 2i\epsilon_{ijk}\sigma_k, \quad (2.123)$$

где

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} +1, & \text{если } (ijk)\text{-четная перестановка набора } (123), \\ -1, & \text{если } (ijk)\text{-нечетная перестановка набора } (123), \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases} \quad (2.124)$$

и, полагая $\sigma\cdot\theta = \sigma_i\theta_i$ (остается в силе правило суммирования!) Соотношение (2.122) описывает поведение вектора при вращениях: в случае бесконечно малых θ соотношение (2.27) записывается в виде $V'_x = V_x + \theta V_y$, $V'_y = V_y - \theta V_x$, $V'_z = V_z$, или в векторной форме

$$V' = V - \theta \times V.$$

Кроме того, временная компонента, согласно (2.121), инвариантна относительно вращений. Таким образом, величина $\bar{\psi}\gamma^{\mu}\psi$ действительно ведет себя как 4-вектор при вращениях. Читателю предла-

гается самому показать, что она ведет себя как 4-вектор и относительно одного из лоренцевых бустов, т. е. так же, как x^{μ} в выражении (2.64), описывающем преобразование буста вдоль оси x . Кроме того, при преобразованиях пространственного отражения, как легко видеть, мы имеем

$$\bar{\psi}\gamma^0\psi \rightarrow \bar{\psi}\gamma^0\psi, \quad \bar{\psi}\gamma\psi \rightarrow -\bar{\psi}\gamma\psi, \quad (2.125)$$

что соответствует преобразованию полярного вектора. Наш итог: величина $\bar{\psi}\gamma^{\mu}\psi$ преобразуется как *вектор*. Аналогично можно показать, что величина $\bar{\psi}\gamma^{\mu}\gamma^{\nu}\psi$ ведет себя как *аксиальный вектор* (или *псевдовектор*): она преобразуется как 4-вектор при преобразованиях Лоренца (включая вращения), но противоположным образом по отношению к (2.125) при пространственном отражении, т. е. «пространственная» часть преобразуется как антисимметричный тензор ранга 2. Соответствующий симметричный тензор в силу соотношения (2.99) является инвариантом. Этим исчерпываются все возможности, поскольку в четырех измерениях тензор ранга 3 преобразуется как псевдовектор, а тензор ранга 4 — как псевдоскаляр. В трех измерениях эта редукция происходит еще быстрее: тензор ранга 2, подобный $\mathbf{r} \times \mathbf{p}$ (или $\mathbf{r} \wedge \mathbf{p}$), является аксиальным вектором, а тензор ранга 3, подобный элементу объема $dx dy dz$ (который правильнее было бы записать в виде $dx \wedge dy \wedge dz$), является псевдоскаляром¹⁾.

Подытожим наши результаты:

$\bar{\psi}\psi$	скаляр,	
$\bar{\psi}\gamma^{\mu}\psi$	псевдоскаляр,	
$\bar{\psi}\gamma^{\nu}\psi$	вектор,	
$\bar{\psi}\gamma^{\mu}\gamma^{\nu}\psi$	аксиальный вектор,	
$\bar{\psi}(\gamma^{\mu}\gamma^{\nu} - \gamma^{\nu}\gamma^{\mu})\psi$	антисимметричный тензор.	(2.126)

Построим теперь спиноры, соответствующие произвольному состоянию движения дираковской частицы. Мы сделаем это почти тем же методом, что и при выводе выражений (2.85), (2.86) и (2.91), но теперь мы будем искать явные выражения для спиноров и не будем придерживаться представлению (2.91), которое можно назвать *киральным* представлением (поскольку φ_R и φ_L являются собственными состояниями оператора киральности γ^5). Мы будем работать в так называемом стандартном представлении, в котором матрица γ^0 диагональна. Из уравнений (2.107) явствует, что данное представление удобно для описания частиц в состоянии покоя.

¹⁾ Прекрасное изложение этих вопросов см., например, в книге: *Hestens D. Space-Time Algebra*, Gordon and Breach, 1966.

Решения уравнения Дирака в форме плоских волн для частицы в состоянии покоя имеют, очевидно, вид

$$\begin{aligned} \psi(x) &= u(0)e^{-imt} \quad (\text{положительные энергии}), \\ \psi(x) &= v(0)e^{imt} \quad (\text{отрицательные энергии}), \end{aligned} \quad (2.127)$$

куда входят два спинора, отвечающие положительным, и два — отрицательным энергиям:

$$\begin{aligned} u^{(1)}(0) &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u^{(2)}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v^{(1)}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ v^{(2)}(0) &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2.128)$$

Здесь мы использовали матрицу γ^0 , записанную в стандартном представлении

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (2.129)$$

или в часто используемой компактной форме записи

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (2.130)$$

Эта матрица получается из кирального представления с помощью преобразования (2.92)

$$\gamma_{SR}^0 = S\gamma_{CR}^0 S^{-1},$$

$$S = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}. \quad (2.131)$$

Таким образом, в стандартном представлении

$$\psi = S \begin{pmatrix} \Psi_R \\ \Psi_L \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \Psi_R + \Psi_L \\ \Psi_R - \Psi_L \end{pmatrix}. \quad (2.132)$$

Для преобразования Лоренца к движущейся системе координат мы имеем из (2.78), полагая $\theta = 0$,

$$\begin{pmatrix} \Psi_R \\ \Psi_L \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \Psi'_R \\ \Psi'_L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\frac{1}{2}\varphi} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{1}{2}\varphi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi_R \\ \Psi_L \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} \Psi_R \\ \Psi_L \end{pmatrix}, \quad (2.133)$$

и, следовательно, матрица буста в стандартном представлении имеет вид

$$M_{SR} = SM_{CR}S^{-1} = \begin{pmatrix} \text{ch}(\varphi/2) & \sigma \cdot n \text{sh}(\varphi/2) \\ \sigma \cdot n \text{sh}(\varphi/2) & \text{ch}(\varphi/2) \end{pmatrix}. \quad (2.134)$$

Далее, поскольку

$$\text{ch}(\varphi/2) = \left(\frac{E+m}{2m}\right)^{1/2}, \quad \text{sh}(\varphi/2) = \left(\frac{E-m}{2m}\right)^{1/2},$$

$$\text{th}(\varphi/2) = \frac{p}{E+m},$$

где $p = (E^2 - m^2)^{1/2}$, получаем

$$M_{SR} = \left(\frac{E+m}{2m}\right)^{1/2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{p_z}{E+m} & \frac{p_x - ip_y}{E+m} \\ 0 & 1 & \frac{p_x + ip_y}{E+m} & \frac{-p_z}{E+m} \\ \frac{p_z}{E+m} & \frac{p_x - ip_y}{E+m} & 1 & 0 \\ \frac{p_x + ip_y}{E+m} & \frac{-p_z}{E+m} & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.135)$$

Соответствующие спиноры в решениях в форме плоских волн имеют вид

$$\begin{aligned} \psi^{(\alpha)}(x) &= u^{(\alpha)}(p) e^{-ip \cdot x} \quad (\text{положительные энергии}), \\ \psi^{(\alpha)}(x) &= v^{(\alpha)}(p) e^{ip \cdot x} \quad (\text{отрицательные энергии}), \end{aligned} \quad (2.136)$$

где $\alpha = 1, 2$, а $u^{(\alpha)}(p)$ и $v^{(\alpha)}(p)$ получаются действием матрицы M_{SR} на соответствующие спиноры в системе покоя [формула (2.128)], что дает

$$u^{(1)} = \left(\frac{E+m}{2m}\right)^{1/2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{p_z}{E+m} \\ \frac{p_+}{E+m} \end{pmatrix}, \quad u^{(2)} = \left(\frac{E+m}{2m}\right)^{1/2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{p_-}{E+m} \\ \frac{-p_z}{E+m} \end{pmatrix}, \quad (2.137)$$

$$v^{(1)} = \left(\frac{E+m}{2m}\right)^{1/2} \begin{pmatrix} \frac{p_z}{E+m} \\ \frac{p_+}{E+m} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v^{(2)} = \left(\frac{E+m}{2m}\right)^{(1/2)} \begin{pmatrix} \frac{p_-}{E+m} \\ -\frac{p_z}{E+m} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (2.138)$$

где $p_{\pm} = p_x \pm ip_y$. Спиноры u нормированы следующим образом:

$$\bar{u}^{(1)} u^{(1)} = \left(\frac{E+m}{2m}\right) \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{p_z}{E+m} & \frac{p_-}{E+m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{p_z}{E+m} \\ \frac{p_+}{E+m} \end{pmatrix} = 1,$$

и аналогичная формула справедлива для $u^{(2)}$. Окончательно условия нормировки для спиноров записываются в виде

$$\begin{aligned} \bar{u}^{(\alpha)}(p) u^{(\alpha')}(p) &= \delta_{\alpha\alpha'}, \\ \bar{v}^{(\alpha)}(p) v^{(\alpha')}(p) &= -\delta_{\alpha\alpha'}, \\ \bar{u}^{(\alpha)}(p) v^{(\alpha')}(p) &= 0, \\ u^{(\alpha)} + u^{(\alpha')}(p) &= v^{(\alpha)} + v^{(\alpha')}(p) = \frac{E}{m} \delta_{\alpha\alpha'}. \end{aligned} \quad (2.139)$$

Кроме того, из (2.95) и (2.136) следует, что спиноры u и v удовлетворяют уравнениям

$$\begin{aligned} (\gamma \cdot p - m)u(p) &= 0, \\ (\gamma \cdot p + m)v(p) &= 0, \end{aligned} \quad (2.140)$$

а вследствие этого сопряженные спиноры удовлетворяют уравнениям

$$\begin{aligned} \bar{u}(p)(\gamma \cdot p - m) &= 0, \\ \bar{v}(p)(\gamma \cdot p + m) &= 0. \end{aligned} \quad (2.141)$$

Во многих приложениях важную роль играет оператор

$$P_+ = \sum_{\alpha} u^{(\alpha)}(p) \bar{u}^{(\alpha)}(p). \quad (2.142)$$

Это оператор проектирования, поскольку в силу формулы (2.139),

$$P_+^2 = \sum_{\alpha, \beta} u^{(\alpha)}(p) \bar{u}^{(\alpha)}(p) u^{(\beta)}(p) \bar{u}^{(\beta)}(p) = \sum_{\alpha} u^{(\alpha)}(p) \bar{u}^{(\alpha)}(p) = P_+. \quad (2.143)$$

Очевидно, что данный оператор проектирует на состояния с положительной энергией. Найдем выражение для P_+ . В силу уравнений (2.140) справедливо соотношение

$$(\gamma \cdot p - m)P_+ = 0;$$

следовательно,

$$\frac{\gamma \cdot p}{m} P_+ = P_+. \quad (2.144)$$

Предположим теперь, что P_+ имеет вид $a + b\gamma \cdot p$. Подставив это выражение в (2.144), получим $a = mb$. Далее из соотношения $P_+^2 = P_+$ следует $b = 1/2m$, так что окончательно имеем

$$P_+ = \sum_{\alpha} u^{(\alpha)}(p) \bar{u}^{(\alpha)}(p) = \frac{\gamma \cdot p + m}{2m}. \quad (2.145)$$

Аналогично оператор проектирования на состояния с отрицательной энергией имеет вид

$$P_- = -\sum_{\alpha} v^{(\alpha)}(p) \bar{v}^{(\alpha)}(p) = \frac{-\gamma \cdot p + m}{2m}. \quad (2.146)$$

Как и должно быть, $P_+ + P_- = 1$.

Далее следует привести формулы для следов некоторых выражений, содержащих матрицы γ^{μ} . Поскольку это матрицы 4×4 имеем

$$\text{Tr} 1 = 4.$$

В силу свойства цикличности следа получаем

$$\begin{aligned} \text{Tr}(\gamma \cdot a)(\gamma \cdot b) &= \text{Tr}(\gamma \cdot b)(\gamma \cdot a) = \frac{1}{2} \text{Tr} a_{\mu} b_{\nu} \{\gamma^{\mu}, \gamma^{\nu}\} = a \cdot b \text{Tr} 1 = \\ &= 4a \cdot b. \end{aligned} \quad (2.147)$$

Покажем теперь, что след произведения нечетного числа γ -матриц равен нулю. Для этого воспользуемся следующими свойствами матрицы γ^5 , определенной соотношением (2.117):

$$(\gamma^5)^2 = 1, \quad \{\gamma^5, \gamma^{\mu}\} = 0. \quad (2.148)$$

Введем для удобства обозначение¹⁾

$$a_{\mu} \gamma^{\mu} = a \cdot \hat{\gamma} \equiv \hat{a}. \quad (2.149)$$

¹⁾ Не путать с таким же обозначением единичного вектора. — Прим. ред.

Имеем

$$\widehat{\text{Tr}} \widehat{a}_1 \dots \widehat{a}_n = \widehat{\text{Tr}} \widehat{a}_1 \dots \widehat{a}_n \gamma_5 \gamma_5 = \widehat{\text{Tr}} \gamma_5 \widehat{a}_1 \dots \widehat{a}_n \gamma_5,$$

где использовано условие цикличности. Переведем теперь γ^5 -матрицу, стоящую слева, последовательно через все матрицы \widehat{a}_i , меняя каждый раз знак. В результате получим

$$\widehat{\text{Tr}} \widehat{a}_1 \dots \widehat{a}_n = (-1)^n \widehat{\text{Tr}} a_1 \dots a_n \gamma_5 \gamma_5.$$

Таким образом,

$$\widehat{\text{Tr}} \widehat{a}_1 \dots \widehat{a}_n = 0, \text{ если } n \text{ — нечетное число.} \quad (2.150)$$

Наконец, подставив выражение

$$\gamma^\mu \gamma^\nu = -\gamma^\nu \gamma^\mu + 2g^{\mu\nu}$$

в первые два множителя в выражении $\widehat{\text{Tr}}(\gamma \cdot a)(\gamma \cdot b)(\gamma \cdot c)(\gamma \cdot d)$, получим

$$\begin{aligned} & \widehat{\text{Tr}}(\gamma \cdot a)(\gamma \cdot b)(\gamma \cdot c)(\gamma \cdot d) = \\ & = -\widehat{\text{Tr}}(\gamma \cdot b)(\gamma \cdot a)(\gamma \cdot c)(\gamma \cdot d) + 2a \cdot b \widehat{\text{Tr}}(\gamma \cdot c)(\gamma \cdot d). \end{aligned} \quad (2.151)$$

Эти формулы понадобятся нам при вычислении сечений рассеяния.

§ 2.6. Нерелятивистский предел и магнитный момент электрона

Частицы со спином обладают также «внутренним» магнитным моментом. Заряд e , вращающийся по замкнутой орбите с угловым моментом l , взаимодействует с магнитным полем и характеризуется эффективным магнитным моментом, равным¹⁾

$$\mu = \frac{e}{2m} l. \quad (2.152)$$

Если бы природа была устроена просто, то коэффициент пропорциональности между спином электрона $S = (1/2)\hbar\sigma$ и его магнитным моментом тоже был бы равен $e/2m$ и тогда его внутренний магнитный момент равнялся бы $(e/2m)|S| = e\hbar/4m$. Вытекающее отсюда значение сдвига частот спектральных линий соответствовало бы «нормальному» эффекту Зеемана. Экспериментально же наблюдается «аномальный» эффект Зеемана, который можно объяснить, если положить константу пропорциональности для спина в 2 раза *большой*, чем для орбитального движения. Следовательно, магнитный момент электрона равен $-\mu$, причем

$$\mu = 2 \frac{e}{2m} S = \frac{e}{m} S = \frac{e\hbar}{2m} \sigma. \quad (2.153)$$

(Заряд электрона положен здесь равным $-e$.) Множитель 2 иногда называют g -фактором Ланде, $g_s = 2$. Один из успехов теории электрона, предложенной Дираком, состоит в том, что она дает правильное значение величины g_s . Чтобы вывести его, мы должны рассмотреть уравнение не для свободного электрона, а для электрона в электромагнитном поле. Существует рецепт, как это сделать, называемый «минимальным», мы подробнее остановимся на нем в следующей главе. Этот рецепт состоит в замене импульса

$$p^\mu \rightarrow p^\mu - eA^\mu \quad (2.154)$$

или, поскольку $p^\mu = (E, \mathbf{p})$, $A^\mu = (\varphi, \mathbf{A})$,

$$E \rightarrow E - e\varphi, \quad \mathbf{p} \rightarrow \mathbf{p} - e\mathbf{A}. \quad (2.155)$$

После такой замены уравнение Дирака (2.94) приобретает вид

$$\gamma^0(E - e\varphi)\psi - \boldsymbol{\gamma} \cdot (\mathbf{p} - e\mathbf{A})\psi = m\psi. \quad (2.156)$$

В стандартном представлении γ -матриц [формулы (2.130) и (2.131)]

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma} \\ -\boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix}, \quad \psi = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \quad (2.157)$$

уравнение (2.156) принимает вид

$$\begin{pmatrix} E - e\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ -v \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mathbf{p} - e\mathbf{A} \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma} \\ -\boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = m \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}.$$

Мы запишем его в форме двух уравнений:

$$(E - e\varphi)u - \boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{p} - e\mathbf{A})v = mu, \quad (2.158)$$

$$-(E - e\varphi)v + \boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{p} - e\mathbf{A})u = mv. \quad (2.159)$$

Второе из них дает

$$v = \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{p} - e\mathbf{A})}{E + m - e\varphi} u.$$

В нерелятивистском пределе имеем $E \approx m$, $p \approx mv$; поэтому [пренебрегая тем, что величины $(E + m - e\varphi)$ и $\boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{p} - e\mathbf{A})$ не коммутируют между собой] получаем

$$v \approx \frac{1}{2m} \boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{p} - e\mathbf{A}) u = O\left(\frac{v}{c}\right) u \quad (2.160)$$

и видим, что две нижние компоненты спинора ψ намного меньше двух верхних. Подстановка выражения (2.160) в (2.158) дает

¹⁾ Эта формула верна в системе единиц СИ. Она верна также и в системе СГС, если положить $c=1$.

$$Eu = \frac{\sigma \cdot \pi \sigma \cdot \pi}{2m} u + tu + e\varphi u,$$

где $\pi = p - eA$. С учетом равенства $E = t + W$ имеем

$$Wu = \left[\frac{1}{2m} (\sigma \cdot \pi) (\sigma \cdot \pi) + e\varphi \right] u. \quad (2.161)$$

Далее из соотношения $\sigma_i \sigma_j = \delta_{ij} + i\varepsilon_{ijk} \sigma_k$ следует, что

$$(\sigma \cdot A) (\sigma \cdot B) = A \cdot B + i\sigma \cdot (A \times B), \quad (2.162)$$

откуда получаем

$$(\sigma \cdot \pi)^2 = \pi \cdot \pi + i\sigma \cdot (\pi \times \pi) = (\mathbf{p} - e\mathbf{A})^2 + i\sigma \cdot (\mathbf{p} - e\mathbf{A}) \times (\mathbf{p} - e\mathbf{A}). \quad (2.163)$$

Единственный отличный от нуля член в векторном произведении, стоящем в правой части, равен

$$\mathbf{p} \times \mathbf{A} + \mathbf{A} \times \mathbf{p}. \quad (2.164)$$

Взяв операторное соотношение

$$[p_i, A_j] = -i\hbar \partial_i A_j$$

и вычтя из него такое же соотношение, но с переставленными индексами $i \leftrightarrow j$, получим

$$(p_i A_j - p_j A_i) + (A_i p_j - A_j p_i) = -i\hbar (\partial_i A_j - \partial_j A_i).$$

Умножая обе части равенства на ε_{ijk} и суммируя по i и j , получаем k -компоненту величины

$$\mathbf{p} \times \mathbf{A} + \mathbf{A} \times \mathbf{p} = -i\hbar \nabla \times \mathbf{A} = -i\hbar \mathbf{B},$$

т. е. значение члена (2.164). Подставив этот результат в (2.161), имеем окончательно $Wu = Hu$, где

$$H = \frac{1}{2m} (\mathbf{p} - e\mathbf{A})^2 + e\varphi - \frac{e\hbar}{2m} \sigma \cdot \mathbf{B}. \quad (2.165)$$

Первые два члена дают классический гамильтониан, а последний член есть энергия взаимодействия магнитного момента (2.153) с магнитным полем. Следовательно, уравнение Дирака предсказывает правильный магнитный момент электрона с $g_s = 2$. Другие члены, которыми мы пренебрегли [см. замечание перед формулой (2.160)], дают спин-орбитальное взаимодействие с правильным фактором прецессии Томаса, равным 2.

§ 2.7. Роль группы Пуанкаре: операторы спина и предел нулевой массы

Мы неоднократно отмечали, что уравнение Дирака справедливо для частиц со спином $1/2$, и способ, которым мы его получили, по-видимому подтверждает это, поскольку мы исходили из спинорных представлений группы $SU(2)$. Однако, чтобы картина была полной, нам нужно найти оператор спина S_i ($i = 1, 2, 3$) с правильными коммутационными соотношениями

$$[S_i, S_j] = i\varepsilon_{ijk} S_k, \quad (2.166)$$

квадрат которого должен быть инвариантом группы, т. е. коммутировать со всеми генераторами:

$$S \cdot S = S^2 = s(s + 1), \quad (2.167)$$

где s — спин частицы. Кроме того, поскольку существует два решения уравнения $\gamma \cdot p u = tu$, оператор S должен коммутировать с $\gamma \cdot p$:

$$[S, \gamma \cdot p] = 0. \quad (2.168)$$

Определение оператора S оказывается трудной задачей, и мы не будем доводить ее решение до конца, но и так узнаем достаточно много, чтобы в некоторых важных отношениях лучше понять природу спина. Предположим сначала, что

$$S = \frac{1}{2} \Sigma \equiv \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sigma & 0 \\ 0 & \sigma \end{pmatrix}. \quad (2.169)$$

Этот оператор, очевидно, имеет правильные собственные значения $\pm 1/2$ при положительных и отрицательных значениях энергии и удовлетворяет коммутационным соотношениям (2.166). Но он не удовлетворяет соотношениям (2.168), поскольку

$$[\Sigma, \gamma^\mu] \neq 0.$$

В этом можно убедиться непосредственно, вычислив один или два коммутатора или заметив, что если определить оператор

$$\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2} [\gamma^\mu, \gamma^\nu], \quad (2.170)$$

то в стандартном представлении (2.157) будет справедливо равенство

$$\sigma^{ij} = \varepsilon_{ijk} \begin{pmatrix} \sigma^k & 0 \\ 0 & \sigma^k \end{pmatrix} = \varepsilon_{ijk} \Sigma_k, \quad (2.171)$$

откуда следует, что

$$[\Sigma_i, \gamma_\mu] = i\varepsilon_{ijk} (\gamma_j g_{k\mu} - \gamma_k g_{j\mu}).$$

Таким образом, величина $(1/2)\Sigma$ не может служить релятивистским оператором спина. [Тем не менее для частицы в состоянии покоя $\gamma \cdot p = E\gamma^0$, и, следовательно, оператор $(1/2)\Sigma$ можно считать хорошим оператором спина.] Конечно, Σ есть матрица, представляющая оператор \mathbf{J} , откуда мы заключаем, что релятивистский оператор спина не совпадает с $(1/2)\mathbf{J}$. Это подтверждается тем, что оператор $\mathbf{J} \cdot \mathbf{J} = J^2$ [формула (2.167)] не коммутирует со всеми генераторами группы Лоренца. Например:

$$[J^2, K_i] = [J_1^2, K_i] + [J_2^2, K_i] + [J_3^2, K_i]$$

и, как нетрудно видеть [формула (2.68)],

$$\begin{aligned} [J_1^2, K_i] &= 0, \\ [J_2^2, K_i] &= -i(J_2 K_3 + K_3 J_2), \\ [J_3^2, K_i] &= i(J_3 K_2 + K_2 J_3), \end{aligned}$$

так что

$$[J^2, K_i] \neq 0 \quad (2.172)$$

и, следовательно,

$$[J^2, K_i] \neq 0.$$

Спин есть «кинематическая» характеристика элементарных частиц. Другой их очевидной кинематической характеристикой является масса. Оба этих свойства должны описываться операторами, инвариантными относительно релятивистских преобразований. Масса M дается соотношением

$$M^2 = P_\mu P^\mu, \quad (2.173)$$

где P_μ — оператор импульса, который не фигурировал при изучении (однородной) группы Лоренца, в общих чертах проведенном выше. Это связано с тем, что, как мы покажем, операторы P_μ являются генераторами пространственно-временных трансляций

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = x^\mu + a^\mu, \quad (2.174)$$

которые мы до сих пор не рассматривали. Каким образом мы должны действовать, чтобы объединить данные трансляции с преобразованиями группы Лоренца? Такое объединение осуществляется в неоднородной группе Лоренца, которую принято называть группой Пуанкаре. Впервые изучение этой группы было предпринято Вигнером и опубликовано им в работе [13], ставшей классической. Он показал, что масса и спин — действительно характеристики систем, инвариантных относительно группы Пуанкаре, и что спин тоже отвечает ротационной группе симметрии $SU(2)$, но лишь в случае, когда $M^2 > 0$, т. е. когда импульс «времениподобен». При

$M^2 = 0$ спин уже не описывается группой $SU(2)$, и в этом причина того, что состояниями поляризации безмассовой частицы со спином J являются только состояния с $J_z = \pm J$. Например, не существует физических фотонов, находящихся в состоянии с $J_z = 0$, тогда как массивные частицы со спином 1 могут находиться в этом состоянии. В случае пространственноподобных импульсов $M^2 < 0$ «спин» тоже имеет другую природу и ему даже может соответствовать непрерывный параметр.

В наши цели не входит подробное изложение этой теории; мы хотим лишь показать читателю, как возникает понятие спина. Начнем с анализа структуры группы Пуанкаре. Если мы выполним трансляцию на вектор a^μ , т. е. преобразование $e^{iP \cdot a}$, затем буст в систему отсчета, движущуюся со скоростью $v = \tanh \varphi$, т. е. преобразование $e^{iK \cdot \varphi}$, затем трансляцию в обратном направлении на вектор $-a^\mu$ и, наконец, буст, соответствующий скорости $-v$, то что мы получим в результате? Отклонение от точки, из которой мы исходили, очевидно, является характеристикой структуры группы. На практике обычно рассматривают инфинитезимальные преобразования (с помощью которых генерируют конечные преобразования), т. е.

$$\begin{aligned} e^{-iK \cdot \varphi} e^{-iP \cdot a} e^{iK \cdot \varphi} e^{iP \cdot a} &= (1 - iK \cdot \varphi)(1 - iP \cdot a)(1 + iK \cdot \varphi)(1 + iP \cdot a) = \\ &= 1 + [P_\mu, P_\nu] a^\mu a^\nu + 2[P_\mu, K_i] a^\mu \varphi_i + [K_i, K_j] \varphi_i \varphi_j. \end{aligned}$$

Таким образом, структура группы известна, если известны коммутационные соотношения между генераторами. Неоднородная группа Лоренца обладает десятью генераторами: три генератора \mathbf{J} отвечают вращениям, три генератора \mathbf{K} — бустам и четыре генератора P — трансляциям. Коммутационные соотношения между \mathbf{J} и \mathbf{K} уже найдены нами [формула (2.68)], но они выведены с помощью матричной формы \mathbf{J} и \mathbf{K} . Полезно вывести теперь выражения для \mathbf{J} и \mathbf{K} в виде дифференциальных операторов, а не матриц. Конечно, они будут подчиняться тем же соотношениям коммутации (2.68). Далее мы получим непосредственно выражение для P_μ и, следовательно, будем иметь полный набор коммутационных соотношений между генераторами группы Пуанкаре. (Коммутационные соотношения генераторов группы называются алгеброй Ли данной группы; таким образом, формула (2.68) дает алгебру Ли группы Лоренца.)

Начнем с вывода выражения для оператора J_z . Он генерирует вращения вокруг оси z :

$$\begin{cases} x' = x \cos \theta + y \sin \theta, \\ y' = -x \sin \theta + y \cos \theta, \\ z' = z. \end{cases}$$

Генератор J_z определяется его действием на функцию $f(x, y, z)$:

$$J_z f(x, y, z) = i \lim_{\theta \rightarrow 0} \left[\frac{f(x', y', z) - f(x, y, z)}{\theta} \right] =$$

$$= i \lim_{\theta \rightarrow 0} \left[\frac{f(x + y\theta, y - x\theta, z) - f(x, y, z)}{\theta} \right] = i \left(y \frac{\partial f}{\partial x} - x \frac{\partial f}{\partial y} \right), \quad (2.175)$$

или

$$J_z = -i \left(x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right). \quad (2.176)$$

Аналогично

$$J_x = -i \left(y \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial y} \right), \quad J_y = -i \left(z \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial z} \right), \quad (2.177)$$

и мы можем легко показать, что

$$\{J_x, J_y\} = iJ_z + \text{циклические перестановки}. \quad (2.178)$$

Выражения (2.176) и (2.177) дают, очевидно, квантовомеханические операторы углового момента (они содержат множитель \hbar). Иными словами, операторами углового момента генерируются вращения. Формулы (2.175) можно переписать в соответствии со следующим определением. Генератор, соответствующий параметру a^α , определяется в виде

$$X_a = i \left(\left. \frac{\partial x'}{\partial a^\alpha} \right|_{a=0} \frac{\partial}{\partial x} + \left. \frac{\partial y'}{\partial a^\alpha} \right|_{a=0} \frac{\partial}{\partial y} + \left. \frac{\partial z'}{\partial a^\alpha} \right|_{a=0} \frac{\partial}{\partial z} + \left. \frac{\partial t'}{\partial a^\alpha} \right|_{a=0} \frac{\partial}{\partial t} \right) =$$

$$= i \frac{\partial x'^\alpha}{\partial a^\alpha} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \quad (\alpha = 1, \dots, r). \quad (2.179)$$

Данное определение относится к r -параметрической группе преобразований. Читатель легко может убедиться, что при $a^\alpha = \theta$ это определение дает J_z . Применим теперь формулу (2.179) к чисто лоренцевым преобразованиям

$$x' = \gamma(x + vt), \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = \gamma(t + vx), \quad \gamma = (1 - v^2)^{-1/2}.$$

Мы найдем, что генератор K_x дается выражением

$$K_x = i \left(t \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial t} \right) \quad (2.180)$$

и аналогично

$$K_y = i \left(t \frac{\partial}{\partial y} + y \frac{\partial}{\partial t} \right), \quad K_z = i \left(t \frac{\partial}{\partial z} + z \frac{\partial}{\partial t} \right). \quad (2.181)$$

Это дает

$$\begin{aligned} [K_x, K_y] &= -iJ_z + \text{циклические перестановки}, \\ [K_x, J_y] &= iK_z + \text{циклические перестановки}, \\ [K_x, J_x] &= 0 \text{ и т. д.} \end{aligned} \quad (2.182)$$

что в точности совпадает с (2.68). Мы вновь видим, что бусты не образуют подгруппу группы Лоренца, тогда как вращения образуют подгруппу. Соотношения (2.178) и (2.182) образуют алгебру Ли группы Лоренца, что можно записать в общем виде, если ввести определение

$$J_{\mu\nu} (\mu, \nu = 0, \dots, 3) \begin{cases} J_{ij} = -J_{ji} \equiv \varepsilon_{ijk} J_k, \\ J_{i0} = -J_{0i} \equiv -K_i. \end{cases} \quad i, j, k = 1, 2, 3. \quad (2.183)$$

Имеем

$$[J_{\mu\nu}, J_{\rho\sigma}] = i(g_{\nu\rho} J_{\mu\sigma} - g_{\mu\rho} J_{\nu\sigma} + g_{\mu\sigma} J_{\nu\rho} - g_{\nu\sigma} J_{\mu\rho}). \quad (2.184)$$

Чтобы получить алгебру Ли группы Пуанкаре, мы должны добавить генераторы трансляций

$$x'^\mu = x^\mu + a^\mu,$$

которые согласно формуле (2.179), имеют вид

$$P_x = i \frac{\partial}{\partial x} \text{ и т. д.,}$$

или

$$P_\mu = i \frac{\partial}{\partial x^\mu}. \quad (2.185)$$

Этим подтверждается, что мы правильно обозначили данный оператор через P_μ : с точностью до множителя \hbar генераторы трансляций совпадают с операторами энергии-импульса. Теперь можно непосредственно доказать коммутационные соотношения

$$[P_\mu, P_\nu] = 0, \quad (2.186)$$

$$[P_\mu, J_{\rho\sigma}] \equiv i(g_{\mu\rho} P_\sigma - g_{\mu\sigma} P_\rho). \quad (2.187)$$

Соотношение (2.186) показывает, что трансляции в различных направлениях коммутируют между собой (интуитивно это представляется очевидным). Соотношения (2.186) и (2.187) показывают, что как J , так и P коммутируют с гамильтонианом $P_0 = H$, но генераторы K не коммутируют с гамильтонианом и, значит, не связаны с какой-либо сохраняющейся величиной. Соотношения (2.184), (2.186) и (2.187) показывают, что алгебра Ли с десятью генераторами действительно замкнута — операторы, стоящие в правых частях, входят в систему. Следовательно, соответствующие преобразования образуют группу. Это легко проверить непосредственно, и мы для полноты запишем законы преобразования. Общее преобра-

зование из неоднородной группы Лоренца (т. е. включающее бусты, вращения и трансляции) имеет вид

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu} + a^{\mu}. \quad (2.188)$$

Матрица Λ [обобщение матрицы (2.64) на случай, когда включены вращения] должна сохранять «длину» 4-вектора x : $x'^{\mu} x'_{\mu} = x^{\mu} x_{\mu}$. Следовательно,

$$\Lambda^{\mu}_{\rho} \Lambda^{\sigma}_{\mu} g_{\sigma\nu} = g_{\rho\nu} \quad (2.189)$$

$$\text{или} \\ \Lambda^{\mu}_{\rho} \Lambda^{\sigma}_{\mu} = \delta^{\sigma}_{\rho}. \quad (2.190)$$

Таким образом, матрица, обратная матрице Λ^{μ}_{ν} , имеет вид

$$(\Lambda^{-1})^{\mu}_{\nu} = \Lambda^{\mu}_{\nu}. \quad (2.191)$$

Произведем теперь второе преобразование $\bar{\Lambda}$ над 4-вектором x'^{μ} , выписанным выше:

$$x''^{\mu} = \bar{\Lambda}^{\mu}_{\nu} (x'^{\nu}) + \bar{a}^{\mu} = \bar{\Lambda}^{\mu}_{\nu} \Lambda^{\nu}_{\rho} x^{\rho} + \Lambda^{\mu}_{\rho} a^{\rho} + \bar{a}^{\mu}. \quad (2.192)$$

Это — преобразование того же вида, что и (2.188), и мы можем записать групповой закон в виде

$$[\bar{\Lambda}, \bar{a}] (\Lambda, a) = [\bar{\Lambda}\Lambda, \Lambda a + \bar{a}]. \quad (2.193)$$

Единичный элемент имеет, очевидно, вид $[1, 0]$.

Теперь мы дошли до метода Вигнера. Он основан на том, что если применить преобразование Лоренца к состоянию с импульсом p^{μ} , то в результате 4-вектор p^{μ} изменится, а величина $p^{\mu} p_{\mu}$ останется прежней. В самом деле, состояние $|p\rangle$, для которого

$$P^{\mu} |p\rangle = p^{\mu} |p\rangle, \quad (2.194)$$

при преобразовании (Λ, a) переходит в состояние

$$U(\Lambda, a) |p\rangle = |\Lambda p\rangle, \quad (2.195)$$

для которого

$$P^{\mu} |\Lambda p\rangle = (\Lambda p)^{\mu} |\Lambda p\rangle. \quad (2.196)$$

Однако в силу формулы (2.190) справедливо равенство

$$(\Lambda p)^{\mu} = (\Lambda p)^{\nu} (\Lambda p)_{\nu} = P^{\nu} P_{\nu} = P^{\mu}. \quad (2.197)$$

Следовательно, преобразование Лоренца оставляет величину $P_{\mu} P^{\mu}$ инвариантной. Фактически это связано с тем, что величина $P_{\mu} P^{\mu}$ коммутирует со всеми генераторами группы [предполагается, что читатель убедился в этом, следуя методу, использованному

при выводе соотношения (2.172)] и, стало быть, является инвариантом. Его обычно называют *первым оператором Казимира* и обозначают через C_1 :

$$C_1 = P^{\mu} P_{\mu}. \quad (2.198)$$

Отсюда следует, что всем состояниям, полученным с помощью преобразований Лоренца из некоторого первоначального состояния, отвечает одно и то же значение p^2 . Далее, благодаря тому что знак p^0 не меняется при преобразовании Лоренца, полный набор состояний, образующих базис для представлений группы, распадается на *шесть различных классов*:

$$\begin{aligned} \text{I. } & p^2 = m^2 > 0, & p^0 > 0, \\ \text{II. } & p^2 = m^2 > 0, & p^0 < 0, \\ \text{III. } & p^2 = 0, & p^0 > 0, \\ \text{IV. } & p^2 = 0, & p^0 < 0, \\ \text{V. } & p^2 = 0, \\ \text{VI. } & p^2 < 0. \end{aligned} \quad (2.199)$$

Первый и третий классы соответствуют массивной и безмассовой физическим частицам, пятый класс — вакууму, шестой — виртуальным частицам (которые могут обладать пространственноподобным импульсом). Остальные классы, вероятно, являются нефизическими.

Выберем частное значение p^{μ} , принадлежащее одному из классов $\{p^{\mu}\}$. Важное замечание, которое мы докажем ниже, состоит в том, что подгруппа группы Пуанкаре, которая оставляет p^{μ} инвариантным (ее называют *малой группой*, соответствующей 4-вектору p^{μ}), имеет одну и ту же структуру для всех импульсов, принадлежащих классу $\{p^{\mu}\}$. Рассмотрим класс I ($p^2 = m^2$). Частное значение p^{μ} отвечает системе покоя частицы, обозначим его через k^{μ} :

$$k^{\mu} = (m, 0, 0, 0). \quad (2.200)$$

Что представляет собой малая группа? Это, очевидно, группа вращений, поскольку она не преобразует 4-вектор k^{μ} :

$$\text{Малой группой, соответствующей 4-вектору } k^{\mu}, \text{ является группа вращений } SU(2). \quad (2.201)$$

Следовательно, в случае времениподобного импульса, чтобы узнать результат произвольного преобразования Лоренца, нужно знать лишь представления группы вращений. Но все эти представления нам известны! Таков вывод из работы Вигнера, и, чтобы глубже понять его, мы должны изучить его более внимательно.

Рассмотрим произвольный времениподобный 4-импульс p^{μ} . Очевидно, существует преобразование Лоренца, преобразующее

k^μ (4-импульс системы покоя, введенный выше) в p^μ . Обозначим это преобразование через $L(p)$:

$$p^\nu = L^\nu_\mu(p) k^\mu. \quad (2.202)$$

[Вообще говоря, L представляет собой произведение вида $R^{-1}BR$, где R — вращение, переводящее \hat{p} в направление оси x , а B — буст вида (2.64).] Обозначим состояния в гильбертовом пространстве символами $|p, \sigma\rangle$ и $|k, \sigma\rangle$, где σ — «спиновый» индекс. Преобразованию (2.202) в пространстве-времени соответствует соотношение

$$|p, \sigma\rangle = U(L(p)) |k, \sigma\rangle \quad (2.203)$$

в гильбертовом пространстве. В этом соотношении $U(L(p))$ — унитарный оператор (матрица), который представляет преобразование $L(p)$. Рассмотрим теперь произвольное преобразование Лоренца Λ :

$$p^\mu \rightarrow p'^\mu = \Lambda^\mu_\nu p^\nu \quad (2.204)$$

и соответствующее унитарное преобразование:

$$|p, \sigma\rangle \rightarrow U(\Lambda) |p, \sigma\rangle. \quad (2.205)$$

Нам необходимо определить величину $U(\Lambda) |p, \sigma\rangle$. Будем действовать следующим образом. Будем исходить из соотношения (2.203): $U(\Lambda) |p, \sigma\rangle = U(\Lambda) U(L(p)) |k, \sigma\rangle =$, умножим обе его части на оператор, очевидно равный единичному:

$$= U(L(\Lambda p)) U^{-1}(L(\Lambda p)) U(\Lambda) U(L(p)) |k, \sigma\rangle =, \quad (2.206)$$

воспользуемся групповым законом $U^{-1}(A) = U(A^{-1})$:

$$= U(L(\Lambda p)) U(L^{-1}(\Lambda p)) U(\Lambda) U(L(p)) |k, \sigma\rangle =$$

и вновь групповым законом в виде $U(A)U(B)U(C) = U(ABC)$: $= U(L(\Lambda p)) U(L^{-1}(\Lambda p) \Lambda L(p)) |k, \sigma\rangle$.

Далее, $L^{-1}(\Lambda p) \Lambda L(p)$ есть матрица, которая, действуя на k^μ , вновь дает k^μ , поскольку матрица $L(p)$ преобразует k в p [формула (2.202)], матрица Λ преобразует p в Λp , а матрица $L^{-1}(\Lambda p)$ преобразует вектор Λp обратно в вектор k . Итак, преобразование $L^{-1}(\Lambda p) \Lambda L(p)$ есть вращение [формула (2.201)], а оператор $U(L^{-1}(\Lambda p) \Lambda L(p))$ — матрица вида $\exp i\mathbf{J} \cdot \boldsymbol{\theta}$, элементы которой мы обозначим через $D_{\sigma'\sigma}(R)$, где $R = L^{-1}(\Lambda p) \Lambda L(p)$. Таким образом,

$$U(\Lambda) |p, \sigma\rangle = U(L(\Lambda p)) \sum_{\sigma'} D_{\sigma'\sigma}(R) |k, \sigma'\rangle =$$

$$= \sum_{\sigma'} D_{\sigma'\sigma}(R) U(L(\Lambda p)) |k, \sigma'\rangle = \sum_{\sigma'} D_{\sigma'\sigma}(R) |\Lambda p, \sigma'\rangle, \quad (2.207)$$

причем последнее равенство является следствием соотношения (2.203). Мы заключаем, что для построения представлений группы Лоренца в случае времениподобного состояния нужно знать лишь представление группы вращений! Следовательно, спин, определенный независимо от других переменных, от которых может зависеть состояние, и преобразующийся при преобразованиях Лоренца, задается группой вращений. Мы доказали также, что утверждение (2.201) справедливо для *всех* времениподобных импульсов. Читатель должен оценить, насколько удивителен этот результат. Еще из курса квантовой механики мы знали, что спин — это разность углового момента и, следовательно (хотя мы, возможно и не мыслили на таком языке!), задается представлением группы вращений. Но лишь после указанной работы Вигнера нам стало понятно, почему это действительно так! В то же время, когда мы рассматриваем класс III состояний со светоподобными импульсами, мы приходим к заключению, что это неверно; спин в этом случае не определяется группой вращений.

Мы все еще не ответили на вопрос: если массе соответствует оператор Казимира (2.198), то какой инвариантный оператор соответствует спину? Соотношение (2.172) показывает, что J^2 не является таким оператором. Определим сначала *псевдовектор Паули — Любанского* W_μ :

$$W_\mu = -\frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} J^{\nu\rho} P^\sigma. \quad (2.208)$$

Здесь $\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$ — полностью антисимметричный тензор в четырех измерениях. Очевидно, что 4-вектор W_μ ортогонален 4-вектору P^μ :

$$W_\mu P^\mu = 0, \quad (2.209)$$

так что в системе покоя частицы 4-вектор W пространственноподобен, т. е. $W_\mu = (0, \mathbf{W})$, причем

$$W_i = -\frac{1}{2} \varepsilon_{i\nu\rho\sigma} J^{\nu\rho} P^\sigma = -\frac{m}{2} \varepsilon_{ijkl} J^{jk} = -m \Sigma_i.$$

Мы видим, что в системе покоя W_i по существу сводится к Σ_i . Можно показать, что второй инвариант Казимира равен

$$C_2 = W_\mu W^\mu = -m^2 s(s+1), \quad (2.210)$$

где s — спин частицы. Группа Пуанкаре имеет ранг 2, так что существуют лишь два инварианта Казимира, которые мы определили. Мы, однако, пока еще не нашли сами операторы спина. Они не могут совпадать с W_i ($i = 1, 2, 3$), поскольку это лишь три компо-

ненты 4-вектора и, в соответствующих соотношениях операторы спина и импульса. Читателя отсылаем к [1].

Наконец, рассмотрим в качестве аналога системы выберем здесь систему $k^\mu = (k, 0, 0, k)$.

Эта система связана с системой $k^\mu = (0, 0, 0, k)$ преобразованием Лоренца, соответствующим скорости $v = c$. Вместо преобразования Лоренца получаем

$$U = 1 + i\theta J_3 + iuL_1 \\ \equiv 1 + i\theta J_3 + iuL_1$$

Легко видеть, что

$$[L_1, L_2] = 0, \\ [J_3, L_1] = iL_2, \\ [L_2, J_3] = iL_1.$$

Очевидно, что это не является алгеброй Ли. Однако, если рассмотреть алгебру соответствующую оператору J_3 и трансляции — так называемую алгебру Галлеи — этот результат не нарушается для безмассовых частиц. Мы можем заметить, что в силу соотношения

$$W \cdot W |k\rangle = 0,$$

Кроме того, из (2.2)

$$W \cdot P |k\rangle = 0.$$

Таким образом, операторы W^μ и P^μ ортогональны. Это означает, что они друг другу, т. е.

$$(W^\mu - \lambda P^\mu) |k\rangle = 0$$

ций то обстоятельство, что изменение электрических полей приводит к возникновению магнитных полей. Уравнения «а» и «б» — однородные, а «в» и «г» — неоднородные.

Если ввести 4-векторный потенциал

$$A^\mu = (\varphi, \mathbf{A}) \quad (2.217)$$

таким образом, чтобы выполнялись соотношения

$$\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}, \quad \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla \varphi, \quad (2.218)$$

то уравнения «а» и «б» будет *удовлетворяться автоматически*, поскольку $\text{div rot} \equiv 0$ и $\text{rot grad} \equiv 0$. Заметим, что правые части соотношений (2.218) являются компонентами 4-мерного ротора, определяемого равенством

$$F^{\mu\nu} = -F^{\nu\mu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu. \quad (2.219)$$

Он имеет следующие компоненты (напомним, что $\partial^i = -\partial_i$):

$$F^{0i} = \partial^0 A^i - \partial^i A^0 = \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \nabla \varphi \right)_i = -E^i, \quad (2.220)$$

$$F^{ij} = \partial^i A^j - \partial^j A^i = -\varepsilon^{ijk} B^k, \quad (2.221)$$

где $\varepsilon^{ijk} = \varepsilon_{ijk}$ — абсолютно антисимметричный символ Леви — Чивиты [формула (2.124)]. Соотношения (2.220) и (2.221) можно представить в матричной форме, нумеруя строки и столбцы числами 0, 1, 2, 3:

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E^1 & -E^2 & -E^3 \\ E^1 & 0 & -B^3 & B^2 \\ E^2 & B^3 & 0 & -B^1 \\ E^3 & -B^2 & B^1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.222)$$

Тензор $F^{\mu\nu}$ называется *тензором электромагнитного поля*. При преобразованиях Лоренца он ведет себя как антисимметричный тензор второго ранга:

$$F^{\mu\nu} \rightarrow \Lambda_\alpha^\mu \Lambda_\beta^\nu F^{\alpha\beta}.$$

Подведем итог сказанному: если мы выразим электрическое и магнитное поля через тензор $F^{\mu\nu}$, то, поскольку $F^{\mu\nu}$ — четырехмерный ротор, два первых (однородных) уравнения Максвелла будут выполняться автоматически.

Рассмотрим далее неоднородные уравнения. Можно прямой проверкой убедиться, что оба этих уравнения содержатся в ковариантном уравнении

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu, \quad (2.223)$$

где

$$j^\nu = (\rho, \mathbf{j}). \quad (2.224)$$

Полагая $\nu = 0$, получаем

$$\partial_1 F^{10} + \partial_2 F^{20} + \partial_3 F^{30} = \rho, \\ \text{div } \mathbf{E} = \rho,$$

т. е. уравнение «в». Полагая $\nu = 1$, получаем

$$\partial_0 F^{01} + \partial_2 F^{21} + \partial_3 F^{31} = j^1, \quad -\frac{\partial E^1}{\partial t} + \frac{\partial B^3}{\partial x_2} - \frac{\partial B^2}{\partial x_3} = j^1,$$

т. е. компоненту «1» уравнения «г».

Возможно, окажется полезным следующее замечание относительно калибровочных преобразований. Хотя электрическое и магнитное поля и определяются через \mathbf{A} и φ соотношением (2.217), такое определение не является *единственным*, поскольку при *калибровочном преобразовании*

$$\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A} - \nabla \chi, \quad \varphi \rightarrow \varphi + \frac{\partial \chi}{\partial t}, \quad (2.225)$$

или (в ковариантной форме)

$$A^\mu \rightarrow A^\mu + \partial^\mu \chi, \quad (2.226)$$

где χ — произвольная скалярная функция, величины \mathbf{E} и \mathbf{B} не изменяются. Эквивалентное выражение этого факта состоит в том, что не изменяются величины $F^{\mu\nu}$:

$$F^{\mu\nu} \rightarrow F^{\mu\nu} + (\partial^\mu \partial^\nu - \partial^\nu \partial^\mu) \chi = F^{\mu\nu}. \quad (2.227)$$

Подставляя (2.219) в (2.223), мы видим, что 4-вектор A^μ удовлетворяет уравнению

$$\square A^\nu - \partial^\nu (\partial_\mu A^\mu) = j^\nu. \quad (2.228)$$

Мы можем воспользоваться свободой, даваемой нам соотношением (2.226), и выбрать функцию χ так, чтобы преобразованный 4-вектор A^μ удовлетворял *условию калибровки Лоренца*:

$$\partial_\mu A^\mu = \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{A} = 0. \quad (2.229)$$

При таком «выборе калибровки» уравнение (2.228) принимает вид

$$\square A^\mu = j^\mu, \quad (2.230)$$

т. е., очевидно, является ковариантным представлением известных уравнений

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \nabla^2 \varphi = \rho, \quad \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \nabla^2 \mathbf{A} = \mathbf{j}, \quad (2.231)$$

решениями которых даются потенциалы Льенара — Вихерта. В пустоте уравнение (2.230) принимает вид

$$\square A^\mu = 0. \quad (2.232)$$

Мы видим, что электромагнитное поле, если полностью использовать его квантовую природу, соответствует безмассовым частицам (которые вследствие своей безмассовости движутся со скоростью света; отсюда — принцип относительности, с упоминания о котором мы начали данный параграф).

Представим теперь уравнение Максвелла в явно ковариантной форме. Однородные уравнения «а» и «б» объединились в уравнение (2.219). Неоднородные уравнения «в» и «г» объединились в уравнение (2.223). Мы покажем теперь, что существует простой способ объединить уравнения (2.218) и (2.219), при котором отпадает необходимость использовать явно вектор-потенциал A^μ . Из (2.219) следует, что

$$\partial^\lambda F^{\mu\nu} + \partial^\nu F^{\lambda\mu} + \partial^\mu F^{\nu\lambda} = 0. \quad (2.233)$$

Введем теперь *дуальный тензор* $\tilde{F}^{\mu\nu}$, определяемый соотношением

$$\tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\rho\sigma}, \quad (2.234)$$

где $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ — символ Леви — Чивиты в случае четырех измерений ($\epsilon^{0123} = 1$). Элементы этого тензора, как легко видеть, таковы:

$$\tilde{F}^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -B^1 & -B^2 & -B^3 \\ B^1 & 0 & E^3 & -E^2 \\ B^2 & -E^3 & 0 & E^1 \\ B^3 & E^2 & -E^1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.235)$$

Из антисимметрии символа $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ вытекает, что уравнение

$$\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0 \quad (2.236)$$

эквивалентно уравнению (2.233). В то же время из вида тензора (2.235) следует, что он дает уравнения Максвелла «а» и «б». В итоге мы можем записать уравнения Максвелла в компактной форме

$$\square \partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu, \quad \partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0. \quad (2.237)$$

Массивные частицы со спином 1 удовлетворяют уравнениям, которые являются обобщением уравнений Максвелла. Они называются *уравнениями Прока* и имеют следующий вид:

$$\square F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu, \quad \partial_\mu F^{\mu\nu} + m^2 A^\nu = 0. \quad (2.238)$$

Взяв дивергенцию второго из них, получим

$$m^2 \partial_\nu A^\nu = 0, \quad (2.239)$$

а поскольку $m^2 \neq 0$, мы получаем $\partial_\nu A^\nu = 0$. Таким образом, условие Лоренца всегда выполнено, т. е. мы утратили свободу, связанную с калибровочными преобразованиями, которую нам давали уравнения Максвелла. В действительности, поскольку тензор $F^{\mu\nu}$ является калибровочно-инвариантным, из (2.238) прямо следует, что *уравнения для массивной частицы со спином 1 не являются калибровочно-инвариантными*. Подстановка (2.239) в (2.238) дает

$$(\square + m^2) A^\mu = 0 \quad (2.240)$$

наряду с

$$\partial_\mu A^\mu = 0. \quad (2.241)$$

Уравнение (2.240) показывает, как мы и ожидали, что мы имеем частицы с массой m . Соотношение (2.241) представляет собой одно условие, накладываемое на четыре компоненты вектора A^μ . Таким образом, остаются только три независимые компоненты. Это действительно соответствует случаю массивной частицы со спином 1.

Мы закончим данный параграф замечанием общего характера, относящимся к волновым уравнениям, которые мы из соображений удобства воспроизведем здесь:

$$\text{(Клейн — Гордон)} \quad (\square + m^2) \varphi = 0, \quad (2.16)$$

$$\text{(Дирак)} \quad (i \gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi = 0, \quad (2.96)$$

$$(\square + m^2) \psi = 0, \quad (2.98)$$

$$\text{(Максвелл)} \quad \partial_\mu F^{\mu\nu} = 0, \quad (2.223)$$

$$\square A^\mu = 0, \quad (2.232)$$

$$\text{(Прока)} \quad \partial_\mu F^{\mu\nu} + m^2 A^\nu = 0, \quad (2.238)$$

$$(\square + m^2) A^\mu = 0. \quad (2.240)$$

В случае полей со спином 1/2 и 1 существуют волновые уравнения *первого порядка*, однако не существует уравнение первого порядка для скалярных полей. В то же время каждая компонента полей со спином 1/2 и 1 удовлетворяет уравнению Клейна — Гордона (с $m = 0$ в случае фотона), которое в конечном счете является выражением требований теории относительности ($E^2 - p^2 = m^2$) и квантовой теории [$E \rightarrow i(\partial/\partial t)$, $p \rightarrow -i\nabla$]. Таким образом, урав-

нения Дирака, Максвелла и Прока отличны от уравнения Клейна — Гордона. Выше мы видели, что уравнение Дирака можно *вывести*, рассматривая преобразование спиноров группы Лоренца. Можно показать [18], хотя мы этого и не делали здесь, что уравнения Максвелла и Прока получаются подобным же образом. Стало быть, в случае полей с ненулевым спином эти уравнения являются просто следствием связи между компонентами спина. Говоря словами Вайнберга, в них мы признаемся, что у нас слишком много спиновых компонент. Уравнение же Клейна — Гордона носит иной характер, так как оно описывает только одну компоненту.

Заключительное замечание: наш вывод уравнения Дирака существенно опирался на предположение, что компоненты поля со спином $1/2$ образуют *линейное векторное пространство*, пригодное в качестве базиса для построения представления группы Лоренца. Хотя это предположение и выглядит бессодержательным с математической точки зрения, физически оно в высшей степени нетривиально, поскольку соответствует *принципу суперпозиции* и, следовательно, дуализму волна — частица и квантовой теории. Иными словами, поля, которые мы нашли, априори являются квантовыми полями. Поэтому утверждение, что необходимо подвергнуть эти поля «вторичному квантованию», часто встречающееся в литературе, не совсем верно. Точнее было бы говорить о необходимости подвергнуть дальнейшему анализу следствия того обстоятельства, что эти поля являются квантовыми полями, выписывая (например) коммутационные соотношения, которые должны существовать между ними, что мы и делаем в гл. 4.

§ 2.9. Уравнения Максвелла и дифференциальная геометрия

Уравнения Максвелла (2.237) связывают антисимметричные тензоры с векторами, однако эта связь устанавливается для отдельных компонент, на что указывает индексная запись. В этом можно видеть шаг назад по сравнению с такими уравнениями, как $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$: символ $\nabla \cdot \mathbf{B}$ более экономичен, чем запись $\nabla^i B_i$, которой он эквивалентен. Возникает вопрос: можно ли записать уравнения Максвелла так, чтобы в них входили тензор F и ток j и не фигурировали бы явно компоненты? Благодаря разработке дифференциальной геометрии такая возможность действительно существует, и уравнения Максвелла принимают элегантный вид $dF = 0$, $d^*F = J$, причем автоматически учитывается антисимметрия тензора поля F ! В данном параграфе мы объясним эти обозначения. Обычно физики скептически относятся к такого рода математическим усовершенствованиям. В конце концов, настаивают они, прежде чем с уравнением $d^*F = J$ можно будет работать в определенной системе координат, его необходимо преобразовать к виду $\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu$. Это, может быть, и верно, но все больше становится

физиков, считающих, что прогресс в обозначениях действительно отвечает углублению нашего понимания. Дело в том, что, как и во многих других областях современной математики, прогресс здесь достигается благодаря введению новых представлений и выработке ясных формулировок там, где их ранее не было. В случае уравнений Максвелла проливается свет на их геометрическую природу. Как будет показано в следующей главе, электродинамика является калибровочной теорией с группой инвариантности $U(1)$. Калибровочные теории с неабелевыми группами инвариантности $[SU(2) \times U(1), SU(3)]$ занимают центральное место в современной физике частиц, и их геометрическая интерпретация в указанном выше смысле может действительно сыграть отнюдь не второстепенную роль в окончательном понимании значения этих теорий.

Посмотрим сначала, каков смысл обычных линейных и поверхностных интегралов

$$I_1 = \int_C F_x dx + F_y dy + F_z dz = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}, \quad (2.242)$$

$$I_2 = \int_S (G_x dy \wedge dz + G_y dz \wedge dx + G_z dx \wedge dy) = \int_S \mathbf{G} \cdot d\mathbf{S}.$$

Величины I_1 и I_2 — это *числа*. Величина I_1 есть интеграл чего-то вдоль линии C , а I_2 — интеграл чего-то другого по поверхности S . Таким образом, в определенном смысле это «что-то» *дуально* «линии», поскольку, когда они «объединяются» (с помощью интегрирования), в результате получается число. Аналогично в случае I_2 «что-то другое» дуально «поверхности». Мы систематизируем сказанное, вводя новые слова: линию и поверхность будем называть «цепями», а объекты, которые интегрируются по цепям, будем называть «дифференциальными формами» или просто «формами». Таким образом, формы дуальны цепям.

Мы будем называть линию 1-цепью, поскольку она имеет одно измерение, поверхность — 2-цепью и т. д. и обозначим произвольную n -мерную цепь через C_n . Таким образом, имеем

$$\begin{aligned} C_0 & \text{ 0-цепь} = \text{точка,} \\ C_1 & \text{ 1-цепь} = \text{линия,} \\ C_2 & \text{ 2-цепь} = \text{область,} \\ C_3 & \text{ 3-цепь} = \text{объем,} \\ C_n & \text{ } n\text{-цепь.} \end{aligned} \quad (2.243)$$

Далее, *границей* n -цепи является $(n-1)$ -цепь. Границей области является линия, границей линии являются две точки. Определим оператор границы ∂ , отображающий C_n в C_{n-1} :

$$C_n \xrightarrow{\partial} C_{n-1}, \text{ или } \partial C_n = C_{n-1}. \quad (2.244)$$

Некоторые цепи не имеют границ: поверхность сферы является 2-цепью (областью), не обладающей границей; замкнутая линия является 1-цепью, не обладающей границей. Такие *замкнутые цепи* называются *циклами* и обозначаются через Z_n . Поскольку у них нет границы, очевидно, что

$$\partial Z_n = 0. \quad (2.245)$$

[Фактически Z_n является ядром отображения (2.244).] В то же время существуют цепи, которые *сами служат границей* для цепей более высокой размерности. Такие цепи обозначаются через B_n :

$$B_n = \partial C_{n+1}. \quad (2.246)$$

[Цепь B_{n-1} в действительности является образом отображения (2.244).] Например, замкнутая поверхность B_2 является границей объема, а замкнутая линия B_1 является границей области. Очевидно, что сами цепи B_n не обладают границей (являются замкнутыми):

$$\partial B_n = 0. \quad (2.247)$$

Комбинируя два последних соотношения, получаем

$$\square \partial^2 = 0. \quad (2.248)$$

Словами это можно выразить так: «граница границы равна нулю», т. е. цепь, служащая границей, должна быть замкнутой. Интересно, справедливо ли обратное утверждение: является ли замкнутая цепь с необходимостью границей другой цепи? В евклидовых пространствах ответ утвердительный, т. е. $Z_n = B_n$. В общем же случае существуют замкнутые цепи, не являющиеся границей, т. е. $Z_n \supset B_n$. Например, на торе замкнутая кривая, подобная C_1 , изображенной на рис. 2.3, не является границей какой-либо части поверхности тора, тогда как C_2 , очевидно, является границей области. Аналогично в пространстве S^1 , т. е. на окружности, сама окружность не является границей какой-либо области пространства. Ее нельзя считать границей области, которую она окружает, поскольку эта область, будучи двумерной, не может быть частью

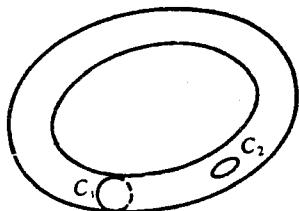


рис. 2.3. Замкнутые кривые на торе. Кривая C_2 ограничивает часть поверхности тора, кривая C_1 такой границей не является.

S^1 , т. е. частью одномерного пространства. Этим завершается то, что было необходимо сказать о цепях.

Обратимся теперь к *формам*. Как уже говорилось выше, интеграл от формы по цепи равен числу. Напишем

$$\int_{C_n} \omega_n \equiv \int_{C_n} f_{i_1 \dots i_n} dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \dots \wedge dx_{i_n} = \text{Число}. \quad (2.249)$$

Символ произведения \wedge в этом выражении введен в связи с тем, что существенна *ориентация* кривой, поверхности и т. д. Существование интегралов связано с дуальностью форм и цепей, что мы увидим явно. Некая 1-форма ω_1 — это величина, которую надо проинтегрировать вдоль линии (1-цепи), т. е. величина вида $A dx + B dy + C dz$. Другие формы строятся по этому образцу, и мы получаем (в трехмерном пространстве)

$$\begin{aligned} \omega_0 & \text{ 0-форма } && \text{ функция,} \\ \omega_1 & \text{ 1-форма } && A dx + B dy + C dz, \\ \omega_2 & \text{ 2-форма } && f dx \wedge dy + g dy \wedge dz + h dz \wedge dx, \\ \omega_3 & \text{ 3-форма } && F dx \wedge dy \wedge dz, \end{aligned} \quad (2.250)$$

где

$$dx \wedge dy = -dy \wedge dx, \quad dx \wedge dx = 0 \text{ и т. д.} \quad (2.251)$$

В силу равенств (2.251) ясно, что в n -мерном пространстве существуют n -формы, но не существуют $(n+1)$ -формы, т. е. формы более высокого порядка. Очевидно, что, дифференцируя n -форму, мы получим нечто типа $(n+1)$ -формы. Мы получим в *точности* $(n+1)$ -форму, если встроим в операцию дифференцирования антисимметризацию, о которой сказано выше. Определим так называемый *оператор внешнего дифференцирования* d :

$$d\omega_n = \omega_{n+1}. \quad (2.252)$$

Результат действия этого оператора на 1-форму (в трехмерном пространстве) записывается в виде

$$\begin{aligned} d(A dx + B dy + C dz) &= \frac{\partial A}{\partial y} dy \wedge dx + \frac{\partial A}{\partial z} dz \wedge dx + \frac{\partial B}{\partial x} dx \wedge dy + \\ &+ \frac{\partial B}{\partial z} dz \wedge dy + \frac{\partial C}{\partial x} dx \wedge dz + \frac{\partial C}{\partial y} dy \wedge dz = \left(\frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y} \right) dx \wedge dy + \\ &+ \left(\frac{\partial C}{\partial y} - \frac{\partial B}{\partial z} \right) dy \wedge dz + \left(\frac{\partial A}{\partial z} - \frac{\partial C}{\partial x} \right) dz \wedge dx. \end{aligned} \quad (2.253)$$

Проанализировав этот пример, читатель поймет, как оператор d действует на произвольную форму, и убедится, что 2-форма

$$\omega_2 = f dx \wedge dy + g dy \wedge dz + h dz \wedge dx$$

имеет внешнюю производную вида

$$d\omega_2 = \left(\frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial y} \right) dx \wedge dy \wedge dz. \quad (2.254)$$

В первом примере (2.253) величины

$$\frac{\partial C}{\partial y} - \frac{\partial B}{\partial z}, \quad \frac{\partial A}{\partial z} - \frac{\partial C}{\partial x}, \quad \frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y}$$

являются компонентами $\text{rot } \mathbf{F}$, где $\mathbf{F} = i\mathbf{A} + j\mathbf{B} + k\mathbf{C}$. Во втором примере, вводя вектор $(g, h, f) = \mathbf{W}$, имеем

$$\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z} = \text{div } \mathbf{W}.$$

Заметим теперь, имея в виду равенство (2.254), что если мы вычислим внешнюю производную величины (2.253), то получим тождественный нуль, иными словами,

$$d[d(A dx + B dy + C dz)] = d^2(A dx + B dy + C dz) = 0,$$

или в общем случае

$$d^2 = 0. \quad (2.255)$$

На языке компонент это равенство запишется в виде

$$\text{div rot} = 0.$$

Оператор d иногда называют *оператором кограницы*, подчеркивая то обстоятельство, что равенство $d^2 = 0$ дуально равенству $\partial^2 = 0$ [формула (2.248)]. Соотношение $d^2 = 0$ носит название *леммы Пуанкаре*.

n -форма ω_n называется замкнутой, если $d\omega_n = 0$.

n -форма ω_n называется точной, если она равна производной от некоторой $(n-1)$ -формы: $\omega_n = d\omega_{n-1}$.

Лемма Пуанкаре гласит, что все точные формы являются замкнутыми, поскольку $d(d\omega_{n-1}) = d^2\omega_{n-1} = 0$. Однако в общем случае утверждение, что все замкнутые формы являются точными, неверно, хотя это и так в случае евклидовых пространств. Это также следует из дуальности цепей и форм: в евклидовых пространствах все замкнутые цепи являются границами.

Хорошо известные результаты следуют из *формулы Стокса*, которая устанавливает следующую связь между p -формой ω и $(p+1)$ -цепью c :

$$\int_c \omega = \int_C d\omega. \quad (2.256)$$

В качестве примера рассмотрим случай $p = 2$. Пусть дана 2-форма ω (в трехмерном пространстве):

$$\omega_2 = A_x dy \wedge dz + A_y dz \wedge dx + A_z dx \wedge dy,$$

и пусть C_3 — область V с границей ∂V . В этом случае формула Стокса дает

$$\begin{aligned} \int_{\partial V} (A_x dy \wedge dz + A_y dz \wedge dx + A_z dx \wedge dy) &= \\ &= \int_V \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right) dx \wedge dy \wedge dz, \end{aligned}$$

где мы использовали (2.254); это равенство можно переписать в виде

$$\oint_{\partial V} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \int_V \text{div } \mathbf{A} dV. \quad (2.257)$$

Равенство (2.257) называют теоремой о дивергенции (или теоремой Гаусса)¹⁾. Читатель может показать в качестве упражнения, что при $p = 1$ мы получаем теорему Стокса

$$\oint_{\partial A} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \int_A \text{rot } \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}. \quad (2.258)$$

Мы рассматривали соотношения, существующие между оператором внешнего дифференцирования d и обычными дифференциальными операторами grad , div и rot . Но, как это видно из вывода формулы (2.257), приведенного выше, если компоненты вектора \mathbf{A} являются коэффициентами 2-формы, то $\text{div } \mathbf{A}$ является коэффициентом 3-формы, полученной действием d на 2-форму. На языке обычных векторов оператор ∇ превращает скаляр в вектор, а вектор — либо в скаляр (div), либо в аксиальный вектор (rot). Существует, однако, оператор, не изменяющий векторного характера величин; это — *лапласиан* ∇^2 (даламбертиан \square в четырех измерениях). Величина $\nabla^2 \phi$ является скаляром, величина $\nabla^2 \mathbf{A}$ — вектором и т. д. Как это выражается на языке форм? Оператор d превращает p -форму в $(p+1)$ -форму, так что нам необходимо найти другой оператор (δ), который превращает p -форму в $(p-1)$ -форму. Мы сейчас покажем, как это делается.

Будем работать для определенности в трехмерном пространстве. Пространство 1-форм, очевидно, является трехмерным с базисом dx , dy и dz . Пространство 2-форм, очевидно, тоже трехмерно. В действительности мы можем записать базисы следующим образом.

Базисы ω_p в случае $n = 3$

¹⁾ В отечественной литературе равенство (2.257) принято называть теоремой Гаусса — Остроградского. — *Прим. ред.*

$$\begin{aligned}\omega_0 &: 1, \\ \omega_1 &: dx, dy, dz, \\ \omega_2 &: dx \wedge dy, dy \wedge dz, dz \wedge dx, \\ \omega_3 &: dx \wedge dy \wedge dz.\end{aligned}\quad (2.259)$$

Ясно, что в трехмерном пространстве не существуют 4-формы. Ясно также, что размерность пространства p -форм равна размерности пространства $(n - p)$ -форм. Таким образом, мы можем определить оператор, переводящий одно из них в другое. Он называется *оператором Ходжа или преобразованием дуальности* и обозначается звездочкой $*$. В евклидовом (плоском) пространстве это преобразование определяется соотношением

$$\begin{aligned}*(dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \dots \wedge dx^{i_p}) &= \\ = \frac{1}{(n-p)!} \varepsilon_{i_1 i_2 \dots i_p i_{p+1} \dots i_n} dx^{i_{p+1}} \wedge dx^{i_{p+2}} \wedge \dots \wedge dx^{i_n}.\end{aligned}\quad (2.260)$$

Таким образом, при $n = 3$ мы имеем следующие базисы для $*\omega$ -форм.

Базисы $*\omega$ -форм при $n = 3$

$$\begin{aligned}*\omega_0 &: dx \wedge dy \wedge dz, \\ *\omega_1 &: dy \wedge dz, dz \wedge dx, dx \wedge dy, \\ *\omega_2 &: dz, dx, dy, \\ *\omega_3 &: 1.\end{aligned}\quad (2.261)$$

Повторное действие оператора $*$ на p -форму ω_p дает

$$**\omega_p = (-1)^{p(n-p)} \omega_p. \quad (2.262)$$

(Чтобы убедиться в том, что действительно изменяется знак, достаточно рассмотреть простой случай $p = 1, n = 2$.) Очевидно, что наряду с соотношением $d\omega_p \sim \omega_{p+1}$ справедливо соотношение $d(*\omega_p) \sim *\omega_{p-1}$. Определим оператор δ как

$$\delta = (-1)^{np+n+1} *d*, \quad (2.263)$$

где p есть степень той формы ω_p , на которую действует оператор δ , а n — размерность пространства. Оператор δ называют *присоединенным оператором внешнего дифференцирования*. Ясно, что степень формы $\delta\omega$ равна $(p - 1)$.

Для иллюстрации покажем, что оператор δ превращает 1-форму $v \cdot ds$ в 0-форму:

$$\delta(v \cdot ds) = \delta(v_x dx + v_y dy + v_z dz) =$$

$$\begin{aligned}&= - *d*(v_x dx + v_y dy + v_z dz) = \\ &= - *d(v_x dy \wedge dz + v_y dz \wedge dx + v_z dx \wedge dy) = \\ &= - * \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) dx \wedge dy \wedge dz = - \operatorname{div} v.\end{aligned}\quad (2.264)$$

Легко видеть, что, так же как и в случае оператора d , квадрат оператора δ равен нулю:

$$\delta\delta = (-1)^{np+n+1} (-1)^{n(p-1)+n+1} *d**d* = (-1)^{pn-p^2+n} *d^{2*}.$$

С учетом равенства (2.255) имеем

$$\delta^2 = 0. \quad (2.265)$$

Наконец, *лапласиан* Δ переводит p -формы в p -формы и определяется как

$$\Delta = (d + \delta)^2 = d\delta + \delta d. \quad (2.266)$$

После этого долгого вступления легко записать уравнения Максвелла в геометрической (или «внутренней») форме. Мы, очевидно, работаем в 4-мерном пространстве-времени Минковского. Опуская индексы в тензоре поля $F^{\mu\nu}$ в формуле (2.222), получаем ($E_x \equiv E_1$ и т. д.)

$$\begin{aligned}F_{01} &= E_x, F_{02} = E_y, F_{03} = E_z, \\ F_{12} &= -B_z, F_{31} = -B_y, F_{23} = -B_x.\end{aligned}\quad (2.267)$$

Определим далее 2-форму *Фарадея* F как

$$\begin{aligned}F &= -\frac{1}{2} F_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu = \\ &= (E_x dx + E_y dy + E_z dz) \wedge dt + \\ &+ B_z dx \wedge dy + B_x dy \wedge dz + B_y dz \wedge dx.\end{aligned}\quad (2.268)$$

Дуальная форма (которая также является 2-формой) $*F$ имеет вид [формула (2.260)]

$$\begin{aligned}*F &= -\frac{1}{2} F_{\mu\nu}^* (dx^\mu \wedge dx^\nu) = -E_x dy \wedge dz - E_y dz \wedge dx - \\ &- E_z dx \wedge dy + (B_x dx + B_y dy + B_z dz) \wedge dt.\end{aligned}\quad (2.269)$$

Легко видеть, что компонентами формы $*F$ в базисе $dx^\mu \wedge dx^\nu$ являются величины $-(1/2)\tilde{F}_{\mu\nu}$, определенной равенством (2.235):

$$*F = -\frac{1}{2} \tilde{F}_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu. \quad (2.270)$$

Наконец, определим плотность тока как 3-форму J :

$$J = (j_x dy \wedge dz + j_y dz \wedge dx + j_z dx \wedge dy) \wedge dt - \rho dx \wedge dy \wedge dz. \quad (2.271)$$

Простые вычисления показывают, что уравнения Максвелла имеют вид

$$\blacksquare dF = 0, \quad d^*F = J. \quad (2.272)$$

Это легко показать, записав $F = -(1/2) F_{\mu\nu} \wedge dx^\mu \wedge dx^\nu$ и заметив, что из уравнения $dF = 0$ следует уравнение (2.233), которое эквивалентно двум однородным уравнениям Максвелла. Но можно действовать иначе: используя соотношение (2.268), путем прямого вычисления находим

$$\begin{aligned} dF &= \frac{\partial E_x}{\partial y} dy \wedge dx \wedge dt + \frac{\partial E_x}{\partial z} dz \wedge dx \wedge dt + \\ &+ \frac{\partial E_y}{\partial x} dx \wedge dy \wedge dt + \dots \\ &+ \frac{\partial B_z}{\partial z} dz \wedge dx \wedge dy + \frac{\partial B_z}{\partial t} dt \wedge dx \wedge dy + \dots = \\ &= \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial t} \right) dx \wedge dy \wedge dt + \dots \\ &\dots + (\operatorname{div} \mathbf{B}) dx \wedge dy \wedge dz. \end{aligned} \quad (2.273)$$

Следовательно, из уравнения $dF = 0$ вытекают два уравнения

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{B} = 0,$$

т. е. однородные уравнения Максвелла. Аналогично можно показать, что уравнение $*dF = J$ эквивалентно неоднородным уравнениям.

В евклидовом пространстве (которое с учетом наших целей может быть расширено до пространства Минковского) справедлива лемма, обратная лемме Пуанкаре: все замкнутые формы являются точными, так что если $dF = 0$, то существует 1-форма A , такая, что

$$F = dA. \quad (2.274)$$

В координатном базисе 1-форма A имеет вид

$$A = A_\mu dx^\mu, \quad (2.275)$$

откуда прямо следует, что равенство (2.274) эквивалентно соотношению $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$, т. е. соотношению (2.219). Геометрический смысл 1-формы A более глубок: это форма связности, используемая для определения ковариантных производных, которые рассматриваются в следующей главе. Если же мы исходим из той точки зрения, что присутствие электромагнитного поля требует введе-

ния ковариантной производной и, следовательно, 1-формы связности A , то величина $F = dA$ есть так называемая 2-форма «кривизны», а тождество $dF = 0$ есть *тождество Бьянки*.

Резюме¹⁾

2) Скалярные частицы описываются уравнением Клейна — Гордона, однако имеются трудности в интерпретации, связанные с тем, что плотность вероятности не является положительно определенной и существуют состояния с отрицательной энергией. Делается вывод, что уравнение Клейна — Гордона нельзя рассматривать как уравнение для одной частицы. 3) Уравнение Дирака описывает частицы со спином 1/2 и может быть выведено с помощью группы $SL(2, C)$, которая, как показывает, включает преобразования Лоренца, расширенные за счет включения пространственных отражений. Решениям уравнения Дирака соответствует положительная плотность вероятности, однако наряду с состояниями с положительной энергией существуют состояния с отрицательной энергией. Показывается, что безмассовые частицы со спином 1/2 удовлетворяют уравнению Вейля. 4) Гипотеза о том, что состояния с отрицательными энергиями заполнены, приводит к успешному предсказанию античастиц. 5) Показывается, как строить спиноры, удовлетворяющие уравнению Дирака, исследуются трансформационные свойства билинейных форм $\bar{\psi}\psi$, а также различные алгебраические тождества, включающие спиноры и γ -матрицы. 6) Уравнение Дирака дает правильное значение гиромагнитного отношения для электрона. 7) Показывается, что инвариантный оператор Казимира для спина $s(s+1)$ строится не из генераторов группы Лоренца, а из генераторов неоднородной группы Лоренца (т. е. группы Пуанкаре). Другой инвариантный оператор Казимира — это m^2 (где m — масса). Частицам с $m^2 > 0$ соответствует «малая группа» $SU(2)$, которая интерпретируется как группа спина. Частицам с $m^2 = 0$ и $m^2 < 0$ соответствуют некомпактные малые группы, так что их спин не описывается группой вращений. 8) Уравнения Максвелла представляются в явно ковариантной форме. Записываются уравнения Прока для массивных частиц со спином 1. 9) Вводятся понятия цепей и дифференциальных форм, уравнения Максвелла записываются через дифференциальные формы.

Литература для дальнейшего изучения

Изложение теории спиноров и связи между группами $O(3)$ и $SU(2)$ можно найти в книгах:

1. Van der Waerden B. L. Group Theory and Quantum Mechanics, Springer-

¹⁾ Цифры — номера параграфов.

- Verlag, 1974. [Имеется перевод 1-го издания: Ван-дер-Варден Б. Л. Метод теории групп в квантовой механике. — Харьков: ДНТБУ, 1938.]
2. Landau L. D., Lifshitz E. M. Quantum Mechanics, Pergamon Press, 1977, § 55, 56. [См. также: Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Квантовая механика. — М.: Наука, 1974.]
 3. Misner C. W., Thorne K. S., Wheeler J. A. Gravitation, Freeman W. H. and Co., 1973. [Имеется перевод: Мизнер Ч., Торн К., Уилер Дж. Гравитация. — М.: Мир, 1977.]
 4. Sexl R. U., Urbantke H. K. Relativität, Gruppen, Teilchen, Springer-Verlag, 1976.
 5. Normand J. M. A Lie Group: Rotations in Quantum Mechanics, North-Holland Publishing Company, 1980.

Топологическое различие между группами $SU(2)$ и $O(3)$ объясняется в § 7.6 книги [4] и в статьях:

6. Speiser D. — in: Group Theoretical Methods and Concepts in Elementary Particle Physics, ed. F. Gürsey, Gordon and Breach, 1964.
7. Gürsey F. — in: Relativity, Groups and Topology, eds. B. DeWitt, C. DeWitt, Blackie and Sons, Ltd (London), Gordon and Breach (New York), 1964.

Блестящее изложение (на французском языке) теории группы Лоренца и ее связи с группой $SL(2, C)$ содержится в статье:

8. Wightman A. S. — in: Relations de Dispersion et Particules Élémentaires, eds. C. DeWitt, R. Omnès, Hermann and John Wiley, 1960.
См. также [1, 3, 4] и работы:
9. Omnès R., Froissart M. — in: High Energy Physics, eds. C. DeWitt, M. Jacob, Gordon and Breach, 1965.
10. Berestetskii V. B., Lifshitz E. M., Pitaevskii L. P. Relativistic Quantum Theory, Pergamon Press, 1971, Part 1, § 17, 18. [См. также: Берестецкий В. Б., Лифшиц Е. М., Питаевский Л. П. Релятивистская квантовая теория. — М.: Наука, 1968, ч. 1, § 17, 18.]

- Полное изложение теории уравнения Дирака см., например, в книгах:
11. Bjorken J. D., Drell S. D. Relativistic Quantum Mechanics, McGraw-Hill, 1964. [Имеется перевод: Бьёркен Дж. Д., Дрелл С. Д. Релятивистская квантовая теория. Т. 1. Релятивистская квантовая механика. — М.: Наука, 1978.]
 12. Itzykson C., Zuber J. B. Quantum Field Theory, McGraw-Hill, 1980. [Имеется перевод: Ицкисон К., Зюбер Ж.-Б. Квантовая теория поля. — М.: Мир, 1984.]

Теория Вигнера группы Пуанкаре изложена в работе:

13. Wigner E. P. Ann. Math., 40, 149 (1939).

См. также:

14. Wigner E. P. — in: Theoretical Physics, International Atomic Energy Agency, Vienna, 1963.

Релятивистская трактовка спина изложена в статьях [8, 9] и в работе:

15. Gürsey F. — in: High Energy Physics, eds. C. DeWitt, M. Jacob, Gordon and Breach, 1965.

Более раннее и достаточно краткое изложение можно найти в статье:

16. Pauli W. Ergebnisse der exakten Naturwissenschaften, 37, 85 (1965).

Связь между группой Пуанкаре и волновыми уравнениями установлена в работе:

17. Bargmann V., Wigner E. P. Proc. Nat. Acad. Sciences (USA), 34, 211 (1948).

Дальнейшее исследование этого вопроса см. в работах:

18. Weinberg S. Phys. Rev., 133B, 1318 (1964); 134B, 882 (1964).
- 18a. Johnson K., Lichtenberg D. B., Schwinger J., Weinberg S. Lectures on Particles and Field Theory (Brandeis Summer Institute in Theoretical Physics, 1964), Prentice-Hall, Inc., 1965, vol. 2.

Введение в теорию дифференциальных форм, доступное для физиков, можно найти в книгах:

19. Flanders H. Differential Forms with Applications to the Physical Sciences, Academic Press, 1963.
20. Choquet-Bruhat Y., Morette-DeWitt C., Bleik-Dillard M. Analysis, Manifolds and Physics, North-Holland Publishing Company, 1977.
21. Choquet-Bruhat Y. Géométrie Différentielle et Systèmes Extérieurs, Dunod, 1968.
22. Schutz B. Geometrical Methods of Mathematical Physics, Cambridge University Press, 1980. [Имеется перевод: Шутц Б. Геометрические методы математической физики. — М.: Мир, 1984.]
23. Eguchi T., Gilkey P. B., Hanson A. J. Phys. Rep., 66, 213 (1980).
24. Von Westenholz C. Differential Forms in Mathematical Physics, North-Holland Publishing Company, 1978.

Менее полное, однако весьма доступное изложение дано в книге [3, гл. 3, 4, 8, 9], а также в обзорной статье:

25. Misner C. W., Wheeler J. A. Ann. of Phys., 2, 525 (1957).

Лагранжева формулировка, симметрии и калибровочные поля

Выше в данной книге мы рассматривали только поля, отвечающие *свободым* частицам со спином $1/2$, таким, как электрон, и частицам со спином 1 , таким, как фотон. Но совершенно ясно (это почти тавтология), что мы можем наблюдать частицы лишь благодаря их *взаимодействию*. Таким образом, огромное значение имеет вопрос о том, как описывать взаимодействия частиц в теории поля. В прежние времена, в 50-е и 60-е годы, допускался некоторый произвол в выборе взаимодействия. Например, пион-нуклонное взаимодействие можно было представить либо в виде $\bar{\psi}_N \gamma_5 \psi_N \phi_\pi$, либо в виде $\bar{\psi}_N \gamma^4 \gamma_5 \psi_N \delta_\pi \phi_\pi$. Современные же теории не допускают такой свободы. Они исходят из того, что вид взаимодействий между *фундаментальными* полями (такими, как электроны, кварки, векторные бозоны слабых взаимодействий и т. д.) диктуется принципом калибровочной инвариантности. Этот принцип вытекает из требования, чтобы сохраняющиеся величины сохранялись не только глобально, но и *локально*. Глобально закон сохранения электрического заряда выполнялся бы, если бы электрический заряд, скажем, 10 Кл вдруг исчез на Земле и одновременно появился на Марсе. Однако под «сохранением заряда» мы обычно подразумеваем нечто большее. Такое исчезновение недопустимо, поскольку обычные представления о непрерывности требуют, чтобы исчезновение заряда в одной точке сопровождалось появлением тока, благодаря которому и возможно возникновение заряда в другой точке.

Эти вопросы составляют содержание теоремы Нётер, которая связывает симметрии с законами сохранения в рамках лагранжевой формулировки теории поля. При этом оказывается, что, для того чтобы локальная симметрия имела место, необходимо, чтобы существовало безмассовое калибровочное поле со спином 1 , взаимодействие которого с полями «материи» диктуется однозначно. Это дает нам электромагнитное, слабое и сильное взаимодействия, которым в качестве калибровочных полей соответствуют фотон, слабый бозон и глюоны.

Таким образом, мы начнем с рассмотрения лагранжевой формулировки теории поля, которая играет столь важную роль в современных представлениях о взаимодействиях и симметриях. В классической физике под «лагранжевой формулировкой» мы понимаем «принцип наименьшего действия». Это дает нам динамический принцип, на котором основана формулировка проблемы. Когда в последующих главах мы перейдем к рассмотрению квантовой теории полей, мы также используем лагранжеву формулировку в рамках фейнмановского формализма функционального интегрирования, который тесно связан с формулировкой классической теории поля, основанной на принципе наименьшего действия.

Простейшим классическим полем, которое мы рассмотрим, является скалярное поле. Но, чтобы освоиться с методом лагранжева формализма, мы сначала рассмотрим классическую механику точечных частиц и выведем закон движения Ньютона из принципа наименьшего действия.

§ 3.1. Лагранжева формулировка механики частицы

В классической механике частица идеализируется в виде точки с массой m . Пусть в момент времени t она находится в положении $x(t)$. Если частица движется в области, где потенциальная энергия равна $V(x)$, то второй закон Ньютона гласит:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = F = - \frac{dV}{dx}, \quad (3.1)$$

где F — сила, действующая на частицу. Принцип наименьшего действия дает возможность вывести это уравнение. Лагранжиан L определяется соотношением

$$L = T - V = \frac{1}{2} m \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 - V(x), \quad (3.2)$$

где T и V — кинетическая и потенциальная энергия. Действие S определяется соотношением

$$S = \int L dt, \quad (3.3)$$

где интеграл берется по всему пути от t_1 до t_2 , как показано на рис. 3.1:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(x, \dot{x}) dt. \quad (3.4)$$

Здесь и в дальнейшем используются обозначения $dx/dt = \dot{x}$, $d^2x/dt^2 = \ddot{x}$.

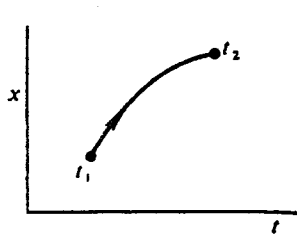


Рис. 3.1. Траектория в пространстве-времени.

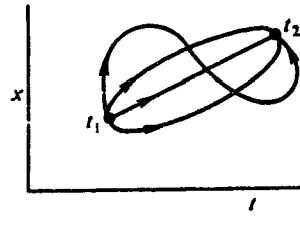


Рис. 3.2. Некоторые из бесконечного числа траекторий, проходящих через две точки.

При перемещении из точки $x(t_1)$ в точку $x(t_2)$ частица может двигаться по одной из бесконечного числа возможных траекторий типа изображенных на рис. 3.2. Которую из них частица выбирает в действительности? Ответ на этот вопрос дается принципом наименьшего действия, который устанавливает, что для истинной траектории движения величина S минимальна. Покажем теперь, что это приводит к закону Ньютона.

Рассмотрим вариацию траектории

$$x(t) \rightarrow x'(t) = x(t) + a(t), \quad a \ll x.$$

Частица должна находиться в точке $x(t_1)$ в момент времени t_1 и в точке $x(t_2)$ в момент времени t_2 . Таким образом, конечные точки траектории фиксированы, и, следовательно,

$$a(t_1) = a(t_2) = 0. \quad (3.5)$$

После подстановки $x \rightarrow x'$ действие S принимает вид

$$\begin{aligned} S \rightarrow S' &= \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{m}{2} (\dot{x} + \dot{a})^2 - V(x + a) \right] dt = \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + m \dot{x} \dot{a} - [V(x) + aV'(x)] \right\} dt + O(a^2) = \\ &= S + \int_{t_1}^{t_2} [m \dot{x} \dot{a} - aV'(x)] dt \equiv S + \delta S, \end{aligned}$$

где

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} (m \dot{x} \dot{a} - aV'(x)) dt, \quad (3.6)$$

а $V'(x) = dV(x)/dx$. Если величина S минимальна, то при вариации по x мы имеем $\delta S = 0$. Первый член в выражении для δS можно проинтегрировать по частям, что дает

$$\int_{t_1}^{t_2} \dot{x} \dot{a} dt = \dot{x} a \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} a \ddot{x} dt = - \int_{t_1}^{t_2} a \ddot{x} dt$$

[последнее равенство следует из формулы (3.5)]. Таким образом, мы приходим к соотношению

$$\delta S = - \int_{t_1}^{t_2} [m a \ddot{x} + aV'(x)] dt = 0,$$

которое выполняется, если справедливо равенство

$$m \ddot{x} = -V'(x), \quad (3.7)$$

а это не что иное, как закон Ньютона (3.1).

§ 3.2. Действительное скалярное поле; вариационный принцип и теорема Нётер

Переход от точечной частицы, находящейся в положении $x(t)$, к полю $\varphi(x^\mu) = \varphi(x, y, z, t)$ наглядно можно представить как «замену» x на φ , а t на x^μ . Скалярное поле φ удовлетворяет уравнению Клейна — Гордона (2.16)

$$(\square + m^2)\varphi = 0, \quad (3.8)$$

однако должно быть ясно, что в данной трактовке φ интерпретируется как *скалярное поле*, а не одночастичная волновая функция, как в гл. 2. В таком случае можно спросить: что такое m ? Ответ на этот вопрос будет дан в гл. 4, где мы увидим, что в результате квантования классического скалярного поля мы приходим к интерпретации его как частиц и что частицы обладают массой m .

Покажем теперь, как вывести уравнение (3.8) из вариационного принципа, примененного к действию

$$S = \int \mathcal{L}(\varphi, \partial_\mu \varphi) d^4x, \quad (3.9)$$

где $\partial_\mu \varphi \equiv \partial \varphi / \partial x^\mu$. Выражение (3.9) следует сравнить с выражениями (3.3) и (3.4). Функцию \mathcal{L} называют лагранжевой плотностью для данной теории, поскольку величина $L = \int \mathcal{L} d^3x$, очевидно, является лагранжианом. Тем не менее мы будем называть \mathcal{L} просто лагранжианом. Обычно полагают, что \mathcal{L} зависит только от поля φ и от его первых производных. В этом нет необходимости в том смысле, что выводы, которые будут сделаны ниже, остаются справедливыми и в случае, когда \mathcal{L} зависит от производных φ второго

и более высоких порядков. Но мы для простоты будем считать указанное предположение выполненным. Мы увидим, что уравнение Клейна — Гордона выводится из лагранжиана

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \varphi) (\partial^\mu \varphi) - \frac{m^2}{2} \varphi^2 = \frac{1}{2} [(\partial_0 \varphi)^2 - (\nabla \varphi)^2 - m^2 \varphi^2]. \quad (3.10)$$

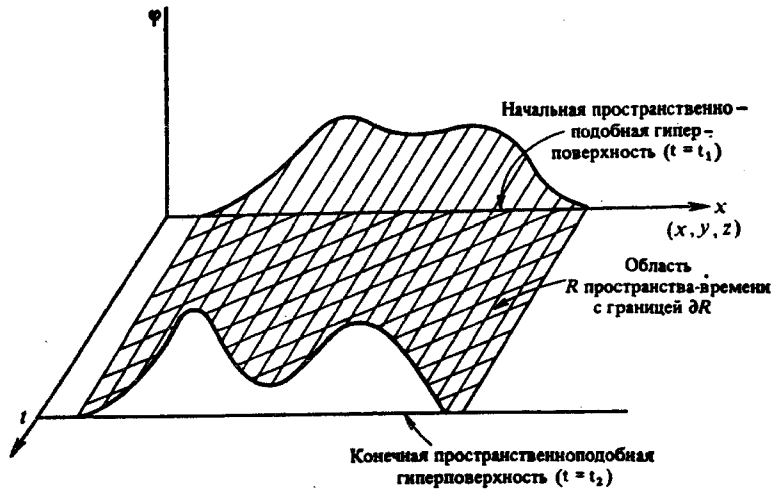


Рис. 3.3. Поле φ выделяет область R в пространстве-времени.

Поле φ заполняет 4-мерную область R в пространстве-времени, как это схематически изображено на рис. 3.3. В качестве начальной и конечной пространственноподобных поверхностей можно взять временные срезы $t = t_1$ и $t = t_2$, которые образуют часть границы ∂R области R . Рассмотрим теперь вариации как полевой переменной φ , так и координат x . Эти вариации обращаются в нуль на границе ∂R :

$$\begin{aligned} x^\mu &\rightarrow x'^\mu = x^\mu + \delta x^\mu, \\ \varphi(x) &\rightarrow \varphi'(x) \equiv \varphi(x) + \delta\varphi(x). \end{aligned} \quad (3.11)$$

Удобно рассмотреть случай, когда \mathcal{L} явно зависит от x^μ :

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\varphi, \partial_\mu \varphi, x^\mu). \quad (3.12)$$

Так обстоит дело, когда φ взаимодействует с внешним источником и, стало быть, не описывает замкнутую систему.

Важно заметить, что вариация $\delta\varphi$, как она определена в формуле (3.11), является функциональной вариацией величины φ : φ' сравнивается с φ в той же самой точке пространства-времени x^μ . Мы

можем также определить полную вариацию $\Delta\varphi$ поля φ соотношением

$$\varphi'(x') = \varphi(x) + \Delta\varphi(x). \quad (3.13)$$

В приближении первого порядка по δx мы имеем

$$\begin{aligned} \Delta\varphi &= \varphi'(x') - \varphi(x') + \varphi(x') - \varphi(x) = \\ &= \delta\varphi + (\partial_\mu \varphi) \delta x^\mu. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Вариация действия равна

$$\delta S = \int \mathcal{L}(\varphi', \partial_\mu \varphi', x'^\mu) d^4 x' - \int \mathcal{L}(\varphi, \partial_\mu \varphi, x^\mu) d^4 x,$$

где $d^4 x' = J(x'/x) d^4 x$, причем $J(x'/x)$ — якобиан преобразования $x \rightarrow x'$. Из (3.11) следует равенство

$$\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\lambda} = \delta^\mu_\lambda + \partial_\lambda \delta x^\mu,$$

так что

$$J(x'/x) = \det \left(\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\lambda} \right) = 1 + \partial_\mu (\delta x^\mu).$$

Имеем

$$\delta S = \int (\delta \mathcal{L} + \mathcal{L} \partial_\mu \delta x^\mu) d^4 x, \quad (3.15)$$

где

$$\delta \mathcal{L} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} \delta \varphi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi)} \delta (\partial_\mu \varphi) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\mu} \delta x^\mu. \quad (3.16)$$

Из формулы (3.11) явствует, что $\delta(\partial_\mu \varphi) = \partial_\mu \delta\varphi$, в силу чего из (3.15) и (3.16) следует

$$\delta S = \int_R \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} \delta \varphi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi)} \partial_\mu (\delta \varphi) + \partial_\mu (\mathcal{L} \delta x^\mu) \right] d^4 x, \quad (3.17)$$

где, как указано, интеграл берется по области R пространства-времени. Третий член в этом выражении представляет собой полную дивергенцию. Второй член можно переписать таким образом, чтобы возникла полная дивергенция:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi)} \partial_\mu (\delta \varphi) = \partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi)} \delta \varphi \right] - \partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi)} \right] \delta \varphi.$$

Интегралы от полных дивергенций по R можно преобразовать в поверхностные интегралы по ∂R , используя четырехмерное обобщение теоремы Гаусса (2.257). Это дает

$$\delta S = \int_R \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} - \partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi)} \right] \right\} \delta \varphi d^4x + \int_{\partial R} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi)} \delta \varphi + \mathcal{L} \delta x^\mu \right] d\sigma_\mu. \quad (3.18)$$

Мы уже условились, что вариации величин φ и x^μ обращаются в нуль на границе R :

$$\delta \varphi = 0, \delta x^\mu = 0 \text{ на } \partial R.$$

Поэтому второй член в выражении (3.18) равен нулю, и мы получаем условие стационарности действия в виде

$$\square \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi)} \right] = 0. \quad (3.19)$$

Данное уравнение называется *уравнением Эйлера — Лагранжа* для φ . Это уравнение движения для поля φ , аналогичное ньютонову уравнению движения для точечной массы. Как мы уже знаем, искомым уравнением движения является уравнение Клейна — Гордона, и теперь легко показать, что, как и предсказывалось, подстановка лагранжиана (3.10) в уравнение Эйлера — Лагранжа приводит к уравнению Клейна — Гордона. В самом деле, запишем лагранжиан (3.10) в виде

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} g^{\lambda\mu} (\partial_\lambda \varphi) (\partial_\mu \varphi) - \frac{m^2}{2} \varphi^2$$

(напомним, что μ и λ — немые индексы). Это дает

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} = -m^2 \varphi, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi)} = g^{\mu\nu} (\partial_\nu \varphi) = \partial^\mu \varphi,$$

так что уравнение Эйлера — Лагранжа принимает вид

$$\partial_\mu \partial^\mu \varphi + m^2 \varphi \equiv \square \varphi + m^2 \varphi = 0,$$

т. е. мы получаем уравнение Клейна — Гордона. Если читателю все это покажется сверхъестественным, то развеим иллюзию: лагранжиан *преднамеренно* выбран в виде (3.10), чтобы получалось уравнение Клейна — Гордона.

Рассмотрим теперь другое следствие вариационного принципа. Оно состоит в том, что если действие не меняется при изменении параметризации величин x^μ и φ , или, иными словами, инвариантно по отношению к некоторой группе преобразований, действующей на x^μ и φ , то существует одна (или более) сохраняющаяся величина, т. е. комбинация полей и их производных, которая инвариантна относительно указанных преобразований. Этот очень важный результат и есть теорема Нётер, которая играет столь существенную роль в теории поля и физике частиц. Из нее вытекают законы со-

хранения энергии, импульса, углового момента и других «квантовых»¹⁾ чисел, которыми могут обладать частицы: электрического заряда, изоспина, цвета и т. д. (Однако существуют сохраняющиеся величины другого типа, которые являются «топологическими» по своей природе, сохранение которых не связано с теоремой Нётер. Эти вопросы будут рассмотрены в гл. 10.) Мы сначала дадим довольно общий анализ теоремы Нётер, а затем применим ее к законам сохранения энергии, импульса и углового момента.

Вернемся к выражению (3.18) для вариации действия и перепишем поверхностный член следующим образом:

$$\begin{aligned} \delta S = & \int_R \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} - \partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi)} \right] \right\} \delta \varphi d^4x + \\ & + \int_{\partial R} \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi)} [\delta \varphi + (\partial_\nu \varphi) \delta x^\nu] - \right. \\ & \left. - \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi)} (\partial_\nu \varphi) - \delta_\nu^\mu \mathcal{L} \right] \delta x^\nu \right\} d\sigma_\mu. \end{aligned}$$

Мы просто прибавили и вычли один и тот же член. Первая квадратная скобка в поверхностном интеграле содержит полную вариацию $\Delta \varphi$, определенную формулой (3.14). Вторая квадратная скобка определяет *тензор энергии-импульса* θ^μ_ν :

$$\theta^\mu_\nu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi)} \partial_\nu \varphi - \delta_\nu^\mu \mathcal{L}. \quad (3.20)$$

То, что эта величина соответствует данному названию, будет показано ниже. Мы имеем далее

$$\begin{aligned} \delta S = & \int_R \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} - \partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi)} \right] \right\} \delta \varphi d^4x + \\ & + \int_{\partial R} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi)} \Delta \varphi - \theta^\mu_\nu \delta x^\nu \right] d\sigma_\mu. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Предположим теперь, что действие S инвариантно относительно некой группы преобразований, действующих на x^μ и φ . Пусть соответствующие инфинитезимальные преобразования имеют вид

¹⁾ В соответствии с неточной, но общепринятой терминологией принято называть изоспин, странность и т. д. «квантовыми числами». В отличие от квантовых чисел n , l и m в случае атома водорода вовсе не ясно, имеют ли указанные величины отношение к квантовой теории, т. е. зависят ли они от \hbar . Электрический заряд определенно не зависит от \hbar и поэтому не является квантовым числом.

$$\Delta x^\nu = X^\nu_\lambda \delta \omega^\lambda, \quad \Delta \varphi = \Phi_\mu \delta \omega^\mu, \quad (3.22)$$

где $\delta \omega^\nu$ — инфинитезимальный параметр. Здесь X^ν_λ — матрица, а Φ_μ — набор чисел. Если ν — простой индекс, то группа преобразований четырехпараметрическая, однако мы не ограничиваемся этим случаем. Индекс ν может быть двойным, как это должно быть в случае преобразований Лоренца. Таким образом, число параметров не равняется с необходимостью четырём, хотя форма записи (3.22), казалось бы, говорит об этом. Кроме того, мы можем рассмотреть более общий случай, когда мы имеем мультиплет скалярных полей φ_i . В этом случае поля φ_i будут преобразовываться по формуле

$$\Delta \varphi_i = \Phi_{ij} \delta \omega_j, \quad (3.23)$$

где Φ — матрица. Если принять формулы (3.22) непосредственно и предположить далее, что преобразованное поле φ удовлетворяет уравнению (3.19), то из требования $\delta S = 0$ с учетом (3.21) и (3.22) мы получаем

$$\int_{\partial R} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi)} \Phi_\nu - \theta^\mu_\lambda X^\lambda_\nu \right] \delta \omega^\nu d\sigma_\mu = 0$$

или, поскольку параметры $\delta \omega^\nu$ произвольны,

$$\int_{\partial R} J^\mu_\nu d\sigma_\mu = 0, \quad (3.24)$$

где

$$J^\mu_\nu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi)} \Phi_\nu - \theta^\mu_\lambda X^\lambda_\nu. \quad (3.25)$$

Из теоремы Гаусса следует, что $\int_R \partial_\mu J^\mu_\nu d^4x = 0$. Поскольку область R произвольна, на этом основании получаем

$$\partial_\mu J^\mu_\nu = 0. \quad (3.26)$$

Таким образом, мы имеем *сохраняющийся (т. е. с равной нулю дивергенцией) ток* J^μ_ν , существование которого следует из инвариантности действия относительно преобразований (3.22). В этом причина существования *сохраняющегося (не зависящего от времени) заряда* Q_ν , определяемого как

$$Q_\nu = \int J^\mu_\nu d\sigma_\mu,$$

где интеграл берется по пространственноподобной гиперповерх-

ности σ_μ . Если в качестве последней выбрать гиперплоскость $t = \text{const}$, то получим

$$Q_\nu = \int_V J^\mu_\nu d^3x, \quad (3.27)$$

где интеграл берется по трехмерному объему V . Сохранение величины Q_ν можно доказать, интегрируя уравнение (3.26) по объему V :

$$\int_V \partial_\mu J^\mu_\nu d^3x + \int_V \partial_i J^i_\nu d^3x = 0.$$

Второй член преобразуется в поверхностный интеграл на основании (трехмерной) теоремы Гаусса и обращается в нуль, если поверхность выбрана достаточно далекой. В результате мы имеем выражение

$$\frac{d}{dt} \int_V J^0_\nu d^3x = \frac{dQ_\nu}{dt} = 0. \quad (3.28)$$

Это и есть утверждение *теоремы Нётер*. Применим ее к случаю, когда преобразование (3.22) является просто трансляцией в пространстве и времени. В этом случае

$$\Delta x^\mu = \varepsilon^\mu, \quad \Delta \varphi = 0 \quad (3.29)$$

или

$$X^\mu_\nu = \delta^\mu_\nu, \quad \Phi_\mu = 0. \quad (3.30)$$

Требование такой инвариантности является весьма фундаментальным: оно представляет собой условие того, что (для замкнутых систем) законы физики трансляционно-инвариантны, т. е. одинаковы в Лондоне, Нью-Йорке и на Андромеде, а также инвариантны относительно смещений во времени, т. е. одинаковы вчера, сегодня и завтра. Если бы эти условия не выполнялись, то, очевидно, сама наука была бы невозможна. Из формул (3.30) и (3.25) мы видим, что сохраняющийся ток в этом случае имеет вид

$$J^\mu_\nu = -\theta^\mu_\nu, \quad (3.31)$$

а соответствующий закон сохранения записывается в виде

$$\frac{d}{dt} \int \theta^0_\nu d^3x = 0. \quad (3.32)$$

Покажем теперь, что величина $P_\nu = \int \theta^0_\nu d^3x$ есть 4-импульс, или энергия-импульс, поля φ (тем самым будет оправдано название тензор энергии-импульса для θ^μ_ν). Используя (3.20), мы имеем

$$\int \theta_0^0 d^3x = \int \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 \varphi)} \partial_0 \varphi - \mathcal{L} \right\} d^3x = \int \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} \dot{\varphi} - \mathcal{L} \right\} d^3x, \quad (3.33)$$

где $\varphi = \partial\varphi/\partial t$. Напомним, что в механике точечной частицы соотношение между гамильтоновой и лагранжевой функциями (см., например, [1, гл. 7]) таково:

$$H = \sum_i p_i \dot{q}_i - L,$$

где импульс p_i определяется равенством

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}.$$

Записывая соответствующие соотношения для случая полей, мы видим, что правая часть равенств (3.33) представляет собой энергию поля. То, что $\int \theta_0^0 d^3x$ есть импульс, прямо следует из того, что величина $\partial\varphi/\partial x^i$ при преобразованиях Лоренца преобразуется как 4-вектор, т. е. в точности как энергия-импульс.

Таким образом, сохранение энергии и импульса имеет место для любой системы, лагранжиан (и, следовательно, действие) которой не зависит от x^μ . Это согласуется со сделанным ранее [после формулы (3.12)] замечанием, что такая система не может обмениваться энергией и импульсом со своим окружением. Подставляя лагранжиан (3.10) в выражение (3.20) для тензора энергии-импульса $\theta^{\mu\nu}$, получаем

$$\theta^{\mu\nu} = (\partial^\mu \varphi)(\partial^\nu \varphi) - g^{\mu\nu} \mathcal{L}. \quad (3.34)$$

Данное выражение, очевидно, симметрично по μ и ν . Следовательно, в случае скалярного поля тензор энергии-импульса симметричен. Но это не всегда так. Из определения (3.20) явствует, что тензор $\theta^{\mu\nu}$, вообще говоря, не является симметричным. В то же время он не является и однозначно определенным, поскольку мы можем добавить член $\partial_\lambda f^{\mu\lambda\nu}$, где $f^{\lambda\mu\nu} = -f^{\mu\lambda\nu}$, так что

$$\partial_\mu \partial_\lambda f^{\lambda\mu\nu} \equiv 0. \quad (3.35)$$

Следовательно, если мы определим величину

$$T^{\mu\nu} = \theta^{\mu\nu} + \partial_\lambda f^{\lambda\mu\nu}, \quad (3.36)$$

которую будем называть *каноническим* тензором энергии-импульса, то получим

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = \partial_\mu \theta^{\mu\nu} = 0, \quad (3.37)$$

причем величина $f^{\lambda\mu\nu}$ может быть выбрана таким образом, чтобы

тензор $T^{\mu\nu}$ был симметричным. Полный 4-импульс системы при этом не меняется, поскольку ($i = 1, 2, 3$)

$$\int \partial_\lambda f^{\lambda 0\nu} d^3x = \int \partial_i f^{i 0\nu} d^3x = \int f^{i 0\nu} d\sigma_i = 0$$

(здесь использована теорема Гаусса). Последнее равенство следует из того, что поверхность σ находится в бесконечности, где поля отсутствуют. Итак, хотя тензор энергии-импульса не является единственным, сами энергия и импульс определены однозначно.

Имеются соображения двойного рода, по которым нам желательно, чтобы канонический тензор энергии-импульса был симметричным. Во-первых, согласно общей теории относительности, этим тензором, входящим в правую часть эйнштейновских уравнений поля

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = -\frac{8\pi G}{c^2} T_{\mu\nu}, \quad (3.38)$$

определяется кривизна пространства. Поскольку тензор Риччи $R_{\mu\nu}$ и метрический тензор симметричны, тензор $T_{\mu\nu}$ тоже должен быть симметричным.

Во-вторых, симметрия тензора $T_{\mu\nu}$ желательна по соображениям, связанным с угловым моментом. Мы требуем инвариантности действия относительно пространственных вращений

$$\delta x^i = \varepsilon^{ij} x^j, \quad \varepsilon^{ij} = -\varepsilon^{ji} \quad (i, j = 1, 2, 3), \quad (3.39)$$

$$\delta\varphi = 0. \quad (3.40)$$

Поскольку группа вращений является подгруппой группы Лоренца, можно следующим образом обобщить соотношение (3.39):

$$\delta x^\mu = \varepsilon^\mu_\nu x^\nu, \quad \varepsilon^{\mu\nu} = -\varepsilon^{\nu\mu}. \quad (3.41)$$

Эти равенства можно записать в виде

$$\delta x^\mu = X^\mu_\rho \varepsilon^{\rho\sigma}, \quad X^\mu_\rho = \delta^\mu_\rho x^\sigma, \quad (3.42)$$

чтобы привести форму записи в соответствие с (3.22). При этом индекс ν , входящий в формулу (3.22), является двойным индексом. Из соотношения (3.25) (подставляя $\Phi = 0$ и $T^{\mu\nu}$ вместо $\theta^{\mu\nu}$) получаем сохраняющийся нётеровский ток:

$$J^{\mu\rho\sigma} = -T^\mu_\nu X^{\nu\rho\sigma} = -T^{\mu\rho} x^\sigma. \quad (3.43)$$

Поскольку же величина $\varepsilon^{\rho\sigma}$, входящая в (3.42), антисимметрична по ρ и σ , вклад в (3.42) дает только антисимметричная по нижним индексам часть величины X . Таким образом, мы можем совершить замену

$$X_{\rho\sigma}^{\mu} \rightarrow \frac{1}{2} (X_{\rho\sigma}^{\mu} - X_{\sigma\rho}^{\mu}),$$

благодаря чему вместо (3.43) имеем

$$J^{\mu\rho\sigma} = -\frac{1}{2} (T^{\mu\rho} x^{\sigma} - T^{\mu\sigma} x^{\rho}). \quad (3.44)$$

Компонента этого тока, отвечающая значению $\mu = 0$ (с точностью до численного множителя), представляет собой плотность углового момента поля. Угловой момент задается выражением

$$M^{\mu\nu} = \int (T^{0\mu} x^{\nu} - T^{0\nu} x^{\mu}) d^3x, \quad (3.45)$$

или

$$M^{\mu\nu} = \int \mathcal{M}^{0\mu\nu} d^3x, \quad (3.46)$$

где

$$\mathcal{M}^{0\mu\nu} = T^{0\mu} x^{\nu} - T^{0\nu} x^{\mu}. \quad (3.47)$$

Величина $M^{\mu\nu}$ сохраняется:

$$\frac{d}{dt} M^{\mu\nu} = 0,$$

а дивергенция тензора $\mathcal{M}^{\mu\nu\alpha}$ равна нулю:

$$\partial_{\rho} \mathcal{M}^{\mu\nu\rho} = 0. \quad (3.48)$$

Подстановка выражения $\mathcal{M}^{\mu\nu\alpha} = T^{\mu\alpha} x^{\nu} - T^{\nu\alpha} x^{\mu}$ в это равенство с учетом того, что $\partial_{\rho} T^{\rho\alpha} = 0$ [формула (3.37)] и $\partial_{\rho} x^{\alpha} = \delta_{\rho}^{\alpha}$, дает

$$T^{\mu\nu} = T^{\nu\mu}. \quad (3.49)$$

Таким образом, чтобы выполнялся закон сохранения углового момента, тензор энергии-импульса должен быть симметричным. Это — второе из соображений, по которым желательна симметрия тензора $T^{\mu\nu}$.

Чтобы быть точным, следует заметить, что тремя компонентами углового момента системы являются три пространственные компоненты тензора $M^{\mu\nu}$, определенного соотношением (3.45): M^{12} , M^{23} , M^{31} . Три пространственно-временные компоненты M^{01} , M^{02} и M^{03} описывают движение центра масс системы и сохраняются благодаря инвариантности относительно чисто лоренцевых преобразований («бустов») [формула (3.41)].

Этим завершается наше исследование происхождения законов сохранения энергии, импульса и углового момента. Все эти законы вытекают из пространственно-временных симметрий в силу

теоремы Нётер при ненулевых значениях величин X^{μ} в соотношении (3.25).

Обратимся теперь к электрическому заряду, который, как известно, тоже сохраняется. Если это следует из симметрии действия, то что это за симметрия? Она определенно не связана с величинами X^{μ} в формуле (3.25), поскольку все такие симметрии нами уже учтены. Максимальная симметрия, которую мы можем иметь в пространстве Минковского, состоит из пространственных трансляций, сдвигов во времени, вращений и преобразований Лоренца. Все эти симметрии мы уже рассмотрели. Любая дополнительная симметрия должна быть связана с Φ_{μ} . Иными словами, скалярное поле должно иметь *более чем одну компоненту*. (Мы отвлекаемся от случаев спинорного или векторного полей, когда различные компоненты связаны *пространственно-временными* преобразованиями. Следствием этого является то, что сохраняющийся тензор углового момента содержит дополнительные члены, интерпретируемые как внутренний спин и не имеющие никакого отношения к заряду! Поле Дирака в этом контексте будет рассмотрено ниже.) В простейшем случае поле ϕ обладает двумя компонентами. Поле с двумя действительными компонентами математически эквивалентно одному комплексному полю. Мы переходим к его рассмотрению.

§ 3.3. Комплексные скалярные поля и электромагнитное поле

Поскольку скалярное поле имеет теперь две действительные компоненты ϕ_1 и ϕ_2 , мы можем написать

$$\phi = (\phi_1 + i\phi_2)/\sqrt{2}, \quad (3.50)$$

$$\phi^* = (\phi_1 - i\phi_2)/\sqrt{2}, \quad (3.51)$$

и поскольку действие есть действительная величина, мы полагаем

$$\mathcal{L} = (\partial_{\mu}\phi)(\partial^{\mu}\phi^*) - m^2\phi^*\phi. \quad (3.52)$$

Рассматривая ϕ и ϕ^* как независимые поля, получаем в качестве уравнений Эйлера — Лагранжа (3.19) два уравнения Клейна — Гордона

$$(\square + m^2)\phi = 0, \quad (3.53)$$

$$(\square + m^2)\phi^* = 0. \quad (3.54)$$

Лагранжиан, очевидно, инвариантен относительно преобразования

$$\phi \rightarrow e^{-i\Lambda}\phi, \quad \phi^* \rightarrow e^{i\Lambda}\phi^*, \quad (3.55)$$

где Λ — действительная постоянная. Данное преобразование на-

зывается *калибровочным преобразованием первого рода*. В инфинитезимальном случае оно имеет вид

$$\delta\varphi = -i\Lambda\varphi, \quad \delta\varphi^* = i\Lambda\varphi^* \quad (3.56)$$

и, следовательно,

$$\delta(\partial_\mu\varphi) = -i\Lambda\partial_\mu\varphi, \quad \delta(\partial_\mu\varphi^*) = i\Lambda\partial_\mu\varphi^*. \quad (3.57)$$

Поскольку преобразование (3.55) не затрагивает пространства-времени (является чисто «внутренним»), в обозначениях формулы (3.22) мы имеем

$$\Phi = -i\varphi, \quad \Phi^* = i\varphi^*, \quad X = 0. \quad (3.58)$$

Далее, теорема Нётер дает сохраняющийся ток, который, согласно формуле (3.25), имеет вид

$$J^\mu = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi)} (-i\varphi) + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi^*)} (i\varphi^*). \quad (3.59)$$

(Здесь произведено эффективное суммирование по «внутренним индексам» φ , в результате чего возникли отдельные вклады от φ и φ^* .) Подставляя (3.52) в (3.59), получаем

$$J^\mu = i(\varphi^* \partial^\mu\varphi - \varphi \partial^\mu\varphi^*). \quad (3.60)$$

С учетом уравнений (3.53) и (3.54) непосредственно получаем, что 4-дивергенция этого тока равна нулю, как безусловно и должно быть:

$$\partial_\mu J^\mu = 0, \quad (3.61)$$

а соответствующая сохраняющаяся величина получается с помощью соотношения (3.27):

$$Q = \int J^0 dV = i \int \left(\varphi^* \frac{\partial\varphi}{\partial t} - \varphi \frac{\partial\varphi^*}{\partial t} \right) dV. \quad (3.62)$$

Мы предполагаем отождествить эту (действительную) величину с электрическим зарядом. В связи с этим отметим следующее:

1. Это сохраняющаяся величина: $dQ/dt = 0$.
2. В ее выражение не входит заряд протона e .
3. Это *классическая*, а не квантовая величина; в выражение (3.62) не входит \hbar .
4. Она не является «целочисленной» или «квантованной». Иными словами, в выражении (3.62) не учитывается то обстоятельство, что все реальные электрические заряды, по-видимому, кратны некоторому элементарному заряду.
5. Если поле φ действительно, т. е. $\varphi = \varphi^*$, то $Q = 0$ и сохра-

няющейся величины не существует; с таким положением мы имели дело выше.

Мы можем придать калибровочному преобразованию (3.55) геометрическую форму. Для этого подставим сначала выражения (3.50) и (3.51) в (3.52), что даст нам

$$\mathcal{L} = (\partial_\mu\varphi_1)(\partial^\mu\varphi_1) + (\partial_\mu\varphi_2)(\partial^\mu\varphi_2) - m^2(\varphi_1^2 + \varphi_2^2), \quad (3.63)$$

а затем запишем поле φ в виде

$$\varphi = i\varphi_1 + j\varphi_2, \quad (3.64)$$

т. е. в виде вектора в двумерном пространстве с ортонормированными базисными векторами i и j . Лагранжиан принимает теперь вид

$$\mathcal{L} = (\partial_\mu\varphi)(\partial^\mu\varphi) - m^2\varphi \cdot \varphi. \quad (3.65)$$

Калибровочные преобразования (3.55) записываются в виде

$$\varphi'_1 + i\varphi'_2 = e^{-i\Lambda}(\varphi_1 + i\varphi_2),$$

$$\varphi'_1 - i\varphi'_2 = e^{i\Lambda}(\varphi_1 - i\varphi_2),$$

или (что эквивалентно) в виде

$$\varphi'_1 = \varphi_1 \cos \Lambda + \varphi_2 \sin \Lambda,$$

$$(3.66)$$

$$\varphi'_2 = \varphi_1 \sin \Lambda + \varphi_2 \cos \Lambda.$$

Это, очевидно, вращение вектора φ в (1, 2)-плоскости на угол Λ , как показано на рис. 3.4. Вращения в двух измерениях образуют группу $O(2)$. В то же время, поскольку данное преобразование эквивалентно представляется в виде одномерной унитарной «матрицы» $e^{i\Lambda}$:

$$e^{i\Lambda} (e^{i\Lambda})^+ = 1,$$

рассматриваемая группа является группой $U(1)$. Таким образом, мы имеем дело с калибровочными преобразованиями, которые

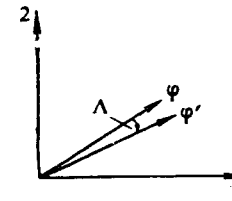


Рис. 3.4. Вращение поля φ в пространстве внутренней симметрии.

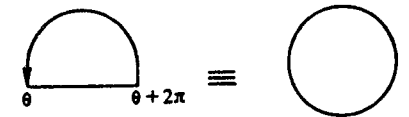


Рис. 3.5. Групповым пространством в случае группы $O(2)$ является окружность.

образуют группу $O(2) \approx U(1)$. [Легко видеть, что это одна и та же группа: каждый элемент группы $O(2)$ однозначно задается углом вращения в плоскости φ . Групповое пространство есть набор значений φ . Мы должны отождествить значения φ с $\varphi + 2\pi$, $\varphi + 4\pi$ и т. д., чтобы они соответствовали одному и тому же вращению. Таким образом, групповое пространство есть *окружность* (рис. 3.5). Группа же $U(1)$ — это группа всех комплексных чисел вида $e^{i\alpha} = \cos \alpha + i \sin \alpha$, и, поскольку $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$, соответствующее пространство есть также окружность.]

Вернемся к нашей основной теме. Мы рассматриваем существование сохраняющейся величины Q как следствие инвариантности действия относительно калибровочного преобразования (3.55) или (3.66). Но поскольку Λ — постоянная, это калибровочное преобразование должно быть одним и тем же для всех точек пространства-времени — это «глобальное» калибровочное преобразование. Таким образом, когда мы совершаем вращение во внутреннем пространстве поля φ в одной точке на угол Λ , мы должны *одновременно совершить то же самое вращение во всех других точках*. Если будем рассматривать такую картину всерьез, то увидим, что она неосуществима, поскольку противоречит букве и духу теории относительности, согласно которой должно существовать минимальное временное запаздывание, равное времени прохождения светового сигнала. Чтобы обойти эту трудность, мы просто опустим требование, чтобы Λ была константой, и будем считать ее произвольной функцией пространства-времени $\Lambda(x^\mu)$. Соответствующее преобразование называется «локальным» калибровочным преобразованием, поскольку оно, очевидно, меняется от точки к точке. Его также называют *калибровочным преобразованием второго рода*.

Теперь мы видим, что при $\Lambda \ll 1$

$$\varphi \rightarrow \varphi - i\Lambda\varphi$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} \delta\varphi &= -i\Lambda\varphi, \\ \delta_\mu\varphi &\rightarrow \delta_\mu\varphi - i(\partial_\mu\Lambda)\varphi - i\Lambda(\partial_\mu\varphi). \end{aligned} \quad (3.67)$$

Таким образом,

$$\delta(\partial_\mu\varphi) = -i\Lambda(\partial_\mu\varphi) - i(\partial_\mu\Lambda)\varphi, \quad (3.68)$$

и аналогично мы имеем

$$\delta\varphi^* = i\Lambda\varphi^*, \quad (3.69)$$

$$\delta(\partial_\mu\varphi^*) = i\Lambda(\partial_\mu\varphi^*) + i(\partial_\mu\Lambda)\varphi^*. \quad (3.70)$$

Сравнивая эти соотношения с соотношениями (3.56) и (3.57), мы видим, что в формулы для преобразования производных от полей теперь входит дополнительный член с $(\partial_\mu\Lambda)$. Поэтому, как явст-

вует из соотношений (3.67) и (3.68), величина $\delta_\mu\varphi$ преобразуется *нековариантно*, т. е. не таким же образом, как само поле φ . Более того, как мы сейчас увидим, благодаря этим добавочным членам само действие *не является более инвариантным*. В самом деле, изменение лагранжиана равно

$$\delta\mathcal{L} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi}\delta\varphi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi)}\delta(\partial_\mu\varphi) + (\varphi \rightarrow \varphi^*), \quad (3.71)$$

где « $(\varphi \rightarrow \varphi^*)$ » — сокращенная запись двух дополнительных членов с φ^* . Выражая первый член из уравнения Эйлера — Лагранжа (3.19) и используя равенства (3.67) и (3.68), получаем

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{L} &= \partial_\mu \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi)} \right] (-i\Lambda\varphi) + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi)} (-i\Lambda\partial_\mu\varphi - i\varphi\partial_\mu\Lambda) + \\ &+ (\varphi \rightarrow \varphi^*) = \\ &= -i\Lambda\partial_\mu \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi)} \varphi \right] - i \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi)} (\partial_\mu\Lambda)\varphi + (\varphi \rightarrow \varphi^*). \end{aligned}$$

Первый член пропорционален 4-мерной дивергенции тока, которая в силу равенства (3.61) равна нулю. Использование явного выражения (3.52) для лагранжиана дает

$$\delta\mathcal{L} = i\partial_\mu\Lambda(\varphi^*\partial^\mu\varphi - \varphi\partial^\mu\varphi^*) = J^\mu\partial_\mu\Lambda, \quad (3.72)$$

где J^μ — ток, даваемый формулой (3.60). Действие в том виде, в котором мы его записываем, неинвариантно относительно калибровочного преобразования второго рода. Чтобы сделать его инвариантным, мы введем новый 4-вектор A_μ , непосредственно взаимодействующий с током J^μ , что дает *дополнительный член в \mathcal{L}* :

$$\mathcal{L}_1 = -eJ^\mu A_\mu = -ie(\varphi^*\partial^\mu\varphi - \varphi\partial^\mu\varphi^*)A_\mu. \quad (3.73)$$

Константа связи e есть число такое, что произведение eA_μ имеет ту же размерность, что и $\partial/\partial x^\mu$. Мы потребуем также, чтобы при калибровочных преобразованиях второго рода величины A_μ преобразовывались по формуле

$$A_\mu \rightarrow A_\mu + \frac{1}{e}\partial_\mu\Lambda, \quad (3.74)$$

так что

$$\delta\mathcal{L}_1 = e(\delta J^\mu)A_\mu - eJ^\mu(\delta A_\mu) = -e(\delta J^\mu)A_\mu - J^\mu\partial_\mu\Lambda \quad (3.75)$$

За счет второго члена этого выражения уничтожается величина $\delta\mathcal{L}$ в выражении (3.72), но теперь требуется устранить первый член! Мы имеем

$$\delta J^{\mu} = i\delta(\varphi^* \partial^{\mu} \varphi - \varphi \partial^{\mu} \varphi^*) = 2\varphi^* \varphi \delta^{\mu} \Lambda. \quad (3.76)$$

Следовательно,

$$\delta \mathcal{L} + \delta \mathcal{L}_1 = -2eA_{\mu} (\partial^{\mu} \Lambda) \varphi^* \varphi. \quad (3.77)$$

Добавим к \mathcal{L} еще один член

$$\mathcal{L}_2 = e^2 A_{\mu} A^{\mu} \varphi^* \varphi. \quad (3.78)$$

В силу соотношения (3.74) имеем

$$\delta \mathcal{L}_2 = 2e^2 A_{\mu} \delta A^{\mu} \varphi^* \varphi = 2eA_{\mu} (\partial^{\mu} \Lambda) \varphi^* \varphi \quad (3.79)$$

и, стало быть,

$$\delta \mathcal{L} + \delta \mathcal{L}_1 + \delta \mathcal{L}_2 = 0. \quad (3.80)$$

В результате введения поля A_{μ} , связывающего ток J_{μ} с комплексным полем φ , полный лагранжиан $\mathcal{L} + \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2$ теперь инвариантен относительно калибровочных преобразований. Но поле A_{μ} , по-видимому, само должно давать вклад в лагранжиан. Поскольку величина $\mathcal{L} + \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2$ инвариантна, нам необходимо найти такой член \mathcal{L}_3 , который тоже был бы калибровочно-инвариантным. Чтобы построить такой член, введем четырехмерный ротор

$$F_{\mu\nu} = \partial_{\mu} A_{\nu} - \partial_{\nu} A_{\mu}. \quad (3.81)$$

Очевидно, что при калибровочном преобразовании (3.74) величина $F_{\mu\nu}$ инвариантна. Скалярный лагранжиан \mathcal{L}_3 возьмем в виде

$$\mathcal{L}_3 = -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}. \quad (3.82)$$

Собирая все формулы воедино, имеем

$$\mathcal{L}_{\text{полн}} = \mathcal{L} + \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2 + \mathcal{L}_3 = (\partial_{\mu} \varphi) (\partial^{\mu} \varphi^*) - ie(\varphi^* \partial^{\mu} \varphi - \varphi \partial^{\mu} \varphi^*) A_{\mu} + e^2 A_{\mu} A^{\mu} \varphi^* \varphi - m^2 \varphi^* \varphi - \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu},$$

$$\blacksquare \mathcal{L}_{\text{полн}} = (\partial_{\mu} \varphi + ieA_{\mu} \varphi) (\partial^{\mu} \varphi^* - ieA^{\mu} \varphi^*) - m^2 \varphi^* \varphi - \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}. \quad (3.83)$$

В величине $F_{\mu\nu}$, определенной равенством (3.81), мы узнаем *тензор электромагнитного поля* (2.219), шесть компонент которого — это три компоненты электрического и три компоненты магнитного поля. Итак, мы показали, что электромагнитное поле появляется *естественным образом* как следствие требования инвариантности действия относительно калибровочного преобразования второго рода, т. е.

относительно *локальных* (зависящих от x) вращений во внутреннем пространстве комплексного поля φ . Калибровочный потенциал A_{μ} связан с током J_{μ} , причем константа связи e есть заряд поля φ . Чтобы разобраться в этих результатах более детально, для удобства разделим их на четыре пункта.

1. Сравнивая лагранжианы (3.83) и (3.52), мы видим, что величины $\partial_{\mu} \varphi$ заменяются величинами $(\partial_{\mu} + ieA_{\mu})\varphi$. Последние обозначаются через $D_{\mu} \varphi$:

$$\blacksquare D_{\mu} \varphi = (\partial_{\mu} + ieA_{\mu})\varphi, \quad (3.84)$$

и называются «ковариантными производными», поскольку в отличие от $\partial_{\mu} \varphi$ преобразуются ковариантно при калибровочных преобразованиях, т. е. так же, как и сами поля φ . В самом деле, из соотношений (3.67), (3.68) и (3.74) прямо следует равенство

$$\delta(D_{\mu} \varphi) = \delta(\partial_{\mu} \varphi) + ie(\delta A_{\mu})\varphi + ieA_{\mu} \delta \varphi = -i\Lambda(\partial_{\mu} \varphi + ieA_{\mu} \varphi) = -i\Lambda(D_{\mu} \varphi), \quad (3.85)$$

т. е. закон ковариантного преобразования. Правило, согласно которому в присутствии электромагнитного поля производные ∂_{μ} заменяются величинами $\partial_{\mu} + ieA_{\mu}$, эквивалентно результату, хорошо известному из классической физики. Поскольку при $c = 1$

$$\partial_{\mu} = (\partial_0, \nabla), \quad A_{\mu} = (\varphi, -\mathbf{A}),$$

то «пространственная» часть правила подстановки имеет вид

$$\nabla \rightarrow \nabla - ie\mathbf{A}.$$

Положив $\mathbf{p} = -i\hbar\nabla$, при $\hbar = 1$ имеем

$$\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{p} - e\mathbf{A}. \quad (3.86)$$

Если обобщенный импульс \mathbf{P} определяется как $\partial L / \partial \mathbf{v}$, где L — лагранжиан, то в присутствии электромагнитного поля в случае частицы, обладающей зарядом e , он запишется в виде

$$\mathbf{P} = \mathbf{p} + e\mathbf{A} = \gamma m \mathbf{v} + e\mathbf{A}. \quad (3.87)$$

Легко видеть, что гамильтониан частицы с зарядом e , взаимодействующей с электромагнитным полем, равен

$$H = \frac{1}{2m} (\mathbf{P} - e\mathbf{A})^2 + e\varphi.$$

Это соответствует подстановке (3.86). Подробнее см. [8, разд. 16; 2, т. 3, разд. 21—31.]

Теперь ясно, что функция φ описывает поле с зарядом e , а функция φ^* , ковариантная производная которой имеет вид

$$\blacksquare D_{\mu} \varphi^* = (\partial_{\mu} - ieA_{\mu})\varphi^*, \quad (3.88)$$

описывает поле с зарядом $-e$. Таким образом, поля φ_1 и φ_2 в соотношениях (3.50) и (3.51) не являются собственными состояниями оператора заряда.

2. Идентичность уравнений (3.81) и (2.219) гарантирует, что компенсирующий векторный потенциал, введенный в (3.73), действительно является электромагнитным векторным потенциалом и, следовательно, для $F_{\mu\nu}$ справедливы однородные уравнения Максвелла. Кроме того, калибровочное преобразование (3.74) при $\Lambda = e\chi$ совпадает с преобразованием (2.226). Мы приходим к новой интерпретации электромагнитного поля: *это калибровочное поле, которое необходимо ввести, чтобы гарантировать инвариантность относительно локальных $U(1)$ -калибровочных преобразований.*

Отметим, что уравнения Максвелла следуют из выражения (3.83) при вариациях векторного потенциала A_μ . Уравнение Эйлера — Лагранжа

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\mu} - \partial_\nu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\nu A_\mu)} \right] = 0$$

дает

$$\begin{aligned} \partial_\nu F^{\mu\nu} &= -ie(\varphi^* \partial^\mu \varphi - \varphi \partial^\mu \varphi^*) + 2e^2 A^\mu |\varphi|^2 = \\ &= -ie(\varphi^* D^\mu \varphi - \varphi D^\mu \varphi^*) \equiv -eJ^\mu, \end{aligned} \quad (3.89)$$

где величина

$$J^\mu = i(\varphi^* D^\mu \varphi - \varphi D^\mu \varphi^*) \quad (3.90)$$

есть ковариантная форма тока J^μ (3.60). Благодаря антисимметрии тензора $F^{\mu\nu}$ из (3.89) немедленно следует равенство

$$\partial_\mu J^\mu = 0, \quad (3.91)$$

т. е. в присутствии электромагнитного тока сохраняется ток J^μ , а не J^μ .

3. Из предыдущей главы нам уже известно, что электромагнитное поле является *безмассовым*, однако имеет смысл вновь обратить внимание на этот момент. Массовый член в лагранжиане имел бы вид

$$\mathcal{L}_M = M^2 A_\mu A^\mu. \quad (3.92)$$

Очевидно, что он неинвариантен относительно калибровочных преобразований (3.74). Таким образом, *калибровочная инвариантность требует, чтобы калибровочное поле было безмассовым.* В обычном подходе то обстоятельство, что электромагнитное поле не имеет массы и потому распространяется со скоростью света, вытекает из теории относительности.

4. Заряд e выступает как *константа связи*, входящая в определение ковариантной производной (3.84) и (3.88). В самом деле,

из лагранжиана (3.83) видно, что интенсивность взаимодействия поля φ с электромагнитным полем характеризуется множителем e . Это проясняет *двойную роль электрического заряда*. С одной стороны, заряд, как мы уже установили, есть сохраняющаяся величина [см. выше соотношение (3.62), которое теперь следует модифицировать, заменив ток J^μ током $J^{\mu 0}$]. С другой стороны, заряд — это мера интенсивности, с которой частица взаимодействует с электрическим и магнитным полями. Этот динамический аспект заряда является следствием «калибровочного принципа», который в связи с этим играет столь важную роль в современной физике частиц. Когда, например, мы обнаруживаем сохраняющиеся величины (такие, как изоспин, странность и т. д.), мы можем задаться вопросом, существуют ли ассоциированные с ними безмассовые калибровочные поля, которые взаимодействуют с частицами, обладающими этими квантовыми числами, с определенной интенсивностью. Мы рассмотрим этот вопрос в § 3.5, где данные рассуждения будут обобщены на случай, когда лагранжиан инвариантен относительно группы $SU(2)$, а не $U(1)$. Но сначала остановимся на весьма интересном и красивом следствии калибровочной инвариантности в электродинамике, а именно на эффекте Ааронова — Бома.

§ 3.4. Топология и вакуум: эффект Ааронова — Бома

В классической физике сила, действующая на заряженную частицу с зарядом e в электромагнитном поле, дается формулой Лоренца

$$\mathbf{F} = e\mathbf{E} + e\mathbf{v} \times \mathbf{B}, \quad (3.93)$$

где \mathbf{E} и \mathbf{B} — электрическое поле и магнитная индукция, связанные с вектор-потенциалом \mathbf{A} и скалярным потенциалом φ соотношениями (2.218):

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla\varphi, \quad \mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}.$$

Как мы видели в предыдущей главе, величины \mathbf{A} и φ не определены однозначно. Они могут меняться при калибровочных преобразованиях (2.225) [или, что эквивалентно, (3.74)], относительно которых \mathbf{E} и \mathbf{B} инвариантны. В этой связи обычно утверждается, что единственным физическим воздействием электромагнитного поля на заряд является сила Лоренца (3.93), причем последняя действует только в тех областях, где \mathbf{E} или \mathbf{B} отличны от нуля. Эффект Ааронова — Бома показывает, что в квантовой механике это не так: физические эффекты имеют место и в областях, где \mathbf{E} и \mathbf{B} равны нулю, но потенциал A_μ отличен от нуля. Следовательно, векторный потенциал A_μ имеет более глубокий физический смысл, чем это считалось раньше.

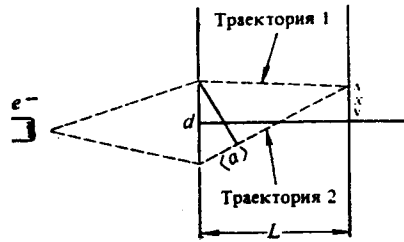


Рис. 3.6. Схема опыта с двумя щелями по интерференции электронов.

$$\delta = 2\pi \frac{a}{\lambda} = \frac{a}{\lambda c}$$

При $x \ll L$ мы имеем $a = (x/L)d$, так что

$$\delta = \frac{x}{L} \frac{d}{\lambda c}; \quad x = \frac{L\lambda c}{d} \delta. \tag{3.94}$$

В точках, где $\delta = 2n\pi$, мы имеем максимумы, а в точках, где $\delta = (2n + 1)\pi$ — минимумы, т. е. эта формула описывает интерференционную картину.

Идея Ааронова и Бома [10] состояла в том, чтобы поместить за экраном со щелями в промежутке между ними малый соленоид (рис. 3.7). *Внутри* соленоида имеются линии магнитной индукции B , но вне соленоида их нет. Таким образом, если соленоид достаточно мал, то все электроны движутся в области, в которой поле

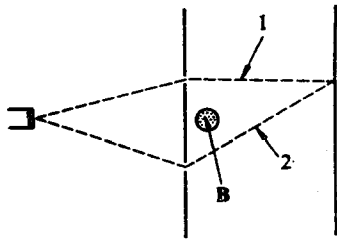


Рис. 3.7. Эффект Ааронова — Бома. Между двумя щелями помещен соленоид.

Эффект относится к хорошо известному мысленному квантовомеханическому опыту с электронами, проходящими через две щели (рис. 3.6). В силу волновой природы электронов, пока мы не фиксировали, через какую именно щель проходят электроны, они дают характерную интерференционную картину. Если длина волны электрона равна λ , то разность фаз волн, приходящих от двух щелей, равна

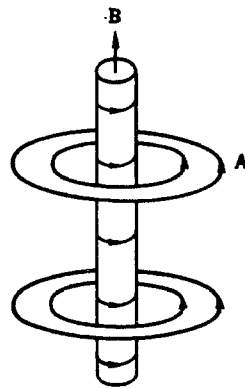


Рис. 3.8. Вектор-потенциал A и магнитная индукция B в соленоиде.

отсутствует. Нетрудно найти вид потенциала A , который давал бы магнитное поле соленоида (рис. 3.8). В цилиндрических координатах отлична от нуля только компонента потенциала A , отвечающая азимутальному углу φ : она имеет вид

Внутри соленоида $A_r = A_z = 0,$ (3.95)

$$A_\varphi = \frac{Br}{2},$$

Вне соленоида $A_r = A_z = 0,$ (3.96)

$$A_\varphi = \frac{BR^2}{2r},$$

где R — радиус соленоида. Поскольку $B = \nabla \times A$, в цилиндрических координатах мы получаем

$$B_z = \frac{1}{r} \left[\frac{\partial (rA_\varphi)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} \right]$$

и аналогичные формулы для B_r и B_φ . Это дает

Внутри соленоида $B_r = B_\varphi = 0,$ (3.97)

$$B_z = B.$$

Вне соленоида $B = 0,$ (3.98)

что и требуется.

Посмотрим теперь, как действует поле соленоида на электрон. Волновая функция электрона в свободном пространстве имеет вид

$$\psi = |\psi| \exp \frac{i}{\hbar} \mathbf{p} \cdot \mathbf{r} \equiv |\psi| \exp i\alpha. \tag{3.99}$$

При наличии электромагнитного поля импульс \mathbf{p} электрона изменится согласно формуле (3.86):

$$\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{p} - e\mathbf{A},$$

где e (отрицательный) заряд электрона. При этом фаза α волновой функции изменяется так:

$$\alpha \rightarrow \alpha - \frac{e}{\hbar} \mathbf{A} \cdot \mathbf{r}, \tag{3.100}$$

а изменение фазы вдоль всей траектории равно

$$\Delta\alpha = - \frac{e}{\hbar} \int_{\text{траектория}} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}. \tag{3.101}$$

Таким образом, для траекторий 1 и 2 (см. рис. 3.6 и 3.7) мы имеем

$$\Delta\alpha_1 = -\frac{e}{\hbar} \int_1 \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}, \quad \Delta\alpha_2 = -\frac{e}{\hbar} \int_2 \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}.$$

Следовательно, изменение разности фаз δ равно

$$\begin{aligned} \Delta\delta &= \Delta\alpha_1 - \Delta\alpha_2 = \frac{e}{\hbar} \oint_{2-1} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \frac{e}{\hbar} \int_{2-1} \text{rot } \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \frac{e}{\hbar} \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \\ &= \frac{e}{\hbar} \Phi, \end{aligned} \quad (3.102)$$

где Φ — магнитный поток через соленоид. В результате интерференционная картина сдвигается на величину

$$\Delta x = \frac{L\lambda}{d} \Delta\delta = \frac{L\lambda c}{d} \frac{e}{\hbar} \Phi. \quad (3.103)$$

Итак, конечный результат таков: *при наличии соленоида интерференционная картина сдвигается, хотя электроны движутся только в области, где магнитное поле отсутствует.*

Такой опыт нелегко провести, поскольку соленоид должен быть очень малым. В первом опыте Чамберса [11], в котором наблюдался этот эффект и было подтверждено согласие с теоретическим предсказанием, использовался намагниченный нитевидный монокристалл железа (1960 г.). Позже эффект был подтвержден в ряде других экспериментов.

Смысл этого эффекта состоит в том, что в квантовой теории вектор-потенциал \mathbf{A} воздействует на электрон даже тогда, когда движение последнего ограничено областями, в которых $\mathbf{B} = 0$. В то же время из соотношений (3.103) и (3.102) следует, что физические эффекты зависят только от $\text{rot } \mathbf{A}$. Приходится сделать вывод, что на электрон оказывают воздействие поля, которые отличны от нуля только в областях, недостижимых для него. Более формально это равносильно *нелокальному* характеру интеграла $\oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$.

Как мы сейчас покажем, эффект Ааронова — Бома обусловлен нетривиальной топологией вакуума и тем, что электродинамика является калибровочной теорией. В последнее время стало ясно, что вакуум в калибровочных теориях обладает богатой математической структурой с вытекающими из этого физическими следствиями, которые мы рассмотрим более полно в последующих главах. Эффект Ааронова — Бома является простейшей иллюстрацией той важной роли, которую играет топология в этой области физики.

Вне соленоида мы имеем $\mathbf{E} = 0$ и $\mathbf{B} = 0$, так что плотность энергии электромагнитного поля $U = 0$, т. е. мы находимся в вакууме. Но поскольку $\mathbf{A} \neq 0$, вакуум обладает некой «структурой».

На том основании, что $\text{rot } \mathbf{A} = 0$, мы можем написать $\mathbf{A} = \nabla\chi$, где χ — некоторая функция, которую можно найти, заметив, что, согласно формуле (3.95),

$$A_\varphi = \frac{1}{r} \frac{\partial \chi}{\partial \varphi} = \frac{BR^2}{2r},$$

откуда следует выражение

$$\chi = \frac{BR^2}{2} \varphi, \quad (3.104)$$

в котором опущена произвольная константа интегрирования. Функция χ не является однозначной, она возрастает на величину $\pi R^2 B$ при замене $\varphi \rightarrow \varphi + 2\pi$. В самом деле, из (3.102) следует

$$\begin{aligned} \Delta\delta &= \Delta\alpha = \frac{e}{\hbar} \int \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \frac{e}{\hbar} \int \nabla\chi \cdot d\mathbf{r} = \frac{e}{\hbar} \left[\chi \right]_{\varphi=0}^{\varphi+2\pi} = \frac{e}{\hbar} \pi R^2 B = \\ &= \frac{e}{\hbar} \Phi. \end{aligned} \quad (3.105)$$

Однако регулярные неоднозначные функции могут существовать лишь в *неодносвязных пространствах*. Односвязное пространство таково, что в нем любая замкнутая кривая может быть непрерывным образом сжата в точку. Неодносвязные пространства — это такие пространства, в которых не все кривые могут быть непрерывно сжаты в точку. В нашем случае мы имеем дело с пространством вакуума, т. е. с пространством вне соленоида, которое не является односвязным. Это явствует из рис. 3.9. Кривая c_1 может быть сжата в точку, а кривая c_2 — нет. Кроме того, кривая, обходящая соленоид n раз, не может быть деформирована в кривую, обходящую соленоид $m (\neq n)$ раз.



Рис. 3.9. Пространство, свободное от поля, в эффекте Ааронова — Бома не является односвязным.

Итак, функция χ многозначна, и это возможно благодаря тому, что она определена в неодносвязном пространстве. Этому эквивалентно обратное утверждение: *если бы функция χ была однозначной, то всюду выполнялись бы равенства $\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A} = \text{rot grad } \chi \equiv 0$ и магнитный поток вообще отсутствовал бы.*

Таким образом, необходимым условием существования эффекта Ааронова — Бома является неодносвязность конфигурационного пространства вакуума. В соотношении (3.104) функция χ задана в групповом пространстве калибровочной группы. $U(1)$:

$$A_\mu = \partial_\mu \chi. \quad (3.106)$$

В действительности A_μ является калибровочным преобразованием

«истинного» вакуума $A_\mu = 0$. Соответствующее калибровочное преобразование для заряженной частицы имеет вид $e^{-ie\chi}$, т. е. является элементом группы $U(1)$. Как уже отмечалось выше [см. рассуждения после формулы (3.66)], групповым пространством для группы $U(1)$ служит окружность, которую мы обозначаем через S^1 . Это групповое пространство неодносвязно, поскольку путь, обходящий окружность дважды, невозможно непрерывно деформировать (не покидая окружности) в кривую, которая обходит окружность только один раз. В действительности в групповом пространстве существует бесконечное число неэквивалентных путей. Определим теперь это понятие более формально.

Путь a в пространстве X определяется как непрерывная функция $a(s)$ действительного параметра s таким образом, что каждое значение s , заключенное в интервале $0 \leq s \leq 1$, соответствует точке $a(s)$ в пространстве X . Если путь a соединяет точки P и Q , то мы имеем $a(0) = P$, $a(1) = Q$. Если $a(0) = a(1) = P$, то мы имеем *замкнутый путь* (т. е. петлю) в точке P . Рассмотрим два замкнутых пути $a(s)$ и $b(s)$ и предположим, что существует функция $L(t, s)$, такая, что $L(0, s) = a(s)$, $L(1, s) = b(s)$. В этом случае пути a и b являются *гомотопными* и мы пишем $a \sim b$. Путь, *обратный* по отношению к пути a , обозначается через a^{-1} и определяется соотношением

$$a^{-1}(s) = a(1 - s). \quad (3.107)$$

Таким образом, он соответствует первоначальному пути, проходящему в обратном направлении. Если конечная точка пути a совпадает с начальной точкой пути b , так что $a(1) = b(0)$, то мы можем определить *произведение путей* $c = ab$ соотношениями

$$c(s) = \begin{cases} a(2s) & \text{при } 0 \leq s \leq 1/2, \\ b(2s - 1) & \text{при } 1/2 < s < 1. \end{cases} \quad (3.108)$$

Нулевой путь представляет собой одну точку. Если $a \sim b$, то путь ab^{-1} гомотопен нулевому пути.

Теперь мы можем построить группу, вводя *класс* путей, гомотопных пути a . Обозначим этот класс через $[a]$. Очевидно, что эти пути должны иметь совпадающие конечные точки. Классы гомотопий можно умножать друг на друга по закону умножения, который определяется следующим образом:

$$[a][b] = [ab]. \quad (3.109)$$

Нетрудно показать, что этим законом умножения определяется группа, называемая *фундаментальной группой* или *первой гомотопической группой* пространства X и обозначаемая через $\pi_1(X)$. Эта группа, введенная Пуанкаре в 1895 г., называется *первой гомотопической группой* пространства X в отличие от высших гомотопи-

ческих групп пространства X , которые были введены Гуревичем в 1935 г. Нам необходимо лишь убедиться в том, что выполняются групповые законы:

1. Замкнутость: если $[a] \in \pi_1(X)$ и $[b] \in \pi_1(X)$, то с учетом (3.109) и $[a][b] = [ab] \in \pi_1(X)$.

2. Ассоциативность: поскольку $(ab)c \sim a(bc)$, мы имеем $([a][b])[c] = [a]([b][c])$.

3. Единичный элемент: это класс, содержащий нулевой путь $[1]$, поскольку $[a][1] = [a]$.

4. Обратный элемент: $[a^{-1}][a] = [1]$, вследствие чего $[a]^{-1} = [a^{-1}]$.

Таким образом, мы заключаем, что первая гомотопическая группа $U(1)$ изоморфна группе целых чисел относительно сложения (целое число n соответствует замкнутому пути, который проходит n раз вдоль окружности S^1 в групповом пространстве). Эта группа обозначается символом Z . Это бесконечная абелева группа. Мы имеем

$$\pi_1(U_1) = Z. \quad (3.110)$$

Иными словами, эффект Ааронова — Бома обусловлен тем, что калибровочная группа электродинамики U_1 не является односвязной. (Пространство X является *односвязным*, если любой замкнутый путь в нем гомотопен нулевому пути, так что $\pi_1(X) = 1$.)

Конфигурационное пространство в эксперименте Ааронова — Бома представляет собой плоскость R^2 (которая символизирует множество пар действительных чисел) с дыркой. Топологически это эквивалентно прямому произведению прямой R^1 и окружности $S^1: R^1 \times S^1$. Прямую можно параметризовать, например, величиной r , а окружность — величиной φ . Калибровочная функция χ является отображением группового пространства G на конфигурационное пространство X :

$$\chi: G \rightarrow X. \quad (3.111)$$

В нашем случае G совпадает с S^1 , а X — с $S^1 \times R$. Правда, все функции, отображающие S^1 на R , можно деформировать в константу, так что нетривиальная часть функции имеет вид

$$\chi: S^1 \rightarrow S^1. \quad (3.112)$$

(В нашей задаче это фактически полная форма отображения χ , поскольку оно не зависит от r .) Но тем самым мы получаем способ определить гомотопические группы. Пусть $[X, Y]$ — множество всех классов гомотопии для непрерывных отображений X на Y . Вообще говоря, они образуют группу. Следовательно, множество

$$\{S^1, Y\} = \pi_1(Y) \quad (3.113)$$

есть первая гомотопическая группа для Y , т. е. «фундаментальная группа» Пуанкаре. Аналогично множество

$$\{S^n, Y\} = \pi_n(Y) \quad (3.114)$$

есть n -я гомотопическая группа для Y и представляет собой абелеву группу в случае $n > 2$. (Первая гомотопическая группа не всегда является абелевой, однако во всех физически интересных случаях это абелева группа.) Из (3.112) далее следует, что калибровочные функции χ разделяются на отдельные классы, порождающие группу

$$\{S^1, S^1\} = \pi_1(S^1) = Z. \quad (3.115)$$

После этого затянувшегося математического отступления мы можем подвести итог. В эксперименте Ааронова — Бома электроны дифрагируют по обе стороны бесконечного соленоида в области нулевого поля. Тем не менее наличие соленоида сказывается на расположении интерференционных полос. С математической точки зрения причина этого состоит в том, что конфигурационное пространство, соответствующее нулевому полю (вакууму), представляет собой плоскость с дыркой в ней, т. е. $S^1 \times R$. Векторный потенциал A_μ строится с помощью калибровочной функции χ , которая отображает калибровочное пространство на конфигурационное пространство. Эти отображения распадаются на отдельные классы, и, вследствие того что

$$\{S^1, U_1\} = \pi_1(U_1) = Z,$$

их невозможно деформировать в постоянную калибровочную функцию $\chi = \text{const}$ (которая, очевидно, приводила бы к равенству $A_\mu = 0$ и отсутствию эффекта Ааронова — Бома). В случае когда калибровочной группой является связная группа, подобная $SU(2)$:

$$\pi_1(SU(2)) = 1, \quad (3.116)$$

все отображения можно деформировать в постоянное отображение и эффект Ааронова — Бома отсутствует.

§ 3.5. Поле Янга — Миллса

Обобщим результаты § 3.3 на случай, когда лагранжиан обладает симметрией более высокой, чем $O(2)$ или $U(1)$. Простейшим обобщением этой симметрии является группа $SU(2)$. Данная группа, равно как и более сложные группы, рассматриваемые в физике, является неабелевой, т. е. у нас речь идет о теории *неабелевых калибровочных полей*.

Скалярное поле, которое мы рассматривали в § 3.3, обладало двумя компонентами, которые были связаны между собой вращениями в плоскости. Очевидный путь обобщения этого случая состоит в том, чтобы рассмотреть поле ϕ , обладающее тремя компонентами $\phi = (\phi_1, \phi_2, \phi_3)$ во «внутреннем» пространстве, и калибровочные преобразования (первого рода), представляющие собой вращения в этом пространстве. В результате мы будем иметь вместо заряда сохраняющуюся «векторную» величину, которая аналогична изоспину.

Гипотеза о том, что изоспиновая симметрия является локальной симметрией, была впервые выдвинута Янгом и Миллсом [17] в 1954 г. В течение многих лет их работа считалась бесперспективной, хотя и очень интересной, поскольку, как указывалось выше, не существует свидетельств того, что изоспин связан с калибровочной симметрией. В последние же годы идея Янга — Миллса была воскрешена в применении к теории сильных взаимодействий между кварками (цветовая калибровочная симметрия) и к единой теории слабых и электромагнитных взаимодействий (калибровочная симметрия слабого изоспина и гиперзаряда). Тем не менее ниже мы будем называть сохраняющуюся векторную величину изоспином, а внутреннее пространство, связанное с симметрией, пространством изоспина. Читатель должен помнить, что эти слова следует понимать в общем смысле.

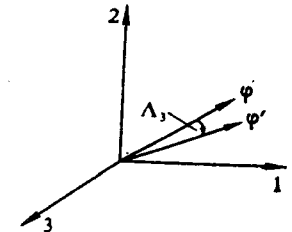


Рис. 3.10. Вращение вокруг 3-й оси в пространстве внутренней симметрии.

Возвращаясь на время к рис. 3.4, рассмотрим вращения в плоскости (1—2) как вращения вокруг 3-й оси, иными словами, как вращения на угол Λ_3 (рис. 3.10). Таким образом, из соотношения (3.66) следует

$$\begin{aligned} \phi'_1 &= \cos \Lambda_3 \phi_1 + \sin \Lambda_3 \phi_2, \\ \phi'_2 &= -\sin \Lambda_3 \phi_1 + \cos \Lambda_3 \phi_2, \\ \phi'_3 &= \phi_3. \end{aligned} \quad (3.117)$$

В случае бесконечно малого Λ_3 мы имеем

$$\begin{aligned} \phi'_1 &= \phi_1 + \Lambda_3 \phi_2, \\ \phi'_2 &= -\Lambda_3 \phi_1 + \phi_2, \\ \phi'_3 &= \phi_3, \end{aligned} \quad (3.118)$$

что представляет собой 3-ю компоненту соотношения

$$\phi \rightarrow \phi' = \phi - \Lambda \times \phi, \quad (3.119)$$

которое, следовательно, соответствует вращению вокруг произвольной оси на угол Λ . Смысл этого соотношения состоит в том, что величина $|\Lambda|$ есть угол вращения, а вектор $\Lambda/|\Lambda|$ задает направление оси вращения. Таким образом,

$$\delta\varphi = -\Lambda \times \varphi. \quad (3.120)$$

Это — калибровочное преобразование первого рода, аналогичное двум преобразованиям (3.67) и (3.69). Очевидно, что соотношение (3.120) фактически представляет собой три соотношения.

Наша стратегия теперь состоит в том, чтобы насколько можно дальше провести аналогию с электродинамикой. Но мы увидим, что данный случай более сложен, так как теперь вращения образуют неабелеву группу $O(3)$. В силу неабелева характера группы мы имеем $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}$, т. е. векторное произведение некоммутативно. Вскоре мы увидим, насколько это усложняет теорию. Эти усложнения имеют прямые физические следствия.

Сначала заметим, что соотношение (3.120) представляет собой предписание произвести вращение во внутреннем пространстве переменной φ на один и тот же угол Λ во всех точках пространства-времени. Мы заменим это более умеренным требованием, чтобы величина Λ зависела от x^μ . Тогда мы будем иметь

$$\partial_\mu \varphi \rightarrow \partial_\mu \varphi' = \partial_\mu \varphi - \partial_\mu \Lambda \times \varphi - \Lambda \times \partial_\mu \varphi,$$

или

$$\delta(\partial_\mu \varphi) = -\Lambda \times \partial_\mu \varphi - \partial_\mu \Lambda \times \varphi. \quad (3.121)$$

Иначе говоря, величина $\partial_\mu \varphi$ не преобразуется ковариантно, т. е. так же, как φ . Мы должны построить «ковариантную производную», аналогичную (3.84). При этом мы введем калибровочный потенциал, аналогичный A_μ . Запишем ковариантную производную в виде

$$\blacksquare D_\mu \varphi = \partial_\mu \varphi + g W_\mu \times \varphi. \quad (3.122)$$

Величина W_μ является калибровочным потенциалом, аналогичным A_μ . Заметим, что она является вектором во внутреннем пространстве, тогда как A_μ обладает только одной компонентой. Величина g есть константа связи, аналогичная электрическому заряду e . Путем сравнения с (3.120) мы приходим к требованию

$$\delta(D_\mu \varphi) = -\Lambda \times (D_\mu \varphi). \quad (3.123)$$

Как должен преобразовываться потенциал W_μ , чтобы удовлетворить этому требованию? Мы можем предположить следующее: во-первых, W_μ является (внутренним) вектором, а поэтому аналогично (3.120) формула преобразования для него должна содержать член $\Lambda \times W_\mu$; во-вторых, поскольку формула преобразования для A_μ содержит член с $(1/e)\partial_\mu \Lambda$ [формула (3.74)], соответствующая

формула для W_μ должна содержать член с $(1/g)\partial_\mu \Lambda$. В итоге мы пишем

$$W_\mu \rightarrow W_\mu - \Lambda \times W_\mu + \frac{1}{g} \partial_\mu \Lambda,$$

или

$$\delta W_\mu = -\Lambda \times W_\mu + \frac{1}{g} \partial_\mu \Lambda. \quad (3.124)$$

С учетом формул (3.120)—(3.122) получаем отсюда

$$\begin{aligned} \delta(D_\mu \varphi) &= \delta(\partial_\mu \varphi) + g(\delta W_\mu) \times \varphi + g W_\mu \times (\delta\varphi) = \\ &= -\Lambda \times \partial_\mu \varphi - \partial_\mu \Lambda \times \varphi - g(\Lambda \times W_\mu) \times \varphi + \\ &+ \partial_\mu \Lambda \times \varphi - g W_\mu \times (\Lambda \times \varphi) = -\Lambda \times \partial_\mu \varphi - g[(\Lambda \times W_\mu) \times \\ &\times \varphi + W_\mu \times (\Lambda \times \varphi)]. \end{aligned} \quad (3.125)$$

Далее, из векторного тождества

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{C} + (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) \times \mathbf{A} + (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) \times \mathbf{B} = 0$$

после перестановок следует соотношение

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{C} + \mathbf{B} \times (\mathbf{A} \times \mathbf{C}) = \mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}), \quad (3.126)$$

применив которое к выражению в квадратных скобках в (3.125), получим

$$\delta(D_\mu \varphi) = -\Lambda \times (\partial_\mu \varphi + g W_\mu \times \varphi) = -\Lambda \times D_\mu \varphi, \quad (3.127)$$

что и требовалось, т. е. правило ковариантного преобразования. Наше предположение о виде ковариантной производной оказалось правильным: если ввести калибровочный потенциал W_μ , который преобразуется по формуле (3.124), то ковариантная производная вектора φ запишется в виде (3.122).

Потенциал W_μ является аналогом потенциала A_μ ; какая величина является аналогом тензора напряженности поля $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$? Обозначим ее через $W_{\mu\nu}$. В отличие от тензора $F_{\mu\nu}$, который является скаляром по отношению к группе $O(2)$, величина $W_{\mu\nu}$ является вектором по отношению к группе $O(3)$ и, следовательно, должна преобразовываться так же, как и само поле φ :

$$\delta(W_{\mu\nu}) = -\Lambda \times W_{\mu\nu}. \quad (3.128)$$

Величина $W_{\mu\nu} = \partial_\mu W_\nu - \partial_\nu W_\mu$ не преобразуется по этому закону, поскольку

$$\delta(\partial_\mu W_\nu - \partial_\nu W_\mu) = \partial_\mu (-\Lambda \times W_\nu + \frac{1}{g} \partial_\nu \Lambda) -$$

$$-\partial_\nu \left(-\Lambda \times \mathbf{W}_\mu + \frac{1}{g} \partial_\mu \Lambda \right) = -\Lambda \times (\partial_\mu \mathbf{W}_\nu - \partial_\nu \mathbf{W}_\mu) -$$

$$-(\partial_\mu \Lambda \times \mathbf{W}_\nu - \partial_\nu \Lambda \times \mathbf{W}_\mu). \quad (3.129)$$

Второй член в этом выражении лишний, он должен выпадать при преобразовании. Заметим теперь, что

$$\delta(g \mathbf{W}_\mu \times \mathbf{W}_\nu) = g \left(-\Lambda \times \mathbf{W}_\mu + \frac{1}{g} \partial_\mu \Lambda \right) \times \mathbf{W}_\nu + g \mathbf{W}_\mu \times$$

$$\times \left(-\Lambda \times \mathbf{W}_\nu + \frac{1}{g} \partial_\nu \Lambda \right).$$

Первый и третий члены в этом выражении можно объединить с помощью формулы (3.126), что дает

$$\delta(g \mathbf{W}_\mu \times \mathbf{W}_\nu) = -g \Lambda \times (\mathbf{W}_\mu \times \mathbf{W}_\nu) + (\partial_\mu \Lambda \times \mathbf{W}_\nu -$$

$$-\partial_\nu \Lambda \times \mathbf{W}_\mu). \quad (3.130)$$

Второй член в последнем выражении совпадает со вторым членом в выражении (3.129), и мы можем определить величину

$$\mathbf{W}_{\mu\nu} = \partial_\mu \mathbf{W}_\nu - \partial_\nu \mathbf{W}_\mu + g \mathbf{W}_\mu \times \mathbf{W}_\nu, \quad (3.131)$$

которая преобразуется по требуемому закону (3.128). Напряженность поля $\mathbf{W}_{\mu\nu}$ есть вектор, а потому произведение $\mathbf{W}_{\mu\nu} \cdot \mathbf{W}^{\mu\nu}$ есть скаляр и входит в лагранжиан, который, таким образом, имеет вид

$$\mathcal{L} = (D_\mu \varphi) \cdot (D^\mu \varphi) - m^2 \varphi \cdot \varphi - \frac{1}{4} \mathbf{W}_{\mu\nu} \cdot \mathbf{W}^{\mu\nu}. \quad (3.132)$$

Уравнения движения выводятся из этого лагранжиана, как обычно, методом функциональных вариаций, так что уравнение Эйлера — Лагранжа имеет вид

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\mathbf{W}_\mu^i)} = \partial_\nu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\nu \mathbf{W}_\mu^i)} \right],$$

где i — внутренний индекс. После простых выкладок получаем

$$\partial^\nu \mathbf{W}_{\mu\nu} + g \mathbf{W}^\nu \times \mathbf{W}_{\mu\nu} = g [(\partial_\mu \varphi) \times \varphi + g (\mathbf{W}_{\mu\nu} \times \varphi) \times \varphi], \quad (3.133)$$

или с учетом выражения (3.122)

$$D^\nu \mathbf{W}_{\mu\nu} = g (D_\mu \varphi) \times \varphi \equiv g \mathbf{J}_\mu. \quad (3.134)$$

Это уравнение аналогично уравнению Максвелла (3.89), так что $\mathbf{W}_{\mu\nu}$ — «изоспиновое» калибровочное поле, а \mathbf{J}_μ — источник, или член, соответствующий «материи». Подчеркнем, что вместо обычных производных в уравнение (3.134) входят ковариантные произ-

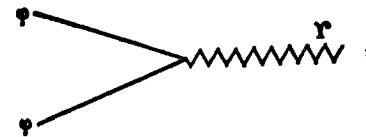
водные. Таким образом, уравнение (3.134) связывает ковариантную производную калибровочного поля с током «материи». В то время как уравнения Максвелла линейны по A_μ , рассматриваемое уравнение нелинейно по \mathbf{W}_μ . Следствие этого существенного различия таково. В то время как уравнение Максвелла (3.89) в отсутствие материи ($\varphi \rightarrow 0$) принимает вид

$$\partial^\nu F_{\mu\nu} = 0 \rightarrow \nabla \cdot \mathbf{E} = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \text{rot } \mathbf{B} = 0, \quad (3.135)$$

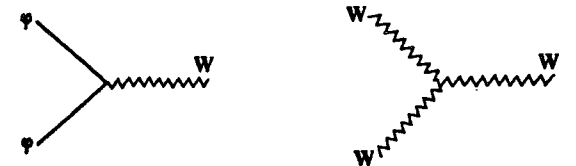
т. е. не содержит членов, являющихся источниками электромагнитного поля, уравнение для неабелева калибровочного поля (3.133) в отсутствие материи принимает вид

$$D^\nu \mathbf{W}_{\mu\nu} = 0 \rightarrow \partial^\nu \mathbf{W}_{\mu\nu} = -g \mathbf{W}^\nu \times \mathbf{W}_{\mu\nu}, \quad (3.136)$$

т. е. поле $\mathbf{W}_{\mu\nu}$ является источником для самого себя. Это соответствует тому, что электромагнитное поле $F_{\mu\nu}$ не обладает зарядом и вследствие этого не является своим собственным источником. «Изоспиновое» же поле $\mathbf{W}_{\mu\nu}$ в отличие от электромагнитного обладает изоспином ($I = 1$), вследствие чего является источником для самого себя. Это поле генерируется любой частицей, обладающей «изоспином». Напомним, что данное обстоятельство является прямым следствием неабелева характера группы симметрии $O(3)$. В гл. 7 мы увидим, что это имеет следствия также и в квантовой теории калибровочных полей. В самом деле, подставив выражение (3.122) для $D_\mu \varphi$ и (3.131) для $\mathbf{W}_{\mu\nu}$ в лагранжиан (3.132), мы найдем, что имеются члены 3-го и 4-го порядков по полям φ и \mathbf{W}_μ . Например, рассмотрим члены 3-го порядка. В то время как лагранжиан электродинамики (3.83) содержит связь $(\varphi \mathbf{F}^* A)$, которая дает вершину



данный лагранжиан содержит члены $(\varphi \mathbf{F} \mathbf{W})$ и $(\mathbf{W} \mathbf{W} \mathbf{W})$, которые дают вершины



Конечно, это не выходит за рамки того, что мы ожидаем от уравнений поля. Как указывалось выше, в электродинамике только заряженные поля, такие, как ϕ , могут излучать фотоны. В неабелевых же калибровочных теориях сами поля W наряду с полями ϕ могут излучать калибровочные частицы. Подробный анализ следствий, вытекающих отсюда, отложим до гл. 7. Заметим, однако, что аналогичная ситуация имеет место в общей теории относительности. Там само гравитационное поле несет энергию, которая эквивалентна массе и, следовательно, является источником гравитации. В уравнении поля (3.38)

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = -\frac{8\pi G}{c^2} T_{\mu\nu}$$

обе части являются тензорами, *ковариантные* производные которых равны нулю. Эти ковариантные производные аналогичны тем, которые мы здесь рассматриваем, но они имеют непосредственное геометрическое происхождение, связанное с тем, что само пространство-время в присутствии гравитирующих объектов не является евклидовым. Следовательно, даже в отсутствие материи ($T_{\mu\nu} = 0$) «реальная» дивергенция тензора Эйнштейна $G_{\mu\nu}$ не равна нулю, и в этом находит математическое выражение то обстоятельство, что гравитационное поле взаимодействует с самим собой. Очевидно, что неабелева природа калибровочной группы ответственна за более богатую структуру, чем та, которая существует в электродинамике, и чтобы продемонстрировать это еще раз, рассмотрим уравнения, аналогичные *однородным* уравнениям Максвелла (2.233):

$$\partial_\lambda F_{\mu\nu} + \partial_\mu F_{\nu\lambda} + \partial_\nu F_{\lambda\mu} = 0.$$

Как мы видели в гл. 2, они равносильны уравнениям

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \operatorname{rot} \mathbf{E} = 0,$$

первое из которых говорит, что не существует магнитных зарядов как источников магнитного поля. Как мы покажем в следующем параграфе, неабелево обобщение уравнений (2.233) имеет вид

$$D_\lambda W_{\mu\nu} + D_\mu W_{\nu\lambda} + D_\nu W_{\lambda\mu} = 0. \quad (3.137)$$

Поскольку это уравнение ковариантно и в него не входят обычные производные, мы имеем

$$\operatorname{div} \vec{\mathbf{B}} \neq 0, \quad (3.138)$$

где $\vec{\mathbf{B}}$ — «изовектор магнитной индукции», являющийся вектором как в изотопическом, так и в обычном пространстве. В последних строках стрелка над символом означает, что это вектор в конфигу-

рационном пространстве, а жирный шрифт — что это вектор в изоспиновом пространстве. Поскольку дивергенция этого изовекторного магнитного поля отлична от нуля, существуют магнитные монополи с изоспином 1. Или, чтобы исчерпать этот вопрос, если мы введем скалярное изовекторное поле ϕ и *определим* «обычное» магнитное поле соотношением

$$\vec{\mathbf{B}}_{\text{НР}} = \phi \cdot \vec{\mathbf{B}}, \quad (3.139)$$

то будет выполняться условие

$$\operatorname{div} \vec{\mathbf{B}}_{\text{НР}} \neq 0, \quad (3.140)$$

означающее, что в этой теории существуют обычные (изоскалярные) магнитные монополи. Значок НР является аббревиатурой имени т'Хофта и Полякова, которые первыми указали на то, что в теории неабелевых калибровочных полей имеется возможность существования магнитных монополей. Теория магнитных монополей будет рассмотрена более подробно в гл. 10.

Однако не все меняется, когда мы переходим к неабелеву случаю. В частности, остается неизменным то, что «изоспиновое» поле W_μ должно быть *безмассовым* в точной аналогии со случаем электромагнитного поля. Причина та же самая: чтобы учесть поле с массой m , необходимо добавить к лагранжиану член

$$\mathcal{L}_m = m^2 W_\mu \cdot W^\mu, \quad (3.141)$$

аналогичный члену (3.92). При этом уравнение движения (3.134) заменяется следующим:

$$D_\nu W_{\mu\nu} = g J_\mu + m^2 W_\mu. \quad (3.142)$$

Однако выражение (3.141), очевидно, не является калибровочно-инвариантным, и, следовательно, как и ранее, мы видим, что из требования калибровочной инвариантности вытекает равенство нулю массы калибровочного поля.

Теперь уместно спросить, *описывается ли изоспин теорией калибровочного поля?* Понятие изоспина было введено в гл. 1, где было показано, что это сохраняющееся «векторное» квантовое число. Следует ли отсюда, что изоспин является аналогом электрического заряда? Если это так, то сохранение изоспина должно вытекать из *локальной* симметрии и должно существовать безмассовое калибровочное поле с изоспином 1 и спином 1. Кроме того, введенное нами выше поле ϕ является произвольным изовекторным полем. Его ковариантная производная $D_\mu \phi$, определенная соотношением (3.122), содержит константу связи g , которая, как вытекает из вида лагранжиана (3.132), характеризует интенсивность взаимодействия поля ϕ с калибровочным полем. Однако та же самая ве-

личина g входит в определение самого калибровочного поля W_μ (3.131), и, следовательно, ее нельзя изменить! Мы заключаем, что интенсивность взаимодействия *всех* изовекторных полей с калибровочным полем *одинакова*. Эта универсальность константы связи является еще одним следствием неабелевой симметрии. В электродинамике, где частицы могут иметь произвольный заряд, такой универсальности нет. В неабелевом же случае все частицы имеют одинаковый «заряд». Кстати, это является одним из оснований считать, что неабелевы калибровочные теории могут иметь физический смысл — они могли бы объяснить квантование заряда. Итак, мы возвращаемся к вопросу: описывается ли изоспин калибровочной теорией?

Ответ на этот вопрос отрицателен. Однако в 60-е годы, когда печаталось много работ в связи с только что открытыми тогда векторными (спин 1) мезонами, ряд авторов, в частности Сакураи [18], отстаивали ту точку зрения, что ρ -мезон является изоспиновым калибровочным полем и, далее, что ω - и ϕ -мезон (или их комбинация) являются калибровочным полем, связанным с сохранением барионного числа, а мезон K (890) является калибровочным полем, связанным со странностью. В данной книге мы не будем на этом подробно останавливаться, но заметим, что теории указанного типа a , называемые теориями «векторной доминантности», получили значительную экспериментальную поддержку. Однако в настоящее время считается, что ρ -мезон не может быть изоспиновым калибровочным полем, поскольку он обладает массой, а это разрушает калибровочную инвариантность. В действительности данная проблема может быть разрешена с помощью «спонтанного нарушения симметрии» (гл. 8), и считается, что именно этим объясняется массивность W -бозонов. Более содержательно утверждение, что, согласно кварковой модели, ρ -мезоны просто построены из кварков:

$$(\rho^+, \rho^0, \rho^-) = \left(u \bar{d}, \frac{u \bar{u} - d \bar{d}}{\sqrt{2}}, d \bar{u} \right)$$

подобно всем другим адронам. Если бы это было калибровочное поле, то оно не могло бы состоять из кварков. Аналогичные замечания относятся к мезонам ω , ϕ и K (890) как кандидатам на роль калибровочных полей.

Итог вышесказанному подведен в табл. 3.1. Сохранение заряда описывается локальной симметрией и имеет динамическое проявление: существование электромагнитного поля, квантами которого являются фотоны. Сохранение изоспина, странности, барионного числа и лептонного числа описывается глобальными симметриями и не имеет динамических проявлений, т. е. соответствующих полей. Мы могли бы склониться к мысли, что калибровочные теории (за исключением электродинамики) не имеют никакого отношения к

Таблица 3.1 Сравнение различных законов сохранения

Сохраняющаяся величина	Соответствующее динамическое (калибровочное поле)	Закон сохранения
Заряд Q	Электромагнитное, γ	Локальный
Изоспин I	—	Глобальный
Странность S	—	—
Барионное число B	—	—
Лептонное число L	—	—

физике частиц. Однако на самом деле теория калибровочных полей является одним из наиболее важных ее разделов. Мы будем обсуждать причины этого по мере того, как они будут вскрываться в ходе нашего теоретического анализа принципа калибровочной инвариантности.

В данном параграфе мы сформулировали идею неабелевой калибровочной симметрии, рассматривая случай изовекторного поля ϕ с группой симметрии $O(3)$ или $SU(2)$. Соответствующие вычисления были достаточно громоздкими. Нам необходимо теперь дать более компактную формулировку всего подхода, сделав его более абстрактным и общим. Мы сможем тогда, например, увидеть, как записать ковариантную производную для изоспинового поля и как перейти к группам, отличным от $O(3)$. Для этого нам нужно встать на геометрическую точку зрения, которая напоминает точку зрения общей теории относительности (хотя и не требует знания этой теории!).

§ 3.6. Геометрия калибровочных полей

Мы умышленно рассматривали такие калибровочные преобразования, которые зависят от точки пространства. Поэтому естественно попытаться перевести все изложенное непосредственно на геометрический язык. Именно это мы сделаем в данном параграфе.

Вначале перепишем формулу (3.119), описывающую вращение изовектора в изопространстве на угол Λ :

$$\phi \rightarrow \phi' = \phi - \Lambda \times \phi.$$

Это соотношение является инфинитезимальной формой закона преобразования

$$\phi \rightarrow \phi' = \exp(i\mathbf{I} \cdot \Lambda)\phi, \quad (3.143)$$

где \mathbf{I} — матричные генераторы вида

$$I_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad I_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$I_3 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.144)$$

причем, как легко видеть, их матричные элементы выражаются следующим образом:

$$(I_i)_{mn} = -i\varepsilon_{imn}, \quad (3.145)$$

где ε_{imn} — обычный символ Леви — Чивиты. Разложение соотношения (3.143) по степеням Λ дает (по повторяющимся индексам производится суммирование)

$$\varphi'_m = (1 + iI_i \Lambda_i)_{mn} \varphi_n = (\delta_{mn} + \varepsilon_{imn} \Lambda_i) \varphi_n = \varphi_m - \varepsilon_{min} \Lambda_i \varphi_n =$$

$$= (\varphi - \Lambda \times \varphi)_m,$$

что совпадает с (3.119). Пусть теперь Λ зависит от x^μ . Запишем соотношение (3.143) в виде

$$\varphi \rightarrow \varphi' = \exp [i\mathbf{l} \cdot \Lambda(x)] \varphi = S(x) \varphi. \quad (3.146)$$

Матрицы I являются представлением генераторов группы $O(3)$ (или $SU(2)$), и, следовательно, удовлетворяют коммутационным соотношениям

$$[I_i, I_j] = i\varepsilon_{ijk} I_k = C_{ijk} I_k. \quad (3.147)$$

Это соотношение отождествляет величины $i\varepsilon_{ijk}$ со структурными константами C_{ijk} группы $SU(2)$. Поскольку генераторы M_i произвольной группы удовлетворяют тождеству Якоби

$$[[M_i, M_j], M_k] + [[M_j, M_k], M_i] + [[M_k, M_i], M_j] = 0,$$

структурные константы C_{ijk} , которые являются полностью антисимметричными по i, j, k , удовлетворяют условию

$$C_{ilm} C_{mjk} + C_{ijm} C_{mki} + C_{ikh} C_{mij} = 0. \quad (3.148)$$

Представление, в котором матричные элементы генераторов имеют вид

$$(I_i)_{mn} = -C_{imn},$$

называется *присоединенным представлением группы*. В частности, в случае группы $SU(2)$ это — представление, в котором генераторы имеют явный вид (3.144). Из теории спина, изложенной в предыдущей главе, мы знаем, что *изоспинор* ψ преобразуется по формуле

$$\psi \rightarrow \psi' = \exp \left[\frac{i}{2} \boldsymbol{\tau} \cdot \Lambda(x) \right] \psi = S(x) \psi, \quad (3.149)$$

где $S(x)$ — матрица 2×2 , а $\boldsymbol{\tau}$ — матрицы Паули, или, точнее, $\boldsymbol{\tau}_i/2$ удовлетворяют соотношениям (3.147), как и должно быть для представления группы. В общем, n -мерном случае мы напишем $\psi(x) \rightarrow \psi'(x) = \exp [iM^a \Lambda^a(x)] \psi(x) = S(x) \psi(x), \quad (3.150)$

где по индексу a производится суммирование от 1 до 3, ψ есть n -компонентный вектор, а величины M^a являются $n \times n$ -матрицами, представляющими генераторы и удовлетворяющими коммутационным соотношениям (3.147). Очевидно, что величина $\partial_\mu \psi$ не преобразуется ковариантно:

$$\partial_\mu \psi' = S(\partial_\mu \psi) + (\partial_\mu S) \psi. \quad (3.151)$$

Проблема состоит в том, что мы производим независимые «изображения» в различных точках пространства. Мы можем выразить это, сказав, что «оси» в изотопическом пространстве ориентированы по-разному в каждой точке. Причина, по которой производная $\partial\psi/\partial x^\mu$ не является ковариантной величиной, состоит в том, что $\psi(x)$ и $\psi(x+dx) = \psi(x) + d\psi$ измеряются в разных координатных системах (рис. 3.11): поле ψ принимает различные значения в разных точках; при этом величины $\psi(x)$ и $\psi(x+dx) = \psi(x) + d\psi$ измеряются по отношению к различным осям координат. Таким образом, величина $d\psi$ несет информацию не только об изменении самого поля ψ с расстоянием, но также и о вращении осей в изотопическом пространстве при перемещении из точки x в точку $x+dx$. Чтобы правильно построить ковариантную производную, мы должны сравнить величину $\psi(x+dx)$ не с $\psi(x)$, а со значением, которое приняло бы поле $\psi(x)$ в случае, если бы оно было «перемещено» из точки x в точку $x+dx$ при неподвижных осях в изотопическом пространстве — мы можем назвать это *параллельным переносом в изотопическом пространстве*. Параллельный перенос показан на рис. 3.12. Результирующий вектор обозначен через $\psi + \delta\psi$. Заметим, что величина $\delta\psi$ отлична от нуля, поскольку $\psi + \delta\psi$ — это

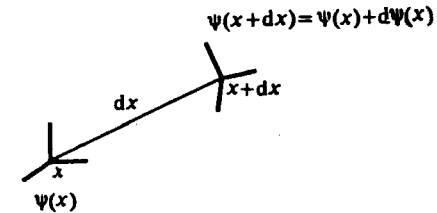


Рис. 3.11. Величина $d\psi$ несет информацию как об изменении функции ψ , так и о преобразовании координатных осей при переходе от точки x к точке $x+dx$.

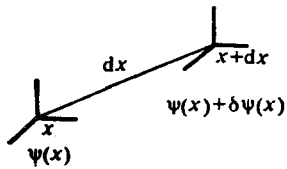


Рис. 3.12. Величина $\delta\psi$, определяемая параллельным переносом (см. текст).

вектор, который, будучи измерен в локальной изокоординатной системе в точке $x + dx$, равен («параллелен») вектору ψ , измеренному в локальной изокоординатной системе в точке x . Эти координатные системы не совпадают, вследствие чего не совпадают и векторы. Чему равна величина $\delta\psi$? Естественно предположить, что она пропорциональна самому полю ψ , а также величине dx^a , т. е. расстоянию, на которое перемещается вектор. Таким образом, мы полагаем

$$\delta\psi = igM^a A_\mu^a dx^\mu \psi, \quad (3.152)$$

где g — число, введенное для того чтобы обеспечить правильную размерность, а A_μ^a — дополнительное поле, или потенциал (Фейнман назвал его «универсальным влиянием»), которое говорит нам, в какой степени оси в изопространстве меняются при переходе от одной точки к другой.

Мы имеем теперь два вектора в точке $x + dx$: $\psi + d\psi$ и $\psi + \delta\psi$. «Истинная» производная вектора ψ получается, если взять разность этих векторов:

$$D\psi = (\psi + d\psi) - (\psi + \delta\psi) = d\psi - \delta\psi = d\psi - igM^a A_\mu^a dx^\mu \psi, \\ \blacksquare \frac{D\psi}{dx^\mu} = D_\mu \psi = \partial_\mu \psi - igM^a A_\mu^a \psi. \quad (3.153)$$

Выражением (3.153) определяется ковариантная производная произвольного поля ψ , преобразующегося по некоторому представлению произвольной группы. При этом генераторы представляются матрицами M^a , соответствующими представлению, к которому относится ψ . Убедимся, что это выражение дает те же самые ковариантные производные, что и найденные ранее. Вначале рассмотрим случай группы $U(1)$. Сравнивая (3.55) и (3.150), мы видим, что необходимо положить $M^a \rightarrow -1$. Полагая, кроме этого, $g \rightarrow e$, получаем

$$U(1): D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu$$

в соответствии с (3.84). Далее, в случае группы $SU(2)$ для векторного представления, используя (3.145), мы имеем

$$(M^a)_{mn} = -ie_{amn}, \quad (3.154)$$

где индексы принимают значения 1, 2, 3 (для индексов внутренней симметрии мы не делаем различия между верхним и нижним поло-

жением). Таким образом, выписывая m -ю компоненту выражения (3.153), получаем

$$D_\mu \varphi_m = \partial_\mu \varphi_m - ig(M^a)_{mn} A_\mu^a \varphi_n = \partial_\mu \varphi_m - g\epsilon_{amn} A_\mu^a \varphi_n = \\ = (\partial_\mu \varphi + gA_\mu \times \varphi)_m.$$

или

$$D_\mu \varphi = \partial_\mu \varphi + gA_\mu \times \varphi \quad (3.155)$$

в согласии с формулой (3.122) (где, очевидно, потенциал обозначен через W , а не через A). Наконец, в спинорном случае ковариантную производную можно записать, полагая $M^a = \tau^a/2$. Имеем

$$\blacksquare D_\mu \psi = \partial_\mu \psi - \frac{1}{2} \tau \cdot A_\mu \psi \quad (3.156)$$

«Вывод» ковариантных производных в случае калибровочной группы внутренней симметрии, приведенный выше, аналогичен выводу ковариантной производной вектора в общей теории относительности, где пространственно-временные оси в искривленном пространстве-времени сами изменяются при переходе от точки к точке. Ковариантная производная (контравариантного) вектора V^μ имеет вид

$$D_\mu V^\nu = \partial_\mu V^\nu + \Gamma_{\lambda\mu}^\nu V^\lambda. \quad (3.157)$$

Величины $\Gamma_{\lambda\mu}^\nu$, которые называются «коэффициентами связности», очевидно, играют роль, подобную роли векторных потенциалов A_μ^a . Название коэффициентов связности соответствует тому, что они *связывают* компоненты вектора в одной точке с его компонентами в соседней точке, из которой вектор перемещен путем параллельного переноса, как это описано выше. В связи с данной аналогией некоторые физики называют величины A_μ^a связностями.

Теперь нам известно, как преобразуется произвольный вектор ψ , когда мы производим вращение в изотопическом пространстве: $\psi \rightarrow S\psi$. Поскольку $D_\mu \psi$ является ковариантной производной вектора ψ , она преобразуется так же, и мы имеем

$$D_\mu \psi \rightarrow D'_\mu \psi' = SD_\mu \psi. \quad (3.158)$$

Определим для простоты матрицу

$$A_\mu = M^a A_\mu^a \quad (3.159)$$

при этом соотношение (3.153) принимает вид

$$D_\mu \psi = (\partial_\mu - igA_\mu) \psi. \quad (3.160)$$

Переход к новой системе координат в изотопическом пространстве дает [с учетом соотношения (3.158)]

$$(\partial_\mu - igA'_\mu)\psi' = S(\partial_\mu - igA_\mu)\psi. \quad (3.161)$$

Полагая в этом равенстве $\psi' = S\psi$, получаем

$$A'_\mu = SA_\mu S^{-1} - \frac{i}{g}(\partial_\mu S)S^{-1}. \quad (3.162)$$

Это — закон калибровочного преобразования потенциала. Подчеркнем, что в правую часть входит характерный неоднородный член. В случае группы $U(1)$ имеем $S = e^{-i\Lambda}$, $\partial_\mu S = -i(\partial_\mu \Lambda)e^{-i\Lambda}$ и из соотношения (3.162) следует (при $g \rightarrow e$ и $M = 1$) равенство

$$A'_\mu = A_\mu + \frac{1}{e}\partial_\mu \Lambda,$$

что совпадает с (3.74). В случае группы $SU(2)$ мы имеем

$$S = \exp\left(\frac{i}{2} \tau \cdot \Lambda\right),$$

откуда следует

$$\partial_\mu S = \frac{i}{2} \tau \cdot \partial_\mu \Lambda \cdot S,$$

и после простых выкладок соотношение (3.162) дает (при бесконечно малых Λ)

$$A'_\mu = A_\mu - \Lambda \times A_\mu + \frac{1}{g}\partial_\mu \Lambda$$

в соответствии с (3.124)

Попутно можно заметить, что закон преобразования коэффициентов связности в общей теории относительности также содержит неоднородный член. Соответствующая формула имеет вид

$$\Gamma'^{\lambda}_{\mu} = \frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\lambda}} \frac{\partial x^{\gamma}}{\partial x'^{\mu}} \Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma} + \frac{\partial^2 x^{\alpha}}{\partial x'^{\lambda} \partial x'^{\mu}} \frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\alpha}}. \quad (3.163)$$

Если бы второй неоднородный член отсутствовал, то величины Γ преобразовывались бы как тензор.

Теперь возникает вопрос: поскольку преобразование величин A_μ является неоднородным, существует ли возможность, чтобы в результате преобразования они обратились в нуль в каждой точке и, следовательно, не давали никакого физического эффекта? Чтобы выяснить это, мы последовательно произведем четыре бесконечно малых смещения вдоль замкну-

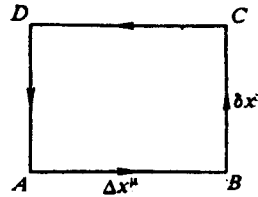


Рис. 3.13. Замкнутый путь, проходимый посредством параллельного переноса.

того пути $ABCD$ (рис. 3.13). Будем исходить из точки A , причем первоначальное значение вектора ψ_A обозначим через $\psi_{A,0}$. Мы перенесем вектор вдоль замкнутого пути, используя правило «параллельного» переноса, основанное на ковариантной производной, и затем сравним конечное значение вектора в точке A , т. е. величину $\psi_{A,1}$, с его первоначальным значением $\psi_{A,0}$. Если эти значения различаются, то мы будем рассматривать это как указание на то, что потенциал A_μ дает ненулевой физический эффект.

Перенос $\psi_{A,0}$ в точку B дает

$$\begin{aligned} \psi_B &= \psi_{A,0} + D_\mu \psi_{A,0} \Delta x^\mu + \frac{1}{2} D_\mu D_\nu \psi_{A,0} \Delta x^\mu \Delta x^\nu + \dots = \\ &= (1 + \Delta x^\mu D_\mu + \dots) \psi_{A,0}. \end{aligned}$$

Далее в результате переноса в точку C , удерживая только члены первого порядка, имеем

$$\begin{aligned} \psi_C &= \psi_B + \delta x^\nu D_\nu \psi_B = (1 + \delta x^\nu D_\nu) \psi_B = \\ &= (1 + \delta x^\nu D_\nu) (1 + \Delta x^\mu D_\mu) \psi_{A,0}. \end{aligned}$$

Последующий перенос в точку D и, наконец, в исходную точку A окончательно дает

$$\begin{aligned} \psi_D &= (1 - \Delta x^\rho D_\rho) \psi_C, \\ \psi_{A,1} &= (1 - \delta x^\rho D_\rho) \psi_D = \\ &= (1 - \delta x^\rho D_\rho) (1 - \Delta x^\rho D_\rho) (1 + \delta x^\nu D_\nu) (1 + \Delta x^\mu D_\mu) \psi_{A,0} = \\ &= [1 + \delta x^\mu \Delta x^\nu [D_\mu, D_\nu]] \psi_{A,0}. \end{aligned} \quad (3.164)$$

Заметим, что в результате мы получили коммутатор операторов ковариантного дифференцирования. Из (3.160) мы имеем

$$\begin{aligned} [D_\mu, D_\nu] &= [\partial_\mu - igA_\mu, \partial_\nu - igA_\nu] = \\ &= -ig [\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - ig [A_\mu, A_\nu]]. \end{aligned} \quad (3.165)$$

Определив калибровочное поле $G_{\mu\nu}$, как

$$G_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - ig [A_\mu, A_\nu], \quad (3.166)$$

мы будем далее иметь

$$[D_\mu, D_\nu] = -igG_{\mu\nu}. \quad (3.167)$$

Входящая в соотношение (3.164) величина $\delta x^\mu \Delta x^\nu$ есть площадь прямоугольника $\Delta S^{\mu\nu}$, и мы можем с точностью до членов второго порядка переписать это соотношение в виде

$$\psi_{A,1} = (1 - ig\Delta S^{\mu\nu} G_{\mu\nu}) \psi_{A,0}, \quad (3.168)$$

$$\psi_{A,1} - \psi_{A,0} = \Delta\psi_A = -ig\Delta S^{\mu\nu} G_{\mu\nu} \psi_A.$$

Итак, мы видим, что если калибровочное поле отлично от нуля, то обход по замкнутому пути дает физический эффект: вектор ψ поворачивается в изопространстве.

В случае группы $U(1)$, т. е. абелевой группы, коммутатор равен нулю. Таким образом, полагая $G \rightarrow F$ в выражении (3.166), мы видим, что калибровочное поле

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

совпадает с электромагнитным полем (3.81).

В случае группы $SU(2)$ матрицы M^a удовлетворяют коммутационным соотношениям (3.147), вследствие чего

$$G_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g\epsilon_{abc} A_\mu^b A_\nu^c, \quad (3.169)$$

или в векторных обозначениях

$$G_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + gA_\mu \times A_\nu,$$

что согласуется с (3.131).

Легко видеть, что, поскольку при вращении в изопространстве в формулы преобразований

$$\psi_{A,0} \rightarrow \psi'_{A,0} = S\psi_{A,0},$$

$$\psi_{A,1} \rightarrow \psi'_{A,1} = S\psi_{A,1}$$

входит один и тот же множитель S , поле $G_{\mu\nu}$ преобразуется ковариантно:

$$G_{\mu\nu} = SG_{\mu\nu}S^{-1}. \quad (3.170)$$

Отсюда следует, что поле $G_{\mu\nu}$ невозможно свести к нулю путем калибровочного преобразования; если же оно равно нулю в одной калибровке, то оно равно нулю во всех калибровках.

Возвращаясь еще раз к аналогии с общей теорией относительности, мы видим, что величиной, аналогичной тензору поля $G_{\mu\nu}^a$, является тензор кривизны Римана — Кристоффеля $R_{\rho\sigma\lambda}^{\mu}$:

$$R_{\lambda\mu\nu}^{\rho} = \partial_\nu \Gamma_{\lambda\mu}^{\rho} - \partial_\mu \Gamma_{\lambda\nu}^{\rho} + \Gamma_{\lambda\mu}^{\sigma} \Gamma_{\sigma\nu}^{\rho} - \Gamma_{\lambda\nu}^{\sigma} \Gamma_{\sigma\mu}^{\rho}. \quad (3.171)$$

Сравнивая это выражение с (3.166) или (3.169), мы видим структурное сходство: первые два члена — это производные коэффициентов связности (потенциала), и в совокупности они антисимметричны по μ и ν ; последние члены являются произведениями коэффициентов связности и также в совокупности антисимметричны по μ и ν . Спо-

соб, которым вводится тензор кривизны, также имеет аналогию. При параллельном переносе вектора V^μ по замкнутому пути разность начальных и конечных компонент вектора равна

$$\Delta V^\mu = \frac{1}{2} R_{\rho\sigma\lambda}^{\mu} V^\rho \Delta S^{\sigma\lambda},$$

где $\Delta S^{\sigma\lambda}$ — площадь области, ограниченной контуром. Это выражение аналогично выражению (3.168). Величины ΔV^μ отличны от нуля только в том случае, если пространство обладает внутренней кривизной. Например, на поверхности сферы (т. е. в двумерном пространстве) вектор после обхода по замкнутому пути *будет* направлен иначе, чем вначале. В случае же плоской поверхности направление вектора в результате обхода не изменится. Тензор кривизны обладает тем свойством тензора, что если он отличен от нуля в какой-либо одной координатной системе (имеет хоть одну ненулевую компоненту), то он отличен от нуля и в любой другой координатной системе. Его отличие от нуля указывает на то, что пространство искривлено. В общей теории относительности из этого следует, что имеется гравитационное поле.

Наконец, мы выведем интересное тождество (доказанное Фейнманом [24]), которому удовлетворяет калибровочное поле. Рассмотрим 3-мерный замкнутый путь, изображенный на рис. 3.14. Перенесем вектор $\psi_{A,0}$, первоначально заданный в точке A , вдоль пути $ABCD A$, после чего он примет значение, равное [формула (3.168)]

$$\psi_{A,1} = (1 - ig\Delta S^{\mu\nu} G_{\mu\nu}) \psi_{A,0},$$

где величина $\Delta S^{\mu\nu} = \delta x^\mu \Delta x^\nu$ есть площадь прямоугольника $ABCD$. Теперь перенесем вектор ψ в точку P по отрезку прямой AP длиной dx ; он примет значение

$$\psi_{P,0} = (1 + dx^\rho D_\rho) \psi_{A,1}.$$

Далее, перенося этот вектор по контуру $PSRQP$, получаем

$$\psi_{P,1} = (1 + ig\Delta S^{\mu\nu} G_{\mu\nu}) \psi_{P,0},$$

где знак плюс соответствует тому, что контур проходится в обратном направлении. Наконец, перенося вектор снова в точку A , получаем окончательное значение

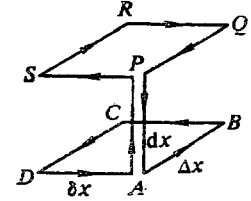


Рис. 3.14. Замкнутый путь, используемый при выводе тождества Бьянки.

$$\begin{aligned}\psi_{A,2} &= (1 - dx^\alpha D_\alpha) \psi_{P,1} = \\ &= (1 - dx^\alpha D_\alpha) (1 + ig\Delta S^{\mu\nu} G_{\mu\nu}) (1 + dx^\rho D_\rho) \times \\ &\times (1 - ig\Delta S^{\mu\nu} G_{\mu\nu}) \psi_{A,0} = [1 - ig\Delta V^{\rho\mu\nu} [D_\rho, G_{\mu\nu}]] \psi_{A,0},\end{aligned}$$

где $\Delta V^{\rho\mu\nu} = dx^\rho \delta x^\mu \Delta x^\nu$ есть объем параллелепипеда. Учитывая, что дифференциальный оператор действует также на $\psi_{A,0}$, мы можем заменить коммутатор произведением $D_\rho G_{\mu\nu}$:

$$\psi_{A,2} = (1 - ig\Delta V^{\rho\mu\nu} D_\rho G_{\mu\nu}) \psi_{A,0}.$$

Замкнутый путь, изображенный на рис. 3.14, состоит из контуров, обходящих верхнюю и нижнюю грани параллелепипеда. Очевидно, что существуют еще два подобных пути, проходящие вдоль границ двух других пар противоположных граней. Вдоль границ всех шести граней проходит контур

$$(ABCDAPSRQPA) + (ADSPABQRCBA) + (APQBADCRCSDA). \quad (3.172)$$

Это дает множитель

$$1 - ig\Delta V^{\rho\mu\nu} (D_\rho G_{\mu\nu} + D_\mu G_{\nu\rho} + D_\nu G_{\rho\mu}),$$

который, действуя на вектор $\psi_{A,0}$, приводит к новому вектору $\psi_{A,3}$ в точке A . Однако, как нетрудно убедиться, путь (3.172) проходит каждое ребро параллелепипеда одинаковое число раз в прямом и обратном направлении, так что данный путь эквивалентен противоположному, и, следовательно, вектор ψ не может измениться, так что $\psi_{A,3} = \psi_{A,0}$. В результате имеем

$$D_\rho G_{\mu\nu} + D_\mu G_{\nu\rho} + D_\nu G_{\rho\mu} = 0. \quad (3.173)$$

Это — искомое тождество [оно соответствует формуле (3.137)]. С учетом соотношения (3.167) оно эквивалентно так называемому *тождеству Якоби*

$$\sum [D_\rho, [D_\mu, D_\nu]] = 0. \quad (3.174)$$

Циклические перестановки

Это — условие, которому тождественно удовлетворяет тензор поля. В случае абелевой группы $U(1)$ оно принимает вид

$$\partial_\rho F_{\mu\nu} + \partial_\mu F_{\nu\rho} + \partial_\nu F_{\rho\mu} = 0,$$

т. е. совпадает с уравнением (2.233). Тем самым показано, что наше тождество эквивалентно однородным уравнениям Максвелла.

В общей теории относительности существует аналог тождества (3.173), называемый *тождеством Бьянки*:

$$D_\rho R_{\lambda\mu\nu}^x + D_\mu R_{\lambda\rho\nu}^x + D_\nu R_{\lambda\rho\mu}^x = 0. \quad (3.175)$$

Мы могли бы по аналогии называть уравнение (2.233) тождеством Бьянки. Параллели между калибровочными теориями и общей теорией относительности, которые мы здесь обсуждали, суммируются в табл. 3.2.

Таблица 3.2. Параллели между калибровочной теорией и общей теорией относительности

Калибровочная теория	Общая теория относительности
Калибровочное преобразование	Координатное преобразование
Калибровочная группа	Группа всех координатных преобразований
Калибровочный потенциал A_μ	Коэффициент связности $\Gamma_{\mu\nu}^x$
Напряженность поля $G_{\mu\nu}$	Тензор кривизны $R_{\lambda\mu\nu}^x$
Тождество Бьянки:	Тождество Бьянки:
$\sum_{\rho\mu\nu} D_\rho G_{\mu\nu} = 0$	$\sum_{\rho\mu\nu} D_\rho R_{\lambda\mu\nu}^x = 0$
Циклические перестановки $\rho\mu\nu$	Циклические перестановки $\rho\mu\nu$

Мы завершим данный параграф кратким обзором хромодинамики, которая, как считается, должна рассматриваться как теория сильных взаимодействий. Понятие квантового числа, именуемого цветом, было затронуто в § 1.11: кварки данного типа (u, d, s, \dots) несут дополнительный индекс R, W или B , который принимает три значения. Кварковый лагранжиан инвариантен относительно подстановок, описываемых группой преобразований

$$q \rightarrow Mq, \quad q = \begin{pmatrix} q_R \\ q_W \\ q_B \end{pmatrix}. \quad (3.176)$$

Здесь M — 3×3 -матрицы, которые могут быть ортогональными или унитарными (такие матрицы в отличие от эрмитовых образуют группу). Какую из них мы выберем? Мы предпочитаем группу $SU(3)$ группе $O(3)$ по двум причинам: а) если бы цветовой группой была группа $O(3)$, дикварковая система могла бы быть цветовым синглетом, однако дикварки в природе не обнаружены; б) в теории

с группой $O(3)$ не существует асимптотической свободы (см. гл. 9), если число ароматов больше двух; нам известно, что число ароматов равно по крайней мере пяти. Соответствующее предельное число для группы $SU(3)$ равно 16. Таким образом, матрицы M являются унитарными. Так как мы можем выделить общий фазовый множитель, их можно выбрать так, чтобы они обладали единичным детерминантом:

$$q \rightarrow Uq, U^*U = 1, \det U = 1. \quad (3.177)$$

Матрицы U можно записать в виде

$$U = e^{iH}, H = H^\dagger, \text{Tr } H = 0, \quad (3.178)$$

где H — эрмитовы матрицы, а условие равенства следа нулю вытекает из условия $\det U = 1$. Можно показать, что матрицы U зависят от восьми независимых параметров ε_a и, следовательно, имеются восемь генераторов, которые мы обозначим через $\lambda_a/2$. Итак, напишем

$$U = \exp\left(i \frac{\lambda_a}{2} \varepsilon_a\right), \quad (3.179)$$

где подразумевается суммирование по a от 1 до 8, а восемь генераторов имеют вид

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_2 &= \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \lambda_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_4 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \lambda_5 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_6 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \\ \lambda_7 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_8 &= \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.180)$$

Эти матрицы представляют собой простое обобщение матриц Паули на 3 измерения. Формула для $SU(2)$ -преобразований, соответствующую

щая (3.179), имеет вид

$$U = \exp\left(i \frac{\tau_i}{2} \varepsilon_i\right),$$

где производится суммирование по i от 1 до 3. Матрицы λ_a удовлетворяют коммутационным соотношениям

$$\left[\frac{\lambda_a}{2}, \frac{\lambda_b}{2}\right] = if_{abc} \frac{\lambda_c}{2} \quad (3.181)$$

(по индексу c производится суммирование от 1 до 8). Величины f_{abc} являются структурными константами группы [формула (3.147)] и полностью антисимметричны по своим индексам. Их можно найти прямым вычислением, используя матрицы λ_a , выписанные выше. Отличными от нуля оказываются следующие компоненты:

$$\begin{aligned} f_{123} &= 1, \\ f_{147} &= -f_{156} = f_{216} = f_{257} = f_{315} = -f_{367} = \frac{1}{2}, \end{aligned} \quad (3.182)$$

$$f_{453} = f_{678} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Более полное изложение теории группы $SU(3)$ читатель может найти в литературе. Эта группа впервые заняла важное место в физике частиц в начале 60-х годов, когда было обнаружено, что спектр частиц (который в те времена включал странные частицы, однако очарованные частицы еще были неизвестны) приближенно описывается $SU(3)$ -симметрией (см. § 1.8 и 1.9). На языке кварков преобразования группы $SU(3)$ имеют вид

$$q \rightarrow Uq, q = \begin{pmatrix} u \\ d \\ s \end{pmatrix}. \quad (3.183)$$

Как сейчас принято говорить, это — группа ароматов, но не цветовая группа, поскольку она действует только на ароматические индексы. Данная симметрия является лишь приближенной, поскольку, например, s -кварк тяжелее кварков u и d . В противоположность этому цветовая симметрия является точной. Чтобы различать две группы $SU(3)$ — ароматическую и цветовую — мы будем обозначать их через $SU(3)_f$ и $SU(3)_c$.

Согласно хромодинамике, цветовая симметрия является калибровочной симметрией, и мы можем полностью использовать изложенную выше теорию. В частности, имеется калибровочный потенциал или, точнее, восемь калибровочных потенциалов, которые можно записать в виде матрицы

$$A_\mu = A_\mu^a \frac{\lambda_a}{2} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} A_\mu^3 + \frac{1}{\sqrt{3}} A_\mu^8 & A_\mu^1 - iA_\mu^2 & A_\mu^4 - iA_\mu^5 \\ A_\mu^1 + iA_\mu^2 & -A_\mu^3 + \frac{1}{\sqrt{3}} A_\mu^8 & A_\mu^6 - iA_\mu^7 \\ A_\mu^4 + iA_\mu^5 & A_\mu^6 + iA_\mu^7 & -\frac{2}{\sqrt{3}} A_\mu^8 \end{pmatrix}. \quad (3.184)$$

Калибровочные поля G_μ^a можно получить, подставив в выражение (3.169) вместо коэффициентов ϵ_{abc} , которые являются структурными константами группы $SU(2)$, структурные константы f_{abc} группы $SU(3)$, определенные соотношениями (3.182). Это дает, например,

$$G_\mu^1 = \partial_\nu A_\nu^1 - \partial_\nu A_\nu^1 + g f_{12c} A_\mu^2 A_\nu^c = \partial_\nu A_\nu^1 - \dot{\nu} A_\nu^1 + \\ + g \left[A_\mu^2 A_\nu^3 - A_\mu^3 A_\nu^2 + \frac{1}{2} (A_\mu^4 A_\nu^7 - A_\mu^7 A_\nu^4) - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} (A_\mu^5 A_\nu^6 - A_\mu^6 A_\nu^5) \right]. \quad (3.185)$$

Это безмассовые калибровочные поля. Их называют глюонами.

Если объяснение удержания кварков состоит в том, что удерживается цвет и, следовательно, лишь частицы, представляющие собой цветные синглеты [т. е. синглеты группы $SU(3)_c$], могут существовать в свободном состоянии, то глюоны тоже должны быть удерживаемы и, следовательно, ненаблюдаемы. Однако могут существовать комбинации глюонных полей, инвариантные относительно $SU(3)_c$ и, следовательно, в принципе наблюдаемы. Их называют глюболами. Глсболы (пока еще) не наблюдались.

Резюме

1) Показывается, что лагранжева формулировка в случае точечной частицы приводит ко второму закону движения Ньютона. 2) Дается аналогичная трактовка теории (классического) скалярного поля. Вариационный принцип позволяет найти уравнения движения Эйлера — Лагранжа. Находится выражение для действия, которое дает уравнение Клейна — Гордона. Инвариантность действия относительно пространственно-временных трансляций и вращений приводит в силу теоремы Нётер к законам сохранения энергии-импульса и углового момента. 3) Комплексное скалярное поле обладает $O(2)$ -симметрией, и требованием, чтобы эта симметрия была локальной, обусловлено введение калибровочного поля A_μ , которое, как показывается, удовлетворяет уравнениям

Максвелла. 4) Эффект Ааронова — Бома можно связать с такими конфигурациями калибровочного поля, которые возможны лишь в топологически нетривиальном (неевклидовом) пространстве — в данном случае плоскости с дыркой. 5) Дается обобщение результатов § 3.3 на случай, когда скалярное поле обладает $O(3)$ -симметрией, которое приводит к уравнениям Янга — Миллса. 6) Геометрическая трактовка калибровочных теорий выявляет аналогии с общей теорией относительности и приводит к обобщенным формулам для ковариантных производных, которые дают известные результаты в случае электродинамики и теории Янга — Миллса и применимы в случае произвольной группы симметрии. Дается краткий обзор случая группы $SU(3)$, в котором калибровочным полем является глюон.

Литература для дальнейшего изучения

Вариационные принципы классической физики хорошо изложены в книге:

1. Goldstein H. Classical Mechanics, Reading (Massachusetts), Addison-Wesley Publishing Company, Inc., 1950, Ch. 2, 11. [Имеется перевод: Голдштейн Г. Классическая механика. — М.: Гостехиздат, 1957.]

Весьма доступное, но менее формальное изложение дано в книге:

2. Feynman R. P., Leighton R. B., Sands M. The Feynman Lectures on Physics, Reading (Massachusetts), Addison-Wesley Publishing Company, Inc., 1964, Vol. 2, Ch. 19. [Имеется перевод: Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М. Фейнмановские лекции по физике. Т. 2. — М.: Мир, 1965, гл. 19.]

Детальное описание применения вариационного принципа к полям дано в обзоре:

3. Hill E. L. Rev. Modern Phys., 23, 253 (1951).

Более сжатое изложение можно найти в книгах:

4. Schiff L. I. Quantum Mechanics, 2nd ed. McGraw-Hill Book Company, Inc., New York, 1955, Sect. 45. [Имеется перевод: Шифф Л. Квантовая механика. — М.: ИЛ, 1959.]

5. Soper D. E. Classical Field Theory, John Wiley and Sons, New York, 1976.

Теорема Нётер впервые была опубликована в работе:

6. Noether E. Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, 171 (1918).

Подробное изложение теоремы Нётер в римановом и плоском пространстве дано в обзоре:

7. Fletcher J. G. Rev. Modern Phys., 32, 65 (1960).

Вопросы, касающиеся тензора энергии-импульса, включая анализ его роли в общей теории относительности, рассматриваются в книгах:

8. Landau L. D., Lifshitz E. M. The Classical Theory of Fields, 3rd English ed., Pergamon Press, Oxford, 1971, Sect. 32, 94. [См. также: Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория поля. — М.: Наука, 1967, § 32, 94.]

9. Weinberg S. Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity, John Wiley and Sons, Inc., New York,

1972, p. 360. [Имеется перевод: *Вейнберг С.* Гравитация и космология. Принципы и приложения общей теории относительности. — М.: Мир, 1975.]

Эффект Ааронова — Бома впервые рассмотрен в работе:
10. *Aharonov Y., Bohm D.* Phys. Rev., 115, 484 (1959).

Первое сообщение об экспериментальном наблюдении этого эффекта было дано в работе:

11. *Chambers R. G.* Phys. Rev. Letters, 5, 3 (1960).

Простое изложение, на котором основывается соответствующий раздел нашей книги, дано в книге:

12. *Фейнман Р. П. и др.*, см. [2, разд. 15.5].

Очень ясное изложение можно найти в обзоре:

13. *Tai Tsun Wu, Chen Ning Yang.* Phys. Rev., D12, 3845 (1975).

В последнее время появились утверждения, что эффект Ааронова — Бома является чисто математической спекуляцией. Ответ на такие утверждения, а также дальнейшие ссылки на недавние экспериментальные подтверждения эффекта можно найти в статье:

14. *Bohm A., Hiley B. J.* Nuovo Cim., 52A, 295 (1979).

В качестве введения в гомотопические группы, предназначенного для физиков, рекомендуем работы:

15. *Speiser D.* — in: Group Theoretical Concepts and Methods in Elementary Particle Physics, ed. F. Gürsey, Gordon and Breach, Science Publishers, New York, 1964.

16. *Gürsey F.* — in: Relativity, Groups and Topology, eds. C. DeWitt, B. DeWitt, Blackie and Son, Ltd., London, Gordon and Breach, Science Publishers, Inc., New York, 1964.

Неабелево обобщение электродинамики было впервые предложено в работе:

17. *Yang C. N., Mills R. L.* Phys. Rev., 96, 191 (1954).

Приложение этого калибровочного принципа к физике частиц впервые рассматривалось в работах:

18. *Sakurai J. J.* Ann. of Phys., 11, 1 (1960).

19. *Salam A., Ward J. C.* Nuovo Cim., 20, 419 (1961).

Обзор по этим вопросам сделан, например, в книге:

20. *Sakurai J. J.* Currents and Mesons, University of Chicago Press, Chicago and London, 1969. [Имеется перевод: *Сакураи Дж.* Токи и мезоны. — М.: Атомиздат, 1972.]

Обобщение идеи Янга — Миллса на случай произвольной группы дано в работе:

21. *Glashow S. L., Gell-Mann M.* Ann. of Phys., 15, 437 (1961).

На аналогю, существующую между теорией Янга — Миллса и общей теорией относительности, впервые указано в работе:

22. *Utiyama R.* Phys. Rev., 101, 1597 (1956).

Имеется более ранняя статья о геометрических аспектах калибровочных полей:

23. *Loos H. G.* Journ. Math. Phys., 8, 2114 (1967).

Рекомендуем также обзорную лекцию по этим вопросам:

24. *Feynman R. P.* — in: Interactions électromagnétiques et faibles à haute énergie/Weak and Electromagnetic Interactions at High Energy (Les Houches, Session XXIX, 1976), eds. R. Balian, C. H. Llewellyn Smith, North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1977.

25. *O'Raiheartaigh L.* Rep. Prog. Physics, 42, 159 (1979).

Обзор по хромодинамике опубликован Фейнманом и Саскайндом в книге [24].

Каноническое квантование и интерпретация в терминах частиц

Я вспоминаю, что когда кто-то начал объяснять мне операторы рождения и уничтожения, что данный оператор может создать электрон, я сказал: «Как можно создать электрон? Это противоречит закону сохранения заряда».

Р. Фейнман. Нобелевская лекция

§ 4.1. Действительное поле Клейна — Гордона

В гл. 2 простейшее релятивистское уравнение Клейна — Гордона рассматривалось как уравнение для одной частицы. Были обнаружены следующие трудности, связанные с ним: 1) имелись решения с отрицательной энергией и 2) ток j_μ не был связан с положительно определенной плотностью вероятности ρ , как это было в случае уравнения Шредингера. По этим причинам мы вынуждены отказаться от интерпретации уравнения Клейна — Гордона как *одночастичного уравнения*. (Исторически именно эти причины побудили Дирака написать свое уравнение.) Можно ли придать какой-либо смысл уравнению Клейна — Гордона? Во всяком случае, частицы со спином 0 существуют (π , K , η и т. д.), так что определена должна быть возможна разумная интерпретация этого уравнения.

Будем считать, что уравнение Клейна — Гордона описывает поле $\varphi(x)$. Поскольку классическая аналогия отсутствует, поле $\varphi(x)$ является строго *квантовым* полем. Тем не менее вначале мы будем считать его *классическим* полем, как мы это делали в предыдущей главе, и установим, что проблемы отрицательных энергий не существует. Далее мы в полной мере учтем то обстоятельство, что $\varphi(x)$ есть *квантовое* поле, рассматривая его как оператор, подчиняющийся определенным соотношениям коммутации, аналогичным соотношениям коммутации обычной квантовой механики. Такую процедуру часто называют «вторичным квантованием», но я предпочитаю не пользоваться этим термином. В конце концов, существует только одна квантовая теория, а не две; мы заняты квантованием *поля*, а не движения *отдельной частицы*, как это было в квантовой механике. Оказывается, что существует очевидная интерпретация квантования поля как многочастичного подхода, а это именно то, что нам требуется. В экспериментах по физике высоких энергий сплошь и рядом число частиц данного типа (скажем, со спином 0) не остается постоянным; примером может служить хотя бы распад $\pi^0 \rightarrow 2\gamma$. Поэтому у нас нет никаких оснований ожидать, что

одночастичная теория будет адекватна реальной действительности. В новой интерпретации теории поля величина $|\varphi|^2$ пропорциональна числу имеющихся частиц. Как мы увидим ниже, после квантования поля отпадают обе трудности, связанные с одночастичным уравнением Клейна — Гордона.

Начнем с того, что вычислим энергию («классического») поля Клейна — Гордона. Она получается из тензора энергии-импульса $\theta^{\mu\nu}$ [формула (3.20)] и в случае действительного скалярного поля имеет вид

$$H = \int \theta^{00} d^3x = \frac{1}{2} \int [(\partial_0\varphi)^2 + \nabla\varphi \cdot \nabla\varphi + m^2\varphi^2] d^3x, \quad (4.1)$$

причем лагранжиан дается соотношением (3.10). В случае комплексного скалярного поля имеем

$$H = \int [(\partial_0\varphi^*)(\partial_0\varphi) + \nabla\varphi^* \cdot \nabla\varphi + m^2\varphi^*\varphi] d^3x, \quad (4.2)$$

и в обоих случаях энергия (гамильтониан) положительно определена. Таким образом, в случае *скалярного поля отсутствует проблема отрицательных энергий*, которой обременена одночастичная теория. Но теперь, когда энергия поля положительно определена, возникает вопрос: как она связана с энергией одночастичных состояний? Ответ следует видеть в том, что *квантование поля* заставляет нас интерпретировать поле как квантовую систему, а не как классическую. Соответственно этому поле $\varphi(x)$ рассматривается как *эрмитов оператор*, разложение Фурье которого можно записать в виде

$$\varphi(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega_k} [a(k) e^{-ikx} + a^\dagger(k) e^{ikx}], \quad (4.3)$$

где $\omega_k = (k^2 + m^2)^{1/2}$. Коэффициенты $a(k)$ и $a^\dagger(k)$ также являются операторами. Выбор меры в подинтегральном выражении связан с требованием релятивистской инвариантности. Для поля, удовлетворяющего уравнению Клейна — Гордона, мы имеем условие «массовой поверхности» $k^2 = k_0^2 - k^2 = m^2/\hbar^2 = c^2$ (1), в связи с чем инвариантный элемент фазового пространства при $k_0 > 0$ (условие положительности энергии) имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} 2\pi\delta(k^2 - m^2) \theta(k_0) &= \frac{d^4k}{(2\pi)^3} \delta(k_0^2 - \omega_k^2) \theta(k_0) = \\ &= \frac{d^4k}{(2\pi)^3} \delta[(k_0 + \omega_k)(k_0 - \omega_k)] \theta(k_0) = \\ &= \frac{d^4k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2k_0} [\delta(k_0 + \omega_k) + \delta(k_0 - \omega_k)] \theta(k_0) = \frac{d^3k dk_0}{(2\pi)^3 2k_0} \delta(k_0 - \omega_k) = \end{aligned}$$

$$= \frac{d^3 k}{(2\pi)^3 2\omega_k} \quad (4.4)$$

Величина $\varphi(\mathbf{x}, t)$ играет в теории поля роль, аналогичную вектору положения \mathbf{x} в квантовой механике. Квантование механики задается гейзенберговыми соотношениями коммутации

$$\begin{aligned} [x_i, p_j] &= i\delta_{ij} \quad (i, j = 1, 2, 3), \\ [x_i, x_j] &= [p_i, p_j] = 0, \end{aligned} \quad (4.5)$$

где импульс p_i определяется канонически как $\partial L / \partial x_i$. Операторы \mathbf{x} и \mathbf{p} соответствуют положению и импульсу частицы, измеренным в один и тот же момент времени. В теории скалярного поля величина $\varphi(\mathbf{x}, t)$ играет роль, аналогичную роли $\mathbf{x}(t)$, и описывает систему с бесконечным числом степеней свободы, поскольку в каждый момент времени φ принимает независимые значения в каждой точке пространства. Чтобы построить приближение к этому непрерывному случаю, разобьем пространство на ячейки, каждая из которых имеет объем δV_r , и пусть $\varphi_r(t)$ — среднее значение функции $\varphi(\mathbf{x})$ в ячейке r в момент времени t . Пусть среднее лагранжиана в данной ячейке равно \mathcal{L}_r . Тогда импульсная переменная p_r , сопряженная с φ_r , равна

$$p_r(t) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}_r(t)} = \delta V_r \frac{\partial \mathcal{L}_r}{\partial \dot{\varphi}_r(t)} = \delta V_r \pi_r(t), \quad (4.6)$$

где $\pi(\mathbf{x}, t)$ — поле, определенное как

$$\pi(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}(\mathbf{x}, t)}, \quad (4.7)$$

а $\pi_r(t)$ — среднее для ячейки r . Далее, из гейзенберговских соотношений коммутации следуют равенства

$$\begin{aligned} [\varphi_r(t), p_s(t)] &= i\delta_{rs}, \\ [\varphi_r(t), \varphi_s(t)] &= [p_r(t), p_s(t)] = 0. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Подстановка (4.6) в (4.8) дает $[\varphi_r(t), \pi_s(t)] = (1/\delta V_s) i\delta_{rs}$. В непрерывном пределе мы имеем $\delta V_r \rightarrow 0$, и мы получаем

$$\begin{aligned} [\varphi(\mathbf{x}, t), \pi(\mathbf{x}', t)] &= i\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'), \\ [\varphi(\mathbf{x}, t), \varphi(\mathbf{x}', t)] &= [\pi(\mathbf{x}, t), \pi(\mathbf{x}', t)] = 0. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Эти соотношения называются *одновременными коммутационными соотношениями (ОКС)*. Мы используем их теперь, чтобы найти коммутационные соотношения для операторов $a(k)$ и $a^\dagger(k)$, входящих в выражение (4.3). Прежде всего из определения (4.7) и явного вида лагранжиана (3.10) имеем

$$\pi(\mathbf{x} = \dot{\varphi}(\mathbf{x})). \quad (4.10)$$

Далее, как нетрудно убедиться, решения с положительной энергией (называемые также положительно-частотными решениями)

$$f_k(\mathbf{x}) = \frac{1}{[(2\pi)^3 2\omega_k]^{1/2}} e^{-ikx} \quad (4.11)$$

образуют ортонормированную систему:

$$\int f_k^*(\mathbf{x}) i \overleftrightarrow{\partial}_0 f_{k'}(\mathbf{x}) d^3x = \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}'), \quad (4.12)$$

где $\overleftrightarrow{\partial}_0$ — оператор, действующий следующим образом:

$$A(t) \overleftrightarrow{\partial}_0 B(t) = A(t) \frac{\partial B(t)}{\partial t} - \frac{\partial A(t)}{\partial t} B(t). \quad (4.13)$$

Разложение поля (4.3) можно записать в виде

$$\varphi(\mathbf{x}) = \int \frac{d^3k}{[(2\pi)^3 2\omega_k]^{1/2}} [f_k(\mathbf{x}) a(k) + f_k^*(\mathbf{x}) a^\dagger(k)]. \quad (4.14)$$

Обращая это разложение с помощью соотношения (4.12), находим

$$a(k) = \int d^3x [(2\pi)^3 2\omega_k]^{1/2} f_k^*(\mathbf{x}) i \overleftrightarrow{\partial}_0 \varphi(\mathbf{x}), \quad (4.15)$$

$$a^\dagger(k') = \int d^3x' [(2\pi)^3 2\omega_{k'}]^{1/2} \varphi(\mathbf{x}') i \overleftrightarrow{\partial}_0 f_{k'}(\mathbf{x}').$$

С учетом формул (4.9), (4.10) и (4.15) получаем

$$\begin{aligned} [a(k), a^\dagger(k')] &= \int d^3x d^3x' (2\pi)^3 (4\omega_k \omega_{k'})^{1/2} [f_k^*(\mathbf{x}) i \overleftrightarrow{\partial}_0 \varphi(\mathbf{x}), \\ &\varphi(\mathbf{x}') i \overleftrightarrow{\partial}_0 f_{k'}(\mathbf{x}')] = (2\pi)^3 \int d^2x d^2x' (4\omega_k \omega_{k'})^{1/2} f_k^*(\mathbf{x}, t) \overleftrightarrow{\partial}_0 f_{k'}(\mathbf{x}', t) \times \\ &\times [\varphi(\mathbf{x}, t), \pi(\mathbf{x}', t)] = \\ &= (2\pi)^3 \int d^3x (4\omega_k \omega_{k'})^{1/2} f_k^*(\mathbf{x}) i \overleftrightarrow{\partial}_0 f_{k'}(\mathbf{x}) = (2\pi)^3 2\omega_k \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}'). \end{aligned} \quad (4.16a)$$

Аналогичным образом легко показать, что

$$[a(k), a(k')] = 0, [a^\dagger(k), a^\dagger(k')] = 0. \quad (4.16b)$$

Операторы $a(k)$ и $a^\dagger(k)$ играют ключевую роль в многочастичной интерпретации квантованной теории поля. Построим сначала оператор

$$N(k) = a^\dagger(k)a(k). \quad (4.17)$$

Как нетрудно видеть, операторы $N(k)$ и $N(k')$ коммутируют:

$$\begin{aligned} [N(k), N(k')] &= a^\dagger(k)[a(k), a^\dagger(k')]a(k') + a^\dagger(k')[a^\dagger(k), a(k')]a(k) = \\ &= [a^\dagger(k)a(k) - a^\dagger(k)a(k)]\delta(k - k') = 0, \end{aligned}$$

вследствие чего их собственные состояния можно использовать для построения базиса. Обозначим собственные значения через $n(k)$:

$$N(k) |n(k)\rangle = n(k) |n(k)\rangle. \quad (4.18)$$

Используя коммутационные соотношения

$$\begin{aligned} [N(k), a^\dagger(k)] &= a^\dagger(k), \\ [N(k), a(k)] &= -a(k), \end{aligned}$$

получаем

$$\begin{aligned} N(k)a^\dagger(k) |n(k)\rangle &= a^\dagger(k)N(k) |n(k)\rangle + a^\dagger(k) |n(k)\rangle = \\ &= [n(k) + 1]a^\dagger(k) |n(k)\rangle, \end{aligned} \quad (4.19)$$

$$\begin{aligned} N(k)a(k) |n(k)\rangle &= a(k)N(k) |n(k)\rangle - a(k) |n(k)\rangle = \\ &= (n(k) - 1)a(k) |n(k)\rangle. \end{aligned} \quad (4.20)$$

Эти соотношения указывают на то, что если состояние $|n(k)\rangle$ соответствует собственному значению $n(k)$, то состояния $a^\dagger(k) |n(k)\rangle$ и $a(k) |n(k)\rangle$ являются собственными состояниями оператора $N(k)$ с собственными значениями $n(k) + 1$ и $n(k) - 1$. Оператор $N(k)$ — это оператор числа частиц (или, точнее, оператор плотности числа частиц), и, чтобы показать справедливость названия оператора, заметим, что выражение для энергии поля, которое получается при подстановке (4.3) в (4.1), имеет вид¹⁾

$$\begin{aligned} H &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2k_0} \frac{k_0}{2} [a^\dagger(k)a(k) + a(k)a^\dagger(k)] = \\ &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2k_0} k_0 \left[N(k) + \frac{1}{2} \right] \end{aligned} \quad (4.21)$$

¹⁾ Выражения (4.21) и (4.22) носят символический характер. Им можно «придать смысл», переходя в дискретное импульсное представление. См. книгу [5] в списке литературы в конце настоящей главы. — Прим. ред.

(при $k_0 = \omega_k$), аналогичное выражение для импульса поля имеет вид

$$P = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2k_0} k \left[N(k) + \frac{1}{2} \right]. \quad (4.22)$$

Эти выражения подтверждают интерпретацию $N(k)$ как оператора числа частиц с импульсом k и, следовательно, с энергией k_0 при условии, конечно, что $N(k)$ не может быть отрицательным. Чтобы показать, что последнее условие выполняется, заметим, что состояние $a(k) |n(k)\rangle$ должно (как и любое состояние, принадлежащее гильбертову пространству) обладать неотрицательной нормой:

$$\begin{aligned} [a(k) |n(k)\rangle]^\dagger [a(k) |n(k)\rangle] &= \\ &= \langle n(k) | a^\dagger(k) a(k) |n(k)\rangle = n(k) \langle n(k) | n(k)\rangle > 0, \end{aligned}$$

так что если норма состояния $|n(k)\rangle$ неотрицательна, то величина $n(k)$ должна быть положительной или равной нулю. В то же время из соотношения (4.20) следует, что оператор $a(k)$ уменьшает величину $n(k)$ на 1, а повторное применение этого оператора приводит к дальнейшему уменьшению. Единственный способ воспрепятствовать тому, чтобы величина $n(k)$ стала отрицательной, — принять существование основного состояния $|0(k)\rangle$, или короче $|0\rangle$, удовлетворяющего условию

$$a(k) |0\rangle = 0. \quad (4.23)$$

Тогда получим

$$N(k) |0\rangle = a^\dagger(k)a(k) |0\rangle = 0,$$

т. е. основное состояние (вакуум) не содержит частиц с импульсом k . Оператор $a^\dagger(k)$ повышает значение величину $N(k)$ на единицу, так что $N(k)$ есть целое число. Этим завершается обоснование интерпретации величины $N(k)$ как оператора числа частиц, а тем самым — многочастичной интерпретации теории квантованного поля.

Читатель, безусловно, заметил, аналогию между проведенным анализом и квантовомеханическим гармоническим осциллятором. Действительно, нетрудно показать, что наш гамильтониан (4.21) эквивалентен гамильтониану гармонического осциллятора

$$H = \frac{1}{2} P^2(k) + \frac{\omega_k^2}{2} Q^2(k).$$

Для этого нужно положить

$$P(k) = \left(\frac{\omega_k}{2}\right)^{1/2} [a(k) + a^\dagger(k)], \quad Q(k) = \frac{i}{(2\omega_k)^{1/2}} [a(k) - a^\dagger(k)].$$

Таким образом, поле Клейна — Гордона эквивалентно бесконечной сумме осцилляторов.

Операторы $a(k)$ и $a^\dagger(k)$ называются операторами *уничтожения* и *рождения* квантов поля. То обстоятельство, что величина $N(k)$ неотрицательна, означает, что энергия квантованного поля (4.21) неотрицательна, как это было показано в случае классического поля Клейна — Гордона. Очень важно, что данное положение сохранилось. В действительности энергия, конечно, содержит бесконечный вклад всех осцилляторных основных состояний. Но поскольку начало отсчета энергии может быть выбрано произвольно, этот вклад можно вычесть без физических последствий. Переопределенный таким образом гамильтониан имеет вид

$$H = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega_k} \omega_k N(k). \quad (4.24)$$

Легко убедиться [с учетом равенства (4.23)], что такой гамильтониан удовлетворяет условию

$$\langle 0 | H | 0 \rangle = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2k_0} k_0 \langle 0 | a^\dagger(k) a(k) | 0 \rangle = 0.$$

Формально переход к новому гамильтониану эквивалентен записи всех операторов уничтожения справа от операторов рождения. Такое предписание называется *нормальным упорядочением* и обозначается символом $::$. Разлагая $\varphi(x)$ на положительно- и отрицательно-частотные части, как в формуле (4.14),

$$\varphi(x) = \varphi^{(+)}(x) + \varphi^{(-)}(x), \quad (4.25)$$

где

$$\varphi^{(+)}(x) = \int \frac{d^3k}{[(2\pi)^3 2\omega_k]^{1/2}} a(k) f_k(x),$$

$$\varphi^{(-)}(x) = \int \frac{d^3k}{[(2\pi)^3 2\omega_k]^{1/2}} a^\dagger(k) f_k^*(x),$$

мы имеем

$$\begin{aligned} & : \varphi(x)\varphi(y) : = \varphi^{(+)}(x)\varphi^{(+)}(y) + \\ & + \varphi^{(-)}(x)\varphi^{(+)}(y) + \varphi^{(-)}(y)\varphi^{(+)}(x) + \varphi^{(-)}(x)\varphi^{(-)}(y). \end{aligned} \quad (4.26)$$

Покажем теперь, что частицы, которые являются квантами поля Клейна — Гордона, подчиняются статистике Бозе — Эйнштейна.

Из соотношения (4.19) мы видим, что состояние $a^\dagger(k) | n(k) \rangle$ пропорционально состоянию $| n(k) + 1 \rangle$, так что мы пишем

$$a^\dagger(k) | n(k) \rangle = c_+(n(k)) | n(k) + 1 \rangle$$

или, точнее,

$$\begin{aligned} & a^\dagger(k_i) | n(k_1), n(k_2), \dots, n(k_i), \dots \rangle = \\ & = c_+(n(k_i)) | n(k_1), n(k_2), \dots, n(k_i) + 1, \dots \rangle, \end{aligned}$$

где $c_+(n(k))$ — коэффициент, который определяется из условия, что все состояния нормированы:

$$\begin{aligned} & |c_+(n(k))|^2 \langle n(k) + 1 | n(k) + 1 \rangle = \langle n(k) | a(k) a^\dagger(k) | n(k) \rangle = \\ & = [n(k) + 1] \langle n(k) | n(k) \rangle. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$|c_+(n(k))|^2 = n(k) + 1.$$

Таким образом, с точностью до фазового множителя имеем $c_+(n(k)) = [n(k) + 1]^{1/2}$. Аналогичные рассуждения с использованием $a(k)$ и соответствующего коэффициента $c_-(n(k))$ дают $c_-(n(k)) = [n(k)]^{1/2}$. Имеем

$$\begin{aligned} & a(k_i) | n(k_1), n(k_2), \dots, n(k_i), \dots \rangle = \\ & = [n(k_i)]^{1/2} | n(k_1), n(k_2), \dots, n(k_i) - 1, \dots \rangle, \end{aligned} \quad (4.27)$$

$$\begin{aligned} & a^\dagger(k_i) | n(k_1), n(k_2), \dots, n(k_i), \dots \rangle = \\ & = [n(k_i) + 1]^{1/2} | n(k_1), n(k_2), \dots, n(k_i) + 1, \dots \rangle. \end{aligned} \quad (4.28)$$

Вакуумное состояние не содержит ни одной частицы, обладающей ненулевым импульсом, и мы пишем

$$|0\rangle = |0, 0, \dots\rangle.$$

Произвольное нормированное состояние, содержащее $n(k_1)$ частиц с импульсом k_1 , $n(k_2)$ частиц с импульсом k_2 и т. д., можно записать в виде

$$\begin{aligned} & |n(k_1), n(k_2), \dots\rangle = \frac{1}{(n(k_1)!n(k_2)! \dots)^{1/2}} \times \\ & \times [a^\dagger(k_1)]^{n(k_1)} [a^\dagger(k_2)]^{n(k_2)} \dots |0\rangle. \end{aligned} \quad (4.29)$$

Очевидно, что не существует какого-либо ограничения для величины $n(k)$. В состоянии с одним и тем же значением импульса может находиться любое число частиц. Стало быть, данные частицы являются *бозонами*. Заметим, что такой вывод прямо следует из первоначально постулированных коммутационных соотношений (4.9), откуда вытекают соотношения (4.16), которые, в сущности, и указывают на то, что рассматриваемые частицы являются бозо-

нами. Значит, необходимо изменить нормировку, так что если мы хотим, чтобы оператор энергии давал диагональные матрицы, то дираковские частицы должны быть нормированы. Этот важный вопрос рассмотрен в следующей главе [10]. Естественным образом возникает вопрос о нормировке.

Наконец, из

$$\langle k | k' \rangle = \langle 0 | a(k) a^\dagger(k') | 0 \rangle + \langle 0 | a^\dagger(k') a(k) | 0 \rangle$$

Эта нормировка не является канонической, если учесть, что мера d^3k не является инвариантной мерой. А именно, используемая во м

$$\langle k | k' \rangle = \delta^3(k - k')$$

который получается из коммутации

$$[a(k), a^\dagger(k')] = \delta^3(k - k')$$

которое в свою очередь следует из деления $a(k)$.

В используемой нормировке отвечающая импу

$$\psi(x) = \langle 0 | \varphi(x) | k \rangle$$

$$= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega_k}$$

$$= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2k_0}$$

Покажем теперь, что когда в единице от нормы (нормировка) оказывается неожиданно. В этой нормировке обнаруживается, что частица в единице

§ 4.2. Комплексное поле Клейна — Гордона

В предыдущей главе мы видели, что комплексное поле Клейна — Гордона описывает электрически заряженное поле. Посмотрим теперь, как квантуется это поле. Поскольку классическое поле не является действительной величиной, квантовое поле будет неэрмитовым и вместо соотношения (4.14) мы получим

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega_k} \left[a(k) e^{-ikx} + b^\dagger(k) e^{ikx} \right], \\ \varphi^\dagger(x) &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega_k} \left[b(k) e^{-ikx} + a^\dagger(k) e^{ikx} \right].\end{aligned}\quad (4.33)$$

Операторы рождения и уничтожения b и b^\dagger введены как соответствующие коэффициенты при членах с положительной и отрицательной энергией. Мы принимаем одновременные коммутационные соотношения (4.9) и эрмитово-сопряженные по отношению к ним, что дает

$$\begin{aligned}[a(k), a^\dagger(k')] &= (2\pi)^3 2\omega_k \delta^3(k - k'), \\ [b(k), b^\dagger(k')] &= (2\pi)^3 2\omega_k \delta^3(k - k'),\end{aligned}\quad (4.34)$$

причем все остальные коммутаторы равны нулю. Данная система коммутационных соотношений является обобщением соотношений (4.16). Чему она соответствует? Чтобы ответить на этот вопрос, подставим операторные выражения (4.33) в формулу (3.62), определяющую заряд поля Клейна — Гордона. Это дает (если положить $c = 1$, заменить φ^* величиной φ^\dagger и провести нормальное упорядочение)

$$\begin{aligned}Q &= i \int : \varphi^\dagger \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{\partial \varphi^\dagger}{\partial t} \varphi : d^3x = \\ &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega_k} \left[a^\dagger(k) a(k) - b^\dagger(k) b(k) \right].\end{aligned}\quad (4.35)$$

В то же время гамильтониан принимает вид [формула (4.24)]

$$H = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega_k} \left[a^\dagger(k) a(k) + b^\dagger(k) b(k) \right].\quad (4.36)$$

Следовательно, операторы a^\dagger и b^\dagger можно интерпретировать как операторы рождения *частиц* и *античастиц*, несущих противоположный заряд, но одну и ту же массу. Очевидно, что величина Q

не является положительно-определенной. Она представляет собой интеграл от ρ , т. е. от величины, которую в одночастичной теории мы безуспешно пытались рассматривать как плотность вероятности, поскольку она не является положительно-определенной. Мы видим теперь, что в квантованной теории величина ρ получает новую интерпретацию: ее следует рассматривать как плотность заряда.

В дальнейшем нам потребуется знать коммутатор $[\varphi(x), \varphi^\dagger(y)]$. Из (4.33) и (4.34) при $k_0 = \omega_k = (k^2 + m^2)^{1/2}$ мы имеем

$$\begin{aligned}[\varphi(x), \varphi^\dagger(y)] &= \frac{1}{(2\pi)^3} \iint \frac{d^3k}{2k_0} \frac{d^3k'}{2k'_0} \times \\ &\times \left\{ [a(k), a^\dagger(k')] e^{-ikx + ik'y} + [b^\dagger(k), b(k')] e^{ikx - ik'y} \right\} = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3k}{2k_0} \left[e^{ik \cdot (x-y)} e^{-ik_0(x_0-y_0)} - e^{-ik \cdot (x-y)} e^{ik_0(x_0-y_0)} \right] = \\ &= \frac{-i}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3k}{k_0} e^{ik \cdot (x-y)} \sin k_0(x_0 - y_0).\end{aligned}\quad (4.37)$$

Введем инвариантную функцию $\Delta(x - y)$:

$$\blacksquare \Delta(x - y) = -i \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega_k} \left(e^{-ik \cdot (x-y)} - e^{ik \cdot (x-y)} \right).\quad (4.38)$$

Тогда можно будет написать

$$[\varphi(x), \varphi^\dagger(y)] = i\Delta(x - y).\quad (4.39)$$

При равных временах ($x_0 = y_0$) отсюда с учетом формулы (4.37) следует одновременное коммутационное соотношение

$$[\varphi(x), \varphi^\dagger(y)]|_{x_0=y_0} = 0.$$

Аналогичным способом можно убедиться, что даже при неравных временах

$$[\varphi(x), \varphi(y)] = [\varphi^\dagger(x), \varphi^\dagger(y)] = 0.\quad (4.40)$$

§ 4.3. Поле Дирака

Мы уже видели, к каким важным достижениям приводит уравнение Дирака, рассматриваемое как одночастичное уравнение. В частности, оно предсказывает правильное значение магнитного момента электрона и уровни энергии атома водорода (без учета дополнительных поправок). Единственной серьезной трудностью была проблема отрицательных уровней энергии. Мы видели, как

Дирак превратил эту трудность в триумф, приняв, что в вакууме все состояния с отрицательной энергией заполнены (при этом существен принцип исключения), и предсказав далее существование античастиц. Однако предсказание античастиц есть отказ от интерпретации уравнения Дирака как одночастичного уравнения, поскольку теперь требуется, чтобы оно описывало не только частицы, но и античастицы. Опираясь на свой опыт в теории уравнения Клейна — Гордона, мы можем предположить, что правильный способ добиться этого состоит в том, чтобы сначала рассматривать уравнение Дирака как *полевое* уравнение, а затем проквантовать это поле. Точнее, мы должны в полной мере учесть, что поле Дирака по самой своей сути является квантовым полем, которое не существует в классическом пределе $\hbar \rightarrow 0$, а потому последовательно рассматривать это поле как *оператор*. Те же соображения приводились выше, когда речь шла о поле Клейна — Гордона.

Прежде всего обратимся к вопросу об энергии поля Дирака. Мы увидим, что, для того чтобы обеспечивалась положительность энергии, поле Дирака должно подчиняться статистике Ферми — Дирака. Нам нужно выражение для лагранжевой плотности. Легко видеть, что уравнение Дирака (2.96)

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi = 0$$

есть уравнение Эйлера — Лагранжа [формула (3.19)]

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\psi}} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \bar{\psi})} \right) = 0$$

с лагранжианом

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}\gamma^\mu \partial_\mu \psi - m\bar{\psi}\psi = \frac{i}{2} \left[\bar{\psi}\gamma^\mu (\partial_\mu \psi) - \partial_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu \psi \right] - m\bar{\psi}\psi. \quad (4.41)$$

В этом лагранжиане ψ и $\bar{\psi}$ считаются динамически независимыми полями. Исходя из \mathcal{L} , мы находим канонический импульс $\pi(x)$:

$$\pi(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}(x)} = i\psi^\dagger(x). \quad (4.42)$$

[При выводе этого выражения следует считать, что оператор дифференцирования в первой строке уравнения (4.41) действует только на ψ . Тогда разность между этим выражением и второй строкой соотношения (4.41) представляет собой полную дивергенцию и, следовательно, динамически не существенна.] В результате мы имеем гамильтониан

$$\mathcal{H} = \pi \dot{\psi} - \mathcal{L} = \psi^\dagger \gamma^0 (-i\gamma^i \partial_i + m)\psi = \psi^\dagger \gamma^0 (i\gamma^0 \partial_0 \psi) =$$

$$= \psi^\dagger i \frac{\partial}{\partial t} \psi, \quad (4.43)$$

где мы воспользовались самым уравнением Дирака. Конечно, можно было ожидать, что гамильтониан имеет такой вид. Из этого выражения видно, что решения уравнения Дирака в виде плоских волн с отрицательной энергией (см. § 2.4) дают отрицательный вклад в оператор \mathcal{H} , так что последний не является положительно-определенным. Следовательно, проблема отрицательных энергий не устраняется, если рассматривать уравнение Дирака как полевое уравнение, как это было в случае уравнения Клейна — Гордона. Отрицательные энергии исчезают только после квантования.

Произвольное решение уравнения Дирака можно следующим образом разложить по плоским волнам:

$$\psi(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{m}{k_0} \sum_{\alpha=1,2} \left[b_\alpha(k) u^{(\alpha)}(k) e^{-ikx} + d_\alpha^\dagger(k) v^{(\alpha)}(k) e^{ikx} \right], \quad (4.44)$$

$$\bar{\psi}(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{m}{k_0} \sum_{\alpha=1,2} \left[b_\alpha^\dagger(k) \bar{u}^{(\alpha)}(k) e^{ikx} + d_\alpha(k) \bar{v}^{(\alpha)}(k) e^{-ikx} \right],$$

где $u^{(1,2)}$ и $v^{(1,2)}$ — спиноры, соответствующие положительной и отрицательной энергии. Как и в аналогичном выражении (4.33) для поля Клейна — Гордона, оператор уничтожения $b_\alpha(k)$ входит в качестве множителя в член с положительной энергией, а оператор рождения $d_\alpha^\dagger(k)$ — в член с отрицательной энергией. Они обозначены здесь как различные операторы, соответствующие неэрмитову, т. е. заряженному, полю Дирака. Подставляя разложения (4.44) в (4.43) и используя условия нормировки (2.139) для спиноров u и v , получаем выражение для энергии

$$\begin{aligned} H &= \int d^3x \mathcal{H} = \int d^3x \psi^\dagger(x) i \frac{\partial}{\partial t} \psi(x) = \\ &= \int d^3x \sum_{\alpha, \alpha'} \frac{i}{2} \iint \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{d^3k'}{(2\pi)^3} \frac{m^2}{k_0 k'_0} \left\{ \left[b_\alpha^\dagger(k) u^{(\alpha)}(k) e^{ikx} + \right. \right. \\ &+ d_\alpha(k) v^{(\alpha)}(k) e^{-ikx} \left. \right] \left[b_{\alpha'}(k') u^{(\alpha')}(k') (-ik'_0) e^{-ik'x} + \right. \\ &+ d_{\alpha'}^\dagger(k') v^{(\alpha')}(k') (ik'_0) e^{ik'x} \left. \right] - \left[b_\alpha^\dagger(k) u^{(\alpha)}(k) (ik_0) e^{ikx} + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + d_\alpha(k) v^{\dagger(\alpha)}(k) (-ik_0) e^{-ikx} \left[b_{\alpha'}(k') u^{(\alpha')}(k') e^{-ik'x} + \right. \\
& \left. + d_{\alpha'}^{\dagger}(k') v^{(\alpha')}(k') e^{ik'x} \right] = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{m}{k_0} \sum_{\alpha} \left[b_{\alpha}^{\dagger}(k) b_{\alpha}(k) - \right. \\
& \left. - d_{\alpha}(k) d_{\alpha}^{\dagger}(k) \right]. \quad (4.45)
\end{aligned}$$

Мы пока что не делали предположений о существовании каких-либо коммутационных соотношений между величинами b и d . Ясно, что если они удовлетворяют коммутационным соотношениям, подобным (4.34), то энергия (4.45) не будет положительно определенной: d -кванты будут давать отрицательный вклад. Единственный способ обойти эту трудность — это ввести антикоммутирующие

$$\{A, B\} \equiv AB + BA \quad (4.46)$$

и постулировать следующие соотношения антикоммутации, впервые предложенные Йорданом и Вигнером:

$$\{b_{\alpha}(k), b_{\alpha'}^{\dagger}(k')\} = \{d_{\alpha}(k), d_{\alpha'}^{\dagger}(k')\} = (2\pi)^3 \frac{k_0}{m} \delta^3(k - k') \delta_{\alpha\alpha'}. \quad (4.47)$$

$$\{b_{\alpha}(k), b_{\alpha'}(k')\} = \{b_{\alpha}^{\dagger}(k), b_{\alpha'}^{\dagger}(k')\} = 0,$$

$$\{d_{\alpha}(k), d_{\alpha'}(k')\} = \{d_{\alpha}^{\dagger}(k), d_{\alpha'}^{\dagger}(k')\} = 0.$$

Чтобы избавиться от нулевой энергии, мы примем нормальное упорядочение гамильтониана, дополненное требованием, чтобы в случае ферми-полей при каждой перестановке операторов изменялся знак соответствующего члена. Это дает

$$\begin{aligned}
H & = \int d^3x : \psi^{\dagger}(x) i \frac{\partial}{\partial t} \psi(x) : = \\
& = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{m}{k_0} \sum_{\alpha} \left[b_{\alpha}^{\dagger}(k) b_{\alpha}(k) + d_{\alpha}^{\dagger}(k) d_{\alpha}(k) \right]. \quad (4.48)
\end{aligned}$$

Данный оператор является положительно-определенным, но, как нетрудно видеть, антикоммутационные соотношения отвечают статистике Ферми. Например, из соотношения $\{b_{\alpha}^{\dagger}(k), b_{\alpha}^{\dagger}(k)\} = 0$ следует, что $b_{\alpha}^{\dagger}(k) b_{\alpha}^{\dagger}(k) = 0$ и, значит, $b_{\alpha}^{\dagger}(k) b_{\alpha}^{\dagger}(k) |0\rangle = 0$. Невозможно, чтобы два кванта поля Дирака находились в одном и том же состоянии. Таким образом, использование антикоммути-

торов прямо приводит к принципу исключения Паули. Кроме того, полный заряд дается выражением

$$\begin{aligned}
Q & = \int d^3x : j_0(x) : = \int d^3x : \psi^{\dagger}(x) \psi(x) : = \\
& = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{m}{k_0} \sum_{\alpha} \left[b_{\alpha}^{\dagger}(k) b_{\alpha}(k) - d_{\alpha}^{\dagger}(k) d_{\alpha}(k) \right], \quad (4.49)
\end{aligned}$$

которое показывает, что если оператор b^{\dagger} рождает «частицы», то оператор d^{\dagger} рождает «античастицы», т. е. частицы противоположного знака, в точности так же, как это было в случае заряженного поля Клейна — Гордона. Данные рассуждения в точности воспроизводят предсказание Дираком античастиц, кратко описанное выше. Наконец, вычислим одновременной антикоммутатор $\{\psi(x, t), \psi^{\dagger}(x', t)\}$. Величина ψ , очевидно, является 4-спинором, так что, точнее говоря, нам нужно вычислить антикоммутатор $\{\psi_i(x, t), \psi_j^{\dagger}(x', t)\}$, в котором индексы i и j относятся к определенным спинорным компонентам. Нам понадобятся (матричные) выражения (2.145) и (2.146), элементы которых с индексами (ij) записываются в виде

$$\sum_{\alpha} u_i^{(\alpha)}(p) \bar{u}_j^{(\alpha)}(p) = \left(\frac{\gamma \cdot p + m}{2m} \right)_{ij},$$

$$\sum_{\alpha} v_i^{(\alpha)}(p) \bar{v}_j^{(\alpha)}(p) = \left(\frac{\gamma \cdot p - m}{2m} \right)_{ij}.$$

С учетом этих выражений, а также формул (4.44) и (4.47) получаем

$$\begin{aligned}
& \left\{ \psi_i(x, t), \psi_j^{\dagger}(x', t) \right\} = \\
& = \sum_{\alpha, \alpha'} \iint \frac{d^3k d^3k'}{(2\pi)^6} \frac{m^2}{k_0 k'_0} \left[u_i^{(\alpha)}(k) \bar{u}_l^{(\alpha')}(k') \gamma_{lj}^0 \left\{ b_{\alpha}(k), b_{\alpha'}^{\dagger}(k') \right\} \times \right. \\
& \times e^{-ikx + ik'x'} + v_i^{(\alpha)}(k) \bar{v}_l^{(\alpha')}(k') \gamma_{lj}^0 \left\{ d_{\alpha}^{\dagger}(k), d_{\alpha'}(k') \right\} e^{ikx - ik'x'} \left. \right] = \\
& = \sum_{\alpha} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{m}{k_0} \left[u_i^{(\alpha)}(k) \bar{u}_l^{(\alpha)}(k) \gamma_{lj}^0 e^{ik \cdot (x-x')} + \right. \\
& \left. + v_i^{(\alpha)}(k) \bar{v}_l^{(\alpha)}(k) \gamma_{lj}^0 e^{-ik \cdot (x-x')} \right] =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3 2k_0} \left\{ \left[(\boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{k} + m) \boldsymbol{\gamma}^0 \right]_{ij} e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}')} + \right. \\
&+ \left. \left[\boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{k} - m \right]_{ij} \boldsymbol{\gamma}^0 \right\} e^{-i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}')} = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3 2k_0} 2k_0 \delta_{ij} e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}')} = \\
&= \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \delta_{ij}. \quad (4.50)
\end{aligned}$$

Аналогично получаются равенства

$$\{ \psi_i(\mathbf{x}, t), \psi_j(\mathbf{x}', t) \} = 0, \quad \{ \psi_i^\dagger(\mathbf{x}, t), \psi_j^\dagger(\mathbf{x}', t) \} = 0. \quad (4.51)$$

§ 4.4. Электромагнитное поле

Считается, что фундаментальными полями природы являются спинорные поля (лептоны и кварки) и калибровочные поля (электромагнитное, слабое и глюонное). Показав, как квантуется спинорное поле, мы обратимся теперь к калибровочным полям и рассмотрим для простоты электромагнитное поле. При квантовании калибровочных полей возникают некоторые сложности, и все они обнаруживаются в случае электромагнитного поля. Дополнительные усложнения, связанные с индексами внутренней симметрии (которыми обладают слабое и глюонное поля), не приводят на данном этапе к каким-либо особым усложнениям (эти усложнения скажутся позднее при выводе правил Фейнмана, где мы будем использовать метод функционального интегрирования).

Причиной трудностей служит то обстоятельство, что электромагнитное поле, как и любое безмассовое поле, обладает лишь *двумя* независимыми компонентами, но описывается ковариантным образом с помощью 4-вектора A_μ . Выбирая две из этих компонент в качестве физических и затем производя их квантование, мы утрачиваем явную ковариантность. Если мы желаем сохранить ковариантность, то вынуждены иметь дело с двумя лишними компонентами. Мы рассмотрим примеры этих двух подходов к квантованию и увидим, что центральную роль играет калибровочная инвариантность, которая говорит нам, что величины A_μ определены только с точностью до калибровочного преобразования.

Нам понадобится следующая информация из гл. 2 и 3. Шесть компонент электромагнитного поля могут быть записаны как антисимметричный тензор $F^{\mu\nu}$ [формула (2.222)]. Однородные уравнения Максвелла непосредственно следуют из предположения, что тензор $F^{\mu\nu}$ является четырехмерным ротором [формулы (2.218) — (2.221)]:

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu. \quad (4.52)$$

В вакууме два других («неоднородных») уравнения Максвелла (2.223) имеют вид $\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0$, или

$$\Box A^\nu - \partial^\nu (\partial_\mu A^\mu) = 0. \quad (4.53)$$

Эти уравнения следуют из вариационного принципа с лагранжианом (3.82)

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}, \quad (4.54)$$

где A^μ рассматривается как динамическое поле. Для заданного электромагнитного поля вектор A_μ не является единственным. При калибровочном преобразовании $A_\mu \rightarrow A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu \Lambda(x)$ величины $F_{\mu\nu}$ остаются неизменными. Налагая на Λ условие

$$\Box \Lambda = -\partial_\mu A^\mu,$$

мы получаем $\partial_\mu A'^\mu = 0$. Если опустить штрих, то это условие совпадает с условием Лоренца (2.229)

$$\partial_\mu A^\mu = 0. \quad (4.55)$$

О векторном потенциале, удовлетворяющем этому условию, говорят, что он принадлежит к *лоренцевой калибровке*. Это единственное условие эффективно сокращает число независимых компонент вектора A_μ с четырех до трех. Однако условием Лоренца вектор A_μ не определяется единственным образом. Очевидно, что если A_μ удовлетворяет условию Лоренца, то и A'_μ также будет удовлетворять этому условию, коль скоро $\Box \Lambda(x) = 0$. Далее, выбирая $\Lambda(x)$ так, чтобы выполнялось равенство

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial t} = -\varphi,$$

мы получим $\varphi' = 0$, откуда в силу равенства (4.55) следует, что $\nabla \cdot \mathbf{A}' = 0$. Говорят, что потенциалы, удовлетворяющие дополнительному условию

$$\varphi = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{A} = 0, \quad (4.56)$$

принадлежат к калибровке *излучения* (или *кулоновской калибровке*). В этой калибровке, очевидно, существуют только две независимые компоненты A^μ . То же самое имеет место в реальном мире. Итак, в кулоновской калибровке природа электромагнитного поля проявляется наиболее прозрачным образом. Поэтому мы рассмотрим квантование в данной калибровке.

Квантование в кулоновской калибровке

Мы будем действовать, насколько это возможно, по аналогии с квантованием поля Клейна — Гордона. Определим сначала канонически-сопряженные импульсы

$$\pi^0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_0} = 0, \quad (4.57)$$

$$\pi^i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_i} = -\dot{A}^i - \partial^i A^0 = E^i, \quad (4.58)$$

а затем примем обычные коммутационные соотношения (напомним, что канонические импульсы π^i сопряжены по отношению к $A_i = -A^i$)

$$[A_i(x, t), \pi^j(x', t)] = -[A^i(x, t), E^j(x', t)] = i\delta_{ij}\delta^3(x - x'). \quad (4.59)$$

(С точки зрения строго тензорного подхода данное соотношение некорректно, поскольку индексы в его правой части расположены внизу и в нее входят не величины g_{ij} , а величины δ_{ij} , отличающиеся от g_{ij} знаком при $i, j = 1, 2, 3$. Однако численно эти соотношения верны.) Условие (4.59) не совместимо с условием, определяющим кулоновскую калибровку $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$, поскольку, взяв дивергенцию обеих частей, мы получим

$$[\nabla \cdot \mathbf{A}(x, t), E^i(x', t)] = i\partial^i \delta^3(x - x') \neq 0$$

Следовательно, необходимо изменить коммутационные соотношения (4.59).

С этой целью заменим δ_{ij} симметричным по i и j тензором 2-го ранга Δ_{ij} и запишем $\delta^3(x - x')$ в интегральной форме. Будем иметь

$$\left[A^i(x, t), E^j(x', t) \right] = -i\Delta^{ij} \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k e^{ik \cdot (x-x')},$$

откуда, взяв дивергенцию, получим

$$\left[\nabla \cdot \mathbf{A}(x, t), E^j(x', t) \right] = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k \left(\sum_i k_i \Delta^{ij} \right) e^{ik \cdot (x-x')}.$$

Условие равенства нулю этого выражения имеет, очевидно, вид

$$\Delta_{ij} = \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2},$$

и мы получаем правильные соотношения коммутации

$$\begin{aligned} [A^i(x, t), E^j(x', t)] &= i \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left(\delta^{ij} - \frac{k^i k^j}{k^2} \right) e^{ik \cdot (x-x')} = \\ &= i \left(\delta^{ij} - \frac{\partial^i \partial^j}{\nabla^2} \right) \delta^3(x - x'), \end{aligned} \quad (4.60)$$

$$[A^i(x, t), A^j(x', t)] = [E^i(x, t), E^j(x', t)] = 0. \quad (4.61)$$

Основываясь на этих соотношениях, мы будем строить многочастичную интерпретацию теории, вычисляя, как это мы делали в случае полей Клейна — Гордона и Дирака, оператор Гамильтона. Заметим вначале, что с учетом условия Лоренца (4.55) уравнение Максвелла (4.53) принимает вид

$$\square A^\mu = 0, \quad (4.62)$$

и далее, поскольку в кулоновской калибровке $\varphi = 0$, мы имеем

$$\square A = 0. \quad (4.63)$$

Это — уравнение Клейна — Гордона для безмассовой частицы. Мы запишем его решение в виде разложения по фундаментальным решениям e^{ikx} и e^{-ikx} . Коэффициентами разложения, очевидно, являются векторы, которые называют *векторами поляризации*. Мы обозначим их символом $\epsilon^{(\lambda)}(k)$, где λ — индекс, смысл которого вскоре выяснится. Напишем выражение [ср. с формулой (4.3) в случае скалярного поля]

$$A(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2k_0} \sum_{\lambda=1}^2 \epsilon^{(\lambda)}(k) \left[a^{(\lambda)}(k) e^{-ikx} + a^{(\lambda)\dagger}(k) e^{ikx} \right], \quad (4.64)$$

где $k^2 = 0$, $k_0 = |\mathbf{k}|$; λ принимает лишь два значения, поскольку условие (4.56), определяющее кулоновскую калибровку $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$, дает

$$\mathbf{k} \cdot \epsilon^{(\lambda)}(k) = 0. \quad (4.65)$$

Таким образом, для данного направления распространения $\mathbf{k}/|\mathbf{k}|$ векторы $\epsilon^{(\lambda)}(k)$ являются поперечными (рис. 4.1). Очевидно также, что их можно выбрать ортонормированными:

$$\epsilon^{(\lambda)}(k) \cdot \epsilon^{(\lambda')}(k) = \delta_{\lambda\lambda'}. \quad (4.66)$$

Теперь путем прямых, хотя и несколько утомительных, вычислений мы можем получить коммута-

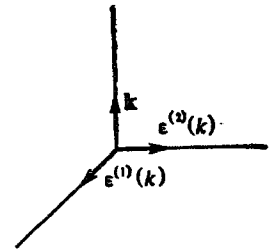


Рис. 4.1. Векторы поляризации в случае электромагнитного поля с импульсом \mathbf{k} .

ционные соотношения для операторов $a^{(\lambda)}(k)$ и $a^{(\lambda)\dagger}(k)$. Используя функции $f_k(x)$, определенные выше [формула (4.11)]:

$$f_k(x) = \frac{1}{[(2\pi)^3 2k_0]^{1/2}} e^{-ikx},$$

мы имеем

$$A(x) = \int \frac{d^3k}{[(2\pi)^3 2k_0]^{1/2}} \sum_{\lambda} \varepsilon^{(\lambda)}(k) [f_k(x) a^{(\lambda)}(k) + f_k^*(x) a^{(\lambda)\dagger}(k)]. \quad (4.67)$$

Поскольку функции $f_k(x)$ и $f_k^*(x)$ образуют ортонормированную систему, отсюда следуют выражения

$$a^{(\lambda)}(k) = \int d^3x [(2\pi)^3 2k_0]^{1/2} f_k^*(x) i \overleftrightarrow{\partial}_0 \varepsilon^{(\lambda)}(k) \cdot A(x),$$

$$a^{(\lambda)\dagger}(k) = - \int d^3x [(2\pi)^3 2k_0]^{1/2} f_k(x) i \overleftrightarrow{\partial}_0 \varepsilon^{(\lambda)}(k) \cdot A(x).$$

Далее с учетом формул (4.60), (4.61), (4.65) и (4.66) получаем

$$[a^{(\lambda)}(k), a^{(\lambda')\dagger}(k')] = 2k_0 (2\pi)^3 \delta_{\lambda\lambda'} \delta^3(k - k'), \quad (4.68)$$

$$[a^{(\lambda)}(k), a^{(\lambda')}(k')] = [a^{(\lambda)\dagger}(k), a^{(\lambda')\dagger}(k')] = 0. \quad (4.69)$$

Эти коммутационные соотношения имеют тот же вид, что и в случае скалярного поля, и их можно рассматривать как коммутационные соотношения для операторов уничтожения и рождения фотонов. Такая интерпретация подтверждается, если построить оператор числа частиц $N^{(\lambda)}(k) = a^{(\lambda)\dagger}(k) a^{(\lambda)}(k)$ и вычислить энергию поля:

$$H = \frac{1}{2} \int d^3x (E^2 + B^2) = \frac{1}{2} \int d^3x (\dot{A}^2 + (\nabla \times A)^2),$$

поскольку в кулоновской калибровке $E = -\dot{A}$. Чтобы вычислить величину $(\nabla \times A)^2$, напомним выражение (по повторяющимся индексам производится суммирование)

$$\begin{aligned} (\nabla \times A)^2 &= \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{imn} \partial_j A_k \partial_m A_n = (\delta_{jm} \delta_{kn} - \delta_{jn} \delta_{km}) \partial_j A_k \partial_m A_n = \\ &= (\partial_j A_k) (\partial_j A_k) - (\partial_j A_k) (\partial_k A_j). \end{aligned} \quad (4.70)$$

Второй член может быть записан в виде полной дивергенции, поскольку

$$\begin{aligned} \partial_j (A_k \partial_k A_j) &= (\partial_j A_k) (\partial_k A_j) + A_k (\partial_j \partial_k A_j) = \\ &= (\partial_j A_k) (\partial_k A_j) + A_k \partial_k (\nabla \cdot A), \end{aligned}$$

причем $\nabla \cdot A = 0$ в кулоновской калибровке. Но интеграл от полной дивергенции равен нулю, так что только первый член выражения (4.70) дает ненулевой вклад. Кроме того,

$$\partial_j (A_k \partial_j A_k) = (\partial_j A_k) (\partial_j A_k) + A_k \nabla^2 A_k,$$

и, таким образом, аналогичный расчет «с учетом полной дивергенции» дает

$$\int (\partial_j A_k) (\partial_j A_k) d^3x = - \int A \cdot \nabla^2 A d^3x.$$

В итоге гамильтониан электромагнитного поля записывается в виде

$$H = \frac{1}{2} \int (\dot{A}^2 - A \cdot \nabla^2 A) d^3x.$$

Подставляя сюда разложение (4.67), после простых преобразований получаем

$$H = \sum_{\lambda} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2k_0} \frac{k_0}{2} [a^{(\lambda)}(k) a^{(\lambda)\dagger}(k) + a^{(\lambda)\dagger}(k) a^{(\lambda)}(k)],$$

откуда после нормального упорядочения операторов, исключаящего энергию вакуума, приходим к выражению

$$H = \sum_{\lambda} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 k_0} k_0 [a^{(\lambda)\dagger}(k) a^{(\lambda)}(k)]. \quad (4.71)$$

Это — полная энергия системы фотонов, обладающих поперечной поляризацией ($\lambda = 1, 2$). Она, очевидно, является положительно-определенной, и, таким образом, мы имеем удовлетворительную квантовую теорию электромагнитного поля. Она обладает тем достоинством, что квантуются только физические, т. е. поперечные, степени свободы, но это достигается за счет утраты лоренц-инвариантности, поскольку условие (4.56), определяющее кулоновскую калибровку, не является лоренц-инвариантным. Это не означает что расчеты, выполненные в данной калибровке, не дают релятивистски-инвариантных результатов. Напротив, мы исходили из релятивистской теории, и, например, сечения рассеяния, которые мы вычисляем, также релятивистски-инвариантны, но эта инвариантность в кулоновской калибровке не является *явной*. В некоторых отношениях более предпочтительно квантование, выполненное лоренц-инвариантным образом, например, в лоренцевой калибровке. Перейдем к ее рассмотрению.

Квантование в лоренцевой калибровке

Поскольку наша цель — сохранить ковариантность, все четыре компоненты векторов A_{μ} и π , будут рассматриваться и будут

удовлетворяют ковариантным коммутационным соотношениям

$$[A_\mu(x, t), \pi_\nu(x', t)] = i g_{\mu\nu} \delta^3(x - x'), \quad (4.72)$$

$$[A_\mu(x, t), A_\nu(x', t)] = [\pi_\mu(x, t), \pi_\nu(x', t)] = 0, \quad (4.73)$$

в которых $g_{\mu\nu}$ — тензор метрики в пространстве Минковского и

$$\pi^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_\mu}.$$

Однако мы сразу сталкиваемся с трудностью, поскольку для лагранжиана (4.54)

$$\pi^0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_0} = 0$$

и, следовательно, невозможно удовлетворить соотношению (4.72) для компоненты A_0 . В действительности, поскольку величина A_0 коммутирует с π^0 , она является c -числом, а не оператором, и мы сразу утрачиваем ковариантность! Чтобы определить канонический импульс π^0 , не равный нулю, нам необходимо изменить лагранжиан. Этот новый лагранжиан, конечно, не будет давать уравнения Максвелла. Спрашивается: что мы получим взамен? Единственный разумный ответ состоит в том, что это будут уравнения Максвелла (4.53) плюс ковариантное калибровочное условие, т. е. условие Лоренца (4.55). Совместно они дают уравнение $\square A_\mu = 0$. Таким образом, мы ищем лагранжиан, который дает это уравнение движения и в котором «уже фиксировано» условие лоренцевой калибровки. Как нетрудно убедиться, лагранжиан вида

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{2} (\partial_\mu A^\mu)^2 \quad (4.74)$$

удовлетворяет этим требованиям, поскольку

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu A_\nu)} = -\partial^\mu A^\nu + \partial^\nu A^\mu - g^{\mu\nu} \partial_\lambda A^\lambda, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\mu} = 0.$$

Следовательно, уравнения Эйлера — Лагранжа имеют вид

$$\square A_\mu = 0, \quad (4.75)$$

что и требовалось. Дополнительный член $-(1/2)(\partial \cdot A)^2$ в выражении (4.74) называется «членом, фиксирующим калибровку». В действительности мы могли бы добавить в (4.54) член, фиксирующий калибровку, более общего вида $-(\lambda/2)(\partial \cdot A)^2$, т. е. рассмотреть лагранжиан

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{\lambda}{2} (\partial_\mu A^\mu)^2, \quad (4.76)$$

который приводит к *немаксвеллову* уравнению движения

$$\square A^\mu - (1 - \lambda) \partial^\mu (\partial \cdot A) = 0. \quad (4.77)$$

Случай $\lambda = 1$, который называют «фейнмановской калибровкой» (что, однако, не совсем верно), вновь дает уравнение (4.75). Члены общего вида фиксирующие калибровку, оказываются полезным изобретением, когда мы переходим к квантованию неабелевых полей.

Вернемся теперь к лагранжиану (4.74) и вычислим π^0 :

$$\pi^0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_0} = -\partial_\mu A^\mu. \quad (4.78)$$

Однако это выражение так же не подходит, как и прежде, поскольку оно обращается в нуль в лоренцевой калибровке! Выход из этой дилеммы состоит в том, чтобы постулировать, что условие Лоренца не выполняется как *операторное тождество*. Вместо этого мы наложим более слабое требование, состоящее в том, что для физических состояний $|\psi\rangle$ величина $\partial_\mu A^\mu$ должна иметь нулевое среднее значение:

$$\langle \psi | \partial_\mu A^\mu | \psi \rangle = 0. \quad (4.79)$$

Ниже будут выведены следствия из этого предположения. Сначала заметим, что решение уравнения (4.75), очевидно, имеет вид

$$A_\mu(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2k_0} \sum_{\lambda=0}^3 \epsilon_\mu^{(\lambda)}(k) [a^{(\lambda)}(k) e^{-ikx} + a^{(\lambda)\dagger}(k) e^{ikx}]. \quad (4.80)$$

Входящие сюда 4-векторы поляризации $\epsilon_\mu^{(0)}$, $\epsilon_\mu^{(1)}$, $\epsilon_\mu^{(2)}$ и $\epsilon_\mu^{(3)}$ нормированы релятивистским образом, причем вектор $\epsilon^{(0)}$ времениподобен, а векторы $\epsilon^{(1)}$, $\epsilon^{(2)}$ и $\epsilon^{(3)}$ пространственноподобны:

$$\begin{aligned} \epsilon^{(\lambda)} \cdot \epsilon^{(\lambda')} &= \epsilon_\mu^{(\lambda)} \epsilon^{\mu(\lambda')} = \epsilon_\mu^{(\lambda)} g^{\mu\nu} \epsilon_\nu^{(\lambda')} = \epsilon_0^{(\lambda)} \epsilon_0^{(\lambda')} - \epsilon_1^{(\lambda)} \epsilon_1^{(\lambda')} - \\ &- \epsilon_2^{(\lambda)} \epsilon_2^{(\lambda')} - \epsilon_3^{(\lambda)} \epsilon_3^{(\lambda')} = g^{\lambda\lambda'}. \end{aligned} \quad (4.81)$$

В системе отсчета, в которой фотон (мы предвидим интерпретацию в терминах частиц) движется вдоль третьей оси, мы имеем $k^\mu = (k, 0, 0, k)$ и

$$\epsilon^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \epsilon^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \epsilon^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \epsilon^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (4.82)$$

причем

$$k \cdot \epsilon^{(\lambda)} = 0. \quad (4.83)$$

Фотоны, поляризованные вдоль вектора $\epsilon^{(0)}$, называются «скалярными» или «временными», а фотоны, поляризованные вдоль $\epsilon^{(1)}$ — «продольными», и, наконец, фотоны, поляризованные вдоль $\epsilon^{(2)}$ и $\epsilon^{(3)}$, называются «поперечными». Скалярные и продольные фотоны, очевидно, являются нефизическими.

Найдем теперь выражение для коммутатора $[a^{(\lambda)}(k), a^{(\lambda')\dagger}(k')]$. Из лагранжиана (4.74) получается канонический импульс

$$\pi^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_\mu} = F^{\mu 0} - g^{\mu 0} (\partial_\nu A^\nu), \quad (4.84)$$

или

$$\pi^0 = -\dot{A}^0 + \nabla \cdot \mathbf{A}, \quad \pi^i = \partial^i A^0 - \dot{A}^i. \quad (4.85)$$

Из (4.73) следует, что пространственные производные 4-вектора A_μ коммутируют при равных временах; поэтому отличный от нуля коммутатор (4.72) принимает вид

$$[\dot{A}_\mu(x, t), A_\nu(x', t)] = ig_{\mu\nu} \delta^3(x - x'). \quad (4.86)$$

Подставляя сюда разложение (4.80), получаем соотношение

$$[a^{(\lambda)}(k), a^{(\lambda')\dagger}(k')] = -g^{\lambda\lambda'} 2k_0 (2\pi)^3 \delta^3(k - k') \quad (4.87)$$

[т. е. «ковариантную» форму соотношения (4.68)]. Остальные коммутаторы равны нулю.

Интерпретация операторов a и a^\dagger как операторов уничтожения и рождения при $\lambda = 1, 2, 3$, т. е. для продольных и поперечных фотонов, не сталкивается с какими-либо проблемами и строится обычным образом, однако соотношение для скалярных фотонов

$$[a^{(0)}(k), a^{(0)\dagger}(k')] = -2k_0 (2\pi)^3 \delta^3(k - k') \quad (4.88)$$

сопряжено с трудностью вследствие знака минус в правой части. Одним из следствий этого является то, что норма состояния с одним скалярным фотоном отрицательна. Так как это состояние имеет вид

$$|1\rangle = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2k_0} f(k) a^{(0)\dagger}(k) |0\rangle,$$

с учетом соотношения (4.88) мы будем иметь

$$\begin{aligned} \langle 1 | 1 \rangle &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2k_0} \frac{d^3k'}{(2\pi)^3 2k'_0} f(k) f^*(k') \langle 0 | a^{(0)}(k') a^{(0)\dagger}(k) | 0 \rangle = \\ &= - \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2k_0} \frac{d^3k'}{(2\pi)^3 2k'_0} f(k) f^*(k') 2k_0 (2\pi)^3 \delta^3(k - k') \langle 0 | 0 \rangle = \\ &= - \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2k_0} |f(k)|^2 \langle 0 | 0 \rangle. \end{aligned} \quad (4.89)$$

Аналогично получаем, что состояние $|n_t\rangle$ с n_t временными фотонами имеет норму $\langle n_t | n_t \rangle = (-1)^{n_t}$. Гильбертово пространство состояний (пространство Фока) обладает *индефинитной метрикой*. Это чрезвычайно неприятное обстоятельство, затрудняющее квантовомеханическую интерпретацию таких состояний. Другое следствие состоит в том, что скалярные фотоны дают отрицательный вклад в энергию. Выполнив вычисления, аналогичные тем, которые дали соотношение (4.71), получаем

$$H = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2k_0} k_0 \left[\sum_{\lambda=1}^3 a^{(\lambda)\dagger}(k) a^{(\lambda)}(k) - a^{(0)\dagger}(k) a^{(0)}(k) \right]. \quad (4.90)$$

В действительности здесь имеется тонкость, связанная с тем, что оператор плотности числа частиц для временных фотонов равен не $a^{(0)\dagger}(k) a^{(0)}(k)$, а $-a^{(0)\dagger}(k) a^{(0)}(k)$. Рассмотрим состояние с одним временным фотоном

$$|1\rangle = \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3 2q_0} f(q) a^{(0)\dagger}(q) |0\rangle.$$

Мы требуем, чтобы выполнялось равенство $N|1\rangle = |1\rangle$, где N — интеграл от оператора плотности числа частиц. Учитывая знак минус, мы имеем

$$\begin{aligned} N|1\rangle &= - \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2k_0} a^{(0)\dagger}(k) a^{(0)}(k) \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3 2q_0} f(q) a^{(0)\dagger}(q) |0\rangle = \\ &= - \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2k_0} \frac{d^3q}{(2\pi)^3 2q_0} f(q) a^{(0)\dagger}(k) [a^{(0)}(k), a^{(0)\dagger}(q)] |0\rangle = \\ &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2k_0} \frac{d^3q}{(2\pi)^3 2q_0} f(q) (2\pi)^3 2k_0 \delta^3(k - q) a^{(0)\dagger}(k) |0\rangle = \\ &= \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3 2q_0} f(q) a^{(0)\dagger}(q) |0\rangle = |1\rangle. \end{aligned}$$

Заметим, что единственный существенный момент в этом вычислении состоит в том, что знак минус в определении оператора плотности числа частиц компенсируется знаком минус в коммутацион-

ном соотношении (4.88). Поэтому оператор Гамильтона (4.90) не может иметь отрицательных собственных значений. Однако он может иметь отрицательные средние значения. Например, легко показать, что

$$\langle 1 | H | 1 \rangle = - \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3 2k_0} k_0 |f(k)|^2 \langle 0 | 0 \rangle$$

Способ, которым можно избавиться от нежелательных эффектов, основан на использовании условия Лоренца (которое иногда называют дополнительным условием). Выше мы отмечали, что условие $\partial_\mu A^\mu$ нельзя рассматривать как операторное тождество, поскольку это противоречит коммутационным соотношениям (4.72). Слишком жестким является также требование, чтобы физическое состояние $|\psi\rangle$ удовлетворяло условию $\partial_\mu A^\mu |\psi\rangle = 0$, ибо, разложив его на положительно- и отрицательно-частотные части, мы имели бы

$$\partial_\mu A^\mu |\psi\rangle = (\partial_\mu A^{(+)\mu} + \partial_\mu \bar{A}^{(-)\mu}) |\psi\rangle = 0,$$

но отрицательно-частотный оператор содержит операторы рождения, так что даже вакуум не может удовлетворять этому тождеству. В то же время, поскольку $A^{(+)\mu}$ содержат операторы уничтожения, мы можем принять менее жесткое требование

$$\partial_\mu A^{(+)\mu} |\psi\rangle = 0, \quad (4.91)$$

которому вакуум автоматически удовлетворяет. Отсюда следует, что среднее значение величины $\partial_\mu A^\mu$ равно нулю:

$$\begin{aligned} \langle \psi | \partial_\mu A^\mu | \psi \rangle &= \langle \psi | \partial_\mu A^{(+)\mu} + \partial_\mu A^{(-)\mu} | \psi \rangle = \langle \psi | \partial_\mu A^{(-)\mu} | \psi \rangle = \\ &= \langle \psi | \partial_\mu A^{(+)\mu} | \bar{\psi} \rangle^* = 0. \end{aligned}$$

Легко видеть, что это условие, впервые сформулированное Гуптой и Блейлером, решает проблему отрицательных средних значений для энергии поля. Подстановка разложения (4.80) в (4.91) дает

$$\sum_{\lambda=0}^3 k^\mu \epsilon_\mu^{(\lambda)} a^{(\lambda)}(k) |\psi\rangle = 0,$$

откуда в силу равенства (4.83) следует, что

$$[k^\mu \epsilon_\mu^{(0)} a^{(0)}(k) + k^\mu \epsilon_\mu^{(3)} a^{(3)}(k)] |\psi\rangle = 0.$$

но $k^\mu \epsilon_\mu^{(0)} = -k^\mu \epsilon_\mu^{(3)}$, и, следовательно, мы имеем

$$[a^{(0)}(k) - a^{(3)}(k)] |\psi\rangle = 0. \quad (4.92)$$

Стало быть, физические состояния содержат такую примесь продольных и временных фотонов, что выполняется условие (4.92).

Не допускается, как это мы предполагали выше, существование (скажем) только одного временного фотона. Из условия (4.92) прямо следует, что

$$\langle \psi | a^{(0)\dagger}(k) a^{(0)}(k) | \psi \rangle = \langle \psi | a^{(3)\dagger}(k) a^{(3)}(k) | \psi \rangle,$$

и, значит, вклады продольных и временных фотонов в гамильтониан (4.90) взаимно уничтожаются, оставляя лишь вклады (физических) поперечных состояний. Очевидно, что формально ограничения, вносимые дополнительным условием, можно представить, заменив среднее значение $\langle 0 \rangle = (\Phi, O \Phi)$ некоторого оператора O величиной

$$\langle O \rangle - \langle \Phi | \eta O | \Phi \rangle,$$

где η — «метрический оператор», равный $(-1)^\mu$. Тогда гамильтониан (4.90) будет иметь положительное среднее значение. При этом определение нормы $N(\Phi)$ вектора состояния Φ заменяется определением

$$N(\Phi) = \langle \Phi | \eta O | \Phi \rangle,$$

в результате чего все состояния приобретают положительную норму. Таким образом, мы видим, что трудности, возникающие при полностью ковариантной трактовке электромагнитного поля, не являются непреодолимыми при условии, что условие Лоренца рассматривается как ограничение для средних значений. Более подробное изложение формализма Гупты — Блейлера интересующийся читатель может найти в книгах [5, 8, 9].

§ 4.5. Массивное векторное поле

Массивное поле со спином 1 описывается уравнениями Прока (2.238) и (2.239):

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu, \quad \partial_\mu F^{\mu\nu} + m^2 A^\nu = 0; \quad (4.93)$$

$$\partial_\mu A^\mu = 0. \quad (4.94)$$

Существуют три независимые компоненты массивного поля со спином 1, и с помощью выписанного выше условия мы можем исключить одну из четырех компонент вектора A^μ . В нашем случае это A^0 . Уравнения Прока следуют из лагранжиана

$$\mathcal{L} = - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{1}{2} m^2 A_\mu A^\mu. \quad (4.95)$$

Заметим, что благодаря знаку плюс перед массовым членом мы после исключения компоненты A^0 получим член вида $-(1/2)m^2(A \cdot A)$, и, значит, массовый член входит с отрицательным

коэффициентом, так же как это было в случае лагранжиана Клейна — Гордона (3.10). Операторы канонически сопряженного импульса имеют вид

$$\pi^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_\mu} = \dot{A}^\mu - \dot{A}^\mu, \quad (4.96)$$

откуда следует, что $\pi^0 = 0$. Но это не должно нас беспокоить, поскольку подразумевается, что компонента A^0 исключена с помощью соотношения (4.94). Следовательно,

$$\pi^i = -\dot{A}^i$$

и соотношения коммутации

$$[A^i(x, t), \pi_j(x', t)] = i\delta_j^i \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$$

принимают вид

$$[\dot{A}_i(x, t), A_j(x', t)] = ig_{ij} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}'). \quad (4.97)$$

Для поля $A_\mu(x)$ имеет место разложение

$$A_\mu(k) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2k_0} \sum_{\lambda=1}^3 \epsilon_\mu^{(\lambda)}(k) [a^{(\lambda)}(k) e^{-ikx} + a^{(\lambda)\dagger}(k) e^{ikx}]. \quad (4.98)$$

Обратив его с учетом равенства (4.97), находим коммутационные соотношения

$$[a^{(\lambda)}(k), a^{(\lambda')\dagger}(k')] = \delta_{\lambda\lambda'} 2k^0 (2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}'), \quad (4.99)$$

которые можно сравнить с (4.87). В данном случае отсутствует аналог скалярного фотона и с соотношением (4.99) не связаны какие-либо трудности. Нетрудно убедиться, что после нормального упорядочения гамильтониан приобретает вид

$$H = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2k_0} k_0 \sum_{\lambda=1}^3 a^{(\lambda)\dagger}(k) a^{(\lambda)}(k). \quad (4.100)$$

Таким образом, многочастичная интерпретация теории не представляет особых трудностей.

Векторы поляризации $\epsilon_\mu^{(\lambda)}(k)$ ортонормированы (и пространственноподобны):

$$\epsilon^{(\lambda)}(k) \cdot \epsilon^{(\lambda')}(k) = g_{\lambda\lambda'} \quad (4.101)$$

и в силу условия (4.94) ортогональны времениподобному вектору k^μ :

$$\epsilon_\mu^{(\lambda)}(k) k^\mu = 0. \quad (4.102)$$

Легко видеть, что в системе покоя частицы этим условием удовлетворяют векторы

$$k^\mu = (m, 0, 0, 0),$$

$$\epsilon_\mu^{(1)} = (0, 1, 0, 0),$$

$$\epsilon_\mu^{(2)} = (0, 0, 1, 0),$$

$$\epsilon_\mu^{(3)} = (0, 0, 0, 1).$$

(4.103)

Ниже нам понадобится величина

$$\sum_{\lambda=1}^3 \epsilon_\mu^{(\lambda)} \epsilon_\nu^{(\lambda)} = P_{\mu\nu}, \quad (4.104)$$

которая является тензором 2-го ранга и в системе покоя имеет следующие компоненты:

$$\left(\begin{array}{c} \text{Система} \\ \text{покоя} \end{array} \right) P_{00} = 0, \quad P_{11} = P_{22} = P_{33} = 1, \quad (4.105)$$

$$P_{\mu\nu} = 0 \quad (\mu \neq \nu).$$

Вычислим этот тензор в движущейся системе. Рассмотрим случай, когда частица движется вдоль оси z с импульсом $|\mathbf{k}|$, так что $k^\mu = (k^0, 0, 0, |\mathbf{k}|)$. Искомый результат получается, если преобразовать тензор из системы покоя с помощью матрицы буста

$$\Lambda_\nu^\mu = \frac{1}{m} \begin{pmatrix} k^0 & 0 & 0 & |\mathbf{k}| \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ |\mathbf{k}| & 0 & 0 & k^0 \end{pmatrix}. \quad (4.106)$$

Тензор $P_{\mu\nu}$ преобразуется следующим образом:

$$P'_{\mu\nu} = \Lambda^\rho_\mu \Lambda^\sigma_\nu P_{\rho\sigma}, \quad (4.107)$$

что дает в движущейся системе

$$P_{\mu\nu} = \frac{1}{m^2} \begin{pmatrix} |\mathbf{k}|^2 & 0 & 0 & -k^0 |\mathbf{k}| \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -k^0 |\mathbf{k}| & 0 & 0 & (k^0)^2 \end{pmatrix}. \quad (4.108)$$

[Знаки минус возникают в связи с заменой ковариантных индексов контравариантными при переходе от (4.106) к (4.107).] Далее

можно путем прямых вычислений найти общий вид тензора $P_{\mu\nu}$:

$$P_{\mu\nu} = \sum_{\lambda=1}^3 \epsilon_{\mu}^{(\lambda)} \epsilon_{\nu}^{(\lambda)} = -g_{\mu\nu} + \frac{k_{\mu} k_{\nu}}{m^2}. \quad (4.109)$$

Резюме

Рассматривается каноническое квантование действительного и комплексного скалярных полей, поля Дирака, электромагнитного поля и массивного поля со спином 1. 1) В случае скалярного поля это устраняет проблему отрицательных энергий, которая являлась препятствием при интерпретации уравнения Клейна — Гордона как одночастичного. При этом данное уравнение получает многочастичную интерпретацию, причем частицы оказываются бозонами. 2) При квантовании комплексного поля приходится рассматривать частицы и античастицы. 3) Квантование уравнения Дирака приводит к положительно-определенной энергии только в том случае, когда соответствующие частицы подчиняются статистике Ферми. При этом обосновывается предсказание античастиц Дираком. 4) Квантование электромагнитного поля сопряжено с трудностями, которые связаны с калибровочной инвариантностью. Процедура квантования излагается как в кулоновской калибровке, когда имеются только два физических (поперечных) состояния поляризации, так и в лоренцевой калибровке, когда фигурируют все четыре состояния и формализм является лоренц-ковариантным. Трудности, возникающие при этом, разрешаются методом Гупты — Блейлера. 5) Квантование массивного векторного поля осуществляется непосредственно и дает требуемую многочастичную интерпретацию теории.

Литература для дальнейшего изучения

- Каноническое квантование полей со спином 0, 1/2 и 1 рассматривается в большинстве руководств по квантовой теории поля, например:
1. *Itzykson C., Zuber J. B.* Quantum Field Theory, McGraw-Hill, 1980. [Имеется перевод: Ицксон К., Зюбер Ж.-Б. Квантовая теория поля. Т. 1, 2. — М.: Мир, 1984.]
 2. *Bjorken J. D., Drell S. D.* Relativistic Quantum Fields, McGraw-Hill, 1965. [Имеется перевод: Бьёркен Дж. Д., Дрелл С. Д. Релятивистская квантовая теория. Т. 1, 2. — М.: Наука, 1978.]
 3. *Schwinger S. S.* An Introduction to Relativistic Quantum Field Theory, Harper and Row, 1962. [Имеется перевод: Швешер С. Введение в релятивистскую квантовую теорию поля. — М.: ИЛ, 1963.]
 4. *Schwinger S. S., Bethe H. A., de Hoffmann F.* Mesons and Fields (Vol. 1: Fields,) Row, Peterson and Co., 1956. [Имеется перевод: Швешер С., Бете Г., Гофман Ф. Мезоны и поля. Т. 1. Поля. — М.: ИЛ, 1957.]
 5. *Bogoliubov N. N., Shirkov D. V.* Introduction to the Theory of Quantized Fields, Interscience, 1959, 3rd ed., Wiley, 1980. [См. также: Боголю-

- бов Н. Н., Ширков Д. В. Введение в теорию квантованных полей, 4-е изд. — М.: Наука, 1984.]
6. *Lurie D.* Particle and Fields, Interscience, 1968.
 7. *Gasirowicz S.* Elementary Particle Physics, John Wiley and Sons, Inc., 1966. [Имеется перевод: Газиорович С. Физика элементарных частиц. — М.: Наука, 1969.]
 8. *Mandl F.* Introduction to Quantum Field Theory, Interscience, 1960.
 9. *Källén G.* Quantum Electrodynamics, Springer-Verlag, 1972.
- Полный обзор вопросов, относящихся к связи спина со статистикой, можно найти в статье:
10. *Jost R.* — in: Theoretical Physics in the Twentieth Century, eds. M. Fierz, V. F. Weisskopf, Interscience, 1960. [Имеется перевод: Теоретическая физика 20 века. — М.: ИЛ., 1962.]

Функциональные интегралы и квантовая механика

Тридцать один год тому назад Дик Фейнман рассказал мне о своем варианте квантовой механики, основанном на «суммах по историям». «Электрон делает все, что ему хочется, — говорил он. — Он движется в любом направлении, с любой скоростью, вперед или назад во времени, как ему захочется. А ты складываешь соответствующие амплитуды, и это дает тебе волновую функцию». Я сказал ему: «Ты сумасшедший». Но он не был сумасшедшим.

Ф. Дайсон¹⁾

В физике частиц очень часто приходится вычислять сечения различных процессов, например электрон-электронного рассеяния $ee \rightarrow ee$. Благодаря в первую очередь Фейнману был развит экономный способ расчета таких величин (и способ мышления об этих величинах). Например, в частном случае ee -рассеяния в первом приближении процесс представляется в виде «фейнмановской диаграммы», изображенной на рис. 1.14, причем очень важным элементом этой диаграммы является «распространение» фотона между двумя электронами. Существуют «правила Фейнмана», которые позволяют сопоставить каждой диаграмме амплитуду рассеяния и затем по полной амплитуде (для каждого процесса может существовать более одной диаграммы) прямо вычислить сечение. В данной и следующей главах будет показано, откуда берутся правила Фейнмана, и в частности как найти выражение для «распространения» виртуальной частицы. В данной главе мы покажем, как сформулировать квантовую механику, чтобы можно было представлять себе процессы рассеяния непосредственно в такой форме. В следующей главе мы распространим эту трактовку на скалярные и спинорные поля, а в гл. 7 — на калибровочные поля. В данной главе мы сохраняем постоянную Планка \hbar во всех формулах, в которые она входит.

§ 5.1. Формулировка квантовой механики на основе функциональных интегралов²⁾

В обычной формулировке квантовой механики величины q и p заменяются операторами, удовлетворяющими перестановочным со-

¹⁾ Цитируется с разрешения издательства из книги: Some strangeness in the proportion, ed. H. Woolf, Addison-Wesley, 1980, p. 376.

²⁾ У автора — «интегралов по путям». В русской литературе употребляется также термин «континуальный интеграл». — Прим. ред.

отношениям Гейзенберга. Математика, которая при этом используется, — это теория операторов в гильбертовом пространстве. Формулировка же квантовой механики, основанная на функциональных интегралах, зиждется непосредственно на понятии пропагатора $K(q_f, t_f; q_i, t_i)$. Если задана волновая функция $\psi(q_i, t_i)$ в момент времени t_i , то пропагатор дает соответствующее значение волновой функции в более поздний момент времени t_f в соответствии с принципом Гюйгенса:

$$\psi(q_f, t_f) = \int K(q_f, t_f; q_i, t_i) \psi(q_i, t_i) dq_i. \quad (5.1)$$

(Для простоты мы рассматриваем случай одного пространственного измерения.) Это соотношение носит самый общий характер и является выражением только принципа причинности. Согласно обычной интерпретации квантовой механики, $\psi(q_f, t_f)$ есть амплитуда вероятности того, что частица находится в точке q_f в момент времени t_f , так что величина $K(q_f, t_f; q_i, t_i)$ представляет собой амплитуду вероятности перехода частицы из точки q_i в момент времени t_i в точку q_f в момент времени t_f . Вероятность наблюдения частицы в точке q_f в момент времени t_f равна

$$P(q_f, t_f; q_i, t_i) = |K(q_f, t_f; q_i, t_i)|^2.$$

Это фундаментальный принцип квантовой механики, известный каждому студенту.

Разобьем промежуток между моментами t_i и t_f на два промежутка, разделенные моментом времени t и пространственной точкой q (рис. 5.1). Повторное применение соотношения (5.1) дает

$$\psi(q_f, t_f) = \iint K(q_f, t_f; q, t) K(q, t; q_i, t_i) \psi(q_i, t_i) dq_i dq,$$

откуда следует, что

$$K(q_f, t_f; q_i, t_i) = \int K(q_f, t_f; q, t) K(q, t; q_i, t_i) dq. \quad (5.2)$$

Таким образом, переход из точки (q_i, t_i) в точку (q_f, t_f) можно рас-

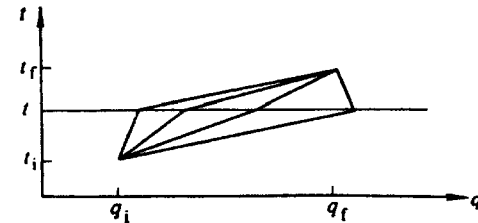


Рис. 5.1. Распространение частицы из точки (q_i, t_i) в точку (q_f, t_f) через промежуточное положение (q, t) .

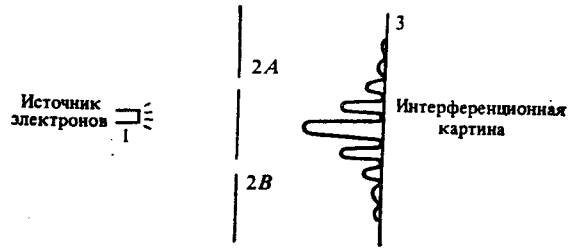


Рис. 5.2. Опыт с двумя щелями.

смаивать как результат перехода из точки (q_i, t_i) во все возможные промежуточные точки (q, t) с последующим переходом из (q, t) в (q_f, t_f) .

В качестве простой и хорошо известной иллюстрации этого рассмотрим опыт с электронами, проходящими через две щели (рис. 5.2). Обозначим через $K(2A; 1)$ амплитуду вероятности того, что электрон пройдет от источника 1 к щели 2A; через $K(3; 2A)$ — амплитуду вероятности того, что он пройдет от щели 2A к детекторам 3, и т. д. Формула (5.2) дает

$$K(3; 1) = K(3; 2A)K(2A; 1) + K(3; 2B)K(2B; 1),$$

а распределение интенсивности на «экране 3» определяется выражением для вероятности

$$P(3; 1) = |K(3; 1)|^2,$$

которое, очевидно, будет содержать интерференционные члены, характерные для квантовой теории. Заметим, что мы не можем сказать: «Электрон прошел либо через щель A, либо через щель B», — он прошел в определенном смысле по обоим путям (если не был зарегистрирован в момент прохождения одной из щелей¹⁾). Понятие всех возможных путей имеет важное значение в методе функциональных интегралов.

Мы можем показать, что пропагатор K в действительности равен более привычной величине $\langle q_f t_f | q_i t_i \rangle$. Для этого заметим, что волновая функция $\psi(q, t)$ есть не что иное, как

$$\psi(q, t) = \langle q | \psi t \rangle_S,$$

где $|\psi t \rangle_S$ — вектор состояния в шредингеровском представлении

связанный с вектором состояния в гейзенберговском представлении $|\psi \rangle_H$ соотношением

$$|\psi t \rangle_S = e^{-iHt/\hbar} |\psi \rangle_H.$$

Определим вектор

$$|qt \rangle = e^{iHt/\hbar} |q \rangle, \quad (5.3)$$

который по очевидным причинам мы можем называть «движущейся системой отсчета». Тогда можно будет написать

$$\psi(q, t) = \langle qt | \psi \rangle_H. \quad (5.4)$$

Из условия полноты системы состояний следует соотношение

$$\langle q_f t_f | \psi \rangle = \int \langle q_f t_f | q_i t_i \rangle \langle q_i t_i | \psi \rangle dq_i.$$

Далее с учетом равенства (5.4) получаем

$$\psi(q_f, t_f) = \int \langle q_f t_f | q_i t_i \rangle \psi(q_i, t_i) dq_i.$$

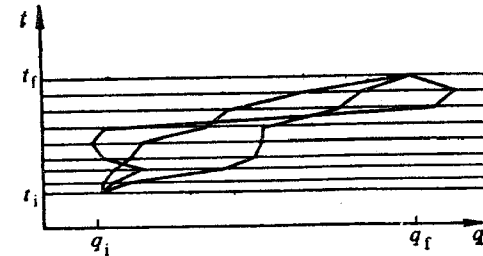
Сравнивая это соотношение с (5.1), мы приходим к равенству

$$\langle q_f t_f | q_i t_i \rangle = K(q_f t_f; q_i t_i), \quad (5.5)$$

что и требовалось.

В пропагаторе K «суммируется» квантовая механика системы. В обычной формулировке квантовой механики если задана волновая функция в начальный момент времени, то можно найти волновую функцию в конечный момент времени, решив зависящее от времени уравнение Шредингера. В рассматриваемой же формулировке пропагатор сразу дает решение. Идея в том, чтобы представить амплитуду $\langle q_f t_f | q_i t_i \rangle$ в виде функционального интеграла.

Разобьем временной промежуток между t_i и t_f на $(n+1)$ равных частей τ (рис. 5.3). Тогда соотношение (5.2) примет вид

Рис. 5.3. Распространение из точки (q_i, t_i) в точку (q_f, t_f) различными путями.

¹⁾ Блестящий анализ опыта с двумя щелями дан в книге: Feynman R. P., Leighton R. B., Sands M. The Feynman Lectures on Physics, Vol. 3, Addison-Wesley, 1965. [Имеется перевод: Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М. Фейнмановские лекции по физике. Т. 2. — М.: Мир, 1965, гл. 19.]

$$\langle q_f t_f | q_i t_i \rangle = \int \dots \int dq_1 dq_2 \dots dq_n \langle q_f t_f | q_n t_n \rangle \langle q_n t_n | q_{n-1} t_{n-1} \rangle \dots \langle q_1 t_1 | q_i t_i \rangle, \quad (5.6)$$

где интеграл берется по всем возможным «траекториям». Это не траектории в обычном смысле слова, поскольку каждый сегмент $(q_j t_j; q_{j+1} t_{j+1})$ может быть разбит на еще меньшие сегменты, т. е. здесь не существуют производные. Пути в действительности представляют собой марковские цепи.

Вычислим пропагатор для малого сегмента в функциональном интеграле. Из соотношения (5.3) мы имеем

$$\begin{aligned} \langle q_{j+1} t_{j+1} | q_j t_j \rangle &= \langle q_{j+1} | e^{-iH\tau/\hbar} | q_j \rangle = \langle q_{j+1} | 1 - \frac{i}{\hbar} H\tau + O(\tau^2) | q_j \rangle = \\ &= \delta(q_{j+1} - q_j) - \frac{i\tau}{\hbar} \langle q_{j+1} | H | q_j \rangle = \frac{1}{2\pi\hbar} \int dp \exp \left[\frac{i}{\hbar} p(q_{j+1} - q_j) \right] = \\ &= -\frac{i\tau}{\hbar} \langle q_{j+1} | H | q_j \rangle. \end{aligned} \quad (5.7)$$

Гамильтониан H является функцией операторов p и q . В частном случае, когда H имеет вид

$$H = \frac{p^2}{2m} + V(q) \quad (5.8)$$

(фактически гамильтониан H может быть равным произвольной функции оператора p + произвольная функция оператора q), матричный элемент можно легко вычислить. Мы имеем

$$\langle q_{j+1} | \frac{p^2}{2m} | q_j \rangle = \int dp' dp \langle q_{j+1} | p' \rangle \langle p' | \frac{p^2}{2m} | p \rangle \langle p | q_j \rangle.$$

Подставим сюда выражение $\langle q_{j+1} | p \rangle = (2\pi\hbar)^{-1/2} \exp(ip'q_{j+1}/\hbar)$, что даст

$$\begin{aligned} \langle q_{j+1} | \frac{p^2}{2m} | q_j \rangle &= \int \frac{dp' dp}{2\pi\hbar} \exp \left[\frac{i}{\hbar} (p'q_{j+1} - pq_j) \right] \frac{p^2}{2m} \delta(p - p') = \\ &= \int \frac{dp}{h} \exp \left[\frac{i}{\hbar} p(q_{j+1} - q_j) \right] \frac{p^2}{2m}. \end{aligned} \quad (5.9)$$

Заметим, что величина p^2 в левой части соотношения (5.9) является оператором, тогда как в правой части она является числом. Мы могли бы использовать обозначение \hat{p} , чтобы подчеркнуть операторный характер величины p в правой части. Так или иначе, важно то, что в правой части равенства (5.9) отсутствуют операторы. Аналогичным образом получаем

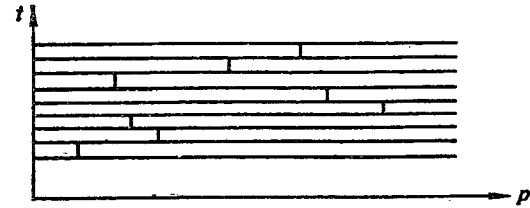


Рис. 5.4. Сегменты траектории в импульсном пространстве.

$$\begin{aligned} \langle q_{j+1} | V(q) | q_j \rangle &= V \left(\frac{q_{j+1} + q_j}{2} \right) \langle q_{j+1} | q_j \rangle = V \left(\frac{q_{j+1} + q_j}{2} \right) \delta(q_{j+1} - q_j) = \\ &= \int \frac{dp}{h} \exp \left[\frac{i}{\hbar} p(q_{j+1} - q_j) \right] V(\bar{q}), \end{aligned} \quad (5.10)$$

где $\bar{q} = (1/2)(q_j + q_{j+1})$, величина $V(q)$ в левой части является операторным выражением, но интеграл в правой части не содержит операторов. Объединяя выражения (5.9) и (5.10), мы имеем

$$\langle q_{j+1} | H | q_j \rangle = \int \frac{dp}{h} \exp \left[\frac{i}{\hbar} p(q_{j+1} - q_j) \right] H(p, q),$$

в результате чего соотношение (5.7) перепишется в виде

$$\begin{aligned} \langle q_{j+1} t_{j+1} | q_j t_j \rangle &= \\ &= \frac{1}{h} \int dp_j \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \left[p_j(q_{j+1} - q_j) - \tau H(p_j, \bar{q}_j) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (5.11)$$

где p_j — импульс, соответствующий точке, заключенной в промежутке между t_j и t_{j+1} или, что эквивалентно, между q_j и q_{j+1} (рис. 5.4). Таким образом, мы имеем выражение для пропагатора на сегменте одного из возможных путей. Полный пропагатор получается подстановкой этого выражения в (5.6), что дает при переходе к непрерывному пределу

$$\begin{aligned} \langle q_f t_f | q_i t_i \rangle &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int \prod_{j=1}^n dq_j \prod_{i=0}^n \frac{dp_i}{h} \times \\ &\times \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \sum_{i=0}^n \left[p_i(q_{i+1} - q_i) - \tau H(p_i, \bar{q}_i) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (5.12)$$

где $q_0 = q_i$, $q_{n+1} = q_f$. Это соотношение можно записать в символической форме

$$\square \langle q_f t_f | q_i t_i \rangle = \int \frac{\mathcal{D}q \mathcal{D}p}{h} \exp \frac{i}{\hbar} \left[\int_{t_i}^{t_f} dt \{ p\dot{q} - H(p, q) \} \right], \quad (5.13)$$

где $q(t_i) = q_i$, $q(t_f) = q_f$. В непрерывном пределе q превращается в функцию времени t , а интеграл — в «функциональный интеграл», т. е. интеграл по всем функциям. Это бесконечномерный интеграл. Выражение (5.13) является функциональным интегральным выражением для амплитуды перехода из (q_i, t_i) в (q_f, t_f) . Каждая функция $q(t)$ и $p(t)$ определяет траекторию в фазовом пространстве. Как указывалось выше, обычно в квантовой механике решают уравнение Шредингера $i\hbar(d|\psi\rangle/dt) = \hat{H}|\psi\rangle$, где \hat{H} — оператор, при некоторых граничных условиях. В функциональной формулировке мы имеем явное выражение для амплитуды перехода, которое, очевидно, очень хорошо подходит для задач рассеяния. Величины p и q , входящие в интеграл, — это классические величины, а не операторы (c -числа, а не q -числа). Правда, вовсе не очевидно, что бесконечномерные интегралы такого типа являются хорошо определенными математическими объектами, т. е. что они сходятся; иными словами, не известно, существуют ли они! Мы будем считать, что они существуют. Читателя, интересующегося математическим статусом функциональных интегралов, отсылаем к работам [12—17].

Существует другая форма записи амплитуды, справедливая в случае, когда H имеет вид (5.8), поскольку в этом случае мы можем выполнить интегрирование по p . Соотношение (5.12) принимает вид

$$\langle q_f t_f | q_i t_i \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \int \prod_1^n dq_j \prod_0^n \frac{dp_j}{h} \times \\ \times \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \sum_0^n \left[p_l (q_{l+1} - q_l) - \frac{p_l^2}{2m} \tau - V(\bar{q}_l) \tau \right] \right\}.$$

Интеграл по p_j имеет тот же вид, что и интеграл (5A.3) (см. приложение к данной главе), и мы получаем

$$\langle q_f t_f | q_i t_i \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{m}{i\hbar\tau} \right)^{n+1/2} \int \prod_1^n dq_j \times \\ \times \exp \left\{ \frac{i\tau}{\hbar} \sum_0^n \left[\frac{m}{2} \left(\frac{q_{l+1} - q_l}{\tau} \right)^2 - V \right] \right\}, \quad (5.14)$$

и, следовательно, в непрерывном пределе

$$\blacksquare \langle q_f t_f | q_i t_i \rangle = N \int \mathcal{D}q \exp \left[\frac{i}{\hbar} \int_{t_i}^{t_f} L(q, \dot{q}) dt \right], \quad (5.15)$$

где $L = T - V$ — классический лагранжиан. В пределе при $n \rightarrow \infty$ множитель N становится бесконечным, но это несущественно, поскольку мы всегда имеем дело с нормированными амплитудами перехода.

Подынтегральное выражение в (5.15) представляет собой классическое действие $S = \int L dt$. Мы вывели это выражение из постулатов квантовой механики в предположении, что гамильтониан имеет вид (5.8). Первоначально идея Фейнмана состояла в том, чтобы принять выражение (5.15) как гипотезу и затем вывести из него уравнение Шредингера. Недостатком такого подхода является то, что соотношение (5.15) не выполняется в общем случае, поскольку формула (5.8) не всегда справедлива. Контрпример был указан Ли и Янгом¹⁾. Если лагранжиан имеет вид

$$L = \frac{\dot{q}^2}{2} f(q),$$

что соответствует системе с потенциалом, зависящим от скорости, то импульс равен

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \dot{q} f(q),$$

а гамильтониан имеет вид

$$H = p\dot{q} - L = \frac{1}{2} \dot{q}^2 f(q) = \frac{1}{2} \frac{p^2}{f(q)},$$

не совпадающий с (5.8). Подставляя это выражение в (5.13) и выполняя интегрирование по p , получаем в конечном счете

$$\langle q_f t_f | q_i t_i \rangle = N \int \mathcal{D}q \exp \left(\frac{i}{\hbar} S_{\text{эфф}} \right)$$

где

$$S_{\text{эфф}} = \int dt \left[L(q, \dot{q}) - \frac{i}{2} \delta(0) \ln f(q) \right].$$

В отличие от (5.15) в последнее выражение входит эффективное действие, которое отличается от $S = \int L dt$.

В случае полевых теорий переход от выражения типа (5.13) к выражению типа (5.15) не всегда может быть выполнен, и, в частности, так обстоит дело в случае неабелевых калибровочных теорий. Тем не менее, когда мы перейдем к рассмотрению этих теорий

¹⁾ Lee T. D., Yang C. N. Phys. Rev., 128, 885 (1962)

в гл. 7, мы для простоты примем «эвристический» подход к выводу правил Фейнмана и будем работать с выражением, аналогичным (5.15).

§ 5.2. Теория возмущений и S-матрица¹⁾

Наша цель — показать, как метод функционального интегрирования применяется в вычислениях процессов рассеяния. В частности, в § 5.3 мы рассмотрим резерфордское рассеяние. Нерелятивистское описание рассеяния одной частицы на другой основано на потенциале $V(x)$ (в данном параграфе мы обозначаем пространственные координаты через x , а не через q). Поскольку выражение для амплитуды перехода точно вычислить невозможно, мы прибегнем, как обычно, к теории возмущений. Она применима, когда потенциал $V(x)$ мал или, точнее, когда интеграл по времени от $V(x, t)$ мал по сравнению с \hbar . В этом случае мы можем написать

$$\exp \left[\frac{-i}{\hbar} \int_{t_i}^{t_f} V(x, t) dt \right] = 1 - \frac{i}{\hbar} \int_{t_i}^{t_f} V(x, t) dt - \frac{1}{2! \hbar^2} \left[\int_{t_i}^{t_f} V(x, t) dt \right]^2 + \dots \quad (5.16)$$

Это — разложение в ряд теории возмущений. Подставив его в выражение (5.15) для пропагатора $K(x_f t_f; x_i t_i)$ [формула (5.5)], мы получим разложение

$$K = K_0 + K_1 + K_2 + \dots, \quad (5.17)$$

первым членом которого является свободный пропагатор K_0 :

$$K_0 = N \int \left[\exp \left(\frac{i}{\hbar} S \right) \right] \mathcal{D}x = N \int \left[\exp \left(\frac{i}{\hbar} \int \frac{1}{2} m \dot{x}^2 dt \right) \right] \mathcal{D}x.$$

Чтобы вычислить это выражение, мы запишем его в дискретной форме [формула 5.14]

$$K_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{m}{i\hbar \tau} \right)^{(n+1)/2} \times \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{j=1}^n dx_j \exp \left[\frac{im}{2\hbar \tau} \sum_{j=0}^n (x_{j+1} - x_j)^2 \right].$$

¹⁾ В данном и следующем параграфах вольно цитируются лекции М. Велтмана на школе в Башко-Поле (Югославия, 1974).

Этот интеграл известен [формула (5A.4)]:

$$\text{Интеграл} = \frac{1}{(n+1)^{1/2}} \left(\frac{i\hbar \tau}{m} \right)^{n/2} \exp \left[\frac{im}{2\hbar(n+1)\tau} (x_f - x_i)^2 \right].$$

Полагая $(n+1)\tau = t_f - t_i$, мы имеем для пропагатора свободной частицы

$$K_0(x_f t_f; x_i t_i) = \left(\frac{m}{i\hbar(t_f - t_i)} \right)^{1/2} \exp \left[\frac{im(x_f - x_i)^2}{2\hbar(t_f - t_i)} \right] (t_f > t_i). \quad (5.18)$$

Условие $t_f > t_i$, очевидно, является существенным, так как в силу требования причинности пропагатор обращается в нуль при $t_f > t_i$, и, строго говоря, мы должны положить

$$K_0(x_f t_f; x_i t_i) = \theta(t_f - t_i) \left(\frac{m}{i\hbar(t_f - t_i)} \right)^{1/2} \exp \left[\frac{im(x_f - x_i)^2}{2\hbar(t_f - t_i)} \right]. \quad (5.19)$$

Вычислим теперь K_1 . Из (5.14) и (5.16) следует

$$K_1 = \frac{-i}{\hbar} \lim_{n \rightarrow \infty} N^{(n+1)/2} \sum_{i=1}^n \int \exp \left[\frac{im}{2\hbar \tau} \sum_{j=0}^n (x_{j+1} - x_j)^2 \right] \times \\ \times V(x_i, t_i) dx_1 \dots dx_n,$$

где $N = m/i\hbar \tau$ и мы заменили интегрирование по t суммированием по t_i . Замечая, что V зависит от x_i , мы разобьем сумму в показателе экспоненты на две: одну от $j=0$ до $j=i-1$ и вторую от $j=i$ до $j=n$. Мы также выделим интеграл по x_i . В результате получим

$$K_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-i}{\hbar} \sum_{i=1}^n \int dx_i \times \\ \times \left\{ N^{(n-i+1)/2} \int \exp \left[\frac{im}{2\hbar \tau} \sum_{j=i}^n (x_{j+1} - x_j)^2 \right] dx_{i+1} \dots dx_n \right\} \times \\ \times V(x_i, t_i) \left\{ N^{i/2} \int \exp \left[\frac{im}{2\hbar \tau} \sum_{j=0}^{i-1} (x_{j+1} - x_j)^2 \right] dx_1 \dots dx_{i-1} \right\}.$$

Члены в фигурных скобках равны $K_0(x_f t_f; x_i t_i)$ и $K_0(x_i t_i; x_i t_i)$ соответственно, и после замены $\int dx_i$ на $\int dx dt$ это выражение принимает вид

$$K_1(x_f t_f; x_i t_i) =$$

$$= -\frac{i}{\hbar} \int_{t_i}^{t_f} dt \int_{-\infty}^{\infty} K_0(x_f, t_f; x) V(x, t) K_0(x; x_i, t_i) dx. \quad (5.20)$$

Величина $K_0(x_f, t_f; x)$ обращается в нуль при $t > t_f$, а $K_0(x; x_i, t_i)$ обращается в нуль при $t < t_i$; следовательно, интеграл в выражении (5.20) может быть распространён на все значения t , что даёт

$$K_1(x_f, t_f; x_i, t_i) = \frac{-i}{\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} dt \times \\ \times \int K_0(x_f, t_f; x) V(x, t) K_0(x; x_i, t_i) dx. \quad (5.21)$$

Это — поправка первого порядка к свободному пропагатору. Аналогичным образом можно показать, что поправка второго порядка равна

$$K_2(x_f, t_f; x_i, t_i) = \left(\frac{-i}{\hbar}\right)^2 \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \int_{-\infty}^{\infty} dt_2 \times \\ \times \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \int_{-\infty}^{\infty} dx_2 K_0(x_f, t_f; x_2, t_2) V(x_2, t_2) \times \\ \times K_0(x_2, t_2; x_1, t_1) V(x_1, t_1) K_0(x_1, t_1; x_i, t_i). \quad (5.22)$$

Аналогичные выражения справедливы для всех K_n , входящих в разложение (5.17); следовательно, мы пишем

$$K(x_f, t_f; x_i, t_i) = K_0(x_f, t_f; x_i, t_i) - \\ - \frac{i}{\hbar} \int K_0(x_f, t_f; x_1, t_1) V(x_1, t_1) K_0(x_1, t_1; x_i, t_i) dx_1 dt_1 - \\ - \frac{1}{\hbar^2} \int K_0(x_f, t_f; x_1, t_1) V(x_1, t_1) K_0(x_1, t_1; x_2, t_2) \times \\ \times V(x_2, t_2) K_0(x_2, t_2; x_i, t_i) dx_1 dx_2 dt_1 dt_2 + \dots \quad (5.23)$$

Данное соотношение является решением задачи о разложении пропагатора K в ряд теории возмущений; его называют *борновским рядом*. Этот ряд можно наглядно представить так, как показано на рис. 5.5: K_0 описывает свободное распространение волновой функции из точки x_i, t_i в x_f, t_f , K_1 описывает распространение с учётом одного взаимодействия с потенциалом V и т. д.

Замечательной особенностью соотношения (5.22) является то, что в него не входит множитель $1/2!$, входящий в (5.16). Причина

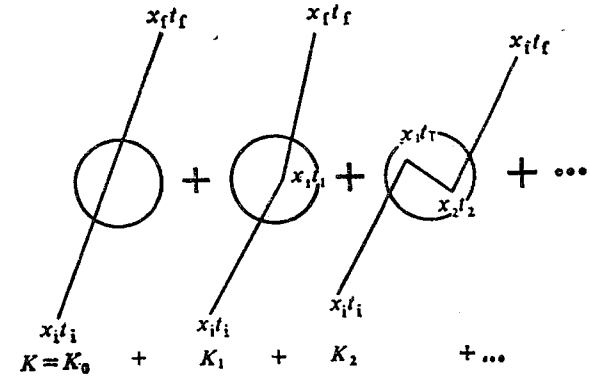


Рис. 5.5. Борновский ряд.

этого следующая. Два взаимодействия с V , происходящие в разные моменты времени, неразличимы, вследствие чего мы можем написать

$$\frac{1}{2!} \int V(t') V(t'') dt' dt'' = \frac{1}{2!} \int [\theta(t' - t'') V(t') V(t'') + \\ + \theta(t'' - t') V(t') V(t'')] dt' dt'' = \\ = \int \theta(t_1 - t_2) V(t_1) V(t_2) dt_1 dt_2. \quad (5.24)$$

По той же причине в выражении для K_n отсутствует множитель $1/n!$ Покажем теперь, что свободный пропагатор K_0 есть просто функция Грина для уравнения Шредингера. Для этого подставим борновский ряд (5.23) в выражение (5.1):

$$\psi(x_f, t_f) = \int K(x_f, t_f; x_i, t_i) \psi(x_i, t_i) dx_i = \int K_0(x_f, t_f; x_i, t_i) \psi(x_i, t_i) dx_i - \\ - \frac{i}{\hbar} \int K_0(x_f, t_f; x) V(x, t) K_0(x; x_i, t_i) \psi(x_i, t_i) dt dx dx_i + \dots \quad (5.25)$$

Мы перешли здесь от одного пространственного измерения к трём. Если считать, что ряд (5.25) сходится, то вклад невыписанных членов сводится к замене последнего пропагатора K_0 полным пропагатором K , так что

$$\psi(x_f, t_f) = \int K_0(x_f, t_f; x_i, t_i) \psi(x_i, t_i) dx_i - \\ - \frac{i}{\hbar} \int K_0(x_f, t_f; x) V(x, t) \psi(x, t) dx dt. \quad (5.26)$$

Это — точное интегральное уравнение для ψ . Предположим теперь, что в отдаленном прошлом, т. е. при $t_i \rightarrow -\infty$, функция ψ является свободным решением, т. е. плоской волной φ ; тогда первый член в выражении (5.26) тоже является плоской волной, поскольку он получается как результат свободного распространения $\psi(x_i t_i)$, и мы можем написать

$$\psi(x, t_f) = \varphi(x, t_f) - \frac{i}{\hbar} \int K_0(x, t_f; x) V(x, t) \psi(x, t) dx dt. \quad (5.27)$$

Волновая функция $\psi(x, t_f)$ удовлетворяет уравнению Шредингера

$$\frac{\hbar^2}{2m} \nabla_{x_f}^2 \psi(x, t_f) + i\hbar \frac{\partial \psi(x, t_f)}{\partial t_f} = V(x, t_f) \psi(x, t_f). \quad (5.28)$$

Поскольку $\varphi(x, t_f)$ есть решение свободного уравнения (при $V = 0$), пропагатор K_0 должен удовлетворять уравнению

$$\frac{\hbar^2}{2m} \nabla_x^2 K_0(x_f t_f; x) + i\hbar \frac{\partial}{\partial t_f} K_0(x, t_f; x) = i\hbar \delta(x - x) \delta(t_f - t), \quad (5.29)$$

которое представляет собой уравнение для функции Грина уравнения (5.28). Заметим, что присутствие множителя $\delta(t_f - t)$ в правой части следовало ожидать, поскольку в определении (5.19) свободного пропагатора K_0 входит величина $\theta(t_f - t)$. Таким образом, пропагатор K_0 является функцией Грина для уравнения Шредингера, как и утверждалось.

Перейдем теперь к вычислению амплитуды рассеяния. В экспериментах по рассеянию условия таковы, что при $t = -\infty$ частица движется свободно, затем рассеивается и вновь движется свободно при $t = +\infty$. Но при таком подходе возникает противоречие, поскольку свободная частица (т. е. частица с определенной энергией и импульсом) описывается плоской волной, которая простирается во всем пространстве и времени, включая и область действия потенциала $V(x)$, где частица никак не может быть свободной! Чтобы обойти эту трудность, привлекают *adiaбатическую гипотезу*: потенциал V включается и выключается медленно, так что $V = 0$ при $t = \infty$ и частица является свободной. Потенциал не должен включаться слишком быстро, поскольку с помощью преобразования Фурье можно показать, что зависимость V от времени приводит к излучению и поглощению энергии рассеивающим центром, чего не должно происходить.

Вернемся к задаче рассеяния. Начальное условие состоит в том, что ψ есть плоская волна:

$$\psi_{in}(x_i t_i) \text{ — плоская волна.}$$

Мы предполагаем, что $V \rightarrow 0$ при больших отрицательных t и что значение t_i лежит еще дальше в прошлом. Первое борновское приближение из (5.25) дает

$$\psi^{(+)}(x, t_f) = \int K_0(x, t_f; x_i t_i) \psi_{in}(x_i t_i) dx_i - \frac{i}{\hbar} \int K_0(x, t_f; x) V(x, t) K_0(x, t; x_i t_i) \psi_{in}(x_i t_i) dx dx_i dt. \quad (5.30)$$

Верхний индекс у волновой функции $\psi^{(+)}(x, t_f)$ означает, что она соответствует волне, свободной при $t = -\infty$, и, следовательно, отвечает «запаздывающему» пропагатору $K_0(x, t; x' t')$, который обращается в нуль при $t' > t$. С таким же основанием мы можем написать решение $\psi^{(-)}(x_i t_i)$, которое отвечает волне, становящейся свободной при $t = \infty$ (ψ_{out}), и «опережающему» пропагатору $K_0(x, t; x' t')$, который обращается в нуль при $t' < t$.

Нас интересует амплитуда вероятности обнаружить конечную частицу в состоянии с определенным импульсом, т. е. плоскую волну ψ_{out} . Она называется *амплитудой рассеяния*, обозначается символом S и представляет собой интеграл перекрытия волновых функций:

$$\begin{aligned} S &= \int \psi_{out}^*(x, t_f) \psi^{(+)}(x, t_f) dx_f = \\ &= \int \psi_{out}^*(x, t_f) K_0(x, t_f; x_i t_i) \psi_{in}(x_i t_i) dx_i dx_f - \\ &- \frac{i}{\hbar} \int \psi_{out}^*(x, t_f) K_0(x, t_f; x) V(x, t) \times \\ &\times K_0(x, t; x_i t_i) \psi_{in}(x_i t_i) dx_f dx dx_i dt = \\ &= \int \psi_{out}^*(x, t_f) \varphi(x, t_f) dx_f - \frac{i}{\hbar} \int \psi_{out}^*(x, t_f) K_0(x, t_f; x) V(x, t) \times \\ &\times K_0(x, t; x_i t_i) \psi_{in}(x_i t_i) dx_f dx dx_i dt, \end{aligned} \quad (5.31)$$

где $\varphi(x, t_f)$, так же как и $\psi_{in}(x_i t_i)$, есть плоская волна. Если начальный и конечный импульсы равны соответственно $p_i = \hbar k_i$, $p_f = \hbar k_f$, то мы имеем при нормировке в ящике

$$\psi_{in}(x) = \frac{1}{\sqrt{\tau}} \exp \left[\frac{i}{\hbar} (p_i \cdot x - E_i t) \right], \quad (5.32)$$

$$\psi_{out}(x) = \frac{1}{\sqrt{\tau}} \exp \left[\frac{i}{\hbar} (p_f \cdot x - E_f t) \right],$$

где $E = p^2/2m$ и τ — объем ящика, который, очевидно, произволен. Подставляя выражения (5.32) в первый член соотношения (5.31), используя формулу

$$\int e^{iq \cdot x} dx = (2\pi)^3 \delta(q)$$

и полагая для удобства $\tau = (2\pi)^3$, получаем

$$S_{fi} = \delta(k_i - k_f) - \frac{i}{\hbar} \int \psi_{out}^*(x_j t_j) K_0(x_j t_j; x t) \times \\ \times V(x, t) K_0(x t; x_i t_i) \psi_{in}(x_i t_i) dx_j dx dx_i dt. \quad (5.33)$$

Итак, мы видим, что амплитуда рассеяния является матричным элементом матрицы S , причем в последнее выражение входит элемент (fi) . Это матрица рассеяния, или S -матрица. Первый член соответствует рассеянию без взаимодействия и дает закон сохранения импульса и единичную S -матрицу. Истинные взаимодействия представлены вторым членом в (5.33), а амплитуда вероятности того, что определенное «аут»-состояние получается из определенного «ин»-состояния, равна

$$A = -\frac{i}{\hbar} \int \psi_{out}^*(x_j t_j) K_0(x_j t_j; x t) V(x, t) K_0(x t; x_i t_i) \times \\ \times \psi_{in}(x_i t_i) dx_j dx dx_i dt. \quad (5.34)$$

Теперь мы имеем выражение для амплитуды рассеяния через свободный пропагатор K_0 и потенциал взаимодействия V . На основании выражения (5.34) можно составить набор простых правил, определяющих амплитуду рассеяния. Это так называемые *правила Фейнмана*.

Мы можем представить амплитуду (5.34) (которая является приближением первого порядка) диаграммой



$$(5.35)$$

Очевидно, что правила, сопоставляющие этой диаграмме выражение для амплитуды рассеяния, представляют собой правила соответствия

$$\overline{x_i t_i} \quad x_f t_f \quad K_0(x_f t_f; x_i t_i) \\ V \\ x t \quad -\frac{i}{\hbar} V(x t); \quad \text{интегрирование по } x \text{ и } t. \quad (5.36)$$

Кроме того, мы умножаем на ψ_{in} и ψ_{out}^* концы диаграммы и интегрируем по двум соответствующим пространственным перемен-

ным. Таким образом, амплитуда процесса второго порядка



$$(5.37)$$

имеет вид

$$A^{(2)} = \left(\frac{-i}{\hbar}\right)^2 \int \psi_{out}^*(x_j t_j) K_0(x_j t_j; x' t') \times \\ \times V(x', t') K_0(x' t'; x t) V(x, t) \times \\ \times K_0(x t; x_i t_i) dx_j dx dt dx' dt' dx_i.$$

Правила (5.36) называют правилами Фейнмана. В нерелятивистской квантовой механике, с которой мы сейчас имеем дело, эти правила вряд ли необходимы при вычислениях. В квантовой же теории поля, которая будет рассмотрена в следующей главе, они сильно облегчают расчеты.

Правила (5.36) записаны в координатном пространстве. Во многих расчетах, однако, удобнее работать в импульсном пространстве, и в оставшейся части данного параграфа мы выведем соответствующие правила Фейнмана в импульсном пространстве. Пусть $\mathcal{K}(p_i t_i; p_0 t_0)$ — амплитуда вероятности того, что частица, обладающая импульсом p_0 в момент времени t_0 , будет зарегистрирована позднее в момент времени t_1 с импульсом p_1 . Эта амплитуда дается выражением

$$\mathcal{K}(p_1 t_1; p_0 t_0) = \int \exp\left(-\frac{i}{\hbar} p_1 \cdot x_1\right) K(x_1 t_1; x_0 t_0) \times \\ \times \exp\left(\frac{i}{\hbar} p_0 \cdot x_0\right) dx_0 dx_1. \quad (5.38)$$

Свободный пропагатор $K_0(x_1 t_1; x_0 t_0)$ является трехмерным обобщением выражения (5.19), т. е.

$$K_0(x_1 t_1; x_0 t_0) = \theta(t_1 - t_0) \left[\frac{m}{i\hbar(t_1 - t_0)}\right]^{3/2} \exp\left[\frac{im(x_0 - x_1)^2}{2\hbar(t_1 - t_0)}\right]. \quad (5.39)$$

Следовательно, \mathcal{K}_0 имеет вид

$$\mathcal{K}_0(p_1 t_1; p_0 t_0) = \theta(t_1 - t_0) \left(\frac{m}{i\hbar(t_1 - t_0)}\right)^{3/2} \times \\ \times \int \exp\left[\frac{i}{\hbar}(p_0 \cdot x_0 - p_1 \cdot x_1)\right] \exp\left[\frac{im}{2\hbar} \frac{(x_0 - x_1)^2}{t_1 - t_0}\right] dx_0 dx_1.$$

Чтобы вычислить этот интеграл, мы введем переменные

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_1, \quad \mathbf{X} = \mathbf{x}_0 + \mathbf{x}_1, \quad \mathbf{p} = \mathbf{p}_0 - \mathbf{p}_1, \quad \mathbf{P} = \mathbf{p}_0 + \mathbf{p}_1$$

таким образом, что

$$2(\mathbf{p}_0 \cdot \mathbf{x}_0 - \mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{x}_1) = \mathbf{P} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{p} \cdot \mathbf{X}.$$

Якобиан этого преобразования равен $(1/2)^3 = 1/8$, и мы получаем

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_0(\mathbf{p}_1, t_1; \mathbf{p}_0, t_0) &= \theta(t_1 - t_0) \left(\frac{\alpha}{i\pi}\right)^{3/2} \frac{1}{8} \times \\ &\times \int \exp\left(\frac{i}{2\hbar} \mathbf{p} \cdot \mathbf{X}\right) d\mathbf{X} \int \exp\left(\frac{i}{2\hbar} \mathbf{P} \cdot \mathbf{x}\right) e^{i\alpha x^2} d\mathbf{x}, \end{aligned}$$

где $\alpha = m/2\hbar(t_1 - t_0)$. Первый интеграл равен $8(2\pi\hbar)^{3\delta}(\mathbf{p}) = 8(2\pi\hbar)^{3\delta}(\mathbf{p}_0 - \mathbf{p}_1)$, так что

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_0(\mathbf{p}_1, t_1; \mathbf{p}_0, t_0) &= (2\pi\hbar)^3 \theta(t_1 - t_0) \delta(\mathbf{p}_0 - \mathbf{p}_1) \times \\ &\times \left(\frac{\alpha}{i\pi}\right)^{3/2} \int \exp\left(\frac{i}{2\hbar} \mathbf{p} \cdot \mathbf{x} + i\alpha x^2\right) d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

Этот интеграл можно вычислить, пользуясь формулой (5П.3), что дает

$$\mathcal{K}_0(\mathbf{p}_1, t_1; \mathbf{p}_0, t_0) = (2\pi\hbar)^3 \theta(t_1 - t_0) \delta(\mathbf{p}_0 - \mathbf{p}_1) \exp\left[\frac{-i\mathbf{P}^2(t_1 - t_0)}{8m\hbar}\right].$$

Заметим, то δ -функция требует равенства $\mathbf{p}_1 = \mathbf{p}_0$ и распространение происходит только при условии сохранения импульса. Далее, поскольку $\mathbf{P}^2 = 4\mathbf{p}_0^2$, окончательно имеем

$$\mathcal{K}_0(\mathbf{p}_1, t_1; \mathbf{p}_0, t_0) = (2\pi\hbar)^3 \theta(t_1 - t_0) \delta(\mathbf{p}_0 - \mathbf{p}_1) \exp\left[\frac{-ip_0^2(t_1 - t_0)}{2m\hbar}\right]. \quad (5.40)$$

Этот пропагатор, как уже сказано, дает амплитуду вероятности наблюдать частицу с импульсом \mathbf{p}_1 в момент времени t_1 , если она наблюдалась с импульсом \mathbf{p}_0 в момент времени t_0 . Фурье-образ этой величины, даваемый обращенной формулой (5.38), равен, очевидно $K_0(\mathbf{x}_1, t_1; \mathbf{x}_0, t_0)$. Используя выражение (5.40), получаем

$$\begin{aligned} K_0(\mathbf{x}_1, t_1; \mathbf{x}_0, t_0) &= \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \int \exp\left(\frac{i}{\hbar} \mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{x}_1\right) \times \\ &\times \mathcal{K}_0(\mathbf{p}_1, t_1; \mathbf{p}_0, t_0) \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \mathbf{p}_0 \cdot \mathbf{x}_0\right) d\mathbf{p}_1 d\mathbf{p}_0 = \\ &= \theta(t_1 - t_0) \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \int \exp\left\{\frac{i}{\hbar} \left[\mathbf{q} \cdot (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0) - \frac{q^2}{2m}(t_1 - t_0)\right]\right\} d\mathbf{q}. \quad (5.41) \end{aligned}$$

Мы используем это выражение при расчете кулоновского рассеяния в следующем параграфе.

В заключение вычислим фурье-образ по переменной t с тем, чтобы время и пространство рассматривались симметрично. Это необходимо в релятивистском случае. Искомый пропагатор имеет вид

$$\begin{aligned} k_0(\mathbf{p}_1, E_1; \mathbf{p}_0, E_0) &= \int \exp\left(\frac{i}{\hbar} E_1 t_1\right) \mathcal{K}_0(\mathbf{p}_1, t_1; \mathbf{p}_0, t_0) \times \\ &\times \exp\left(-\frac{i}{\hbar} E_0 t_0\right) dt_0 dt_1 = (2\pi\hbar)^{3\delta}(\mathbf{p}_0 - \mathbf{p}_1) \int \theta(\tau) \exp\left(\frac{-ip_1^2}{2m\hbar} \tau\right) \times \\ &\times \exp\left[\frac{i}{\hbar} (E_1 t_1 - E_0 t_0)\right] dt_0 dt_1, \quad (5.42) \end{aligned}$$

где $\tau = t_1 - t_0$. Рассматривая τ и t_0 как независимые переменные, мы получаем

$$\begin{aligned} k_0(\mathbf{p}_1, E_1; \mathbf{p}_0, E_0) &= (2\pi\hbar)^3 \delta(\mathbf{p}_0 - \mathbf{p}_1) \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[\frac{i}{\hbar} (E_1 - E_0) t_0\right] dt_0 \times \\ &\times \int_{-\infty}^{\infty} \theta(\tau) \exp\left[\frac{i}{\hbar} \left(E - \frac{p_1^2}{2m}\right) \tau\right] d\tau. \end{aligned}$$

Первый из этих интегралов равен $(2\pi\hbar)\delta(E_1 - E_0)$. Присутствие функции $\theta(\tau)$ во втором интеграле означает, что он имеет вид

$$\int_0^{\infty} e^{i\omega\tau} d\tau$$

и, следовательно, расходится при действительном ω . Чтобы сделать его сходящимся, следует заменить ω величиной $\omega + i\varepsilon$, где ε — малая положительная величина. Тогда интеграл будет равен $i/(\omega + i\varepsilon)$. Подставляя значение ω , окончательно получаем

$$k_0(\mathbf{p}_1, E_1; \mathbf{p}_0, E_0) = (2\pi\hbar)^4 \delta(\mathbf{p}_0 - \mathbf{p}_1) \delta(E_0 - E_1) \frac{i\hbar}{E - p_1^2/2m + i\varepsilon}. \quad (5.43)$$

Как можно было предвидеть, в этом выражении для пропагатора учтен закон сохранения энергии и импульса. Предел при $\varepsilon \rightarrow 0$ следует понимать в смысле соотношения (5.43). Отметим важный

¹⁾ Эквивалентно фурье-образ функции $\theta(t)$ дается выражением

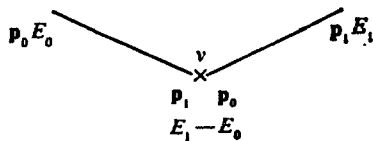
$$\theta(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{2\pi} \int e^{i\omega t} \frac{1}{\omega - i\varepsilon} d\omega.$$

момент: в случае частицы, описываемой волновой механикой, энергия E не обязательно равна $p^2/2m$. Величины E и p являются независимыми переменными (используемыми для того, чтобы определить фурье-образы функций, зависящих от t и x). Только в случае классической точечной частицы, описываемой в квантовой теории волновым пакетом нулевого размера, мы имеем $E = p^2/2m$. В этом предельном случае пропагатор, выписанный выше, имеет полюс. Распространение же имеет место при любых значениях E и p .

Простой в принципе, но утомительный расчет показывает, что если ввести фурье-образ потенциала $V(x, t)$ в соответствии с соотношением

$$V(x, t) = \int \exp\left[\frac{i}{\hbar}(\mathbf{q} \cdot \mathbf{x} - Wt)\right] v(\mathbf{q}, W) d\mathbf{q} dW, \quad (5.44)$$

то амплитуду (5.34) можно выразить через k_0 и v и представить диаграммой в импульсном пространстве



смысл которой дается правилами Фейнмана

$$\frac{p, E}{\text{---}} \quad \frac{1}{(2\pi\hbar)^4} \frac{i\hbar}{E - \frac{p^2}{2m} + i\epsilon}, \quad (5.45)$$

— $\frac{i}{\hbar}(2\pi\hbar)^4 v(\mathbf{q}, W)$ при сохранении энергии и импульса.

Это — правила Фейнмана в импульсном пространстве. В выражение для амплитуды рассеяния A входят величины ψ_{out} , ψ_{in} , и в нем проводится интегрирование по всем необходимым переменным.

§ 5.3. Кулоновское рассеяние

Применим теперь теорию, изложенную выше, к хорошо известной задаче о рассеянии заряженных бесспиновых частиц в кулоновском поле (резерфордовское рассеяние). Амплитуда рассеяния в первом борновском приближении дается выражением (5.34):

$$A = \frac{-i}{\hbar} \int \psi_{out}^*(x_1 t_1) K_0(x_1 t_1; x t) V(x, t) K_0(x t; x_0 t_0) \times \\ \times \psi_{in}(x_0 t_0) dx_1 dx dx_0 dt,$$

где $V(x, t)$ — кулоновский потенциал. Подставим теперь сюда для K_0 выражение (5.41), а для ψ_{out} и ψ_{in} — выражение (5.32); это дает

$$A = \frac{-i}{\hbar\tau} \frac{1}{(2\pi\hbar)^6} \int \exp\left[\frac{-i}{\hbar}\left(\mathbf{p}_f \cdot \mathbf{x}_1 - \frac{p_f^2}{2m} t_1\right)\right] \times \\ \times \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\left[\mathbf{q}' \cdot (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}) - \frac{q'^2}{2m}(t_1 - t)\right]\right\} \times \\ \times V(x, t) \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\left[\mathbf{q}' \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) - \frac{q'^2}{2m}(t - t_0)\right]\right\} \times \\ \times \exp\left[\frac{i}{\hbar}\left(\mathbf{p}_i \cdot \mathbf{x}_0 - \frac{p_i^2}{2m} t_0\right)\right] dx_1 dx dx_0 dt d\mathbf{q} d\mathbf{q}'.$$

Интегрирование по x_1 и x_0 дает дельта-функции

$$(2\pi\hbar)^3 \delta(\mathbf{p}_f - \mathbf{q}) \text{ и } (2\pi\hbar)^3 \delta(\mathbf{q}' - \mathbf{p}_i).$$

Интегрирование по \mathbf{q} и \mathbf{q}' исключает далее члены, содержащие t_1 и t_0 , что дает

$$A = \frac{-i}{\hbar\tau} \int \exp\left\{\frac{i}{\hbar}[(\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_f) \cdot \mathbf{x} - (E_i - E_f)t]\right\} V(x, t) dx dt,$$

где $E_{i,f} = p_{i,f}^2/2m$. Кулоновский потенциал равен $V = Ze^2/4\pi\epsilon_0 r$, и, следовательно, интегрирование по t дает

$$A = \frac{-i}{\hbar\tau} 2\pi\delta\left(\frac{E_i - E_f}{\hbar}\right) \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0} \int \exp\left[\frac{i}{\hbar}(\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_f) \cdot \mathbf{x}\right] \frac{1}{r} dx.$$

Последний интеграл расходится в бесконечности, а поэтому мы вводим множитель e^{-ar} и, переходя к пределу при $a \rightarrow 0$, получаем значение интеграла, равное $4\pi\hbar^2/q^2$, где $\mathbf{q} = \mathbf{p}_i - \mathbf{p}_f$. В итоге имеем

$$A = \frac{-i}{\hbar\tau} \frac{2\pi Ze^2 \hbar^2}{\epsilon_0 q^2} \delta\left(\frac{E_i - E_f}{\hbar}\right). \quad (5.46)$$

Это и есть искомая амплитуда рассеяния, с помощью которой мы хотим вычислить сечение рассеяния σ . Величина $|A|^2$ равна вероятности того, что частица вылетит с импульсом \mathbf{p}_f . Предположим, что выполняется нормировка в ящике объемом τ ; тогда выражение

$$|A|^2 \frac{\tau d\mathbf{p}_f}{(2\pi\hbar)^3}$$

дает вероятность того, что частица вылетит с импульсом, значения которого заключены в промежутке от p_f до $p_f + dp_f$. Если взаимодействие эффективно длится в течение промежутка времени T , то

$$\frac{|A|^2}{T} \tau \frac{dp_f}{(2\pi\hbar)^3}$$

есть число частиц, вылетающих в секунду со значениями импульса, принадлежащими этому промежутку. Чтобы найти сечение рассеяния, мы разделим эту величину на падающий поток и проинтегрируем по p_i . Падающие частицы движутся со скоростью p_i/m , и на единицу объема приходится $1/\tau$ частиц, так что поток равен $p_i/\tau m$ частиц в секунду через единицу площади. В результате мы получаем сечение в виде

$$\sigma = \int \frac{|A|^2}{T} \frac{\tau m}{p_i} \frac{\tau dp_f}{(2\pi\hbar)^3} \quad (5.47)$$

Величина $|A|^2$ содержит множитель $|\delta(E_i - E_f)/\hbar|^2$. Как понимать это выражение? Обратимся к определению дельта-функции $\delta(x)$:

$$\begin{aligned} \left| \delta\left(\frac{E_i - E_f}{\hbar}\right) \right|^2 &= \lim_{T \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-T/2}^{T/2} \exp\left[\frac{i(E_i - E_f)t}{\hbar}\right] dt \right|^2 = \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \left| \frac{\sin[(E_i - E_f)T/2\hbar]}{\pi(E_i - E_f)/\hbar} \right|^2 = \frac{T}{2\pi} \delta\left(\frac{E_i - E_f}{\hbar}\right) = \\ &= \frac{T\hbar}{2\pi} \delta(E_i - E_f), \end{aligned} \quad (5.48)$$

где мы воспользовались формулой $\lim_{\alpha \rightarrow \infty} (\sin^2 \alpha x / \alpha x^2) = \pi \delta(x)$. Собирая соотношения (5.46) — (5.48), получаем

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{mZ^2 e^4}{4\pi^2 \epsilon_0^2} \int \frac{1}{p_i} \frac{1}{q^4} \delta(E_f - E_i) d^3 p_f = \\ &= \frac{mZ^2 e^4}{4\pi^2 \epsilon_0^2} \int \frac{1}{p_i} \frac{1}{q^4} p_f^2 dp_f \delta(E_f - E_i) d\Omega. \end{aligned}$$

Воспользуемся теперь соотношением $E = p^2/2m$, положим $p_i = (2mE_i)^{1/2}$ и $p_f^2 dp_f = (2m^3 E_f)^{1/2} dE_f$ и проинтегрируем по E_f , что дает

$$\sigma = \frac{m^2 Z^2 e^4}{4\pi^2 \epsilon_0^2} \int \frac{1}{q^4} d\Omega,$$

где благодаря дельта-функции выполняются равенства $p_i = p_f = p$. Следовательно, $q^2 = 4p^2 \sin^2(\theta/2)$, где θ — угол между p_i и p_f .

Окончательно, полагая $p = mv$, получаем формулу для дифференциального сечения

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{Ze^2}{8\pi\epsilon_0 m v^2} \right)^2 \frac{1}{\sin^4(\theta/2)}, \quad (5.49)$$

которая носит название формулы Резерфорда.

§ 5.4. Функциональное исчисление: дифференцирование

Величины типа пропагатора

$$\langle x_f t_f | x_i t_i \rangle = \int \mathcal{D}x \exp \left[\frac{i}{\hbar} \int_{t_i}^{t_f} L(x, \dot{x}) dt \right]$$

представляют собой *функциональные интегралы*: интегрирование ведется по всем функциям $x(t)$. Поскольку левая часть есть число, интеграл сопоставляет каждой *функции* $x(t)$ некоторое *число*. Данный интеграл называется *функционалом*; он, очевидно, зависит от значений функции $x(t)$ во всех точках. Мы можем кратко записать это следующим образом:

Функционал: функция \rightarrow число. (5.50)

Функция, например $f(t) = t^2 + 2t$, принимает определенное значение (*число*) при каждом значении независимого параметра, которое также является числом. Задавшись некоторым значением времени t , мы вычисляем значение функции f . Кратко это записывается так:

Функция: число \rightarrow число. (5.51)

Математически числа принадлежат пространству *действительных чисел* \mathbb{R} ; следовательно, функция определяет отображение

Функция: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. (5.52)

Функция, конечно, может быть векторной величиной подобно электрическому полю E и, следовательно, принадлежать пространству \mathbb{R}^3 ; она сопоставляет электрическое поле каждой точке трехмерного пространства и, стало быть, является отображением $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$. Скалярная же функция $\varphi(x)$, очевидно, определяет отображение $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$. В общем случае мы имеем определение

Функция: $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$. (5.53)

Рассматриваемые функции непрерывны; точнее, мы предполагаем их n -кратно дифференцируемыми. В физике мы обычно имеем дело с бесконечно дифференцируемыми функциями. Соответствующее ко-

ординатное пространство является *многообразием* M (например, \mathbb{R} или \mathbb{R}^3 в случае трехмерного евклидова пространства), а функция обозначается через $C^n(M)$ или в случае бесконечно дифференцируемых функций через $C^\infty(M)$. Следовательно, функционал [формула (5.50)] определяет отображение

$$\text{Функционал: } C^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R}. \quad (5.54)$$

Хотя это теперь и очевидно, мы все-таки подчеркнем, что функционал *не* есть функция функции; такая функция, конечно, тоже является функцией. В общепринятом обозначении функционала F от функции f используются квадратные скобки: $F[f]$.

Определим теперь функциональное дифференцирование. По аналогии с обычным дифференцированием производная функционала $F[f]$ по функции $f(y)$ определяется как

$$\frac{\delta F[f(x)]}{\delta f(y)} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{F[f(x) + \epsilon \delta(x-y)] - F[f(x)]}{\epsilon}. \quad (5.55)$$

Рассмотрим конкретный пример. Пусть функционал имеет вид

$$F[f] = \int f(x) dx. \quad (5.56)$$

Тогда

$$\begin{aligned} \frac{\delta F[f(x)]}{\delta f(y)} &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} \left\{ \int [f(x) + \epsilon \delta(x-y)] dx - \int f(x) dx \right\} = \\ &= \int \delta(x-y) dx = 1. \end{aligned} \quad (5.57)$$

В качестве второго примера рассмотрим функционал

$$F_x[f] = \int G(x, y) f(y) dy. \quad (5.58)$$

В этом выражении переменную x , от которой зависит левая часть, следует рассматривать как параметр. Имеем

$$\begin{aligned} \frac{\delta F_x[f]}{\delta f(z)} &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} \left(\int [G(x, y) [f(y) + \epsilon \delta(y-z)]] dy - \right. \\ &\left. - \int G(x, y) f(y) dy \right) = \int G(x, y) \delta(y-z) dy = G(x, z). \end{aligned} \quad (5.59)$$

§ 5.5. Другие свойства функциональных интегралов

Мы показали, что амплитуда перехода от $q_i t_i$ к $q_f t_f$ имеет вид

$$\langle q_f t_f | q_i t_i \rangle = N \int \mathcal{D}q \exp \left[\frac{i}{\hbar} \int_{t_i}^{t_f} dt L(q, \dot{q}) \right]$$

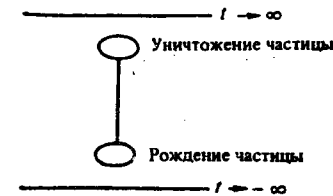


Рис. 5.6. Схема перехода вакуум — вакуум при наличии источника.

в случае, когда гамильтониан дается выражением $H = (p^2/2m) + V(q)$. Для того круга вопросов, которые здесь ставятся, это выражение можно считать достаточно общим. Граничные условия рассматриваемой задачи имеют вид

$$q(t_f) = q_f, \quad q(t_i) = q_i.$$

Граничные условия такого типа подходят для описания движения классических частиц, но это не то, что требуется в теории поля. Аналогом этих граничных условий могли бы быть, например, такие: $\psi(t_i) = \psi_i$, $\psi(t_f) = \psi_f$. Однако в действительности частицы *рождаются* (например, в столкновении), взаимодействуют и *уничтожаются* при наблюдении (т. е. при регистрации). Например, при измерении сечения πN -рассеяния $d\sigma/d\Omega$ пион рождается в NN -столкновении и уничтожается при регистрации.

Акт рождения может быть представлен как источник, а акт уничтожения — как сток, который при нашем способе выражаться также является источником. Граничные условия задачи можно изобразить как на рис. 5.6: вакуумное состояние, имеющееся при $t = -\infty$, эволюционирует в вакуумное состояние при $t \rightarrow \infty$ через этапы рождения частицы, ее взаимодействия и уничтожения частицы благодаря посредничеству источника. Таким образом, нас интересует *амплитуда перехода вакуум—вакуум в присутствии источника*. Данный метод, основанный на понятии источников, восходит к Швингеру [18]. Источник $J(t)$ представляется как добавка к лагранжиану:

$$L \rightarrow L + \hbar J(t)q(t). \quad (5.60)$$

Если $|0, t\rangle^J$ есть вектор (в движущейся системе отсчета) основного состояния (вакуума) в присутствии источника, например в случае системы, описываемой лагранжианом (5.60), то амплитуда перехода имеет вид

$$Z[J] \sim \langle 0, \infty | 0, -\infty \rangle^J, \quad (5.61)$$

где опущен коэффициент пропорциональности. Величина $Z[J]$

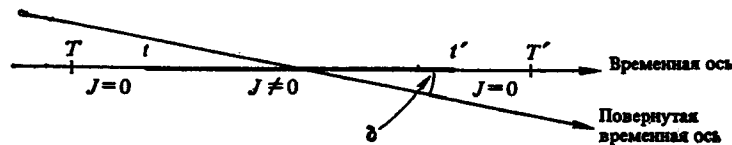


Рис. 5.7. Вращение временной оси при вычислении амплитуды перехода вакуум — вакуум.

является функционалом от J . Мы выведем выражение для нее, т. е. для амплитуды перехода, с точностью до постоянного множителя. Характерной чертой рассматриваемой картины является присутствие вакуумного состояния. Как мы приходим к нему?

Ситуацию можно представить себе, рассматривая временную ось, изображенную на рис. 5.7. Дальнейшее изложение существенно опирается на обзор [11]. Пусть источник $J(t)$ отличен от нуля только в промежутке между моментами времени t и t' ($t < t'$). Пусть момент времени T предшествует моменту t , а T' — момент времени более поздний, чем t' . В этом случае амплитуда перехода имеет вид

$$\langle QT' | QT \rangle^J = N \int \mathcal{D}q \exp \left[\frac{i}{\hbar} \int_T^{T'} dt (L + \hbar Jq) \right]. \quad (5.62)$$

Мы можем написать

$$\begin{aligned} \langle QT' | QT \rangle^J &= \\ &= \int dq' dq \langle QT' | q't' \rangle \langle q't' | qt \rangle^J \langle qt | QT \rangle. \end{aligned} \quad (5.63)$$

Используя (5.3), мы имеем далее

$$\begin{aligned} \langle QT' | q't' \rangle &= \langle Q' | \exp \left(-\frac{i}{\hbar} HT' \right) \exp \left(\frac{i}{\hbar} Ht' \right) | q' \rangle = \\ &= \sum_m \varphi_m(Q') \varphi_m^*(q') \exp \left[\frac{i}{\hbar} E_m(t' - T') \right], \end{aligned} \quad (5.64)$$

где $\varphi_m(q)$ — функции, образующие полную систему собственных состояний оператора энергии. Аналогично

$$\langle qt | QT \rangle = \sum_n \varphi_n(q) \varphi_n^*(Q) \exp \left[-\frac{i}{\hbar} E_n(t - T) \right]. \quad (5.65)$$

Подставим эти выражения в (5.63). Переходя к пределу при $T' \rightarrow \infty e^{-i\delta}$, $T \rightarrow -\infty e^{-i\delta}$, где δ — произвольный угол $\ll \pi/2$ (см. рис. 5.7), мы видим, что остается только вклад основного состояния (вакуума). Именно эту особенность рассматриваемого формализма мы хотели продемонстрировать. Имеем далее

$$\lim_{\substack{T' \rightarrow \infty e^{-i\delta} \\ T \rightarrow -\infty e^{-i\delta}}} \langle QT' | QT \rangle^J = \varphi_0^*(Q) \varphi_0(Q') \exp \left[-\frac{i}{\hbar} E_0(T' - T) \right] \times$$

$$\times \int dq' dq \varphi_0^*(q't') \langle q't' | qt \rangle^J \varphi_0(q, t),$$

или

$$\begin{aligned} &\int dq' dq \varphi_0^*(q', t') \langle q't' | qt \rangle^J \varphi_0(q, t) = \\ &= \lim_{\substack{T' \rightarrow \infty e^{-i\delta} \\ T \rightarrow -\infty e^{-i\delta}}} \frac{\langle QT' | QT \rangle^J}{\varphi_0^*(Q) \varphi_0(Q') \exp \left[-\frac{i}{\hbar} E_0(T' - T) \right]}. \end{aligned} \quad (5.66)$$

Левая часть есть среднее значение амплитуды перехода в основном состоянии. Моменты времени t' и $-t$ могут быть выбраны сколь угодно большими, так что левая часть принимает вид $\langle 0, \infty | 0, -\infty \rangle^J$. Знаменатель в правой части — это просто численный множитель, и, таким образом, мы имеем

$$\langle 0, \infty | 0, -\infty \rangle^J \approx \lim_{\substack{T' \rightarrow \infty e^{-i\delta} \\ T \rightarrow -\infty e^{-i\delta}}} \langle QT' | QT \rangle^J, \quad (5.67)$$

где

$$\langle QT' | QT \rangle^J = N \int \mathcal{D}Q \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \int_T^{T'} dt [L(Q, \dot{Q}) + \hbar JQ] \right\}.$$

Наконец, вместо того чтобы поворачивать временную ось, как мы это делали выше, вклад основного состояния можно выделить, вводя малую отрицательную мнимую добавку $-(1/2)ieq^2$ в гамильтониан в выражении (5.64) или (5.65). Это эквивалентно добавлению величины $(1/2)ieq^2$ к L , и, таким образом, мы окончательно определяем величину $Z[J]$ [формула (5.61)] в виде

$$\blacksquare Z[J] = \int \mathcal{D}q \exp \left[\frac{i}{\hbar} \int_{-\tau}^{\infty} dt \left(L + \hbar Jq + \frac{1}{2} i\epsilon q^2 \right) \right] \sim \langle 0, \infty | 0, -\infty \rangle^J. \quad (5.68)$$

Мы воспользуемся этим выражением для амплитуды перехода, когда будем рассматривать теорию поля в следующей главе. Здесь же докажем еще одно соотношение, включающее функциональные производные от Z по $J(t)$.

Вначале рассмотрим вместо $\langle q_f t_f | q_i t_i \rangle$ величину $\langle q_f t_f | q(t_n) | q_i t_i \rangle$, где $t_f > t_n > t_i$. Напомним, что $q(t_n)$ является оператором. Рас-

смотрим соотношение (5.6) и выберем в качестве t_n один из моментов времени t_1, \dots, t_n . Тогда мы будем иметь

$$\begin{aligned} \langle q_f t_f | q(t_n) | q_i t_i \rangle &= \\ &= \int dq_1 \dots dq_n \langle q_f t_f | q_n t_n \rangle \langle q_n t_n | q_{n-1} t_{n-1} \rangle \dots \\ &\dots \langle q_n t_n | q(t_n) | q_{n-1} t_{n-1} \rangle \dots \langle q_i t_i | q_i t_i \rangle. \end{aligned}$$

Выражение $\langle q_n t_n | q(t_n) | q_{n-1} t_{n-1} \rangle$, очевидно, можно заменить выражением $q(t_n) \langle q_n t_n | q_{n-1} t_{n-1} \rangle$, причем в данном случае $q(t_n)$ — скаляр. Дальнейшие рассуждения аналогичны тем, которые ведут от (5.6) к (5.13), и мы получаем

$$\langle q_f t_f | q(t_i) | q_i t_i \rangle = \int \frac{\mathcal{D}q \mathcal{D}p}{h} q(t_i) \exp \left\{ \frac{i}{h} \int_{t_i}^{t_f} [p \dot{q} - H(p, q)] dt \right\}. \quad (5.69)$$

Далее предположим, что нам необходимо определить величину

$$\langle q_f t_f | q(t_n) q(t_n) | q_i t_i \rangle.$$

Если $t_n > t_n$, то мы имеем

$$\begin{aligned} \langle q_f t_f | q(t_n) q(t_n) | q_i t_i \rangle &= \\ &= \int dq_1 \dots dq_n \langle q_f t_f | q_n t_n \rangle \dots \langle q_n t_n | q(t_n) | q_{n-1} t_{n-1} \rangle \dots \\ &\dots \langle q_n t_n | q(t_n) | q_{n-1} t_{n-1} \rangle \dots \langle q_i t_i | q_i t_i \rangle, \end{aligned}$$

что дает окончательно

$$\langle q_f t_f | q(t_1) q(t_2) | q_i t_i \rangle = \int \frac{\mathcal{D}q \mathcal{D}p}{h} q(t_1) q(t_2) \exp \left[\frac{i}{h} \int_{t_i}^{t_f} (p \dot{q} - H) dt \right] \quad (5.70)$$

при $t_1 > t_2$. Если же $t_2 > t_1$, то этот результат неверен; в этом случае правая часть (5.70) равна

$$\langle q_f t_f | q(t_2) q(t_1) | q_i t_i \rangle.$$

В общем случае правая часть в выражении (5.70) равна

$$\langle q_f t_f | T[q(t_1)q(t_2)] | q_i t_i \rangle,$$

где T — оператор хронологического упорядочения, по определению действующий следующим образом:

$$T[A(t_1)B(t_2)] = \begin{cases} A(t_1)B(t_2) & \text{при } t_1 > t_2, \\ B(t_2)A(t_1) & \text{при } t_2 > t_1, \end{cases} \quad (5.71)$$

т. е. он располагает операторы в порядке возрастания временных

аргументов. Найденный нами результат обобщается следующим образом:

$$\begin{aligned} \langle q_f t_f | T[q(t_1)q(t_2) \dots q(t_n)] | q_i t_i \rangle &= \\ &= \int \frac{\mathcal{D}q \mathcal{D}p}{h} q(t_1) q(t_2) \dots q(t_n) \times \\ &\times \exp \left\{ \frac{i}{h} \int_{t_i}^{t_f} [p \dot{q} - H(p, q)] dt \right\}. \end{aligned} \quad (5.72)$$

В случае когда H имеет вид (5.8), это выражение принимает вид

$$\begin{aligned} \langle q_f t_f | T[q(t_1)q(t_2) \dots q(t_n)] | q_i t_i \rangle &= \\ &= N \int \mathcal{D}q q(t_1) q(t_2) \dots q(t_n) \exp \left(\frac{i}{h} \int_{t_i}^{t_f} L dt \right). \end{aligned} \quad (5.73)$$

Однако из определения (5.68) функционала $Z[J]$ следует, что его функциональная производная по J равна

$$\frac{\delta Z[J]}{\delta J(t_1)} = i \int \mathcal{D}q q(t_1) \exp \left[\frac{i}{h} \int_{-\infty}^{\infty} dt (L + \hbar Lq + \frac{i}{2} \epsilon q^2) \right]$$

и, стало быть,

$$\begin{aligned} \frac{\delta^n Z[J]}{\delta J(t_1) \dots \delta J(t_n)} &= i^n \int \mathcal{D}q q(t_1) \dots q(t_n) \times \\ &\times \exp \left[\frac{i}{h} \int_{-\infty}^{\infty} dt (L + \hbar Jq + \frac{i}{2} \epsilon q^2) \right], \end{aligned} \quad (5.74)$$

откуда, полагая $J = 0$, получаем

$$\begin{aligned} \frac{\delta^n Z[J]}{\delta J(t_1) \dots \delta J(t_n)} \Big|_{J=0} &= i^n \int \mathcal{D}q q(t_1) \dots q(t_n) \times \\ &\times \exp \left[\frac{i}{h} \int_{-\infty}^{\infty} dt (L + \frac{i}{2} \epsilon q^2) \right]. \end{aligned} \quad (5.75)$$

Сравнивая это выражение с выражением (5.73), мы замечаем, что различие между ними связано с членом $(i/2)\epsilon q^2$. Однако из сказанного выше нам известно, что именно этот член позволяет выделить вклад основного состояния. Таким образом, мы приходим к следующему выражению для вакуумного среднего хронологического произведения операторов:

$$\blacksquare \frac{\delta^n Z[J]}{\delta J(t_1) \dots \delta J(t_n)} \Big|_{J=0} \sim i^n \langle 0, \infty | T[q(t_1) \dots q(t_n)] | 0, -\infty \rangle. \quad (5.76)$$

Это второй результат, который мы хотели получить и к которому мы будем обращаться в следующей главе.

Приложение: некоторые полезные интегралы

Начнем с известной формулы

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx = \left(\frac{\pi}{a}\right)^{1/2}. \quad (5П.1)$$

Эта формула, очевидно, равносильна равенству

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a(x^2+y^2)} dx dy = \frac{\pi}{a}, \quad (5П.2)$$

которое легко получается, если перейти к полярным координатам (r, θ) :

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-ar^2} r dr d\theta = 2\pi \int_0^{\infty} e^{-ar^2} r dr = \pi \int_0^{\infty} e^{-ar^2} d(r^2) = \frac{\pi}{a}.$$

Таким образом, соотношение (5П.1) доказано.

Перейдем теперь от гауссова интеграла к интегралу от квадратичной формы

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2+bx+c} dx \equiv \int_{-\infty}^{\infty} e^{q(x)} dx.$$

Пусть \bar{x} — значение x , при котором q достигает минимума:

$$\bar{x} = \frac{b}{2a}, \quad q(\bar{x}) = \frac{b^2}{4a} + c.$$

Тогда мы можем выделить «полный квадрат»:

$$q(x) = q(\bar{x}) - a(x - \bar{x})^2.$$

Следовательно, с учетом (5П.1)

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{q(x)} dx = e^{q(\bar{x})} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a(x-\bar{x})^2} dx = e^{q(\bar{x})} \left(\frac{\pi}{a}\right)^{1/2}.$$

Окончательно будем иметь

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-ax^2 + bx + c) dx = \exp\left(\frac{b^2}{4a} + c\right) \left(\frac{\pi}{a}\right)^{1/2}. \quad (5П.3)$$

Наконец, мы покажем, что

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{i\lambda [(x_1 - a)^2 + (x_2 - x_1)^2 + \dots + (b - x_n)^2]\} dx_1 \dots dx_n = \\ & = \left[\frac{i^n \pi^n}{(n+1)\lambda^n}\right]^{1/2} \exp\left[\frac{i\lambda}{n+1}(b-a)^2\right]. \end{aligned} \quad (5П.4)$$

Это равенство доказывается по индукции; мы предположим, что оно справедливо для n , и докажем, что оно справедливо для $n+1$. Имеем

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{i\lambda [(x_1 - a)^2 + \dots + (b - x_{n+1})^2]\} dx_1 \dots dx_{n+1} = \\ & = \left[\frac{i^n \pi^n}{(n+1)\lambda^n}\right]^{1/2} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[\frac{i\lambda}{n+1}(x_{n+1} - a)^2\right] \exp\{i\lambda(b - x_{n+1})^2\} dx_{n+1} = \\ & = \left[\frac{i^n \pi^n}{(n+1)\lambda^n}\right]^{1/2} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{i\lambda \left[\frac{1}{n+1}(x_{n+1} - a)^2 + (b - x_{n+1})^2\right]\} dx_{n+1}. \end{aligned}$$

Если ввести переменную $y = x_{n+1} - a$, то член в квадратных скобках примет вид

$$\begin{aligned} & \frac{1}{n+1} y^2 + (b - a - y)^2 = \frac{n+2}{n+1} y^2 - 2y(b-a) + (b-a)^2 = \\ & = \frac{n+2}{n+1} \left[y - \frac{n+1}{n+2}(b-a)\right]^2 + \frac{1}{n+2}(b-a)^2. \end{aligned}$$

Положим теперь $\lambda - (n+1)(b-a)/(n+2) = z$; тогда получим интеграл в виде

$$\begin{aligned} & \left(\frac{i^n \pi^n}{(n+1)\lambda^n}\right)^{1/2} \int_{-\infty}^{\infty} \left[i\lambda \frac{n+2}{n+1} z^2 + \frac{i\lambda}{n+2}(b-a)^2\right] dz = \\ & = \left[\frac{i^{n+1} \pi^{n+1}}{(n+2)\lambda^{n+1}}\right]^{1/2} \exp\left[\frac{i\lambda}{n+2}(b-a)^2\right], \end{aligned}$$

что совпадает с (5П.4) в случае, когда вместо n подставлено $n+1$. Остается показать, что формула справедлива при $n=1$. В этом случае интеграл равен

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \exp \{i\lambda [(x-a)^2 + (b-x)^2]\} dx =$$

$$= \exp \left[i \frac{\lambda (a-b)^2}{2} \right] \left(\frac{i\pi}{2\lambda} \right)^{1/2},$$

где использована формула (5П.3) при мнимом значении a . Это выражение для I совпадает с формулой (5П.4) при $n = 1$. Таким образом, мы доказали соотношение (5П.4) при всех значениях n .

Резюме

1) Дается фейнмановская формулировка квантовой механики на основе функциональных интегралов. 2) Строится разложение по теории возмущений (борновский ряд). Определяется S -матрица (для рассеяния «частиц») и показывается, как амплитуды перехода могут быть получены по «правилам Фейнмана». Последние формулируются как в координатном, так и в импульсном пространстве. 3) Показывается, как в случае кулоновского рассеяния выводится формула Резерфорда. 4) За кратким обзором функционального дифференцирования следует доказательство того, что амплитуда перехода вакуум — вакуум в присутствии источника J является функциональным интегралом от J и связывает вакуумные средние хронологических произведений операторов с соответствующими функциональными производными от этого функционального интеграла. В приложении вычисляются интегралы, используемые в данной главе.

Литература для дальнейшего изучения

Первыми публикациями по квантованию с помощью функциональных интегралов были работы:

1. Dirac P. A. M. Phys. Zs. der Sowjet Union, 3, 64 (1933).
2. Feynman R. P. Rev. Modern Phys., 20, 367 (1948).

Обе эти статьи опубликованы также в сборнике:

3. Quantum Electrodynamics, ed. J. Schwinger, Dover Publications, 1958.

Подробное изложение можно найти в книге:

4. Feynman R. P., Hibbs A. R. Quantum Mechanics and Path Integrals, McGraw-Hill, 1965. [Имеется перевод: Фейнман Р., Хиббс А. Квантовая механика и интегралы по путям. — М.: Мир, 1968.]

Имеется ряд хороших обзоров по физическим приложениям метода квантования с помощью функциональных интегралов, например:

5. Marinov M. S. Phys. Rep., 60, 1 (1980).
6. DeWitt-Morette C., Maheshwari A., Nelson B. Phys. Repts, 50, 255 (1979).
7. Schulman L. S. Techniques and Applications of Path Integration, John Wiley and Sons, 1981.

8. Lee T. D. Particle Physics and Introduction to Field Theory, Harwood Academic Publishers, 1981, Ch. 19.
9. Klauder J. R. — in: Path Integrals and their Applications in Quantum, Statistical and Solid State Physics, eds. G. J. Papadopoulos, J. T. Devreese, Plenum Press, 1978.
10. Блохинцев Д. И., Барбашов Б. М. — УФН, 1972, т. 106, вып. 4, с. 593.
11. Abers E. S., Lee B. W. Phys. Repts, 9C, 1 (1973). [Имеется перевод в книге: Квантовая теория калибровочных полей. — М.: Мир, 1977.]
12. Гельфанд И. М., Яглом А. М. — УМН, 1956, т. 11, с. 77.
13. Kac M. Probability and Related Topics in Physical Sciences, Interscience, 1959.
14. Keller J. B., McLaughlin D. W. Am. Math. Monthly, 82, 451 (1975).

Более строгое изложение см. в работах:

15. Gudder S. P. Stochastic Methods in Quantum Mechanics, North-Holland Publishing Co., 1979.
16. Simon B. Functional Integration and Quantum Physics, Academic Press, 1979.
17. Reed M. C. — in: Constructive Quantum Field Theory (Lecture Notes in Physics, 25), eds. G. Velo, A. S. Wightman, Springer-Verlag, 1973.

Подход Швингера, основанный на источниках, излагается, например, в книге:

18. Schwinger J. Particles and Sources, Gordon and Breach, 1969.

Квантование методом функциональных интегралов и правила Фейнмана (скалярное и спинорное поля)

В данной главе мы проквантуем скалярное и спинорное поля методом функциональных интегралов по аналогии с той трактовкой квантовой механики, которая была дана в предыдущей главе. Это даст нам возможность определить пропагаторы скалярного и спинорного полей. Далее мы введем взаимодействия, применим к ним теорию возмущений и сформулируем правила Фейнмана. Затем, подробно рассмотрев спинорные поля, завершим главу вычислением сечения пион-нуклонного рассеяния.

§ 6.1. Производящий функционал для скалярных полей¹⁾

Предположим, что скалярное поле $\varphi(x)$ обладает источником $J(x)$ в таком же смысле этого слова, как и в § 5.5, и что аналогично выражению (5.68) мы можем определить амплитуду перехода вакуум—вакуум в присутствии источника J в виде

$$Z[J] = \int \mathcal{D}\varphi \exp \left\{ i \int d^4x \left[\mathcal{L}(\varphi) + J(x)\varphi(x) + \frac{1}{2} \epsilon \varphi^2 \right] \right\} \sim \langle 0, \infty | 0, -\infty \rangle^J. \quad (6.1)$$

Мы произвели здесь подстановку $\mathcal{D}q(t) \rightarrow \mathcal{D}\varphi(x^\mu)$ и положили $\hbar = 1$. Входящая сюда величина \mathcal{L} есть лагранжиан Клейна—Гордона (3.10). Таким образом, вместо того чтобы разбивать временную ось на сегменты, мы разбиваем пространство-время, т. е. пространство Минковского, на 4-мерные кубы объемом δ^4 , в каждом из которых φ считается константой:

$$\varphi \sim \varphi(x_i, y_j, z_k, t_l).$$

¹⁾ В данном параграфе и в большей части данной главы изложение следует лекциям Д. Весса (Wess D. Preprint, Karlsruhe University, 1974) и В. Н. Попова (Pороv V. N. Preprint, TH-2424-CERN, Geneva, 1979).

Производные приближенно выражаются, например, в виде

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} \Big|_{i,j,k,l} \approx \frac{1}{\delta} \left[\varphi(x_i + \delta, y_j, z_k, t_l) \right].$$

Теперь формально заменим четыре индекса (i, j, k, l) одним индексом n и напишем

$$\mathcal{L}(\varphi(x_i, y_j, z_k, t_l), \partial_\mu \varphi(x_i, y_j, z_k, t_l)) = \mathcal{L}(\varphi_n, \partial_\mu \varphi_n) = \mathcal{L}_n.$$

Если каждый из индексов i, j, k и l принимает N значений, то индекс n принимает N^4 значений и действие $S = \int \mathcal{L} d^4x$ записывается в виде

$$S \approx \sum_{n=1}^{N^4} \delta^4 \mathcal{L}_n.$$

Амплитуда $Z[J]$ перехода вакуум—вакуум имеет вид

$$Z[J] = \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{n=1}^{N^4} \int d\varphi_n(x) \exp \left\{ i \sum_{n=1}^{N^4} \delta^4 \left(\mathcal{L}_n + \varphi_n J_n + \frac{i}{2} \epsilon \varphi_n^2 \right) \right\}. \quad (6.2)$$

Вычислим это выражение в случае свободной частицы (поля), когда

$$\mathcal{L}_0 = \frac{1}{2} \left(\partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi - m^2 \varphi^2 \right).$$

Соответствующая амплитуда перехода вакуум—вакуум (в пределе при $N \rightarrow \infty$) дается формулой

$$Z_0[J] = \int \mathcal{D}\varphi \exp \left[i \int \left[\frac{1}{2} \left(\partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi - (m^2 - i\epsilon) \varphi^2 \right) + \varphi J \right] d^4x \right]. \quad (6.3)$$

Воспользуемся тождеством

$$\int \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi d^4x = \int \partial_\mu (\varphi \partial^\mu \varphi) d^4x - \int \varphi \square \varphi d^4x$$

и преобразуем первый член в выражении (6.3) в поверхностный интеграл с помощью 4-мерного варианта теоремы Гаусса. Этот поверхностный член обращается в нуль при условии, что $\varphi \rightarrow 0$ на бесконечности, так что мы имеем

$$\int \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi d^4x = - \int \varphi \square \varphi d^4x \quad (6.4)$$

и в результате получаем

$$Z_0[J] = \int \mathcal{D}\varphi \exp \left\{ -i \int \left[\frac{1}{2} \varphi (\square + m^2 - i\epsilon) \varphi - \varphi J \right] d^4x \right\}. \quad (6.5)$$

Заметим, что поле φ в данном производящем функционале не удовлетворяет уравнению Клейна — Гордона (3.8). Чтобы вычислить $Z_0[J]$, произведем замену

$$\varphi(x) \rightarrow \varphi(x) + \varphi_0(x). \quad (6.6)$$

Используя соотношение

$$\int \varphi_0(\square + m^2 - i\varepsilon) \varphi d^4x = \int \varphi(\square + m^2 - i\varepsilon) \varphi_0 d^4x,$$

которое выводится аналогично равенству (6.4), мы после замены (6.6) получаем

$$\begin{aligned} & \int \left[\frac{1}{2} \varphi(\square + m^2 - i\varepsilon) \varphi - \varphi J \right] d^4x \rightarrow \\ & \rightarrow \int \left[\frac{1}{2} \varphi(\square + m^2 - i\varepsilon) \varphi + \varphi(\square + m^2 - i\varepsilon) \varphi_0 + \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} \varphi_0(\square + m^2 - i\varepsilon) \varphi_0 - \varphi J - \varphi_0 J \right] d^4x. \end{aligned}$$

Если φ_0 удовлетворяет уравнению

$$(\square + m^2 - i\varepsilon) \varphi_0(x) = J(x), \quad (6.7)$$

то полученный интеграл принимает вид

$$\int \left[\frac{1}{2} \varphi(\square + m^2 - i\varepsilon) \varphi - \frac{1}{2} \varphi_0 J \right] d^4x. \quad (6.8)$$

Решение уравнения (6.7) таково:

$$\varphi_0(x) = - \int \Delta_F(x-y) J(y) d^4y, \quad (6.9)$$

где $\Delta_F(x-y)$ — так называемый фейнмановский пропагатор, удовлетворяющий уравнению

$$(\square + m^2 - i\varepsilon) \Delta_F(x) = -\delta^4(x). \quad (6.10)$$

Подставляя (6.9) в (6.8), мы видим, что показатель экспоненты в выражении (6.5) равен произведению $-i$ на величину

$$\frac{1}{2} \int \varphi(\square + m^2 - i\varepsilon) \varphi d^4x + \frac{1}{2} \int J(x) \Delta_F(x-y) J(y) d^4x d^4y. \quad (6.11)$$

Таким образом, функционал $Z_0[J]$ принимает вид (мы пишем dx вместо d^4x и аналогично для переменной y)

$$\begin{aligned} Z_0[J] &= \exp \left[-\frac{i}{2} \int J(x) \Delta_F(x-y) J(y) dx dy \right] \times \\ & \times \int \mathcal{D}\varphi \exp \left[-\frac{i}{2} \int \varphi(\square + m^2 - i\varepsilon) \varphi dx \right]. \end{aligned} \quad (6.12)$$

Преимущество данного выражения перед (6.5) состоит в том, что здесь функционал $Z_0[J]$ имеет вид произведения двух множителей, один из которых зависит только от φ , а другой — только от J . В действительности интеграл, содержащий φ , является числом, поскольку он берется по всем функциям φ ; обозначим его через N . Окончательно имеем

$$\blacksquare Z_0[J] = N \exp \left[-\frac{i}{2} \int J(x) \Delta_F(x-y) J(y) dx dy \right]. \quad (6.13)$$

Поскольку нас интересуют только нормированные амплитуды перехода, в приложениях, которые мы рассматриваем, величина N не играет роли.

Цель, которую мы ставили перед собой в данном параграфе — вывести соотношение (6.13) для амплитуды перехода вакуум — вакуум, достигнута. В следующем параграфе мы покажем, как это же самое соотношение выводится методом функционального интегрирования. Но прежде чем закончить данный параграф, мы кратко рассмотрим фейнмановский пропагатор $\Delta_F(x)$, определенный соотношением (6.10). Легко видеть, что пропагатор $\Delta_F(x)$ может быть представлен в виде разложения Фурье

$$\Delta_F = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4k \frac{e^{-ikx}}{k^2 - m^2 + i\varepsilon}. \quad (6.14)$$

Заметим, что присутствием члена $i\varepsilon$, который первоначально был введен [формула (6.1)] для того, чтобы обеспечивалось выполнение граничных условий для перехода вакуум — вакуум, диктуется выбор пути интегрирования, обходящего полюса при $k_0 = \pm(k^2 + m^2)^{1/2}$. На самом деле полюса расположены в точках, удовлетворяющих равенству $k_0^2 = k^2 + m^2 - i\varepsilon$, т. е. при

$$k_0 = \pm(k^2 + m^2)^{1/2} \pm i\delta = \pm E \pm i\delta. \quad (6.15)$$

Это показано на рис. 6.1, где путь интегрирования по k_0 проходит

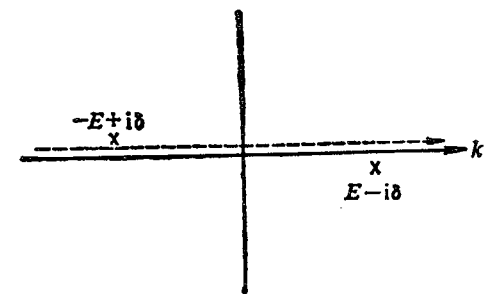


Рис. 6.1. Путь интегрирования вдоль действительной оси k_0 в определении пропагатора $\Delta_F(x)$.

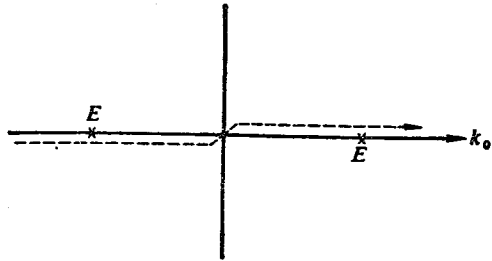


Рис. 6.2. Новый путь интегрирования после перехода к пределу при $\epsilon \rightarrow 0$ ($\delta \rightarrow 0$).

вдоль действительной оси. В пределе при $\delta \rightarrow 0$, т. е. при $\epsilon \rightarrow 0$ [что подразумевается в формуле (6.14)], полюса оказываются на действительной оси и путь интегрирования в этом случае проходит так, как показано на рис. 6.2.

Существует и другой способ учета граничных условий для перехода вакуум — вакуум: выполнить поворот временной оси не на малый угол δ , как на рис. 5.7, а на угол $\pi/2$, так что $t \rightarrow -i\infty$. Если ввести обозначение

$$x_4 = it = ix_0, \tag{6.16}$$

то это — предел при $x_4 \rightarrow \infty$. Такое пространство-время с мнимой временной осью является *евклидовым*, так как инвариантный интервал имеет вид

$$ds^2 = (dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2 = - \sum_{\mu=1}^4 (dx^\mu)^2.$$

Если ввести также обозначение

$$k_4 = -ik_0, \tag{6.17}$$

то в евклидовом пространстве будут справедливы соотношения

$$k^2 = -(k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 + k_4^2) = -k_E^2, \tag{6.18}$$

$$d^4k_E = d^3k dk_4 = -id^4k,$$

а фейнмановский пропагатор будет иметь вид

$$\Delta_F(x) = \frac{-i}{(2\pi)^4} \int d^4k_E \frac{e^{-ikx}}{k_E^2 + m^2}. \tag{6.19}$$

В этом случае нет трудностей при выборе контура, так как полюса лежат не на действительной оси, а в точках $k_4 = \pm i(k^2 + m^2)^{1/2}$. Исходя из выражения (6.3) для $Z_0[J]$, с учетом равенств $d^4x =$

$= -id^4x_E$ и $(\partial^\mu \varphi)^2 = -(\partial_E^\mu \varphi)^2$ получаем выражение для евклидовой амплитуды перехода:

$$Z_{0E}[J] = \int \mathcal{D}\varphi \exp \left\{ - \int \left(\frac{1}{2} \left[(\partial_E^\mu \varphi)^2 + m^2 \varphi^2 \right] - \varphi J \right) d^4x_E \right\}. \tag{6.20}$$

Показатель экспоненты под знаком интеграла отрицательно определен; следовательно, интеграл конечен, роль члена, содержащего ϵ , в (6.3) свелась к тому, чтобы обеспечить убывание подынтегрального выражения.

§ 6.2. Функциональное интегрирование

Теперь мы обобщим обычные формулы для гауссовых интегралов по конечному числу переменных на случай функциональных интегралов и покажем затем, как выражение (6.12) [или (6.13)] следует из (6.5). Вначале заметим, что из формулы (5П.1) следует равенство

$$\int e^{-\frac{1}{2} ax^2} dx = \left(\frac{2\pi}{a} \right)^{1/2}. \tag{6.21}$$

(Здесь и в нижеследующих интегралах подразумеваются пределы интегрирования $-\infty$ и ∞ .) Возьмем теперь произведение n таких интегралов:

$$\int \exp \left(-\frac{1}{2} \sum_n a_n x_n^2 \right) dx_1 \dots dx_n = \frac{(2\pi)^{n/2}}{\prod_{i=1}^n a_i^{1/2}}. \tag{6.22}$$

Пусть A — диагональная матрица с элементами a_1, \dots, a_n , а x — это n -вектор (x_1, \dots, x_n) . В этом случае в показателе экспоненты стоит скалярное произведение

$$\sum_n a_n x_n^2 = (x, Ax),$$

а детерминант матрицы A равен

$$\det A = a_1 a_2 \dots a_n = \prod_{i=1}^n a_i.$$

Соотношение (6.22) принимает вид

$$\int e^{-\frac{1}{2}(x, Ax)} d^n x = (2\pi)^{n/2} (\det A)^{-1/2}. \tag{6.23}$$

Поскольку это равенство справедливо для любой диагональной

матрицы, оно справедливо и для любой действительной симметричной матрицы. Определим меру

$$(dx) = d^n x (2\pi)^{-n/2}.$$

Тогда соотношение (6.23) примет вид

$$\int e^{-\frac{1}{2}(x, Ax)} (dx) = (\det A)^{-1/2}. \quad (6.24)$$

Это соотношение можно обобщить на квадратичные формы

$$Q(x) = \frac{1}{2}(x, Ax) + (b, x) + c. \quad (6.25)$$

Форма Q достигает минимума при $\bar{x} = -A^{-1}b$, причем

$$Q(x) = Q(\bar{x}) + \frac{1}{2}[x - \bar{x}, A(x - \bar{x})].$$

Таким образом, имеем

$$\begin{aligned} & \int \exp\left\{-\left[\frac{1}{2}(x, Ax) + (b, x) + c\right]\right\} (dx) = \\ & = \exp\left[\frac{1}{2}(b, A^{-1}b) - c\right] (\det A)^{-1/2}. \end{aligned} \quad (6.26)$$

Эта формула аналогична формуле (5П.3).

Отойдем теперь несколько от данного случая и рассмотрим эрмитовы матрицы. Возводя (6.21) в квадрат, получаем

$$\int e^{-\frac{1}{2}a(x^2 + y^2)} dx dy = \frac{2\pi}{a}.$$

Положив $z = x + iy$, $z^* = x - iy$, $dx dy = -(1/2)idz^* dz$, перепишем это равенство в виде

$$\int e^{-az^* z} \frac{dz^*}{(2\pi i)^{1/2}} \frac{dz}{(2\pi i)^{1/2}} = \frac{1}{a}. \quad (6.27)$$

Обобщим эту формулу на случай, когда A — положительно-определенная эрмитова матрица, введя при этом меру $(dz) = d^n z (2\pi i)^{-n/2}$. Получим

$$\int e^{-(z^*, Az)} (dz^*) (dz) = (\det A)^{-1}. \quad (6.28)$$

Представленные выше формулы строго выполняются, они получены просто путем обобщения формул для одного измерения на

случай конечномерного векторного пространства. Предположим, что мы можем обобщить эти формулы на случай бесконечномерного функционального пространства. В действительности такое обобщение требует последовательного математического обоснования, но мы просто примем, что это можно сделать. Пусть обобщение производится на случай одной действительной переменной $f(t)$. Скалярное произведение (f, f) имеет вид

$$(f, f) = \int [f(t)]^2 dt.$$

Нас в данном случае интересуют действительные функции пространственно-временной координаты $\varphi(x^a)$. Таким образом, имеем

$$(\varphi, \varphi) = \int [\varphi(x)]^2 d^4 x. \quad (6.29)$$

Обобщение соотношения (6.24) таково:

$$\int \mathcal{D}\varphi \exp\left[-\frac{1}{2} \int \varphi(x) A \varphi(x) dx\right] = (\det A)^{-1/2}, \quad (6.30)$$

где A , вообще говоря, может быть дифференциальным оператором. Если φ — комплексное поле, то следует рассмотреть обобщение равенства (6.28), что дает

$$\int \mathcal{D}\varphi^* \mathcal{D}\varphi \exp\left[-\int \varphi^*(x) A \varphi(x) dx\right] = (\det A)^{-1}. \quad (6.31)$$

Мы теперь готовы доказать, что из (6.5) следует (6.12). Показатель экспоненты в (6.5) является квадратичной формой, и мы можем использовать соотношение (6.26) (или, точнее, его функциональное обобщение) при $A = i(\square + m^2 - i\varepsilon)$, $b = -iJ$, $c = 0$. Имеем

$$\begin{aligned} Z_0[J] &= \exp\left[\frac{i}{2} \int J(x) (\square + m^2 - i\varepsilon)^{-1} J(y) dx dy\right] \times \\ & \times [\det i(\square + m^2 - i\varepsilon)]^{-1/2}. \end{aligned}$$

Детерминант определяется соотношением (6.30), и мы получаем из уравнения (6.10)

$$(\square + m^2 - i\varepsilon)^{-1} = -\Delta_F(x - y). \quad (6.32)$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} Z_0[J] &= \exp\left[-\frac{i}{2} \int J(x) \Delta_F(x - y) J(y) dx dy\right] \times \\ & \times \int \mathcal{D}\varphi \exp\left[-\frac{i}{2} \int \varphi (\square + m^2 - i\varepsilon) \varphi dx\right], \end{aligned}$$

что совпадает с выражением (6.12). Напомним, что второй множитель есть число N , и, следовательно, производящий функционал $Z_0[J]$ можно записать в виде (6.13).

§ 6.3. Функции Грина свободных частиц

Покажем теперь, что амплитуда $Z_0[J]$ является «производящим функционалом» для функций Грина свободных частиц, которые будут определены ниже. Вначале разложим выражение (6.13) в ряд:

$$Z_0[J] = N \left\{ 1 - \frac{i}{2} \int J(x) \Delta_F(x-y) J(y) dx dy + \frac{1}{2!} \left(\frac{i}{2} \right)^2 \left[\int J(x) \Delta_F(x-y) J(y) dx dy \right]^2 + \frac{1}{3!} \left(\frac{-i}{2} \right)^3 \left[\int J(x) \Delta_F(x-y) J(y) dx dy \right]^3 + \dots \right\}. \quad (6.33)$$

Введем фурье-образ $J(p)$ функции источника $J(x)$:

$$J(x) = \int J(p) e^{-ipx} d^4p. \quad (6.34)$$

С учетом соотношения (6.14) получим

$$\begin{aligned} & - \frac{i}{2} \int J(x) \Delta_F(x-y) J(y) d^4x d^4y = \\ & = \frac{-i}{2(2\pi)^4} \int \frac{J(p_1) e^{-i(p_1+k)x} e^{-i(p_1-k)y} J(p_2)}{k^2 - m^2 + i\epsilon} \times \\ & \times d^4p_1 d^4p_2 d^4k d^4x d^4y = - \frac{i}{2} (2\pi)^4 \int \frac{J(-k) J(k)}{k^2 - m^2 + i\epsilon} d^4k, \end{aligned} \quad (6.35)$$

где мы воспользовались тем, что интегрирование по x и y дает две дельта-функции, а затем проинтегрировали по p_1 и p_2 . Мы можем представить это графически с помощью следующих правил соответствия (правил Фейнмана в импульсном пространстве):

$$\frac{p}{(2\pi)^4} \frac{1}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \quad (6.36)$$

$$\times \frac{p}{J} \quad i(2\pi)^4 J(p)$$

Сравним эти правила Фейнмана с правилами (5.45). Поскольку в нерелятивистском пределе выражение $p^2 - m^2$ равно $2m(T - p^2/2m)$, где T — кинетическая энергия, приведенный выше пропагатор,

очевидно, является релятивистским пропагатором *одной частицы*. Следовательно, выражение (6.35) соответствует диаграмме

$$\frac{1}{2} \times \text{---} \times \quad (6.37)$$

Амплитуда перехода вакуум — вакуум (6.33) может быть представлена в виде фейнмановских диаграмм (множитель N опущен)

$$\begin{aligned} Z_0 &= 1 + \frac{1}{2} \times \text{---} \times + \frac{1}{2!} \left(\frac{1}{2} \right)^2 \times \text{---} \times + \\ &+ \frac{1}{3!} \left(\frac{1}{2} \right)^3 \times \text{---} \times + \dots = \\ &= 1 + \frac{1}{2} \begin{array}{c} \text{---} \\ | \\ \text{---} \end{array} + \frac{1}{2!} \left(\frac{1}{2} \right)^2 \begin{array}{c} \text{---} \quad \text{---} \\ | \quad | \\ \text{---} \quad \text{---} \end{array} + \\ &+ \dots, \end{aligned} \quad (6.38)$$

причем в последней строке мы использовали графическую запись, напоминающую рис. 5.6. Теперь мы покажем, что сделанное выше предположение правильно. Иными словами, мы вправе считать, что этот ряд описывает распространение одной частицы между источниками, распространение двух частиц между источниками и т. д. Таким образом, мы имеем *многочастичную теорию*, согласующуюся с нашей первоначальной методологией — исходить из поля, которое после квантования будет описывать частицы. Каждый член приведенного выше ряда является функцией Грина; следовательно, $Z_0[J]$ есть *производящий функционал* для функций Грина в данной теории.

Чтобы прийти к нужной нам интерпретации степенного разложения функционала, рассмотрим сначала степенное разложение функции, скажем функции $F(y_1, \dots, y_k)$ k переменных y_1, \dots, y_k :

$$\begin{aligned} F(y) &= F(y_1, \dots, y_k) = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i_1=0}^k \dots \sum_{i_n=0}^k \frac{1}{n!} T_n(i_1, \dots, i_n) y_{i_1}, \dots, y_{i_n}, \end{aligned} \quad (6.39)$$

где

$$T_n = \left. \frac{\partial^n F(y)}{\partial y_{i_1} \dots \partial y_{i_n}} \right|_{y=0}.$$

Перейдя к случаю, когда переменные образуют континуум: $i \rightarrow x_i$,

y_i ($i = 1, \dots, k$) $\rightarrow y(x)$, $-\infty < x < \infty$, и $\sum_i \rightarrow \int dx$, мы получаем степенное разложение для функционала:

$$F[y] = \sum_{n=0}^{\infty} \int dx_1 \dots dx_n \frac{1}{n!} T_n(x_1, \dots, x_n) y(x_1) \dots y(x_n),$$

где

$$T_n(x_1, \dots, x_n) = \frac{\delta}{\delta y(x_1)} \dots \frac{\delta}{\delta y(x_n)} F[y] \Big|_{y=0}. \quad (6.40)$$

Величину $F[y]$ называют *производящим функционалом* для функций $T_n(x_1, \dots, x_n)$.

Вернемся к функционалу $Z_0[J]$. Теперь уместно поставить вопрос о его нормировке. Величина $Z[J]$ есть амплитуда перехода вакуум — вакуум в присутствии источника J . Поэтому естественно нормировать ее в соответствии с условием $Z[J=0] = 1$. В этом случае мы можем *определить* [формула (5.61)] функционал $Z[J]$ как

$$Z[J] = \langle 0, \infty | 0, \infty \rangle^J, \quad (6.41)$$

и тогда он автоматически будет удовлетворять условию

$$Z[0] = 1. \quad (6.42)$$

Выражения (6.5) и (6.13) следует переписать в виде

$$Z_0[J] = \frac{\int \mathcal{D}\varphi \exp \left\{ -i \int \left[\frac{1}{2} \varphi (\square + m^2 - i\epsilon) \varphi - \varphi J \right] dx \right\}}{\int \mathcal{D}\varphi \exp \left[-i \int \frac{1}{2} \varphi (\square + m^2 - i\epsilon) \varphi dx \right]}, \quad (6.43)$$

$$Z_0[J] = \exp \left[-\frac{i}{2} \int J(x) \Delta_F(x-y) J(y) dx dy \right]. \quad (6.44)$$

Эти новые определения, очевидно, удовлетворяют условию (6.42). Далее, величина $Z_0[J]$, даваемая формулой (6.44), очевидно, является производящим функционалом для функций

$$\tau(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{i^n} \frac{\delta^n Z_0[J]}{\delta J(x_1) \dots \delta J(x_n)} \Big|_{J=0}. \quad (6.45)$$

Теперь вспомним выражение (5.76), которое было выведено именно для того, чтобы здесь его использовать. Учитывая нашу новую нормировку, будем иметь

$$\frac{\delta^n Z_0[J]}{\delta J(x_1) \dots \delta J(x_n)} \Big|_{J=0} = i^n \langle 0 | T(\varphi(x_1) \dots \varphi(x_n)) | 0 \rangle, \quad (6.46)$$

или

$$\langle 0 | T(\varphi(x_1) \dots \varphi(x_n)) | 0 \rangle = \frac{1}{i^n} \frac{\delta^n Z_0[J]}{\delta J(x_1) \dots \delta J(x_n)} \Big|_{J=0}. \quad (6.47)$$

Сравнивая (6.45) и (6.47), получаем

$$\tau(x_1, \dots, x_n) = \langle 0 | T(\varphi(x_1) \dots \varphi(x_n)) | 0 \rangle. \quad (6.48)$$

Эти вакуумные средние хронологических произведений полевых операторов называются *функциями Грина* или *n-точечными функциями* данной теории. Они тесно связаны с элементами S -матрицы; мы рассмотрим эту связь позднее, когда введем взаимодействия. Далее, мы имеем равенство

$$Z_0[J] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \int dx_1 \dots dx_n J(x_1) \dots J(x_n) \tau(x_1, \dots, x_n), \quad (6.49)$$

выражающее то обстоятельство, что Z_0 есть производящий функционал для функций Грина τ . Оно соответствует графическому соотношению (6.38).

Вычислим теперь некоторые n -точечные функции. Начнем с 2-точечной функции

$$\tau(x, y) = -\frac{\delta^2 Z_0[J]}{\delta J(x) \delta J(y)} \Big|_{J=0}, \quad (6.50)$$

где $Z_0[J]$ — функционал, даваемый выражением (6.44). Еще раз напомним, что мы имеем дело со *свободной* теорией поля, поскольку мы исходили из свободного лагранжиана и, следовательно, из выражения (6.3). Поэтому выражения, которые будут получены ниже, относятся к функциям Грина свободных частиц. Соответствующие функции Грина для взаимодействующих полей отличаются от них и будут найдены позднее.

Из (6.44) мы имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{i} \frac{\delta Z_0[J]}{\delta J(x)} &= \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J(x)} \exp \left[-\frac{i}{2} \int dx_1 dx_2 J(x_1) \Delta_F(x_1-x_2) J(x_2) \right] = \\ &= - \int \Delta_F(x-x_1) J(x_1) dx_1 \times \\ &\times \exp \left[-\frac{i}{2} \int dx_1 dx_2 J(x_1) \Delta_F(x_1-x_2) J(x_2) \right], \\ \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J(x)} \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J(y)} Z_0[J] &= i \Delta_F(x-y) \exp \left(-\frac{i}{2} \int J \Delta_F J \right) + \\ &+ \int \Delta_F(x-x_1) J(x_1) dx_1 \int \Delta_F(y-x_1) J(x_1) dx_1 \times \\ &\times \exp \left(-\frac{i}{2} \int J \Delta_F J \right). \end{aligned} \quad (6.51)$$

Здесь для простоты мы использовали сокращенную запись показателя экспоненты. Наконец, полагая $J = 0$, получаем

$$\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J(x)} \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J(y)} Z_0[J] \Big|_{J=0} = i\Delta_F(x-y),$$

или

$$\tau(x, y) = i\Delta_F(x-y). \quad (6.52)$$

Каков физический смысл этой величины? Из (6.48) мы имеем для 2-точечной функции следующее выражение:

$$\tau(x, y) = \langle 0 | T(\varphi(x)\varphi(y)) | 0 \rangle = \langle 0 | \theta(x_0 - y_0)\varphi(x)\varphi(y) + \theta(y_0 - x_0)\varphi(y)\varphi(x) | 0 \rangle. \quad (6.53)$$

Пользуясь формулой (4.14), мы можем разложить φ на положительно- и отрицательно-частотные части:

$$\varphi(x) = \varphi^{(+)}(x) + \varphi^{(-)}(x),$$

где

$$\begin{aligned} \varphi^{(+)}(x) &= \int \frac{d^3k}{[(2\pi)^3 2\omega_k]^{1/2}} f_k(x) a(k), \\ \varphi^{(-)}(x) &= \int \frac{d^3k}{[(2\pi)^3 2\omega_k]^{1/2}} f_k^*(x) a^\dagger(k), \end{aligned} \quad (6.54)$$

а $f_k(x)$ дается формулой (4.11). Поскольку $a(k)$ и $a^\dagger(k)$ — операторы уничтожения и рождения, в выражении для вакуумного среднего (6.53) остаются только члены вида $\varphi^{(+)}\varphi^{(-)}$:

$$\tau(x, y) = \theta(x_0 - y_0) \langle 0 | \varphi^{(+)}(x)\varphi^{(-)}(y) | 0 \rangle + \theta(y_0 - x_0) \langle 0 | \varphi^{(+)}(y)\varphi^{(-)}(x) | 0 \rangle. \quad (6.55)$$

Первый член есть амплитуда вероятности того, что частица родится в точке y в момент времени y_0 и уничтожится в точке x в момент времени $x_0 (> y_0)$. Второй член — амплитуда вероятности того, что

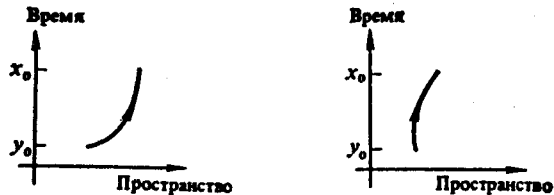


Рис. 6.3. Интерпретация соотношения (6.55) (см. текст).

частица родится в точке x в момент времени x_0 и уничтожится в точке y в момент времени $y_0 (> x_0)$. Это схематически представлено на рис. 6.3. Сейчас мы убедимся в том, что сумма этих членов совпадает с фейнмановским пропагатором $i\Delta_F(x-y)$.

Для этого напишем новое выражение для $\Delta_F(x-y)$. Из (6.14) следует, что

$$\begin{aligned} \Delta_F(x) &= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ikx}}{k^2 - m^2 + i\epsilon} = \int \frac{d^3k dk_0}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ikx}}{k_0^2 - (k^2 + m^2) + i\epsilon} = \\ &= \int \frac{d^3k dk_0}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ikx}}{2\omega_k} \left(\frac{1}{k_0 - \omega_k + i\delta} - \frac{1}{k_0 + \omega_k - i\delta} \right), \end{aligned}$$

где $\omega_k^2 = k^2 + m^2$. Путь интегрирования по k_0 показан на рис. 6.1. В экспоненту входит множитель $e^{-ik_0 x_0}$, а поэтому при $x_0 > 0$ мы можем замкнуть контур интегрирования в нижней полуплоскости k_0 , и тогда вклад интеграла по полуокружности бесконечного радиуса обратится в нуль. Этот контур охватывает полюс, расположенный в точке $k_0 = \omega_k - i\delta$. В то же время при $x_0 < 0$ мы замыкаем контур интегрирования в верхней полуплоскости, который охватывает полюс, расположенный в точке $k_0 = -\omega_k + i\delta$. Теорема Коши дает

$$\Delta_F(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{e^{ik \cdot x}}{2\omega_k} \left[\theta(x_0)(-i) e^{-i\omega_k x_0} - \theta(-x_0) i e^{i\omega_k x_0} \right].$$

Произведем во втором члене замену $k \rightarrow -k$, что не изменит интеграла, и в результате будем иметь

$$\begin{aligned} \Delta_F(x-y) &= -i \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_k} \times \\ &\times \left[\theta(x_0 - y_0) e^{-ik(x-y)} + \theta(y_0 - x_0) e^{-ik(x-y)} \right]. \end{aligned} \quad (6.56)$$

Это — искомая форма записи пропагатора $\Delta_F(x-y)$. Теперь, подставив разложения (6.54) в формулу (6.55), получим

$$\begin{aligned} \tau(x, y) &= \int \frac{d^3k d^3k'}{(2\pi)^3 (2\omega_k 2\omega_{k'})^{1/2}} [\theta(x_0 - y_0) \langle 0 | a(k) f_k(x) a^\dagger(k') \times \\ &\times f_{k'}^*(y) | 0 \rangle + \theta(y_0 - x_0) \langle 0 | a(k) f_k(y) a^\dagger(k') f_{k'}^*(x) | 0 \rangle] = \\ &= \int \frac{d^3k d^3k'}{(2\pi)^3 2\omega_k 2\omega_{k'}} \left[\theta(x_0 - y_0) e^{-i(kx - k'y)} \langle 0 | a(k) a^\dagger(k') | 0 \rangle + \right. \\ &\left. + \theta(y_0 - x_0) e^{-i(ky - k'x)} \langle 0 | a(k) a^\dagger(k') | 0 \rangle \right], \end{aligned}$$

где мы использовали выражение (4.11) для $f_k(x)$. Далее, на основании коммутационного соотношения (4.16а) получим из (6.56)

$$\begin{aligned} \tau(x, y) &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega_k} [\theta(x_0 - y_0) e^{-ik(x-y)} + \theta(y_0 - x_0) e^{ik(x-y)}] = \\ &= i\Delta_F(x - y). \end{aligned} \quad (6.57)$$

Мы еще раз доказали соотношение (6.52) и при этом дали интерпретацию 2-точечной функции как функции, описывающей рождение, распространение из одной точки в другую и уничтожение нашей частицы.

Итак, мы построили выражение для 2-точечной функции. Что же представляет собой одноточечная функция? Очевидно, что

$$\tau(x) = \langle 0 | T\varphi(x) | 0 \rangle = \langle 0 | \varphi(x) | 0 \rangle = \frac{1}{i} \frac{\delta Z_0[J]}{\delta J(x)} \Big|_{J=0} = 0. \quad (6.58)$$

Найдем теперь 3-точечную функцию:

$$\begin{aligned} \tau(x_1, x_2, x_3) &= \\ &= \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J(x_1)} \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J(x_2)} \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J(x_3)} Z_0[J] \Big|_{J=0}. \end{aligned}$$

Мы видели выше [формула (6.51)], что

$$\begin{aligned} \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J(x_2)} \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J(x_3)} Z_0[J] &= i\Delta_F(x_2 - x_3) \exp\left(-\frac{i}{2} \int J\Delta_F J\right) + \\ &+ \int \Delta_F(x_2 - x) J(x) dx \int \Delta_F(x_3 - x) J(x) dx \exp\left(-\frac{i}{2} \int J\Delta_F J\right). \end{aligned}$$

Дифференцируя это выражение, получаем

$$\begin{aligned} \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J(x_1)} \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J(x_2)} \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J(x_3)} Z_0[J] &= \\ &= -i\Delta_F(x_2 - x_3) \int \Delta_F(x_1 - x) J(x) dx \exp\left(-\frac{i}{2} \int J\Delta_F J\right) - \\ &- i\Delta_F(x_2 - x_1) \int \Delta_F(x_3 - x) J(x) dx \exp\left(-\frac{i}{2} \int J\Delta_F J\right) - \\ &- i\Delta_F(x_3 - x_1) \int \Delta_F(x_2 - x) J(x) dx \exp\left(-\frac{i}{2} \int J\Delta_F J\right) - \\ &- \int \Delta_F(x_2 - x) J(x) dx \int \Delta_F(x_3 - x) J(x) dx \times \\ &\times \int \Delta_F(x_1 - x) J(x) dx \exp\left(-\frac{i}{2} \int J\Delta_F J\right). \end{aligned} \quad (6.59)$$

При $J = 0$ это выражение обращается в нуль, откуда следует, что

$$\tau(x_1, x_2, x_3) = \langle 0 | T(\varphi(x_1)\varphi(x_2)\varphi(x_3)) | 0 \rangle = 0. \quad (6.60)$$

Чтобы найти 4-точечную функцию, мы действуем таким же образом: дифференцируем (6.59) еще один раз и полагаем $J = 0$.

Имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J(x_1)} \dots \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J(x_4)} Z_0[J] &= \\ &= -\Delta_F(x_2 - x_3) \Delta_F(x_1 - x_4) \exp\left(-\frac{i}{2} \int J\Delta_F J\right) - \\ &- \Delta_F(x_2 - x_1) \Delta_F(x_3 - x_4) \exp\left(-\frac{i}{2} \int J\Delta_F J\right) - \\ &- \Delta_F(x_3 - x_1) \Delta_F(x_2 - x_4) \exp\left(-\frac{i}{2} \int J\Delta_F J\right) + \\ &+ \text{члены, обращающиеся в нуль при } J = 0. \end{aligned}$$

Таким образом, 4-точечная функция имеет вид

$$\begin{aligned} \tau(x_1, x_2, x_3, x_4) &= \langle 0 | T(\varphi(x_1)\varphi(x_2)\varphi(x_3)\varphi(x_4)) | 0 \rangle = \\ &= -[\Delta_F(x_1 - x_2)\Delta_F(x_3 - x_4) + \Delta_F(x_1 - x_3)\Delta_F(x_2 - x_4) + \\ &+ \Delta_F(x_1 - x_4)\Delta_F(x_2 - x_3)]. \end{aligned} \quad (6.61)$$

Это просто сумма произведений 2-точечных функций, которую можно представить в виде

$$\begin{aligned} \tau(x_1, x_2, x_3, x_4) &= \begin{array}{c} x_1 \text{-----} x_4 \\ | \\ x_1 \text{-----} x_2 \end{array} + \begin{array}{c} x_3 \\ | \\ x_1 \end{array} \begin{array}{c} x_4 \\ | \\ x_1 \end{array} + \\ &+ \begin{array}{c} x_3 \text{-----} x_4 \\ \diagdown \quad \diagup \\ x_1 \quad x_2 \end{array} \end{aligned} \quad (6.62)$$

Переходя к более высоким порядкам, легко видеть, что при нечетных n все n -точечные функции равны нулю:

$$\tau(x_1, x_2, \dots, x_{2n+1}) = 0. \quad (6.63)$$

В случае же четных n каждая n -точечная функция есть сумма произведений 2-точечных функций:

$$\tau(x_1, x_2, \dots, x_{2n}) = \sum_{\text{Перестановки}} \tau(x_{p_1}, x_{p_2}) \dots \tau(x_{p_{2k-1}}, x_{p_{2k}}), \quad (6.64)$$

где

$$\tau(x, y) = i\Delta_F(x - y).$$

Это важное соотношение, которое мы вывели «каноническим» методом исходя из коммутационных соотношений для операторов, называется *теоремой Вика*.

В данном параграфе мы выводили функции Грина в теории скалярного свободного поля. Но нас интересует случай, когда имеются взаимодействия. Как тогда вычисляются функции Грина? Ответ на этот вопрос приблизит нас еще на один шаг к вычислению амплитуд реальных физических процессов!

§ 6.4. Производящие функционалы для взаимодействующих полей

Лагранжиан

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi - \frac{1}{2} m^2 \varphi^2 - \frac{g}{4!} \varphi^4 = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{\text{взаим}} \quad (6.65)$$

описывает скалярное поле, взаимодействующее с самим собой из-за наличия члена с φ^4 . Мы покажем сначала, как найти функции Грина для взаимодействия произвольного вида $\mathcal{L}_{\text{взаим}}$, а затем в следующем параграфе применим эти формулы к теории φ^4 . Нормированный производящий функционал имеет вид

$$Z[J] = \frac{\int \mathcal{D}\varphi \exp(iS + i \int J\varphi dx)}{\int \mathcal{D}\varphi e^{iS}}, \quad (6.66)$$

где $S = \int \mathcal{L} dx$. Очевидно, что при $\mathcal{L}_{\text{взаим}} = 0$ это выражение переходит в выражение (6.43), которое, как мы показали, совпадает с (6.44). Выражение (6.44) записано в виде, в котором оно удобно для функционального дифференцирования по J и, следовательно, для нахождения функций Грина. Наша цель — найти выражение, соответствующее формуле (6.44), в случае взаимодействующих полей. Мы будем действовать следующим образом: найдем дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет $Z[J]$, и затем выразим решение этого уравнения через $Z_0[J]$.

Сначала заметим, что из (6.44) следует соотношение

$$\begin{aligned} \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J(x)} Z_0[J] &= \\ &= - \int \Delta_F(x-y) J(y) dy \exp\left(-\frac{i}{2} \int J \Delta_F J dx dy\right), \end{aligned}$$

и, поскольку Δ_F есть взятый со знаком минус оператор, обратный оператору $\square + m^2$,

$$(\square + m^2) \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J(x)} Z_0[J] = J(x) Z_0[J]. \quad (6.67)$$

Это — дифференциальное уравнение для $Z_0[J]$. Далее из выражения (6.66) мы имеем

$$\frac{1}{i} \frac{\delta Z[J]}{\delta J(x)} = \frac{\int \exp(iS + i \int J\varphi dx) \varphi(x) \mathcal{D}\varphi}{\int e^{iS} \mathcal{D}\varphi}. \quad (6.68)$$

Определим функционал

$$\widehat{Z}[\varphi] = \frac{e^{iS}}{\int e^{iS} \mathcal{D}\varphi}. \quad (6.69)$$

Тогда

$$Z[J] = \int \widehat{Z}[\varphi] \exp\left[i \int J(x) \varphi(x) dx\right] \mathcal{D}\varphi. \quad (6.70)$$

Данное соотношение является функциональным аналогом преобразования Фурье. Возьмем теперь функциональную производную от $\widehat{Z}[\varphi]$, учитывая, что

$$\begin{aligned} S &= \int \left(\frac{1}{2} \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi - \frac{1}{2} m^2 \varphi^2 + \mathcal{L}_{\text{взаим}} \right) d^4x = \\ &= - \int \left[\frac{1}{2} \varphi (\square + m^2) \varphi - \mathcal{L}_{\text{взаим}} \right] d^4x. \end{aligned} \quad (6.71)$$

Получим

$$\begin{aligned} i \frac{\delta \widehat{Z}[\varphi]}{\delta \varphi(x)} &= i \frac{\delta}{\delta \varphi} \left\{ \exp - i \int \left[\frac{1}{2} \varphi (\square + m^2) \varphi - \mathcal{L}_{\text{взаим}} \right] d^4x \right\} \times \\ &\times \left[\int e^{iS} \mathcal{D}\varphi \right]^{-1} = \\ &= (\square + m^2) \varphi(x) \widehat{Z}[\varphi] - \frac{\partial \mathcal{L}_{\text{взаим}}}{\partial \varphi} \widehat{Z}[\varphi] = \\ &= (\square + m^2) \varphi(x) \widehat{Z}[\varphi] - \mathcal{L}'_{\text{взаим}}(\varphi) \widehat{Z}[\varphi], \end{aligned} \quad (6.72)$$

где штрихом у $\mathcal{L}'_{\text{взаим}}$ обозначено дифференцирование по аргументу. Умножим теперь обе части равенства (6.72) на $\exp i \int J(x) \varphi(x) dx$ и проинтегрируем по φ . Правая часть дает

$$\begin{aligned} &\frac{\int (\square + m^2) \varphi(x) \exp(iS + i \int J\varphi dx) \mathcal{D}\varphi}{\int e^{iS} \mathcal{D}\varphi} - \\ &\frac{\int \mathcal{L}'_{\text{взаим}}(\varphi) \exp(iS + i \int J\varphi dx) \mathcal{D}\varphi}{\int e^{iS} \mathcal{D}\varphi} = \end{aligned}$$

$$= (\square + m^2) \frac{1}{i} \frac{\delta Z[J]}{\delta J(x)} - \mathcal{L}'_{\text{взаим}} \left[\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J} \right] Z[J], \quad (6.73)$$

где использовано соотношение (6.68), а аргументом оператора $\mathcal{L}'_{\text{взаим}}$ вместо φ является $(1/i)(\delta/\delta J)$, поскольку он действует на $Z[J]$. Левая часть равенства (6.72) с учетом соотношения (6.70) дает

$$i \int \frac{\delta \widehat{Z}[\varphi]}{\delta \varphi} \exp \left(i \int J \varphi dx \right) \mathcal{D}\varphi = i \exp \left(i \int J \varphi dx \right) \widehat{Z}[\varphi] \Big|_{\varphi \rightarrow \infty} + \\ + \int J(x) \widehat{Z}[\varphi] \exp \left(i \int J \varphi dx \right) \mathcal{D}\varphi = J(x) Z[J]. \quad (6.74)$$

Приравняв друг другу выражения (6.73) и (6.74), получаем

$$(\square + m^2) \frac{1}{i} \frac{\delta Z[J]}{\delta J(x)} - \mathcal{L}'_{\text{взаим}} \left(\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J(x)} \right) Z[J] = J(x) Z[J]. \quad (6.75)$$

Нам нужно решить это уравнение относительно $Z[J]$. В случае свободного поля мы имеем $\mathcal{L}'_{\text{взаим}} = 0$, и это уравнение сводится к уравнению (6.67) для $Z_0[J]$. Покажем теперь, что решение уравнения (6.75) имеет вид

$$Z[J] = N \exp \left[i \int \mathcal{L}'_{\text{взаим}} \left(\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J} \right) dx \right] Z_0[J], \quad (6.76)$$

где N — нормировочный множитель. Доказательство проводится в два этапа.

Доказательство

а) Докажем сначала тождество

$$\exp \left[-i \int \mathcal{L}'_{\text{взаим}} \left(\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J(y)} \right) dy \right] J(x) \exp \left[i \int \mathcal{L}'_{\text{взаим}} \left(\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J(y)} \right) dy \right] = \\ = J(x) - \mathcal{L}'_{\text{взаим}} \left(\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J(x)} \right). \quad (6.77)$$

Заметим, что функциональным аналогом коммутатора

$$\left[x_i, \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x_j} \right] = i \delta_{ij}$$

является соотношение

$$\left[J(x), \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J(y)} \right] = i \delta(x-y).$$

Повторное применение этого соотношения дает

$$\left[J(x), \left(\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J(y)} \right)^n \right] = i \delta(x-y) \left(\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J(y)} \right)^{n-1} -$$

$$- \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J(y)} \left[J(x), \left(\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J(y)} \right)^{n-1} \right] = \dots = i \delta(x-y) n \left(\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J(y)} \right)^{n-1}. \quad (6.78)$$

Разложим функцию F в степенной ряд:

$$F(\varphi) = F(0) + \varphi F'(0) + \frac{\varphi^2}{2!} F''(0) + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi^n}{n!} F^{(n)}(0)$$

и произведем замену $\varphi \rightarrow (1/i)(\delta/\delta J)$. Теперь на основании формулы (6.78) легко показать, что справедливо соотношение

$$\left[J(x), \int F \left(\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J(y)} \right) dy \right] = i F' \left(\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J(x)} \right). \quad (6.79)$$

Далее воспользуемся формулой Хаусдорфа

$$e^A B e^{-A} = B + [A, B] + \frac{1}{2!} [A, [A, B]] + \dots, \quad (6.80)$$

где A и B — операторы, и положим $A = -i \int \mathcal{L}'_{\text{взаим}} \left((1/i) (\delta/\delta J(y)) \right) dy$ и $B = J(x)$. Поскольку в этом случае A коммутирует с $[A, B]$ [согласно формуле (6.79)], в правой части равенства (6.80) присутствуют только два первых члена и тождество (6.77) доказано.

б) Теперь нам нужно показать, что выражение (6.76) есть решение уравнения (6.75). Из равенства (6.76) и (6.77) следует

$$J(x) Z[J] = N J(x) \exp \left[i \int \mathcal{L}'_{\text{взаим}} \left(\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J(y)} \right) dy \right] Z_0[J] = \\ = N \exp \left[i \int \mathcal{L}'_{\text{взаим}} \left(\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J(y)} \right) dy \right] \times \\ \times \left[J(x) - \mathcal{L}'_{\text{взаим}} \left(\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J(x)} \right) \right] Z_0[J]$$

Первый член в правой части преобразуем с помощью формулы (6.67), а во втором поменяем порядок сомножителей $e^{i \int \mathcal{L}'_{\text{взаим}}$ и $\mathcal{L}'_{\text{взаим}}$ и воспользуемся формулой (6.76). Это даст

$$J(x) Z[J] = \\ = N \exp \left[i \int \mathcal{L}'_{\text{взаим}} \left(\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J(y)} \right) dy \right] (\square + m^2) \frac{1}{i} \frac{\delta Z_0}{\delta J(x)} - \\ - N \mathcal{L}'_{\text{взаим}} \left(\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J(x)} \right) \exp \left[i \int \mathcal{L}'_{\text{взаим}} \left(\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J(y)} \right) dy \right] Z_0[J] = \\ = (\square + m^2) \frac{1}{i} \frac{\delta Z[J]}{\delta J(x)} - \mathcal{L}'_{\text{взаим}} \left[\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J(x)} \right] Z[J].$$

Тем самым соотношение (6.75) доказано.

Теперь мы готовы вычислить функции Грина в случае взаимодействующих полей. При этом мы будем опираться, как обычно в квантовой теории, на метод теории возмущений.

§ 6.5. Теория φ^4

Производящий функционал

Как мы уже видели [формула (6.65)], лагранжиан взаимодействия в теории φ^4 имеет вид

$$\mathcal{L}_{\text{взаим}} = -\frac{g}{4!} \varphi^4. \quad (6.81)$$

Нормированный производящий функционал записывается в виде

$$Z[J] = \frac{\exp \left[i \int \mathcal{L}_{\text{взаим}} \left(\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J(z)} \right) dz \right] \exp \left[-\frac{i}{2} \int J(x) \Delta_F(x-y) J(y) dx dy \right]}{\left. \left\{ \exp \left[i \int \mathcal{L}_{\text{взаим}} \left(\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J(z)} \right) dz \right] \exp \left[-\frac{i}{2} \int J(x) \Delta_F(x-y) J(y) dx dy \right] \right\} \right|_{J=0}}. \quad (6.82)$$

Мы можем рассматривать величину $\exp(i\mathcal{L}_{\text{взаим}})$ только как разложение по степеням константы связи g , т. е. как ряд теории возмущений. Подставляя соотношение (6.81) в (6.82) и разлагая по степеням g , получим числитель функционала $Z[J]$ в виде

$$\left[1 - \frac{ig}{4!} \int \left(\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J(z)} \right)^4 dz + O(g^2) \right] \times \exp \left[-\frac{i}{2} \int J(x) \Delta_F(x-y) J(y) dx dy \right].$$

С точностью до g^0 мы имеем производящий функционал для свободной частицы $Z_0[J]$. В первом порядке по g напишем

$$\begin{aligned} & \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J(z)} \exp \left[-\frac{i}{2} \int J(x) \Delta_F(x-y) J(y) dx dy \right] = \\ & = - \int \Delta_F(z-x) J(x) dx \exp \left[-\frac{i}{2} \int J(x) \Delta_F(x-y) J(y) dx dy \right], \\ & \left(\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J(z)} \right)^2 \exp \left[-\frac{i}{2} \int J(x) \Delta_F(x-y) J(y) dx dy \right] = \\ & = [i\Delta_F(0) + [\int \Delta_F(z-x) J(x) dx]^2] \times \\ & \times \exp \left[-\frac{i}{2} \int J(x) \Delta_F(x-y) J(y) dx dy \right], \end{aligned} \quad (6.83)$$

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J(z)} \right)^3 \exp \left[-\frac{i}{2} \int J(x) \Delta_F(x-y) J(y) dx dy \right] = \\ & = \{ 3 [-i\Delta_F(0)] \int \Delta_F(z-x) J(x) dx - [\int \Delta_F(z-x) J(x) dx]^3 \} \times \\ & \times \exp \left[-\frac{i}{2} \int J(x) \Delta_F(x-y) J(y) dx dy \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J(z)} \right)^4 \exp \left[-\frac{i}{2} \int J(x) \Delta_F(x-y) J(y) dx dy \right] = \\ & = \{ -3 [\Delta_F(0)]^2 + 6i\Delta_F(0) [\int \Delta_F(z-x) J(x) dx]^2 + \\ & + [\int \Delta_F(z-x) J(x) dx]^4 \} \exp \left[-\frac{i}{2} \int J(x) \Delta_F(x-y) J(y) dx dy \right]. \end{aligned}$$

Данное выражение можно представить в виде диаграммы. Пусть диаграмма

$$x \text{ ————— } y \rightarrow \Delta_F(x-y) \quad (6.84)$$

соответствует пропагатору свободной частицы. Тогда величина $\Delta_F(0) = \Delta_F(x-x)$ представляется замкнутой петлей

$$\bigcirc \rightarrow \Delta_F(0). \quad (6.85)$$

Соотношение (6.83) можно записать в виде

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J(z)} \right)^4 \exp \left(-\frac{i}{2} \int J \Delta_F J \right) = \\ & \{ -3 \bigcirc + 6i \text{---} \bigcirc + \times \} \times \\ & \times \exp \left(-\frac{i}{2} \int J \Delta_F J \right). \end{aligned} \quad (6.86)$$

То, что на трех диаграммах (6.86) четыре линии сходятся в одной точке, очевидно, является следствием того, что $\mathcal{L}_{\text{взаим}}$ содержит φ^4 . Коэффициенты 3, 6 и 1 получаются из довольно простых соображений симметрии. Например, первый член в выражении (6.86) получается в результате соединения двух пар линий третьего члена всеми возможными способами; таких способов три. Второй член получается соединением любых двух линий третьего члена; таких способов шесть. Эти численные коэффициенты называются *факторами симметрии*. Первый член с двумя замкнутыми петлями называют *вакуумным графом*, поскольку он не имеет внешних линий. Член с одной замкнутой петлей имеет две внешние линии (т. е. два множителя J), а последний член — четыре внешние линии (т. е. четыре множителя J). Теперь легко написать знаменатель выраже-

ния (6.82). Положив $J = 0$, мы исключим второй и третий члены в выражении (6.86) и получим

$$\left[\exp(i\mathcal{L}_{\text{взаим}}) \exp\left(-\frac{i}{2} \int J \Delta_F J\right) \right]_{J=0} = 1 - \frac{ig}{4!} \int (-3 \text{ } \bigcirc \bigcirc) dz. \quad (6.87)$$

Таким образом, производящий функционал (6.82) с точностью до g имеет вид

$$Z[J] = \frac{\left[1 - \frac{ig}{4!} \int (-3 \text{ } \bigcirc \bigcirc + 6i \text{ } \bigcirc + \text{ } \times) dz \right] \exp\left(-\frac{i}{2} \int J \Delta_F J\right)}{1 - \frac{ig}{4!} \int (-3 \text{ } \bigcirc \bigcirc) dz} = \left[1 - \frac{ig}{4!} \int (6i \text{ } \bigcirc + \text{ } \times) dz \right] \exp\left(-\frac{i}{2} \int J \Delta_F J\right), \quad (6.88)$$

где мы воспользовались разложением знаменателя. Важным обстоятельством является то, что *вакуумная диаграмма исчезла из выражения для $Z[J]$* . Оказывается, что то же самое относится ко всем порядкам теории возмущений, это — общее свойство всех *нормированных* производящих функционалов.

2-точечная функция

Двухточечная функция определяется как

$$\tau(x_1, x_2) = \frac{\delta^2 Z[J]}{\delta J(x_2) \delta J(x_1)} \Big|_{J=0}. \quad (6.89)$$

Из выражения (6.88) видно, что вклад первого члена функционала Z в выражение для τ равен $i\Delta_F(x_1 - x_2)$. Это — свободный пропагатор. Член с \times в формуле (6.88) содержит четыре множителя J

и не дает вклада в двухточечную функцию. Член с \bigcirc

равен

$$\frac{g}{4} \Delta_F(0) \int dx dy dz \Delta_F(z-x) J(x) \Delta_F(z-y) \times J(y) \exp\left(-\frac{i}{2} \int J \Delta_F J\right).$$

Дифференцируя, получаем

$$\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J(x_1)} \left(\right) = -\frac{ig}{4} \Delta_F(0) 2 \int dy dz \Delta_F(z-x_1) \Delta_F(z-y) J(y) \times \exp\left(-\frac{i}{2} \int J \Delta_F J\right) + \dots,$$

$$\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J(x_2)} \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J(x_1)} \left(\right) = -\frac{g}{2} \Delta_F(0) \int dz \Delta_F(z-x_1) \Delta_F(z-x_2) \times \exp\left(-\frac{i}{2} \int J \Delta_F J\right) + \dots,$$

где мы опустили члены, обращающиеся в нуль при $J = 0$. Мы имеем далее

$$\tau(x_1, x_2) = i\Delta_F(x_1 - x_2) - \frac{g}{2} \Delta_F(0) \int dz \Delta_F(z-x_1) \Delta_F(z-x_2) + O(g^2) = \quad (6.90)$$

$$= i \frac{\bigcirc}{2} + O(g^2). \quad (6.91)$$

С точностью до g эта формула выражает влияние взаимодействия на распространение свободной частицы. Пропагатор свободной частицы, согласно формуле (6.14), имеет вид

$$\Delta_F(x-y) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int \frac{e^{-ik \cdot (x-y)}}{k^2 - m^2 + i\epsilon} d^4k;$$

его фурье-образ имеет полюс при $k^2 = m^2$. Тем самым фиксируется масса частицы, равная m . Мы сейчас покажем, что в результате взаимодействия физическая масса становится отличной от m . Действительно, второй член в выражении (6.90) равен

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2} g \Delta_F(0) \int \Delta_F(x_1 - x_2) \Delta_F(x_2 - z) dz = \\ & = -\frac{g}{2} \frac{\Delta_F(0)}{(2\pi)^8} \int \frac{e^{-ip \cdot (x_1 - z)}}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \frac{e^{-iq \cdot (x_2 - z)}}{q^2 - m^2 + i\epsilon} d^4p d^4q d^4z = \\ & = -\frac{g}{2} \frac{\Delta_F(0)}{(2\pi)^4} \int \frac{e^{-ip \cdot (x_1 - x_2)}}{(p^2 - m^2 + i\epsilon)^2} \delta^4(p+q) d^4p d^4q = \\ & = \frac{g}{2} \frac{\Delta_F(0)}{(2\pi)^4} \int \frac{e^{-ip \cdot (x_1 - x_2)}}{(p^2 - m^2 + i\epsilon)^2} d^4p. \end{aligned}$$

Поэтому 2-точечная функция (6.90) запишется в виде

$$\tau(x_1, x_2) = \frac{i}{(2\pi)^4} \int \frac{e^{-ip \cdot (x_1 - x_2)}}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \left[1 + \frac{1}{2} \frac{ig\Delta_F(0)}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \right] d^4p. \quad (6.92)$$

Формально член в квадратных скобках можно переписать следующим образом:

$$\left[1 - \frac{1}{2} \frac{ig\Delta_F(0)}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \right]^{-1},$$

и тогда мы имеем

$$\tau(x_1, x_2) = \frac{i}{(2\pi)^4} \int \frac{e^{-ip \cdot (x_1 - x_2)}}{p^2 - m^2 - \frac{i}{2} g\Delta_F(0) + i\epsilon} d^4p. \quad (6.93)$$

Фурье-образ величины $\tau(x_1, x_2)$ теперь будет иметь полюс при p^2 , равном

$$m^2 + \frac{i}{2} g\Delta_F(0) \equiv m^2 + \delta m = m_r^2, \quad (6.94)$$

где

$$\delta m^2 = -\frac{i}{2} g\Delta_F(0). \quad (6.95)$$

Величина m_r отождествляется с *физической, или перенормированной, массой*. Изменение δm^2 квадрата массы есть квадратично расходящаяся величина, так как выражение для $\Delta_F(0)$ содержит четвертую степень p в числителе (d^4p) и вторую степень p в знаменателе. Следовательно, происходит перенормировка массы на бесконечную величину. Но это второстепенная деталь. Основное значение перенормировки состоит в том, что физическая величина (в данном случае масса) не совпадает с параметром в лагранжиане в случае, когда имеется взаимодействие. Подробнее о перенормировке будет сказано в гл. 9.

4-точечная функция

Перейдем теперь к 4-точечной функции, определяемой [формула (6.45)] как

$$\tau(x_1, x_2, x_3, x_4) = \frac{\delta^4 Z[J]}{\delta J(x_1) \delta J(x_2) \delta J(x_3) \delta J(x_4)} \Big|_{J=0}, \quad (6.96)$$

где $Z[J]$ — производящий функционал, заданный формулой (6.88). Первый член (порядка g^0) в τ такой же, как и в выражении (6.61):

$$\begin{aligned} & -[\Delta_F(x_1 - x_2)\Delta_F(x_3 - x_4) + \Delta_F(x_1 - x_3)\Delta_F(x_2 - x_4) + \\ & + \Delta_F(x_1 - x_4)\Delta_F(x_2 - x_3)] = \\ & = -(\equiv + || + \lambda \curvearrowright) = -3(\equiv). \end{aligned} \quad (6.97)$$

Это — четырехточечная функция свободных частиц, которая не дает вклада в рассеяние. Следующий член в $Z[J]$ имеет порядок g и дает, как нетрудно убедиться, следующий вклад:

$$\begin{aligned} & \frac{g}{4} \frac{\delta^4}{\delta J(x_1) \delta J(x_2) \delta J(x_3) \delta J(x_4)} \times \\ & \times \left\{ \text{O} \exp \left[-\frac{i}{2} \int J(x) \Delta_F(x-y) J(y) dx dy \right] \right\} \Big|_{J=0} \\ & = \frac{g}{4} \frac{\delta^4}{\delta J(x_1) \delta J(x_2) \delta J(x_3) \delta J(x_4)} \times \\ & \times \{ \Delta_F(0) \int dx dy dz \Delta_F(x-z) \Delta_F(y-z) J(y) J(x) \times \\ & \times \exp \left(-\frac{i}{2} \int J \Delta_F J \right) \} \Big|_{J=0} = \\ & = \frac{-ig}{2} \Delta_F(0) \int dz [\Delta_F(z-x_1) \Delta_F(z-x_2) \Delta_F(x_3-x_4) + \\ & + \Delta_F(z-x_1) \Delta_F(z-x_3) \Delta_F(x_2-x_4) + \\ & + \Delta_F(z-x_1) \Delta_F(z-x_4) \Delta_F(x_2-x_3) + \\ & + \Delta_F(z-x_2) \Delta_F(z-x_3) \Delta_F(x_1-x_4) + \\ & + \Delta_F(z-x_2) \Delta_F(z-x_4) \Delta_F(x_1-x_3) + \\ & + \Delta_F(z-x_3) \Delta_F(z-x_4) \Delta_F(x_1-x_2)] = \\ & = -3ig \left[\text{O} \right] \end{aligned} \quad (6.98)$$

Диаграмма заменяет шесть эквивалентных членов, входящих в предыдущее выражение. Каждый из этих членов дает вклад дважды, так что «фактор симметрии» диаграммы равен 12.

Второй член в $Z[J]$ порядка g равен

$$\frac{-ig}{4!} \frac{\delta^4}{\delta J(x_1) \delta J(x_2) \delta J(x_3) \delta J(x_4)} \times$$

$$\begin{aligned}
 & \times \left\{ \times \exp \left[-\frac{i}{2} \int J(x) \Delta_F(x-y) J(y) dx dy \right] \right\} \Big|_{J=0} = \\
 & = \frac{-ig}{4!} \frac{\delta^4}{\delta J(x_1) \delta J(x_2) \delta J(x_3) \delta J(x_4)} \times \\
 & \times \left\{ \left[\int \Delta_F(z-x) J(x) dx \right]^4 \exp \left(-\frac{i}{2} \int J \Delta_F J \right) \right\} \Big|_{J=0} = \\
 & = -ig \int \Delta_F(x_1-z) \Delta_F(x_2-z) \Delta_F(x_3-z) \Delta_F(x_4-z) dz = \\
 & = -ig \left[\text{diagram} \right] \dots \tag{6.99}
 \end{aligned}$$

Следовательно, полная 4-точечная функция порядка g равна

$$\begin{aligned}
 \tau(x_1, x_2, x_3, x_4) &= -3 \left[\text{diagram} \right] - 3ig \left(\text{diagram} \right) - ig \left(\text{diagram} \right) = \\
 &= -3 \left[\text{diagram} \right] \frac{-ig}{4!} \left[12 \times 6 \left(\text{diagram} \right) + 24 \left(\text{diagram} \right) \right] \tag{6.100}
 \end{aligned}$$

Первый член имеет порядок g^0 , он не дает вклада в рассеяние. Численные коэффициенты получаются из простой комбинаторики. Это подсказывает более простой способ выписать все диаграммы данного порядка. Рассмотрим, например, все диаграммы, дающие вклад в 4-точечную функцию порядка g в теории $g\phi^4/4!$. Мы получим их следующим образом. Прежде всего, поскольку мы рассматриваем теорию ϕ^4 , мы имеем n вершин порядка g^n

$$\times \times \times \dots \times \tag{6.101}$$

В соответствии с тем что мы рассматриваем 4-точечную функцию, изобразим четыре внешних конца:

$$\begin{array}{cc}
 x_1 \text{ ---} & \text{---} x_3 \\
 x_2 \text{ ---} & \text{---} x_4
 \end{array} \tag{6.102}$$

Четырехточечная функция порядка g в теории $g\phi^4$ строится с помощью следующей *предиаграммы*:

$$\begin{array}{c}
 x_1 \text{ ---} \\
 x_2 \text{ ---}
 \end{array} \times \begin{array}{c}
 \text{---} x_3 \\
 \text{---} x_4
 \end{array} \tag{6.103}$$

(Название предиаграмма используется, чтобы отличить ее от истинной фейнмановской диаграммы.) Соединим теперь между собой все линии. Существуют три топологически различных типа фейнмановских диаграмм, которые изображены на рис. 6.4. Кратности, с

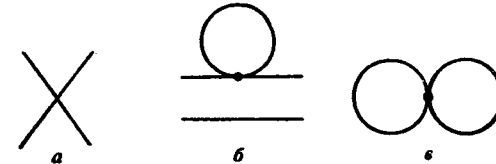


Рис. 6.4. Члены первого порядка для 4-точечной функции.

которыми должны быть учтены эти диаграммы, устанавливаются следующим образом. Чтобы получить диаграмму a , соединим x_1 с одним из концов вершины в предиаграмме (6.103). Существуют 4 способа сделать это. Теперь соединим x_2 с одним из оставшихся концов — это можно сделать тремя способами. Всего имеются $4! = 24$ способа построить диаграмму a ; это дает коэффициент в выражении (6.100). Далее, чтобы построить диаграмму b , соединим x_1 непосредственно с одним из внешних концов x_2, x_3, x_4 . Существуют 3 способа сделать это. Выберем один из концов вершины и соединим его с одной из двух оставшихся внешних точек. Имеются 4×2 способов сделать это. Соединим один из трех оставшихся концов вершины с последней оставшейся точкой. Имеются 3 способа сделать это. Соединим оставшиеся два конца друг с другом. Получающаяся кратность равна $3 \times 4 \times 2 \times 3 = 12 \times 6$, т. е. как в соотношении (6.100). Читатель легко убедится в том, что кратность диаграммы c равна $3 \times 3 = 9$. Эта диаграмма не входит в выражение (6.100) по той

причине, что она пропорциональна вакуумной диаграмме ∞

(см. выше), а правильно нормированный производящий функционал $Z[J]$ не дает вакуумных диаграмм.

В итоге правила Фейнмана для скалярной теории поля ϕ^4 в координатном пространстве формулируются следующим образом:

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \text{Линия} \quad x \text{ ---} y \\
 \text{Вершина} \quad \begin{array}{c} \times \\ z \end{array} \\
 \text{Фактор} \\
 \text{симметрии}
 \end{array} \quad \left. \begin{array}{l}
 \Delta_F(x-y) \\
 -ig \\
 \int \text{интегрирование по } z \\
 S/4!
 \end{array} \right\} \tag{6.104}$$

При расчетах реальных процессов, в которых участвуют, например, электроны и фотоны, частицы не являются тождественными и, следовательно, факторы симметрии отсутствуют. Мы отложим вывод соотношения, связывающего S -матрицу с функциями Грина, до того времени, когда перейдем к рассмотрению этих реальных процессов.

Тем не менее здесь стоит заметить, что первая из двух 

диаграмм порядка g , входящих в соотношение (6.100), дает вклад лишь в тривиальную (диагональную) часть S -матрицы и поэтому не представляет интереса. Она описывает две частицы, движущиеся независимо, и взаимодействие приводит лишь к модификации пропагатора одной из них. Такой граф называется *несвязным*. Другой граф \times порядка g является *связным*, поскольку каждая его линия связана со всеми другими. В величину $S = 1$, т. е. нетривиальную часть S -матрицы, дают вклад только связанные диаграммы Фейнмана.

§ 6.6. Производящий функционал для связанных диаграмм

Оказывается, что существует производящий функционал W , который дает только связанные диаграммы Фейнмана. Он связан с Z соотношением

$$Z[J] = e^{iW[J]}, \quad (6.105)$$

или

$$W[J] = -i \ln Z[J]. \quad (6.106)$$

Покажем теперь на примере 2-точечной и 4-точечной функций в теории ϕ^4 , что $W[J]$ дает несвязные графы. Мы имеем

$$\frac{\delta^2 W}{\delta J(x_1) \delta J(x_2)} = \frac{i}{Z^2} \frac{\delta Z}{\delta J(x_1)} \frac{\delta Z}{\delta J(x_2)} - \frac{i}{Z} \frac{\delta^2 Z}{\delta J(x_1) \delta J(x_2)}. \quad (6.107)$$

Поскольку при $J = 0$ справедливы равенства

$$\left. \frac{\delta Z[J]}{\delta J(x)} \right|_{J=0} = 0, \quad Z[0] = 1, \quad (6.108)$$

мы приходим к соотношению

$$\left. \frac{\delta^2 W}{\delta J(x_1) \delta J(x_2)} \right|_{J=0} = -i \left. \frac{\delta^2 Z}{\delta J(x_1) \delta J(x_2)} \right|_{J=0} = i \tau(x_1, x_2), \quad (6.109)$$

показывающему, что W дает выражение для пропагатора во всех порядках по g . Это соответствует нашему предположению, поскольку пропагатор не имеет несвязных частей. Чтобы найти 4-точечную функцию, мы продифференцируем соотношение (6.107) еще дважды и положим $J = 0$; получим

$$\begin{aligned} & \left. \frac{\delta^4 W}{\delta J(x_1) \delta J(x_2) \delta J(x_3) \delta J(x_4)} \right|_{J=0} = \\ & = i \left[\frac{1}{Z^2} \frac{\delta^2 Z}{\delta J(x_1) \delta J(x_2)} \frac{\delta^2 Z}{\delta J(x_3) \delta J(x_4)} + \right. \\ & + \frac{1}{Z^2} \frac{\delta^2 Z}{\delta J(x_1) \delta J(x_3)} \frac{\delta^2 Z}{\delta J(x_2) \delta J(x_4)} + \\ & + \frac{1}{Z^2} \frac{\delta^2 Z}{\delta J(x_1) \delta J(x_4)} \frac{\delta^2 Z}{\delta J(x_2) \delta J(x_3)} - \\ & \left. - \frac{1}{Z} \frac{\delta^4 Z}{\delta J(x_1) \delta J(x_2) \delta J(x_3) \delta J(x_4)} \right] \Big|_{J=0} = \\ & = i [\tau(x_1, x_2) \tau(x_3, x_4) + \tau(x_1, x_3) \tau(x_2, x_4) + \\ & + \tau(x_1, x_4) \tau(x_2, x_3) - \tau(x_1, x_2, x_3, x_4)]. \quad (6.110) \end{aligned}$$

Нам нужно показать, что данное выражение не содержит несвязных диаграмм. Наиболее удобный способ сделать это состоит в том, чтобы подставить сами диаграммы в соотношение (6.110). Будем проводить вычисления, как всегда, с точностью до g и подставим выражения (6.91) и (6.100) в (6.110). Это дает (обозначения должны быть понятны из самой записи: 1 соответствует x_1 и т. д.)

$$\begin{aligned} & \left. \frac{\delta^4 W}{J \delta(x_1) \delta J(x_2) \delta J(x_3) \delta J(x_4)} \right|_{J=0} = \\ & = i \left[\left(i \frac{1}{2} \frac{2}{2} - \frac{g}{2} \frac{1}{2} \bigcirc \frac{2}{2} \right) \left(i \frac{3}{2} \frac{4}{2} - \frac{g}{2} \frac{3}{2} \bigcirc \frac{4}{2} \right) + \right. \\ & + \left(i \frac{1}{2} \frac{3}{2} - \frac{g}{2} \frac{1}{2} \bigcirc \frac{3}{2} \right) \left(i \frac{2}{2} \frac{4}{2} - \frac{g}{2} \frac{2}{2} \bigcirc \frac{4}{2} \right) + \\ & + \left(i \frac{1}{2} \frac{4}{2} - \frac{g}{2} \frac{1}{2} \bigcirc \frac{4}{2} \right) \left(i \frac{2}{2} \frac{3}{2} - \frac{g}{2} \frac{2}{2} \bigcirc \frac{3}{2} \right) + \\ & + \left(\frac{1}{3} \frac{2}{4} + \frac{1}{2} \frac{3}{4} + \frac{1}{2} \frac{4}{3} \right) + \\ & + \frac{ig}{2} \left(\frac{1}{3} \frac{\bigcirc}{4} \frac{2}{4} + \frac{1}{2} \frac{\bigcirc}{4} \frac{3}{4} + \frac{1}{2} \frac{\bigcirc}{3} \frac{4}{4} + \frac{3}{1} \frac{\bigcirc}{2} \frac{4}{4} + \right. \\ & \left. + \frac{2}{1} \frac{\bigcirc}{3} \frac{4}{4} + \frac{2}{1} \frac{\bigcirc}{4} \frac{3}{4} \right) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{ig}{4!} \left(\begin{matrix} 1 \\ 3 \end{matrix} \times \begin{matrix} 2 \\ 4 \end{matrix} + \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} \times \begin{matrix} 3 \\ 4 \end{matrix} + \dots \text{(24 члена)} \right) \Big] = \\
 & = \frac{-g}{4!} \left(\begin{matrix} 1 \\ 3 \end{matrix} \times \begin{matrix} 2 \\ 4 \end{matrix} + \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} \times \begin{matrix} 3 \\ 4 \end{matrix} + \dots \text{(24 члена)} \right) = \\
 & = -g \times . \tag{6.111}
 \end{aligned}$$

Действительно, мы видим, что вклад дают только связные диаграммы.

Наконец, рассмотрим кратко n -точечную функцию. Она имеет вид

$$\tau(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{i^n} \frac{\delta^n Z[J]}{\delta J(x_1) \dots \delta J(x_n)} \Big|_{J=0} . \tag{6.112}$$

Определим далее *неприводимую n -точечную функцию* $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ как

$$\varphi(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{i^n} \frac{\delta^n W[J]}{\delta J(x_1) \dots \delta J(x_n)} \Big|_{J=0} . \tag{6.113}$$

Чтобы убедиться в правильности названия, заметим, что из соотношений (6.100) и (6.111) следуют выражения

$$\tau(x_1, \dots, x_4) = -ig \times - 3ig \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} - 3 \text{---} \text{---} \tag{6.114}$$

$$i\varphi(x_1, \dots, x_4) = -ig \times$$

а из (6.110) следует соотношение

$$i\varphi(x_1, \dots, x_4) = \tau(x_1, \dots, x_4) - \tau(x_1, x_2)\tau(x_3, x_4) - \tau(x_1, x_3)\tau(x_2, x_4) - \tau(x_1, x_4)\tau(x_2, x_3) .$$

Поскольку $\tau(x_1, x_2) = i\varphi(x_1, x_2)$,

$$\tau(x_1, \dots, x_4) = i\varphi(x_1, \dots, x_4) - \sum_p \varphi(x_{i_1}, x_{i_2})\varphi(x_{i_3}, x_{i_4}) , \tag{6.115}$$

где символом \sum_p обозначено суммирование по всем возможным разбиениям индексов $(1, \dots, 4)$ на классы $(i_1, i_2)(i_3, i_4)$. Мы видим, что соотношение (6.115) совпадает с (6.114). Таким образом, 4-точечная функция распадается на «неприводимую» (или «связную»)

часть \times и приводимые части --- и $\text{---} \text{---}$, в которых, вообще говоря, часть падающих частиц переходит при рассеянии

в часть вылетающих частиц совершенно независимо от остальных. Для 4-точечной функции мы имеем

$$\text{---} \text{---} \text{---} \text{---} = \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{неприв.} + \text{---} \text{---} \text{---} , \tag{6.116}$$

откуда в первом порядке по g следует

$$\text{---} \text{---} \text{---} \text{---} = \times + \text{---} \text{---} + \text{---} \text{---} \tag{6.117}$$

Соотношение (6.116) можно обобщить на n -точечные функции, например:

$$\text{---} \text{---} \text{---} \text{---} = \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{Неприв.} + \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} + \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \tag{6.118}$$

§ 6.7. Фермионы и функциональные методы

В § 4.3 мы видели, что существует связь между спином и статистикой и что фермионы удовлетворяют антикоммутационным соотношениям

$$\{\psi(x), \psi(y)\} \Big|_{x^0=y^0} = 0 .$$

(В действительности ограничение $x^0 = y^0$ не является необходимым: поля антикоммутируют при любых временах.) В каноническом подходе к теории поля величины $\psi(x)$ считаются операторами и, следовательно, мы имеем дело с набором антикоммутирующих операторов. Однако в функциональном подходе производящий функционал для функций Грина записывается в виде функционального интеграла по полям, которые считаются *классическими* функциями, т. е. c -числами. Таким образом, обобщение функциональных методов на ферми-поля требует, чтобы в функциональном интеграле эти поля рассматривались как *антикоммутирующие c -числа*. Большинству физиков такое понятие кажется странным, если не противоречивым. Однако в математической литературе оно восходит к 1855 г., когда впервые появилось в статье Германа Грассма-

на по линейной алгебре. Генераторы C_i n -мерной *грасмановой алгебры* удовлетворяют соотношениям

$$\{C_i, C_j\} \equiv C_i C_j + C_j C_i = 0, \quad (6.119)$$

где $i = 1, 2, \dots, n$. В частности,

$$C_i^2 = 0. \quad (6.120)$$

Разложение функции $f(C_i)$ содержит конечное число членов. Например, в 1-мерной алгебре

$$f(C) = a + bC,$$

так как квадратичный член равен нулю [формула (6.120)].

Рассмотрим теперь понятие дифференцирования. Вследствие антикоммутационных соотношений существуют два типа дифференцирования — левое и правое. Их определения явствуют из двух нижеследующих примеров. *Левая производная* произведения $C_1 C_2$ равна

$$\frac{\partial^L}{\partial C_i} (C_1 C_2) = \delta_{i1} C_2 - \delta_{i2} C_1, \quad (6.121a)$$

а *правая производная* равна

$$\frac{\partial^R}{\partial C_i} (C_1 C_2) = \delta_{i1} C_1 - \delta_{i2} C_2. \quad (6.121b)$$

Очевидно, что операторы дифференцирования должны удовлетворять соотношениям

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial C_i}, C_j \right\} = \delta_{ij}. \quad (6.122)$$

Например, в случае одномерной алгебры

$$\left\{ \frac{d}{dC}, C \right\} = 1.$$

Это соотношение можно проверить, применяя его к функции $f(C)$. Аналогичным образом можно показать, что

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial C_i}, \frac{\partial}{\partial C_j} \right\} = 0. \quad (6.123)$$

Далее мы имеем равенство $(\partial/\partial C_i)^2 = 0$, из которого следует, что не существует операции, обратной дифференцированию. Вследствие этого определение интегрирования является несколько искусственным. Простейший способ определить правила интегрирования основан на предположении, что операция интегрирования действует на функцию так же, как и операция дифференцирования. Это

позволяет обойти создавшуюся дилемму. Тогда, поскольку в случае одного измерения мы имеем $df/dC = b$, должно также выполняться равенство $\int dC f(C) = b$. Отсюда вытекают условия

$$\int dC = 0, \quad \int dC C = 1,$$

или в n -мерном случае

$$\int dC_i = 0, \quad \int dC_i C_i = 1. \quad (6.124)$$

Пусть теперь η и $\bar{\eta}$ — независимые *грасмановы переменные* и, таким образом,

$$\int d\eta = \int d\bar{\eta} = 0, \quad \int d\eta \eta = \int d\bar{\eta} \bar{\eta} = 1.$$

Поскольку $\eta^2 = \bar{\eta}^2 = 0$, мы имеем

$$e^{-\bar{\eta}\eta} = 1 - \bar{\eta}\eta$$

и, следовательно,

$$\int d\bar{\eta} d\eta e^{-\bar{\eta}\eta} = \int d\bar{\eta} d\eta - \int d\bar{\eta} d\eta \bar{\eta}\eta = 0 + \int d\bar{\eta} d\eta \bar{\eta}\eta = 1.$$

Найдем теперь обобщение этой формулы на случай большего числа измерений. Рассмотрим *двумерный случай*

$$\eta = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix}, \quad \bar{\eta} = \begin{pmatrix} \bar{\eta}_1 \\ \bar{\eta}_2 \end{pmatrix}.$$

Показатель экспоненты $\bar{\eta}\eta$ (который, строго говоря, надо записывать в виде $\bar{\eta}^T \eta$, где T означает транспонирование) имеет вид

$$\bar{\eta}\eta = \bar{\eta}_1 \eta_1 + \bar{\eta}_2 \eta_2.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} (\bar{\eta}\eta)^2 &= (\bar{\eta}_1 \eta_1 + \bar{\eta}_2 \eta_2)(\bar{\eta}_1 \eta_1 + \bar{\eta}_2 \eta_2) = \\ &= \bar{\eta}_1 \eta_1 \bar{\eta}_2 \eta_2 + \bar{\eta}_2 \eta_2 \bar{\eta}_1 \eta_1 = 2\bar{\eta}_1 \eta_1 \bar{\eta}_2 \eta_2; \end{aligned}$$

более высокие степени $\bar{\eta}\eta$ равны нулю, и, таким образом, мы имеем

$$e^{-\bar{\eta}\eta} = 1 - (\bar{\eta}_1 \eta_1 + \bar{\eta}_2 \eta_2) + \bar{\eta}_1 \eta_1 \bar{\eta}_2 \eta_2.$$

Применяя далее правила интегрирования, сформулированные выше, мы видим, что

$$\int d\bar{\eta} d\eta e^{-\bar{\eta}\eta} = \int d\bar{\eta}_1 d\bar{\eta}_2 d\eta_1 d\eta_2 \bar{\eta}_1 \eta_1 \bar{\eta}_2 \eta_2 = 1, \quad (6.125)$$

как и в одномерном случае. Произведем замену переменных, положив

$$\eta = M\alpha, \quad \bar{\eta} = N\bar{\alpha}, \quad (6.126)$$

где M и N — матрицы 2×2 , а α и $\bar{\alpha}$ — новые независимые грасмановы переменные. Имеем

$$\begin{aligned} \eta_1 \eta_2 &= (M_{11}\alpha_1 + M_{12}\alpha_2)(M_{21}\alpha_1 + M_{22}\alpha_2) = \\ &= (M_{11}M_{22} - M_{12}M_{21})\alpha_1\alpha_2 = (\det M)\alpha_1\alpha_2. \end{aligned}$$

Но чтобы сохранить правила интегрирования

$$\int d\eta_1 d\eta_2 \eta_1 \eta_2 = \int d\alpha_1 d\alpha_2 \alpha_1 \alpha_2,$$

мы должны потребовать равенства

$$d\eta_1 d\eta_2 = (\det M)^{-1} d\alpha_1 d\alpha_2 \quad (6.127)$$

в отличие от обычного правила замены переменных. Подставляя соотношение (6.126) в интеграл (6.125) и учитывая (6.127), мы теперь имеем

$$(\det MN)^{-1} \int d\bar{\alpha} d\alpha e^{-\bar{\alpha} M \alpha} = 1.$$

Однако, поскольку $\det MN = \det M^T N$, отсюда следует, что

$$d\bar{\alpha} d\alpha e^{-\bar{\alpha} A \alpha} = \det A, \quad (6.128)$$

где положено $MN = A$. Эта формула, точнее ее обобщение на бесконечномерный случай, будет использована в следующей главе при нахождении правил Фейнмана для калибровочных полей.

Чтобы описать ферми-поля, мы теперь совершим переход к бесконечномерной грасмановой алгебре, генераторы которой обозначаются через $C(x)$. Они подчиняются соотношениям

$$\{C(x), C(y)\} = 0,$$

$$\frac{\partial^{L,R} C(x)}{\partial C(y)} = \delta(x-y), \quad (6.129)$$

$$\int dC(x) = 0; \quad \int C(x) dC(x) = 1.$$

Интегралы типа (6.128) при этом превращаются в функциональные интегралы по комплексным грасмановым переменным. Как и в случае скалярных полей, мы будем пользоваться этими формулами, предполагая, что впоследствии будет найдено их строгое математическое обоснование. С такой оговоркой мы выпишем выражение для производящего функционала для полей Дирака по аналогии со случаем скалярных полей [формула (6.1)]. Поскольку лагранжиан для поля Дирака дается выражением

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}\gamma \partial_\mu \psi - m\bar{\psi}\psi,$$

нормированный производящий функционал для свободных полей Дирака имеет вид

$$\begin{aligned} Z_0[\eta, \bar{\eta}] &= \frac{1}{N} \int \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi \times \\ &\times \exp \left\{ i \int [\bar{\psi}(x)(i\gamma \cdot \partial - m)\psi(x) + \bar{\eta}(x)\psi(x) + \bar{\psi}(x)\eta(x)] dx \right\}, \end{aligned} \quad (6.130)$$

где интегрирование по x ведется по четырехмерному пространству:

$$N = \int \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi \exp \left[i \int \bar{\psi}(x)(i\gamma \cdot \partial - m)\psi(x) dx \right]. \quad (6.131)$$

Здесь $\bar{\eta}(x)$ — источник для поля $\psi(x)$, а $\eta(x)$ — для поля $\bar{\psi}(x)$. Наша цель теперь — представить это выражение в виде, аналогичном (6.13), с тем чтобы можно было выполнять функциональное дифференцирование и вычислять функции Грина и матричные элементы S -матрицы. С целью упростить формулы мы введем обозначение

$$S^{-1} = i\gamma^\mu \partial_\mu - m. \quad (6.132)$$

Далее

$$Z_0[\eta, \bar{\eta}] = \frac{1}{N} \int \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi \exp \left[i \int (\bar{\psi} S^{-1} \psi + \bar{\eta} \psi + \bar{\psi} \eta) dx \right]. \quad (6.133)$$

Положив

$$Q(\psi, \bar{\psi}) = \bar{\psi} S^{-1} \psi + \bar{\eta} \psi + \bar{\psi} \eta,$$

найдем значение ψ , минимизирующее Q . Оно равно

$$\psi_m = -S\eta, \quad \bar{\psi}_m = -\bar{\eta}S$$

(где мы предположили, что существует оператор, обратный оператору S^{-1} ; ниже это будет доказано). Минимальное значение Q равно

$$Q_m = Q(\psi_m, \bar{\psi}_m) = -\bar{\eta}S\eta.$$

Мы имеем далее

$$Q = Q_m + (\bar{\psi} - \bar{\psi}_m) S^{-1} (\psi - \psi_m),$$

$$\begin{aligned} Z_0 &= \frac{1}{N} \int \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi \exp \left\{ i \int [Q_m + (\bar{\psi} - \bar{\psi}_m) S^{-1} (\psi - \psi_m)] dx \right\} = \\ &= \frac{1}{N} \exp \left[-i \int \bar{\eta}(x) S\eta(y) dx dy \right] \det(iS^{-1}). \end{aligned}$$

В последней строке мы вынесли множитель e^{iQ_m} за знак интеграла, поскольку Q_m не зависит от ψ и $\bar{\psi}$, и воспользовались соотношением (6.128), обобщив его надлежащим образом на функциональный случай. Более того, очевидно, что $N = \det(-iS^{-1})$, так что окончательно,

$$Z_0[\eta, \bar{\eta}] = \exp[-i \int \bar{\eta}(x) S(x-y) \eta(y) dx dy]. \quad (6.134)$$

Легко показать, что оператор S существует. Он имеет вид $S(x) = (i\gamma \cdot \partial + m)\Delta_F(x)$, (6.135)

где $\Delta_F(x)$ — фейнмановский пропагатор. Используя формулу (6.132), мы имеем

$$S^{-1}S = (i\gamma \cdot \partial - m)(i\gamma \cdot \partial + m)\Delta_F(x) = (-\square - m^2)\Delta_F(x) = \delta^4(x).$$

Теперь мы можем найти свободный пропагатор поля Дирака. По аналогии с (6.50) определим его соотношением

$$\begin{aligned} \tau(x, y) &= - \frac{\delta^2 Z_0[\eta, \bar{\eta}]}{\delta \eta(x) \delta \bar{\eta}(y)} \Big|_{\eta=\bar{\eta}=0} = \\ &= - \frac{\delta}{\delta \eta(x)} \frac{\delta}{\delta \bar{\eta}(y)} \left\{ -i \int \bar{\eta}(x) S(x-y) \eta(y) dx dy \right\} \Big|_{\eta=\bar{\eta}=0} = iS(x-y). \end{aligned} \quad (6.136)$$

Суммируем наши формулы, относящиеся к свободному распространению скалярного и спинорного полей. Для скалярного поля с лагранжианом (определенным с точностью до полной дивергенции)

$$\mathcal{L}_0 = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 = -\frac{1}{2} \phi (\square + m^2) \phi.$$

Мы нашли 2-точечную функцию [формула (6.52)]

$$\tau(x, y) = i\Delta_F(x-y),$$

где Δ_F — фейнмановский пропагатор, удовлетворяющий уравнению [формула (6.10)]

$$(\square + m^2)\Delta_F(x-y) = -\delta^4(x-y).$$

В случае спинорного поля лагранжиан имеет вид [формула (6.132)]

$$\mathcal{L}_0 = i\bar{\psi}\gamma^\mu \partial_\mu \psi - m\bar{\psi}\psi = \bar{\psi}S^{-1}\psi,$$

а 2-точечная функция равна мнимой единице i , умноженной на пропагатор

$$\tau(x, y) = iS(x-y).$$

В каждом случае видно, что *пропагатор есть оператор, обратный квадратичному члену, входящему в лагранжиан.* (Множитель $1/2$, входящий в скалярный лагранжиан, несуществен и фигурирует в случае действительного поля ϕ ; в случае комплексного же ϕ он отсутствует.) Можно принять это в качестве *определения* пропагатора, и мы именно так и поступим, когда будем рассматривать калибровочные поля.

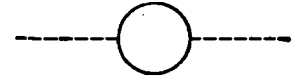


Рис. 6.5. Модификация пропагатора скалярного поля замкнутой фермионной петлей.

Наконец, здесь уместно указать еще одно следствие теории полей, удовлетворяющих статистике Ферми. Оно получается из соотношения, которому подчиняются операторы дифференцирования грассмановых полей. Обобщением формулы (6.123) является соотношение

$$\frac{\delta^2}{\delta \eta(x) \delta \eta(y)} = - \frac{\delta^2}{\delta \eta(y) \delta \eta(x)}, \quad (6.137)$$

где η — фермионный источник, а операторы дифференцирования могут быть как левыми, так и правыми. В случае левого дифференцирования мы имеем

$$\frac{\delta}{\delta \eta(x_1)} [\eta(x) \eta(y)] = \delta^4(x_1 - x) \eta(y) - \delta^4(x_1 - y) \eta(x).$$

Мы намерены показать, что эти правила приводят к возникновению множителя -1 у каждой фермионной петли в диаграмме Фейнмана. Например, в случае спинорного поля, взаимодействующего со скалярным, возникает поправка к свободному пропагатору скалярного поля, изображенная на рис. 6.5 и содержащая замкнутую фермионную петлю и две вершины, отвечающие взаимодействию. Соответствующая 2-точечная функция выводится из производящего функционала, в который включено взаимодействие. Соответствующее обобщение формулы (6.76) имеет вид

$$Z[\eta, \bar{\eta}] = \exp \left[i \int \mathcal{L}_{\text{взаим}} \left(\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta \eta}, \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta \bar{\eta}} \right) dx \right] Z_0[\eta, \bar{\eta}], \quad (6.138)$$

где Z_0 дается формулой (6.134). Третий член разложения этого функционала имеет вид

$$\frac{1}{2} \int dx dy dx' dy' \bar{\eta}(x) S(x-y) \eta(y) \bar{\eta}(x') S(x'-y') \eta(y').$$

Петля, изображенная на рис. 6.5, дает член вида

$$\frac{\delta^2}{\delta \bar{\eta}_i(z) \delta \eta_j(z)} \frac{\delta^2}{\delta \bar{\eta}_k(z') \delta \eta_l(z')} Z[\eta, \bar{\eta}]$$

(i, j, k и l — спинорные индексы). Подставляя сюда выражение (6.138) для $Z[\eta, \bar{\eta}]$ и используя равенство (6.137), легко видеть, что этот член равен

$$+S_{ii}(z - z')S_{jj}(z' - z).$$

Если бы поля удовлетворяли статистике Бозе, то общий знак был бы минус, следовательно, у фермионной петли имеется множитель, равный -1 .

§ 6.8. S-матрица и редукционная формула

Мы видели, как вычисляются функции Грина в теории со взаимодействием, а теперь займемся вычислением величин, которые непосредственно измеряются в экспериментах. Чаще всего физики, занимающиеся элементарными частицами, изучают, во-первых, процессы рассеяния, когда измеряются *сечения* определенных реакций, и, во-вторых, распады одной частицы на две или более, когда измеряются парциальные времена жизни. Первым этапом вычисления этих обеих величин, сечения и времени жизни, является расчет квантовомеханической *амплитуды* данного процесса. После того как нам известна амплитуда, оставшаяся часть вычисления проводится весьма просто. В данном параграфе мы покажем, как вычислить амплитуду, которую мы называем амплитудой рассеяния, и как данная амплитуда рассеяния связана простой формулой с соответствующей функцией Грина. Мы применим эти формулы к случаю пион-нуклонного рассеяния и в следующем параграфе покажем, как получить сечение рассеяния. Рассмотрим в общем виде процесс, в котором первоначальная конфигурация частиц α переходит в конечную конфигурацию β . Обозначим амплитуду рассеяния этого процесса через $S_{\beta\alpha}$ и назовем ее $(\beta\alpha)$ -матричным элементом *матрицы рассеяния*, или *S-матрицы*. Матрица S есть совокупность всех $S_{\beta\alpha}$. Состояния α и β определяются асимптотически, при временах $t \rightarrow -\infty$ и $t \rightarrow \infty$ соответственно, и, таким образом, по определению

$$S_{\beta\alpha} = \langle \beta, t \rightarrow \infty | \alpha, t \rightarrow -\infty \rangle. \quad (6.139)$$

В отсутствие дальнедействующих сил эти асимптотические состояния описывают *свободные частицы*, что является большим упрощением. Дальнедействующие силы, подобные электромагнитным, вносят осложнения, которые мы предпочитаем отложить в сторону. Можно принять альтернативные обозначения, введя «ин»- и «аут»-состояния:

$$|\alpha\rangle_{in} = |\alpha, t \rightarrow -\infty\rangle, \quad |\beta\rangle_{out} = |\beta, t \rightarrow \infty\rangle.$$

Предположим, что «ин»-состояние образовано двумя скалярными частицами с импульсами p_1 и p_2 . Тогда

$$|\alpha\rangle_{in} = a_{in}^\dagger(p_1)a_{in}^\dagger(p_2)|0\rangle,$$

причем операторы рождения a_{in}^\dagger удовлетворяют обычному свободному коммутационному соотношению (4.16а) с a_{in} .

Определение

$$S_{\beta\alpha} = \langle \beta | \alpha \rangle_{in},$$

очевидно, эквивалентно паре соотношений

$$\begin{aligned} a_{out}(p) &= S^\dagger a_{in}(p)S, \\ a_{out}^\dagger(p) &= S^\dagger a_{in}^\dagger(p)S, \end{aligned}$$

которые в свою очередь эквивалентны соотношению между операторами свободных полей

$$\varphi_{out}(x) = S^\dagger \varphi_{in}(x)S. \quad (6.140)$$

Мы хотим найти выражение для оператора S . Вначале мы сделаем шаг, как будто не имеющий отношения к делу, рассматривая оператор $\varphi(x)$ в момент времени, промежуточный между $-\infty$ и $+\infty$, иными словами, тогда, когда он испытывает влияние взаимодействия. Из лагранжиана

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi - \frac{m^2}{2} \varphi^2 + \mathcal{L}_{взаим}$$

следует, что φ удовлетворяет уравнению движения

$$(\square_x + m^2)\varphi(x) = \frac{\partial \mathcal{L}_{взаим}}{\partial \varphi(x)} \quad (6.141)$$

или, обозначая оператор Клейна — Гордона через

$$K_x = (\square_x + m^2), \quad (6.142)$$

мы имеем

$$K_x \varphi(x) = \frac{\partial \mathcal{L}_{взаим}}{\partial \varphi(x)}. \quad (6.143)$$

Решим это уравнение¹⁾. Обозначив соответствующую функцию Грина через $G(x - y)$, мы имеем по определению

$$(\square_y + m^2)G(y - x) = \delta^4(y - x). \quad (6.144)$$

¹⁾ Решения задаются формулами (6.149) и (6.150), которые следуют ниже. Читатель, знакомый с доказательством или не желающий следить за его ходом, может сразу перейти к решениям.

Умножая уравнение (6.141) на $G(y-x)$, а предыдущее уравнение на $\varphi(y)$, вычитая одно из другого и интегрируя по y , получаем

$$\int d^4y [G(y-x)(\square_y + m^2)\varphi(y) - \varphi(y)(\square_y + m^2)G(y-x)] = \\ = \int G(y-x) \frac{\partial \mathcal{L}_{\text{взаим}}}{\partial \varphi(y)} d^4y - \varphi(x).$$

Левая часть этого уравнения равна

$$- \int d^3y dy_0 \{ [G(y-x) \nabla^2 \varphi(y) - \varphi(y) \nabla^2 G(y-x)] - \\ - \left[G(y-x) \frac{\partial^2}{\partial y_0^2} \varphi(y) - \varphi(y) \frac{\partial^2}{\partial y_0^2} G(y-x) \right] \}.$$

«Пространственная» часть этого выражения обращается в нуль по теореме Грина:

$$\int d^3y dy_0 (G \nabla^2 \varphi - \varphi \nabla^2 G) = \int dS^j dy_0 (G \nabla_j \varphi - \varphi \nabla_j G) = 0$$

при условии, что φ и $\nabla \varphi$ обращаются в нуль на границе, проходящей в пространственной бесконечности. Что касается «временной» части, то мы имеем

$$G \frac{\partial^2}{\partial y_0^2} \varphi - \varphi \frac{\partial^2}{\partial y_0^2} G = \\ = \frac{\partial}{\partial y_0} \left(G \frac{\partial}{\partial y_0} \varphi - \varphi \frac{\partial}{\partial y_0} G \right) = \frac{\partial}{\partial y_0} \left(G \overleftrightarrow{\partial}_0 \varphi \right).$$

Собрав эти результаты воедино, получим соотношение

$$\varphi(x) = - \left(\int_{y_0^+} - \int_{y_0^-} \right) d^3y G(y-x) \overleftrightarrow{\partial}_0 \varphi(y) + \\ + \int_{y_0^-}^{y_0^+} dy G(y-x) \frac{\partial \mathcal{L}_{\text{взаим}}}{\partial \varphi(y)}, \quad (6.145)$$

в котором выполнено интегрирование по времени в промежутке между моментами y_0^- и y_0^+ или в более общем случае между пространственноподобными поверхностями σ^- и σ^+ . Выражение (6.145) является решением уравнения (6.141), но оно пока не записано в той форме, которую мы хотим ему придать. Из теории дифференциальных уравнений мы знаем, что общее решение уравнения (6.141) равно сумме решения однородного уравнения (*свободного поля*) и интеграла от произведения функции Грина на неоднород-

ный член. Очевидно, что этот интеграл совпадает со вторым членом в выражении (6.145). Мы покажем, что первый член представляет свободное поле; *какое именно* — это зависит от *граничных условий*. В действительности функция Грина, удовлетворяющая уравнению (6.144), сама не является единственной. Чтобы определить ее однозначно, нужно наложить граничные условия. Определим *опережающую* и *запаздывающую* функции Грина условиями¹⁾

$$\Delta_{\text{запазд}}(x) = 0 \text{ при } x^2 > 0, x_0 < 0, \quad (6.146)$$

$$\Delta_{\text{опереж}}(x) = 0 \text{ при } x^2 > 0, x_0 > 0,$$

$$(\square + m^2) \Delta_{\text{опереж запазд}}(x) = \delta^4(x). \quad (6.147)$$

Далее, для двух произвольных функций Грина G_1 и G_2 мы имеем

$$G_1(x-y)(\square_x + m^2)G_2(x-z) = \delta(x-z)G_1(x-y), \\ G_2(x-z)(\square_x + m^2)G_1(x-y) = \delta(x-y)G_2(x-z).$$

Вычитая эти равенства одно из другого и интегрируя по x , получаем

$$G_1(z-y) - G_2(y-z) = \left(\int_{x^+} - \int_{x_0^-} \right) d^3x G_2(x-z) \overleftrightarrow{\partial}_0 G_1(x-y).$$

Применив это соотношение к запаздывающей и опережающей функциям Грина, получим

$$\Delta_{\text{запазд}}(x) = \Delta_{\text{опереж}}(-x). \quad (6.148)$$

Подставляя теперь $G = \Delta_{\text{опереж}}$ в соотношение (6.145) и вспоминая при этом, что момент времени y_0^+ следует за x_0 , а y_0^- предшествует x_0 , мы получаем

$$\varphi(x) = - \int_{y_0^-} d^3y \Delta_{\text{запазд}}(x-y) \overleftrightarrow{\partial}_0 \varphi(y) + \int dy \Delta_{\text{запазд}}(x-y) \frac{\partial \mathcal{L}_{\text{взаим}}}{\partial \varphi(y)}.$$

Это стандартная формула с запаздывающими функциями Грина, в которой поле $\varphi(x)$ выражается через его граничные значения в более ранний момент времени. Положим теперь $y_0^- \rightarrow -\infty$ и введем обозначение для первого члена

$$\varphi_{-\infty}(x) = \lim_{y_0^- \rightarrow -\infty} \int_{y_0^-} d^3y \Delta_{\text{запазд}}(x-y) \overleftrightarrow{\partial}_{y_0^-} \varphi(y).$$

Легко видеть, что эта величина удовлетворяет свободному уравнению Клейна — Гордона, поскольку

$$(\square + m^2) \varphi_{-\infty}(x) = \lim_{y_0^- \rightarrow -\infty} \int d^3y \delta^4(x-y) \overleftrightarrow{\partial}_{y_0^-} \varphi(y).$$

¹⁾ В отечественной литературе для них употребляются также индексы «adv» и «ret». — Прим. ред.

а правая часть, очевидно, обращается в нуль при $y_0 \rightarrow -\infty$ при любом заданном x_0 . Таким образом, мы можем отождествить $\varphi_{-\infty}(x)$ с «ин»-полем $\varphi_{in}(x)$ и записать решение уравнения (6.141) в виде

$$\varphi(x) = \varphi_{in}(x) + \int dy \Delta_{\text{запад}}(x-y) \frac{\partial \mathcal{L}_{\text{взаим}}}{\partial \varphi(y)}. \quad (6.149)$$

Очевидно также, что мы можем взять альтернативное решение с опережающей функцией Грина и граничными условиями при $y_0 \rightarrow +\infty$:

$$\varphi(x) = \varphi_{out}(x) + \int dy \Delta_{\text{опереж}}(x-y) \frac{\partial \mathcal{L}_{\text{взаим}}}{\partial \varphi(y)}. \quad (6.150)$$

Используя соотношение (6.143), представим эти решения в виде

$$\varphi(x) = \varphi_{in}(x) + \int dy \Delta_{\text{запад}}(x-y) K_y \varphi(y), \quad (6.151)$$

$$\varphi(x) = \varphi_{out}(x) + \int dy \Delta_{\text{опереж}}(x-y) K_y \varphi(y).$$

Очевидно, что мы в определенном смысле налагаем на $\varphi(x)$ *асимптотические условия*

$$\varphi(x) \xrightarrow[t \rightarrow \pm\infty]{} \varphi_{in/out}(x).$$

Однако было показано, что если рассматривать эти условия непосредственно как операторные условия, то рассеяние отсутствует. Их называют *сильными* асимптотическими условиями, и это, очевидно, не то, что нам требуется. Правильная форма асимптотических условий была найдена Леманом, Симанзником и Циммерманом (ЛСЦ)¹⁾, это так называемые *слабые асимптотические условия*:

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \langle a | \varphi(x) | b \rangle = \langle a | \varphi_{in/out}(x) | b \rangle, \quad (6.152)$$

где $|a\rangle$ и $|b\rangle$ — производные состояния в гильбертовом пространстве. Безусловно важно, что, хотя из сильных условий вытекают слабые, обратное утверждение неверно. Теперь наша цель состоит в том, чтобы найти выражение для оператора S , определенного формулой (6.140):

$$\varphi_{out}(x) = S^\dagger \varphi_{in}(x) S,$$

используя соотношения (6.151) и (6.152). Определим сначала функционал

$$I[J] = T \exp \left[i \int J(x) \varphi(x) dx \right], \quad (6.153)$$

где T — оператор хронологического упорядочения. Отсюда следует, что

$$\frac{1}{i} \frac{\delta I[J]}{\delta J(x)} = T(\varphi(x) | J).$$

Сравнивая это соотношение (а также соответствующие формулы с производными высших порядков) с соотношением (6.46), мы видим, что вакуумное среднее оператора $I[J]$ совпадает с $Z[J]$: $Z[J] = \langle 0 | I[J] | 0 \rangle$. (6.154)

Умножим теперь выражения (6.151) на $I[J]$ и T , учитывая при этом асимптотические условия. Это дает

$$\frac{1}{i} \frac{\delta I[J]}{\delta J(x)} = I[J] \varphi_{in}(x) + \int dy \Delta_{\text{запад}}(x-y) K_y \frac{1}{i} \frac{\delta I[J]}{\delta J(y)},$$

$$\frac{1}{i} \frac{\delta I[J]}{\delta J(x)} = \varphi_{out}(x) I[J] + \int dy \Delta_{\text{опереж}}(x-y) K_y \frac{1}{i} \frac{\delta I[J]}{\delta J(y)}.$$

Вычитая эти выражения друг из друга, получаем

$$\varphi_{out} I - I \varphi_{in} = i \int dy \Delta(x-y) K_y \frac{\delta I[J]}{\delta J(y)}, \quad (6.155)$$

где

$$\Delta(x) = \Delta_{\text{опереж}}(x) - \Delta_{\text{запад}}(x).$$

Подставив вместо φ_{out} выражение (6.140) и заметив, что S является унитарным оператором $SS^\dagger = S^\dagger S = 1$, мы будем иметь

$$[\varphi_{in}(x), S I[J]] = i \int dy \Delta(x-y) K_y \frac{\delta (S I[J])}{\delta J(y)}. \quad (6.156)$$

Это уравнение, хотя оно и выглядит непривлекательно, нетрудно решить. В самом деле, простое преобразование формулы Бейкера — Кемпбелла — Хаусдорфа (6.80)

$$e^B A e^{-B} = A + [B, A],$$

где A и B — операторы, коммутатор которых является c -числом, дает

$$[A, e^B] = [A, B] e^B.$$

С учетом того что

$$[\varphi_{in}(x), \varphi_{in}(y)] = i \Delta(x-y),$$

естественно предположить, что решение уравнения (6.156) имеет вид

$$S I[J] = \exp \left[\int \varphi_{in}(z) K \frac{\delta}{\delta J(z)} dz \right] F[J], \quad (6.157)$$

¹⁾ Lehmann H., Symanzik K., Zimmerman W. Nuovo Cimento, 1, 425 (1955).

где $F[J]$ — некоторый функционал от J . В самом деле, мы имеем

$$\begin{aligned} \langle \Phi_{\text{in}}(x), S I \rangle &= i \int \Delta(x-y) K \frac{\delta}{\delta J(y)} dy \times \\ &\times \exp \left[\int \Phi_{\text{in}}(z) K \frac{\delta}{\delta J(z)} dz \right] F[J] = \\ &= \exp \left[\int \Phi_{\text{in}}(z) K \frac{\delta}{\delta J(z)} dz \right] i \int \Delta(x-y) K \frac{\delta F[J]}{\delta J(y)} dy, \\ \frac{\delta \langle S I \rangle}{\delta J(y)} &= \exp \left[\int \Phi_{\text{in}}(z) K \frac{\delta}{\delta J(z)} dz \right] \frac{\delta F[J]}{\delta J(y)}, \end{aligned}$$

и, таким образом, выражение (6.157) является решением уравнения (6.156). Чтобы найти $F[J]$, вычислим вакуумное среднее выражения (6.157). Это означает прежде всего, что мы должны произвести нормальное упорядочение экспоненты. Однако, выполняя это, мы видим, что

$$\langle 0 | e^A | 0 \rangle = 1$$

для любого оператора A , и, следовательно, мы имеем

$$\langle 0 | S I [J] | 0 \rangle = F[J].$$

В то же время

$$\langle 0 | S I [J] | 0 \rangle = \langle 0 | I [J] | 0 \rangle = Z[J],$$

т. е. $F[J]$ просто совпадает с $Z[J]$, и мы имеем

$$S I [J] = : \exp \left[\int \Phi_{\text{in}}(z) K \frac{\delta}{\delta J(z)} dz \right] : Z[J].$$

Окончательно, замечая, что $I[J] \rightarrow 1$ при $J \rightarrow 0$, получаем

$$S = : \exp \left[\int \Phi_{\text{in}}(z) K \frac{\delta}{\delta J(z)} dz \right] : Z[J] \Big|_{J=0}. \quad (6.158)$$

Это — редукционная формула в функциональной форме. Разлагая экспоненту в ряд, мы получаем типичный член, содержащий величину $(\delta/\delta J)^n Z[J] \Big|_{J=0}$, что, очевидно, совпадает с n -точечной функцией Грина. Для каждой внешней частицы мы имеем оператор $K = (\square + m^2)$, редуцирующий пропагатор к дельта-функции, которую мы затем умножаем на волновую функцию свободной частицы Φ_{in} . В последней формуле, очевидно, Φ_{in} является не волновой функцией, а оператором поля. Заметим, что S — оператор. Мы покажем, что когда мы находим определенный матричный элемент S -матрицы, он действительно определяется простым рецептом. Чтобы быть более конкретными, найдем сначала вариационные производные

$$\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J(x_1)} \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J(x_2)} \dots \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J(x_n)} Z[J] \Big|_{J=0} = G(x_1, \dots, x_n),$$

которые являются n -точечными функциями Грина, затем умножим их на оператор

$$\prod_i (\square_{x_i} + m^2),$$

который устраняет внешние концы у функций Грина, и, наконец, умножим на волновые функции свободных внешних частиц $\Pi_i \Phi(x_i)$. В результате n -частичный матричный элемент S -матрицы запишется в виде

$$S_n(x_1, \dots, x_n) = \prod_i \Phi(x_i) (\square_{x_i} + m^2) G(x_1, \dots, x_n). \quad (6.159)$$

Необходимо напомнить, что эта формула относится к скалярным полям, тогда как в представляющих интерес физических процессах участвуют спинорные поля. В этом случае оператор Клейна — Гордона $K_x = (\square_x + m^2)$ заменяется оператором Дирака $D_x = (\gamma \cdot \partial + m)$. Теперь мы имеем все необходимые формулы, чтобы вычислить пион-нуклонную амплитуду рассеяния.

§ 6.9. Пион-нуклонная амплитуда рассеяния

Когда имеются скалярное и спинорное поля с массами, m и M , соответственно, формула (6.158) модифицируется:

$$\begin{aligned} S = : \exp \left[\int \left(\Phi_{\text{in}}(x) \vec{K} \frac{\delta}{\delta J} + \right. \right. \\ \left. \left. + \bar{\Psi}_{\text{in}} \vec{D} \frac{\delta}{\delta \eta} - \frac{\delta}{\delta \bar{\eta}} \vec{D} \Psi_{\text{in}} \right) dx \right] : Z[J, \eta, \bar{\eta}] \Big|_0, \end{aligned} \quad (6.160)$$

где

$$D = i\gamma^\mu \partial_\mu - M, \quad \bar{D} = -i\gamma^\mu \partial_\mu - M, \quad (6.161)$$

а стрелки указывают, что операторы K , D и \bar{D} действуют на поля Φ , Ψ и $\bar{\Psi}$, возникающие в результате функционального дифференцирования Z , а не на Φ_{in} , $\bar{\Psi}_{\text{in}}$ и Ψ_{in} . В действительности пион есть псевдоскалярная частица, взаимодействие которой с нуклонной системой описывается лагранжианом

$$\mathcal{L}_{\text{взаим}} = ig \bar{\Psi} \gamma_5 \vec{\tau} \Psi \cdot \vec{\Phi}. \quad (6.162)$$

Билинейная форма $\bar{\Psi} \gamma_5 \Psi$ является псевдоскаляром [формула (2.126)] вследствие чего и $\mathcal{L}_{\text{взаим}}$ является скаляром. Изовекторный ха

ракетер величин $\bar{\psi} \gamma_5 \tau \psi$ и $\vec{\varphi}$ связан с тем, что пионы образуют изовектор. Вводя по определению поля

$$\varphi^{\mp} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\varphi_1 \mp i\varphi_2), \quad \varphi^0 = \varphi_3,$$

будем иметь

$$\mathcal{L}_{\text{взаим}} = i\sqrt{2}g(\bar{p}\gamma_5 n\varphi^+ + \bar{n}\gamma_5 p\varphi^-) + ig(\bar{p}p - \bar{n}n)\varphi^0.$$

Рассмотрим π^+p -рассеяние. В этом случае нас интересует следующая часть лагранжиана взаимодействия:

$$\mathcal{L}_{\text{взаим}} = i\sqrt{2}g(\bar{p}\gamma_5 n\varphi^+ + \bar{n}\gamma_5 p\varphi^-).$$

Полный лагранжиан для этого случая имеет вид

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{\text{взаим}} = & \bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi + M\bar{\psi}\psi + \\ & + \frac{1}{2}\partial^\mu\vec{\varphi}\partial_\mu\vec{\varphi} - \frac{1}{2}m^2\vec{\varphi}^2 + i\sqrt{2}g(\bar{p}\gamma_5 n\varphi^+ + \bar{n}\gamma_5 p\varphi^-). \end{aligned} \quad (6.163)$$

Члены, входящие в свободный лагранжиан \mathcal{L}_0 , являются изоскалярами. В лагранжиане взаимодействия полевые операторы n и p описывают уничтожение частиц n и p или рождение соответствующих античастиц; φ^+ описывает уничтожение π^+ или рождение π^- , φ^- описывает уничтожение π^- или рождение π^+ .

Производящий функционал $Z[J, \eta, \bar{\eta}]$ дается формулой, аналогичной формуле (6.76):

$$Z[J, \eta, \bar{\eta}] = \frac{\exp \left\{ i \int \left(i\sqrt{2}g \frac{\delta}{\delta\eta(z)} \gamma_5 \frac{\delta}{\delta\bar{\eta}(z)} \frac{\delta}{\delta J(z)} \right) dz \right\} Z_0[J, \eta, \bar{\eta}]}{[\dots] |_{J=\eta=\bar{\eta}=0}}, \quad (6.164)$$

где

$$\begin{aligned} Z[J, \eta, \bar{\eta}] = & \frac{\int \mathcal{D}\varphi \mathcal{D}\eta \mathcal{D}\bar{\eta} \exp \left[i \int \left(\bar{\psi}S^{-1}\psi - \frac{1}{2}\varphi K\varphi + \bar{\eta}\psi + \bar{\psi}\eta + J\varphi \right) dx \right]}{[\dots] |_{J=\eta=\bar{\eta}=0}} = \\ = & \exp \left\{ -i \int \left[\frac{1}{2}J(x)\Delta_F(x-y)J(y) + \right. \right. \\ & \left. \left. + \bar{\eta}(x)S(x-y)\eta(y) \right] dx dy \right\}. \end{aligned} \quad (6.165)$$

Здесь J и η — источники рассматриваемых пионных и нуклонных

полей. Это станет ясно ниже, когда мы воспользуемся этими выражениями. Вычислим, однако, сначала матричный элемент S -матрицы, соответствующий π^+p -рассеянию, и покажем, что он получается из соответствующей функции Грина способом, описанным в конце предыдущего параграфа.

Кинематика процесса показана на рис. 6.6. Начальный фотон обладает импульсом p и спином s , начальный пион обладает импульсом k , конечные значения этих величин обозначены штрихом. Вычислим амплитуду рассеяния

$$S_{fi} = \langle p', s'; k' | S | p, s; k \rangle,$$

где

$$S = : \exp \int \varphi_{in} \vec{K} \frac{\delta}{\delta J} + \bar{\psi}_{in} \vec{D} \frac{\delta}{\delta \bar{\eta}} - \frac{\delta}{\delta \eta} \bar{D} \psi_{in} : Z \Big|_0.$$

Операторы $K(\delta/\delta J)$, $D(\delta/\delta\bar{\eta})$ и $(\delta/\delta\eta)\bar{D}$, действующие непосредственно на Z , можно вынести за скобку. Записывая начальное и конечное состояния в виде

$$\begin{aligned} |p, s; k\rangle &= b_s^\dagger(p) a^\dagger(k) |0\rangle, \\ \langle p', s'; k'| &= \langle 0 | b_{s'}(p') a(k') \end{aligned}$$

и разлагая экспоненту с точностью до первого порядка, будем иметь

$$\begin{aligned} S_{fi} = & \langle 0 | b_{s'}(p') a(k') \left[1 + : \varphi_{in} \vec{K} \frac{\delta}{\delta J} + \bar{\psi}_{in} \vec{D} \frac{\delta}{\delta \bar{\eta}} - \right. \\ & \left. - \frac{\delta}{\delta \eta} \bar{D} \psi_{in} : + \dots \right] Z b_s^\dagger(p) a^\dagger(k) | 0 \rangle. \end{aligned}$$

Член нулевого порядка дает вклад только при $p = p', s = s'$ и $k = k'$, что соответствует рассеянию без взаимодействия и не представляет интереса. Покажем теперь, что член первого порядка равен нулю. Общая идея состоит в том, чтобы заменить порядок операторов рождения и уничтожения и учесть, что $b_s(p)|0\rangle = a(k)|0\rangle = 0$. Поскольку бозонные и фермионные операторы коммутируют друг с другом, мы можем рассматривать эти члены по отдельности. В этом случае подставим вместо φ_{in} выражение для свободного полевого оператора (4.14), который мы обозначали просто через φ . Бозонный член примет вид

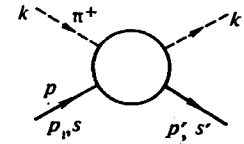


Рис. 6.6. Кинематика π^+p -рассеяния. Сплошная линия соответствует протону, а прерывистая — пиону.

$$\begin{aligned} & \langle 0 | a(k') \int dx \frac{d^3q}{[(2\pi)^3 2\omega_q]^{1/2}} [f_q(x) a(q) + f_q^*(x) a^\dagger(q)] \times \\ & \times a^\dagger(k') | 0 \rangle \bar{K} \frac{\delta}{\delta J} = \\ & = \langle 0 | a(k') \int dx \frac{d^3q}{[(2\pi)^3 2\omega_q]^{1/2}} f_q(x) [a(q), a^\dagger(k)] + \\ & + \int dx \frac{d^3q}{[(2\pi)^3 2\omega_q]^{1/2}} f_q^*(x) [a(k'), a^\dagger(q)] a^\dagger(k) | 0 \rangle \bar{K} \frac{\delta}{\delta J} = 0, \end{aligned}$$

где мы воспользовались тем, что выписанные коммутаторы являются c -числами, вследствие чего в первом члене оператор $a(k')$ действует на $|0\rangle$, а во втором $a^\dagger(k)$ действует на $\langle 0|$. В результате член первого порядка равен нулю, что и требовалось.

Рассмотрим теперь член второго порядка. Коэффициент при величине $(1/2)(\bar{K}(\delta/\delta J))^2$ в бозонном секторе равен

$$\begin{aligned} & \langle 0 | a(k') \int dx_1 dx_2 \frac{d^3q}{[(2\pi)^3 2\omega_q]^{1/2}} \frac{d^3q'}{[(2\pi)^3 2\omega_{q'}]^{1/2}} \times \\ & \times [f_q(x_1) f_{q'}(x_2) a(q) a(q') + \\ & + f_q(x_1) f_{q'}^*(x_2) a^\dagger(q') a(q) + f_q^*(x_1) f_{q'}(x_2) a^\dagger(q) a(q') + \\ & + f_q^*(x_1) f_{q'}^*(x_2) a^\dagger(q) a^\dagger(q')] a^\dagger(k) | 0 \rangle. \end{aligned} \quad (6.166)$$

Здесь было выполнено нормальное упорядочение, так что операторы уничтожения расположены справа от операторов рождения. Как и выше, мы запишем выбранные подходящим образом произведения операторов a и a^\dagger в виде коммутаторов (т. е. c -чисел), откуда ясно, что первый и последний члены равны нулю. Что касается второго и третьего членов, то заметим сначала, что

$$\begin{aligned} \langle 0 | a(k') a^\dagger(q') a(q) a^\dagger(k) | 0 \rangle & = \langle 0 | [a(k'), a^\dagger(q')] [a(q), a^\dagger(k)] | 0 \rangle = \\ & = (2\pi)^3 4\omega_k \omega_k \delta^3(k' - q') \delta^3(q - k), \\ \langle 0 | a(k') a^\dagger(q) a(q') a^\dagger(k) | 0 \rangle & = (2\pi)^3 4\omega_k \omega_k \delta^3(k' - q) \delta^3(k - q'). \end{aligned}$$

В результате выражение (6.166) в силу формулы (4.11) принимает вид

$$\int dx_1 dx_2 \frac{d^3q d^3q'}{[4\omega_q \omega_{q'}]^{1/2}} 4\omega_k \omega_{k'} \frac{1}{[4\omega_q \omega_{q'}]^{1/2}} \times$$

$$\begin{aligned} & \times [e^{-i(qx_1 - q'x_2)} \delta^3(k' - q') \delta^3(q - k) + e^{i(qx_1 - q'x_2)} \delta^3(k' - q) \delta^3(k - q')] = \\ & = \int dx_1 dx_2 (e^{-ik'x_1} e^{ik'x_2} + e^{ik'x_1} e^{-ik'x_2}). \end{aligned}$$

Все это выражение служит коэффициентом при величине

$$\frac{1}{2} K_{x_1} \frac{\delta}{\delta J(x_1)} K_{x_2} \frac{\delta}{\delta J(x_2)} Z[J, \eta, \bar{\eta}] \Big|_{J=0}.$$

Вследствие симметрии относительно подстановки $x_1 \leftrightarrow x_2$ бозонный вклад в матричный элемент S -матрицы равен

$$\int dx_1 dx_2 e^{ik'x_2} K_{x_2} \frac{\delta}{\delta J(x_1)} \frac{\delta}{\delta J(x_2)} Z[J, \eta, \bar{\eta}]_{J=0} \bar{K}_{x_1} e^{-ik'x_1} \quad (6.167)$$

где стрелка над оператором K_{x_1} означает, что он действует на функциональную производную от Z . Обратимся теперь к фермионному сектору, в котором мы имеем аналогичную картину. Мы должны вычислить величину

$$\begin{aligned} & \int dx_3 dx_4 \langle 0 | b_s'(p') : [\bar{\psi}(x_4) D_{x_4} \frac{\delta}{\delta \bar{\eta}(x_4)} - \\ & - \psi(x_4) \frac{\delta}{\delta \eta(x_4)} \bar{D}_{x_4}] \times \\ & \times [\bar{\psi}(x_3) D_{x_3} \frac{\delta}{\delta \bar{\eta}(x_3)} - \psi(x_3) \frac{\delta}{\delta \eta(x_3)} \bar{D}_{x_3}] : b_s^\dagger(p) | 0 \rangle. \end{aligned}$$

Подставляя вместо $\psi(x)$ и $\bar{\psi}(x)$ их разложения (4.44) и превращая произведение операторов в антикоммутаторы, мы видим, что члены $c : \bar{\psi}(x_4) \bar{\psi}(x_3) : ; : \psi(x_4) \psi(x_3) :$ обращаются в нуль, тогда как член $c : \bar{\psi}(x_4) \psi(x_3) :$ дает

$$\begin{aligned} & -\langle 0 | b_s'(p') \int \frac{d^3q d^3q'}{(2\pi)^6} \frac{M^2}{q'_0 q_0} \sum_{\alpha\alpha'} \times \\ & \times : [b_\alpha^\dagger(q) \bar{u}^\alpha(q) e^{iqx_4} + d_\alpha(q) \bar{v}^\alpha(q) e^{-iqx_4}] \times \\ & \times [b_{\alpha'}^\dagger(q') u^{\alpha'}(q') e^{-iq'x_3} + d_{\alpha'}^\dagger(q') v^{\alpha'}(q') e^{iq'x_3}] : b_s^\dagger(p) | 0 \rangle = \\ & = - \int \frac{d^3q d^3q'}{(2\pi)^6} \frac{M^2}{q'_0 q_0} \sum_{\alpha\alpha'} \langle 0 | b_s'(p') b_\alpha^\dagger(q) \times \\ & \times b_{\alpha'}(q') b_s^\dagger(p) | 0 \rangle \bar{u}^\alpha(q) u^{\alpha'}(q') e^{iqx_4} e^{-iq'x_3} = \\ & = -\bar{u}^s(p') u^s(p) e^{ip'x_4} e^{-ipx_3}. \end{aligned}$$

Другой отличный от нуля член $:\psi(x_4)\bar{\psi}(x_3):$ дает такое же выражение, в котором, однако, произведена подстановка $x_3 \leftrightarrow x_4$ и имеется дополнительный знак минус, вытекающий из определения нормального упорядочения [см. замечание перед соотношением (4.48)]. Эти члены являются коэффициентами при операторах $(1/2D_{x_4}(\delta/\delta\eta(x_4))(\delta/\delta\eta(x_3))\bar{D}_{x_3}$ и $(1/2)(\delta/\delta\eta(x_4))D_{x_3}D_{x_4}(\delta/\delta\eta(x_3))$. Выполнив подстановку $x_3 \leftrightarrow x_4$ во втором члене и учитывая то обстоятельство, что величины D коммутируют, а $\delta/\delta\eta$ и $\delta/\delta\eta$ антикоммутируют и это добавляет знак минус, мы можем записать фермионный вклад в матричный элемент S -матрицы в виде

$$\int dx_3 dx_4 e^{ip'x_4 - iu's'(p')} D_{x_4} \frac{\delta}{\delta\eta(x_3)} \frac{\delta}{\delta\eta(x_4)} Z[J, \eta, \bar{\eta}] |_{\eta=\bar{\eta}=0} \times \overleftarrow{D}_{x_3} u^s(p) e^{-ipx_3}. \quad (6.168)$$

Наконец, складывая пионный и нуклонный вклады, мы можем записать амплитуду пион-нуклонного рассеяния в виде

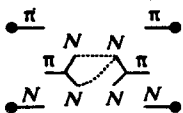
$$S_{\pi N} = \int dx_1 \dots dx_4 e^{ik'x_1} e^{ip'x_4 - iu's'(p')} \times \overrightarrow{K}_{x_2} \overrightarrow{D}_{x_4} \tau(x_1, \dots, x_4) \overleftarrow{D}_{x_3} \overleftarrow{K}_{x_1} u^s(p) e^{-ipx_3} e^{-ikx_1}, \quad (6.169)$$

где $\tau(x_1, x_2, x_3, x_4)$ — 4-точечная функция, или функция Грина: $\tau(x_1, x_2, x_3, x_4) =$

$$= \frac{\delta}{\delta J(x_1)} \frac{\delta}{\delta J(x_2)} \frac{\delta}{\delta\eta(x_3)} \frac{\delta}{\delta\bar{\eta}(x_4)} Z[J, \eta, \bar{\eta}] |_{\eta=\bar{\eta}=0}. \quad (6.170)$$

Такова суть редукционной формулы для данного частного процесса рассеяния. Амплитуда рассеяния получается из функции Грина умножением на оператор Клейна — Гордона или Дирака, соответствующий внешним частицам, последующим умножением на волновые функции частиц в точках x_1, \dots, x_4 и интегрированием по x_1, \dots, x_4 . Этот рецепт носит общий характер, хотя и представлен здесь лишь для случая пион-нуклонного рассеяния.

Рис. 6.7. Предиаграмма для πN -рассеяния во втором порядке, показывающая различные способы построения диаграммы Фейнмана.



Чтобы найти явное выражение для матричного элемента, нам необходимо знать 4-точечную функцию, получаемую функциональным дифференцированием производящего функционала (6.164). Но нам нет необхо-

димости производить эти вычисления явно, поскольку мы можем воспользоваться правилами, которые мы сформулировали в § 6.5, произведя необходимые изменения, связанные с переходом от взаимодействия ϕ^4 к $i\psi\gamma_5\psi\phi$. Прежде всего изобразим предиаграмму, соответствующую переходу (πN) в (πN) , с двумя членами,

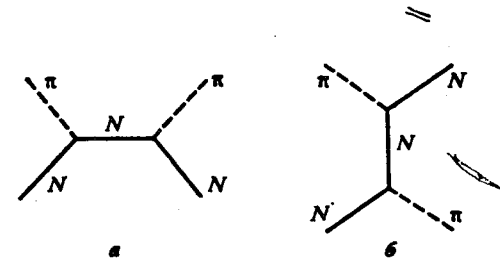


Рис. 6.8. Связные диаграммы Фейнмана для пион-нуклонного рассеяния во втором порядке.

отвечающими взаимодействию. Нас интересуют только связанные диаграммы Фейнмана, поскольку только они дают вклад в рассеяние. Пионные линии, исходящие из вершины, соответствующей взаимодействию, должны быть соединены с внешними пионными линиями, а две нуклонные линии вершины должны быть соединены между собой. Очевидно, что это можно сделать двумя способами, указанными прерывистыми линиями на рис. 6.7. Две получающиеся при этом диаграммы Фейнмана изображены на рис. 6.8. Напомним, что эти диаграммы в соответствии с нашим соглашением должны читаться слева направо (падающие частицы расположены слева). Многие авторы располагают их в направлении снизу вверх. В действительности наиболее логично было бы располагать их в направлении справа налево, так же как записывается матричный элемент $\langle \text{out} | S | \text{in} \rangle$. В общем случае обе диаграммы, изображенные на рис. 6.8, дают вклад в рассеяние и в выражение для сечения входит интерференционный член, столь характерный для квантовых явлений. Однако в случае π^+p -рассеяния диаграмма, изображенная на рис. 6.8, а, не дает вклада, поскольку не существует промежуточного нуклонного состояния N^{++} с зарядом 2. Виртуальное N -состояние на рис. 6.8, б в данном случае является нейтроном. Вспоминая, что константа связи для $(\pi^+p n)$ -

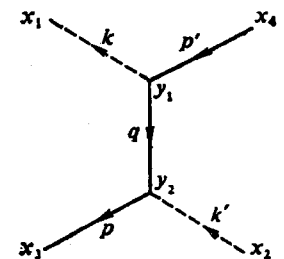


Рис. 6.9. Рассеяние π^+p .

вершины [формула (6.163)] равна $\sqrt{2g}$ и что вершина содержит фактор $(i\gamma_5)$, мы можем непосредственно написать 4-точечную функцию в случае диаграммы, изображенной на рис. 6.8, б и более детально на рис. 6.9:

$$\begin{aligned} \tau(x_1, x_2, x_3, x_4) &= 2g^2 \int dy_1 dy_2 \times \\ &\times i\Delta_F(x_2 - y_2) iS(x_4 - y_1) i\gamma_5 iS(y_1 - y_2) \times \\ &\times i\gamma_5 iS(y_2 - x_3) i\Delta_F(x_1 - y_1). \end{aligned} \quad (6.171)$$

Это выражение нужно подставить в формулу (6.169). Вспоминая, что

$$\begin{aligned} K_x \Delta_F(x - y) &= (\square_x + m^2) \Delta_F(x - y) = -\delta^4(x - y), \\ D_x S(x - y) &= (i\gamma \cdot \partial_x - M) S(x - y) = \delta^4(x - y), \\ S(x - y) \overleftarrow{D}_x &= S(x - y) (-i\overleftarrow{\gamma} \cdot \partial_x - M) = \delta^4(x - y), \end{aligned}$$

мы получаем

$$\begin{aligned} S_{11} &= -2ig^2 \int dx_1 \dots dx_4 dy_1 dy_2 e^{ik'x_4} e^{ip'x_1} \bar{u}^{s'}(p') \delta^4(x_2 - y_2) \times \\ &\times \delta^4(x_4 - y_1) \gamma_5 S(y_1 - y_2) \gamma_5 \delta^4(y_2 - x_3) \times \\ &\times \delta^4(y_1 - x_1) u^s(p) e^{-ipx_3} e^{-ikx_1} = \\ &= -2ig^2 \int dy_1 dy_2 e^{i(p'-k)y_1} e^{i(k'-p)y_2} \times \\ &\times \bar{u}^{s'}(p') \gamma_5 S(y_2 - y_1) \gamma_5 u^s(p). \end{aligned}$$

Комбинируя выражения (6.135) для $S(x)$ и (6.14) для $\Delta_F(x)$, мы имеем

$$S(y_1 - y_2) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int dq \frac{\gamma^\mu q_\mu + M}{q^2 - M^2} e^{-iq(y_1 - y_2)}. \quad (6.172)$$

Подставляя это выражение в предыдущее соотношение, мы можем провести сначала интегрирование по y_1 и y_2 :

$$\begin{aligned} \int dy_1 dy_2 e^{i(p'-k)y_1} e^{i(k'-p)y_2} e^{-iq(y_1 - y_2)} &= \\ &= (2\pi)^8 \delta^4(p' - k - q) \delta^4(k' - p + q) = \\ &= (2\pi)^8 \delta^4(q - p + k') \delta^4(p' + k' - p - k) = \\ &= (2\pi)^8 \delta^4(q - p + k') \delta^4(P_f - P_i). \end{aligned}$$

Мы видим, что 4-импульс промежуточного нейтрона равен q и что сохраняется как полный 4-импульс, так и 4-импульс в каждой вершине. Теперь можно провести интегрирование по q , причем q заменяется величиной $p - k' = p' - k$. Следовательно,

$$\begin{aligned} S_{11} &= -i\delta^4(P_f - P_i) 2g^2 (2\pi)^4 \times \\ &\times \bar{u}^{s'}(p') \gamma_5 \frac{\gamma \cdot (p - k') + M}{(p - k')^2 - M^2} \gamma_5 u^s(p). \end{aligned} \quad (6.173)$$

Теперь, используя уравнение Дирака (2.140) в импульсном пространстве и свойства γ -матриц, мы можем упростить это выражение следующим образом:

$$S_{11} = i\delta^4(P_f - P_i) 2g^2 (2\pi)^4 \bar{u}^{s'}(p') \gamma \cdot k' u^s(p) \frac{1}{2pk' - m^2}. \quad (6.174)$$

Далее нужно с помощью амплитуды рассеяния определить сечение рассеяния, и это будет сделано в следующем параграфе. Но прежде чем закончить данный параграф, мы приведем краткую сводку правил Фейнмана для вычисления амплитуды рассеяния в случае взаимодействия, включающего скалярные (или псевдоскалярные) и спинорные частицы. Мы увидим, что в частном случае π^+p -рассеяния в низшем порядке теории возмущений они приводят к выражению (6.173).

1. Порядку n теории возмущений соответствует диаграмма с n вершинами. Амплитуда определенного процесса (т. е. процесса с определенным набором входящих и выходящих внешних линий) в данном порядке получается суммированием амплитуд, отвечающих всем топологически неэквивалентным связным диаграммам. На рис. 6.8 изображены две диаграммы, соответствующие рассеянию (псевдо) скаляр — спинор во втором порядке. На рис. 6.10 изображены некоторые диаграммы четвертого порядка. Спинорные линии непрерывные, скалярные линии пунктирные.

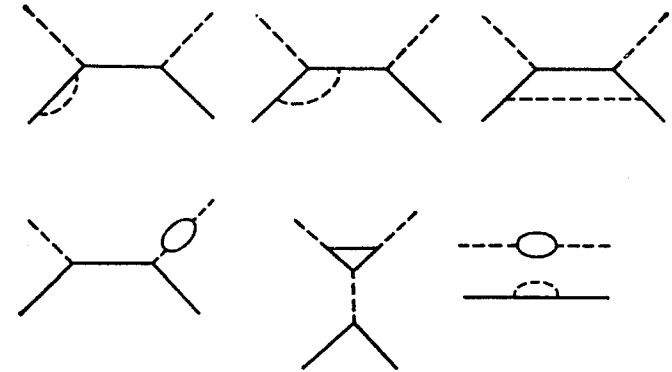


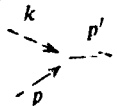
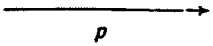
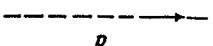


Рис. 6.10. Некоторые диаграммы четвертого порядка для скаляр/псевдоскаляр-спинорного рассеяния (например, пион-нуклонного рассеяния). Последняя диаграмма является несвязной и не учитывается.

2. Каждой входящей спинорной частице сопоставляем величину $u(p)$ [$\bar{u}(p)$ для соответствующей античастицы], каждой выходящей спинорной частице сопоставляем величину $\bar{u}(p)$.
3. Каждой вершине сопоставляем множитель ig (в случае скалярного взаимодействия) или $ig\gamma_5$ (в случае псевдоскалярного взаимодействия), где g — соответствующая константа связи, входящая в лагранжиан взаимодействия, и умножаем далее на $(2\pi)^4\delta^4$ (от импульсов, входящих в вершину).
4. Каждому спинорному пропагатору (внутренняя линия) с импульсом p сопоставляем величину $i/(2\pi)^4 i/(\gamma \cdot p - M)d^4p$.
5. Каждому (псевдо)скалярному пропагатору сопоставляем величину $[i/(2\pi)^4 i/(p^2 - m^2)]d^4p$.
6. Интегрируем по всем внутренним импульсам.

Эти правила сведены в табл. 6.1.

Таблица 6.1. Правила Фейнмана для скалярной (или псевдоскалярной) и спинорной теорий

Множитель в S-матрице	Графическое представление
$u(p)$	 Входящий фермион (внешняя линия)
$\bar{u}(p)$	 Выходящий фермион (внешняя линия)
$ig(\gamma_5)(2\pi)^4\delta^4(p+k-p')$	 Вершина
$\frac{i}{(2\pi)^4} \frac{1}{\gamma \cdot p - M} \left(\text{берется интеграл} \int d^4p \right)$	 Фермионный пропагатор (внутренняя линия)
$\frac{i}{(2\pi)^4} \frac{1}{p^2 - m^2} \left(\text{берется интеграл} \int d^4p \right)$	 Скалярный пропагатор (внутренняя линия)

§ 6.10. Сечение рассеяния

Покажем теперь, как вычислить сечение рассеяния, зная амплитуду рассеяния. Определим сначала лоренц-инвариантную амплитуду M соотношением

$$\langle p'_1, p'_2, \dots, |S - 1| p_1, p_2, \dots \rangle = (2\pi)^4 \delta^4(P_f - P_i) iM(p_1, p_2, \dots, p_1, p_2, \dots), \quad (6.175)$$

учитывая, что предшествующие вычисления не включают вклад в S-матрицу единичной матрицы. Эта амплитуда содержит только вклад связной части оператора $S - 1$, что будет подразумеваться.

В дальнейшем для простоты будем рассматривать простейший случай рассеяния две частицы \rightarrow две частицы.

Начальные частицы являются, вообще говоря, не состояниями с фиксированными импульсами p_1, p_2 , а волновыми пакетами вида

$$\text{Начальное состояние } |i\rangle = \int \frac{d^3k_1}{(2\pi)^3 2k_1^0} \frac{d^3k_2}{(2\pi)^3 2k_2^0} f(k_1) f(k_2) |k_1, k_2\rangle,$$

которые имеют резкие максимумы вблизи значений p_1 и p_2 :

$$k_1 \approx p_1, \\ k_2 \approx p_2.$$

Конечное состояние имеет вид

$$|f\rangle = |p'_1, p'_2\rangle,$$

и, таким образом, мы имеем следующее выражение для амплитуды перехода (при $d\tilde{k} = d^3k/(2\pi)^3 2k^0$):

$$\int d\tilde{k}_1 d\tilde{k}_2 f(k_1) g(k_2) \langle p'_1 p'_2 | S - 1 | k_1 k_2 \rangle = (2\pi)^4 i \int d\tilde{k}_1 d\tilde{k}_2 f(k_1) g(k_2) \delta(p'_1 + p'_2 - k_1 - k_2) M(p'_1, p'_2, k_1, k_2).$$

Вероятность перехода равна

$$W = (2\pi)^8 \int d\tilde{k}_1 d\tilde{k}_2 d\tilde{q}_1 d\tilde{q}_2 f(k_1) g(k_2) \times f^*(q_1) g^*(q_2) \delta(p'_1 + p'_2 - k_1 - k_2) \delta(p'_1 + p'_2 - q_1 - q_2) \times M(p'_1, p'_2, k_1, k_2) M^*(p'_1, p'_2, q_1, q_2).$$

Благодаря первой дельта-функции вторую можно записать в виде $\delta(k_1 + k_2 - q_1 - q_2)$. Далее, поскольку функции f и g имеют максимумы вблизи значений p_1 и p_2 , мы можем аппроксимировать M в предшествующих формулах величиной $M(p'_1, p'_2, p_1, p_2)$. Наконец, чтобы получить W в окончательной форме, мы введем фурье-образы функций f и g :

$$\tilde{f}(x) = \int d\tilde{q} e^{iqx} f(q),$$

где, как и выше,

$$d\tilde{q} = \frac{d^3q}{(2\pi)^3 2q_0}.$$

Итак,

$$|\tilde{f}(x)|^2 = \int d\tilde{k}_1 d\tilde{q}_1 e^{i(k_1 - q_1)x} f(k_1) f^*(q_1)$$

и аналогично

$$|\tilde{g}(x)|^2 = \int d\tilde{k}_2 d\tilde{q}_2 e^{i(k_1 - q_2)x} g(k_2) g^*(q_2).$$

Величины $\tilde{f}(x)$ и $\tilde{g}(x)$ являются волновыми функциями входящих частиц. Учитывая также равенство

$$(2\pi)^4 \delta(k_1 + k_2 - q_1 - q_2) = \int e^{i(k_1 + k_2 - q_1 - q_2)x} d^4x,$$

мы получаем в результате этих вычислений

$$W = \int d^4x |\tilde{f}(x)|^2 |\tilde{g}(x)|^2 2(\pi)^4 \delta(p_1' + p_2' - p_1 - p_2) \times \\ \times |M(p_1', p_2', p_1, p_2)|^2. \quad (6.176)$$

Первый множитель учитывает перекрытие волновых функций, которое является неперенным условием рассеяния. Он равен единице в случае, когда начальное состояние является собственным состоянием оператора импульса. Второй множитель есть известное выражение золотого правила Ферми. Теперь мы можем записать выражение для вероятности перехода в единице объема в единицу времени в виде

$$\frac{dW}{dV dt} = |\tilde{f}(x)|^2 |\tilde{g}(x)|^2 (2\pi)^4 \delta(p_1' + p_2' - p_1 - p_2) \times \\ \times |M(p_1', p_2', p_1, p_2)|^2$$

Используя нашу ковариантную нормировку, при которой на единицу объема приходится $2p_0$ частиц (§ 4.1), получаем, что в нашем случае число частиц «1» на единицу объема равно $|\tilde{f}(x)|^2 2p_1^0$, а соответствующее число частиц «2» равно $|\tilde{g}(x)|^2 2p_2^0$. Предположим теперь, что частицы 2 первоначально находятся в состоянии покоя $p_2^0 = m_2$. Падающий поток равен произведению относительной скорости $v = |p_1|/p_{10}$ на плотность частиц $2p_{10}|\tilde{f}(x)|^2$, т. е. он равен $2|p_1||\tilde{f}(x)|^2$. Аналогично плотность мишени равна $2m_2|\tilde{g}(x)|^2$.

Сечение рассеяния $d\sigma$ определяется теперь через число переходов за единицу времени в единицу объема, т. е. через $dW/dV dt$, соотношением

$$\frac{dW}{dV dt} = (\text{падающий поток}) \times (\text{плотность мишени}) \times d\sigma,$$

что дает

$$d\sigma = (2\pi)^4 \delta^4(p_1' + p_2' - p_1 - p_2) \frac{1}{4m_2 |p_1|} |M|^2.$$

Существует лоренц-инвариантное обобщение величины $m_2|p_1|$, а именно:

$$B = [(p_1 \cdot p_2)^2 - m_1^2 m_2^2]^{1/2} = m_2|p_1| \text{ в лабораторной системе.}$$

В том виде, в каком оно определено выше, сечение рассеяния относится к неопределенному конечному состоянию, подчиняющемуся единственному условию $p_1' + p_2' = p_1 + p_2$. Однако в лаборатории измеряется дифференциальное сечение рассеяния в данный телесный угол $d\Omega$, т. е. рассеяния с конечным импульсом, лежащим в интервале dp_1 . Поэтому запишем сечение для случая, когда конечные импульсы принадлежат элементу объема $d^3p_1 d^3p_2$ импульсного пространства, в виде

$$d\sigma = \frac{(2\pi)^4}{4B} \frac{d^3p_1}{(2\pi)^3 2(p_1^0)} \frac{d^3p_2}{(2\pi)^3 2(p_2^0)} \delta(p_f - p_i) |M|^2. \quad (6.177)$$

В случае когда начальные частицы обладают спинами s_1 и s_2 , производится суммирование по спиновым состояниям, так что для первоначально неполяризованного состояния мы производим замену

$$|M|^2 \rightarrow \frac{1}{(2s_1 + 1)(2s_2 + 1)} \sum_{s_i, s_f} |M_{fi}|^2.$$

Приведенные формулы справедливы для бозонов. Если рассматриваются (массивные) фермионы, то нормировка дираковских спиноров соответствует p_0/m частицам в единице объема. В результате если мишень является фермионом, то плотность мишени равна $|\tilde{g}(x)|^2$. В случае когда в конечном состоянии имеется фермион, лоренц-инвариантный элемент объема фазового пространства $d^3p/(2\pi)^3 2p_0$ заменяется величиной $(m/p_0) [d^3p/(2\pi)^3]$. Суммируя сказанное, получаем сечение пион-нуклонного рассеяния в виде

$$d\sigma = \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{d^3p_1'}{2E_1'} \frac{d^3p_2'}{E_2'/M} \frac{M}{2B} \delta^4(p_f - p_i) \frac{1}{2} \sum_{\text{спин}} |M_{fi}|^2 = \\ = \frac{1}{32\pi^2} \frac{d^3p_1'}{E_1'} \frac{d^3p_2'}{E_2'} \frac{M^2}{B} \delta(E_1' + E_2' = E_i) \delta^3(p_1' + p_2' - p_i) \sum_{\text{спин}} |M_{fi}|^2.$$

Будем работать в системе центра масс:

$$p_1' = -p_2' \equiv p_f.$$

Тогда интеграл по фазовому пространству примет вид

$$I = \int \frac{d^3 p_1'}{E_1'} \frac{d^3 p_2'}{E_2'} \delta(E_1' + E_2' - E_i) \delta^3(p_1' + p_2' - p_i) =$$

$$= \int \frac{d^3 p_f}{E_1' E_2'} \delta(E_1' + E_2' - E_i) = \int \frac{p_f^2 dp_f d\Omega_f}{E_1' E_2'} \delta(E_1' + E_2' - E_i).$$

Используя формулу

$$\delta(f(x)) = [f'(x_0)]^{-1} \delta(x - x_0), \text{ где } f(x_0) = 0,$$

мы видим, что

$$I = \frac{p_f}{E_i} \int d\Omega_f.$$

Следовательно, дифференциальное сечение имеет вид

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{32\pi^2} \frac{M^2 p_f}{BE_i} \sum_{\text{Спин}} |M_{fi}|^2.$$

В системе центра масс $B = p_f(E_1' + E_2') = p_f W$, где $W = E_i$ — полная энергия системы, мы получаем

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{32\pi^2} \left(\frac{M}{W}\right)^2 \sum_{\text{Спин}} |M_{fi}|^2. \quad (6.178)$$

Инвариантная амплитуда M_{fi} получается сравнением выражений (6.174) и (6.175):

$$M_{fi} = 2g^2 \bar{u}^{s'}(p') \gamma \cdot k' u^s(p) \frac{1}{2p \cdot k' - m^2}. \quad (6.179)$$

Теперь мы должны вычислить величину вида

$$\sum_{\text{Спин}} |\bar{u}' A u|^2,$$

где $u' = u^{s'}(p')$, а A — оператор, построенный из матриц Дирака. Мы имеем

$$(\bar{u}' A u)^* = u'^T \gamma^{0*} A^* u^* = u^\dagger A^\dagger \gamma^0 \dagger u' = \bar{u} \bar{A} u',$$

где $\bar{A} = \gamma^0 A^\dagger \gamma^0$. Следовательно,

$$|\bar{u}' A u|^2 = (\bar{u}' A u)^* (\bar{u}' A u) = \bar{u} \bar{A} u' \bar{u}' A u =$$

$$= \bar{u}_k A_{kl} u_l \bar{u}_m \bar{A}_{mi} u_i = \bar{u}_i \bar{u}'_k A_{kl} u_l \bar{u}_m \bar{A}_{mi}.$$

Чтобы выполнить суммирование по спинам, мы обратимся к соотношению (2.145)

$$\sum_a u_i^a(p) \bar{u}_j^a(p) = \left(\frac{\gamma \cdot p + M}{2M}\right)_{ij},$$

что дает

$$\sum_{\text{Спин}} |\bar{u}' A u|^2 = \text{Tr} \left(\frac{\gamma \cdot p' + M}{2M} \right) A \left(\frac{\gamma \cdot p + M}{2M} \right) \bar{A}, \quad (6.180)$$

где берется след матрицы Дирака. Нам известно также [формулы (2.147) и (2.151)], что

$$\text{Tr}(\gamma \cdot a)(\gamma \cdot b) = 4a \cdot b,$$

$$\text{Tr}(\gamma \cdot a)(\gamma \cdot b)(\gamma \cdot c)(\gamma \cdot d) = -\text{Tr}(\gamma \cdot b)(\gamma \cdot a)(\gamma \cdot c)(\gamma \cdot d) +$$

$$+ 2a \cdot b \text{Tr}(\gamma \cdot c)(\gamma \cdot d)$$

и что след нечетного числа γ -матриц равен нулю [формула (2.150)]. Это дает

$$\sum_{\text{Спин}} |M_{fi}|^2 = 4g^4 \left(\frac{1}{2p \cdot k' - m^2}\right)^2 \frac{1}{4M^2} \text{Tr}(\gamma \cdot p' + M) \times$$

$$\times \gamma \cdot k' (\gamma \cdot p + M) \gamma \cdot k' =$$

$$= \frac{g^4}{M^2} \left(\frac{1}{2p \cdot k' - m^2}\right)^2 4 [2(p \cdot k')(p' \cdot k') + m^2 [M^2 - (p \cdot p')]].$$

В системе центра масс выполняются соотношения

$$|p| = |p'| = |k| = |k'| = q,$$

$$p = ((q^2 + M^2)^{1/2}, \mathbf{q}), \quad k = ((q^2 + m^2)^{1/2}, -\mathbf{q}),$$

$$p' = ((q^2 + M^2)^{1/2}, \mathbf{q}'), \quad k' = ((q^2 + m^2)^{1/2}, -\mathbf{q}').$$

При низких энергиях мы имеем $m, M \gg q$ и $p \cdot k' \approx Mm, p' \cdot k' \approx \approx Mm, p \cdot p' \approx M^2$, что дает

$$\sum_{\text{Спин}} |M_{fi}|^2 \approx \frac{8g^4}{(2M - m)^2}.$$

Следовательно, поскольку $W \approx M + m$, соотношение (6.178) принимает вид

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{g^4}{4\pi^2} \left(\frac{M}{M+m}\right)^2 \frac{1}{(2M-m)^2} \approx \frac{g^4}{16\pi^2} \frac{1}{M^2} \quad (6.181)$$

при условии, что масса m пренебрежимо мала по сравнению с M .

Если нам известно значение g , то мы можем исходя из первого порядка теории возмущений предсказать значение сечения пион-нуклонного рассеяния. Значение константы взаимодействия g можно определить двумя разными методами, которые дают разные результаты. Во-первых, она может быть определена из энергии связи дейтрона. Потенциал Юкавы, действующий между нуклонами, находящимися на расстоянии r друг от друга, равен

$$V = \frac{g e^{-\eta r}}{r},$$

где $\eta = \lambda_c^{-1}$, причем λ_c — комптоновская длина волны пиона, равная $1,4 \cdot 10^{-15}$ м. На расстоянии $r = 2,8 \cdot 10^{-15}$ м экспоненциальным членом можно пренебречь, и зависимость потенциала от r совпадает с законом Кулона. Мы знаем из теории дейтрона, что глубина потенциальной ямы между двумя нуклонами на расстоянии $2,8 \cdot 10^{-15}$ м равна 20 МэВ. В то же время электростатическое взаимодействие на таком же расстоянии имеет порядок 0,5 МэВ. Следовательно,

$$\frac{g^2}{e^2} \approx \frac{20}{0,5} = 40,$$

где e — электрический заряд протона. Таким образом,

$$\frac{g^2}{\hbar c} \approx 40 \frac{e^2}{\hbar c} \approx 0,5. \quad (6.182)$$

Подставляя это значение в (6.181), мы получаем для сечения значение

$$\sigma = 4\pi \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right) = 4\pi \left(\frac{g^2}{4\pi} \right)^2 \frac{1}{M^2} = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{g^2}{\hbar c} \right)^2 \left(\frac{\hbar}{Mc} \right)^2 \approx 120 \text{ мкб}^1), \quad (6.183)$$

которое на порядок меньше сечения низкоэнергетического пион-нуклонного сечения (равного нескольким миллибарнам).

Во-вторых, значение g можно определить, зная фазы π - N -рассеяния. В рамках теории с производной (m — масса пиона)

$$\mathcal{L}_{\text{взаим}} = \frac{f}{m} \bar{\psi} \gamma_5 \gamma^\mu \tau \psi \cdot \partial_\mu \phi, \quad (6.184)$$

используя статическую теорию с обрезанием, можно предсказать резонансное поведение для амплитуды π - N -рассеяния. Это поведение действительно наблюдалось (см., например, рис. 1.2). Сравне-

¹⁾ $1 \text{ б} = 10^{-28} \text{ м}^2$.

ние теории с измеренными фазами рассеяния дает следующее значение для f^1):

$$\frac{f^2}{4\pi} = 0,08. \quad (6.185)$$

В то же время можно показать²⁾, что в приближении первого порядка псевдовекторная связь (6.184) и псевдоскалярная связь (6.162) эквивалентны друг другу, если $g = (2M/m)f$ (M — масса нуклона). Это дает

$$\frac{g^2}{4\pi} \approx 15. \quad (6.186)$$

Соответствующее сечение равно

$$\sigma = 4\pi \frac{d\sigma}{d\Omega} \approx 48 \text{ б}, \quad (6.187)$$

что намного превышает экспериментальное значение.

В итоге ни одно из значений g не дает согласия с экспериментом. Значение (6.186), которое, по-видимому, воспринимается физиками более серьезно, является настолько большим, что ряд теории возмущений по g^2 расходится. Правильнее было бы считать, что это делает теорию бессмысленной. Однако с современной точки зрения g не является фундаментальным параметром. Основным сильным взаимодействием является калибровочное взаимодействие между кварками и глюонами. Мы рассмотрим эти взаимодействия в следующей главе, а в гл. 9, увидим, что в действительности рассматриваемая константа взаимодействия изменяется в зависимости от энергии, при которой она измеряется. Таким образом, рассмотренный нами пример представляет лишь академический интерес, хотя он и послужил полезной цели: явился иллюстрацией применения правил Фейнмана.

Резюме

1) Строится производящий функционал $Z[J]$ для скалярных полей, который затем преобразуется к виду, включающему пропагатор Фейнмана Δ_F , который также записан в евклидовом пространстве. 2) Вводится функциональное интегрирование и показывается, как результаты 6.1 могут быть получены с его помощью.

¹⁾ См., например, Sakurai J. J. Invariance Principles and Elementary Particles, Princeton University Press, 1964, p. 215.

²⁾ См., например, Schweber S. S., Bethe H. A., de Hoffmann F. Mesons and Fields, vol. 1, Row, Peterson and Co., 1956, Sect. 26. [Имеется перевод: Швейбер С., Бете Г., Гофман Ф. Мезоны и поля. Том 1. — М.: ИЛ, 1956, разд. 26.]

3) Показывается, что $Z_0[J]$ является производящим функционалом для функций Грина свободных частиц, и устанавливается соотношение между n -точечными функциями и вакуумным средним хронологического произведения n полей. Доказывается теорема Вика.

4) Вводятся взаимодействия и устанавливается соотношение между производящим функционалом $Z[J]$ для взаимодействующих полей и производящим функционалом $Z_0[J]$ для свободных полей.

5) Эти результаты применяются к случаю теории ϕ^4 , где вычисляются 2- и 4-точечные функции в первом порядке теории возмущений. Вводятся диаграммы Фейнмана и устанавливается различие между связными и несвязными диаграммами.

6) Находится производящий функционал для связных диаграмм.

7) Вводятся числа Грассмана и показывается, как производящий функционал для спинорного поля может быть записан с использованием элементов алгебры Грассмана.

8) Вводится S -матрица и выводится редуцированная формула, в которой S -матрица выражается через функциональные производные от Z .

9) С помощью этой формулы находится амплитуда пион-нуклонного рассеяния во втором порядке теории возмущений и дается сводка правил Фейнмана для случая скалярных и спинорных полей.

10) Вычисляется сечение π^+p -рассеяния.

Литература для дальнейшего изучения

Первые работы по применению функциональных методов в квантовой теории поля:

1. *Matthews P. T., Salam A.* Nuovo Cimento, 2, 120 (1955).
2. *Higgs P. W.* Nuovo Cimento, 4, 1262 (1956).
3. *Umezawa H., Visconti A.* Nuovo Cimento, 1, 1079 (1955).

Данный вопрос хорошо излагается в книгах:

4. *Nash C.* Relativistic Quantum Fields, Academic Press, 1978.
5. *Amit D. J.* Field Theory, the Renormalization Group, and Critical Phenomena, McGraw-Hill, 1978.
6. *Fried H. M.* Functional Methods and Models in Field Theory, MIT Press, 1972.

Теория грассмановых алгебр излагается в статье:

7. *Fearnley-Sander D.* Amer. Math. Monthly, 86, 809 (1979).

О применении грассмановых алгебр к ферми-полям см. в книгах:

8. *Berezin F. A.* The Method of Second Quantization, Academic Press, 1966. [См. также: *Березин Ф. А.* Метод вторичного квантования. — М.: Наука, 1964.]
9. *Ramond P.* Field Theory: A Modern Primer, Benjamin/Cummings, 1981. [Имеется перевод: *Рамон П.* Теория поля. Современный вводный курс. — М.: Мир, 1984.]
10. *Lee T. D.* Particle Physics and Introduction to Field Theory, Harwood Academic Publishers, 1981.
11. *Itzykson C., Zuber J. B.* Quantum Field Theory, McGraw-Hill, 1980. [Имеется перевод: *Итцксон К., Зюбер Ж.-Б.* Квантовая теория поля. В 2-х томах. — М.: Мир, 1984.]

- Редуцированная формула и S -матрица рассматриваются в работах:
12. *Symanzik K.* — in: Lectures in Theoretical Physics, Vol. III (Boulder, 1960), Interscience, 1961.
 13. *Bjorken J. D., Drell S. D.* Relativistic Quantum Fields, McGraw-Hill, 1965. [Имеется перевод: *Бьёркен Дж. Д., Дрелл С. Д.* Релятивистская квантовая теория. В 2-х томах. — М.: Наука, 1978.]
 14. *Faddeev L. D., Slavnov A. A.* Gauge Fields: Introduction to Quantum Theory, Benjamin/Cummings, 1980. [См. также: *Славнов А. А., Фаддеев Л. Д.* Введение в квантовую теорию калибровочных полей. — М.: Наука, 1978.]
- См. также книги [5, 6, 11].

7

Квантование с помощью функциональных интегралов: калибровочные поля

§ 7.1. Пропагаторы и калибровочные условия в КЭД

В предыдущей главе мы видели, как выводятся правила Фейнмана из производящего функционала, точнее из лагранжиана теории. Как отмечалось в § 6.7 (с. 255), пропагатор есть величина, обратная оператору в квадратичной части лагранжиана. Теперь наша цель — проделать аналогичную работу для калибровочных полей. В данном параграфе сосредоточим внимание на квантовой электродинамике. Оказывается, что из-за свободы осуществлять калибровочные преобразования в этой теории возникают трудности, отсутствующие в случаях скалярного и спинорного полей. Эти трудности мы анализируем как в рамках канонического формализма, так и в рамках формализма функциональных интегралов. Первый из них нагляднее, а второй компактнее, хотя и более абстрактен. Однако именно метод функциональных интегралов оказывается более мощным, и в следующем параграфе мы покажем, как он применяется в случае неабелевых калибровочных полей.

В начале данного параграфа мы укажем на трудность, возникающую при определении пропагатора электромагнитного поля в рамках канонического формализма.

Фотонный пропагатор — канонический формализм

Изучение калибровочных полей мы начнем с рассмотрения производящего функционала, который в случае квантовой электродинамики имеет вид

$$Z[J] = \int \mathcal{D}A_\mu \exp i \int (\mathcal{L} + J^\mu A_\mu) dx, \quad (7.1)$$

где J^μ — внешний токовый источник, а \mathcal{L} — лагранжиан, который в отсутствие полей материи имеет вид

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}. \quad (7.2)$$

Мы пользовались этим методом, основанным на квантовомеханической формуле (5.15), в случае скалярного [формула (6.1)] и спинорного [формула (6.130)] полей. Напомним, однако, что более фундаментальное выражение для амплитуды перехода (производящего функционала) дается формулой (5.13), которая сводится к (5.15), когда оператор H квадратичен по p с постоянным коэффициентом [как в формуле (5.8)]. В теории поля также справедливо утверждение, что единственным надежным выражением для производящего функционала в виде функционального интеграла является то, которое основано на каноническом формализме, т. е. выражение вида

$$\iint \mathcal{D}\phi \mathcal{D}\pi \exp i \int (\phi\pi - \mathcal{H}) dx.$$

После интегрирования по каноническому импульсу π мы не получим простого «лагранжева» функционального интеграла, если не считать того случая, когда отсутствуют связи и оператор \mathcal{H} квадратичен по π с постоянными коэффициентами. Имеется много полевых теорий, в которых эти условия не выполняются, в том числе в нелинейной сигма-модели, в неабелевых калибровочных теориях и в гравитации. Однако в неабелевых калибровочных теориях метод Фаддеева — Попова позволяет преодолеть возникающие трудности. Поэтому, жертвуя некоторой строгостью, разумно начать с выражений типа (7.1) и вводить духовые поля Фаддеева — Попова, когда в этом появляется необходимость. В случае гравитации метод Фаддеева — Попова *не спасает положения*, но мы не будем заниматься квантованием гравитации. Таким образом, в дальнейшем мы будем использовать выражение для производящего функционала в виде «лагранжева» функционального интеграла. Читатель, желающий ознакомиться с методом канонического функционального интеграла, может сделать это, обратившись к работам [2, 4, 5]¹⁾.

После всех этих предостерегающих замечаний мы вновь обратимся к выражениям (7.1) и (7.2). Как мы видели в § 3.3, варьирование лагранжиана (7.2) приводит к уравнениям Максвелла

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \partial_\mu (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) = 0,$$

или

$$(g_{\mu\nu} \square - \partial_\mu \partial_\nu) A^\mu = 0. \quad (7.3)$$

Выполнив интегрирование по частям и отбросив поверхностные члены, лагранжиан \mathcal{L} можно записать в виде

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} A^\mu [g_{\mu\nu} \square - \partial_\mu \partial_\nu] A^\nu. \quad (7.4)$$

¹⁾ Я признателен проф. Хиггсу, указавшему мне на важное значение этих вопросов.

В соответствии с нашим рецептом фотонный пропагатор $D^{\mu\nu}$ является величиной, обратной оператору, входящему в этот лагранжиан:

$$(g_{\mu\nu} \square - \partial_\mu \partial_\nu) D^{\nu\lambda}(x-y) = \delta_\mu^\lambda \delta^4(x-y). \quad (7.5)$$

[Можно также исходить из того, что $D^{\nu\lambda}$ есть функция Грина уравнения Максвелла (7.3).] Умножив теперь обе части равенства (7.5) на оператор ∂^μ , получим уравнение

$$(0 \cdot \partial_\nu) D^{\nu\lambda} = \partial^\lambda \delta^4(x-y),$$

из которого видно, что функция $D^{\nu\lambda}$ не имеет обратной и, следовательно, формально является бесконечной. Причиной этого является то, что оператор $(g_{\mu\nu} \square - \partial_\mu \partial_\nu)$ необратим; если подействовать им, например, на функцию $\partial^\mu \Lambda$, то в результате мы получим нуль:

$$(g_{\mu\nu} \square - \partial_\mu \partial_\nu) \partial^\mu \Lambda = (\partial_\nu \square - \square \partial_\nu) \Lambda = 0.$$

Таким образом, данный оператор имеет нулевое собственное значение и поэтому необратим.

Наша попытка непосредственно найти фотонный пропагатор не увенчалась успехом. Некоторый свет на причину этого проливает метод функционального интегрирования.

Фотонный пропагатор — метод функционального интегрирования

Рассмотрим теперь просто производящий функционал

$$Z = \int \mathcal{D}A_\mu e^{i \int \mathcal{L} dx}.$$

Лагранжиан \mathcal{L} инвариантен относительно калибровочных преобразований $A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu \Lambda$, но интеграл берется по всем A_μ , в том числе и по тем, которые связаны друг с другом калибровочным преобразованием. Это, очевидно, приводит к бесконечному вкладу в Z , а значит, и в функции Грина, получаемые из Z функциональным дифференцированием.

Члены, фиксирующие калибровку

Что нужно сделать, чтобы получить конечное значение для функционала Z ? Очевидно, необходимо фиксировать частную калибровку таким образом, чтобы интеграл по A_μ не брался по полям, связанным друг с другом калибровочным преобразованием. Для

определенности наложим калибровочное условие Лоренца $\partial_\mu A^\mu = 0$. Это приведет к лагранжиану

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} A^\mu g_{\mu\nu} \square A^\nu. \quad (7.6)$$

Оператор, обратный по отношению к $g_{\mu\nu} \square$, называется *пропагатором Фейнмана* и имеет вид

$$D_F(x, y)_{\mu\nu} = -g_{\mu\nu} \Delta_F(x, y; m = 0). \quad (7.7)$$

Наконец, лагранжиан можно записать в виде

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{2} (\partial_\mu A^\mu)^2 = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{GF}. \quad (7.8)$$

где слагаемое

$$\mathcal{L}_{GF} = -\frac{1}{2} (\partial_\mu A^\mu)^2 \quad (7.9)$$

есть так называемый член, «фиксирующий калибровку».

Полезно воспроизвести все изложенное выше в импульсном пространстве. Оператор $g_{\mu\nu} \square - \partial_\mu \partial_\nu$ примет вид $-g_{\mu\nu} k^2 + k_\mu k_\nu$, и легко убедиться в том, что он не имеет обратного. Если бы такой оператор существовал, то он имел бы вид $A g^{\nu\lambda} + B k^\nu k^\lambda$, где A и B таковы, что $(-k^2 g_{\mu\nu} + k_\mu k_\nu)(A g^{\nu\lambda} + B k^\nu k^\lambda) = \delta_\mu^\lambda$. Это приводит к уравнению

$$-A k^2 \delta_\mu^\lambda + A k_\mu k^\lambda = \delta_\mu^\lambda,$$

не имеющему решений. В то же время в калибровке Лоренца для оператора $-g_{\mu\nu} k^2$, несомненно, имеется обратный оператор $-g^{\nu\lambda} (1/k^2)$ и фейнмановский пропагатор имеет вид

$$D_F(k)_{\mu\nu} = -\frac{g_{\mu\nu}}{k^2}. \quad (7.10)$$

В более общем случае вместо (7.8) можем добавить к лагранжиану член, фиксирующий калибровку \mathcal{L}_{DF} , с произвольным конечным коэффициентом α :

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{2\alpha} (\partial_\mu A^\mu)^2 = \frac{1}{2} A^\mu \left[g_{\mu\nu} \square + \left(\frac{1}{\alpha} - 1 \right) \partial_\mu \partial_\nu \right] A^\nu. \quad (7.11)$$

«Квадратичный» оператор в импульсном пространстве имеет вид

$$-k^2 g_{\mu\nu} + \left(1 - \frac{1}{\alpha} \right) k_\mu k_\nu,$$

а оператор, обратный ему, есть пропагатор

$$D(k)_{\mu\nu} = -\frac{1}{k^2} \left[g_{\mu\nu} + (\alpha - 1) \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right]. \quad (7.12)$$

Часто используют следующие частные случаи, связанные с конкретным выбором α :

$$\begin{aligned} \alpha \rightarrow 1: & \text{фейнмановский пропагатор (калибровка Фейнмана).} \\ \alpha \rightarrow 0: & \text{калибровка Ландау.} \end{aligned} \quad (7.13)$$

Физические результаты, конечно, не зависят от выбора значения параметра α .

Пропагатор поперечных фотонов

Пропагатор (7.10) соответствует фотонам в калибровке Лоренца. Это ковариантная калибровка, в которой фотоны обладают векторам поляризации ε^μ , таким, что $k_\mu \varepsilon^\mu = 0$, поэтому только три состояния из четырех являются независимыми. Однако физические фотоны обладают только двумя, состояниями поляризации, а именно состояниями поперечной поляризации. В данном пункте параграфа мы вычисляем пропагатор поперечных (физических) фотонов. Из § 4.4 известно, что для этого необходимо работать в радиационной (или кулоновской) калибровке, в которой $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$, $\varphi = 0$.

Напомним, что пропагатор и двухточечная функция Грина связаны следующим соотношением:

$$\langle 0 | T(A_\mu(x) A_\nu(y)) | 0 \rangle = i D_{\mu\nu}(x - y). \quad (7.14)$$

Мы вычисляем левую часть, подставляя для $A_\mu(x)$ выражение (4.64) [или выражение (4.80)], в котором, однако, сумма берется только по значениям $\lambda = 1, 2$. Следовательно,

$$\begin{aligned} \langle 0 | T(A_\mu(x) A_\nu(y)) | 0 \rangle = & \\ = \langle 0 | \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3 2k_0} \frac{d^3 k'}{(2\pi)^3 2k'_0} \sum_{\lambda, \lambda'=1}^2 \varepsilon_\mu^{(\lambda)}(k) \varepsilon_\nu^{(\lambda')}(k') \times & \\ \times [[a^{(\lambda)}(k) e^{-ikx} + a^{(\lambda)\dagger}(k) e^{ikx}] [a^{(\lambda')} (k') e^{-ik'y} + & \\ + a^{(\lambda')\dagger}(k') e^{ik'y}] \theta(x_0 - y_0) + [a^{(\lambda')} (k') e^{-ik'y} + & \\ + a^{(\lambda')\dagger}(k') e^{ik'y}] [a^{(\lambda)}(k) e^{-ikx} + & \\ + a^{(\lambda)\dagger}(k) e^{ikx}] \theta(y_0 - x_0)] | 0 \rangle = & \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} = \langle 0 | \int \frac{d^3 k d^3 k'}{(2\pi)^6 2k_0 2k'_0} \sum_{\lambda, \lambda'=1}^2 \varepsilon_\mu^{(\lambda)}(k) \varepsilon_\nu^{(\lambda')}(k') \times & \\ \times [a^{(\lambda)}(k) a^{(\lambda')\dagger}(k') e^{i(k'y - kx)} \theta(x_0 - y_0) + & \\ + a^{(\lambda')\dagger}(k') a^{(\lambda)\dagger}(k) e^{i(kx - k'y)} \theta(y_0 - x_0)] | 0 \rangle. & \end{aligned}$$

Оба члена с aa^\dagger могут быть заменены их коммутаторами [формула (4.68)]. Дельта-функции позволяют тогда выполнить интегрирование по k' и суммирование по λ' , и мы получаем

$$\begin{aligned} \langle 0 | T(A_\mu(x) A_\nu(y)) | 0 \rangle = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3 2k_0} \sum_{\lambda=1}^2 \varepsilon_\mu^{(\lambda)}(k) \varepsilon_\nu^{(\lambda)}(k) \times & \\ \times [e^{ik(y-x)} \theta(x_0 - y_0) + e^{ik(x-y)} \theta(y_0 - x_0)]. & \quad (7.15) \end{aligned}$$

Из выражений (6.14) и (6.56) следует, что фейнмановский пропагатор для безмассовых частиц имеет вид

$$\begin{aligned} \Delta_F(x, m=0) = -i \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3 2k_0} [\theta(x_0) e^{-ikx} + \theta(-x_0) e^{ikx}] = & \\ = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ikx}}{k^2 + i\varepsilon}. & \end{aligned}$$

Поэтому мы можем написать

$$\langle 0 | T(A_\mu(x) A_\nu(y)) | 0 \rangle = i \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ikx}}{k^2 + i\varepsilon} \sum_{\lambda=1}^2 \varepsilon_\mu^{(\lambda)}(k) \varepsilon_\nu^{(\lambda)}(k),$$

и, следовательно, пропагатор поперечных фотонов тогда равен

$$D_{\mu\nu}^{tr}(x - y) = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ik(x-y)}}{k^2 + i\varepsilon} \sum_{\lambda=1}^2 \varepsilon_\mu^{(\lambda)}(k) \varepsilon_\nu^{(\lambda)}(k). \quad (7.16)$$

Чему равно выражение $\sum_{\lambda=1}^2 \varepsilon_\mu^{(\lambda)}(k) \varepsilon_\nu^{(\lambda)}(k)$? Вектор ε_μ ортогонален светоподобному вектору k_μ , а потому тоже светоподобен. Введем времениподобный вектор $\eta_\mu = (1, 0, 0, 0)$, ортогональный вектору ε_μ в радиационной калибровке. Образует далее тетраду из векторов $\varepsilon_\mu^{(1,2)}$, η_μ и еще одного светоподобного вектора, который обозначим через \bar{k} :

$$\bar{k}^\mu = \frac{k^\mu - (k \cdot \eta) \eta^\mu}{[(k \cdot \eta)^2 - k^2]^{1/2}}.$$

Нетрудно убедиться, что вектор \bar{k} пространственноподобен:

$$\bar{k}^2 = \frac{k^2 - 2(k \cdot \eta)^2 + (k \cdot \eta)^2 \eta^2}{(k \cdot \eta)^2 - k^2} = -1,$$

где мы воспользовались тем, что $\eta^2 = 1$ и что вектор \bar{k} ортогонален вектору ε :

$$\bar{k} \cdot \varepsilon = \frac{k \cdot \varepsilon - (k \cdot \eta)(\eta \cdot \varepsilon)}{[(k \cdot \eta)^2 - k^2]^{1/2}} = 0,$$

так как $k \cdot \varepsilon = 0$ и $\eta \cdot \varepsilon = 0$. Для построенной нами тетрады справедливо равенство

$$g_{\mu\nu} = \eta_\mu \eta_\nu - \sum_{\lambda=1}^2 \varepsilon_\mu^{(\lambda)}(k) \varepsilon_\nu^{(\lambda)}(k) - \bar{k}_\mu \bar{k}_\nu.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \sum_{\lambda=1}^2 \varepsilon_\mu^{(\lambda)}(k) \varepsilon_\nu^{(\lambda)}(k) &= -g_{\mu\nu} + \eta_\mu \eta_\nu - \bar{k}_\mu \bar{k}_\nu = -g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{(k \cdot \eta)^2 - k^2} + \\ &+ \frac{(k \cdot \eta)(k_\mu \eta_\nu + \eta_\mu k_\nu)}{(k \cdot \eta)^2 - k^2} - \frac{k^2 \eta_\mu \eta_\nu}{(k \cdot \eta)^2 - k^2}. \end{aligned} \quad (7.17)$$

Это и есть искомое выражение для $\sum_{\lambda=1}^2 \varepsilon_\mu^{(\lambda)}(k) \varepsilon_\nu^{(\lambda)}(k)$. Подставив его в (7.15), получим явное выражение для пропагатора поперечных фотонов.

§ 7.2. Неабелевы калибровочные поля и метод Фаддеева—Попова

Теперь мы хотим распространить полученные результаты на случай неабелевых калибровочных полей (полей Янга—Миллса). Наша цель — установить общие правила нахождения пропагатора калибровочного поля. Сначала мы изложим формальный метод функционального интегрирования, упомянутый в предыдущем параграфе, основанный на том, что функционал Z превращается в конечную величину. Такой метод впервые был предложен Фаддеевым и Поповым. В силу того что он не особенно очевиден, сначала приведем эвристический вывод формулы Фаддеева—Попова в случае электродинамики. Затем изложим более строгий вывод, который будет применен к полям Янга—Миллса.

Эвристический вывод

Выше мы видели, что величина Z бесконечна, так как функциональный интеграл берется по всем полям A_μ , даже тем, которые связаны друг с другом калибровочным преобразованием, оставляющим подынтегральное выражение инвариантным. Запишем каждое поле A_μ в виде

$$A_\mu \sim \bar{A}_\mu, \Lambda(x). \quad (7.18)$$

Другими словами, A_μ — класс всех потенциалов, которые могут быть получены из фиксированного потенциала \bar{A}_μ калибровочным преобразованием с некоторой функцией $\Lambda(x)$. Тогда интеграл, представляющий величину Z , можно факторизовать:

$$Z = \int \mathcal{D}A_\mu e^{iS} \sim \int \mathcal{D}\bar{A}_\mu e^{iS} \int \mathcal{D}\Lambda. \quad (7.19)$$

Именно последний множитель $\int \mathcal{D}\Lambda$ и есть та величина, которая многократно учитывается и приводит к расходимости. Модифицируем его, введя множитель, обеспечивающий сходимость:

$$\int \mathcal{D}\Lambda \rightarrow \int \mathcal{D}\Lambda e^{-(i/2\alpha) F^2},$$

где $F = F(A_\mu)$ — некоторая функция поля A_μ , например $F = \partial^\mu A_\mu$. Теперь интеграл сходится, однако Z теперь зависит от F — чего нам не хотелось бы! Поэтому мы продолжим модификацию интеграла:

$$\int \mathcal{D}\Lambda \rightarrow \int \mathcal{D}F e^{-(i/2\alpha) F^2} = \int \mathcal{D}\Lambda \det \left(\frac{\partial F}{\partial \Lambda} \right) e^{-(i/2\alpha) F^2},$$

так что теперь Z (в отсутствие источников) примет вид

$$Z = \int \mathcal{D}A_\mu \int \mathcal{D}\Lambda \exp \left[i \int \left(\mathcal{L} - \frac{1}{2\alpha} F^2 \right) dx \right] \det \frac{\partial F}{\partial \Lambda}. \quad (7.20)$$

Что такое $\partial F / \partial \Lambda$? При калибровочном преобразовании мы имеем $F \rightarrow F + M\Lambda$, где M — в общем случае дифференциальный оператор, так что

$$\frac{\partial F}{\partial \Lambda} = M.$$

Следовательно, в выражении для Z имеется множитель $\det M$. Обратимся теперь к формуле (6.128) — точнее, к ее бесконечномерному обобщению, — чтобы представить $\det M$ в виде интеграла по *гассмановым скалярным полям* $\bar{\eta}, \eta$. Заменив A величиной iA , получим

$$\det M = \int \mathcal{D}\eta \mathcal{D}\bar{\eta} \exp \left(i \int \bar{\eta} M \eta dx \right). \quad (7.21)$$

Следовательно (опуская черту над \bar{A}_μ),

$$Z = \frac{1}{N} \int \mathcal{D}A_\mu \mathcal{D}\eta \mathcal{D}\bar{\eta} \exp \left[i \int \left(\mathcal{L} - \frac{1}{2\alpha} F^2 - \bar{\eta} M \eta \right) dx \right] \equiv \\ \equiv \frac{1}{N} \int \mathcal{D}A_\mu \mathcal{D}\eta \mathcal{D}\bar{\eta} \exp \left(i \int \mathcal{L}_{\text{эфф}} dx \right), \quad (7.22)$$

где, как обычно, N — нормировочный множитель, а $\mathcal{L}_{\text{эфф}}$ — эффективный лагранжиан:

$$\mathcal{L}_{\text{эфф}} = \mathcal{L} - \frac{1}{2\alpha} F^2 - \bar{\eta} M \eta \equiv \mathcal{L} + \mathcal{L}_{GF} + \mathcal{L}_{FPG}. \quad (7.23)$$

Величина \mathcal{L}_{GF} — это член, фиксирующий калибровку, о котором говорилось выше [формула (7.9)], а \mathcal{L}_{FPG} — член «духов Фаддеева — Попова», причем η — дух, скалярное поле, подчиняющееся статистике Ферми. В случае КЭД вклад духов в (7.22) выпадает при интегрировании, так что они не приводят к какому-либо физическому эффекту (по крайней мере в калибровке Лоренца). Ниже мы увидим, что в случае теории Янга — Миллса духовые и калибровочные поля взаимодействуют и вклад духов нельзя выделить с помощью интегрирования. Поэтому они появляются в диаграммах Фейнмана, но только во внутренних петлях, а не во внешних линиях. Обратимся теперь к неабелеву случаю и повторим рассуждения, но в более строгой форме.

Более строгий вывод

Нам необходимо ввести в Z множитель, обеспечивающий сходимость, или, другими словами, удалить мультипликативную бесконечность. Путь к решению таков: нужно рассмотреть конкретную калибровку и выяснить, можно ли интеграл факторизовать так, как в выражении (7.19), рассмотренном выше. Запишем калибровочное условие в виде

$$F^a[A_\mu^b] = 0, \quad (7.24)$$

где a и b — индексы внутренней симметрии. Рассмотрим случай, когда F — линейная функция (или функционал) поля A . В более общей ситуации можно было бы рассмотреть условие $F^a[A_\mu^b, \varphi] = 0$, где φ — скалярное поле.

Интегрирование по Λ в формуле (7.19) является, очевидно, интегрированием по групповому пространству. Предположим, что группой симметрии нашей задачи является группа G и мы имеем два элемента $g, g' \in G$. Тогда мы можем определить меру Гурвица на G как меру интегрирования, инвариантную относительно групповых преобразований:

$$dg = d(g'g). \quad (7.25)$$

В самом деле, рассмотрим случай конечных групп. Тогда функция $\varphi(g)$ является набором чисел $\varphi(g_1), \varphi(g_2), \dots, \varphi(g_n)$. «Интеграл» от φ по группе определим как сумму этих чисел:

$$\int \varphi(g) dg = \sum_{g \in G} \varphi(g).$$

Это выражение инвариантно (точнее, «левоинвариантно») относительно групповых преобразований

$$\int \varphi(g'g) dg = \int \varphi(g) dg,$$

так как если g пробегает всю группу, то то же самое можно сказать и о $g'g$, а каждое число φ учитывается один и только один раз. Вводя обозначение $g'g = g''$, так что $g = g'^{-1}g''$, и переходя в последующих формулах к случаю непрерывных групп, имеем

$$\int \varphi(g'') d(g'^{-1}g'') = \int \varphi(g) dg = \int \varphi(g'') dg''.$$

Переобозначив переменные, можно написать

$$\int \varphi(g) d(g'g) = \int \varphi(g) dg;$$

следовательно,

$$d(g'g) = dg,$$

как в формуле (7.25). Для компактных групп всегда можно найти инвариантную меру¹⁾. Например, для группы вращений она равна $\sin \beta d\alpha d\beta d\gamma$, где α, β и γ — углы Эйлера. Поле A_μ , определенное в соотношении (3.159) и переопределенное следующим образом: $A \rightarrow A/g$, преобразуется в соответствии с (3.162) (причем $S \rightarrow U$):

$$A_\mu = UA_\mu U^{-1} - i(\partial_\mu U)U^{-1}, \quad (7.26)$$

где $U = \exp[i\omega^a(x)T^a]$, а T^a — генераторы группы G в регулярном представлении. В случае инфинитезимального преобразования имеем

$$U(\omega) = 1 + i\omega^a T^a + O(\omega)^2,$$

так что групповая мера dg при $g \approx 1$ может быть выражена в виде

$$dg = \prod_a d\omega^a = d\omega. \quad (7.27)$$

¹⁾ См., например, книгу: Hamermesh M. Group Theory and its Application to Physical Problems, Addison-Wesley, 1962, p. 313 [имеется перевод: Хамермеш М. Теория групп и ее применение к физическим проблемам. — М.: Мир, 1966, с. 367] или Talmán J. D. Special Functions: A Group Theoretic Approach, Sect. 9-2, Benjamin, 1968.

Кроме того, из (3.124) после замены $\Lambda \rightarrow \omega$ мы имеем

$$A_\mu^{\prime a} \equiv (A_\omega)_\mu^a = A_\mu^a + f^{abc} A_\mu^b \omega^c + \partial_\mu \omega^a, \quad (7.28)$$

где f^{abc} — структурные константы группы $G (= \varepsilon^{abc}$ в случае группы $SU(2)$). Рассмотрим теперь величину

$$\Delta^{-1}[A] = \int \mathcal{D}\omega \delta(F[A_\omega]) = \int \mathcal{D}(g') \delta(F[A_{g'}]), \quad (7.29)$$

где $\mathcal{D}\omega = \prod_x d\omega(x)$ ($\mathcal{D}g = \prod_x dg(x)$) и $\delta(F[A_\omega])$ — произведение δ -функций Дирака, по одной в каждой пространственно-временной точке (в действительности это « δ -функционал»). Символом A мы обозначили поле A_μ^a . Величина $\Delta^{-1}[A]$ калибровочно-инвариантна:

$$\begin{aligned} \Delta^{-1}[A_g] &= \int \mathcal{D}g' \delta(F[A_{g'}]) = \int \mathcal{D}(g'g) \delta(F[A_{g'g}]) \\ &= \int \mathcal{D}(g'') \delta(F[A_{g''}]) = \Delta^{-1}[A], \end{aligned} \quad (7.30)$$

где учтено равенство (7.25). Поэтому можно написать (заменяв g величиной ω)

$$1 = \Delta[A] \int \mathcal{D}\omega \delta(F[A_\omega]). \quad (7.31)$$

Подставив его в функциональный интеграл, получим

$$\int \mathcal{D}A_\mu e^{iS} = \int \mathcal{D}A_\mu \Delta[A_\mu] \int \mathcal{D}\omega \delta(F[(A_\mu)_\omega]) e^{iS}. \quad (7.32)$$

Осуществим теперь калибровочное преобразование в подынтегральном выражении, перейдя от $(A_\mu)_\omega$ к A_μ , и воспользуемся соотношением (7.30). Тогда

$$\int \mathcal{D}A_\mu e^{iS} = \int \mathcal{D}A_\mu \Delta[A_\mu] \int \mathcal{D}\omega \delta(F[A]) e^{iS}, \quad (7.33)$$

так как действие S инвариантно. Множители, стоящие после $\mathcal{D}\omega$, теперь не зависят от ω , так что $\int \mathcal{D}\omega$ представляет собой мультипликативную расходимость, которую можно устранить, переопределив Z следующим образом:

$$Z = \int \mathcal{D}A_\mu \Delta[A_\mu] \delta(F[A_\mu]) e^{iS[A]}. \quad (7.34)$$

Теперь мы должны вычислить величину $\Delta[A_\mu]$. В случае инфинитезимальных преобразований имеем [с учетом формул (7.28) и (3.122)]

$$\begin{aligned} F^a[A_\omega] &= F^a[A] + \frac{\partial F^a}{\partial A_\mu^b} \delta A_\mu^b = \\ &= F^a[A] + \frac{\partial F^a}{\partial A_\mu^b} \left(\delta^{bd} \partial_\mu + f^{bcd} A_\mu^c \right) \omega^d = F^a[A] + \frac{\partial F^a}{\partial A_\mu^b} (D_\mu \omega)^b. \end{aligned} \quad (7.35)$$

Таким образом, если $F^a[A] = 0$, то из (7.29) получаем

$$\Delta^{-1}[A] = \int \mathcal{D}\omega^a \delta \left[\frac{\partial F^a}{\partial A_\mu^b} D_\mu^{bc} \omega^c(y) \right], \quad (7.36)$$

Обозначим теперь аргумент δ -функции через M :

$$\begin{aligned} \frac{\partial F^a}{\partial A_\mu^b} D_\mu^{bc} \delta^4(x-y) &= M_{ac}(x, y) \delta^4(x-y) = \langle a, x | M | c, y \rangle \sim \\ &\sim \frac{\delta F^a[A(x)]}{\delta \omega^c(y)}. \end{aligned} \quad (7.37)$$

Следовательно,

$$\Delta^{-1}[A] \sim (\det M)^{-1}. \quad (7.38)$$

Доказательство¹⁾

Если M обладает собственными функциями f^i и собственными значениями λ^i то, (по i нет суммирования)

$$\begin{aligned} \sum_{b,y} \langle a, x | M | b, y \rangle f_b^i(y) &= \lambda^i f_a^i(x), \\ \sum_{b,y} M_{ab}(x, y) \delta^4(x-y) f_b^i(y) &= \lambda^i f_a^i(x), \\ \sum_b M_{ab}(x, x) f_b^i(x) &= \lambda^i f_a^i(x). \end{aligned} \quad (7.39)$$

Разложим функцию $\omega^c(y)$ по собственным функциям оператора M :

$$\omega^c(y) = \sum_i \omega^i f_c^i(y).$$

Тогда из (7.39) следует, что

$$\sum_c M_{ac}(y, y) \omega^c(y) = \sum_i \omega^i \lambda^i f_a^i(y),$$

и (7.36) запишется в виде

$$\Delta^{-1}[A] = \int \mathcal{D}\omega^a \prod_a \delta \left[\sum_i \omega^i \lambda^i f_a^i(y) \right]. \quad (7.40)$$

Если положить

¹⁾Я признателен проф. Рикайзену за то, что он сообщил мне об этом доказательстве.

$$u_a = \sum_f \omega^f \lambda^f f_a^f$$

то соотношение (7.40) переписывается в виде

$$\Delta^{-1}[A] = \int \mathcal{D}u_a \frac{\partial(\omega^1 \omega^2 \omega^3 \dots)}{\partial(u_1 u_2 u_3 \dots)} \prod_a \delta(u_a) = \frac{\partial(\omega^1 \omega^2 \omega^3 \dots)}{\partial(u_1 u_2 u_3 \dots)} \Big|_{u=0} =$$

$$= (\lambda_1 \lambda_2 \dots)^{-1} |f_a^f|^{-1} \sim (\lambda_1 \lambda_2 \dots)^{-1}.$$

Следовательно, величина $\Delta[A]$ пропорциональна произведению собственных значений матрицы M :

$$\Delta[A] \sim \det \left(\frac{\delta F^a(x)}{\delta \omega^b(y)} \right) \Big|_{\omega=0} = \det M, \quad (7.41)$$

т. е. мы пришли к равенству (7.38), что и требовалось доказать. Заметим, что мы не обращали внимания на нормировочные множители.

Обычно выбирается лоренцева калибровка

$$F^a = a^\mu A_\mu^a \quad (7.42)$$

но можно рассматривать и более общее выражение

$$F^a = \partial_\mu \tilde{A}_\mu^a + C^a(x), \quad (7.43)$$

где C — произвольная функция. Тогда производящий функционал будет иметь вид

$$Z = \int \mathcal{D}A_\mu \Delta[A_\mu] \delta(F[A] - C) e^{iS[A]}. \quad (7.44)$$

Так как C не зависит от A , то функционал $\Delta[A]$ тот же, что и выше [формула (7.41)], и величина Z не зависит от $C(x)$. Тогда мы можем ввести в Z любой весовой множитель, он лишь изменит функционал Z . Мы введем множитель

$$\exp \left[-\frac{i}{2\alpha} \int C_a^2(x) d^4 x \right]$$

и получим выражение

$$Z = N \int \mathcal{D}A_\mu \Delta[A] \exp \left[i \int \left(\mathcal{L} - \frac{1}{2\alpha} F[A]^2 \right) dx \right]. \quad (7.45)$$

Заметим, что $F[A]$ может быть любым функционалом поля A , хотя выше мы рассматривали только лоренцеву калибровку. Положив $\Delta[A] = \det iM$ и воспользовавшись формулой (6.128) в вид

$$\det iM = \int \mathcal{D}\eta \mathcal{D}\bar{\eta} \exp \left(-i \int \bar{\eta}^a M_{ab} \eta^b dx \right) \quad (7.46)$$

мы получим

$$Z = N \int \mathcal{D}A_\mu \mathcal{D}\eta \mathcal{D}\bar{\eta} \exp \left[i \int \left(\mathcal{L} - \frac{1}{2\alpha} F^2 - \bar{\eta}^a M_{ab} \eta^b \right) dx \right]. \quad (7.47)$$

Эту формулу можно переписать следующим образом:

$$Z = N \int \mathcal{D}A_\mu \mathcal{D}\eta \mathcal{D}\bar{\eta} \exp \left(i \int \mathcal{L}_{\text{эфф}} dx \right), \quad (7.48)$$

где $\mathcal{L}_{\text{эфф}}$ — эффективный лагранжиан вида

$$\mathcal{L}_{\text{эфф}} = \mathcal{L} - \frac{1}{2\alpha} F^2 - \bar{\eta}^a M_{ab} \eta^b = \mathcal{L} + \mathcal{L}_{GF} + \mathcal{L}_{FPG}. \quad (7.49)$$

Слагаемое \mathcal{L}_{GF} — член, фиксирующий калибровку, который уже встречался выше, а \mathcal{L}_{FPG} — член, описывающий духи Фаддеева — Попова. Грассмановы поля $\eta, \bar{\eta}$ называются духовыми полями, так как благодаря нефизической спиновой статистике они могут появляться только в замкнутых петлях в фейнмановских диаграммах, но ни в коем случае не во внешних линиях.

После этого довольно утомительного формального обоснования мы можем теперь сформулировать правила Фейнмана для КЭД и неабелевых калибровочных полей. Они зависят от выбора калибровки. Мы рассмотрим сначала лоренцеву калибровку, а затем так называемую аксиальную калибровку.

Правила Фейнмана в лоренцевой калибровке

Рассмотрим сначала электродинамику, в которой нет индекса внутренней симметрии. Имеем

$$F = \partial^\mu A_\mu.$$

Из (7.28) следует, что

$$\delta A_\mu = \partial_\mu \omega;$$

поэтому

$$\delta F = \square \omega.$$

На этом основании из (7.37) получаем

$$M = \frac{\delta F}{\delta \omega} = \square,$$

$$Z = N \int \mathcal{D}A_\mu \exp \left\{ i \int \left[\mathcal{L}_0 - \frac{1}{2\alpha} (\partial \cdot A)^2 \right] dx \right\} \times$$

$$\times \int \mathcal{D}\eta \mathcal{D}\bar{\eta} \exp \left(i \int \bar{\eta} \square \eta dx \right), \quad (7.50)$$

где \mathcal{L}_0 — лагранжиан калибровочного поля, $-(1/4)F_{\mu\nu}^a F^{\mu\nu a}$. По-

следний интеграл по духовым полям представляет собой только общий постоянный множитель в выражении для Z . Фотонный пропагатор получается обращением квадратичного члена в $\mathcal{L}_0 - (1/2\alpha)(\partial \cdot A)^2$. Это выражение было получено выше [формула (7.12)]. В результате двухточечная функция Грина имеет вид

$$\mu \overset{k}{\text{---}} \nu - \frac{i}{k^2} \left[g_{\mu\nu} + (\alpha - 1) \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right]. \quad (7.51)$$

Теперь рассмотрим поля Янга — Миллса. Калибровочное условие

$$F^a = \partial^\mu A_\mu^a$$

вместе с соотношением (7.28)

$$\delta A_\mu^a = f^{abc} A_\mu^b \omega^c + \partial_\mu \omega^a$$

приводит к соотношению

$$\delta F^a = f^{abc} \partial^\mu (A_\mu^b \omega^c) + \square \omega^a,$$

откуда следует, что

$$M_{ab} = \frac{\delta F^a}{\delta \omega^b} = -f^{abc} \partial^\mu A_\mu^c - f^{abc} A_\mu^c \partial^\mu + \delta^{ab} \square.$$

Вводя вновь константу взаимодействия g , которая была опущена в формуле (7.26), запишем духовую часть действия в виде

$$\begin{aligned} & \int \mathcal{D}\eta \mathcal{D}\bar{\eta} \exp \left(-i \int \bar{\eta}^a \frac{\delta F^a}{\delta \omega^b} \eta^b dx \right) = \\ & = \int \mathcal{D}\eta \mathcal{D}\bar{\eta} \exp \left\{ -i \int \bar{\eta}^a \square \eta^a dx + igf^{abc} \int \left[(\bar{\eta}^a \partial^\mu \eta^b) A_\mu^c + \right. \right. \\ & \left. \left. + \partial^\mu A_\mu^c (\bar{\eta}^a \eta^b) \right] dx \right\}. \end{aligned} \quad (7.52)$$

Это дает нам пропагатор духов и вершину взаимодействия духов с калибровочным полем:

$$a \dots b \overset{k}{\text{---}} c \quad (i\square)^{-1} = \frac{i}{k^2} \delta^{ab}, \quad -gf^{abc} p_\mu. \quad (7.53)$$

[Мы опустили здесь множители $(2\pi)^4$ и δ -функции, соответствующие сохранению импульса. Они подразумеваются — ср. с табл. 6.1.] Дух распространяется как скалярная частица, но подчиняется статистике Ферми.

Член, соответствующий калибровочному полю F^a , аналогичен рассмотренному выше, так что пропагатор калибровочного поля аналогичен фотонному пропагатору:

$$\mu \overset{k}{\text{---}} \nu - \frac{i}{k^2} \left[g_{\mu\nu} + (\alpha - 1) \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right] \delta^{ab}. \quad (7.54)$$

Кроме того, что теперь духи взаимодействуют с калибровочным полем, в неабелевом случае имеется и другой усложняющий момент, а именно то, что калибровочное поле *взаимодействует само с собой* (физический смысл этого мы рассматривали в § 3.5.). Это означает, что в лагранжиане имеются члены, по меньшей мере кубические по A . Чтобы получить лагранжиан чисто калибровочного поля, определим поле [формула (3.166)]

$$G_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - ig[A_\mu, A_\nu].$$

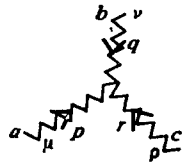
Соответствующий лагранжиан будет иметь вид

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} \text{Tr} G_{\mu\nu} G^{\mu\nu}. \quad (7.55)$$

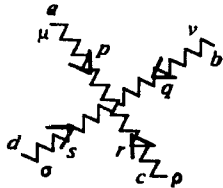
Нетрудно убедиться, например, что в случае группы $SU(2)$ он совпадает с выражением $-(1/4) W_{\mu\nu} \cdot W^{\mu\nu}$, приведенным в формуле (3.132). Записывая в развернутом виде, получаем

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= -\frac{1}{4} G_{\mu\nu}^a G^{a\mu\nu} = \\ &= -\frac{1}{4} \left[\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + gf^{abc} A_\mu^b A_\nu^c \right] \times \\ &\times \left[\partial^\mu A^{\nu a} - \partial^\nu A^{\mu a} + gf^{amn} A^{\mu m} A^{\nu n} \right] = \\ &= -\frac{1}{4} \left[\text{квадратичный член} + 2gf^{abc} A_\mu^b A_\nu^c \left(\partial^\mu A^{\nu a} - \partial^\nu A^{\mu a} \right) + \right. \\ &\left. + g^2 f^{abc} f^{amn} A_\mu^b A_\nu^c A^{\mu m} A^{\nu n} \right]. \end{aligned} \quad (7.56)$$

Из квадратичного члена следует выражение для пропагатора, которое мы уже выписывали. Кубические члены и члены четвертой степени приводят к взаимодействиям



$$-gf^{abc} [(r_\mu - q_\mu) g_{\nu\rho} + (p_\nu - r_\nu) g_{\mu\rho} + (q_\rho - p_\rho) g_{\mu\nu}], \quad (7.57)$$

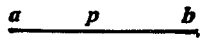


$$-g^2 [f^{abc} f^{cde} (g_{\mu\rho} g_{\nu\sigma} - g_{\mu\sigma} g_{\nu\rho}) + f^{ace} f^{bed} (g_{\mu\sigma} g_{\rho\nu} - g_{\mu\nu} g_{\rho\sigma}) + f^{ade} f^{bce} (g_{\mu\tau} g_{\sigma\rho} - g_{\mu\rho} g_{\sigma\tau})]. \quad (7.58)$$

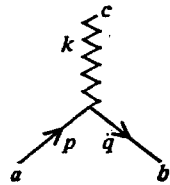
Член, описывающий взаимодействие полей материи, имеющих спин 1/2, с калибровочными полями, получается непосредственно, если заменить производную ∂_μ в лагранжиане полей материи ковариантной производной

$$D_\mu = \partial_\mu - igA_\mu^a T^a, \quad (7.59)$$

где T^a — эрмитовы $n \times n$ -матрицы генераторов группы, причем поля материи ψ образуют базис n -мерного представления. Нетрудно убедиться в том, что это приводит к следующим правилам Фейнмана:



пропагатор поля материи $\frac{i\delta_{ab}}{\gamma \cdot p - m}$, (7.60)



взаимодействие калибровочного поля и поля материи $-ig\gamma_\mu(T^c)_{ab}$.

Этим мы завершаем формулировку правил Фейнмана для неабелевых калибровочных полей и их взаимодействий с полями материи в лоренцевой калибровке. Важной особенностью этих правил является наличие линий духов Фаддеева — Попова. Как уже отмечалось, духи появляются только во внутренних частях фейнмановских диаграмм и имеют неправильную связь спина со статистикой. Однако они играют решающую роль, поскольку, как мы увидим ниже, их отсутствие привело бы к нарушению унитарности. Тем не менее читатель вполне может рассматривать их как некую математическую уловку и, следовательно, спросить, существует

ли такая калибровка в теории Янга — Миллса, в которой вклад духов можно, как и в электродинамике, исключить, выполняя интегрирование. Такая калибровка действительно существует, она называется аксиальной калибровкой, и мы закончим данный параграф кратким ее рассмотрением.

Пропагатор калибровочного поля в аксиальной калибровке

Аксиальная калибровка определяется соотношением

$$t^\mu A_\mu^a = 0, \quad t^\mu t_\mu = -1, \quad (7.61)$$

где t — пространственноподобный вектор. Член, фиксирующий калибровку, принимает вид

$$F^a = t^\mu A_\mu^a, \quad (7.62)$$

и при калибровочных преобразованиях (7.28) имеем

$$\delta F^a = f^{abc} \omega^b t^\mu A_\mu^c + t^\mu \partial_\mu \omega^a = t^\mu \partial_\mu \omega^a.$$

Следовательно,

$$\frac{\delta F^a}{\delta \omega^b} = \delta^{ab} t^\mu \partial_\mu. \quad (7.63)$$

Последнее выражение не содержит поля A_μ^a , так что, подставив его в часть действия, описывающую духи, можно убедиться в том, что они не взаимодействуют с калибровочным полем, и их вклад можно исключить с помощью интегрирования. За это удобство, однако, приходится расплачиваться тем, что в этой калибровке пропагатор калибровочного поля имеет довольно сложный вид. Эффективный лагранжиан, не содержащий члена с духами, таков:

$$\mathcal{L} + \mathcal{L}_{GF} = -\frac{1}{4} G_{\mu\nu}^a G^{a\mu\nu} - \frac{1}{2\alpha} (t^\mu A_\mu^a)^2.$$

Соответствующая квадратичная часть после интегрирования по частям принимает вид

$$\frac{1}{2} \int A^{\mu\alpha} \left(\square g_{\mu\nu} - \partial_\mu \partial_\nu - \frac{1}{\alpha} t_\mu t_\nu \right) A^{\nu\alpha} dx.$$

Оператор, стоящий в скобках, в импульсном пространстве выглядит следующим образом:

$$-k^2 g_{\mu\nu} + k_\mu k_\nu - \frac{1}{\alpha} t_\mu t_\nu.$$

Как нетрудно убедиться, обратный оператор равен

$$-\frac{1}{k^2} \left[g^{\mu\nu} + \frac{(t^2 + \alpha k^2) k^\mu k^\nu}{(k \cdot t)^2} - \frac{k^\mu t^\nu + t^\mu k^\nu}{(k \cdot t)} \right]. \quad (7.64)$$

В пределе при $\alpha \rightarrow 0$ имеет место правило соответствия

$$\begin{array}{c} a \\ \text{---} \\ \mu \end{array} \begin{array}{c} k \\ \text{---} \\ \nu \end{array} \begin{array}{c} b \\ \text{---} \\ \nu \end{array} - \frac{i}{k^2} \left[g^{\mu\nu} + \frac{t^2}{(k \cdot t)^2} k^\mu k^\nu - \frac{k^\mu t^\nu + t^\mu k^\nu}{k \cdot t} \right] \delta^{ab}. \quad (7.65)$$

§ 7.3. Оператор собственной энергии и вершинная функция

Сформулировав правила Фейнмана, мы можем теперь вычислить амплитуду любого процесса в любом порядке теории возмущений. При этом, естественно, возникает вопрос: существуют ли какие-нибудь следствия калибровочной инвариантности для физических процессов, которые выполняются во *всех* порядках теории возмущений, или, иными словами, такие следствия, которые выполняются *точно*? Оказывается, что такие следствия существуют, в КЭД они называются тождествами Уорда. Имеются их обобщения и на неабелев случай. Обобщенные тождества Уорда играют решающую роль в доказательстве перенормируемости калибровочных теорий, а перенормируемость в свою очередь необходима для того, чтобы эти теории имели смысл и были правдоподобны. Тождества Уорда и их обобщения формулируются для полных пропагаторов и вершинных функций, и в данном параграфе наша задача состоит в том, чтобы определить эти объекты.

В предыдущей главе мы видели, как используется теория возмущений для вычисления 2- и 4-точечных функций Грина, а значит, и процессов рассеяния, и убедились в том, что масса частицы, определяемая как полюс 2-точечной функции, не совпадает с голой массой, а равна $m + \delta m$, причем в теории φ^4 мы имеем $\delta m^2 = -(1/2)ig\Delta_F(0)$. Мы хотим рассмотреть теперь проблему суммирования всех порядков, а следовательно (предполагая, что теория возмущений имеет физический смысл), и проблему получения точных функций Грина. Мы по-прежнему будем иметь дело с теорией φ^4 , выходя, однако, за ее рамки при рассмотрении калибровочной инвариантности (теория φ^4 не является калибровочной).

Сначала напомним некоторые результаты гл. 6 и введем некоторые новые обозначения. Через Z у нас обозначен производящий функционал n -точечных функций $\tau(x_1, \dots, x_n)$ или функций Грина $G^n(x_1, \dots, x_n)$:

$$\begin{aligned} \tau(x_1, \dots, x_n) &= G^{(n)}(x_1, \dots, x_n) = \\ &= \frac{1}{i^n} \frac{\delta^n Z[J]}{\delta J(x_1) \dots \delta J(x_n)} \Big|_{J=0}. \end{aligned} \quad (7.66)$$

Эти функции содержат связанные (или неприводимые) и несвязные (приводимые) части, например [формула (6.100)]:

$$G^{(4)} = -3 \text{---} - 3ig \text{---} \bigcirc - ig \times + O(g^2); \quad (7.67)$$

первые два из этих слагаемых приводимы, а последнее неприводимо. В рассеяние дают вклад только связанные функции Грина, которые порождаются функционалом W , причем $Z = e^{iW}$, так что связанные функции Грина таковы:

$$\begin{aligned} i\varphi(x_1, \dots, x_n) &= G_c^{(n)}(x_1, \dots, x_n) = \\ &= \frac{1}{i^{n-1}} \frac{\delta^n W[J]}{\delta J(x_1) \dots \delta J(x_n)} \Big|_{J=0}. \end{aligned} \quad (7.68)$$

В теории φ^4 из (7.67) получаем

$$G_c^4 = -ig \times + O(g^2). \quad (7.69)$$


Мы видели, что величина G^n может быть выражена через функции G_c : она равна функции $C_c^{(n)}$ плюс произведения функций $G_c^{(m)}$, т. е. связанных m -точечных функций более низкого порядка $m < n$. Это было полезным упрощением, основанным на классификации диаграмм. Введем теперь дальнейшую классификацию. Пренебрегая численными множителями, такими, как i , (связную) 2-точечную функцию во *всех* порядках можно представить в следующем виде:

$$\begin{aligned} G_c^{(2)} &= \text{---} + g \text{---} \bigcirc + \\ &+ g \left[\text{---} \bigcirc \bigcirc + \text{---} \bigcirc \bigcirc + \text{---} \bigcirc \right] + \\ &+ g^2 \left[\text{---} \bigcirc \bigcirc \bigcirc + \text{---} \bigcirc \bigcirc \bigcirc + \text{---} \bigcirc \bigcirc + \right. \\ &\left. + \text{---} \bigcirc \bigcirc + \text{---} \bigcirc \bigcirc + \text{---} \bigcirc \bigcirc \right] + \\ &+ O(g^4) \end{aligned} \quad (7.70)$$

Все эти диаграммы являются связными (неприводимыми), и нам необходимо найти метод их суммирования. Получающаяся при этом сумма называется *полным* или *одетым* пропагатором и обозначается следующим образом:

$$x \text{ --- } \bigcirc \text{ --- } y = G_c^{(2)}(x, y). \quad (7.71)$$

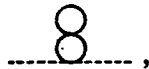
Члены порядка g и выше уводят значение физической массы от значения голой «массы» m и, следовательно, приводят к появлению «собственной энергии». Все приведенные выше диаграммы дают вклад в собственную энергию. Рассмотрим сначала диаграмму

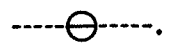
порядка g^2 , . Соответствующее ей выражение можно представить в виде произведения

$$[\text{---}] [\bigcirc] [\text{---}] [\bigcirc] [\text{---}]$$

Первый и последний множители — это просто внешние пропагаторы, общие для всех диаграмм; поэтому мы введем *усеченные* диаграммы, умножив выражения, соответствующие внешним концам, на обратные величины пропагаторов. Мы обозначим их штриховыми линиями, например:



Второй диаграммой порядка g^2 является диаграмма ,

а третьей — диаграмма . Аналогично можно рас-

смотреть диаграммы порядка g^3 и более высокого порядка. Что касается трех рассмотренных диаграмм порядка g^2 , то первая из них представляет собой произведение диаграмм низшего порядка, а две другие — нет; это связано с тем, что первая диаграмма содержит пропагатор. Она называется *одночастично-приводимой* диаграммой. Ее можно разделить на две диаграммы, если разрезать одну внутреннюю линию. Это, конечно, несправедливо для других диаграмм, которые по этой причине называются *одночастично-неприводимыми* (1ЧН) диаграммами. Основываясь на этой классификации, мы определим сильносвязную *собственно-энергетическую* часть как сумму 1ЧН-диаграмм и обозначим ее следующим образом:

$$\begin{aligned} \text{---} \bigcirc \text{---} &= \frac{1}{i} \Sigma(p) = \\ &= \frac{\bigcirc}{p} \text{---} \frac{\bigcirc}{p} \text{---} \frac{\bigcirc}{p} \text{---} \frac{\bigcirc}{p} \text{---} \frac{\bigcirc}{p} \text{---} + \\ &+ \text{---} \bigcirc \text{---} + \dots \end{aligned} \quad (7.72)$$

Следовательно, полный пропагатор (7.70) (в импульсном пространстве) может быть выражен через затравочный пропагатор $G_0(p) = i/(p^2 - m^2)$ и сильносвязную собственно-энергетическую функцию

$$\begin{aligned} G_c^{(2)}(p) &= G_0(p) + G_0(p) \frac{\Sigma(p)}{i} G_0(p) + \\ &+ G_0(p) \frac{\Sigma(p)}{i} G_0(p) \frac{\Sigma(p)}{i} G_0(p) + \dots = \\ &= G_0 \left(1 + \frac{\Sigma}{i} G_0 + \frac{\Sigma}{i} G_0 \frac{\Sigma}{i} G_0 + \dots \right) = \\ &= G_0 \left(1 - \frac{\Sigma}{i} G_0 \right)^{-1} = \left[G_0^{-1}(p) - \frac{1}{i} \Sigma(p) \right]^{-1} = \frac{i}{p^2 - m^2 - \Sigma(p)} \end{aligned} \quad (7.73)$$

или в виде диаграмм

$$\begin{aligned} \text{---} \bigcirc \text{---} &= \text{---} + \text{---} \bigcirc \text{---} + \\ &+ \text{---} \bigcirc \text{---} \bigcirc \text{---} + \dots \end{aligned} \quad (7.74)$$

Определив физическую массу $m_{\text{физ}}$ как полюс полного пропагатора

$$G_c^{(2)}(p) = \frac{i}{p^2 - m_{\text{физ}}^2}, \quad (7.75)$$

мы, сравнив его с (7.73), получим соотношение

$$m_{\text{физ}}^2 = m^2 + \Sigma(p), \quad (7.76)$$

которым оправдывается название собственно-энергетического члена Σ . Последний представляет собой изменение массы от «голого» значения к «физическому», вычисленное во всех порядках теории и возмущений.

Из соотношения (7.73) следует равенство

$$G_c^2(p)^{-1} = G_0(p)^{-1} - \frac{1}{i} \Sigma(p), \quad (7.77)$$

так что величина, обратная 2-точечной функции, содержит кроме обратного голого пропагатора *только 1ЧН-диаграммы*. Она является примером *вершинной функции* и может быть обобщена.

Двухточечная вершинная функция $\Gamma^{(2)}(p)$ определяется следующим образом:

$$G_c^{(2)}(p)\Gamma^{(2)}(p) = i. \quad (7.78)$$

Вместе с соотношением (7.77) это приводит к равенству

$$\Gamma^{(2)}(p) = p^2 - m^2 - \Sigma(p). \quad (7.79)$$

Покажем теперь, что имеется производящий функционал для функций $\Gamma^{(n)}(p)$. Он обозначается через $\Gamma[\varphi]$ и определяется на основе преобразования Лежандра функционала

$$\mathcal{W}[J] = \Gamma[\varphi] + \int dx J(x)\varphi(x). \quad (7.80)$$

Отсюда следует, что

$$\frac{\delta \mathcal{W}[J]}{\delta J(x)} = \varphi(x), \quad \frac{\delta \Gamma[\varphi]}{\delta \varphi(x)} = -J(x). \quad (7.81)$$

Стало быть, для пропагатора имеем

$$G(x, y) = - \frac{\delta^2 \mathcal{W}[J]}{\delta J(x) \delta J(y)} = - \frac{\delta \varphi(x)}{\delta J(y)}. \quad (7.82)$$

Определим теперь ядро

$$\Gamma(x, y) = \frac{\delta^2 \Gamma[\varphi]}{\delta \varphi(x) \delta \varphi(y)} = - \frac{\delta J(x)}{\delta \varphi(y)}. \quad (7.83)$$

Оно, очевидно, является обратным пропагатору т. е.

$$\begin{aligned} \int dz G(x, z) \Gamma(z, y) &= - \int dz \frac{\delta^2 \mathcal{W}[J]}{\delta J(x) \delta J(z)} \frac{\delta^2 \Gamma[\varphi]}{\delta \varphi(z) \delta \varphi(y)} = \\ &= \int dz \frac{\delta \varphi(x)}{\delta J(z)} \frac{\delta J(z)}{\delta \varphi(y)} = \frac{\delta \varphi(x)}{\delta \varphi(y)} = \delta(x-y). \end{aligned} \quad (7.84)$$

На самом деле фурье-образом этого равенства должно быть равенство

$$G(p, -p)\Gamma(p, -p) = 1,$$

а не равенство (7.78), которое содержит i в правой части [и в котором мы положили $G(p, -p) = G(p)$]. Это небольшое расхождение можно устранить, если определить фурье-образы так:

$$G(x, y) = \frac{1}{(2\pi)^s} \int dp dq e^{i(px+qy)} \tilde{G}(p, q), \quad (7.85)$$

$$\tilde{G}(p, q) = \int dx dy e^{-i(px+qy)} G(x, y) \quad (7.86)$$

и учесть, что в силу трансляционной инвариантности

$$\tilde{G}(p, q) = (2\pi)^4 \delta(p+q) G(p, q). \quad (7.87)$$

(Все интегралы, δ -функции и скалярные произведения, приведенные выше, очевидно, являются четырехмерными.) В то же время для 2-точечных вершинных функций мы имеем

$$\Gamma(x, y) = \frac{i}{(2\pi)^s} \int dp dq e^{i(px+qy)} \tilde{\Gamma}(p, q), \quad (7.88)$$

$$\tilde{\Gamma}(p, q) = -i \int dx dy e^{-i(px+qy)} \Gamma(x, y), \quad (7.89)$$

$$\tilde{\Gamma}(p, q) = (2\pi)^4 \delta(p+q) \Gamma(p, q). \quad (7.90)$$

Уравнения (7.84) и (7.78) теперь согласованы.

Продифференцируем обе части уравнения (7.84)

$$\int dz \frac{\delta^2 \mathcal{W}}{\delta J(x) \delta J(z)} \frac{\delta^2 \Gamma}{\delta \varphi(z) \delta \varphi(z')} = -\delta(x-z')$$

по $J(x'')$ с учетом соотношения

$$\frac{\delta}{\delta J(x')} = \int dz'' \frac{\delta \varphi(z'')}{\delta J(x'')} \frac{\delta}{\delta \varphi(z'')} = - \int dz'' G(x'', z'') \frac{\delta}{\delta \varphi(z'')}.$$

Получим

$$\begin{aligned} \int dz \frac{\delta^2 \mathcal{W}}{\delta J(x) \delta J(x'') \delta J(z)} \frac{\delta^2 \Gamma}{\delta \varphi(z) \delta \varphi(z')} - \\ - \int dz dz'' \frac{\delta^2 \mathcal{W}}{\delta J(x) \delta J(z)} G(x'', z'') \frac{\delta^2 \Gamma}{\delta \varphi(z) \delta \varphi(z') \delta \varphi(z'')} = 0 \end{aligned}$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} \int dz \frac{\delta^2 \mathcal{W}}{\delta J(x) \delta J(x'') \delta J(z)} \Gamma(z, z') + \\ + \int dz dz'' G(x, z) G(x'', z'') \frac{\delta^2 \Gamma}{\delta \varphi(z) \delta \varphi(z') \delta \varphi(z'')} = 0. \end{aligned}$$

Умножим теперь обе части последнего равенства на $G(x', z')$ и проинтегрируем по z' с учетом формулы (7.84); это дает

$$\begin{aligned} \frac{\delta^2 \mathcal{W}}{\delta J(x) \delta J(x') \delta J(x'')} = - \int dz dz' dz'' G(x, z) G(x', z') G(x'', z'') \times \\ \times \frac{\delta^2 \Gamma}{\delta \varphi(z) \delta \varphi(z') \delta \varphi(z'')}. \end{aligned} \quad (7.91)$$

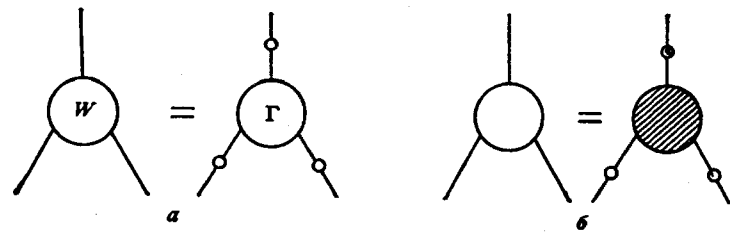


Рис. 7.1. Два представления для соотношения (7.91).

Оно указывает на то, что связная 3-точечная функция представляет собой не что иное, как неприводимую (1ЧН) 3-точечную вершинную функцию, у которой внешними линиями являются точные пропагаторы. В виде диаграмм это представлено на рис. 7.1. Соотношение (7.91) можно обратить с помощью формулы (7.84), и мы получим

$$\frac{\delta^3 \Gamma}{\delta \varphi(y) \delta \varphi(y') \delta \varphi(y'')} = - \int dx dx' dx'' \Gamma(x, y) \Gamma(x', y') \Gamma(x'', y'') \frac{\delta^3 W}{\delta J(x) \delta J(x') \delta J(x'')}. \quad (7.92)$$

Так как функции $\Gamma(x, y)$ и т. д. являются обратными пропагаторами, в правой части этого уравнения стоит усеченная связная 3-точечная функция, совпадающая с 1ЧН 3-точечной функцией.

Продифференцировав обе части равенства (7.91) еще раз, мы приходим к выражению для 4-точечной функции, которое графически представлено на рис. 7.2. Связная 4-точечная функция, как не-

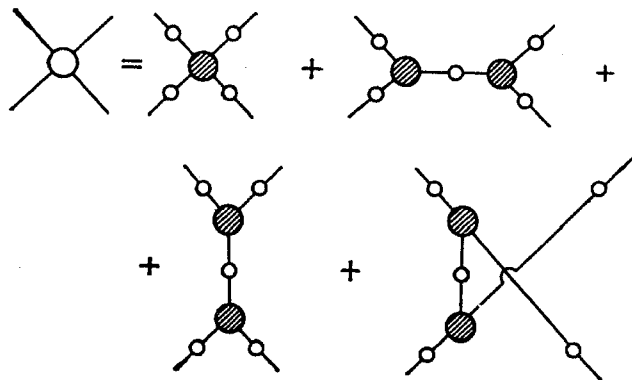


Рис. 7.2. См. текст.

трудно видеть, содержит 1ЧН-часть (первый член справа), внешними линиями которой являются точные пропагаторы, и три одно-частично приводимые части, связанные друг с другом «кроссингом».

С 1ЧН-функцией Γ мы встретимся при установлении обобщенных тождеств Уорда, а также в следующей главе при исследовании вопросов спонтанного нарушения симметрии.

Выведенные нами соотношения (или рис. 7.1 и 7.2) показывают, что теория может быть построена с использованием либо $W[J]$, либо $\Gamma[\varphi]$, где $\delta W / \delta J = \varphi$, $\delta \Gamma / \delta \varphi = -J$ и

$$W = \Gamma + \int J \varphi. \quad (7.93)$$

Это преобразование Лежандра допускает простую геометрическую интерпретацию и обычно используется также в термодинамике. В действительности оказывается, что имеется довольно близкая аналогия между квантовой теорией поля и статистической механикой (термодинамикой), которая обнаруживается в данной формулировке теории поля. Мы завершим данный параграф рассмотрением этих двух вопросов.

Геометрическая интерпретация преобразования Лежандра

Для простоты рассмотрим случай функций одной независимой переменной x . Предположим, что мы имеем дело с функцией

$$f = f(x); \quad (7.94)$$

переменные f и x могут быть, например, физическими величинами, а равенство (7.94) — соотношением между ними, в котором x — независимая переменная. Предположим теперь, что мы хотим перейти к новой независимой переменной $df/dx = u$. Возникает вопрос: какую величину мы должны выбрать в качестве зависимой переменной, чтобы сохранить всю информацию, содержащуюся в соотношении (7.94)? Рассмотрим график функции $f(x)$, изображенный на рис. 7.3, а. Он соответствует соотношению (7.94). Теперь пусть независимой переменной является величина $u = df/dx$, а зависимой — величина f и мы имеем график, представленный на рис. 7.3, б. Содержит ли этот график всю информацию графика на рис. 7.3, а? Чтобы проверить, так ли это, постараемся восстановить зависимость $f(x)$ из графика, изображенного на рис. 7.3, б. Мы получим график, изображенный на рис. 7.3, в, из которого явствует, что восстановление не может быть осуществлено однозначно — некоторая информация теряется. Поэтому мы вновь спросим себя, если за независимую переменную взята величина $u = df/dx$, что следует выбрать в качестве зависимой переменной?

Касательная к кривой, изображенной на рис. 7.3, а, описывается уравнением

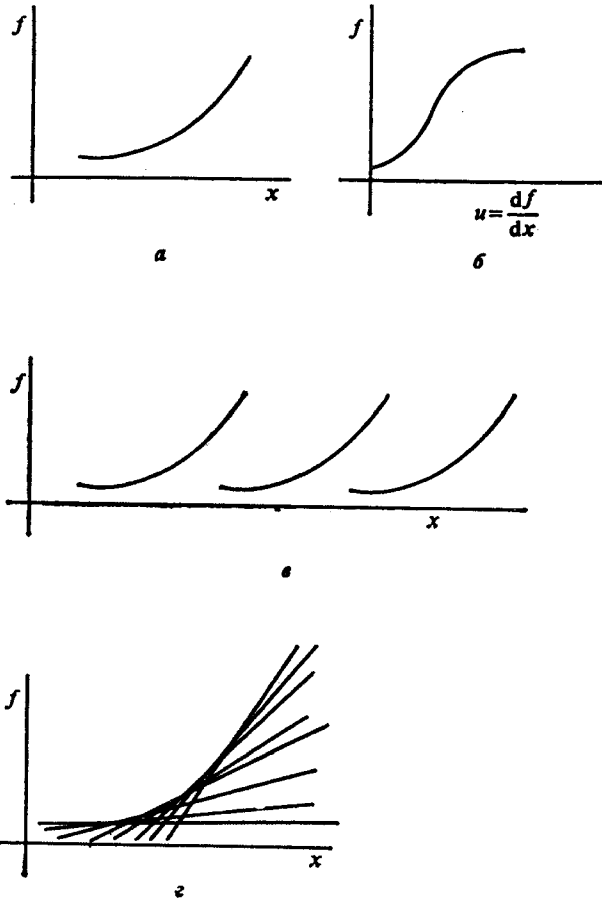


Рис. 7.3. Геометрическая интерпретация преобразования Лежандра.

$$f = ux + g,$$

где g — отрезок, отсекаемый на оси f , а u — первая производная. Следовательно, если u — независимая переменная, то, взяв в качестве зависимой переменной величину

$$g = f - ux, \quad (7.95)$$

мы, зная функцию $g = g(u)$, можем восстановить график рис. 7.3, а как огибающую всех касательных (рис. 7.3, в). Формула (7.95) есть частный случай преобразования Лежандра. Обобщение на случай более чем одного измерения тривиально: если $f(x, y)$ — заданная

функция и мы хотим перейти от независимых переменных (x, y) к независимым переменным (u, y) , где $u = df/dx$, то нужно выбрать следующую функцию переменных u и y :

$$g(u, y) = f(x, y) - ux. \quad (7.96)$$

Соотношение (7.93) имеет именно такой вид (хотя, конечно, оно является функциональным соотношением), и мы можем записать его в виде

$$\Gamma[\varphi] = W[J] - \int J\varphi, \quad (7.97)$$

где

$$\varphi = \frac{\delta W}{\delta J}.$$

Термодинамическая аналогия

В термодинамических системах внутренняя энергия U есть функция энтропии S и объема V : $U = U(S, V)$. Но не всегда удобно рассматривать энергию системы как функцию переменной S , так как энтропию не очень-то просто измерить! В то же время температура T очень просто измеряется (и является интенсивной величиной, тогда как S — экстенсивная величина). Какая же функция переменной T столь же хорошо описывает систему? Это — свободная энергия

$$F = U - TS,$$

или

$$F(T, V) = U(S, V) - TS, \quad (7.98)$$

где

$$T = \left(\frac{\partial U}{\partial S} \right)_V,$$

как это следует из соотношения

$$dU = TdS - PdV.$$

Очевидно, что уравнения (7.97) и (7.98) имеют один и тот же математический вид. Но аналогия между теорией поля и термодинамикой, основанной на статистической механике, намного глубже. Эта аналогия начинается со статистической суммы Z , которая подобна производящему функционалу для функций Грина, также обозначаемому буквой Z . Статистическая сумма связана со свободной энергией F следующим образом:

$$Z = e^{-F/NkT}.$$

Аналогичные друг другу величины квантовой теории поля и термодинамики сведены в табл. 7.1.

Таблица 7.1. Аналогия между теорией поля и статистической механикой

Теория поля	Статистическая механика
Z	Z — статистическая сумма
$Z = e^{iW}$	$Z = e^{-F/NkT}$
$W[J] = \Gamma[\varphi] + \int J\varphi$	$F(T) = U(S) - TS$

Другой пример — намагниченность [12]. Пусть Z — статистическая сумма системы, находящейся во внешнем поле H . Тогда она является также производящим функционалом для евклидовых функций Грина:

$$Z[H] = \sum \frac{1}{N!} \int dx_1 \dots dx_N H(x_1) \dots H(x_N) G^{(N)}(x_1, \dots, x_N).$$

Аналогично

$$W[H] = \ln Z[H]$$

является производящим функционалом для связанных функций Грина. Вариационная производная $\delta W/\delta H$ есть «намагниченность» M :

$$M(x) = \frac{\delta W[H]}{\delta H(x)},$$

а 1ЧН-вершины порождаются функционалом $\Gamma[M]$, удовлетворяющим соотношению

$$\Gamma[M] + W[H] = \int dx H(x)M(x).$$

В качестве последнего примера преобразования Лежандра можно привести связь между лагранжевой и гамильтоновой формулировками классической механики. В случае точечных частиц L является функцией переменных x , \dot{x} и t , а H — функцией переменных x , p и t , и мы имеем

$$H(x, p) = -L(x, \dot{x}) + \dot{x}p, \quad p = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}.$$

§ 7.4. Тожества Уорда — Такахаши в КЭД

Тожества Уорда и их обобщения, найденные Такахаши, — это точные соотношения между 1ЧН-вершинными функциями и пропагаторами, справедливые во всех порядках теории возмущений. Они следуют из калибровочной инвариантности КЭД и играют ключевую роль в доказательстве перенормируемости этой теории. Мы приведем доказательства этих тождеств, начав с производящего функционала Z для системы фотонов и электронов, имеющего вид

$$Z = N \int \mathcal{D}A_\mu \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi \exp\left(i \int \mathcal{L}_{\text{эфф}} dx\right), \quad (7.99)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{эфф}} = & -\frac{1}{4} F_\mu{}^\nu F^{\mu\nu} + i\bar{\psi}\gamma^\mu (\partial_\mu + ieA_\mu)\psi - m\bar{\psi}\psi - \\ & - \frac{1}{2\alpha} (\partial^\mu A_\mu)^2 + J^\mu A_\mu + \bar{\eta}\psi + \bar{\psi}\eta. \end{aligned} \quad (7.100)$$

Этот эффективный лагранжиан содержит часть, описывающую свободное фотонное поле, часть, описывающую свободное электронное поле, в которой обычная производная заменена ковариантной, с тем чтобы учесть взаимодействие с электромагнитным полем, член, фиксирующий калибровку, соответствующий калибровке Лоренца, и источники для полей A_μ , ψ и $\bar{\psi}$. Отсутствует член с духами Фаддеева — Попова. Так как мы видели, что духи не взаимодействуют с физическими полями (в этой калибровке), их вклад в Z представляет собой только общий постоянный множитель, который можно включить в N .

Напомним, что без члена, фиксирующего калибровку (и членов с источниками), лагранжиан калибровочно-инвариантен. В этом случае функционал Z бесконечен, а поиски фотонного пропагатора обречены на неудачу. Чтобы найти конечный пропагатор, мы вынуждены ввести член, фиксирующий калибровку (и член с духами, которым в абелевом случае можно пренебречь). Это, однако, означает, что лагранжиан $\mathcal{L}_{\text{эфф}}$ не является калибровочно-инвариантным. Физические следствия теории, выраженные через функции Грина, тем не менее не могут зависеть от выбора калибровки, так что производящий функционал Z должен быть калибровочно-инвариантным. Это — нетривиальное требование к дифференциальному уравнению для Z , которое мы сейчас найдем.

При инфинитезимальных калибровочных преобразованиях

$$A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu \Lambda, \quad \psi \rightarrow \psi - ie\Lambda\psi, \quad \bar{\psi} \rightarrow \bar{\psi} + ie\Lambda\bar{\psi} \quad (7.101)$$

[ср. с соотношениями (3.67) и (3.74), в которых произведена замена $\Lambda \rightarrow e\Lambda$; электрон обладает зарядом $e(<0)$] первые три члена в выражении (7.100) инвариантны, а остальные нет, так что подынтегральное выражение в Z приобретает множитель

$$\exp \left\{ i \int dx \left[-\frac{1}{\alpha} (\partial^\mu A_\mu) \square \Lambda + J^\mu \partial_\mu \Lambda - ie \Lambda (\bar{\eta} \psi - \bar{\psi} \eta) \right] \right\},$$

который с учетом малости Λ может быть записан в виде

$$1 + i \int dx \left[-\frac{1}{\alpha} \square (\partial^\mu A_\mu) - \partial^\mu J_\mu - ie (\bar{\eta} \psi - \bar{\psi} \eta) \right] \Lambda(x), \quad (7.102)$$

где мы выполнили интегрирование по частям, чтобы устранить оператор дифференцирования, действующий на Λ . Инвариантность функционала Z означает, что оператор (7.102), действуя на Z , ведет себя как единичный. Так как Λ — произвольная функция, это приводит к равенству

$$\left[-\frac{1}{\alpha} \square (\partial^\mu A_\mu) - \partial^\mu J_\mu - ie (\bar{\eta} \psi - \bar{\psi} \eta) \right] Z = 0.$$

Выполнив подстановки

$$\psi \rightarrow \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta \bar{\eta}}, \quad \bar{\psi} \rightarrow \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta \eta}, \quad A_\mu \rightarrow \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J^\mu},$$

получим функциональное дифференциальное уравнение

$$\left[\frac{i}{\alpha} \square \partial^\mu \frac{\delta}{\delta J^\mu} - \partial^\mu J_\mu - e \left(\bar{\eta} \frac{\delta}{\delta \eta} - \eta \frac{\delta}{\delta \bar{\eta}} \right) \right] Z[\eta, \bar{\eta}, J] = 0. \quad (7.103)$$

Положив $Z = e^{iW}$, его можно записать в виде уравнения для W :

$$-\frac{\square}{\alpha} \partial^\mu \frac{\delta W}{\delta J^\mu} - \partial^\mu J_\mu - ie \left(\bar{\eta} \frac{\delta W}{\delta \eta} - \eta \frac{\delta W}{\delta \bar{\eta}} \right) = 0, \quad (7.104)$$

где $W = W[\eta, \bar{\eta}, J]$. Наконец, мы можем преобразовать его в уравнение для вершинной функции Γ , определенной равенством

$$\Gamma[\psi, \bar{\psi}, A_\mu] = W[\eta, \bar{\eta}, J_\mu] - \int dx (\bar{\eta} \psi + \bar{\psi} \eta + J^\mu A_\mu), \quad (7.105)$$

откуда следуют соотношения

$$\frac{\delta \Gamma}{\delta A_\mu(x)} = -J^\mu(x), \quad \frac{\delta W}{\delta J_\mu(x)} = A^\mu(x),$$

$$\frac{\delta \Gamma}{\delta \psi(x)} = -\bar{\eta}(x), \quad \frac{\delta W}{\delta \eta(x)} = \psi(x), \quad (7.106)$$

$$\frac{\delta \Gamma}{\delta \bar{\psi}(x)} = -\eta(x), \quad \frac{\delta W}{\delta \bar{\eta}(x)} = \bar{\psi}(x).$$

Тогда уравнение (7.104) принимает вид

$$-\frac{\square}{\alpha} \partial^\mu A_\mu(x) + \partial_\mu \frac{\delta \Gamma}{\delta A_\mu(x)} - ie \psi \frac{\delta \Gamma}{\delta \psi(x)} + ie \bar{\psi} \frac{\delta \Gamma}{\delta \bar{\psi}(x)} = 0. \quad (7.107)$$

Возьмем теперь вторую функциональную производную этого уравнения по $\psi(x_1)$ и $\psi(y_1)$ и положим $\bar{\psi} = \psi = A_\mu = 0$. Первый член обращается в нуль, и мы получаем

$$-\partial_x^\mu \frac{\delta^2 \Gamma[0]}{\delta \bar{\psi}(x_1) \delta \psi(y_1) \delta A^\mu(x)} = ie \delta(x - x_1) \frac{\delta^2 \Gamma[0]}{\delta \bar{\psi}(x_1) \delta \psi(y_1)} - ie \delta(x - y_1) \frac{\delta^2 \Gamma[0]}{\delta \bar{\psi}(x_1) \delta \psi(y_1)}. \quad (7.108)$$

Левая часть этого уравнения представляет собой производную от (1ЧН) электрон-фотонной вершинной функции, а два члена в правой части являются функциями, обратными полным пропагаторам. Смысл уравнения (7.108) станет более ясным, если мы запишем его в импульсном пространстве. Для этого определим вершинную функцию $\Gamma_\mu(p, q, p')$ следующим образом:

$$\int dx dx_1 dy_1 e^{i(p'x_1 - py_1 - qx)} \frac{\delta^2 \Gamma[0]}{\delta \bar{\psi}(x_1) \delta \psi(y_1) \delta A^\mu(x)} = ie (2\pi)^4 \delta(p' - p - q) \Gamma_\mu(p, q, p'). \quad (7.109)$$

В то же время величина $\delta^2 \Gamma / \delta \bar{\psi} \delta \psi$ является, как мы видели, обратным пропагатором, который мы обозначим через S_F' (чтобы отличить его от затравочного пропагатора); следовательно,

$$\int dx_1 dy_1 e^{i(p'x_1 - py_1)} \frac{\delta^2 \Gamma[0]}{\delta \bar{\psi}(x_1) \delta \psi(y_1)} = (2\pi)^4 \delta(p' - p) i S_F'^{-1}(p). \quad (7.110)$$

Умножая (7.108) на $\exp i(p'x_1 - py_1 - qx)$ и интегрируя по x, x_1 и y_1 , получаем

$$\blacksquare q^\mu \Gamma_\mu(p, q, p+q) = S_F'^{-1}(p+q) - S_F'^{-1}(p). \quad (7.111)$$

Это соотношение называется *тождеством Уорда — Такакаши*; графически оно представлено на рис. 7.4. Перейдя к пределу при $q_\mu \rightarrow 0$, получим *тождество Уорда*

$$\blacksquare \frac{\partial S_F'^{-1}}{\partial p^\mu} = \Gamma_\mu(p, 0, p). \quad (7.112)$$

Как уже отмечалось выше, это соотношение выполняется во всех порядках теории возмущений. Полезно, однако, проверить

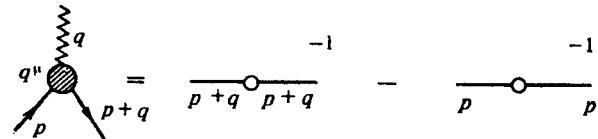
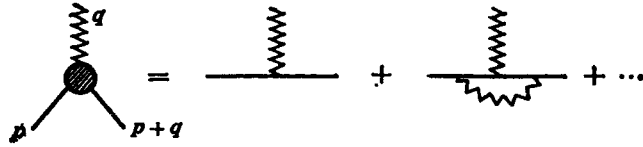


Рис. 7.4. Тождество Уорда — Такакаши.

Рис. 7.5. Разложение вершинной функции $\Gamma_\mu(p, q, p+q)$.Рис. 7.6. Разложение пропагатора $S'_F(p)$.

его в двух низших порядках; соответствующие диаграммы изображены на рис. 7.5 и 7.6. В низшем порядке величина S'_F просто равна затравочному пропагатору S_F ; следовательно,

$$S_F^{-1}(p) = \gamma_\mu p^\mu - m,$$

$$\frac{\partial S_F^{-1}(p)}{\partial p^\mu} = \gamma_\mu. \quad (7.113)$$

Вычислим теперь $\Gamma_\mu(p, 0, p)$ в низшем порядке. Прежде всего, обобщая соотношение (7.92) на рассматриваемый случай, заметим, что функции $\Gamma(x, y)$ являются соответствующими обратными пропагаторами, а $W = -i \ln Z$. Тогда

$$\begin{aligned} \frac{\delta^2 \Gamma}{\delta \bar{\psi}(x_1) \delta \psi(y_1) \delta A^\mu(x)} = & \\ = - \int du_1 dv_1 du & \left[i S_F^{-1}(u_1 - x_1) i S_F^{-1}(v_1 - y_1) \right] \times \\ \times \left\{ - i D_{\mu\nu}^{-1}(u - x) (-i) \frac{\delta^2 Z[0]}{\delta \eta(u_1) \delta \bar{\eta}(v_1) \delta J^\nu(u)} \right\}, & \quad (7.114) \end{aligned}$$

где $D_{\mu\nu}$ — функция фотонного пропагатора (явный вид которой нам не нужен). Нам необходимо теперь вычислить третью производную от производящего функционала Z , приведенного в формуле (7.99). Вспомнив общую теорию, изложенную в гл. 6, выделим член взаимодействия $e \bar{\psi} \gamma_\mu \psi A^\mu$ и представим функционал Z в виде

$$Z[\eta, \bar{\eta}, J_\mu] = N \exp \left[i e \int dz \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta \eta(z)} \gamma^\lambda \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta \bar{\eta}(z)} \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J^\lambda(z)} \right] Z_0, \quad (7.115)$$

где Z_0 — производящий функционал в теории свободных электронов и фотонов:

$$\begin{aligned} Z_0 = \exp \left[-i \int dx dy \bar{\eta}(x) S_F(x-y) \eta(y) \right] \times \\ \times \exp \left[\frac{i}{2} \int dx dJ^\mu y(x) D_{\mu\nu}(x-y) J^\nu(y) \right]. \end{aligned} \quad (7.116)$$

В низшем порядке это приведет к соотношению

$$\frac{\delta^2 Z[0]}{\delta \eta(u_1) \delta \bar{\eta}(v_1) \delta J^\mu(u)} = i e \int dz S_F(u_1 - z) S_F(v_1 - z) D_{\mu\nu}(u - z) \gamma^\nu. \quad (7.117)$$

Подстановка его в (7.114) и учет (7.109) приводят в низшем порядке к функции

$$\Gamma_\mu(p, q, p+q) = \gamma_\mu, \quad (7.118)$$

которая в силу равенства (7.113) удовлетворяет тождеству Уорда (7.112). На самом деле она «более чем» удовлетворяет ему, так как в этом случае, когда рассматривается наименьший порядок, вершинная функция f_μ не зависит от импульса фотона q . Мы увидим, однако, что в высших порядках это не так; во втором порядке (т. е. в порядке e^2) тождество Уорда выполняется и равенство $q = 0$ является существенным условием.

Прежде чем рассматривать второй порядок, перепишем для удобства тождество Уорда в первом порядке в дифференциальной форме. Дифференцирование обеих частей тождества $S_F(p) S_F^{-1}(p) = 1$ по p^μ приводит к соотношению

$$\frac{\partial S_F(p)}{\partial p^\mu} = - S_F(p) \frac{\partial S_F^{-1}(p)}{\partial p^\mu} S_F(p) = - S_F(p) \gamma_\mu S_F(p), \quad (7.119)$$

где мы воспользовались равенством (7.113). Правая часть этого соотношения содержит правильные множители, описывающие простейшую вершинную диаграмму (первую из изображенных на рис. 7.5 после знака равенства), в которой импульс внешней фотонной линии положен равным нулю. Поэтому формально дифференцирование пропагатора по p^μ соответствует вставке фотонной линии с нулевым импульсом во внутреннюю электронную линию.

Рассмотрим теперь изображенные на рис. 7.5 и 7.6 диаграммы следующего порядка. Начнем с того, что выпишем разложение полного электронного пропагатора $i S'_F$ по голому пропагатору $i S_F$. По аналогии с (7.73) напомним

$$\begin{aligned} i S'_F &= i S_F + i S_F \frac{\Sigma}{i} i S_F + i S_F \frac{\Sigma}{i} i S_F \frac{\Sigma}{i} i S_F + \dots = \\ &= i S_F \left(1 + \frac{\Sigma}{i} i S'_F \right), \end{aligned} \quad (7.120)$$

откуда следует, что

$$S_F'^{-1} = S_F^{-1} - \Sigma. \quad (7.121)$$

Следовательно, с учетом равенства (7.113) будем иметь

$$\frac{\partial S_F'^{-1}}{\partial p^\mu} = \frac{\partial S_F^{-1}}{\partial p^\mu} - \frac{\partial \Sigma}{\partial p^\mu} = \gamma_\mu - \frac{\partial \Sigma}{\partial p^\mu}. \quad (7.122)$$

Если записать разложение вершинной функции, изображенное на рис. 7.5, в виде

$$\Gamma_\mu(p, q, p+q) = \gamma_\mu + \Lambda_\mu(p, q, p+q), \quad (7.123)$$

где Λ_μ — вклад 1ЧН-диаграмм в величину Γ_μ , то из тождеств Уорда (7.112) будет следовать равенство

$$\Lambda_\mu(p, 0, p) = -\frac{\partial \Sigma}{\partial p^\mu}. \quad (7.124)$$

Теперь наша задача — проверить это равенство явно в низшем порядке, т. е. когда Λ_μ и Σ — функции, изображенные вторыми диаграммами в правых частях рис. 7.5 и 7.6 соответственно. Из сравнения равенств (7.120) и (7.121) становится ясным, что функции Σ соответствует собственно-энергетический пузырь, изображенный на рис. 7.6, без внешних линий. Тогда из правил Фейнмана следует, что

$$\begin{aligned} \frac{\Sigma}{i} &= (-ie)^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{-ig_{\lambda\lambda}}{k^2} \gamma^\lambda \frac{i}{\gamma \cdot (p-k) - m} \gamma^\lambda = \\ &= -e^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2} \mu^\lambda S_F(p-k) \gamma_\lambda. \end{aligned} \quad (7.125)$$

Мы здесь выбрали фотонный пропагатор в фейнмановской калибровке, т. е. $\alpha = 1$ в формуле (7.54). Теперь, используя соотношение (7.119), получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Sigma}{\partial p^\mu} &= -ie^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2} \gamma^\lambda \frac{\partial}{\partial p^\mu} S_F(p-k) \gamma_\lambda = \\ &= ie^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2} \gamma^\lambda S_F(p-k) \gamma_\mu S_F(p-k) \gamma_\lambda. \end{aligned} \quad (7.126)$$

Чтобы вычислить $\Lambda_\mu(p, q, p+q)$, применим просто правила Фейнмана к диаграмме, изображенной на рис. 7.5, взяв для пропагаторов и вершин соответствующие выражения, и вспомним из наших изложенных выше вычислений в первом порядке, что эти диаграммы добавляются к $-ie\Gamma_\mu$ (т. е. в первом порядке $-ie\Gamma_\mu = -ie\gamma_\mu$). Тогда, вновь используя фотонный пропагатор в фейнмановской калибровке, получаем

$$\begin{aligned} -ie\Lambda_\mu(p, q, p+q) &= (-ie)^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{-ig_{\lambda\lambda}}{k^2} \gamma^\lambda \frac{i}{\gamma \cdot (p-k) - m} \gamma_\mu \times \\ &\times \frac{i}{\gamma \cdot (p-k+q) - m} \gamma^\lambda = \\ &= -e^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2} \gamma^\lambda S_F(p-k) \gamma_\mu S_F(p-k+q) \gamma_\lambda. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\Lambda_\mu(p, q, p+q) = -ie^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2} \gamma^\lambda S_F(p-k) \gamma_\mu S_F(p-k+q) \gamma_\lambda. \quad (7.127)$$

Из выражений (7.126) и (7.127) явствует, что тождества Уорда (7.124) выполняются.

Как было отмечено выше, тождество Уорда оказывается существенным в процедуре перенормировок. Коснемся кратко некоторых вопросов, которые в дальнейшем будут рассматриваться в гл. 9. Интегралы, которые мы выписали, на самом деле расходятся, как и выражения, которые соответствуют диаграммам, изображенным на рис. 7.5 и 7.6. Таким образом, вершинная функция и полные пропагаторы являются сильно расходящимися величинами. Однако в перенормируемой теории (а КЭД является перенормируемой) эти функции можно представить (по крайней мере в окрестности точки $p^2 = m^2$) как затравочные пропагаторы и вершинные члены, умноженные на бесконечные константы. Поэтому мы поло-

$$\begin{aligned} S_F' &\rightarrow Z_2 S_F, \\ \Gamma_\mu(p, 0, p) &\rightarrow \frac{1}{Z_1} \gamma_\mu. \end{aligned} \quad (7.128)$$

Тогда тождества Уорда приводят к равенству

$$Z_1 = Z_2, \quad (7.129)$$

так что перенормировка теории может быть осуществлена с помощью одной константы, а не двух (на самом деле имеется также константа перенормировки волновой функции Z_3).

Тождества Уорда выполняются в простейшей калибровочной теории, КЭД, и естественно поставить вопрос, будут ли иметь место аналогичные тождества в неабелевых калибровочных теориях. Такие тождества действительно имеют место, что впервые было установлено Славновым и Тейлором. Однако оказывается, что самым простым способом вывода тождеств Славнова — Тейлора является введение довольно хитроумного преобразования, предложенного Бекки, Руэ и Сторой, при котором лагранжиан (7.49) является

инвариантным. Это преобразование мы рассмотрим в следующем параграфе.

§ 7.5. Преобразование Бекки — Руэ — Сторы

Свой вывод тождества Уорда мы начинали с констатации того, что, хотя производящий функционал Z должен быть калибровочно-инвариантным, к эффективному лагранжиану из-за члена, фиксирующего калибровку, такое требование не предъявляется; в абелевом случае мы могли пренебречь членом с духами. В неабелевом случае мы имеем аналогичную, хотя и более сложную ситуацию. Из соотношений (7.47) — (7.50) и (7.52) мы имеем

$$Z = N \int \mathcal{D}A_\mu \mathcal{D}\eta \mathcal{D}\bar{\eta} \exp \left(i \int \mathcal{L}_{\text{эфф}} dx \right),$$

где

$$\mathcal{L}_{\text{эфф}} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{\mu\nu a} + \mathcal{L}_{GF} + \mathcal{L}_{FPG}. \quad (7.130)$$

Член, фиксирующий калибровку, мы выберем соответствующим калибровке Лоренца:

$$\mathcal{L}_{GF} = -\frac{1}{2\alpha} (\partial^\mu A_\mu^a)^2 \quad (7.131)$$

а член с духами Фаддеева — Попова можно записать в виде

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{FPG} &= -\bar{\eta}^a (\delta^{ab} \square - g f^{abc} \partial^\mu A_\mu^c - g f^{abc} A_\mu^c \partial^\mu) \eta^b = \\ &= -\bar{\eta}^a \square \eta^a + g f^{abc} \bar{\eta}^a (\partial^\mu A_\mu^c + A_\mu^c \partial^\mu) \eta^b = \partial^\mu \bar{\eta}^a \partial_\mu \eta^a - \\ &- g f^{abc} (\partial^\mu \bar{\eta}^a) A_\mu^b \eta^c + \text{полная производная} = \\ &= \partial^\mu \bar{\eta}^a (\partial_\mu \eta^a + g f^{abc} A_\mu^b \eta^c) = \partial^\mu \bar{\eta}^a D_\mu \eta^a = -\bar{\eta}^a \partial^\mu D_\mu \eta^a + \text{полная} \\ &\text{производная.} \end{aligned} \quad (7.132)$$

Здесь нам дважды встретились члены, представляющие собой полные производные. Их можно отбросить, так как они добавляют к действию только поверхностные члены. К тому же мы ввели ковариантную производную $D_\mu \eta$ для произвольной неабелевой группы, представляющую собой обобщение формулы (3.155), которая относится к теории с группой $SU(2)$.

Мы хотим теперь исследовать поведение $\mathcal{L}_{\text{эфф}}$ при калибровочном преобразовании [являющемся обобщением соотношения (3.124)]

$$\delta A_\mu^a = \frac{1}{g} \partial_\mu \Lambda^a + f^{abc} A_\mu^b \Lambda^c = \frac{1}{g} (D_\mu \Lambda)^a. \quad (7.133)$$

Бекки, Руэ и Стора (БРС) первыми заметили, что если выбрать

$$\Lambda^a = -\eta^a \lambda, \quad (7.134)$$

где λ , и η^a — грассманы величины (так что $\lambda^2 = 0$) и λ — постоянная величина, то

$$\delta A_\mu^a = -\frac{1}{g} (D_\mu \eta^a) \lambda. \quad (7.135)$$

Если мы потребуем также, чтобы выполнялись соотношения

$$\delta \eta^a = -\frac{1}{2} f^{abc} \eta^b \eta^c \lambda, \quad (7.136)$$

$$\delta \bar{\eta}^a = -\frac{1}{ag} (\partial^\mu A_\mu^a) \lambda \quad (7.137)$$

(напомним, что $\bar{\eta}$ и η — независимые грассманы поля, преобразующиеся независимо), то лагранжиан $\mathcal{L}_{\text{эфф}}$ будет инвариантен. Эти три выписанные выше соотношения составляют преобразование Бекки — Руэ — Сторы. Теперь мы покажем, что лагранжиан $\mathcal{L}_{\text{эфф}}$ действительно инвариантен относительно преобразований (7.135) — (7.137).

Вначале заметим, что член с калибровочным полем $\mathcal{L}_0 = (-1/4) F_{\mu\nu}^a F^{\mu\nu a}$ инвариантен, так как соотношение (7.134) представляет собой просто изменение параметризации Λ^a . Для члена, фиксирующего калибровку, при преобразованиях (7.135) имеем

$$\delta \mathcal{L}_{GF} = \frac{1}{\alpha} (\partial^\mu A_\mu^a) \frac{1}{g} (\partial^\nu D_\nu \eta^a) \lambda, \quad (7.138)$$

а для члена с духами

$$\delta \mathcal{L}_{FPG} = -(\delta \bar{\eta}^a) \partial^\mu D_\mu \eta^a - \bar{\eta}^a \partial^\mu (\delta D_\mu \eta^a). \quad (7.139)$$

Первый член с учетом соотношения (7.137) равен

$$\begin{aligned} -(\delta \bar{\eta}^a) \partial^\mu D_\mu \eta^a &= -\frac{1}{ag} (\partial^\mu A_\mu^a) \lambda (\partial^\nu D_\nu \eta^a) = \\ &= -\frac{1}{ag} (\partial^\mu A_\mu^a) (\partial^\nu D_\nu \eta^a) \lambda, \end{aligned} \quad (7.140)$$

так как η^a и λ антикоммутируют. Выражения (7.138) и (7.140) взаимно уничтожаются, так что в итоге мы имеем

$$\delta \mathcal{L}_{\text{эфф}} = -\eta^a \partial^\mu (\delta D_\mu \eta^a). \quad (7.141)$$

Мы должны показать, что при преобразованиях (7.135) и (7.136) выполняется равенство $\delta D_\mu \eta^a = 0$; тогда лагранжиан $\mathcal{L}_{\text{эфф}}$ будет

инвариантным. Оказывается, это довольно длинная процедура. Имеем

$$\begin{aligned} \delta(D_\mu \eta^a) &= \delta[\partial_\mu \eta^a + gf^{abc} A_\mu^b \eta^c] = \partial_\mu (\delta \eta^a) + \\ &+ gf^{abc} (\delta A_\mu^b) \eta^c + gf^{abc} A_\mu^b (\delta \eta^c) = -\frac{1}{2} f^{abc} \partial_\mu (\eta^b \eta^c) \lambda - \\ &- f^{abc} (\partial_\mu \eta^b + gf^{bmn} A_\mu^b \eta^n) + gf^{abc} A_\mu^b \left(-\frac{1}{2}\right) \eta^m \eta^n \lambda. \end{aligned}$$

Так как η — грассманова величина, производная в первом члене равна

$$\begin{aligned} f^{abc} \partial_\mu (\eta^b \eta^c) &= f^{abc} [(\partial_\mu \eta^b) \eta^c + \eta^b (\partial_\mu \eta^c)] = f^{abc} [(\partial_\mu \eta^b) \eta^c - \\ &- (\partial_\mu \eta^c) \eta^b] = 2f^{abc} (\partial_\mu \eta^b) \eta^c. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \delta(D_\mu \eta^a) &= -f^{abc} (\partial_\mu \lambda^b) (\eta^c \lambda + \lambda \eta^c) + gf^{abc} f^{bmn} A_\mu^m \eta^n \eta^c \lambda - \\ &- \frac{1}{2} gf^{abc} f^{cmn} A_\mu^b \eta^m \eta^n \lambda. \end{aligned}$$

Первый член равен нулю, так как λ и η^c — грассмановы величины. В последнем члене, вследствие того что структурные константы f удовлетворяют тождеству Якоби (3.148), мы имеем

$$f^{abc} f^{cmn} = -f^{amc} f^{cnb} - f^{anc} f^{cbm},$$

так что

$$\begin{aligned} \delta(D_\mu \eta^a) &= gf^{abc} f^{bmn} A_\mu^m \eta^n \eta^c \lambda + \frac{1}{2} gf^{amc} f^{cnb} A_\mu^b \eta^m \eta^n \lambda + \\ &+ \frac{1}{2} gf^{anc} f^{cbm} A_\mu^b \eta^m \eta^n \lambda. \end{aligned}$$

Производя в последнем члене замену немых индексов $m \leftrightarrow n$ мы видим, что он равен второму члену. Производя дальнейшие замены индексов, получаем

$$\begin{aligned} \delta(D_\mu \eta^a) &= g(f^{apn} f^{pbn} + f^{amp} f^{pnb}) A_\mu^b \eta^m \eta^n \lambda = \\ &= g(-f^{apn} f^{pbn} + f^{amp} f^{pnb}) A_\mu^b \eta^m \eta^n \lambda = 0. \end{aligned} \quad (7.142)$$

Следовательно, $\delta \mathcal{L}_{\text{эфф}} = 0$ и данный лагранжиан инвариантен относительно преобразований БРС (7.135) — (7.137). Заметим, кстати, что из соотношений (7.135) и (7.142) следует равенство

$$\delta^2(A_\mu^a) = 0; \quad (7.143)$$

говоря научным языком, вариация A_μ^a нильпотентна.

Выполним теперь преобразование БРС функционала Z с тем, чтобы получить тождества Славнова — Тейлора, аналогичные тождествам Уорда в электродинамике.

§ 7.6. Тождества Славнова — Тейлора

Для удобства введем производящий функционал, зависящий не от трех, а от пяти источников¹⁾:

$$Z[s, x, y; u, v] = \int \mathcal{D}\eta \mathcal{D}\eta \mathcal{D}A_\mu e^i \int \mathcal{L}_{\text{полн}} dx,$$

где

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{полн}} &= \mathcal{L}_{\text{эфф}} + s_\mu^a A^{\mu a} + \eta^a x^a + \bar{\eta}^a y^a + \\ &+ u_\mu^a \left(\frac{1}{g} D^\mu \eta\right)^a + v^a \left(-\frac{1}{2} f^{abc} \eta^b \eta^c\right). \end{aligned} \quad (7.144)$$

Источники x, y и u являются антикоммутирующими переменными. Подвергнем теперь Z преобразованию БРС. Наше первое наблюдение заключается в том, что коэффициенты при источниках u и v инвариантны. То, что коэффициент при u инвариантен, продемонстрировано в формуле (7.142). Докажем теперь, что коэффициент при v инвариантен. Используя формулу (7.136), получаем

$$\begin{aligned} \delta(f^{abc} \eta^b \eta^c) &= f^{abc} [(\delta \eta^b) \eta^c + \eta^b (\delta \eta^c)] = \\ &= -\frac{1}{2} f^{abc} f^{bmn} \eta^m \eta^n \lambda \eta^c - \frac{1}{2} f^{abc} f^{cmn} \eta^b \eta^m \eta^n \lambda = \\ &= -f^{abc} f^{cmn} \eta^m \eta^n \eta^b \lambda = -\frac{1}{3} f^{abc} f^{cmn} (\eta^m \eta^n \eta^b + \eta^b \eta^m \eta^n + \\ &+ \eta^n \eta^b \eta^m) \lambda = -\frac{1}{3} (f^{abc} f^{cmn} + f^{anc} f^{cbm} + f^{amc} f^{cnb}) \eta^m \eta^n \eta^b \lambda = 0 \end{aligned} \quad (7.145)$$

(мы переобозначили немые индексы в предпоследней строке). Попутно заметим, что, как следует из формулы (7.136), изменение величины η^a также нильпотентно:

$$\delta^2(\eta^a) = 0. \quad (7.146)$$

Наше второе наблюдение, вернее, вторая задача — убедиться в том, что якобиан преобразования равен единице. Якобиан имеет вид

¹⁾ Kluber-Stern H., Zuber J. B. Phys. Rev., D12, 484 (1975).

$$J = \partial \left(\frac{A_\mu^a(x) + \delta A_\mu^a(x), \eta^a(x) + \delta \eta^a(x), \bar{\eta}^a(x) + \delta \bar{\eta}^a(x)}{A_\nu^b(y), \eta^b(y), \bar{\eta}^b(y)} \right). \quad (7.147)$$

В этом детерминанте отличны от нуля только элементы

$$\begin{aligned} \frac{\delta [A_\mu^a(x) + \delta A_\mu^a(x)]}{\delta A_\nu^b(y)} &= \delta_\mu^\nu (x-y) (\delta^{ab} - f^{abc} \eta^c \lambda), \\ \frac{\delta [\eta^a(x) + \delta \eta^a(x)]}{\delta \eta^b(y)} &= \delta^4(x-y) \left[\delta^{ab} - \frac{1}{2} \frac{\delta}{\delta \eta^b} (f^{amn} \eta^m \eta^n) \lambda \right] = \\ &= \delta^4(x-y) \left[\delta^{ab} - \frac{1}{2} (f^{amb} \eta^m - f^{abn} \eta^n) \lambda \right] = \\ &= \delta^4(x-y) [\delta^{ab} + f^{abc} \eta^c \lambda], \end{aligned}$$

где в качестве дифференцирования выбрано «правое дифференцирование» [формула (6.1216)]; и наконец,

$$\frac{\delta [A_\mu^a(x) + \delta A_\mu^a(x)]}{\delta \eta^a(y)} = \delta^4(x-y) f^{abc} A_\mu^b \lambda.$$

Таким образом, схематически якобиан представится в виде

$$J = \delta_\mu^\nu [\delta^4(x-y)]^3 \begin{vmatrix} 1 - f \eta \lambda & f A \lambda & 0 \\ 0 & 1 + f \eta \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \delta_\mu^\nu [\delta^4(x-y)]^3,$$

где учтено равенство $\lambda^3 = 0$. Следовательно, он действительно равен единице.

Из этих двух наблюдений можно сделать вывод о том, что, так как лагранжиан $\mathcal{L}_{\text{эфф}}$ инвариантен относительно преобразований БРС, из инвариантности производящего функционала Z следует, что

$$\begin{aligned} Z &= \int \mathcal{D}A_\mu \mathcal{D}\eta \mathcal{D}\bar{\eta} \exp \left\{ i \left[S + \int dx (s_\mu^a \delta A^{\mu a} + x^a \delta \eta^a + y^a \delta \bar{\eta}^a) \right] \right\} = \\ &= \int \mathcal{D}A_\mu \mathcal{D}\eta \mathcal{D}\bar{\eta} e^{iS} \left[1 + \int dx (s_\mu^a \delta A^{\mu a} + x^a \delta \eta^a + y^a \delta \bar{\eta}^a) \right] \end{aligned}$$

(где $S = \int \mathcal{L}_{\text{эфф}} dx$) и, следовательно,

$$\int \mathcal{D}A_\mu \mathcal{D}\eta \mathcal{D}\bar{\eta} e^{iS} \int dx (s_\mu^a \delta A^{\mu a} + x^a \delta \eta^a + y^a \delta \bar{\eta}^a) = 0, \quad (7.148)$$

где $\delta A^{\mu a}$, $\delta \eta^a$ и $\delta \bar{\eta}^a$ определяются формулами (7.135) — (7.137). Отметим, что первые две из этих величин являются коэффициентами при u и v соответственно, а последняя пропорциональна величине $\partial^\mu A_\mu^a$, где A_μ^a — коэффициент при s ; поэтому из (7.148) следует, что

$$\begin{aligned} \lambda \int dx \left\{ s_\mu^a(x) \frac{\delta Z}{\delta u_\mu^a(x)} + x^a(x) \frac{\delta Z}{\delta v^a(x)} - \frac{1}{\alpha} y^a(x) \times \right. \\ \left. \times \left[\partial_\mu \frac{\delta Z}{\delta s_\mu^a(x)} \right] \right\} = 0. \end{aligned}$$

Это уравнение содержит производные только первого порядка, что является следствием введения источников u и v для нелинейных членов δA и $\delta \eta$. Подставив выражение для производящего функционала в виде $Z = e^{iW}$, получим аналогичное (фактически то же самое) уравнение для W :

$$\int dx \left[s^a \frac{\delta W}{\delta u_\mu^a} + x^a \frac{\delta W}{\delta v^a} - \frac{1}{\alpha} y^a \left(\partial_\mu \frac{\delta W}{\delta s_\mu^a} \right) \right] = 0. \quad (7.149)$$

Преобразуем теперь это уравнение в условие для производящего функционала Γ . Определим, как обычно (за исключением того, что будем преобразовывать источники u и v),

$$\begin{aligned} W[s, x, y; u, v] &= \Gamma[A, \eta, \bar{\eta}; u, v] + \\ &+ \int dx (s_\mu^a A^\mu + x^a \eta^a + y^a \bar{\eta}^a). \end{aligned} \quad (7.150)$$

Тогда

$$s_\mu^a = - \frac{\delta \Gamma}{\delta A_\mu^a}, \quad x^a = - \frac{\delta \Gamma}{\delta v^a}, \quad y^a = - \frac{\delta \Gamma}{\delta \eta^a}. \quad (7.151)$$

Кроме того,

$$\frac{\delta W}{\delta s_\mu^a} = A^{\mu a}, \quad \frac{\delta W}{\delta u} = \frac{\delta \Gamma}{\delta u}, \quad \frac{\delta W}{\delta v} = \frac{\delta \Gamma}{\delta v}, \quad (7.152)$$

и в результате уравнение (7.149) примет вид

$$\int dx \left[\frac{\delta \Gamma}{\delta A_\mu^a} \frac{\delta \Gamma}{\delta u^{\mu a}} + \frac{\delta \Gamma}{\delta \eta^a} \frac{\delta \Gamma}{\delta v^a} - \frac{1}{\alpha} (\partial^\mu A_\mu^a) \frac{\delta \Gamma}{\delta \eta^a} \right] = 0. \quad (7.153)$$

Чтобы получить это уравнение в более простой форме, заметим с учетом (7.132) и (7.144), что члены в Z , содержащие $\bar{\eta}$ и \bar{u} , имеют вид

$$\begin{aligned} Z &= \int \mathcal{D}A_\mu \mathcal{D}\eta \mathcal{D}\bar{\eta} \exp \left\{ i \int dx \left[-\bar{\eta}^a (\partial^\mu D_\mu \eta)^a + \bar{\eta}^a y^a + \right. \right. \\ &\left. \left. + \frac{1}{g} u_\mu^a (D^\mu \eta)^a + \dots \right] \right\}, \end{aligned}$$

откуда следует уравнение

$$\frac{\delta Z}{\delta \eta^a} = i [y^a - (\partial^\mu D_\mu \eta)^a] Z = iy^a Z - g \partial_\mu \frac{\delta Z}{\delta u_\mu^a}.$$

Поэтому

$$\frac{\delta \mathcal{W}}{\delta \eta^a} = y^a - g \partial_\mu \left(\frac{\delta \mathcal{W}}{\delta u_\mu^a} \right).$$

Но $\delta \mathcal{W} / \delta \eta^a = 0$, а $y^a = -\delta \Gamma / \delta \eta^a$; следовательно,

$$\frac{\delta \Gamma}{\delta \eta^a} = -g \partial_\mu \left(\frac{\delta \Gamma}{\delta u_\mu^a} \right)$$

и равенство (7.153) примет вид

$$\int dx \left[\frac{\delta \Gamma}{\delta u_\mu^a} \left(\frac{\delta \Gamma}{\delta A_\mu^a} - \frac{1}{\alpha} \partial^\mu (\partial^\nu A_\nu^a) \right) + \frac{\delta \Gamma}{\delta \sigma^a} \frac{\delta \Gamma}{\delta \eta^a} \right] = 0. \quad (7.154)$$

Наконец, определяя функционал Γ' соотношением

$$\Gamma = \Gamma' - \frac{g}{2\alpha} \int dx (\partial^\nu A_\nu^a)^2, \quad (7.155)$$

из (7.154) получаем

$$\int dx \left[\frac{\delta \Gamma'}{\delta u_\mu^a} \frac{\delta \Gamma'}{\delta A_\mu^a} + \frac{\delta \Gamma'}{\delta \sigma^a} \frac{\delta \Gamma'}{\delta \eta^a} \right] = 0. \quad (7.156)$$

Последнее соотношение отражает содержание тождества Славнова — Тейлора, хотя оно и отличается по виду от тождества, первоначально полученного авторами. Нетрудно показать, что используемая здесь форма записи наиболее удобна при доказательстве перенормируемости теорий Янга — Миллса.

§ 7.7. Духи и унитарность

В данной главе мы убедились в необходимости введения духов; они нужны, чтобы иметь калибровочно-инвариантный и конечный производящий функционал. Однако еще в 1962 г. Фейнман установил, что духи необходимы для того, чтобы на «однопетлевом» уровне не нарушалась унитарность. В данном параграфе мы в общих чертах изложим его рассуждения.

Начнем с определения унитарности S -матрицы. Оператор S определяется таким образом, что амплитуда вероятности того, что в результате взаимодействия некоторое состояние $|n\rangle$ перейдет в некоторое состояние $|m\rangle$, равна $\langle m|S|n\rangle$. Состояния $|n\rangle$ ортонормированы и образуют полную систему:

$$\langle m|n\rangle = \delta_{mn}, \quad \sum_m |m\rangle \langle m| = 1. \quad (7.157)$$

Вероятность того, что система окажется в каком-то конечном состоянии, равна, безусловно, единице, т. е.,

$$\sum_m |\langle m|S|n\rangle|^2 = 1,$$

так что

$$\sum_m \langle m|S|n\rangle^* \langle m|S|n\rangle = 1,$$

$$\sum_m \langle n|S^\dagger|m\rangle \langle m|S|n\rangle = 1,$$

$$\langle n|S^\dagger S|n\rangle = 1,$$

где мы воспользовались равенствами (7.157). Так как состояние произвольно, мы имеем

$$SS^\dagger = S^\dagger S = 1; \quad (7.158)$$

S -матрица является унитарной. Положим теперь

$$S = 1 + iR. \quad (7.159)$$

Матрица R называется матрицей реакции. Тогда из унитарности следует, что

$$R - R^\dagger = iR^\dagger R,$$

$$\text{или (так как } R - R^\dagger = 2i \operatorname{Im} R)$$

$$2 \operatorname{Im} R = R^\dagger R = RR^\dagger. \quad (7.160)$$

Возьмем теперь матричные элементы этого равенства, выбрав в качестве обкладок двухчастичные состояния $\langle p_3 p_4|$ и $|p_1 p_2\rangle$. Имеем

$$2 \operatorname{Im} \langle p_3 p_4 | R | p_1 p_2 \rangle = \sum_n \langle p_3 p_4 | R | n \rangle \langle p_1 p_2 | R | n \rangle^*.$$

Положив $R = (2\pi)^4 \delta(p_j - p_i) T$ и записав состояния $|n\rangle$ через импульсы k_i входящих в них частиц, сколь бы их много ни было, получим

$$\begin{aligned} 2 \operatorname{Im} \langle p_3 p_4 | T | p_1 p_2 \rangle &= \\ &= \frac{1}{(2\pi)^8} \sum_n \int \frac{d^3 k_1}{W_1} \frac{d^3 k_2}{W_2} \dots \delta^4(p_1 + p_2 - k_1 - k_2 - \dots - k_n) \times \\ &\times \langle p_3 p_4 | T | k_1 k_2 \dots k_n \rangle \langle p_1 p_2 | T | k_1 k_2 \dots k_n \rangle^*. \end{aligned} \quad (7.161)$$

Суммирование в правой части осуществляется по всем реальным (а не виртуальным) промежуточным состояниям, удовлетворяющим закону сохранения энергии-импульса. Это уравнение можно следующим образом представить графически:

$$\begin{aligned}
 2\text{Im} \text{ (diagram)} &= \sum_n \text{ (diagram)} = \\
 &= \text{ (diagram)} + \text{ (diagram)} + \text{ (diagram)} + \dots
 \end{aligned}
 \tag{7.162}$$

Тем самым мы сформулировали условие унитарности. Необходимо подчеркнуть, что его можно использовать в *каждом порядке* теории возмущений.

Идея теперь заключается в том, чтобы воспользоваться этим свойством в случае конкретного процесса. Начнем с процесса

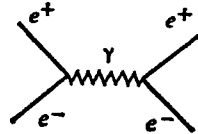


Рис. 7.7. Электрон-позитронное рассеяние в порядке e^2 .

$e^+e^- \rightarrow e^+e^-$, рассматривая его в КЭД в порядке e^2 ; соответствующая диаграмма изображена на рис. 7.7. В этом порядке нужно учитывать только однофотонный обмен, соответствующая амплитуда, согласно правилам Фейнмана, равна

$$A = (-ie)^2 \bar{v}(p_2) \gamma_\mu u(p_1) \frac{-ig^{\mu\nu}}{q^2 + i\epsilon} \bar{u}(p_3) \gamma_\nu v(p_4),
 \tag{7.163}$$

где p_1, \dots, p_4 — начальные и конечные импульсы электрона и позитрона, а q — импульс виртуального фотона. Здесь выбрана фейнмановская калибровка, в которой фотонный пропагатор равен $-ig^{\mu\nu}/(q^2 + i\epsilon)$. Мы умышленно сохранили величину $i\epsilon$, чтобы подчеркнуть, что амплитуда A есть комплексная величина, а условие унитарности накладывается на ее *мнимую* часть. Можно показать¹⁾, что

¹⁾ Это следует из известной формулы Сохоцкого $\frac{1}{x \pm i\epsilon} = P \frac{1}{x} \mp i\pi\delta(x)$. —

Прим. перев.

$$\text{Im} \frac{g^{\mu\nu}}{q^2 + i\epsilon} = -i\pi g^{\mu\nu} \delta(q^2) \theta(k_0),
 \tag{7.164}$$

т.е. пропагатор заменяется функциями, которые обеспечивают принадлежность импульса фотона массовой оболочке с положительной энергией. Следовательно, фотон является «реальным», но, как мы увидим, *не совсем реальным*. Из выражения (7.10) для ковариантного пропагатора следует, что

$$\sum_{\lambda=0}^3 \epsilon_\mu^{(\lambda)} \epsilon_\nu^{(\lambda)} = -g_{\mu\nu}
 \tag{7.165}$$

[ср. это выражение, например, с выражением (7.16) для пропагатора в радиационной калибровке]. Поэтому

$$\text{Im} A = M^\mu \left[\sum_{\lambda=0}^3 \epsilon_\mu^{(\lambda)} \epsilon_\nu^{(\lambda)} \right] M'^\dagger,
 \tag{7.166}$$

где M^μ есть произведение \bar{v}^μ и с некоторым постоянным коэффициентом. Интересно, что в выражение (7.166) входят *все четыре* состояния поляризации, тогда как физические фотоны поперечно поляризованы и для них индекс λ равен только 1 или 2. Поэтому в мнимой части амплитуды фотоны не совсем реальны в связи с тем, что, хотя для них $q^2 = 0$, они находятся как в физических, так и в нефизических состояниях поляризации. Приведет ли это к неприятным последствиям?

Из соотношений унитарности (7.161) и (7.162) следует, что величина $\text{Im} A$ равна сумме квадратов амплитуд соответствующих

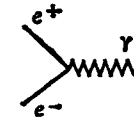


Рис. 7.8. Электрон-позитронная аннигиляция.

процессов, вычисленных с точностью до e^2 . Фактически (в этом простом примере) имеется только один относящийся к делу процесс, а именно процесс электрон-позитронной аннигиляции $e^+e^- \rightarrow \gamma$, изображенный на рис. 7.8. Фотон в этом процессе, конечно, является *полностью* физическим. Обозначим амплитуду его буквой B . Тогда, используя те же обозначения, что и выше, можно написать

$$B = M^\mu \epsilon_\mu(q, \lambda),$$

где величина λ имеет только два значения 1 и 2, так как фотон должен быть поперечно-поляризованным. Следовательно, «унитарная сумма» в (7.162) имеет вид

$$VV^\dagger = M^\mu \sum_{\lambda=1,2} \epsilon_\mu(q, \lambda) \epsilon_\nu(q, \lambda) M^{\nu\dagger} \quad (7.167)$$

и должна быть равна выражению (7.166). Это будет выполняться только в том случае, если вклад нефизических состояний поляризации равен нулю:

$$M^\mu \sum_{\lambda=0,3} \epsilon_\mu^{(\lambda)}(q) \epsilon_\nu^{(\lambda)}(q) M^{\nu\dagger} = 0,$$

или

$$M^\mu \left[\sum_{\lambda=0,3} \epsilon_\mu^{(\lambda)} \epsilon_\nu^{(\lambda)} - \sum_{\lambda=1,2} \epsilon_\mu^{(\lambda)} \epsilon_\nu^{(\lambda)} \right] M^{\nu\dagger} = 0. \quad (7.168)$$

Из выражений (7.165) и (7.64) при $\alpha = 0$ (аксиальная калибровка) следует, что равенство (7.168) эквивалентно равенству

$$M^\mu \left[\frac{t^2}{(q \cdot t)^2} q_\mu q_\nu - \frac{q_\mu t_\nu + t_\mu q_\nu}{(q \cdot t)} \right] M^{\nu\dagger} = 0,$$

которое будет, очевидно, выполняться, если M^μ удовлетворяет условию

$$q_\mu M^\mu = 0. \quad (7.169)$$

Но последнее условие является следствием калибровочной инвариантности. Амплитуда процесса, изображенного на рис. 7.8, равна $\epsilon_\mu M^\mu$ и должна оставаться неизменной при калибровочных преобразованиях $\epsilon_\mu \rightarrow \epsilon_\mu + \alpha q_\mu$, откуда и следует равенство (7.169). Для процесса общего вида равенство (7.169) есть не что иное, как тождество Уорда, являющееся следствием калибровочной инвариантности.

Мы приходим к выводу, что в электродинамике условие унитарности выполняется по крайней мере в порядке e^2 благодаря калибровочной инвариантности. Можно показать, что оно выполняется и во всех порядках. В случае же калибровочных неабелевых теорий ситуация становится сложнее — что, собственно говоря,

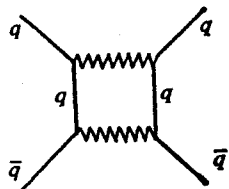


Рис. 7.9. Рассеяние кварк — антикварк в порядке g^4 КХД.

нас уже не удивит! Это все те же усложнения, которые нам уже известны, — связанные с самодействием калибровочного поля и появлением духов: но интересно то, что они *необходимы* для выполнения условия унитарности. Здесь мы лишь наметим схему доказательства этого. Бо-

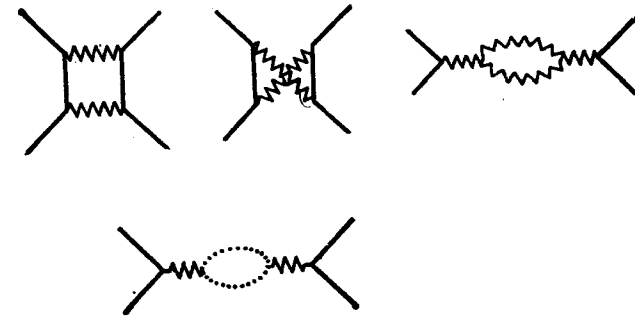


Рис. 7.10. Четыре диаграммы КХД, дающие вклад в рассеяние $q\bar{q} \rightarrow q\bar{q}$ в порядке g^4 . Волнистые линии соответствуют глюонным пропагаторам, а прерывистые — духовым пропагаторам.

лее подробное изложение читатель может найти в книге [24].

Рассмотрим процесс $q\bar{q} \rightarrow q\bar{q}$ в КХД в порядке g^4 , изображенный графически на рис. 7.9. Данная диаграмма содержит два глюонных пропагатора. Обозначим амплитуду этого процесса через A . Согласно условию унитарности, имеем $\text{Im} A = \sum B^\dagger B$, где B — амплитуда любого возможного процесса $q\bar{q} \rightarrow \dots$ порядка g^2 , диаграмма которого составляет «половину» диаграммы процесса $q\bar{q} \rightarrow q\bar{q}$ (в том же смысле, в каком диаграмма рис. 7.8 составляет «половину» диаграммы рис. 7.7). Набор всех диаграмм, дающих вклад в процесс $q\bar{q} \rightarrow q\bar{q}$ в порядке g^4 , изображен на рис. 7.10. Первые две диаграммы соответствуют *различным* амплитудам, в чем можно убедиться с помощью правил Фейнмана. Третья и четвертая диаграммы содержат *замкнутые петли*, составленные из глюонных и духовых линий. Их вклад в амплитуду легко вычисляется с помощью правил Фейнмана (7.53), (7.54) и (7.57). Следовательно, B есть сумма амплитуд процессов, изображенных на рис. 7.11. Здесь духовая диаграмма выглядит как диаграмма реальной частицы, хотя в действительности такая диаграмма фигурирует здесь только потому, что она дает вклад в *замкнутые петли* обычной физической амплитуды. Оказывается, что в силу калибро-

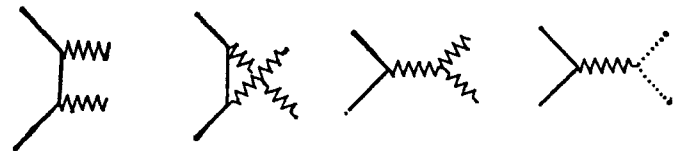


Рис. 7.11. Условие унитарности и духи. Четвертая диаграмма, содержащая духовые линии, дает вклад в соотношение унитарности.

вочной инвариантности (тождеств Уорда) выполняется равенство $\text{Im } A = \sum V^\dagger V$, и условие унитарности выполняется, но только за счет включения в V всех диаграмм, изображенных на рис. 7.11, в том числе и *духовой*.

Итак, мы видим, что, когда рассматриваются диаграммы с петлями (а не только древесные диаграммы), условие унитарности требует учета диаграмм с замкнутыми *духовыми* линиями. На это впервые указал Фейнман. Таким образом, присутствие *духов* одновременно решает проблемы как унитарности, так и калибровочной инвариантности. Это замечательный факт, имеющий, безусловно, глубокий смысл.

Резюме

1) В рамках канонического формализма демонстрируется, что обычная процедура получения пропагаторов неприемлема в случае фотона вследствие калибровочной инвариантности. Эта проблема решается за счет добавления к лагранжиану «членов, фиксирующих калибровку». Определяется пропагатор для поперечных фотонов. 2) Рассматривается аналогичная проблема в случае неабелевых полей, однако при этом используется не канонический формализм, а метод функционального интегрирования. Он основан на отыскании хорошо определенного способа выделения (бесконечного) множителя, возникающего при интегрировании по групповому пространству. Этот способ приводит к введению *духовых* полей Фаддеева — Попова. Формулируются правила Фейнмана. 3) Определяются собственно-энергетическая функция Σ и вершинная функция Γ . Производящий функционал для функций Γ определяется с помощью преобразования Лежандра над производящим функционалом \mathcal{W} для связанных функций Грина. Кратко обсуждается аналогия между термодинамикой и теорией поля. 4) Выводятся записанные через Γ и Σ тождества Уорда — Такахаши для КЭД. 6) Их неабелевы обобщения, т. е. тождества Славнова — Тейлора, выводятся с помощью преобразования Бекки — Руэ — Сторы. 7) Кратко для КЭД и еще более кратко для КХД демонстрируется связь между наличием *духов* и требованиями унитарности.

Литература для дальнейшего изучения

- Метод Фаддеева — Попова предложен в работе:
1. *Faddeev L. D., Popov V. N.* Physics Letters, 25B, 29 (1967).
Детальное изложение можно найти в работах:
 2. *Faddeev L. D., Slavnov A. A.* Gauge Fields: Introduction to Quantum Theory, Sect. 3.3., Benjamin/Cummings Publishing Co., 1980. [См. также:

Славнов А. А., Фаддеев Л. Д. Введение в квантовую теорию калибровочных полей. — М.: Наука, 1978.]

3. *Lee B. W.* — in: Methods in Field Theory (Les Houches, 1975), eds. R. Balian, J. Zinn-Justin, North-Holland Publishing Co., 1976.
4. *Ramond P.* Field Theory: A Modern Primer, Benjamin/Cummings Publishing Co., 1981, p. 303. [Имеется перевод: *Рамон П.* Теория поля. Современный вводный курс. — М.: Мир, 1984, с. 249.]
5. *Itzykson C., Zuber J. B.* Quantum Field Theory, McGraw-Hill, 1980, p. 577. [Имеется перевод: *Ицкисон К., Зюбер Ж.-Б.* Квантовая теория поля. — М.: Мир, 1984, т. 2, с. 248.]
6. *Taylor J. C.* Gauge Theories of Weak Interactions, Cambridge University Press, 1976, Ch. 11. [Имеется перевод: *Тейлор Дж.* Калибровочные теории слабых взаимодействий. — М.: Мир, 1978, гл. 11.]

Вершинные функции и операторы собственной энергии рассматриваются в книге [5, разд. 6.2.2], а также в книгах:

7. *Amit D. J.* Field Theory, The Renormalization Group and Critical Phenomena, McGraw-Hill, 1978, Ch. 5.
8. *Bjorken J. D., Drell S. D.* Relativistic Quantum Fields, McGraw-Hill, 1965, Ch. 19. [Имеется перевод: *Бьёркен Дж. Д., Дрелл С. Д.* Релятивистская квантовая теория. Т. 1, 2. — М.: Наука, гл. 19.]
9. *Lifshitz E. M., Pitaevskii L. P.* Relativistic Quantum Theory, Pergamon, 1973, Pt. 2, Ch. 11. [См. также: *Лившиц Е. М., Питаевский Л. П.* Релятивистская квантовая теория. Часть 2. — М.: Наука, 1971, гл. 11.]
10. *Bogoliubov N. N., Shirkov D. V.* Introduction to the Theory of Quantised Fields, 3rd ed., § 28, Wiley, 1980. [См. также: *Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В.* Введение в теорию квантовых полей, 4-е изд., перераб. — М.: Наука, 1984, § 27, 28.]

Элементарное введение в термодинамику и преобразования Лежандра можно найти в книге:

11. *Callen H. B.* Thermodynamics, Wiley, 1961.

Аналогия между статистической механикой и теорией поля рассматривается, например, в работах:

12. *Brezin E., Le Guillou J. C., Zinn-Justin J.* — in: Phase Transitions and Critical Phenomena, Vol. 6, eds. C. Domb, M. S. Green, Academic Press, 1976.
13. *de Dominicis C., Martin P. C.* Journ. Math. Phys., 5, 14 (1964).

Тождества Уорда — Такахаши рассмотрены в работах:

14. *Ward J. C.* Phys. Review, 78, 182 (1950); Proc. Phys. Soc., 64(A), 54 (1951).
15. *Takahashi Y.* Nuovo Cim., 6, 371 (1957).

Преобразование Бекки — Руэ — Сторы можно найти в работе:

16. *Becchi C., Rouet A., Stora R.* Phys. Lett., 52B, 344 (1974).

Тождества Славнова — Тейлора даны в работах:

17. *Taylor J. C.* Nucl. Phys., B33, 436 (1971).
18. *Славнов А. А.* Теоретическая и математическая физика, 1972, т. 10, с. 99.

Хорошие обзоры по этому вопросу имеются в книге [6, гл. 12], а также в работах:

19. *Славнов А. А.* — ЭЧАЯ, 1974, т. 5, вып. 3, с. 755.
20. *'t Hooft G., Veltman M.* Diagrammar, Report 73-9-CERN, Geneva, CERN, 1973.

См. также [2, § 4.6].

Необходимость введения духов в калибровочные теории была впервые замечена в работе:

21. *Feynman R. P.* Acta Physica Polonica, 24, 697 (1963).
См. также:
 22. *Feynman R. P.* — in: Magic without Magic, ed. J. R. Klauder, John Archibald Wheeler, Freeman W. H. and Co., 1972, p. 355, 377.
 23. *Feynman R. P.* — in: Interactions électromagnétiques et faibles à haute énergie, eds. R. Balian, C. H. Llewellyn Smith, North-Holland Publishing Co., 1977, p. 121.
- Связь между духами и условием унитарности хорошо описана в книге:
24. *Aitchison I. J. R., Hey A. J. G.* Gauge Theories in Particle Physics, Adam Hilger Ltd, Bristol, 1982, Sect. 12.1.
См. также (только в случае КЭД):
 25. *Nash C.* Relativistic Quantum Fields, Academic Press, 1978, p. 141.

8

Спонтанное нарушение симметрии и модель Салама—Вайнберга

В предыдущих главах мы рассматривали теории поля, включая калибровочные теории и их квантование. Сцена почти готова к тому, чтобы применить эти знания к физике частиц. Однако не хватает одной основной детали декораций: концепции «спонтанного нарушения симметрии». Около 1960 г. Намбу и Голдстоун осознали важное значение этого понятия в физике конденсированного состояния¹⁾. Намбу, в частности, указал на возможность его использования в физике частиц. В 1964 г. Хиггс указал на то, что последствия спонтанного нарушения симметрии в калибровочных теориях сильно отличаются от того, что мы имеем в некалибровочных теориях. Салам и Вайнберг, основываясь на более ранней работе Глэшоу, применили идеи Хиггса к калибровочной теории с группой симметрии $SU(2) \times U(1)$, которая, как они утверждали, удовлетворительно описывает совместно, или, иными словами, *объединяющим* образом, слабые и электромагнитные взаимодействия. Серьезное внимание эта теория привлекла к себе в 1971 г., когда г'Хофт доказал, что она перенормируема. В экспериментальном отношении успех этой теории был выдающимся. Вышеуказанные вопросы составляют содержание данной главы (лишь перенормировки рассматриваются в следующей главе). Мы начнем с изучения спонтанного нарушения симметрии, понятия, которое в применении к теории поля углубляет наши представления о вакууме

¹⁾ Общий подход к изучению квантовых систем со спонтанно нарушенной симметрией был сформулирован Н. Н. Боголюбовым в 1960 г. в связи с решением таких задач теории конденсированного состояния, как сверхпроводимость, сверхтекучесть, ферромагнетизм. — *Прим. ред.*

§ 8.1. Что такое вакуум?

Начнем с двух простых физических примеров. Вначале проведем опыт, показанный на рис. 8.1. Поставим тонкий стержень круглого сечения вертикально на стол и надавим на него вдоль его осевой линии с силой F . Если сила F мала, то ничего не произойдет.

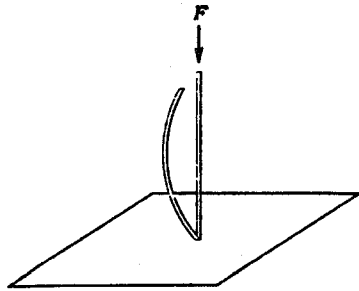


Рис. 8.1. Стержень, изогнутый под нагрузкой. Изогнутая форма отвечает спонтанному нарушению симметрии.

Но когда F превысит некое критическое значение $F_{\text{крит}}$, стержень изогнется, как показано, в «случайно выбранной» плоскости. Симметричная (без изгиба) конфигурация становится неустойчивой при $F > F_{\text{крит}}$, а новое основное состояние оказывается несимметричным. Добавим, что имеется бесконечное число возможных новых (вырожденных) основных состояний, которые связаны между собой ротационной симметрией. Стержень, конечно, может «выбрать» только одно из этих состояний, а

остальные могут быть получены из него с помощью вращений. Наиболее важные моменты в этом примере таковы: 1) существует критическое значение некоего параметра (в данном случае силы F), при превышении которого 2) симметричная конфигурация становится нестабильной, а 3) основное состояние оказывается вырожденным.

Второй наш пример — ферромагнетизм. Взаимодействие атомов в ферромагнетике — это спин-спиновое взаимодействие

$$H = - \sum_{i,j} J_{ij} S_i \cdot S_j,$$

которое является скаляром и, следовательно, инвариантно относительно вращений. Однако *основное состояние* — это состояние, в котором все спины (в пределах одного домена) выстроены в одном направлении, как показано на рис. 8.2. Такое состояние, очевидно,

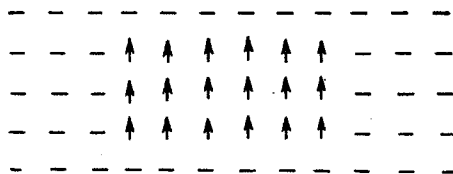


Рис. 8.2. Выстраивание спинов в ферромагнетике.

неинвариантно относительно вращений. Направление спонтанного намагничивания является случайным, и все вырожденные основные состояния могут быть получены из данного с помощью вращений. Как отметил Коулмен [13], «маленькому человечку», живущему внутри такого ферромагнетика, было бы очень трудно догадаться, что гамильтониан H является ротационно-инвариантным. Спонтанное намагничение исчезает при высоких температурах T , когда основное состояние становится симметричным (т. е. ориентация атомов становится случайной).

Очевидно, что общая ситуация здесь такая же, как и в первом примере, причем характерным параметром является температура T . Эти два примера иллюстрируют то явление, которое носит название «спонтанного нарушения симметрии». В обоих случаях система обладает симметрией (ротационной), но основное состояние неинвариантно относительно этой симметрии.

В случае ферромагнетика имеется одна тонкость: в принципе он должен быть бесконечной системой. Намагничивением выделяется некоторое определенное направление, и (квантовомеханическое) измерение направления (угла) должно давать точный результат. Канонически сопряженная же по отношению к углу переменная, а именно угловой момент системы (напомним, что $J_z = i\hbar\partial/\partial\phi$), является поэтому *полностью неопределенной величиной* и должна представлять собой бесконечную сумму всех возможных значений J . То обстоятельство, что ферромагнетик является бесконечным, делает его интересным объектом, который можно сравнить с теорией поля, поскольку поле является системой с бесконечным числом степеней свободы.

Ввиду этого будем искать аналогичную ситуацию в теории скалярного поля, в которой симметрия лагранжиана не распространяется на решение, отвечающее основному состоянию. В теории поля основное состояние рассматривается как вакуум. Таким образом, мы ищем теорию с вакуумом нового типа. Поскольку лагранжиан \mathcal{L} должен обладать симметрией, мы остановимся на комплексной теории ϕ^4 :

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= (\partial_\mu \phi)(\partial^\mu \phi^*) - m^2 \phi^* \phi - \lambda (\phi^* \phi)^2 = \\ &= (\partial_\mu \phi)(\partial^\mu \phi^*) - V(\phi, \phi^*). \end{aligned} \quad (8.1)$$

Член, содержащий множитель λ , соответствует самодействию. В обычной скалярной теории поля квантование приводит к частицам с массой m . Однако здесь m^2 рассматривается лишь как *параметр*, а не массовый член. Это связано с тем, что мы вскоре будем считать его отрицательной величиной. Лагранжиан \mathcal{L} инвариантен относительно *глобальных* калибровочных преобразований

$$\phi \rightarrow e^{i\Lambda} \phi \quad (\Lambda \text{ — постоянная величина}). \quad (8.2)$$

Основное состояние получается путем минимизации потенциала V . Мы имеем

$$\frac{\partial V}{\partial \varphi} = m^2 \varphi^* + 2\lambda \varphi^* (\varphi^* \varphi). \quad (8.3)$$

Следовательно, если $m^2 > 0$, минимум достигается при $\varphi^* = \varphi = 0$. Если же $m^2 < 0$, то имеются локальный максимум при $\varphi = 0$ и минимум при

$$|\varphi|^2 = -\frac{m^2}{2\lambda} = a^2, \quad (8.4)$$

т. е. при $|\varphi| = a$. В квантовой теории, когда φ становится оператором, это условие записывается для вакуумного среднего оператора φ :

$$|\langle 0|\varphi|0\rangle|^2 = a^2. \quad (8.5)$$

Зависимость функции V от φ_1 и φ_2 , где $\varphi = \varphi_1 + i\varphi_2$, графически представлена на рис. 8.3. (При этом надо помнить, что φ есть поле, а не просто пара координат.) Точки минимума потенциала V лежат на окружности $|\varphi| = a$, которая образует набор вырожденных вакуумов, связанных между собой вращением. Следовательно, физические поля, которые являются возмущениями над вакуумом, реализуются при включении возмущений около значений $|\varphi| = a$, а не около $\varphi = 0$. Будем работать в полярных координатах:

$$\varphi(x) = \rho(x) e^{i\theta(x)}, \quad (8.6)$$

так что комплексное поле φ выражается через два действительных скалярных поля ρ и θ . Выберем вакуумное состояние, чтобы выполнялось условие

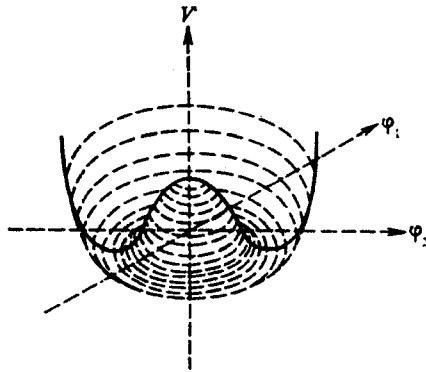


Рис. 8.3. Потенциал V имеет минимум при $|\varphi| = a$ и локальный максимум при $\varphi = 0$.

$$\langle 0|\varphi|0\rangle = a, \quad (8.7)$$

где a — действительное число; тогда

$$\langle 0|\rho|0\rangle = a, \quad \langle 0|\theta|0\rangle = 0. \quad (8.8)$$

В этом теоретико-полевым примере мы видим те же закономерности, что и в случае ферромагнетика. Существуют вырожденные вакуумы, связанные между собой преобразованиями симметрии, присущей данной теории. Выбор определенного вакуума требует фиксации определенных значений поля [в теории поля это — соотношение (8.8), а в случае ферромагнетика — направление намагничивания]. В результате вакуум, безусловно, инвариантен относительно симметрии.

Положим теперь

$$\varphi(x) = [\rho'(x) + a] e^{i\theta(x)}, \quad (8.9)$$

так чтобы ρ' и θ имели нулевые вакуумные средние. Мы будем рассматривать их как «физические поля» и выразим \mathcal{L} через них. Из равенства (8.1) мы получаем

$$V = m^2 \rho'^2 + 2m^2 a \rho' + m^2 a^2 + \lambda(\rho'^4 + 4a\rho'^3 + 6a^2\rho'^2 + 4a^3\rho' + a^4) = \lambda\rho'^4 + 4a\lambda\rho'^3 + 4\lambda a^2\rho'^2 - \lambda a^4 = \lambda(\rho' + a)^2 - a^2]^2 - \lambda a^4 = \lambda(\varphi^* \varphi - a^2)^2 - \lambda a^4,$$

где использовано соотношение (8.4). Кроме того,

$$(\partial_\mu \varphi)(\partial^\mu \varphi^*) = (\partial_\mu \rho')(\partial^\mu \rho') + (\rho' + a)^2 (\partial_\mu \theta)(\partial^\mu \theta),$$

где $\mathcal{L} = (\partial_\mu \varphi)(\partial^\mu \varphi^*) - V$. Мы видим, что в лагранжиане имеется член с ρ'^2 , т. е. поле ρ' обладает массой, определяемой соотношением

$$m_{\rho'}^2 = 4\lambda a^2.$$

Член же, пропорциональный θ^2 , отсутствует, т. е. поле θ безмассовое. В результате спонтанного нарушения симметрии два массивных поля (действительная и мнимая части поля φ) превратились в одно массивное и одно безмассовое поле. Мы можем интерпретировать это явление с помощью рис. 8.3. Очевидно, что сдвиги ρ' сопряжены с затратами энергии, поскольку имеются возвращающие силы, обусловленные потенциалом. Но при перемещении по круговой «долине» $|\varphi| = a$ возвращающие силы не возникают вследствие вырождения вакуума. Следовательно, для угловых возмущений θ с длиной волны λ мы имеем $\omega \rightarrow 0$ при $\lambda \rightarrow 0$, т. е. $\omega \sim \lambda$, $E \sim p$ и соответствующие релятивистские частицы являются безмассовыми. Частица θ называется *голдстоуновским бозоном*. Подчеркнем, что данное явление носит *общий* характер: спонтанное нарушение (непрерывной) симметрии влечет за собой появление

безмассовой частицы, т. е. частицы Голдстоуна¹⁾. Это утверждение, носящее название теоремы Голдстоуна, будет доказано в следующем параграфе.

Для дальнейшего полезно получить этот результат, исходя из разложения поля φ в декартовых, а не в полярных координатах. Если вместо (8.9) написать

$$\varphi(x) = a + \frac{\varphi_1(x) + i\varphi_2(x)}{\sqrt{2}}, \quad (8.10)$$

причем $\langle \varphi_1 \rangle_0 = \langle \varphi_2 \rangle_0 = 0$, то, как нетрудно видеть (постоянные члены опущены),

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{1}{2} (\partial_\mu \varphi_1)^2 + \frac{1}{2} (\partial_\mu \varphi_2)^2 - 2\lambda a^2 \varphi_1^2 - \\ & - \sqrt{2}\lambda \varphi_1 (\varphi_1^2 + \varphi_2^2) - \frac{\lambda}{4} (\varphi_1^2 + \varphi_2^2)^2. \end{aligned} \quad (8.11)$$

Следовательно, поле φ_2 является безмассовым, а поле φ_1 обладает массой, причем квадрат его массы равен $4\lambda a^2$, что совпадает с результатом, полученным выше.

Мы закончим данный параграф замечанием об аналогии рассмотренного выше случая с ферромагнетиком. Рассмотрим «спиновую



Рис. 8.4. Спиновая волна, вызывающая медленное пространственное изменение направления намагниченности в ферромагнетике.

волну» с большой длиной волны λ . Она вызывает медленное изменение направления намагниченности (рис. 8.4). Поскольку силы в ферромагнетике являются *короткодействующими*, требуется очень немного энергии, чтобы возбудить эту систему, так что частота спиновых волн стремится к нулю с возрастанием λ , т. е. $\omega = ck$. В релятивистской области это эквивалентно безмассовой частице. Однако сделанный вывод неверен в случае *дальнодейст-*

¹⁾ В данном примере она обладает нулевым спином, но это не всегда так. Например, в теориях со спонтанным нарушением суперсимметрии существуют частицы Голдстоуна со спином 1/2.

вующих сил, например кулоновских с пространственной зависимостью $1/r$, т. е. при наличии *калибровочного* поля. В этом случае требуется конечная энергия даже для того, чтобы возбудить спиновую волну с очень малой длиной волны, поскольку необходимо совершить работу против кулоновской силы, так что частота ω конечна при $\lambda \rightarrow \infty$, $k \rightarrow 0$ и соответствующее возбуждение обладает *массой*. Более того, сказанное относится и к фотонам. Именно эта ситуация в физике твердого тела, обсуждавшаяся в таком плане Андерсоном, привела сначала Хиггса [10], а затем Вайнберга и Салама [20, 21] к мысли о приложении этих идей в релятивистской области и физике частиц. При поверхностном взгляде ситуация в физике частиц не дает оснований для применения калибровочных теорий или теории спонтанного нарушения симметрии. Обе эти теории предсказывают безмассовые частицы, калибровочные частицы со спином 1 и голдстоуновские бозоны со спином 0, но, не считая фотона, безмассовых частиц не существует. Наблюдение, сделанное выше в рамках теории ферромагнетизма, состоящее в том, что наличие обоих эффектов позволяет избавиться от безмассовых частиц *обоих типов*, является ключом к модели Салама — Вайнберга электрослабых взаимодействий, которая будет рассмотрена ниже.

§ 8.2. Теорема Голдстоуна

В примере, рассмотренном выше, лагранжиан обладал симметрией $U(1)$ и два действительных поля, содержащиеся в φ , образовывали 2-мерное представление группы $U(1)$. Одно из этих полей обладает ненулевым вакуумным средним и является безмассовой частицей (голдстоуновским бозоном), а второе массивно. Подчеркнем также, что вышеприведенные рассуждения являются классическими. Таким образом, возникают два вопроса. Во-первых, сколько голдстоуновских бозонов существует в более общей теории, в которой лагранжиан \mathcal{L} инвариантен относительно группы симметрии G ? Во-вторых, как выглядят все эти утверждения в квантовой теории — в частности, как доказать существование безмассовых частиц в случае вырожденного вакуума? Мы рассмотрим эти вопросы в той же последовательности.

Рассмотрение произвольной группы симметрии лучше начать с конкретной неабелевой группы, скажем $SO(3)$. Таким образом, мы рассмотрим пример, отличный от предыдущего лишь в том, что теперь поля φ_i ($i = 1, 2, 3$) являются изовекторным полем, скалярным по отношению к преобразованиям Лоренца. Пусть лагранжиан имеет вид

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \varphi_i \partial^\mu \varphi_i - \frac{m^2}{2} \varphi_i \varphi_i - \lambda (\varphi_i \varphi_i)^2 \quad (8.12)$$

(действует соглашение о суммировании). Лагранжиан \mathcal{L} инвариантен относительно вращений изоспина, которые образуют группу симметрии G [в данном случае $SO(3)$]:

$$G: \varphi_i \rightarrow e^{iQ_k \alpha_k} \varphi_i e^{-iQ_k \alpha_k} = (e^{iT_k \alpha_k})_{ij} \varphi_j = U_{ij} \varphi_j = [U(g) \varphi]_i. \quad (8.13)$$

Здесь α_i — углы вращения в изоспиновом пространстве, Q_i — генераторы группы, а T_i — набор матриц, реализующих алгебру Ли группы, имеющих ту же размерность, что и представление, к которому принадлежат φ , — в данном случае 3. Матрица $U(g)$, соответствующая элементу группы g , является унитарной (если матрицы T эрмитовы); следовательно, мы имеем унитарное представление. Это существует в квантовой теории и несущественно в классической. Однако то обстоятельство, что мы имеем дело с унитарным представлением, не ведет к потере общности.

Как и ранее, найдем минимум потенциала $V(\varphi_i)$:

$$V = \frac{m^2}{2} \varphi_i \varphi_i + \lambda (\varphi_i \varphi_i)^2. \quad (8.14)$$

Если $m^2 > 0$, то минимум расположен при $\varphi_i = 0$. Если же $m^2 < 0$, то минимум достигается при

$$|\varphi_0| = (\varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \varphi_3^2)^{1/2} = \left(-\frac{m^2}{4\lambda}\right)^{1/2} \equiv a. \quad (8.15)$$

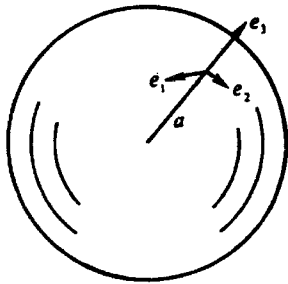


Рис. 8.5. Вакуумное значение поля φ направлено вдоль третьей оси в изоспиновом пространстве.

Мы вновь имеем вырожденные вакуумы и можем выбрать по своему усмотрению, который из них является физическим. Выберем в качестве физического вакуума состояние

$$\vec{\varphi} = a \hat{e}_3. \quad (8.16)$$

Вакуумное значение поля φ , т. е. изовектор φ_0 , направлено вдоль третьей оси в изоспиновом пространстве (рис. 8.5). Очевидно, что поле φ_0 неинвариантно относительно всей группы G , т. е. существуют элементы $g \in G$, для которых

$$G: \varphi'_0 = U(g)\varphi_0 \neq \varphi_0. \quad (8.17)$$

Однако этот вектор инвариантен относительно подгруппы H группы G , состоящей из вращений вокруг третьей оси:

$$H: \varphi'_0 = U(h)\varphi_0 = \varphi_0, \quad U(h) = e^{iT_3 \alpha_3}. \quad (8.18)$$

В то же время потенциал V , очевидно, инвариантен относительно всей группы G :

$$V(\varphi') = V(\varphi), \quad \varphi' = U(g)\varphi, \quad (8.19)$$

и именно это обстоятельство приводит к возникновению голдстоуновских бозонов. Сколько их? Положим

$$\varphi_3 = \chi + a. \quad (8.20)$$

Тогда физическими полями будут φ_1 , φ_2 и χ ; можно непосредственно убедиться [учитывая (8.15)] в том, что

$$\begin{aligned} V &= \frac{m^2}{2} [\varphi_1^2 + \varphi_2^2 + (\chi+a)^2] + \lambda [\varphi_1^2 + \varphi_2^2 + (\chi+a)^2]^2 = \\ &= 4a^2 \lambda \chi^2 + 4a\lambda \chi (\varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \chi^2) + \lambda (\varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \chi^2)^2 - \lambda a^4 = \\ &= \lambda [\varphi_i \varphi_i - a^2]^2 - a^4. \end{aligned} \quad (8.21)$$

В этом выражении квадратичный член, а следовательно, и масса соответствуют только полю χ :

$$m_\chi^2 = 8a^2 \lambda, \quad m_{\varphi_1} = m_{\varphi_2} = 0, \quad (8.22)$$

так что после спонтанного нарушения симметрии мы имеем два голдстоуновских бозона и одно массивное скалярное поле.

Теперь мы можем истолковать эту ситуацию в весьма общем виде. Разлагая $V(\varphi)$ в окрестности минимума и учитывая, что

$$\left. \frac{\partial V}{\partial \varphi_a} \right|_{\varphi=\varphi_0} = 0,$$

мы имеем

$$V(\varphi) = V(\varphi_0) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi_i \partial \varphi_j} \right)_{\varphi=\varphi_0} \chi_i \chi_j + O(\chi^3), \quad (8.23)$$

где $\chi(x) = \varphi(x) - \varphi_0$, и, следовательно, массовая матрица имеет вид

$$M_{ij} = \left(\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi_i \partial \varphi_j} \right)_{\varphi=\varphi_0} > 0. \quad (8.24)$$

Поскольку $V(\varphi_0)$ — значение в минимуме, величины M_{ij} должны быть положительными или равными нулю. Чтобы выяснить, для каких полей они равны нулю, совершим групповое преобразование. Из инвариантности потенциала V [формула (8.19)] следует

$$V(\varphi_0) = V(U(g)\varphi_0) = V(\varphi_0) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi_i \partial \varphi_j} \right)_{\varphi_0} \delta\varphi_i \delta\varphi_j + \dots$$

и, стало быть,

$$\left(\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi_i \partial \varphi_j}\right)_{\varphi_0} \delta \varphi_i \delta \varphi_j = 0, \quad (8.25)$$

где $\delta \varphi_i$ — вариации полей φ_i при групповых преобразованиях. Из соотношений (8.17) и (8.18) следует, что их величина зависит от того, принадлежит ли элемент g подгруппе H или нет. Если g принадлежит подгруппе H , то $\varphi_0' = \varphi_0$ и $\delta \varphi_i = 0$, или, что эквивалентно,

$$\delta \varphi = \left(\frac{\partial U}{\partial \alpha_3}\right)_{\alpha_3=0} \varphi_0 \delta \alpha_3 = 0, \quad (8.26)$$

и, таким образом, соотношение (8.25) выполняется. Если же элемент g не принадлежит подгруппе H [в нашем примере это означает, что g есть вращение вокруг некоторой оси, лежащей в плоскости (1, 2)], то

$$\delta \varphi_m = \left[\left(\frac{\partial U}{\partial \alpha_i}\right)_{\alpha_i=0} \varphi_0\right]_m \delta \alpha_i \neq 0. \quad (8.27)$$

[Напомним, что соотношение (8.17), а значит, и (8.27) являются матричными.] В этом случае из (8.24) и (8.25) следует, что

$$M_{ij}[U'(0)\varphi_0]_j = 0$$

и поля $U'(0)\varphi_0$ обладают нулевой массой. Это голдстоуновские бозоны. Теперь ясно, что вопрос о числе полей с ненулевой массой и с нулевой массой является чисто теоретико-групповой проблемой. Поле, на массу которого не налагается требование равенства нулю (хотя, конечно, масса может равняться нулю «случайно»), удовлетворяет соотношению (8.26), и число таких полей просто равно размерности алгебры Ли подгруппы (или порядку группы Ли) H , т. е. подгруппы, относительно которой вакуум инвариантен. В нашем случае $H = SO(2) \sim U(1)$ с одним генератором T_3 , т. е. одно поле остается массивным. Элементы G , не принадлежащие подгруппе H , не образуют подгруппу (они не могут образовать подгруппу, поскольку единица принадлежит подгруппе H), но они образуют совокупность смежных классов G/H , и число голдстоуновских частиц равно размерности фактор-пространства, которая равна числу генераторов G , не являющихся генераторами подгруппы H ; в нашем случае это число равно $3 - 1 = 2$. Данные выводы согласуются с явными расчетами, проведенными выше. Подчеркнем, что мы сделали важное заключение о том, что этот результат не зависит от того, к какому представлению группы G принадлежат поля — в нашем примере это было векторное (регулярное) представление, — и не зависит от того, какую форму имеет потенциал V : число голдстоуновских бозонов просто равно размерности пространства G/H . Данное обстоятельство будет играть очень важную роль, когда мы

перейдем к рассмотрению спонтанного нарушения калибровочных симметрий.

Наконец, чтобы подчеркнуть общность наших выводов, заметим, что они остаются справедливыми и тогда, когда симметрия не является спонтанно нарушенной. В этом случае имеется *единственный* вакуум (синглет относительно группы G), который инвариантен относительно самой группы G , т. е. $H = G$, фактор-пространство просто совпадает с единичным элементом группы, а голдстоуновские бозоны отсутствуют. В другом крайнем случае, когда вакуум устроен так, что не существует подгруппы H , оставляющей инвариантным одно из вакуумных состояний φ_0 , подгруппа H совпадает с единичным элементом, а $G/H = G$ и число голдстоуновских бозонов равно порядку группы G . Мы ответили на первый из вопросов, поставленных в начале данного параграфа.

Обратимся теперь ко второму вопросу: каков статус проведенных классических рассмотрений в квантовой теории? Здесь теорема Голдстоуна гласит, что если оператору поля $\varphi(x)$ отвечает ненулевое вакуумное среднее $\langle 0|\varphi(x)|0\rangle \neq 0$, которое не является синглетом относительно преобразований некоторой группы симметрии, то в спектре состояний должны присутствовать безмассовые состояния. Имеются довольно тонкие вопросы существования, последовательный анализ которых читатель может найти в обзорах [5, 6]. Здесь мы лишь наметим схему доказательства.

Начнем с некоторых предварительных замечаний относительно группы симметрии. Если лагранжиан \mathcal{L} инвариантен относительно группы преобразований, то (см. § 3.3) дивергенции токов

$$j_\mu^a(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu \varphi)} \frac{\delta \varphi(x)}{\delta \alpha^a}$$

равны нулю, $\partial^\mu j_\mu^a = 0$ и соответствующие заряды

$$Q^a = \int d^3x j_0^a(x) \quad (8.28)$$

сохраняются ($dQ^a/dt = 0$) и удовлетворяют коммутационным соотношениям группы симметрии

$$[Q^a, Q^b] = C^{abc}Q^c,$$

где C^{abc} — структурные константы алгебры Ли. Унитарный оператор, соответствующий групповому преобразованию, имеет вид

$$U = e^{iQ^a \alpha^a} \quad (8.29)$$

Если вакуум инвариантен относительно преобразований группы (т. е. является синглетом), то $U|0\rangle = |0\rangle$ и, следовательно,

$$Q^a|0\rangle = 0, \quad (8.30)$$

т. е. заряды аннигилируют вакуум. Эта ситуация типична для случая симметрии. Если это не так, то можно сказать, что мы имеем «вырожденные вакуумы» и $Q^a|0\rangle = |0\rangle'$ или $Q^a|0\rangle \neq 0$; однако, строго говоря, мы должны были бы сказать, что величина $Q^a|0\rangle$ не существует в гильбертовом пространстве, иными словами, ее норма равна бесконечности.

Если вернуться к оператору $\varphi(x)$, то, поскольку он не является синглетом группы, должен существовать оператор $\varphi'(x)$, такой, что при некотором a выполняется соотношение

$$[Q^a, \varphi'(x)] = \varphi(x) \quad (8.31)$$

и, поскольку $\langle 0|\varphi(x)|0\rangle \neq 0$, справедливо равенство

$$\langle 0|[Q^a, \varphi'(x)]|0\rangle = \langle 0|Q^a\varphi'(x) - \varphi'(x)Q^a|0\rangle \neq 0. \quad (8.32)$$

Это означает, что соотношение (8.30) неприменимо и, следовательно, симметрия в обычном смысле (вырожденные мультиплеты) отсутствует. (Один из примеров тонкостей, о которых говорилось выше, состоит в том, что величина $\langle 0|\varphi'(x)Q^a|0\rangle$ существует, тогда как величина $Q^a|0\rangle$ не существует.) Теперь мы покажем [6], что из (8.32) вытекает существование безмассовых частиц. Подставляя выражение (8.28) в (8.32) и вставляя полную систему промежуточных состояний, получаем

$$\sum_n \int d^3y \left[\langle 0 | j_0^a(y) | n \rangle \langle n | \varphi'(x) | 0 \rangle - \langle 0 | \varphi'(x) | n \rangle \langle n | j_0^a(y) | 0 \rangle \right] \Big|_{x_0=y_0} \quad (8.33)$$

[Ограничение $x^0 = y^0$ введено, поскольку оно необходимо для доказательства соотношения (8.31).] Далее, из трансляционной инвариантности следует, что

$$j_0^a(y) = e^{-i p y} j_0^a(0) e^{i p y},$$

и соотношение (8.33) принимает вид

$$\begin{aligned} & \sum_n \int d^3y \left[\langle 0 | j_0^a(0) | n \rangle \langle n | \varphi'(x) | 0 \rangle e^{i p_n y} - \right. \\ & \left. - \langle 0 | \varphi'(x) | n \rangle \langle n | j_0^a(0) | 0 \rangle e^{-i p_n y} \right] \Big|_{x^0=y^0} = \\ & = \sum_n \delta^3(p_n) \left[\langle 0 | j_0^a(0) | n \rangle \langle n | \varphi'(x) | 0 \rangle e^{i p_{n0} y_0} - \right. \\ & \left. - \langle 0 | \varphi'(x) | n \rangle \langle n | j_0^a(0) | 0 \rangle e^{-i p_{n0} y_0} \right] \Big|_{x^0=y^0} = \\ & = \sum_n \delta^3(p_n) \left[\langle 0 | j_0^a(0) | n \rangle \langle n | \varphi'(x) | 0 \rangle e^{i M_n y_0} - \right. \end{aligned}$$

$$\left. - \langle 0 | \varphi'(x) | n \rangle \langle n | j_0^a(0) | 0 \rangle e^{-i M_n y_0} \right] \Big|_{x^0=y^0} \neq 0, \quad (8.34)$$

где мы выполнили интегрирование по пространству и, учитывая наличие дельта-функции от импульса p_n , положили $p_{n0} = M_n$, где M_n — масса промежуточного состояния n . Остается только доказать, что выражение (8.34) не зависит от y_0 . Если это нам удастся, то мы сделаем вывод, что $M_n = 0$, т. е. все промежуточные состояния имеют нулевую массу, в чем и состоит утверждение теоремы Голдстоуна. Более того, эти промежуточные состояния должны существовать, чтобы выражение (8.34) было отлично от нуля: заметим, что вакуум ($|n\rangle = |0\rangle$) не дает вклада в сумму. При доказательстве независимости вышенаписанного выражения от y_0 будем исходить из того, что дивергенция тока $j_\mu^a(y)$ равна нулю:

$$\partial^\mu j_\mu^a(y) = \partial_0 j_0^a(y) + \nabla \cdot \mathbf{j}^a(y) = 0.$$

Интегрируя, получаем отсюда

$$\frac{\partial}{\partial y_0} \int d^3y j_0^a(y) = \int d^3y \nabla \cdot \mathbf{j}^a(y).$$

Поскольку же (8.34) и (8.32) представляют собой одно и то же соотношение, можем написать

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y_0} \langle 0 | [Q^a, \varphi'(x)] | 0 \rangle &= \frac{\partial}{\partial y_0} \int d^3y \langle 0 | [j_0^a(y), \varphi'(x)] | 0 \rangle = \\ &= - \int d^3y \langle 0 | [\nabla \cdot \mathbf{j}^a(y), \varphi'(x)] | 0 \rangle = - \int dS \cdot \langle 0 | [\mathbf{j}(y), \varphi'(x)] | 0 \rangle. \end{aligned}$$

Можно показать, что при довольно очевидных предположениях [6] этот поверхностный интеграл обращается в нуль. Таким образом, теорема Голдстоуна доказана.

В 60-х годах большие усилия были затрачены на то, чтобы выяснить, какую роль играет теорема Голдстоуна в физике частиц. Хотя не существует частиц с нулевой массой, пион имеет относительно малую массу и может приближенно рассматриваться как голдстоуновский бозон. Этим объясняется успех гипотезы ЧСАТ (частичное сохранение аксиального тока). Подробное изложение данного вопроса читатель может найти в книгах [7, 8].

§ 8.3. Спонтанное нарушение калибровочных симметрий

Перейдем теперь к случаю, когда симметрия является калибровочной. Рассмотрим простейшую модель, основанную на лагранжиане (8.1), но потребуем теперь инвариантности относительно преобразований

$$\varphi \rightarrow e^{i\Lambda(x)} \varphi. \quad (8.35)$$

Это приводит к необходимости [формула (3.84)] ввести электромагнитное поле с помощью ковариантной производной, причем лагранжиан (8.1) заменяется выражением

$$\mathcal{L} = (\partial_\mu + ie A_\mu) \varphi (\partial^\mu - ie A^\mu) \varphi^* - m^2 \varphi^* \varphi - \lambda (\varphi^* \varphi)^2 - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}. \quad (8.36)$$

Как и ранее, мы считаем m^2 параметром (положительным или отрицательным), так что при $m^2 < 0$ и в отсутствие калибровочного поля значение поля φ , соответствующее вакууму, подчиняется условию (8.4):

$$|\varphi| = a = \left(\frac{-m^2}{2\lambda} \right)^{1/2}.$$

Далее вновь положим [формула (8.10)]

$$\varphi(x) = a + \frac{\varphi_1(x) + i\varphi_2(x)}{\sqrt{2}}.$$

Лагранжиан выражается через физические поля φ_1 и φ_2 следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + e^2 a^2 A_\mu A^\mu + \frac{1}{2} (\partial_\mu \varphi_1)^2 + \\ & + \frac{1}{2} (\partial_\mu \varphi_2)^2 - 2\lambda a^2 \varphi_1^2 + \sqrt{2} ea A^\mu \partial_\mu \varphi_2 + \text{кубические члены} + \\ & + \text{члены 4-й степени}, \end{aligned} \quad (8.37)$$

где учтено соотношение (8.4). Важен второй член, пропорциональный A_μ^2 . Он указывает на то, что фотон стал *массивным*. Скалярное поле φ_1 является массивным, а поле φ_2 выглядит безмассовым; однако имеется смешанный член $A^\mu \partial_\mu \varphi_2$, который указывает на то, что распространяющийся фотон может превращаться в поле φ_2 . Поэтому поле φ_2 не представляется вполне физическим полем. В действительности его можно исключить с помощью калибровочного преобразования. В случае когда величина Λ в соотношении (8.35) является инфинитезимальной, из (8.10) следует, что

$$\begin{aligned} \varphi_1' &= \varphi_1 - \Lambda \varphi_2, \\ \varphi_2' &= \varphi_2 + \Lambda \varphi_1 + \sqrt{2} \Lambda a. \end{aligned} \quad (8.38)$$

Эти соотношения показывают, что поле φ_2 , подобно полю A_μ , претерпевает *неоднородное* преобразование, соответствующее вращению и *трансляции* в плоскости (φ_1, φ_2) , и поэтому не имеет прямой физической интерпретации. Следовательно, мы можем выбрать Λ так, чтобы выполнялось равенство $\varphi_2 = 0$ и смешанный член ис-

чез. В этой калибровке лагранжиан (8.37) принимает вид (мы пишем φ_1 вместо φ_1')

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + e^2 a^2 A_\mu A^\mu + \frac{1}{2} (\partial_\mu \varphi_1)^2 - \\ & - 2\lambda a^2 \varphi_1^2 + \text{члены, отвечающие взаимодействию}. \end{aligned} \quad (8.39)$$

В этот лагранжиан входят *два массивных поля*: фотон со спином 1 и поле φ_1 со спином 0. Поле φ_2 , которое в случае спонтанного нарушения глобальной симметрии становится безмассовым (голдстоуновский бозон), в данном случае *исчезло*. Кроме того, калибровочное поле, присутствие которого связано с тем, что мы имеем дело с *локальной* симметрией, теперь приобрело массу. «Фотон» стал *массивным*. Это — так называемое явление Хиггса. В рассматриваемом случае абелевой модели его можно охарактеризовать следующим образом: спонтанное нарушение калибровочной симметрии приводит не к появлению безмассового голдстоуновского бозона, а к полному исчезновению этого поля и появлению вместо него массивного, а не безмассового калибровочного поля. Таким образом, в зависимости от того является ли симметрия глобальной или локальной, спонтанное нарушение (СН) симметрии $U(1)$ приводит к следующему спектру частиц:

$$\begin{aligned} & \text{Голдстоуновская мода [СН глобальной } U(1)\text{-симметрии]:} \\ & 2 \text{ массивных скалярных поля} \rightarrow 1 \text{ массивное} \\ & \text{скалярное поле} + 1 \text{ безмассовое скалярное поле}. \end{aligned} \quad (8.40)$$

$$\begin{aligned} & \text{Хиггсовская мода [СН калибровочной } U(1)\text{-симметрии]:} \\ & 2 \text{ массивных скалярных} \left. \vphantom{\begin{matrix} 2 \\ \text{поля} \end{matrix}} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 1 \text{ массивное скалярное} \\ \text{поле} + 1 \text{ массивный фотон} \end{array} \right. \end{aligned} \quad (8.41)$$

Заметим, что число степеней свободы сохраняется при этих преобразованиях. В голдстоуновском случае это тривиально, поскольку безмассовые и массивные скалярные поля имеют по 1 степени свободы: $2 = 1 + 1$. В хиггсовском случае безмассовый фотон обладает двумя степенями свободы, а массивный — тремя, поскольку у него имеется физическое состояние поперечной поляризации: $2 + 2 = 1 + 3$. Образно говоря, фотон «съел» скалярное поле и приобрел массу. Точнее было бы, пожалуй, сравнить это положение с механизмом Гупты — Блейлера (§ 4.4). В этом механизме продольная и временная компоненты фотона взаимно уничтожаются, оставляя две поперечные компоненты. Здесь временная компонента фотона взаимно уничтожается со скалярным полем и на долю фотона остаются три состояния поляризации, что превращает его в массивную частицу.

Заметим, что, хотя все эти выводы относительно спектра частиц были сделаны на основе лагранжиана (8.39), в других отношениях эта конкретная форма не является выделенной. В

действительности, когда мы перейдем к рассмотрению *перенормировки*, будет удобнее рассматривать лагранжиан в (очевидно, физически эквивалентном) виде (8.37). Калибровка, соответствующая лагранжиану (8.39), называется *физической* или *унитарной калибровкой* [или *U-калибровкой*], поскольку в этой калибровке присутствуют только физические частицы (т. е. те, которые фигурируют в условии унитарности).

Обратимся теперь к явлению Хиггса в неабелевом случае [14] и рассмотрим для определенности модель с группой симметрии $O(3)$, введенную в предыдущем параграфе. Лагранжиан (8.12) должен быть модифицирован путем замены обычной производной на ковариантную и добавления члена, описывающего калибровочное поле. Это дает

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (D_\mu \Phi_i)(D^\mu \Phi_i) - \frac{m^2}{2} \Phi_i \Phi_i - \lambda (\Phi_i \Phi_i)^2 - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^i F^{\mu\nu i}, \quad (8.42)$$

где [в силу формул (3.122) и (3.131)]

$$D_\mu \Phi_i = \partial_\mu \Phi_i + g \varepsilon_{ijk} A_\mu^j \Phi_k,$$

$$F_{\mu\nu}^i = \partial_\mu A_\nu^i - \partial_\nu A_\mu^i + g \varepsilon^{ijk} A_\mu^j A_\nu^k. \quad (8.43)$$

Потенциал V имеет минимум [в случае $m^2 < 0$, формула (8.15)] при

$$|\Phi_0| = \left(\frac{-m^2}{4\lambda}\right)^{1/2} = a,$$

и, как и раньше, мы выберем в качестве вакуума изовектор $\vec{\Phi}_0$, направленный вдоль третьей оси [формула (8.16)]:

$$\Phi_0 = a \hat{e}_3.$$

Следовательно, физическими полями являются φ_1 , φ_2 и $\chi = \varphi_3 - a$. Путем простых преобразований получаем выражение

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{1}{2} \left[(\partial_\mu \varphi_1)^2 + (\partial_\mu \varphi_2)^2 + (\partial_\mu \chi)^2 \right] + \\ & + ag \left[(\partial_\mu \varphi_1) A_2^\mu - (\partial_\mu \varphi_2) A_1^\mu \right] + \\ & + \frac{a^2 g^2}{2} \left[(A_\mu^1)^2 + (A_\mu^2)^2 \right] - \frac{1}{4} (\partial_\mu A_\nu^i - \partial_\nu A_\mu^i)^2 - 4a^2 \lambda \chi^2 + \\ & + \text{кубические члены} + \text{члены 4-й степени}. \end{aligned} \quad (8.44)$$

Мы выписали в явном виде только члены, квадратичные по полям, поскольку для наших нынешних целей важны только они. Данный

лагранжиан аналогичен лагранжиану (8.37); он содержит член, смешанный по A^μ и φ , и поэтому его сложно интерпретировать. Чтобы получить более «физический» лагранжиан, воспользуемся теперь тем, что имеем дело с *локальной* симметрией и, следовательно, можем совершить независимые калибровочные преобразования в каждой точке пространства-времени. Мы выберем унитарную калибровку, при которой в *каждой* точке пространства-времени изовектор $\vec{\Phi}$ направлен вдоль третьей оси в изотопическом пространстве

$$\vec{\Phi}(x) = \hat{e}_3 \varphi_3 = \hat{e}_3 (a + \chi). \quad (8.45)$$

Тем самым мы избавляемся от полей φ_1 и φ_2 и получаем

$$D_\mu \varphi_1 = g (a + \chi) A_\mu^2,$$

$$D_\mu \varphi_2 = -g (a + \chi) A_\mu^1,$$

$$D_\mu \varphi_3 = \partial_\mu \chi.$$

В результате имеем

$$(D_\mu \varphi_i)^2 = a^2 g^2 \left[(A_\mu^1)^2 + (A_\mu^2)^2 \right] + (\partial_\mu \chi)^2,$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & -\frac{1}{4} (\partial_\mu A_\nu^i - \partial_\nu A_\mu^i)^2 - \frac{1}{2} a^2 g^2 \left[(A_\mu^1)^2 + (A_\mu^2)^2 \right] + \\ & + \frac{1}{2} (\partial_\mu \chi)^2 - 4a^2 \lambda \chi^2 + \text{кубические члены} + \text{члены 4-й степени}. \end{aligned} \quad (8.46)$$

Таким образом, остаются следующие частицы: 1 массивная скалярная частица, 2 массивные векторные частицы и 1 безмассовая векторная частица. В частности, оба голдстоуновских бозона, присутствующие в спонтанно нарушенной модели с *глобальной* симметрией, исчезли в модели с *локальной* симметрией, а два безмассовых калибровочных поля приобрели массу. Итак, по аналогии с (8.40) и (8.41) мы можем следующим образом подытожить результаты спонтанного нарушения в модели с $O(3)$ -симметрией.

Голдстоуновская мода [глобальная $O(3)$ -симметрия]:

$$3 \text{ массивных скалярных поля} \rightarrow 1 \text{ массивное скалярное поле} + 2 \text{ безмассовых скалярных поля}. \quad (8.47)$$

Хиггсовская мода [локальная $O(3)$ -симметрия]:

$$3 \text{ массивных скалярных поля} + 3 \text{ безмассовых векторных поля} \left. \vphantom{\begin{matrix} 3 \text{ массивных скалярных} \\ \text{поля} \end{matrix}} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 1 \text{ массивное скалярное} \\ \text{поле} + 2 \text{ массивных} \\ \text{векторных поля} + 1 \text{ безмас-} \\ \text{совое векторное поле}. \end{array} \right. \quad (8.48)$$

Мы можем также убедиться в том, что число независимых мод сохраняется в хиггсовском случае $3 + 3 \times 2 = 9 = 1 + 2 \times 3 + 2$.

Данная модель с $O(3)$ -симметрией обладает всеми свойствами произвольной неабелевой калибровочной теории. Должно быть ясно, что одно безмассовое поле остается, поскольку подгруппа $H [=U(1)]$, относительно которой вакуум инвариантен, имеет один генератор. Именно это обстоятельство в голдстоуновском случае позволило одному скалярному полю остаться массивным. Таким образом, число безмассовых векторных полей равно $\dim H$. В то же время два векторных поля стали массивными, поглотив две голдстоуновские моды. Следовательно, число массивных векторных полей равно $\dim G/H$. В результате полное число калибровочных частиц (массивных и безмассовых) равно, как и ожидалось, $\dim G$, поскольку калибровочное поле преобразуется по регулярному представлению группы. То обстоятельство, что в модели, рассмотренной выше, остается также скалярное поле, связано с тем, что мы выбрали случай, когда скалярные поля принадлежат триплету. Мы видим, что следствия механизма Хиггса в значительной мере определяются теорией групп.

§ 8.4. Сверхпроводимость

Сверхпроводимость служит хорошей иллюстрацией абелевой модели Хиггса. Как хорошо известно, явление сверхпроводимости состоит в отсутствии электрического сопротивления при очень низких температурах. Оно наблюдается во многих металлах. В таких металлах могут существовать стабильные незатухающие токи. Эти токи эффективно экранируют магнитный поток, и он равен нулю в сверхпроводнике (эффект Мейсснера). Иначе можно сказать, что эффект Мейсснера связан с тем, что фотоны обладают эффективной массой, как в явлении Хиггса, о котором говорилось выше. Покажем кратко, как эти выводы можно сделать на основании лагранжиана (8.36).

Вначале рассмотрим *статический* случай, когда $\partial_0 \varphi = 0$ и т. д. и лагранжиан (8.36) принимает вид

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} (\nabla - ie\mathbf{A}) \varphi \cdot (\nabla + ie\mathbf{A}) \varphi^* - m^2 |\varphi|^2 - \lambda |\varphi|^4 - \frac{1}{4} (\nabla \times \mathbf{A})^2,$$

или

$$-\mathcal{L} = \frac{1}{4} (\nabla \times \mathbf{A})^2 + \frac{1}{2} |(\nabla - ie\mathbf{A}) \varphi|^2 + m^2 |\varphi|^2 + \lambda |\varphi|^4. \quad (8.49)$$

Величина $-\mathcal{L}$ есть *свободная энергия Ландау — Гинзбурга*, причем $m^2 = a(T - T_c)$ вблизи критической температуры $T =$

$= T_c$: φ — макроскопическая многочастичная волновая функция, использование которой обосновывается теорией Бардина — Купера — Шриффера (БКШ)¹⁾. Согласно этой теории, при определенных условиях между электронами действуют силы *притяжения* и в роли квантов поля выступают электронные пары, которые, очевидно, являются бозонами. При низких температурах они оказываются в одном и том же квантовом состоянии (конденсат Бозе — Эйнштейна) и вследствие этого для описания макроскопической системы можно использовать многочастичную волновую функцию φ . Далее, при $T > T_c$ справедливо неравенство $m^2 > 0$ и минимум свободной энергии достигается при $|\varphi| = 0$. Но если $T < T_c$, то $m^2 < 0$ и минимум свободной энергии достигается при

$$|\varphi|^2 = -\frac{m^2}{2\lambda} > 0, \quad (8.50)$$

что, безусловно, является примером спонтанного нарушения симметрии. Лагранжиан \mathcal{L} инвариантен относительно обычного фазового преобразования

$$\varphi \rightarrow e^{i\Lambda(x)} \varphi, \quad \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A} + \frac{1}{e} \nabla \Lambda(x),$$

и соответствующий сохраняющийся ток имеет вид

$$\mathbf{j} = -\frac{i}{2} (\varphi^* \nabla \varphi - \varphi \nabla \varphi^*) - e |\varphi|^2 \mathbf{A}. \quad (8.51)$$

Если $T < T_c$ и φ медленно меняется на протяжении изучаемого образца, то второй член доминирует над первым и мы имеем

$$\mathbf{j} = \frac{em}{2\lambda} \mathbf{A} = -k^2 \mathbf{A}, \quad (8.52)$$

где k — положительная постоянная. Это — *уравнение Лондона*. Электрическое поле равно $\mathbf{E} = -\partial \mathbf{A} / \partial t = 0$, и по закону Ома сопротивление определяется соотношением $\mathbf{E} = R\mathbf{j}$, откуда следует, что $R = 0$,

и мы имеем сверхпроводимость.

Эффект Мейсснера (выталкивание магнитного поля) также можно легко получить. Уравнение Ампера имеет вид $\nabla \times \mathbf{B} = \mathbf{j}$. Взяв ротор этого выражения, с учетом равенства $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ и равенства (8.52) получим

$$\nabla^2 \mathbf{B} = k^2 \mathbf{B}. \quad (8.53)$$

¹⁾ Независимым автором микроскопической теории сверхпроводимости является Н. Н. Боголюбов. См. примечание на стр. 333, обзор [18] и книги [11, 12, 17] в списке литературы, добавленной при переводе. — *Прим. ред.*

Для простоты ограничимся одним пространственным измерением. В этом случае уравнение (8.53) имеет следующее решение:

$$B_x = B_0 e^{-kx},$$

так что магнитное поле проникает внутри образца только на характерную глубину $1/k$. Если учесть численные значения входящих сюда величин, то мы получим $1/k \approx 10^{-6}$ см. Наконец, из (8.53), очевидно, вытекает уравнение $\nabla^2 A = k^2 A$ или в лоренц-ковариантной форме уравнение

$$\square A_\mu = -k^2 A_\mu,$$

которое означает, что «фотоны» имеют массу k , что характерно для явления Хиггса.

Вслед за этим примером приложения явления Хиггса в области низких энергий мы рассмотрим его приложение к слабым взаимодействиям.

§ 8.5. Модель Салама — Вайнберга

Спонтанное нарушение калибровочных симметрий явилось существенным новым ингредиентом объединенной модели слабого и электромагнитного взаимодействий, построенной независимо Саламом и Вайнбергом. Основная идея состояла в том, что слабые взаимодействия должны переноситься калибровочными бозонами (W^\pm), которые «вначале» являются безмассовыми. Лагранжиан теории также содержит члены, соответствующие безмассовым электронам, мюонам и нейтрино, и инвариантен относительно группы внутренней симметрии, которая является калибровочной. Затем вводится скалярное поле (поле Хиггса), обладающее отличным от нуля вакуумным средним. Возникающее вследствие этого спонтанное нарушение симметрии приводит к появлению массы у частиц e , μ (и τ , если это необходимо), а также у калибровочных бозонов, но не у фотона и нейтрино. Таким образом, данная модель «реалистична»; она действительно была с большим успехом применена к описанию слабых взаимодействий. Эту модель можно также распространить на адроны, однако мы здесь не будем рассматривать этот вопрос.

Начнем со спинорных полей. Лагранжиан Дирака

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}\gamma^\mu \partial_\mu \psi - m\bar{\psi}\psi$$

при $m = 0$ превращается просто в $i\bar{\psi}\gamma \cdot \partial\psi$. Запишем, как в гл. 2,

$$\psi_L = \left(\frac{1-\gamma_5}{2}\right)\psi, \quad \psi_R = \left(\frac{1+\gamma_5}{2}\right)\psi.$$

Отсюда следует, что

$$i\bar{\psi}\gamma \cdot \partial\psi = i\bar{\psi}_R\gamma \cdot \partial\psi_R + i\bar{\psi}_L\gamma \cdot \partial\psi_L,$$

поскольку γ_5 антикоммутирует с γ_μ . Электрон и мюон обладают компонентами L и R , но, согласно двухкомпонентной теории нейтрино, ν_e и ν_μ обладают только L -компонентами, и, следовательно, лептонный лагранжиан имеет вид

$$\mathcal{L} = i\bar{e}_R\gamma \cdot \partial e_R + i\bar{e}_L\gamma \cdot \partial e_L + i\bar{\nu}_e\gamma \cdot \partial \nu_e + (e \rightarrow \mu). \quad (8.54)$$

Очевидно, что при желании можно добавить члены, соответствующие τ -лептору и его нейтрино. В этом случае мы будем иметь три «поколения» лептонов. С этого момента мы забудем о μ - и τ -поколениях, которые можно тривиальным образом добавить на любом этапе.

Какой внутренней симметрией обладает лагранжиан (8.54)? Преобразования должны затрагивать частицы с одинаковыми пространственно-временными свойствами, а, следовательно, единственная возможность состоит в том, чтобы перемешивать e_L и ν_e . Запишем «изоспинор».

$$L = \begin{pmatrix} \nu_e \\ e_L \end{pmatrix} \quad (8.55)$$

и припишем этому дублету неабелев заряд $I_W = 1/2$ (где I_W — «слабый изоспин»). Нейтрино ν_e соответствует третья компонента $I_W^3 = 1/2$, а лептону e_L соответствует $I_W^3 = -1/2$. Все это полностью аналогично (сильному) изоспину. Остающаяся частица

$$R = e_R \quad (8.56)$$

является изосинглетом: $I_W = 0$. Мы имеем

$$\mathcal{L} = i\bar{R}\gamma \cdot \partial R + i\bar{L}\gamma \cdot \partial L. \quad (8.57)$$

Таким образом, лагранжиан \mathcal{L} инвариантен относительно преобразований

$$\begin{aligned} L &\rightarrow e^{-i(I/2)\tau \cdot \alpha} L, \\ R &\rightarrow R, \end{aligned} \quad (8.58)$$

которые представляют собой вращения в пространстве слабого изоспина. Они образуют группу $SU(2)$. В более подробной записи преобразования имеют вид

$$SU(2): \begin{pmatrix} \nu_e \\ e_L \\ e_R \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} e^{-i(I/2)\tau \cdot \alpha} & 0 \\ \dots & \dots \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_e \\ e_L \\ e_R \end{pmatrix}. \quad (8.59)$$

Электрический заряд Q и третья компонента слабого изоспина I_W^3 связаны соотношениями

$$L: Q = I_W^3 - \frac{1}{2}; R: Q = I_W^3 - 1. \quad (8.60)$$

Если мы произведем калибровку этой симметрии (т. е. перейдем к функциям α , зависящим от пространственно-временного аргумента), возникнут три безмассовых калибровочных поля. Но фотон не будет входить в их число, поскольку правый электрон e_R , являющийся синглетом, не будет взаимодействовать с нашими калибровочными полями, однако он взаимодействует с фотоном.

Заметим, что $SU(2)$ не является максимальной симметрией лагранжиана \mathcal{L} . Мы можем также подвергнуть e_R простому $U(1)$ -преобразованию

$$U(1): e_R \rightarrow e^{i\beta} e_R. \quad (8.61)$$

Как это сказывается на L ? Это может быть только общее фазовое преобразование. Иными словами, ν_e и e_L должны приобрести одинаковый фазовый множитель, поскольку в ином случае это будет частный случай $SU(2)$ -преобразования. Однако эта фаза не обязана совпадать с фазой для R . Таким образом, мы пишем

$$U(1): \begin{pmatrix} \nu_e \\ e_L \\ e_R \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} e^{i\alpha\beta} & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\alpha\beta} & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\beta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_e \\ e_L \\ e_R \end{pmatrix}, \quad (8.62)$$

где α — число, которое мы должны определить. Данная $U(1)$ -симметрия приводит к существованию сохраняющегося заряда, причем e_R обладает одним значением этого заряда, а ν_e и e_L — другим. Очевидно, что это не Q , поскольку ν_e и e_L обладают различными значениями Q . [Иными словами, калибровочное поле, которое мы получим, калибруя $U(1)$ -симметрию, тоже не является фотонным полем.]

Вайнберг высказал предположение, что это «слабый гиперзаряд» Y_W , определяемый соотношением «типа формулы Гелл-Манна — Нишиджимы»

$$Q = I_W^3 + \frac{Y_W}{2}. \quad (8.63)$$

Сравнивая это соотношение с (8.60), мы видим, что

$$\begin{aligned} L &\text{ обладает значением } Y_W = -1, \\ R &\text{ обладает значением } Y_W = -2. \end{aligned} \quad (8.64)$$

Таким образом, в формуле (8.62) мы имеем $\alpha = 1/2$ и константа

связи с гиперзарядовым калибровочным полем для левых полей в 2 раза меньше соответствующей константы для правых полей. Преобразование $U(1)$ принимает теперь вид

$$U(1): \begin{pmatrix} \nu_e \\ e_L \\ e_R \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} e^{i\beta/2} & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\beta/2} & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\beta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_e \\ e_L \\ e_R \end{pmatrix}. \quad (8.65)$$

Таким образом, лагранжиан (8.54) инвариантен относительно группы $SU(2) \otimes U(1)$. [Заметим, что группу $U(1)$ можно было бы сопоставить лептонному числу, это дало бы значение $n = 1$. В результате мы имели бы другую теорию.]

Теперь прокалибруем теорию. Калибровка $SU(2)$ -симметрии означает, что мы вводим три калибровочных потенциала W_μ^i таким образом, что действующая на изоспинор L обычная производная заменяется ковариантной производной (3.153):

$$D_\mu L = \partial_\mu L - \frac{i}{2} g \tau \cdot W_\mu L, \quad (8.66)$$

где g — константа связи, соответствующая группе $SU(2)$. Калибровка $U(1)$ -симметрии вводит другой потенциал X_μ и другую константу связи g' . В силу формулы (8.65), поскольку гиперзаряд L -частиц составляет половину гиперзаряда R -частиц, ковариантные производные имеют вид

$$D_\mu L = \partial_\mu L + \frac{i}{2} g' X_\mu L, \quad (8.67)$$

$$D_\mu R = \partial_\mu R + ig' X_\mu R.$$

Подставляя (8.66) и (8.67) в (8.57) и добавляя члены, соответствующие калибровочным полям [формула (3.131)], получаем следующий лагранжиан:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_1 = & i\bar{R}\gamma^\mu (\partial_\mu + ig'X_\mu)R + i\bar{L}\gamma^\mu \left(\partial_\mu + \frac{i}{2} g'X_\mu - \frac{i}{2} g\tau \cdot W_\mu \right) L - \\ & - \frac{1}{4} (\partial_\mu W_\nu - \partial_\nu W_\mu + gW_\mu \times W_\nu)^2 - \frac{1}{4} (\partial_\mu X_\nu - \partial_\nu X_\mu)^2. \end{aligned} \quad (8.68)$$

Далее мы введем изоспинорное скалярное поле (поле Хиггса)

$$\Phi = \begin{pmatrix} \Phi^+ \\ \Phi^0 \end{pmatrix}. \quad (8.69)$$

Из (8.63) следует, что оно обладает следующими квантовыми числами:

$$\Phi : I_W = \frac{1}{2}, \quad Y_W = 1. \quad (8.70)$$

Значит, оба поля Φ^+ и Φ^0 являются *комплексными* (частицы и античастицы различаются между собой), и мы можем положить

$$\Phi = \begin{pmatrix} \Phi^+ \\ \Phi^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} (\varphi_3 + i\varphi_4) \\ \frac{1}{\sqrt{2}} (\varphi_1 + i\varphi_2) \end{pmatrix}, \quad (8.71)$$

где $\varphi_1, \dots, \varphi_4$ — действительные величины. Кроме того, в силу значений (8.70) ковариантная производная поля Φ имеет вид

$$D_\mu \Phi = \left(\partial_\mu - \frac{i}{2} g\tau \cdot W_\mu - \frac{i}{2} g'X_\mu \right) \Phi. \quad (8.72)$$

Поле Хиггса Φ также взаимодействует с полями e^- и ν_e с константой G_e , и в итоге часть полного лагранжиана, содержащая поле Φ , равна

$$\mathcal{L}_2 = (D_\mu \Phi)^\dagger (D_\mu \Phi) - \frac{m^2}{2} \Phi^\dagger \Phi - \frac{\lambda}{4} (\Phi^\dagger \Phi)^2 - G_e (\bar{L} \Phi R + \bar{R} \Phi^\dagger L). \quad (8.73)$$

Часть лагранжиана \mathcal{L}_2 , отвечающая взаимодействию, имеет вид

$$-G_e (\bar{\nu}_e e_R \Phi^\dagger + \bar{e}_L e_R \Phi^0 + \bar{e}_R \nu_e \Phi^- + \bar{e}_R e_L \Phi^0), \quad (8.74)$$

и при этом

$$\Phi^\dagger \Phi = (\Phi^+)^* \Phi^+ + (\Phi^0)^* \Phi^0 = \frac{1}{2} (\varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \varphi_3^2 + \varphi_4^2). \quad (8.75)$$

Как обычно, в случае $m^2 > 0$ этот лагранжиан описывает скалярное поле с массой m , причем состояние с наименьшей энергией соответствует значению $\Phi = 0$. Однако при $m^2 < 0$ состояние с наименьшей энергией соответствует уже не значению $\Phi = 0$, а тем значениям Φ , которые удовлетворяют условию

$$(\Phi^\dagger \Phi)_0 = -\frac{m^2}{\lambda}. \quad (8.76)$$

Выберем систему отсчета в изоспиновом пространстве таким образом, чтобы выполнялись условия

$$(\varphi_1)_0 = -\frac{2m^2}{\lambda}, \quad (\varphi_2)_0 = (\varphi_3)_0 = (\varphi_4)_0 = 0,$$

или

$$(\varphi_1)_0 = \left(-\frac{2m^2}{\lambda} \right)^{1/2} \equiv \sqrt{2} \eta, \quad (8.77)$$

$$(\Phi)_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ \eta \end{pmatrix}, \quad \eta — \text{действительное число.} \quad (8.78)$$

Мы имеем теперь вырожденный вакуум и спонтанное нарушение калибровочной симметрии. Можно предположить, что возбужденные состояния поля Φ над вакуумом имеют вид

$$\Phi(x) = \begin{pmatrix} \frac{\varphi_3(x)}{\sqrt{2}} + i \frac{\varphi_4(x)}{\sqrt{2}} \\ \eta + \frac{\varphi_1(x)}{\sqrt{2}} + i \frac{\varphi_2(x)}{\sqrt{2}} \end{pmatrix},$$

но это не так. Поскольку симметрия является *локальной*, мы можем осуществлять *различные* вращения изоспина в каждой точке пространства и поле $\Phi(x)$ может быть приведено к виду

$$\Phi(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ \eta + \frac{\sigma(x)}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \quad (8.79)$$

в *каждой* точке. [Такие же рассуждения привели нас к соотношению (8.45).] Далее, согласно формуле (8.72), ковариантная производная $D_\mu \Phi$ имеет вид

$$D_\mu \Phi = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \partial_\mu \sigma \end{pmatrix} - \left[\frac{ig}{2} \begin{pmatrix} W_\mu^3 & W_\mu^1 - iW_\mu^2 \\ W_\mu^1 + iW_\mu^2 & -W_\mu^3 \end{pmatrix} + \frac{ig'}{2} X_\mu \right] \begin{pmatrix} 0 \\ \eta + \frac{\sigma}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = -\frac{i}{2} \begin{pmatrix} g\eta(W_\mu^1 - iW_\mu^2) + \frac{g\sigma}{\sqrt{2}}(W_\mu^1 - iW_\mu^2) \\ i\sqrt{2} \partial_\mu \sigma + \eta(-gW_\mu^3 + g'X_\mu) + \frac{\sigma}{\sqrt{2}}(-gW_\mu^3 + g'X_\mu) \end{pmatrix}$$

Следовательно,

$$(D_\mu \Phi)^\dagger (D_\mu \Phi) = \frac{1}{2} (\partial_\mu \sigma)^2 + \frac{g^2 \eta^2}{4} [(W_\mu^1)^2 + (W_\mu^2)^2] + \frac{\eta^2}{4} (gW_\mu^3 - g'X_\mu)^2 + \text{кубические члены} + \text{члены 4-й степени.} \quad (8.80)$$

Введем теперь новое поле Z_μ :

$$Z_\mu = \frac{gW_\mu^3 - g'X_\mu}{(g^2 + g'^2)^{1/2}} = \cos \theta_W W_\mu^3 - \sin \theta_W X_\mu, \quad (8.81)$$

а также поле A_μ :

$$A_\mu = \frac{g'W_\mu^3 + gX_\mu}{(g^2 + g'^2)^{1/2}} = \sin \theta_W W_\mu^3 + \cos \theta_W X_\mu, \quad (8.82)$$

где θ_W — «угол Вайнберга», который дается соотношением

$$\frac{g}{(g^2 + g'^2)^{1/2}} = \cos \theta_W, \quad \frac{g'}{g} = \operatorname{tg} \theta_W. \quad (8.83)$$

Из выражения (8.80) можно видеть, что поля W_μ^1 , W_μ^2 и Z_μ приобрели массы

$$M_{W_1}^2 = M_{W_2}^2 = \frac{g^2 \eta^2}{2}, \quad M_Z^2 = \frac{g^2 \eta^2}{2 \cos^2 \theta_W} = \frac{M_W^2}{\cos^2 \theta_W}. \quad (8.84)$$

Масса поля A_μ равна нулю. отождествим условно A_μ с электромагнитным полем. Это отождествление подтвердится, если мы заметим, что взаимодействие лептонов с калибровочными полями, согласно формулам (8.68) и (8.81) — (8.83), имеет вид

$$\begin{aligned} & i\bar{R}\gamma^\mu (\partial_\mu + ig'X_\mu)R + i\bar{L}\gamma^\mu \left(\partial_\mu + \frac{i}{2}g'X_\mu - \frac{i}{2}g\tau \cdot W_\mu \right)L = \\ & = i\bar{e}\gamma^\mu \partial_\mu e + i\bar{\nu}\gamma^\mu \partial_\mu \nu - g \sin \theta_W \bar{e}\gamma^\mu e A_\mu + \\ & + \frac{g}{\cos \theta_W} \left(\sin^2 \theta_W \bar{e}_R \gamma^\mu e_R - \frac{1}{2} \cos 2\theta_W \bar{e}_L \gamma^\mu e_L + \frac{1}{2} \bar{\nu} \gamma^\mu \nu \right) Z_\mu + \\ & + \frac{g}{\sqrt{2}} \left[(\bar{\nu} \gamma^\mu e_L W_\mu^\dagger) + \text{э. с.} \right], \end{aligned} \quad (8.85)$$

где аббревиатура э. с. обозначает эрмитово сопряжение, а $W_\mu = (W_\mu^1 + iW_\mu^2)/\sqrt{2}$. Заметим, что поле A_μ взаимодействует только с электронами, но не с нейтрино, причем взаимодействие с левыми и правыми компонентами одинаковое. Таким образом, мы убедились в правильности отождествления A_μ с электромагнитным потенциалом. Отсюда прямо следует, что истинной константой связи следует считать заряд протона e :

$$\blacksquare e = g \sin \theta_W. \quad (8.86)$$

Из вида последнего члена в выражении (8.85) следует, что g

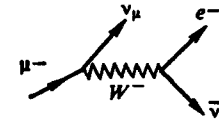


Рис. 8.6. Распад мюона в теории с промежуточным векторным бозоном,

является константой связи слабого поля с электрон-нейтринным (и мюон-нейтринным) током. Стало быть, во втором порядке это взаимодействие ответственно за распад мюона

$$\mu^- \rightarrow e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\mu$$

согласно диаграмме, изображенной на рис. 8.6, на которой калибровочное поле W распространяется между двумя вершинами. Из (8.85) следует, что эффективное взаимодействие имеет вид

$$\begin{aligned} H_{\text{взаим}} &= \frac{g^2}{2} \bar{\nu}_\mu \gamma^\mu \mu_L (\text{Пропагатор})_{\lambda\lambda} \bar{e}_L \gamma^\lambda e = \\ &= \frac{g^2}{8} \bar{\nu}_\mu \gamma^\mu (1 - \gamma_5) \mu (\text{Пропагатор})_{\lambda\lambda} \bar{e} \gamma^\lambda (1 - \gamma_5) e. \end{aligned} \quad (8.87)$$

При малых q пропагатор сводится к постоянной $g_{\lambda\lambda}/M_W^2$ и выражение (8.87) принимает вид

$$H_{\text{взаим}} = \frac{g^2}{8M_W^2} j_\mu^{\lambda\dagger} j_{e\lambda}, \quad (8.88)$$

где $j_\lambda = i\bar{\nu}_\mu (1 - \gamma_5) \nu_\mu$ — лептонный (l) ток. Однако выражение (8.88) в точности совпадает со взаимодействием Ферми ток \times ток

$$H_{\text{взаим}} = \frac{G}{\sqrt{2}} j_\mu^{\lambda\dagger} j_{e\lambda}, \quad (8.89)$$

где G — постоянная Ферми. Таким образом, мы приходим к равенству

$$G = \frac{g^2}{4\sqrt{2} M_W^2}. \quad (8.90)$$

Распад мюона¹⁾ дает для G значение $G = 1,43 \cdot 10^{-49}$ эрг \cdot см³, или (в «естественных» единицах $\hbar = c = 1$) $G \approx 10^{-6} m_p^{-2}$, т. е. «малое» число (в шкале, связанной с массой протона). Именно вследствие малости постоянной G это взаимодействие названо слабым. Однако в теории Салама — Вайнберга фундаментальной констан-

¹⁾ См., например, [7, гл. 21].

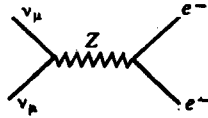


Рис. 8.7. Рассеяние $\nu_\mu e^-$ за счет обмена частицей Z^0 .

той связи является g , а из соотношения (8.86) следует, что если угол θ_W не слишком мал, то и постоянная g не мала. Таким образом, слабое взаимодействие не является слабым по своей природе, а благодаря соотношению (8.90) лишь *кажется* слабым вследствие того, что масса M_W велика. В действительности мы можем определить численные значения этих величин. Из выражения (8.85) следует, что как нейтрино, так и заряженные лептоны (e и μ) взаимодействуют с *нейтральным* полем Z , и мы можем предсказать, например, что имеет место $\nu_\mu - e$ -рассеяние

$$\nu_\mu + e^- \rightarrow \nu_\mu + e^-$$

в соответствии с диаграммой Фейнмана, изображенной на рис. 8.7. Это — пример взаимодействия через нейтральный ток, типичного для теории Салама — Вайнберга. Такое рассеяние наблюдалось с сечением $\sigma = (1,6 \pm 0,9) \cdot 10^{-42} (E, \text{ГэВ}) \text{ см}^2$ (см., например, [7, с. 599]). Очевидно, что из этого сечения можно получить значение θ_W (или, что эквивалентно, g). Это дает [7, с. 686]

$$\sin^2 \theta_W = 20,225 \begin{matrix} +0,06 \\ -0,05 \end{matrix} \quad (8.91)$$

Из соотношений (8.86) и (8.90) затем следует значение

$$M_W^2 = \frac{e^2}{4\sqrt{2}G \sin^2 \theta_W} = (78,6 \text{ ГэВ}/c^2)^2, \quad (8.92)$$

а из (8.84) — значение массы Z -частицы:

$$M_Z = 89,3 \text{ ГэВ}/c^2. \quad (8.93)$$

Существование заряженных и нейтрального векторных бозонов с указанными массами является важнейшим предсказанием электрослабой теории, и открытие этих частиц с правильным значением масс [UA1 Collaboration, Phys. Lett., 122B, 103 (1983); 126B, 398 (1983)] явилось блестящим ее подтверждением. Отметим, что существование процессов (также наблюдавшихся), идущих через нейтральные токи, следует из любой теории с лагранжианом, инвариантным относительно *глобальной* $SU(2)$ -симметрии. Но только после того, как теория *прокалибрована*, она становится перенормируемой и предсказываются промежуточные векторные бозоны.

Дальнейшую информацию о деталях электрослабой теории и экспериментальных следствиях из нее читатель может найти в литературе.

В заключение скажем об интересных соображениях, связанных с поведением электрослабого взаимодействия при высоких температурах. Если аналогия с ферромагнетизмом сохраняется, то симметрия, которая при низких температурах была спонтанно нарушена, должна восстановиться при высоких температурах. Выше критической температуры T_c бозоны W и Z должны быть безмассовыми подобно фотону, а слабые силы превратятся в дальнедействующие, подобные электромагнитным. Киржниц и Линде [25] высказали предположение, что это происходит при $T_c \approx 10^{16}$ К. Более формальные расчеты подтвердили эту точку зрения. Эти расчеты основаны на предположении о том, что 2-точечная функция скалярного поля при конечной температуре, например, получается как гиббсовское среднее «обычной» 2-точечной функции:

$$i\Delta_{F\beta}(x-y) = \frac{\text{Tr} e^{-\beta H} \langle 0 | T(\varphi(x)\varphi(y)) | 0 \rangle}{\text{Tr} e^{-\beta H}}, \quad (8.94)$$

где $\beta = (kT)^{-1}$. Если эта гипотеза верна, то она должна иметь космологические следствия, поскольку, согласно модели «большого взрыва», определено было время, когда температура Вселенной была выше T_c . Возникает интересный вопрос, как установилось спонтанное нарушение, когда температура T опустилась ниже T_c . Например, в ферромагнетике направление спонтанного намагничивания характеризует не весь образец, а лишь один *домен* и доменными стенками разделяются области, намагниченные в разных направлениях. Произошло ли нечто подобное во Вселенной? Другой интересный вопрос связан с существованием при $T > T_c$ дальнедействующих сил отталкивания между частицами, обладающими одинаковыми Y_W и I_W^* (аналогичных силам, действующим между зарядами Q одного знака в электродинамике). Эти и другие относящиеся сюда проблемы читатель может найти в литературе [28].

Резюме

1) Показывается, что ферромагнетизм иллюстрирует явление спонтанного нарушения симметрии (СНС). Рассматривается скалярная теоретико-полевая модель с СНС, которое приводит к возникновению безмассовой частицы — голдстоуновского бозона. 2) Показывается, что в общем случае, когда лагранжиан инвариантен относительно группы симметрии G , но основное состояние (вакуум) инвариантно только относительно подгруппы H , число голдстоуновских частиц равно $\dim G/H$. Показывается также, что приведенные

(классические) соображения остаются справедливыми и в квантовой теории, т. е. из СНС вытекает существование безмассовых частиц. В этом состоит теорема Голдстоуна. 3) В калибровочных же теориях СНС приводит к совершенно новому явлению: частицы Голдстоуна отсутствуют, а некоторые (или все) калибровочные поля становятся массивными. Это показывается в случае как абелевой, так и неабелевой модели. 4) Показывается, что сверхпроводимость является примером теории с СНС в электродинамике, т. е. абелевой калибровочной теории. 5) Рассматривается единая модель слабого и электромагнитного взаимодействия Салама — Вайнберга. В этой модели имеет место СНС калибровочной симметрии $SU(2) \otimes U(1)$. Обсуждаются некоторые экспериментальные следствия этой модели.

Литература для дальнейшего изучения

На аналогию между основным состоянием в физике многих тел и вакуумом в квантовой теории поля впервые было указано в работах:

1. *Nambu Y.* Phys. Rev. Lett., 4, 380 (1960); *Nambu Y., Jona-Lasinio G.* Phys. Rev., 122, 345 (1961).

По данному вопросу имеется обзорная статья:

2. *Nambu N.* — in: Group Theoretical Methods and Concepts in Elementary Particle Physics, ed. F. Gürsey, Gordon and Breach, 1964.

Модель Голдстоуна была предложена в работе:

3. *Goldstone J.* Nuovo Cimento, 19, 154 (1961) и обособована в работах:
4. *Goldstone J., Salam A., Weinberg S.* Phys. Rev., 127, 965 (1962); см. также: *Weinberg S.* — in: Lectures on Elementary Particles and Quantum Field Theory, (1970 Brandeis Summer Institute), Vol. 1, eds. S. Deser, M. Grisaru, H. Pendleton, MIT Press, 1970.

Теорема Голдстоуна рассматривается в следующих книгах и обзорах:

5. *Bernstein J.* Rev. Modern Phys., 46, 7 (1974).
6. *Guralnik G. S., Hagen C. R., Kibble T. W. B.* — in: Advances in Particle Physics, Vol. 2, eds. R. E. Cool, R. E. Marshak, Wiley-Interscience, 1968.
7. *Lee T. D.* Particle Physics and Introduction to Field Theory, Harwood Academic Publishers, 1981, Ch. 16, 22, 24.
8. *Taylor J. C.* Gauge Theories of Weak Interactions, Cambridge University Press, 1966, Ch. 5. [Имеется перевод: *Тейлор Дж.* Калибровочные теории слабых взаимодействий. — М.: Мир, 1978, гл. 5.]
9. *O'Raiheartaigh L.* Repts. Progr. Phys., 42, 159 (1979).

Явлению Хиггса посвящены статьи:

10. *Higgs P. W.* Phys. Lett., 12, 132 (1964); Phys. Rev. Lett., 13, 508 (1964); Phys. Rev., 145, 1156 (1966).
11. *Englert F., Brout R.* Phys. Rev. Lett., 13, 321 (1964).
12. *Guralnik G. S., Hagen C. R., Kibble T. W. B.* Phys. Rev. Lett., 13, 585 (1964).

Хорошие обзоры по этому вопросу можно найти в статьях [5—9], а также в работе:

13. *Coleman S.* — in: Laws of Hadronic Matter, ed. A. Zichichi, Academic Press, 1975.

Неабелеву случаю посвящена работа:

14. *Kibble T. W. B.* Phys. Rev., 155, 1554 (1967).
См. также работы [6, 8, 9].

Хорошее изложение теории сверхпроводимости можно найти, например в книгах:

15. *Tilley D. R., Tilley J.* Superfluidity and Superconductivity, Wiley, 1974.
16. *de Gennes P. G.* Superconductivity of Metals and Alloys, Benjamin, 1966.

Хороший обзор по теории Гинзбурга — Ландау:

17. *Cyrot M.* Repts. Progr. Physics, 36, 103 (1973).

Имеются также обзоры по сверхпроводимости, предназначенные для специалистов по физике частиц:

18. *Кирожниц Д. А.*, — УФН, 1978, т. 125, с. 169.
19. *Aitchison I. J. R., Hey A. J. G.* Gauge Theories in Particle Physics, Bristol, Adam Hilger Ltd., 1982, Ch. 9.

Объединенная теория электрослабых взаимодействий предложена в работах:

20. *Weinberg S.* Phys. Rev. Lett., 19, 1264 (1967).
21. *Salam A.* — in: Proceedings of the Eighth Nobel Symposium, ed. N. Svartholm, Stockholm, Almqvist and Winksell, 1968.
См. также:
22. *Glashow S. L.* Nucl. Physics, 22, 579 (1961).

Обзоры по этому вопросу можно найти в работах [5, 7—9], а также в Нобелевских речах 1979 г.:

23. *Weinberg S.* Rev. Mod. Phys., 52, 515 (1980); *Salam A.* Rev. Mod. Phys., 52, 525 (1980); *Glashow S. L.* Rev. Mod. Phys., 52, 539 (1980).

Новейшие обзоры, касающиеся, в частности, экспериментальных данных, можно найти в материалах конференций, например:

24. Proceedings of the Twentieth International Conference on High Energy Physics (Madison, Wisconsin, 1980), eds. L. Durand, L. G. Pondrom, American Institute of Physics, 1981.

Следующие статьи касаются восстановления симметрии при высоких температурах:

25. *Kirzhnits D. A., Linde A. D.* Phys. Lett., 42B, 471 (1972).
26. *Weinberg S.* Phys. Rev., D9, 3357 (1974).
27. *Dolan L., Jackiw R.* Phys. Rev., D9, 3320 (1974).

Более поздний обзор по данному вопросу:

28. *Linde A. D.* Repts. Progr. Physics, 42, 389 (1979).

Температурные функции Грина рассматриваются в статьях [25, 26], а также в работах:

29. *Shuryak E. V.* Phys. Repts., 61, 71 (1980).
30. *Hawking S. W.* — in: General Relativity: An Einstein Centenary Survey, eds. W. Hawking, W. Israel, Cambridge University Press, 1979, p. 754.
31. *Weinberg S.* — in: Understanding the Fundamental Constituents of Matter, ed. A. Zichichi, Plenum Press, 1978.

9

Перенормировка

Если бы врата сознания были распахнуты, то все сущее представлялось бы человеку так, как оно есть, бесконечным.

Уильям Блейк

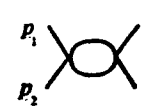
В предыдущих главах мы видели, что интегрирование по внутренним петлям фейнмановских диаграмм дает расходящиеся выражения. Однако, поскольку наш подход к теории поля основан на теории возмущений, необходимо придать смысл ряду теории возмущений. Этот ряд устроен таким образом, что члены более высоких порядков содержат все большее число внутренних интегралов, и, следовательно, существует возможность возрастания степени расходимости. Очевидно, для того чтобы теория поля вообще имела смысл или была правдоподобной, проблемы, связанные с расходимостями, должны быть удовлетворительным образом разрешены. В настоящей главе мы покажем, как это делается в случае теории ϕ^4 , квантовой электродинамики (КЭД) и теорий Янга — Миллса (КХД). Наш общий подход состоит в том, чтобы строить теорию возмущений порядок за порядком (в действительности имеется в виду петлевое разложение, см. ниже) и показать, что в каждом порядке величины, представляющие физический интерес (массы, константы связи, функции Грина), могут быть *перенормированы* к конечным значениям. Далее (в случае КЭД и КХД) мы показываем, что это в принципе возможно во всех порядках. Таким образом, эти теории *перенормируемы*. (Теория ϕ^4 также перенормируема, однако мы не будем доказывать это.) Мы начнем с теории ϕ^4 .

§ 9.1. Расходимость в теории ϕ^4

Мы видели в гл. 6, что величина $\Delta(x-x) = \Delta(0)$ является расходящейся. Она модифицирует пропагатор свободной частицы и дает вклад в собственную энергию. В импульсном пространстве ей соответствует выражение

$$\bigcirc \quad g \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{1}{q^2 - m^2}. \quad (9.1)$$

В числителе содержится четвертая, а в знаменателе вторая степень q , и, следовательно, интеграл квадратично расходится при больших q [это *ультрафиолетовая* расходимость; в настоящей главе мы не будем заниматься вопросами инфракрасных расходимостей ($q \rightarrow 0$)]. Эта диаграмма имеет порядок g . Другая расходящаяся диаграмма — граф порядка $O(g^2)$:



$$g^2 \int \frac{d^4q_1}{(2\pi)^4} \frac{d^4q_2}{(2\pi)^4} \frac{\delta(q_1 + q_2 - p_1 - p_2)}{(q_1^2 - m^2)(q_2^2 - m^2)} =$$

$$= g^2 \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{1}{(q^2 - m^2)[(p_1 + p_2 - q)^2 - m^2]}. \quad (9.2)$$

Здесь мы имеем четвертую степень q как в числителе, так и в знаменателе, что приводит к логарифмической расходимости.

Как определить степень расходимости данного графа? Очевидно, что каждый пропагатор дает вклад в знаменатель, равный q^2 , а каждая вершина дает вклад в числитель, равный четвертой степени q , а также δ -функцию, выражающую закон сохранения импульса. Кроме того, число независимых импульсов (по которым ведется интегрирование) равно числу *петель* (в случае рассмотренных выше двух диаграмм это число равно 1). Рассмотрим диаграмму порядка n , т. е. с n вершинами, E внешними линиями, I внутренними линиями и L петлями. Пусть пространство-время имеет размерность d — это будет использовано ниже (в этом случае вершины дают вклад в числитель, равный q в степени d). Нас интересует *условная*¹⁾ *степень расходимости* D данной диаграммы. Очевидно, что²⁾

$$D = dL - 2I. \quad (9.3)$$

Для рассмотренных выше диаграмм эта формула дает $D = 2$ и $D = 0$, что и требуется. Выразим теперь D через E и n , исключая при этом I и L . Имеются I внутренних импульсов. В каждой вершине (их всего n) сохраняется импульс, однако выполняется закон сохранения полного импульса, так что всего имеются $n - 1$ соотношений между импульсами. Следовательно, число независимых импульсов равно $I - n + 1$. Но это число равно L :

$$L = I - n + 1. \quad (9.4)$$

В теории ϕ^4 в каждую вершину входят 4 линии, т. е. всего имеются $4n$ линий, часть из которых является внутренними, а часть — внешними. Однако при подсчете числа линий внутренние линии учитываются

¹⁾ Термин «условная» объясняется ниже после формулы (9.9).

²⁾ Для величины D нет общепринятого названия. Автор использует термин superficial degree of divergence. В учебнике Н. Н. Боголюбова и Д. В. Ширкова эта величина называется индексом диаграммы. Она совпадает с условной степенью роста по импульсу. Обзор современного состояния теории перенормировок дан в книге О. И. Завьялова, добавленной при переводе. — *Прим. ред.*

ваются дважды, поскольку они связывают две вершины. Таким образом,

$$4n = E + 2l. \quad (9.5)$$

Из равенств (9.3) — (9.5) следует, что

$$D = d - \left(\frac{d}{2} - 1\right) E + n(d - 4). \quad (9.6)$$

В случае $d = 4$ мы имеем соотношение

$$D = 4 - E, \quad (9.7)$$

откуда получаются правильные результаты для диаграмм, рассмотренных выше. Из этого соотношения следует также, что все диаграммы с числом внешних концов, большим 4, например при $E = 6$, $D = -2$, сходятся. Вопрос о том, действительно ли это имеет место, будет рассмотрен ниже.

Рассмотрим последний член в (9.6). Он указывает на то, что может реализоваться ужасающая перспектива, поскольку если коэффициент при n больше нуля, то D возрастает с ростом n , так что *полная* теория, просуммированная по всем n , будет содержать бесконечное число членов, каждый из которых содержит расходимость более высокой степени, чем предыдущий. Это безнадежная ситуация. Однако, как показывает соотношение (9.7), в теории φ^4 в 4-мерном пространстве-времени величина D зависит *только* от E и не зависит от порядка теории возмущений, так что мы имеем небольшое число расходящихся графов и можем надеяться, что эти бесконечные вклады можно исключить с помощью (бесконечных) перенормировок различных физических величин. Если это верно, то теория называется *перенормируемой*. Конечно, мы пока еще не показали, что теория φ^4 является перенормируемой, мы сделаем это ниже, в § 9.3. Мы лишь показали, что ряд теории возмущений не содержит бесконечное количество различных типов расходящихся графов. Это является, очевидно, *необходимым* условием перенормируемости. Полезно привести формулы, аналогичные вышесказанным для случая теории φ^r . Равенства (9.3) и (9.4) не изменяются. Равенство (9.5) принимает вид $rn = E + 2l$, вследствие чего (9.6) записывается в виде

$$D = d - \left(\frac{d}{2} - 1\right) E + n \left[\frac{r}{2} (d - 2) - d \right]. \quad (9.8)$$

Отсюда при $d = 4$ следует равенство

$$D = 4 - E + n(r - 4). \quad (9.9)$$

При $r = 4$ последнее равенство, очевидно, сводится к (9.7). В случае теории φ^6 мы имеем $D = 4 - E + 2n$, и теория перенорми-

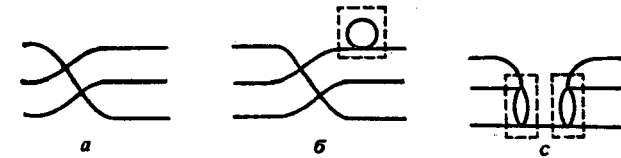


Рис. 9.1. Диаграммы с шестью внешними концами в теории φ^4 .

руема. В теории же φ^3 мы имеем $D = 4 - E - n$. Эта теория называется «суперперенормируемой», поскольку величина D убывает с ростом n , вследствие чего при заданном E существует только *конечное* число расходящихся графов. Соотношение (9.8) также приводит к любопытному выводу о том, что в двух измерениях $D = 2 - 2n$, т. е. не зависит от r .

Вернемся теперь к соотношению (9.7) и выясним, являются ли *все* графы с $E > 4$ сходящимися. В теории φ^4 величина E есть четное число; поэтому рассмотрим графы, изображенные на рис. 9.1. Они соответствуют значению $E = 6$ и «должны» сходиться. Диаграмма *a* действительно сходится, что легко видеть, выписывая амплитуду. Однако диаграмма *b* содержит однопетлевой вклад в 2-точечную функцию, рассмотренную выше [формула (9.1)], которая расходится *при любых условиях*. Аналогично граф *c* содержит, как отмечено на рисунке, два однопетлевых вклада в 4-точечную функцию и, следовательно, тоже расходится. Аналогичный вывод является справедливым для всех диаграмм Фейнмана. Если эти диаграммы содержат скрытые 2- или 4-точечные функции с одной (или более) петлей, то они будут расходиться вопреки формуле $D = 4 - E$. Именно по этой причине величина D названа *условно* степенью расходимости. Существенно, что справедливо обратное утверждение. Согласно *теореме Вайнберга*, диаграмма Фейнмана сходится, если ее степень расходимости D , а также степени расходимости всех ее подграфов отрицательны. Мы не будем доказывать это утверждение.

Две расходящиеся диаграммы $G^{(2)}$ и $G^{(4)}$, рассмотренные выше (см. (9.1) и (9.2)), называются *примитивно расходящимися* диаграммами. Ими исчерпываются все примитивно расходящиеся диаграммы теории φ^4 . В следующем параграфе мы увидим, как можно справиться с этими расходимостями.

Размерный анализ

Размерный анализ позволяет нам понять ряд свойств расходящихся диаграмм. Действие (в d измерениях)

$$S = \int d^d x \mathcal{L}$$

безразмерно (мы не учитываем множитель $1/\hbar$). Следовательно,
 $[Z] = L^{-d}$ (где L — длина),

или

$$[Z] = \Lambda^d \quad (\text{где } \Lambda \text{ — импульс}).$$

Член, отвечающий кинетической энергии в Z , равен $\partial^\mu \phi \partial_\mu \phi$ (размерность величин $g_{\mu\nu}$, не учитывается), и, поскольку $[\partial_\mu] = L^{-1}$, мы имеем

$$[\phi] = L^{1-d/2} \quad \text{или} \quad \Lambda^{d/2-1}. \quad (9.10)$$

Рассмотрим теперь взаимодействие вида $g\phi^r$. Если $[g] = L^{-\delta}$ (или Λ^δ), то

$$-\delta + r\left(1 - \frac{d}{2}\right) = -d, \quad (9.11)$$

$$\delta = d + r - \frac{rd}{2}.$$

Поэтому константа связи g в следующих теориях имеет следующие размерности:

$$\begin{aligned} g\phi^4 : \delta &= 4 - d \quad [g] = \Lambda^{4-d}, \\ g\phi^3 : \delta &= 3 - \frac{d}{2} \quad [g] = \Lambda^{3-d/2}, \\ g\phi^6 : \delta &= 6 - 2d \quad [g] = \Lambda^{6-2d}. \end{aligned} \quad (9.12)$$

Исключая r из равенств (9.11) и (9.8), получаем

$$D = d - \left(\frac{d}{2} - 1\right)E - n\delta. \quad (9.13)$$

Таким образом, теория должна быть перенормируемой, если размерность константы связи g в массовых единицах $\delta \geq 0$. Именно поэтому теория слабых взаимодействий Ферми, характеризуемая константой G_F с размерностью (масса) $^{-2}$, является перенормируемой.

Полезно знать размерности (их иногда называют «каноническими» или «техническими» размерностями) различных функций Грина и вершинных функций. Для удобства ссылок они сосредоточены в табл. 9.1. Строки таблицы разъясняются следующими замечаниями: 1) Следует из определения функции Грина. Действие вариационной производной $\delta/\delta J(x)$ каждый раз приводит к понижению степени $\phi(x)$. Например, функция Грина $G^2(x, y) \approx \int d^d p e^{ip(x-y)} (p^2 - m^2)^{-1}$, очевидно, имеет размерность $d - 2$ и

Таблица 9.1. Канонические размерности различных величин в d -мерном пространстве-времени и в 4-мерном пространстве времени. Примечания к таблице приведены в тексте

Величина	Размерность в массовых единицах в d -мерном пространстве-времени	Размерность в массовых единицах при $d = 4$
φ	$\frac{d}{2} - 1$	1
1) $G^{(n)}(x_1, \dots, x_n)$	$n \left(\frac{d}{2} - 1\right)$	n
2) $G^{(n)}(p_1, \dots, p_n)$	$-nd + n \left(\frac{d}{2} - 1\right) = -n \left(\frac{d}{2} + 1\right)$	$-3n$
3) $\bar{G}^{(n)}(p_1, \dots, p_{n-1})$	$d - n \left(\frac{d}{2} + 1\right)$	$4 - 3n$
4) $\Gamma^{(2)}(x - y)$	$2 + d$	6
5) $\Gamma^{(n)}(x_1, \dots, x_n)$	$n \left(\frac{d}{2} + 1\right)$	$3n$
6) $\Gamma^{(n)}(p_1, \dots, p_n)$	$-dn + n \left(\frac{d}{2} + 1\right) = n \left(1 - \frac{d}{2}\right)$	$-n$
7) $\bar{\Gamma}^{(n)}(p_1, \dots, p_{n-1})$	$d + n \left(1 - \frac{d}{2}\right)$	$4 - n$

$G^4 = \sum G^2 G^2$. 2) Функция Грина в импульсном пространстве есть фурье-образ функции $G^{(n)}(x_i)$. 3) Учитывая закон сохранения полного импульса, вытекающий из трансляционной инвариантности, мы можем положить по определению

$$G^{(n)}(p_1, \dots, p_n) = G^{(n)}(p_1, \dots, p_{n-1})\delta(P),$$

где $\delta(P)$ имеет размерность $-d$ (в единицах массы). 4) Следует из (7.84) с учетом того, что $\delta(x - y)$ имеет в единицах массы размерность d . 5) Следует из определения, аналогичного равенству (7.92), для вершины $\Gamma^3(x_1, x_2, x_3)$. 6) Получается с помощью преобразования Фурье. 7) Получается при учете закона сохранения полного импульса так же, как и в случае величины $\bar{G}^{(n)}(p_i)$ выше.

§ 9.2. Размерная регуляризация теории φ^4

Регуляризация является методом, с помощью которого можно выделить расходимости фейнмановских интегралов. Благодаря ей проблема перенормировки становится более ясной и обозримой. Существуют несколько методов регуляризации. Возможно, наиболее естественным из них является введение параметра образования Λ в интегралы по импульсному пространству. Частным примером может служить модификация свободного фотонного пропагатора в электродинамике

$$\frac{1}{k^2} \rightarrow \frac{1}{k^2} = \frac{1}{k^2 - \Lambda^2} = - \frac{\Lambda^2}{k^2 (k^2 - \Lambda^2)}.$$

Другой аналогичный метод — регуляризация Паули — Вилларса, при которой вводится фиктивное поле с массой M . В обоих этих случаях переходят к пределу $\Lambda \rightarrow \infty$ ($M \rightarrow \infty$), причем перенормированные величины не зависят от $\Lambda(M)$. Применение этих методов становится проблематичным, в частности, когда рассматриваются неабелевы калибровочные теории. Свободным от трудностей и элегантным методом является метод размерной регуляризации, ставший благодаря этому популярным. Мы кратко опишем его в данном параграфе. Идея этого метода состоит в том, чтобы рассматривать петлевые интегралы (содержащие расходимости) как интегралы по d -мерным импульсам, а затем перейти к пределу при $d \rightarrow 4$. Оказывается, что сингулярности 1-петлевых графов являются простыми полюсами по переменной $d - 4$. В настоящем параграфе мы покажем, как применить эту технику к теории φ^4 , а в § 9.3 — как производится перенормировка, позволяющая «избавиться» от нежелательных бесконечных выражений.

Прежде всего нам необходимо обобщить 4-мерный лагранжиан

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi - \frac{m^2}{2} \varphi^2 - \frac{g}{4!} \varphi^4$$

на случай d измерений. Поскольку поле φ имеет размерность $(1/2)d - 1$, а лагранжиан \mathcal{L} — размерность d [см. (9.10)], константа связи g безразмерна в четырех измерениях, и, для того чтобы она оставалась безразмерной в d измерениях, ее необходимо умножить на величину μ^{4-d} , где μ — произвольный параметр с размерностью массы. Таким образом,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi - \frac{m^2}{2} \varphi^2 - \frac{\mu^{4-d} g}{4!} \varphi^4. \quad (9.14)$$

Воспользуемся теперь соответствующими правилами Фейнмана, чтобы вычислить поправку порядка g к полному пропагатору. Петлевой интеграл имеет вид [ср. (9.1)]

$$\text{---} \bigcirc \text{---} \quad \frac{1}{2} g \mu^{4-d} \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \frac{1}{p^2 - m^2}. \quad (9.15)$$

Величина $1/2$ — это симметричный множитель. Мы работаем в d -мерном «пространстве Минковского» (а не в евклидовом пространстве). На протяжении настоящей главы мы будем иметь дело с интегралами, подобными выпеняписанному. Они выводятся в приложении к этой главе. Из равенства (9A.5) получаем следующее выражение для интеграла (9.15):

$$- \frac{ig}{32\pi^2} m^2 \left(\frac{4\pi\mu^2}{m^2} \right)^{2-d/2} \Gamma \left(1 - \frac{d}{2} \right). \quad (9.16)$$

Гамма-функция имеет полюсы в нуле и в отрицательных целых точках, и мы видим, что расходимость интеграла проявляется как простой полюс при $d \rightarrow 4$. Из приложения 9.Б мы имеем

$$\Gamma(-n + \epsilon) = \frac{(-1)^n}{n!} \left[\frac{1}{\epsilon} + \psi_1(n+1) + O(\epsilon) \right], \quad (9.17)$$

где

$$\psi_1(n+1) = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \gamma,$$

причем $\gamma = -\psi_1(1) = 0,577$ — постоянная Эйлера — Маскерони. Полагая

$$\epsilon = 4 - d, \quad (9.18)$$

мы получаем

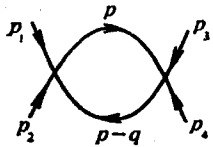
$$\Gamma(1 - d/2) = \Gamma(-1 + \epsilon/2) = -\frac{2}{\epsilon} - 1 + \gamma + O(\epsilon). \quad (9.19)$$

В результате разложение выражения (9.16) около точки $d = 4$ дает (мы используем разложение $a^\epsilon = 1 + \epsilon \ln a + \dots$)

$$\begin{aligned} & - \frac{igm^2}{32\pi^2} \left[-\frac{2}{\epsilon} - 1 + \gamma + O(\epsilon) \right] \left[1 + \frac{\epsilon}{2} \ln \left(\frac{4\pi\mu^2}{m^2} \right) \right] = \\ & = \frac{igm^2}{16\pi^2\epsilon} + \frac{igm^2}{32\pi^2} \left[1 - \gamma + \ln \left(\frac{4\pi\mu^2}{m^2} \right) \right] + O(\epsilon) = \\ & = \frac{igm^2}{16\pi^2\epsilon} + \text{конечная часть}. \end{aligned} \quad (9.20)$$

Конечная часть поправки к пропагатору не играет важной роли; заметим, однако, что она зависит от произвольной массы μ .

Вычислим теперь 4-точечную функцию в порядке g^2 . Правила Фейнмана дают (для вклада в s -канале см. ниже)



$$= \frac{1}{2} g^2 (\mu^2)^{4-d} \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \frac{1}{(p^2 - m^2)} \frac{1}{(p-q)^2 - m^2}. \quad (9.21)$$

Знаменатели в подынтегральном выражении объединяются с помощью формулы Фейнмана

$$\frac{1}{ab} = \int_0^1 \frac{dz}{[az + b(1-z)]^2}. \quad (9.22)$$

Эта формула легко выводится, если заметить, что

$$\frac{1}{ab} = \frac{1}{b-a} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) = \frac{1}{b-a} \int_a^b \frac{dx}{x^2},$$

и положить $x = az + b(1-z)$, причем a и b следует считать комплексными числами, чтобы исключить сингулярность при $a = b$. Мы имеем

$$\frac{1}{(p^2 - m^2)} \frac{1}{(p-q)^2 - m^2} = \int_0^1 \frac{dz}{[p^2 - m^2 - 2pq(1-z) + q^2(1-z)]^2}.$$

Совершая замену переменных по формуле

$$p' = p - q(1-z),$$

мы видим, что знаменатель в подынтегральном выражении является квадратом выражения $p'^2 - m^2 + q^2z(1-z)$. Однако $d^d p' = d^d p$; поэтому после изменения обозначений $p' \rightarrow p$ выражение (9.21) принимает вид

$$\frac{1}{2} g^2 (\mu^2)^{4-d} \int_0^1 dz \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \frac{1}{[p^2 - m^2 + q^2z(1-z)]^2}.$$

Этот интеграл записан теперь в виде (9A.5), и мы имеем

$$\begin{aligned} & \frac{ig^2}{2} (\mu^2)^{4-d} \left(\frac{1}{4\pi} \right)^{d/2} \frac{\Gamma(2-d/2)}{\Gamma(2)} \int_0^1 dz [q^2z(1-z) - m^2]^{d/2-2} = \\ & = \frac{ig^2}{32\pi^2} (\mu^2)^{2-d/2} \Gamma(2-d/2) \int_0^1 dz \left[\frac{q^2z(1-z) - m^2}{4\pi\mu^2} \right]^{d/2-2}. \end{aligned} \quad (9.23)$$

В пределе при $d \rightarrow 4$ равенство (9.17) дает

$$\Gamma\left(2 - \frac{d}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{\epsilon}{2}\right) = \frac{2}{\epsilon} - \gamma + O(\epsilon) \quad (9.24)$$

и выражение (9.23) принимает вид

$$\begin{aligned} & \frac{ig^2\mu^\epsilon}{32\pi^2} \left(\frac{2}{\epsilon} - \gamma + O(\epsilon) \right) \left\{ 1 - \frac{\epsilon}{2} \int_0^1 dz \ln \left[\frac{q^2z(1-z) - m^2}{4\pi\mu^2} \right] \right\} = \\ & = \frac{ig^2\mu^\epsilon}{16\pi^2\epsilon} - \frac{ig^2\mu^\epsilon}{32\pi^2} \left\{ \gamma + \int_0^1 dz \ln \left[\frac{q^2z(1-z) - m^2}{4\pi\mu^2} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (9.25)$$

В этом выражении главный член зависит от μ , а конечная часть — от полного импульса $(p_1 + p_2)^2 = q^2 = s$. Полагая

$$F(s, m, \mu) = \int_0^1 dz \ln \left[\frac{sz(1-z) - m^2}{4\pi\mu^2} \right], \quad (9.26)$$

мы в итоге получаем выражение для величины (9.21)

$$\frac{ig^2\mu^\epsilon}{16\pi^2\epsilon} - \frac{ig^2\mu^\epsilon}{32\pi^2} [\gamma + F(s, m, \mu)] = \frac{ig^2\mu^\epsilon}{16\pi^2\epsilon} + \text{конечная часть}. \quad (9.27)$$

Таким образом, мы получили в явной форме поправки низшего порядка к 2- и 4-точечной функциям в теории ϕ^4 . В заключение выпишем соответствующие вершинные (1ЧН) функции $\Gamma^{(2)}(p)$ и $\Gamma^{(4)}(p_i)$. В обозначениях (7.72) величина (9.20) равна Σ/i ; следовательно, в порядке g

$$\Sigma = -\frac{gm^2}{16\pi^2\epsilon} + \text{конечная часть}$$

и $\Gamma^{(2)}$ выражается с помощью соотношения (7.79) в виде (мы опускаем конечную часть Σ)

$$\Gamma^{(2)}(p) = p^2 - m^2 \left(1 - \frac{g}{16\pi^2\epsilon} \right). \quad (9.28)$$

Это выражение, очевидно, обращается в бесконечность при $\epsilon \rightarrow 0$. Далее, 4-точечная функция $\Gamma^{(4)}(p_1, \dots, p_4)$ определяется с помощью формулы, аналогичной (7.92), но в импульсном пространстве:

$$\Gamma^{(4)}(p_1, \dots, p_4) = G^{(2)}(p_1)^{-1} \dots G^{(2)}(p_4)^{-1} G^{(4)}(p_1, \dots, p_4),$$

где функция Грина $G^{(4)}$ представляет собой сумму члена порядка g [формула (6.111)], выражения (9.27), выписанного выше, и «кросс-

членов», которые получаются подстановкой переменных Мандельштама t и u вместо s , где

$$s = (p_1 + p_2)^2, \quad t = (p_1 + p_3)^2, \quad u = (p_1 + p_4)^2. \quad (9.29)$$

Действие функций $G^{(2)-1}$ сводится, как обычно, к ампутации внешних концов, и мы в результате имеем (ампутированные концы обозначены, как и в гл. 7, пунктирными линиями)

$$\begin{aligned} \Gamma^{(2)}(p) &= \text{diagram 1} + \text{diagram 2} + \text{diagram 3} + \text{diagram 4} \\ &= -ig\mu^2 + \frac{3ig^2\mu^2}{16\pi^2\epsilon} - \\ &= -\frac{ig^2\mu^2}{32\pi^2} [3\gamma + F(s, m, \mu) + F(t, m, \mu) + F(u, m, \mu)] = \\ &= -ig\mu^2 \left(1 - \frac{3g}{16\pi^2\epsilon}\right) + \text{конечная часть}. \end{aligned} \quad (9.30)$$

Эта величина также является бесконечной. Чтобы вершинные функции $\Gamma^{(2)}$ и $\Gamma^{(4)}$ имели физический смысл, они должны быть конечными. В следующем параграфе мы увидим, как можно провести такую перенормировку. Попутно заметим, что рассмотренные поправки имеют разный порядок по константе связи g . Величина $\Gamma^{(2)}$ — порядка g , а величина $\Gamma^{(4)}$ — порядка g^2 . Параметр, который в наших вычислениях величин $\Gamma^{(2)}$ и $\Gamma^{(4)}$ был одинаковым, — это число петель. В нашем случае оно равно единице. Существуют серьезные соображения, согласно которым разложение по числу петель с физической точки зрения является более подходящим, чем разложение по степеням g . Мы завершим настоящий параграф обзором этих соображений.

Петлевое разложение

Покажем, что разложение по L эквивалентно разложению по степеням \hbar . Чтобы увидеть это, напомним, что лагранжиан \mathcal{L} имеет размерность константы Планка, так что формулу (6.66) для производящего функционала (в случае скалярной теории поля) следует записывать в виде

$$Z[J(x)] = \int \mathcal{D}\phi \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \int [\mathcal{L} + \hbar J(x)\phi(x)] dx \right\}. \quad (9.31)$$

Разбивая \mathcal{L} на «свободную» часть и часть, «соответствующую взаимодействию», $\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{\text{взаим}}$ (ниже мы увидим, что в действительности это различие является несколько искусственным), мы получаем вместо (6.76)

$$Z[J] = \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \mathcal{L}_{\text{взаим}} \left[\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J} \right] \right\} Z_0[J], \quad (9.32)$$

где

$$Z_0[J] = \int \mathcal{D}\phi \exp \left[\frac{i}{\hbar} \int dx (\mathcal{L}_0 + \hbar J\phi) \right]. \quad (9.33)$$

Окончательно вместо (6.13) имеем

$$Z_0[J] = N \exp \left[-\frac{1}{2} i\hbar \int dx dy J(x) \Delta_F(x-y) J(y) \right]. \quad (9.34)$$

Из соотношения (9.32), очевидно, следует, что каждая вершина дает множитель \hbar^{-1} в произвольный граф n -го порядка теории возмущений, а из (9.34) следует, что при этом каждый пропагатор дает множитель \hbar . Таким образом, данный граф содержит множитель $\hbar^{l-n} = \hbar^{L-1}$, где мы использовали равенство (9.4), и разложение по числу петель является разложением по степеням \hbar в окрестности классической теории. Заметим, что по предположению наш произвольный граф не содержит пропагаторов, относящихся к внешним концам. Таким образом, правильнее сказать, что мы разлагаем вершинную функцию $\Gamma^{(n)}$, а не функцию Грина $G^{(n)}$. Мы построим петлевое разложение для Γ ниже, когда будем рассматривать случай спонтанного нарушения симметрии.

§ 9.3. Перенормировка теории ϕ^4

В настоящем параграфе мы рассмотрим два подхода к перенормировке. Первый является более интуитивным, а второй, метод контрчленов, обычно используется в физике высоких энергий. Конечно, эти подходы эквивалентны и до некоторой степени объясняют друг друга. Наша цель — сделать физические величины конечными.

Начнем с вершинных функций $\Gamma^{(2)}$ и $\Gamma^{(4)}$, заданных соотношениями (9.28) и (9.30). В однопетлевом приближении, которое мы рассматриваем, они должны быть конечными, и поэтому мы полагаем

$$\Gamma^{(2)}(p) = p^2 - m_1^2, \quad (9.35)$$

где m_1 — новый параметр, определяемый этим соотношением. Мы предполагаем, что он конечен и представляет собой физическую массу (по крайней мере в данном приближении). Первоначальная

масса считается *бесконечной* и не имеющей непосредственного физического смысла. Это масса, которой частица обладала бы в случае, если бы отсутствовали все взаимодействия, а поскольку взаимодействия всегда имеются, это ненаблюдаемая величина. Она связана с m_1 соотношением

$$m^2 = m_1^2 + \frac{m^2 g}{16\pi^2 \epsilon} = m_1^2 \left(1 + \frac{g}{16\pi^2 \epsilon}\right), \quad (9.36)$$

где мы произвели замену $m \rightarrow m_1$ в однопетлевой поправке. Это законно, поскольку возникающая при этом ошибка имеет порядок g^2 . Физическая масса m_1 , которую также называют *перенормированной массой*, определяется равенством

$$m_1^2 = -\Gamma^{(2)}(0). \quad (9.37)$$

Рассмотрим аналогичным образом вершинную функцию $\Gamma^{(4)}$. Перепишем сначала равенство (9.30) в виде

$$i\Gamma^{(4)}(p_i) = g\mu^4 - \frac{g^2\mu^4}{32\pi^2} \left[\frac{6}{\epsilon} - 3\gamma - F(s, m, \mu) - F(t, m, \mu) - F(u, m, \mu) \right]. \quad (9.38)$$

Определим далее новый параметр g_1 , *перенормированную константу связи*, с помощью соотношения

$$g_1 = g\mu^4 - \frac{g^2\mu^4}{32\pi^2} \left[\frac{6}{\epsilon} - 3\gamma - 3F(0, m, \mu) \right]. \quad (9.39)$$

Перестраивая данное выражение с помощью замен, где это требуется, g на g_1 и m на m_1 (возникающая при этом ошибка такая же, как и ранее в 2-петлевом случае), мы получаем

$$g = g_1\mu^{-4} = \frac{3g_1^2\mu^{-2\epsilon}}{32\pi^2} \left[\frac{2}{\epsilon} - \gamma - F(0, m_1, \mu) \right]. \quad (9.40)$$

Здесь величина g_1 считается *конечной*, а g , первоначальная константа связи, бесконечной. Величина g_1 была бы измеряемым значением константы связи в случае, если бы ϕ^4 была реалистической теорией (и если бы однопетлевое приближение было достаточным, чтобы проводить сравнение с экспериментом; в противном случае необходимо было бы учитывать более высокие поправки) и если бы измерения проводились в (нефизической) точке $s = t = u = 0$. Переменная g является «голой» константой связи, которую можно было бы измерить только в том случае, если бы поправки высших порядков не давали вклада, что, однако, неизбежно. Таким образом, величина g не имеет непосредственного физического смысла. Величина Γ^4 выражается через g_1 так:

$$i\Gamma^{(4)}(p_i) = g_1 + \frac{g_1^2\mu^{-4}}{32\pi^2} [F(s, m_1, \mu) + F(t, m_1, \mu) + F(u, m_1, \mu) - 3F(0, m, \mu)]. \quad (9.41)$$

Отсюда мы непосредственно получаем

$$i\Gamma^{(4)}(p_i = 0) = g_1, \quad (9.42)$$

поскольку из равенств $p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = 0$ следует $s = t = u = 0$. Таким образом, константа связи g_1 , согласно ее определению (9.39), совпадает с величиной $i\Gamma^{(4)}$ в точке, где все внешние импульсы равны нулю. Однако очевидно, что если нашей целью является только сделать теорию конечной, то существуют другие способы определить перенормированную массу и константу связи. Например, часто используемая альтернатива соотношению (9.42) состоит в том, чтобы определить g_1 через значение $\Gamma^{(4)}$ в симметричной точке $p_i^2 = m^2$, $p_i p_j = -m^2/3$ ($i \neq j$) и, следовательно $s = t = u = 4m^2/3$. Заметим также, что $\Gamma^{(4)}(p_i)$ зависит от μ — произвольной массы, которую мы с необходимостью должны были ввести, осуществляя размерную регуляризацию. Очевидно также, что физические величины не должны зависеть от μ . Именно этот факт лежит в основании ренормализационной группы, которую мы изучим ниже.

Мы перенормировали теорию ϕ^4 в однопетлевом приближении. Что происходит в 2-петлевом приближении? Соответствующие диаграммы изображены на рис. 9.2. При анализе входящих сюда интегралов было установлено, что (см., например, [24]) в случае вершинной функции $\Gamma^{(2)}$ добавление 2-петлевых диаграмм изменяет перенормированную массу m_1 (что вряд ли покажется удивительным); однако, кроме этого, $\Gamma^{(2)}$ содержит дополнительную расходимость, происходящую от второй диаграммы рис. 9.2. При этом, естественно, возникает вопрос: исчезает ли эта расходимость при перенормировке константы связи? Обращаясь к $\Gamma^{(4)}$, мы видим, что 2-петлевые графы действительно дают дополнительные расходимости вклады. Некоторые из них исчезают, когда учитывается перенормировка массы, остальные можно сделать конечными, перенормируя константу связи g_1 . Таким обра-

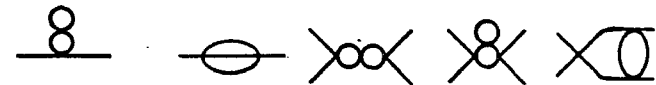


Рис. 9.2. Двухпетлевые члены, дающие вклад в вершинные функции $\Gamma^{(2)}$ и $\Gamma^{(4)}$.

зом, вершинная функция $\Gamma^{(4)}$ является *конечной* в 2-петлевом приближении. Однако вершинная функция $\Gamma^{(4)}$ остается *расходящейся* — перенормировка константы связи не устраняет расходимость во второй диаграмме рис. 9.2. Она устраняется за счет поглощения мультипликативным фактором, и мы поэтому определим перенормированную 2-точечную функцию $\Gamma_r^{(2)}$ соотношением

$$\Gamma_r^{(2)} = Z_\varphi(g_1, m_1, \mu) \Gamma^{(2)}(p, m_1, \mu). \quad (9.43)$$

В этой формуле величина $\Gamma_r^{(2)}$ является конечной, а Z_φ — бесконечной. Величина $Z_\varphi^{1/2}$ называется *константой перенормировки, волновой функции (или поля)*. Эту константу можно разложить по числу петель

$$Z_\varphi = 1 + g_1 Z_1 + g_1^2 Z_2 + \dots = 1 + g_1^2 Z_2 + \dots, \quad (9.44)$$

поскольку отсутствует однопетлевой вклад. Равенство (9.43) равносильно перенормировке полевой амплитуды, однако значение последней не может быть совершенно произвольным. По аналогии с (9.37) и (9.42) мы требуем, чтобы в некоторой точке, скажем $p^2 = 0$, полевая амплитуда равнялась единице, так что

$$\left. \frac{\partial}{\partial p^2} \Gamma_r^{(2)} \right|_{p^2=0} = 1. \quad (9.45)$$

Очевидно, что выбор точки $p^2 = 0$ является произвольным. Тот факт, что вершинная функция $\Gamma^{(2)}(p, m_1, \mu)$ расходится, очевидно, означает, что в 2-петлевом приближении величина m_1 является бесконечной (в пределе $\epsilon \rightarrow 0$). Однако перенормированная вершинная функция $\Gamma_r^{(2)}$ дает *конечное* значение перенормированной массы m_r :

$$m_r^2 = Z_\varphi m_1^2.$$

Иначе говоря, расходимости Z_φ и m_1^2 сокращаются. Далее, подобно тому как благодаря введению Z_φ значение перенормированной массы m_1 заменилось на m_r , изменяется и значение перенормированной константы связи. Очевидно, что соотношение для $\Gamma_r^{(4)}$, аналогичное (9.43), имеет вид

$$\Gamma_r^{(4)} = Z_\varphi^2 \Gamma^{(4)}(p, m_1, \mu), \quad (9.46)$$

и, следовательно, новая перенормированная константа связи g_r , определяемая соотношением, аналогичным (9.42), имеет вид

$$i\Gamma_r^{(4)}(p_i = 0) = g_r = Z_\varphi^2 g_1, \quad (9.47)$$

$$g_r = Z_\varphi^2 g_1.$$

Величина Z_φ является функцией переменной $g_1 = g\mu^4$, и, записывая эту зависимость явно, мы получаем перенормированную n -частичную вершинную функцию в виде

$$\Gamma_r^{(n)}(p_i, g_r, \mu) = Z_\varphi^{nf/2}(g\mu^4) \Gamma^{(n)}(p_i, g, m), \quad (9.48)$$

или

$$\Gamma_r^{(n)}(p_i, g, m) = Z_\varphi^{-nf/2}(g\mu^4) \Gamma_r^{(n)}(p_i, g_r, m_r, \mu). \quad (9.49)$$

Мы приходим к выводу, что в 2-петлевом приближении вершинные функции (или, что то же, функции Грина), масса и константа связи в теории φ^4 могут быть сделаны конечными с помощью соответствующей перенормировки. Возникает вопрос, сохраняется ли это важное свойство во всех порядках? Это вопрос о перенормируемости, на который, однако, трудно ответить. Мы отсылаем читателя к литературе. Следует заметить, что наибольшую трудность при доказательстве перенормируемости представляет явление «перекрывающихся расходимостей». Примером такой расходимости является второй граф рис. 9.2, которому (мы для удобства полагаем $m = 0$) соответствует интеграл

$$i \int \frac{d^4 k_1 d^4 k_2}{k_1^2 k_2^2 (p - k_1 - k_2)^2}.$$

Здесь имеются две петли и, следовательно, две переменные интегрирования. Общая степень расходимости равна $8 - 6 = 2$. Однако если удерживать, например, k_1 постоянным и интегрировать по k_2 , то степень расходимости равна $4 - 4 = 0$, так что граф дает только логарифмическую расходимость. Таким образом, явление перекрывающихся расходимостей состоит в том, что нельзя разделить между собой расходимости по k_1 и по k_2 . В КЭД, как мы увидим ниже, перекрывающиеся расходимости не приводят к трудностям благодаря калибровочной инвариантности. В этом отношении теории φ^4 сложнее КЭД.

Суммируем кратко полученные результаты. Исходя из лагранжиана (6.65), мы нашли, что функции Грина, содержащие одну или более внутренних петель, расходятся. Однако их можно сделать конечными, переходя путем перенормировки от «голых» значений массы, константы связи и полевой амплитуды к «физическим» значениям этих величин. Преимуществом этой точки зрения на перенормировку является ясная физическая интерпретация, имеющая аналогию в физике твердого тела, где, например, электронам, для того чтобы учесть их взаимодействие с решеткой, приписывается «эффективная масса». Это в точности соответствует рассмотренной выше перенормировке массы.

Однако можно принять альтернативную точку зрения на перенормировку. Эта точка зрения является более распространенной

в физике высоких энергий. Она состоит в том, чтобы рассматривать параметры m и g в исходном лагранжиане как *физическую* массу и константу связи. Из того факта, что этот лагранжиан не дает конечных функций Грина, вытекает, требование, что в лагранжиан должны быть введены *дополнительные члены*, сокращающие расходимости. Из называют *контрчленами*. Контрчлены могут быть построены в каждом порядке теории возмущений. Рассмотрим кратко, как это делается.

Контрчлены

Рассмотрим перенормировку массы в однопетлевом приближении, определяемую соотношениями (9.28), (9.35) и (9.36). Мы можем описать ее следующим образом. Однопетлевая поправка к свободному пропагатору равна

$$\text{---}\bigcirc\text{---} = \frac{igm^2}{16\pi^2\epsilon} + \text{конечная часть.}$$

Она расходится при $\epsilon \rightarrow 0$. Добавим поэтому к лагранжиану \mathcal{L} член вида

$$\delta\mathcal{L}_1 = -\frac{gm^2}{32\pi^2\epsilon} \varphi^2 \equiv -\frac{\delta m^2}{2} \varphi^2. \tag{9.50}$$

Его рассматривают как *взаимодействие*, которое приводит к дополнительному правилу Фейнмана:

$$\text{---}\times\text{---} = -\frac{igm^2}{16\pi^2\epsilon} = -i\delta m^2. \tag{9.51}$$

Далее, с точностью до g полный обратный пропагатор равен [ср. (7.77) и (7.78)]

$$\text{---}\bigcirc\text{---}^{-1} = \left[\text{---}\text{---} + \text{---}\bigcirc\text{---} + \text{---}\times\text{---} \right]^{-1} \tag{9.52}$$

или

$$\begin{aligned} \Gamma^{(2)}(p) &= i [G^{(2)}(p)]^{-1} = \\ &= i \left[\frac{p^2 - m^2}{i} - \left(\frac{igm^2}{16\pi^2} \frac{1}{\epsilon} + \text{конечная часть} \right) + \frac{igm^2}{16\pi^2\epsilon} \right] = p^2 - m^2, \end{aligned} \tag{9.53}$$

где мы опустили, как и ранее, конечную часть (или включили ее

в m^2). Здесь m^2 считается *конечной* величиной, физической массой частицы, которая в соответствующем порядке теории возмущений равна $-\Gamma^{(2)}(0)$. Лагранжиан теперь имеет вид $\mathcal{L} + \delta\mathcal{L}_1$, где $\delta\mathcal{L}_1$ — расходящийся контрчлен. Может показаться странным, что мы, очевидно, вводим в лагранжиан «массовый» член (9.50) и называем его «взаимодействием», но в действительности здесь нет противоречия. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим, например, свободную теорию с лагранжианом

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \varphi) (\partial^\mu \varphi) - \frac{1}{2} m^2 \varphi^2$$

будем считать, что она описывает *безмассовое* поле φ , заданное первым членом в лагранжиане \mathcal{L} , со *взаимодействием*, определяемым вторым членом. Правила Фейнмана в этом случае таковы:

$$\begin{aligned} \text{---}\text{---} &= \frac{i}{p^2}, \\ \text{---}\times\text{---} &= -im^2. \end{aligned}$$

Полный пропагатор имеет вид

$$\begin{aligned} \text{---}\bigcirc\text{---} &= \text{---}\text{---} + \text{---}\times\text{---} + \text{---}\times\times\text{---} + \dots = \\ &= \frac{i}{p^2} + \frac{i}{p^2} (-im^2) \frac{i}{p^2} + \frac{i}{p^2} (-im^2) \frac{i}{p^2} (-im^2) \frac{i}{p^2} + \dots = \\ &= \frac{i}{p^2 - m^2}, \end{aligned}$$

т. е. является обычным пропагатором *массивного* поля.


Аналогичным образом можно рассмотреть величину $\Gamma^{(4)}$. Как видно из соотношения (9.30), величина $\Gamma^{(4)}$, соответствующая лагранжиану (9.14), вычисленная с точностью до g^2 , расходится при $\epsilon \rightarrow 0$:

$$\begin{aligned} \text{---}\bigcirc\text{---} &= \text{---}\times\text{---} + \text{---}\bigcirc\text{---} + \text{---}\times\text{---} + \dots \\ &= -ig\mu^4 \left(1 - \frac{3g}{16\pi^2\epsilon} \right) + \text{конечная часть.} \end{aligned} \tag{2 кроссчлена} =$$

Таким образом, добавляя контрчлен

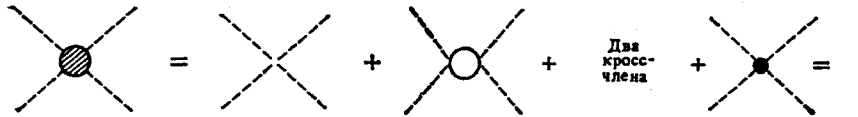
$$\delta\mathcal{L}_2 = -\frac{1}{4!} \frac{3g^2\mu^4}{16\pi^2\epsilon} \varphi^4 = -\frac{Bg\mu^4}{4!} \varphi^4$$

к лагранжиану, мы получаем дополнительное взаимодействие с соответствующим правилом Фейнмана:



$$-\frac{3ig^2\mu^4}{16\pi^2\epsilon}$$

благодаря которому величина $\Gamma^{(4)}$ становится конечной:



$$= -ig\mu^4 + \text{конечная часть.} \quad (9.54)$$

Наконец, расходимость величины $\Gamma^{(2)}$ на 2-петлевом уровне, описанная (но недоказанная) выше, приводила к необходимости умножения величин $\Gamma^{(n)}$ на величину $Z_\varphi^{n/2}$. Это, очевидно, эквивалентно добавлению к лагранжиану контрчлена вида

$$\delta\mathcal{L}_3 = \frac{A}{2} (\partial_\mu \varphi)^2,$$

где $1 + A = Z_\varphi$. Конечные функции Грина можно теперь получить, добавляя к лагранжиану \mathcal{L} контрчлены \mathcal{L}_{CT} :

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \varphi)^2 - \frac{m^2}{2} \varphi^2 - \frac{g\mu^4}{4!} \varphi^4, \quad (9.55)$$

$$\mathcal{L}_{\text{CT}} = \frac{A}{2} (\partial_\mu \varphi)^2 - \frac{\delta m^2}{2} \varphi^2 - \frac{Bg\mu^4}{4!} \varphi^4. \quad (9.56)$$

Полный лагранжиан, который называют «голым лагранжианом» \mathcal{L}_B , равен

$$\mathcal{L}_B = \mathcal{L} + \mathcal{L}_{\text{CT}} = \left(\frac{1+A}{2}\right) (\partial_\mu \varphi)^2 - \frac{(m^2 + \delta m^2)}{2} \varphi^2 - (1+B) \frac{g\mu^4}{4!} \varphi^4. \quad (9.57)$$

Таким образом, добавление контрчленов эквивалентно умножению величин φ , m и g на «перенормировочные множители» Z , т. е. если ввести по определению голые величины

$$\varphi_B = \sqrt{Z_\varphi} \varphi, \quad Z_\varphi = 1 + A, \\ m_B = Z_m m, \quad Z_m^2 = \frac{m^2 + \delta m^2}{1 + A}, \quad (9.58)$$

$$g_B = \mu^4 Z_g g, \quad Z_g = \frac{1+B}{(1+A)^2},$$

то голый лагранжиан будет иметь вид

$$\mathcal{L}_B = \frac{1}{2} (\partial_\mu \varphi_B)^2 - \frac{m_B^2}{2} \varphi_B^2 - \frac{g_B}{4!} \varphi_B^4. \quad (9.59)$$

На языке контрчленов теория является перенормируемой, если контрчлены, необходимые для того, чтобы сократить расходимости в каждом порядке теории возмущений, имеют *тот же вид*, что и члены, входящие в исходный лагранжиан. Если это имеет место, то «голые величины» могут быть определены при помощи (бесконечных) перенормировочных множителей, как это было сделано выше. При этом голый лагранжиан имеет тот же вид, что и исходный. Более того, голый лагранжиан является «истинным» лагранжианом теории, и из него получаются конечные физические величины в любом порядке.

§ 9.4. Ренормализационная группа

Мы изучили перенормировку теории φ^4 . В рамках техники размерной регуляризации мы видели, что необходимо ввести в теорию новый параметр μ , имеющий размерность массы. Зависимость перенормированной 1ЧН-функции от $\Gamma_r^{(n)}$ описывается соотношением (9.48) и обусловлена зависимостью Z_φ от μ . Иными словами, перенормированная функция $\Gamma^{(n)}$, определяемая соотношением (9.49), не зависит от μ и, следовательно, *инвариантна* относительно группы преобразований

$$\mu \rightarrow e^{\epsilon} \mu. \quad (9.60)$$

Эти преобразования образуют *ренормализационную группу*. Вводя безразмерный дифференциальный оператор $\mu(\partial/\partial\mu)$, мы будем иметь

$$\mu \frac{\partial}{\partial\mu} \Gamma^{(n)} = 0, \quad (9.61)$$

или, учитывая (9.49),

$$\mu \frac{d}{d\mu} [Z_\varphi^{-n/2} (g\mu^4) \Gamma_r^{(n)}(p_i, g_r, m_r, \mu)] = 0, \quad (9.62)$$

где g_r и m_r зависят от μ . Производя дифференцирование в (9.62) и умножая на $Z_\varphi^{n/2}$, получаем

$$\left[-n\mu \frac{\partial}{\partial \mu} \ln \sqrt{Z_\varphi} + \mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \mu \frac{\partial g_r}{\partial \mu} \frac{\partial}{\partial g_r} + \mu \frac{\partial m_r}{\partial \mu} \frac{\partial}{\partial m_r} \right] \Gamma_r^{(n)} = 0. \quad (9.63)$$

В дальнейшем ради простоты мы будем писать g вместо g_r , m вместо m_r и $\Gamma^{(n)}$ вместо $\Gamma_r^{(n)}$, т. е. будем иметь дело только с перенормированными величинами, несмотря на то что это не указано явно в обозначениях. Определим величины

$$\begin{aligned} \gamma(g) &= \mu \frac{\partial}{\partial \mu} \ln \sqrt{Z_\varphi}, \\ \beta(g) &= \mu \frac{\partial g}{\partial \mu}, \\ m\gamma_m(g) &= \mu \frac{\partial m}{\partial \mu}. \end{aligned} \quad (9.64)$$

Тогда уравнение (9.63) принимает вид

$$\left[\mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \beta(g) \frac{\partial}{\partial g} - n\gamma(g) + m\gamma_m(g) \frac{\partial}{\partial m} \right] \Gamma^{(n)} = 0. \quad (9.65)$$

Это уравнение ренормализационной группы (уравнение РГ). Оно выражает инвариантность перенормированной функции $\Gamma^{(n)}$ относительно замены параметра регуляризации μ .

Запишем теперь аналогичное уравнение, выражающее инвариантность функции $\Gamma^{(n)}$ относительно изменения масштаба. Пусть производится замена $p \rightarrow tp$, $m \rightarrow tm$, $\mu \rightarrow t\mu$. Функция $\Gamma^{(n)}$ имеет массовую размерность D , определяемую соотношением (см. табл. 9.1, в которой 1ЧН-функция обозначена через $\bar{\Gamma}^{(n)}$)

$$D = d + n \left(1 - \frac{d}{2} \right) = 4 - n + \varepsilon \left(\frac{n}{2} - 1 \right), \quad (9.66)$$

где $d = 4 - \varepsilon$. Тогда

$$\begin{aligned} \Gamma^{(n)}(tp_i, g, m, \mu) &= t^D \Gamma^{(n)}(p_i, g, t^{-1}m, t^{-1}\mu) = \\ &= \mu^D F \left(g, \frac{t^2 p_i^2}{m\mu} \right) \end{aligned} \quad (9.67)$$

и, следовательно,

$$\left(t \frac{\partial}{\partial t} + m \frac{\partial}{\partial m} + \mu \frac{\partial}{\partial \mu} - D \right) \Gamma^{(n)} = 0. \quad (9.68)$$

Исключая величину $\mu(\partial\Gamma/\partial\mu)$ из уравнений (9.65) и (9.68), получаем

$$\begin{aligned} \left[-t \frac{\partial}{\partial t} + \beta \frac{\partial}{\partial g} - n\gamma(g) + m(\gamma_m(g) - 1) \frac{\partial}{\partial m} + D \right] \Gamma^{(n)} \times \\ \times (tp, g, m, \mu) = 0. \end{aligned} \quad (9.69)$$

Это уравнение непосредственно выражает результат изменения масштаба импульсов, от которых зависит функция $\Gamma^{(n)}$, в t раз. Заметим, что если $\beta = \gamma(g) = \gamma_m(g) = 0$, то этот результат просто будет определяться канонической размерностью D , как и следовало бы ожидать, исходя из наивного масштабного анализа. Необходимость рассмотрения перенормировок и, следовательно, отличных от нуля функций β , $\gamma(g)$ и $\gamma_m(g)$ и связанное с ними отклонение от чисто масштабного поведения функций Грина — все это результат включения взаимодействия. Заметим, в частности, что в случае безмассовой теории лагранжиан масштабно-инвариантен, однако функции Грина не являются инвариантными, поскольку β и $\gamma(g)$ отличны от нуля. Они дают вклад в так называемые аномальные размерности. Таким образом, причина возникновения аномальных размерностей заложена глубоко: перенормировка неизбежно вносит масштаб либо в виде массы μ при размерной регуляризации, либо в виде параметра обрезания импульсов Λ при регуляризации обрезания, так что даже масштабно-инвариантная классическая теория не приводит к масштабно-инвариантной квантовой теории.

Найдем решение уравнения (9.69). Это уравнение выражает тот факт, что изменение величины t может быть скомпенсировано за счет изменения величин m и g и общего множителя. Таким образом, мы предполагаем, что имеются функции $g(t)$, $m(t)$ и $f(t)$, такие, что

$$\Gamma^{(n)}(tp, m, g, \mu) = f(t) \Gamma^{(n)}(p, m(t), g(t), \mu). \quad (9.70)$$

Дифференцируя по t , получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \Gamma^{(n)}(tp, m, g, \mu) &= \frac{df}{dt} \Gamma^{(n)}(p, m(t), g(t), \mu) + \\ &+ f(t) \left(\frac{\partial m}{\partial t} \frac{\partial \Gamma^{(n)}}{\partial m} + \frac{\partial g}{\partial t} \frac{\partial \Gamma^{(n)}}{\partial g} \right), \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} t \frac{\partial}{\partial t} \Gamma^{(n)}(tp, m, g, \mu) &= \\ &= \left(t \frac{df}{dt} + f(t) t \frac{\partial m}{\partial t} \frac{\partial}{\partial m} + f(t) t \frac{\partial g}{\partial t} \frac{\partial}{\partial g} \right) \Gamma^{(n)}(p, m(t), g(t), \mu) = \end{aligned}$$

$$= \left(t \frac{df}{dt} + tf(t) \frac{\partial m}{\partial t} \frac{\partial}{\partial m} + tf(t) \frac{\partial g}{\partial t} \frac{\partial}{\partial g} \right) \frac{1}{f(t)} \Gamma^{(n)}(tp, m, g, \mu).$$

Следовательно,

$$\left(-t \frac{\partial}{\partial t} + \frac{t}{f} \frac{df}{dt} + t \frac{\partial m}{\partial t} \frac{\partial}{\partial m} + t \frac{\partial g}{\partial t} \frac{\partial}{\partial g} \right) \Gamma^{(n)}(tp, m, g, \mu) = 0. \quad (9.71)$$

Сравним теперь уравнения (9.71) и (9.69). Приравнявая коэффициенты при $\partial/\partial g$, получаем

$$t \frac{\partial g(t)}{\partial t} = \beta(g). \quad (9.72)$$

Величина $g(t)$ называется *бегущей константой связи*. Зная функцию $\beta(g)$, можно найти $g(t)$. Особый интерес представляет собой асимптотика функции $g(t)$ при $t \rightarrow \infty$. Дополнительно к уравнению (9.72) мы имеем условие $g(1) = g$. Сравнение коэффициентов при $\partial/\partial m$ в обоих уравнениях дает

$$t \frac{\partial m}{\partial t} = m[\gamma_m(g) - 1], \quad (9.73)$$

а из сравнения оставшихся членов следует

$$\frac{t}{f} \frac{df}{dt} = D - n\gamma(g).$$

Последнее уравнение можно проинтегрировать и получить выражение

$$f(t) = t^D \exp \left[- \int_0^t \frac{n\gamma(g(t)) dt}{t} \right],$$

подставляя которое в (9.70) [учитывая (9.66) и переходя к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$], получаем

$$\Gamma^{(n)}(tp, m, g, \mu) = t^{4-n} \exp \left[-n \int_0^t \frac{\gamma(g(t)) dt}{t} \right] \times \Gamma^{(n)}(p, m(t), g(t), \mu). \quad (9.74)$$

Это решение РГ-уравнения (9.69), выраженное через бегущую константу связи $g(t)$ и бегущую массу $m(t)$. Экспоненциальный член представляет собой «аномальную размерность». Физика при больших импульсах определяется функциями $m(t)$ и $g(t)$. Ренормализационная группа может, в частности, использоваться для изучения поведения квантовой теории поля при больших (равно

как и при малых) импульсах. Соотношения типа (9.74) позволяют нам проводить расчеты вне области применимости теории возмущений. Рассмотрим ряд примеров поведения $g(t)$ и при $t \rightarrow \infty$, т. е. при больших импульсах, предполагая при этом, что соотношение (9.72) остается справедливым:

$$t \frac{\partial g(t)}{\partial t} = \beta(g(t)). \quad (9.72)$$

Сначала предположим, что кривая $\beta(g)$ имеет вид, показанный на рис. 9.3. Нули функции β при $g = 0$ и $g = g_0$ называются *фиксированными точками*. Далее мы можем видеть, что при $t \rightarrow \infty$ значения g , близкие к g_0 , стремятся к g_0 . Если $g < g_0$, то $\beta > 0$ и, следовательно, g возрастает с ростом t и приближается к значению g_0 . Если же $g > g_0$, то $\beta < 0$ и, следовательно, g убывает с ростом t , т. е. приближается к g_0 , двигаясь в *отрицательном* направлении. Таким образом, $g(\infty) = g_0$; g_0 называется *ультрафиолетовой стабильной* фиксированной точкой. С помощью аналогичных рассуждений убеждаемся в том, что если величина g мала, то при $t \rightarrow 0$ мы имеем $g \rightarrow 0$. При этом величину $g(0) = 0$ называют *инфракрасной стабильной* фиксированной точкой.

Теперь предположим, что функция $\beta(g)$ имеет вид, показанный на рис. 9.4. Снова имеются две фиксированные точки, однако знак β изменен на обратный, так что $g = g_0$ является инфракрасной стабильной фиксированной точкой, а $g = 0$ — ультрафиолетовой фиксированной точкой. В последнем случае ряды теории возмущений сходятся все быстрее по мере роста энергии. В пределе бесконечного импульса константа связи обращается в нуль. Это явление известно как *асимптотическая свобода*.

В качестве примера рассмотрим асимптотическое поведение в теории φ^4 , предполагая, что 2-петлевое выражение (9.39) для перенормированной константы связи достаточно надежно описывает асимптотический режим. Опуская конечные поправки, мы имеем далее

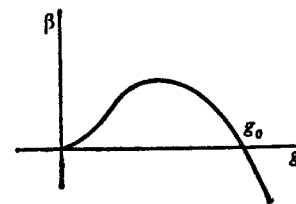


Рис. 9.3. Возможный вид β -функции; g_0 — ультрафиолетовая стабильная фиксированная точка, а $g = 0$ — инфракрасная стабильная фиксированная точка.

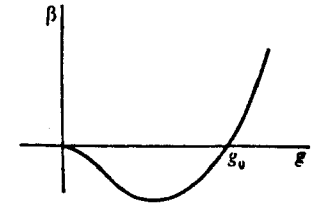


Рис. 9.4. Другой вид β -функции; g_0 — инфракрасная стабильная точка, а $g = 0$ — ультрафиолетовая стабильная точка, дающая асимптотическую свободу.

$$g_1 = g\mu^\epsilon \left(1 + \frac{3g}{16\pi^2\epsilon} \right), \quad (9.75)$$

так что

$$\mu \frac{\partial g_1}{\partial \mu} = \epsilon g\mu^\epsilon + \frac{3g^2}{16\pi^2} \mu^\epsilon.$$

Функция β дается соотношением (9.64), причем входящая в него величина g является *перенормированной* константой связи и совершен переход к пределу при $\epsilon \rightarrow 0$. Таким образом, мы получаем

$$\beta(g) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \mu \frac{\partial g_1}{\partial \mu} = \frac{3g^2}{16\pi^2} > 0. \quad (9.76)$$

Введем переменную $s = \ln t$; тогда $t(\partial/\partial t) = \partial/\partial s$ и уравнение (9.72) принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial s} g(s) = \beta(g(s)). \quad (9.77)$$

Мы видим, что эффективная (бегущая) константа связи возрастает с ростом s , т. е. с ростом импульса, и, следовательно, теория ϕ^4 не является асимптотически свободной. В действительности легко видеть, что решение уравнения (9.76) имеет вид

$$g = \frac{g_0}{1 - ag_0 \ln(\mu/\mu_0)},$$

где $a = 3/16\pi^2$, т. е. g возрастает с ростом μ .

До сих пор в настоящей главе мы рассматривали перенормировку теории ϕ^4 в надежде, что идеи и технику, необходимые для проведения перенормировки, можно понять на простом примере, не отягощенном другими деталями, которые должна включать теория, описывающая реальный мир. Однако мы ни в коей степени не исчерпали предмет перенормировок и ренормализационной группы. В частности, мы не касались таких важных вопросов, как зависящие и не зависящие от массы рецепты перенормировки и уравнение Каллана — Симанзика — аналогичное ренормгрупповому уравнению. Поскольку данная книга носит вводный характер, автор не сожалеет об этом и предлагает перейти к рассмотрению реального мира в первую очередь на примере квантовой электродинамики.

§ 9.5. Расходимости и размерная регуляризация в КЭД

КЭД описывает только фотоны и электроны. Несколько типов диаграмм Фейнмана расходятся, например диаграммы, соответствующие собственной энергии электрона и фотона, изображенные на

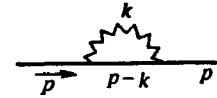


Рис. 9.5. Диаграмма собственной энергии электрона.

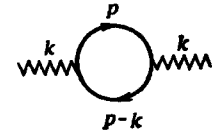


Рис. 9.6. Диаграмма собственной энергии фотона.

рис. 9.5 и 9.6. Мы рассмотрим эти диаграммы таким же систематическим образом, как и в случае теории ϕ^4 , и покажем, что существует лишь конечное число примитивно расходящихся диаграмм и, следовательно, КЭД в принципе является перенормируемой теорией. Мы регуляризуем фейнмановские интегралы, используя вновь метод размерной регуляризации (в случае неабелевых калибровочных теорий регуляризация Паули — Вилларса не сохраняет калибровочную инвариантность, так что проще всего повсюду пользоваться размерной регуляризацией). В последующих разделах мы увидим явно, как КЭД перенормируется в порядке ϵ^2 (одна петля) и как тождество Уорда гарантирует перенормируемость КЭД во всех порядках. Таким образом, мы начинаем с анализа расходимостей фейнмановских интегралов.

Общая формула для условной степени расходимости D фейнмановского графа в d -мерном пространстве-времени аналогична соотношению (9.3):

$$D = dL - 2P_i - E_i, \quad (9.78)$$

где

$$\begin{aligned} L & \text{ — число петель,} \\ P_i & \text{ — число внутренних фотонных линий,} \\ E_i & \text{ — число внутренних электронных линий,} \\ d & \text{ — размерность пространства-времени.} \end{aligned} \quad (9.79)$$

Кроме того, положим

$$\begin{aligned} n & \text{ — число вершин,} \\ P_e & \text{ — число внешних фотонных линий,} \\ E_e & \text{ — число внешних электронных линий.} \end{aligned} \quad (9.80)$$

Как и ранее, L — число независимых импульсов, по которым ведется интегрирование, = число внутренних линий $-n$ (что следует из сохранения импульса в каждой вершине) + 1 (что следует из сохранения полного импульса, которое имеет место в любом случае):

$$L = E_i + P_i - n + 1. \quad (9.81)$$

Каждая вершина имеет два электронных конца. Если концы внеш-

ние, то они учитываются один раз, если внутренние — то дважды; следовательно,

$$2n = E_e + 2E_i. \tag{9.82}$$

Аналогичное соотношение для фотонов, очевидно, имеет вид

$$n = P_e + 2P_i. \tag{9.83}$$

Из соотношений (9.78) и (9.81) следует

$$D = (d - 1)E_i + (d - 2)P_i - d(n - 1).$$

Подставляя сюда значения E_i и P_i из (9.82) и (9.83), имеем

$$D = d + n \left(\frac{d}{2} - 2 \right) - \left(\frac{d-1}{2} \right) E_e - \left(\frac{d-2}{2} \right) P_e. \tag{9.84}$$

При $d = 4$ получаем отсюда соотношение

$$D = 4 - \frac{3E_e}{2} - P_e. \tag{9.85}$$

показывающее, что D не зависит от n , что является необходимым условием перенормируемости.

Проверим соотношение (9.85) в случае двух диаграмм собственной энергии. Диаграмме собственной энергии электрона (рис. 9.5) соответствует $E_e = 2$, $P_e = 0$; следовательно, $D = 1$. Правила Фейнмана дают выражение

$$-i \Sigma(p) = (-ie)^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \gamma^\mu \frac{i}{\widehat{p-k-m}} \frac{-ig_{\mu\nu}}{k^2} \gamma^\nu, \tag{9.86}$$

которое содержит четвертую степень k в числителе и третью степень k в знаменателе, т. е. $D = 1$, как и предсказывалось. Диаграмма собственной энергии фотона (см. рис. 9.6) соответствует $E_e = 2$, $P_e = 0$; следовательно, $D = 2$. Собственная энергия фотона обозначается через $\Pi_{\mu\nu}$, ее называют также *поляризацией вакуума*. В отличие от собственной энергии электрона эта величина не имеет классического аналога. Правила Фейнмана дают

$$i\Pi^{\mu\nu}(k) = -(-ie)^2 \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left(\gamma^\mu \frac{i}{\widehat{p-m}} \gamma^\nu \frac{i}{\widehat{p-k-m}} \right). \tag{9.87}$$

Общий знак минус в правой части этого выражения обязан своим происхождением замкнутой фермионной петле. Ясно, что этот интеграл квадратично расходится, как и было предсказано. Заметим, что этот граф дает модифицированный фотонный пропагатор и в фейнмановской калибровке в однопетлевом приближении мы имеем

$$iD'_{\mu\nu}(k) = -i \frac{g_{\mu\nu}}{k^2} + \left(\frac{-ig_{\mu\alpha}}{k^2} \right) i\Pi^{\alpha\beta}(k) \left(\frac{-ig_{\beta\nu}}{k^2} \right) =$$

$$= \text{---} \text{---} \text{---} + \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \tag{9.88}$$

Хотя графы, соответствующие собственной энергии электрона и фотона, условно расходятся соответственно линейно и квадратично, в действительности они оба, как мы увидим ниже, расходятся лишь логарифмически.

Эти графы собственной энергии являются *примитивно расходящимися*. Мы должны ответить на вопрос: существуют ли в КЭД другие примитивно расходящиеся графы? В действительности существуют еще три таких графа. Первым из них является вершинный граф, изображенный на рис. 9.7. Ему соответствуют значения $E_e = 2$, $P_e = 1$, и из (9.85) следует, что $D = 0$, т. е. это логарифмическая расходимость. Правила Фейнмана дают выражение [ср. с формулой (7.127)]

$$-ie \Lambda_\mu(p, q, p+q) =$$

$$= (-ie)^3 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{-ig_{\rho\sigma}}{(k+p)^2} \gamma^\rho \frac{i}{\widehat{k-q-m}} \gamma_\mu \frac{i}{\widehat{k-m}} \gamma^\sigma, \tag{9.89}$$

которое действительно расходится логарифмически. Как этот вершинный граф, так и два графа собственной энергии, рассмотренные выше, обладают тем свойством, что устранение расходимостей в них приводит к переопределению различных физических величин, а именно массы электрона, нормировки его волновой функции и электрического заряда. Иными словами, не требуется вводить в лагранжиан дополнительные члены такого вида, который не присутствует уже в исходном лагранжиане. Однако две остающиеся примитивно расходящиеся диаграммы могут представить серьезную угрозу перенормируемости КЭД. Первая из них — это 3-фотонная связь, изображенная на рис. 9.8. Ей соответствуют



Рис. 9.7. Вершинная диаграмма.

Рис 9.8. Трехфотонная вершина.

значения $E_e = 0, P_e = 3$ и, следовательно, $D = 1$. Однако оказывается, что этот граф сокращается с аналогичным графом, в котором направления электронных стрелок изменены на противоположные¹⁾, и их поэтому можно опустить. Описанная ситуация составляет содержание теоремы Фарри, которая в действительности следует из C -инвариантности лагранжиана. Лагранжиан \mathcal{L} инвариантен относительно зарядового сопряжения:

$$\psi \rightarrow \psi^c = C\bar{\psi}^T, A_\mu \rightarrow -A_\mu.$$

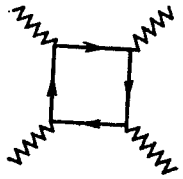


Рис. 9.9. Рассеяние света на свете.

откуда непосредственно следует, что функции Грина с нечетным числом внешних фотонных линий равны нулю (аналогичным образом в теории ϕ^4 лагранжиан инвариантен относительно замены $\phi \rightarrow -\phi$, и, следовательно, функции Грина с нечетным числом внешних ϕ -линий равны нулю). Вторая диаграмма, которая может нарушить перенормируемость, изображена на рис. 9.9. Она соответствует рассеянию света на свете. В этом случае $E_e = 0, P_e = 4$,

т. е. $D = 0$ и граф условно логарифмически расходится. Он дает ненулевое сечение фотон-фотонного рассеяния — процесса, не имеющего классического аналога. Однако в действительности оказывается, что благодаря калибровочной инвариантности этот граф сходится и не вызывает трудностей.

Мы выделили в КЭД три примитивные расходимости, и теперь наша задача состоит в том, чтобы вычислить их, используя размерную регуляризацию. Сначала нам необходимо обобщить лагранжиан (7.100) (полагая $\alpha = 1$ и опуская члены, соответствующие источнику, которые здесь не являются необходимыми),

$$\mathcal{L} = i \bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi - m \bar{\psi} \psi - e A^\mu \bar{\psi} \gamma_\mu \psi - \frac{1}{4} (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)^2 - \frac{1}{2} (\partial_\mu A^\mu)^2,$$

на случай d измерений. Напомним, что массовая размерность лагранжиана \mathcal{L} равна d , т. е. $[\mathcal{L}] = d$; следовательно, если

$$[\psi] = \frac{d-1}{2}, [A_\mu] = \frac{d}{2} - 1,$$

то все члены в вышенаписанном лагранжиане, за исключением третьего, имеют правильную размерность. Чтобы третий член имел правильную размерность, мы должны умножить величину

¹⁾ Стрелки на диаграммах Фейнмана соответствуют направлению протекания заряда.

$$e \text{ на } \mu^{2-d/2}, \text{ где } \mu \text{ — произвольная масса. Таким образом, мы имеем}$$

$$\mathcal{L} = i \bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi - m \bar{\psi} \psi - e \mu^{2-d/2} A^\mu \bar{\psi} \gamma_\mu \psi - \frac{1}{4} (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)^2 - \frac{1}{2} (\partial_\mu A^\mu)^2. \quad (9.90)$$

Напомним, что обобщение на d измерений должно производиться только для внутренних линий и, следовательно, внешние волновые функции, например $u(p)$, можно оставить в 4-мерном виде. Нам осталось рассмотреть определение алгебры матриц Дирака в d измерениях. Мы имеем

$$\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = 2g_{\mu\nu}, \quad (9.91)$$

где $g_{\mu\nu}$ — метрический тензор в d -мерном пространстве Минковского (с сигнатурой $+\dots$); следовательно, $\delta_\mu^\mu = d$ и $\gamma^\mu \gamma_\mu = d, \gamma_\mu \gamma_\nu \gamma^\mu = (2-d)\gamma_\nu$.

Кроме того,

$$\text{Tr (нечетного числа } \gamma\text{-матриц)} = 0, \quad (9.93)$$

$$\text{Tr } I = f(d), \text{ Tr } \gamma_\mu \gamma_\nu = f(d)g_{\mu\nu}, \quad (9.94)$$

$$\text{Tr } \gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\rho \gamma_\lambda = f(d)(g_{\mu\nu}g_{\rho\lambda} - g_{\mu\rho}g_{\nu\lambda} + g_{\mu\lambda}g_{\nu\rho}), \quad (9.95)$$

где $f(d)$ — произвольная функция, обладающая хорошим поведением и подчиненная условию $f(4) = 4$; ее явный вид несуществен. Мы не можем определить в d измерениях аналог матрицы γ_5 . В четырех измерениях имеем

$$\gamma_5 = \frac{i}{4!} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\rho \gamma_\sigma, \quad (9.96)$$

однако символ Леви — Чивиты $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ определен только при $d = 4$. Эта трудность связана с проблемой киральных аномалий, которым посвящен § 9.10.

Рассмотрим теперь примитивно расходящиеся диаграммы, начиная с графа собственной энергии фермиона, изображенного на рис. 9.5. Выражение (9.86) следующим образом обобщается на d измерений:

$$\text{---} \text{---} \text{---} = \Sigma(p) = -ie^2 \mu^{4-d} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \gamma_\mu \widehat{p-k-m} \gamma_\nu \frac{g^{\mu\nu}}{k^2} =$$

$$= -i e^2 \mu^{4-d} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{\gamma_\mu (\widehat{p} - \widehat{k} + m) \gamma^\mu}{[(p-k)^2 - m^2] k^2}.$$

Вводя параметр Фейнмана z [см. (9.22)], получаем выражение

$$\Sigma(p) = -i \mu^{4-d} e^2 \int_0^1 dz \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{\gamma_\mu (\widehat{p} - \widehat{k} + m) \gamma^\mu}{[(p-k)^2 z - m^2 z + k^2 (1-z)]^2}.$$

Введем по определению $k' = k - pz$, это дает

$$\Sigma(p) = -i \mu^{4-d} e^2 \int_0^1 dz \int \frac{d^d k'}{(2\pi)^d} \frac{\gamma_\mu (\widehat{p} - \widehat{p}z - \widehat{k}' + m) \gamma^\mu}{[k'^2 - m^2 z + p^2 z(1-z)]^2}.$$

Интеграл от члена, линейного по k' , равен нулю, следовательно,

$$\Sigma(p) = -i \mu^{4-d} e^2 \int_0^1 dz \gamma_\mu (\widehat{p} - \widehat{p}z + m) \gamma^\mu \times \\ \times \int \frac{d^d k'}{(2\pi)^d} \frac{1}{[k'^2 - m^2 z + p^2 z(1-z)]^2}.$$

Заметим, что в четырех измерениях интеграл по импульсному пространству, как и утверждалось выше, расходится логарифмически, а не линейно. Интеграл берется с помощью формулы (9А.5), что дает

$$\Sigma(p) = \mu^{4-d} e^2 \frac{\Gamma(2-d/2)}{(4\pi)^{d/2}} \int_0^1 dz \gamma_\mu [\widehat{p}(1-z) + m] \gamma^\mu \times \\ \times [m^2 z - p^2 z(1-z)]^{d/2-2}.$$

В точке $d = 4$ величина $\Gamma(2-d/2)$ имеет полюс. Полагая $\epsilon = 4-d$ и используя равенства (9.24) и (9.92), получаем

$$\Sigma(p) = -\frac{e^2}{16\pi^2} \Gamma\left(\frac{\epsilon}{2}\right) \int_0^1 dz \left\{ 2\widehat{p}(1-z) - 4m - \right. \\ \left. - \epsilon [\widehat{p}(1-z) + m] \right\} \left(\frac{m^2 z - p^2 z(1-z)}{4\pi\mu^2} \right)^{-\epsilon/2} = \\ = \frac{e^2}{8\pi^2 \epsilon} (-\widehat{p} + 4m) + \frac{e^2}{16\pi^2} \left\{ \widehat{p}(1+\gamma) - 2m(1+2\gamma) + \right. \\ \left. + 2 \int_0^1 dz [\widehat{p}(1-z) - 2m] \ln \left(\frac{m^2 z - p^2 z(1-z)}{4\pi\mu^2} \right) \right\} =$$

$$= \frac{e^2}{8\pi^2 \epsilon} (-\widehat{p} + 4m) + \text{конечная часть.} \quad (9.97)$$

Вычислим теперь граф поляризации вакуума. Из соотношения (9.87) мы получаем в d измерениях

$$\Pi_{\mu\nu}(k) = i \mu^{4-d} e^2 \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \text{Tr} \left[\gamma_\mu \frac{1}{\widehat{p}-m} \gamma_\nu \frac{1}{\widehat{p}-\widehat{k}-m} \right] = \\ = i e^2 \mu^{4-d} \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \frac{\text{Tr} \left[\gamma_\mu (\widehat{p} + m) \gamma_\nu (\widehat{p} - \widehat{k} + m) \right]}{(p^2 - m^2) [(p-k)^2 - m^2]}.$$

Вводя фейнмановский параметр и полагая $p' = p - kz$, далее имеем

$$\Pi_{\mu\nu} = i e^2 \mu^{4-d} \int_0^1 dz \int \frac{d^d p'}{(2\pi)^d} \times \\ \times \frac{\text{Tr} \left[\gamma_\mu (\widehat{p}' + \widehat{k}z + m) \gamma_\nu (\widehat{p}' - \widehat{k}(1-z) + m) \right]}{[p'^2 - m^2 + k^2 z(1-z)]^2}.$$

Благодаря соотношению (9.93) и тому факту, что члены, нечетные по p' , не дают вклада в интеграл [это следует из формулы (9А.6)], числитель N в интеграле по импульсному пространству имеет вид

$$N = [p'^\alpha p'^\lambda - k^\alpha k^\lambda z(1-z)] \text{Tr} (\gamma_\mu \gamma_\alpha \gamma_\nu \gamma_\lambda) + m^2 \text{Tr} (\gamma_\mu \gamma_\nu)$$

или с учетом соотношений (9.94) и (9.95)

$$N = f(d) \{ 2p'_\mu p'_\nu - 2z(1-z) (k_\mu k_\nu - k^2 g_{\mu\nu}) - g_{\mu\nu} [p'^2 - m^2 - k^2 z(1-z)] \}.$$

Следовательно (полагая $p' \rightarrow p$), будем иметь

$$\Pi_{\mu\nu}(k) = i e^2 \mu^{4-d} f(d) \int_0^1 dz \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \times \\ \times \left\{ \frac{2p_\mu p_\nu}{[p^2 - m^2 + k^2 z(1-z)]^2} - \frac{2z(1-z) [k_\mu k_\nu - g_{\mu\nu} k^2]}{[p^2 - m^2 + k^2 z(1-z)]^2} - \right. \\ \left. - \frac{g_{\mu\nu}}{[p^2 - m^2 + k^2 z(1-z)]} \right\}.$$

Из соотношений (9А.5) и (9А.7) следует, что вклады первого и третьего членов в подынтегральном выражении взаимно уничто-

жаются. Средний член приводит к логарифмически (а не квадратично, см. выше) расходящемуся интегралу, который вычисляется с помощью соотношения (9А.5) [а также (9.24)]:

$$\Pi_{\mu\nu}(k) = \frac{e^2}{2\pi^2} (k_\mu k_\nu - g_{\mu\nu} k^2) \times \\ \times \left\{ \frac{1}{3\epsilon} - \frac{\gamma}{6} - \int_0^1 dz z(1-z) \ln \left[\frac{m^2 - k^2 z(1-z)}{4\pi\mu^2} \right] + O(\epsilon) \right\}.$$

Как и ожидалось, расходящаяся часть представляет собой полюс по ϵ . Конечная часть содержит члены, зависящие от k^2 , и, таким образом, при малых k^2 мы имеем

$$\Pi_{\mu\nu}(k) = \frac{e^2}{6\pi^2} (k_\mu k_\nu - g_{\mu\nu} k^2) \left(\frac{1}{\epsilon} + \frac{k^2}{10m^2} + \dots \right) = \\ = \frac{e^2}{6\pi^2\epsilon} (k_\mu k_\nu - g_{\mu\nu} k^2) + \text{конечная часть.} \quad (9.98)$$

Наконец, вычислим вершинный граф, изображенный на рис. 9.7. Соотношение (9.89) дает (заметим, что обозначения изменены)

$$-ie\mu^{2-d/2} \Lambda_\mu(p, q, p') = \\ = (-ie\mu^{2-d/2})^3 \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \gamma_\nu \frac{i}{\widehat{p}' - \widehat{k} - m} \gamma_\mu \frac{i}{\widehat{p} - \widehat{k} - m} \gamma_\rho \frac{-ig^{\nu\rho}}{k^2} = \\ = -(e\mu^{2-d/2})^3 \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{\gamma_\nu (\widehat{p}' - \widehat{k} + m) \gamma_\mu (\widehat{p} - \widehat{k} + m) \gamma^\rho}{k^2 [(p-k)^2 - m^2] [(p'-k)^2 - m^2]}.$$

Введем теперь 2-параметрическую формулу Фейнмана, аналогичную формуле (9.22) (из которой она легко выводится):

$$\frac{1}{abc} = 2 \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \frac{1}{[a(1-x-y) + bx + cy]^2}. \quad (9.99)$$

Это дает

$$\Lambda_\mu = \frac{2ie^2\mu^{4-d}}{(2\pi)^d} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int d^d k \times \\ \times \frac{\gamma_\nu (\widehat{p}' - \widehat{k} + m) \gamma_\mu (\widehat{p} - \widehat{k} + m) \gamma^\nu}{[k^2 - m^2(x+y) - 2k(px + p'y) + p^2x + p'^2y]^2}.$$

Далее, вводя импульс $k' = k - px - p'y$, получаем (переобозначив переменную интегрирования $k' \rightarrow k$)

$$\Lambda_\mu(p, q, p') = \frac{2ie^2\mu^{4-d}}{(2\pi)^d} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int d^d k \times \\ \times \frac{\gamma_\nu [\widehat{p}'(1-y) - \widehat{p}x - \widehat{k} + m] \gamma_\mu [\widehat{p}(1-x) - \widehat{p}'y - \widehat{k} + m] \gamma^\nu}{[k^2 - m^2(x+y) + p^2x(1-x) + p'^2y(1-y) - 2p \cdot p'xy]^2}. \quad (9.100)$$

Этот интеграл содержит как сходящуюся, так и расходящуюся часть. Часть числителя, квадратичная по k , расходится, оставшаяся часть сходится. Таким образом, мы полагаем

$$\Lambda_\mu = \Lambda_\mu^{(1)} + \Lambda_\mu^{(2)}. \quad (9.101)$$

Расходящаяся часть $\Lambda_\mu^{(1)}$ с помощью формулы (9А.7) может быть записана в виде

$$\Lambda_\mu^{(1)}(p, q, p') = \frac{e^2}{2} \mu^{4-d} \left(\frac{1}{4\pi} \right)^{d/2} \Gamma(2-d/2) \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \times \\ \times \frac{\gamma_\nu \gamma_\rho \gamma_\mu \gamma^\nu \gamma^\rho}{[m^2(x+y) + p^2x(1-x) + p'^2y(1-y) + 2p \cdot p'xy]^{2-d/2}}.$$

С помощью некоторой «диракологии», аналогичной соотношениям (9.92), имеем

$$\gamma_\nu \gamma_\rho \gamma_\mu \gamma^\nu \gamma^\rho = (2-d) \gamma_\rho \gamma_\mu \gamma_\sigma + 2(\gamma_\mu \gamma_\sigma \gamma_\rho - \gamma_\rho \gamma_\sigma \gamma_\mu),$$

следовательно,

$$\gamma_\nu \gamma_\rho \gamma_\mu \gamma^\nu \gamma^\rho = (2-d)^2 \gamma_\mu.$$

Полагая, как обычно, $\epsilon = 4-d$, так что $(2-d)^2 = 4-2\epsilon$, мы получаем

$$\Lambda_\mu^{(1)}(p, q, p') = \frac{e^2}{8\pi^2\epsilon} \gamma_\mu + \text{конечная часть.} \quad (9.102)$$

Сходящаяся часть Λ_μ — это часть, не содержащая k в числителе подынтегрального выражения. Поскольку она сходится, мы можем положить $d=4$ и произвести интегрирование по k , используя формулу (9А.5), что дает

$$\Lambda_\mu^{(2)}(p, q, p') = \frac{e^2}{16\pi^2} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \times \\ \times \frac{\gamma_\nu [\widehat{p}'(1-y) - \widehat{p}x + m] \gamma_\mu [\widehat{p}(1-x) - \widehat{p}'y + m] \gamma^\nu}{m^2(x+y) - p^2x(1-x) - p'^2y(1-y) + 2p \cdot p'xy}. \quad (9.103)$$

Теперь мы имеем явные выражения для трех примитивно расходящихся диаграмм в КЭД и нашли три расходящихся члена и один сходящийся член. В следующем параграфе мы увидим, что расходящиеся члены могут быть сокращены контрчленами в лагранжиане и последующей перенормировкой. Сходящийся член дает аномальный магнитный момент электрона.

§ 9.6. Однопетлевая перенормировка в КЭД

Суммируем для удобства расходящиеся члены, найденные выше:

$$\Sigma(p) = \frac{e^2}{8\pi^2\epsilon} (-\hat{p} + 4m) + \text{конечная часть}, \quad (9.97)$$

$$\Pi_{\mu\nu}(k) = \frac{e^2}{6\pi^2\epsilon} (k_\mu k_\nu - g_{\mu\nu} k^2) + \text{конечная часть}, \quad (9.98)$$

$$\Lambda_\mu^{(1)}(p, q, p') = \frac{e^2}{8\pi^2\epsilon} \gamma_\mu + \text{конечная часть}. \quad (9.102)$$

Попутно заметим, что приведенные расходящиеся части Σ и Λ удовлетворяют тождеству Уорда (7.124). В § 7.4 с помощью явного вычисления мы убедились, что тождество Уорда удовлетворяется с точностью до e^2 (т. е. с точностью до однопетлевого приближения). Здесь мы видим, что размерная регуляризация сохраняет тождество Уорда.

Выясним теперь, какие контрчлены необходимо добавить к \mathcal{L} , чтобы сделать вышеприведенные величины конечными. Начнем с собственной энергии электрона, которая, как мы видели в (7.121), модифицирует обратный пропагатор электрона следующим образом:

$$\begin{aligned} \Gamma^{(2)}(p) &= S_F'(p)^{-1} = S_F(p)^{-1} - \Sigma(p) = \\ &= \hat{p} - m - \frac{e^2}{8\pi^2\epsilon} (-\hat{p} + 4m) = \hat{p} \left(1 + \frac{e^2}{8\pi^2\epsilon}\right) - m \left(1 + \frac{e^2}{2\pi^2\epsilon}\right). \end{aligned} \quad (9.104)$$

(Заметим, что мы опустили конечные поправки. Это соответствует «минимальному вычитанию».) Поскольку коэффициенты при \hat{p} и m не равны друг другу, нам необходимы два контрчлена: один для полной величины пропагатора, дающий вклад в нормировку волновой функции, электрона, а другой для массы электрона. Таким образом, к величине

$$\mathcal{L}_1 = i\bar{\psi}\hat{\partial}\psi - m\bar{\psi}\psi$$

мы добавляем

$$(\mathcal{L}_1)_{\text{CT}} = iB\bar{\psi}\hat{\partial}\psi - A\bar{\psi}\psi, \quad (9.105)$$

что приводит к следующему (голому) лагранжиану:

$$(\mathcal{L}_1)_B = i(1+B)\bar{\psi}\hat{\partial}\psi - (m+A)\bar{\psi}\psi, \quad (9.106)$$

где A и B выбраны таким образом, чтобы электронный пропагатор был конечным с точностью до e^2 :

$$\text{---} \bigcirc \text{---} = \text{---} + \frac{\text{---} \text{---} \text{---}}{-i\Sigma(p)} + \frac{\text{---} \text{---} \text{---}}{-iA} + \frac{\text{---} \text{---} \text{---}}{iB\hat{p}} \quad (9.107)$$

(Легко убедиться, что благодаря «взаимодействию» $iB\hat{p}$ пропагатор $1/\hat{p}$ заменяется на $i/(1+B)\hat{p}$.) Следовательно,

$$\frac{e^2}{8\pi^2\epsilon} (-\hat{p} + 4m) + A - B\hat{p} = \text{конечная величина}, \quad (9.108)$$

откуда, опуская конечные члены, получаем

$$A = -\frac{me^2}{2\pi^2\epsilon}, \quad (9.109)$$

$$B = -\frac{e^2}{8\pi^2\epsilon},$$

$$Z_2 = 1 + B = 1 - \frac{e^2}{8\pi^2\epsilon}. \quad (9.110)$$

Если определить «голую» волновую функцию

$$\psi_B = \sqrt{Z_2} \psi, \quad (9.111)$$

то мы можем записать голый лагранжиан (9.106) в виде

$$(\mathcal{L}_1)_B = i\bar{\psi}_B \hat{\partial} \psi_B - m_B \bar{\psi}_B \psi_B, \quad (9.112)$$

где голая масса m_B дается соотношением

$$\begin{aligned} m_B &= Z_2^{-1} (m + A) = m \left(1 - \frac{e^2}{2\pi^2\epsilon}\right) \left(1 + \frac{e^2}{8\pi^2\epsilon}\right) = \\ &= m \left(1 - \frac{3e^2}{8\pi^2\epsilon}\right) = m + \delta m. \end{aligned} \quad (9.113)$$

Поскольку пропагатор является фурье-образом вакуумного среднего хронологического произведения полей, «голый» пропагатор есть фурье-образ величины

$$\langle 0 | T(\bar{\psi}_B \psi_B) | 0 \rangle = Z_2 \langle 0 | T(\bar{\psi} \psi) | 0 \rangle.$$

Таким образом, вспоминая, что в данной трактовке перенормировок, основанной на контрчленах, символ ψ относится к *физическому* электрону (т. е. взаимодействия учтены), а ψ_B относится к голому электрону, мы видим, что величина Z_2^{-1} равна вероятности обнаружить распространяющийся голый электрон при рассмотрении распространяющегося физического электрона. При нашем не совсем строгом анализе в качестве *перенормированной* волновой функции электрона и перенормированной массы электрона по существу можно взять «первоначальные» величины ψ и m . Однако это справедливо, только если мы опускаем конечные поправочные члены, как мы это делали выше. Действительно, опуская эти члены, мы тривиально получаем, что перенормированная 2-точечная вершина равна

$$\text{---} \bigcirc \text{---}^{-1} = \text{---}^{-1} - \frac{\text{---} \text{---} \text{---}}{-i\Sigma(p)} - \frac{\text{---} \times \text{---}}{-iA} - \frac{\text{---} \times \text{---}}{iB\hat{p}}$$

или

$$\begin{aligned} \Gamma^{(2)}(p) &= i(S_F'(p))^{-1} = \hat{p} - m - (\Sigma(p) + A - B\hat{p}) = \\ &= \hat{p} - m + \text{конечные члены}, \end{aligned} \quad (9.114)$$

где использовано равенство (9.108). Учет конечных членов, вообще говоря, дает значения перенормированной волновой функции и массы, отличные от ψ и m . Как указано в § 9.3, конечные члены определяются выбором импульсов, при которых различные вершинные функции обращаются в нуль. Однако, за исключением этого соображения, подход к перенормировкам, основанный на добавлении контрчленов к лагранжиану, является по существу противоположным по отношению к подходу к перенормировкам, впервые рассмотренному в § 9.3 и основанному на таком переопределении массы и других величин, при котором они конечны после учета взаимодействия. Для этого необходимо, чтобы голая масса (и другие величины) в первоначальном лагранжиане была бесконечной. В процедуре, основанной на контрчленах, мы исходим из физической (конечной) массы, и она остается конечной за счет добавления (бесконечных) контрчленов к \mathcal{L} . Получающаяся при этом голая масса m_B [например, определяемая соотношением (9.113)] совпадает с величиной, с которой мы начинали в первой процедуре перенормировок.

Обратимся теперь к тензору поляризации вакуума (9.98). Из

соотношения (9.88) следует, что с его помощью получается модифицированный фотонный пропагатор

$$\begin{aligned} D'_{\mu\nu}(k) &= D_{\mu\nu}(k) - D_{\mu\alpha}(k) \Pi^{\alpha\beta}(k) D_{\beta\nu} + \dots = \\ &= -\frac{g_{\mu\nu}}{k^2} - \frac{g_{\mu\alpha}}{k^2} \frac{e^2}{6\pi^2} \left[(k^\alpha k^\beta - g^{\alpha\beta} k^2) \times \right. \\ &\times \left. \left(\frac{1}{\epsilon} + \frac{k^2}{10m^2} \right) \right] \frac{g_{\beta\nu}}{k^2} + \dots = \\ &= -\frac{g_{\mu\nu}}{k^2} \left(1 - \frac{e^2}{6\pi^2\epsilon} - \frac{e^2}{60\pi^2} \frac{k^2}{m^2} \right) - \frac{e^2}{6\pi^2\epsilon} \frac{1}{k^2} \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} + \dots \end{aligned} \quad (9.115)$$

Мы использовали здесь выражение для $D_{\mu\nu}$ в фейнмановской калибровке. Заметим, что: 1) коэффициент при фейнмановской калибровочной части нового пропагатора содержит как бесконечную (при $\epsilon \rightarrow 0$) часть, так и конечную (не зависящую от ϵ) часть, пропорциональную k^2 ; 2) получающийся в итоге пропагатор *не принадлежит* фейнмановской калибровке благодаря присутствию члена, пропорционального $k_\mu k_\nu$. Безусловно, физические величины являются калибровочно-инвариантными, и это их не затрагивает. Тем не менее бесконечные члены в $D'_{\mu\nu}$ должны быть устранены путем добавления контрчленов в исходный лагранжиан. Лагранжиан, дающий фейнмановский калибровочный пропагатор, равен

$$\mathcal{L}_2 = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{2} (\partial_\mu A^\mu)^2 = \frac{1}{2} A^\mu g_{\mu\nu} \square A^\nu. \quad (9.116)$$

Следовательно, требуемый контрчлен имеет вид

$$(\mathcal{L}_2)_{\text{ст}} = -\frac{C}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{E}{2} (\partial_\mu A^\mu)^2. \quad (9.117)$$

Константы C и E должны быть различными с учетом замечания (2), сделанного выше. В результате голый лагранжиан имеет вид

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}_2)_B &= -\left(\frac{1+C}{4} \right) F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \text{калибровочные члены} = \\ &= -\frac{Z_3}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \text{калибровочные члены}, \end{aligned} \quad (9.118)$$

где

$$Z_3 = 1 - \frac{e^2}{6\pi^2\epsilon}. \quad (9.119)$$

Таким образом, лагранжиан $(\mathcal{L}_2)_B$ дает конечный фотонный пропагатор с точностью до e^2 .

В результате учета графа собственной энергии электрона масса голого электрона отличалась от физической массы. Произойдет ли здесь то же самое? Иными словами, приобретает ли фотон конечную массу благодаря собственно-энергетическому вкладу поляризации вакуума? Излишне говорить, что это было бы катастрофично для теории, однако в действительности этого не происходит по той причине, что величина $\Pi_{\mu\nu}(k)$ имеет вид [ср. (9.98)]

$$\Pi^{\alpha\beta}(k) = (k^\alpha k^\beta - g^{\alpha\beta} k^2) \Pi(k^2). \quad (9.120)$$

Данное выражение в свою очередь получается вследствие условия, которое налагает калибровочная инвариантности

$$k_\alpha \Pi^{\alpha\beta}(k) = 0, \quad (9.121)$$

и (9.120) является наиболее общей лоренц-ковариантной структурой, согласующейся с последним условием. Подстановка (9.120) в (9.115) дает в однопетлевом приближении

$$D'_{\mu\nu} = D_{\mu\nu} - D_{\mu\alpha} (k^\alpha k^\beta - g^{\alpha\beta} k^2) \Pi(k^2) D_{\beta\nu},$$

и, следовательно, полагая $D_{\mu\nu} = -g_{\mu\nu}/k^2$, мы получаем

$$D'_{\mu\nu} = \frac{1}{k^2 [1 + \Pi(k^2)]} \left(-g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \Pi(k^2) \right) \quad (9.122)$$

Величина $\Pi(k^2)$ содержит расходимости. В размерной регуляризации мы имеем

$$\Pi(k^2) = \frac{e^2}{6\pi^2} \left(\frac{1}{\epsilon} + \frac{k^2}{10m^2} \right) = \frac{e^2}{6\pi^2\epsilon} + \Pi_f(k^2), \quad (9.123)$$

где $\Pi_f(k^2)$ — конечная величина, стремящаяся к нулю при $k^2 \rightarrow 0$. Полный пропагатор можно записать в виде

$$\begin{aligned} D'_{\mu\nu} &= \frac{-g_{\mu\nu}}{k^2 [1 + \Pi(k^2)]} + \text{калибровочные члены} = \\ &= \frac{-g_{\mu\nu}}{k^2 \left[1 + \frac{e^2}{6\pi^2\epsilon} + \Pi_f(k^2) \right]} + \text{калибровочные члены} = \\ &= \frac{-Z_3 g_{\mu\nu}}{k^2 [1 + \Pi_f(k^2)]} + \text{калибровочные члены}, \end{aligned} \quad (9.124)$$

где мы использовали (9.119). Однако лагранжиан (9.118), содержащий контрчлены, подсказывает следующее определение голого поля:

$$A_B^\mu = Z_3^{1/2} A^\mu, \quad (9.125)$$

пропагатор которого $D'_{\mu\nu} \sim \langle 0 | T(A_{\mu B} A_{\nu B}) | 0 \rangle \sim Z_3 \langle 0 | T(A_\mu A_\nu) | 0 \rangle = Z_3 \tilde{D}'_{\mu\nu}$, где $\tilde{D}'_{\mu\nu}$ — перенормированный полный пропагатор. Согласно (9.124), он равен

$$\tilde{D}'_{\mu\nu} = \frac{-g_{\mu\nu}}{k^2 [1 + \Pi_f(k^2)]} + \text{калибровочные члены}. \quad (9.126)$$

(Мы используем обозначения $D'_{\mu\nu}$ и $\tilde{D}'_{\mu\nu}$ из книги Бьёркена и Дрелла [3].)

Таким образом, мы видим, что масса фотона остается равной нулю после перенормировки. Кроме того, как мы хотели и предвидели, перенормировка избавляет нас от бесконечных членов в пропагаторе $D'_{\mu\nu}$. Однако она не избавляет нас от конечного поправочного члена, пропорционального k^2 , который приводит к физическим эффектам. Если опустить калибровочные члены, то перенормированный пропагатор имеет вид

$$\tilde{D}'_{\mu\nu} = \frac{-g_{\mu\nu}}{k^2} \left[1 - \frac{e^2}{60\pi^2} \frac{k^2}{m^2} + O(k^4) \right]. \quad (9.127)$$

Поправочный член (так называемая поправка Улинга) приводит к изменению кулоновского потенциала в координатном пространстве. Потенциал, действующий между двумя зарядами e , расстояние между которыми равно r , имеет теперь вид

$$\frac{e^2}{4\pi r} + \frac{e^2}{60\pi^2 m^2} \delta^3(r).$$

Дополнительный член изменяет атомные энергетические уровни и вносит значительный вклад в величину лэмбовского сдвига, который снимает вырождение между уровнями $2S_{1/2}$ и $2P_{1/2}$. КЭД предсказывает, что уровень $2S_{1/2}$ лежит на 1057,9 МГц выше уровня $2P_{1/2}$. Поляризационный граф, рассмотренный выше, дает сюда отрицательный вклад, равный $-27,1$ МГц. Поскольку расхождение между теорией и экспериментом меньше 0,1 МГц, мы имеем блестящее подтверждение вышеизложенной теории.

Наконец, обратимся к вершинной функции и ее расходящейся части $\Lambda_\mu^{(1)}$, даваемой соотношением (9.102). Очевидно, что ее можно исключить, добавив к лагранжиану контрчлен

$$(\mathcal{L}_3)_{\text{ст}} = -De\mu^{2-d/2} \widehat{\psi} \hat{A} \psi, \quad (9.128)$$

где

$$D = -\frac{e^2}{8\pi^2\epsilon}. \quad (9.129)$$

вследствие чего

$$(\mathcal{L}_B)_V = -(1 + D) e\mu^{1/2} A^\mu \bar{\psi} \gamma_\mu \psi = -Z_1 e\mu^{1/2} A^\mu \bar{\psi} \gamma_\mu \psi, \quad (9.130)$$

где

$$Z_1 = 1 - \frac{e^2}{8\pi^2 \epsilon}. \quad (9.131)$$

Из соотношений (9.106), (9.118) и (9.130) следует, что полный голый лагранжиан КЭД (в однопетлевом приближении) имеет вид

$$\mathcal{L}_B = iZ_2 \bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi - (m + A) \bar{\psi} \psi - Z_1 e\mu^{1/2} A^\mu \bar{\psi} \gamma_\mu \psi - \frac{Z_3}{4} (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)^2 + \text{калибровочные члены}, \quad (9.132)$$

где

$$Z_1 = Z_2 = 1 - \frac{e^2}{8\pi^2 \epsilon}, \quad (9.133)$$

$$Z_3 = 1 - \frac{e^2}{6\pi^2 \epsilon}, \quad A = -\frac{me^2}{2\pi^2 \epsilon}.$$

Голый лагранжиан \mathcal{L}_B , отличающийся от первоначального лагранжиана (9.90), дает (в однопетлевом приближении) конечную собственную энергию и вершину, причем e и m обозначают экспериментальные значения заряда и массы. Альтернативно мы можем выразить \mathcal{L}_B через «голые» величины. Из соотношений (9.111), (9.113), (9.125) и следующего определения голого заряда e_B :

$$e_B = e\mu^{1/2} \frac{Z_1}{Z_2 Z_3^{1/2}} = e\mu^{1/2} Z_2^{-1/2} \quad (9.134)$$

мы получаем выражение для голого лагранжиана:

$$\mathcal{L}_B = i\bar{\psi}_B \gamma^\mu \psi_B - m_B \bar{\psi}_B \psi_B - e_B A_B^\mu \bar{\psi}_B \gamma_\mu \psi_B - \frac{1}{4} (\partial_\mu A_{B\nu} - \partial_\nu A_{B\mu})^2. \quad (9.135)$$

Таким образом, все бесконечные величины включены в голые величины. Тот факт, что мы смогли это сделать, а лагранжиан при этом сохранил первоначальную форму [соотношение (9.135) имеет такой же вид, как и (9.90)], означает, что в данном порядке КЭД перенормируема. Доказательство ее перенормируемости во всех порядках приводится в следующем параграфе. Мы закончим настоящий параграф, отметив два момента, представляющие менее формальный, но более физический интерес. Во-первых, конечный вклад $\Lambda_\mu^{(2)}$ в вершинную функцию имеет физическое следствие, выра-

жающееся в том, что дираковская частица обладает «аномальным» магнитным моментом, который мы можем вычислить. Во-вторых, применение метода ренормализационной группы к величине (9.134) позволяет предсказать асимптотическое поведение в КЭД.

Аномальный магнитный момент электрона

После того как мы с помощью перенормировки избавились от бесконечной части вершинной функции, обратимся к конечному вкладу $\Lambda_\mu^{(2)}$, определенному равенством (9.103). Напомним, что полная вершинная функция, заданная формулой (7.123), равна $\gamma_\mu + \Lambda_\mu$ и это выражение должно быть взято в спинорных обкладках $\bar{u}(p')$..., $u(p)$. Вначале мы покажем, что электромагнитный ток $\bar{u}(p') \gamma_\mu u(p)$ описывает частицу с «дираковским» магнитным моментом, которому соответствует значение $g_s = 2$ (см. § 2.6). Мы имеем определения (2.99) и (2.170)

$$\gamma_\mu \gamma_\nu + \gamma_\nu \gamma_\mu = 2g_{\mu\nu},$$

$$\gamma_\mu \gamma_\nu - \gamma_\nu \gamma_\mu = -2i\sigma_{\mu\nu}$$

и уравнения Дирака (2.140) и (2.141)

$$\gamma_\mu p^\mu u(p) = tu(p),$$

$$\bar{u}(p') \gamma_\mu p'^\mu = t\bar{u}(p').$$

Отсюда легко вывести, что

$$\gamma_\mu u(p) = \frac{1}{m} (p_\mu - i\sigma_{\mu\nu} p^\nu) u(p),$$

$$\bar{u}(p') \gamma_\mu = \frac{1}{m} \bar{u}(p') (p'_\mu + i\sigma_{\mu\nu} p'^\nu).$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \bar{u}(p') \gamma_\mu u(p) &= \frac{1}{2} \bar{u}(p') [\gamma_\mu u(p)] + \frac{1}{2} [\bar{u}(p') \gamma_\mu] u(p) = \\ &= \frac{1}{2m} \bar{u}(p') [(p_\mu + p'_\mu) + i\sigma_{\mu\nu} q^\nu] u(p), \end{aligned} \quad (9.136)$$

где $q = p' - p$. Сравнивая с § 2.6, можно заключить, что второй член $\sigma_{\mu\nu} q^\nu$ дает значение магнитного момента $g_s = 2$. Чтобы вычислить полную вершину, нам необходимо включить вклад величины $\Lambda_\mu^{(2)}$:

$$\bar{u}(p') \Gamma_\mu u(p) = \bar{u}(p') (\gamma_\mu + \Lambda_\mu^{(2)}) u(p), \quad (9.137)$$

где величина $\Lambda_\mu^{(2)}$ определена соотношением (9.103). Благодаря спинорным обкладкам мы можем в числителе этого выражения заменить на m оператор \widehat{p}' , находящийся слева, и оператор \widehat{p} , находящийся справа. Кроме того, используя соотношения типа $\widehat{p}\gamma_\mu = 2p_\mu - \gamma_\mu\widehat{p}$, вытекающие из равенства (2.99), мы можем преобразовать числитель подынтегрального выражения в (9.103) к виду

$$-4m(y - xy - x^2)p_\mu - 4m(x - xy - y^2)p'_\mu + D\gamma_\mu,$$

где член, пропорциональный γ_μ , не выписан явно, поскольку он не дает вклада в магнитный момент и поэтому здесь не представляет интереса. (В действительности он содержит инфракрасную расходимость, т. е. проблему, в анализ которой мы не углубляемся.) Для знаменателя подынтегрального выражения, полагая $p^2 = p'^2 = m^2$, $(p - p')^2 = q^2 = 0$, мы получаем выражение $m^2(x + y)^2$. В результате после заключения между спинорными обкладками, опуская член, пропорциональный γ_μ , мы получаем

$$\Lambda_\mu^{(2)} = \frac{-e^2}{4\pi^2 m} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \frac{1}{(x+y)^2} \times [(y - xy - x^2)p_\mu + (x - xy - y^2)p'_\mu] = \frac{-e^2}{16\pi^2 m} (p_\mu + p'_\mu).$$

Если подставить это равенство в (9.136):

$$\bar{u}(p')(p + p')_\mu u(p) = \bar{u}(p')(2m\gamma_\mu - i\sigma_{\mu\nu}q^\nu)u(p),$$

то оказывается, что член, содержащий γ_μ , сокращается с подобным членом, который мы опустили выше, и, следовательно, из (9.137) вытекает следующее выражение для полной вершины:

$$\bar{u}(p')\Gamma_\mu u(p) = \bar{u}(p') \left[\frac{(p + p')_\mu}{2m} + \left(1 + \frac{\alpha}{2\pi}\right) \frac{i\sigma_{\mu\nu}q^\nu}{2m} \right] u(p), \quad (9.138)$$

где $\alpha = e^2/4\pi$. Член, пропорциональный $\alpha/2\pi$, дает поправку низшего порядка к магнитному моменту электрона. Таким образом, гиромагнитное отношение для электрона равно

$$\frac{g}{2} = 1 + \frac{\alpha}{2\pi} + O(\alpha^2). \quad (9.139)$$

Этот результат был получен Швингером в 1948 г., он согласуется с современными экспериментальными данными. Позднее величина g была вычислена с точностью до α^3 , и современные теоретические и экспериментальные значения g для электрона таковы [29]:

$$a_{\text{теор}} = \frac{1}{2}(g - 2) = 0,5 \left(\frac{\alpha}{\pi}\right) - 0,32848 \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^2 + 1,49 \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^3 = (1\,159\,652,4 \pm 0,4) \cdot 10^{-9}, \quad (9.140)$$

$$a_{\text{вкл}} = (1\,159\,652,4 \pm 0,2) \cdot 10^{-9}.$$

В случае мюона согласие между экспериментом и этим чисто электромагнитным расчетом не столь хорошее, однако оно и не ожидалось, поскольку здесь необходимо учитывать вклад адронов, W - и Z -бозонов, а также хиггсовского бозона.

Асимптотическое поведение

Асимптотическое поведение КЭД (поскольку однопетлевое приближение дает надежные предсказания) можно получить из соотношения (9.134), которое совместно с (9.133) дает

$$e_B = e\mu^{1/2} \left(1 + \frac{e^2}{12\pi^2 \epsilon}\right).$$

В пределе при $\epsilon \rightarrow 0$ голый заряд e_B не зависит от μ , следовательно, мы можем вывести закон изменения e как функции масштаба μ . Дифференцирование последнего равенства дает

$$\mu \frac{\partial e}{\partial \mu} = -\frac{\epsilon}{2} e + \frac{e^3}{12\pi^2} + \frac{e^5}{96\pi^4 \epsilon}.$$

Опуская последний член и полагая $\epsilon \rightarrow 0$, мы получаем уравнение

$$\mu \frac{\partial e}{\partial \mu} = \frac{e^3}{12\pi^2}. \quad (9.141)$$

Однако, согласно (9.64), эта величина равна $\beta(e)$. Мы видим, что так же, как это было в случае теории ϕ^4 , $\beta > 0$ и бегущая константа связи e возрастает с ростом масштаба (т. е. с ростом μ), следовательно, асимптотически взаимодействие становится все более сильным. Таким образом, несмотря на малость постоянной тонкой структуры $\alpha = e^2/4\pi = 1/137$, применение теории возмущений в КЭД при больших импульсах не является обоснованным.

Решение уравнения (9.141) имеет вид

$$e^2(\mu) = \frac{e^2(\mu_0)}{1 - \frac{e^2(\mu_0)}{6\pi^2} \ln \frac{\mu}{\mu_0}}, \quad (9.142)$$

из которого непосредственно следует, что e возрастает вместе с μ . Мы видим также так называемую *сингулярность Ландау*

$$\mu = \mu_0 \exp\left(\frac{6\pi^2}{e^2(\mu_0)}\right).$$

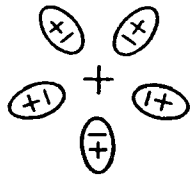


Рис. 9.10. Поляризация диэлектрической среды зарядом, или вакуум в КХД.

Явление, аналогичное росту константы связи e вместе с ρ , т. е. с *уменьшением расстояния*, существует в случае макроскопической электростатики диэлектрической среды. Здесь электрический заряд поляризует среду, как показано на рис. 9.10. Если плотность свободных зарядов равна ρ , а плотность поляризованных зарядов равна ρ_p , то мы имеем уравнения (в единицах Хевисайда — Лоренца)

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho_f \text{ в вакууме,}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho_f + \rho_p \text{ в среде.}$$

Полагая

$$\nabla \cdot \mathbf{P} = -\rho_p,$$

мы получаем

$$\nabla \cdot (\mathbf{E} + \mathbf{P}) = \rho_f,$$

или

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_f,$$

где $\mathbf{D} = \mathbf{E} + \mathbf{P}$. Если $\mathbf{P} = \alpha \mathbf{E}$, то $\mathbf{D} = (1 + \alpha)\mathbf{E}$, и мы в итоге имеем

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \left(\frac{1}{1 + \alpha} \right) \rho_f, \quad (9.143)$$

и мы видим, что роль среды состоит в том, что она «экранирует» первоначальный заряд. При измерении на расстоянии заряд (значение которого определяется через величину \mathbf{E}) оказывается меньше, чем при измерении на малых расстояниях. На расстояниях много меньших, чем размеры атомов и молекул, виден «голый», незаэкранированный заряд.

Подобная ситуация имеет место в КЭД. В этом случае можно интерпретировать фотонный граф собственной энергии (рис. 9.6), полагая, что вакуум «заполнен» виртуальными парами e^+e^- , которые экранируют голый заряд подобно тому, как это изображено на рис. 9.10. Таким образом, заряд e возрастает с уменьшением расстояния, т. е. с ростом масштаба импульсов (или масс). Ниже мы увидим, что в этом смысле ситуация, имеющая место в КХД, сильно отличается от данной.

§ 9.7. Перенормируемость КЭД

В настоящем параграфе мы покажем, что квантовая электродинамика перенормируема во всех порядках теории возмущений. Доказательство следует из книги Яуха и Рорлиха [31], основанной в свою очередь на ключевой статье Уорда [34].

Выше мы видели, что полные пропагаторы и вершинные функции являются расходящимися (во втором и во всех более высоких порядках). Мы имеем соотношения [ср. (7.121), (7.123), (7.124)]

$$S'_F(p)^{-1} = S_F(p)^{-1} - \Sigma(p), \quad (9.144)$$

$$D'(k)^{-1} = D(k)^{-1} - \Pi(k), \quad (9.145)$$

$$\Gamma_\mu(p, q, p+q) = \gamma_\mu + \Lambda_\mu(p, q, p+q), \quad (9.146)$$

$$-\frac{\partial \Sigma(p)}{\partial p^\mu} = \Lambda_\mu(p, 0, p), \quad (9.147)$$

где

$$D_{\mu\nu}(k) = g_{\mu\nu} D(k), \quad D'_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} D'(k), \quad (9.148)$$

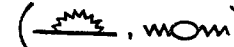

$$\Pi_{\mu\nu}(k) = -g_{\mu\nu} \Pi(k). \quad (9.149)$$


(Мы работаем в калибровке Фейнмана.) В соотношении (9.144) величина $\Sigma(p)$ отвечает *сильносвязным* диаграммам собственной энергии, и аналогично $\Pi(k)$ в (9.145) отвечает сильносвязным диаграммам поляризации вакуума. Соотношение (9.147) называют тождеством Уорда. Величины Σ , Π и Λ задаются соответствующими диаграммами Фейнмана. Идея состоит в том, чтобы проанализировать расходимости этих диаграмм и показать, что все соответствующие им расходимости пропагаторов и вершинной функции могут быть устранены с помощью мультипликативных перенормировок. Иными словами, мы можем определить конечные пропагаторы и вершинные функции

$$\tilde{S}_F = \frac{1}{Z_2} S'_F, \quad \tilde{D}'_F = \frac{1}{Z_3} D'_F, \quad \tilde{\Gamma}'_\mu = Z_1 \Gamma_\mu, \quad (9.150)$$

удовлетворяющие правильным функциональным уравнениям, таким образом, что все бесконечности теории будут «поглощены» константами Z_1 , Z_2 , Z_3 и перенормировкой массы.

Нас интересуют расходимости фейнмановских диаграмм. В гл. 7 мы определили класс *сильносвязных* (одночастично неприводимых) фейнмановских диаграмм. Определим теперь подкласс диаграмм, называемых *неприводимыми*. Графы наименьшего порядка, соот-


ветствующие Σ и Π (, ) , являются примерами

собственно-энергетических графов, а граф наимизшего порядка, соответствующий Λ_μ () , является примером *вершинного*

графа. Рассмотрим теперь произвольную диаграмму Фейнмана, скажем ту, которая изображена на рис. 9.11, а. Она является сильносвязной и содержит собственно-энергетическую и вершинную части. Этой диаграмме сопоставляется другая диаграмма, которая называется *скелетной*. Эта диаграмма получается из первоначальной путем замены каждой собственно-энергетической части линией и каждой вершинной части «голой» вершиной. Скелетная диаграмма, соответствующая рис. 9.11, а, изображена на рис. 9.11, б. Граф, совпадающий со своим скелетным графом, называется *неприводимым*. В противном случае он является приводимым. Фактически неприводимый граф, изображенный на рис. 9.11, б, сходится [см. соотношение (9.85)]. Согласно тому же соотношению, диаграмма, изображенная на рис. 9.11, а, является *условно сходящейся*, но в действительности она расходится благодаря собственно-энергетической и вершинной вставке.



Рис. 9.11. а — произвольная диаграмма Фейнмана; б — соответствующая ей скелетная диаграмма.

Чтобы изучить эти расходимости, рассмотрим сначала неприводимые графы. Единственными неприводимыми собственно-энергетическими графами являются  , ко-

торые мы уже проанализировали. Существует, однако, бесконечное число неприводимых вершинных диаграмм, три из которых изображены на рис. 9.12. Из соотношения (9.85) следует, что $D = 0$ для них всех; следовательно, они логарифмически расходятся и в выражении для Λ_μ появляется только одна бесконечная константа. Таким образом, мы имеем во втором порядке

$$\Lambda_\mu = L\gamma_\mu + \Lambda_\mu^{(1)}, \quad (9.151)$$

где L является бесконечной величиной, а величина $\Lambda_\mu^{(1)}$ конечна и удовлетворяет по определению равенству

$$\bar{u}(p)\Lambda_\mu^{(1)}(p, 0, p)u(p) = 0, \quad (9.152)$$

которое, как мы видели в предыдущем параграфе, выполняется во втором порядке. Мы заключаем, что для *всех* неприводимых графов расходимости можно выделить.

Теперь рассмотрим приводимые графы. Любой приводимый граф получается из своего скелетного графа путем вставки соответствующей собственно-энергетической и вершинной части вместо пропагаторов (линий) и голых вершин. Рассмотрим сначала вершинную часть V , которой соответствует скелетная диаграмма V_s . Записывая величину Λ_μ как функционал от S, D, γ (матриц Дирака) и e , а также как функцию от p' и p , мы имеем (индекс, соответствует скелетной диаграмме)

$$\Lambda_\mu(p, p'; S_F, D_F, \gamma, e) = \Lambda_{\mu s}(p, p'; S'_F, D'_F, \Gamma, e). \quad (9.153)$$

Следовательно,

$$\Gamma_\mu(p, p') = \gamma_\mu + \Lambda_{\mu s}(p, p'; S'_F, D'_F, \Gamma, e). \quad (9.154)$$

Что касается собственно-энергетических частей, то ситуация здесь более сложная благодаря *перекрывающимся расходимостям*, о которых мы упоминали в § 9.3 и которые не встречаются в вершинных функциях. Например, граф, изображенный на рис. 9.12, а, дает в величину $\Sigma(p)$ вклад, равный

$$e^4 \int d^4 k_1 d^4 k_2 \frac{1}{k^2} \gamma^\mu \frac{1}{\widehat{p-k_1-m}} \gamma^p \times \\ \times \frac{1}{\widehat{p-k_1-k_2-m}} \gamma_\mu \frac{1}{k^2} \frac{1}{\widehat{p-k_2-m}} \gamma_p.$$

Условная степень расходимости этого интеграла $D = 1$, следовательно, он расходится линейно. Однако если импульс k_1 фиксирован, то $D = 0$ и он расходится логарифмически по k_2 . Следовательно, расходимости по двум переменным невозможно разделить. Диаграмма, изображенная на рис. 9.13, б, также содержит перекрывающиеся расходимости. Они являются главной помехой при выделении расходимостей и, следовательно, при доказательстве пе-

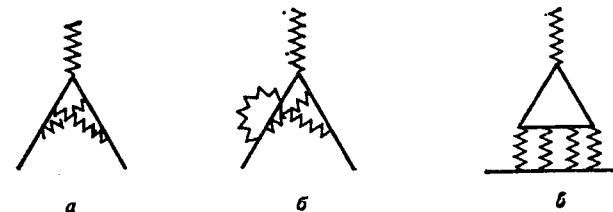


Рис. 9.12. Примеры неприводимых вершинных диаграмм.

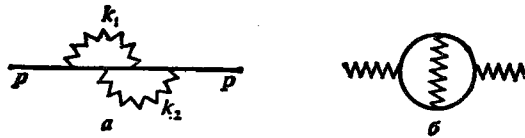


Рис. 9.13. Примеры перекрывающихся расходимостей в КЭД.

ренормируемости. Однако эта трудность была преодолена в работе Уорда [34] с помощью тождества Уорда. Общая идея состоит в том, чтобы, вместо того чтобы выделять конечную часть в $\Sigma(p)$, выделить ее в величине $\partial\Sigma/\partial p^\mu = -\Lambda_\mu$, т. е. в вершинной части, что уже сделано. В случае собственно-энергетической диаграммы четвертого порядка, изображенной на рис. 9.13,а, благодаря тому что дифференцирование по p эквивалентно вставке фотонной линии с нулевым импульсом, мы получаем для величины $\partial\Sigma/\partial p$ три диаграммы, изображенные на рис. 9.14. Эти диаграммы необходимо сложить. Математически это выражается в виде тождества Уорда — Такахаши (7.111):

$$S'_p(p)^{-1} - S'_p(p_0)^{-1} = (p - p_0)^\mu \Gamma_\mu(p, p_0). \quad (9.155)$$



Рис. 9.14. Три диаграммы, полученные дифференцированием по p диаграммы 9.13, а.

Соотношения (9.154) и (9.155) представляют собой систему связанных уравнений для электронных пропагаторов и собственно-энергетических диаграмм. Все входящие сюда величины являются расходящимися, однако трудность, связанная с перекрывающимися расходимостями в собственно-энергетических диаграммах, преодолена с помощью тождеств Уорда — Такахаши.

В случае фотонных собственно-энергетических диаграмм Π мы имеем аналогичную ситуацию. Эти диаграммы также содержат перекрывающиеся расходимости, примером может служить диаграмма, изображенная на рис. 9.13,б. Поэтому мы будем действовать так же, как и в предыдущем случае. Определим оператор Δ_μ (аналогичный оператору Λ_μ) с помощью соотношения

$$\Delta_\mu(k) = -\frac{\partial \Pi(k)}{\partial k^\mu} \quad (9.156)$$



Рис. 9.15. Две диаграммы, полученные дифференцированием по k диаграммы 9.13, б.

(аналогичного равенству $\Lambda_\mu = -\partial\Sigma/\partial p^\mu$). Это приводит к 3-фотонным вершинным графам: дифференцирование графа, изображенного на рис. 9.13,б, дает две диаграммы рис. 9.15. (Попутно заметим, что они не равны нулю, несмотря на теорему Фарри. Последняя гласит, что каждой диаграмме с нечетным числом внешних фотонных линий соответствует другая диаграмма, в которой импульсы электронов направлены в противоположную сторону, в результате чего сумма таких диаграмм равна нулю. Однако здесь мы не рассматриваем сумму диаграмм.) Так же как и Λ_μ , величина Δ_μ логарифмически расходится. Если Δ_μ является аналогом Λ_μ , то какая величина является аналогом Γ_μ ? Ее обозначают через W_μ и определяют соотношением

$$W_\mu(k) = -2k_\mu + \Delta_\mu(k). \quad (9.157)$$

Мы теперь можем установить соотношение между полным фотонным пропагатором D'_p и величиной W_μ , аналогичное тождеству Уорда — Такахаши (9.155). Сначала с помощью равенств (9.115), (9.148) и (9.149) мы убеждаемся в справедливости соотношения (9.145):

$$D' = D + D\Pi D + D\Pi D\Pi D + \dots = \frac{D}{1 - \Pi D},$$

$$(D')^{-1} = D^{-1} - \Pi.$$

Затем, полагая $D = -1/k^2$, получаем

$$\frac{\partial D^{-1}}{\partial k^\mu} = -2k^\mu,$$

откуда следует

$$\frac{\partial (D')^{-1}}{\partial k^\mu} = -2k^\mu - \frac{\partial \Pi}{\partial k^\mu} = -2k^\mu + \Delta_\mu(k) = W_\mu, \quad (9.158)$$

где мы использовали соотношения (9.156) и (9.157). Это искомое соотношение между D' и W_μ . Наконец, по аналогии с равенством (9.153) мы имеем ($\Delta_{\mu s}$ — скелетному графу, соответствующему Δ_μ)

$$\Delta_\mu(k; S_p, D_p, k, e) = \Delta_{\mu s}(k; S'_p, D'_p, W, e), \quad (9.159)$$

и соотношение (9.157) принимает вид

$$W_\mu(k) = -2k_\mu + \Delta_{\mu s}(k; S'_F, D'_F, W, e). \quad (9.160)$$

Мы теперь обладаем системой связанных функциональных уравнений (9.154), (9.155), (9.160). Все они содержат расходящиеся величины. Нам необходимо построить соответствующую систему уравнений для *конечных* функций. Сперва мы можем найти конечные вершинные функции $\tilde{\Lambda}_\mu(\rho, \rho')$ и $\tilde{\Delta}_\mu(k)$. Поскольку Λ и Δ расходятся логарифмически, для определения сходящихся функций необходимо сделать только одно вычитание:

$$\tilde{\Lambda}_\mu(\rho, \rho') = \Lambda_{\mu s}(\rho, \rho') - \Lambda_{\mu s}(\rho_0, \rho_0)|_{\rho_0=m}, \quad (9.161)$$

$$\tilde{\Delta}_\mu(k^2) = \Delta_{\mu s}(k^2) - \Delta_{\mu s}(m^2), \quad (9.162)$$

где μ — инвариантная фотонная масса, а ρ_0 — импульс электрона на массовой поверхности, следовательно, $\rho_0^2 = m^2$. Напомним, что величина $\Lambda_{\mu s}$ должна быть заключена в спинорные обкладки $\bar{u}(\rho) \dots u(\rho')$. Условие $\rho_0 = m$ означает, что величину $\hat{\rho}_0$ необходимо с помощью коммутаций передвинуть вправо и затем положить равной m . Из соотношений (9.151) и (9.152) следует

$$\Lambda_{\mu s}(\rho_0, \rho_0)|_{\rho_0=m} = L\gamma_\mu, \quad (9.163)$$

где L — бесконечная константа. Теперь с помощью соотношений (9.154), (9.155), (9.160), (9.158) определим конечные пропагаторы и вершинные функции, обозначая их значком « \sim » (тильда):

$$\tilde{\Gamma}_\mu(\rho, \rho') = \gamma_\mu + \tilde{\Lambda}_{\mu s}(\rho, \rho'; \tilde{S}'_F, \tilde{D}'_F, \tilde{\Gamma}, e_r), \quad (9.164)$$

$$\tilde{S}'_F(\rho)^{-1} - \tilde{S}'_F(\rho_0)^{-1} = (\rho - \rho_0)^\mu \tilde{\Gamma}_\mu(\rho, \rho_0), \quad (9.165)$$

$$\tilde{W}_\mu(k) = -2k_\mu + \tilde{\Delta}_{\mu s}(k, \tilde{S}'_F, \tilde{D}'_F, \tilde{W}, e_r), \quad (9.166)$$

$$\frac{\partial \tilde{D}'_F(k)^{-1}}{\partial k^\mu} = \tilde{W}_\mu(k). \quad (9.167)$$

Электронный и фотонный пропагаторы нормируются условием

$$\tilde{S}'_F(\rho_0)^{-1} = \hat{\rho}_0 - m, \quad (9.168)$$

$$k^2 \tilde{D}'_F(k^2)|_{k^2=m^2} = 1. \quad (9.169)$$

Мы теперь покажем, что $\tilde{\Gamma}_\mu$, \tilde{S}'_F , \tilde{D}'_F и \tilde{W}_μ связаны с Γ_μ , S'_F , D'_F и

W_μ с помощью соотношений (9.150) при условии, что заряд e также перенормируется по формуле

$$e_r^2 = Z_3 e^2. \quad (9.170)$$

Чтобы доказать это, рассмотрим сначала величину Γ_μ , точнее Λ_μ . Предположим, что помимо первоначальной (голой) вершины она имеет порядок $(e^2)^n$. Следовательно, она содержит $2n$ пропагаторов S_F , n пропагаторов D_F и $(2n+1)$ факторов γ_μ . Тогда, используя преобразования (9.150) и (9.170)

$$S_F \rightarrow \frac{1}{Z_2} S'_F = \tilde{S}'_F, \quad D_F \rightarrow \frac{1}{Z_3} D'_F = \tilde{D}'_F, \quad (9.171)$$

$$\Gamma_\mu \rightarrow Z_1 \Gamma_\mu = \tilde{\Gamma}_\mu, \quad e^2 \rightarrow Z_3 e^2 = e_r^2,$$

мы получим

$$\Lambda_{\mu s} \rightarrow Z_1 \Lambda_{\mu s}$$

(мы использовали тождество Уорда $Z_1 = Z_2$) или

$$\Lambda_{\mu s} \left[\frac{1}{Z^2} S'_F, \frac{1}{Z_3} D'_F, Z_1 \Gamma_\mu, Z_3 e^2 \right] = Z_1 \Lambda_{\mu s} [S'_F, D'_F, \Gamma_\mu, e^2]. \quad (9.172)$$

Далее, из соотношений (9.164), (9.161) и (9.163) следует цепочка равенств

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma}_\mu &= \gamma_\mu + \tilde{\Lambda}_{\mu s} = \gamma_\mu + \Lambda_{\mu s} - L\gamma_\mu = (1-L) \left(\gamma_\mu + \frac{1}{1-L} \Lambda_{\mu s} \right) = \\ &= Z_1 \left\{ \gamma_\mu + \frac{1}{Z_1} \Lambda_{\mu s} [\tilde{S}'_F, \tilde{D}'_F, \tilde{\Gamma}, e_r^2] \right\}, \end{aligned}$$

которую с учетом (9.172) можно продолжить следующим образом:

$$= Z_1 \{ \gamma_\mu + \Lambda_{\mu s} [S'_F, D'_F, \Gamma_\mu, e^2] \} = Z_1 \Gamma_\mu, \quad (9.173)$$


где $Z_1 = 1 - L$. Таким образом, перенормировка является правильной, приводящей к соотношению (9.164). Мы видим, что вычитание [равенство (9.161)] эквивалентно мультипликативной перенормировке, впервые рассмотренной Дайсоном.

Аналогичным образом можно показать, что равенство (9.166) выполняется при условии, что

$$\tilde{W}_\mu = Z_3 W_\mu. \quad (9.174)$$

Последнее соотношение можно доказать, рассмотрев типичный

граф для Δ_{μ} . Член порядка $(e^2)^n$ содержит $(n - 1) D_F$ -функций и

$(2n + 1)$ функций Γ и S [например, рассмотрим граф 

порядка $(e^2)^2$], следовательно, при преобразованиях (9.171)

$$\Delta_{\mu s} \rightarrow Z_3 \Delta_{\mu s},$$

или

$$\Delta_{\mu s} \left[\frac{1}{Z_2} S'_F, \frac{1}{Z_3} D'_F, Z_1 \Gamma, Z_3 e^2 \right] = Z_3 \Delta_{\mu s} \left[S'_F, D'_F, \Gamma, e^2 \right]. \quad (9.175)$$

Чтобы убедиться в согласованности соотношений (9.166) и (9.174), вспомним определение (9.162), которое совместно с (9.166) дает

$$\begin{aligned} \tilde{W}_\mu(k) &= -2k_\mu + \Delta_{\mu s}(k^2) - \Delta_{\mu s}(\mu^2) = \\ &= -2k_\mu \left[1 + \frac{1}{2} \Delta_s(\mu^2) \right] + \Delta_{\mu s}(k^2) = \\ &= Z_3 \left[-2k_\mu + \frac{1}{Z_3} \Delta_{\mu s}(k^2) \right] = Z_3 W_\mu(k), \end{aligned} \quad (9.176)$$

где $Z_3 = 1 + (1/2)\Delta_s(\mu^2)$ (мы положим $\Delta_{\mu s} = k_\mu \Delta_s$, что естественно, поскольку фотонная вершина пропорциональна k_μ). Последнее равенство совпадает с (9.174), и, таким образом, мы вновь показали эквивалентность вычитания и мультипликативной перенормировки. Этим мы завершаем доказательство перенормируемости КЭД во всех порядках.

§ 9.8. Асимптотическая свобода теорий Янга — Миллса

В настоящем параграфе мы проведем расчеты, аналогичные тем, которые были выполнены в § 9.6, с целью показать, что при высоких энергиях бегущая константа связи в теориях Янга — Миллса приближается к нулю. Это свойство известно как асимптотическая свобода. Оказывается, что свойством асимптотической свободы обладают все неабелевы калибровочные теории и, насколько известно, *только* неабелевы калибровочные теории [36]. Мы не будем изучать общий случай, а ограничимся для определенности и учитываем физическую значимость КХД случаем $SU(3)$ -калибровочной теории. Будем работать, как и в § 9.6, в однопетлевом приближении.

Ключом к нахождению асимптотического поведения является величина $\beta(g)$, определенная соотношением (9.64), и константа

связи (заряд) теории Янга — Миллса g , физическое и голое значение которой связаны соотношением, аналогичным (9.134):

$$\beta(g) = \mu \frac{\partial g}{\partial \mu}, \quad (9.177)$$

$$g_B = g \mu^{1/2} Z_1 Z_2^{-1} Z_3^{-1/2}.$$

Здесь Z_1 — константа перенормировки для кварк-глюон-глюонной вершины, Z_2 — константа перенормировки для кварковой волновой функции, а Z_3 — константа перенормировки для глюонной

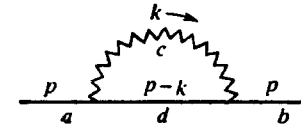


Рис. 9.16. Диаграмма собственной энергии кварка.

волновой функции (собственной энергии). Мы можем провести вычисление, не затрагивающее кварки, например определить 3-глюонную вершину. Однако более простой и более поучительный путь состоит в том, чтобы следовать настолько, насколько это возможно вычислениям, которые мы выполнили в КЭД.

Таким образом, мы начнем с вычисления кварковой диаграммы собственной энергии, изображенной на рис. 9.16. Индексы a, b, c и d относятся к группе $SU(3)$. Применяя правила Фейнмана (7.54) и (7.60) и полагая $\alpha = 1$ (калибровка Фейнмана), мы получаем

$$\begin{aligned} -i\Sigma^{ab}(p) &= -g^2 \mu^{4-d} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \gamma_\mu \frac{1}{\widehat{p-k-m}} \times \\ &\times \gamma_\nu \frac{g^{\mu\nu}}{k^2} (T^c)_{ad} (T^c)_{ab}. \end{aligned}$$

Непосредственно видно, что это выражение равно величине $(T^c T^c)_{ab}$, умноженной на соответствующее выражение для собственной энергии, взятое из КЭД:

$$\Sigma^{ab}(p) = (T^c T^c)_{ab} \Sigma(QED) = (T^c T^c)_{ab} \frac{g^2}{8\pi^2 \epsilon} \left(-\widehat{p} + 4m \right), \quad (9.178)$$

где мы использовали выражение (9.97). Остается вычислить теоретико-групповой фактор $(T^c T^c)_{ab}$ (по c произведено суммирование), где $T^c = \lambda^c/2$, а λ — матрицы, заданные соотношениями (3.180). Легко видеть, что

$T^c T$

где L

$(T^c T$

Обще
прос
в сл

$(T^c T$

$C_2(F$

В ре

$\Sigma^{ab}(\rho$

Дале
ется
[ср.

$Z_2 =$

О
венно

\sim

где k
В де
петл

$$\int \frac{d^d k}{k^2}$$

Одна

ются с помощью соотношений (9.19) и (9.24), и мы получаем в результате выражение

$$\Pi_{\mu\nu}^{ab}(1) = \frac{-g^2}{16\pi^2\epsilon} f^{acd} f^{bcd} \left[\frac{11}{3} p_\mu p_\nu - \frac{19}{6} g_{\mu\nu} p^2 \right]. \quad (9.189)$$

Вклад духов изображен на рис. 9.18. Применяя правила Фейнмана (необходимо помнить о знаке минус, вносимом духовой петлей), мы имеем

$$i\Pi_{\mu\nu}^{ab}(2) = \text{Diagram} = g^2 f^{acd} f^{bcd} \mu^{a-d} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{(p+k)_\mu k_\nu}{(p+k)^2 k^2}.$$

Применяя теперь непосредственно технику, использованную выше, мы получаем

$$\Pi_{\mu\nu}^{ab}(2) = \frac{g^2}{16\pi^2\epsilon} f^{acd} f^{bcd} \left[\frac{1}{3} p_\mu p_\nu + \frac{1}{6} g_{\mu\nu} p^2 \right]. \quad (9.190)$$

Складывая вклады духов и глюонов, мы имеем

$$\Pi_{\mu\nu}^{ab}(1+2) = \frac{g^2}{8\pi^2\epsilon} f^{acd} f^{bcd} \frac{5}{3} (g_{\mu\nu} p^2 - p_\mu p_\nu). \quad (9.191)$$

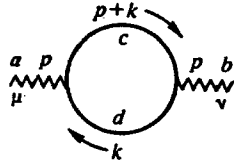


Рис. 9.19. Вклад кварковой петли в поляризацию вакуума в КХД.

Наконец, нам необходимо вычислить кварковый вклад, изображенный на рис. 9.19. Он имеет вид

$$i\Pi_{\mu\nu}^{ab}(3) = \text{Diagram} = -g^2 \mu^{4-d} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} (T^a)_{dc} (T^b)_{cd} \times \text{Tr} \left[\gamma_\mu \frac{1}{\widehat{p+k-m}} \gamma_\nu \frac{1}{\widehat{k-m}} \right]. \quad (9.192)$$

Данное выражение равно произведению величины $(T^a)_{dc} (T^b)_{cd} = \text{Tr} (T^a T^b)$ на соответствующее выражение из КЭД [см. ниже соотношение (9.197)]. Следовательно, используя соотношение (9.98), мы получаем

$$i\Pi_{\mu\nu}^{ab}(3) = \text{Tr} (T^a T^b) \frac{g^2}{6\pi^2\epsilon} (p_\mu p_\nu - g_{\mu\nu} p^2). \quad (9.193)$$

Вычислим теперь теоретико-групповые множители, входящие в выражения (9.191) и (9.193). Матрицы λ , определенные в (3.180), нормированы условием

$$\text{Tr} (\lambda^a \lambda^b) = 2\delta^{ab}.$$

Следовательно, для величин $T^a = \lambda^a / 2$ выполняется условие

$$\text{Tr} (T^a T^b) = \frac{1}{2} \delta^{ab}.$$

Эта та величина, которую следовало бы подставить в выражение (9.193) в случае, если бы в поляризацию вакуума давали вклад только кварки, принадлежащие *одному* представлению группы $SU(3)$, или, другими словами, если бы существовал только один кварковый «аромат», несущий индекс цветовой группы $SU(3)$. Однако нам известно, что это не так: существует по меньшей мере пять кварковых ароматов, весьма вероятно, что их шесть и даже больше. Таким образом, если число кварковых ароматов равно n_F , то мы имеем

$$\text{Tr} (T^a T^b) = \frac{n_F}{2} \delta^{ab}. \quad (9.194)$$

Наконец, обратимся к соотношению (9.191). С помощью равенств (3.182) легко убедиться, что

$$f^{acd} f^{bcd} = 3\delta^{ab}. \quad (9.195)$$

Входящее сюда число 3 является значением оператора Казимира группы, который обычно обозначают через $C_2(G)$, и последнее соотношение можно записать в более общем виде

$$f^{acd} f^{bcd} = \delta^{ab} C_2(G), \quad (9.196)$$

$$C_2(G) = \begin{cases} N & \text{в случае группы } SU(N), \\ 3 & \text{в случае группы } SU(3). \end{cases} \quad (9.197)$$

Собирая вместе наши результаты, мы получаем тензор поляризации вакуума в виде

$$\Pi_{\mu\nu}^{ab}(1+2+3) = \frac{g^2}{8\pi^2\epsilon} (g_{\mu\nu} p^2 - p_\mu p_\nu) \left(\frac{5}{3} C_2(G) - \frac{2n_F}{3} \right) \delta^{ab} =$$

$$= \frac{g^2}{8\pi^2\epsilon} (g_{\mu\nu} p^2 - p_\mu p_\nu) \left(5 - \frac{2n_F}{3}\right) \delta^{ab}. \quad (9.198)$$

Константа перенормировки Z_3 , которая необходима для того, чтобы сократить расходимость контрчлена, получается непосредственно из сравнения выражений (9.98) и (9.119):

$$Z_3 = 1 + \frac{g^2}{3\pi^2\epsilon} \left(5 - \frac{2n_F}{3}\right). \quad (9.199)$$

Интересное свойство соотношений (9.198) и (9.199) состоит в том, что вклады «чисто янг-миллсовских» членов (глюоны и духи) и вклад кварков в величину $\Pi_{\mu\nu}$ имеют противоположные знаки. Ниже мы увидим, что вследствие этого явление асимптотической свободы связано с числом ароматов.

Теперь нам надо вычислить кварк-глюонную вершинную функцию. В нее дают вклад две различные диаграммы Фейнмана, которые изображены на рис. 9.20 и 9.21. Диаграмма, изображенная на рис. 9.20, аналогична диаграмме, относящейся к КЭД и изображенной на рис. 9.7. Однако, диаграмма, изображенная на рис. 9.21, определенно носит неабелев характер и содержит 3-глюонную связь. Вклад диаграммы, изображенной на рис. 9.20, в вершинную функцию равен

$$\begin{aligned} & -ig\mu^{2-d/2} (\Lambda_\mu^a)_{cd}(p, q, p')(1) = \\ & = (-ig\mu^{2-d/2})^3 \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \gamma_\nu (T^d)_{cj} \frac{i}{\widehat{p'-k-m}} \times \\ & \times \gamma_\mu (T^a)_{ji} \frac{i}{\widehat{p-k-m}} (T^d)_{ib} \frac{-ig^{vp}}{k^2}. \end{aligned}$$

Сравнивая это выражение с соответствующим выражением в КЭД [оно выписано ниже формулы (9.98)], мы видим (это не должно

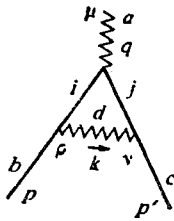


Рис. 9.20. Поправка к кварк-глюонной вершине.

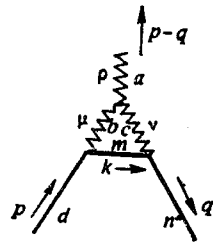


Рис. 9.21. Поправка к кварк-глюонной вершине, включающая 3-глюонную вершину.

быть неожиданным), что они различаются только теоретико-групповым множителем, равным

$$\Lambda_\mu^a(p, q, p')(1) = (T^d T^a T^d) \Lambda_\mu(p, q, p') \text{ (КЭД)}. \quad (9.200)$$

Теоретико-групповой множитель легко вычислить:

$$T^d T^a T^d = T^d [T^a, T^d] + T^d T^d T^a = if^{adc} T^d T^c + C_2(F) T^a,$$

где мы воспользовались связью $T^a = \lambda^a/2$ и коммутационными соотношениями (3.181) и (9.181). Вновь используя коммутационные соотношения и соотношение (9.196), получаем окончательно

$$\begin{aligned} T^d T^a T^d &= -\frac{1}{2} f^{adc} f^{acb} T^b + C_2(F) T^a = \\ &= \left[-\frac{1}{2} C_2(G) + C_2(F)\right] T^a. \end{aligned} \quad (9.201)$$

Подставляя (9.201) и (9.102) в (9.200), будем иметь

$$\Lambda_\mu^a(1) = \frac{g^2}{8\pi^2\epsilon} \left[-\frac{C_2(G)}{2} + C_2(F)\right] \gamma_\mu T^a. \quad (9.202)$$

Вычислим теперь вклад вершины, изображенной на рис. 9.21. Он имеет вид

$$\begin{aligned} & -ig\mu^{2-d/2} \Lambda_\mu^a(2) = \\ & = (-ig)^2 (-g) (\mu^{4-d})^{3/2} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \gamma_\mu (T^b)_{dm} \frac{-i}{(k-p)^2} f^{abc} \times \\ & \times [(p-q-k+p)_\nu g_{\mu\rho} + (k-p-q+k)_\rho g_{\mu\nu} + \\ & + (q-k-p+q)_\mu g_{\nu\rho}] \frac{-i}{(q-k)^2} \frac{i}{\widehat{k-m}} \gamma_\nu (T^c)_{mn} \end{aligned}$$

или

$$\Lambda_\mu^a(2) = \frac{g^2 \mu^{4-d}}{(2\pi)^d} f^{abc} T^b T^c J_\mu, \quad (9.203)$$

где

$$\begin{aligned} J_\mu &= \int d^d k \times \\ & \times \frac{\gamma_\mu (\widehat{k+m}) \gamma_\nu [(2p-q-k)_\nu g_{\mu\rho} + (2k-p-q)_\rho g_{\mu\nu} + (2q-p-k)_\mu g_{\nu\rho}]}{(k^2 - m^2) (k-p)^2 (q-k)^2}. \end{aligned} \quad (9.204)$$

Величина I_ρ вычисляется с помощью формулы (9.99) и подстановки $k' = k - px - qy$, что дает

$$I_\rho = 2 \int dx dy \int d^4 k' \gamma^\mu (\widehat{k}' + \widehat{px} + \widehat{qy} + m) \gamma^\nu \times \\ \times \{ [(2-x)p - (1+y)q - k']_\mu g_{\nu\rho} + [2k' + (2x-1)p + \\ + (2y-1)q]_\rho g_{\mu\nu} + [(2-y)q - (1+x)p - k']_\mu g_{\nu\rho} \} \times \\ \times [k'^2 - m^2(1-x-y) + p^2x + q^2y - (px+qy)^2]^{-3}. \quad (9.205)$$

В этом интеграле члены, линейные по k' , дают при интегрировании нуль. Члены, не содержащие k' , в числителе являются конечными (сходящимися) в пределе при $d \rightarrow 4$, и ими можно пренебречь. Расходящаяся часть возникает благодаря члену в числителе, квадратичному по k' . Он имеет вид

$$N_\rho = \gamma^\mu \widehat{k}' \gamma^\nu (-k'_\mu g_{\nu\rho} + 2k'_\rho g_{\mu\nu} - k'_\nu g_{\mu\rho})$$

и с помощью простой «диракологии» может быть переписан следующим образом:

$$N_\rho = -2\gamma_\rho k'^2 + (4-2d) k'_\rho \widehat{k}'.$$

Следовательно, расходящийся член имеет вид

$$I_\rho = 2 \int dx \int dy \int d^4 k \times \\ \times \frac{(4-2d) k'_\rho \widehat{k}' - 2\gamma_\rho k'^2}{[k^2 - m^2(1-x-y) + p^2x + q^2y - (px+qy)^2]^3},$$

откуда, используя формулы (9А.7), (9А.8) и (9Б.1) из приложений к настоящей главе и полагая $\varepsilon = 4 - d$, мы получаем полюсную часть в виде

$$I_\rho = -\frac{6i\pi^2}{\varepsilon} \gamma_\rho. \quad (9.206)$$

Далее, теоретико-групповой множитель в формуле (9.203) с учетом соотношения (9.196) равен

$$f^{abc} T^b T^c = \frac{i}{2} f^{abc} f^{bca} T^d = \frac{i}{2} C_2(G) T^a. \quad (9.207)$$

Таким образом, подставляя соотношение (9.207) и (9.206) в (9.203), мы получаем окончательно (совершив замену $\rho \rightarrow \mu$ и положив $d = 4$)

$$\Lambda_\mu^a(2) = \frac{g^2}{8\pi^2\varepsilon} \left[\frac{3C_2(G)}{2} \right] \gamma_\mu T^a. \quad (9.208)$$

Складываем вклады двух вершин (9.202) и (9.208), мы получаем

$$\Lambda_\mu^a = \frac{g^2}{8\pi^2\varepsilon} [C_2(G) + C_2(F)] \gamma_\mu T^a = \frac{g^2}{8\pi^2\varepsilon} \frac{13}{3} \gamma_\mu T^a, \quad (9.209)$$

где использованы соотношения (9.197) и (9.182). Соответствующая константа перенормировки Z_1 равна

$$Z_1 = 1 - \frac{g}{8\pi^2\varepsilon} \frac{13}{3}. \quad (9.210)$$

Объединяя теперь соотношения (9.177), (9.184), (9.199) и (9.210), мы получаем

$$g_B = g\mu^{\varepsilon/2} \left(1 - \frac{g^2}{8\pi^2\varepsilon} \frac{13}{3} \right) \left(1 + \frac{g^2}{8\pi^2\varepsilon} \frac{4}{3} \right) \times \\ \times \left[1 - \frac{g^2}{8\pi^2\varepsilon} \left(\frac{5}{2} - \frac{n_F}{3} \right) \right] = g\mu^{\varepsilon/2} \left[1 + \frac{g^2}{16\pi^2\varepsilon} \left(-11 + \frac{2n_F}{3} \right) \right], \quad (9.211)$$

откуда (в пределе при $\varepsilon \rightarrow 0$) следует

$$\beta(g) = \mu \frac{\partial g}{\partial \mu} = \frac{g^3}{16\pi^2} \left(-11 + \frac{2n_F}{3} \right). \quad (9.212)$$

Если число кварковых ароматов равно $n_F \leq 16$, то $\beta < 0$ и g убывает с ростом масштаба масс (импульсов) μ . Следовательно, теория является *асимптотически свободной*. По-видимому, в природе $n_F < 16$; следовательно, асимптотическая свобода является свойством, которым обладает КХД. Асимптотическая свобода оправдывает партонную модель (см. § 1.10), согласно которой партонны ведут себя как почти свободные частицы, когда они взаимодействуют внутри адрона с фотонами при больших передачах импульса.

Наконец, мы можем получить выражение для бегущей константы связи $\alpha_s = g^2/4\pi$. Запишем

$$\beta(\bar{g}) = \frac{d\bar{g}}{dt},$$

где $t = \ln \mu$. Тогда уравнение (9.212) можно представить следующим образом:

$$\frac{d\bar{g}}{dt} = -b\bar{g}^3,$$

$$b = \frac{11 - 2n_F/3}{16\pi^2}. \quad (9.213)$$

Перепишывая это уравнение в виде

$$\frac{d}{dt}(\bar{g}^{-2}) = 2b,$$

легко видеть, что решение имеет вид

$$\frac{1}{\bar{g}^2} = \frac{1}{g^2} + 2bt,$$

$$\bar{g}^2 = \frac{g^2}{1 + 2btg^2},$$

или

$$\alpha_s(t) = \frac{\alpha_0}{1 + 8\pi b t \alpha_0},$$

где $\alpha_0 = g^2/4\pi$. Далее величину $t = \ln \mu$ в экспериментах по глубоководному рассеянию можно представить в виде $(1/2)\ln(Q^2/\Lambda^2)$, и мы можем написать

$$\alpha_s(Q^2) = \frac{1}{1/\alpha_0 + 4\pi b \ln(Q^2/\Lambda^2)}, \quad (9.214)$$

Мы видим, что величина $\alpha_s(Q^2)$ стремится к нулю как $(\ln Q^2)^{-1}$. Пренебрегая величиной $1/\alpha_0$ в знаменателе и используя равенство (9.213), мы можем представить выражение (9.214) в виде

$$\alpha_s(Q^2) = \frac{4\pi}{(11 - 2n_F/3) \ln Q^2/\Lambda^2}, \quad (9.215)$$

где Λ — константа, которую «выбрал» мир, в котором мы живем.

§ 9.9. Перенормировка теорий Янга — Миллса без спонтанного нарушения симметрии

В настоящем параграфе мы наметим контуры доказательства перенормируемости чисто янг-миллсовских теорий, т. е. в неабелевых калибровочных теориях без спонтанного нарушения симметрии. Случай спонтанного нарушения симметрии откладывается до § 9.11. Изложение настоящего раздела основано на лекциях Ли [6] и книге Тейлора [30], к которым читатель отсылается за дальнейшими деталями.

Прежде чем непосредственно углубляться в доказательство, полезно убедиться в том, что соображения, основанные на подсчете степеней, которые мы использовали выше в случае теории φ^4 и КЭД, указывают на перенормируемость теории. Для простоты будем рассматривать случай, когда отсутствуют спинорные линии. Здесь существуют три типа вершин: 3-векторные вершины, 4-векторные вершины и вершины вектор — дух — дух. Положим

$$\begin{aligned} n_3 & \text{ — число 3-векторных вершин,} \\ n_4 & \text{ — число 4-векторных вершин,} \\ n_g & \text{ — число вершин вектор — дух — дух,} \\ V_e & \text{ — число внешних (векторных) линий,} \\ V_i & \text{ — число внутренних (векторных) линий,} \\ G_i & \text{ — число внутренних (духовых) линий.} \end{aligned} \quad (9.216)$$

Выражение для условной степени расходимости аналогично (9.78)

$$D = 4L - 2V_i - 2G_i + n_3 + n_g. \quad (9.217)$$

Мы положим здесь $d = 4$, величины n_3 и n_g присутствуют здесь, поскольку соответствующие вершины содержат первую степень импульса (см. правила Фейнмана). Аналогично соотношению (9.81) мы имеем выражение для числа петель

$$\begin{aligned} L & = V_i + G_i - n_3 - n_4 - n_g + 1 = \\ & = V_i - n_3 - n_4 + 1, \end{aligned} \quad (9.218)$$

поскольку $n_g = G_i$. Наконец, аналогично соотношению (9.82) мы имеем

$$4n_4 + 3n_3 + 3n_g = 2V_i + 2G_i + V_e. \quad (9.219)$$

Подстановка соотношений (9.218) и (9.219) в (9.217) приводит к равенству

$$D = 4 - V_e, \quad (9.220)$$

которое показывает, что число примитивно расходящихся графов конечно. Следовательно, теория Янга — Миллса должна быть перенормируемой. (Рассматривая спонтанно нарушенные теории, мы увидим, что приведенные рассуждения неприменимы, поскольку векторные пропагаторы становятся различными и над перенормируемостью нависает угроза.)

Вернемся теперь к демонстрации того, что теория действительно перенормируема. Критическими физическими объектами являются 1ЧН-функции Γ . Необходимо показать, что мы можем изменить масштаб калибровочных, духовых полей, полей источников [см. выражение (7.144)] и константы связи

$$\begin{aligned} A_{a\mu} & = Z^{1/2}(\epsilon) A_{a\mu}^r, \quad \eta_a = \tilde{Z}^{1/2}(\epsilon) \eta_a^r, \quad \tilde{\eta}_a = \bar{Z}^{1/2}(\epsilon) \tilde{\eta}_a^r, \\ u_{a\mu} & = \tilde{Z}^{1/2}(\epsilon) u_{a\mu}^r, \quad v_a = Z^{1/2}(\epsilon) v_a^r, \quad g = \frac{X(\epsilon)}{\tilde{Z}(\epsilon) Z^{1/2}(\epsilon)} g^r \end{aligned} \quad (9.221)$$

таким образом, чтобы производящая функция Γ была конечной при $\epsilon \rightarrow 0$ и калибровочная инвариантность сохранялась в каждом порядке. Это требование содержится в тождестве Славнова — Тейлора [формула (7.156)]

$$\int dx \left(\frac{\delta \Gamma'}{\delta u^{a\mu}} \frac{\delta \Gamma'}{\delta A_\mu^a} + \frac{\delta \Gamma'}{\delta v^a} \frac{\delta \Gamma'}{\delta \eta^a} \right) = 0.$$

Пусть по определению

$$\Gamma_1 * \Gamma_2 = \int dx \left(\frac{\delta \Gamma_1}{\delta u} \frac{\delta \Gamma_2}{\delta A} + \frac{\delta \Gamma_1}{\delta v} \frac{\delta \Gamma_2}{\delta \eta} \right); \quad (9.222)$$

тогда тождество (7.156) запишется в виде

$$\Gamma * \Gamma = 0. \quad (9.223)$$

Произведем теперь петлевое разложение (= разложению по степеням \hbar) величины Γ :

$$\Gamma = \sum_{n=0}^{\infty} \Gamma_n, \quad (9.224)$$

а также констант перенормировки таким образом, что $Z(\varepsilon) = 1 + \sum_{n=1} Z_n(\varepsilon)$ и т. д. Подставляя разложение (9.224) в тождество 9.223), мы получаем в n -м порядке

$$\sum_{p+q=n} \Gamma_p * \Gamma_q = 0. \quad (9.225)$$

Проблема, с которой мы сталкиваемся, состоит в том, что величина Γ расходится. Она становится конечной, если ввести контрчлены в действие. Это подсказывает следующие обозначения. Действие без контрчленов (КЧ) является (с точностью до конечных добавок) перенормированным действием, поэтому мы полагаем

$$\begin{aligned} S_0 &= S^r, \\ S_1 &= S^r + (S_1)_{\text{CT}}, \\ S_2 &= S^r + (S_2)_{\text{CT}}, \\ &\vdots \\ S_\infty &= S^B, \end{aligned} \quad (9.226)$$

где S^B — голое действие.

Величина $\Gamma_0(S_0)$ конечна, поскольку это беспетлевой функционал, не содержащий расходимостей. В действительности, как мы увидим в § 9.11, $\Gamma_0(S_0) = S_0$. Однако величина $\Gamma_1(S_0)$ расходится, ее можно разделить на конечную и расходящуюся части:

$$\Gamma_1(S_0) = \Gamma_1^f(S_0) + \Gamma_1^{\text{div}}(S_0). \quad (9.227)$$

В нулевом порядке соотношение (9.225) имеет вид

$$S_0 * S_0 = 0. \quad (9.228)$$

В первом порядке с учетом (9.227) мы имеем

$$S_0 * \Gamma_1^f(S_0) + \Gamma_1^f(S_0) * S_0 = 0, \quad (9.229)$$

$$S_0 * \Gamma_1^{\text{div}}(S_0) + \Gamma_1^{\text{div}}(S_0) * S_0 = 0. \quad (9.230)$$

Теперь мы должны найти контрчлен $(S_1)_{\text{CT}}$, такой, чтобы величина $\Gamma_1(S_1)$ была конечной и чтобы выполнялось равенство

$$S_1 * S_1 = 0 \quad (9.231)$$

параллельно с (9.228). (Очевидно, наш метод вычислений является рекуррентным и действие всегда должно удовлетворять этому тождеству.) В первом порядке по \hbar новое действие равно

$$S_1 = S_0 - \Gamma_1^{\text{div}}(S_0), \quad (9.232)$$

а перенормированный производящий функционал равен величине

$$\Gamma_1(S_1) = \Gamma_1(S_0) + S_1 - S_0 \quad (9.233)$$

которая по построению конечна. Чтобы показать, что действие S_1 , определенное соотношением (9.232), удовлетворяет условию (9.231), заметим, что

$$\begin{aligned} S_1 * S_1 &= S_0 * S_0 - S_0 * \Gamma_1^{\text{div}} \\ &- \Gamma_1^{\text{div}} * S_0 + \Gamma_1^{\text{div}} * \Gamma_1^{\text{div}} = \Gamma_1^{\text{div}} * \Gamma_1^{\text{div}} \sim O(\hbar^2), \end{aligned} \quad (9.234)$$

где мы воспользовались равенствами (9.228) и (9.230). Таким образом, в первом порядке по \hbar соотношение (9.231) удовлетворяется. Очевидно, что оно будет удовлетворяться *точно*, если в выражении (9.232) добавить подходящий член порядка \hbar^2 .

Таким образом, с помощью контрчленов, сохраняющих тождества Славнова — Тейлора, мы сделали конечными беспетлевой и однопетлевой функционалы. Доказательство того, что это возможно для Γ_n , проводится по индукции. Мы предположим, что функционал Γ_{n-1} конечен, и покажем, как построить конечный функционал Γ_n . В n -м порядке соотношение (9.225) имеет вид

$$\Gamma_n * \Gamma_0 + \Gamma_0 * \Gamma_n = -\Gamma_{n-1} * \Gamma_1 - \Gamma_1 * \Gamma_{n-1} - \dots$$

Так как все члены в правой части этого равенства конечны (по предположению), расходящаяся часть величины Γ_n удовлетворяет соотношению

$$\Gamma_n^{\text{div}}(S_{n-1}) * S_0 + S_0 * \Gamma_n^{\text{div}}(S_{n-1}) = 0 \quad (9.235)$$

или, согласно (9.222),

$$\left[\left(\frac{\delta S_0}{\delta u} \frac{\delta}{\delta A} + \frac{\delta S_0}{\delta v} \frac{\delta}{\delta \eta} \right) + \left(\frac{\delta S_0}{\delta A} \frac{\delta}{\delta u} + \frac{\delta S_0}{\delta \eta} \frac{\delta}{\delta v} \right) \right] \Gamma_n^{\text{div}} = 0. \quad (9.236)$$

Перепишем последнее соотношение в виде

$$\mathcal{G}\Gamma_n^{\text{div}} = 0, \quad (9.237)$$

где

$$\mathcal{G} = \mathcal{G}_0 + \mathcal{G}_1,$$

$$\mathcal{G}_0 = \frac{\delta S_0}{\delta u} \frac{\delta}{\delta A} + \frac{\delta S_0}{\delta v} \frac{\delta}{\delta \eta}, \quad (9.238)$$

$$\mathcal{G}_1 = \frac{\delta S_0}{\delta A} \frac{\delta}{\delta u} + \frac{\delta S_0}{\delta \eta} \frac{\delta}{\delta v}.$$

Можно доказать, что оператор \mathcal{G} нильпотентен

$$\mathcal{G}^2 = 0. \quad (9.239)$$

Отсюда следует, что частное решение уравнения (9.237) имеет вид $\Gamma_n^{\text{div}} = \mathcal{G}F(A, \eta, \bar{\eta}, u, v)$, где F — некоторая функция. В действительности общее решение уравнения (9.237), вначале угаданное Клуберг-Штерном и Зюбером¹⁾, а затем доказанное Йоглекарром и Ли²⁾, имеет вид

$$\Gamma_n^{\text{div}} = G(A) + \mathcal{G}F(A, \eta, \bar{\eta}, u, v), \quad (9.240)$$

где $G(A)$ — калибровочно-инвариантный функционал:

$$D^\mu(A) \frac{\delta}{\delta A^\mu} G(A) = 0. \quad (9.241)$$

С помощью соотношений (9.240) и (9.241) в петлевом разложении можно получить явные выражения для констант перенормировки Z , \tilde{Z} и X , определяемых формулами (9.221).

§ 9.10. Киральные аномалии

Единственным типом взаимодействия между материей и калибровочными полями в КЭД и КХД является векторное взаимодействие вида $g_V J_\mu W^\mu$, где W^μ — калибровочное поле, а $J_\mu \sim \bar{\psi}\gamma_\mu\psi$ — векторный ток (индексы, относящиеся к внутренней симметрии, не обозначены) фермиевских полей материи. Векторный ток сохраняется:

$$\partial^\mu J_\mu = 0, \quad (9.242)$$

что приводит к тождеству Уорда для вершинной функции: напри-

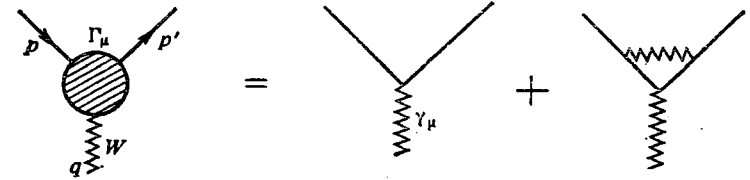


Рис. 9.22. Разложение векторной связи между калибровочным полем и полями материи с точностью до e^2 .

мер, для графа, изображенного на рис. 9.22, амплитуда которого равна

$$W^\mu \langle p' | J_\mu | p \rangle, \quad (9.243)$$

из сохранения тока следует равенство

$$(p' - p)^\mu J_\mu = q^\mu J_\mu = 0, \quad (9.244)$$

т. е. тождество Уорда.

Однако в теории Салама — Вайнберга или в более общем случае калибровочной теории слабых взаимодействий, которую обычно называют *квантовой ароматодинамикой* или КАД, существует также *аксиально-векторная* связь между материей и калибровочными полями, $g_A J_\mu^5 W^\mu$, где

$$J_\mu^5 = \bar{\psi}\gamma_\mu\gamma_5\psi. \quad (9.245)$$

Используя уравнение Дирака, мы видим, что

$$\partial^\mu J_\mu^5 = 2im\bar{\psi}\gamma_5\psi \equiv 2mJ_5. \quad (9.246)$$

Величину J_5 можно назвать киральной плотностью. Аксиальный ток не сохраняется, если не выполнено равенство $m = 0$. Однако даже в случае $m \neq 0$ соотношение (9.246) приводит к *аксиальному тождеству Уорда*. Чтобы избежать усложнений, мы ниже будем рассматривать ситуацию, когда $m = 0$, так что аксиальный ток строго сохраняется. Это упрощение заведомо оправдано, поскольку усложнения, возникающие в массивном случае, исключаются, если положить $m = 0$.

Утверждения, сделанные выше, безусловно являются чисто формальными. Теперь мы приступаем к их проверке в рамках *теории возмущений*. Для случая векторной связи это было сделано в гл. 7. Разложение вершинной функции Γ_μ с точностью до e^2 дает две диаграммы, изображенные на рис. 9.22. и мы убеждаемся, что тождество Уорда

$$(p' - p)^\mu \Gamma_\mu = 0$$

¹⁾ Kluberg-Stern H., Zuber J.-B. Phys. Rev. D12, 427, 482, 3159 (1975).

²⁾ Joglekar S. D., Lee B. W. Ann. of Physics, 97, 160 (1976).

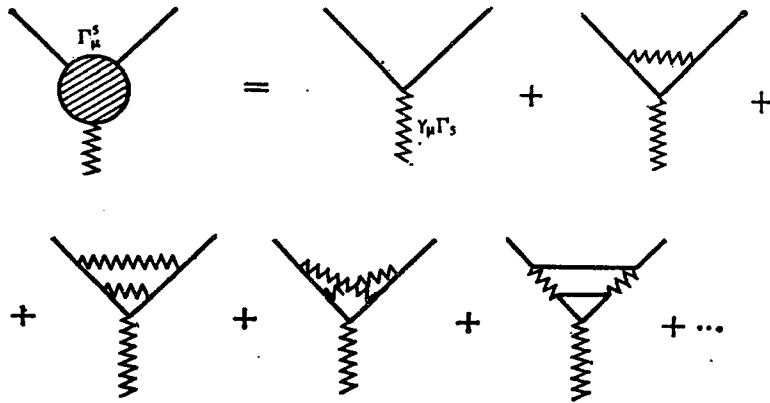


Рис. 9.23. Разложение аксиальной векторной вершины для калибровочного поля и полей материи с точностью до ϵ^6 .

действительно выполняется.

Аналогичное разложение аксиальной вершины с точностью до ϵ^5 изображено на рис. 9.23. В каждой диаграмме, входящей в это разложение, нижняя вершина равна $\gamma_\mu \gamma_5$, т. е. является аксиальной связью, а остальные являются векторными связями. Мы обнаруживаем, что последний граф, содержащий «треугольную» замкнутую петлю полей Ферми, не удовлетворяет аксиальным тождествам Уорда, что приводит к так называемой аксиальной, или киральной, или треугольной аномалии. Важное значение этой аномалии связано с тем фактом, что, как уже подчеркивалось, тождество Уорда (а также его обобщение на неабелев случай) является существенным элементом при доказательстве перенормируемости калибровочных теорий. Таким образом, треугольная аномалия угрожает перенормируемости модели Салама — Вайнберга, что было бы бедствием! Единственный путь к спасению перенормируемости состоит в том, чтобы обеспечить равенство нулю *полного* вклада треугольных графов, т. е. чтобы аномалии сокращались. Это накладывает условие на фермионное содержание теории. Замечательно, что это условие удовлетворяется в модели Салама — Вайнберга в случае, если имеются кварки и лептоны и если кварки обладают дополнительным квантовым числом (цветом), связанным с $SU(3)$ -симметрией.

Необходимо рассмотреть ряд соображений, к чему мы сейчас приступаем, однако, прежде чем сделать это, стоит заметить, что в действительности киральная аномалия является довольно старой проблемой, с ней впервые столкнулись при анализе распада $\pi^0 \rightarrow 2\gamma$ Стейнбергер в 1949 г. и Швингер в 1951 г. В течение некоторого времени этой проблемой пренебрегали, однако она вновь

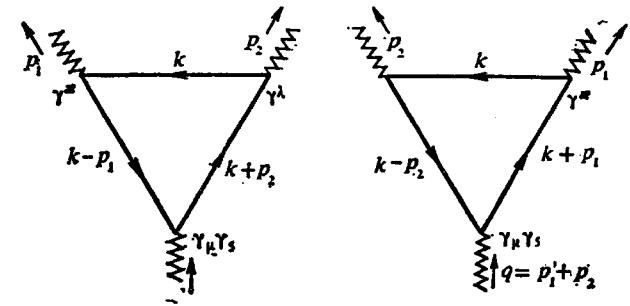


Рис. 9.24. Треугольные графы.

всплыла на поверхность в работе Сазерленда в 1966 г. Он показал, что применение алгебры токов и ЧСАТ к распаду π^0 дает очень небольшое значение скорости распада (в действительности это значение обращается в нуль в нефизическом пределе $m_\pi \rightarrow 0$), что противоречит эксперименту. Позднее Адлер, Белл и Джайв осознали, какую важную роль играет аксиальная аномалия в парадоксе Сазерленда. Эту аномалию иногда называют аномалией Адлера — Белла — Джайва, или АБД-аномалией. Парадокс Сазерленда исчезает, если применить условие сокращения аномалий.

Рассмотрим теперь фермионный треугольник, изображенный на рис. 9.23. [В действительности вклад в величину Γ_μ^5 дает не только треугольник AVV (A — вершина $\gamma_\mu \gamma_5$, V — вершина γ_μ), но и треугольник AAA , а также квадратная и пятиугольная конфигурации, которые входят в более высокие порядки. Однако оказывается, что когда аномалия сокращается в графе VVA , то она исчезает и во всех указанных графах, так что достаточно рассмотреть треугольник VVA . Оказывается также, что учет радиационных поправок не затрагивает аномалии. Таким образом, и с этой точки зрения нам необходимо рассмотреть только простейший граф VVA . За детальным изложением этих вопросов читатель отсылается к литературе.] Имеются два вклада в него, изображенные на рис. 9.24. Фермионный вклад в амплитуду (т. е. пропагаторы калибровочных полей опущены) имеет вид

$$T_{\lambda\mu}(p_1, p_2) = S_{\lambda\mu}(p_1, p_2) + S_{\lambda\mu}(p_2, p_1), \tag{9.247}$$

так как второй граф, изображенный на рис. 9.24, получается из первого заменой $\lambda \leftrightarrow \mu$, $p_1 \leftrightarrow p_2$. Правила Фейнмана (если опустить константу связи, которая в реальных процессах зависит от θ_W), дают

$$S_{\lambda\mu}(p_1, p_2) = -(-i)^3 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \times$$

$$\times \text{Tr} \left(\gamma_x \frac{i}{\widehat{k} - \widehat{p}_1 = m} \gamma_\mu \gamma_5 \frac{i}{\widehat{k} + \widehat{p}_2 = m} \gamma_\lambda \frac{i}{\widehat{k} - m} \right).$$

Полагая $m = 0$ (см. выше), мы получаем

$$S_{x\lambda\mu} = -(2\pi)^{-4} \int d^4k \frac{\text{Tr} \left[\gamma_x (\widehat{k} - \widehat{p}_1) \gamma_\mu \gamma_5 (\widehat{k} + \widehat{p}_2) \gamma_\lambda \widehat{k} \right]}{(k - p_1)^2 (k + p_2)^2 k^2}. \quad (9.248)$$

Требуемые тождества Уорда, вытекающие из законов сохранения векторного и аксиального токов в трех вершинах, имеют вид

$$(p_1 + p_2)^\mu T_{x\lambda\mu} = 0 \quad (A),$$

$$p_1^\alpha T_{x\lambda\mu} = 0 \quad (V), \quad (9.249 \text{ а, б, в})$$

$$p_2^\alpha T_{x\lambda\mu} = 0 \quad (V).$$

Тождества (V) следуют из закона сохранения заряда. Мы покажем, что если эти два тождества выполняются, то тождество (A), т. е. (9.249а), не выполняется, пока мы не наложим дополнительные условия.

Попутно заметим, что интеграл S линейно расходится. Кроме того, он симметричен относительно подстановки $(p_1, x) \leftrightarrow (p_2, \lambda)$, и, следовательно, присутствие перекрестного графа в выражении (9.247) просто дает множитель 2. Таким образом, тождества (9.249) должны выполняться для самой величины $S_{x\lambda\mu}$.

Покажем далее, следуя *наивной* и *неправильной* аргументации, что *все* соотношения (9.249) кажутся выполненными¹. Затем нам предстоит выяснить, в чем состояло наше заблуждение. Рассмотрим сначала соотношение (9.249а). Мы имеем

$$(p_1 + p_2)^\mu S_{x\lambda\mu} = -(2\pi)^{-4} \int d^4k \frac{\text{Tr} \left[\gamma_x (\widehat{k} - \widehat{p}_1) (\widehat{p}_1 + \widehat{p}_2) \gamma_5 (\widehat{k} + \widehat{p}_2) \gamma_\lambda \widehat{k} \right]}{k^2 (k - p_1)^2 (k + p_2)^2}. \quad (9.250)$$

Используя тождество

$$(\widehat{p}_1 + \widehat{p}_2) \gamma_5 = -(\widehat{k} - \widehat{p}_1) \gamma_5 - \gamma_5 (\widehat{k} + \widehat{p}_2),$$

преобразуем выражение (9.250) к виду

$$(p_1 + p_2)^\mu S_{x\lambda\mu} = (2\pi)^{-4} \int d^4k \frac{\text{Tr} \left[\gamma_x \gamma_5 (\widehat{k} + \widehat{p}_2) \gamma_\lambda \widehat{k} \right]}{k^2 (k + p_2)^2} +$$

¹ Мы следуем здесь аргументации, данной в лекциях Р. Н. Фрамптона (1978) из Университета шт. Огайо.

$$+ (2\pi)^{-4} \int d^4k \frac{\text{Tr} \left[\gamma_x (\widehat{k} - \widehat{p}_1) \gamma_5 \gamma_\lambda \widehat{k} \right]}{k^2 (k - p_1)^2}. \quad (9.251)$$

Из соображений симметрии это выражение должно равняться нулю. Поскольку величина $S_{x\lambda\mu}$ является псевдотензором (обладает аномальной четностью) ранга 3, левая часть равенства (9.251) является псевдотензором ранга 2. Однако каждый из интегралов в правой части зависит только от *одного* импульса, следовательно, равенство невозможно, вследствие чего правая часть должна равняться нулю, и мы убеждаемся, что соотношение (9.249а) выполнено.

Рассмотрим теперь соотношение (9.249б). Мы имеем

$$p_1^\alpha S_{x\lambda\mu} = - \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{\text{Tr} \left[\widehat{p}_1 (\widehat{k} - \widehat{p}_1) \gamma_\mu \gamma_5 (\widehat{k} + \widehat{p}_2) \gamma_\lambda \widehat{k} \right]}{k^2 (k - p_1)^2 (k + p_2)^2}. \quad (9.252)$$

Произведя замену переменной

$$k'_\mu = (k + p_2)_\mu \quad (9.253)$$

и используя свойство цикличности (и будучи невнимательными), мы получаем выражение

$$p_1^\alpha S_{x\lambda\mu} = - \int \frac{d^4k'}{(2\pi)^4} \frac{\text{Tr} \left[(\widehat{k}' - \widehat{p}_2) \widehat{p}_1 (\widehat{k}' - \widehat{p}_1 - \widehat{p}_2) \gamma_\mu \gamma_5 \widehat{k}' \gamma_\lambda \right]}{(k' - p_2)^2 (k' - p_1 - p_2)^2 k'^2}. \quad (9.254)$$

Далее, используя тождество

$$\widehat{p}_1 = (\widehat{k}' - \widehat{p}_2) - (\widehat{k}' - \widehat{p}_1 - \widehat{p}_2),$$

получаем выражение

$$p_1^\alpha S_{x\lambda\mu} = - \int \frac{d^4k'}{(2\pi)^4} \left\{ \frac{\text{Tr} \left[(\widehat{k}' - \widehat{p}_1 - \widehat{p}_2) \gamma_\mu \gamma_5 \widehat{k}' \gamma_\lambda \right]}{k'^2 (k' - p_1 - p_2)^2} - \frac{\text{Tr} \left[(\widehat{k}' - \widehat{p}_2) \gamma_\mu \gamma_5 \widehat{k}' \gamma_\lambda \right]}{k'^2 (k' - p_2)^2} \right\},$$

которое должно давать нуль по тем же соображениям, что и выше, т. е. соотношение (9.249б) выполнено. Аналогично легко убедиться, что выполнено соотношение (9.249в). Для этого произведем замену переменной $k'' = k - p_1$ и положим $\widehat{p}_2 = (\widehat{k}'' + \widehat{p}_1 + \widehat{p}_2) - (\widehat{k}'' + p_1)$. Как будто мы доказали справедливость трех тождеств Уорда (9.249), однако наше доказательство содержало ошибку.

Причина нашего заблуждения связана с тем, что замена переменной интегрирования [такая, как (9.253)] в *линейно расходя-*

щется интеграле изменяет значение интеграла на конечную величину. Расходящаяся часть величины $S_{\alpha\nu\mu}$ равна

$$S_{\alpha\lambda\mu} = - \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{\text{Tr} \left(\gamma_\alpha \widehat{k} \gamma_\mu \gamma_5 \widehat{k} \gamma_\lambda \widehat{k} \right)}{k^6} \quad (9.255)$$

Если переменная k преобразуется с помощью сдвига $k' = k + a$, то при этом изменение величины $S_{\alpha\nu\mu}$ вычисляется с помощью следующих соображений:

$$\int d^4 k F(k) = \int d^4 k' F(k' - a) = \int d^4 k' \left[F(k') - a \frac{\partial F}{\partial k} + \dots \right].$$

Последний член преобразуется в поверхностный интеграл с помощью теоремы Гаусса. В нашем случае $F \sim k^{-3}$; поскольку площадь гиперповерхности $\sim k^{-3}$, поверхностный интеграл не равен нулю. Чтобы найти его значение, положим в (9.255) $k'_\mu = (k + a)_\mu$; это дает

$$S'_{\alpha\lambda\mu} = S_{\alpha\lambda\mu} + U_{\alpha\lambda\mu\nu} a^\nu, \quad (9.256)$$

где

$$U_{\alpha\lambda\mu\nu} = - \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{\partial}{\partial k^\nu} \left[\frac{\text{Tr} \left(\gamma_\alpha \widehat{k} \gamma_\mu \gamma_5 \widehat{k} \gamma_\lambda \widehat{k} \right)}{k^6} \right] = \\ = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{\partial}{\partial k^\nu} \left[\frac{\text{Tr} \left(\gamma_5 \widehat{k} \gamma_\lambda \widehat{k} \gamma_\alpha \widehat{k} \gamma_\mu \right)}{k^6} \right]. \quad (9.257)$$

Используем теперь формулу для следа

$$\text{Tr} (\gamma_5 \gamma_\rho \gamma_\nu \gamma_\tau \gamma_\alpha \gamma_\mu) = 4i \varepsilon_{\alpha\tau\mu\rho} (\delta_\nu^\alpha g_{\rho\tau} - \delta_\nu^\tau g_{\rho\alpha} + \delta_\nu^\rho g_{\tau\alpha} - \delta_\nu^\alpha g_{\rho\tau}) - \\ - 4i \varepsilon_{\rho\nu\delta\alpha} (\delta_\tau^\alpha g_{\rho\mu} - \delta_\tau^\mu g_{\rho\alpha} + \delta_\tau^\rho g_{\alpha\mu} - \delta_\tau^\alpha g_{\rho\mu}), \quad (9.258)$$

что дает

$$\text{Tr} (\gamma_5 \widehat{k} \gamma_\lambda \widehat{k} \gamma_\alpha \widehat{k} \gamma_\mu) = 4i \varepsilon_{\alpha\lambda\mu\alpha} k^\alpha k^\alpha.$$

Следовательно,

$$U_{\alpha\lambda\mu\nu} = - \frac{4i}{(2\pi)^4} \varepsilon_{\alpha\lambda\mu\alpha} \int d^4 k \frac{\partial}{\partial k^\nu} \left(\frac{k^\alpha}{k^4} \right). \quad (9.259)$$

Перейдем в этом интеграле к евклидову пространству таким образом, что $k_\alpha = ik_0$. Заметим, далее, что при $\alpha \neq \nu$ этот интеграл обращается в нуль вследствие нечетности подынтегрального выражения по компонентам k , при $\alpha = \nu$ мы имеем $(k^\alpha)^2 =$

$= (1/4) k^2$ ($\alpha = 1, \dots, 4$)¹⁾. В результате преобразование к 3-мерному поверхностному интегралу дает (с учетом соотношения $\oint d\Omega = 2\pi^2$ в случае S^3)

$$U_{\alpha\lambda\mu\nu} = \frac{4}{(2\pi)^4} \varepsilon_{\alpha\lambda\mu\alpha} \int d^4 k_E \frac{\partial}{\partial k^\nu} \left(\frac{k^\alpha}{k^4} \right) = \\ = \frac{1}{(2\pi)^4} \varepsilon_{\alpha\lambda\mu\nu} \int d^4 k_E \frac{\partial}{\partial k^\alpha} \left(\frac{k^\alpha}{k^4} \right) = \\ = \frac{1}{(2\pi)^4} \varepsilon_{\alpha\lambda\mu\nu} \oint \left(d^3 S_E \right)_\alpha \frac{k^\alpha}{k^4} = \\ = \frac{1}{(2\pi)^4} \varepsilon_{\alpha\lambda\mu\nu} \oint \frac{k_\alpha}{k} (k^\alpha d\Omega) \frac{k^\alpha}{k^4} = \frac{1}{8\pi^2} \varepsilon_{\alpha\lambda\mu\nu}. \quad (9.260)$$

Возвращаясь к замене переменных, введенной в (9.253), мы видим, что благодаря соотношениям (9.256) и (9.260) величину $S_{\alpha\lambda\mu}$ следует заменить выражением

$$S_{\alpha\lambda\mu} (p_1, p_2) = \frac{1}{8\pi^2} \varepsilon_{\alpha\lambda\mu\nu} p_2^\nu,$$

и, следовательно, тождество Уорда, соответствующее (9.249б), теперь имеет вид

$$p_1^\alpha S_{\alpha\lambda\mu} = \frac{1}{8\pi^2} \varepsilon_{\alpha\lambda\mu\nu} p_1^\alpha p_2^\nu. \quad (9.261)$$

Аналогично соотношение (9.249в) принимает вид

$$p_2^\lambda S_{\alpha\lambda\mu} = - \frac{1}{8\pi^2} \varepsilon_{\alpha\lambda\mu\nu} p_2^\lambda p_1^\nu, \quad (9.262)$$

в то время как тождество Уорда (9.249а) по-прежнему выполняется. Мы видим, что невозможно одновременно удовлетворить как векторному, так и аксиально-векторному тождеству Уорда. Однако тождество V имеет больше права считаться неприкосновенным, поскольку оно соответствует сохранению заряда. Далее, с целью

¹⁾ Это равенство справедливо только под знаком интеграла по угловой части 4-мерного объема. При преобразовании интеграла (9.259) проще воспользоваться очевидными соотношениями

$$\int k_E^\alpha k_E^\nu d\Omega = \frac{k^2}{4} \delta_{\alpha\nu} \int d\Omega = \frac{k^2 \pi^2}{2} \delta_{\alpha\nu},$$

$$\int d^4 k_E \frac{\partial}{\partial k_E^\nu} \left(k_E^\alpha f(E) \right) = \frac{\delta_{\alpha\nu}}{4} \int d^4 k_E \frac{\partial}{\partial k_E^\alpha} \left(k_E^\alpha f(k) \right). \quad \text{— Прим. ред.}$$

сохранить равенства (9.249б, в) мы переопределим амплитуду, отвечающую треугольному графу [ср. (9.247)], заменив ее выражением

$$T'_{\lambda\mu}(p_1, p_2) = S_{\lambda\mu}(p_1, p_2) + S_{\lambda\mu}(p_2, p_1) + \frac{1}{4\pi^2} \varepsilon_{\lambda\mu\nu} (p_1 - p_2)^\nu, \quad (9.263)$$

которое удовлетворяет тождествам Уорда [ср. (9.249)]

$$p_1^\lambda T'_{\lambda\mu} = 0 \quad (V),$$

$$p_2^\lambda T'_{\lambda\mu} = 0 \quad (V), \quad (9.264 \text{ а, б, в})$$

$$(p_1 + p_2)^\lambda T'_{\lambda\mu} = \frac{1}{(2\pi)^2} \varepsilon_{\lambda\mu\nu} p_2^\lambda p_1^\nu \quad (A).$$

Теперь векторные тождества Уорда удовлетворяются, тогда как аксиальное тождество Уорда содержит аномалию, которую невозможно исключить ни в одном методе регуляризации. Действительно, в размерной регуляризации косвенным указанием на существование аномалии уже являлось упомянутое выше отсутствие возможности построить обобщение матрицы γ_5 на случай d измерений.

Повторяя вышеприведенные расчеты в случае массивных фермионов $m \neq 0$, мы видим, что аксиальная аномалия не меняется. С другой стороны, в безмассовом случае тот факт, что тождество Уорда (9.264в) содержит аномалию, говорит о том, что аксиальный ток J_μ^5 не сохраняется, т. е. в соотношении (9.246) должен присутствовать дополнительный член. В действительности нетрудно видеть, что замена соотношения (9.246) соотношением

$$\partial^\mu J_\mu^5 = 2mJ_5 + \frac{e^2}{8\pi^2} F_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu}, \quad (9.265)$$

где тензор $\tilde{F}^{\mu\nu}$ (дуальный по отношению к $F^{\mu\nu}$) определен равенством (2.234), обеспечивает выполнение соотношения (9.264в), поскольку

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu} &= \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) (\partial^\rho A^\sigma - \partial^\sigma A^\rho) = \\ &= 2\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \partial^\mu A^\nu \partial^\rho A^\sigma = \partial^\mu (2\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} A^\nu \partial^\rho A^\sigma). \end{aligned} \quad (9.266)$$

Далее, вследствие того что этот член представляет собой полную дивергенцию, дивергенция «нового» аксиального тока

$$\tilde{J}_\mu^5 = J_\mu^5 - \frac{e^2}{4\pi^2} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} A^\nu \partial^\rho A^\sigma \quad (9.267)$$

равна нулю в пределе $m = 0$:

$$\partial^\mu J_\mu^5 = 0 \quad (m = 0).$$

Однако этот ток не является калибровочно-инвариантным и не может рассматриваться как физический ток.

Сокращение аномалий

Обнаружение аномалий в калибровочных теориях особенно неприятно, поскольку из того факта, что удовлетворяются не все тождества Уорда, следует, что калибровочные теории, содержащие как аксиальные, так и векторные токи, в конечном счете не являются перенормируемыми при условии, что в треугольную диаграмму дает вклад только один тип фермионов. Единственная надежда

сохранить перенормируемость связана с возможностью присутствия нескольких фермионов, вклады которых сокращают друг друга. Модель Салама — Вайнберга включает аксиальные векторные токи и поэтому является основой для проверки этой идеи.

В этой модели существует много процессов, включающих треугольный граф, причем оказывается, что во всех примерах имеет место одинаковое условие сокращения расходимостей. Рассмотрим

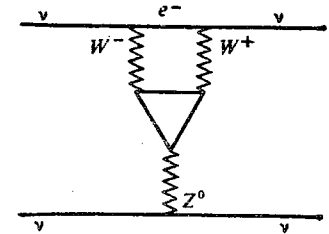


Рис. 9.25. Вклад в $\nu-\nu$ -рассеяние, содержащий треугольную диаграмму в модели Салама — Вайнберга.

наиболее простой случай, соответствующий диаграмме, изображенной на рис. 9.25 и показывающий вклад в рассеяние нейтрино на нейтрино треугольной диаграммы, вдоль которой распространяются фермионы, входящие в теорию, а концы отвечают взаимодействию с W^+ , W^- и Z^0 -частицами. Конечно, на практике процесс такого высокого порядка дает крайне малый вклад в процесс рассеяния нейтрино, однако принципиально важно, чтобы этот вклад в точности был равен нулю, иначе перенормируемость будет утрачена. Пусть M_a , M_b и M_c являются матрицами констант взаимодействия фермион — калибровочный бозон в трех вершинах треугольного графа. Для модели Салама — Вайнберга характерно, что левые фермионы взаимодействуют иначе, чем правые. Действительно, правые частицы не обладают слабым изоспином и, следовательно, не взаимодействуют с W^+ - и W^- -бозонами (что и делает данный пример простым). Однако в общем случае вклад левых фермионов в треугольную диаграмму пропорционален величине

$$\begin{aligned} (1 - \gamma_5)(\text{Tr} M_a^L M_b^L M_c^L + \text{Tr} M_a^L M_c^L M_b^L) = \\ = (1 - \gamma_5) \text{Tr} M_a^L \{M_b^L, M_c^L\}, \end{aligned} \quad (9.268)$$

причем два члена, входящие в эту формулу, соответствуют двум диаграммам, изображенным на рис. 9.24. Аналогичным образом правые фермионы дают вклад, пропорциональный величине

$$(1 + \gamma_5) \text{Tr} M_a^R \{M_b^R, M_c^R\}. \quad (9.269)$$

Киральная аномалия обращается в нуль, если члены, содержащие γ_5 , сокращаются:

$$\text{Tr} M_a^L \{M_b^L, M_c^L\} = \text{Tr} M_a^R \{M_b^R, M_c^R\}. \quad (9.270)$$

Обращаясь к рис. 9.25 и обозначая W^- , W^+ и Z -вершины через a , b и c соответственно, мы получаем из лагранжиана (8.85)

$$M_a^L = g I_+^W, \quad M_b^L = g I_-^W, \quad (9.271)$$

где $I_{\pm}^W = (1/2)(I_1^W \pm iI_2^W)$, а величины I_1^W и I_2^W являются компонентами слабого изоспина. Чтобы найти величину M_c^L , мы перепишем член, отвечающий взаимодействию с Z -бозоном в выражении (8.85) (при $\theta = \theta_W$), в виде

$$\frac{g}{\cos \theta} \left[\frac{1}{2} (\bar{\nu} \gamma^\mu \nu - \bar{e}_L \gamma^\mu e_L) + \sin^2 \theta (\bar{e}_L \gamma^\mu e_L + \bar{e}_R \gamma^\mu e_R) \right] Z_\mu = g \sec \theta (J_\mu^3 + \sin^2 \theta J_{em}^\mu) Z_\mu. \quad (9.272)$$

Следовательно,

$$M_c^L = g \sec \theta (I_3^W + \sin^2 \theta Q). \quad (9.273)$$

Поскольку правые фермионы не взаимодействуют с W^\pm -бозонами, правая часть соотношения (9.270) равна нулю и оно принимает вид

$$\text{Tr} (I_{3L}^W + \sin^2 \theta Q_L) \{I_{+L}^W, I_{-L}^W\} = 0.$$

Поскольку $\{I_+, I_-\} = 1$ и $\text{Tr} I_3 = (1/2)\text{Tr} \tau_3 = 0$, это уравнение принимает вид

$$\sum_l Q_L^l = 0, \quad (9.274)$$

т. е. сумма электрических зарядов левых фермионов должна равняться нулю. В модели Салама — Вайнберга, включающей только лептоны, это условие не выполняется. Однако, если включены также и кварки, т. е. адроны, мы имеем в случае одного поколения и кварков с тремя цветами

$$Q_e + Q_{\nu_e} + 3(Q_u + Q_d) = -1 + 0 + 3\left(\frac{2}{3} - \frac{1}{3}\right) = 0. \quad (9.275)$$

Киральная аномалия исчезает, и перенормируемость восстанавливается. Данное соотношение остается в неприкосновенности, когда включаются другие поколения частиц с такими же зарядами, как в первом поколении. Так обстоит дело в случаях (μ^- , ν_μ , c , s) и (τ^- , ν_τ , t , b). Таким образом, условие отсутствия аномалий (9.274), по-видимому, проливает некоторый свет на лептон-адронную симметрию, однако допускает произвольное число поколений. Решение проблемы поколений следует искать, основываясь на каких-то других соображениях.

§ 9.11. Перенормировка теории Янга — Миллса со спонтанным нарушением симметрии

Теперь мы подошли к заключительному вопросу, имеющему важное значение для применения калибровочных теорий к физике частиц. Это доказательство перенормируемости теорий Янга — Миллса со спонтанным нарушением симметрии. С формальной точки зрения нам необходимо доказать, что структура расходимостей в неабелевых калибровочных теориях не затрагивается спонтанным нарушением симметрии. На первый взгляд кажется, что присутствие массивных векторных мезонов, являющееся, разумеется, следствием этих теорий, разрушает перенормируемость. Однако можно выбрать калибровку (так называемую калибровку т'Хофта) таким образом, чтобы перенормируемость восстановилась. Мы опишем сначала калибровки т'Хофта, а затем, используя эффективный потенциал, покажем более формально, что спонтанное нарушение симметрии не нарушает перенормируемости калибровочных теорий. Наконец, будут рассмотрены некоторые следствия из теории эффективного потенциала.

Калибровки т'Хофта

В гл. 8 мы видели, что спонтанное нарушение калибровочной симметрии делает кванты калибровочного поля массивными. Для наших целей достаточно рассмотреть абелев случай, где этот вывод следует из лагранжиана (8.39). Сравнивая его с лагранжианом Прока (4.95), мы видим, что он описывает векторный мезон («фотон») с массой

$$M = \sqrt{2} ea. \quad (9.276)$$

Теперь покажем, почему мы предполагаем, что теории с массивными векторными частицами перенормируемы. Чтобы доказать, это, достаточно просто определить пропагатор. Мы находим его,

как обычно, определяя величину, обратную по отношению к квадратичной (по A_μ) части \mathcal{L} . Опуская поверхностные члены, запишем выражение (4.95) в виде

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} A^\mu \left[g_{\mu\nu} (\square + M^2) - \partial_\mu \partial_\nu \right] A^\nu. \quad (9.277)$$

В импульсном пространстве оператор, заключенный в квадратные скобки, равен выражению

$$g_{\mu\nu}(-k^2 + M^2) + k_\mu k_\nu.$$

Записывая обратный оператор в виде $A g^{\nu\rho} + B k^\nu k^\rho$, мы имеем

$$\left[g_{\mu\nu}(-k^2 + M^2) + k_\mu k_\nu \right] \left[A g^{\nu\rho} + B k^\nu k^\rho \right] = \delta_\mu^\rho,$$

$$A(-k^2 + M^2) \delta_\mu^\rho + k_\mu k^\rho (A + B M^2) = \delta_\mu^\rho,$$

$$A = \frac{-1}{k^2 - M^2}, \quad B = -\frac{A}{M^2},$$

и, таким образом, пропагатор векторного мезона имеет вид

$$D_{\mu\nu} = \frac{1}{k^2 - M^2} \left(-g^{\mu\nu} + \frac{k^\mu k^\nu}{M^2} \right). \quad (9.278)$$

Огромный недостаток этого пропагатора состоит в том, что при $k \rightarrow \infty$ мы имеем $D_{\mu\nu} \rightarrow \text{const}$, тогда как пропагаторы скалярных частиц и фотонов при больших k ведут себя как k^{-2} . Основываясь на подсчете степеней, легко видеть, что перенормируемость, очевидно, утрачена, поскольку если векторные частицы обладают пропагаторами вида (9.278), то условная степень расходимости произвольной диаграммы Фейнмана будет задаваться вместо (9.217) следующим соотношением:

$$D = 4L - 2G_l + n_s + n_g. \quad (9.279)$$

Равенства (9.218) и (9.219) не меняются, и в результате вместо соотношения (9.220) мы имеем

$$D = 4 - 4n_k + 3n_s + n_g - 2V_g. \quad (9.280)$$

Вследствие того что степень расходимости D возрастает вместе с n_s и n_g , теория является неперенормируемой.

Однако мы должны напомнить, что выражение (8.39) было получено нами из первоначального лагранжиана (8.37) с помощью калибровочного преобразования, специально подобранного с целью избавиться от нежелательного смешанного члена $A^\mu \partial_\mu \varphi_2$. Это эквивалентно добавлению члена, фиксирующего калибровку. Однако, вообще говоря, эти нежелательные члены исчезают, если к вы-

ражению добавить член, фиксирующий калибровку, следующего вида:

$$\mathcal{L}_{GF} = -\frac{1}{2\xi} (\partial_\mu A^\mu + \xi M \varphi_2)^2, \quad (9.281)$$

где ξ — пропагатор, определяющий калибровку. Мы получаем класс калибровок, зависящих от величины ξ , которые называют *калибровками т'Хофта*. Добавляя величину (9.281) к лагранжиану (8.37), мы получаем

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{M^2}{2} A_\mu A^\mu - \frac{1}{2\xi} \partial_\mu A^\mu \partial_\nu A^\nu + \\ & + \frac{1}{2} (\partial_\mu \varphi_1)^2 - 2\lambda a^2 \varphi_1^2 + \frac{1}{2} (\partial_\mu \varphi_2)^2 - \frac{\xi}{2} M^2 \varphi_2^2 + \\ & + \text{члены, соответствующие взаимодействию.} \end{aligned} \quad (9.282)$$

Член, квадратичный по A^μ , имеет вид

$$\frac{1}{2} A^\mu \left[g_{\mu\nu} (\square + M^2) - \partial_\mu \partial_\nu \left(1 - \frac{1}{\xi} \right) \right] A^\nu.$$

Пропагатор векторного мезона получается путем рассуждений, с помощью которых мы получили выражение (9.277) из лагранжиана (9.278). Мы получаем

$$D_{\mu\nu} = \frac{1}{k^2 - M^2} \left[-g^{\mu\nu} + (1 - \xi) \frac{k_\mu k_\nu}{k^2 - \xi M^2} \right]. \quad (9.283)$$

В случае конечных ξ при $k_\mu \rightarrow \infty$ величина $D_{\mu\nu} \rightarrow k^{-2}$; следовательно, перенормируемость *восстановлена*. Мы имеем *перенормируемую калибровку* (или *R-калибровку*). Поле φ_2 вновь появилось в лагранжиане (9.282). Ему соответствует пропагатор с полюсом в точке $k^2 = \xi M^2$. Мы знаем, что поле φ_2 является нефизическим [имеются только четыре степени свободы, см. (8.41)], и поскольку мы имеем массивное поле со спином 1, то допускается еще одно скалярное поле, т. е. φ_1 , и можно показать, что этот полюс сокращает полюс векторного пропагатора (9.283), также расположенный при $k^2 = \xi M^2$. Оба этих полюса нефизические.

Параметр ξ можно выбирать по-разному. Например, случай $\xi = 1$ мы называем калибровкой Фейнмана, поскольку она дает выражение для пропагатора, аналогичное соответствующему выражению в КЭД. Случай $\xi = 0$ мы по той же причине называем калибровкой Ландау. Случай $\xi \rightarrow \infty$ возвращает нас к пропагатору (9.278), который приводит к неперенормируемости, однако при этом поле φ_2 является *явно* нефизическим.

Таким образом, мы имеем класс калибровок. Калибровки с конечными ξ (*R-калибровки*) являются *явно* перенормируемыми,

но они усложнены присутствием пяти полевых компонент, тогда как требуются четыре компоненты. Калибровки с $\xi \rightarrow \infty$ не являются явно перенормируемыми, однако это физические калибровки в том смысле, что в условии унитарности дают вклад только четыре поля (U -калибровка). Поскольку элементы S -матрицы не зависят от калибровки, то они не зависят от ξ и, следовательно, имеют физический смысл и приводят к перенормируемой теории.

Наконец, следует заметить, что проведенный анализ, относящийся в абелевой калибровочной теории, также применим и к неабелеву случаю. За деталями читатель отсылается к литературе.

Эффективный потенциал

Понятие эффективного потенциала является весьма плодотворным в теориях со спонтанно нарушенной симметрией. Оно дает возможность рассматривать эти теории по существу так же, как теории с ненарушенной симметрией, и вычислять квантовые поправки к классической картине спонтанного нарушения симметрии, рассмотренной в предыдущей главе. Это приводит к интересным выводам, относящимся к связи между радиационными поправками и спонтанным нарушением симметрии, которых мы коснемся в конце настоящей главы.

Рассмотрим для простоты случай действительного скалярного поля со следующим лагранжианом и классическим действием:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \varphi)^2 - V(\varphi); \quad V(\varphi) = \frac{m^2}{2} \varphi^2 - \frac{g}{4!} \varphi^4,$$

$$S[\varphi] = \int d^4x \mathcal{L}(\varphi(x)). \quad (9.284)$$

Лагранжиан инвариантен относительно подстановки $\varphi \rightarrow -\varphi$, однако этой симметрией не обладает решение уравнения

$$\left. \frac{dV}{d\varphi} \right|_{\varphi=\varphi_0} = 0, \quad (9.285)$$

где $\varphi_0 \neq 0$. Симметрия спонтанно нарушена. Эти свойства теории являются классическими. Квантовые свойства привносятся петлями (напомним, что петлевое разложение является разложением по \hbar), и расходимости, которые они содержат, делают необходимой перенормировку. Перенормировочные условия [см., например, соотношения (9.37) и (9.42)] формулируются в терминах 1ЧН -функций $\Gamma^{(n)}$. Производящим функционалом для функций $\Gamma^{(n)}(x_1, \dots, x_n)$ является $\Gamma[\varphi]$. Следовательно, чтобы полностью учесть квантовые эффекты, мы должны работать с величиной $\Gamma[\varphi]$. Ее называют *эффективным действием*. Это название будет оправдано ниже.

Связный производящий функционал \mathcal{W} определяется соотношением [см. (5.68), (6.66) и (6.105)]

$$e^{i\mathcal{W}[J]} = \langle 0^+ | 0^- \rangle_J. \quad (9.286)$$

Классическое поле φ_c [см. (7.81)] определяется следующим соотношением:

$$\varphi_c = \frac{\delta \mathcal{W}[J]}{\delta J} = \frac{\langle 0^+ | \varphi_{op}(x) | 0^- \rangle_J}{\langle 0^+ | 0^- \rangle_J} \quad (9.287)$$

и, очевидно, зависит от источника $J(x)$. Вакуумное среднее $\langle \varphi \rangle$ определяется следующим образом:

$$\langle \varphi \rangle = \lim_{J \rightarrow 0} \varphi_c. \quad (9.288)$$

Согласно равенству (7.80), величина $\Gamma[\varphi_c]$ равна

$$\Gamma(\varphi_c) = \mathcal{W}[J] - \int dx J(x) \varphi_c(x), \quad (9.289)$$

а согласно равенству (7.81), эта величина удовлетворяет уравнению

$$\frac{\delta \Gamma[\varphi_c]}{\delta \varphi_c(x)} = -J(x). \quad (9.290)$$

При $J(x) \rightarrow 0$ величина $\varphi_c(x)$ превращается в константу, которая, согласно сказанному выше, равна $\langle \varphi \rangle$, следовательно, вакуумное среднее φ является решением уравнения

$$\left. \frac{d\Gamma[\varphi_c]}{d\varphi_c} \right|_{\langle \varphi \rangle} = 0. \quad (9.291)$$

Обычное разложение функционала $\Gamma[\varphi_c]$ по степеням φ_c записывается в виде

$$\Gamma[\varphi_c] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int dx_1 \dots dx_n \times \\ \times \Gamma^{(n)}(x_1, \dots, x_n) \varphi_c(x_1) \dots \varphi_c(x_n) \quad (9.292a)$$

или, что эквивалентно, с помощью преобразования Фурье

$$\Gamma[\varphi_c] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int dp_1 \dots dp_n \delta^4(p_1 + \dots + p_n) \times \\ \times \Gamma^{(n)}(p_1, \dots, p_n) \tilde{\varphi}_c(p_1) \dots \tilde{\varphi}_c(p_n). \quad (9.292b)$$

Альтернативой по отношению к данному разложению является разложение по полю φ_c и его производным, имеющее вид

$$\Gamma(\varphi_c) = \int dx \left[-U(\varphi_c(x)) + \frac{1}{2} (\partial_\mu \varphi_c)^2 Z(\varphi_c(x)) + \dots \right]. \quad (9.293)$$

Функция (не функционал) $U(\varphi_c)$ называется *эффективным потенциалом*. Ниже мы увидим, что в классическом пределе он совпадает с потенциалом V . В случае когда $\varphi_c(x) = \langle \varphi \rangle = a$, где a — константа, все члены в последнем разложении, за исключением первого, обращаются в нуль, следовательно,

$$\Gamma[a] = -\Omega U(a), \quad (9.294)$$

где Ω — полный объем пространства-времени.

Сравнивая разложения (9.292б) и (9.293), мы имеем

$$U(a) = - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} a^n \Gamma^{(n)}(p_i = 0). \quad (9.295)$$

Условия нормировки, такие, как условия (9.37) и (9.42), накладываемые на величины $\Gamma^{(2)}(p_i = 0)$ и $\Gamma^{(4)}(p_i = 0)$, могут быть переформулированы в терминах потенциала U :

$$\left. \frac{\delta S[\varphi, J]}{\delta \varphi(x)} \right|_{\langle \varphi \rangle} = m^2, \quad (9.296)$$

$$-i \left. \frac{d^4 U(\varphi_c)}{d\varphi_c^4} \right|_{\langle \varphi \rangle} = g. \quad (9.297)$$

Кроме того, условие (9.291) для вакуумного среднего принимает вид

$$\left. \frac{dU(\varphi_c)}{d\varphi_c} \right|_{\langle \varphi \rangle} = 0. \quad (9.298)$$

С целью изучить свойства теории со спонтанно нарушенной симметрией мы определим теперь новое квантовое поле φ' :

$$\varphi' = \varphi - \langle \varphi \rangle \quad (9.299)$$

с нулевым вакуумным средним. Таким образом, говоря словами Коулмена [40], «мы воссоздали всю структуру спонтанного нарушения симметрии, существующего в классической теории поля. Единственная разница состоит в том, что, вместо того чтобы работать с классическим потенциалом V , мы работали с эффективным потенциалом U ». Кроме того, поскольку все расходимости теории поглощены контрчленами *до того*, как были наложены условия нормировки (9.296) и (9.297), очевидно, что в теории со спонтанным нарушением симметрии не содержатся новые расходимости

сверх тех, которые имеются в теории с ненарушенной симметрией. Следовательно, снова пользуясь словами Коулмена, «структура расходимостей в перенормируемой теории поля не затрагивается спонтанным нарушением симметрии». Физическое значение этого важного вывода состоит в том, что модель Салама — Вайнберга является перенормируемой потому, что хотя здесь и имеются массивные векторные частицы, которые при обычных условиях нарушали бы перенормируемость, их существование связано со спонтанным нарушением симметрии в неабелевой калибровочной теории. Как мы видели в § 9.9, «чистые» неабелевы калибровочные теории являются перенормируемыми, и как мы только что убедились, спонтанное нарушение симметрии не нарушает перенормируемости. Эти результаты являются кульминационным моментом прекрасной и важной главы физики двадцатого века.

Петлевое разложение эффективного потенциала

Последняя задача, которую нам предстоит решить, — это вычисление эффективного потенциала. Мы используем соотношение (9.289) и начнем с вычисления функционала $W[J]$, применяя метод седловой точки для вычисления функционального интеграла. Предположим, что нам дан интеграл вида

$$I = \int e^{-f(x)} dx \quad (9.300)$$

и функция $f(x)$ стационарна в некоторой точке x_0 ; тогда, разлагая $f(x)$ в окрестности x_0 , мы будем иметь

$$f(x) = f(x_0) + \frac{1}{2} (x - x_0)^2 f''(x_0) + \dots, \quad (9.301)$$

а интеграл запишется в виде

$$I \approx e^{-f(x_0)} \int e^{-\frac{1}{2} (x-x_0)^2 f''(x_0)} dx. \quad (9.302)$$

Таким образом, интеграл примет гауссов вид и его легко вычислить.

Восстанавливая постоянную Планка в определении функционала $W[J]$, мы имеем (опущен общий нормировочный фактор)

$$e^{(i/\hbar) W[J]} = \int \mathcal{D}\varphi e^{(i/\hbar) S[\varphi, J]}, \quad (9.303)$$

где

$$S[\varphi, J] = \int d^4x [\mathcal{L}(\varphi) + \hbar \varphi(x) J(x)]. \quad (9.304)$$

Из соотношений (9.284), (9.285) следует равенство

$$\left. \frac{\delta S[\varphi, J]}{\delta \varphi(x)} \right|_{\varphi_0} = \hbar J(x). \quad (9.305)$$

Разложим теперь действие в окрестности φ_0 :

$$\begin{aligned} S[\varphi, J] &= S[\varphi_0, J] + \int dx [\varphi(x) - \varphi_0] \left. \frac{\delta S}{\delta \varphi(x)} \right|_{\varphi_0} + \\ &+ \frac{1}{2} \int dx dy [\varphi(x) - \varphi_0] [\varphi(y) - \varphi_0] \left. \frac{\delta^2 S}{\delta \varphi(x) \delta \varphi(y)} \right|_{\varphi_0} + \dots = \\ &= S[\varphi_0] + \hbar \int dx \varphi(x) J(x) + \\ &+ \frac{1}{2} \int dx dy [\varphi(x) - \varphi_0] \left. \frac{\delta^2 S}{\delta \varphi(x) \delta \varphi(y)} \right|_{\varphi_0} [\varphi(y) - \varphi_0] + \dots, \quad (9.306) \end{aligned}$$

где мы использовали равенство (9.305). Выполняя функциональное дифференцирование действия (9.284), мы легко убеждаемся, что

$$\left. \frac{\delta^2 S}{\delta \varphi(x) \delta \varphi(y)} \right|_{\varphi_0} = -[\square + V''(\varphi_0)] \delta(x-y). \quad (9.307)$$

Если положить $\varphi' = \varphi - \varphi_0$, то разложение (9.306) принимает вид

$$\begin{aligned} S[\varphi, J] &= S[\varphi_0, J] + \hbar \int dx \varphi'(x) J(x) - \\ &- \frac{1}{2} \int dx \varphi'(x) [\square + V''(\varphi_0)] \varphi'(x) + \dots \end{aligned}$$

Подстановка этого выражения в формулу (9.303) и использование интеграла (9.302) дает (мы пишем φ вместо φ')

$$\begin{aligned} \exp\left(\frac{i}{\hbar} W\right) \exp\left\{\frac{i}{\hbar} S[\varphi_0, J]\right\} \times \\ \times \int \mathcal{D}\varphi \exp\left\{\frac{-i}{\hbar} \frac{1}{2} \int dx \varphi [\square + V''(\varphi_0)] \varphi\right\}. \quad (9.308) \end{aligned}$$

Чтобы получить петлевое разложение (эквивалентное разложению по \hbar), мы заменим поле φ величиной $\hbar^{1/2} \varphi$, исключая, таким образом, постоянную \hbar из второй экспоненты в вышенаписанном выражении. Чтобы вычислить интеграл, стоящий в показателе этой экспоненты, мы перейдем в евклидово пространство (при этом исчезает мнимая единица i) и используем формулу для функционального интеграла (6.30), это дает

$$\exp\left(\frac{i}{\hbar} W\right) = \exp\left\{\frac{i}{\hbar} S[\varphi_0, J]\right\} [\det[\square + V''(\varphi_0)]]^{-1/2}. \quad (9.309)$$

Используя общую формулу

$$\det A = e^{\text{Tr} \ln A}, \quad (9.310)$$

мы получаем

$$W[J] = S[\varphi_0] + \hbar \int dx \varphi_0(x) J(x) + \frac{i\hbar}{2} \text{Tr} \ln [\square + V''(\varphi_0)]. \quad (9.311)$$

Это петлевое разложение функционала $W[J]$, поправочные члены (порядка \hbar^2) опущены.

Чтобы найти петлевое разложение функционала $\Gamma[\varphi_c]$, мы подставим разложение (9.311) в соотношение (9.289). Однако сначала нам необходимо выразить величину $S[\varphi_c]$ через $S[\varphi_0]$, что нетрудно сделать. Полагая $\varphi_0 = \varphi_c - \varphi_1$, мы имеем

$$\begin{aligned} S[\varphi_0] &= S[\varphi_c - \varphi_1] = S[\varphi_c] - \int dx \varphi_1(x) \left. \frac{\delta S}{\delta \varphi(x)} \right|_{\varphi_0} + O(\hbar^2) = \\ &= S[\varphi_c] - \hbar \int dx \varphi_1(x) J(x) + O(\hbar^2). \quad (9.312) \end{aligned}$$

Подстановка выражений (9.311) и (9.312) в формулу (9.289) дает в пределе при $J \rightarrow 0$

$$\Gamma[\varphi_c] = S[\varphi_c] + \frac{i\hbar}{2} \text{Tr} \ln [\square + V''(\varphi_0)]. \quad (9.313)$$

Положим теперь $\varphi_c(x) = a$ (где a — постоянная). Тогда величина $\Gamma[a]$ определяется формулой (9.294), а из формулы (9.284) следует, что $S[a] = -\Omega V(a)$, и, таким образом, соотношение (9.313) дает

$$U(a) = V(a) - \frac{i\hbar}{2} \Omega^{-1} \text{Tr} \ln [\square + V''(a)] \quad (9.314)$$

Это соотношение показывает, что в классическом пределе, т. е. в древесном приближении, эффективный потенциал $U(a)$ совпадает с классическим потенциалом $V(a)$. Этот вывод полностью согласуется с соотношением (9.313), которое показывает, что в этом приближении эффективное действие переходит в классическое.

Поскольку след оператора является суммой (интегралом) его собственных значений, мы можем, переходя в (евклидово) импульсное пространство, записать соотношение (9.314) в виде

$$\begin{aligned} U(a) &= V(a) + \frac{\hbar}{2} \int \frac{dk_E}{(2\pi)^4} \ln [k_E^2 + V''(a)] = \\ &= V(a) + \frac{\hbar}{2} \int \frac{dk_E}{(2\pi)^4} \ln \left(k_E^2 + m^2 - \frac{g a^2}{2}\right). \quad (9.315) \end{aligned}$$

Рассмотрим теперь следующий вопрос. При $m^2 > 0$ (в теории φ^4) вакуум является невырожденным, а при $m^2 < 0$ он вырожден. Какого типа вакуум мы имеем в случае $m^2 = 0$? Ответить на этот

вопрос можно, рассматривая эффективный потенциал. Налагая условие, что перенормированная масса остается равной нулю [соотношение (9.296)], мы видим, что минимум эффективного потенциала достигается при $\langle \varphi \rangle \neq 0$, следовательно, имеет место спонтанное нарушение симметрии, индуцированное радиационными поправками¹⁾.

Приложение А: интегрирование в d измерениях

Мы работаем в d -мерном «пространстве Минковского» с одним временным и $n - 1$ пространственным измерениями. Нас интересуют интегралы вида

$$I(q) = \int \frac{d^d p}{(p^2 + 2pq - m^2)^\alpha} \quad (9A.1)$$

где $p = (p_0, \mathbf{r})$. Введем полярные координаты

$$(p_0, r, \varphi, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{d-3})$$

таким образом, что

$$\begin{aligned} d^d p &= dp_0 r^{d-2} dr d\varphi \sin \theta_1 d\theta_1 \sin^2 \theta_2 d\theta_2 \dots \sin^{d-3} \theta_{d-3} d\theta_{d-3} = \\ &= dp_0 r^{d-2} dr d\varphi \prod_{k=1}^{d-3} \sin^k \theta_k d\theta_k \end{aligned}$$

$$(-\infty < p_0 < \infty, 0 < r < \infty, 0 < \varphi < 2\pi, 0 < \theta_i < \pi).$$

Следовательно,

$$I_d(q) = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} dp_0 \int_0^{\infty} r^{d-2} dr \int_0^\pi \frac{\prod_{k=1}^{d-3} \sin^k \theta_k d\theta_k}{(p^2 + 2pq - m^2)^\alpha}.$$

Воспользуемся теперь формулой²⁾

$$\int_0^{\pi/2} (\sin \theta)^{2n-1} (\cos \theta)^{2m-1} d\theta = \frac{1}{2} \frac{\Gamma(n) \Gamma(m)}{\Gamma(n+m)}$$

¹⁾ В действительности, как было указано Коулменом и Вайнбергом [56], здесь имеется неточность, связанная с тем, что в теории φ^4 «новый минимум расположен очень далеко вне ожидаемой области применимости 1-петлевого приближения». Однако это замечание не относится к случаю безмассовой скалярной электродинамики.

См., например, *Abramowitz M., Stegun I. A. Handbook of Mathematical Functions, Dover Publications, 1965, Sect. 6.2.* [Имеется перевод: Справочник по специальным функциям/Под. ред. М. Абрамовица и И. Стигана. — М.: Наука, 1979].

и положим $m = 1/2$ (напомним, что $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$); это дает

$$\int_0^\pi (\sin \theta)^k d\theta = \sqrt{\pi} \frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k+2}{2}\right)},$$

и, следовательно,

$$I_d(q) = \frac{2\pi^{(d-1)/2}}{\Gamma\left(\frac{d-1}{2}\right)} \int_{-\infty}^{\infty} dp_0 \int_0^{\infty} \frac{r^{d-2} dr}{(p_0^2 - r^2 + 2pq - m^2)^\alpha}.$$

Данный интеграл является «лоренц»-инвариантным; поэтому мы можем вычислить его в системе отсчета, в которой $q_\mu = (\mu, 0)$. Мы имеем $2pq = 2\mu p_0$. Вводя переменную $p'_\mu = p_\mu + q_\mu$, для которой справедливо равенство $p_0'^2 - q^2 = p_0^2 + 2\mu p_0$, мы будем иметь

$$I_d(q) = \frac{2\pi^{(d-1)/2}}{\Gamma\left(\frac{d-1}{2}\right)} \int_{-\infty}^{\infty} dp_0' \int_0^{\infty} \frac{r^{d-2} dr}{[p_0'^2 - r^2 - (q^2 + m^2)]^\alpha}. \quad (9A.2)$$

Бета-функция Эйлера задается соотношением¹⁾

$$B(x, y) = \frac{\Gamma(x) \Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} = 2 \int_0^{\infty} dt t^{2x-1} (1+t^2)^{-x-y}$$

(справедливым при $\text{Re } x > 0, \text{Re } y > 0$). Полагая

$$x = \frac{1+\beta}{2}, \quad y = \alpha - \frac{1+\beta}{2}, \quad t = \frac{s}{M},$$

мы получаем

$$\int_0^{\infty} ds \frac{s^\beta}{(s^2 + M^2)^\alpha} = \frac{\Gamma\left(\frac{1+\beta}{2}\right) \Gamma\left(\alpha - \frac{1+\beta}{2}\right)}{2(M^2)^{\alpha-(1+\beta)/2} \Gamma(\alpha)}. \quad (9A.3)$$

Подстановка этого выражения в (9A.2) при $\beta = d - 2$,

$$M^2 = -p_0'^2 + q^2 + m^2 \text{ дает}$$

$$I_d(q) = (-1)^{-\alpha} \pi^{(d-1)/2} \frac{\Gamma\left(\alpha - \frac{d-1}{2}\right)}{\Gamma(\alpha)} \times$$

¹⁾ См. примечание 2 на с. 450.

$$\begin{aligned} & \times \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp'_0}{(q^2 + m^2 - p_0'^2)^{\alpha - (d-1)/2}} = \\ & = (-1)^{2\alpha + (d-1)/2} \pi^{(d-1)/2} \frac{\Gamma\left(\alpha - \frac{d-1}{2}\right)}{\Gamma(\alpha)} \times \\ & \times \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp'_0}{[p_0'^2 - (q^2 + m^2)]^{\alpha - (d-1)/2}}. \end{aligned}$$

Чтобы вычислить этот интеграл, мы снова обратимся к соотношению (9А.3) и получим

$$\begin{aligned} I_d(q) &= i\pi^{d/2} \frac{\Gamma\left(\alpha - \frac{d}{2}\right)}{\Gamma(\alpha)} \frac{1}{[-(q^2 + m^2)]^{\alpha - d/2}} = \\ &= (-1)^\alpha i\pi^{d/2} \frac{\Gamma\left(\alpha - \frac{d}{2}\right)}{\Gamma(\alpha)} \frac{1}{(q^2 + m^2)^{\alpha - d/2}}. \end{aligned} \quad (9A.4)$$

Следовательно [см. (9А.1)],

$$\int \frac{d^d p}{(p^2 + 2pq - m^2)^\alpha} = i\pi^{d/2} \frac{\Gamma\left(\alpha - \frac{d}{2}\right)}{\Gamma(\alpha)} \frac{1}{[-q^2 - m^2]^{\alpha - d/2}}. \quad (9A.5)$$

Дифференцируя по q^μ , получаем

$$\begin{aligned} -\alpha \int d^d p \frac{2p_\mu}{(p^2 + 2pq - m^2)^{\alpha+1}} = \\ = i\pi^{d/2} \frac{\Gamma\left(\alpha - \frac{d}{2}\right)}{\Gamma(\alpha)} \left(-\alpha + \frac{d}{2}\right) \frac{2q_\mu}{[-q^2 - m^2]^{\alpha - d/2 + 1}}. \end{aligned}$$

Используя соотношение $\beta\Gamma(\beta) = \Gamma(\beta+1)$ и производя замену $\alpha+1 \rightarrow \alpha$, мы будем иметь

$$\int d^d p \frac{p_\mu}{(p^2 + 2pq - m^2)^\alpha} = -i\pi^{d/2} \frac{\Gamma\left(\alpha - \frac{d}{2}\right)}{\Gamma(\alpha)} \frac{q_\mu}{(-q^2 - m^2)^{\alpha - d/2}}. \quad (9A.6)$$

Снова дифференцируя по q^ν , получаем

$$\int d^d p \frac{p_\mu p_\nu}{(p^2 + 2pq - m^2)^\alpha} = \frac{i\pi^{d/2}}{\Gamma(\alpha)} \frac{1}{(-q^2 - m^2)^{\alpha - d/2}} \times$$

$$\times \left[q_\mu q_\nu \Gamma\left(\alpha - \frac{d}{2}\right) + \frac{1}{2} g_{\mu\nu} (-q^2 - m^2) \Gamma\left(\alpha - 1 - \frac{d}{2}\right) \right]. \quad (9A.7)$$

Далее, производя свертку по индексам, приходим к выражению

$$\begin{aligned} \int d^d p \frac{p^2}{(p^2 + 2pq - m^2)^\alpha} &= \frac{i\pi^{d/2}}{\Gamma(\alpha)} \frac{1}{(-q^2 - m^2)^{\alpha - d/2}} \times \\ &\times \left[q^2 \Gamma\left(\alpha - \frac{d}{2}\right) + \frac{d}{2} (-q^2 - m^2) \Gamma\left(\alpha - 1 - \frac{d}{2}\right) \right]. \end{aligned} \quad (9A.8)$$

Заметим, что применение этих формул требует математического обоснования. Выражение (9А.1) сходится только при условии $d < 2\alpha$. Было показано, что с помощью аналитического продолжения его можно преобразовать так, чтобы сходимость была обеспечена при любых d (в действительности $d < 6$). Детали можно найти в статье т'Хофта и Велтмана [9].

Приложение Б: гамма-функция¹⁾

В настоящем приложении мы ставим своей целью доказать соотношение

$$\Gamma(-n + \epsilon) = \frac{(-1)^n}{n!} \left[\frac{1}{\epsilon} + \psi_1(n+1) + O(\epsilon) \right], \quad (9B.1)$$

где

$$\psi_1(n+1) = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \gamma, \quad (9B.2)$$

α γ — постоянная Эйлера — Маскерони. Нам потребуются формулы

$$z\Gamma(z) = \Gamma(z+1), \quad (I)$$

$$\psi_1(z) = \frac{d \ln \Gamma(z)}{dz} = \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}, \quad (II)$$

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = z e^{\gamma z} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n} \right) e^{-z/n}. \quad (III)$$

Формула (II) является определением величины $\psi_1(z)$, формула (III) является определением Вейерштрасса гамма-функции $\Gamma(z)$, постоянная Эйлера — Маскерони γ равна

$$\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n \right) = 0,5772157.$$

¹⁾ Автор благодарен д-ру В. А. Б. Эвансу за помощь при написании этого приложения.

Формулы (II) и (III) имеются в стандартных учебниках, например: *Morse P. M., Feshbach H. Methods of Theoretical Physics, Vol. 1, McGraw-Hill, 1953, p. 422.* [Имеется перевод: *Морс Ф. М. и Фейшбах Г. Методы теоретической физики. — М.: ИЛ, 1958, т. 1, с. 461.*] Из формулы (III) вытекает равенство

$$-\ln \Gamma(z) = \ln z + \gamma z + \sum_{r=1}^{\infty} \left[\ln \left(1 + \frac{z}{r} \right) - \frac{z}{r} \right],$$

следовательно,

$$\begin{aligned} -\frac{d}{dz} \ln \Gamma(z) &= \frac{1}{z} + \gamma + \sum_{r=1}^{\infty} \left[\frac{1}{1 + \frac{z}{r}} \frac{1}{r} - \frac{1}{r} \right] = \\ &= \frac{1}{z} + \gamma + \sum_{r=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z+r} - \frac{1}{r} \right). \end{aligned}$$

С учетом (II) мы получаем отсюда

$$\psi_1(z) = -\gamma - \frac{1}{z} + \sum_{r=1}^{\infty} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r+z} \right).$$

В случае когда $z = n$ есть целое число,

$$\psi_1(n) = -\gamma + \sum_{r=1}^{n-1} \frac{1}{r}; \quad \psi_1(1) = -\gamma.$$

Производя разложение в ряд Тейлора ($\epsilon \ll 1$), получаем

$$\Gamma(1 + \epsilon) = \Gamma(1) + \epsilon \Gamma'(1) + O(\epsilon^2) = 1 + \epsilon \Gamma(1) \psi_1(1) + O(\epsilon^2) = 1 - \epsilon \gamma + O(\epsilon^2).$$

Следовательно, с учетом формулы (I) справедливо соотношение

$$\Gamma(\epsilon) = \frac{1}{\epsilon} \Gamma(1 + \epsilon) = \frac{1}{\epsilon} - \gamma + O(\epsilon).$$

Вновь используя формулу (I), будем иметь

$$\begin{aligned} \Gamma(-1 + \epsilon) &= \frac{-1}{1 - \epsilon} \Gamma(\epsilon) = -(1 + \epsilon + \epsilon^2 + \dots) \left(\frac{1}{\epsilon} - \gamma + O(\epsilon) \right) = \\ &= -\left[\frac{1}{\epsilon} + 1 - \gamma + O(\epsilon) \right]. \end{aligned}$$

Аналогично

$$\begin{aligned} \Gamma(-2 + \epsilon) &= \frac{-1}{2 - \epsilon} \Gamma(-1 + \epsilon) = \\ &= \frac{(-1)^2}{2} \left[\frac{1}{\epsilon} + \left(1 + \frac{1}{2} - \gamma \right) + O(\epsilon) \right], \end{aligned}$$

и, наконец, в общем случае справедливо соотношение

$$\Gamma(-n + \epsilon) = \frac{(-1)^n}{n!} \left[\frac{1}{\epsilon} + \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \gamma \right) + O(\epsilon) \right],$$

т. е. (9Б.1).

Резюме

1) Формула для условной степени расходимости показывает, что единственными примитивно расходящимися величинами в случае одной петли в теории φ^4 являются 2- и 4-точечные функции. 2) Эти расходимости выделяются явным образом с помощью размерной регуляризации и представляют собой полюсы по переменной $\epsilon = 4 - d$. 3) Далее, на уровне одной и двух петель показывается, как перенормируется теория φ^4 : вначале первоначальные параметры в лагранжиане рассматриваются как «голые» (и бесконечные), а (конечные) перенормированные параметры — как «физические»; затем альтернативно первоначальные параметры считаются физическими и, следовательно, конечными, но в каждом порядке к \mathcal{L} добавляются контрчлены с целью сохранить физические величины конечными. 4) Вводится ренормализационная группа и показывается, что она дает информацию об асимптотическом поведении теории поля при больших энергиях. Объясняется явление асимптотической свободы и показано, что теория φ^4 не является асимптотически свободной. 5) Выводится формула для подсчета условной степени расходимости диаграмм Фейнмана в КЭД и выделяются примитивно расходящиеся диаграммы. С помощью размерной регуляризации вычисляются собственная энергия электрона, поляризация вакуума и вершинная функция. 6) Производится перенормировка КЭД в однопетлевом приближении и вычислен аномальный магнитный момент электрона. Показывается, что КЭД не является асимптотически свободной, напротив, с уменьшением расстояний (ростом импульсов) эффективный заряд возрастает аналогично тому, как это происходит в макроскопических диэлектриках («экранирование»). 7) Показывается, что КЭД является перенормируемой теорией. 8) С помощью явного вычисления соответствующих диаграмм Фейнмана показывается, что КХД является асимптотически свободной, если число кварковых ароматов не превосходит 16. 9) Кратко показывается, что неабелевы калибровочные теории являются перенормируемыми. 10) Рассматриваются киральная аномалия, угрожающая перенормируе-

мости, и выведено условие сокращения аномалий. Условие сокращения аномалий выполняется, если кварки, обладающие цветом, включены в модель Салама — Вайнберга. 11) Вообще говоря, теории, содержащие массивные векторные частицы, не являются перенормируемыми, однако показывается, что выбором специальной калибровки, а именно калибровки t' Хофта, теории со спонтанно нарушенной калибровочной симметрией (с массивными векторными частицами) могут быть сделаны явно перенормируемыми. Вводится формализм эффективного потенциала с целью показать, что структура расхождений в калибровочных теориях не нарушается спонтанным нарушением симметрии. Эффективный потенциал, вычисленный в петлевом приближении, выявляет интересную связь между спонтанным нарушением симметрии и радиационными поправками.

Литература для дальнейшего изучения

- Перенормировки рассматриваются во многих руководствах, например:
1. *Bogoliubov N. N., Shirkov D. V.* Introduction to the Theory of Quantized Fields, 3rd ed., Wiley-Interscience, 1980. [См. также: *Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В.* Введение в теорию квантованных полей, 4-е изд., перераб. — М.: Наука, 1984.]
 2. *Schwaber S. S.* An Introduction to Relativistic Quantum Field Theory, Harper and Row, 1961. [Имеется перевод: *Швабер С.* Введение в релятивистскую квантовую теорию поля. — М.: ИЛ, 1963.]
 3. *Bjorken J. D., Drell S. D.* Relativistic Quantum Fields, McGraw-Hill, 1965. [Имеется перевод: *Бьёркен Дж. Д., Дрелл С. Д.* Релятивистская квантовая теория. В 2-х томах. — М.: Наука, 1978.]
 4. *Itzykson C., Zuber J. B.* Quantum Field Theory, McGraw-Hill, 1980. [Имеется перевод: *Ицксон К., Зюбер Ж.-Б.* Квантовая теория поля. В 2-х томах. — М.: Мир, 1984.]
 5. *Nash C.* Relativistic Quantum Fields, Academic Press, 1978.
- Хорошие обзоры содержатся в статьях К. Каллана, Б. Ли и Д. Гросса в книге:
6. *Méthodes en Théorie des Champs/Methods in Field Theory* (Les Houches Summer School 1975), eds. R. Balian, J. Zinn-Justin, North-Holland Publishing Co., 1976; Reprinted by World Scientific, Singapore, 1981.
- Прекрасным введением в теорию перенормировок может служить статья:
7. *Coleman S.* — in: Problems of the Fundamental Interactions, ed. A. Zichichi, Editrice Compositori, Bologna, 1973.
- Теорема Вайнберга о сходимости диаграмм Фейнмана изложена в работе:
8. *Weinberg S.* Phys. Rev., 118, 838 (1960). См. также [4, 5].
- Размерная регуляризация предложена в работах:
9. *Bollini C. G.* Nuovo Cim., 12B, 20 (1972); *Ashmore J. F.* Nuovo Cim. Lettere, 4, 289, (1972); *'tHooft G., Veltman M.* Nuclear Physics, 44B, 189 (1972). Обзор по размерной регуляризации дается в:
 10. *Leibbrandt G.* Rev. Mod. Phys., 47, 849 (1975).

- Перенормировка теории ϕ^4 во всех порядках рассматривается в книге [1], в статьях Каллана и Гросса [6], а также в статьях:
11. *Zimmermann W.* — in: Lectures on Elementary Particles and Quantum Field Theory (Brandeis Summer Institute, 1970), Vol. 1, eds. S. Deser, M. Grisaru, H. Pendleton, MIT Press, 1970.
 12. *Rouet A.* Rivista del Nuovo Cimento, 3, No. 7 (1980).
- Ренормализационная группа рассматривается в книге [1] и в работе¹⁾:
13. *Gell-Mann M., Low F. E.* Phys. Rev., 95, 1300 (1954). Один из более старых обзоров:
 14. *Landau L. D.* On the Quantum Theory of Field. — in: Niels Bohr and the Development of Physics, ed W. Pauli, Pergamon Press, 1955. [Имеется перевод: *Ландау Л.* Квантовая теория поля. В кн.: Нилье Бор и развитие физики/Ред. В. Паули. — М.: ИЛ, 1958.]
- Уравнение Каллана — Симанзика предложено в работах:
15. *Callan C. G.* Phys. Rev., D2, 154 (1970).
 16. *Symanzik K.* Commun. Math. Phys., 18, 227 (1970).

Хорошие обзоры по ренормализационной группе и уравнению Каллана — Симанзика:

17. *Coleman S.* Dilatations. — in: [7].
 18. *Politzer D.* Physics Reports. — C14, 129 (1974).
 19. *Peterman A.* Phys. Repts, 53, 157 (1979).
 20. *Владимиров А. А., Ширков Д. В.* — УФН, 1979, т. 129, с. 407.
 21. *Ilorizulos J., Itzykson C., Martin A.* Rev. Mod. Phys., 47, 165 (1975).
 22. *Higashijima K., Nishijima K.* Progr. Theor. Phys., 64, 2179 (1980).
 23. *Ramond P.* Field Theory: A Modern Primer, Benjamin/Cummings, 1981. [Имеется перевод: *Рамон П.* Теория поля. Современный вводный курс. — М.: Мир, 1984.]
- Прекрасное изложение данного вопроса, хотя и с большим уклоном в сторону теории конденсированного вещества, чем в теорию полей, дано в книге:
24. *Amit D. J.* Field Theory, the Renormalization Group, and Critical Phenomena, McGraw-Hill, 1978.

Описание размерной регуляризации дано в книге [7] (особенно в статьях t' Хофта и Велтмана). Более современные обзоры по этому вопросу, а также по перенормировкам и ренормализационной группе в КЭД:

25. *Coquereaux R.* Ann. of Physics, 125, 401 (1980).
26. *Narisan S.* Phys. Repts, 84, 263 (1982).

Аномальный магнитный момент электрона был вычислен в работе:

27. *Schwinger J.* Phys. Rev., 73, 416 (1948).
- Результаты измерений приведены в работах:
28. *Kush P., Foley H. M.* Phys. Rev., 72, 1256 (1947); 73, 412 (1948).

Результаты более современных измерений величины $(g - 2)$ см. в работе:

29. *Combley F. H.* Repts Progr. Physics, 42, 1889 (1979).

¹⁾ Изложение теории ренормгруппы в работе [1] базируется на основополагающих работах ее авторов, а также А. А. Логунова. В работе [1] имеется подробный список литературы по ренормгруппе. — *Прим. ред.*

- Магнитный момент мюона рассмотрен в обзоре [29], а также в книге:
30. *Taylor J. C. Gauge Theories of Weak Interactions*, Cambridge University Press, 1976, Sect. 16.2. [Имеется перевод: *Тейлор Дж.* Калибровочные теории слабых взаимодействий. — М.: Мир, 1978, гл. 16, § 2.

Хорошие учебники, в которых излагаются вопросы перенормируемости КЭД:

31. *Jauch J. M., Rohrlich F. The Theory of Photons and Electrons*, 2nd ed., Springer, 1976, Ch. 10.
32. *Schweber S. S., Bethe H. A., de Hoffmann F. Mesons and Fields*, Vol. 1 (Fields), Row, Peterson and Co., 1956. [Имеется перевод: *Швебер С., Бете Г., Гофман Ф.* Мезоны и поля. Том 1. Поля. — М.: ИЛ, 1957.]
33. *Huang K. Quarks, Leptons and Gauge Fields*, World Scientific, Singapore, 1982, Ch. 9. [Имеется перевод: *Хуанг К.* Кварки, лептоны и калибровочные поля. — М.: Мир, 1985, гл. 9.]

Статья Уорда, на которой основан наш подход:
34. *Ward J. C. Phys. Rev.*, 78, 182 (1950).

- Обнаружению асимптотической свободы посвящены статьи:
35. *Politzer H. D. Phys. Rev. Lett.*, 30, 1346 (1973), *Gross D. J., Wilczek F. Phys. Rev. Lett.*, 30, 1343 (1973), *Phys. Rev.*, D8, 3633 (1973); *Phys. Rev.*, D9, 980 (1974).
См. также:
36. *Coleman S., Gross D. J. Phys. Rev., Lett.*, 31, 851 (1973).
Обзор по этим вопросам дан в статье [18].

Перенормировка в 1-петлевом приближении в неабелевых теориях рассматривается в статьях:
37. *Narison S. Phys. Repts*, 84, 263 (1982).

- Данный вопрос хорошо излагается в книгах [4, 6, 30], а также в книгах:
38. *Faddeev L. D., Slavnov A. A. Gauge Fields: Introduction to Quantum Theory*, Benjamin-Cummings, 1980. [См. также: *Славнов А. А., Фаддеев Л. Д.* Введение в квантовую теорию калибровочных полей. — М.: Наука, 1978.]
39. *Leader E., Predazzi E. An Introduction to Gauge Theories and the New Physics*, Cambridge University Press, 1982.
40. *Coleman S.* — in: *Laws of Hadronic Matter*, ed. A. Zichichi, Academic Press, 1975.

Важными вехами при исследовании перенормируемости чисто янгмилловских теорий послужили статьи:

41. *'t Hooft G. Nuclear Physics*, B33, 173 (1971); B 35, 167 (1971).
42. *Славнов А. А.* — ТМФ, 1972, т. 10, с. 99; ЭЧАЯ, 1974, т. 5, с. 755.
43. *Taylor J. C. Nuclear Physics*, B33, 436 (1971).
44. *Lee B. W., Zinn-Justin J. Phys. Rev.*, D5, 3121, 3137, 3155; D7, 1049 (1972).
45. *'t Hooft G., Veltman M. T. Nuclear Physics*, B50, 318 (1972).

Обзоры по данному вопросу: лекции Ли в книге [6], гл. 14 книги Тейлора [30], разд. 12-4 книги [4], а также:

46. *Abers E. S., Lee B. W. Phys. Repts*, 9C, 1 (1973). [Имеется перевод в кн.: *Квантовая теория калибровочных полей.* — М.: Мир, 1977.]
47. *Marciano W., Pagels H. Phys. Repts*, 36, 137 (1978).
48. *Costa G., Tonin M. Rivista del Nuovo Cimento*, 5 (No. 1), 29. (1975).

Киральная аномалия была впервые рассмотрена в работах, посвященных распаду $\pi^0 \rightarrow 2\gamma$:
49. *Steinberger J. Phys. Rev.*, 76, 1180 (1949), *Schwinger J. Phys. Rev.*, 82, 664 (1951).

О парадоксе Садерленда в описании распада $\pi^0 \rightarrow 2\gamma$ см. работы:
50. *Sutherland D. G. Phys. Lett.*, 23, 384 (1966); *Nucl. Phys.*, B2, 433 (1967).

Эти работы стимулировали дальнейшие исследования киральной аномалии:

51. *Adler S. L. Phys. Rev.*, 177, 2426 (1969); *Bell J. S., Jackiw R. Nuovo Cimento*, 60A, 47 (1967).

Обзоры по данному вопросу: лекции С. Адлера, содержащиеся в книге [11], в гл. 11 книги [33], а также:

52. *Jackiw R.* — in: *Lectures on Current Algebra and its Applications*, eds. S. B. Treiman, R. Jackiw, D. J. Gross, Princeton University Press, 1972.
53. *Wess J. Acta Physica Austriaca Supplementum*, 9, 494 (1972).

Калибровки т'Хофта введены в работе:
54. *'t Hooft G. Nuclear Physics*, B35, 167 (1971).

Эффективный потенциал предложен в работах:
55. *Goldstone J., Salam A., Weinberg S. Phys. Rev.*, 127, 965 (1962); *Jona-Lasinio G. Nuovo Cimento*, 34, 1790 (1964).

На важную роль, которую эффективный потенциал играет в теории, было указано в работе.:

56. *Coleman S., Weinberg S. Phys. Rev.*, D7, 1883 (1973).
См. также лекцию [40]. Данный вопрос рассмотрен также в учебниках [4, т. 2, с. 99; 23, с. 94; 33, с. 274].

10

Топологические объекты
в теории поля

Муравей ростом в восемнадцать
метров,
Со шляпой на голове.
Так не бывает.
Почему бы и нет?

Французская песенка

Никто не может отрицать, что квантовая теория поля, опирающаяся на теорию возмущений, достигла больших успехов за последние полвека. Достаточно упомянуть интерпретацию квантованных полей как частиц, описание процессов рассеяния, точное численное согласие предсказаний квантовой электродинамики с экспериментом, предсказание частиц W и Z и продвижение к пониманию природы сильных взаимодействий, основанное на квантовой хромодинамике. Однако, несмотря на эти успехи, остается без ответа вопрос о том, как описывать *основные поля материи*, за исключением, конечно, введения квантовых чисел и групп симметрии. В рамках полевой теории поля материи рассматриваются как точечные объекты. Даже в классической теории поля это приводит к неприятным трудностям в виде бесконечной собственной энергии точечного заряда. В квантовой теории эти бесконечности не только не исчезают, а, напротив, по-видимому, усугубляются, и, несмотря на сравнительный успех теории перенормировок, остается ощущение, что должен существовать более удовлетворительный способ построения теории.

Оказалось, что в нелинейных классических полевых теориях существуют протяженные решения, известные под названием солитонов, представляющие собой стабильные конфигурации с определенной энергией и не обладающие сингулярностями. Могут ли они иметь отношение к физике частиц? Поскольку неабелевы калибровочные теории нелинейны, это представляется правдоподобным. За последние десять лет были открыты вихри, магнитные монополи и «инстантоны», являющиеся солитонными решениями уравнений калибровочных полей в двух пространственных измерениях (т. е. «струны» в трехмерном пространстве), в трех пространственных измерениях (локализованные в пространстве, но не во времени) и в 4-мерном пространстве-времени (локализованные в пространстве и во времени). Если калибровочные теории принимаются

всерьез, то так же надо рассматривать и солитоны. Как мы увидим, они приводят к новой физике, и даже можно надеяться, что они разрешат проблему конфайнмента кварков.

Не в последнюю очередь нас интересует также область математики, на которой основаны данные результаты, поскольку стабильность солитонов вытекает из того факта, что граничные условия распадаются на различные классы, причем вакуум принадлежит лишь одному из них. Эти граничные условия характеризуются выбранным видом соответствия (отображения) между групповым и координатным пространством. Вследствие того что эти отображения невозможно непрерывно преобразовать одно в другое, они являются *топологически* различными. Соответствующие топологические понятия будут вводиться по ходу изложения. Мы начнем наше изложение с уравнения «синус-Гордона», которое не находит применения в физике частиц. Однако солитонные решения подробно изучены и потому являются хорошим введением в предмет.

§ 10.1. Кинк синус-Гордона

Уравнение синус-Гордона

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + a \sin b\varphi = 0. \quad (10.1)$$

описывает скалярное поле в одном пространственном и одном временном измерении. Оно допускает как бегущие, так и стационарные решения. Для нахождения бегущих решений будем считать, что они имеют вид

$$\varphi(x, t) = f(x - vt) = f(\xi).$$

Как нетрудно убедиться, функция

$$f(\xi) = \frac{4}{b} \operatorname{arctg} e^{\pm \gamma \xi}, \quad (10.2)$$

где $\gamma = (1 - v^2)^{-1/2}$, является решением уравнения (10.1). Форма такой волны показана на рис. 10.1. Эта *уединенная волна*, движущаяся без изменения формы и размеров и, следовательно, без диссипации, сильно отличается от волн, возникающих, например, в случае, когда в пруд бросают камень. Волны последнего вида рас-

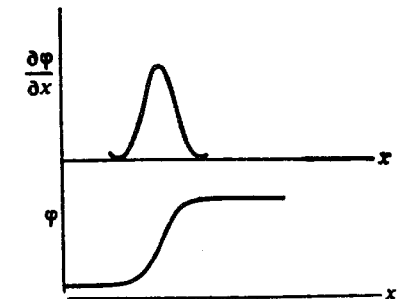


Рис. 10.1. Уединенная волна (солитон).

пространяются во все стороны с диссипацией энергии. Уединенные же волны (солитоны) наблюдались, в частности, бегущими в каналах. В этом случае они являются решениями уравнения Кортевега — де Вриза.

Так как солитоны являются решениями нелинейных волновых уравнений, для них нет принципа суперпозиции. Это означает, что, когда два солитона встречаются, образуется волна довольно сложной формы, но удивительно то обстоятельство, что асимптотически солитоны снова разделяются, они как бы «проходят друг сквозь друга».

Это свойство, конечно, заинтересует физика, занимающегося теорией частиц, но мы в дальнейшем не будем его рассматривать. Другим следствием отсутствия принципа суперпозиции для солитонов является то, что проблема их квантования становится нетривиальной. Но и этой проблемы мы также касаться не будем. Вместо этого мы обратимся к стационарным решениям уравнения синус-Гордона, представляющим интерес с другой точки зрения.

Очевидно, что уравнение (10.1) обладает бесконечным числом постоянных решений (которые, как мы вскоре увидим, имеют нулевую энергию):

$$\varphi = \frac{2\pi n}{b}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (10.3)$$

т. е. уравнению синус-Гордона соответствует вырожденный вакуум¹⁾. («Вакуум» здесь, конечно, не означает состояние в гильбертовом пространстве, а является просто классической полевой конфигурацией с нулевой энергией.) Лагранжиан, из которого получается уравнение синус-Гордона, имеет вид

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 - V(\varphi), \quad (10.4)$$

где

$$V(\varphi) = \frac{a}{b} (1 - \cos b\varphi),$$

а константа b выбрана таким образом, чтобы на решениях (10.3) выполнялось равенство $V = 0$. Эти решения характеризуются нулевой энергией, так как плотность энергии полевой конфигурации равна

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + V(\varphi). \quad (10.5)$$

¹⁾ В дальнейшем именно это свойство будет играть основную роль. Соответствующий анализ может быть проведен для других полевых теорий с вырожденным вакуумом, например для теории φ^4 при $m^2 < 0$, рассмотренной в гл. 8.

Заметим, что мы можем записать $V(\varphi)$ в виде

$$V(\varphi) = \frac{ab}{2} \varphi^2 - \frac{ab^3}{4!} \varphi^4 + \dots \quad (10.6)$$

Следовательно, полагая $m^2 = ab$ и $\lambda = ab^3$, мы имеем

$$V(\varphi) = \frac{m^2}{2} \varphi^2 - \frac{\lambda}{4!} \varphi^4 + \dots, \quad (10.7)$$

т. е. m можно считать массой «частицы», а λ — константой ее самодействия.

Потенциал V , входящий в лагранжиан (10.4), показан на рис. 10.2, где основное состояние (соответствующее нулевой энергии)



Рис. 10.2. Потенциал синус-Гордона $V(\varphi)$.

дается формулой (10.3). Построим теперь следующую конфигурацию. Пусть $\varphi(x)$ при $x \rightarrow -\infty$ приближается к одному из нулей функции $V(\varphi)$ (скажем, соответствующему значению $n = 0$), а при $x \rightarrow \infty$ — к *другому* нулю (скажем, соответствующему значению $n = 1$). Между этими двумя нулями, очевидно, имеется область, где

$$\varphi \neq \frac{2\pi n}{b}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} \neq 0$$

и, следовательно, согласно формуле (10.5), плотность энергии положительна. Предположим, что рассматриваемая конфигурация является статической, т. е. $\partial \varphi / \partial t = 0$. В силу граничных условий, наложенных на φ , полная энергия должна быть конечной. Найдем ее. Для стационарного решения уравнения синус-Гордона мы имеем

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{\partial V}{\partial \varphi}.$$

Интегрируя это уравнение, получаем

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 = V(\varphi), \quad (10.8)$$

где константа интегрирования положена равной нулю. Из (10.5) и (10.8) найдем, что энергия стационарного решения равна

$$E = \int \mathcal{E} dx = \int \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + V(\varphi) \right] dx = \int 2V(\varphi) dx = \\ = \int_0^{2\pi/b} [2V(\varphi)]^{1/2} d\varphi,$$

где интегрирование проводится в пределах от $n=0$ до $n=1$ в соответствии с (10.3). Интеграл легко вычисляется, если вместо потенциала $V(\varphi)$ подставить его явный вид из (10.4). Имеем

$$E = \left(\frac{2a}{b} \right)^{1/2} \int_0^{2\pi/b} (1 - \cos \varphi)^{1/2} d\varphi = \left(\frac{2a}{b^2} \right)^{1/2} \int_0^{2\pi} (1 - \cos \alpha)^{1/2} d\alpha = \\ = 8 \left(\frac{a}{b^2} \right)^{1/2}, \quad E = \frac{8m^2}{\lambda}, \quad (10.9)$$

где на последнем этапе мы воспользовались разложением (10.7). Таким образом, это решение имеет конечную энергию и обладает тем интересным свойством, что последняя *обратно* пропорциональна константе связи. Это свойство может оказаться полезным в физике частиц.

Имеется простая модель, в которой можно проиллюстрировать это решение. Рассмотрим бесконечную горизонтальную струну с маленькими булавками, прикрепленными к ней на равных расстояниях друг от друга. Соединим каждую булавку с соседней маленькой пружинкой («взаимодействие»). На все булавки действуют также гравитационные силы. Основным состоянием такой системы является состояние, в котором каждая булавка расположена вертикально. Найденный нами солитон, связывающий решения с $n=0$ и с $n=1$, соответствует ситуации, изображенной на рис. 10.3. Это решение, как и другие того же типа (см. ниже), называются *кинками*. Из модели с булавками очевидным образом явствует, что кинк стабилен и не может перейти в основное состояние с $E=0$. Для этого был бы необходим переворот (полу)бесконечного числа булавок, что потребовало бы (полу)бесконечной энергии. Но в чем причина стабильности кинка с *математической* точки зрения? Ее нужно искать в граничных условиях. «Пространством» в рассматриваемой модели является бесконечная линия, граница-



Рис. 10.3. Булавки, расположенные вдоль струны соответственно кинковому (солитонному) решению уравнения синус-Гордона.

ми которой являются две точки (ее концы). В этих точках однокинковое решение имеет $n=0$ и $n=1$ и его *невозможно* непрерывно деформировать в конфигурацию с $n=0$ на обоих концах (основное состояние). Таким образом, кинк является «топологическим» объектом. Его существование зависит от топологических свойств пространства (в частности, от его границы, которая в данном случае является дискретным множеством). Этот вывод носит общий характер, т. е. стабильность солитонных решений в нелинейных теориях поля является следствием топологии.

Наконец, стабильность солитона (кинка), несомненно, сигнализирует о наличии некоего *закона сохранения*: должен существовать сохраняющийся заряд Q , принимающий целочисленные значения N [разность между двумя целыми числами в (10.3)] и соответствующий току J^μ ($\mu=0, 1$) с нулевой дивергенцией. Построить эти объекты нетрудно. Взяв ток в виде

$$J^\mu = \frac{b}{2\pi} \varepsilon^{\mu\nu} \partial_\nu \varphi, \quad (10.10)$$

(тензор $\varepsilon^{\mu\nu}$ антисимметричен, причем $\varepsilon^{01} = 1$), мы будем иметь тождество $\partial_\mu J^\mu = 0$, а заряд определим следующим образом:

$$Q = \int_{-\infty}^{+\infty} J^0 dx = \frac{b}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx = \frac{b}{2\pi} [\varphi(\infty) - \varphi(-\infty)] = N. \quad (10.11)$$

Интересно, что существование тока J^μ *не следует* из инвариантности лагранжиана \mathcal{L} относительно какого-нибудь преобразования симметрии. Поэтому он *не является* нетеровским током. Равенство нулю его дивергенции независимо следует из уравнений движения.

В последующих параграфах мы рассмотрим примеры солитонов в калибровочных теориях, а начнем с вихря-солитона в двух пространственных измерениях.

§ 10.2. Вихревые линии

Рассмотрим теперь скалярное поле в 2-мерном пространстве. «Границей» такого пространства является окружность на бесконечности, которую мы обозначим через S^1 . Построим поле со значением на границе, равным

$$\varphi = a e^{in\theta} (r \rightarrow \infty), \quad (10.12)$$

где r и θ — полярные координаты на плоскости, a — константа, а n — целое число, с тем, чтобы функция φ была однозначной. Мы выбираем поле в таком виде, а не просто в виде $\varphi = a$, так как

оно является обобщением на двумерный случай решения (10.3). [В то время как (10.3) является решением уравнения синус-Гордона, нам еще предстоит установить, какое уравнение описывает 2-мерные солитоны.] Из (10.12) имеем

$$\nabla\varphi = \frac{1}{r} \left(i n a e^{i n \theta} \right) \hat{\theta}. \quad (10.13)$$

Лагранжиан \mathcal{L} и гамильтониан \mathcal{H} имеют вид

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial\varphi}{\partial t} \right)^2 - \frac{1}{2} |\nabla\varphi|^2 - V(\varphi), \quad (10.14)$$

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial\varphi}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2} |\nabla\varphi|^2 + V(\varphi). \quad (10.15)$$

Рассмотрим теперь статическую конфигурацию, например, в случае, когда

$$V(\varphi) = [a^2 - \varphi^* \varphi]^2, \quad (10.16)$$

причем на границе $V = 0$. Тогда при $r \rightarrow \infty$ имеем

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} |\nabla\varphi|^2 = \frac{n^2 a^2}{2r^2},$$

и энергия (масса) статической конфигурации равна

$$E \approx \int \mathcal{H} r dr d\theta = \pi n^2 a^2 \int \frac{1}{r} dr.$$

Эта величина *логарифмически расходится*; кинк, в том виде в каком мы его определили, не может быть обобщен не только на двумерное пространство, но и вообще на пространство большей размерности, во всех этих случаях его энергия расходится.

Продолжим, вводя калибровочное поле и рассматривая ковариантную производную

$$D_\mu\varphi = \partial_\mu\varphi + ieA_\mu\varphi. \quad (10.17)$$

Выбирая A_μ в виде

$$\mathbf{A} = \frac{1}{e} \nabla(n\theta) \quad (r \rightarrow \infty),$$

т. е.

$$A_r \rightarrow 0, \quad A_\theta \rightarrow -\frac{n}{er} (r \rightarrow \infty), \quad (10.18)$$

найдем, что при $r = \infty$

$$D_\theta\varphi = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial\varphi}{\partial\theta} \right) + ieA_\theta\varphi = 0, \quad D_r\varphi = 0, \quad (10.19)$$

так что $D_\mu\varphi \rightarrow 0$ на границе, расположенной на бесконечности. Лагранжиан теперь имеет вид

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^2 + i D_\mu\varphi|^2 - V(\varphi). \quad (10.20)$$

Так как поле, определенное в (10.18), является *чистой калибровкой* $A_\mu \rightarrow \partial_\mu\chi$ ($r \rightarrow \infty$),

то $F_{\mu\nu} \rightarrow 0$. Для статической конфигурации имеем $\mathcal{H} = -\mathcal{L}$, и если $V(\varphi)$ взять в виде (10.16), то $\mathcal{H} \rightarrow 0$ при $r \rightarrow \infty$. Это означает, что возможны полевые конфигурации с *конечной* энергией. Мы увидим, что введение калибровочного поля приводит к появлению солитонного *магнитного потока*. Рассмотрим интеграл $\oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}$ по окружности S^1 на бесконечности. По теореме Стокса он равен потоку через эту окружность $\int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \Phi$;

следовательно,

$$\Phi = \oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \oint A_\theta r d\theta = -\frac{2\pi n}{e}, \quad (10.22)$$

т. е. поток *квантуется*. Таким образом, мы построили двумерную полевую конфигурацию, состоящую из заряженного скалярного и калибровочного (электромагнитного) полей. Она несет магнитный поток, и, так как $D_\mu\varphi \rightarrow 0$ и $F_{\mu\nu} \rightarrow 0$ на границе, расположенной на бесконечности, энергия ее конечна. Очевидно, что если добавить третье измерение (ось z), от которого поле не будет зависеть, то эта конфигурация превратится в вихревую линию. Если забыть о присутствии скалярного поля, то она аналогична линии поля, создаваемого соленоидом, который фигурировал при обсуждении в § 3.4 эффекта Ааронова — Бома, и мы увидим, что точно так же, как этот эффект был связан с топологией калибровочной группы $U(1)$, стабильность вихря обеспечивается ею же.

От читателя не должен ускользнуть и тот факт, что лагранжиан (10.20) с потенциалом $V(\varphi)$ из (10.16) является лагранжианом модели Хиггса [см. (8.36) и (8.4)], т. е. скалярной электродинамики со спонтанным нарушением симметрии. На самом деле в § 8.4 мы видели, что этот лагранжиан является релятивистским вариантом свободной энергии в теории Гинзбурга — Ландау, описывающей сверхпроводимость. Известно, что когда магнитный поток *проникает* в сверхпроводник (т. е. в сверхпроводник типа II), он также проникает в квантованные линии потока, которые называют абрикосовскими линиями потока. Именно это явление описывают данные решения, причем поле φ в случае сверхпроводимости является бозе-конденсатом.

Чтобы быть более последовательными, будем исходить из лагранжиана Хиггса (8.36)

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + |(\partial_\mu + ie A_\mu)\phi|^2 - m^2 \phi^* \phi - \lambda (\phi^* \phi)^2.$$

О спонтанном нарушении симметрии говорит тот факт, что $m^2 < 0$; следовательно, вакуум определяется соотношением (8.4)

$$|\phi|_{vac} = a = \left(\frac{-m^2}{2\lambda}\right)^{1/2}.$$

Из лагранжиана (8.36) вытекают следующие уравнения движения:

$$D^\mu (D_\mu \phi) = -m^2 \phi - 2\lambda \phi |\phi|^2, \quad (10.23)$$

$$ie(\phi \partial_\mu \phi^* - \phi^* \partial_\mu \phi) + 2e^2 A_\mu |\phi|^2 = \partial^\nu F_{\mu\nu}. \quad (10.24)$$

Вначале нам необходимо удостовериться, что эти уравнения допускают на бесконечности решения (10.12) и (10.18). Так как по построению [см. (10.19)] $D_\mu \phi = 0$ при $r \rightarrow \infty$, левая часть равенства (10.23) обращается в нуль. То же самое происходит и с правой частью, если ϕ принимает вакуумное значение (8.4). Вследствие того что A_μ является чистой калибровкой [см. (10.21)], $F_{\mu\nu} = 0$ при $r \rightarrow \infty$, т. е. правая часть равенства (10.24) равна нулю. С учетом (10.12) и (10.18) левая часть обращается в нуль тождественно при $\mu = r$. При $\mu = \theta$ она обращается в нуль при условии, что ϕ принимает вакуумное значение (8.4). Таким образом, наши частные выборы полей A_μ и ϕ допускаются уравнениями движения.

В случае когда величина r конечна, и в частности когда $r \rightarrow 0$, очевидно, что значения A_μ и ϕ меняются. Будем теперь считать, что мы имеем дело с трехмерной задачей, обладающей цилиндрической симметрией относительно оси z . Далее, поскольку имеется магнитный поток, компонента B_z магнитного поля должна быть отлична от нуля. Это означает, что A не может быть всюду чистой калибровкой. Кроме того, благодаря непрерывности мы имеем $\phi \rightarrow 0$ при $r \rightarrow 0$. Поскольку это не является вакуумным значением поля ϕ , двумерный солитон будет обладать энергией и вихрь будет обладать соответствующей массой на единицу длины. Мы нашли вид полей A и ϕ исходя из уравнений движения. Пусть магнитное поле B направлено вдоль оси z , а поле A имеет только θ -компоненту. Тогда мы имеем

$$B = B_z = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} [rA(r)], \quad A(r) = A_\theta = A. \quad (10.25)$$

Кроме того, поле ϕ имеет вид

$$\phi = \chi(r) e^{in\theta}, \quad (10.26)$$

где

$$\chi(r) \xrightarrow{r \rightarrow 0} 0, \quad \chi(r) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} a. \quad (10.27)$$

Таким образом, в статическом случае уравнение движения (10.23) принимает вид

$$(\partial_r + ieA_r)\phi - (m^2 + 2\lambda |\phi|^2)\phi = 0.$$

После суммирования по компонентам r и θ отсюда получаем

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\chi}{dr} \right) - \left[\left(\frac{n}{r} - eA \right)^2 + m^2 + 2\lambda \chi^2 \right] \chi = 0. \quad (10.28)$$

В то же время θ -компонента уравнения (10.24) имеет вид [ср. (2.217) — (2.221)]

$$\frac{ie}{r} (2in)\chi^2 + 2e^2 A \chi^2 = -\partial_i F_{\theta i} = -\partial_i (\epsilon_{\theta ij} B_j),$$

и, следовательно,

$$\frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (rA) \right) - 2e \left(\frac{n}{r} + eA \right) \chi^2 = 0. \quad (10.29)$$

Теперь нам необходимо решить систему нелинейных уравнений движения (10.28) и (10.29). До настоящего времени, однако, не было найдено точное аналитическое решение. В приближении, когда $\chi \approx a$, где a — константа (т. е. при $r \rightarrow \infty$), Нильсен и Олсен [8] нашли (c — константа интегрирования, K_1 и K_0 — модифицированные функции Бесселя)

$$A = -\frac{n}{er} - \frac{c}{e} K_1(|e|ar) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \\ \rightarrow -\frac{n}{er} - \frac{c}{e} \left(\frac{\pi}{2|e|ar} \right)^{1/2} e^{-|e|ar} + \dots,$$

причем магнитное поле имеет вид

$$B_z = c\chi K_0(|e|ar) \rightarrow \frac{c}{e} \left(\frac{\pi a}{2|e|r} \right)^{1/2} e^{-|e|ar} + \dots \quad (10.30)$$

Чтобы получить вариацию скалярного поля, положим

$$\chi(r) = a + \rho(r).$$

Тогда имеем [8]

$$\rho(r) \approx e^{-\sqrt{-m^2}r} \quad (10.31)$$

(напомним, что $-m^2 > 0$). Эти решения схематически изображены на рис. 10.4.

Почему эти решения стабильны? Как и в случае кинка, причина этого связана с топологией. Лагранжиан инвариантен относительно группы симметрии — в данном случае это группа $U(1)$, калибро-

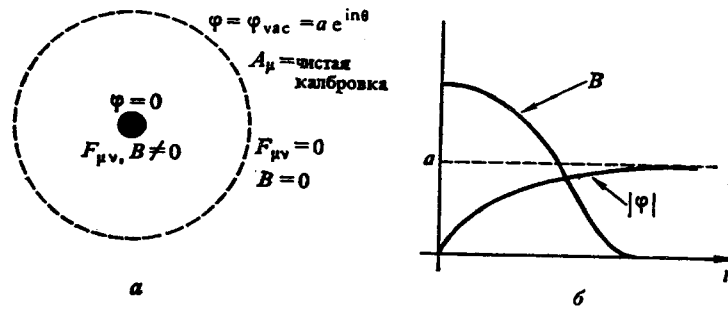


Рис. 10.4. Вариации скалярного и магнитного полей в решении Нильсена — Олесена.

вочная группа электродинамики. Поле φ [с граничным условием, определяемым соотношением (10.12)] является представлением группы $U(1)$. Групповое пространство $U(1)$ является окружностью S^1 , поскольку элемент группы $U(1)$ можно записать в виде $\exp(i\theta) = \exp[i(\theta + 2\pi)]$, так что пространство всех значений θ представляет собой линию, причем значение $\theta = 0$ отождествляется с $\theta = 2\pi$, вследствие чего эта линия совпадает с окружностью S^1 . Поле φ в выражении (10.12) является базисом представления группы $U(1)$, но при этом является граничным значением поля в двумерном пространстве. Эта граница, очевидно, представляет собой окружность S^1 [окружность с $r \rightarrow \infty$, $\theta = (0 \rightarrow 2\pi)$]. Следовательно, φ определяет отображение границы S^1 в физическом пространстве на групповое пространство S^1 :

$$\varphi: S^1 \rightarrow S^1, \quad (10.32)$$

причем вид отображения определяется числом n . Решение, которое характеризуется одним значением числа n , является стабильным, поскольку его невозможно деформировать непрерывным способом в решение, отвечающее другому значению n (резиную ленту, дважды обходящую окружность, невозможно непрерывно деформировать таким образом, чтобы она обходила окружность один раз). Иными словами (см. § 3.4), *первая гомотопическая группа* группового пространства S^1 группы симметрии $U(1)$ является тривиальной:

$$\pi_1(S^1) = Z, \quad (10.33)$$

где Z — аддитивная группа целых чисел.

Это топологическое рассуждение дает нам весьма общее условие, которое *должно* выполняться, если в определенной модели существуют солитоны. Если, как это было в рассмотренной выше модели, топологические соображения указывают на то, что соли-

тонные решения в принципе могут существовать, то нужно исследовать уравнения движения, чтобы найти эти решения. Таким образом, с помощью топологии можно найти *условия существования* солитонных решений. Выясним, например, существуют ли струноподобные решения (спонтанно нарушенных) калибровочных теорий в случае калибровочной группы симметрии $SU(2)$. Это группа матриц 2×2 :

$$U = u_0 + i \sum_{j=1}^3 u_j \sigma_j,$$

где σ_j — матрицы Паули. Условие того, что матрицы U унитарны и имеют единичный детерминант, таково:

$$u_0^2 + u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 1. \quad (10.34)$$

Это — уравнение сферы единичного радиуса S^3 в 4-мерном евклидовом пространстве E^4 , т. е. групповым пространством группы $SU(2)$ является пространство S^3 . Стабильные вихри в калибровочной теории с группой $SU(2)$ существуют, если отображение группы на границу S^1 распадается на различные классы, т. е. если группа $\pi_1(S^3)$ является нетривиальной. Однако в действительности группа $\pi_1(S^3)$ тривиальна, т. е. S^3 представляет собой односвязное пространство: каждая замкнутая кривая S^1 на S^3 может быть сжата в точку. Таким образом, любое граничное условие может быть сведено к тривиальному условию $\varphi = \text{const}$ и вихри не существуют.

Группа же $O(3)$ является не односвязной, а двусвязной. Например, матрице из группы $O(3)$

$$\begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (10.35)$$

отвечающей вращению вокруг оси z на угол $-\alpha$, соответствует матрица из группы $SU(2)$

$$\begin{pmatrix} e^{i\alpha/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\alpha/2} \end{pmatrix}. \quad (10.36)$$

Случай $\alpha = 0$, очевидно, дает единичную матрицу для обеих групп, однако значение $\alpha = 2\pi$ дает снова единичную матрицу в группе $O(3)$ и единичную матрицу со знаком минус в группе $SU(2)$. Это является обоснованием известного утверждения о том, что векторы не меняют знак при повороте на угол 2π , а спиноры меняют. Иными словами, двум элементам группы $SU(2)$ (единичному и единич-

ному со знаком минус) соответствует лишь один элемент группы $O(3)$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$SU(2)$ $O(3)$

Существует отображение 2 — 1 группы $SU(2)$ на $O(3)$. Групповое пространство группы $O(3)$ получается соответственно из группового пространства группы $SU(2)$ путем отождествления противоположных точек на 3-мерном пространстве S^3 , так как они отвечают одному и тому же преобразованию из группы $O(3)$. Как мы сейчас покажем, это пространство *двусвязно*. Рассмотрим *замкнутые кривые* S^1 в групповом пространстве группы $O(3)$. Каждая кривая, соответствующая непрерывному множеству вращений, начинается, скажем, от тождественного преобразования 0 и возвращается к нему. Одной из возможных замкнутых кривых является путь c_1 , изображенный на рис. 10.5. Она соответствует набору вращений, ни одно из которых не происходит на угол, больший π . Если угол вращения превышает π , то путь в групповом пространстве подобен c_2 . Достигнув значения угла, равного π в точке A , путь появляется вновь в противоположной точке A' и в конечном счете возвращается в начало координат O . Очевидно, что путь c_1 гомотопен точке (может быть сжат в точку), тогда как путь c_2 гомотопен линии. Читатель может убедиться, что замкнутый путь, на кото-

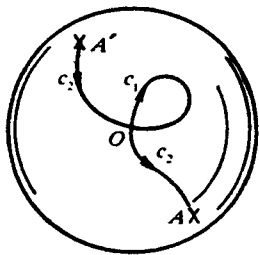


Рис. 10.5. Два типа замкнутых путей в групповом пространстве группы $O(3)$.

ром угол вращения превышает 2π , появляется на противоположных точках поверхности S^3 *дважды* и, следовательно, гомотопен точке. Аналогично путь, на котором угол превышает 3π , гомотопен прямой. Таким образом, в групповом пространстве группы $O(3)$ существуют замкнутые пути S^1 только двух типов: пути, гомотопные точке, и пути, гомотопные линии. Это означает, что в калибровочной теории с группой симметрии $O(3)$ существует один нетривиальный

вихрь. Вихри могут обладать «зарядами» (потоками) 1 или 0 с алгеброй $0 + 0 = 0$, $1 + 0 = 1$, $1 + 1 = 0$, т. е. нетривиальные вихри взаимно уничтожаются. [То, какая из групп $SU(2)$ и $O(3)$ является калибровочной, зависит от того, *какие частицы существуют*: если имеются частицы с «изоспином» $1/2$, $3/2$, $5/2$ и т. д., то калибровочной группой является $SU(2)$, но если частицы имеют целый изоспин, то мы имеем дело с группой $O(3)$.]

Один из способов образовать линии магнитного потока состоит в том, чтобы поместить два противоположных магнитных заряда вблизи друг от друга. Таким образом, возникает естественный вопрос: если калибровочные теории допускают линии потока, не допускают ли они также существование магнитных зарядов? Они действительно допускают существование магнитных зарядов, которые называют магнитными монополями т'Хофта — Полякова по имени их открывателей. Подобно вихрям, эти монополи обязаны своей стабильностью (и, следовательно, существованием) нетривиальным топологическим свойствам калибровочной группы. В этом смысле они полностью отличаются от «обычных» магнитных монополей, которые представляют собой *точечные* магнитные заряды и которые могут быть введены в уравнения Максвелла с целью сделать их симметричными по отношению к электрическому и магнитному полям. Дирак показал, что из правил квантовой теории вытекает замечательное условие квантования точечных магнитных зарядов, которые поэтому называют монополями Дирака. В следующем параграфе мы изучим монополи Дирака, а затем монополи т'Хофта — Полякова. Это позволит нам познакомить читателя с понятием магнитного заряда, а также продемонстрировать различие между двумя типами монополей.

§ 10.3. Монополь Дирака

Рассмотрим магнитный монополь с магнитным зарядом g , расположенный в начале координат. Его магнитное поле является радиальным и описывается соотношением, подобным законам Кулона

$$\mathbf{B} = \frac{g}{r^2} \mathbf{r} = -g \nabla \left(\frac{1}{r} \right) \quad (10.37)$$

(в единицах Гаусса). Так как $\nabla^2(1/r) = -4\pi\delta^3(r)$, мы имеем уравнение

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 4\pi g \delta^3(r), \quad (10.38)$$

правая часть которого, как мы и хотели, соответствует точечному магнитному заряду. Так как поле \mathbf{B} радиально, полный поток через сферу с центром в начале координат равен

$$\Phi = 4\pi r^2 B = 4\pi g. \quad (10.39)$$

Рассмотрим частицу с электрическим зарядом e в поле этого монополя. Ее волновая функция равна

$$\psi = |\psi| \exp \left[\frac{i}{\hbar} (\mathbf{p} \cdot \mathbf{r} - Et) \right].$$

При наличии электромагнитного поля мы имеем $\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{p} - (e/c)\mathbf{A}$, так что

$$\psi \rightarrow \psi \exp \left(-\frac{ie}{\hbar c} \mathbf{A} \cdot \mathbf{r} \right),$$

т. е. произойдет изменение фазы α волновой функции

$$\alpha \rightarrow \alpha - \frac{e}{\hbar c} \mathbf{A} \cdot \mathbf{r}.$$

Рассмотрим замкнутый контур при фиксированных r , θ и угле φ , изменяющемся от 0 до 2π . Тогда полное изменение фазы будет равно

$$\begin{aligned} \Delta\alpha &= \frac{e}{\hbar c} \oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \frac{e}{\hbar c} \int \text{rot } \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \frac{e}{\hbar c} \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \\ &= \frac{e}{\hbar c} (\text{поток через часть сферы}) = \frac{e}{\hbar c} \Phi(r, \theta), \end{aligned} \quad (10.40)$$

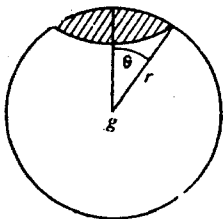


Рис. 10.6.

где $\Phi(r, \theta)$ — поток через часть сферы, определенную некоторыми значениями r и θ и изображенную заштрихованной областью на рис. 10.6. При изменении θ меняется поток через эту часть сферы. При $\theta \rightarrow 0$ контур стягивается в точку и поток, проходящий через эту часть сферы, стремится к нулю:

$$\Phi(r, 0) = 0.$$

При увеличении контура поток через часть сферы также увеличивается, и, наконец, при $\theta \rightarrow \pi$ мы в соответствии с (10.39) должны были бы иметь

$$\Phi(r, \pi) = 4\pi g. \quad (10.41)$$

Но так как при $\theta \rightarrow \pi$ контур снова стягивается в точку, из требования конечности $\Phi(r, \pi)$ с учетом (10.40) следует, что потенциал A сингулярен при $\theta = \pi$. Эти рассуждения справедливы в случае сферы любого радиуса, так что потенциал A сингулярен вдоль всей отрицательной полуоси z . Эта линия сингулярностей называется *дираковской струной*. Очевидно, что за счет подходящего выбора координат струну можно расположить вдоль любого направ-

ления, и на самом деле она не обязательно должна быть прямой, но непременно непрерывной.

Сингулярность потенциала A приводит к так называемому вето Дирака: волновая функция обращается в нуль на отрицательной полуоси z . Следовательно, ее фаза на этой линии не определена и из (10.40) следует, что *нет необходимости* в условии $\Delta\alpha \rightarrow 0$ при $\theta \rightarrow \pi$. Однако из требования однозначности функции ψ следует, что должно выполняться равенство $\Delta\alpha = 2\pi n$. Тогда из соотношений (10.40) и (10.41) мы имеем

$$2\pi n = \frac{e}{\hbar c} 4\pi g, \quad (10.42)$$

$$\blacksquare \quad eg = \frac{1}{2} n\hbar c.$$

Это равенство является условием квантования Дирака. Оно определяет произведение *любого* электрического заряда на *любой* магнитный заряд. Тогда в принципе если где-то во Вселенной существует магнитный заряд, то все электрические заряды должны быть квантованы:

$$e = n \frac{\hbar c}{2g}.$$

Таково возможное объяснение наблюдаемого «квантования» электрического заряда (см. примечание на стр. 107), хотя в настоящее время более общепринятым является другое объяснение, связанное с существованием кварков и неабелевых групп симметрии. Заметим, однако, что в условии квантования явно входит постоянная Планка, т. е. оно связано с квантовой теорией. В единицах $\hbar = c = 1$ равенство (10.42) принимает вид

$$\blacksquare \quad eg = \frac{1}{2} n. \quad (10.43)$$

Выведем теперь выражение для векторного потенциала A_μ . Как мы видели выше, он сингулярен. Это ясно видно из равенства (10.38), так как если $\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$ и потенциал A регулярен, то $\text{div } \mathbf{B} = 0$ и существование магнитного заряда невозможно. Из приведенных выше рассуждений следует, что A можно построить, считая, что полюс является концом струны магнитных диполей, другой конец которой находится на бесконечности. Тогда

$$A_x = g \frac{-y}{r(r+z)}, \quad A_y = g \frac{x}{r(r+z)}, \quad A_z = 0, \quad (10.44)$$

или

$$A_r = A_\theta = 0, \quad A_z = \frac{g}{r} \frac{1 - \cos \theta}{\sin \theta}. \quad (10.45)$$

Потенциал A очевидным образом сингулярен вдоль $r = -z$. Если, с другой стороны, дираковская струна расположена вдоль линии $r = z$, то мы имеем

$$A_r = A_\theta = 0, \quad A_\varphi = -\frac{g}{r} \frac{1 + \cos \theta}{\sin \theta}. \quad (10.46)$$

Мы привели два альтернативных выражения (10.45) и (10.46) с целью продемонстрировать, что сингулярность дираковской струны несомненно является нефизической и в этих выражениях

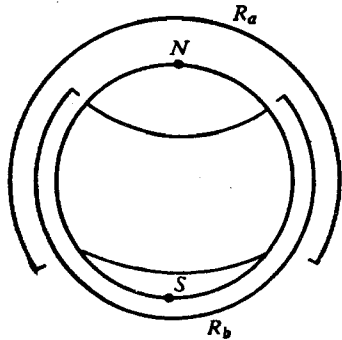


Рис. 10.7. Перекрывающиеся области R_a и R_b на сфере. Область R_a не содержит полюс S , область R_b не содержит полюс N .

она расположена в различных местах. Единственной *физической* сингулярностью потенциала A является его сингулярность в начале координат, где, как это видно из формулы (10.38), величина $\operatorname{div} B = \operatorname{div}(\operatorname{rot} A)$ является сингулярной. Так как от нефизических сингулярностей желательно избавиться, рассмотрим следующую конструкцию. Разобьем пространство вокруг монополя (по сути дела, сферу) на две перекрывающиеся области R_a и R_b , как показано на рис. 10.7. Область R_a не содержит отрицательную ось z (полюс S), а область R_b — положительную ось z (полюс N). В каждой области потенциал A определяется различным образом:

$$A_r^a = A_\theta^a = 0, \quad A_\varphi^a = \frac{g}{r} \frac{1 - \cos \theta}{\sin \theta}, \quad (10.47)$$

$$A_r^b = A_\theta^b = 0, \quad A_\varphi^b = -\frac{g}{r} \frac{1 + \cos \theta}{\sin \theta}. \quad (10.48)$$

Обращаясь к формулам (10.45) и (10.46), мы видим, что потенциалы A^a и A^b *конечны каждый в своей области*. Однако в области перекрытия они не совпадают, а связаны друг с другом калибровочными преобразованиями ($\hbar = c = 1$):

$$A_\varphi^b = A_\varphi^a - \frac{2g}{r \sin \theta} = A_\varphi^a - \frac{i}{e} S \nabla_\varphi S^{-1}, \quad (10.49)$$

где

$$S = \exp(2ig\varphi). \quad (10.50)$$

Ковариантной формой соотношения (10.49) является формула

$$A_\mu^b = A_\mu^a - \frac{i}{e} S \partial_\mu S^{-1}. \quad (10.51)$$

Требование, чтобы функция калибровочного преобразования S не менялась при замене $\varphi \rightarrow \varphi + 2\pi$, очевидно, эквивалентно условию квантования Дирака (10.43). Чтобы убедиться, что соотношения (10.47) и (10.48) действительно описывают монополь, мы вычислим полный магнитный поток через поверхность сферы, окружающей начало координат:

$$\Phi = \int F_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = \oint \operatorname{rot} A \cdot dS = \int_{R_a} \operatorname{rot} A \cdot dS + \int_{R_b} \operatorname{rot} A \cdot dS.$$

Мы выбрали здесь области R_a и R_b таким образом, чтобы они фактически не перекрывались, а имели общую границу, в качестве которой мы для удобства выберем экватор $\theta = \pi/2$. Поскольку области R_a и R_b имеют границы, применима теорема Стокса, и поскольку экватор является границей области R_a с положительной ориентацией, а области R_b с отрицательной ориентацией, мы имеем

$$\Phi = \oint_{\theta=\pi/2} A^a \cdot dl^a - \oint_{\theta=\pi/2} A^b \cdot dl^b = \frac{i}{e} \oint \frac{d}{d\varphi} (\ln S^{-1}) d\varphi = 4\pi g,$$

где использованы соотношения (10.50), (10.47) и (10.48). Этот результат согласуется с (10.41).

Данная конструкция принадлежит Ву и Янгу и, по сути дела, является формулировкой теории магнитного монополя в терминах расслоенных пространств. Базовое пространство [трехмерное пространство R^3 минус начало координат $\approx R^3 - (\text{точка}) \approx S^2 \times R^1$] параметризуется двумя независимыми способами, отвечающими двум перекрывающимся, но не совпадающим областям. В каждой из этих областей вектор-потенциал задается независимым выражением. Читатель, которому известен лист Мебиуса, заметит здесь аналогию. Не существует единой параметризации листа Мебиуса. Локально он представляет собой произведение интервала $(0,1)$ и окружности. Однако глобально окружность должна быть разделена на две различные перекрывающиеся области, причем лист параметризуется по-разному в каждой области.

Таким образом, мы имеем формулировку теории монополя Дирака в терминах расслоенных пространств. База, по существу, совпадает с S^2 (сфера, охватывающая монополь), а групповым пространством является S^1 [так как калибровочной группой является группа $U(1)$]. Расслоенным пространством является не $S^2 \times S^1$, а S^3 , которое локально неотлично от пространства $S^2 \times S^1$, но глобально отличается от него. За дальнейшими деталями формулировки, основанной на теории расслоений, читатель отсылается к литературе.

§ 10.4. Монополю т'Хофта — Полякова

Хотя магнитные заряды можно «вести» в максвелловскую электродинамику с абелевой калибровочной группой $U(1)$, ясно, что это не является необходимым. В теории с монополями имеется большая симметрия между электричеством и магнетизмом, чем в теории без них, но это не может рассматриваться как *требование* того, чтобы монополю существовал. Они могут существовать, однако их может и не быть. Приведенные выше рассуждения не позволяют нам решить этот вопрос. Если же симметрию расширить, так чтобы группа симметрии была неабелевой, и допустить возможность ее спонтанного нарушения, то уравнения поля будут иметь решение, соответствующее магнитному заряду. Если такие теории верны, то магнитные монополю *должны* существовать, и, следовательно, нужно заняться их поиском. Естественно любопытно выяснить, откуда в такой модели берется магнитный заряд, ведь в ней поля материи и калибровочные поля несут *только* электрический заряд. Мы думаем, что читатель не удивится, узнав, что причина появления магнитных зарядов связана с топологией. Теоретическая возможность существования монополю такого типа была открыта в 1974 г. т'Хофтом и Поляковым.

Мы рассматриваем теорию с группой симметрии $O(3)$, содержащую калибровочное поле $F_{\mu\nu}^a$ (a — групповой индекс) и изовекторное хиггсовское поле φ^a . Лагранжиан имеет вид [ср. с (8.42)]

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{\mu\nu a} + \frac{1}{2} (D_\mu \varphi^a)(D^\mu \varphi^a) - \frac{m^2}{2} \varphi^a \varphi^a - \lambda (\varphi^a \bar{\varphi}^a)^2, \quad (10.52)$$

где

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + e\epsilon^{abc} A_\mu^b A_\nu^c, \quad (10.53)$$

$$D_\mu \varphi^a = \partial_\mu \varphi^a + e\epsilon^{abc} A_\mu^b \varphi^c.$$

Нас интересуют статические решения, в которых потенциалы имеют нетривиальный вид

$$A_i^a = -\epsilon_{iab} \frac{r^b}{er^2} (r \rightarrow \infty), \quad (10.54)$$

$$A_0^a = 0,$$

а скалярное поле выглядит следующим образом:

$$\varphi^a = F \frac{r^a}{r} (r \rightarrow \infty), \quad (10.55)$$

где $F^2 = -m^2/4\lambda$. Эти выражения замечательны тем, что в них

перемешиваются пространственные и изоспиновые индексы. Например, (10.55) описывает поле, которое в направлении пространственной оси x имеет только компоненту «1», в направлении y только компоненту «2» и в направлении z только компоненту «3». В определенном смысле оно является «радиальным» — Поляков назвал его «ежом». Можно показать [19], что уравнения поля, выведенные из (10.52), имеют регулярные решения, обладающие асимптотиками (10.54), (10.55). Например, уравнение движения для поля φ имеет вид

$$-(m^2 + 4\lambda\varphi^b\varphi^b)\varphi^a = D_\mu(D^\mu\varphi^a).$$

Из (10.55) следует, что $|\varphi| = F$, так что левая часть последнего уравнения обращается на бесконечности в нуль. Легко убедиться в том, что величина $D_\mu\varphi^a$ также обращается в нуль: при $i = x, y, z$ мы имеем

$$D_i\varphi^a = F\partial_i\left(\frac{r^a}{r}\right) + e\epsilon^{abc}A_i^bF\frac{r^c}{r} = F\left(\frac{\delta^{ia}}{r} - \frac{r^i r^a}{r^3}\right) - e\epsilon^{abc}\epsilon_{ibm}\frac{F r^m r^c}{r^3} = 0.$$

Следовательно, на бесконечности φ принимает свое вакуумное значение и является ковариантной постоянной, но удовлетворяет нетривиальному граничному условию (10.55), а не более обычному («абелеву») условию $\varphi^{1,2} = 0, \varphi^3 \neq 0$. В то же время $F_{\mu\nu}^a$ не обращается в нуль на бесконечности. Ниже мы увидим, что в этом случае имеется радиальное магнитное поле. Это решение схематически изображено на рис. 10.8.

Обобщим теперь определение электромагнитного поля $F_{\mu\nu}$ таким образом, чтобы оно сводилось к обычному в случае, когда

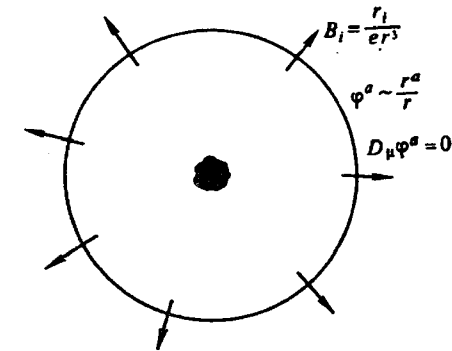


Рис. 10.8. Асимптотическая форма калибровочного и скалярного полей, соответствующая монополю т'Хофта — Полякова. Поляков назвал это решение «ежом».

только третья компонента скалярного поля φ отлична от нуля. Положим

$$F_{\mu\nu} = \frac{1}{|\varphi|} \varphi^a F_{\mu\nu}^a - \frac{1}{e|\varphi|^2} \varepsilon_{abc} \varphi^a (D_\mu \varphi^b) (D_\nu \varphi^c). \quad (10.56)$$

Совершенно очевидно, что

$$\begin{aligned} A_\mu^{1,2} &= 0, & A_\mu^3 &\equiv A_\mu \neq 0, \\ \varphi^{1,2} &= 0, & \varphi^3 &= F \neq 0, \end{aligned} \quad (10.57)$$

а это приводит к обычному тензору $F_{\mu\nu}$, коль скоро $A_\mu^3 = A_\mu$ (векторный потенциал Максвелла). Определив теперь

$$A_\mu = \frac{1}{|\varphi|} \varphi^a A_\mu^a. \quad (10.58)$$

можно непосредственными вычислениями получить

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - \frac{1}{e|\varphi|^2} \varepsilon_{abc} \varphi^a (\partial_\mu \varphi^b) (\partial_\nu \varphi^c). \quad (10.59)$$

Это выражение похоже на обычный тензор электромагнитного поля, хотя и более сложное, но оно сводится к нему, когда поле φ фиксировано в изотопическом пространстве. Воспользовавшись асимптотическими условиями (10.54) и (10.55), легко установить, что $A_\mu = 0$, так что весь тензор электромагнитного поля определяется только полем Хиггса, и мы получаем, что

$$F_{0i} = 0, \quad F_{ij} = -\frac{1}{e r^2} \varepsilon_{ijk} r^k. \quad (10.60)$$

Это соответствует радиальному магнитному полю [см. (2.221)]

$$B_k = \frac{r^k}{e r^3}. \quad (10.61)$$

Из (10.39) следует, что соответствующий магнитный поток равен

$$\Phi = \frac{4\pi}{e},$$

откуда, сравнивая с (10.41), получаем, что магнитный заряд удовлетворяет условию

$$eg = 1. \quad (10.62)$$

Сравнивая это соотношение с (10.43), видим, что правая часть представляет собой удвоенную единицу Дирака. Мы приходим к заключению, что конфигурации калибровочного и скалярного полей с асимптотиками (10.54), (10.55) несут магнитный заряд, т. е.

на бесконечности имеется радиальное магнитное поле. т'Хофт показал, что эти конфигурации всюду несингулярны и потому обладают конечной энергией. Он оценил массу монополя и показал, что она порядка $137 M_W$, где M_W — масса типичного векторного бозона. Следовательно, монополю является очень тяжелым. Эта масса обратно пропорциональна e^2 [ср. с (10.9)].

Каково происхождение магнитного заряда? Каким образом полевые конфигурации, несущие только электрический заряд, могут перестроиться и имитировать магнитный заряд? Чтобы ответить на этот вопрос, запишем магнитный ток K_μ в виде

$$K^\mu = \partial_\nu \tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \partial_\nu F_{\rho\sigma}, \quad (10.63)$$

где $\tilde{F}^{\mu\nu}$ — тензор, дуальный тензору $F_{\mu\nu}$ [ср. с уравнением (2.236), которое справедливо в отсутствие магнитных источников]. Тогда из (10.59) мы имеем

$$K^\mu = -\frac{1}{2e} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \varepsilon_{abc} \partial_\nu \hat{\varphi}^a \partial_\rho \hat{\varphi}^b \partial_\sigma \hat{\varphi}^c, \quad (10.64)$$

где

$$\hat{\varphi}^a = \frac{1}{|\varphi|} \varphi^a.$$

Мы видим, что магнитный ток *зависит только от хиггсовского поля*, как это отмечалось выше в (10.60). Кроме того, этот ток *тождественно сохраняется*:

$$\partial_\mu K^\mu = 0. \quad (10.65)$$

Этим свойством он напоминает ток (10.10) для кинка уравнения синус-Гордона. Сохранение обоих этих токов не следует из симметрии лагранжиана, так что они не являются нётеровскими токами. Напомним, что заряд синус-Гордона (10.11) — «кинковое число» — просто зависит от нетривиальных граничных условий. Мы предполагаем, что здесь имеет место то же самое явление. Сохраняющийся магнитный заряд имеет вид

$$M = \frac{1}{4\pi} \int K^0 d^3x = -\frac{1}{8\pi e} \oint_{S^2} \alpha_{ijh} \varepsilon_{abc} \hat{\varphi}^a \partial_j \hat{\varphi}^b \partial_h \hat{\varphi}^c (d^2S)_i. \quad (10.66)$$

Здесь интеграл берется по сфере S^2 на бесконечности, которая очевидным образом является *границей* статической полевой конфигурации φ . Так как функция φ должна быть однозначной, в случае, когда $(d^2S)_i$ покрывает сферу один раз, вектор φ учитывается *целое число* раз, скажем d раз. При этом можно показать, что интеграл (10.66) равен [21]

$$M = \frac{d}{e}, \quad d — \text{целое.} \quad (10.67)$$

Так как φ^a — изовектор, единичный вектор $\widehat{\varphi}$ описывает сферу S^2 в полевом пространстве (изопространстве), так что граница описывает отображение сферы S^2 в координатном пространстве на многообразие векторов $\widehat{\varphi}$, представляющее собой сферу S^{21} :

$$\widehat{\varphi} : S^2 \text{ в полевом пространстве} \rightarrow S^2 \text{ в координатном пространстве.} \quad (10.68)$$

Величина d называется *брауэровской степенью* отображения. Она обязательно является целой. Таким образом, формула (10.67) явно демонстрирует топологическую природу монополя т'Хофта — Полякова.

В модели, рассмотренной т'Хофтом, неабелевой группой является группа $SO(3)$, а электродинамика описывается группой $U(1)$. Интересно выяснить, зависит ли существование магнитного заряда в неабелевых калибровочных теориях от выбора калибровочной группы. Чтобы ответить на этот вопрос, мы начнем с обращения стрелки в (10.68). При самом общем подходе можно ска-

зать, что наиболее важным является многообразие векторов $\widehat{\varphi}$ (так что калибровочная теория *должна* быть спонтанно нарушенной). Каким же пространством в общем случае является многооб-

разие векторов $\widehat{\varphi}$? В гл. 8 мы узнали, что оно является вакуумным многообразием. Если группой симметрии теории является группа G [в данном случае это группа $SO(3)$], а ненарушенной подгруппой является подгруппа H [в данном случае группа $U(1)$], то преобразования, принадлежащие подгруппе H , оставляют вакуумное многообразие инвариантным. Таким образом, пространство

единичных векторов $\widehat{\varphi}$ является множеством преобразований в G , *не связанных* с преобразованиями из H . Это — определение фактор-пространства. Схематически элементы калибровочной группы G можно записать в виде

$$G = H + HM_1 + HM_2 + \dots, \quad (10.69)$$

где H обозначает элементы подгруппы H , а M_1, M_2, \dots принадлежат G , но не подгруппе H , и все являются различными. Вакуумное многообразие является по существу пространством элементов M_i , т. е. фактор-пространством G/H . Вновь обращаясь к (10.68), можно сказать, что существование магнитных монополей требует нетривиального отображения G/H на сферу S^2 , являющуюся гра-

¹⁾ Точнее, пространством изовекторов $\widehat{\varphi}$ является сфера S^2 с отождествленными противоположными точками. Я признателен С. Вокосу, указавшему мне на это.

ницей в координатном пространстве. Как мы видели в гл. 3 [уравнение (3.114)], эти отображения образуют группу, в данном случае *вторую гомотопическую группу* $\pi_2(G/H)$ фактор-пространства G/H . Магнитный монополю будет существовать, если эта группа нетривиальна. Сформулируем теперь математическую теорему, касающуюся гомотопических групп [3, 22].

Теорема. Группа $\pi_2(G/H)$ изоморфна ядру естественного гомоморфизма группы $\pi_1(G/H)$ в группу $\pi_1(G)$. (10.70)

Объясним термины, встречающиеся в формулировке этой теоремы: группы $\pi_1(H)$ и $\pi_1(G)$ являются первыми гомотопическими группами групп H и G . Они тривиальны, если группы являются односвязными, изоморфны $Z_2(G_2)$, если группы являются двусвязными, и т. д. Так как каждый замкнутый контур в H является также замкнутым контуром в G , существует естественное отображение $\pi_1(H)$ в $\pi_1(G)$; оно называется гомоморфизмом. Ядром гомоморфизма является множество элементов группы $\pi_1(H)$, которые отображаются на *единичный элемент* группы $\pi_1(G)$.

Посмотрим, как действует эта теорема, применив ее в случае, рассмотренном т'Хофтом, где $G = SO(3)$, $H = U(1)$. Так как группа $SO(3)$ двусвязна (см. выше), $\pi_1(G) = Z_2$. С другой стороны, группа $U(1)$ бесконечно связна [групповое пространство является окружностью, замкнутая кривая, получающаяся при n -кратном прохождении окружности, не может быть непрерывно деформирована в кривую, которая получается при $m(\neq n)$ -кратном прохождении], так что $\pi_1(H) = Z$ — аддитивная группа целых чисел. Следовательно, ядро отображения группы $\pi_1(H)$ в группу $\pi_1(G)$ является аддитивной группой *четных* целых чисел, а поэтому

$$\pi_2(SO(3)/U(1)) = \text{аддитивная группа четных целых чисел.} \quad (10.71)$$

Это согласуется с тем результатом, который мы получили ранее: заряд монополя был в *2 раза* больше кванта Дирака. Однако неабелевой группой электрослабого взаимодействия является не группа $SO(3)$, а группа $SU(2) \times U(1)$, на основе которой построена модель Салама — Вайнберга. [На группе $SO(3)$ основана модель Джоржи — Глэшоу¹⁾. Она характерна тем, что в ней единственным нейтральным током является электромагнитный ток. Поэтому ее перестали рассматривать после открытия процессов, в которых участвуют слабые нейтральные токи, такие, как $\nu_e + p \rightarrow \nu_e + p + \pi^0$.] Кроме того, электромагнитная подгруппа, хотя и является группой $U(1)$, она нерегулярно вложена в группу $SU(2) \times U(1)$, а поэтому является *некомпактной*, и вследствие этого магнитный монополю в модели Салама — Вайнберга отсутствует. Чтобы убедиться в этом, заметим, что в этой модели имеются

¹⁾ Georgi H., Glashow S. D. Phys. Rev. Lett., 28, 1944 (1972).

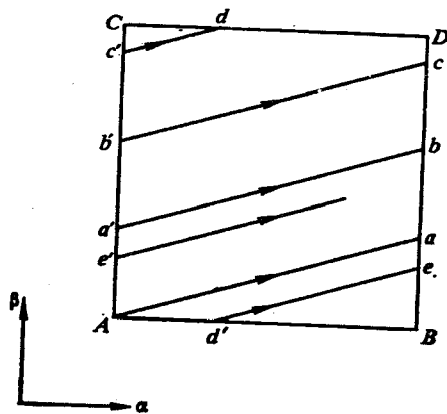


Рис. 10.9. Групповое пространство группы $U(1) \otimes U(1)$ представляет собой квадрат с отождествленными противоположными сторонами, т. е. тор. Электромагнитное калибровочное преобразование соответствует линии $Aaa'bb'cc'dd'ee' \dots$.

две группы $U(1)$, так что частица с третьей компонентой слабого изоспина I_3^W и слабым гиперзарядом Y^W под действием этих $U(1)$ групп будет преобразовываться с помощью преобразования

$$\exp(i\alpha I_3^W) \exp(i\beta Y^W). \quad (10.72)$$

Групповое пространство группы $U(1)$ является окружностью или, что то же самое, линией, у которой точки 0 и 2π отождествлены. Следовательно, групповое пространство группы $U(1) \times U(1)$ может быть представлено так, как на рис. 10.9, т. е. квадратом $ABCD$, у которого стороны AC и AB отождествлены со сторонами BD и CD соответственно. А это не что иное, как тор T^2 . (В общем случае групповым пространством прямого произведения n групп $U(1)$ является тороид T^n .) Групповой элемент (10.72) будет соответствовать точке (α, β) в групповом пространстве T^2 , изображенном на рис. 10.9. Электрический заряд в модели Салама — Вайнберга дается формулой

$$Q = \sin \theta_W I_3^W + \cos \theta_W Y^W,$$

где θ_W — угол Вайнберга [ср. с формулой (8.82)]. При электромагнитных калибровочных преобразованиях на угол γ вектор состояния частицы с зарядом Q умножается на величину

$$\exp(i\gamma Q) = \exp[i(\gamma \sin \theta_W I_3^W + \gamma \cos \theta_W Y^W)],$$

а этому преобразованию соответствует точка в групповом пространстве с координатами

$$\alpha = \gamma \sin \theta_W, \quad \beta = \gamma \cos \theta_W.$$

Следовательно,

$$\alpha/\beta = \operatorname{tg} \theta_W = \text{иррациональное число}. \quad (10.73)$$

Преобразование, приведенное выше, соответствует линии в групповом пространстве $Aaa'bb'cc'dd'ee' \dots$ (см. рис. 10.9), которая вследствие того, что число α/β является иррациональным, представляет собой линию *бесконечной длины*. Она накручивается на тор, не пересекая саму себя. Следовательно, электромагнитная калибровочная группа в модели Салама — Вайнберга имеет бесконечный объем, т. е. является *некомпактной*. Отсюда следует, что группа $\pi_1(H)$ не существует (или является тривиальной), так что группа $\pi_2(G/H)$ также тривиальна и монополя не существует. Если же в природе имеет место «великое объединение» и электрослабая группа $SU(2) \times U(1)$ является подгруппой полупростой группы великого объединения, скажем $SU(5)$, то эти аргументы уже больше не имеют места и монополи могут существовать. Эти вопросы стали недавно вновь обсуждаться в связи с сообщением об открытии монополя¹⁾.

Из сравнения монополя т'Хофта — Полякова с монополем Дирака, рассмотренным в § 10.3, может показаться, что они не имеют почти ничего общего, точнее совсем ничего, за тем исключением, что оба обладают магнитным зарядом. Однако это не совсем так, и нам представляется полезным завершить данный параграф демонстрацией того, как они могут быть связаны друг с другом. Начнем с дираковского монополя, линия сингулярностей которого направлена вдоль отрицательной полуоси z . Поэтому вектор-потенциал поля дается формулой (10.45). Теперь мы вложим все это в $SU(2)$ -теорию, где вектор-потенциал направлен вдоль третьей оси в изоспиновом пространстве. Тогда в терминах матричного потенциала $A_\mu = A_\mu^a \tau^a$ мы имеем

$$A_0 = A_r = A_\theta = 0, \quad A_\varphi = \tau_3 \left(-\frac{g}{r} \right) \left(\frac{1 - \cos \theta}{\sin \theta} \right). \quad (10.74)$$

Введем дополнительно скалярное поле ϕ с вакуумным средним F , также направленное вдоль третьей оси в изоспиновом пространстве:

$$\phi = \tau_3 F. \quad (10.75)$$

Преобразуем теперь A_μ и ϕ с помощью зависящего от пространственно-временной точки калибровочного преобразования в изоспиновом пространстве. Произвольное калибровочное преобразование

¹⁾ Cabrera B. Phys. Rev. Lett., 48, 1378 (1982). Однако см. Cabrera B. et al. Phys. Rev. 51, 1933 (1983). [В настоящее время вопрос о существовании монополей остается открытым. — Прим. ред.]

группы $SU(2)$ может быть описано углами Эйлера (α, β, γ) и записывается в виде

$$S = e^{(i/2)\alpha\tau_3} e^{(i/2)\beta\tau_2} e^{(i/2)\gamma\tau_1} = \\ = \begin{pmatrix} \cos(\beta/2) e^{i(\gamma+\tau_1/2)} & \sin(\beta/2) e^{i(-\gamma+\alpha/2)} \\ -\sin(\beta/2) e^{i(\gamma-\tau_1/2)} & \cos(\beta/2) e^{-i(\gamma+\tau_1/2)} \end{pmatrix}.$$

Если теперь положить $\gamma = -\alpha = \varphi$, $\beta = -\theta$, то

$$S = \begin{pmatrix} \cos \theta/2 & -e^{-i\varphi} \sin \theta/2 \\ e^{i\varphi} \sin \theta/2 & \cos \theta/2 \end{pmatrix}, \quad (10.76a)$$

а

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} \cos \theta/2 & e^{-i\varphi} \sin \theta/2 \\ -e^{i\varphi} \sin \theta/2 & \cos \theta/2 \end{pmatrix}. \quad (10.76b)$$

Закон преобразования для вектор-потенциала A_μ имеет вид [такой же, как и в (3.162)], где $A_\mu = A_\mu^\alpha \tau^\alpha$, а $g \rightarrow e$

$$A'_\mu = SA_\mu S^{-1} + \frac{2i}{e} S \partial_\mu S^{-1}. \quad (10.77)$$

Из (10.76 б) следует, что

$$\partial_r S^{-1} = 0, \quad \partial_\theta S^{-1} = \frac{1}{2r} \begin{pmatrix} -\sin \theta/2 & e^{-i\varphi} \cos \theta/2 \\ -e^{i\varphi} \cos \theta/2 & -\sin \theta/2 \end{pmatrix},$$

$$\partial_\varphi S^{-1} = \frac{-i}{r \sin \theta} \begin{pmatrix} 0 & e^{-i\varphi} \sin \theta/2 \\ e^{i\varphi} \sin \theta/2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Подставляя эти соотношения в (10.77), используя (10.74) и положив $g = 1/e$ [из (10.62)], получим после простых преобразований, что

$$A'_0 = A'_r = 0; \quad A'_\theta = \frac{1}{er} (\tau_1 \sin \varphi - \tau_2 \cos \varphi),$$

$$A'_\varphi = \frac{1}{er} (\tau_1 \cos \theta \cos \varphi + \tau_2 \cos \theta \sin \varphi - \tau_3 \sin \theta).$$

Теперь можно найти декартовы компоненты поля A , например:

$$A'_x = A'_\varphi \cos \varphi \sin \theta + A'_\theta \cos \theta \cos \varphi - A'_\varphi \sin \varphi = \\ = \frac{1}{er} \left[\tau_2 \left(\frac{-z}{r} \right) + \tau_3 \left(\frac{y}{r} \right) \right]. \quad (10.78)$$

А это выражение имеет уже форму «ежа» (10.54). При тех же преобразованиях (10.76) поле Хиггса (10.75) принимает вид

$$\varphi' = S\varphi S^{-1} = F \begin{pmatrix} \cos \theta & e^{-i\varphi} \sin \theta \\ -e^{i\varphi} \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix} = \\ = F (\sin \theta \cos \varphi \tau_1 + \sin \theta \sin \varphi \tau_2 + \cos \theta \tau_3), \quad (10.79)$$

т. е.

$$\varphi'^a = F \frac{r^a}{r} \quad (10.80)$$

как и в (10.55). В результате этого преобразования линия сингулярностей дираковского потенциала *исчезает*, а источником монополя, как это и было, является поле Хиггса. На основании уравнения (10.59) мы можем сказать, что калибровочное преобразование переносит ответственность за существование монополя с первого (дираковского) члена на второй (топологический хиггсовский) член. Таким образом, монополи Дирака и т'Хофта — Полякова не такие уж не связанные друг с другом объекты, как это может показаться на первый взгляд.

§ 10.5. Инстантоны

Наш последний пример солитонного решения относится к случаю, когда солитоны локализованы как во времени, так и в пространстве. Имея это в виду, т'Хофт назвал их «инстантонами». (Альтернативное название «псевдочастицы» предложено Поляковым.) Не удивительно, что такие решения существуют, поскольку уравнения для калибровочных полей являются релятивистски-ковариантными и, следовательно, допускают нетривиальную топологию как во времени, так и в пространстве. Кроме того, калибровочная группа $SU(2)$ играет особую роль, что будет видно из дальнейшего рассмотрения. Мы будем рассматривать евклидово пространство-время E^4 . Его границей является S^3 , т. е. 3-сфера. В то же время, как мы видели ранее, из формулы (10.34) следует, что групповым пространством в случае группы $SU(2)$ также является пространство S^3 . Следовательно, топологически нетривиальные решения уравнений для калибровочных полей с группой $SU(2)$ существуют в том случае, если существуют нетривиальные (негомотопические) отображения S^3 на S^3 , т. е. если группа $\pi_3(S^3)$ является нетривиальной [см. соотношение (3.114)]. Она действительно нетривиальна:

$$\pi_3(S^3) = \mathbb{Z}. \quad (10.81)$$

Отсюда следует, что инстантоны могут существовать в *чисто* калибровочной теории — спонтанное нарушение симметрии не яв-

ляется необходимым. Это отличает инстантоны от монополей. План настоящего параграфа состоит в том, чтобы выписать инстантонное решение, описать его топологическую природу и затем кратко рассмотреть физические следствия, вытекающие из существования инстантонов. На эту тему имеется достаточно обширная литература, поэтому наше рассмотрение будет носить вводный характер и читатель отсылается ко многим прекрасным обзорам, с помощью которых он может углубить свои познания в данной области. Добавим, что инстантоны вызвали интерес у многих математиков. Много статей посвящено исследованию их связи с топологией и алгебраической геометрией. Однако эти вопросы выходят за рамки этой книги, и читатель вновь отсылается к литературе.

Начнем с рассмотрения некоторых математических вопросов. Евклидову пространству соответствуют координаты (x_1, x_2, x_3, x_4) , где [см. (6.16)]

$$x_0 = -ix_4 \quad (10.82)$$

($x_0 = ct$). Евклидов тензор поля $F_{\mu\nu}^a$ определяется [31] таким же образом, как и в случае пространства Минковского [см. (3.169)]:

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g \varepsilon^{abc} A_\mu^b A_\nu^c. \quad (10.83)$$

Определяя величины

$$A_\mu = \frac{1}{2} \sigma^a A_\mu^a, \quad F_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \sigma^a F_{\mu\nu}^a. \quad (10.84)$$

запишем тензор поля в виде [см. (3.166)]

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - ig[A_\mu, A_\nu]. \quad (10.85)$$

Далее, вводя обозначение

$$\partial_{[\mu} A_{\nu]} \equiv \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu, \quad (10.86)$$

будем иметь

$$F_{\mu\nu} = \partial_{[\mu} A_{\nu]} - ig[A_\mu, A_\nu]. \quad (10.87)$$

Тензор $\tilde{F}_{\mu\nu}$, дуальный тензору $F_{\mu\nu}$, определяется как

$$\tilde{F}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} F_{\rho\sigma} \quad (10.88)$$

(напомним, что в евклидовом пространстве нет необходимости различать верхние и нижние индексы). При условии $\varepsilon_{1234} = 1$ отсюда следует, что

$$\tilde{\tilde{F}}_{\mu\nu} = F_{\mu\nu}, \quad (10.89)$$

тогда как в пространстве Минковского вследствие того, что из равенства $\varepsilon^{0123} = 1$ следует равенство $\varepsilon_{0123} = -1$, мы имеем

$$\tilde{\tilde{F}}_{\mu\nu} = -F_{\mu\nu} \quad (\text{в пространстве Минковского}). \quad (10.90)$$

При калибровочных преобразованиях

$$A'_\mu = S A_\mu S^{-1} - \frac{i}{g} (\partial_\mu S) S^{-1}, \quad (10.91)$$

$$F'_{\mu\nu} = S F_{\mu\nu} S^{-1}. \quad (10.92)$$

Определим теперь величину

$$\begin{aligned} K_\mu &= \frac{1}{4} \varepsilon_{\mu\nu\lambda} \left(A_\nu^a \partial_x A_\lambda^a + \frac{g}{3} \varepsilon_{abc} A_\nu^a A_x^b A_\lambda^c \right) = \\ &= \varepsilon_{\mu\nu\lambda} \text{Tr} \left(\frac{1}{2} A_\nu \partial_x A_\lambda - \frac{ig}{3} A_\nu A_x A_\lambda \right). \end{aligned} \quad (10.93)$$

Справедливо соотношение

$$\partial_\mu K_\mu = \frac{1}{4} \text{Tr} \tilde{F}_{\mu\nu} F_{\mu\nu} = \frac{1}{8} \tilde{F}_{\mu\nu}^a F_{\mu\nu}^a, \quad (10.94)$$

т. е. величина $\text{Tr} \tilde{F} F$ является полной дивергенцией.

Доказательство. Вследствие циклического свойства следа

$$\partial_\mu K_\mu = \varepsilon_{\mu\nu\lambda} \text{Tr} \left[\frac{1}{2} (\partial_\mu A_\nu) (\partial_x A_\lambda) - ig (\partial_\mu A_\nu) A_x A_\lambda \right].$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} \text{Tr} F_{\mu\nu} \tilde{F}_{\mu\nu} &= \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu\lambda} \times \\ &\times \text{Tr} \{ \partial_{[\mu} A_{\nu]} - ig[A_\mu, A_\nu] \} \{ \partial_{[x} A_{\lambda]} - ig[A_x, A_\nu] \} = \\ &= 2\varepsilon_{\mu\nu\lambda} \text{Tr} (\partial_\mu A_\nu) (\partial_x A_\lambda) - 2ig\varepsilon_{\mu\nu\lambda} \text{Tr} A_\mu A_\nu (\partial_x A_\lambda) - \\ &- 2ig\varepsilon_{\mu\nu\lambda} \text{Tr} (\partial_\mu A_\nu) A_x A_\lambda - 2g^2\varepsilon_{\mu\nu\lambda} \text{Tr} A_\mu A_\nu A_x A_\lambda. \end{aligned}$$

Вследствие циклического свойства следа второй член в последнем выражении равен третьему, а четвертый обращается в нуль. Таким образом, соотношение (10.94) доказано.

Рассмотрим теперь 4-мерный объем V^4 в E^4 с границей $\partial V^4 \sim \sim S^3$. Предположим, что он является чистым вакуумом $A_\mu = 0$, $F_{\mu\nu} = 0$. Тогда $K_\mu = 0$. Уравнения поля (в отсутствие материи)

$$D_\mu F_{\mu\nu} = 0, \quad (10.95)$$

очевидно, выполняются во всей области V^4 , равно как и тождество Бьянки

$$D_\mu \tilde{F}_{\mu\nu} = 0, \quad (10.96)$$

которое, очевидно, должно удовлетворяться. Применяя теорему Гаусса к соотношению (10.94), будем иметь

$$\int_{V^4} \text{Tr} F_{\mu\nu} \tilde{F}_{\mu\nu} d^4x = 4 \int_{V^4} \partial_\mu K_\mu d^4x = 4 \oint_{\partial V^4} K_\perp d^3x. \quad (10.97)$$

Это равенство тривиально выполняется, если V^4 — чистый вакуум.

Произведем теперь (зависящее от точки пространства-времени) калибровочное преобразование на границе S^3 :

$$A_\mu \rightarrow -\frac{i}{g} (\partial_\mu S) S^{-1} \quad (\text{на } S^3), \quad (10.98)$$

т. е.

$$F_{\mu\nu} = 0.$$

Следовательно, граница становится «чисто калибровочным» вакуумом. Выберем S в виде

$$S = \frac{x_4 + ix \cdot \sigma}{\sqrt{\tau^2}}, \quad (10.99)$$

где

$$\tau^2 = x_4^2 + x^2. \quad (10.100)$$

Далее в результате непосредственных (однако длинных) вычислений мы находим

$$A_i = \frac{i}{g\tau^2} [x_i - \sigma_i (\sigma \cdot x + ix_4)], \quad (10.101)$$

$$A_4 = -\frac{1}{g\tau^2} \sigma \cdot x,$$

а также

$$K_\mu = \frac{2x_\mu}{g^2\tau^4}. \quad (10.102)$$

Соотношение (10.97) далее дает

$$\begin{aligned} \int \text{Tr} F_{\mu\nu} \tilde{F}_{\mu\nu} d^4x &= 4 \oint_{S^3} K_\perp d^3\sigma = \\ &= \frac{8\tau}{g^2\tau^4} \oint_{S^3} d(\text{площадь}) = \frac{16\pi^2}{g^2}, \end{aligned} \quad (10.103)$$

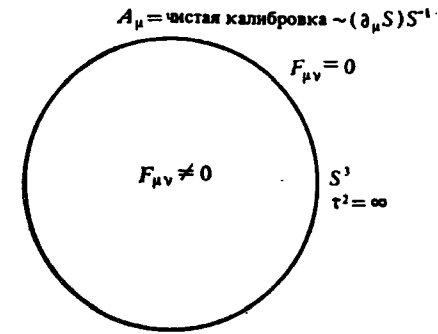


Рис. 10.10. Инстантон. Напряженность поля $F_{\mu\nu}$ не равна нулю внутри объема V^4 , но обращается в нуль на его границе S^3 .

причем использован тот факт, что площадь поверхности 3-мерной сферы радиусом τ равна $2\pi^2\tau^3$. [Площадь поверхности единичной сферы S^n равна $\pi^{n/2}2^{n+1}(n/2)!/(n!)$.] Мы видим непосредственно, что тензор $F_{\mu\nu}$ не может равняться нулю во всем объеме V^4 , хотя он и обращается в нуль на границе. Отметим, что это связано с тем фактом, что величина K_μ не является калибровочно-инвариантной.

Описанная ситуация схематически изображена на рис. 10.10. Напряженность поля $F_{\mu\nu}$ отлична от нуля внутри объема V^4 , однако она обращается в нуль на границе S^3 , где поле A_μ является чистой калибровкой. Очевидно, что выражение (10.98) не является решением уравнений для калибровочного поля во всем пространстве, а представляет собой лишь асимптотику при $\tau^2 \rightarrow \infty$. Как нам следует это понимать? Покажем сначала, что интегралом (10.103) определяется топологический индекс. Его называют индексом Понтрягина (или классом Понтрягина) и обозначают через q :

$$q = \frac{g^2}{16\pi^2} \text{Tr} \int F_{\mu\nu} \tilde{F}_{\mu\nu} d^4x. \quad (10.104)$$

В рассматриваемом случае имеем

$$q = \frac{g^2}{4\pi^2} \int \partial_\mu K_\mu d^4x = 1. \quad (10.105)$$

Мы покажем, что q есть степень отображения группового пространства S^3 группы $SU(2)$ на границу координатного пространства S^3 . Подстановка (10.98) в (10.93) дает

$$K_\mu = \frac{1}{6g^2} \epsilon_{\mu\nu\lambda} \text{Tr} (S^{-1}\partial_\nu S) (S^{-1}\partial_\lambda S) (S^{-1}\partial_\mu S).$$

Следовательно,

$$q = \frac{1}{24\pi^2} \oint_{S^3} \varepsilon_{\mu\nu\lambda} \hat{n}_\mu \text{Tr} (S^{-1}\partial_\nu S) (S^{-1}\partial_\lambda S) (S^{-1}\partial_\mu S) d^3\sigma =$$

$$= \frac{1}{24\pi^2} \oint_{S^3} \frac{\partial(g)}{\partial(\sigma)} d^3\sigma = \frac{1}{24\pi^2} \int_G d^3g, \quad (10.106)$$

где d^3g — инвариантный элемент объема в групповом пространстве. Следовательно, q дает (брауэровскую) степень отображения $S^3 \rightarrow S^3$.

Таким образом, данное решение во всем аналогично солитонному решению, за тем исключением, что E^4 обладает одним временным и тремя пространственными измерениями⁴). Аналогия состоит в том, что когда одна из этих координат меняется от $-\infty$ до $+\infty$, то полевая конфигурация меняется и граничные условия на $-\infty$ и $+\infty$ различны, подобно тому как это изображено на рис. 10.1 и 10.3 в случае кинка для уравнения синус-Гордона. В этом случае соответствующая координата была пространственной. Очевидный способ интерпретировать данное решение состоит в том, чтобы считать, что оно описывает эволюцию во времени, а не в пространстве. С учетом этого мы

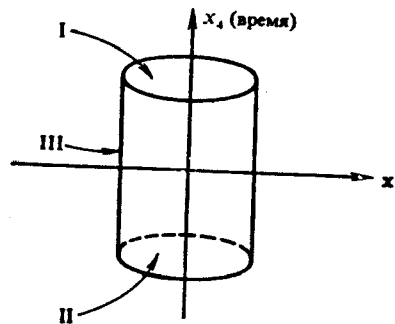


Рис. 10.11. Граница, соответствующая инстантону. I отвечает условию $x_4 \rightarrow \infty$, II — условию $x_4 \rightarrow -\infty$.

изобразим границу S^3 так, как это сделано на рис. 10.11. Гиперповерхности I и II отвечают случаям $x_4 \rightarrow \infty$ и $x_4 \rightarrow -\infty$, а гиперцилиндрическая поверхность III соединяет их. Далее, мы имеем

$$q = \frac{1}{24\pi^2} \left[\int_{I-II} d^3\sigma \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \text{Tr} (\bar{A}_\alpha \bar{A}_\beta \bar{A}_\gamma) + \right.$$

$$\left. + \int_{-\infty}^{\infty} dx_4 \int_{III} d^2\sigma_i \varepsilon_{i\nu\lambda} \text{Tr} (\bar{A}_\nu \bar{A}_\lambda \bar{A}_i), \quad (10.107)$$

где $\bar{A}_\mu = S^{-1}(\partial_\mu S) = igA_\mu$.

⁴ Читатель не должен упускать из виду, что в используемой здесь евклидовой формулировке «временная» координата является мнимой. — Прим. ред.

Теперь, как было отмечено выше, поле A_μ не является чистой калибровкой во всем объеме. Требуемое выражение для A_μ имеет вид

$$A_\mu = \frac{\tau^2}{\tau^2 + \lambda^2} \left(\frac{-i}{g} \right) (\partial_\mu S) S^{-1}, \quad (10.108)$$

где λ — константа [26]. При $x_4 \rightarrow \pm \infty$ это выражение превращается в чистую калибровку, однако внутри 4-мерного объема V^4 оно таково, что $F_{\mu\nu} \neq 0$, как и требуется. Данное выражение для A_μ является решением полевых уравнений, оно принадлежит к числу тех решений, которые должны использоваться в вышенаписанном выражении для q . Однако величина q калибровочноинвариантна, вследствие чего удобно выбрать калибровку, в которой $A'_\mu = 0$, так что интеграл по цилиндрической поверхности III в выражении (10.107) обращается в нуль (так как условие неравенства нулю интеграла состоит в том, чтобы один из индексов ν, α, λ равнялся 4). Соответствующее калибровочное преобразование имеет вид¹)

$$A'_\mu = UA_\mu U^{-1} - i(\partial_\mu U)U^{-1}. \quad (10.109)$$

где

$$U = \exp \left[\frac{ix \cdot \sigma}{(\tau^2 + \lambda^2)^{1/2}} \theta \right], \quad (10.110)$$

$$\theta = \text{arctg} \left[\frac{x_4}{(\tau^2 + \lambda^2)^{1/2}} - \frac{\pi}{2} \right],$$

а поле A_μ имеет вид (10.108) [где функция S задана выражением (10.99)]. Легко видеть, что

$$A'_4 = 0,$$

т. е. величина q сводится к разности двух интегралов по поверхностям, отвечающим пределам $x_4 \rightarrow -\infty$ и $x_4 \rightarrow \infty$. Величины A'_i задаются сложными выражениями, которые при $x_4 \rightarrow \pm \infty$ сводятся к следующим:

$$x_4 \rightarrow \infty, \quad A'_i \rightarrow i(g_n)^{-1}(\partial_i g_n), \quad (10.111)$$

$$x_4 \rightarrow -\infty, \quad A'_i \rightarrow i(g_{n-1})^{-1}(\partial_i g_{n-1}),$$

где

¹ Заимствовано из неопубликованных лекций А. Чакрабарти (Recontre de Rabat, May, 1978). См. также работу [28].

$$g_n = (g_1)^n, \quad g_1 = \exp\left[-i\pi \frac{x \cdot \sigma}{(\tau^2 + \lambda^2)^{1/2}}\right], \quad (10.112)$$

причем очевидно, что g_n является элементом группы $SU(2)$, однако g_n и g_m ($n \neq m$) не являются гомотопными. В частности, g_1 и $g_0 = 1$ не являются гомотопными, т. е. невозможно найти функцию $g(g_1, a)$, где a — непрерывная переменная, изменяющаяся между 0 и 1, такую, чтобы выполнялись условия $g(g_1, 1) = g_1$ и $g(g_1, 0) = 1$ (см. § 3.4). Таким образом, инстантон описывает решение уравнений для калибровочного поля, для которых при изменении координаты x_4 от $-\infty$ до $+\infty$ вакуум (принадлежащий к гомотопическому классу $n - 1$) переходит в другой вакуум (принадлежащий к гомотопическому классу n). При этом индекс Понтрягина равен

$$q = n - (n - 1) = 1.$$

В промежутке между этими вакуумами существует область, в которой тензор поля $F_{\mu\nu}$ отличен от нуля и, следовательно, поле обладает положительной энергией. Таким образом, янг-миллсовский вакуум является бесконечнократно вырожденным, он состоит из бесконечного числа гомотопически неэквивалентных вакуумов. Инстантонное решение отвечает переходу из вакуума одного класса в вакуум другого класса. Физика выходит на сцену, когда мы задаемся вопросом, чему равна амплитуда этого перехода. С классической точки зрения она безусловно равна нулю, так как между двумя вакуумами имеется энергетический горб. Однако при квантовомеханическом рассмотрении мы должны учитывать эффект прохождения через барьер. Рассмотрим его.

Квантовое туннелирование, θ -вакуумы и нарушение симметрии
Мы покажем, что амплитуда прохождения через барьер имеет вид

$$e^{-S_E}, \quad (10.113)$$

где S_E — евклидово действие. Чтобы доказать это, рассмотрим прохождение одной частицы через одномерную потенциальную яму в квазиклассическом (ВКБ) приближении. Если $V > E$, то процесс классически ($\hbar = 0$) запрещен; однако в действительности амплитуда туннелирования равна

$$\exp\left\{-\frac{1}{\hbar} \int_a^b [2m(V - E)]^{1/2} dx\right\} \equiv \exp\left(-\frac{1}{\hbar} S_E\right), \quad (10.114)$$

где величина S_E по определению равна вышенаписанному интегралу. Мы покажем, что фактически S есть действие при мнимом времени. В самом деле, рассмотрим случай, когда $E > V$ и переход

классически разрешен. В этом случае волновая функция осциллирует и число осцилляций определяется выражением

$$\frac{1}{\hbar} \int_a^b p dx = \frac{1}{\hbar} \int_a^b [2m(E - V)]^{1/2} dx. \quad (10.115)$$

С другой стороны,

$$\int p dx = \int p \dot{x} dt = \int (H + L) dt = \int (E + L) dt.$$

Если полная энергия нормирована на нуль, то

$$\int p dx = \int L dt = S,$$

что совпадает с полным действием в случае движения между a и b . Единственное различие между (10.114) и (10.115) состоит в знаке выражения $E - V$. Однако знак перед V в уравнении движения

$$m \ddot{x} = \frac{\partial V}{\partial x}$$

изменяется на противоположный, если мы заменим t на it . Следовательно, величина S_E , определенная соотношением (10.114), представляет собой действие при мнимом времени. В случае теории поля эта величина является действием в евклидовом пространстве. Таким образом, амплитуда туннелирования задается соотношением (10.113).

Как определить действие для инстантона? Его легко вычислить с помощью неравенства

$$\text{Tr} (F_{\mu\nu} - \tilde{F}_{\mu\nu})^2 > 0. \quad (10.116)$$

Учитывая равенство

$$\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \epsilon_{\mu\nu\kappa\lambda} = 2(\delta_{\rho\kappa} \delta_{\sigma\lambda} - \delta_{\rho\lambda} \delta_{\sigma\kappa}),$$

легко видеть, что

$$\tilde{\tilde{F}}_{\mu\nu} \tilde{\tilde{F}}_{\mu\nu} = F_{\mu\nu} F_{\mu\nu}.$$

Поэтому из неравенства (10.116) следует соотношение

$$\text{Tr} F_{\mu\nu} F_{\mu\nu} > \text{Tr} \tilde{\tilde{F}}_{\mu\nu} F_{\mu\nu}. \quad (10.117)$$

Однако решение (10.108) обладает свойством *самодуальности* [см. (10.89)]:

$$F_{\mu\nu} = \tilde{\tilde{F}}_{\mu\nu}. \quad (10.118)$$

[Это — ключевое свойство инстантонов, и во многих подходах его используют в качестве отправного пункта. С учетом тождества Бьянки (10.96) самодуальность гарантирует, что полевые уравнения удовлетворяются.] Мы приходим к выводу, что в случае инстантонов (10.117) превращается в равенство. Поскольку действие (в евклидовом пространстве) имеет вид

$$S = -\frac{1}{4} \int F_{\mu\nu}^a F_{\mu\nu}^a d^4x = -\frac{1}{2} \int \text{Tr} F_{\mu\nu} F_{\mu\nu} d^4x, \quad (10.119)$$

то из равенства (10.117) и (10.104) следует

$$S = -\frac{8\pi^2}{g^2} q = -\frac{8\pi^2}{g^2}, \quad (10.120)$$

поскольку $q = 1$. Следовательно, амплитуда туннелирования между чистым вакуумом и вакуумом, подвергнутым калибровочному преобразованию, имеет вид

$$e^{-8\pi^2/g^2}. \quad (10.121)$$

Мы установили, что в квантовой теории Янга — Миллса вакуум является бесконечно вырожденным, причем амплитуды перехода между вакуумами, подвергнутыми калибровочным преобразованиям и принадлежащими различным гомотопическим классам, отличны от нуля. Вследствие этого истинное основное состояние в гильбертовом пространстве можно записать в виде

$$|\text{vac}\rangle_0 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\theta} |\text{vac}\rangle_n, \quad (10.122)$$

где n — целое число, нумерующее гомотопические классы. Это состояние характеризуется частным значением θ , а коэффициенты $e^{in\theta}$ обеспечивают инвариантность (с точностью до фазового множителя) величины $|\text{vac}\rangle_0$ при калибровочных преобразованиях g_1 (см. (10.112)). При таких преобразованиях мы имеем

$$|\text{vac}\rangle_n \xrightarrow{g_1} |\text{vac}\rangle_{n+1} \quad (10.123)$$

и, следовательно,

$$|\text{vac}\rangle_0 \xrightarrow{g_1} e^{-i\theta} |\text{vac}\rangle_0. \quad (10.124)$$

Калибровочные преобразования типа g_1 (или g_n), изменяющие гомотопический класс, иногда называют «большими» калибровочными преобразованиями. К «малым» калибровочным преобразованиям относятся те, которые можно непрерывным образом деформировать в тождественное (например, бесконечно малые преобразования) и которые не изменяют гомотопический класс.

Вакуумы вида (10.117) называют θ -вакуумами. Из их существования вытекает ряд важных следствий для физики частиц. Если $\theta \neq 0$, то вакуум является комплексным и инвариантность относительно обращения времени нарушается. Из *CPT*-теоремы следует, что и *CP*-инвариантность нарушается. Далее, поскольку при пространственных отражениях мы имеем $g_1 \rightarrow (g_1)^{-1}$, то, если $\theta \neq 0$ нарушается также *P*-инвариантность. Наблюдаемый масштаб нарушения *T*-инвариантности приводит¹⁾ к ограничению $\theta < 10^{-5}$. Удовлетворительное объяснение того факта, что θ является столь малой, но отличной от нуля величиной, еще предстоит найти.

Укажем в заключение, что т'Хофт обратил внимание на замечательное следствие существования инстантонов в случае, когда в теории присутствуют также фермионы. Рассмотрим теорию с *N* безмассовыми кварками, где *N* — индекс «ароматов». Такая теория обладает киральной симметрией $SU(N)_L \otimes SU(N)_R \otimes U(1)$. Однако киральный ток J_μ^5 обладает аномалией [ср. (9.265)]

$$\partial_\mu J_\mu^5 = \frac{Ng^2}{16\pi^2} F_{\mu\nu}^a \tilde{F}_{\mu\nu}^a.$$

Сравнивая с (10.104), получаем

$$\partial_\mu J_\mu^5 = 2Ng,$$

т. е. в поле инстантонов с $q = 1$ существует нарушение сохранения аксиального заряда Q^5 на величину

$$\Delta Q^5 = 2N.$$

Это приводит к таким распадам, как

$$p + n \rightarrow e^+ + \bar{\nu}_\mu \quad \text{или} \quad \mu^+ + \bar{\nu}_e,$$

в которых нарушается сохранение барионного и лептонного зарядов (которым не соответствуют калибровочные симметрии). Однако вероятность этих распадов в случае, когда

$\sin^2 \theta_W \approx 0,35$, равна

$$e^{-16\pi^2/g^2} = e^{-16\pi^2/e^2 \sin^2 \theta_W} = e^{-4\pi \cdot 137 \sin^2 \theta_W} = e^{-602,6} = 10^{-262}.$$

Отсюда получается время жизни дейтрона порядка 10^{265} с $\approx 10^{218}$ лет. Такие огромные числа характерны для инстантонных расчетов. Было бы интересно, если бы оказалось, что некоторые большие числа в физике обязаны своим происхождением явлениям такого типа.

¹⁾ Wilczek F. Phys. Rev. Lett., 44, 279 (1978).

Методы, рассмотренные в настоящей главе, являются, по существу *непертурбативными*: во-первых, поскольку возмущения около чистого вакуума не могут привести к возбуждениям, принадлежащим *другому гомотопическому классу*, и, во-вторых, поскольку квазиклассическое приближение также является непертурбативным. Это послужило мощным толчком для применения топологических методов в последние годы, поскольку те области физики, которые при этом изучаются, совершенно недоступны для теории возмущений. Например, была высказана надежда, что этими методами можно объяснить заключение (конфайнмент) кварков. Во всяком случае, мы увидели в этом мире новые горизонты, и неабелевы калибровочные теории, подобные электрослабой теории, КХД и великому объединению (и гравитации?), теперь представляются гораздо более богатыми структурами, чем мы могли до сих пор себе представить.

Резюме

1) Описывается кинковое решение уравнения синус-Гордона. Стабильность кинка связана с топологией граничных условий. 2) Показывается, что в случае двух (и более) пространственных измерений солитоны с конечной энергией могут существовать, только если имеется также калибровочное поле. Соответствующее решение в 2-мерном пространстве (или 3-мерном пространстве в случае цилиндрической симметрии) представляет собой линию, несущую магнитный поток, который отождествляется с абрикосовской линией потока в теории сверхпроводимости. Такие вихревые линии существуют в случае, когда калибровочной группой является группа $U(1)$, но не $SU(2)$. В случае группы $O(3)$ имеется только одно значение заряда, приходящегося на единицу длины вихревой линии. 3) Вводится магнитный монополю и выводится условие квантования Дирака. Кратко излагается формулировка Ву и Янга теории монополя Дирака, основанная на теории расслоений. 4) Определенные неабелевы калибровочные теории со спонтанным нарушением симметрии обладают решениями, соответствующими магнитному заряду, так называемому монополю т'Хофта — Полякова. Если G — калибровочная группа, а H — ненарушенная подгруппа, то условием существования монополей является нетривиальность гомотопической группы $\pi_2(G/H)$. Вследствие этого монополи т'Хофта — Полякова отсутствуют в теории Салама — Вайнберга. Показывается, как калибровочное преобразование связывает монополи Дирака и т'Хофта — Полякова. 5) Инстантон является топологически нетривиальным решением чистых (без спонтанного нарушения) уравнений калибровочных полей. Он описывает конфигурации с энергией, локализованной во времени и в пространстве. Описываются топологические свойства инстантона.

Вакуум является топологически вырожденным. Указываются некоторые физические следствия этого факта, связанные с квантовым туннелированием.

Литература для дальнейшего изучения

Современные полные обзоры по солитонам в нелинейных теориях (включая калибровочные теории):

1. Scott A., Chu F., McLaughlin D. Proc. IEEE. 61, 1443 (1973).
2. Whitham G. B. Linear and Nonlinear Waves, Wiley, 1974.

Краткие обзоры:

3. Coleman S. — in: New Phenomena in Subnuclear Physics, ed. A. Zichichi, Plenum Press, 1977, Pt. A.
4. Wick G. C. — in: Understanding the Fundamental Constituents of Matter, ed. A. Zichichi, Plenum Press, 1978.

Примеры применения кинков в физике рассматриваются в работах:

5. Finkelstein D., Misner C. W. Ann. of Phys., 6, 230 (1959), Finkelstein D. Journ. Math. Phys., 7, 1218 (1966).
6. Faddeev L. D. Lett. Math. Phys., 1, 289 (1976).

Квантование солитонов обсуждается в статье [3] и в работе:

7. Neveu A. Repts Progr. Phys., 40, 709 (1977).

На существование вихревых линий в калибровочных теориях было впервые указано в работе:

8. Nielsen H. B., Olesen P. Nucl. Phys., B61, 45 (1973).

Применение к модели Салама — Вайнберга см. в работе:

9. Nambu Y. Nucl. Phys., B130, 505 (1977).

Обзор по данным вопросам:

10. Jaffe A., Taubes C. Vortices and Monopoles, Birkhäuser Verlag, 1980.

Статья Дирака о магнитных монополях:

11. Dirac P. A. M. Proc. Roy. Soc. A133, 69 (1931).

См. также:

12. Wentzel G. Progr. Theor. Phys., Suppl., 37, 38, 163 (1966).

Формулировка теории Дирака, данная Ву и Янгом, изложена в работе:

13. Wu T. T., Yang C. N. Phys. Rev. D12, 3845 (1975).

Дальнейшее развитие теории Дирака с использованием теории расслоений см. в работах:

14. Trautman A. Intern. Journ. Theor. Phys., 16, 561 (1977); Minami M. Progr. Theor. Phys., 62, 1128 (1979); Ryder L. H. Journ. Phys., A13, 437 (1980).

Обзоры по теории монополя Дирака:

15. Felsager B. Geometry, Particles and Fields, Odense University Press, 1981, Ch. 9.
16. Coleman S. Monopoles Revisited. — in: The Unity of the Fundamental Interactions, ed. A. Zichichi, Plenum Press, 1983.
17. Goddard P., Olive D. I. Repts. Progr. Phys., 41, 1357 (1978).

18. Monopoles in Quantum Field Theory, eds. N. S. Craigie, P. Goddard, W. Nahm, World Scientific, Singapore, 1982.

- Монополи т'Хофта — Полякова были впервые рассмотрены в работах:
 19. 'tHooft G. Nucl. Phys., B79, 276 (1974).
 20. Поляков А. М. — Письма в ЖЭТФ, 1974, т. 20, с. 430; ЖЭТФ, 1975, т. 68, вып. 6, с. 1975.

Топологическое происхождение этих монополей рассматривается в работах:

21. Arafune J., Freund P. G. O., Goebel C. J. Journ. Math. Phys., 16, 433 (1975).
 22. Тюпкин Ю. С., Фатеев В. А., Шварц А. С. — Письма в ЖЭТФ, 1975, т. 21, с. 91; Монастырский М. И., Переломов А. М. — Письма в ЖЭТФ, 1975, т. 21, с. 94.

Обзор по этим вопросам дается в работах [3, 10, 16 — 18], а также в работах:

23. Nambu Y. Physica, 96A, 89 (1979).
 24. Rajaraman R. Solitons and Instantons, North-Holland Publishing Co., 1982. [Имеется перевод: Раджараман Р. Солитоны и инстантоны в квантовой теории поля. — М.: Мир, 1985.]
 25. Huang K. Quarks, Leptons and Gauge Fields, World Scientific, Singapore, 1982. [Имеется перевод: Хуанг К. Кварки, лептоны и калибровочные поля. — М.: Мир, 1985.]

Инстантоны были открыты в работе:

26. Belavin A. A., Polyakov A. M., Schwartz A. S., Tyupkin Yu. S. Phys. Lett, 59B, 85 (1975).

Важные работы по инстантонам:

27. 't Hooft G. Phys. Rev. Lett., 37, 8 (1976); 't Hooft G. Phys. Rev., D12, 3432 (1978); Jackiw R., Rebbi C. Phys. Rev. Lett., 37, 172 (1976); Callan C. G., Jr., Dashen R. F., Gross D. J. Phys. Lett., 63B, 34 (1976).

Математические свойства инстантонов изучались в работах:

28. Jackiw R., Rebbi C. Phys. Lett., 67B, 189 (1977); Atiyah M. F., Hitchin N. J., Drinfeld V. G., Manin Yu. I. Phys. Lett., 65A, 185 (1978); Drinfeld V. G., Manin Yu. I. Comm. Math. Phys., 63, 177 (1978); Atiyah M. F., Hitchin N. J., Singer I. M. Proc. Roy. Soc., A362, 425 (1978).

Общие топологические свойства инстантонов и монополей рассмотрены в работах:

29. Nowakowski J., Trautman A. Journ. Math. Phys., 19, 1100 (1978); Trautman A. Czech. Journ. Phys., B29, 107 (1979).

Обзоры по инстантонам:

30. Coleman S. — in: The Whys of Subnuclear Physics, ed. A. Zichichij, Plenum Press, 1979.
 31. Вайнштейн А. И., Захаров В. И., Новиков В. А., Шифман М. А. — УФН, 1982, т. 136, вып. 4, с. 553.
 32. Crewther R. J., Schroer B. — in: Facts and Prospects in Gauge Theories (Acta Physica Austriaca Supplementum XIX), ed. P. Urban, Springer-Verlag, 1978.
 См. также [15, гл. 5; 24, 25].

Обзоры по математическим вопросам теории инстантонов:

33. Drinfel'd V. G., Manin Yu. I. Math. Phys. Rev. (Soviet Scientific Reviews, Sect. C), 1, 27 (1980).

Прекрасным введением в дифференциальную геометрию калибровочных полей, включая топологию монополей и инстантонов, может служить статья:

34. Eguchi T., Gilkey P. B., Hanson A. J. Phys. Repts, 66, 213 (1980).

1. *Абрикосов А. А., Горьков Л. П., Дзялошинский И. Е.* Методы квантовой теории поля в статистической физике. — М.: Физматгиз, 1962.
2. *Андреев И. В.* Хромодинамика и жесткие процессы при высоких энергиях. — М.: Наука, 1981.
3. *Ахиезер А. И., Берестецкий В. Б.* Квантовая электродинамика. — М.: Наука, 1969.
4. *Белокурлов В. В., Ширков Д. В.* Теория взаимодействий частиц. — М.: Наука, 1986.
5. *Березин Ф. А.* Метод вторичного квантования/Под ред. М. К. Поливанова. — 2-е изд. доп. — М.: Наука, 1986.
6. *Березин Ф. А.* Введение в алгебру и анализ с антикоммутирующими переменными. — М.: Изд-во МГУ, 1983.
7. *Биленький С. М.* Введение в диаграммную технику Фейнмана. — М.: Атомиздат, 1971.
8. *Биленький С. М.* Лекции по физике нейтринных и лептон-нуклонных процессов. — М.: Энергоатомиздат, 1981.
9. *Блохинцев Д. И.* Пространство и время в микромире. — М.: Наука, 1970.
10. *Боголюбов Н. Н.* Цветные кварки — новая ступень познания микромира. Доклад, прочитанный на общем собрании АН СССР 18 марта 1985 г. — ОИЯИ, Д2-85-206, Дубна, 1985.
11. *Боголюбов Н. Н.* Избранные труды по статистической физике. — М.: Изд-во МГУ, 1979.
12. *Боголюбов Н. Н.* Проблемы динамической теории в статистической физике. — М.: Гостехиздат, 1946.
13. *Боголюбов Н. Н., Логунов А. А., Тодоров И. Т.* Основы аксиоматического подхода в квантовой теории поля. — М.: Наука, 1969.
14. *Боголюбов Н. Н., Медведев Б. В., Поливанов М. К.* Вопросы теории дисперсионных соотношений. — М.: Физматгиз, 1958.
15. *Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В.* Введение в теорию квантованных полей. — 4-е, изд., исправл. — М.: Наука, 1984.
16. *Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В.* Квантовые поля. — М.: Наука, 1980.
17. *Боголюбов Н. Н., Толмачев В. В., Ширков Д. В.* Новый метод в теории сверхпроводимости. — М.: Изд-во АН СССР, 1958.
18. *Берестецкий В. Б., Лифшиц Е. М., Питаевский Л. П.* Релятивистская квантовая теория, Часть 1. — М.: Наука, 1968.
19. *Бьёркен Дж. Д., Дрелл С. Д.* Релятивистская квантовая теория. Т. 1, 2. — М.: Наука, 1978.
20. *Васильев А. Н.* Функциональные методы в квантовой теории поля и статистике. — Л.: Изд-во ЛГУ, 1976.
21. *Вентцель Г.* Введение в квантовую теорию волновых полей. — М.: Гостехиздат, 1947.
22. *Владимиров В. С.* Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1976.
23. *Воляков М. К., Пераушин В. Н.* Существенно нелинейные квантовые те-

- рии, динамические симметрии и физика мезонов. — М.: Атомиздат, 1978.
24. *Волошин М. Б., Тер-Мартirosян К. А.* Теория калибровочных взаимодействий элементарных частиц. — М.: Энергоатомиздат, 1984.
25. *Гитман Д. М., Тютин И. В.* Каноническое квантование полей со связями. — М.: Наука, 1986.
26. *Гриб А. А., Мамаев С. Г., Мостепаненко В. М.* Квантовые эффекты в интенсивных внешних полях. — М.: Атомиздат, 1980.
27. *Дирак П. А. М.* Лекции по квантовой теории поля. — М.: Мир, 1971.
28. *Дирак П. А. М.* Принципы квантовой механики. — М.: Наука, 1979.
29. *Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т.* Современная геометрия. — М.: Наука, 1979.
30. *Ефимов Г. В.* Проблемы квантовой теории нелокальных взаимодействий. — М.: Наука, 1985.
31. *Желобенко Д. П.* Комплексные группы Ли и их представления. — М.: Наука, 1970.
32. *Завьялов О. И.* Перенормированные диаграммы Фейнмана. — М.: Наука, 1979.
33. *Ицикзон К., Зюбер Ж.-Б.* Квантовая теория поля. Т. 1, 2. — М.: Мир, 1981.
34. *Киржниц Д. А.* Полевые методы теории многих частиц. — М.: Атомиздат, 1963.
35. *Кополева Н. П., Попов В. Н.* Калибровочные поля. — М.: Атомиздат, 1980.
36. *Лезнов А. Н., Савельев М. В.* Групповые методы интегрирования нелинейных динамических систем. — М.: Наука, 1985.
37. *Лифшиц Е. М., Питаевский Л. П.* Релятивистская квантовая теория. Часть 2. — М.: Наука, 1971.
38. *Логунов А. А.* Лекции по теории относительности. Современный анализ проблемы. — М.: Изд-во МГУ, 1984.
39. *Логунов А. А., Местришивили М. А.* Основы релятивистской теории гравитации. — И.: Изд-во МГУ, 1985.
40. *Малкин И. А., Манько В. И.* Динамические симметрии и когерентные состояния квантовых систем. — М.: Наука, 1979.
41. *Манин Ю. И.* Калибровочные поля и комплексная геометрия. — М.: Наука, 1984.
42. *Марков М. А.* Гипероны и K -мезоны. — М.: Физматгиз, 1958.
43. *Медведев Б. В.* Начала теоретической физики. — М.: Наука, 1977.
44. *Намбу Е.* Кварки. — М.: Мир, 1984.
45. *Неуен Ван Хьеу.* Основы метода вторичного квантования. — М.: Энергоатомиздат, 1984.
46. *Неуен Ван Хьеу.* Лекции по теории унитарной симметрии элементарных частиц. — М.: Атомиздат, 1967.
47. *Новожилов Ю. В.* Введение в теорию элементарных частиц. — М.: Наука, 1972.
48. *Окунь Л. Б.* Слабое взаимодействие элементарных частиц. — М.: Физматгиз, 1963.
49. *Окунь Л. Б.* Лептоны и кварки. — М.: Наука, 1981.
50. *Окунь Л. Б.* Физика элементарных частиц. — М.: Наука, 1984.
51. *Петрина Д. Я., Иванов С. С., Ребенко А. Л.* Уравнения для коэффициентов функций матрицы рассеяния. — М.: Наука, 1979.
52. *Петрина Д. Я.* Квантовая теория поля. — Киев: Вища Школа, 1984.
53. *Попов В. Н.* Континуальные интегралы в квантовой теории поля и статистической физике. — М.: Атомиздат, 1976.
54. Проблемы теоретической физики. Сборник, посвященный Н. Н. Боголюбову в связи с его шестидесятилетием. — М.: Наука, 1969.
55. Проблемы теоретической физики. Памяти И. Е. Тамма. — М.: Наука, 1972.

56. Рунер Ю. Б., Фет А. И. Теория групп и квантованные поля. — М.: Наука, 1977.
57. Славнов А. А., Фаддеев Л. Д. Введение в квантовую теорию калибровочных полей. — М.: Наука, 1978.
58. Тахтаджян Л. А., Фаддеев Л. Д. Гамильтонов подход в теории солитонов. — М.: Наука, 1986.
59. Теоретическая физика 20 века. Памяти В. Паули. — М.: ИЛ, 1962.
60. Тернов И. М., Халилов В. Р., Родионов В. Н. Взаимодействие заряженных частиц с сильным электромагнитным полем. — М.: Изд-во МГУ, 1982.
61. Тьябликов С. В. Методы квантовой теории магнетизма. — М.: Наука, 1965.
62. Фейнман Р. Теория фундаментальных процессов. — М.: Наука, 1978.
63. Фок В. А. Работы по квантовой теории поля. — Л.: Изд-во ЛГУ, 1957.
64. Фундаментальные проблемы теоретической и математической физики/ Под ред. А. А. Логунова. — Дубна: Изд-во ОИЯИ, 1979.
65. Фуцич В. И., Никитин А. Г. Симметрия уравнений Максвелла. — Киев.: Наукова Думка, 1983.
66. Хелп К. Теория перенормировок. — М.: Наука, 1974.
67. Шварц А. С. Математические основы квантовой теории поля. — М.: Атомиздат, 1975.
68. Шеебер С. Введение в релятивистскую квантовую теорию поля. — М.: ИЛ, 1963.
69. Шаингер Ю. Частицы, источники, поля. Т. 1,2. — М.: Мир, 1976.
70. Шелест В. П., Зиновьев Г. М., Миранский В. А. Модели сильно взаимодействующих элементарных частиц. Т. 1,2. — М.: Атомиздат, 1975—1976.
71. Ширков Д. В., Серебряков В. В., Мещеряков В. А. Дисперсионные теории сильных взаимодействий при низких и средних энергиях. — М.: Наука, 1967.

Предметно-именной указатель

- Адиабатическая гипотеза 198
 Андерсон 339
 Аномальные размерности 385
 Аномалия АБД 433, 458
 — киральная (аксиальная, треугольная) 430—441, 458
 — сокращение 439
 Антиккоммутаторы 168
 Антиккоммутирующие s -числа 249
 Античастицы 58—62, 169
 Аромат 30, 147
 Ароматов число 421
 Асимптотическая свобода 387
 — — теория Янга — Миллса 416—372, 458
 Асимптотические условия 260
- Барнионное число 15
 Бегущая константа связи 386
 Бейкера — Кемпбелла — Хаусдорфа формула 237, 261
 Бекки — Руэ — Сторы преобразование 318—321, 331
 Билинейные дираковские выражения 62—65
- Бьянки тождество 96—97, 146
 Бома — Ааронова эффект 121—128, 152
 Брауэра степень 482, 492
- Вайнберг 14
 Вайнберга теорема 367, 456
 — угол 358
 Вакуум — вакуум амплитуда перехода 209, 218—223
 — в КХД 418—422
 — вырожденный 334—339
 вакуумное среднее 336—337, 445
 вакуумный граф (диаграмма) 239, 240, 245
 W-бозон 14, 361
 Вейля уравнение 57—58
 Вектор-потенциал 84, 117
 Вершинная функция 300, 304, 331
 Взаимодействующие поля, производящий функционал 234—238
 Вика теорема 234
 Вихревые линии 465—473
 ВКБ приближение 494
 Восстановление симметрии при высокой температуре 361, 363
 Вращений группа 44—51
 — — генераторы 45
 Временноподобный импульс 74
 — интервал 38
 Вторичное квантование 154
 Ву — Янга конструкция 475—477, 499
- Гауссов интеграл 183
 Гелл-Манна — Нишиджимы формула 25, 354
 Гольд лагранжиан 383
- Границы оператор 89
 Глашоу 14, 333
 Глюон 13, 33
 Голдстоун 333
 — бозон 338, 339—345, 347
 — теорема 338, 339—345, 362
 Гомотопическая группа 152
 — — первая 126
 — — вторая 483
 — — третья 487
 Гомотопные пути 126
 Грассмана алгебра 249, 252, 280
 — скалярные поля 289, 295
 Гравитационное излучение 11
 Гравитационное поле 10
 Гравитация 10, 283
 Гравитон 11
 Группа вращений 44—51
 Гупты — Блейлера формализм 180—181, 347
 Гурица мера 290
 Гюйгенса принципа 187
- Даламбера оператор (даламбертиан) 40, 93
 Двухточечная функция 240—242
 Действие 193
 — эффективное 193, 444
 — принцип наименьшего 102
 Дифференциальная геометрия 88—97
 Дифференциальная форма 89, 99
 Дирака матрицы 62—70
 — — в d измерениях 393
 — — киральное представление 65
 — — стандартное представление 65
 Дирака монополю 473—477
 — — условие квантования 475
 Дирака море 61
 Дирака поле, квантование 165—170
 — — производящий функционал 253
 Дирака уравнение 43—58, 98
 — билинейные выражения 62—65
 — магнитный момент электрона 70—72
 — нерелятивистский предел 70—72
 — состояния с отрицательной энергией 60, 165—167
- Домен 361
 Древетское приближение 449
 Дуальности преобразование 94
 Дуальный тензор 86
 Духовое поле 283, 290, 295, 298, 331—332
 — — взаимодействие с калибровочным полем 297
 — — и унитарность 324—330, 331—332
 — — пропагатор 297
- Евклида группа 82
 Евклидово пространство 222
 Еж (монополю г'Хофта — Полякова) 479

Излучения калибровка 171, 172—175
 Изоспин 23, 129, 135
 Изоспинор 138
 Инвариантная функция $\Delta(x)$ 165
 «Ин» и «аут» состояния 256
 Инстантон 487—498, 500—501
 Интерпретация в терминах частиц:
 уравнения Дирака 62
 уравнения Клейна — Гордона 62

Кабиббо угол 35
КАД (квантовая ароматодинамика) 431
Казимира инварианты 79, 81
Калибровка:
 Ландау 248, 443
 г'Хофта 441—444, 459
 R 443
 чистая 467, 490
 U 348, 444
 Фейнмана 177, 286, 443
Калибровку фиксирующий член 176, 284—286, 295
Калибровочная инвариантность 120
Калибровочное преобразование 85
 — второго рода 116
 — глобальное 116, 335
 — локальное 116, 347
 — первого рода 114, 130
 — потенциала 142
Калибровочной инвариантности принцип 100, 152—153
Калибровочные поля:
 безмассовость 102, 135
 вершины, отвечающие самодействию 297—298
 взаимодействие с духами 297
 взаимодействие с полями материи 298
 геометрия 137—150, 152
 квантование методом функциональных интегралов 282—300
 неабелевы 11, 128, 144, 283, 288—300
 пропагатор 296—300
 спонтанное нарушение симметрии 345—350
Каллана — Симанзика уравнения 388, 457
Квантование каноническое:
 векторного поля 181—184
 скалярного поля 154—165
 спинорного поля 165—170
 электромагнитного поля 170—181
Квантование, функциональный интеграл см.
Функциональный интеграл и квантование
Квантовая хромодинамика см. КХД
Квантовая электродинамика см. КЭД
Квантовое туннелирование 494—498
Кварк 12
 — модель 12, 19—22
 — удержание (конфайнмент) 34, 150, 498
 — собственная энергия 417—418
Кник синус-Гордона 461—465, 499
Киральная аномалия 430—441, 458
Киральность 65
Клейна — Гордона оператор 257
 — поле 154—165
 — уравнение 41—43
Ковариантная производная 119, 140
 — в модели Салама — Вайнберга 355
Ковариантный вектор 39
Контравариантный вектор 39
Контрчлены 380—383
Конфайнмент (удержание) кварков, глюонов, цвета 34, 150, 498
Кулоновская калибровка 171, 172—175
Кулоновский потенциал, модифицированный 403
Кулоновское рассеяние 204—207
КХД 13, 33—34, 153

q-число 192
КЭД:
 асимптотическое поведение 407—408
 однопетлевая перенормировка 398—408
 перенормируемость 409—416
 пропагаторы и калибровочные преобразования 282—288
 расходимость и размерная регуляризация 388—398
 тождества Уорда — Такахаси 311—318
Ландау калибровка, 286, 443
 — сингулярность 407
Ландау — Гинзбурга свободная энергия 351, 467
Лапласиан 93, 95
Левая производная 250
Лежандр преобразование 304
 — геометрическая интерпретация 307—309
 — термодинамическая аналогия 309—310, 331
Лептон 14
Лептон-адронная симметрия 441
Лептонное число 14
Лептонные поколения 352
Ли алгебра 75
Ли группа 45
Лондона уравнение 351
Лоренца группа 51—56, 98
 — алгебра Ли 77
 — генераторы 51, 74—77
 — матрица буста 51
 — неоднородная 56, 74
Лоренца калибровка 85, 171
 — правила Фейнмана 295—299
 — квантование 175—181
Лоренца формула 121
Лэмбовский сдвиг 403
ЛСЦ условия 260
Магнитный момент аномальный 9, 405—407, 457—458
 — мюона 407
 — электрона 9, 70—72, 457—458
Магнитный монополю (заряд) 134—135
 — Дирака 473—477
 — г'Хофта — Полякова 478—487
Магнитный поток 467
Максвелла уравнения 83—86, 88, 95—97, 120, 134, 146
Малая группа 79
Мейсснера эффект 350—351
Метрический тензор 39—40
Мюон, магнитный момент 407
Намбу 29, 333
Наименьшего действия принцип 102
Неабелевы калибровочные поля (поля Янга — Миллса) 11, 128—137, 144, 152
 — асимптотическая свобода 416—426, 458
 — метод Фаддеева — Попова 283, 288—295
 — перенормировка 426—430, 441—450
 — перенормируемость 324
Нейтральные токи 360
Нейтринно масса 58
Несвязный граф 246
Неупругое рассеяние 27
Нётер теорема 106—109, 151
Нильсена — Олсена решение 469
Нормальное упорядочение (произведение) 160, 175
Нормировка:
 ковариантная 161—162

нековариантная 162
 производщего функционала 228, 240
 δ -точные функции 229, 248, 300
 — неприводимые 248
Нулевой интервал 38
Общая теория относительности 10—11, 111, 134, 141, 144, 146
Одновременные коммутационные соотношения 156, 165
Однопетлевая перенормировка в КЭД 398—408
 — в теории Янга — Миллса 416—426
Одночастично-неприводимый граф (14Н) 302
Относительности общая теория 10—11, 111, 134, 141, 144, 146
O(3) 44—46
 — групповое пространство 472
Отрицательные энергии:
 в уравнении Дирака 60—61, 165—167
 в уравнении Клейна — Гордона 43
Очарование (чарм) 18
Параллельный перенос 139
Паули матрицы 48, 50
 — спинор 53—54
Паули — Вилларса регуляризация 370, 389
Паули — Любаского псевдовектор 81
Перенормированная константа связи 376
Перенормированная масса 242, 303, 376
Перенормировка 242, 364—450, 456
 — волновой функции 378
 — мультипликативная 415
 — однопетлевая в КЭД 398—409, 457
 — спонтанно нарушенных теорий Янга — Миллса 411—450, 458
 — теория ϕ^4 375—383, 457
 — теория Янга — Миллса 426—430, 458
Перенормировки константы 409
 — волновой функции 242
Перенормируемость КЭД 409—416, 458
 — теория Янга — Миллса 324, 426—430, 441—450, 458
Перекрывающиеся расходимости 379, 411—412
Петлево разложение 374—375, 447—450
Петля духовая 329
 — фермионная 255, 329
Пион 12
 — как голдстоуновский бозон 345
 — неуклонное рассеяние 263—272
 — распад 31
Подсчет степеней 442
Поколений проблема 440—441
Поколения лептонов 353
Положительно-частотные решения 157
Поля квантование каноническое 154—185
 — методом функциональных интегралов 218—256, 282
Понтрягина индекс 491, 494
Поперечный пропагатор 286, 288
 — фотон 178
Правая производная 250
Предиаграмма 269
Принцип калибровочной инвариантности 100, 152—153
Принцип наименьшего действия 101
Присоединенное представление 138
Продольные фотоны 178
Проекционный оператор на состоянии с положительной и отрицательной энергией 68
Производящий функционал 226—228, 300
 — для взаимодействующих полей 234—238

— для поля Дирака 253
 — для связанных диаграмм 246—249
 — для теории ϕ^4 238—240
 — нормированный 228—240
Прока уравнения 86—87
 — квантование 181—184
Пропагатор неабелева калибровочного поля 297, 299
 — нерелятивистской частицы 187, 194—195
 — полный 300, 381
 — поля Дирака 254
 — скалярного поля 227, 254
 — фотонный 282—288
Пространственноподобный импульс 75
 — интервал 38
Пуанкаре группа (неоднородная группа Лоренца) 56, 73—83, 98
 — (фундаментальная группа) 126
Пуанкаре лемма 92
R 32
Размерная регуляризация в КЭД 288—298
 — в теории ϕ^4 370—375, 456
Размерный анализ 367
Рассеяния амплитуда 199
 — сечение σ 272—279
Расходимости:
 в КЭД 388—392
 в теории ϕ^4 364—369
 инфракрасные 365
 перекрывающиеся 379
 притивные 367
 ультрафиолетовые 365
 условная степень 365
Регуляризация см. Размерная регуляризация, Паули — Вилларса регуляризация
Редукционная формула 262, 280—281
Резерфорда формула 207
Резонанс 18—19
Репормализационная группа 383—388, 456—457
 — уравнение 384
Римана — Кристоффеля тензор 144
R-калибровка 443
R-матрица (матрица реакции) 325
Рождения оператор 160
Сазерленда парадокс 433, 459
Салам 14
Салама — Вайнберга модель 339, 483—484, 499
Салама — Вайнберга теория 14, 35, 333, 363
Сверхпроводимость 350—352, 363, 467
Светоподобные частицы 82
Светоподобный интервал 38
Связная диаграмма 246
 — производящий функционал 246—249
Связности коэффициенты 141
 — форма 96
Связь с производной 278
Седловой точки метод 447
Сильные асимптотические условия 260
Сильные взаимодействия 11—13, 18
Симметрия фактор 239, 246
Синус-Гордона уравнение 461
 — кник 461—465
Скалярное поле действительное (вещественное) 103—113
 — каноническое квантование 154—165
 — квантование методом функционального интеграла 218—249
 — комплексное 113—118
 — правила Фейнмана 245
 — производящий функционал 218—223
 — пропагатор 221—222, 227

- Скалярные фотоны 178
 Скейлинг Бьеркена 28
 — поведение функций Грина 385
 Скелетная диаграмма 410
 Слабое взаимодействие 13—14
 Слабые асимптотические условия 60
 Слабый гиперзаряд 354
 Слабый изоспин 35, 353
 Славнова — Тейлора тождества 321—324, 331, 427
 SL(2, C) или группа Лоренца 51—56
 S-матрица 200, 256—263, 280—281
 Собственной энергии оператор 300—311
 — — глюона 420—422
 — — кварка 417—422
 — — фотона 390—391, 395—396
 — — электрона 390, 393—395
 Спина оператор 73
 Спин и статистика 162, 185
 Спинор 47
 — Вейля 58
 — Дирака 57
 — Паули 47—48, 53—54
 — с точкой и без точки 54
 — 4-спинор 57
 Спинорное поле, правила Фейнмана 271—272
 Спиральность 58
 Спонтанное нарушение симметрии 335
 — — в калибровочных теориях 345—350
 Статистическая механика и теория поля 310, 331
 Статистическая сумма 309
 Стокса формула 93
 Струн 32, 34
 Структурные константы 138
 — группы SU(3) 149
 Структурные факторы (функции) 28
 Суммирование правило (соглашение) 39
 SU(2) 22—24
 — и группа вращений 44—51, 97—98
 — и O(3) 97—98, 471
 — структурные константы 138
 SU(3) 12, 24—25
 SU(4) 25, 147—149

 Тау (τ)-лептон 16, 352
 Теория великого объединения (ТВО) 14, 15
 Теория возмущений 194—204
 Теория ϕ^4 238—246
 — — двухточечная функция 240—242
 — — перенормировка 375—383
 — — правила Фейнмана 245
 — — производящий функционал 238—240
 — — размерная регуляризация 370—375
 — — расходимости 364—369
 — — четырехточечная функция 242—246
 δ -вакуумы 494—498
 Томаса прецессия 52
 г'Хофт 333
 — калибровки 441—444, 459
 г'Хофта — Полякова монополю 135, 478—487, 500

 Уединенная волна (солитон) 461, 499—500
 U-калибровка 348, 444
 Улига поправка 403
 Унитарность 324
 — и духи 324—330, 332
 Уничтожения оператор 160
 U(1) 115
 — калибровочные преобразования 115—116
 — спонтанное нарушение 347

- Уорда тождество 300, 311—318, 331, 398, 412, 430
 — — аксиальное 431
 — — обобщенное 300
 Уорда — Такахаши тождество 311—318, 331, 360
 Упорядочения хронологического оператор 212

 Фаддеева — Попова дух 290, 298, 318
 Фаддеева — Попова метод 283, 288—295
 Фактор-пространство 342
 Фарадея 2-форма 95
 Фарри теорема 392, 413
 Фейнмана калибровка 177, 286, 443
 — пропагатор 220—222, 285, 286
 — формула 372
 Фейнмана правила:
 для скалярного поля 226—227, 245, 271—272
 для спинорного поля 272—272
 в аксиальной калибровке 299—300
 в лоренцевой калибровке 295—299
 в неабелевых калибровочных теориях 297—299
 в нерелятивистской квантовой механике 200—204
 Ферми взаимодействие 13
 — золотое правило 274
 — теория слабых взаимодействий 368
 Фермионная петля 255
 Фиксированные точки 387
 Формфактор 26
 Фотон 10, 174
 — временноподобный 178
 — поперечный 178
 — продольный 178
 — фотонное рассеяние 392
 Фотонный пропагатор 282—288
 Фундаментальная группа 126
 Функциональное дифференцирование 207—208, 280
 — — и фермионы 250
 Функциональное интегрирование 223—226
 — — и фермионы 249—256
 Функциональный интеграл 192, 207—208, 280
 Функциональный интеграл и квантование:
 калибровочных полей 282—332
 скалярных полей 218—249
 спинорных полей 249—256
 и канонический формализм 283
 формулировка квантовой механики 186—194
 Функция Грина:
 для свободной скалярной частицы 226—234, 300—301
 для уравнения Шредингера 197—198
 опережающая и запаздывающая 259
 связанная 301
 производящий функционал 226—228

 Хаусдорфа формула 237, 261
 Хиггс 333, 339
 — явление 347—350, 352, 362, 467
 — поле 352, 356
 Ходжа оператор 94
 Хронологического упорядочения оператор 212

 Цвет 13, 29—33, 147, 149
 Цепь 89

 Чарм (очарование) 18
 Четырехточечная функция 242—246
 Числа частиц оператор 158

- Член, фиксирующий калибровку 176, 284—286, 295
 ЧСАТ 345

 Шредингера уравнение 41
 — — функция Грина 197

 Эйлера — Лагранжа уравнение 106
 Эйлера — Маскерони постоянная 371
 Эйштейна уравнения поля 40, 111
 Экранирование 407—408
 Эксперименты по аннигиляции 31
 Электромагнитное взаимодействие 13—14
 — — минимальное 71
 Электромагнитное поле:
 квантование 170—181, 282—288
 тензор 84, 118

 Электрона магнитный момент 9, 70—72, 405—407, 457
 Электрослабое взаимодействие 14, 360—361
 Энергии-импульса тензор 107, 112
 — — канонический 110
 — — симметричный 112

 Юкава 11
 — потенциал 278

 Якоби тождество 138, 146
 Янга — Миллса поле см. Неабелевы калибровочные поля

 Z бозон 14, 361