

# ЗАДАЧИ ПО ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКЕ

ФУНКЦИИ ГРИНА, ДИАГРАММНАЯ ТЕХНИКА

С РЕШЕНИЯМИ

*Л. С. Левитов и А. В. Шитов*

**Задачи по теоретической физике с решениями и методическими указаниями. Функции Грина. Диаграммная техника. Москва, 2000 — 360 с.**

Темой книги является квантовая физика систем, состоящих из большого числа частиц. Выбранная форма – сборник задач – позволяет рассмотреть основные теоретические методы этого раздела физики и одновременно охватить большой круг конкретных физических явлений.

Задачи первой, вводной части книги подобраны так, чтобы на примере известного читателю материала по нерелятивистской квантовой механике проиллюстрировать метод функций Грина. Все задачи решены и сопровождаются комментариями, поясняющими мотивировку задач и их связь с разнообразными вопросами современной теории конденсированного состояния. В начале каждой главы кратко излагается необходимый материал по фейнмановской диаграммной технике. Вторая часть книги построена по той же схеме, что и первая. В нее включены несколько разделов физики конденсированного состояния, представляющих интерес на сегодняшний день. Это теория ферми-жидкости, неупорядоченные системы, сверхпроводимость, и одномерные сильно коррелированные системы. Помимо этого, во второй части рассматриваются вопросы, связанные с измерением функций отклика и гриновских функций.

Книга предназначена для студентов старших курсов, специализирующихся в области теоретической физики, физики твердого тела и низких температур, а также для аспирантов–физиков и научных работников.

# Оглавление

<b>I</b>	<b>Теория возмущений</b>	<b>9</b>
<b>1.</b>	<b>Квазичастицы</b>	<b>11</b>
1.1.	Канонические преобразования . . . . .	11
1.2.	Задачи $1 \div 4$ . . . . .	14
1.3.	Решения . . . . .	15
1.4.	От спиновых операторов — к фермиевским . . . . .	23
<b>2.</b>	<b>Функция Грина</b>	<b>27</b>
2.1.	Представление взаимодействия . . . . .	27
2.2.	Задачи $5 \div 10$ . . . . .	29
2.3.	Решения . . . . .	31
<b>3.</b>	<b>Квантовая механика одной частицы</b>	<b>45</b>
3.1.	Теория возмущений и функция Грина . . . . .	45
3.2.	Задачи $11 \div 15$ . . . . .	47
3.3.	Решения . . . . .	50
<b>4.</b>	<b>Взаимодействующие частицы</b>	<b>61</b>
4.1.	Правила построения диаграмм . . . . .	61
4.1.1.	Блочное суммирование . . . . .	64
4.2.	Полюса функции Грина — спектр квазичастиц . . . . .	66
4.2.1.	Двухчастичная функция Грина . . . . .	67
4.3.	Задачи $16 \div 21$ . . . . .	69
4.4.	Решения . . . . .	73
<b>5.</b>	<b>Идеальный ферми-газ.</b>	<b>87</b>
5.1.	Электроны на ферми-поверхности. . . . .	87
5.1.1.	Формула Кубо . . . . .	88
5.2.	Задачи $22 \div 27$ . . . . .	90
5.3.	Решения . . . . .	93
<b>6.</b>	<b>Электроны и фононы</b>	<b>109</b>
6.1.	Электрон-фононное взаимодействие . . . . .	109
6.2.	Задачи $28 \div 33$ . . . . .	113
6.3.	Решения . . . . .	115

6.4. Эффект Пайерлса — теория среднего поля . . . . .	127
<b>7. Диаграммная техника при конечных температурах</b>	<b>135</b>
7.1. Мацубаровское время. . . . .	135
7.2. Дискретные частоты. . . . .	137
7.2.1. Метод аналитического продолжения. . . . .	139
7.3. Задачи $34 \div 42$ . . . . .	142
7.4. Решения . . . . .	146
<b>II Методы теории многих тел</b>	<b>173</b>
<b>8. Теория ферми-жидкости</b>	<b>175</b>
8.1. Квазичастицы . . . . .	176
8.2. Кинетическое уравнение. Коллективные моды . . . . .	177
8.3. Приближение случайных фаз . . . . .	180
8.4. Задачи $43 \div 49$ . . . . .	185
8.5. Решения . . . . .	191
8.6. Вигнеровский кристалл . . . . .	208
8.7. Микроскопическое обоснование теории ферми-жидкости . . . . .	210
<b>9. Электроны в случайном потенциале</b>	<b>215</b>
9.1. Усреднение функций Грина по беспорядку . . . . .	215
9.2. Усреднение функций отклика . . . . .	219
9.3. Задачи $50 \div 54$ . . . . .	222
9.4. Решения . . . . .	227
9.5. Диаграммы без самопересечений . . . . .	245
9.5.1. Самосогласованное борновское приближение . . . . .	248
9.6. Слабая локализация . . . . .	251
9.6.1. Квантовое магнитосопротивление . . . . .	251
9.6.2. Эффект Ааронова-Бома . . . . .	256
<b>10. Сверхпроводимость</b>	<b>263</b>
10.1. Микроскопическая теория сверхпроводимости . . . . .	263
10.1.1. Образование куперовских пар . . . . .	263
10.1.2. Квазичастицы в сверхпроводнике . . . . .	267
10.2. Диаграммная техника для теории БКШ . . . . .	269
10.2.1. Рассеяние в куперовском канале . . . . .	269
10.2.2. Функции Грина в сверхпроводнике. . . . .	272
10.3. Задачи $55 \div 61$ . . . . .	276
10.4. Трудные задачи $62 \div 64$ . . . . .	281
10.5. Решения . . . . .	282

<b>11.Измерение функций Грина</b>	<b>311</b>
11.1. Туннелирование . . . . .	311
11.2. Неупругое рассеяние . . . . .	317
11.3. Задачи 65 ÷ 71 . . . . .	320
11.4. Решения . . . . .	324
<b>12.Бозонизация</b>	<b>347</b>
12.1. Гидродинамика одномерного ферми-газа . . . . .	347
12.2. Коммутаторы операторов плотности . . . . .	349
12.3. Модель Томонаги . . . . .	351
12.4. От бозонов к фермионам . . . . .	353
12.5. Задачи 72 ÷ 79 . . . . .	357
12.6. Решения . . . . .	360

## Предисловие

Метод функций Грина, впервые предложенный Р. Фейнманом в квантовой электродинамике, уже давно стал универсальным языком всей теоретической физики. Знание диаграммной техники и умение использовать функции Грина является неотъемлемой частью образования физика-теоретика, независимо от конкретной области его интересов. При этом студенту, желающему изучить эти методы, обычно приходится вначале знакомиться с ними в рамках курса квантовой теории поля, поскольку по историческим причинам в учебной литературе основное внимание уделялось именно этой области.

В теорию конденсированного состояния, изучающую квантовые свойства твердых тел и других многочастичных систем, диаграммная техника прочно вошла еще в середине 50-х годов. Как нетрудно проследить, практически все основные достижения в этой области теоретической физики были так или иначе связаны с развитием диаграммной техники. Применение функций Грина в теории твердого тела хорошо освещено в обширной литературе, центральное место в которой занимает хорошо известная монография А. А. Абрикосова, Л. П. Горькова и И. Е. Дзялошинского, «Методы квантовой теории поля в статистической физике» [1]. Эта замечательная книга, к сожалению, не может считаться учебником в полном смысле слова, поскольку в ней отсутствуют задачи, а кроме того предполагается, что читатель отчасти знаком с методами квантовой теории поля.

В настоящее время, однако, студенты часто изучают методы функций Грина, используя книгу [1] или другие аналогичные пособия, не после квантовой теории поля, а одновременно или даже несколько раньше. Это связано с тем, что современная физика твердого тела достаточно богата идеями и содержательными результатами, а теория конденсированного состояния имеет много связей с квантовой теорией поля. Поэтому нам казалось весьма полезным изложить необходимый для освоения диаграммной техники материал таким образом, чтобы он был доступен студенту, знакомому лишь с основами квантовой механики.

Предлагаемая читателю книга возникла как попытка устранить указанный пробел в учебной литературе. Основу книги составили материалы занятий по теории твердого тела со студентами МФТИ в 1992-94 гг, в которых в качестве учебника использовалась книга [1]. По собственному опыту авторам известно, что читателю «вечнозеленой» книги о функциях Грина приходится, как всегда при изучении трудного материала, самому придумывать себе примеры и простые задачи. Исходной идеей было — систематизировать этот опыт и снабдить читателя [1] достаточно интересными, но не слишком трудными задачами.

В процессе написания книги мы, следуя советам коллег, постарались сделать нашу книгу по возможности независимой от других учебных пособий. Для этого в начале всех главы помещены вступительные разделы, в которых напоминается необходимый теоретический материал, сравниваются различные подходы, кратко суммируются основные теоретические положения, и т.п. После этого идут разделы с задачами<sup>1</sup> и их подробными решениями. Иногда, если в этом имеется необходимость, приведено несколько различных решений одной и той же задачи. Помимо этого, воспользовавшись преиму-

---

<sup>1</sup>Трудные задачи помечены знаком \*. При первом чтении их можно пропустить.

ществами избранной формы задачника, более свободной, чем учебник или монография, мы включили в книгу разнообразные отступления и «вставные новеллы», объясняющие мотивировку тех или иных задач, или поясняющие связь с вопросами теории, представляющими интерес в настоящее время и недостаточно освещенными в учебниках. Эти отступления помещены в конце некоторых глав.

Книга состоит из двух частей, что соответствует разделению материала по двум различным уровням трудности. Часть I имеет вводный характер. Её основная идея — на примере фактов, известных читателю из курса квантовой механики, проиллюстрировать основные положения метода функций Грина и, так сказать, пересказать квантовую механику одной частицы на графическом языке диаграммной техники. Кроме того, в первой части вводится аппарат функций Грина, отдельно при нулевой и при конечной температуре. При этом от читателя не требуется предварительного знакомства с физикой твердого тела, поскольку практически все используемые примеры имеют общезначимый характер, а необходимый фактический материал изложен по ходу дела.

В часть II входят основные разделы современной теории твердого тела, такие как теория ферми-жидкости, теория неупорядоченных систем, включая возникшую за последние 20 лет теорию слабой локализации и квантовых эффектов в проводимости, а также теория сверхпроводимости, и теория одномерных сильно-коррелированных систем. Кроме того, в часть II включена глава «Измерение функций Грина», цель которой — установить связь между развиваемой теорией, опирающейся на функции Грина, и экспериментальными методами физики твердого тела. Кроме того, в этой главе сообщаются некоторые сведения из физики твердого тела, не всегда знакомые студентам-теоретикам.

Следует сказать, что отбор материала, легшего в основу части II, в сильной степени определяется вкусами и научными интересами авторов. При составлении задач мы стремились рассмотреть вопросы теории, представляющие интерес в настоящее время. При этом, однако, мы постарались избежать превращения книги в обзор современного состояния науки. Затронутые вопросы были отобраны в основном с точки зрения их общезначимого интереса, а также исходя из того, насколько хорошо они иллюстрируют общий метод функций Грина.

В заключении нам хотелось бы поблагодарить наших коллег, без участия которых эта книга не появилась бы: Д.А. Иванова, М.А. Скворцова, Д.Е. Фельдмана и В.П. Рубана, любезно предоставивших свои решения задач, которые впоследствии были переработаны и включены в книгу. Мы признательны также М.Ю. Рейзеру за ценные советы и указание на некоторые дефекты в ротационном издании части I (МФТИ, 1997). Разумеется вся ответственность за (неизбежные) ошибки, имеющиеся в настоящей книге, лежит на авторах. Мы будем крайне благодарны всем, кто пожелает указать на ошибки, опечатки, или просто обсудить какой-либо связанный с книгой вопрос. Связаться с авторами проще всего по электронной почте: [levitov@mit.edu](mailto:levitov@mit.edu), [shytov@itp.ac.ru](mailto:shytov@itp.ac.ru) (см. также <http://web.mit.edu/levitov/book>).

**Часть I**  
**Теория возмущений**



# Глава 1.

## Квазичастицы

### 1.1. Вторичное квантование. Канонические преобразования.

Системы, состоящие из большого числа тождественных частиц, удобно изучать, пользуясь *методом вторичного квантования*. Напомним основную идею этого метода, не уточняя пока вид частиц. (В задачах физики твердого тела это могут быть, скажем, электроны, фононы, фотоны, экситоны и т. д.)

Для определенности, пусть речь идет о системе бозе-частиц, из которых каждая может находиться в одном из состояний  $\psi_i(x)$ ,  $i = 1, 2, \dots$ . Многочастичная волновая функция задается в *представлении чисел заполнения*, указывающем сколько частиц занимают каждое из состояний  $\psi_i(x)$ . В обозначениях Дирака такие состояния могут быть записаны как  $|\dots, N_{i-1}, N_i, N_{i+1}, \dots\rangle$ , где числа заполнения  $N_i$  принимают произвольные целые неотрицательные значения,  $N_i = 0, 1, \dots$ . Канонические операторы рождения и уничтожения  $a_i^+$  и  $a_i$  вводятся следующим образом:

$$\begin{aligned} a_i |\dots, N_i, N_{i+1}, \dots\rangle &= \sqrt{N_i} |\dots, N_i - 1, N_{i+1}, \dots\rangle; \\ a_i^+ |\dots, N_i, N_{i+1}, \dots\rangle &= \sqrt{N_i + 1} |\dots, N_i + 1, N_{i+1}, \dots\rangle. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Нетрудно проверить, что выполняются коммутационные соотношения:

$$\begin{aligned} [a_i^+, a_j] &= a_i^+ a_j - a_j a_i^+ = \delta_{ij}; \\ [a_i, a_j] &= [a_i^+, a_j^+] = 0 \end{aligned} \quad (1.2)$$

Далее, вводятся  $\psi$ -операторы:

$$\begin{aligned} \hat{\psi}(x) &= \sum_i \hat{a}_i \psi_i(x); \\ \hat{\psi}^+(x) &= \sum_i \hat{a}_i^+ \psi_i(x). \end{aligned} \quad (1.3)$$

Функции  $\psi_i(x)$  обычно образуют полную ортонормированную систему. При этом  $\psi$ -операторы коммутируют так:

$$[\hat{\psi}(x), \hat{\psi}^+(x')] = \delta(x - x'),$$

$$[\widehat{\psi}(x), \widehat{\psi}(x')] = [\widehat{\psi}^+(x), \widehat{\psi}^+(x')] = 0 . \quad (1.4)$$

Удобство  $\psi$ -операторов заключается в том, что с их помощью легко проследить связь между одно- и многочастичной задачами. Например, нетрудно проверить, что гамильтониан системы невзаимодействующих бозе- или ферми-частиц, имеющих массу  $m$  и движущихся в потенциале  $U(\mathbf{r})$ , записывается так:

$$\widehat{\mathcal{H}} = \int \left( -\frac{\hbar^2}{2m} \widehat{\psi}^+(\mathbf{r}) \nabla^2 \widehat{\psi}(\mathbf{r}) + \widehat{\psi}^+(\mathbf{r}) \widehat{\psi}(\mathbf{r}) U(\mathbf{r}) \right) d^3 r . \quad (1.5)$$

А если частицы взаимодействуют по закону  $V(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$ , то гамильтониан нужно просто дополнить членом

$$\widehat{\mathcal{H}}_{\text{int}} = \frac{1}{2} \int \int \widehat{\psi}^+(\mathbf{r}_1) \widehat{\psi}^+(\mathbf{r}_2) V(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \widehat{\psi}(\mathbf{r}_2) \widehat{\psi}(\mathbf{r}_1) d^3 r_1 d^3 r_2 . \quad (1.6)$$

Вторично квантованный оператор плотности частиц  $\widehat{\rho}(\mathbf{r}) = \widehat{\psi}^+(\mathbf{r}) \widehat{\psi}(\mathbf{r})$  является многочастичным эквивалентом одночастичного выражения  $|\psi(\mathbf{r})|^2$  для плотности вероятности. Интеграл от  $\widehat{\rho}(\mathbf{r})$ , взятый по всему пространству, есть оператор полного числа частиц в системе

$$\widehat{N} = \int \widehat{\psi}^+(\mathbf{r}) \widehat{\psi}(\mathbf{r}) d^3 r . \quad (1.7)$$

В случае ферми-статистики представление чисел заполнения, операторы рождения и уничтожения, коммутационные соотношения и  $\psi$ -операторы вводятся сходным образом. Остановимся на отличиях бозевского и фермиевского вторичного квантования. Во-первых, в силу принципа Паули, числа заполнения  $N_i$  принимают всего два значения:  $N_i = 0, 1$ . Поэтому канонические операторы  $a_i$  и  $a_i^+$  действуют так:

$$\begin{aligned} a_i |\dots, N_i, N_{i+1}, \dots\rangle &= \begin{cases} |\dots, 0, N_{i+1}, \dots\rangle, & N_i = 1; \\ 0, & N_i = 0; \end{cases} \\ a_i^+ |\dots, N_i, N_{i+1}, \dots\rangle &= \begin{cases} 0, & N_i = 1; \\ |\dots, 1, N_{i+1}, \dots\rangle, & N_i = 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (1.8)$$

Во-вторых, антисимметрия многочастичного состояния по отношению к перестановке частиц приводит к антикоммутируемости  $a_i$  и  $a_j^+$ :

$$\begin{aligned} [a_i^+, a_j]_+ &= a_i^+ a_j + a_j a_i^+ = \delta_{ij}, \\ [a_i, a_j]_+ &= [a_i^+, a_j^+]_+ = 0 . \end{aligned} \quad (1.9)$$

Для  $\psi$ -операторов (1.3) соотношения антикоммутируемости выглядят так:

$$\begin{aligned} [\widehat{\psi}(x), \widehat{\psi}^+(x')]_+ &= \delta(x - x'), \\ [\widehat{\psi}(x), \widehat{\psi}(x')]_+ &= [\widehat{\psi}^+(x), \widehat{\psi}^+(x')]_+ = 0 . \end{aligned} \quad (1.10)$$

Связь одночастичных и многочастичных операторов для фермионов точно такая же, как и для бозонов.

Остановимся теперь на канонических преобразованиях в представлении вторичного квантования. Напомним, что в классической механике канонические преобразования

фазового пространства  $(p, q) \rightarrow (p', q')$  вводятся с помощью скобок Пуассона  $\{\dots\}$ , и их роль заключается в том, что они сохраняют гамильтонову форму уравнений движения:  $\dot{p} = \{p, H\}$ ,  $\dot{q} = \{q, H\}$ .

В квантовой механике роль скобок Пуассона переходит к коммутаторам. (Например, в представлении Гейзенберга уравнения движения имеют вид  $i\hbar\partial_t\hat{A} = [\hat{A}, \hat{\mathcal{H}}]$ .) Поэтому каноническими называют преобразования физических величин, сохраняющие коммутационные соотношения операторов. Как и в классической механике, канонические преобразования важны, поскольку они сохраняют форму уравнений движения.

Подобрав каноническое преобразование, часто возможно перейти от взаимодействующих частиц к невзаимодействующим *квазичастицам*. Для операторов рождения и уничтожения (бозонов или фермионов) обычно рассматривают линейные преобразования

$$\begin{aligned} a'_i &= \sum_j (U_{ij}a_j + V_{ij}a_j^+) , \\ a_i'^+ &= \sum_j (\bar{V}_{ij}a_j + \bar{U}_{ij}a_j^+) , \end{aligned} \quad (1.11)$$

известные как *преобразования Боголюбова*. Нетрудно проверить, что произвольный гамильтониан, квадратичный по операторам рождения и уничтожения, может быть приведен к диагональной форме с помощью соответствующим образом подобранного преобразования (1.11):

$$\widehat{\mathcal{H}} = \sum_{ij} h_{ij}^{(1)} a_i^+ a_j + h_{ij}^{(2)} a_i a_j + \text{h.c.} = \sum_i \varepsilon_i a_i'^+ a_i' + \text{const} . \quad (1.12)$$

Энергии  $\varepsilon_i$  дают спектр квазичастиц.

Какие ограничения накладывают на матрицы  $U$  и  $V$  в (1.11) условия канонического преобразования

$$[a_i, a_j]_{\pm} = 0, \quad [a_i, a_j^+]_{\pm} = \delta_{ij} ? \quad (1.13)$$

В общем случае они имеют такой вид:

$$U_{ki}V_{kj} \pm V_{ki}U_{kj} = 0, \quad U_{ki}^*U_{kj} \pm V_{ki}^*V_{kj} = \delta_{ij}, \quad (1.14)$$

где знак «+» соответствует случаю ферми-статистики, а знак «−» — случаю бозе-статистики.

Структура преобразований видна уже в простейшем случае, когда состояние всего одно, то есть  $U$  и  $V$  — не матрицы, а числа. Для одного бозона имеются два простейших однородных канонических преобразования:

$$\begin{pmatrix} U & V \\ \bar{V} & \bar{U} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{ch } \lambda & \text{sh } \lambda \\ \text{sh } \lambda & \text{ch } \lambda \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} U & V \\ \bar{V} & \bar{U} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{i\phi} & 0 \\ 0 & e^{-i\phi} \end{pmatrix}. \quad (1.15)$$

Здесь  $\lambda$  и  $\phi$  — вещественные параметры. Более общие преобразования могут быть получены взятием композиции преобразований (1.15). Интересно, что первая из матриц (1.15) есть не что иное, как преобразование Лоренца с быстротой  $\lambda$  в двумерном пространстве–времени.

В случае же ферми-статистики, линейные канонические преобразования задаются сходным образом, с тем единственным отличием, что вместо преобразований Лоренца возникают матрицы вращения евклидова пространства (см. решение задачи 2).

Возможные канонические преобразования не исчерпываются однородными линейными преобразованиями Боголюбова. Иногда бывают полезны неоднородные линейные преобразования (как в задаче 6) или даже нелинейные преобразования (см. задачу 3, а также раздел 1.4).

Часто встречающаяся разновидность линейных канонических преобразований — фурье-преобразование  $\psi$ -операторов:

$$\begin{aligned}\hat{\psi}(\mathbf{r}) &= \int e^{i\mathbf{p}\mathbf{r}} \hat{a}_{\mathbf{p}} \frac{d^3p}{(2\pi)^3}; \\ \hat{\psi}^+(\mathbf{r}) &= \int e^{-i\mathbf{p}\mathbf{r}} \hat{a}_{\mathbf{p}}^+ \frac{d^3p}{(2\pi)^3}.\end{aligned}\quad (1.16)$$

Принято выбирать нормировку операторов  $\hat{a}_{\mathbf{p}}$  и  $\hat{a}_{\mathbf{p}}^+$  так, чтобы

$$[\hat{a}_{\mathbf{p}_1}, \hat{a}_{\mathbf{p}_2}^+]_{\pm} = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2). \quad (1.17)$$

Такой выбор согласуется с определениями (1.4) и (1.10).

Имеется важный для теории твердого тела круг задач, когда величины заданы на решетке. Фурье-преобразование (1.16) нетрудно распространить на этот случай, заметив, что если  $\mathbf{r}$  пробегает узлы некоторой решетки, то  $\mathbf{p}$  изменяется внутри периода обратной решетки (или, иначе говоря, внутри зоны Бриллюэна). Скажем, в одном измерении  $r_n = an$ , а  $-\pi/a < p < \pi/a$ . Используйте такое преобразование в задачах 1, 2 и 4.

*Литература:* Понятие квазичастиц обсуждается в [1], гл. 1; канонические преобразования Боголюбова рассматриваются в [1], гл. 1 §4 (для бозе-частиц)

ДОДЕЛАТЬ [6], §§25, 39; [3], гл. 6

## 1.2. Задачи 1÷4

**Задача 1.** (*Классическая цепочка осцилляторов*<sup>1</sup>) Рассмотрим цепочку атомов массы  $m_i$ , соединенных одинаковыми пружинками жесткости  $K$ :

$$\mathcal{H} = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{p_i^2}{2m_i} + \frac{K}{2}(x_i - x_{i+1})^2 \right\} \quad (1.18)$$

$m_i = m$ , если  $i$  четно,  $m_i = M$ , если  $i$  нечетно. Определите нормальные моды для этой системы. Покажите, что их две: акустическая и оптическая.

Чему равна скорость звука  $c$ ? Получится ли такой же ответ, если вычислять  $c$  по формуле Лапласа  $c = \sqrt{\partial P / \partial \rho}$ , где  $P$  — давление, а  $\rho$  — плотность?

<sup>1</sup>С рассмотрения этой простейшей модели колебаний решетки начинаются почти все курсы физики твердого тела.

Чему равна ширина щели между оптической и акустической ветвями? Покажите, что при  $M \gg t$  дисперсия оптической моды практически отсутствует. Как можно объяснить это качественно?

**Задача 2.** (*Фермионная цепочка*) Найдите преобразование Боголюбова, диагонализующее фермионный гамильтониан

$$\widehat{\mathcal{H}} = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \left( J_1 a_i^+ a_{i+1} + J_1 a_{i+1}^+ a_i + J_2 a_i a_{i+1} + J_2 a_{i+1}^+ a_i^+ - 2B a_i^+ a_i \right) \quad (1.19)$$

Такой гамильтониан возникает при рассмотрении одномерной модели квантового магнетика, так называемой «XY-модели» (см. раздел 1.4).

Определите спектр квазичастиц  $\varepsilon(k)$  гамильтониана (1.19). Обратите внимание, что при  $B = 0$  и  $J_1 = J_2$  дисперсия пропадает. Можно ли понять это без вычислений?

**Задача 3.** (*Нелинейные канонические преобразования*) Рассмотрим фермиевские операторы  $a$  и  $a^+$ , действующие в пространстве состояний одного фермиона, который может заполнять или не заполнять ровно одно состояние. В этом случае пространство многочастичных состояний двумерно и каноническим базисом в нем служат состояния  $|0\rangle$  и  $|1\rangle$ .

Найдите все канонические преобразования операторов  $a$  и  $a^+$ , сохраняющие соотношения  $a^2 = (a^+)^2 = 0$  и  $a^+ a + a a^+ = 1$ .

Рассмотрите представление фермиевских операторов спиновыми матрицами Паули:

$$\sigma_x = a + a^+, \quad \sigma_y = i(a - a^+), \quad \sigma_z = 2a^+ a - 1. \quad (1.20)$$

Покажите, что канонические преобразования  $a$  и  $a^+$  соответствуют вращениям в спиновом пространстве.

Связь между фермиевскими операторами и операторами спина  $1/2$  более подробно рассмотрена в разделе 1.4.

**Задача 4.** (*Квантовая цепочка осцилляторов*) Пусть теперь гамильтониан (1.18) определяет квантовую задачу, то есть  $p_i = -i\hbar\partial/\partial x_i$ . Перейдите к бозонным операторам рождения и уничтожения:

$$\widehat{x}_i = \sqrt{\frac{\hbar}{m_i\omega_i}} \frac{a_i + a_i^+}{\sqrt{2}}, \quad \widehat{p}_i = \sqrt{\hbar m_i\omega_i} \frac{a_i - a_i^+}{i\sqrt{2}}. \quad (1.21)$$

Для случая  $M = t$  найдите каноническое преобразование, приводящее гамильтониан к диагональному виду. Определите спектр фононов и вычислите энергию нулевых колебаний.

## 1.3. Решения

**Решение 1.** Гамильтониан (1.18) приводит к уравнениям движения:

$$\begin{cases} m\ddot{x}_i = K(y_i + y_{i-1} - 2x_i) \\ M\ddot{y}_i = K(x_i + x_{i+1} - 2y_i) \end{cases} \quad (1.22)$$

( $x_i$  — смещение атома массы  $m$  в  $i$ -й элементарной ячейке,  $y_i$  — смещение атома массы  $M$ ). Будем искать решение в виде плоских волн:

$$x_n = e^{i(qn-\omega t)} x_q, \quad y_n = e^{i(q(n+\frac{1}{2})-\omega t)} y_q. \quad (1.23)$$

Отсюда

$$\begin{cases} m\omega^2 x_q = 2Kx_q + 2K\cos(q/2)y_q \\ M\omega^2 y_q = 2Ky_q + 2K\cos(q/2)x_q. \end{cases} \quad (1.24)$$

(Здесь  $q$  — волновой вектор в первой зоне Бриллюэна:  $-\pi < q < \pi$ .)

Нормальные моды имеют закон дисперсии, определяемый из условия

$$\det \begin{pmatrix} 2K - m\omega^2 - 2K\cos(q/2) & \\ -2K\cos(q/2) & 2K - M\omega^2 \end{pmatrix} = 0, \quad (1.25)$$

что дает  $\omega^4 - (2K/\mu)\omega^2 + (4K^2/mM)\sin^2 q/2 = 0$ , где  $\mu = Mm/(M+m)$ . Получаем

$$\omega_{\pm}^2(q) = \frac{K}{\mu} \left( 1 \pm \sqrt{1 - \frac{4\mu^2}{mM} \sin^2 \frac{q}{2}} \right) \quad (1.26)$$

Здесь «+» соответствует оптической, а «-» — акустической моде. Дисперсия нормальных мод (1.26) выглядит так:

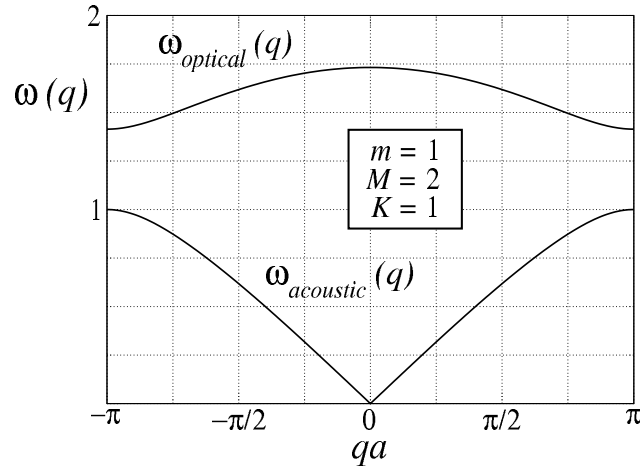


Рис. 1.1

При малых  $q$  разлагаем закон дисперсии акустической моды:

$$\omega_-^2(q) = \frac{K}{\mu} \frac{2\mu^2}{mM} (q/2)^2, \quad (1.27)$$

и получаем скорость звука:

$$c = \left. \frac{\omega_-}{q} \right|_{q \rightarrow 0} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2K}{M+m}}. \quad (1.28)$$

При выводе предполагалось, что период системы имеет единичную длину. Чтобы получить выражение, имеющее размерность скорости, надо умножить результат на  $2a$ , где  $a$  — расстояние между атомами  $M$  и  $m$ . При этом получается скорость  $c = a\sqrt{2K/(M+m)}$ .

Теперь выразим скорость звука через сжимаемость по формуле Лапласа:  $c^2 = \partial P / \partial \rho$ . Для цепочки длины  $x$ , содержащей  $N$  атомов каждого типа, сила пропорциональна удлинению,  $dP = -(K/2N)dx$  (в одном измерении сила и давление — это одно и то же), а изменение плотности есть

$$d\rho = \frac{d}{dx} \left( \frac{(M+m)N}{x} \right) dx = -\frac{(M+m)N}{\bar{x}^2} dx. \quad (1.29)$$

(Во втором равенстве  $\bar{x} = 2Na$ .) Отсюда имеем  $c^2 = 2Ka^2/(M+m)$ , как и следовало. Верхний край акустической ветви спектра

$$\begin{aligned} \max[\omega_-^2(q)] &= \omega_-^2(\pi) = \frac{K}{\mu} \left( 1 - \sqrt{1 - \frac{4\mu^2}{mM}} \right) \\ &= \frac{K}{\mu} \left( 1 - \frac{M-m}{M+m} \right) = \frac{2Km}{\mu(M+m)} = \frac{2K}{M}. \end{aligned} \quad (1.30)$$

Аналогично, нижний край оптической ветви

$$\min[\omega_+^2(q)] = \omega_+^2(\pi) = \frac{2K}{m}. \quad (1.31)$$

Ширина щели  $\Delta\omega = \sqrt{2K/m} - \sqrt{2K/M}$ .

При  $M \gg m$  частота оптической ветви

$$\omega_+(q) = \sqrt{\frac{2K}{m}} \left( 1 + \frac{m}{2M} \cos^2 q/2 + O((m/M)^2) \right) \quad (1.32)$$

практически не зависит от  $q$ , что соответствует колебаниям легких атомов между почти неподвижными тяжелыми. Физическая причина отсутствия дисперсии — взаимная независимость колебаний соседних атомов массы  $m$ . Колеблются соседи в фазе или в противофазе — неважно, поскольку через тяжелые стенки (т. е. атомы массы  $M$ ) влияние не передается.

**Первое решение 2.** Сделаем преобразование Фурье  $a_m = \sum_k e^{ikm} a_k$ , где  $\sum_k \dots = \int_{-\pi}^{\pi} \dots \frac{dk}{2\pi}$ . При этом

$$\begin{aligned} \sum_m a_m^+ a_{m+1} &= \sum_k a_k^+ a_k e^{ik}, \\ \sum_m a_m a_{m+1} &= \sum_k a_k a_{-k} e^{-ik}, \\ \sum_m a_m^+ a_{m+1} + a_{m+1}^+ a_m &= \sum_k 2 \cos ka_k^+ a_k \end{aligned} \quad (1.33)$$

Пользуясь антикоммутативностью  $a_k$  и  $a_{-k}$ , перепишем

$$\sum_m a_m a_{m+1} = -i \sum_k a_k a_{-k} \sin k, \quad (1.34)$$

после чего гамильтониан принимает вид

$$\widehat{\mathcal{H}} = \sum_k \left( 2(J_1 \cos k - B) a_k^+ a_k - iJ_2 \sin k a_k a_{-k} + iJ_2 \sin k a_{-k}^+ a_k^+ \right) \quad (1.35)$$

«Повернем»  $a_k$ ,  $a_k = e^{i\frac{\pi}{4}} b_k$ ,  $a_k^+ = e^{-i\frac{\pi}{4}} b_k^+$ , чтобы гамильтониан стал вещественным:

$$\widehat{\mathcal{H}} = \sum_k \left( (J_1 \cos k - B) b_k^+ b_k + J_2 \sin k b_k b_{-k} + \text{h.c.} \right) \quad (1.36)$$

Будем искать фермионное преобразование Боголюбова в виде

$$\begin{aligned} b_k &= u_k c_k + v_k c_{-k}^+, & b_k^+ &= u_k c_k^+ + v_k c_{-k}, \\ b_{-k}^+ &= -v_k c_k + u_k c_{-k}^+, & b_{-k} &= -v_k c_k^+ + u_k c_{-k} \end{aligned} \quad (1.37)$$

с вещественными  $u_k$  и  $v_k$ , причем  $u_k^2 + v_k^2 = 1$ . Имеем

$$\begin{aligned} \widehat{\mathcal{H}} &= \sum_k (J_1 \cos k - B) (u_k^2 c_k^+ c_k + u_k v_k (c_k^+ c_{-k}^+ + c_{-k} c_k) + v_k^2 c_{-k} c_{-k}^+) \\ &\quad + J_2 \sin k (u_k^2 c_k c_{-k} + u_k v_k (c_{-k}^+ c_{-k} - c_k c_k^+) - v_k^2 c_{-k}^+ c_k^+) + \text{h.c.} \end{aligned} \quad (1.38)$$

Занулим коэффициент при  $c_{-k} c_k$ :

$$2u_k v_k (J_1 \cos k - B) + (-u_k^2 + v_k^2) J_2 \sin k = 0, \quad (1.39)$$

то есть

$$\frac{v_k}{u_k} = \frac{B - J_1 \cos k \pm \sqrt{(J_1 \cos k - B)^2 + J_2^2 \sin^2 k}}{J_2 \sin k}. \quad (1.40)$$

Решив это уравнение совместно с  $u_k^2 + v_k^2 = 1$ , найдем  $u_k$ ,  $v_k$  и подставим в

$$\begin{aligned} \widehat{\mathcal{H}} &= \text{const} + \sum_k (2(J_1 \cos k - B) (u_k^2 - v_k^2) + 4J_2 \sin k u_k v_k) c_k^+ c_k \\ &= \text{const} + \sum_k \varepsilon_k c_k^+ c_k. \end{aligned} \quad (1.41)$$

Спектр возбуждений, таким образом, есть  $\varepsilon_k = 2\sqrt{(J_1 \cos k - B)^2 + J_2^2 \sin^2 k}$ .

Отсутствие дисперсии при  $J_1 = J_2$  и  $B = 0$  означает, что возбуждения локализованы на одном или нескольких соседних узлах. Это можно понять с точки зрения преобразования Йордана-Вигнера (см. раздел 1.4), которое в данном случае приводит к изинговской спиновой цепочке

$$\widehat{\mathcal{H}} = \sum_{i=-\infty}^{\infty} J_y \sigma_i^y \sigma_{i+1}^y. \quad (1.42)$$



В такой цепочке каждый спин характеризуется определенной проекцией на ось  $y$ . Поэтому элементарное возбуждение в этой системе — просто переворот спина на любом из узлов, никак не затрагивающий остальные узлы.

Таким образом, полная локализация возбуждения на одном узле эквивалентна отсутствию дисперсии. Обратим внимание на аналогию с задачей 1 в случае  $M \gg m$ , когда оптическая мода колебаний становится почти бездисперсионной из-за того, что колебания соседних легких атомов почти полностью развязаны.

**Другое решение 2.** Приведенное решение иллюстрирует стандартный подход к преобразованию Боголюбова. Дадим другое решение, в котором физический смысл вычислений яснее, и сами они — элегантнее. Вернемся к гамильтониану (1.35) и рассмотрим его коммутатор с фермиевскими операторами:  $[\widehat{\mathcal{H}}, a_k]$ . Пользуясь соотношениями

$$[a^+ a, a] = a^+ a a - a a^+ a = -a, \quad [a a^+, a^+] = -a^+, \quad (1.43)$$

вычислим коммутатор

$$[\widehat{\mathcal{H}}, a_k] = 2(J_1 \cos k - B) a_k + 2J_2 i \sin k a_{-k}^+. \quad (1.44)$$

(Напомним, что физический смысл коммутатора некоторой величины с гамильтонианом — скорость изменения этой величины:  $i\hbar \dot{A} = [A, \mathcal{H}]$ .) Теперь рассмотрим каноническое преобразование:

$$a_k = u_k b_k + v_k b_{-k}^+, \quad a_{-k}^+ = u_k b_{-k}^+ - v_k b_k, \quad (1.45)$$

и предположим, что параметры  $u_k$  и  $v_k$  выбраны так, что гамильтониан принял диагональную форму

$$\widehat{\mathcal{H}} = E_0 + \sum_k \varepsilon_k b_k^+ b_k. \quad (1.46)$$

Возьмем коммутаторы

$$[\widehat{\mathcal{H}}, b_k] = -\varepsilon_k b_k, \quad [\widehat{\mathcal{H}}, b_k^+] = \varepsilon_k b_k, \quad (1.47)$$

и с их помощью перепишем коммутатор (1.44):

$$\begin{aligned} -u_k \varepsilon_k b_k + v_k \varepsilon_k b_{-k}^+ &= 2(J_1 \cos k - B)(u_k b_k + v_k b_{-k}^+) \\ &\quad + 2J_2 i \sin k (u_k b_{-k}^+ + v_k b_k), \end{aligned} \quad (1.48)$$

откуда получаем два уравнения для  $\varepsilon_k$ ,  $u_k$  и  $v_k$ :

$$\begin{cases} -u_k \varepsilon_k = 2(J_1 \cos k - B) u_k + 2J_2 i \sin k v_k \\ v_k \varepsilon_k = 2(J_1 \cos k - B) v_k + 2J_2 i \sin k u_k \end{cases}. \quad (1.49)$$

Так как уравнения однородны по  $u_k$  и  $v_k$ , выражаем  $v_k$  через  $u_k$ :

$$v_k (\varepsilon_k - 2(J_1 \cos k - B)) = 2J_2 i \sin k u_k, \quad (1.50)$$

и исключаем  $v_k$  из первого уравнения:

$$u_k (2(J_1 \cos k - B) + \varepsilon_k) = -2J_2 i \sin k u_k. \quad (1.51)$$

Получаем:

$$\varepsilon_k^2 - 4(J_1 \cos k)^2 = 4J_2^2 \sin^2 k , \quad (1.52)$$

откуда находим  $\varepsilon_k$  :

$$\varepsilon_k = 2\sqrt{(J_1 \cos k - B)^2 + J_2^2 \sin^2 k} . \quad (1.53)$$

(Знак перед корнем выбираем, заметив, что энергия возбуждений над основным состоянием всегда положительна.) Параметры преобразования находим, объединив условие нормировки  $|u_k|^2 + |v_k|^2 = 1$ , вытекающее из антикоммутирования  $[a, a^+]_+ = 1$ , с найденной связью

$$v_k = \frac{2J_2 i \sin k}{\varepsilon_k - 2(J_1 \cos k - B)} u_k . \quad (1.54)$$

Получаем  $|v_k|^2(1 + 4J_2^2 \sin^2 k / (\varepsilon_k - 2(J_1 \cos k - B))^2) = 1$ , откуда

$$v_k = i \frac{\varepsilon_k - 2(J_1 \cos k - B)}{\sqrt{2\varepsilon_k^2 - 4\varepsilon_k(J_1 \cos k - B)}} . \quad (1.55)$$

**Решение 3.** Будем искать каноническое преобразование таком виде:

$$a' = ua + va^+ + wa^+a + q \quad (1.56)$$

$$a'^+ = \bar{u}a^+ + \bar{v}a + \bar{w}a^+a + \bar{q} . \quad (1.57)$$

Это наиболее общая форма, к которой может быть приведено любое полиномиальное по  $a$  и  $a^+$  выражение. Убедиться в этом можно следующим образом. Во-первых, с помощью коммутационных соотношений любое выражение может быть приведено к нормальной форме, в которой в каждом слагаемом оператор  $a^+$  (если он есть) стоит слева от  $a$ . Во-вторых, поскольку  $a^2 = (a^+)^2 = 0$ , выражение (1.56) представляет собой нормальную форму наиболее общего вида.

Рассмотрим выражение  $a'^2$ . Приведем квадрат правой части выражения (1.56) для  $a'$  к нормальной форме и потребуем, чтобы все коэффициенты обратились в ноль. Это дает два условия:

$$w + 2q = 0 , \quad uv + q^2 = 0 . \quad (1.58)$$

Аналогично, условие  $a'a'^+ + a'^+a' = 1$  приводит к соотношению

$$|u|^2 + |v|^2 + 2|q|^2 = 1 . \quad (1.59)$$

Из полученных соотношений следует, что

$$|u| + |v| = 1 . \quad (1.60)$$

Таким образом, наиболее общее каноническое преобразование задается двумя комплексными параметрами  $u$  и  $v$ , удовлетворяющими условию (1.60). Коэффициенты  $q$  и  $w$  определяются таким образом:  $q = \pm i\sqrt{uv}$ ,  $w = -2q$ .

Нетрудно видеть, что в общем случае каноническое преобразование нелинейное, поскольку коэффициент  $w$  не обращается в ноль.

Решим теперь задачу другим способом, воспользовавшись представлением (1.20) фермиевских операторов через матрицы Паули. Обратим соотношения (1.20):

$$a = \frac{1}{2}(\sigma_x - i\sigma_y), \quad a^+ = \frac{1}{2}(\sigma_x + i\sigma_y). \quad (1.61)$$

Нетрудно проверить, что условия  $a^2 = (a^+)^2 = 0$ ,  $a^+a + aa^+ = 1$  эквивалентны соотношениям антикоммутируемости для  $\sigma_i$ :

$$[\sigma_i, \sigma_j]_+ = 2\delta_{ij}. \quad (1.62)$$

Преобразования, сохраняющие соотношения (1.62), можно записать в виде

$$\sigma'_i = R_{ij} \sigma_j, \quad (1.63)$$

где  $R_{ij}$  — вещественная ортогональная матрица  $3 \times 3$ . Поэтому канонические преобразования в данном случае образуют группу  $SO(3)$ .

**Первое решение 4.** Выразим  $\widehat{\mathcal{H}}$  через  $a_i$  и  $a_i^+$  по формулам (1.21), не определяя пока частоту  $\omega_0$ :

$$\begin{aligned} \widehat{\mathcal{H}} &= \sum \left( \frac{p_i^2}{2m} + \frac{K}{2}(x_i - x_{i+1})^2 \right) = \\ &= - \sum \left( \frac{\hbar\omega_0}{4}(a_i - a_i^+)^2 + \frac{K\hbar}{4m\omega_0}(a_i + a_i^+ - a_{i+1} - a_{i+1}^+)^2 \right) = \\ &= \sum \left( \frac{\hbar\omega_0}{4}(a_i^+ a_i - a_i^2) + \frac{\hbar K}{4m\omega_0} \times \right. \\ &\quad \left. \times ((a_i - a_{i+1})(a_i^+ - a_{i+1}^+) + (a_i - a_{i+1})^2) + \text{h.c.} \right). \end{aligned} \quad (1.64)$$

Выполним преобразование Фурье бозе-операторов:

$$a_m = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dk}{2\pi} a_k e^{ikm} = \sum_k a_k e^{ikm}, \quad a_k = \sum_n a_n e^{-ikn}. \quad (1.65)$$

При этом

$$a_i - a_{i+1} \rightarrow (1 - e^{ik})a_k, \quad a_i^+ - a_{i+1}^+ \rightarrow (1 - e^{-ik})a_k^+. \quad (1.66)$$

Подставляя эти выражения в (1.64), получаем:

$$\widehat{\mathcal{H}} = \sum_k \left( p(k) a_k^+ a_k + q(k) a_k a_{-k} + \text{h.c.} \right), \quad (1.67)$$

где

$$\begin{aligned} p(k) &= \frac{\hbar\omega_0}{4} + \frac{\hbar K}{2m\omega_0}(1 - \cos k), \\ q(k) &= \frac{\hbar K}{2m\omega_0}(1 - \cos k) - \frac{\hbar\omega_0}{4}. \end{aligned} \quad (1.68)$$

Рассмотрим каноническое преобразование:

$$\begin{aligned} a_k &= u_k b_k + v_k b_{-k}^+ \\ a_{-k}^+ &= v_k b_k + u_k b_{-k}^+ , \end{aligned} \quad (1.69)$$

где  $u_k = \text{ch } \lambda_k$ ,  $v_k = \text{sh } \lambda_k$ . Нетрудно проверить, что при преобразовании (1.69) гамильтониан сохраняет свой вид, причем  $p(k)$  и  $q(k)$  меняются так:

$$\begin{aligned} p'(k) &= \text{ch } 2\lambda_k p(k) + \text{sh } 2\lambda_k q(k) , \\ q'(k) &= \text{sh } 2\lambda_k p(k) + \text{ch } 2\lambda_k q(k) . \end{aligned} \quad (1.70)$$

Подберем  $\lambda_k$  так, чтобы  $q'(k)$  обратилось в ноль:

$$\text{th } 2\lambda_k = -\frac{q(k)}{p(k)} . \quad (1.71)$$

При этом  $p'(k) = \sqrt{p^2(k) - q^2(k)} = \hbar\sqrt{K/m} \sin |k/2|$ . Обратим внимание на то, что частота  $\omega_0$ , значение которой может быть произвольным, выпадает из выражения для  $p'(k)$  (но не из выражения для  $\lambda_k$ !).

Диагонализированный гамильтониан имеет вид:

$$\widehat{\mathcal{H}} = \sum_k \left( p'(k) b_k^+ b_k + \text{h.c.} \right) = \sum_k \omega(k) \left( b_k^+ b_k + \frac{1}{2} \right) , \quad (1.72)$$

где  $\omega(k) = 2p'(k) = 2\hbar\sqrt{K/m} \sin |k/2|$ .

Выражение (1.72) позволяет найти энергию нулевых колебаний, приходящуюся на одну частицу:

$$E_0 = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\hbar\omega(k) dk}{2} \frac{1}{2\pi} = \frac{2}{\pi} \hbar\sqrt{K/m} . \quad (1.73)$$

**Другое решение 4.** К ответу можно прийти заметно быстрее, если не фиксировать внимание на операторах рождения и уничтожения. Чтобы получить каноническое преобразование, достаточно проверить сохранение коммутационных соотношений для любой полной системы операторов. В этой задаче наиболее естественный выбор — координаты и импульсы частиц.

Сделаем преобразование Фурье

$$\widehat{x}_m = \int_{-\pi}^{\pi} \widehat{x}_q e^{imq} \frac{dq}{2\pi} , \quad \widehat{p}_m = \int_{-\pi}^{\pi} \widehat{p}_q e^{imq} \frac{dq}{2\pi} , \quad (1.74)$$

и проверим, что коммутационные соотношения не нарушаются:

$$[\widehat{x}_q, \widehat{p}_{q'}] = 2\pi i \hbar \delta(q - q') . \quad (1.75)$$

Переписывая гамильтониан, имеем

$$\widehat{\mathcal{H}} = \int_{-\pi}^{\pi} \left\{ \frac{1}{2m} \widehat{p}_q \widehat{p}_{-q} + \frac{K}{2} (2 - 2 \cos q) \widehat{x}_q \widehat{x}_{-q} \right\} \frac{dq}{2\pi} . \quad (1.76)$$

То есть каждой фурье-гармонике соответствует осциллятор с частотой

$$\omega(q) = \sqrt{\frac{K}{m} (2 - 2 \cos q)} = 2\sqrt{\frac{K}{m}} \sin |q/2|. \quad (1.77)$$

Положив

$$\hat{x}_q = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega(q)}} \frac{b_q + b_q^+}{\sqrt{2}}, \quad \hat{p}_q = \sqrt{\hbar m\omega(q)} \frac{b_q - b_q^+}{i\sqrt{2}}, \quad (1.78)$$

снова приходим к гамильтониану (1.72):

$$\widehat{\mathcal{H}} = \int_{-\pi}^{\pi} \hbar\omega(q) \left( b_q^+ b_q + \frac{1}{2} \right) \frac{dq}{2\pi}. \quad (1.79)$$

и к выражению (1.73) для энергии нулевых колебаний.

Из хода решения очевидно, что и для неравных масс  $m \neq M$  спектр квантовой цепочки будет связан с частотами колебаний классической цепочки точно так же: каждой классической нормальной моде соответствует квантовый осциллятор.

## 1.4. От спиновых операторов — к фермиевским

Интересное применение канонического преобразования операторов, рассмотренного в задаче 3, представляет переход от спиновых операторов к фермиевским в теории одномерных магнетиков, известный как *преобразование Йордана-Вигнера*. Рассмотрим гамильтониан одномерной квантовой модели Гейзенберга со спином  $1/2$ :

$$\widehat{\mathcal{H}} = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \left( J_x \sigma_i^x \sigma_{i+1}^x + J_y \sigma_i^y \sigma_{i+1}^y + J_z \sigma_i^z \sigma_{i+1}^z - B \sigma_i^z \right). \quad (1.80)$$

Здесь  $\sigma_i^\alpha$  — матрицы Паули,  $J_x$ ,  $J_y$ ,  $J_z$  — обменные константы,  $B$  — внешнее магнитное поле, приложенное вдоль оси  $z$ . В обычной изотропной модели Гейзенберга константы  $J_x$ ,  $J_y$  и  $J_z$  одинаковы, но бывает полезно рассматривать и более общий анизотропный случай.

Преобразование Йордана-Вигнера выражает спиновые операторы  $\sigma_i^\pm = 1/2(\sigma_i^x \pm i\sigma_i^y)$  через операторы фермионов  $a_i^+$ ,  $a_i$  по следующему правилу:

$$\sigma_i^z = 2a_i^+ a_i - 1, \quad \sigma_i^- = a_i \prod_{j<i} \sigma_j^z, \quad \sigma_i^+ = a_i^+ \prod_{j<i} \sigma_j^z, \quad (1.81)$$

то есть каждый спин заменяется на фермион и «струну», идущую влево до бесконечности (струной принято называть бесконечное произведение, фигурирующее в этих формулах). Цель введения струны состоит в том, чтобы перейти к операторам с фермиевским правилом коммутации. Для этого необходимо «подправить» коммутационные соотношения спиновых операторов на разных узлах. На одном узле, согласно задаче 3, коммутационные соотношения и так фермиевские ( $\sigma^+ \rightarrow a^+$ ,  $\sigma^- \rightarrow a$ ). На разных же узлах спиновые операторы коммутируют, но после умножения на оператор струны  $\prod_{j<i} \sigma_j^z$  становятся антикоммутирующими.

Нетрудно написать обратное преобразование, выражающее фермиевские операторы через спины:

$$a_i = \sigma_i^- \prod_{j<i} \sigma_j^z, \quad a_i^+ = \sigma_i^+ \prod_{j<i} \sigma_j^z. \quad (1.82)$$

Найдем как спиновый гамильтониан (1.80) выражается через йордан-вигнеровские фермионы. С помощью преобразования (1.81) гамильтониан (1.80) превращается в эквивалентный фермионный гамильтониан

$$\widehat{\mathcal{H}} = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \left[ (J_1 a_i^+ a_{i+1} + J_2 a_i a_{i+1} + \text{h.c.}) + J_z (2n_i - 1)(2n_{i+1} - 1) - B(2n_i - 1) \right], \quad (1.83)$$

где  $n_i = 2a_i^+ a_i - 1$ ,  $J_1 = -J_x - J_y$ ,  $J_2 = J_x - J_y$ . Нетрудно видеть, что при  $J_z = 0$  гамильтониан (1.83) с точностью до константы совпадает с гамильтонианом (1.19), рассмотренным в задаче 2. Метод задачи 2 позволяет диагонализировать гамильтониан (1.80) при  $J_z = 0$ . С помощью канонического преобразования ферми-операторов гамильтониан (1.83) можно привести к виду

$$\widehat{\mathcal{H}} = \int_{-\pi}^{\pi} \varepsilon(k) a_k^+ a_k' \frac{dk}{2\pi}, \quad \varepsilon(k) = \pm 2\sqrt{(J_1 \cos k - B)^2 + J_2^2 \sin^2 k}. \quad (1.84)$$

Можно сделать вывод, что и в присутствии магнитного поля элементарные возбуждения в спиновой цепочке с  $J_z = 0$  подчиняются *ферми-статистике*. Оказывается, это верно и при произвольном  $J_z$ , хотя решить задачу в этом случае уже не так просто.

Появление ферми-статистики может показаться парадоксальным, поскольку магноны (спиновые возбуждения в магнетиках) обычно являются бозонами. Однако здесь следует иметь в виду, что речь в данном случае идет о сильно взаимодействующей системе. В магнетике со спином на узле  $1/2$  между магнонами возникает большое эффективное отталкивание, поскольку никакие два магнона не могут одновременно оказаться на одном и том же узле. Именно это отталкивание и «моделирует» ферми-статистика. Таким образом, рассматриваемая система представляет пример того, как отталкивание между бозонами приводит к появлению квазичастиц, являющихся невзаимодействующими фермионами<sup>2</sup>.

С помощью фермионного представления одномерного магнетика можно решить разнообразные задачи. Например, найдем как намагниченность системы и магнитная восприимчивость зависят от приложенного поля. Для простоты ограничимся симметричным случаем:  $J_x = J_y = J > 0$ ,  $J_z = 0$ . Эквивалентный фермионный гамильтониан в этом случае принимает вид:

$$\widehat{\mathcal{H}} = \int_{-\pi}^{\pi} 2(J \cos k - B) a_k^+ a_k \frac{dk}{2\pi}. \quad (1.85)$$

<sup>2</sup>Оказывается, что низкая размерность системы усиливает эффекты взаимодействия и, как правило, способствует превращению различных типов статистики друг в друга. Как мы увидим в гл. 12, в одномерной системе взаимодействующих фермионов квазичастицы подчиняются бозе-статистике.

Магнитный момент направлен вдоль оси  $z$ . Намагниченность, приходящаяся на узел, есть

$$\mu = \langle \sigma_i^z \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} (2\langle a_k^+ a_k \rangle - 1) \frac{dk}{2\pi}. \quad (1.86)$$

С учетом (1.85) находим

$$\mu = \begin{cases} (2/\pi) \arcsin B/J & \text{при } |B| < J \\ \text{sign } B/J & \text{при } |B| > J \end{cases}. \quad (1.87)$$

При  $|B| = J$  происходит полное намагничивание системы. Нетрудно найти восприимчивость:

$$\chi = \frac{\partial \mu}{\partial B} = \begin{cases} (2/\pi)(J^2 - B^2)^{-1/2} & \text{при } |B| < J \\ 0 & \text{при } |B| > J \end{cases}. \quad (1.88)$$

Знак восприимчивости парамагнитный.





## Глава 2.

# Функция Грина

### 2.1. Представление взаимодействия. Хронологическое упорядочение.

В теории возмущений гамильтониан записывают в виде  $\widehat{\mathcal{H}} = \widehat{\mathcal{H}}_0 + \widehat{\mathcal{H}}_{\text{int}}$ , где  $\widehat{\mathcal{H}}_0$  — «невозмущенная» часть, а  $\widehat{\mathcal{H}}_{\text{int}}$  — возмущение. Наиболее удобно работать в представлении взаимодействия, которое есть просто представление Гейзенберга невозмущенной задачи, то есть зависящий от времени базис состояний

$$\psi_\alpha(t) = e^{-\frac{i}{\hbar}E_\alpha t}\psi_\alpha(0), \quad (2.1)$$

где  $\psi_\alpha(0)$  — собственные состояния гамильтониана  $\widehat{\mathcal{H}}_0$ , а  $E_\alpha$  — их энергии. Уравнение Шредингера, записанное в этом базисе, принимает вид

$$i\hbar \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial t} = \widehat{\mathcal{H}}_{\text{int}}(t) \tilde{\psi}, \quad (2.2)$$

где  $\widehat{\mathcal{H}}_{\text{int}}(t) = e^{\frac{i}{\hbar}\widehat{\mathcal{H}}_0 t} \widehat{\mathcal{H}}_{\text{int}} e^{-\frac{i}{\hbar}\widehat{\mathcal{H}}_0 t}$ , а обозначение  $\tilde{\psi}$  указывает, что  $\psi$  берется в представлении взаимодействия. Формальное решение записывается через  $S$ -матрицу,  $\tilde{\psi}(t) = \widehat{S}(t)\tilde{\psi}(0)$ , которая дается так называемой хронологической экспонентой

$$\begin{aligned} \widehat{S}(t) &= \text{T exp} \left[ -\frac{i}{\hbar} \int_0^t \widehat{\mathcal{H}}_{\text{int}}(t') dt' \right] = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left( -\frac{i}{\hbar} \right)^n \int_0^t \int_0^{t_1} \dots \int_0^{t_{n-1}} \widehat{\mathcal{H}}_{\text{int}}(t_1) \dots \widehat{\mathcal{H}}_{\text{int}}(t_n) dt_1 \dots dt_n, \end{aligned} \quad (2.3)$$

где  $0 < t_n < \dots < t_1 < t$ . Преобразования (2.1)–(2.3) имеют общий квантово-механический смысл: они применимы и к одночастичной и к многочастичной задачам. В многочастичном случае, представляющем основной интерес, необходимо перейти к  $\psi$ -операторам, после чего члены ряда (2.3) становятся полиномами по операторам рождения и уничтожения. Анализ операторной структуры этих выражений приводит к простым правилам вычисления средних (теорема Вика) и к *диаграммной технике*, дающей удобное графическое представление для разложения  $S$ -матрицы в ряд по взаимодействию.

Введем *хронологическое произведение* операторов, которое часто называют также  $T$ -упорядоченным произведением операторов, или просто  $T$ -произведением. Для бозе-операторов

$$T\hat{A}(x)\hat{B}(x') = \begin{cases} \hat{A}(x)\hat{B}(x') & \text{если } t > t' \\ \hat{B}(x')\hat{A}(x) & \text{если } t < t' \end{cases}, \quad (2.4)$$

в то время как для ферми-операторов

$$T\hat{A}(x)\hat{B}(x') = \begin{cases} \hat{A}(x)\hat{B}(x') & \text{если } t > t' \\ -\hat{B}(x')\hat{A}(x) & \text{если } t < t' \end{cases}. \quad (2.5)$$

Иначе говоря, при  $T$ -упорядочении операторов их переставляют так, чтобы моменты времени, в которые взяты операторы, возрастали справа налево. При этом знак перестановки соответствует их коммутационным соотношениям: « $+$ » для бозонов, « $-$ » для фермионов.

С помощью  $T$ -произведения операторов можно записать выражение (2.3) для хронологической экспоненты в более привычном виде:

$$\hat{S}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{i}{\hbar}\right)^n \frac{1}{n!} T \left( \int_0^t \hat{\mathcal{H}}_{\text{int}}(t') dt' \right)^n. \quad (2.6)$$

Основным объектом диаграммной техники является функция Грина. Она определяется через  $\psi$ -операторы, взятые в представлении взаимодействия:

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}_{\alpha}(x) &= e^{i\hat{\mathcal{H}}_0 t} \hat{\psi}_{\alpha}(\mathbf{r}) e^{-i\hat{\mathcal{H}}_0 t}, \\ \tilde{\psi}_{\alpha}^{+}(x) &= e^{-i\hat{\mathcal{H}}_0 t} \hat{\psi}_{\alpha}^{+}(\mathbf{r}) e^{i\hat{\mathcal{H}}_0 t}, \end{aligned} \quad (2.7)$$

где под  $x$  понимается совокупность четырех переменных — координат  $\mathbf{r}$  и времени  $t$ ;  $\alpha$  — спиновый индекс (для фермионов).

Так называемая *причинная функция Грина* есть среднее от хронологического произведения  $\psi$ -операторов, взятых в представлении взаимодействия<sup>1</sup>:

$$G_{\alpha\beta}^c(x, x') = -i \langle T \tilde{\psi}_{\alpha}(x) \tilde{\psi}_{\beta}^{+}(x') \rangle, \quad (2.8)$$

где скобки  $\langle \dots \rangle$  означают матричный элемент  $\langle \hat{S}_0 \rangle^{-1} \langle 0 | \dots | 0 \rangle$ , взятый по основному состоянию системы с гамильтонианом  $\hat{\mathcal{H}}_0$ . (Фазовый множитель  $\langle \hat{S}_0 \rangle = \langle 0 | e^{-i\hat{\mathcal{H}}_0 t} | 0 \rangle_{t \rightarrow \infty}$  принято вводить для нормировки.) Таким образом, функции Грина бозонов и фермионов определяются одинаково, но операция  $T$ -упорядочения имеет разный смысл.

В выражении (2.7) и всюду далее там, где это не приводит к недоразумениям, мы используем систему единиц, в которой  $\hbar = 1$ ,  $[t] = [E]^{-1}$ . Кроме того, мы также часто будем писать  $\psi$  вместо  $\tilde{\psi}$ , ибо основную роль в диаграммной технике играет именно

<sup>1</sup>Верхний индекс у  $G_{\alpha\beta}^c$  (первую букву слова «causal») используют для того, чтобы отличать причинную функцию Грина от других полезных функций Грина, таких как запаздывающая и опережающая функции  $G_{\alpha\beta}^{R(A)}$  (см. (5.6)).

операторы  $\tilde{\psi}$  в представлении взаимодействия, а операторы  $\psi$  в шредингеровском представлении практически не встречаются.

В однородной системе (скажем, в газе или в жидкости) функция Грина (2.8), очевидно, зависит только от разности координат  $\mathbf{r} - \mathbf{r}'$  и времен  $t - t'$ . В этом случае удобно сделать преобразование Фурье и перейти в импульсно-частотное представление:

$$G_{\alpha\beta}(x - x') = \int \int G_{\alpha\beta}(\varepsilon, \mathbf{p}) e^{-i\varepsilon(t-t') + i\mathbf{p}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')} \frac{d\varepsilon d^3p}{(2\pi)^4}. \quad (2.9)$$

В этом представлении обычно и строится диаграммная техника. Функцию  $G_{\alpha\beta}(\varepsilon, \mathbf{p})$  для идеального газа нетрудно найти, пользуясь определением (2.8). Например, для идеального ферми-газа она имеет вид:

$$G_{\alpha\beta}(\varepsilon, \mathbf{p}) = \frac{\delta_{\alpha\beta}}{\varepsilon - \xi(\mathbf{p}) + i0 \operatorname{sign}(|\mathbf{p}| - p_0)}, \quad (2.10)$$

где  $\xi(\mathbf{p}) = \mathbf{p}^2/2m - E_F$  — закон дисперсии, а  $p_0 = \sqrt{2mE_F}$  — импульс Ферми, являющийся границей распределения ферми-частиц по импульсам.

Функцию Грина, если она известна, можно использовать для вычисления различных физических величин. Нетрудно проверить, что

$$\pm i \lim_{t' \rightarrow t+0} G_{\alpha\beta}(x, x') \quad (2.11)$$

есть одночастичная матрица плотности  $\rho_{\alpha\beta}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t)$ . (Знак соответствует статистике: «+» для бозонов, «-» для фермионов.) Зная матрицу плотности, нетрудно найти среднее любой величины. Например, плотность частиц выражается через функцию Грина как

$$n(x) = \pm i \lim_{\substack{t' \rightarrow t+0 \\ \mathbf{r}' \rightarrow \mathbf{r}}} \operatorname{Tr} G_{\alpha\beta}(x, x'), \quad (2.12)$$

а плотность тока как

$$\mathbf{j}(x) = \pm \frac{\hbar}{2m} \lim_{\substack{t' \rightarrow t+0 \\ \mathbf{r}' \rightarrow \mathbf{r}}} (\nabla_{\mathbf{r}} - \nabla_{\mathbf{r}'}) \operatorname{Tr} G_{\alpha\beta}(x, x'), \quad (2.13)$$

где  $\operatorname{Tr}$  обозначает взятие следа по спиновым индексам  $\alpha, \beta$ . Брать предел по  $t' > t$  в соотношениях (2.11) – (2.13) необходимо из-за неоднозначности определения функции Грина при  $t = t'$ .

Представление взаимодействия и функция Грина — важные инструменты. Задачи, собранные в этой главе, иллюстрируют их использование на простых примерах.

*Литература:* [1], гл. 2, [4], гл. 5, [6], гл. 2.

## 2.2. Задачи 5 ÷ 10

**Задача 5.** (*Спин во вращающемся поле*) Частица со спином  $s = 1/2$  и магнитным моментом  $\mu$  находится в постоянном вертикальном и вращающемся горизонтальном магнитном полях<sup>2</sup>

$$\mathbf{B} = (B_1 \cos \omega t, B_1 \sin \omega t, B_0). \quad (2.14)$$

<sup>2</sup>Такая ситуация возникает, например, в эксперименте по ядерному магнитному резонансу (ЯМР).

Запишите уравнение Шредингера в представлении взаимодействия, считая переменную часть поля «возмущением». Решите уравнение и найдите  $S$ -матрицу.

Пусть при  $t = 0$  частица находится в состоянии «спин вверх». Какова вероятность найти ее в состоянии «спин вниз» в момент  $t > 0$ ? Рассмотрите отдельно случай резонанса  $\omega = 2\mu B_0$ .

**Задача 6.** Заряженная частица массы  $m$  движется по прямой в параболическом потенциале  $U(x) = m\omega^2 x^2/2$ . На короткое время  $\tau$  включают слабое электрическое поле  $E$ , а затем выключают. Какова вероятность перевести частицу в состояние  $|n\rangle$ , если до включения поля она была в основном состоянии?

**а)** Решите задачу в представлении взаимодействия. Обратите внимание на то, что матричные элементы возмущения отличны от нуля только между соседними уровнями. Следовательно, при малом  $E$  вероятность перехода в  $n$ -е состояние дается  $n$ -ым порядком теории возмущений. При каком соотношении между  $E$ ,  $\omega$  и  $\tau$  теория возмущений работает?

**б)\*** Для произвольных  $E$  и  $\tau$  найдите точную  $S$ -матрицу и вероятность перехода из основного в  $n$ -е состояние.

**Задача 7. (Обход полюса)** Выразите плотность  $n$  ферми-газа через функцию Грина  $G(\varepsilon, p)$ , воспользовавшись соотношением (2.12). Вычислите интеграл и получите формулу  $p_0^3 = 3\pi^2 n$  для импульса Ферми  $p_0$ .

**Задача 8. а)** Для невзаимодействующих ферми-частиц на прямой найдите функцию Грина  $G_{\alpha\beta}(\varepsilon, x, x')$ .

**б)** То же для ферми-частиц на полупрямой  $x > 0$  с граничным условием  $\psi|_{x=0} = 0$  (непроницаемая твердая стенка).

**в)** (Осцилляции Фриделя) В случае б) покажите, что плотность ферми-газа, как функция расстояния до стенки, осциллирует. Чему равен период осцилляций?

**Задача 9. (Возврат назад при случайном блуждании)** Функции Грина оказываются полезными и при изучении вопросов, не имеющих отношения к квантовой механике. В этой и следующей задачах мы приведем два таких примера. Первый из них — задача о случайном блуждании.

Рассмотрим частицу, совершающую случайное блуждание по  $n$ -мерной кубической решетке. Движение начинается при  $t = 0$  из начала координат. Попав на очередном шаге в какой-то из узлов решетки, частица на следующем шаге с одинаковой вероятностью переходит в любой из  $2n$  соседних узлов. Пусть  $p(t, \mathbf{x})$  — вероятность того, что частица через  $t$  шагов оказалась в узле  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$  решетки. (В этой задаче время  $t$  целое.) В теории вероятностей рассматривают производящую функцию

$$G(z, \mathbf{q}) = \sum_{\mathbf{x}, t} z^t e^{i\mathbf{q}\mathbf{x}} p(t, \mathbf{x}), \quad (t \geq 0, |z| < 1). \quad (2.15)$$

Свойства  $G(z, \mathbf{q})$  во многом аналогичны свойствам функции Грина. Покажите, что

$$G(z, \mathbf{q}) = \frac{1}{1 - zW(\mathbf{q})}, \quad W(\mathbf{q}) = \frac{1}{n}(\cos q_1 + \dots + \cos q_n). \quad (2.16)$$

Рассмотрим производящую функцию  $\tilde{G}(z, \mathbf{q})$  для блужданий, начинающихся из начала координат, но ни разу не возвращающихся туда на последующих шагах. Величина

$\tilde{G}(z, \mathbf{q})$  по своим свойствам похожа на функцию Грина частицы в поле отталкивающего центра (см. задачи 11, 12 и 13). В частности, для нее можно написать такое же интегральное уравнение (напоминающее уравнение Дайсона). Выразите  $\tilde{G}(z, \mathbf{q})$  через  $G(z, \mathbf{q})$ . Найдите вероятность  $P$  того, что частица никогда не возвращается в начало координат. Покажите, что

$$P^{-1} = \int G(1, \mathbf{q}) \frac{d^n q}{(2\pi)^n}. \quad (2.17)$$

Здесь интеграл берется по зоне Бриллюэна, т. е. по периоду обратной решетки.

Вероятность возврата (2.17) имеет нетривиальную зависимость от размерности решетки  $n$ . Покажите, что

- а)  $P = 0$  при  $n \leq 2$ ;
- б)  $0 < P < 1$  при  $n > 2$ ;
- в)  $P \rightarrow 1$  при  $n \gg 2$ .

Поскольку перечисленные свойства чувствительны только к поведению  $G(1, \mathbf{q})$  при малых  $\mathbf{q}$ , т. е. на больших масштабах, они имеют место для произвольного диффузионного движения, а не только для блуждания по решетке. Типичная диффузионная траектория имеет бесконечно много возвратов при  $n \leq 2$ , и конечное число при  $n > 2$ .

**Задача 10.** Второй пример использования функций Грина — из электродинамики. Рассмотрим модель проводящей среды, представляющую собой  $n$ -мерную сетку из одинаковых сопротивлений. Сетка образует  $n$ -мерную кубическую решетку, сопротивление каждого ребра которой равно  $R$ . Обозначим через  $R_{\mathbf{x}}$  полное сопротивление решетки между узлами  $0$  и  $\mathbf{x}$ . Покажите, что

$$R_{\mathbf{x}} = \frac{R}{n} \int (1 - e^{i\mathbf{q}\mathbf{x}}) G(1, \mathbf{q}) \frac{d^n q}{(2\pi)^n}, \quad (2.18)$$

где  $G(z, \mathbf{q})$  — функция Грина, введенная в задаче 9. Исследуйте поведение  $R_{\mathbf{x}}$  при  $|\mathbf{x}| \gg 1$  в зависимости от размерности  $n$ .

## 2.3. Решения

**Решение 5.** Представим гамильтониан в виде  $\widehat{\mathcal{H}} = \widehat{\mathcal{H}}_0 + \widehat{\mathcal{H}}_{\text{int}}(t)$ , где

$$\widehat{\mathcal{H}}_0 = \mu B_0 \sigma_z = \begin{pmatrix} \mu B_0 & 0 \\ 0 & -\mu B_0 \end{pmatrix}, \quad (2.19)$$

$$\widehat{\mathcal{H}}_{\text{int}}(t) = \mu B_1 (\sigma_x \cos \omega t + \sigma_y \sin \omega t) = \begin{pmatrix} 0 & \mu B_1 e^{-i\omega t} \\ \mu B_1 e^{i\omega t} & 0 \end{pmatrix} \quad (2.20)$$

В представлении взаимодействия  $i\dot{\psi} = \widehat{\mathcal{H}}_{\text{int}}(t)\psi$ , где

$$\begin{aligned} \widehat{\mathcal{H}}_{\text{int}}(t) &= e^{i\widehat{\mathcal{H}}_0 t} \widehat{\mathcal{H}}_{\text{int}} e^{-i\widehat{\mathcal{H}}_0 t} = \begin{pmatrix} e^{i\mu B_0 t} & 0 \\ 0 & e^{-i\mu B_0 t} \end{pmatrix} \widehat{\mathcal{H}}_{\text{int}} \begin{pmatrix} e^{-i\mu B_0 t} & 0 \\ 0 & e^{i\mu B_0 t} \end{pmatrix} \\ &= \mu B_1 \begin{pmatrix} 0 & e^{-2i\Omega t} \\ e^{2i\Omega t} & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (2.21)$$

где  $\Omega = \omega/2 - \mu B_0$ . Отсюда получаем уравнения

$$\begin{cases} i\dot{\psi}_{\uparrow} = \mu B_1 e^{-2i\Omega t} \psi_{\downarrow} \\ i\dot{\psi}_{\downarrow} = \mu B_1 e^{2i\Omega t} \psi_{\uparrow} \end{cases} \quad (2.22)$$

Введем новые переменные:

$$\varphi_{\uparrow} = e^{i\Omega t} \psi_{\uparrow}, \quad \varphi_{\downarrow} = e^{-i\Omega t} \psi_{\downarrow}. \quad (2.23)$$

Уравнения для  $\varphi_{\alpha}(t)$  не содержат явной зависимости от времени:

$$\begin{cases} i\dot{\varphi}_{\uparrow} + \Omega\varphi_{\uparrow} = \mu B_1 \varphi_{\downarrow} \\ i\dot{\varphi}_{\downarrow} - \Omega\varphi_{\downarrow} = \mu B_1 \varphi_{\uparrow} \end{cases} \quad \text{или} \quad i\dot{\varphi} = \begin{pmatrix} -\Omega & \mu B_1 \\ \mu B_1 & \Omega \end{pmatrix} \varphi \quad (2.24)$$

Общее решение этих уравнений имеет вид

$$\varphi(t) = c_+ \begin{pmatrix} (1+\lambda)^{1/2} \\ -(1-\lambda)^{1/2} \end{pmatrix} e^{i\tilde{\omega}t} + c_- \begin{pmatrix} (1-\lambda)^{1/2} \\ (1+\lambda)^{1/2} \end{pmatrix} e^{-i\tilde{\omega}t}, \quad (2.25)$$

где  $\tilde{\omega} = \sqrt{\Omega^2 + (\mu B_1)^2}$ ,  $\lambda = \Omega/\tilde{\omega}$ , а коэффициенты  $c_{\pm}$  зависят от начальных условий.

Полная  $S$ -матрица определяется из  $\psi_i(t) = \hat{S}(t)\psi_i(0)$ . Сравнивая с (2.25), получаем

$$\begin{aligned} \hat{S}(t) &= \begin{pmatrix} e^{-i\Omega t} & 0 \\ 0 & e^{i\Omega t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (1+\lambda)^{1/2} e^{i\tilde{\omega}t} & (1-\lambda)^{1/2} e^{-i\tilde{\omega}t} \\ -(1-\lambda)^{1/2} e^{i\tilde{\omega}t} & (1+\lambda)^{1/2} e^{-i\tilde{\omega}t} \end{pmatrix} \\ &\times \frac{1}{2} \begin{pmatrix} (1+\lambda)^{1/2} & -(1-\lambda)^{1/2} \\ (1-\lambda)^{1/2} & (1+\lambda)^{1/2} \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} W(t)e^{-i\Omega t} & -i(1-\lambda^2)e^{-i\Omega t} \sin \tilde{\omega}t \\ -i(1-\lambda^2)e^{i\Omega t} \sin \tilde{\omega}t & W^*(t)e^{i\Omega t} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.26)$$

где  $W(t) = \cos \tilde{\omega}t + i\lambda \sin \tilde{\omega}t$ .

Рассмотрим теперь вероятность переворота спина. Ее можно найти с помощью  $S$ -матрицы, а можно и прямо из (2.25). Воспользуемся вторым способом. Поскольку при  $t = 0$   $\varphi = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ , то коэффициенты  $c_{\pm}$  в выражении (2.25) есть  $c_+ = (1+\lambda)^{1/2}/2$ ,  $c_- = (1-\lambda)^{1/2}/2$ . Отсюда

$$\varphi_{\downarrow}(t) = \frac{1}{2} \sqrt{1-\lambda^2} (e^{-i\tilde{\omega}t} - e^{i\tilde{\omega}t}) = \frac{\mu B_1}{i\tilde{\omega}} \sin \tilde{\omega}t. \quad (2.27)$$

Вероятность обнаружения состояния  $|\downarrow\rangle$  при  $t > 0$  равна

$$p_{\downarrow}(t) = |\varphi_{\downarrow}(t)|^2 = \frac{(\mu B_1)^2}{\Omega^2 + (\mu B_1)^2} \sin^2 \tilde{\omega}t. \quad (2.28)$$

Если выполнено условие резонанса  $\omega = 2\mu B_0$ , то  $\Omega = 0$ ,  $\tilde{\omega} = \mu B_1$  и выражение для  $S$ -матрицы упрощается:

$$\hat{S}(t) = \begin{pmatrix} \cos \mu B_1 t & -i \sin \mu B_1 t \\ -i \sin \mu B_1 t & \cos \mu B_1 t \end{pmatrix} \quad (2.29)$$

Соответственно, в этом случае вероятность переворота спина есть  $p_{\downarrow}(t) = \sin^2 \mu B_1 t$ .

**Решение 6 а)** В представлении взаимодействия  $\hat{\mathcal{H}}_{\text{int}} = -eE e^{i\hat{\mathcal{H}}_0 t} \hat{x} e^{-i\hat{\mathcal{H}}_0 t}$ , откуда

$$\langle m | \hat{\mathcal{H}}_{\text{int}}(t) | n \rangle = -eE e^{i(m-n)\omega t} \langle m | \hat{x} | n \rangle. \quad (2.30)$$

Воспользуемся известными матричными элементами оператора координаты:

$$\langle m|\hat{x}|n\rangle = d\langle m|a + a^+|n\rangle = d(\delta_{m,n+1} \sqrt{m} + \delta_{m+1,n} \sqrt{n}) \quad (2.31)$$

где  $d = \sqrt{\hbar/2m\omega}$  — размер основного состояния осциллятора. Получаем

$$\langle m|\widehat{\mathcal{H}}_{\text{int}}(t)|n\rangle = -edE(\delta_{m,n+1} \sqrt{m} e^{i\omega t} + \delta_{m+1,n} \sqrt{n} e^{-i\omega t}) . \quad (2.32)$$

Теперь рассмотрим зависимость вектора состояния от времени. Из уравнения Шредингера в представлении взаимодействия,  $i\hbar\dot{\psi} = \widehat{\mathcal{H}}_{\text{int}}\psi$ , получаем

$$\psi(t) = \psi(0) - \frac{i}{\hbar} \int_0^t \widehat{\mathcal{H}}_{\text{int}}(t')\psi(t')dt' . \quad (2.33)$$

Из такой записи видно, что проекция  $\langle n|\psi(t)\rangle$  отлична от нуля только начиная с  $n$ -го порядка теории возмущений. Поэтому

$$\begin{aligned} \langle n|\psi^{(n)}(t)\rangle &= -i \int_0^t \langle n|\widehat{\mathcal{H}}_{\text{int}}(t')|\psi^{(n-1)}(t')\rangle dt' \\ &= \frac{iedE}{\hbar} \sqrt{n} \int_0^t e^{i\omega t'} \langle n-1|\psi^{(n-1)}(t')\rangle dt' , \end{aligned} \quad (2.34)$$

где индекс  $(n)$  состояния  $\psi^{(n)}(t)$  означает порядок теории возмущений. Вводя функции  $u_n(t) = \langle n|\psi^{(n)}(t)\rangle$ , получаем рекуррентные уравнения:

$$u_n(t) = \frac{iedE}{\hbar} \sqrt{n} \int_0^t e^{i\omega t'} u_{n-1}(t')dt' , \quad (2.35)$$

причем  $u_0(t) = 1$ . Решив их, находим

$$u_n(t) = \left(\frac{edE}{\hbar\omega}\right)^n \frac{1}{\sqrt{n!}} (e^{i\omega t} - 1)^n \quad (2.36)$$

Искомая вероятность  $W_{0 \rightarrow n}$  в приближении теории возмущений равна

$$|u_n(\tau)|^2 = \left(\frac{e^2 E^2}{2m\omega^3 \hbar}\right)^n \frac{1}{n!} \left(2 \sin \frac{\omega\tau}{2}\right)^{2n} = \frac{1}{n!} \left[\frac{e^2 E^2 (1 - \cos \omega\tau)}{m\omega^3 \hbar}\right]^n . \quad (2.37)$$

Теория возмущений работает, если выражение в квадратных скобках много меньше единицы.

**Первое решение 6 б)** Запишем гамильтониан  $\widehat{\mathcal{H}} = \widehat{\mathcal{H}}_0 + \widehat{\mathcal{H}}_{\text{int}}$  через бозе-операторы:

$$\widehat{\mathcal{H}}_0 = \hbar\omega \left(a^+ a + \frac{1}{2}\right) , \quad \widehat{\mathcal{H}}_{\text{int}} = -eE\hat{x} = -eEd(a + a^+) , \quad (2.38)$$

где  $d = \sqrt{\hbar/2m\omega}$ .

Найдем  $a(t)$  и  $a^+(t)$  в случае, когда  $\widehat{\mathcal{H}}_{\text{int}} = 0$ :

$$\dot{a} = \frac{i}{\hbar}[\widehat{\mathcal{H}}_0, a] = i\omega[a^+a, a] = -i\omega a, \quad \dot{a}^+ = i\omega a^+. \quad (2.39)$$

Отсюда имеем

$$a(t) = ae^{-i\omega t}, \quad a^+(t) = a^+e^{i\omega t}. \quad (2.40)$$

Теперь пусть  $\widehat{\mathcal{H}}_{\text{int}} \neq 0$ . Запишем уравнения движения для  $a$  в представлении взаимодействия:

$$\dot{a} = \frac{i}{\hbar}[\widehat{\mathcal{H}}_{\text{int}}, a] = ieEde^{-i\omega t}. \quad (2.41)$$

Решаем:

$$a(\tau) = a(0) - iEd \int_0^\tau e^{-i\omega t} dt = a(0) + \mu, \quad (2.42)$$

где  $a(0)$  — канонический бозевский оператор уничтожения, а

$$\mu = \frac{eEd}{\omega}(e^{-i\omega\tau} - 1). \quad (2.43)$$

Отсюда получаем зависимость  $n$ -го состояния от времени:

$$|n, t = \tau\rangle = \frac{(a^+(\tau))^n}{\sqrt{n!}}|0, t = \tau\rangle = \frac{(a^+(0) + \bar{\mu})^n}{\sqrt{n!}}|0, t = \tau\rangle. \quad (2.44)$$

Теперь разлагаем состояние  $|0, t = 0\rangle$  по состояниям  $|n, t = \tau\rangle$ :

$$\begin{aligned} \langle n, t = \tau | 0, t = 0 \rangle &= \langle 0, t = \tau | \frac{(a(0) + \mu)^n}{\sqrt{n!}} | 0, t = 0 \rangle \\ &= \frac{(\mu)^n}{\sqrt{n!}} \langle 0, t = \tau | 0, t = 0 \rangle. \end{aligned} \quad (2.45)$$

Здесь мы воспользовались тем, что  $a(0)|0\rangle = 0$ .

Из (2.45) находим связь между вероятностями переходов:

$$W_{0 \rightarrow n} = \frac{|\mu|^{2n}}{n!} W_{0 \rightarrow 0}, \quad (2.46)$$

причем условие нормировки  $\sum_n W_{0 \rightarrow n} = 1$  дает  $W_{0 \rightarrow 0} = e^{-|\mu|^2}$ . Получается распределение Пуассона

$$W_{0 \rightarrow n} = \frac{|\mu|^{2n}}{n!} e^{-|\mu|^2} \quad (2.47)$$

с параметром  $|\mu|^2 = e^2 E^2 / m\hbar\omega^3 (1 - \cos \omega\tau)$ . При малых  $\mu$  ответ совпадает с результатом, полученным по теории возмущений, как и должно быть.



**Другое решение 6 б)** Приведем решение, показывающее связь задачи с *когерентными состояниями* осциллятора, определяемыми как собственные состояния оператора уничтожения  $a$ .

Исторически, когерентные состояния впервые появились в задаче о минимизации  $\delta x \delta p$  для состояний осциллятора, рассмотренной Шредингером (1926). Позже оказалось, что они полезны и во многих других случаях. Специфическая координатно-временная структура когерентных состояний исследована в задаче 3 к §23 [2].

Представим гамильтониан в виде

$$\widehat{\mathcal{H}} = \hbar\omega \left[ a^+ a + \frac{1}{2} + \lambda(a^+ + a) \right], \quad (2.48)$$

где  $\lambda = -eEd/\hbar\omega$ . Введем новые операторы

$$b = a + \lambda, \quad b^+ = a^+ + \lambda. \quad (2.49)$$

Поскольку  $[b, b^+] = 1$ , переход от  $a$  и  $a^+$  к  $b$  и  $b^+$  определяет каноническое преобразование. При этом гамильтониан становится чисто осцилляторным:

$$\widehat{\mathcal{H}} = \hbar\omega \left( b^+ b + \frac{1}{2} - \lambda^2 \right). \quad (2.50)$$

Введем собственные состояния оператора уничтожения  $b$ :

$$b|\eta\rangle = \eta|\eta\rangle. \quad (2.51)$$

Здесь  $\eta$  может быть любым комплексным числом. Нетрудно проверить, что

$$|\eta\rangle = e^{-|\eta|^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\eta^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle, \quad (2.52)$$

где  $|n\rangle$  — состояния гамильтониана (2.50), отвечающие энергии  $E_n = \hbar\omega(n+1/2-\lambda^2)$ . Возьмем состояние осциллятора до включения поля:  $a|0_a\rangle = 0$ . Используя связь  $a$  и  $b$ , находим

$$b|0_a\rangle = \lambda|0_a\rangle, \quad (2.53)$$

а значит,

$$|0_a\rangle = e^{-\lambda^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{\sqrt{n!}} |n_b\rangle. \quad (2.54)$$

Разложение по состояниям  $|n_b\rangle$  позволяет сразу написать зависимость от времени:

$$|0_a\rangle(t) = \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\widehat{\mathcal{H}}t\right)|0_a\rangle = e^{i(\lambda^2-1/2)\omega t} e^{-\lambda^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda e^{-i\omega t})^n}{\sqrt{n!}} |n_b\rangle, \quad (2.55)$$

то есть

$$b|0_a\rangle(t) = \lambda e^{-i\omega t}|0_a\rangle(t), \quad (2.56)$$

откуда

$$a|0_a\rangle(t) = \lambda(e^{-i\omega t} - 1)|0_a\rangle(t). \quad (2.57)$$

Обозначив  $\mu = \lambda(e^{-i\omega t} - 1)$ , получаем

$$|0_a\rangle(t) = S(t)|0_a\rangle = e^{-|\mu|^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mu^n}{\sqrt{n!}} |n_a\rangle \quad (2.58)$$

Отсюда находим столбец  $S$ -матрицы:  $\langle n|\hat{S}(t)|0\rangle = e^{-|\mu|^2/2} \mu^n / \sqrt{n!}$ . Искомые вероятности переходов есть

$$W_{0 \rightarrow n} = e^{-|\mu|^2} \frac{|\mu|^{2n}}{n!} = \frac{1}{n!} \left( \frac{e^2 E^2 (1 - \cos \omega t)}{m\omega^3 \hbar} \right)^n \exp\left(-\frac{e^2 E^2 (1 - \cos \omega t)}{m\omega^3 \hbar}\right) \quad (2.59)$$

Остальные матричные элементы можно получить из соотношений для зависящих от времени операторов:

$$\hat{S}b^+ = b^+ \hat{S}e^{-i\omega t} \quad \text{дает} \quad \hat{S}a^+ = a^+ \hat{S}e^{-i\omega t} + \mu \hat{S}. \quad (2.60)$$

Отсюда

$$\langle n|\hat{S}|k\rangle = \frac{1}{\sqrt{k}} \langle n|\hat{S}a^+|k-1\rangle = \frac{1}{\sqrt{k}} \langle n|a^+ \hat{S}e^{-i\omega t} + \mu \hat{S}|k-1\rangle \quad (2.61)$$

и получается рекуррентная формула:

$$\langle n|\hat{S}|k\rangle = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{k}} e^{-i\omega t} \langle n-1|\hat{S}|k-1\rangle - \frac{\mu}{k} \langle n|\hat{S}|k-1\rangle. \quad (2.62)$$

Применяя (2.62) достаточно много раз, выражаем  $\langle n|\hat{S}|k\rangle$  через  $\langle 0|\hat{S}|0\rangle = e^{-|\mu|^2/2}$  и получаем общую формулу:

$$\langle n|\hat{S}|m\rangle = \frac{e^{-|\mu|^2/2}}{\sqrt{m!n!}} \sum_{k=0}^{\min(m,n)} \frac{n!m!}{k!(n-k)!(m-k)!} \mu^{n+m-2k} e^{-i\omega kt} \quad (2.63)$$

**Решение 7.** Используем причинную функцию Грина

$$G_{\alpha\beta} = -i\langle T \psi_{\alpha}(\mathbf{r}, t) \psi_{\beta}^+(\mathbf{r}', t') \rangle = \delta_{\alpha\beta} G, \quad (2.64)$$

введенную в (2.8). Плотность частиц с проекцией спина  $\alpha$  есть

$$n_{\alpha}(\mathbf{r}, t) = \lim_{t' \rightarrow t+0} \langle \psi_{\alpha}^+(\mathbf{r}, t') \psi_{\alpha}(\mathbf{r}, t) \rangle = -iG_{\alpha\alpha}(\mathbf{r}' = \mathbf{r}, t' = t+0) \quad (2.65)$$

(при  $t' = t-0$  из-за перестановки  $\psi$  и  $\psi^+$  получилось бы  $n_{\alpha} - 1$ , по определению функции Грина). В нашем случае система однородна, и  $G$  зависит только от разности  $\mathbf{r} - \mathbf{r}'$  и  $t - t'$ . Поэтому переходим в фурье-представление:

$$\begin{aligned} n_{\alpha} &= -i \lim_{\tau \rightarrow -0} \int G(\varepsilon, \mathbf{p}) e^{-i\varepsilon\tau} \frac{d^3 \mathbf{p} d\varepsilon}{(2\pi)^4} \\ &= -i \lim_{\tau \rightarrow -0} \int_0^{\infty} \frac{4\pi p^2 dp}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\varepsilon}{2\pi} \frac{e^{-i\varepsilon\tau}}{\varepsilon - \xi(p) + i\delta \operatorname{sign}(p - p_0)}, \end{aligned} \quad (2.66)$$

где  $\tau = t - t'$ ,  $\xi(p) = \mathbf{p}^2/2m - E_F$ .

Контур интегрирования по  $\varepsilon$  замыкаем в верхней полуплоскости, поскольку  $\tau < 0$ . При этом при  $p > p_0$  полюс не захвачен:

$$\int \frac{d\varepsilon}{2\pi} \frac{e^{-i\varepsilon\tau}}{\varepsilon - \xi(p) + i\delta} = 0, \quad (2.67)$$

а при  $p < p_0$  захвачен:

$$\int \frac{d\varepsilon}{2\pi} \frac{e^{-i\varepsilon\tau}}{\varepsilon - \xi(p) - i\delta} = ie^{-i\xi(p)\tau}. \quad (2.68)$$

Знак мнимой части  $i\delta$  определяет, заполнено ли состояние с данным  $p$ . С учетом спиновой двойки

$$n = 2 \int_0^{p_0} \frac{4\pi p^2 dp}{(2\pi)^3} = p_0^3/3\pi^2, \quad (2.69)$$

откуда находим  $p_0^3 = 3\pi^2 n$ .

**Решение 8 а)** Найдем

$$G_{\alpha\beta}(\varepsilon, x, x') = -i \int e^{i\varepsilon\tau} \langle T \psi_\alpha(x) \psi_\beta^\dagger(x') \rangle d\tau \quad (2.70)$$

где  $\tau = t - t'$ . В импульсном представлении

$$G_{\alpha\beta}(\varepsilon, p) = \frac{\delta_{\alpha\beta}}{\varepsilon - \xi(p) + i\delta \operatorname{sign} \varepsilon}, \quad \xi(p) = \frac{p^2}{2m} - E_F. \quad (2.71)$$

Поэтому

$$\begin{aligned} G_{\alpha\beta}(\varepsilon, x, x') &= \int e^{ip(x-x')} G_{\alpha\beta}(\varepsilon, p) \frac{dp}{2\pi} \\ &= -2m\delta_{\alpha\beta} \int \frac{e^{ip(x-x')}}{(p-p_1)(p-p_2)} \frac{dp}{2\pi}. \end{aligned} \quad (2.72)$$

Полюса подинтегрального выражения

$$p_{1,2} = \pm\kappa, \quad (2.73)$$

где  $\kappa = \sqrt{2m(\varepsilon + E_F) + i\delta \operatorname{sign} \varepsilon}$ . Если  $\varepsilon > 0$ , то  $p_1$  лежит в верхней полуплоскости, а  $p_2$  — в нижней, а если  $\varepsilon < 0$ , то наоборот.

При  $x > x'$  замыкаем контур интегрирования сверху:

$$G_{\alpha\beta}(\varepsilon, x, x') = -2\pi i \delta_{\alpha\beta} \frac{2m}{2\pi} \frac{e^{i(x-x')p_+}}{2p_+} = -\delta_{\alpha\beta} \frac{im}{p_+} e^{ip_+(x-x')}, \quad (2.74)$$

где  $p_+ = \kappa \operatorname{sign} \varepsilon$  — тот из полюсов  $p_1, p_2$ , который находится в верхней полуплоскости. Повторять вычисление при  $x < x'$  не нужно, поскольку  $G_{\alpha\beta}(\varepsilon, x, x') = G_{\alpha\beta}(\varepsilon, x', x)$ . (Это следует из четности  $G_{\alpha\beta}(\varepsilon, p)$  по  $p$ .) Окончательно имеем

$$G_{\alpha\beta}(\varepsilon, x, x') = -\frac{im}{p_+} e^{ip_+|x-x'|} \delta_{\alpha\beta}. \quad (2.75)$$

**Решение 8 б)** В присутствии стенки функцию Грина  $G^{(1)}$  находим с помощью метода изображений:

$$G_{\alpha\beta}^{(1)}(\varepsilon, x, x') = G_{\alpha\beta}(\varepsilon, x, x') - G_{\alpha\beta}(\varepsilon, x, -x'), \quad (2.76)$$

где  $G$  дается (2.75). Обосновать такой ответ можно так же, как и при использовании метода изображений в электростатике. В самом деле,  $G_{\alpha\beta}^{(1)}$  удовлетворяет уравнению

$$(\varepsilon - \widehat{\mathcal{H}})G_{\alpha\beta}^{(1)}(\varepsilon, x, x') = \delta(x - x') \delta_{\alpha\beta} \quad (2.77)$$

и граничному условию  $G_{\alpha\beta}^{(1)}(\varepsilon, 0, x') = 0$ , а переход к изображениям обычным образом заменяет граничное условие условием антисимметрии.

**Решение 8 в)** Выразим плотность через функцию Грина, найденную в части б):

$$n(x) = -i \lim_{\tau \rightarrow -0} \text{Tr} \int G_{\alpha\beta}^{(1)}(\varepsilon, x, x) e^{-i\varepsilon\tau} \frac{d\varepsilon}{2\pi}, \quad (2.78)$$

где  $\text{Tr}$  означает взятие следа. Суммируя по спинам, получаем

$$n(x) = -2i \lim_{\tau \rightarrow -0} \int \frac{dp d\varepsilon}{(2\pi)^2} \frac{e^{-i\varepsilon\tau} (1 - e^{-2ipx})}{\varepsilon - \xi(p) + i\delta \text{sign} \xi(p)}. \quad (2.79)$$

При интегрировании по  $\varepsilon$ , поскольку  $\tau < 0$ , замыкаем контур в верхней полуплоскости. Полюс захватывается при  $\xi(p) < 0$ , т. е. при  $p^2/2m < E_F$ . Находим

$$n(x) = -2i \int_{p^2 < 2mE_F} \frac{2\pi i}{(2\pi)^2} dp (1 - e^{-2ipx}). \quad (2.80)$$

Интегрируем по  $p$ :

$$\begin{aligned} n(x) &= 2 \int_{-p_0}^{p_0} \frac{dp}{2\pi} (1 - e^{-2ipx}) = \frac{1}{\pi} \left( 2p_0 - \int_{-p_0}^{p_0} e^{-2ipx} \right) \\ &= \frac{1}{\pi} \left( 2p_0 - \frac{\sin 2p_0 x}{x} \right) = n_0 \left( 1 - \frac{\sin 2p_0 x}{2p_0 x} \right), \end{aligned} \quad (2.81)$$

где  $n_0$  — плотность вдали от стенки. (Коэффициент в (2.81) можно проверить, подсчитав плотность частиц квазиклассически:  $n_0 L = 2(2p_0 L)/2\pi\hbar$ .)

Плотность  $n(x)$  обращается в ноль на стенке, а вдали осциллирует с периодом

$$\lambda_0 = \pi \hbar / p_0 :$$

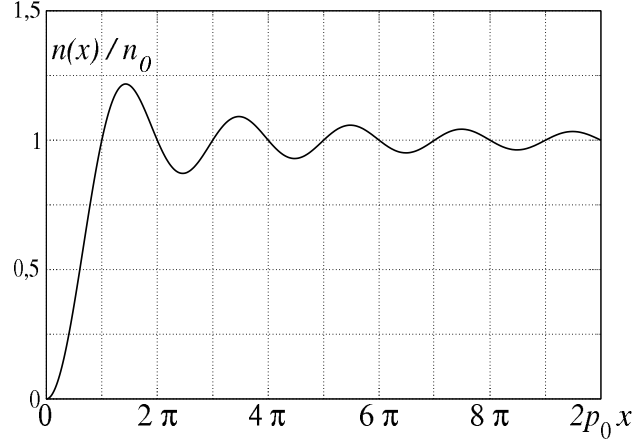


Рис. 2.1

Сравним среднее расстояние между электронами  $d = n_0^{-1} = \pi \hbar / 2p_0$  с периодом осцилляций  $\lambda_0$  — они отличаются в два раза. Это отличие связано со спином электронов. Фермиевские корреляции, приводящие к осцилляциям, имеются только для электронов с одинаковой проекцией спина. Плотность таких электронов есть  $n_0/2 = \lambda_0^{-1}$ , что как раз соответствует периоду осцилляций.

**Решение 9.** Рассмотрим вероятность  $p(t, \mathbf{x})$  блуждающей частицы оказаться в узле  $x$  на шаге  $t$ . Вероятности на шаге  $t$  и  $t+1$  связаны простым соотношением:

$$p(t+1, \mathbf{x}) = \frac{1}{2n} \sum_{|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|=1} p(t, \mathbf{x}') \quad (2.82)$$

(сумма берется по  $2n$  соседям узла  $\mathbf{x}$ ). Перейдем к фурье-образу  $p(t, \mathbf{q}) = \sum_{\mathbf{x}} e^{i\mathbf{q}\mathbf{x}} p(t, \mathbf{x})$ . Соотношение (2.82) дает

$$p(t+1, \mathbf{q}) = W(\mathbf{q}) p(t, \mathbf{q}), \quad W(\mathbf{q}) = \frac{1}{n} (\cos q_1 + \dots + \cos q_n). \quad (2.83)$$

Находим производящую функцию

$$G(z, \mathbf{q}) = \sum_{t \geq 0} z^t p(t, \mathbf{q}) = \frac{1}{1 - zW(\mathbf{q})}. \quad (2.84)$$

Вероятности  $p(t, \mathbf{x})$  выражаются через  $G(z, \mathbf{q})$  так:

$$p(t, \mathbf{x}) = \frac{-i}{(2\pi)^{n+1}} \oint \frac{dz}{z^{t+1}} \int \frac{d^n q}{1 - zW(\mathbf{q})} e^{i\mathbf{q}\mathbf{x}}, \quad (2.85)$$

где интеграл по  $d^n q$  берется по области  $-\pi < q_i < \pi$  ( $i = 1, \dots, n$ ), а интеграл по  $z$  — по любому контуру, охватывающему точку  $z = 0$ .

Теперь, чтобы найти вероятность блужданий без возврата в начало координат, немного модифицируем правила игры. Предположим, что частица блуждает случайно, как и раньше, но, как только она попадает в начало координат, ее «удаляют с поля». В этом случае связь между  $p(t+1, \mathbf{x})$  и  $p(t, \mathbf{x})$  будет такая:

$$p(t+1, \mathbf{x}) = \begin{cases} \frac{1}{2n} \sum_{|\mathbf{x}'-\mathbf{x}|=1} p(t, \mathbf{x}'), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases} \quad (2.86)$$

Переходя к фурье-образу  $p(t, \mathbf{q})$ , получаем

$$p(t+1, \mathbf{q}) = W(\mathbf{q}) p(t, \mathbf{q}) - \int \frac{d^n q}{(2\pi)^n} W(\mathbf{q}) p(t, \mathbf{q}) . \quad (2.87)$$

Производящая функция  $\tilde{G}(z, \mathbf{q}) = \sum_{t \geq 0} z^t p(t, \mathbf{q})$  получается умножением (2.86) на  $z^{t+1}$  и суммированием по  $t \geq 0$ . Находим

$$\tilde{G}(z, \mathbf{q}) (1 - zW(\mathbf{q})) = 1 - z \int W(\mathbf{q}) \tilde{G}(z, \mathbf{k}) \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \quad (2.88)$$

Это уравнение можно записать в таком виде:

$$\tilde{G}(z, \mathbf{q}) = G(z, \mathbf{q}) + G(z, \mathbf{q}) \int \Sigma(z, \mathbf{k}) \tilde{G}(z, \mathbf{k}) \frac{d^n k}{(2\pi)^n} , \quad (2.89)$$

где  $\Sigma(z, \mathbf{k}) = G^{-1}(z, \mathbf{k}) - 1$ . (Заметим, что по форме уравнение (2.89) напоминает уравнение Дайсона (4.9).)

Ищем решение (2.89) в виде

$$\tilde{G}(z, \mathbf{q}) = \lambda(z) G(z, \mathbf{q}) , \quad (2.90)$$

где  $\lambda(z)$  — некоторая функция  $z$ . Подставляя (2.90) в (2.89), находим

$$\lambda(z) = 1 - \lambda(z) \int (G(z, \mathbf{q}) - 1) \frac{d^n q}{(2\pi)^n} , \quad (2.91)$$

откуда

$$\lambda^{-1}(z) = \int G(z, \mathbf{q}) \frac{d^n q}{(2\pi)^n} . \quad (2.92)$$

Рассмотрим вероятность  $P_t$  того, что частица за  $t$  шагов ни разу не вернулась в начало координат. Производящая функция  $F(z) = \sum_{t \geq 0} z^t P_t$ , очевидно, есть

$$F(z) = \tilde{G}(z, \mathbf{q} = 0) = \frac{\lambda(z)}{1 - z} . \quad (2.93)$$

Находим вероятность

$$P_t = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=r} \frac{dz}{z^{t+1}} \frac{\lambda(z)}{1 - z} , \quad (2.94)$$

где  $\lambda(z)$  дается (2.92), а радиус контура интегрирования  $r < 1$ .

Для нахождения вероятности того, что частица никогда не вернется в начало координат, необходимо перейти в (2.94) к пределу  $t \rightarrow \infty$ . Это удобно сделать, рассмотрев

$$P_{a,t} = A_t(P_0 + aP_1 + \dots + a^{t-1}P_{t-1}) = \frac{A_t}{2\pi i} \oint_{|z|=r} \frac{(1 - a^t z^{-t})\lambda(z)}{(1-z)(z-a)} dz, \quad (2.95)$$

где  $a$  — вспомогательный параметр, принимающий значения  $0 < a < r$ , а  $A_t = (1 + a + \dots + a^{t-1})^{-1} = (1-a)/(1-a^t)$ . Переходя в (2.95) к пределу  $t \rightarrow \infty$ , получаем

$$P_a^* = \frac{1-a}{2\pi i} \oint_{|z|=r} \frac{\lambda(z) dz}{(1-z)(z-a)}, \quad (2.96)$$

Рассмотрим контурный интеграл (2.96). Функция  $\lambda(z)$  аналитична внутри единичного круга, поэтому внутри контура  $|z| = r$  подинтегральное выражение в (2.96) имеет один простой полюс  $z = a$ . Вычет в точке  $z = a$  есть  $\lambda(a)$ , и поэтому  $P_a^* = \lambda(a)$ . Искомая вероятность невозвращения, согласно (2.95), есть  $\lim_{a \rightarrow 1} P_a^*$ . Следовательно,

$$P = \lambda(a)_{a \rightarrow 1} = \left[ \int G(1, \mathbf{q}) \frac{d^n q}{(2\pi)^n} \right]^{-1}. \quad (2.97)$$

При  $n \leq 2$  интеграл в (2.97) расходится на малых  $q$ , поэтому вероятность невозвращения  $P = 0$ .

В другом пределе, при  $n \rightarrow \infty$ , величина суммы косинусов в  $W(\mathbf{q})$  порядка  $\sqrt{n}$ , согласно закону больших чисел. (Это справедливо не для всех  $\mathbf{q}$ , а только для «типичных», но для оценки интеграла в (2.97) этого достаточно.) Заменяя в  $G(1, \mathbf{q})$  величину  $1 - W(\mathbf{q})$  на 1, находим, что при больших  $n$  вероятность невозвращения  $P \rightarrow 1$ .

**Решение 10.** Для того, чтобы найти сопротивление сетки между двумя произвольными узлами, сначала рассмотрим более простую ситуацию. Допустим, что ток  $I$  втекает в узел  $\mathbf{x} = 0$  и растекается на бесконечность. Найдем распределение потенциала  $\phi(\mathbf{x})$  на узлах. Условие сохранения тока (закон Кирхгофа) гласит:

$$\sum_{|\mathbf{x}'-\mathbf{x}|=1} (\phi(\mathbf{x}) - \phi(\mathbf{x}'))/R = \begin{cases} 0, & \mathbf{x} \neq 0 \\ I, & \mathbf{x} = 0 \end{cases}, \quad (2.98)$$

где сумма, как и в задаче 9, берется по ближайшим соседям  $\mathbf{x}'$  узла  $\mathbf{x}$ . Обратим внимание, что выражение (2.98), по существу, определяет функцию Грина оператора Лапласа на решетке.

При переходе к фурье-образу уравнение (2.98) принимает вид:

$$\phi(\mathbf{q}) [2n - 2(\cos q_1 + \dots + \cos q_n)]/R = I, \quad (2.99)$$

или, что то же самое,

$$\phi(\mathbf{q}) = \frac{IR}{2n} G(1, \mathbf{q}). \quad (2.100)$$

То, что функция Грина уравнения Лапласа оказалась связана со случайными блужданиями, совершенно неудивительно, поскольку распределение вероятности для блужданий подчиняется уравнению диффузии, записываемому через  $n$ -мерный оператор Лапласа (в данном случае решеточный).

Теперь рассмотрим более сложное распределение токов и потенциалов, которое возникает, когда ток  $I$  втекает в узел  $0$ , и такой же ток вытекает через узел  $\mathbf{a}$ . Потенциал в этом случае можно выразить через  $\phi(\mathbf{x})$ , пользуясь линейностью закона Кирхгофа (т. е. принципом суперпозиции). Находим

$$\phi'(\mathbf{x}) = \phi(\mathbf{x}) - \phi(\mathbf{x} - \mathbf{a}) . \quad (2.101)$$

Для определения сопротивления между узлами  $0$  и  $a$  найдем разность потенциалов между этими узлами:

$$\Delta\phi = \phi'(0) - \phi'(\mathbf{a}) = 2\phi(0) - \phi(\mathbf{a}) - \phi(-\mathbf{a}) . \quad (2.102)$$

Искомое сопротивление есть  $\Delta\phi/I$ . С помощью обратного преобразования Фурье выражаем  $\phi(0)$  и  $\phi(\pm a)$  через фурье-образ (2.100), и получаем

$$R_{\mathbf{a}} = \frac{R}{n} \int (1 - e^{i\mathbf{q}\mathbf{a}}) G(1, \mathbf{q}) \frac{d^n q}{(2\pi)^n} , \quad (2.103)$$

где интеграл, как и в задаче 9, берется по зоне Бриллюэна  $-\pi < q_i \leq \pi$ ,  $i = 1, \dots, n$ .

Методом задачи 9 можно показать, что сопротивление между узлами решетки имеет простую вероятностную интерпретацию. А именно,  $R_{\mathbf{a}}$  есть  $\frac{1}{n}R$ , деленное на вероятность того, что при случайном блуждании, начинающемся в точке  $0$ , частица попадает в точку  $\mathbf{a}$  до того, как возвращается в точку  $0$ .

Рассмотрим сопротивление между двумя удаленными точками. В интеграле (2.103) при  $|a| \gg 1$  вклад быстро осциллирующей экспоненты  $e^{i\mathbf{q}\mathbf{a}}$  мал. Пренебрегая им, получаем такое же выражение, как для вероятности (2.97) в задаче 9, и находим соотношение между  $R_{a \rightarrow \infty}$  и  $P$ :

$$R_{a \rightarrow \infty} = \frac{R}{nP} , \quad (n > 2) . \quad (2.104)$$

Этот результат справедлив только при  $n > 2$ , поскольку при  $n \leq 2$  вероятность  $P$  обращается в ноль (интеграл в (2.97) расходится). Обратим внимание, что в этой задаче «критическая размерность»  $n_c = 2$  оказывается такой же, как в задаче 9 о случайных блужданиях. Это не случайно, поскольку, как уже отмечалось, и в том и в другом случае речь идет о функции Грина  $n$ -мерного уравнения Лапласа.

При  $n = 2$  интеграл (2.103) для  $R_{a \gg 1}$  определяется малыми  $q$ . Разлагая  $\cos q_i = 1 - 1/2q_i^2 + \dots$ , находим с логарифмической точностью

$$R_{a \gg 1} = \frac{R}{2\pi} \ln |a| , \quad (n = 2) . \quad (2.105)$$

К такому же ответу приводит рассмотрение в приближении непрерывной среды, справедливым при  $|a| \gg 1$ , в котором (2.105) есть просто решение двумерного уравнения Лапласа.



Для двумерной сетки интересно найти сопротивления между близкими узлами. Это нетрудно сделать, вычисляя интеграл (2.103). Так, например,

$$R_{mm} = \frac{R}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 - e^{im(\theta_1 + \theta_2)}}{1 - \frac{1}{2}(\cos \theta_1 + \cos \theta_2)} \frac{d\theta_1 d\theta_2}{(2\pi)^2} = \frac{R}{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{1 - e^{2im\theta_+}}{\sin \theta_+} d\theta_+ \quad (2.106)$$

$$= \frac{R}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{u^{2m} - 1}{u^2 - 1} du = \frac{2}{\pi} R \left( 1 + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2m-1} \right). \quad (2.107)$$

При вычислении интеграла (2.106) была сделана замена переменных  $\theta_{\pm} = \frac{1}{2}(\theta_1 \pm \theta_2)$  и использован известный интеграл  $\int_0^{2\pi} (a + b \cos w)^{-1} dw = 2\pi(a^2 - b^2)^{-1/2}$ .

Приведем также ответы и для некоторых других узлов<sup>3</sup>:

$$\begin{aligned} R_{10} &= \frac{1}{2} R, & R_{11} &= \frac{2}{\pi} R, & R_{20} &= \left( 2 - \frac{4}{\pi} \right) R, \\ R_{21} &= \left( \frac{4}{\pi} - \frac{1}{2} \right) R, & R_{30} &= \left( \frac{17}{2} - \frac{24}{\pi} \right) R. \end{aligned} \quad (2.108)$$

Обратим внимание на то, что все приведенные в (2.108) значения сопротивления равны  $a + b/\pi$ , где  $a$  и  $b$  — рациональные числа. Нетрудно показать, это верно и для других узлов двумерной решетки.

---

<sup>3</sup>Ответ для  $R_{10}$  может быть также получен элементарным способом, с помощью принципа суперпозиции.



## Глава 3.

# Квантовая механика одной частицы

### 3.1. Теория возмущений и функция Грина

В этой главе мы рассмотрим задачи одночастичной нерелятивистской квантовой механики, решаемые методом теории возмущений. Наша цель — продемонстрировать связь квантовомеханической теории возмущений с функциями Грина и диаграммной техникой.

Динамика нерелятивистской частицы во внешнем поле описывается с помощью волновой функции, удовлетворяющей уравнению Шредингера:

$$i\hbar \frac{\partial \psi(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi(\mathbf{r}, t) + V(\mathbf{r}) \psi(\mathbf{r}, t). \quad (3.1)$$

В квантовой механике рассматривают два основных типа задач: отыскание спектра энергий системы и вычисление вероятностей переходов, вызванных рассеянием или зависящим от времени внешним полем.

Решение первой задачи требует отыскания собственных значений энергии для стационарного уравнения Шредингера:

$$\varepsilon \psi(\mathbf{r}) = \left( -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\mathbf{r}) \right) \psi(\mathbf{r}). \quad (3.2)$$

Дискретный спектр соответствует связанным состояниям, а непрерывный — свободным. В задачах второго типа (для определенности будем говорить о рассеянии) требуется найти решение уравнения (3.2), описывающее падающую и рассеянную волны, и определить амплитуду рассеяния в данное конечное состояние.

Напомним, что процессу рассеяния плоской волны  $e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}$  на потенциале  $V(\mathbf{r})$  отвечает волновая функция

$$\psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} + \chi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}), \quad (3.3)$$

причем  $\chi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r})$  имеет асимптотически вид расходящейся сферической волны:

$$\chi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = f(\mathbf{k}, k\mathbf{n}) \frac{e^{ik|\mathbf{r}|}}{|\mathbf{r}|}, \quad |\mathbf{r}| \rightarrow \infty, \quad (3.4)$$

где  $\mathbf{n} = \mathbf{r}/|\mathbf{r}|$ . Функция  $f(\mathbf{k}, \mathbf{k}')$  называется *амплитудой рассеяния*.

Существует несколько методов решения задачи о рассеянии (и других подобных ей задач). Мы воспользуемся методом теории возмущений, поскольку в нем связь с диаграммной техникой проявляется лучше всего. Запишем волновую функцию  $\psi(\mathbf{r})$ , являющуюся решением (3.2), в виде ряда по степеням потенциала  $V(\mathbf{r})$ :

$$\psi(\mathbf{r}) = \psi^{(0)}(\mathbf{r}) + \psi^{(1)}(\mathbf{r}) + \psi^{(2)}(\mathbf{r}) + \dots \quad (3.5)$$

Нетрудно убедиться, что члены ряда (3.5) удовлетворяют уравнениям

$$\begin{aligned} \left( \varepsilon + \frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \right) \psi^{(0)}(\mathbf{r}) &= 0 ; \\ \left( \varepsilon + \frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \right) \psi^{(1)}(\mathbf{r}) &= V(\mathbf{r}) \psi^{(0)}(\mathbf{r}) ; \\ \left( \varepsilon + \frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \right) \psi^{(2)}(\mathbf{r}) &= V(\mathbf{r}) \psi^{(1)}(\mathbf{r}) ; \\ &\dots \end{aligned} \quad (3.6)$$

Решение свободного уравнения Шредингера обычно берется в виде плоской волны,  $\psi^{(0)}(\mathbf{r}) = \exp(i\mathbf{k}\mathbf{r})$ . Если потенциал  $V(\mathbf{r})$  слабый, достаточно ограничиться несколькими первыми членами ряда (3.5). Скажем, амплитуда рассеяния в борновском приближении определяется функцией  $\psi^{(1)}(\mathbf{r})$ .

С формальной точки зрения, ряд (3.5) можно рассматривать даже в случае сильного потенциала, если выполнить аналитическое продолжение по  $\varepsilon$  из области больших энергий  $|\varepsilon| \gg |V(\mathbf{r})|$ , в которой ряд (3.5) сходится. Вообще говоря, таким способом можно найти амплитуду рассеяния при произвольной энергии, даже если потенциал не мал. Отметим, что обычно оказывается более удобным не выписывать члены ряда по отдельности, а перейти от (3.5) к интегральному уравнению на амплитуду рассеяния (см. задачу 11, а также [2], гл. XVII, §130).

Чтобы установить связь с диаграммной техникой, рассмотрим функцию Грина уравнения Шредингера:

$$\left( i\hbar \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 - V(\mathbf{r}) \right) G(\mathbf{r}, t, \mathbf{r}', t') = \delta(t - t') \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') . \quad (3.7)$$

При  $V(\mathbf{r}) = 0$  движение свободное:

$$G_0(t - t', \mathbf{r} - \mathbf{r}') = \int \int G_0(\varepsilon, \mathbf{p}) e^{i\mathbf{p}(\mathbf{r}-\mathbf{r}') - i\varepsilon(t-t')} \frac{d\varepsilon}{2\pi} \frac{d^3p}{(2\pi)^3} , \quad (3.8)$$

$$G_0(\varepsilon, \mathbf{p}) = \frac{1}{\varepsilon - \mathbf{p}^2/2m + i\delta} . \quad (3.9)$$

Знак мнимой части  $+i\delta$  выбран так, чтобы функция  $G_0(\varepsilon, \mathbf{p})$  была регулярна в верхней полуплоскости комплексной  $\varepsilon$ . Это условие обеспечивает соблюдение причинности:  $G_0(t - t') = 0$  при  $t < t'$ .

В общем случае функцию Грина можно записать как оператор:

$$\hat{G} = \left( i \frac{\partial}{\partial t} - \hat{\mathbf{p}}^2/2m - V(\mathbf{r}) \right)^{-1} = (\hat{G}_0^{-1} - \hat{V})^{-1} = (1 - \hat{V}\hat{G}_0)^{-1}\hat{G}_0. \quad (3.10)$$

При малом  $V$  выражение (3.10) можно разложить в ряд:

$$\hat{G} = \hat{G}_0 + \hat{G}_0\hat{V}\hat{G}_0 + \hat{G}_0\hat{V}\hat{G}_0\hat{V}\hat{G}_0 + \dots, \quad (3.11)$$

причем произведения  $\hat{G}_0$  и  $\hat{V}$  следует понимать в операторном смысле, то есть, как свертку.

Для нас существенно, что между рядом (3.11) для функции Грина и рядом теории возмущений (3.5) имеется почленное взаимнооднозначное соответствие. Пользуясь этим соответствием, можно связать амплитуду рассеяния с функцией Грина (3.7). При этом оказывается, что интегральное уравнение Дайсона для собственно-энергетической части гриновской функции, с помощью которого обычно суммируют ряды типа (3.11), в точности соответствует интегральному уравнению для амплитуды рассеяния (см. задачу 11, а также гл. 4).

Функцию Грина можно использовать также и для отыскания спектра квантово-механической системы. Известно, что амплитуда рассеяния, как функция энергии  $\varepsilon$ , имеет полюса во всех точках спектра ([2], гл. XVII, §§128, 129). Таким же свойством обладает и функция Грина (3.7), непосредственно связанная с амплитудой рассеяния. Поэтому с помощью функции Грина, могут быть решены одновременно обе задачи — и о связанных состояниях, и о рассеянии (см. задачи 12 и 13).

*Литература:* [1], гл. 1, 2; [2], гл. VI, IX, XVII

## 3.2. Задачи 11 ÷ 15

**Задача 11.** (*Диаграммный ряд и интегральное уравнение для амплитуды рассеяния*)  
Покажите, что рассеяние частицы в статическом внешнем поле  $V(\mathbf{r})$  описывается суммой графиков:

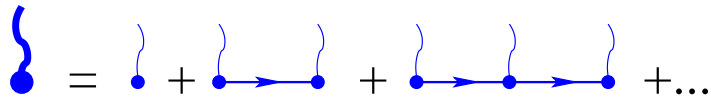


Рис. 3.1

Какие выражения надо сопоставлять графическим элементам? (Используйте импульсное представление.)

Свяжите диаграммы на рис. 3.1 с амплитудой рассеяния  $f(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2)$ , определенной в (3.3)–(3.4). Получите соотношение

$$f(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) = -\frac{m}{2\pi\hbar^2} F(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2), \quad (3.12)$$

где  $F(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2)$  удовлетворяет уравнению

$$F(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) = V(\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_1) + \int \frac{V(\mathbf{k}_2 - \mathbf{q}) F(\mathbf{k}_1, \mathbf{q})}{\varepsilon - \hbar^2 \mathbf{q}^2 / 2m + i\delta} \frac{d^3 q}{(2\pi)^3}, \quad (3.13)$$

$$\varepsilon = \hbar^2 \mathbf{k}_1^2 / 2m = \hbar^2 \mathbf{k}_2^2 / 2m.$$

Определенную так амплитуду  $F(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2)$  называют *амплитудой рассеяния в энергетической нормировке*. Пользоваться ею часто бывает удобнее, чем обычной амплитудой рассеяния. Именно такая амплитуда рассеяния естественно возникает в диаграммной технике (см. другие задачи этой главы, а также глав 9, 10 и 11). По сравнению с обычной квантовомеханической амплитудой рассеяния  $f(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2)$ , она менее произвольна, поскольку никак не зависит от выбора нормировки плоских волн.

**Задача 12.** (*Слабо связанное состояние в мелкой яме*) Рассмотрим мелкую яму в пространстве произвольной размерности  $D$ , и выясним, в каких случаях в ней может образоваться связанное состояние.

Мелкой называется яма, глубина которой  $U_0 \ll \hbar^2 / 2ma^2$ , где  $a$  — радиус ямы. Размер связанного состояния в такой яме много больше ее радиуса, а энергия связи — много меньше глубины ямы  $U_0$ .

Решите эту задачу, используя связь амплитуды рассеяния (3.13) со связанными состояниями: энергия каждого связанного состояния соответствует полюсу амплитуды  $F(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2)$  как функции энергии  $\varepsilon$ . Покажите, что связанное состояние в мелкой яме есть только при  $D \leq 2$ .

Воспользуйтесь тем, что в пространстве размерности  $D$  амплитуда  $F(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2)$  удовлетворяет уравнению, получающемуся из (3.13) заменой  $d^3 q / (2\pi)^3 \rightarrow d^D q / (2\pi)^D$ . В уравнении (3.13) замените потенциал ямы на  $\delta$ -функцию — при этом все интегрирования по импульсам станут независимыми. Сравните результаты, получающиеся при  $D = 1, 2$ , с известными квантово-механическими выражениями (см. задачи к §45 [2]).

**Задача 13.** (*Двумерное рассеяние: логарифм и ренормгруппа*) Рассмотрим подробнее рассеяние в размерности два на короткодействующем потенциале. Это может быть яма, причем не обязательно мелкая, или потенциал положительного знака. Определим зависимость амплитуды рассеяния  $F$  от энергии в низкоэнергетической области.

Нас интересует область энергий много меньших  $\varepsilon_a = \hbar^2 / 2ma^2$ , где  $a$  — радиус ямы. Ясно, что зависимость от энергии  $\varepsilon$  возникает, как и в задаче 12, от интегрирования по  $|q| \ll a^{-1}$ . Для правильного описания низкоэнергетической физики, как и при отыскании связанного состояния (задача 12), кажется достаточным заменить потенциал на  $\delta$ -функцию. При этом интегралы по  $q$  начинают логарифмически расходиться при  $q \rightarrow \infty$ , и их придется «обрезать руками» при  $q \sim a^{-1}$ . Такой «ремесленный» подход, хотя и приводит к качественно правильному ответу, является слишком грубым, т. к. полностью игнорирует, например, глубокие уровни в потенциале, если таковые есть.

Более рафинированный метод заключается в следующем. Вычислим производную  $\partial F(\varepsilon) / \partial \varepsilon$ . Дифференцируя диаграммы рис. 3.1 по  $\varepsilon$  и собирая члены, получим уравнение<sup>1</sup>

$$\frac{\partial}{\partial \varepsilon} F(\varepsilon) = \frac{m}{2\pi \hbar^2 \varepsilon} F^2(\varepsilon), \quad (3.14)$$

справедливое при  $|\varepsilon| \ll \varepsilon_a$ . Решив это уравнение, можно связать обрезку логарифма и

амплитуду  $F$  при большой энергии.

**Задача 14.** (*Поляризуемость связанного состояния*) Заряженная частица находится в мелкой двумерной яме в основном состоянии. Определим поляризуемость системы в слабом внешнем поле <sup>2</sup>.

а) Используя результат задачи 13, запишите функцию Грина в импульсном представлении. Сформулируйте правило обхода полюсов, выражающее, что связанное состояние занято, а состояния непрерывного спектра свободны.

б) Выразите дипольный момент системы через точную функцию Грина в импульсном представлении (см. [1], стр.75 и далее).

в) Рассмотрите поправку к функции Грина, линейную по электрическому полю. Нарисуйте графики, определяющие поляризуемость. Какие из них обращаются в ноль при интегрировании по энергии или импульсам?

**Задача 15.** (*Теорема унитарности для амплитуды рассеяния*<sup>3</sup>) Амплитуда рассеяния  $f(\mathbf{k}, \mathbf{k}')$  частицы во внешнем поле удовлетворяет теореме унитарности:

$$f(\mathbf{k}, \mathbf{k}') - f^*(\mathbf{k}', \mathbf{k}) = \frac{ik}{2\pi} \int f(\mathbf{k}, \mathbf{k}'') f^*(\mathbf{k}', \mathbf{k}'') d\sigma'' , \quad (3.15)$$

(см. [2], §125). Мы видели, что  $F(\mathbf{k}, \mathbf{k}') = -2\pi\hbar^2/m f(\mathbf{k}, \mathbf{k}')$  дается простой суммой графиков (задача 11). Поэтому полезно уметь получать (3.15) на графическом языке. Как это сделать? Рассмотрите диаграммы вида:

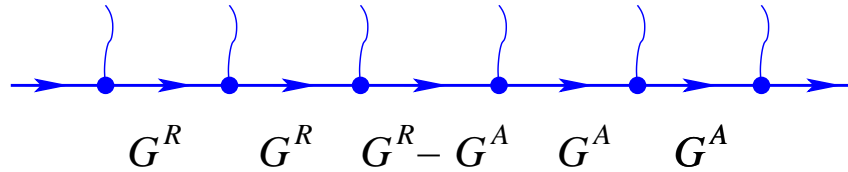


Рис. 3.2

Здесь

$$G^{R(A)}(\varepsilon, \mathbf{p}) = \frac{1}{\varepsilon - \mathbf{p}^2/2m \pm i\delta} \quad (3.16)$$

— запаздывающая и опережающая функции Грина. Получите левую и правую части (3.15), просуммировав эти графики двумя разными способами.

Аналогично получите соотношение унитарности в двумерном случае. Какова связь двумерной амплитуды рассеяния  $f(\mathbf{k}, \mathbf{k}')$  с  $F(\mathbf{k}, \mathbf{k}')$ ? Убедитесь, что амплитуда  $F$ , найденная в задаче 13, обладает свойством унитарности.

Эта задача весьма важна для дальнейшего, поскольку в ней на простейшем примере показан прием, обобщающийся на более сложные случаи. Для любого процесса рассеяния, распада, перехода и т. д. имеется связь между его вероятностью и мнимой частью амплитуды. Эта связь описывается *теоремой унитарности*. В графическом представлении, мнимая часть какой-либо амплитуды может быть найдена путем разбиения соответствующих диаграмм каким-либо сечением, и заменой функций Грина

<sup>1</sup>Уравнение такого типа называется в теории поля и статистической физике уравнением ренорм-группы.

<sup>2</sup>Задачи 11 – 13 можно решить и без диаграмм. А задачу 14? Попробуйте...

по одну сторону сечения на комплексно сопряженные функции. При этом следует просуммировать по всем возможным способам выбора сечения диаграммы. Состояния в сечении имеют смысл конечных состояний распада, рассеяния, и т. п.

### 3.3. Решения

**Решение 11.** Мы будем обращаться с функцией Грина несколько более вольно, чем это принято в учебниках по квантовой механике. Перед тем, как читать решение, полезно вспомнить стандартный вывод интегрального уравнения для амплитуды рассеяния, использующий уравнение Шредингера в импульсном представлении (см. [2], §130).

Чтобы найти состояние рассеяния (3.3)–(3.4), запишем уравнение Шредингера для движения в потенциале  $V(\mathbf{r})$  через функцию Грина:

$$\hat{G}^{-1}\psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = 0 \quad \text{или} \quad (\hat{G}_0^{-1} - \hat{V})\psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = 0. \quad (3.17)$$

Будем искать решение в виде (3.3). На массовой поверхности, при  $\varepsilon = k^2/2m$ , получаем уравнение для  $\chi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r})$ :

$$(\hat{G}_0^{-1} - \hat{V})\chi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = V|\mathbf{k}\rangle. \quad (3.18)$$

Записываем решение через функцию Грина,  $\chi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = \langle \mathbf{r} | \hat{G} \hat{V} | \mathbf{k} \rangle$ , и разлагаем  $\hat{G}$  в ряд по  $\hat{V}$ :

$$\chi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = \langle \mathbf{r} | \hat{G}_0 \hat{V} + \hat{G}_0 \hat{V} \hat{G}_0 \hat{V} + \dots | \mathbf{k} \rangle. \quad (3.19)$$

Удобно переписать это выражение, введя оператор

$$\hat{F} = \hat{V} + \hat{V} \hat{G}_0 \hat{V} + \hat{V} \hat{G}_0 \hat{V} \hat{G}_0 \hat{V} + \dots \quad (3.20)$$

Имеем:

$$\chi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = \langle \mathbf{r} | \hat{G}_0 \hat{F} | \mathbf{k} \rangle. \quad (3.21)$$

Смысл этой записи в том, что  $\hat{F}$  описывает многократное рассеяние падающей волны на потенциале  $V(\mathbf{r})$ , а  $\hat{G}_0$  — движение после последнего рассеяния.

В координатном представлении  $G_0$  имеет вид<sup>4</sup>:

$$G_0(\varepsilon, \mathbf{r}, \mathbf{r}') = \int \frac{e^{i\mathbf{p}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}}{\varepsilon - \mathbf{p}^2/2m + i\delta} \frac{d^3p}{(2\pi)^3} = -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \frac{e^{i\kappa|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}, \quad (3.22)$$

где  $\hbar\kappa = \sqrt{2m\varepsilon}$ . На массовой поверхности  $\kappa = k$ .

Слагаемое  $i\delta$  в знаменателе (3.22) введено для того, чтобы выбрать запаздывающее решение. С тем же успехом можно было бы выбрать знак  $-i\delta$ , что привело бы к ряду для  $f^*(\mathbf{k}', \mathbf{k})$ . Комплексно сопряженная амплитуда соответствует опережающему решению задачи о рассеянии.



Нас интересует асимптотика  $\chi(\mathbf{r})$ , поэтому запишем  $\mathbf{r} = R\mathbf{n}$  и будем считать  $R$  большим. Тогда  $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = R - |\mathbf{r}'| \cos \theta + O(1/R)$ , где  $\theta$  — угол между  $\mathbf{n}$  и  $\mathbf{r}'$ :

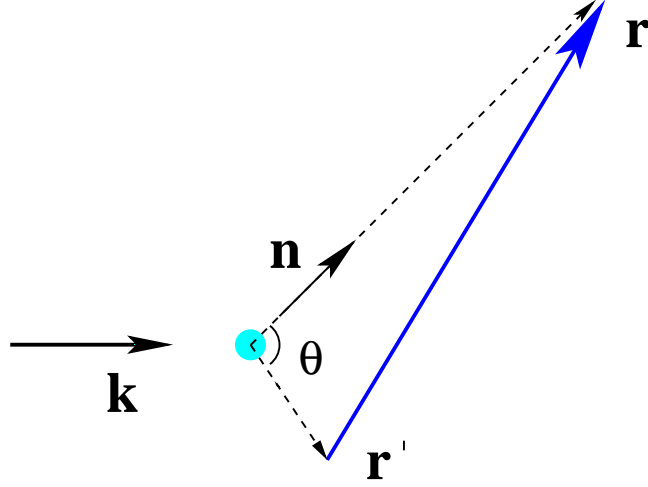


Рис. 3.3

Подставляем  $G_0$  в виде (3.22) в выражение (3.21) и разлагаем  $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ :

$$\chi(\mathbf{r}) = -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \frac{e^{i\kappa R}}{R} \int e^{-i\kappa|\mathbf{r}'| \cos \theta} \langle \mathbf{r}' | F | \mathbf{k} \rangle d^3 r' . \quad (3.23)$$

Сравнивая этот ответ с определением амплитуды рассеяния, получаем требуемое соотношение:

$$f(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) = -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \langle \mathbf{k}_2 | \hat{F} | \mathbf{k}_1 \rangle , \quad (3.24)$$

где  $\mathbf{k}_2 = |k_1| \mathbf{n}$ .

Перейдем к выводу интегрального уравнения. Ряд для  $\hat{F}$  может быть представлен графически, как показано на рис. 3.1. Запишем сумму

$$F = \hat{V} + \hat{V} \hat{G}_0 \hat{V} + \hat{V} \hat{G}_0 \hat{V} \hat{G}_0 \hat{V} + \dots \quad (3.25)$$

в импульсном представлении:  $F(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) = F^{(1)}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) + F^{(2)}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) + \dots$ ,

$$\begin{aligned} F^{(1)}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) &= V(\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_1) , \\ F^{(2)}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) &= \int \frac{V(\mathbf{k}_2 - \mathbf{q}) V(\mathbf{q} - \mathbf{k}_1) (d^3 q)}{\varepsilon - \frac{\mathbf{q}^2}{2m} + i\delta} , \\ &\dots \\ F^{(n)}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) &= \int \dots \int \frac{V(\mathbf{k}_2 - \mathbf{q}_{n-1}) \dots V(\mathbf{q}_1 - \mathbf{k}_1) (d^3 q_{n-1}) \dots (d^3 q_1)}{\left( \varepsilon - \frac{\mathbf{q}_{n-1}^2}{2m} + i\delta \right) \dots \left( \varepsilon - \frac{\mathbf{q}_1^2}{2m} + i\delta \right)} , \\ &\dots \end{aligned} \quad (3.26)$$

где  $(d^3 q_i) = d^3 q_i / (2\pi)^3$ ,  $\varepsilon = \hbar^2 \mathbf{k}_1^2 / 2m$ .

Связь этих выражений с рядом на рис. 3.1 очевидна: волнистым линиям соответствуют матричные элементы потенциала, прямым линиям — функции Грина. По всем внутренним импульсам надо проинтегрировать, а входящий и выходящий импульсы взять на массовой поверхности.

Получаем интегральное уравнение для  $\hat{F}$ :

$$\begin{aligned}\hat{F} &= \hat{V} + \hat{V}\hat{G}_0\hat{V} + \hat{V}\hat{G}_0\hat{V}\hat{G}_0\hat{V} + \dots = \\ &= \hat{V} + \hat{V}\hat{G}_0(\hat{V} + \hat{V}\hat{G}_0\hat{V} + \dots) = \\ &= \hat{V} + \hat{V}\hat{G}_0\hat{F}\end{aligned}\quad (3.27)$$

Графически это можно изобразить так:

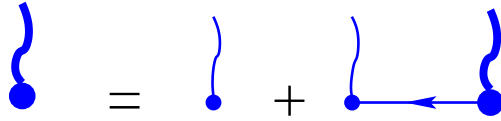


Рис. 3.4

В импульсном представлении интегральное уравнение принимает вид

$$F(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) = V(\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_1) + \frac{2m}{\hbar^2} \int \frac{V(\mathbf{k}_2 - \mathbf{q})F(\mathbf{k}_1, \mathbf{q})}{k_1^2 - q^2 + i\delta} \frac{d^3q}{(2\pi)^3}. \quad (3.28)$$

Решая это уравнение последовательными приближениями, вновь получаем ряд для  $\hat{F}$ .

**Решение 12.** Полюса функции Грина  $\hat{G}(\varepsilon)$  дают спектр системы. При этом, поскольку  $\hat{G}$  и  $\hat{F}$  связаны соотношением  $\hat{G} = \hat{G}_0 + \hat{G}_0\hat{F}\hat{G}_0$ , каждому связанному состоянию отвечает полюс  $\hat{F}(\varepsilon)$ .

Начнем со случая  $D = 1$ . Рассмотрим одномерную яму глубины  $U_0$  и ширины  $a$ . Заменяя потенциал на  $\delta$ -функцию  $V(x) = -U_0a\delta(x)$ , получаем фурье-компоненту  $V(q) = -U_0a = \text{const}$ . При этом уравнение для  $F(k, k')$  принимает вид:

$$F(k, k') = -U_0a + U_0a \int \frac{F(k, q)}{\varepsilon - q^2/2m + i\delta} \frac{dq}{2\pi}. \quad (3.29)$$

Из (3.29) видно, что  $F(k, k')$  не зависит от  $k'$ . Поэтому

$$F(k) = -U_0a - \frac{U_0a}{2\pi} F(k) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dq}{q^2 - k^2 - i\delta}, \quad (3.30)$$

что дает  $F^{-1} + U_0a = im/k = i\sqrt{m/2\varepsilon}$ , где  $\varepsilon = k^2/2m$ . Получаем:

$$F(\varepsilon) = \frac{-U_0a\sqrt{2(\varepsilon + i\delta)/m}}{\sqrt{2(\varepsilon + i\delta)/m} - iU_0a}. \quad (3.31)$$

Амплитуда рассеяния  $F(\varepsilon)$  имеет полюс при  $\varepsilon_0 = -mU_0^2a^2/2\hbar^2$ , что совпадает с известным ответом для одномерной  $\delta$ -ямы.

Пусть теперь  $D = 2$ . Снова считаем фурье-компоненту потенциала независимой от  $k$ :  $V(k) = -U_0 a^2$ . Уравнение для  $F$  имеет вид:

$$F(\varepsilon) = -U_0 a^2 + U_0 a^2 \frac{2m}{\hbar^2} \int F(\varepsilon) \frac{2\pi q dq}{q^2 - k^2 - i\delta} \frac{1}{(2\pi)^2}, \quad (3.32)$$

где  $F$  снова есть функция только  $\varepsilon$ . Интеграл

$$\int_0^\infty \frac{dq^2}{q^2 - k^2 - i\delta} \quad (3.33)$$

логарифмически расходится на верхнем пределе. Но это не страшно: при  $q \geq a^{-1}$  фурье-компонента  $V(k)$  начинает быстро осциллировать, и интеграл с  $V(k)$  сходится. Следовательно, можно пользоваться выражением (3.33), обрезав его «вручную» при  $q \simeq a^{-1}$ :

$$\int_0^{a^{-2}} \frac{dq^2}{q^2 - k^2 - i\delta} = \pi i + \ln \frac{1}{a^2(k^2 + i\delta)}. \quad (3.34)$$

Итак,

$$\begin{aligned} F(\varepsilon) &\simeq \frac{-U_0 a^2}{1 + (2ma^2 U_0 / 4\pi \hbar^2) \ln(-k^2 a^2)} \\ &= \frac{-U_0 a^2}{1 + (mU_0 a^2 / 2\pi \hbar^2) \ln(-\varepsilon m a^2 / \hbar^2)}. \end{aligned} \quad (3.35)$$

Дискретный уровень

$$\varepsilon_0 \simeq -\frac{\hbar^2}{ma^2} \exp \left[ -\frac{2\pi \hbar^2}{ma^2 U_0} \right]. \quad (3.36)$$

Обратим внимание, что из-за неизвестного множителя порядка единицы, появившегося при обрезании в аргументе логарифма, уровень  $\varepsilon_0$  дается выражением (3.36) только по порядку величины.

В размерности  $D > 2$  интеграл

$$\int_0^{a^{-1}} \frac{q^{D-1} dq}{q^2 - k^2 - i\delta} \quad (3.37)$$

остается конечным при  $k \rightarrow 0$ . Поэтому для слабого потенциала  $F(\varepsilon)$  не имеет полюсов при  $|k| \ll a^{-1}$ , что означает отсутствие связанного состояния.

**Решение 13.** Производную  $\partial F / \partial \varepsilon$  можно связать с  $F$  в общем виде, так, что получится выражение справедливое при произвольном потенциале. Для этого надо продифференцировать ряд на рис. 3.1 почленно:

$$\frac{dF}{d\varepsilon} = \begin{array}{c} \left\{ \begin{array}{c} \text{---} \times \text{---} \\ \text{---} \times \text{---} \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{c} \text{---} \times \text{---} \\ \text{---} \times \text{---} \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{c} \text{---} \times \text{---} \\ \text{---} \times \text{---} \end{array} \right\} + \dots \end{array}$$

Рис. 3.5

Линия с крестиком обозначает:

$$\frac{\partial}{\partial \varepsilon} G_0 = -\frac{1}{(\varepsilon - p^2/2m + i\delta)^2} = -G_0^2. \quad (3.38)$$

Группируя члены графического ряда и пользуясь графическим представлением амплитуды  $F$  (см. рис. 3.1, 3.4), находим

$$\frac{dF}{dE} = \text{рис. 3.6}$$

Рис. 3.6

Отсюда:

$$\frac{\partial}{\partial \varepsilon} F_\varepsilon(k_1, k_2) = -\int \frac{F_\varepsilon(k_1, q)F_\varepsilon(q, k_2)}{(\varepsilon - q^2/2m + i\delta)^2} \frac{d^2q}{(2\pi)^2}. \quad (3.39)$$

Еще раз обратим внимание на то, что (3.39) — точный результат, а не приближенный.

Чтобы применить соотношение (3.39) в низкоэнергетической области, заметим, что зависимость  $F_\varepsilon(k_1, k_2)$  от  $k_1$  и  $k_2$  имеет характерный масштаб  $k_{1,2} \simeq a^{-1}$ . Поэтому при малых энергиях  $|\varepsilon| \ll \varepsilon_a = \hbar^2/ma^2$  интеграл по  $q$  в (3.39) сходится до того, как зависимость  $F$  от  $q$  становится существенной. Вычисляя интеграл, получаем

$$\frac{\partial}{\partial \varepsilon} F = \frac{m}{2\pi\hbar^2\varepsilon} F^2. \quad (3.40)$$

Решение этого уравнения есть:

$$F(\varepsilon) = \frac{2\pi\hbar^2}{m \ln((\varepsilon + i\delta)/\varepsilon_0)}, \quad (3.41)$$

где  $\varepsilon_0$  — неизвестная константа. Точка ветвления логарифма при  $\varepsilon = 0$  смещена в нижнюю полуплоскость, поскольку вместо  $\varepsilon$  стоит  $\varepsilon + i\delta$ . Константа  $\varepsilon_0$  вещественна и отрицательна, поскольку при  $\varepsilon < 0$  амплитуда  $F$  вещественна. (Чтобы в этом убедиться, можно записать члены ряда для  $F$ , показанные на рис. 3.1, в координатном представлении, где функция Грина имеет вид  $G_\varepsilon(r) = -(m/2\pi r) \exp(-\kappa r)$ ,  $\kappa^2 = 2m\varepsilon$ . Это выражение вещественно при  $\varepsilon < 0$ .)

Если  $\varepsilon_0$  находится в низкоэнергетической области,  $|\varepsilon_0| \leq \varepsilon_a$ , то полюс при  $\varepsilon = \varepsilon_0$  имеет реальный смысл, и ему соответствует дискретный уровень. В противном случае полюс находится вне области энергий, где применимо сделанное приближение, и поэтому смысла не имеет. Такая ситуация возникает, например, для рассеяния на слабом отталкивающем потенциале, когда  $\varepsilon_0$  дается выражением (3.36) с отрицательным  $U_0$ .

**Решение 14 а)** Согласно задаче 11, функция Грина есть  $G = G_0 + G_0FG_0$ , где амплитуда  $F$  найдена в задаче 13. В импульсном представлении

$$G(\varepsilon, \mathbf{p}, \mathbf{p}') = (2\pi)^2 \frac{\delta^{(2)}(\mathbf{p} - \mathbf{p}')}{\varepsilon - p^2/2m + i\delta}$$

$$+ \frac{F(\varepsilon)}{(\varepsilon - p^2/2m + i\delta)(\varepsilon - p'^2/2m + i\delta)}. \quad (3.42)$$

Положительный знак мнимой части  $+i\delta$  означает, что состояния непрерывного спектра пусты. При интегрировании по  $\varepsilon$  эти полюса надо обходить сверху. Осталось выбрать обход полюса в  $F(\varepsilon)$  при  $\varepsilon = \varepsilon_0$ . Это состояние заполнено, поэтому сдвигаем полюс вверх:  $\varepsilon_0 \rightarrow \varepsilon_0 + i\delta$ . Получаем  $F(\varepsilon) = 2\pi\hbar^2/(m \ln(\varepsilon/\varepsilon_0))$ , причем обход полюса  $\varepsilon = \varepsilon_0$  и точки ветвления  $\varepsilon = 0$  такой:

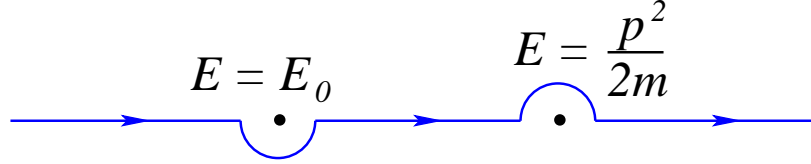


Рис. 3.7

**Решение 14 б)** Выражаем дипольный момент через функцию Грина:

$$\begin{aligned} \mathbf{d} &= e \int \mathbf{r} n(\mathbf{r}) d^2r = -ie \int \lim_{t \rightarrow -0} \mathbf{r} G(t, \mathbf{r}, \mathbf{r}) d^2r = \\ &= e \iint \frac{d^2p_1}{(2\pi)^2} \frac{d^2p_2}{(2\pi)^2} \left( \int \mathbf{r} e^{i(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2)\mathbf{r}} d^2r \right) \times \\ &\quad \times \lim_{t \rightarrow -0} \int \frac{d\omega}{2\pi i} e^{-i\omega t} G(\omega, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) = \\ &= -ie \iint \frac{d^2p_1}{(2\pi)^2} d^2p_2 \nabla_1 \delta(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2) \sum_{\omega} \text{Res}_{\omega} G(\omega, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2), \end{aligned} \quad (3.43)$$

где сумма вычетов берется по всем полюсам  $\omega$  функции  $G$  в верхней полуплоскости  $\varepsilon$ , что соответствует заполненным уровням. Интегрируя по частям, получаем:

$$\mathbf{d} = ie \int \frac{d^2p}{(2\pi)^2} \left[ \nabla_{\mathbf{p}} \sum_{\omega} \text{Res}_{\omega} G(\omega, \mathbf{p}, \mathbf{p}') \right] \Big|_{\mathbf{p}'=\mathbf{p}}. \quad (3.44)$$

Другую (эквивалентную) форму записи можно получить, если заменить  $\nabla_{\mathbf{p}}$  на  $\nabla_{\mathbf{p}'}$  и изменить знак.

**Решение 14 в)** Взаимодействие с электрическим полем  $W = -eEx$  меняет функцию Грина:

$$\hat{G}_W = \hat{G} + \hat{G}\hat{W}\hat{G} + \hat{G}\hat{W}\hat{G}\hat{W}\hat{G} + \dots, \quad (3.45)$$

где  $\widehat{G}$  — точная функция Грина при  $E = 0$ . Графически:

$$\widehat{G}_W = \leftarrow + \leftarrow \widehat{W} + \leftarrow \widehat{W} \widehat{W} + \dots$$

$$\leftarrow = \leftarrow + \leftarrow F(E)$$

Рис. 3.8

В импульсном представлении взаимодействию  $W$ , линейному по координатам, соответствует производная  $\delta$ -функции:

$$W(\mathbf{p}) = - \int e E x e^{-i\mathbf{p}\mathbf{r}} d^2r = ie(2\pi)^2 E \frac{\partial}{\partial p_x} \delta^{(2)}(\mathbf{p}) \quad (3.46)$$

Для вычисления поляризуемости нужен линейный по полю член ряда (3.45). С учетом структуры  $G$ , согласно (3.42), имеем 4 слагаемых:

$$\delta G = \leftarrow \widehat{W} + \leftarrow \widehat{W} F(E) + \leftarrow F(E) \widehat{W} + \leftarrow F(E) \widehat{W} F(E)$$

Рис. 3.9

Первое из них есть  $G_0 W G_0$ . Оно не имеет особенностей над контуром интегрирования по энергии и, поэтому, дает нулевой вклад. Вычислим остальные члены. Выражение  $\widehat{G}_0 \widehat{W} \widehat{G}_0 \widehat{F} \widehat{G}_0(p, p')$ , соответствующее второй диаграмме рис. 3.9, есть:

$$\begin{aligned} & \int \frac{d^2 p_1}{(2\pi)^2} \frac{ieE}{(\varepsilon - p^2/2m + i\delta)} \frac{\partial}{\partial p_x} \delta^{(2)}(\mathbf{p} - \mathbf{p}_1) \frac{-F(\varepsilon)}{(\varepsilon - p_1^2/2m + i\delta)(\varepsilon - p^2/2m + i\delta)} = \\ & = \int \frac{d^2 p_1}{(2\pi)^2} \delta(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}) \frac{\partial}{\partial p_{1x}} \frac{-ie E F(\varepsilon)}{(\varepsilon - p^2/2m + i\delta)} \times \\ & \quad \times \frac{1}{(\varepsilon - p_1^2/2m + i\delta)(\varepsilon - p^2/2m + i\delta)} = \end{aligned}$$

$$= -\frac{ieE}{m} F(\varepsilon) \frac{p_x}{(\varepsilon - p^2/2m + i\delta)^3 (\varepsilon - p'^2/2m + i\delta)}. \quad (3.47)$$

Третий член получается из второго комплексным сопряжением и перестановкой  $p$  и  $p'$ :

$$\widehat{G}_0 \widehat{F} \widehat{G}_0 \widehat{W} \widehat{G}_0(\mathbf{p}, \mathbf{p}') = \frac{ieE p'_x F(\varepsilon)/m}{(\varepsilon - p^2/2m + i\delta)(\varepsilon - p'^2/2m + i\delta)^3}. \quad (3.48)$$

Последний график  $\widehat{G}_0 \widehat{F} \widehat{G}_0 \widehat{W} \widehat{G}_0 \widehat{F} \widehat{G}_0(p, p')$  равен нулю:

$$\begin{aligned} & ieEF^2(\varepsilon) \iint \frac{d^2 p_1 d^2 p_2}{(2\pi)^2} G_0(\varepsilon, \mathbf{p}) G_0(\varepsilon, \mathbf{p}_2) G_0(\varepsilon, \mathbf{p}_1) G_0(\varepsilon, \mathbf{p}') \nabla_{1x} \delta(\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1) \\ & = -ieEF^2(\varepsilon) G_0(\varepsilon, p) G_0(\varepsilon, \mathbf{p}') \int \frac{d^2 p_1}{(2\pi)^2} \frac{p_{1,x}/m}{(\varepsilon - p_1^2/2m + i\delta)^3} = 0, \end{aligned} \quad (3.49)$$

как интеграл от нечетной функции. Поэтому

$$\begin{aligned} \sum_{\omega} \text{Res } G(\omega, \mathbf{p}, \mathbf{p}') & = \text{Res}_{\varepsilon_0} F(\varepsilon) \frac{ie}{m} E [p'_x G_0(\varepsilon_0, \mathbf{p}) G_0^3(\varepsilon_0, \mathbf{p}') \\ & \quad - p_x G_0^3(\varepsilon_0, \mathbf{p}) G_0(\varepsilon_0, \mathbf{p}')] \end{aligned} \quad (3.50)$$

Из-за отмеченной выше симметрии по отношению к перестановке  $\mathbf{p}$  и  $\mathbf{p}'$  оба слагаемых дают одинаковый вклад в поляризуемость, поскольку и в выражение (3.44) для  $\mathbf{d}$  импульсы  $\mathbf{p}$  и  $\mathbf{p}'$  входят симметрично. Следовательно, достаточно взять только первое слагаемое и удвоить ответ:

$$\mathbf{d} = -2 \frac{e^2}{m^2} E \int \frac{d^2 p}{(2\pi)^2} \frac{p_x^2}{(\varepsilon_0 - p^2/2m + i\delta)^5} \text{Res}_{\varepsilon_0} F(\varepsilon) \quad (3.51)$$

К такому выражению можно прийти несколько быстрее, если заметить, что вершина взаимодействия с электрическим полем устроена точно так же, как и выражение для дипольного момента (3.44). (В координатном представлении (3.50) есть свертка производной  $\delta$ -функции с функцией Грина по ее аргументам.) Поэтому все вклады в поляризуемость можно представить графически так:

$$\chi = \dots \circ \text{---} \left( \text{---} \right) \delta G$$

Рис. 3.10

Здесь  $\delta G$  дается суммой четырех слагаемых, показанных на рис. 3.9, а пунктирная линия обозначает  $\nabla \delta(\mathbf{p})$  в импульсном представлении, или  $\mathbf{r}$  — в координатном. Первый график на рис. 3.9 дает ноль при интегрировании по энергиям, а четвертый, из-за нечетности  $\mathbf{r}$ , — обращается в ноль при интегрировании по импульсам. Второй и третий графики отличны от нуля и равны в силу симметрии.

Итак, поляризуемость

$$\chi_{\alpha\beta} = \frac{2e^2}{m^2} \int \frac{d^2p}{(2\pi)^2} \cdot \frac{p_\alpha p_\beta (2m)^5}{(p^2 + \kappa^2)^5} \operatorname{Res}_{\varepsilon_0} F(\varepsilon), \quad (3.52)$$

где  $\kappa^2 = 2m|\varepsilon_0|$ .

Вычислим  $\operatorname{Res}_{\varepsilon_0} F(\varepsilon)$ . Положив  $\varepsilon = \varepsilon_0 + z$ , разлагаем

$$F(\varepsilon) = \frac{2\pi}{m \ln(1 + z/\varepsilon_0)} \sim \frac{2\pi\varepsilon_0}{mz}, \quad \text{откуда} \quad \operatorname{Res}_{\varepsilon_0} = \frac{2\pi\varepsilon_0}{m}. \quad (3.53)$$

Находим

$$\begin{aligned} \chi_{\alpha\beta} &= 2^6 \pi \delta_{\alpha\beta} e^2 m^2 \varepsilon_0 \int_0^{+\infty} \frac{p^3 dp}{2\pi} \cdot \frac{1}{(p^2 + \kappa^2)^5} \\ &= \delta_{\alpha\beta} \frac{16e^2 m^2 \varepsilon_0}{(2m\varepsilon_0)^3} \int_0^{+\infty} \frac{x dx}{(x+1)^5} = \frac{e^2 \delta_{\alpha\beta}}{6m\varepsilon_0^2}. \end{aligned} \quad (3.54)$$

Восстанавливая  $\hbar$  по размерности, получаем  $\chi = e^2 \hbar^2 / (6m\varepsilon_0^2)$ .

**Решение 15.** Суммируем диаграммы, изображенные на рис. 3.2. С одной стороны, раскрывая по линейности и группируя члены, имеем  $F(\mathbf{k}, \mathbf{k}') - F^*(\mathbf{k}', \mathbf{k})$ , поскольку все остальные члены, содержащие  $G^R$  и  $G^A$  одновременно, взаимно сокращаются. С другой стороны,

$$\begin{aligned} G^R - G^A &= \frac{1}{\varepsilon - p^2/2m + i\delta} - \frac{1}{\varepsilon - p^2/2m - i\delta} \\ &= -2\pi i \delta(\varepsilon - p^2/2m). \end{aligned} \quad (3.55)$$

И вдобавок, при собирании всех графиков, слева от  $G^R - G^A$  возникает выражение  $F(\mathbf{k}, \mathbf{k}')$ , а справа —  $F^*(\mathbf{k}', \mathbf{k})$ :

$$\begin{aligned} -2\pi i \int F(\mathbf{k}, \mathbf{q}) F^*(\mathbf{k}', \mathbf{q}) \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \delta(\varepsilon - q^2/2m) &= \\ &= -2\pi i \int F(\mathbf{k}, \mathbf{q}) F^*(\mathbf{k}', \mathbf{q}) \frac{q^2 dq}{(2\pi)^3} do \frac{m}{q} \delta(|\mathbf{q}| - |\mathbf{k}|) \\ &= -\frac{imk}{(2\pi)^2} \int F(\mathbf{k}, \mathbf{q}) F^*(\mathbf{k}', \mathbf{q}) do. \end{aligned} \quad (3.56)$$

Сравнивая, получаем теорему унитарности для амплитуды  $F$ :

$$F(\mathbf{k}, \mathbf{k}') - F^*(\mathbf{k}', \mathbf{k}) = -\frac{imk}{(2\pi)^2} \int F(\mathbf{k}, \mathbf{q}) F^*(\mathbf{k}', \mathbf{q}) do. \quad (3.57)$$

Связь с квантовомеханической амплитудой рассеяния,  $F = -(2\pi\hbar^2/m) f$ , была найдена в задаче 11. Выражая  $F$  через  $f$ , приходим к теореме унитарности (3.15).



Повторяя вывод в двумерном случае, получаем

$$F(\mathbf{k}, \mathbf{k}') - F^*(\mathbf{k}', \mathbf{k}) = -\frac{im}{2\pi} \int F(\mathbf{k}, \mathbf{q}) F^*(\mathbf{k}', \mathbf{q}) d\theta . \quad (3.58)$$

В размерности  $D = 2$  связь  $F$  и квантовомеханической амплитуды  $f$  другая. Чтобы ее получить, поступим как в задаче 11. Возьмем выражение (3.21) для расходящейся волны,  $\chi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = \langle \mathbf{r} | G_0 F | \mathbf{k} \rangle$ , верное в любой размерности, и найдем асимптотическое поведение функции  $G_0$  :

$$G_0(\varepsilon, \mathbf{r}) = \int \frac{e^{i\mathbf{p}\mathbf{r}}}{\varepsilon - \hbar^2 p^2 / 2m + i\delta} \frac{d^2 p}{(2\pi)^2} \sim -\frac{m}{\hbar^2 \sqrt{2\pi k} |\mathbf{r}|} e^{ik|\mathbf{r}| + i\pi/4} \quad (3.59)$$

при  $k|\mathbf{r}| \rightarrow \infty$  (см. задачу 6 к §127 [2]). Поэтому при  $D = 2$  амплитуда  $f = -(m/\hbar^2 \sqrt{2\pi k}) F$ .

Поэтому теорема унитарности при  $D = 2$  гласит:

$$f(\mathbf{k}, \mathbf{k}') - f^*(\mathbf{k}', \mathbf{k}) = i\sqrt{\frac{k}{2\pi}} \int f(\mathbf{k}, \mathbf{q}) f^*(\mathbf{k}', \mathbf{q}) d\omega_{\mathbf{q}} , \quad (3.60)$$

Отметим, что в размерности  $D = 2$  более удобно включать множитель  $e^{i\pi/4}$  в определение расходящейся волны, как это сделано выше, а не в амплитуду рассеяния, как в [2]. При таком определении  $f$ , соотношение унитарности принимает наиболее простой вид. Поскольку амплитуда  $f$  есть коэффициент при расходящейся волне, включать фазовый множитель в определение  $f$  или в выражение для расходящейся волны — дело вкуса.

Воспользуемся случаем, чтобы еще раз отметить существенную разницу между амплитудой обычной  $f$  и амплитудой рассеяния в энергетической нормировке  $F$  («ужиренной вершиной»). Определение амплитуды  $F$  не допускает никакого произвола, поскольку не зависит от выбора выражения для расходящейся волны.



## Глава 4.

# Взаимодействующие частицы

### 4.1. Правила построения диаграмм

Функции Грина дают полную информацию об основном состоянии системы и спектре её возмущений. Кроме того, важнейшим свойством причинных функций Грина (2.8) является то, что с их помощью можно построить теорию возмущений, согласующуюся с интуитивными представлениями. Функция Грина  $G(x_2, x_1) = -i\langle T\psi(x_2)\psi^+(x_1)\rangle$  в координатном представлении есть амплитуда вероятности перехода из точки  $x_1$  пространства-времени в точку  $x_2$ . Естественно сопоставить ей линию со стрелкой, ведущую из 1 в 2:

$$G_{12} = \begin{array}{c} \xrightarrow{\hspace{2cm}} \\ 1 \qquad \qquad \qquad 2 \end{array}$$

Рис. 4.1

Для невзаимодействующих ферми-частиц функция Грина в импульсном представлении дается простой формулой:

$$G_0(\varepsilon, \mathbf{p}) = \frac{1}{\varepsilon - \xi(\mathbf{p}) + i\delta(\mathbf{p})}. \quad (4.1)$$

Здесь  $\xi(\mathbf{p}) = \mathbf{p}^2/2m - E_F$  — закон дисперсии частиц, а знак мнимой части зависит от заполнения состояния с импульсом  $\mathbf{p}$ :

$$\delta(\mathbf{p}) = 0 \operatorname{sign}(\xi(\mathbf{p})) = \begin{cases} +0, & \text{если состояние не заполнено;} \\ -0, & \text{если состояние заполнено.} \end{cases} \quad (4.2)$$

Ряд теории возмущений для функции Грина допускает удобное графическое представление в виде диаграмм. Вывод правил диаграммной техники читатель может найти в гл. 2 [1]. Мы же приведем здесь лишь краткую их сводку для случая двухчастичного взаимодействия

$$U(x - x') = U(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t'). \quad (4.3)$$

(Вообще говоря, взаимодействие может быть запаздывающим).

- 1) Все диаграммы строятся из двух элементов: простых линий, описывающих распространение частиц, и волнистых, описывающих взаимодействие между ними.
- 2) Две простые линии и одна волнистая соединяются в *вершинах*.
- 3)  $n$ -му порядку теории возмущений соответствуют диаграммы с  $2n$  вершинами. Если речь идет о вычислении функции Грина, то диаграмма должна иметь ровно два внешних конца.
- 4) Все диаграммы должны быть *связными*, т. е. не должны распадаться на отдельные части, не соединённые между собой ни одной линией.
- 5) Каждой простой линии соответствует множитель  $G_0(x - x')$  где  $x$  — начальная точка,  $x'$  — конечная. Каждой волнистой линии сопоставляется множитель  $U(x - x')$ .
- 6) Выражение, соответствующее данной диаграмме, следует проинтегрировать по координатам её вершин.
- 7) После этого ответ следует умножить на  $i^n (-1)^F$ , где  $n$  — число волнистых линий, а  $F$  — число замкнутых петель, отвечающих ферми-частицам.

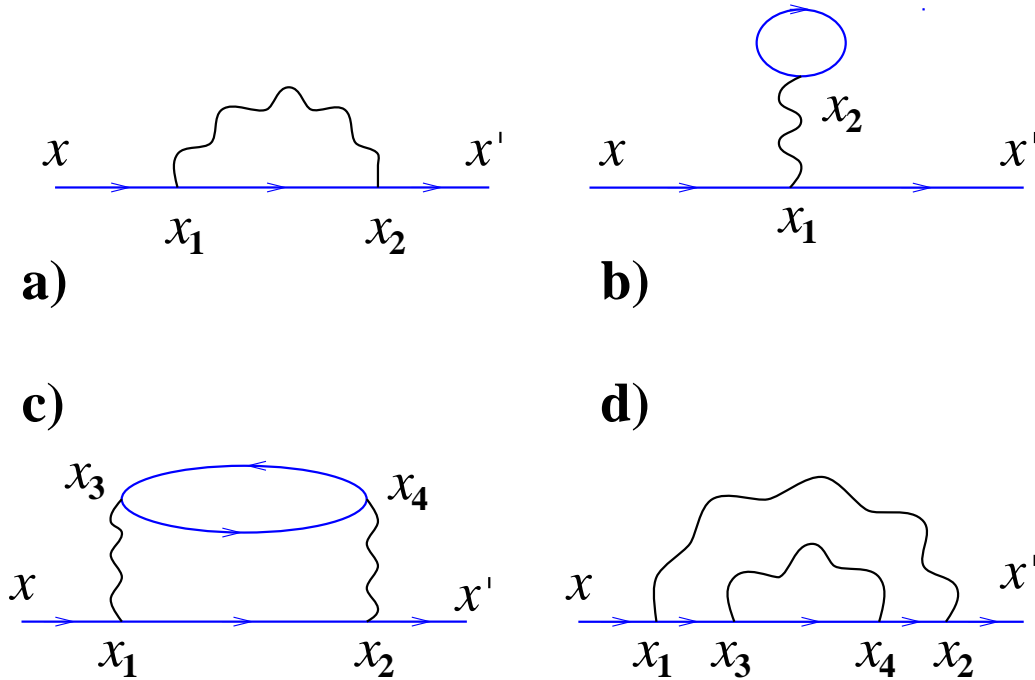


Рис. 4.2

Примеры диаграмм показаны на рис. 4.2. Этим диаграммам соответствуют такие выражения:

$$\delta G_a = i \int d^4 x_1 d^4 x_2 G(x_1 - x) G(x_2 - x_1) G(x' - x_2) U(x_2 - x_1) ,$$

$$\begin{aligned}
\delta G_b &= -i \int d^4 x_1 d^4 x_2 G(x_1 - x) G(0) G(x' - x_1) U(x_2 - x_1) , \\
\delta G_c &= \int d^4 x_1 d^4 x_2 d^4 x_3 d^4 x_4 G(x_3 - x_4) G(x_4 - x_3) \\
&\quad \times G(x_2 - x_1) G(x' - x_2) G(x_1 - x) U(x_3 - x_1) U(x_4 - x_2) , \\
\delta G_d &= - \int d^4 x_1 d^4 x_2 d^4 x_3 d^4 x_4 G(x_3 - x_2) G(x_4 - x_3) , \\
&\quad \times G(x_2 - x_1) G(x' - x_4) G(x_1 - x) U(x_4 - x_1) U(x_3 - x_2) .
\end{aligned}$$

Довольно часто удобным оказывается не координатное представление, а импульсное. Правила диаграммной техники в импульсном представлении оказываются почти такими же, как в координатном. Вместо функций Грина и потенциалов взаимодействия надо использовать их фурье-образы. При этом каждой вершине сопоставляется множитель  $(2\pi)^4 \delta(p_1 + k - p_2)$ , определяющий связь между 4-импульсами  $p_1$  и  $p_2$  функций Грина частиц, и 4-импульсом  $k$  линии взаимодействия. По всем независимым 4-импульсам производится интегрирование.

Различные диаграммы удобно представлять себе как вклады в амплитуду перехода частиц между точками  $x$  и  $x'$ . Например, переход, при котором не происходит взаимодействия с другими частицами системы, изображается свободной функцией Грина, а переходам с рассеянием на других частицах соответствуют диаграммы, подобные  $b$ ) и  $c$  на рис. 4.2. Диаграммная техника позволяет думать о многочастичных задачах на «одночастичном языке».

Два основных вида взаимодействия между электронами, имеющих значение в физике твердого тела, — это кулоновское взаимодействие и взаимодействие за счет обмена фононами. Кулоновское взаимодействие в среде выражается через диэлектрическую проницаемость  $\varepsilon(\omega)$ . В импульсном представлении

$$U(\omega, \mathbf{k}) = \frac{4\pi e^2}{\varepsilon(\omega) |\mathbf{k}|^2} , \quad |\mathbf{k}| \gg \omega/c . \quad (4.4)$$

Частотная дисперсия  $\varepsilon(\omega)$  делает взаимодействие запаздывающим:

$$U(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t') = \frac{e^2}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \int \frac{e^{-i\omega(t-t')}}{\varepsilon(\omega) 2\pi} d\omega . \quad (4.5)$$

Это «квазистатическое» выражение справедливо при  $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \ll c|t - t'|$ . Запаздывание взаимодействия приводит к таким физическим эффектам, как перенормировка массы связанного состояния (см. задачу 19).

Взаимодействие, возникающее вследствие испускания и поглощения фононов, зависит от типа фононов, а также от характера электрон–фононного взаимодействия в системе (подробнее см. гл. 6). В качестве простейшей, но в то же время реалистичной модели мы рассмотрим акустические фононы, взаимодействующие с электронами посредством деформационного потенциала. В этом случае взаимодействие принимает вид

$$U(\omega, \mathbf{k}) = g^2 D(\omega, \mathbf{k}) , \quad (4.6)$$

где  $g$  — константа электрон-фононного взаимодействия, а

$$D(\omega, \mathbf{k}) = \frac{\omega_0^2(\mathbf{k})}{\omega^2 - \omega_0^2(\mathbf{k}) + i0} \quad (4.7)$$

— функция Грина фононов. Для акустических фононов  $\omega_0(\mathbf{k}) = c|\mathbf{k}|$ , где  $c$  — скорость звука.

Акустические фононы принято описывать с помощью так называемой модели Дебая, в которой волновой вектор фонона пробегает сферическую область  $|\mathbf{k}| < k_D$ , объем которой равен числу колебательных степеней свободы, приходящихся на единицу объема:  $\frac{4\pi}{3}k_D^3 = (2\pi)^3/v_0$ , где  $v_0$  — объем элементарной ячейки кристалла.

### 4.1.1. Блочное суммирование

В диаграммной технике можно не только выписывать вклад данного порядка теории возмущений, но и суммировать некоторые последовательности членов ряда. При этом оказывается достаточным вычислить относительно небольшое количество диаграмм (*блоков*), после чего можно суммировать образованные из них последовательности, подставляя их в другие диаграммы и т. д.

Техника блочного суммирования опирается на классификацию диаграмм на *приводимые* и *неприводимые*. Неприводимой называется собственно-энергетическая часть, которая не распадается при перерезании ни одной из линий частиц. В противном случае диаграмма называется приводимой.

Блочное суммирование для одночастичной функции Грина выполняется так. Рассмотрим произвольную диаграмму для функции Грина  $G(\varepsilon, \mathbf{p})$ . Она либо приводима, либо нет. Если она приводима, то разделим её на две части, соединенные одной линией. Каждая из этих частей либо приводима, либо нет. Будем дробить таким способом приводимые диаграммы до тех пор, пока процесс не закончится. Любая диаграмма для функции Грина может быть схематически представлена как одна из диаграмм на рис. 4.3:

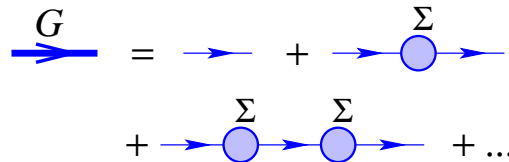


Рис. 4.3

Кружки на рис. 4.3 могут изображать любые неприводимые диаграммы, показанные на рис. 4.4. Сумма последовательности всех неприводимых диаграмм называется

собственно-энергетической частью и обозначается<sup>1</sup>  $\Sigma(\varepsilon, \mathbf{p})$ .

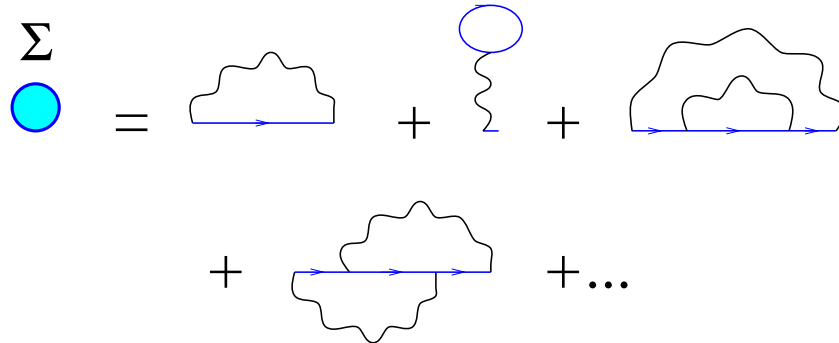


Рис. 4.4

Теперь просуммируем все диаграммы для функции Грина. Содержимое каждого кружка при этом превращается в  $\Sigma(\varepsilon, \mathbf{p})$ . В результате ряд для  $G(\varepsilon, \mathbf{p})$  запишется так:

$$G = G_0 + G_0 \Sigma G_0 + G_0 \Sigma G_0 \Sigma G_0 + \dots \quad (4.8)$$

Как нетрудно видеть, сумма этого ряда удовлетворяет уравнению

$$G = G_0 + G_0 \Sigma G, \quad (4.9)$$

называемому уравнением Дайсона. Его решение выглядит так:

$$G^{-1}(\varepsilon, \mathbf{p}) = G_0^{-1}(\varepsilon, \mathbf{p}) - \Sigma(\varepsilon, \mathbf{p}). \quad (4.10)$$

Уравнение Дайсона дает точную связь между  $G(\varepsilon, \mathbf{p})$  и  $\Sigma(\varepsilon, \mathbf{p})$ , то есть между суммами всех приводимых и всех неприводимых диаграмм.

Конечно, найти  $\Sigma(\varepsilon, \mathbf{p})$  в явном виде, как правило, не удастся. Однако, вычислив, скажем, первую из диаграмм на рис. 4.4, мы можем сразу просуммировать целую последовательность диаграмм для  $G(\varepsilon, \mathbf{p})$ :

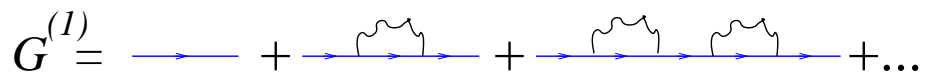


Рис. 4.5

Далее можно подставлять полученное выражение для  $G(\varepsilon, \mathbf{p})$  в другие диаграммы вместо  $G_0(\varepsilon, \mathbf{p})$ . Графически это изображают, рисуя вместо простой линии ужирненную.

<sup>1</sup>В теории поля  $\Sigma(\varepsilon, p)$  иногда называется массовым оператором.

Может возникнуть вопрос, зачем вообще суммировать последовательность диаграмм из разных порядков теории возмущений. Дело в том, что функция Грина  $G(\varepsilon, \mathbf{p})$  обычно представляет интерес вблизи своего полюса (см. (4.12)). А вблизи полюса различные диаграммы на рис. 4.5 на самом деле оказываются одного порядка. А собственно-энергетическая часть, в отличие от функции Грина, имеет как правило не очень сингулярное поведение. Поэтому ее можно изучать с помощью одного или нескольких первых членов ряда теории возмущений

## 4.2. Полюса функции Грина — спектр квазичастиц

Мы описали формализм диаграммной техники, не уточняя, о какой задаче идет речь — одночастичной или многочастичной. Функции Грина позволяют легко переходить от одной задачи к другой. Разница между этими двумя случаями заключается в структуре затравочной функции Грина (4.1). Для ферми-газа мнимая часть

$$i\delta(\mathbf{p}) = i0 \operatorname{sign}(|\mathbf{p}| - p_0), \quad (4.11)$$

где  $p_0$  — импульс Ферми (этим выражается то, что все состояния с  $|\mathbf{p}| < p_0$  заполнены, а остальные пусты). Такая функция Грина учитывает то обстоятельство, что при  $|\mathbf{p}| > p_0$  возбуждениями являются частицы, а при  $|\mathbf{p}| < p_0$  — дырки.

Если же речь идет об одночастичной задаче, то следует считать  $\delta(\mathbf{p}) > 0$  для всех  $\mathbf{p}$ , поскольку все состояния пусты. В этом случае диаграммный ряд сильно упрощается. Дело в том, что в этом случае все диаграммы с замкнутыми электронными петлями оказываются равны нулю. Формально это происходит потому, что интеграл по частоте в любой петле обращается в ноль, поскольку полюса всех функций Грина находятся в одной и той же полуплоскости комплексной частоты. Физическую причину обращения петель в ноль можно пояснить, заметив, что в ферми-газе замкнутые петли описывают рождение электрон-дырочных пар. В одночастичной же системе рождение пар невозможно.

Функция Грина (4.10) имеет полюс, если  $\varepsilon$  и  $\mathbf{p}$  удовлетворяют уравнению

$$G_0^{-1}(\varepsilon, \mathbf{p}) = \Sigma(\varepsilon, \mathbf{p}). \quad (4.12)$$

В одночастичной задаче полюса функции Грина определяют весь спектр системы. В многочастичной же задаче оказывается, что полюса  $G(\varepsilon, \mathbf{p})$  определяют не весь спектр, а только так называемые *одночастичные* возбуждения.

В точной функции Грина

$$G(\varepsilon, \mathbf{p}) = -i \int \langle T \psi(\mathbf{r}, t) \psi^+(0, 0) \rangle e^{i\varepsilon t - i\mathbf{p}\mathbf{r}} d^3r dt, \quad (4.13)$$

вычисленной с учетом взаимодействия, обычно выделяют вклад *элементарных возбуждений* или *квазичастиц* — полюса в комплексной плоскости  $\varepsilon$ , расположенные недалеко от вещественной оси:

$$G(\varepsilon, \mathbf{p}) = \frac{a}{\varepsilon - \xi(\mathbf{p}) + i\gamma(\mathbf{p})} + G_{\text{reg}}(\varepsilon, \mathbf{p}). \quad (4.14)$$

(в выражении (4.14) выделен вклад  $G_{\text{reg}}(\varepsilon, \mathbf{p})$ , регулярный вблизи  $\varepsilon = \xi(\mathbf{p}) - i\gamma(\mathbf{p})$ ).



Спектр квазичастицы, соответствующей полюсу в (4.14), дается функцией  $\xi(\mathbf{p})$ , а затухание  $\gamma(\mathbf{p})$  можно записать как  $\frac{1}{2}\tau_{\mathbf{p}}^{-1}$ , где  $\tau_{\mathbf{p}}$  — время жизни квазичастицы. Вычет  $a$  называют амплитудой квазичастичной функции Грина. Дисперсионное соотношение  $\varepsilon = \xi(\mathbf{p})$  определяет в 4-мерном пространстве  $(\varepsilon, \mathbf{p})$  так называемую *массовую поверхность* квазичастицы ([1], §7, п.3; М, гл.5, п.1).

Вообще говоря, понятие квазичастицы имеет смысл только если время жизни велико:  $\gamma(\mathbf{p}) \ll \xi(\mathbf{p})$ . Если оно мало, говорят о «затухающем возбуждении». В ядерной физике терминология несколько иная: вместо «квазичастицы» говорят о «резонансе».

Остановимся на физическом смысле собственно-энергетической части  $\Sigma(\varepsilon, \mathbf{p})$ . Из дисперсионного уравнения (4.10) видно, что именно собственно энергетическая часть определяет спектр квазичастиц. Рассматривая по отдельности вещественную и мнимую части (4.10) и сравнивая с (4.14), находим:

$$\xi(\mathbf{p}) = \xi_0(\mathbf{p}) + \operatorname{Re} \Sigma(\xi(\mathbf{p}), \mathbf{p}), \quad \gamma(\mathbf{p}) = \operatorname{Im} \Sigma(\xi(\mathbf{p}), \mathbf{p}). \quad (4.15)$$

Как видно из (4.15), вещественная часть  $\Sigma(\varepsilon, \mathbf{p})$  характеризует перенормировку закона дисперсии квазичастиц. В частности,  $\Sigma(\varepsilon, \mathbf{p})$  описывает такой эффект, как изменение массы частицы, возникающее в результате взаимодействия. Причина изменения массы в том, что частица во взаимодействующей системе окружает себя «поляризационным облаком», движущимся вместе с частицей. Инерция такой «одетой» частицы описывается так называемой *эффективной* массой. Пример, демонстрирующий возникновение эффективной массы в случае электрон-фононного взаимодействия, будет рассмотрен в задаче 16 (см. также задачи 19, 21 и 33).

Что касается мнимой части  $\Sigma(\varepsilon, \mathbf{p})$ , то она характеризует затухание квазичастиц. Величина  $\tau_{\mathbf{p}} = \frac{1}{2}\gamma^{-1}(\mathbf{p})$  есть время жизни частицы в состоянии с данным импульсом  $\mathbf{p}$ . Например, электрон, взаимодействующий с фононами, если он движется достаточно быстро, может излучать фононы. В результате движение такого электрона замедлится, что формально проявится в появлении конечной мнимой части у  $\Sigma(\varepsilon, \mathbf{p})$  (см. задачу 17). Разумеется, конечное затухание  $\gamma = \operatorname{Im} \Sigma(\varepsilon, \mathbf{p})$  не означает, что сам электрон распадается. Правильная интерпретация затухания заключается в том, что с вероятностью  $P(t) = |\langle \psi(t) | \psi(0) \rangle|^2 = \exp(-2\gamma t)$  состояние электрона за время  $t$  не изменяется.

Интересно, что в силу причинности  $\operatorname{Re} \Sigma$  и  $\operatorname{Im} \Sigma$  связаны между собой соотношениями, аналогичными соотношениям Крамерса-Кронига. Таким образом, зная  $\operatorname{Re} \Sigma$ , можно найти  $\operatorname{Im} \Sigma$ , и наоборот.

### 4.2.1. Двухчастичная функция Грина

Из функции Грина  $G(\varepsilon, \mathbf{p})$ , описывающей распространение одной частицы, невозможно получить информацию о связанных состояниях частиц. Поэтому вводится так называемая *двухчастичная функция Грина*

$$K_{ab}(x_1, x_2, x_3, x_4) = \pm \langle T \psi_a(x_1) \psi_b(x_2) \psi_a^+(x_3) \psi_b^+(x_4) \rangle. \quad (4.16)$$

Знак «+» соответствует бозонам, а знак «−» — фермионам. Индексы  $a$  и  $b$  нумеруют частицы (предполагается, что они различимы).

В невзаимодействующей системе функция  $K_{ab}(x_1, \dots, x_4)$  распадается на произведение одночастичных функций Грина частиц  $a$  и  $b$ :

$$K_{ab}(x_1, x_2, x_3, x_4) = G_a(x_1 - x_3) G_b(x_2 - x_4) \quad (4.17)$$

(если частицы тождественны, то нужно в зависимости от типа статистики прибавить или вычесть произведение функций Грина с переставленными аргументами).

Теория возмущений для функции  $K_{ab}$  строится точно так же, как для одночастичной функции Грина. Первые диаграммы таковы:

$$K_{ab} = \begin{array}{c} \overrightarrow{a} \\ \overrightarrow{b} \end{array} + \begin{array}{c} \overrightarrow{a} \\ \overrightarrow{b} \end{array} \text{ (with wavy line) } + \begin{array}{c} \overrightarrow{a} \\ \overrightarrow{b} \end{array} \text{ (with two wavy lines) } + \begin{array}{c} \overrightarrow{a} \\ \overrightarrow{b} \end{array} \text{ (with loop) } + \dots$$

Рис. 4.6

Предполагается, что функции Грина в этих диаграммах — точные (т. е. все линии частиц — у жиренные).

Принято исключать из  $K_{ab}(x_1, x_2, x_3, x_4)$  тривиальные слагаемые, вводя *вершинную часть*  $\Gamma_{ab}(x_1, x_2; x_3, x_4)$ :

$$\begin{aligned} K_{ab}(x_1, x_2, x_3, x_4) &= G_a(x_1 - x_3) G_b(x_2 - x_4) + \\ &+ i \int d^4 x'_1 d^4 x'_2 d^4 x'_3 d^4 x'_4 G_a(x_1 - x'_1) G_a(x'_3 - x_3) G_b(x_2 - x'_2) \times \\ &\times G_b(x'_4 - x_4) \Gamma_{ab}(x'_1, x'_2; x'_3, x'_4). \end{aligned} \quad (4.18)$$

Величина  $\Gamma_{ab}$  описывает взаимодействие частиц и иногда называется также *двухчастичной амплитудой рассеяния*.

В импульсном представлении величина  $\Gamma_{ab}$  имеет вид

$$\Gamma_{ab}(p_1, p_2, p_3, p_4) = \int \Gamma_{ab}(x_1, x_2; x_3, x_4) e^{-i(p_1 x_1 + \dots + i p_4 x_4)} d^4 x_1 \dots d^4 x_4, \quad (4.19)$$

где  $p_i$  — 4-импульсы. Диаграммы для  $\Gamma_{ab}$  выглядят так:

$$\boxed{\Gamma} = \begin{array}{c} \text{wavy} \\ \text{wavy} \end{array} + \begin{array}{c} \overrightarrow{\text{wavy}} \\ \overleftarrow{\text{wavy}} \end{array} + \begin{array}{c} \overrightarrow{\text{wavy}} \\ \overleftarrow{\text{wavy}} \end{array} \text{ (with loop) } + \begin{array}{c} \overrightarrow{\text{wavy}} \\ \overleftarrow{\text{wavy}} \end{array} \text{ (with loop) } + \dots$$

Рис. 4.7

Сумма 4-импульсов  $p_i$  сохраняется:  $p_1 + p_2 = p_3 + p_4$ . Графическим элементам соответствуют обычные аналитические выражения: функции Грина  $G(p)$ , линии взаимодействия  $U(p)$ , интегрирование по каждому внутреннему импульсу.

Для двухчастичных функций Грина, как и для одночастичных, оказывается возможным суммирование бесконечных последовательностей диаграмм. Назовем диаграмму *двухчастично-неприводимой*, если она не распадается при разрезании любой пары линий  $G(p)$ . Сумма всех двухчастично-неприводимых диаграмм определяет так называемую *неприводимую вершинную часть*  $\Gamma^0$ :

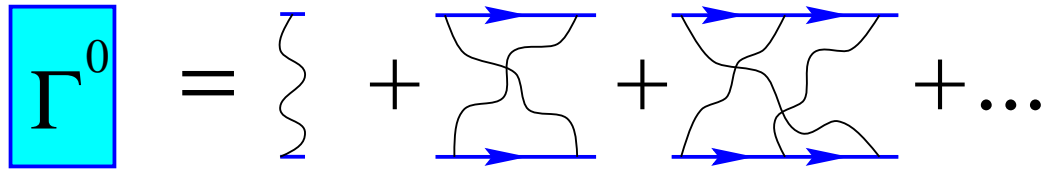


Рис. 4.8

Пользуясь этим определением, представим любую диаграмму для  $\Gamma_{ab}$  как последовательность неприводимых частей, соединенных двумя линиями  $G(p)$ . Классифицируя диаграммы по количеству двухчастичных сечений, можно убедиться, что амплитуда  $\Gamma_{ab}(p_i)$  удовлетворяет *уравнению Бете–Солпитера*:

$$\Gamma_{ab}(p_i) = \Gamma_{ab}^0(p_i) + i \int \Gamma_{ab}^0(p'_i) G_a^{(1)}(p_{1+}) G_b^{(2)}(p_{2-}) \Gamma_{ab}(p''_i) \frac{d^4 k}{(2\pi)^4}, \quad (4.20)$$

где  $p_i = \{p_1, p_2, p_3, p_4\}$ ,  $p'_i = \{p_1, p_2, p_{1+}, p_{2-}\}$ ,  $p''_i = \{p_{1+}, p_{2-}, p_3, p_4\}$ , а  $p_{i\pm} = p_i \pm k$ . Уравнение Бете–Солпитера (4.20) графически изображают так:

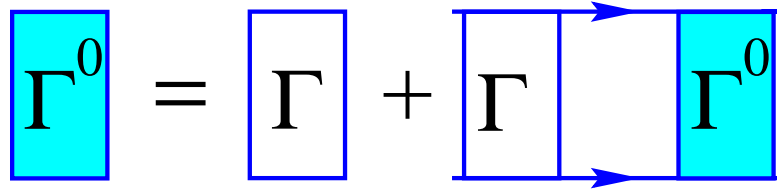


Рис. 4.9

Имея в виду такое графическое представление, неприводимую вершинную часть  $\Gamma^0(p_i)$  в (4.20) часто называют также «неразрезаемый кирпич».

Как и одночастичные функции Грина, двухчастичная амплитуда рассеяния может иметь полюса. Эти полюса соответствуют связанным состояниям пары частиц (см. задачи 18, 19, а также гл. 3).

*Литература:* [6], §§15,16; [1] §10, п.2

### 4.3. Задачи 16 ÷ 21

**Задача 16.** (Полярон в приближении слабой связи) Электроны в зоне проводимости

полупроводника образуют весьма разреженный газ. При малой концентрации электронов их взаимодействием друг с другом можно пренебречь. В то же время, каждый отдельный электрон, двигаясь в кристаллической решетке, поляризует среду вокруг себя и вызывает сопутствующую ему деформацию. Такой окруженный фононами электрон называется *поляроном*.

Закон дисперсии полярона  $\varepsilon(\mathbf{p})$  — не такой, как у электрона. При скорости движения, малой по сравнению со скоростью звука, полярон характеризуется энергией связи  $\varepsilon_0$  и эффективной массой  $m^*$ :  $\varepsilon(\mathbf{p}) = \varepsilon_0 + \mathbf{p}^2/2m^*$ .

Найдите собственно-энергетическую часть  $\Sigma(\varepsilon, \mathbf{p})$  в низшем порядке по электрон-фононному взаимодействию (4.6), (4.7). Соответствующий график изображен на рис. 4.10.

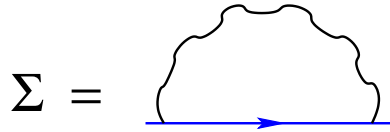


Рис. 4.10

Электронная функция Грина на рис. 4.10 имеет вид

$$G(\varepsilon, \mathbf{p}) = \frac{1}{\varepsilon - \mathbf{p}^2/2m + i\delta}. \quad (4.21)$$

Положительный знак мнимой части  $\delta$  говорит об отсутствии электронов в зоне проводимости полупроводника.

Рассмотрите  $\Sigma(\varepsilon, \mathbf{p})$  вблизи массовой поверхности  $\varepsilon = \mathbf{p}^2/2m$  и при малых  $|\mathbf{p}| \ll mc$ . Получите разложение:

$$\Sigma(\varepsilon, \mathbf{p}) = \varepsilon_0 - \alpha_1 \left( \varepsilon - \frac{\mathbf{p}^2}{2m} \right) - \alpha_2 \frac{\mathbf{p}^2}{2m}. \quad (4.22)$$

Покажите, что величина  $\alpha_2$  определяет перенормировку массы  $m$ , величина  $\alpha_1$  — перенормировку амплитуды  $Z$  функции Грина (4.14), а  $\varepsilon_0$  дает энергию связи. Найдите эффективную массу полярона.

**Задача 17.** (*Черенковское излучение звука*) Величина  $\Sigma(\varepsilon, \mathbf{p})$ , найденная в задаче 16, имеет отличную от нуля мнимую часть при  $v = p/m > c$ , поскольку сверхзвуковой электрон может испускать фононы.

**а)** Запишите  $\text{Im} \Sigma$  как  $\int W(\theta) d\theta$ , где  $\theta$  — угол между направлением вылета фонона и импульсом  $\mathbf{p}$ . Найдите угловое распределение излучаемого звука.

**б)** Эту же задачу решите с помощью теории возмущений. Найдите вероятность излучения фонона в единицу времени под углом  $\theta$ , используя «золотое правило» для вероятности перехода в непрерывный спектр:

$$dW_{i \rightarrow f} = \frac{2\pi}{\hbar} |\langle f | \mathcal{H}_{\text{int}} | i \rangle|^2 \delta(E_f - E_i) d\nu_f \quad (4.23)$$

(см. §43, формула (43.1) [2]; гл.8 [3]).

Сравните результаты. Обратите внимание, что при записи вероятности излучения как  $\text{Im } \Sigma$ , не нужно заботиться о нормировке состояний и о правильной размерности — все уже предусмотрено определением функций Грина.

**Задача 18.** (*Связанное состояние двух частиц*) Пусть две частицы с массами  $m_1$  и  $m_2$  взаимодействуют по закону  $U(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2, t_1 - t_2)$ , т. е. взаимодействие запаздывающее. Предположим, что запаздывание мало. Ситуации, в которых взаимодействие оказывается слабо запаздывающим, могут быть самыми различными. Например, экситон в полупроводнике — водородоподобное связанное состояние электрона и дырки. Или, скажем, дейтрон — слабо связанное состояние протона и нейтрона, взаимодействующих посредством ядерных сил.

Общая задача о связанном состоянии двух взаимодействующих частиц решается с помощью уравнения Бете-Солпитера для двухчастичной амплитуды рассеяния (4.20). Рассмотрим, какие упрощения возникают, если запаздывание взаимодействия отсутствует, или если оно невелико.

**а)** (*Мгновенное взаимодействие: задача сводится к одночастичной*) Пусть запаздывания нет:  $U_{12} = U(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \delta(t_1 - t_2)$ . Покажите, что в этом случае все диаграммы с пересекающимися линиями дают ноль при интегрировании по частотам, а следовательно  $\Gamma_{p_1, p_2, p_1+q, p_2-q}^0 = U(q)$ .

Выполнив интегрирование в уравнении Бете-Солпитера (4.20), перейдите к импульсам относительно центра масс,

$$\mathbf{P} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = \mathbf{p}_3 + \mathbf{p}_4, \quad (4.24)$$

$$\mathbf{k} = \frac{m_2 \mathbf{p}_1 - m_1 \mathbf{p}_2}{m_1 + m_2}, \quad \mathbf{k}' = \frac{m_2 \mathbf{p}_3 - m_1 \mathbf{p}_4}{m_1 + m_2}, \quad (4.25)$$

и приведите (4.20) к виду

$$\Gamma_P(\mathbf{k}, \mathbf{k}') = U(\mathbf{k} - \mathbf{k}') + \int \frac{U(\mathbf{k} - \mathbf{q}) \Gamma_P(\mathbf{q}, \mathbf{k}')}{\Omega_0 - q^2/2\mu + i0} \frac{d^3 q}{(2\pi)^3}. \quad (4.26)$$

Здесь приведенная масса  $\mu = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$ , частота  $\Omega_0 = \Omega - P^2/2M$ , где полная масса  $M = m_1 + m_2$  и  $\Omega = \omega_1 + \omega_2 = \omega_3 + \omega_4$ . Обратите внимание, что на массовой поверхности относительного движения, где  $\Omega_0 = k^2/2\mu = k'^2/2\mu$ , уравнение (4.26) совпадает с уравнением для амплитуды рассеяния  $F$  (3.13) с точностью до замены массы на приведенную. (см. [1], §25, пп. 3, 4).

**б)** (*Слабое запаздывание*) Пусть взаимодействие запаздывающее:

$$U_{12} = U(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \frac{1}{2\tau} e^{-|t_1 - t_2|/\tau}, \quad (4.27)$$

но  $\tau$  много меньше всех других характерных времен. Тогда диаграммы, входящие в неприводимую часть  $\Gamma^0$ , будут тем меньше по параметру  $\tau$ , чем больше в них пересекающихся линий.

Покажите, что степень  $\tau$ , которой пропорциональна каждая диаграмма, определяется только числом линий взаимодействия. Верно ли это для диаграмм, дающих полную амплитуду  $\Gamma$ ?

**Задача 19\*.** (*Эффективная масса связанного состояния*) Из задачи 18 а) следует, что, если составная частица массы  $M$  является связанным состоянием двух частиц массы  $m$ , взаимодействующих без запаздывания, то  $M = 2m$ . (Почему?)

Пусть теперь взаимодействие обладает небольшим запаздыванием, и дается выражением (4.27) задачи 18 б). Покажите, что масса составной частицы в этом случае есть:

$$M = 2m - \frac{2\tau^2}{3} \int \psi_0^2(\mathbf{r}) \nabla^2 U(\mathbf{r}) d^3r, \quad (4.28)$$

где  $\psi_0(r)$  — основное состояние частицы массы  $m/2$ , движущейся в потенциале  $U(r)$ . Можно ли понять качественно, почему поправка отрицательна?

Для решения задачи перейдите в систему центра масс, движущуюся со скоростью  $\mathbf{v} = \mathbf{P}/2m$ . Покажите, что взаимодействие в этой системе имеет вид:

$$U_{12}(\mathbf{q}, \omega) = \frac{U(\mathbf{q})}{1 + \tau^2(\omega - \mathbf{v} \cdot \mathbf{q})^2}. \quad (4.29)$$

В области  $\omega\tau \ll 1$  можно положить  $\omega = 0$ , т. е. считать взаимодействие мгновенным, и воспользоваться результатом задачи 18 а).

Примером реальной системы, к которой применим изложенный метод, является экситон в полупроводнике, диэлектрическая проницаемость которого обладает частотной дисперсией  $\varepsilon(\omega)$ . Из-за частотной дисперсии кулоновское взаимодействие (4.4), (4.5) между образующими экситон электроном и дыркой становится запаздывающим, что приводит к уменьшению эффективной массы экситона.

Формула (4.29) подразумевает, что переносящие взаимодействие частицы — *нерелятивистские*, т. е. подчиняются преобразованию Галилея, а не Лоренца. В релятивистской динамике инертная масса, определяемая с помощью  $\mathbf{p} = M\mathbf{v}$ , тождественна массе покоя  $M = 2m - \Delta E/c^2$ , где  $\Delta E$  — энергия связи.

Интересно отметить, что знак перенормировки массы связанного состояния, даваемой нашим нерелятивистским вычислением, согласуется с ответом для релятивистского взаимодействия. (Скажем, масса дейтрона  $m_d = m_p + m_n - \Delta_d/c^2$ , где  $\Delta_d$  — энергия связи дейтрона.) Но, конечно же, рассматриваемый нами эффект не имеет никакого отношения к теории относительности. В частности, изменение массы за счет запаздывания взаимодействия как правило оказывается заметно больше, чем релятивистский дефект массы  $\Delta E/c^2$ .

**Задача 20.** (*Функции Грина для фермионной цепочки*) Спектр квазичастиц  $\varepsilon(p)$  дается полюсами функции Грина  $G(\varepsilon, p)$ . Используя этот факт, решим задачу 2 другим способом. Представим гамильтониан (1.19) в виде суммы «невозмущенного гамильтониана» и «возмущения»,  $\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_{\text{int}}$ , где

$$\mathcal{H}_0 = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \left( J_1 a_i^+ a_{i+1} + J_1 a_{i+1}^+ a_i - 2B a_i^+ a_i \right); \quad (4.30)$$

$$\mathcal{H}_{\text{int}} = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \left( J_2 a_i a_{i+1} + J_2 a_{i+1}^+ a_i^+ \right). \quad (4.31)$$

Найдите функцию Грина  $G_0(\varepsilon, p)$  для задачи, описываемой гамильтонианом  $\mathcal{H}_0$ . Нарисуйте графики, сумма которых даёт точную функцию Грина. Обратите внимание, что только четные порядки теории возмущений по  $\mathcal{H}_{\text{int}}$  дают вклад. Вычислите каждую из диаграмм, как функцию  $\varepsilon$  и  $p$ , и просуммируйте ряд.

**Задача 21\*.** (*Тяжелая частица в ферми-газе*) Рассмотрим атом массы  $M$ , движущийся в ферми-газе и взаимодействующий с ферми-частицами. В условиях, когда масса атома  $M$  много больше массы фермионов  $m$ , рассеяние легких фермионов на тяжелой частице квазиупругое, поскольку при максимально возможном переданном при столкновении импульсе  $\Delta p = 2p_0$  величина переданной энергии  $\varepsilon_M = \Delta p^2/2M \ll E_F$ .

В отсутствие рассеяния функция Грина частицы дается обычным выражением:

$$G(\varepsilon, \mathbf{p}) = \frac{1}{\varepsilon - \frac{p^2}{2M} + i0} \quad (4.32)$$

Чтобы выяснить, как взаимодействие с фермионами влияет на динамику частицы, найдем функцию Грина частицы в присутствии слабого контактного взаимодействия  $U(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \lambda \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ .

**а)** Поскольку фермионы движутся намного быстрее частицы, естественно воспользоваться «адиабатическим» приближением, в котором динамика фермионов исключена и заменена эффективным запаздывающим взаимодействием частицы самой с собой. Покажите, что эффективное взаимодействие возникает во втором порядке по взаимодействию с фермионами  $\lambda$  и представляет собой не что иное, как коррелятор плотность–плотность ферми-газа.

**б)** Найдите собственно-энергетическую часть частицы в первом порядке по эффективному взаимодействию. Изучите результат при энергии частицы  $\varepsilon \ll \varepsilon_M$  и  $\varepsilon \gg \varepsilon_M$ . Покажите, что при не слишком малом  $\lambda$  и  $\varepsilon \simeq \varepsilon_M$  перенормировка функции Грина может быть логарифмически велика. Пользуясь теорией возмущений, просуммируйте все логарифмически большие вклады и покажите, что в области энергий  $\varepsilon_M \ll \varepsilon \ll E_F$  функция Грина имеет степенной вид

$$G(\varepsilon, \mathbf{p}) = \frac{a_0}{\left(\varepsilon - \frac{p^2}{2M} + i0\right)^{1+\alpha}}, \quad (4.33)$$

где показатель степени  $\alpha$  зависит от силы взаимодействия  $\lambda$ .

## 4.4. Решения

**Решение 16.** Вычисляем собственно-энергетическую часть

$$\Sigma(\varepsilon, \mathbf{p}) = ig^2 \int G_0(\varepsilon - \omega, \mathbf{p} - \mathbf{k}) D_0(\omega, \mathbf{k}) \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{d\omega}{2\pi}, \quad (4.34)$$

где

$$G_0(\varepsilon, \mathbf{p}) = \frac{1}{\varepsilon - \mathbf{p}^2/2m + i\delta}, \quad D_0(\omega, \mathbf{k}) = \frac{c^2 \mathbf{k}^2}{\omega^2 - c^2 \mathbf{k}^2 + i\delta}. \quad (4.35)$$

Интеграл по  $\omega$  берем, замыкая контур в нижней полуплоскости:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\tilde{\varepsilon} - \omega + i0} \frac{c^2 k^2}{\omega^2 - c^2 k^2 + i0} \frac{d\omega}{2\pi} = \frac{i}{2} \frac{ck}{ck - \tilde{\varepsilon} - i0}, \quad (4.36)$$

где  $\tilde{\varepsilon} = \varepsilon - (\mathbf{p} - \mathbf{k})^2/2m$ ,  $k = |\mathbf{k}|$ . Получаем:

$$\Sigma(\varepsilon, \mathbf{p}) = \frac{g^2}{2} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{ck}{\varepsilon - ck - \frac{(\mathbf{p} - \mathbf{k})^2}{2m} + i0}. \quad (4.37)$$

Часть интегрирования по  $d^3k$  можно выполнить точно, если воспользоваться известной заменой переменных ([1], §21, п.3) и перейти к интегрированию по  $|\mathbf{k}|$  и  $q = |\mathbf{p} - \mathbf{k}|$ . Обозначим через  $x$  косинус угла между векторами  $\mathbf{k}$  и  $\mathbf{p}$ , тогда  $d^3k = 2\pi k^2 dk dx$ , а  $q^2 = |\mathbf{p} - \mathbf{k}|^2 = p^2 + k^2 - 2pkx$ , и потому  $q dq = -pk dx$ . Получаем:

$$\int f(|\mathbf{k}|, |\mathbf{p} - \mathbf{k}|) \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \equiv \frac{1}{(2\pi)^2 p} \int k dk \int_{|p-k|}^{p+k} q dq f(k, q). \quad (4.38)$$

Это дает

$$\Sigma = \frac{g^2}{2(2\pi)^2 p} \int_0^{k_D} k dk \int_{|p-k|}^{p+k} q dq \frac{ck}{\varepsilon - \frac{q^2}{2m} - ck + i0}. \quad (4.39)$$

Интегрируем по  $x = q^2$ :

$$\begin{aligned} \Sigma &= \frac{g^2 mc}{8\pi^2 p} \int_0^{k_D} k^2 dk \ln \left| \frac{\varepsilon - (p-k)^2/2m - ck}{\varepsilon - (p+k)^2/2m - ck} \right| \\ &\quad - i \frac{g^2 mc}{8\pi p} \int_0^{k_D} k^2 dk \int_{(p-k)^2}^{(p+k)^2} dx \delta(x - 2m(\varepsilon - ck)). \end{aligned} \quad (4.40)$$

При  $p < mc$  собственно-энергетическая часть  $\Sigma$  вещественна, т. е. полярон стабилен. Эффекты, связанные с распадом полярона при  $p > mc$ , мы рассмотрим в следующей задаче.

Нас интересует  $\Sigma$  вблизи массовой поверхности  $\varepsilon = p^2/2m$  и при малых  $p$ . При малом  $p \ll mc$  вычисляем  $\Sigma$ , раскладывая по малым параметрам  $\Delta = \varepsilon - p^2/2m$  и  $v = p/m$ :

$$\begin{aligned} \Sigma &= \frac{g^2 mc}{8\pi^2 p} \int_0^{k_D} k^2 dk \ln \left| \frac{k^2/2m + (c-v)k - \Delta}{k^2/2m + (c+v)k - \Delta} \right| = \\ &= \frac{g^2 mc}{8\pi^2 p} \int_0^{k_D} k^2 dk \left( -\frac{2vk}{ck + k^2/2m} - \frac{4\Delta vk}{2(ck + k^2/2m)^2} - \frac{2v^3 k^3}{3(ck + k^2/2m)^3} + \dots \right). \end{aligned} \quad (4.41)$$

Три члена в скобках дают искомое разложение  $\Sigma = \varepsilon_0 - \alpha_1 \Delta - \alpha_2 p^2/2m$ , причем интегралы по  $k$  легко считаются, так как  $c \ll k_D/m$ , и поэтому  $ck$  в знаменателях пренебрежимо мало по сравнению с  $k^2/2m$  почти во всей области интегрирования. Получаем

$$\varepsilon_0 = -\frac{g^2 c}{4\pi^2} \int_0^{k_D} k^2 dk \frac{k}{ck + k^2/2m} = -\frac{g^2 ck_D^2 m}{4\pi^2} \quad (4.42)$$



и, с логарифмической точностью,

$$\alpha_1 = \frac{g^2 m^2 c}{\pi^2} \int_0^{k_D} \frac{k^3 dk}{(k^2 + 2mck)^2} = \frac{g^2 m^2 c}{\pi^2} \ln \frac{k_D}{mc}, \quad (4.43)$$

$$\alpha_2 = \frac{2g^2 m^3 c}{3\pi^2} \frac{2}{m} \int_0^{k_D} \frac{k^5 dk}{(k^2 + 2mck)^3} = \frac{4g^2 m^2 c}{3\pi^2} \ln \frac{k_D}{mc} = \frac{4}{3} \alpha_1. \quad (4.44)$$

Дисперсионное соотношение дается уравнением  $G_0^{-1} - \Sigma = 0$ . Получаем перенормировку массы

$$\frac{m_*}{m} = 1 + \alpha_2 > 1. \quad (4.45)$$

Обратим внимание на то, что электрон действительно «одевается», а не «раздевается» — поправка к массе положительна.

**Первое решение 17 а)** Рассмотрим мнимую часть  $\text{Im } \Sigma$  — второе слагаемое в (4.40). Аргумент  $\delta$ -функции попадает в область интегрирования, если

$$(p - k)^2 < 2m \left( \frac{p^2}{2m} - ck \right) < (p + k)^2, \quad k, p > 0. \quad (4.46)$$

Это эквивалентно  $0 < k < 2(p - mc)$ , и поэтому мнимая часть отлична от нуля при  $v = p/m > c$ . Полная вероятность излучения фонона в единицу времени есть

$$2\gamma = -2 \text{Im } \Sigma = 2 \frac{g^2 mc}{8\pi p} \int_0^{2m(v-c)} k^2 dk = \frac{2g^2 m^3}{3\pi} \frac{c}{v} (v - c)^3. \quad (4.47)$$

Из ответа (4.47) видно, что излучение фонона происходит при  $v > c$ . Вероятность излучения уменьшается при  $v \rightarrow c$  и оказывается равной нулю при  $v < c$ .

Теперь найдем распределение по углам. Рассмотрим выражение (4.47) и, вместо того, чтобы брать интеграл по  $k$ , выразим  $k$  через угол вылета фонона  $\theta$ . Конечный импульс электрона  $\mathbf{q} = \mathbf{p} - \mathbf{k}$ , а значит  $q^2 = k^2 + p^2 - 2pk \cos \theta$ . Исключим  $q$ , пользуясь законом сохранения энергии  $q^2/2m + ck = p^2/2m$ . Находим

$$\cos \theta = \frac{k + 2mc}{2p}. \quad (4.48)$$

Перейдем от интегрирования по  $k$  к интегрированию по  $\theta$ :

$$\begin{aligned} \text{Im } \Sigma &= -\frac{g^2 mc}{8\pi p} \int_0^{2m(v-c)} k^2 dk = \frac{g^2 mc}{4\pi} \int_0^{\Theta_{\text{кр}}} [2p \cos \theta - 2mc]^2 d|\cos \theta| \\ &= \frac{g^2 (mc)^3}{\pi} \int_0^{\Theta_{\text{кр}}} \left( \frac{v}{c} \cos \theta - 1 \right)^2 \sin \theta d\theta, \end{aligned} \quad (4.49)$$

где  $\Theta_{\text{кр}} = \arccos(c/v)$  — предельное значение угла вылета фонона. Выражение в интеграле (4.49) дает угловое распределение интенсивности излучаемого звука внутри конуса с углом раствора  $\Theta_{\text{кр}}$ .

**Другое решение 17 а)** Воспользуемся случаем, чтобы проиллюстрировать один весьма общий метод, следующий из теоремы унитарности. Он позволяет достаточно быстро находить мнимую часть любого заданного графика. В нашем случае распределение фононов по углам можно получить с помощью этого метода вообще без единого интегрирования.

Физический смысл  $\text{Im } \Sigma$  — обратное время распада на электрон и фонон. Продукты распада — реальные частицы, энергия и импульс каждой из них связаны дисперсионным соотношением. Поэтому для нахождения  $\text{Im } \Sigma$ , достаточно в выражении (4.10) выделить вклад от массовой поверхности промежуточных частиц. Это достигается заменой:

$$G_0(\varepsilon, \mathbf{p}) \longrightarrow \text{Im } G_0(\varepsilon, \mathbf{p}) = -i\pi \delta(\varepsilon - \mathbf{p}^2/2m); \quad (4.50)$$

$$D_0(\omega, \mathbf{k}) \longrightarrow \text{Im } D_0(\omega, \mathbf{k}) = -i\frac{\pi}{2} \omega_0(\mathbf{k}) (\delta(\omega - \omega_0(\mathbf{k})) + \delta(\omega + \omega_0(\mathbf{k}))). \quad (4.51)$$

Иначе говоря, распаду соответствует ситуация, когда промежуточные частицы не виртуальные, а реальные. Поэтому сразу пишем:

$$i \text{Im } \Sigma = ig^2 \int \text{Im } G_0(\varepsilon - \omega, \mathbf{p} - \mathbf{k}) \text{Im } D_0(\omega, \mathbf{k}) \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{d\omega}{2\pi}. \quad (4.52)$$

Слагаемое  $\delta(\omega + \omega_0(\mathbf{k}))$  в  $\text{Im } D_0$  опускаем, поскольку оно отвечает поглощению фонона, а не испусканию. Получаем:

$$-i\frac{\pi^2}{2} g^2 \int \omega_0(\mathbf{k}) \delta\left(\varepsilon - \omega - \frac{(\mathbf{p} - \mathbf{k})^2}{2m}\right) \delta(\omega - \omega_0(\mathbf{k})) \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{d\omega}{2\pi}. \quad (4.53)$$

Одна  $\delta$ -функция устраняет интеграл по  $\omega$ :

$$-i\frac{\pi}{4} g^2 \int \omega_0(k) \delta\left(\varepsilon - \omega_0(k) - \frac{(\mathbf{p} - \mathbf{k})^2}{2m}\right) \frac{d^3k}{(2\pi)^3}. \quad (4.54)$$

Берем  $\varepsilon$  на массовой поверхности:

$$\text{Im } \Sigma = -\frac{\pi}{4} g^2 c \int \delta\left(\frac{k}{2m} + c - \frac{p}{m} \cos \theta\right) \frac{k^2 dk}{(2\pi)^2} \sin \theta d\theta. \quad (4.55)$$

Вторая  $\delta$ -функция устраняет интеграл по  $k$ , и мы вновь приходим к распределению (4.49).

**Решение 17 б)** Чтобы найти матричный элемент перехода, рассмотрим гамильтониан взаимодействия электрона с акустическими фононами:

$$\widehat{\mathcal{H}}_{\text{int}} = g \sum_{\mathbf{k}} \sqrt{\frac{ck}{2V}} [b_{\mathbf{k}} e^{i(\mathbf{kr} - \omega_0(\mathbf{k})t)} + b_{\mathbf{k}}^+ e^{-i(\mathbf{kr} - \omega_0(\mathbf{k})t)}] \quad (4.56)$$

(см. (6.6) в гл. 6). Здесь  $\omega_0(\mathbf{k}) = c|\mathbf{k}|$ ,  $\mathbf{r}$  — координата электрона,  $V$  — объем системы, а сумма по  $\mathbf{k}$ , в соответствии с моделью Дебая, ограничена  $|\mathbf{k}| < k_D$ . Находим вероятность распада, пользуясь «золотым правилом»:

$$dW_{i \rightarrow f} = \frac{2\pi}{\hbar} |\langle f | \widehat{\mathcal{H}}_{\text{int}} | i \rangle|^2 \delta(E_f - E_i) d\nu_f. \quad (4.57)$$

В начальном состоянии импульс электрона  $\mathbf{p}$ , в конечном имеются электрон и фотон с импульсами  $\mathbf{q}$  и  $\mathbf{k}$ , соответственно. Находим матричный элемент

$$\langle f | \widehat{\mathcal{H}}_{\text{int}} | i \rangle = \sqrt{\frac{ck}{2V}} \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{q} - \mathbf{k}) . \quad (4.58)$$

Возводя его в квадрат, учтем что, согласно известному правилу, квадрат  $\delta$ -функции записывается так:

$$\left[ \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{q} - \mathbf{k}) \right]^2 = (2\pi)^3 V \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{q} - \mathbf{k}) . \quad (4.59)$$

Вероятность перехода  $dW_{i \rightarrow f}$  есть:

$$(2\pi)^3 V \delta^{(3)}(\mathbf{k} + \mathbf{q} - \mathbf{p}) \frac{g^2 ck}{2V} 2\pi \delta\left(ck + q^2/2m - p^2/2m\right) \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} . \quad (4.60)$$

Интегрируем по  $q$  и переходим к новым переменным, длине вектора  $k$  и углу  $\theta$ :

$$\begin{aligned} dW_{i \rightarrow f} &= \frac{g^2 ck}{8\pi^2} \delta\left(ck + (p - k)^2/2m - p^2/2m\right) d^3 k \\ &= \frac{mg^2 ck^2}{2\pi} \delta(k - 2m(v \cos \theta - c)) d(\cos \theta) dk . \end{aligned} \quad (4.61)$$

Интегрируем по  $k$ :

$$dW_{i \rightarrow f} = \frac{2}{\pi} g^2 m^3 (v \cos \theta - c)^2 \sin \theta d\theta . \quad (4.62)$$

Это выражение отличается от (4.49) множителем 2, что в точности соответствует связи времени жизни  $\tau$  с затуханием  $\gamma$ :  $\tau^{-1} = 2\gamma$ .

**Решение 18.** Диаграммы для запаздывающего взаимодействия двух частиц нетрудно получить из  $S$ -матрицы:

$$T_1 T_2 \exp\left[-\frac{i}{\hbar} \int \int d^4 x_1 d^4 x_2 \psi^+(x_1) \psi(x_1) U(x_1 - x_2) \psi^+(x_2) \psi(x_2)\right] , \quad (4.63)$$

где  $x = (t, \mathbf{r})$ . Хронологическое упорядочение мы обозначили  $T_1 T_2$ , чтобы лишний раз подчеркнуть, что частицы различны. В импульсном представлении взаимодействие имеет вид:

$$(2\pi)^4 \int \psi_{p_1}^+ \psi_{p_3} \psi_{p_2}^+ \psi_{p_4} U(k) \delta(p_1 - p_3 + k) \delta(p_2 - p_4 - k) d^4 k . \quad (4.64)$$

Вершину  $\Gamma$  определяем, как обычно, через двухчастичную функцию Грина:

$$\begin{aligned} K_{12,34} &= (2\pi)^8 \delta_{p_1, p_3} \delta_{p_2, p_4} G_0^{(1)}(p_1) G_0^{(2)}(p_2) \\ &+ G_0^{(1)}(p_1) G_0^{(2)}(p_2) G_0^{(1)}(p_3) G_0^{(2)}(p_4) i \Gamma_{p_1, p_2, p_3, p_4} (2\pi)^4 \delta_{p_1 + p_2, p_3 + p_4} . \end{aligned} \quad (4.65)$$

Разлагая  $S$ -матрицу в ряд, получаем графики для  $\Gamma$ , показанные на рис. 4.7. Переставляем члены ряда, выделяя сумму графиков, дающую неприводимую вершинную

часть  $\Gamma^0$ . Затем действуем точно так же, как при выводе интегрального уравнения для амплитуды рассеяния  $F$  в задаче 11. Получаем уравнение Бете-Солпитера:

$$\Gamma_{1,2,3,4} = \Gamma_{1,2,3,4}^0 + i \int \Gamma_{1,2,1+,2-}^0 G_0(p_{1+}) G_0(p_{2-}) \Gamma_{1+,2-,3,4} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4}. \quad (4.66)$$

а) Если нет запаздывания, линия взаимодействия не зависит от переданной частоты:  $U(\omega, \mathbf{k}) = U(\mathbf{k})$ . Рассмотрим поправки к  $\Gamma$  второго порядка:



Рис. 4.11

В первом графике интеграл по частотам дает ноль:

$$\int G_0^{(1)}(\varepsilon_1 - \omega) G_0^{(2)}(\varepsilon_2 - \omega) d\omega = \int \frac{d\omega}{(\omega - \omega_1)(\omega - \omega_2)} = 0, \quad (4.67)$$

поскольку оба полюса подинтегрального выражения:

$$\omega_1 = \varepsilon_1 - p_{1+}^2/2m_1 + i\delta, \quad \omega_2 = \varepsilon_2 - p_{2-}^2/2m_2 + i\delta, \quad (4.68)$$

лежат в верхней полуплоскости. Нетрудно видеть, что по этой же причине обращается в ноль любой график более высокого порядка с пересекающимися линиями взаимодействия.

Отсутствие вклада графиков с пересекающимися линиями взаимодействия становится еще более очевидным во временном представлении, поскольку  $G_0(t, \mathbf{r}) = 0$  при  $t < 0$  в силу причинности. Например, первому графику рис. 4.9 соответствует выражение:

$$\iint U(\mathbf{r}_{12}) U(\mathbf{r}_{34}) G_0^{(1)}(t_2 - t_1, \mathbf{r}_{42}) G_0^{(2)}(t_1 - t_2, \mathbf{r}_{31}) dt_2 d^3 r_4, \quad (4.69)$$

тождественно равно нулю при всех  $t_1, t_2$  (обозначение:  $\mathbf{r}_{ab} = \mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b$ ).

Второй график отличен от нуля, поскольку входящие в него функции Грина имеют полюса по разные стороны от вещественной оси. Однако этот график не входит в  $\Gamma^0$ , поскольку он приводим: вертикальной линией его можно разрезать на два графика первого порядка.

Итак,

$$\Gamma_{p_1, p_2, p_1+q, p_2-q}^0 = U(\mathbf{q}) \quad (4.70)$$

Подставив это выражение в уравнение Бете-Солпитера, замечаем, что если  $\Gamma^0$  не зависит от переданной частоты, то и  $\Gamma$  обладает тем же свойством. Следовательно, вся

зависимость от частоты определяется функциями Грина промежуточных состояний  $G^{(1)}$  и  $G^{(2)}$ , а поэтому интегрирование по частоте точно такое же, как для второго графика на рис. 4.9:

$$i \int G_0^{(1)}(\varepsilon_1 - \omega) G_0^{(2)}(\varepsilon_2 + \omega) \frac{d\omega}{2\pi} = \frac{1}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - p_{1+}^2/2m_1 - p_{2-}^2/2m_2 + i0}, \quad (4.71)$$

где  $p_{i\pm} = p_i \pm k$ . Преобразуем знаменатель, разделив кинетическую энергию на энергию центра масс и энергию относительного движения:

$$\frac{\mathbf{p}^2}{2m_1} + \frac{\mathbf{p}'^2}{2m_2} = \frac{\mathbf{P}^2}{2M} + \frac{\mathbf{p}_{\text{отн}}^2}{2\mu}, \quad \mathbf{P} = \mathbf{p} + \mathbf{p}', \quad \mathbf{p}_{\text{отн}} = \frac{m_2\mathbf{p} - m_1\mathbf{p}'}{m_1 + m_2}. \quad (4.72)$$

Для  $\mathbf{p} = \mathbf{p}_{1+} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{q}$ ,  $\mathbf{p}' = \mathbf{p}_{2-} = \mathbf{p}_2 - \mathbf{q}$  эти тождества дают:

$$\frac{\mathbf{p}_{1+}^2}{2m_1} + \frac{\mathbf{p}_{2-}^2}{2m_2} = \frac{\mathbf{P}^2}{2M} + \frac{\mathbf{q}^2}{2\mu}, \quad (4.73)$$

и мы получаем ядро интегрального уравнения (4.26).

б) Порядок графика по  $\tau$  проще всего найти во временном представлении. Рассмотрим вклад в  $\Gamma^0$ , содержащий  $N$  пересекающихся линий взаимодействия. Интегрирование по временам производится по  $(2N - 1)$ -мерной области в координатах

$$\tau_1 = t_2 - t_1, \quad \tau_2 = t_3 - t_1, \quad \dots, \quad \tau_{2N-1} = t_{2N} - t_1. \quad (4.74)$$

По последней  $((2N - 1)$ -ой) временной координате нет необходимости интегрировать в силу трансляционной симметрии во времени. При этом величина области интегрирования по каждому из  $(2N - 1)$  времен порядка  $\tau$ .

Следовательно, степень  $\tau$  можно оценить как  $\tau^{(2N-1)+(-N)} = \tau^{N-1}$ . Первое слагаемое в степени возникает от  $(2N - 1)$ -кратного интегрирования, а второе — из-за нормировки потенциала. Получается, что степень по  $\tau$  вклада  $N$ -го порядка в  $\Gamma^0$  определяется *только* количеством линий взаимодействия и не зависит от того, как именно они пересекаются.

Подчеркнем, что данная оценка эффективной величины области интегрирования по времени верна только в случае, когда никаким сечением график нельзя разбить на два вклада в  $\Gamma^0$  более низкого порядка. Поэтому оценка  $\tau^{N-1}$  для величины вклада  $N$ -го порядка в  $\Gamma^0$  подразумевает неприводимость диаграммы.

Распространим полученный результат на графики, дающие полную амплитуду рассеяния  $\Gamma$ . Степень  $\tau$  для таких графиков зависит не только от числа линий взаимодействия  $N$ , но и от количества двухчастичных сечений  $M$ . Модифицируя оценки, приведенные выше, находим:  $\tau^{N-M-1}$ .

**Решение 19.** Найдем закон преобразования фурье-компоненты взаимодействия при переходе в движущуюся систему отсчета. Будем считать, что частицы, передающие взаимодействие, — нерелятивистские, и значит, можно пользоваться преобразованием Галилея  $\mathbf{r}' = \mathbf{r} - \mathbf{v}t$ ,  $t' = t$ . Переходя в систему отсчета, движущуюся со скоростью  $v$  вдоль оси  $x$ , получаем:

$$U_v(\mathbf{q}, \omega) = \int e^{-i\mathbf{q}\mathbf{r} + i\omega t} U(\mathbf{r} - \mathbf{v}t, t) d^3r dt = U(\mathbf{q}, \omega - vq_x). \quad (4.75)$$

Для взаимодействия  $U(r, t) = (U(r)/2\tau) e^{-|t|/\tau}$  находим

$$U_v(q, \omega) = \frac{U(q)}{1 + \tau^2(\omega - vq_x)^2}. \quad (4.76)$$

При рассмотрении сдвига энергии, вызванного движением, порядок действий будет следующим. Сначала мы перейдем в систему центра масс, движущуюся со скоростью  $v = P/M$ , а затем положим  $\omega = 0$ , что соответствует пределу взаимодействия без запаздывания. Преобразование (4.75) даст поправку к потенциалу, возникающую из-за движения. Зная её, можно найти сдвиг энергии основного состояния для относительного движения. А этот сдвиг, в свою очередь, и определяет поправку к массе. Как мы увидим, такой метод является корректным, если  $\tau \ll \hbar/\varepsilon_0$ , где  $\varepsilon_0$  — энергия связи.

Может показаться, что пренебрегать в (4.76) зависимостью от  $\omega$ , сохраняя при этом зависимость от  $v$ , не вполне правильно, поскольку и та и другая зависимости имеют одинаковую малость по  $\tau$ . На самом деле наши действия оправданы, и проще всего в этом убедиться можно следующим способом. Запишем формально скорость как  $v = \lambda/\tau$ , и будем считать параметром разложения  $\lambda$ , а не  $v$ . При этом в выражении (4.76) уже можно перейти к пределу  $\tau = 0$ , не нарушив при этом зависимости от  $\lambda$ :

$$U_v(\mathbf{q}, \omega) = \frac{U(\mathbf{q})}{1 + (\tau\omega - \lambda q_x)^2} \approx U(\mathbf{q}) - \lambda^2 q_x^2 U(\mathbf{q}) + O(\lambda^4). \quad (4.77)$$

Пренебрежение  $\omega\tau$  оправдано, поскольку частота  $\omega$  в уравнении Бете–Солпитера (4.20) оказывается порядка энергии связи  $\varepsilon_0$ , а с другой стороны, наше  $\tau \ll \hbar/\varepsilon_0$ .

Полученное в результате приближения (4.77) взаимодействие не зависит от частоты, и, согласно задаче 18 а), уравнение на вершинную часть принимает вид

$$\hat{\Gamma}_P = \hat{U} + \hat{U}\hat{G}_0\hat{\Gamma}_P. \quad (4.78)$$

Здесь  $\hat{\Gamma}_P$ ,  $\hat{U}$  и  $\hat{G}_0$  — операторы, действующие на состояние частицы массы  $m/2$  в поле  $U$ , а функция Грина  $\hat{G}_0 = 1/(\Omega_0 - q^2/m + i0)$ . Полная функция Грина, записанная в операторном виде, есть

$$\hat{G} = \hat{G}_0 + \hat{G}_0\hat{\Gamma}_P\hat{G}_0 = \frac{1}{\Omega_0 - \left(\frac{\hat{q}^2}{m} + \hat{U}_v\right) + i0}. \quad (4.79)$$

Взяв основное состояние  $|0_v\rangle$  уравнения Шредингера с потенциалом  $U_v$  (4.77) и массой  $m/2$ , находим закон дисперсии:

$$\Omega_0 = \langle 0_v | \frac{\hat{q}^2}{m} + \hat{U}_v | 0_v \rangle. \quad (4.80)$$

Для первой поправки к уровню энергии достаточно взять матричный элемент по невозмущенному состоянию  $|0_v\rangle_{v=0}$ . Подставляя  $\Omega_0 = \Omega - P^2/4m$ , а вместо  $U_v$  — фурье-образ выражения (4.77), получаем:

$$\Omega = \varepsilon_0 + \frac{P^2}{2M} - \tau^2 v^2 \langle 0 | q_x^2 U(q) | 0 \rangle. \quad (4.81)$$

Для центрально-симметричного взаимодействия  $U(\mathbf{q}) = U(|\mathbf{q}|)$  основное состояние тоже симметрично, и можно усреднить  $q_x^2$  по направлениям:

$$\langle q_x^2 \rangle = \frac{1}{3} q^2 . \quad (4.82)$$

Заменяем  $v$  на  $P/2m$  и  $q^2$  на  $-\nabla^2$ :

$$\Omega = \varepsilon_0 + P^2 \left\{ \frac{1}{4m} + \frac{\tau^2}{12m^2} \langle 0 | \nabla^2 U | 0 \rangle_0 \right\} \quad (4.83)$$

Таким образом, эффективная масса есть

$$M = \left\{ \frac{1}{2m} + \frac{\tau^2}{6m^2} \langle 0 | \nabla^2 U | 0 \rangle_0 \right\}^{-1} \approx 2m - \frac{2\tau^2}{3} \langle 0 | \nabla^2 U | 0 \rangle_0 . \quad (4.84)$$

То, что запаздывание приводит к уменьшению эффективной массы, можно понять так. В движущейся системе взаимодействие «отстает» от частиц, и эффективно уменьшается. Потенциальная яма становится более мелкой и уровень выталкивается вверх. Поэтому оба эффекта, возникающих вследствие движения, — кинетическая энергия центра масс и выталкивание уровня из-за ослабления потенциала, имеют одинаковый знак.

В действительности, задачу можно решить вообще без диаграмм. Из-за запаздывания частица «видит» вторую частицу не в точке  $\mathbf{r}$ , а в точке  $\mathbf{r}' = \mathbf{r} - \mathbf{v}t$ . Поэтому эффективный потенциал, действующий на нее, несколько отличается от  $U(r)$ . Поправку к потенциалу, малую при  $v\tau \ll r_0$ , где  $r_0$  — размер волновой функции связанного состояния, нетрудно найти, разлагая  $U(|\mathbf{r} - \mathbf{v}t|)$  в ряд по малому  $t$ . При этом вклад от члена разложения первого порядка сокращается при интегрировании по углам, и необходимо рассмотреть второй член разложения:

$$\delta U(r) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial r_\alpha \partial r_\beta} v_\alpha v_\beta t^2 . \quad (4.85)$$

Усредняя это выражение по  $t$  (по распределению  $(2\tau)^{-1} \exp(-|t|/\tau)$ ) и по  $\mathbf{r}$  (по распределению  $|\psi(r)|^2$ ), снова получаем (4.83).

Интересно сравнить результат (4.83) с массой полярона, которая всегда больше массы электрона. В обоих случаях изменение массы происходит благодаря запаздыванию взаимодействия. Разные знаки поправки к массе отвечают разной физике. В случае полярона, состояние, о массе которого идет речь, существует и без взаимодействия. Связанное же состояние двух частиц само возникает благодаря тому самому взаимодействию, которое перенормирует массу.

**Решение 20.** Перейдем в фурье-представление и, согласно (1.35), запишем гамильтониан в виде  $\widehat{\mathcal{H}} = \widehat{\mathcal{H}}_0 + \widehat{\mathcal{H}}_{\text{int}}$ , где

$$\widehat{\mathcal{H}}_0 = \int_{-\pi}^{\pi} \varepsilon_q a_q^+ a_q \frac{dq}{2\pi} , \quad \widehat{\mathcal{H}}_{\text{int}} = \int_{-\pi}^{\pi} iJ_2 \sin q (a_{-q} a_q + a_{-q}^+ a_q^+) \frac{dq}{2\pi} , \quad (4.86)$$

где  $\varepsilon_q = 2(J_1 \cos q - B)$ . Функция Грина «невозмущенной» задачи:

$$G_0(\varepsilon, q) = \frac{1}{\varepsilon - \varepsilon_q + i\delta \operatorname{sign} \varepsilon}. \quad (4.87)$$

В соответствии со структурой  $\widehat{\mathcal{H}}_{\text{int}}$ , в диаграммной технике есть две вершины «взаимодействия», сопряженные друг другу:

$$\widehat{V} = \begin{array}{c} \longrightarrow \circ \longleftarrow \\ + \\ \longleftarrow \bullet \longrightarrow \end{array}$$

Рис. 4.12

Этим двум вершинам соответствуют выражения  $2iJ_2 \sin q$  и  $-2iJ_2 \sin q$ , соответственно. Поправки к функции Грина, вычисленные по теории возмущений, имеют вид

$$\begin{array}{c} \longrightarrow \\ E, p \end{array} + \begin{array}{c} \longrightarrow \circ \longleftarrow \bullet \longrightarrow \\ E, p \quad -E, -p \quad E, p \end{array} \\ + \begin{array}{c} \longrightarrow \circ \longleftarrow \bullet \longrightarrow \circ \longleftarrow \bullet \longrightarrow \\ E, p \quad -E, -p \quad E, p \quad -E, -p \quad E, p \end{array} + \dots$$

Рис. 4.13

Обратим внимание на то, что знаки  $\varepsilon$  чередуются. Так получается потому, что по правилу сохранения 4-импульса в вершине, сумма  $\varepsilon_\alpha$  всех входящих линий равна сумме  $\varepsilon_\alpha$  выходящих линий, если они есть, или нулю, если выходящих линий нет. То же самое справедливо для импульсов.

Из-за чередования знаков отличны от нуля только поправки четного порядка, причем в каждом порядке  $2n$  имеется всего один график. Этому графику соответствует выражение

$$(-4J_2^2 \sin^2 q)^n G_0^{n+1}(\varepsilon, q) G_0^n(-\varepsilon, -q). \quad (4.88)$$

Сумма по  $n$  представляет собой геометрическую прогрессию. Получаем

$$G(\varepsilon, q) = \frac{G_0(\varepsilon, q)}{1 + 4J_2^2 \sin^2 q G_0(\varepsilon, q) G_0(-\varepsilon, -q)} = \frac{\varepsilon + 2(J_1 \cos q - B)}{\varepsilon^2 - 4((J_1 \cos q - B)^2 + J_2^2 \sin^2 q) + i\delta}. \quad (4.89)$$

Спектр определяется полюсами:  $\varepsilon = \pm 2\sqrt{(J_1 \cos q - B)^2 + J_2^2 \sin^2 q}$ . Знак мнимой части  $i\delta$  в (4.89) указывает, что верхняя ветвь соответствует пустым состояниям, а нижняя — заполненным.



**Решение 21 а)** Эффективное взаимодействие может быть выражено через двух-частичную функцию Грина фермионов:

$$\Pi(\omega, \mathbf{r}) = 2i \int G(\varepsilon_+, \mathbf{r}) G(\varepsilon_-, \mathbf{r}) \frac{d\varepsilon}{2\pi}, \quad \varepsilon_{\pm} = \varepsilon \pm \omega/2. \quad (4.90)$$

Функция Грина в координатно-частотном представлении,

$$G(\varepsilon, \mathbf{r}) = -\frac{m}{2\pi|\mathbf{r}|} e^{i \operatorname{sign} \varepsilon \kappa(\varepsilon)|\mathbf{r}|}, \quad \kappa(\varepsilon) = (p_0^2 + 2m\varepsilon)^{1/2} \quad (4.91)$$

была найдена в решении задачи 22 (см. (5.25)), а множитель 2 в (4.90) возникает из-за спинового вырождения.

Выражение (4.90) есть не что иное как поляризационный оператор ферми-газа  $\Pi(\omega, \mathbf{k})$  в координатно-частотном представлении. Поляризационный оператор  $\Pi(\omega, \mathbf{k})$  будет найден в задаче 24 а) при малых  $\omega \ll E_F$  и малых  $|\mathbf{k}| \ll p_0$  (см. выражение (5.39)). Однако, хотя характерная энергия отдачи при рассеянии тяжелой частицы на фермионах оказывается много меньше  $E_F$ , при этом характерный переданный импульс может оказаться порядка  $p_0$ . Поэтому нам потребуется более общее выражение для  $\Pi(\omega, \mathbf{k})$ , справедливое при малых  $\omega \ll E_F$  и произвольных  $\mathbf{k}$ . В принципе для отыскания  $\Pi(\omega, \mathbf{r})$  можно было бы воспользоваться точным выражением (8.53) для  $\Pi(\omega, \mathbf{k})$ , которое будет получено в задаче 44, однако оказывается более удобным перейти к пределу  $\omega \ll E_F$  непосредственно в выражении (4.90).

Чтобы установить связь между эффективным взаимодействием  $V_{\text{eff}}(\omega, \mathbf{r})$  и поляризационным оператором, обратим внимание на роль частотной дисперсии  $V_{\text{eff}}(\omega, \mathbf{r})$ . Как было выяснено в задаче 18, в отсутствие частотной дисперсии (т.е. для мгновенного взаимодействия) все диаграммы с замкнутыми петлями обращаются в ноль в силу аналитических свойств функции Грина частицы, выражающих принцип причинности. Поэтому в отсутствие частотной дисперсии все поправки к функции Грина частицы тождественно равны нулю. Принимая во внимание это обстоятельство, а также то, что нас интересуют малые переданные частоты  $\omega \ll E_F$ , оказывается удобным явно выделить зависящую от  $\omega$  часть поляризационного оператора (4.90). В результате эффективное взаимодействие может быть записано следующим образом:

$$V_{\text{eff}}(\omega, \mathbf{r}) = \lambda^2 (\Pi(\omega, \mathbf{r}) - \Pi(\omega = 0, \mathbf{r})) \quad (4.92)$$

Величина  $\kappa(\varepsilon)$  в интересующей нас области  $|\varepsilon| \ll E_F$  практически постоянна, поэтому заменим  $\kappa(\varepsilon)$  в (4.91) на  $\kappa(\varepsilon = 0) = p_0$ . После этого интеграл по  $\varepsilon$  в (4.90) вычисляется элементарно и мы получаем

$$V_{\text{eff}}(\omega, \mathbf{r}) = 2i\lambda^2 \int \frac{m^2}{(2\pi)^2 \mathbf{r}^2} \sin^2 p_0 |\mathbf{r}| (\operatorname{sign} \varepsilon_+ \operatorname{sign} \varepsilon_- - 1) \frac{d\varepsilon}{2\pi} = -i|\omega| F(\mathbf{r}), \quad (4.93)$$

$$F(\mathbf{r}) = \frac{\lambda^2 m^2}{2\pi^3 \mathbf{r}^2} \sin^2(p_0 |\mathbf{r}|), \quad (4.94)$$

Обратим внимание на то, что найденное выражение для  $V_{\text{eff}}(\omega, \mathbf{k})$  есть произведение функций  $\omega$  и  $\mathbf{r}$ . Такая факторизация справедлива лишь в пределе  $|\omega| \ll E_F$  и не имеет места для точного поляризационного оператора (8.53).

Перейдем в импульсное представление:

$$V_{\text{eff}}(\omega, \mathbf{k}) = -i|\omega| \int F(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}} d^3\mathbf{r} = -i|\omega| \tilde{F}(\mathbf{k}) \quad (4.95)$$

Интеграл по  $d^3\mathbf{r}$  нетрудно вычислить<sup>2</sup> в полярных координатах:

$$\tilde{F}(\mathbf{k}) = \frac{8\pi\lambda^2 m^2}{2\pi^3 |\mathbf{k}|} \int_0^\infty \sin^2(p_0 r) \sin(|\mathbf{k}|r) \frac{dr}{r} = \frac{1}{\pi} \lambda^2 m^2 \begin{cases} |\mathbf{k}|^{-1}, & |\mathbf{k}| \leq 2p_0 \\ 0, & |\mathbf{k}| > 2p_0 \end{cases} \quad (4.96)$$

Отсечка при  $|\mathbf{k}| = 2p_0$  в полученном выражении (4.96) означает, что при рассеянии с малой передачей энергии переданный импульс не может быть больше диаметра ферми-сферы  $2p_0$ .

**Решение 21 б)** Рассмотрим собственно-энергетическую часть функции Грина тяжелой частицы:

$$\Sigma(\varepsilon, \mathbf{p}) = i \int G_0(\varepsilon - \omega, \mathbf{p} - \mathbf{k}) V_{\text{eff}}(\omega, \mathbf{k}) \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{d\omega}{2\pi}, \quad (4.98)$$

где

$$G_0(\varepsilon, \mathbf{p}) = \frac{1}{\varepsilon - \mathbf{p}^2/2M + i\delta}, \quad V_{\text{eff}}(\omega, \mathbf{k}) = -i|\omega| \tilde{F}(\mathbf{k}). \quad (4.99)$$

Поскольку  $V_{\text{eff}}(\omega, \mathbf{k}) \propto |\omega|$ , интеграл по  $\omega$  в (4.98) формально расходится. Эта расходимость есть следствие приближенного характера нашего выражения (4.95) для  $V_{\text{eff}}$ , справедливого лишь при  $|\omega| \ll E_F$ . Регуляризуем интеграл по  $\omega$ , улучшив его сходимость за пределами области  $-\omega_0 < \omega < \omega_0$ , где  $\omega_0 \simeq E_F$ . Такая регуляризация требует некоторой осторожности, поскольку взаимодействие  $V_{\text{eff}}(\omega, \mathbf{k})$  должно удовлетворять общим требованиям аналитичности по  $\omega$ . Так при аналитическом продолжении с полуоси  $\omega > 0$  должно получаться запаздывающее взаимодействие (аналитичное в верхней полуплоскости  $\text{Im} \omega > 0$ ), а при продолжении с полуоси  $\omega < 0$  должно получаться опережающее взаимодействие (аналитичное в нижней полуплоскости  $\text{Im} \omega < 0$ ).

Требуемым условиям аналитичности можно удовлетворить, например, регуляризовав выражение для  $V_{\text{eff}}(\omega, \mathbf{k})$  следующим образом:

$$V_{\text{eff}}(\omega, \mathbf{k}) = -i|\omega| \left( \frac{i\omega_0}{i\omega_0 + |\omega|} \right)^n \tilde{F}(\mathbf{k}), \quad (4.100)$$

где  $n$  — достаточно большое положительное число.

Теперь проинтегрируем выражение (4.98) по  $\omega$ . Заметим, что если бы функция  $V_{\text{eff}}(\omega, \mathbf{k})$  была аналитична в полуплоскости  $\text{Im} \omega < 0$ , то интеграл был бы равен нулю

<sup>2</sup>При интегрировании по  $r = |\mathbf{r}|$  в (4.96) использован интеграл

$$\int_0^\infty \sin^2(\alpha r) \sin(\beta r) \frac{dr}{r} = \frac{\pi}{8} (2 \text{sign} \beta - \text{sign}(\beta + 2\alpha) - \text{sign}(\beta - 2\alpha)) \quad (4.97)$$

по теореме Коши. Поэтому удобно вычесть из интеграла (4.98) такое же выражение, в котором функция  $V_{\text{eff}}(\omega, \mathbf{k})$  при  $\omega > 0$  заменена на результат аналитического продолжения с полуоси  $\omega < 0$ . Действуя таким образом, получаем

$$\Sigma(\varepsilon, \mathbf{p}) = \int A(\varepsilon, \mathbf{p} - \mathbf{k}) \tilde{F}(\mathbf{k}) \frac{d^3 \mathbf{k}}{(2\pi)^3} \quad (4.101)$$

где

$$A(\varepsilon, \mathbf{p}) = -\frac{1}{\pi} \int_0^{\omega_0} \frac{\omega d\omega}{T_{\varepsilon, \mathbf{p}} + \omega} = \frac{T_{\varepsilon, \mathbf{p}}}{\pi} \ln \left( \frac{\omega_0 + T_{\varepsilon, \mathbf{p}}}{T_{\varepsilon, \mathbf{p}}} \right) - \frac{\omega_0}{\pi}, \quad T_{\varepsilon, \mathbf{p}} = \frac{\mathbf{p}^2}{2M} - \varepsilon - i\delta. \quad (4.102)$$

(При интегрировании по  $\omega > 0$  мы обрезали интеграл на  $\omega = \omega_0$ , воспользовавшись быстрым убыванием подинтегрального выражения в (4.100) при  $\omega \gg \omega_0$ .) Заметим, что вторым слагаемым  $-\omega_0/\pi$  в выражении (4.102) для  $A(\varepsilon, \mathbf{p})$  можно пренебречь, поскольку его вклад в  $\Sigma(\varepsilon, \mathbf{p})$  сводится к константе, дающей поправку к химпотенциалу частицы из-за взаимодействия с ферми-газом. Кроме того, под знаком логарифма в (4.102) можно пренебречь  $T_{\varepsilon, \mathbf{p}}$  по сравнению с  $\omega_0$ .

Интеграл по  $d^3 \mathbf{k}$  в выражении (4.101) можно вычислить следующим образом. Перейдем к переменным  $k = |\mathbf{k}|$  и  $q = |\mathbf{p} - \mathbf{k}|$  по формуле (4.38):

$$\Sigma(\varepsilon, \mathbf{p}) = \frac{1}{(2\pi)^2 p} \int_0^\infty k dk \tilde{F}(k) \int_{|p-k|}^{p+k} q dq \frac{T_{\varepsilon, q}}{\pi} \ln \left( \frac{\omega_0}{T_{\varepsilon, q}} \right) \quad (4.103)$$

Интеграл по области  $|p - k| < q < p + k$  дает

$$B_{\varepsilon, p}(k) = \frac{M}{4\pi} x^2 \left( 1 + 2 \ln \left( \frac{\omega_0}{x} \right) \right) \Big|_{x_-}^{x_+}, \quad x_{\pm} = \frac{(p \pm k)^2}{2M} - \varepsilon - i\delta \quad (4.104)$$

С учетом (4.96) получается следующее выражение:

$$\Sigma(\varepsilon, \mathbf{p}) = \frac{1}{(2\pi)^2 p} \int_0^\infty B_{\varepsilon, p}(k) \tilde{F}(k) k dk = \frac{\lambda^2 m^2}{\pi (2\pi)^2 p} \int_0^{2p_0} B_{\varepsilon, p}(k) dk \quad (4.105)$$

Интегрирование в (4.105) элементарно. Однако получающееся выражение весьма громоздко и мы не будем его выписывать.

Рассмотрим собственно-энергетическую часть  $\Sigma(\varepsilon, \mathbf{p})$  отдельно при энергиях частицы  $\varepsilon$  больших и малых по сравнению с  $\varepsilon_M = 2p_0^2/M$ . Для нахождения асимптотик явное выражение (4.105) оказывается не очень удобным. Более простой путь — вернуться к выражениям (4.101), (4.102) и выполнить разложение:

$$A(\varepsilon, \mathbf{p} - \mathbf{k}) = \frac{1}{\pi} T_{\varepsilon, \mathbf{p}} \begin{cases} \ln(2M\omega_0/\mathbf{k}^2) + 1, & |\mathbf{p}| \ll |\mathbf{k}|; \\ \ln(\omega_0/T_{\varepsilon, \mathbf{p}}), & |\mathbf{p}| \gg |\mathbf{k}|, \end{cases} \quad (4.106)$$

где во всех случаях подразумевается, что  $\varepsilon \simeq \mathbf{p}^2/2M$ , поскольку нас интересует окрестность массовой поверхности частицы. В разложении (4.106) мы опустили независимые от  $\varepsilon$  и  $\mathbf{p}$  члены, поскольку они дают лишь несущественный сдвиг химпотенциала частицы, а также члены пропорциональные  $\mathbf{p}\mathbf{k}$ , поскольку они обращаются в ноль при интегрировании в (4.101).

Нас интересует область не слишком больших энергий  $\varepsilon \ll \omega_0 \simeq E_F$ . В этой области логарифм в выражении (4.106) оказывается большим, и поэтому собственно-энергетическую часть (4.101) достаточно вычислить с логарифмической точностью:

$$\Sigma(\varepsilon, \mathbf{p}) = \alpha T_{\varepsilon, \mathbf{p}} \begin{cases} \ln(\omega_0/\varepsilon_M), & \varepsilon \ll \varepsilon_M; \\ \ln(\omega_0/T_{\varepsilon, \mathbf{p}}), & \varepsilon_M \ll \varepsilon \ll \omega_0, \end{cases} \quad \alpha = \frac{1}{\pi} F_{\mathbf{r}=0} = \frac{\lambda^2 m^2 p_0^2}{2\pi^4} \quad (4.107)$$

Поскольку  $T_{\varepsilon, \mathbf{p}} = -G^{-1}(\varepsilon, \mathbf{p})$ , перенормированная функция Грина

$$\tilde{G}(\varepsilon, \mathbf{p}) = \frac{1}{\varepsilon - \mathbf{p}^2/2M - \Sigma(\varepsilon, \mathbf{p})} \quad (4.108)$$

имеет полюс при  $\varepsilon = \mathbf{p}^2/2M$ . Получается, что взаимодействие с ферми-газом никак не влияет на закон дисперсии тяжелой частицы. Иными словами, найденная собственно-энергетическая часть дает только перенормировку вычета  $a$  в разложении  $G(\varepsilon, \mathbf{p}) = a/(\varepsilon - \mathbf{p}^2/2M + i\delta)$  вблизи полюса.

Обсудим перенормировку вычета  $a$  более подробно. Как следует из (4.107), поправка к вычету имеет порядок величины  $\alpha \ln(\omega_0/\varepsilon_M)$ . А поскольку  $\varepsilon_M \ll \omega_0$ , то даже при малом  $\alpha$  эта перенормировка может быть весьма большой. Представляет интерес рассмотреть задачу при

$$\alpha \ll 1, \quad \alpha \ln\left(\frac{\omega_0}{\varepsilon_M}\right) \gg 1. \quad (4.109)$$

В этой области, с одной стороны, все еще можно пользоваться теорией возмущений по малому  $\alpha$ , а с другой стороны — перенормировка функции Грина оказывается весьма сильной.

Чтобы найти функцию Грина, воспользуемся приемом, носящим название *метода ренормгруппы* (см. задачу 13). Рассмотрим как функция Грина  $G(\varepsilon, \mathbf{p})$  зависит от параметра ультрафиолетовой обрезки  $\omega_0$ . Зная эту зависимость, можно восстановить зависимость  $G$  от  $\varepsilon$  и  $\mathbf{p}$ , поскольку вся зависимость от  $\omega_0$  может быть выражена через безразмерный параметр  $\omega_0/T_{\varepsilon, \mathbf{p}}$ . Чтобы получить зависимость от  $\omega_0$  полезно рассмотреть производную  $\partial G/\partial \omega_0$  и вычислить ее, дифференцируя по отдельности члены диаграммного ряда для  $G$ . (Ход рассуждений при этом напоминает решение задачи 13.) В низшем порядке по константе связи  $\lambda$  уравнение ренормгруппы имеет следующий вид:

$$\frac{\partial G(\varepsilon, \mathbf{p})}{\partial \omega_0} = G^2(\varepsilon, \mathbf{p}) \frac{\partial \Sigma(\varepsilon, \mathbf{p})}{\partial \omega_0} = \frac{\alpha}{\omega_0} G(\varepsilon, \mathbf{p}) \quad (4.110)$$

В уравнении (4.110) мы использовали выражение (4.107) в области  $\varepsilon_M \ll \varepsilon \ll \omega_0$ . Решая уравнение  $\partial/\partial \omega_0 \ln G = \alpha/\omega_0$ , получаем степенную зависимость  $G \propto \omega_0^\alpha$ . Отсюда получаем, что зависимость функции Грина от  $\varepsilon$  и  $\mathbf{p}$  имеет степенную форму (4.33), причем коэффициент  $a_0$  в (4.33) есть  $\omega_0^\alpha$ .

## Глава 5.

# Идеальный ферми-газ.

### 5.1. Электроны на ферми-поверхности.

В этой главе собраны некоторые задачи, касающиеся свойств идеального ферми-газа. Строго говоря, все они могли бы быть решены без применения диаграмм. (Идеальный газ — вещь простая!) Однако, поскольку ферми-газ нас интересует, в основном, как возможность опробовать диаграммную технику, мы не будем использовать другие методы расчета.

Помимо этого, следует сказать, что в задачах с взаимодействием, которые будут рассмотрены в следующих главах, вычисления во многом опираются на более простые вычисления для идеального газа. Оказывается, что в диаграммах с взаимодействием можно выделить так называемые элементарные блоки. Выражения, соответствующие этим блокам, по своему виду такие же, как для идеального газа. Например, поляризационный оператор, возникающий в теории электрон-фононного взаимодействия и в теории ферми-жидкости, по своим свойствам оказывается близок к восприимчивости идеального газа (см. задачи 24, 31, 44, 45, 46).

Остановимся на важном свойстве симметрии ферми-газа. Речь идет о так называемой *электрон-дырочной симметрии на ферми-поверхности*, имеющей место при энергии электрон-дырочных возбуждений малой по сравнению с энергией Ферми. Как правило, интересные длинноволновые и низкочастотные эффекты в ферми-газе и ферми-жидкости связаны с возбуждениями вблизи уровня Ферми. Поэтому логично при вычислении таких величин выделять этот вклад заранее. Для этого пользуются следующим техническим приемом. Во всех диаграммах пренебрегают зависимостью плотности состояний  $\nu(\varepsilon)$  вблизи уровня Ферми от энергии  $\varepsilon = \xi(p)$ , и полагают  $\nu(\varepsilon) = \nu_0 = p_0 m / 2\pi^2 \hbar^3$ . При этом интегралы по импульсам преобразуются следующим образом:

$$\int \dots \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3} \rightarrow \frac{\nu_0}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{|\mathbf{n}|=1} \dots d\mathbf{n} d\xi, \quad (5.1)$$

где  $\mathbf{n} = \mathbf{p}/|\mathbf{p}|$  — единичный вектор. На жаргоне это называется «переход от интегрирования по  $p$  к интегрированию по  $\xi$ ». Метод интегрирования по  $\xi$  обязан своей популярностью обеспечиваемой им точной симметрией между частицами и дырками с

произвольной энергией, а не при  $\varepsilon = \varepsilon_F$  (см. задачу 25), и помимо этого тому обстоятельству, что интегрировать по  $\xi$  обычно легче (см. задачи 23, 24).

Следует отметить, что электрон–дырочная симметрия является приближенной. Однако, поправки, нарушающие эту симметрию, оказываются важны только если в задаче существенны состояния, далекие от уровня Ферми. Возможность перейти при рассмотрении какого-либо графика к интегрированию по  $\xi$  означает, что изучаемый эффект «сидит на ферми–поверхности». В задачах этого и следующих разделов интегрирование по  $\xi$  окажется весьма полезным.

### 5.1.1. Формула Кубо

В этом разделе мы рассмотрим задачу о нахождении динамической восприимчивости, описывающей какой-либо линейный отклик системы на переменное внешнее поле. С практической точки зрения, вопрос о восприимчивости представляет существенный интерес, поскольку большинство величин, измеряемых экспериментально, имеют характер линейных откликов (см. раздел 11). Стандартный метод работы с восприимчивостью использует запаздывающие и опережающие гриновские функции (см. формулу (5.10) ниже), а также, в более сложных случаях, — мацубаровскую температурную технику и аналитическое продолжение с мнимых дискретных частот на действительные вещественные (см. формулу (7.28) в разделе 7). Но если система не взаимодействующая, можно поступить проще.

Восприимчивость величины  $A$  по отношению к величине  $B$ , дается так называемой формулой Кубо

$$\chi(\omega) = \frac{i}{\hbar} \int_0^{\infty} \langle [\hat{A}(t), \hat{B}(0)] \rangle e^{i\omega t} dt, \quad (5.2)$$

вывод которой приведен, например, в §126 [5]. Чтобы найти среднее коммутатора в (5.2) по основному состоянию системы не взаимодействующих частиц, запишем операторы  $\hat{A}$  и  $\hat{B}$  в представлении вторичного квантования:

$$\hat{A}(t) = \sum_{mk} A_{mk} \psi_m^+ \psi_k e^{-i(E_k - E_m)t}, \quad \hat{B}(t) = \sum_{mk} B_{mk} \psi_m^+ \psi_k e^{-i(E_k - E_m)t} \quad (5.3)$$

Теперь подставим эти выражения в коммутатор  $\langle [\hat{A}(t), \hat{B}(0)] \rangle$ , и раскроем среднее по теореме Вика. Результат выглядит так<sup>1</sup>:

$$\chi(\omega) = \sum_{mk} A_{mk} B_{km} \frac{n(E_m) - n(E_k)}{E_k - E_m - \omega - i\delta}. \quad (5.4)$$

---

<sup>1</sup>Выражение (5.4) справедливо и для ферми-, и для бозе–статистики. В этом разделе мы будем считать температуру равной нулю. Отметим, однако, что вычисление по формуле Кубо всегда легко распространить на конечные температуры. При  $T > 0$  усреднение в (5.2) берется по равновесному термодинамическому состоянию, и при взятии среднего по теореме Вика возникают зависящие от температуры числа заполнения состояний частиц. Например, для фермионов в (5.4) следует положить  $n(E) = 1/(e^{E/T} + 1)$ .

Если собственные функции и матричные элементы  $A_{mk}$ ,  $B_{mk}$  известны, выражение (5.4) позволяет найти восприимчивость<sup>2</sup>. В случаях же, когда собственные функции неизвестны, формула (5.4) не особенно полезна.

Для таких таких более сложных случаев полезно иметь выражение восприимчивости непосредственно через функции Грина. Как известно, причинные функции Грина

$$G^c(x, x') = -i\langle T \psi_\alpha(x) \psi_\beta^\dagger(x') \rangle, \quad (5.5)$$

введенные в (2.8), полностью описывают основное состояние системы и дают все *статические* свойства<sup>3</sup>. Однако, оказывается, что изучать динамику с помощью этих функций нельзя (см. решение задачи 24 б)). Чтобы преобразовать выражение 5.4 к форме, содержащей содержащей гриновские функции, нужно использовать *запаздывающие и опережающие* функции Грина.

Напомним определение запаздывающей и опережающей функций  $G^R(t, t')$  и  $G^A(t, t')$ . Эти функции связаны с причинной функцией Грина так:

$$G^c(t, t') = \begin{cases} G^R(t, t'), & t > t' \\ G^A(t, t'), & t < t' \end{cases}. \quad (5.6)$$

В частотном представлении  $G^R(\varepsilon)$  и  $G^A(\varepsilon)$  имеют простой смысл: они дают разложение  $G^c$  на функции частоты, регулярные, соответственно, в верхней или в нижней полуплоскости. Например, в случае фермионов

$$G^{R(A)}(\varepsilon, \mathbf{p}) = \frac{1}{\varepsilon - \xi(\mathbf{p}) \pm i\delta} \quad (5.7)$$

соответствуют вкладам частиц и дырок в причинную функцию Грина:

$$\begin{aligned} G^c(\varepsilon, \mathbf{p}) &= (1 - n(\mathbf{p}))G^R(\varepsilon, \mathbf{p}) + n(\mathbf{p})G^A(\varepsilon, \mathbf{p}) = \\ &= \frac{1 - n(\mathbf{p})}{\varepsilon - \xi(\mathbf{p}) + i\delta} + \frac{n(\mathbf{p})}{\varepsilon - \xi(\mathbf{p}) - i\delta}, \end{aligned} \quad (5.8)$$

где  $n(\mathbf{p}) = \begin{cases} 1, & |\mathbf{p}| < p_0 \\ 0, & |\mathbf{p}| > p_0 \end{cases}$  — фермиевская функция распределения.

Чтобы выразить восприимчивость через  $G^R(\varepsilon)$  и  $G^A(\varepsilon)$ , представим энергетический знаменатель в (5.4) в виде интеграла по вспомогательной переменной:

$$\begin{aligned} \frac{1}{E_k - E_m - \omega - i\delta} &= \frac{1}{2\pi i} \int \frac{d\varepsilon}{(\varepsilon + \omega - E_k - i\delta)(\varepsilon - E_m + i\delta)} = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int G_k^A(\varepsilon + \omega) G_m^R(\varepsilon) d\varepsilon, \end{aligned} \quad (5.9)$$

<sup>2</sup>Например, для идеального ферми-газа собственные функции — плоские волны, а матричные элементы операторов — просто их фурье-компоненты, так что нахождение любого линейного отклика с помощью (5.4) — по существу, тривиально (см. задачи 24, 25).

<sup>3</sup>Например, распределение плотности, спина, статическую поляризуемость (задачи 7, 8, 14, 23)

где  $G_k^A(\varepsilon + \omega)$  и  $G_m^R(\varepsilon)$  — запаздывающая и опережающая функции, взятые в диагональном представлении. Подставляя это выражение в (5.4), получаем выражение для восприимчивости:

$$\chi(\omega) = \frac{1}{2\pi i} \int \text{Tr} \left( \left[ \hat{G}^A(\varepsilon + \omega) \hat{B}, \hat{G}^R(\varepsilon) \hat{A} \right] \hat{\rho} \right) d\varepsilon. \quad (5.10)$$

Здесь  $\hat{\rho}$  — матрица плотности системы (в диагональном представлении  $\hat{\rho}_{mk} = n(E_m) \delta_{mk}$ ). Выражение в квадратных скобках в (5.10) представляет собой коммутатор операторов  $\hat{G}^A(\varepsilon + \omega) \hat{B}$  и  $\hat{G}^R(\varepsilon) \hat{A}$ .

Основное преимущество выражения (5.10) по сравнению с (5.4) в том, что оно верно в произвольном базисе и, значит, может быть использовано даже если собственные функции неизвестны. Наиболее важный пример такой ситуации представляют задачи о проводимости и диффузии фермионов в случайном потенциале, которые мы рассмотрим в главе 9. В случайном потенциале собственные функции меняются от одной реализации потенциала к другой, поэтому интерес представляют величины, усредненные по случайному потенциалу. Мы увидим, что усреднять функции Грина и их произведения оказывается гораздо удобнее, чем действовать «в лоб», используя (5.4).

*Литература:* [1], гл. 1, 2, 3, 4; [6], гл. 1, 2.

## 5.2. Задачи 22÷27

**Задача 22.** (*Функция Грина в координатном представлении*) Найдите функцию Грина  $G(\varepsilon, \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$  при  $|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2| p_0 \gg 1$  двумя способами: сначала интегрируя по  $\xi$  от  $-\infty$  до  $+\infty$ , а затем точно, интегрируя по  $d^3p$ . Сравните результаты.

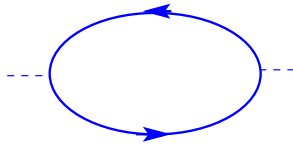
**Задача 23.** (*Эффект Рудермана-Киттеля*) В ферми-газе находится локализованный спин  $\mathbf{S}$ , взаимодействующий с локальной спиновой плотностью электронов:

$$\widehat{\mathcal{H}}_{\text{int}} = JS^i \hat{\sigma}^i(\mathbf{r} = 0), \quad (5.11)$$

где  $\hat{\sigma}^i(\mathbf{r}) = \psi_\alpha^\dagger(\mathbf{r}) \sigma_{\alpha\beta}^i \psi_\beta(\mathbf{r})$ .

Найдите распределение поляризации спина электронов  $\sigma^i(\mathbf{r}) = \langle \hat{\sigma}^i(\mathbf{r}) \rangle$  на больших расстояниях от спина  $\mathbf{S}$ :  $|\mathbf{r}| p_0 \gg 1$ . Покажите, что поляризация осциллирует, как функция координат, и определите период осцилляции<sup>4</sup>. Считайте взаимодействие  $J$  малым.

**Задача 24. а)** Коррелятор плотность-плотность ферми-газа  $\langle T \hat{n}(\mathbf{r}, t) \hat{n}(\mathbf{r}', t') \rangle$  дается следующей диаграммой:



<sup>4</sup>Эту задачу удобно решать, используя координатное представление для гриновских функций (см. задачу 22).



Рис. 5.1

Найдите этот коррелятор в частотно-импульсном представлении при малых  $\omega \ll E_F$ ,  $|\mathbf{k}| \ll p_0$ .

**б)** (*Динамическая спиновая восприимчивость*) Найдите парамагнитный вклад в магнитную восприимчивость  $\chi(\omega, k)$  электронного газа при  $T = 0$ , т. е. отклик спиновой поляризации в ответ на приложенное переменное магнитное поле. Считайте, что  $|\omega| \ll E_F$ ,  $|k| \ll p_0$ . Проверьте, что в пределе  $\omega/k \rightarrow 0$ ,  $k \rightarrow 0$  получается восприимчивость Паули  $\chi = 2\mu_B^2 \nu_0$ , где  $\nu_0 = p_0 m / 2\pi^2 \hbar^3$  — плотность состояний на уровне Ферми.

**Задача 25.** (*Отклик плотность-плотность при  $D=1$* ) Рассмотрим одномерный ферми-газ во внешнем переменном поле,

$$\widehat{\mathcal{H}}_{\text{int}}(t) = - \int \phi(x, t) \hat{n}(x, t) dx . \quad (5.12)$$

Рассмотрим линейный отклик плотности  $\hat{n}(x, t)$  на поле  $\phi(x, t)$ . Его можно записать так:

$$\langle \hat{n}(x, t) \rangle = \int \int_{t' < t} Q(x - x', t - t') \phi(x', t') dx' dt' , \quad (5.13)$$

или, в Фурье-представлении,  $\langle \hat{n}_{k, \omega} \rangle = Q(k, \omega) \phi_{k, \omega}$ . Функцию отклика  $Q(k, \omega)$  можно определить, пользуясь формулой Кубо, как в задаче 24 б), с заменой операторов плотности спина на операторы плотности числа частиц.

Найдите  $Q(k, \omega)$  при малых  $k$  и  $\omega$ ,  $|k| \ll p_0$ ,  $|\omega| \ll E_F$ . Сравните с функцией Грина фононов (4.7).

**Задача 26.** (*Флуктуации числа фермионов на прямой*) Для газа бесспиновых ферми-частиц на прямой запишите оператор  $\widehat{N}_L$  числа частиц внутри интервала  $0 < x < L$  (см. [5], §117). Для больших  $L \gg p_0^{-1}$  получите формулу

$$\langle \delta N_L^2 \rangle = \langle N_L^2 \rangle - \langle N_L \rangle^2 = \frac{1}{\pi^2} \ln p_0 L . \quad (5.14)$$

Любопытно, что флуктуации (5.14) неэкстенсивны (неаддитивны по длине интервала), в отличие от того, что можно было бы ожидать по аналогии с классическими термодинамическими флуктуациями. Неэкстенсивность есть проявление квантовых корреляций. При конечной температуре экстенсивность восстанавливается на масштабах, превосходящих тепловую длину:  $L \gg L_T = \hbar v_F / T$ .

Более трудным оказывается вопрос о нахождении полной статистики распределения числа частиц в конечном интервале. С помощью метода бозонизации, изложенного в главе 12, можно показать, что распределение вероятностей нормальное:

$$P(n) \sim \exp\left(-\frac{(n - a)^2}{2b}\right) , \quad (5.15)$$

где  $a = \langle N_L \rangle$ ,  $b = \langle N_L^2 \rangle$ . Элементарное решение этой задачи авторам неизвестно.

**Задача 27\*.** (*Катастрофа ортогональности*) В идеальный ферми-газ вносят примесь, на потенциале  $U(\mathbf{r})$  которой частицы могут упруго рассеиваться. Оказывается, основное состояние системы при этом полностью изменяется, даже если потенциал

$U(\mathbf{r})$  произвольно мал. В случае, когда рассеяние происходит только в  $s$ -канале, можно получить следующую оценку для интеграла перекрытия состояний<sup>5</sup>:

$$\langle 0'|0\rangle \simeq (p_0 L)^{-\alpha}, \quad \alpha = \frac{\delta_0^2}{\pi^2}, \quad (5.16)$$

где  $|0\rangle$  и  $|0'\rangle$  — основные состояния ферми-системы до и после внесения примеси,  $\delta_0$  — фаза рассеяния в  $s$ -канале при  $\varepsilon = E_F$ , а  $L$  — размер системы<sup>6</sup>.

Этот удивительный и важный результат был вначале получен элементарными средствами, путем явного выписывания слэтеровского детерминанта и оценки интеграла перекрытия<sup>7</sup>. Попытаемся перевести задачу о перекрытии основных состояний на язык диаграммной техники. Будем включать потенциал примеси плавно от  $t = -\infty$  до  $t = 0$ :

$$\widehat{\mathcal{H}}_{\text{int}}(t) = e^{\gamma t} \int U(\mathbf{r}) \psi^+(\mathbf{r}) \psi(\mathbf{r}) d^3r. \quad (5.17)$$

Рассмотрим среднее  $S$ -матрицы по основному состоянию ферми-газа при  $U(\mathbf{r}) = 0$ ,

$$K_\gamma = \left\langle \text{T exp} \left( -i \int_{-\infty}^0 \widehat{\mathcal{H}}_{\text{int}}(t) dt \right) \right\rangle. \quad (5.18)$$

При  $\gamma \rightarrow 0$  величина  $K_\gamma$  стремится к  $\langle 0|0'\rangle$ . (Почему?) Покажите, что

$$\ln K_\gamma = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} F_n, \quad (5.19)$$

где

$$F_n = (-i)^n \int dt_1 \dots \int dt_n \langle\langle \text{T} \widehat{\mathcal{H}}_{\text{int}}(t_1) \dots \widehat{\mathcal{H}}_{\text{int}}(t_n) \rangle\rangle, \quad (5.20)$$

причем  $\langle\langle \dots \rangle\rangle$  означает, что учитываются только связанные графики (см. теорему о разложении по связным диаграммам в §15 [1]).

Изобразите графически  $F_1, F_2, F_3$ . Сколько графиков соответствует каждому  $F_n$ ? Какие выражения сопоставляются графическим элементам? Катастрофе ортогональности отвечает  $K_{\gamma \rightarrow 0} \rightarrow 0$ , то есть

$$\text{Re} \ln K_\gamma \rightarrow -\infty \quad \text{при} \quad \gamma \rightarrow 0. \quad (5.21)$$

Покажите, что  $F_1$  дает чисто мнимый вклад, имеющий смысл перенормировки энергии основного состояния. А вот уже  $\text{Re} F_2 \sim \ln \gamma$ . Считая  $U(\mathbf{r})$  слабым и используя приближение  $\delta$ -функции  $U(\mathbf{r}) = \alpha \delta^{(3)}(\mathbf{r})$ , найдите  $\text{Re} F_2$  и оцените  $K_\gamma$ , отбросив вклады  $F_n$  более высокого порядка.

Каким образом, зная  $K_\gamma$ , можно оценить перекрытие основных состояний  $\langle 0|0'\rangle$ ? Покажите, что для этого следует положить  $\gamma$  порядка обратного расстояния между уровнями в системе, соответствующими состояниям с угловым моментом  $l = 0$ .

В приложениях часто возникает вопрос о катастрофе ортогональности для произвольного потенциала, не обязательно слабого. Как будет показано в гл. 12 (задача 75), и в этом случае можно выразить перекрытие старого и нового основных состояний через фазы рассеяния. Причем если имеется только  $s$ -рассеяние, формула (5.16) остается справедливой.

<sup>5</sup>Для бесспиновых фермионов показатель степени в (5.16) есть  $\alpha = \frac{1}{2} \delta_0^2 / \pi^2$ .

<sup>6</sup> $L \simeq 2\pi N^{1/3} / p_0$ , где  $N$  — полное число частиц.

<sup>7</sup>P. W. Anderson, *Phys. Rev. Lett.*, v. 18, p. 1049 (1967)

### 5.3. Решения

**Решение 22.** Найдем функцию Грина, интегрируя по  $\xi$ . Начнем с интегрирования по углам:

$$\begin{aligned} G(\varepsilon, r) &= \int \int \frac{p^2 dp \sin \theta d\theta}{(2\pi)^2} \frac{e^{ipr \cos \theta}}{\varepsilon - \xi(p) + i\delta \operatorname{sign} \varepsilon} = \\ &= \frac{1}{2\pi^2 r} \int_0^\infty \frac{p \sin pr dp}{\varepsilon - \xi(p) + i\delta \operatorname{sign} \varepsilon}, \end{aligned} \quad (5.22)$$

где  $\xi(p) = p^2/2m - E_F$ . Выражаем  $p$  через  $\xi$  и интегрируем по  $\xi$  вычетами, представив синус как разность экспонент:

$$\begin{aligned} G(\varepsilon, r) &= \frac{1}{2\pi^2 r} \int_{-\infty}^{+\infty} p_0 \frac{d\xi}{v_F} \frac{\sin(p_0 + \xi/v_F)r}{\varepsilon - \xi + i\delta \operatorname{sign} \varepsilon} = \\ &= -\frac{m}{2\pi r} e^{ir(\operatorname{sign} \varepsilon p_0 + |\varepsilon|/v_F)}. \end{aligned} \quad (5.23)$$

Найденная функция Грина осциллирует с периодом равным фермиевской длине волны  $\lambda_0 = 2\pi\hbar/p_0$ . Из-за эффектов ферми-статистики фаза осцилляций меняет знак на уровне Ферми (при  $\varepsilon = 0$ ).

Теперь выполним точное интегрирование по  $p$ . Выражение (5.22) есть четная функция  $p$ , поэтому можно распространить интеграл по  $p$  на всю вещественную ось и разделить результат пополам:

$$\frac{1}{4\pi^2 r} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{p \sin pr dp}{\varepsilon - p^2/2m + E_F + i\delta \operatorname{sign} \varepsilon}. \quad (5.24)$$

Разлагаем это выражение на простейшие дроби и интегрируем:

$$\frac{m}{4\pi^2 r} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{1}{\kappa - p} - \frac{1}{\kappa + p} \right) \sin pr dp = -\frac{m}{2\pi r} e^{i \operatorname{sign} \varepsilon \kappa r}, \quad (5.25)$$

где  $\kappa = \sqrt{2m(E_F + \varepsilon + i\delta \operatorname{sign} \varepsilon)}$ . Видим, что интегрирование по  $\xi$  дает хорошую точность при энергии  $\varepsilon$  много меньше фермиевской,  $|\varepsilon| \ll E_F$ .

**Решение 23.** Запишем спиновую поляризацию  $\sigma^i(\mathbf{r}) = \langle \psi_\alpha^+(\mathbf{r}) \sigma_{\alpha\beta}^i \psi_\beta(\mathbf{r}) \rangle$  через точную функцию Грина:

$$\sigma^i(\mathbf{r}) = \lim_{\substack{t' \rightarrow t+0 \\ \mathbf{r}=\mathbf{r}'}} -i\sigma_{\alpha\beta}^i G_{\beta\alpha}(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t'), \quad (5.26)$$

где подразумевается суммирование по спиновым индексам  $\alpha, \beta$ .

Функция Грина  $G$  выражается через функцию  $G_0$  ферми-газа в виде ряда, аналогичного ряду (3.11) для амплитуды рассеяния, рассмотренному в гл. 3. Причем оператор

$$\widehat{\mathcal{H}}_{\text{int}} = J \int S^i \delta^{(3)}(\mathbf{r}) \psi_\alpha^+(\mathbf{r}) \sigma_{\alpha\beta}^i \psi_\beta(\mathbf{r}) d^3 r \quad (5.27)$$

играет роль потенциала возмущения.

Интересующий нас эффект возникает в первом порядке по  $J$ :

$$G_{\alpha\beta}^{(1)}(\varepsilon, \mathbf{r}, \mathbf{r}') = JS^i \sigma_{\alpha\beta}^i G_0(\varepsilon, \mathbf{r}) G_0(\varepsilon, -\mathbf{r}') . \quad (5.28)$$

Подставляем  $G_{\alpha\beta}^{(1)}$  в (5.26):

$$\sigma^i(\mathbf{r}) = -2iJS^i \int \frac{d\varepsilon}{2\pi} G_0^2(\varepsilon, \mathbf{r}) . \quad (5.29)$$

Воспользуемся результатом (5.23) задачи 22 для  $G_0(\varepsilon, r)$  при  $p_0 r \gg 1$ :

$$\begin{aligned} \int \frac{d\varepsilon}{2\pi} G_0^2(\varepsilon, r) &= \left( \frac{m}{2\pi r} \right)^2 \int_0^\infty \left( e^{2ir(p_0 + \varepsilon/v_F)} + e^{-2ir(p_0 r - \varepsilon/v_F)} \right) \frac{d\varepsilon}{2\pi} \\ &= i \frac{mp_0}{(2\pi)^3} \frac{\cos 2p_0 r}{r^3} . \end{aligned} \quad (5.30)$$

Получаем затухающие осцилляции с периодом  $\pi/p_0$ :

$$\sigma^i(r) = JS^i \frac{mp_0}{4\pi^3} \frac{\cos 2p_0 r}{r^3} . \quad (5.31)$$

Точное выражение для плотности спина можно получить, взяв точную функцию Грина (5.25) и проинтегрировав ее квадрат в (5.29) по  $\varepsilon$ :

$$\sigma^i(r) = JS^i \frac{2mp_0^4}{\pi^3} \left( \frac{\cos x}{x^3} - \frac{\sin x}{x^4} \right) , \quad (5.32)$$

где  $x = 2p_0 r$ . Видим, что в асимптотике, т. е. на больших расстояниях, результат все более приближается к (5.31), что согласуется с «идеологией» интегрирования по  $\xi$ . Кроме того, отметим, что сингулярность точного выражения (5.32) при малых  $r$  имеет характер  $r^{-1}$ . Таким образом, при взятии интеграла по  $d^3r$  расходимости для полной поляризации не возникает. Выражение (5.31) более сингулярно, но при малых  $r$  по самому своему происхождению оно неприменимо, поскольку интегрирование по  $\xi$  гарантирует правильность ответа только на больших расстояниях.

**Решение 24 а)** Запишем выражение, соответствующее диаграмме на рис. 5.1:

$$\Pi(\omega, k) = -2i \int \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{d\varepsilon}{2\pi} G_0(\varepsilon_+, \mathbf{q}_+) G_0(\varepsilon_-, \mathbf{q}_-) , \quad (5.33)$$

где  $\varepsilon_\pm = \varepsilon \pm \omega/2$ ,  $\mathbf{q}_\pm = \mathbf{q} \pm \mathbf{k}/2$ , а множитель 2 возникает при суммировании по спинам. В интеграле (5.33) существенными оказываются  $\mathbf{q}_\pm$  вблизи Ферми-поверхности, поэтому при  $|\mathbf{k}| \ll p_0$  удобно разложить  $|\mathbf{q}_\pm|$  так:  $|\mathbf{q}_\pm| = q \pm (k/2) \cos \theta$ , где  $\theta$  — угол между векторами  $\mathbf{q}$  и  $\mathbf{k}$ . Тогда функция

$$G_0(\varepsilon_\pm, q_\pm) = \frac{1}{\varepsilon_\pm - \xi_\pm + i\delta \operatorname{sign} \xi_\pm} , \quad (5.34)$$

где  $\xi_{\pm}(q) = \xi(q_{\pm}) = \xi(q) \pm (v_F k/2) \cos \theta$ . Интегрируем (5.33) по  $\varepsilon$ , замыкая контур в верхней полуплоскости  $\omega$  и раскладывая произведение  $G_0$  на простейшие дроби. Интеграл отличен от нуля, если полюса функций  $G_0$  лежат в разных полуплоскостях:

$$\int \frac{d\varepsilon}{(\varepsilon + \omega/2 - \xi_+ + i\delta \operatorname{sign} \xi_+) (\varepsilon + \omega/2 - \xi_- + i\delta \operatorname{sign} \xi_-)} = \frac{2\pi i [n(\xi_-) - n(\xi_+)]}{\omega - v_F k \cos \theta + i\delta (\operatorname{sign} \xi_+ - \operatorname{sign} \xi_-)}, \quad (5.35)$$

где  $n(\xi)$  — фермиевская функция заполнения. Поскольку  $k$  мало, разность  $n(\xi_-) - n(\xi_+)$  отлична от нуля в тонком слое вблизи поверхности Ферми. Следовательно, можно проинтегрировать по  $\xi$ . В зависимости знака  $\cos \theta$  возможны два случая:

(I)  $\cos \theta > 0$ : Выражение (5.35) отлично от нуля при  $|\xi| < (v_F k/2) \cos \theta$ , причем  $n(\xi_-) - n(\xi_+) = -1$ ;

(II)  $\cos \theta < 0$ : Выражение (5.35) отлично от нуля при  $|\xi| < -(v_F k/2) \cos \theta$ , причем  $n(\xi_-) - n(\xi_+) = 1$ .

Итак, остается интеграл по углам:

$$\Pi(\omega, k) = \nu_0 \int_0^\pi \frac{v_F k \cos \theta}{\omega - v_F k \cos \theta + i\delta \operatorname{sign} \omega} \sin \theta d\theta, \quad (5.36)$$

где  $\nu_0 = m\rho_0/2\pi^2\hbar^3$  — плотность состояний. Обозначим  $x = \cos \theta$  и вычислим

$$\int_{-1}^1 \frac{x dx}{x_0 - x + i\delta \operatorname{sign} x_0} = A + iB \quad (5.37)$$

$$A = -2 + x_0 \ln \left| \frac{x_0 + 1}{x_0 - 1} \right|, \quad B = \begin{cases} 0, & |x_0| > 1 \\ -\pi x_0, & 0 < x_0 < 1 \\ \pi x_0, & -1 < x_0 < 0 \end{cases}. \quad (5.38)$$

Получаем:

$$\Pi(\omega, k) = -2\nu_0 \left[ 1 - \frac{\omega}{2kv_F} \ln \left| \frac{kv_F + \omega}{kv_F - \omega} \right| + \frac{\pi i |\omega|}{2kv_F} \theta \left( 1 - \frac{|\omega|}{kv_F} \right) \right]. \quad (5.39)$$

**Первое решение 24 б)** Диаграмма для спинового коррелятора отличается от диаграммы на рис. 5.1 лишь незначительно — наличием спиновых операторов в вершинах. Соответствующее аналитическое выражение отличается от (5.33) спиновым множителем  $\operatorname{Tr} \sigma^i \sigma^j = 2\delta_{ij}$ . Поэтому, на первый взгляд, для отыскания спиновой восприимчивости можно просто воспользоваться результатом части а).

В том, что это неверно, легче всего убедиться, заметив, что выражение (5.39) для  $\Pi(\omega, k)$  как функции частоты  $\omega$  не обладает аналитическими свойствами восприимчивости, поскольку имеет особенности в полуплоскости  $\operatorname{Im} \omega > 0$ . Последнее видно уже из выражения (5.35), устроенного так, что в зависимости от знаков  $\xi_+$  и  $\xi_-$  полюс по  $\omega$  может оказаться в верхней полуплоскости, в нижней, или на вещественной оси. Это автоматически приводит к нарушению причинности и в окончательном ответе (5.39).

С формальной точки зрения проблема в том, что в петле на рис. 5.1 были взяты причинные функции Грина. Поэтому по своим аналитическим свойствам петля из причинных гриновских функций соответствует поляризованному оператору, а не восприимчивости, и аналитические свойства оказываются следующими:  $\Pi(-\omega) = \Pi(\omega)$ , а не  $\chi(-\omega^*) = \chi^*(\omega)$ . В результате особенности на плоскости комплексного  $\omega$  оказываются расположенными симметрично относительно  $\omega = 0$ .

Отметим, что на самом деле восприимчивость и поляризованный оператор можно связать друг с другом с помощью мацубаровской техники, используя мнимые частоты и метод аналитического продолжения (см. задачу 37, гл. 7). При этом выясняется, что надо взять выражение (5.39) для петли на рис. 5.1 при  $\omega > 0$  и продолжить в верхнюю полуплоскость комплексного  $\omega$ , а с нее — на  $\omega < 0$ . (Так что приведенное выше соображение не совсем уж и неправильное!).

Однако, пока мы не будем этим пользоваться, а проделаем прямое вычисление по формуле Кубо. Возьмем в качестве  $\hat{A}(t)$  и  $\hat{B}(t)$  в (5.2) оператор плотности намагниченности:

$$\hat{s}_z(\mathbf{r}, t) = \mu_B \left[ \hat{\psi}_\uparrow^+(\mathbf{r}, t) \hat{\psi}_\uparrow(\mathbf{r}, t) - \hat{\psi}_\downarrow^+(\mathbf{r}, t) \hat{\psi}_\downarrow(\mathbf{r}, t) \right]. \quad (5.40)$$

Раскроем среднее коммутатора в (5.2) по теореме Вика как сумму всевозможных парных средних операторов  $\psi$  и  $\psi^+$ , и оставим только связанные графики:

$$\begin{aligned} \chi_{\omega, \mathbf{k}} = & 2i \mu_B^2 \int \int dt d^3 r e^{i\omega t + i\mathbf{k}\mathbf{r}} \left[ \langle \hat{\psi}_\uparrow^+(\mathbf{r}, t) \hat{\psi}_\uparrow(0, 0) \rangle \langle \hat{\psi}_\uparrow(\mathbf{r}, t) \hat{\psi}_\uparrow^+(0, 0) \rangle \right. \\ & \left. - \langle \hat{\psi}_\uparrow^+(0, 0) \hat{\psi}_\uparrow(\mathbf{r}, t) \rangle \langle \hat{\psi}_\uparrow(0, 0) \hat{\psi}_\uparrow^+(\mathbf{r}, t) \rangle \right] \end{aligned} \quad (5.41)$$

(двойка учитывает спин). Средние вычисляем непосредственно по определению операторов вторичного квантования<sup>8</sup>:

$$\langle \hat{\psi}_\uparrow^+(\mathbf{r}, t) \hat{\psi}_\uparrow(\mathbf{r}', t') \rangle = \sum_{\mathbf{p}} e^{-i\xi(\mathbf{p})(t'-t) + i\mathbf{p}(\mathbf{r}' - \mathbf{r})} n(\xi(\mathbf{p})), \quad (5.42)$$

$$\langle \hat{\psi}_\uparrow(\mathbf{r}, t) \hat{\psi}_\uparrow^+(\mathbf{r}', t') \rangle = \sum_{\mathbf{p}} e^{-i\xi(\mathbf{p})(t'-t) + i\mathbf{p}(\mathbf{r}' - \mathbf{r})} [1 - n(\xi(\mathbf{p}))], \quad (5.43)$$

где  $n(\xi)$  — фермиевская функция распределения. Делая преобразование Фурье, получаем для  $\chi_{\omega, \mathbf{k}}$  такое выражение:

$$2i \mu_B^2 \int \int_{\substack{|\mathbf{q}_+| > p_0 \\ |\mathbf{q}_-| < p_0}} \left[ G^R(\varepsilon_+, \mathbf{q}_+) G^A(\varepsilon_-, \mathbf{q}_-) - G^A(\varepsilon_-, \mathbf{q}_+) G^R(\varepsilon_+, \mathbf{q}_-) \right] \frac{d\varepsilon d^3 q}{(2\pi)^4}, \quad (5.44)$$

где запаздывающая и опережающая гриновские функции есть

$$G^{R,A}(\varepsilon, \mathbf{q}) = \frac{1}{\varepsilon - \xi(\mathbf{q}) \pm i\delta}. \quad (5.45)$$

Интегрирование по  $\varepsilon$  дает:

$$\int G^R(\varepsilon_+, \mathbf{q}_+) G^A(\varepsilon_-, \mathbf{q}_-) d\varepsilon = \frac{2\pi i}{\omega - v_F k \cos \theta + i\delta}, \quad (5.46)$$

<sup>8</sup>Применяя теорему Вика, следует иметь в виду, что среднее в формуле Кубо не T-упорядоченное.

где  $\theta$  — угол между  $\mathbf{k}$  и  $\mathbf{q}$ . Вместо (5.35) получаем:

$$\chi_{\omega,k} = -\frac{\mu_B^2}{4\pi^3} \int_{\substack{|\mathbf{q}_+| > p_0 \\ |\mathbf{q}_-| < p_0}} d^3q \left[ \frac{1}{\omega - v_F k \cos \theta + i\delta} - \frac{1}{\omega + v_F k \cos \theta + i\delta} \right]. \quad (5.47)$$

Это выражение имеет ясный смысл: переменное внешнее поле возбуждает электрон-дырочную пару. Электрон имеет импульс  $\mathbf{q}_+$ , а дырка —  $\mathbf{q}_-$ . Принцип Паули накладывает ограничение на фазовый объем:  $|\mathbf{q}_+| > p_0$ ,  $|\mathbf{q}_-| < p_0$ , откуда следует, что  $\cos \theta > 0$ . Энергия пары есть  $\xi(\mathbf{q}_+) - \xi(\mathbf{q}_-) = v_F k \cos \theta$ , и поскольку нас интересует предел малых  $k$ , энергии электрона и дырки малы. Из приведенного выражения для энергии пары следует, что и электронное, и дырочное состояние отстоят от уровня Ферми не более чем на  $kv_F$ . Нас интересуют малые  $k$ , поэтому в интеграле по  $q^2 dq$  можно перейти к интегрированию по  $\xi$ :

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\xi n(\xi_-) (1 - n(\xi_+)) = \begin{cases} v_F k \cos \theta, & \text{при } \cos \theta > 0 \\ 0, & \text{при } \cos \theta < 0 \end{cases}. \quad (5.48)$$

Остается интеграл по углам  $0 < \theta < \pi/2$ . Обратим внимание на то, что замена  $\omega + i\delta \rightarrow -\omega - i\delta$  эквивалентна замене  $\theta \rightarrow \pi/2 - \theta$ . Поэтому:

$$\chi_{\omega,k} = \mu_B^2 \nu_0 \int_0^{\pi} \frac{v_F k \cos \theta}{\omega - v_F k \cos \theta + i\delta} \sin \theta d\theta. \quad (5.49)$$

Сделаем обычную подстановку  $x = \cos \theta$  и вычислим

$$\int_{-1}^1 \frac{x dx}{x_0 - x + i\delta} = -2 + x_0 \ln \left( \frac{x_0 + i\delta + 1}{x_0 + i\delta - 1} \right). \quad (5.50)$$

Полагая  $x_0 = \omega/kv_F$ , находим<sup>9</sup>

$$\chi_{\omega,k} = 2\mu_B^2 \nu_0 \left[ 1 - \frac{\omega}{2kv_F} \ln \left| \frac{kv_F + \omega}{kv_F - \omega} \right| + \frac{\pi i}{2} \frac{\omega}{kv_F} \theta \left( 1 - \frac{|\omega|}{kv_F} \right) \right]. \quad (5.51)$$

Соответственно, в статическом пределе  $\omega/kv_F \rightarrow 0$ ,  $k \rightarrow 0$ , получаем равновесную паулиевскую восприимчивость:  $\chi_{\text{para}} = 2\mu_B^2 \nu_0$ .

**Другое решение 24 б)** Можно действовать иначе: сначала найти мнимую часть  $\chi_{\omega,k}$ , а затем восстановить по ней вещественную, пользуясь аналитическими свойствами восприимчивости. Физически мнимая часть  $\chi$  описывает диссипацию, т. е. возбуждение переменным полем электрон-дырочных пар. Поэтому, как и в задаче 17, в петле на рис. 5.1 виртуальные состояния электрона и дырки надо брать на массовой поверхности  $\varepsilon = \xi(\mathbf{q})$ . Формально это соответствует замене

$$G^{A,R}(\varepsilon, \mathbf{q}) \rightarrow \pm i\pi \delta(\varepsilon - \xi(\mathbf{q})) \quad (5.52)$$

<sup>9</sup>Отметим, что выражение (5.39) для причинного коррелятора при  $\omega > 0$  совпадает с выражением (5.51) для запаздывающего коррелятора, а при  $\omega < 0$  отличается комплексным сопряжением.

в выражении (5.33):

$$\operatorname{Im} \chi_{\omega, k} = 2 \mu_B^2 \pi^2 \int_{\substack{|\mathbf{q}_+| > p_0 \\ |\mathbf{q}_-| < p_0}} \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \int \frac{d\varepsilon}{2\pi} \delta(\varepsilon_+ - \xi(\mathbf{q}_+)) \delta(\varepsilon_- - \xi(\mathbf{q}_-)) . \quad (5.53)$$

Смысл данного выражения в том, что в результате поглощения кванта  $\hbar\omega$  переменного внешнего поля электрон с энергией  $\xi_-$  под уровнем Ферми возбуждается в состояние с энергией  $\xi_+$  над уровнем Ферми. Это выражение дает  $\operatorname{Im} \chi$  только при  $\omega > 0$ , а при  $\omega < 0$  оно равно 0, как и должно быть для вероятности распада. Получив  $\operatorname{Im} \chi$  при положительных  $\omega$ , мы распространим его на отрицательные  $\omega$  по свойству восприимчивости  $\chi(-\omega) = \chi^*(\omega)$ .

Интеграл по  $\varepsilon$  в (5.53) устраняет одну  $\delta$ -функцию:

$$\operatorname{Im} \chi_{\omega, k} = \mu_B^2 \int_{\substack{|\mathbf{q}_+| > p_0 \\ |\mathbf{q}_-| < p_0}} \frac{d^3 q}{(2\pi)^2} \delta(\omega - \xi(\mathbf{q}_+) + \xi(\mathbf{q}_-)) . \quad (5.54)$$

Как и в предыдущем решении, поскольку нас интересует длинноволновый предел  $k \ll p_0^{-1}$ , переходим от интеграла по  $q^2 dq$  к интегралу по  $\xi$ , который дает  $kv_F \cos \theta$  при  $\cos \theta > 0$ , и 0 в противном случае. Остается интеграл по углам:

$$\int_0^{\pi/2} v_F k \cos \theta \delta(\omega - v_F k \cos \theta) \sin \theta d\theta = \begin{cases} \omega, & \text{при } 0 < \omega < kv_F \\ 0, & \text{при } \omega > kv_F \end{cases} . \quad (5.55)$$

Теперь, поскольку  $\chi(-\omega) = \chi^*(\omega)$ , берем нечетную функцию

$$\operatorname{Im} \chi_{\omega, k} = \mu_B^2 \nu_0 \begin{cases} \omega, & \text{при } |\omega| < kv_F \\ 0, & \text{при } |\omega| > kv_F \end{cases} , \quad (5.56)$$

и восстанавливаем  $\chi(\omega)$  по аналитичности:

$$\chi(\omega) = \frac{1}{\pi} \int \frac{\operatorname{Im} \chi(\omega') d\omega'}{\omega' - \omega - i0} . \quad (5.57)$$

Это приводит к точно такому же интегралу, что и в предыдущем решении.

Заметим, что в более сложных ситуациях нахождение восприимчивости в два этапа (сначала мнимая часть, а затем вещественная) может оказаться удобнее прямого вычисления. Мнимая часть всегда связана с определенными процессами распада, поэтому она обычно имеет более прозрачную структуру, чем вещественная часть.

**Решение 25.** Нас интересует динамический отклик плотность-плотность. Вычислим его по формуле Кубо (5.2). Для бесспиновых электронов оператор плотности числа частиц есть

$$\hat{n}(x, t) = \hat{\psi}^+(x, t) \hat{\psi}(x, t) , \quad (5.58)$$

поэтому

$$Q(\omega, k) = \frac{i}{\hbar} \int_0^\infty \langle [\hat{n}_k(t), \hat{n}_k(0)] \rangle e^{i\omega t} dt . \quad (5.59)$$



Раскрываем среднее коммутатора по теореме Вика, как и в предыдущей задаче, и после интегрирования по  $\varepsilon$ , получаем выражение аналогичное (5.47):

$$Q(\omega, k) = \int_{\substack{|q_+| > p_0 \\ |q_-| < p_0}} \left[ \frac{1}{\omega - qk/m + i\delta} + \frac{1}{-\omega - qk/m - i\delta} \right] \frac{dq}{2\pi}. \quad (5.60)$$

Ограничения, накладываемые принципом Паули, означают, что  $q$  меняется в пределах

$$\begin{aligned} p_0 - k/2 < q < p_0 + k/2 & \quad , \quad \text{при } k > 0, \\ -p_0 - |k|/2 < q < -p_0 + |k|/2 & \quad , \quad \text{при } k < 0. \end{aligned} \quad (5.61)$$

Следовательно, при малых  $k \ll p_0^{-1}$  в подинтегральном выражении (5.60) можно просто положить  $q = p_0$  при  $k > 0$ , и  $q = -p_0$  при  $k < 0$ . При этом мы пренебрегаем зависимостью скорости  $q/m$  от энергии в малой окрестности уровня Ферми. Иначе говоря, мы линеаризуем закон дисперсии:

$$\xi(p) = p^2/2m - E_F \rightarrow \xi(p) = v_F(|p| - p_0) \quad (5.62)$$

(что эквивалентно переходу к интегрированию по  $\xi$ ). Получаем

$$Q(\omega, k) = \frac{k}{2\pi} \left[ \frac{1}{\omega - v_F|k| + i\delta} - \frac{1}{\omega + v_F|k| + i\delta} \right], \quad (5.63)$$

или

$$Q(\omega, k) = \nu_{1D} \frac{v_F^2 k^2}{\omega^2 - v_F^2 k^2 + i\delta \operatorname{sign} \omega}, \quad (5.64)$$

где  $\nu_{1D} = 1/\pi v_F$  — плотность состояний при  $D = 1$  без учета спинового вырождения. Учет спина увеличивает  $\nu_{1D}$  вдвое.

**Решение 26.** Оператор числа частиц в интервале  $0 < x < L$  есть

$$\widehat{N}_L = \int_0^L \widehat{n}(x) dx, \quad \widehat{n}(x) = \psi^+(x)\psi(x), \quad (5.65)$$

а  $\widehat{N}_L^2 = \int_0^L \int_0^L \widehat{n}(x)\widehat{n}(x') dx dx'$ . Плотность  $\langle n \rangle = p_0/\pi$ , следовательно,

$$\langle \widehat{N}_L \rangle = \int_0^L \langle \widehat{n}(x) \rangle dx = \frac{p_0}{\pi} L. \quad (5.66)$$

Нас интересует

$$\langle \delta \widehat{N}_L^2 \rangle = \int_0^L \int_0^L \langle \langle \widehat{n}(x)\widehat{n}(x') \rangle \rangle dx dx', \quad (5.67)$$

где  $\langle \langle \dots \rangle \rangle$  обозначает неприводимый коррелятор, получаемый «связным» усреднением.

Переходим к импульсному представлению:  $\psi(x) = \sum_p a_p e^{ipx}$ . Тогда

$$\langle \widehat{N}_L^2 \rangle = \sum_{p_1, p_2, p_3, p_4} \int_0^L \int_0^L dx dx' \langle a_{p_1}^+ a_{p_2} a_{p_3}^+ a_{p_4} \rangle e^{ix(p_2-p_1)+ix'(p_4-p_3)} \quad (5.68)$$

Раскроем среднее по теореме Вика:

$$\langle a_{p_1}^+ a_{p_2} a_{p_3}^+ a_{p_4} \rangle = \langle a_{p_1}^+ a_{p_2} \rangle \langle a_{p_3}^+ a_{p_4} \rangle + \langle a_{p_1}^+ a_{p_4} \rangle \langle a_{p_2} a_{p_3}^+ \rangle. \quad (5.69)$$

Нас интересует только второе слагаемое, поскольку первое есть  $\langle N_L \rangle^2$  и не дает вклада в неприводимый коррелятор. Получаем

$$\begin{aligned} \langle \langle n(x)n(x') \rangle \rangle &= \sum \langle a_{p_1}^+ a_{p_2} \rangle \langle a_{p_3}^+ a_{p_4} \rangle e^{ix(p_2-p_1)+ix'(p_4-p_3)} = \\ &= \int_{-p_0}^{p_0} \frac{dp_1}{2\pi} e^{ip_1(x'-x)} \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-p_0}^{p_0} \right] e^{ip_3(x-x')} \frac{dp_3}{2\pi} = \\ &= - \left[ \int_{-p_0}^{p_0} \frac{dp}{2\pi} e^{ip(x-x')} \right]^2 + \int_{-p_0}^{p_0} \frac{dp}{2\pi} e^{ip(x-x')} \delta(x-x') = \\ &= - \frac{1}{\pi^2} \frac{\sin^2 p_0(x-x')}{(x-x')^2} + \frac{p_0}{\pi} \delta(x-x'). \end{aligned} \quad (5.70)$$

Интегрируя это выражение, находим

$$\langle \delta N_L^2 \rangle = \frac{p_0}{\pi} L - \frac{1}{\pi^2} \int_0^L \int_0^L \frac{\sin^2 p_0(x-x')}{(x-x')^2} dx dx'. \quad (5.71)$$

Перейдем к новым координатам:  $u = x - x'$ ,  $v = x + x'$ :

$$\begin{aligned} \int_0^L \int_0^L \frac{\sin^2 p_0(x-x')}{(x-x')^2} dx dx' &= 2 \int_0^L du \frac{\sin^2 p_0 u}{u^2} \int_u^L dv \\ &= 2 \int_0^L (L-u) \frac{\sin^2 p_0 u}{u^2} du \simeq 2 \left[ \frac{\pi}{2} L p_0 - \frac{1}{2} \ln L p_0 \right] \end{aligned}$$

Итак, находим

$$\langle \delta N_L^2 \rangle = \frac{p_0}{\pi} L - \frac{p_0}{\pi} L + \frac{1}{\pi^2} \ln L p_0 = \frac{1}{\pi^2} \ln p_0 L, \quad (5.72)$$

что и требовалось.

**Первое решение 27.** Будем считать электроны бесспиновыми и восстановим зависимость от спина в конце. Возьмем среднее  $S$ -матрицы по основному состоянию газа с  $U(\mathbf{r}) = 0$ ,

$$K_\gamma = \left\langle \text{T} \exp(-i \int_{-\infty}^0 \widehat{\mathcal{H}}_{\text{int}}(t) dt) \right\rangle, \quad (5.73)$$

и разложим экспоненту в ряд:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_{-\infty}^0 dt_1 \int_{-\infty}^{t_1} dt_2 \dots \int_{-\infty}^{t_{n-1}} dt_n (-i)^n \langle \widehat{\mathcal{H}}_{\text{int}}(t_1) \widehat{\mathcal{H}}_{\text{int}}(t_2) \dots \widehat{\mathcal{H}}_{\text{int}}(t_n) \rangle \quad (5.74)$$

Выделим из суммы часть с  $n > 0$ :

$$K_\gamma = 1 + \Lambda . \quad (5.75)$$

Можно обычным образом разложить  $\ln K_\gamma$  в ряд по  $\Lambda$ :

$$\ln K_\gamma = \Lambda - \frac{1}{2}\Lambda^2 + \frac{1}{3}\Lambda^3 - \dots \quad (5.76)$$

Подставим сюда выражение для  $\Lambda$  в виде суммы средних от членов разложения Т-экспоненты в ряд и раскроем скобки. Изучив несколько низших порядков теории возмущений убедимся, что при раскрытии средних по теореме Вика сократятся все средние, за исключением связанных графиков. Это наблюдение можно обобщить на графики произвольного порядка, и доказать так называемую *теорему о связанных графиках*.

Теорема утверждает, что логарифм среднего  $S$ -матрицы можно представить в виде ряда:

$$\ln K_\gamma = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} F_n , \quad (5.77)$$

где каждое  $F_n$  даётся *единственным* графиком:

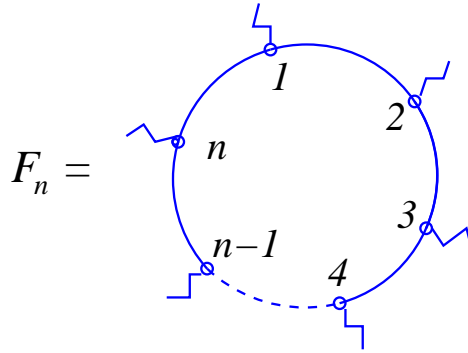


Рис. 5.2

Доказательство теоремы о связанных графиках нетрудно получить, заметив, что сокращение несвязных графиков есть факт чисто комбинаторного происхождения. Он опирается на свойства комбинаторных множителей, возникающих при раскрытии среднего (5.74) по теореме Вика, а также на свойства биномиальных коэффициентов, появляющихся из членов  $\Lambda^n$  в (5.76). Множители  $1/n$  в (5.77) возникают потому, что способов «связного» усреднения  $\langle \widehat{\mathcal{H}}_{\text{int}}(t_1) \dots \widehat{\mathcal{H}}_{\text{int}}(t_n) \rangle$  всего  $(n-1)!$ , а способов упорядочения времён в графике —  $n!$ .

Теорема (5.77) напоминает известную теорему о связанных графиках для термодинамического потенциала  $\Omega$  (см. [1], гл. 3, § 15). Нетрудно заметить, что различие между

усредняемыми величинами,  $\ln\langle S \rangle$  в одном случае, и  $\Omega$  — в другом, сводится просто к замене реального времени на мацубаровское. (Напомним, что  $e^{\Omega/T}$  есть среднее от  $S$ -матрицы во мнимом времени — см. главу 7.) Ход доказательства в обоих случаях один и тот же.

Перейдем к рассмотрению членов ряда (5.77). Первые три графика ряда выглядят так:

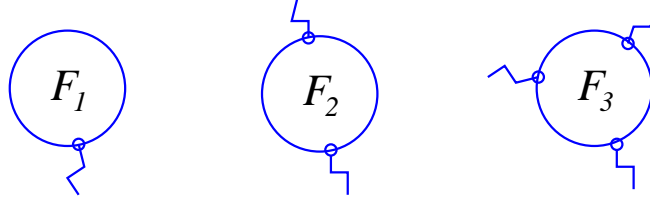


Рис. 5.3

Вычисление удобно провести во временном представлении. Вклад  $F_1$  имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} F_1 &= -i \int_{-\infty}^0 \langle \widehat{\mathcal{H}}_{\text{int}}(t) \rangle dt = -i \int_{-\infty}^0 \left( \int \langle \psi^+(\mathbf{r})\psi(\mathbf{r})U(\mathbf{r}) \rangle d^3\mathbf{r} \right) e^{\gamma t} dt \\ &= -i \frac{n}{\gamma} \int U(\mathbf{r}) d^3\mathbf{r}, \end{aligned} \quad (5.78)$$

где  $n$  — плотность ферми-газа. Физически этот вклад связан со сдвигом энергии основного состояния, вычисленным в первом порядке теории возмущений. Поэтому он не имеет отношения к вопросу об ортогональности состояний. В самом деле, допустим, что в результате введения возмущения энергия основного состояния изменилась на  $\delta\varepsilon$ , а само состояние осталось в точности тем же. Тогда

$$\ln K_\gamma = -i \int_{-\infty}^0 \delta\varepsilon e^{\gamma t} dt = -i \delta\varepsilon/\gamma. \quad (5.79)$$

Вклад второго порядка  $F_2$  есть

$$F_2 = \frac{(-i)^2}{2} \int_{-\infty}^0 \int_{-\infty}^0 \langle\langle \widehat{\mathcal{H}}_{\text{int}}(t')\widehat{\mathcal{H}}_{\text{int}}(t) \rangle\rangle dt dt' = - \int_{-\infty}^0 \int_{-\infty}^t \langle\langle \widehat{\mathcal{H}}_{\text{int}}(t)\widehat{\mathcal{H}}_{\text{int}}(t') \rangle\rangle dt dt' \quad (5.80)$$

Выполняя усреднение в  $\langle\langle \widehat{\mathcal{H}}_{\text{int}}(t)\widehat{\mathcal{H}}_{\text{int}}(t') \rangle\rangle$  по теореме Вика, получаем

$$e^{\gamma t} e^{\gamma t'} \iint U(\mathbf{r})U(\mathbf{r}') \langle \psi^+(\mathbf{r}, t)\psi(\mathbf{r}', t') \rangle \langle \psi(\mathbf{r}, t)\psi^+(\mathbf{r}', t') \rangle d^3\mathbf{r} d^3\mathbf{r}'. \quad (5.81)$$

Теперь заменим потенциал рассеяния на  $\delta$ -функцию,  $U(\mathbf{r}) = \alpha\delta^{(3)}(\mathbf{r})$ , и вычислим парные средние в (5.81) следующим образом:

$$\langle \psi^+(\mathbf{r}, t)\psi(\mathbf{r}, t') \rangle_{\mathbf{r}=0} = \sum_{\mathbf{p}} e^{-i\xi(\mathbf{p})(t'-t) - \delta\xi(\mathbf{p})} n(\mathbf{p}) = \frac{\nu_0}{\delta + i(t-t')}, \quad (5.82)$$

$$\langle \psi(\mathbf{r}, t)\psi^+(\mathbf{r}, t') \rangle_{\mathbf{r}=0} = \sum_{\mathbf{p}} e^{i\xi(\mathbf{p})(t'-t) + \delta\xi(\mathbf{p})} (1 - n(\mathbf{p})) = \frac{\nu_0}{\delta + i(t-t')} \quad (5.83)$$

Параметр  $\delta \sim E_F^{-1}$  введен в (5.82), (5.83), чтобы регуляризовать интеграл по  $\mathbf{p}$ . Для вычисления этого интеграла мы воспользовались приближением постоянной плотности состояний в окрестности  $E_F$  и заменили интеграл по  $\mathbf{p}$  интегралом по  $\xi$ . Такое приближение оправдано тем, что нас интересует инфракрасно расходящийся вклад в  $F_2$ , который определяется динамикой частиц с энергиями близкими к  $E_F$ .

Подставляя (5.82) и (5.83) в выражение (5.81), а последнее, в свою очередь, — в (5.80), получаем

$$F_2 = -(\nu_0 \alpha)^2 \int_{-\infty}^0 \int_{-\infty}^t e^{\gamma t} e^{\gamma t'} \frac{dt' dt}{(\delta + i(t - t'))^2} \quad (5.84)$$

Этот интеграл нетрудно вычислить, если перейти к новым переменным  $t_+ = -(t + t')$ ,  $t_- = t - t'$ , и учесть, что  $dt dt' = \frac{1}{2} dt_+ dt_-$ . Интегрирование выполняется так:

$$F_2 = -\frac{1}{2} (\nu_0 \alpha)^2 \int_0^{+\infty} dt_+ e^{-\gamma t_+} \int_{t_+}^{\infty} \frac{dt_-}{(\delta + it_-)^2} = -\frac{1}{2} (\nu_0 \alpha)^2 \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\gamma t_+}}{t_+ + i\delta} dt_+ \quad (5.85)$$

В пределе  $\gamma \rightarrow 0$ , что соответствует медленному включению рассеивающего потенциала  $U(\mathbf{r})$ , интеграл по  $t_+$  есть  $-\ln(i\delta\gamma) \approx \ln(E_F/i\gamma)$ . В результате получаем

$$\text{Re } F_2 = -\frac{1}{2} (\nu_0 \alpha)^2 \ln \left( \frac{E_F}{\gamma} \right) \quad (5.86)$$

Мы отбросили мнимую часть  $F_2$ , поскольку она дает вклад только в неинтересующую нас фазу интеграла перекрытия  $K_\gamma$ .

Для слабого потенциала  $U(\mathbf{r})$  величины  $F_n$  быстро убывают с ростом  $n$ , поскольку величина  $F_n$  пропорциональна  $n$ -ой степени потенциала. Поэтому для оценки  $|K_\gamma|$  достаточно учесть только  $\text{Re } F_2$ , отбросив вклады с  $n > 2$ . Итак, мы получаем следующее выражение для интеграла перекрытия:

$$|K_\gamma| = \left( \frac{\gamma}{E_F} \right)^{\frac{1}{2} \delta_0^2 / \pi^2}, \quad \delta_0 = \pi \alpha \nu_0. \quad (5.87)$$

Нетрудно убедиться в том, что  $\delta_0$  есть в точности фаза рассеяния в  $s$ -канале на короткодействующем потенциале  $U(\mathbf{r}) = \alpha \delta^{(3)}(\mathbf{r})$ , взятая в первом борновском приближении.

Напомним, что при вычислении  $F_2$  мы считали фермионы бесспиновыми. Учет двукратного спинового вырождения приводит к дополнительному множителю 2 в выражении (5.84) и далее. В результате множитель  $\frac{1}{2}$  в показателе степени в выражении (5.87) сокращается, и окончательный ответ выглядит так:

$$|K_\gamma| = \left( \frac{\gamma}{E_F} \right)^\alpha, \quad \alpha = \frac{\delta_0^2}{\pi^2}. \quad (5.88)$$

Теперь, зная  $K_\gamma$ , оценим перекрытие основных состояний  $\langle 0|0' \rangle$ . Для этого полезно подумать о пределах применимости нашего вычисления. Со стороны малых  $\gamma$  имеется ограничение, связанное с конечностью размера системы. Мы считали плотность состояний непрерывной, как и полагается в теории ферми-газа. Однако в конечной системе уровни дискретны.

Оценим расстояние  $\Delta$  между уровнями в сферическом объеме радиуса  $L$ . Если говорить о всех уровнях вместе, то, разумеется,  $\Delta = (\frac{4\pi}{3}L^3\nu_0)^{-1}$ . В нашей задаче, однако, важны только состояния с угловым моментом, равным нулю, которых гораздо меньше. Действительно, допустим, что потенциал расположен точно в центре сферы. Тогда угловой момент будет хорошим квантовым числом и, поскольку наш  $\delta$ -потенциал рассеивает только  $s$ -волны, состояния с  $l > 0$  «выходят из игры». Уровни же с  $l = 0$ , принимающие участие в рассеянии, расположены на расстоянии порядка  $\Delta_0 = \hbar v_F/L$  друг от друга. (Данная оценка справедлива в окрестности  $E_F$ .)

Теперь заметим, что при достаточно малом  $\gamma \ll \Delta_0$  мы имеем дело со случаем адиабатически медленного включения возмущения. При этом как во время, так и после действия возмущения состояние системы остается экспоненциально близким к основному, и, следовательно,

$$|K|_{\gamma \ll \Delta_0} = |\langle 0|0'\rangle| + O(e^{-\Delta_0/\gamma}). \quad (5.89)$$

В принципе, пользоваться обычной теорией возмущений для вычисления  $K_\gamma$  можно только для  $\gamma \gg \Delta_0$ . Однако по порядку величины правильный результат получится, если приравнять  $K_{\gamma=\Delta_0}$  и  $\langle 0|0'\rangle$ . Поэтому полагаем

$$\gamma \approx \Delta_0 = \frac{\hbar v_F}{L}, \quad (5.90)$$

что дает требуемую оценку перекрытия основных состояний:

$$\langle 0|0'\rangle \approx (p_0 L)^{-\alpha}, \quad \alpha = \frac{\delta_0^2}{\pi^2}, \quad (5.91)$$

где  $\delta_0 = \pi \alpha \nu_0$ .

Выражение (5.91) получено для слабого потенциала возмущения. Более точная оценка интеграла перекрытия  $\langle 0|0'\rangle$ , не использующая предположение о слабом возмущении, потребовала бы суммирования всего ряда (5.19), поскольку в каждом порядке имеется логарифмическая расходимость, подобная найденной выше для  $F_2$ . Эта более сложная задача может быть решена при помощи метода бозонизации (см. задачу 75, гл. 12).

**Другое решение 27.** Вычислим  $F_2$ , используя технику причинных функций Грина. Для этого рассмотрим первое из выражений (5.80) и раскроем среднее  $\langle\langle T \dots \rangle\rangle$  обычным образом как произведение причинных гриновских функций. Как и выше, заменяем потенциал  $U(\mathbf{r})$  на  $\delta$ -функцию  $\alpha \delta^{(3)}(\mathbf{r})$ . В частотном представлении гамильтониан возмущения  $\widehat{\mathcal{H}}_{\text{int}} = \alpha e^{\gamma t} \psi^+(\mathbf{r}, t) \psi(\mathbf{r}, t)|_{\mathbf{r}=0}$  принимает следующий вид:

$$\widehat{\mathcal{H}}_{\text{int}}(\omega) = \frac{\alpha}{\gamma - i\omega} \sum_{\mathbf{p}, \mathbf{p}'} a_{\mathbf{p}}^+ a_{\mathbf{p}'}. \quad (5.92)$$

Подставляя это выражение в (5.80) и переходя к интегралам по  $\xi(\mathbf{p})$  и  $\xi(\mathbf{p}')$ , получаем:

$$F_2 = -\frac{1}{2} \nu_0^2 \int \frac{G(\omega_1, \xi_1) \alpha}{\gamma - i(\omega_2 - \omega_1)} \frac{G(\omega_2, \xi_2) \alpha}{\gamma - i(\omega_1 - \omega_2)} \frac{d\omega_1 d\omega_2 d\xi_1 d\xi_2}{(2\pi)^2} =$$

$$= -\frac{1}{2}\alpha^2\nu_0^2 \iint I(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2. \quad (5.93)$$

Мы ввели обозначение

$$I(\xi_1, \xi_2) = \iint \frac{G(\omega_1, \xi_1) G(\omega_2, \xi_2) d\omega_1 d\omega_2}{(\omega_1 - \omega_2)^2 + \gamma^2} \frac{1}{(2\pi)^2}, \quad (5.94)$$

где  $G(\omega, \xi) = 1/(\omega - \xi + i\delta \operatorname{sign} \xi)$ . Как и выше, нам будет удобно считать фермионы бесспиновыми и восстановить зависимость от спина в конце.

Вычислим интеграл (5.94) по  $\omega_{1,2}$ , используя теорему Коши и теорию вычетов. Рассмотрим сначала случай  $\xi_1 > 0$ . Интегрируем по  $\omega_1$ :

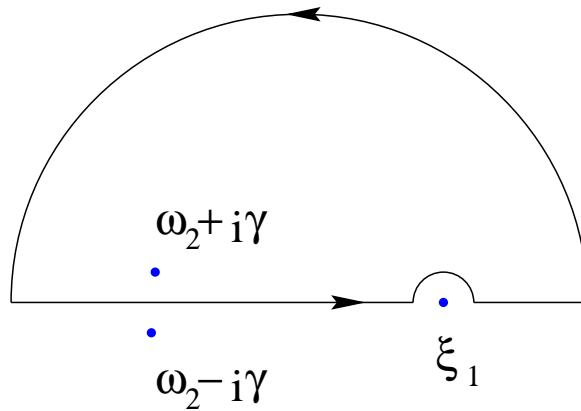


Рис. 5.4

Находим

$$I = \frac{1}{2\gamma} \int \frac{d\omega_2/2\pi}{(\omega_2 - \xi_1 + i\gamma)(\omega_2 - \xi_2 + i\delta\xi_2)}. \quad (5.95)$$

Интеграл отличен от 0 только при  $\xi_2 < 0$ :

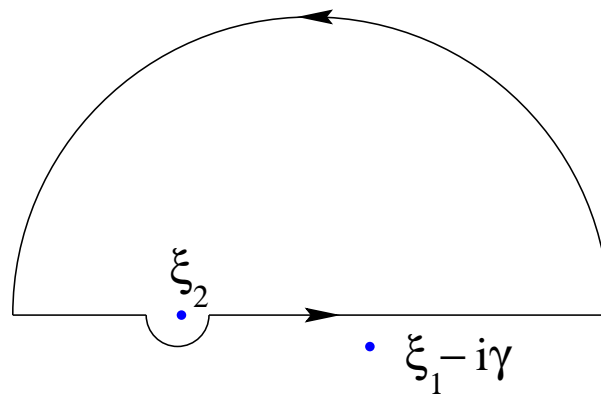


Рис. 5.5

Получаем

$$I = \frac{i}{2\gamma} \frac{\theta(\xi_1)\theta(-\xi_2)}{\xi_2 - \xi_1 + i\gamma} \quad (5.96)$$

Теперь пусть  $\xi_1 < 0$ . Интегрируем по  $\omega_1$ :

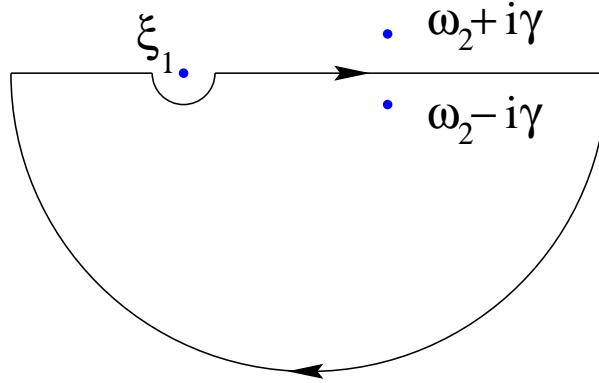


Рис. 5.6

Находим

$$I = \frac{1}{2\gamma} \int \frac{d\omega_2/2\pi}{(\omega_2 - \xi_1 - i\gamma)(\omega_2 - \xi_2 + i\delta\xi_2)}. \quad (5.97)$$

Теперь интеграл отличен от 0 только при  $\xi_2 > 0$ :

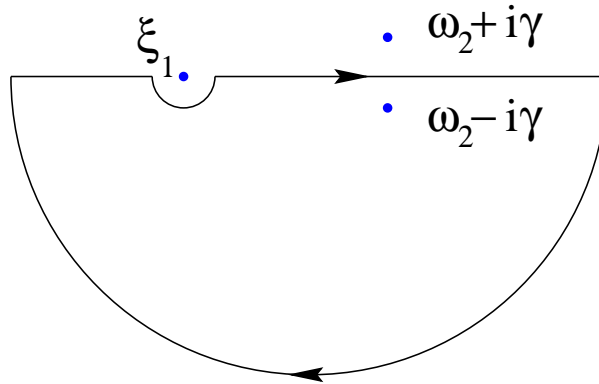


Рис. 5.7

Получаем

$$I = \frac{i}{2\gamma} \frac{\theta(-\xi_1)\theta(\xi_2)}{\xi_1 - \xi_2 + i\gamma} \quad (5.98)$$

Собирая эти результаты в одно выражение, получаем

$$F_2 = i \frac{\alpha^2 \nu_0^2}{4\gamma} \int_{\xi_1 \xi_2 < 0} \frac{d\xi_1 d\xi_2}{|\xi_1 - \xi_2| - i\gamma}. \quad (5.99)$$



Как уже отмечалось, мнимая часть  $\ln K_\gamma$  не имеет отношения к вопросу об ортогональности. Поэтому оставляем только вещественную часть:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} F_2 &= -\frac{\alpha^2 \nu_0^2}{4} \int_{\xi_1 \xi_2 < 0} \frac{d\xi_1 d\xi_2}{(\xi_1 - \xi_2)^2 + \gamma^2} \\ &= -\frac{1}{4} (\alpha \nu_0)^2 \int_0^{\xi_{\max}} \frac{2\xi d\xi}{\xi^2 + \gamma^2} = -\frac{1}{4} (\alpha \nu_0)^2 \ln \frac{\xi_{\max}^2 + \gamma^2}{\gamma^2} . \end{aligned}$$

Интеграл обрезается сверху при  $\xi_{\max} \sim E_F = p_0^2/2m \gg \gamma$ , поэтому окончательно имеем

$$\operatorname{Re} F_2 = -\frac{\delta_0^2}{2\pi^2} \ln \frac{E_F}{\gamma} , \quad \delta_0 = \pi \alpha \nu_0 . \quad (5.100)$$

Учет двукратного спинового вырождения дает дополнительный множитель 2 в выражении (5.93) и всех последующих выражениях. В результате множитель  $\frac{1}{2}$  в (5.100) сокращается и мы приходим к выражению (5.88).



## Глава 6.

# Электроны и фононы

### 6.1. Гамильтониан фононов. Диаграммная техника.

В этой главе мы рассмотрим взаимодействие электронов с фононами. Напомним, что фононы — это кванты колебаний кристаллической решетки. Различают два основных типа фононов — *акустические* и *оптические*. Отличие между ними заключается в том, что частота акустических фононов обращается в ноль при  $\mathbf{k} = 0$ , а частота оптических фононов положительна при всех  $\mathbf{k}$ . Акустические фононы существуют во всех кристаллах, поскольку звук может распространяться в любой упругой среде. Оптические же фононы имеются только в кристаллах, содержащих более одного атома в элементарной ячейке. (Пример системы, в которой имеются как акустические, так и оптические фононы рассмотрен в задаче 1).

Для описания закона дисперсии акустических фононов  $\omega(\mathbf{k})$  часто пользуются так называемой моделью Дебая. В этой модели закон дисперсии принимается равным  $\omega_0(\mathbf{k}) = c|\mathbf{k}|$  при всех  $|\mathbf{k}| < k_D$ , где величина  $k_D$  выбирается так, чтобы объем шара радиуса  $k_D$  давал правильное число состояний:  $\frac{4\pi}{3}k_D^3 = (2\pi)^3 v^{-1}$ , где  $v$  — объем элементарной ячейки кристалла. Аналогично, оптические фононы описываются моделью Эйнштейна, в которой частота фононов полагается не зависящей от волнового вектора:  $\omega_0(\mathbf{k}) = \Omega_0 = \text{const}$ , причем  $|\mathbf{k}| < k_D$ . (Как мы видели в задаче 1, такой закон дисперсии реализуется в системе, содержащей сильно отличающиеся по массе атомы.)

Для квантовомеханического описания фононов вводятся операторы смещения решетки  $\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{r}, t)$  и плотности импульса решетки  $\hat{\mathbf{p}}(\mathbf{r}, t)$ . (Для определенности мы будем говорить об акустических фононах.) Операторы  $\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{r}, t)$  и  $\hat{\mathbf{p}}(\mathbf{r}, t)$  могут быть стандартным образом записаны через канонические бозе-операторы рождения и уничтожения фононов  $b_{\mathbf{k}}^+$  и  $b_{\mathbf{k}}$ :

$$\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{r}, t) = \sum_{\mathbf{k}, \alpha} \frac{\mathbf{e}_{\mathbf{k}\alpha}}{\sqrt{2V\rho\omega_{0,\alpha}(\mathbf{k})}} \left\{ b_{\mathbf{k}\alpha} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r} - i\omega_{0,\alpha}(\mathbf{k})t} + b_{\mathbf{k}\alpha}^+ e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r} + i\omega_{0,\alpha}(\mathbf{k})t} \right\}, \quad (6.1)$$

$$\hat{\mathbf{p}}(\mathbf{r}, t) = \sum_{\mathbf{k}, \alpha} i\mathbf{e}_{\mathbf{k}\alpha} \sqrt{\frac{\rho\omega_{0,\alpha}(\mathbf{k})}{2V}} \left\{ b_{\mathbf{k}\alpha}^+ e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r} + i\omega_{0,\alpha}(\mathbf{k})t} - b_{\mathbf{k}\alpha} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r} - i\omega_{0,\alpha}(\mathbf{k})t} \right\}, \quad (6.2)$$

где  $\rho$  — плотность кристалла,  $V$  — объем, а  $\mathbf{e}_{\mathbf{k}\alpha}$  — вектор поляризации фонона. Индекс  $\alpha$  нумерует нормальные моды кристалла<sup>1</sup>. Операторы рождения и уничтожения

с противоположными  $\mathbf{k}$  равны:  $b_{-\mathbf{k}\alpha} = b_{\mathbf{k}\alpha}^+$ . (Это следует из вещественности  $\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{r}, t)$  и  $\hat{\mathbf{p}}(\mathbf{r}, t)$ .)

Введенные операторы подчиняются следующим коммутационным соотношениям. Коммутаторы бозе-операторов  $b_{\mathbf{k}}^-$  и  $b_{\mathbf{k}'}^+$  канонические:  $[b_{\mathbf{k}\alpha}, b_{\mathbf{k}'\alpha'}^+] = (2\pi)^3 V \delta_{\alpha\alpha'} \delta^{(3)}(\mathbf{k} - \mathbf{k}')$ . Нормировочные множители в определениях (6.1) и (6.2) выбраны так, что коммутационные соотношения для операторов  $\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{r}, t)$  и  $\hat{\mathbf{p}}(\mathbf{r}, t)$ , следующие из (6.1) и (6.2), имеют вид

$$[\hat{u}_\alpha(\mathbf{r}, t), \hat{p}_\beta(\mathbf{r}', t')] = i\hbar \delta_{\alpha\beta} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (6.3)$$

Это в точности соответствует скобкам Пуассона соответствующих классических величин в теории упругости сплошной среды.

Гамильтониан фононов имеет следующий вид:

$$\widehat{\mathcal{H}} = \int \left( \frac{1}{2\rho} \hat{\mathbf{P}}^2 + \frac{1}{2} \rho c^2 \hat{\mathbf{u}}^2 \right) d^3\mathbf{r} = \sum_{\mathbf{k}\alpha} \hbar \omega_{0,\alpha}(\mathbf{k}) \left( b_{\mathbf{k}}^+ b_{\mathbf{k}} + \frac{1}{2} \right) \quad (6.4)$$

Нетрудно видеть, что гамильтониан (6.4) приводит к динамике операторов  $\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{r}, t)$  и  $\hat{\mathbf{p}}(\mathbf{r}, t)$ , заданной соотношениями (6.1) и (6.2).

Взаимодействие фононов и электронов является электрическим по своей природе. Колебания решетки приводят к отклонению электрического поля ионов, действующего на электроны, от своего среднего значения. Потенциал возникающего добавочного поля принято называть *деформационным потенциалом*. В отсутствие экранировки кулоновские силы являются дальнедействующими и взаимодействие электронов с фононами оказывается существенно нелокальным. Такая ситуация имеет место для взаимодействия электронов с оптическими фононами. Характер зависимости деформационного потенциала от волновых векторов электронов и фононов определяется симметрией кристаллической решетки.

В отличие от взаимодействия с оптическими фононами, деформационный потенциал акустических фононов обычно является локальным. Дело в том, что при акустических колебаниях решетки с малыми  $\mathbf{k}$  смещения соседних атомов практически одинаковы (см. задачу 1). Вследствие этого, электрическая поляризация, возникающая при акустических колебаниях, оказывается пропорциональной градиенту деформации решетки:  $\mathbf{P}(\mathbf{r}) \sim \nabla \operatorname{div} \mathbf{u}(\mathbf{r})$ . Поэтому потенциал электрического поля поляризации  $\mathbf{P}(\mathbf{r})$  оказывается пропорциональным деформации решетки:  $U_{\text{деф}}(\mathbf{r}) \sim \operatorname{div} \mathbf{u}(\mathbf{r})$ .

Взаимодействие электронов с акустическими фононами принято рассматривать с помощью упрощенной модели, в которой пренебрегается взаимодействием с поперечными акустическими модами, имеющими векторы поляризации  $\mathbf{e}_{\mathbf{k}} \perp \mathbf{k}$ . Оказывается удобным выразить деформационный потенциал через поле

$$\hat{\varphi}(\mathbf{r}, t) = \sum_{\mathbf{k}} \sqrt{\frac{\omega_0(\mathbf{k})}{2V}} \left\{ i \hat{b}_{\mathbf{k},\parallel} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r} - i\omega_0(\mathbf{k})t} - i \hat{b}_{\mathbf{k},\parallel}^+ e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r} + i\omega_0(\mathbf{k})t} \right\} \quad (6.5)$$

Для дебаевских фононов с законом дисперсии  $\omega(\mathbf{k}) = c|\mathbf{k}|$  имеет место равенство  $\hat{\varphi}(\mathbf{r}, t) = c\sqrt{\rho} \operatorname{div} \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{r}, t)$ . (Поэтому в атомных единицах  $\varphi(\mathbf{r}) \sim \operatorname{div} \mathbf{u}(\mathbf{r})$ .) Деформа-

<sup>1</sup>В дальнейшем мы будем рассматривать главным образом продольные колебания, для которых  $\mathbf{e}_{\mathbf{k}\alpha} \parallel \mathbf{k}$ .

ционный потенциал акустических фононов может быть записан как  $U_{\text{деф}}(\mathbf{r}) = g\hat{\varphi}(\mathbf{r})$ , где  $g$  — константа электрон-фононного взаимодействия.

В описанной модели гамильтониан взаимодействия электронов с фононами записывается через операторы поля (6.5) следующим образом:

$$\widehat{\mathcal{H}}_{\text{int}} = g \int \hat{\psi}^+(\mathbf{r}) \hat{\psi}(\mathbf{r}) \hat{\varphi}(\mathbf{r}) d^3r \quad (6.6)$$

(так называемый *гамильтониан Фрёллиха*). Хотя из сделанных оценок следует, что  $g \sim 1$  в атомных единицах, надо иметь в виду что сила электрон-фононного взаимодействия может весьма сильно варьироваться от одной системы к другой.

Диаграммная техника строится с помощью функции Грина фононов, определенной следующим образом:

$$D(x, x') = -i \langle T \hat{\varphi}(x) \hat{\varphi}(x') \rangle \quad (6.7)$$

В отсутствие взаимодействия функция Грина  $D(\omega, \mathbf{k})$  есть

$$D_0(\omega, \mathbf{k}) = \frac{\omega_0^2(\mathbf{k})}{\omega^2 - \omega_0^2(\mathbf{k}) + i0} . \quad (6.8)$$

Правила диаграммной техники для электронов и фононов почти такие же, как и для случая двухчастичного взаимодействия:

- 1) Все диаграммы строятся из двух элементов: простых линий, описывающих распространение электронов, и волнистых, описывающих распространение фононов.
- 2) Две электронных и одна фононная линии соединяются в вершинах.
- 3)  $n$ -му порядку теории возмущений соответствуют диаграммы с  $2n$  вершинами.
- 4) Каждой электронной линии соответствует множитель  $G_0(x - x')$  ( $x$  — начальная точка,  $x'$  — конечная). Каждой фононной — множитель  $D_0(x - x')$ .
- 5) Выражение, соответствующее данной диаграмме, следует проинтегрировать по координатам её вершин. Каждой вершине соответствует множитель  $g$ .
- 6) Получившийся ответ следует умножить на  $i^n (-1)^F$ , где  $n$  — число волнистых линий, а  $F$  — число замкнутых петель, отвечающих ферми-частицам.

Вычислив собственно-энергетическую часть функции Грина электронов, можно определить спектр электронов с учетом электрон-фононного взаимодействия. Для того, чтобы аналогичным образом найти спектр фононов, нужно рассмотреть полюса фононной функции Грина  $D(\omega, \mathbf{k})$ . Как и для функции Грина электронов  $G(\varepsilon, \mathbf{p})$ , для фононной функции Грина можно проделать анализ, описанный в разд. 4.1.1, выделить собственно-энергетическую часть и провести суммирование диаграмм с помощью уравнения Дайсона. Собственно-энергетическая часть фононов обычно называется *полярны-*

зационным оператором и обозначается  $\Pi(\omega, \mathbf{k})$ . Поляризационный оператор  $\Pi(\omega, \mathbf{k})$  есть сумма следующих диаграмм:

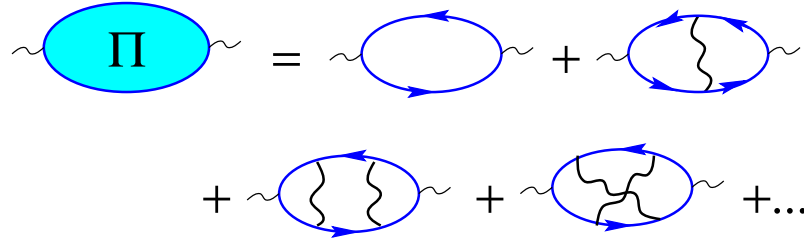


Рис. 6.1

Уравнение Дайсона для фононной функции Грина выглядит аналогично уравнению (4.9),

$$D = D_0 + D_0 \Pi D, \quad (6.9)$$

и решается стандартным образом:

$$D^{-1}(\omega, \mathbf{k}) = D_0^{-1}(\omega, \mathbf{k}) - \Pi(\omega, \mathbf{k}). \quad (6.10)$$

Поэтому спектр фононов определяется уравнением

$$D_0^{-1}(\omega(\mathbf{k}), \mathbf{k}) = \Pi(\omega(\mathbf{k}), \mathbf{k}). \quad (6.11)$$

Как всегда, вещественная часть  $\omega(\mathbf{k})$  определяет спектр фононов, а мнимая — их затухание из-за передачи энергии электронам.

При изучении эффектов электрон-фононного взаимодействия в металле оказывается удобным пользоваться безразмерной константой электрон-фононного взаимодействия  $\zeta = g^2 \nu_0$  ( $\nu_0 = m p_0 / 2\pi^2 \hbar^3$  — плотность электронных состояний без учета спинового вырождения). Оценка  $\zeta$  из первых принципов дает значение  $\zeta \sim 1$ . Поэтому, казалось бы, решение задачи в общем виде, эквивалентное суммированию диаграмм произвольно высокого порядка, должно быть невозможным. Однако оказывается, что в задаче присутствует другой малый параметр, позволяющий найти решение без предположения о малости  $\zeta$ . Этот параметр есть  $\omega_D / \varepsilon_F$  ( $\omega_D = c k_D$  — дебаевская частота), что порядку величины равно  $\sqrt{m/M}$ , где  $m$  и  $M$  — массы электронов и ионов. Условие  $\omega_D / \varepsilon_F \ll 1$  означает, что ионы, ввиду их большой массы, двигаются намного медленнее, чем электроны. Поэтому электроны не могут раскачать решетку, вместо этого они просто подстраиваются под её локальную конфигурацию. Другая интерпретация условия  $\omega_D / \varepsilon_F \ll 1$  — большое запаздывание фононов на временах порядка  $\hbar / \varepsilon_F$ .

Теория электрон-фононного взаимодействия в металле, использующая малый параметр  $\omega_D / \varepsilon_F \ll 1$ , называется *теорией Мигдала*. Упрощенно говоря, эта теория позволяет распространить идеи теории полярона (см. задачи 16, 17, 21, 33) на случай электронной ферми-системы. Более формально, теория Мигдала представляет собой набор

утверждений о свойствах гриновских функций, вытекающих из медленности динамики фононов по сравнению с динамикой электронов. В этой теории показывается, что перенормировки, хотя и велики, «не распространяются» из простых графиков в более сложные. Это проявляется в том, что нет обратного влияния перенормировки электронного спектра на фононы, а также в малости поправок к вершине электрон-фононного взаимодействия. Основные положения теории Мигдала сформулированы в задачах 29 – 31. Теория описывает влияние электрон-фононного взаимодействия в терминах перенормировки свойств квазичастиц (электронов и фононов). При этом не происходит какого-либо разрушения ферми-поверхности — утверждается, что картина невзаимодействующих квазичастиц остается справедливой.

В заключение следует сказать, что электрон-фононное взаимодействие — не такая простая вещь, как могло бы показаться из вышеизложенного. Как известно, это взаимодействие приводит к образованию куперовских пар и к сверхпроводимости (см. гл. 10). Кроме того, в одномерном случае электрон-фононное взаимодействие приводит к образованию пайерлсовского диэлектрика (см. задачу 32). Как в случае сверхпроводящего, так и в случае диэлектрического состояний происходит полное «разрушение» ферми-поверхности, проявляющееся в исчезновении состояний с достаточно малыми энергиями. Поэтому, строго говоря, в присутствии электрон-фононного взаимодействия ферми-жидкость электронов никогда не является устойчивым состоянием, и при достаточно низкой температуре перестраивается, превращаясь либо в сверхпроводник, либо в диэлектрик.

*Литература:* [1] §21; [6] §§64,65.

## 6.2. Задачи 28 ÷ 33

**Задача 28.** (*Время жизни квазичастиц*) Рассмотрим вырожденный электронный газ при  $T = 0$ , взаимодействующий с колебаниями решетки (см. задачи 16, 17). Найдите затухание квазичастицы с энергией  $|\varepsilon| \ll \varepsilon_F$ , вычислив собственно-энергетическую часть  $\Sigma(\varepsilon, p)$  в низшем порядке по взаимодействию. Затухание дается мнимой частью  $\text{Im} \Sigma(\varepsilon, p)$ .

**Задача 29.** (*Перенормировка спектра электронов*) Изучите влияние электрон-фононного взаимодействия на спектр электронов. Найдите вещественную часть  $\text{Re} \Sigma(\varepsilon, \mathbf{p})$  и убедитесь в том, что она есть функция  $\varepsilon$  и практически не зависит от  $\mathbf{p}$ .

Покажите, что  $\text{Re} \Sigma(\varepsilon)$  может быть велика только в небольшой по сравнению с  $\varepsilon_F$  области энергий  $|\varepsilon| \leq \omega_D$  (мы отсчитываем энергию квазичастиц  $\varepsilon$  от уровня Ферми). Выразите плотность состояний через  $\Sigma(\varepsilon)$  и покажите, что вблизи уровня Ферми электроны «утяжеляются», а плотность состояний — возрастает.

**Задача 30.** (*Теорема Мигдала — нет перенормировки вершины*) Оцените поправку

к вершине электрон-фононного взаимодействия:

$$\Gamma^{(1)} = \text{Diagram: A triangle with a wavy line at the bottom and a curly line at the top. The left and right sides are solid lines with arrows pointing upwards. The top vertex has a curly line extending upwards. The bottom vertex has a wavy line extending downwards.$$

Рис. 6.2

Покажите, что ее относительная величина порядка  $\omega_D/\varepsilon_F$ .

Для того, чтобы прояснить роль параметра  $\omega_D/\varepsilon_F$  теории Мигдала, вычислите вершинную часть в смешанном «импульсно-временном» представлении, в котором функция Грина зависит от импульса и от времени.

**Задача 31.** (*Фононы в металле*) Рассмотрим собственно-энергетическую часть  $\Pi(\omega, k)$  фононной функции Грина:

$$\Pi(\omega, k) = \text{Diagram: A loop with two wavy lines on the left and right sides. The top and bottom arcs are solid lines with arrows pointing clockwise.$$

Рис. 6.3

а) Получите формулу для перенормированной скорости звука:

$$c^2 = c_0^2(1 - 2\zeta), \quad (6.12)$$

где  $\zeta = g^2\nu_0$  — безразмерная константа электрон-фононного взаимодействия. (В металлах обычно параметр  $\zeta$  не мал, но  $2\zeta < 1$ .)

б) Рассматривая  $\text{Im} \Pi(\omega, k)$  при малых  $\omega$  и  $k$ , определите длину затухания звука в металле. Как она зависит от частоты? Сравните с затуханием звука в газе.

**Задача 32\*.** (*Пайерлсовская неустойчивость*) Найдите  $\Pi(\omega, k)$  (рис. 6.3) в одномерном случае. Получите логарифмическую особенность  $\Pi(\omega, k)$  при  $k = 2p_0$ . Вблизи этого волнового вектора частота фононов становится мнимой, что означает неустойчивость системы по отношению к какой-то перестройке. Что именно при этом происходит? В какое состояние переходит система?

**Задача 33.** (*Автолокализация полярона сильной связи*) Рассмотрим электрон, взаимодействующий с упругой изотропной средой:

$$\widehat{\mathcal{H}} = \int \left[ -\frac{1}{2}\psi^+(\mathbf{r})\nabla^2\psi(\mathbf{r}) + \lambda\psi^+(\mathbf{r})\psi(\mathbf{r})w(\mathbf{r}) + \frac{1}{2}\rho\dot{\mathbf{u}}^2(\mathbf{r}) + \frac{1}{2}Kw^2(\mathbf{r}) \right] d^D r. \quad (6.13)$$

Здесь  $\mathbf{u}(\mathbf{r})$  — поле смещений среды, а  $w(\mathbf{r}) = \nabla\mathbf{u}(\mathbf{r})$  — деформация среды. Мы используем классическое выражение  $\frac{1}{2}\rho\dot{\mathbf{u}}^2$  для кинетической энергии, поскольку нас будет интересовать случай сильного взаимодействия, когда смещение  $\mathbf{u}(\mathbf{r})$  достаточно велико. В этой ситуации поля  $\mathbf{u}(\mathbf{r})$  и  $w(\mathbf{r})$  можно считать классическими. Более того, в духе адиабатического приближения можно считать, что деформация решетки следует



за движением электрона, не имея какой-либо собственной динамики.<sup>2</sup>

а) Рассмотрим ситуацию, когда электрон вместе с вызванной им деформацией среды  $w(\mathbf{r})$  покоится (в этом случае  $\dot{\mathbf{u}} = 0$ ), и найдем  $w(\mathbf{r})$ , минимизирующую энергию (6.13):  $w(\mathbf{r}) = -(\lambda/K)|\psi(\mathbf{r})|^2$ . Это выражение означает, что электрон деформирует решетку вокруг себя, причем деформация такова, что энергия электрона в его собственном поле  $w(\mathbf{r})$  понижается. Если выигрыш энергии достаточно велик, то электрон «сам себе копает яму» и образует в ней связанное состояние.

Запишите уравнение Шредингера для волновой функции электрона  $\psi(\mathbf{r})$ , выразив потенциал через  $\psi(\mathbf{r})$ . Решение этого *нелинейного* уравнения легче всего получить в случае одного пространственного измерения. Найдите  $\psi(\mathbf{r})$  в этом случае и определите выигрыш энергии за счет автолокализации. Обсудите, как размер локализованного состояния, энергия связи, и условие его существования зависят от величины константы связи  $\lambda$  и от размерности пространства.

б) Определим эффективную массу автолокализованного состояния полярона.<sup>3</sup> В приближении классической деформации (6.13) найдите энергию состояния, движущегося с постоянной скоростью  $\mathbf{v}$ , как функцию  $\mathbf{v}$  и константы связи  $\lambda$ . Из найденной зависимости получите выражение для эффективной массы полярона. При какой величине взаимодействия  $\lambda$  справедливо использованное приближение сильной связи (т. е. классической деформации)?

### 6.3. Решения

**Решение 28.** Собственно-энергетическая часть дается диаграммой на рис. 4.10, в которой используется причинная функция Грина электрона в ферми-газе  $G_0(\varepsilon, \mathbf{p}) = (\varepsilon - \xi_{\mathbf{p}} + i0 \operatorname{sign} \xi_{\mathbf{p}})^{-1}$ . В задаче 16 эта же диаграмма рассматривалась для одного электрона, взаимодействующего с фононами. При этом была использована функция Грина электрона в пустом пространстве (см. (4.34)). Однако в задаче о ферми-газе эта функция не годится, поскольку она не учитывает, что электрон не может переходить в занятые состояния. Таким образом,

$$\Sigma(\varepsilon, \mathbf{p}) = \frac{ig^2}{(2\pi)^4} \int \frac{d\omega d^3k}{\varepsilon - \omega - \xi_{\mathbf{p}-\mathbf{k}} + i0 \operatorname{sign} \xi_{\mathbf{p}-\mathbf{k}}} \frac{c^2 k^2}{\omega^2 - c^2 k^2 + i0} \quad (6.14)$$

Основное отличие этого выражения от (4.34) заключается в способе обхода полюсов. Они находятся в точках  $\omega_1 = \varepsilon - \xi_{\mathbf{p}-\mathbf{k}} + i0 \operatorname{sign} \xi_{\mathbf{p}-\mathbf{k}}$  и  $\omega_{2,3} = \pm(ck - i0)$ .

Замыкая контур интегрирования по  $\omega$  так, чтобы внутрь него попал только один полюс из трех, получаем:

$$\frac{g^2 c}{16\pi^3} \int_{|\mathbf{k}| < k_D} \left( \frac{\theta(\xi_{\mathbf{p}-\mathbf{k}})}{\varepsilon - ck - \xi_{\mathbf{p}-\mathbf{k}} + i0} + \frac{\theta(\xi_{\mathbf{p}-\mathbf{k}})}{\varepsilon + ck - \xi_{\mathbf{p}-\mathbf{k}} - i0} \right) k d^3k \quad (6.15)$$

<sup>2</sup> Адиабатическое приближение для полярона сильной связи и теория автолокализации были впервые предложены в работе: S.I. Peкар, J. Phys. (U.S.S.R.) **10**, 341 (1946); см. также: С.И. Пекар, Исследования по электронной теории кристаллов, Гостехиздат, 1951

<sup>3</sup> Л. Д. Ландау, С. И. Пекар, ЖЭТФ, **18**, 419 (1948)

Теперь воспользуемся стандартной заменой переменной в интеграле по  $d^3k$ , использованной в решении задачи 16. Перейдем к интегрированию по  $|\mathbf{k}|$  и  $p_1 = |\mathbf{p} - \mathbf{k}|$  по формуле (4.38) (см. также [1], §21, п.3). В этих переменных выражение (6.15) для  $\Sigma(\varepsilon, p)$  можно переписать так:

$$\frac{g^2 c}{8\pi^2 p} \int_0^{k_D} \int \left( \frac{\theta(p_1 - p_0)}{\varepsilon - ck - \xi_{p_1} + i0} + \frac{\theta(p_0 - p_1)}{\varepsilon + ck - \xi_{p_1} - i0} \right) p_1 dp_1 k^2 dk \quad (6.16)$$

Область интегрирования по  $p_1$  в (6.16) имеет вид:

$$|p - k| < p_1 < p + k \quad (6.17)$$

Теперь удобно перейти от переменной интегрирования  $p_1$  к переменной  $\xi = p_1^2/2m - \varepsilon_F$ . Получаем

$$\frac{g^2 cm}{8\pi^2 p} \int_0^{k_D} \int \left( \frac{\theta(\xi)}{\varepsilon - ck - \xi + i0} + \frac{\theta(-\xi)}{\varepsilon + ck - \xi - i0} \right) d\xi k^2 dk, \quad (6.18)$$

причем интеграл по  $\xi$  в (6.18) берется по области

$$(p - k)^2/2m - \varepsilon_F < \xi < (p + k)^2/2m - \varepsilon_F. \quad (6.19)$$

Вещественная часть  $\Sigma(\varepsilon, p)$  будет вычислена в следующей задаче, здесь же ограничимся мнимой частью. Применяя известную формулу

$$\text{Im} \frac{1}{x + i0} = -\pi \delta(x), \quad (6.20)$$

получаем

$$\text{Im} \Sigma(\varepsilon, p) = \frac{g^2 cm}{8\pi p} \int \int (\theta(-\xi)\delta(\varepsilon + ck - \xi) - \theta(\xi)\delta(\varepsilon - ck - \xi)) d\xi k^2 dk. \quad (6.21)$$

Второе слагаемое (оно отлично от нуля при  $\varepsilon > 0$ ) дает время жизни электронных состояний, а первое (отличное от нуля при  $\varepsilon < 0$ ) — дырочных.

До настоящего момента все преобразования были точными. Теперь обратим внимание на то, что при  $|\varepsilon| \ll \varepsilon_F$  вероятность распада можно вычислять, интегрируя в (6.21) не по области (6.19), а просто по всем  $\xi$ . Дело в том, что сохранение энергии при распаде частицы с энергией  $\varepsilon$  на частицу с энергией  $\xi$  и фонона с энергией  $ck$  гарантирует соблюдение неравенств (6.19). (Поскольку  $c \ll v_F$  и  $\varepsilon \sim \xi_p$ .)

В силу сказанного интеграл по  $\xi$  в (6.21) берем по  $-\infty < \xi < \infty$ . Находим:

$$\text{Im} \Sigma(\varepsilon, p) = \frac{g^2 c}{8\pi v_F} \int_0^{k_D} (\theta(-\varepsilon - ck) - \theta(\varepsilon - ck)) k^2 dk. \quad (6.22)$$

(При переходе от (6.21) к (6.22) мы заменили в коэффициенте  $p$  на  $p_0$ .)

Интегрируя по  $k$  в выражении (6.22), получаем

$$\text{Im } \Sigma(\varepsilon, p) = -\frac{g^2 c}{8\pi v_F} \text{sign } \varepsilon \int_0^{k_\varepsilon} k^2 dk = -\text{sign } \varepsilon \frac{g^2 c k_\varepsilon^3}{24\pi v_F}, \quad k_\varepsilon = \min[k_D, |\varepsilon|/c] \quad (6.23)$$

Найденная  $\text{Im } \Sigma(\varepsilon, p)$  при  $|\varepsilon| \ll \varepsilon_F$  является функцией одного только  $\varepsilon$ , и не зависит от  $p$ .

Переходя к безразмерной константе  $\zeta$  электрон-фононного взаимодействия,  $g^2 = \zeta/\nu_0$ , получаем

$$\text{Im } \Sigma(\varepsilon) = -\frac{\zeta \pi}{12 p_0^2 c^2} \text{sign } \varepsilon \begin{cases} |\varepsilon|^3, & \text{при } |\varepsilon| < \omega_D; \\ \omega_D^3, & \text{при } |\varepsilon| > \omega_D. \end{cases} \quad (6.24)$$

То обстоятельство, что  $\text{Im } \Sigma(\varepsilon)$  оказалась нечетной функцией  $\varepsilon$ , является следствием электрон-дырочной симметрии, имеющей место при  $|\varepsilon| \ll \varepsilon_F$ .

Обратим внимание на то, что при малых энергиях

$$\text{Im } \Sigma(\varepsilon) \ll \varepsilon, \quad (6.25)$$

то есть время жизни квазичастицы с энергией вблизи уровня Ферми очень велико по сравнению с  $\hbar/\varepsilon$ , и растет при уменьшении энергии быстрее, чем  $\varepsilon^{-1}$ . Это означает, что электрон-фононное взаимодействие не разрушает ферми-жидкостную картину.

Зависимость  $\text{Im } \Sigma(\varepsilon < \omega_D) \sim \varepsilon^3$  можно объяснить качественно. Вероятность испускания электроном фонона с заданным волновым вектором  $k$  пропорциональна  $k$ , поскольку оператор электрон-фононного взаимодействия пропорционален градиенту смещения решетки (иными словами, фонон с  $k = 0$  не должен испускаться вообще — это просто трансляция кристалла, как целого). При этом, однако, если  $\varepsilon < \omega_D$ , то электрон не может испускать фононы с произвольно большими  $k$ . Дело в том, что испустив фонон с большой энергией, электрон перешел бы в состояние с энергией, меньшей  $\varepsilon_F$ . Но такие состояния заняты, и перейти в них нельзя. По этой причине электрон будет испускать только фононы с волновыми векторами  $k \leq \varepsilon/c$ . При этом число конечных состояний — порядка площади поверхности сферы радиуса  $k$ . (Именно площади, а не объема — из-за законов сохранения!) Перемножая вероятность испускания фонона и число конечных состояний, получаем для вероятности распада  $\gamma \sim \varepsilon^3$ .

Таким образом, в ферми-системе вероятности процессов рассеяния при малых энергиях сильно уменьшаются. Это означает, что вблизи ферми-поверхности можно говорить о хорошо определенных квазичастицах. Большие времена жизни квазичастиц — ключевое свойство для обоснования теории ферми-жидкости.

Результат (6.24) в случае  $\varepsilon > \omega_D$  также можно понять с помощью качественных соображений. При  $\varepsilon > \omega_D$  электрон способен испускать фононы с импульсами вплоть до  $k_D$ , оставаясь снаружи ферми-сферы. Поэтому вероятность распада определяется фононами с  $k \sim k_D$  и не зависит от  $\varepsilon$ . Конечные состояния электрона лежат в тонком сферическом слое, имеющем толщину порядка  $\omega_D \ll \varepsilon_F$ .

Нетрудно видеть, что даже при электрон-фононном взаимодействии  $\zeta \sim 1$  вероятность распада  $\gamma$  сравнивается с  $\varepsilon$  только при  $\varepsilon \sim \omega_D$ .

**Решение 29.** В задаче 28 было получено выражение (6.18) для  $\Sigma(\varepsilon, p)$  и вычислена его мнимая часть. Рассмотрим теперь вещественную часть  $\text{Re} \Sigma(\varepsilon, p)$  и найдем перенормировку спектра квазичастиц. Запишем вещественную часть выражения (6.18) в виде

$$\text{Re} \Sigma(\varepsilon, \mathbf{p}) = \frac{g^2 c m}{8\pi^2 |\mathbf{p}|} \int_0^{k_D} I(k) k^2 dk, \quad (6.26)$$

где интеграл

$$I(k) = \int_{\xi_{\min}}^{\xi_{\max}} \left( \frac{\theta(\xi)}{\varepsilon - ck - \xi} + \frac{\theta(-\xi)}{\varepsilon + ck - \xi} \right) d\xi \quad (6.27)$$

понимается в смысле главного значения, а область интегрирования по  $\xi$  дается условием (6.19).

Интегрирование по  $\xi$  дает

$$I(k) = \ln \left| \frac{\varepsilon - ck}{\varepsilon - ck - \xi_{\max}} \right| + \ln \left| \frac{\varepsilon + ck - \xi_{\min}}{\varepsilon + ck} \right|. \quad (6.28)$$

Это выражение нам будет удобно представить в таком виде:

$$I(k) = \ln \left| \frac{\varepsilon - ck}{\varepsilon + ck} \right| + \ln \left| \frac{\varepsilon + ck - \xi_{\min}}{\varepsilon - ck - \xi_{\max}} \right|. \quad (6.29)$$

Первое слагаемое в (6.29) после интегрирования по  $k < k_D$  дает вклад в  $\Sigma(\varepsilon, \mathbf{p})$ , существенно зависящий от  $\varepsilon$  в области  $|\varepsilon| \leq \omega_D$ . Зависимость же этого вклада от  $\mathbf{p}$ , возникающая благодаря коэффициенту  $|\mathbf{p}|^{-1}$  в (6.26), — довольно слабая (величина (6.26) чувствительна только к большим изменениям  $\mathbf{p}$  порядка  $p_0$ ).

В то же время второе слагаемое в выражении (6.29) дает «регулярный» вклад в  $\Sigma(\varepsilon, \mathbf{p})$ , слабо меняющийся как функция  $\varepsilon$  и  $p$  при изменениях  $|\delta\varepsilon| \leq \varepsilon_F$ ,  $|\delta\mathbf{p}| \leq p_0$ . Чтобы в этом убедиться, заметим, что  $ck \ll |\xi_{\min}|, \xi_{\max}$ , и поэтому во втором логарифме в (6.29) можно пренебречь  $ck$  по сравнению с  $\xi_{\min}, \xi_{\max}$ .

Имея это в виду, представим собственно-энергетическую часть в виде  $\Sigma_{\text{особ}}(\varepsilon) + \Sigma_{\text{рег}}$  и, имея в виду малые  $|\varepsilon| \ll \varepsilon_F$  и  $|\mathbf{p}|$  близкие к  $p_0$ , включим  $\Sigma_{\text{рег}}$  в перенормировку затравочных химпотенциала  $\mu = E_F$  и скорости  $v_F = p_0/m$ .

Таким образом, получаем

$$\text{Re} \Sigma(\varepsilon) = \text{Re} \Sigma_{\text{особ}}(\varepsilon) = \frac{g^2 c}{8\pi^2 v_F} \int_0^{k_D} \ln \left| \frac{\varepsilon - ck}{\varepsilon + ck} \right| k^2 dk. \quad (6.30)$$

Обратим внимание на характерное свойство электрон-фононной собственно-энергетической части — независимость от импульса  $p$  электрона. Физическая причина этого — медленность фононов, приводящая к тому, что испущенный электроном фонон мгновенно отстает. В результате поглощение и испускание фонона становятся локальными процессами.

Интеграл в выражении (6.30) нетрудно вычислить. Однако, поскольку получающееся выражение достаточно громоздко, нам будет более удобно рассмотреть предельные случаи  $\varepsilon \ll \omega_D$  и  $\varepsilon \gg \omega_D$ .

**А.** При  $\varepsilon \ll \omega_D$  можно разложить логарифм в (6.30), считая  $\varepsilon \ll ck$ :

$$\operatorname{Re} \Sigma(\varepsilon) = -\frac{2g^2\varepsilon}{8\pi^2v_F} \int_0^{k_D} k dk = -\frac{g^2k_D^2}{8\pi^2v_F}\varepsilon = -b\varepsilon, \quad b = \zeta k_D^2/4p_0^2. \quad (6.31)$$

**Б.** При  $\varepsilon \gg \omega_D$ , напротив, имеем  $\varepsilon \gg ck$ , и снова разлагаем логарифм в (6.30):

$$\operatorname{Re} \Sigma(\varepsilon) = -\frac{g^2c^2}{8\pi^2v_F} \int_0^{k_D} \frac{k^3 dk}{\varepsilon} = -\frac{g^2c^2k_D^4}{32\pi^2v_F\varepsilon} = -\frac{b\omega_D^2}{4\varepsilon} \quad (6.32)$$

Экстраполируя полученные выражения в область  $\varepsilon \sim \omega_D$ , можно заключить, что в этой области возрастание  $\operatorname{Re} \Sigma(\varepsilon)$  сменяется убыванием, т. е.  $\operatorname{Re} \Sigma(\varepsilon)$  имеет там экстремум.

Выпишем теперь перенормированную функцию Грина. При  $\varepsilon \ll \omega_D$  она имеет следующий вид:

$$G(\varepsilon, p) = \frac{1}{(1+b)\varepsilon - \xi_{\mathbf{p}} + i\gamma(\varepsilon)}, \quad (6.33)$$

где  $\gamma(\varepsilon)$  дается выражением (6.24). При интересующих нас  $\varepsilon \ll \omega_D$  затухание  $\gamma(\varepsilon) \ll \varepsilon$ .

Сравним полученное выражение (6.33) с определением (4.14) квазичастичной функции Грина. Видим, что амплитуда функции Грина (6.33), даваемая величиной вычета в полюсе, есть  $Z = 1/(1+b)$ . Закон же дисперсии квазичастиц, согласно (6.33), имеет вид

$$\varepsilon = \frac{1}{1+b}\xi_{\mathbf{p}} \quad (6.34)$$

Отсюда находим перенормировку эффективной массы:

$$m^* = (1+b)m. \quad (6.35)$$

Видно, что электрон действительно «утяжеляется» (ибо он вынужден тащить за собой фоновое «облако»). Следовательно, плотность состояний, пропорциональная эффективной массе, увеличивается. Обратим внимание на то, что при электрон-фононном взаимодействии  $\zeta \sim 1$  величина  $b$ , определяющая величину перенормировки, оказывается порядка единицы.

Перенормировка плотности состояний вблизи поверхности Ферми имеет простое качественное объяснение. Чем выше энергия электрона по сравнению с уровнем Ферми, тем более активно этот электрон испускает фононы (как видно из решения предыдущей задачи). В результате энергия электрона уменьшается, и он «прижимается» к поверхности Ферми. (Эти рассуждения немного неточны, поскольку при  $\varepsilon \ll \omega_D$  вклад в  $\Sigma(\varepsilon)$  дают, главным образом, не реальные, а виртуальные процессы. Поэтому следовало бы говорить об испускании и поглощении виртуальных фононов.)

**Решение 30.** Запишем выражение для поправки к вершинной части электрон-фононного взаимодействия, соответствующее диаграмме на рис. 6.2:

$$\Gamma^{(1)} = -g^3 \int G(\varepsilon_1, \mathbf{p}_1) G(\varepsilon_1 + \omega, \mathbf{p}_1 + \mathbf{k}) D(\varepsilon - \varepsilon_1, \mathbf{p} - \mathbf{p}_1) \frac{d^3 p_1 d\varepsilon_1}{(2\pi)^4}. \quad (6.36)$$

Мы не будем вычислять  $\Gamma^{(1)}$  точно, а попытаемся ее оценить по порядку величины. Вначале рассмотрим интеграл по  $\varepsilon_1$ . Полагая характерную передачу импульса порядка  $k_D \sim p_0$ , и учитывая, что  $D(\varepsilon - \varepsilon_1)$  квадратично спадает при  $|\varepsilon - \varepsilon_1| \gg \omega_D$ , получаем, что основной вклад в интеграл дает область  $|\varepsilon - \varepsilon_1| \sim \omega_D$ . Оценив таким образом интеграл по  $\varepsilon_1$ , находим

$$\Gamma^{(1)} \sim \int \frac{g^3 \omega_D d^3 p_1}{(\varepsilon_1 - \xi_{\mathbf{p}_1} + i0 \operatorname{sign} \xi_1)(\varepsilon_1 - \omega - \xi_{\mathbf{p}_1 + \mathbf{k}} + i0 \operatorname{sign} \xi_2)}. \quad (6.37)$$

Теперь рассмотрим интеграл по импульсу  $p_1$ . Характерная передача импульса — порядка  $k_D \approx p_0$ . Поэтому мы можем оценить знаменатели как  $\varepsilon_F$ , причем  $d^3 p_1 \sim p_0^3$ . Собирая все вместе, имеем:

$$\Gamma^{(1)} \sim g^3 \omega_D \frac{p_0^2}{v} \frac{\varepsilon_F}{\varepsilon_F^2} \sim g^3 \frac{p_0^2}{v \varepsilon_F} \omega_D. \quad (6.38)$$

Относительная величина этой поправки:

$$\frac{\Gamma^{(1)}}{g} \sim g^2 \frac{p_0^2}{v_F \varepsilon_F} \omega_D \sim \zeta \sqrt{\frac{m}{M}}. \quad (6.39)$$

Здесь использована известная оценка  $\omega_D/\varepsilon_F \sim \sqrt{m/M}$ , где  $m$  и  $M$  — соответственно масса электрона и иона. Электроны намного легче ионов, поэтому рассмотренная поправка к вершинной части пренебрежимо мала.

Приведенное рассуждение не является вполне строгим: оно оказывается ошибочным при  $\omega \sim kv_F$ ,  $\omega \ll \omega_D$ . В этом случае полюса функций Грина сближаются, и интеграл надо анализировать более аккуратно. Однако в большинстве задач эта область не важна, поскольку скорость звука  $c$  много меньше  $v_F$ .

Чтобы прояснить физический смысл полученного неравенства  $\Gamma^{(1)} \ll g$ , вычислим вершинную часть в смешанном «импульсно-временном представлении». Это позволит нам лучше проследить за ролью различных характерных времен. Нам потребуются функции Грина фонона и электрона. Сначала найдем

$$D(\mathbf{k}, t) = \int \frac{d\omega}{2\pi} D(\omega, \mathbf{k}) e^{-i\omega t} = \frac{-ick}{2} e^{-ick|t|}. \quad (6.40)$$

Аналогично можно вычислить и электронную функцию Грина:

$$G(\mathbf{p}, t) = -ie^{-i\xi_{\mathbf{p}} t} \begin{cases} \theta(\xi_{\mathbf{p}}) & t > 0 \\ \theta(-\xi_{\mathbf{p}}) & t < 0 \end{cases}. \quad (6.41)$$

Обратим внимание на то, что  $D(\mathbf{k}, t)$  — более медленно меняющаяся функция времени, чем  $G(\mathbf{p}, t)$  (при импульсе  $\mathbf{p}$ , не слишком близком к ферми-поверхности).

На диаграмме, дающей поправку к вершине взаимодействия  $\Gamma^{(1)}$ , расставим импульсы и времена, как показано на рис. 6.4.

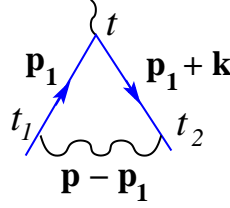


Рис. 6.4

Получаем следующее выражение:

$$\Gamma^{(1)} = -g^3 \int \frac{d^3 p_1}{(2\pi)^3} dt e^{-i\omega t} G(\mathbf{p}_1, t - t_1) G(\mathbf{p}_1 + \mathbf{k}, t_2 - t) D(\mathbf{p} - \mathbf{p}_1, t_1 - t_2). \quad (6.42)$$

При  $p_1 \sim p_0$  электронные функции Грина меняются за времена порядка  $\varepsilon_F^{-1}$ . По этой причине  $|t_1 - t| \sim |t_2 - t| \sim |t_1 - t_2| \sim \varepsilon_F^{-1}$ . Это означает, что фононный пропагатор берется при  $t_1 \simeq t_2$ . Поэтому он оказывается пропорционален  $c|\mathbf{p} - \mathbf{p}_1| \sim \omega_D$ , и, таким образом, возникает малый параметр  $\omega_D/\varepsilon_F$ .

Иными словами, электроны быстро (за время порядка  $\varepsilon_F^{-1}$ ) поглощают фонон, подстраиваясь под деформацию решетки. При этом они не успевают за счет своего движения снова «раскачать» решетку — на это требуется время порядка  $\omega_D^{-1}$ . Это есть проявление адиабатичности движения ионов. В силу своей большой массы ионы движутся медленно и электроны всегда успевают подстроиться под их локальную конфигурацию.

Утверждение о малости вершинных поправок (теорема Мигдала) ценно тем, что позволяет оставить в диаграммном ряде наиболее существенные вклады и просуммировать их, не предполагая малости электрон-фононного взаимодействия. Однако не следует думать, что все фононные перенормировки малы и потому несущественны. Иногда они приводят к важным эффектам, один из которых — сверхпроводимость.

**Решение 31.** Запишем выражение для поляризационного оператора фононов, соответствующее диаграмме на рис. 6.3:

$$\Pi = -\frac{2ig^2}{(2\pi)^4} \int \frac{d\varepsilon d^3 p}{(\varepsilon - \xi_{\mathbf{p}} + i0 \operatorname{sign} \xi_{\mathbf{p}})(\varepsilon + \omega - \xi_{\mathbf{p}+\mathbf{k}} + i0 \operatorname{sign} \xi_{\mathbf{p}+\mathbf{k}})} \quad (6.43)$$

(множитель 2 возникает из-за суммирования по спину). Заметим, что именно такое выражение было рассмотрено в задаче 24 а). Поэтому мы можем просто воспользоваться ответом (5.39), справедливым при  $k \ll p_0$ ,  $\omega \ll \varepsilon_F$ :

$$\Pi(\omega, k) = -2g^2 \nu_0 \left\{ 1 - \frac{\omega}{2kv_F} \ln \left| \frac{\omega - kv_F}{\omega + kv_F} \right| + \frac{\pi i |\omega|}{2kv_F} \theta \left( 1 - \frac{|\omega|}{kv_F} \right) \right\}. \quad (6.44)$$

а) Функция Грина фононов определяется из уравнения Дайсона:

$$D^{-1}(\omega, k) = D_0^{-1}(\omega, k) - \Pi(\omega, k), \quad (6.45)$$

а спектр фононов — из уравнения  $D^{-1}(\omega, k) = 0$ . Поскольку скорость звука много меньше скорости Ферми, то нас интересует  $\omega \ll kv_F$ . В таком пределе поляризационный оператор есть просто

$$\Pi(\omega, k) \approx -2g^2\nu_0 = -2\zeta. \quad (6.46)$$

Поэтому функция Грина акустических фононов есть

$$D^{-1}(\omega, k) = D_0^{-1}(\omega, k) - \Pi(\omega, k) \approx \frac{\omega^2 - c_0^2 k^2}{c_0^2 k^2} + 2\zeta, \quad (6.47)$$

где  $c_0$  — затравочная скорость звука. Получаем закон дисперсии фононов  $\omega = ck$ , где

$$c^2 = c_0^2(1 - 2\zeta). \quad (6.48)$$

Уменьшение частоты фонона вследствие взаимодействия с электронами можно объяснить тем, что электроны, быстро подстраиваясь под деформационный потенциал, скапливаются в его минимумах и тем самым понижают энергию системы.

**б)** Чтобы найти затухание фононов, рассмотрим мнимую часть поляризационного оператора:

$$\text{Im } \Pi(\omega, k) = -\pi\zeta \frac{|\omega|}{kv_F}. \quad (6.49)$$

Подставляя в уравнение Дайсона (6.45)  $\omega = ck + i\gamma$ , получаем

$$\gamma = \frac{\pi}{2}\zeta \frac{c^2}{v_F} k = \frac{\pi}{2}\zeta \frac{c}{v_F} \omega. \quad (6.50)$$

Хотя затухание и оказывается пропорциональным частоте, оно все же мало по сравнению с  $\omega$  по параметру  $c/v_F \sim \sqrt{m/M}$ .

Сравним найденный результат (6.50) с затуханием звука в классической гидродинамике. В обычных жидкостях и газах затухание звука по порядку величины равно

$$\gamma \sim \frac{\eta\omega^2}{\rho c^3}, \quad (6.51)$$

где  $\eta$  — вязкость среды, а  $\rho$  — ее плотность. Поэтому можно сказать, что «эффективная вязкость» электронного газа растет с уменьшением частоты:

$$\eta_{\text{эл}}(\omega) \sim \omega^{-1}. \quad (6.52)$$

Физически, большая эффективная вязкость электронного газа связана с высокой плотностью электрон-дырочных возбуждений с энергией  $\omega < c|\mathbf{k}|$ . Именно такие пары возбуждаются звуковой волной.

**Решение 32.** В размерности  $D = 1$  поляризационный оператор, соответствующий рис. 6.3, равен

$$\Pi(\omega, k) = -2ig^2 \int G(p, \varepsilon) G(p + k, \varepsilon + \omega) \frac{dp d\varepsilon}{(2\pi)^2} \quad (6.53)$$



(множитель 2 учитывает спин). Вычисляя интеграл по  $\varepsilon$ , получим

$$\Pi(\omega, k) = -\frac{g^2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(n(\xi_p) - n(\xi_{p+k})) dp}{\omega - \xi_{p+k} + \xi_p + i0\theta_{p,k}}, \quad \theta_{p,k} = \text{sign } \xi_{p+k} - \text{sign } \xi_p. \quad (6.54)$$

Интеграл (6.54) дается суммой вкладов двух областей, в которых разность  $n(\xi_p) - n(\xi_{p+k})$  отлична от нуля:

**А:**  $\xi_p > 0$ ,  $\xi_{p+k} < 0$ ;

**Б:**  $\xi_p < 0$ ,  $\xi_{p+k} > 0$

Рассмотрим  $k > 0$ . В этом случае области **А** и **Б** есть

**А:**  $-p_0 - k < p < -p_0$ ;

**Б:**  $p_0 - k < p < p_0$ .

Поэтому можно переписать (6.54) следующим образом:

$$\Pi(\omega, k) = -\frac{g^2}{\pi} \int_{-p_0-k}^{-p_0} \frac{dp}{\omega - \frac{k^2}{2m} - \frac{pk}{m} - i0} + \frac{g^2}{\pi} \int_{p_0-k}^{p_0} \frac{dp}{\omega - \frac{k^2}{2m} - \frac{pk}{m} + i0}. \quad (6.55)$$

Интеграл по  $p$  легко вычисляется и равен

$$\Pi(\omega, k) = \frac{mg^2}{\pi k} \ln \left( \frac{\left( \frac{k^2}{2m} - \frac{kp_0}{m} - \omega + i0 \right) \left( \frac{k^2}{2m} - \frac{kp_0}{m} + \omega + i0 \right)}{\left( \frac{k^2}{2m} + \frac{kp_0}{m} + \omega - i0 \right) \left( \frac{k^2}{2m} + \frac{kp_0}{m} - \omega - i0 \right)} \right). \quad (6.56)$$

Рассмотрим поведение этого выражения при  $k = 2p_0 + x$ ,  $\omega = 0$ :

$$\Pi(\omega = 0, k = 2p_0 + x) = -\frac{mg^2}{\pi p_0} \ln \frac{p_0}{|x|}. \quad (6.57)$$

Это выражение логарифмически расходится при  $k = 2p_0$ .

Рассмотрим, как найденная логарифмическая особенность  $\Pi(\omega, k)$  проявляется в спектре фононов. Запишем дисперсионное уравнение

$$D^{-1}(\omega, k) = D_0^{-1}(\omega, k) - \Pi(\omega, k). \quad (6.58)$$

Нас интересуют значения  $k$  вблизи  $k = 2p_0$  и малые  $\omega$ . В этой области дисперсионное уравнение принимает такой вид:

$$\frac{\omega^2 - \omega_{2p_0}^2}{\omega_{2p_0}^2} + \frac{mg^2}{\pi p_0} \ln \frac{p_0}{|k - 2p_0|} = 0, \quad (6.59)$$

(Строго говоря, следовало бы использовать  $\Pi(\omega, k = 2p_0)$  при  $\omega \neq 0$ . Это, однако, не меняет качественных выводов.) Получаем закон дисперсии

$$\omega^2 = \omega_{2p_0}^2 \left( 1 - \frac{mg^2}{\pi p_0} \ln \frac{p_0}{|k - 2p_0|} \right). \quad (6.60)$$

При  $k$  достаточно близком к  $2p_0$  второй член в правой части (6.60) превосходит первый, и потому частота фононов становится мнимой. Это означает, что в системе возникает неустойчивость вблизи волнового вектора  $k = 2p_0$  — кристаллическая решетка стремится деформироваться. На первый взгляд это кажется несколько странным — ведь деформация решетки требует энергии. Однако, оказывается, что из-за взаимодействия с электронами деформация становится энергетически выгодной! Неустойчивость одномерного металла по отношению к образованию модуляции плотности с периодом  $\pi/p_0$  приводит к так называемому переходу Пайерлса. Равновесная амплитуда возникающей модуляции определяется балансом электронной и упругой энергии (см. разд. 6.4).

Чтобы разобраться в происхождении пайерлсовской деформации и выяснить, чем выделен волновой вектор  $2p_0$ , предположим, что каким-то образом возникла спонтанная модуляция решетки с волновым вектором  $Q$ . Что происходит при этом с электронами? На них действует деформационный потенциал, период которого есть  $2\pi/Q$ . Как известно, в периодическом потенциале электронный спектр приобретает зонную структуру, и в нем открываются щели. Их появление связано с вырождением электронного спектра: состояния с импульсами  $p$  и  $-p$  в отсутствие потенциала имеют одинаковую энергию. Если внешний потенциал их перемешивает, то это вырождение снимается, и уровни расщепляются. Потенциал с периодом  $2\pi/Q$  в низшем порядке теории возмущений смешивает состояние с импульсом  $p$  с состояниями с импульсами  $p \pm Q$ . Вырождение происходит при  $p = \pm Q/2$ . Именно при этих значениях  $p$  в спектре и открывается самая большая щель (см. рис. 6.5).

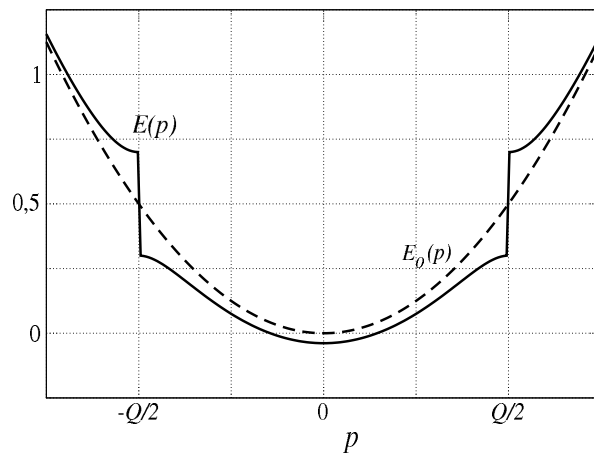


Рис. 6.5

При образовании щели состояния над ней выталкиваются вверх по шкале энергий, а под ней — вниз. Как при этом изменяется полная энергия электронов, зависит от положения уровня Ферми  $\varepsilon_F$  по отношению к щели. Если  $\varepsilon_F$  лежит существенно ниже, чем щель, то энергии состояний под ним почти никак не изменяются. А если  $\varepsilon_F$  лежит выше, чем щель, то, хотя энергии некоторых электронов изменятся сильно, но, поскольку

состояния выталкиваются из щели вверх и вниз симметрично, *суммарная* энергия меняется незначительно. Однако, ситуация станет совершенно иной, если уровень Ферми находится в точности там, где открывается щель. Тогда все занятые состояния выталкиваются из щели вниз, и энергия электронного газа понижается. Это происходит, если выполнено условие  $p_0 = Q/2$ .

Таким образом, модуляция решетки с волновым вектором  $Q = 2p_0$  может привести к существенному понижению энергии системы. Наше вычисление, предсказывающее неустойчивость, означает, что выигрыш в энергии решетки за счет взаимодействия с электронами превосходит энергию упругой деформации, что и приводит к неустойчивости. В результате образуется состояние, в котором смещение решетки и плотность электронов модулированы с периодом  $\pi/p_0$ . Такое состояние называется *волной зарядовой плотности*.

Пайерлсовскую неустойчивость можно также назвать «кооперативным эффектом Яна–Теллера». Напомним, что эффект Яна–Теллера в молекулах состоит в том, что симметричные конфигурации молекул оказываются неустойчивыми. Деформация молекулы, разрушающая симметрию, снимает вырождение электронных уровней, и если при этом вырожденный уровень был не полностью заполнен, то это приводит к понижению энергии молекулы. В эффекте Пайерлса трансляционно-инвариантная конфигурация решетки неустойчива по аналогичным причинам.

**Решение 33 а)** Рассмотрим случай одного измерения,  $D = 1$ . Мы предполагаем, что система покоится, т. е.  $\dot{\mathbf{u}} = 0$ . Минимизируя в этом случае энергию (6.13) по отношению к деформации  $w(x)$ , находим связь  $w(x)$  с плотностью:  $w(x) = -(\lambda/K) |\psi(x)|^2$ . Подставив это выражение в деформационный потенциал, действующий на электрон, приходим к нелинейному уравнению Шредингера:

$$-\frac{1}{2}\psi'' - \frac{\lambda^2}{K}|\psi|^2\psi = E\psi. \quad (6.61)$$

Ищем солитонное решение в виде

$$\psi(x) = \frac{A}{\text{ch}Bx}. \quad (6.62)$$

Находим  $B^2 = \lambda^2 A^2 / K$ ,  $E = -B^2 / 2$ . Недостающую связь  $A$  и  $B$  получаем из условия нормировки:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi^2(x) dx = \frac{2A^2}{B} = 1. \quad (6.63)$$

Это дает энергию связи  $E_0 = -\frac{1}{8}(\lambda^2/K)^2$  и размер локализованного состояния  $B^{-1} = 2K/\lambda^2$ .

Найдем энергию деформации

$$E_{\text{упр.}} = \frac{K}{2} \int w^2(x) dx = \frac{\lambda^2}{2K} \int \psi^4(x) dx = \frac{g^4}{12K^2}. \quad (6.64)$$

Полная энергия отрицательна:

$$E_{\text{полн.}} = E_0 + E_{\text{упр.}} = \left(\frac{1}{12} - \frac{1}{8}\right) \frac{\lambda^4}{K^2} = -\frac{\lambda^4}{24K^2} < 0 \quad (6.65)$$

и поэтому образование локализованного состояния выгодно при сколь угодно малом  $\lambda$ .

При  $D > 1$  все несколько сложнее. Решить задачу точно уже нельзя, но качественное поведение можно получить из «соображений размерности». Рассмотрим локализованное состояние электрона, сосредоточенное в области порядка  $a$ :

$$\psi(r) \sim a^{-D/2} f(r/a), \quad (6.66)$$

где  $f(r)$  — функция типа колокола размера порядка единицы. Эту функцию можно получить вариационным или каким-либо еще численным методом. Точный вид  $f(r)$  нам не потребуется, но можно иметь в виду, например,  $f(r) = e^{-r^2}$ . Найдем зависимость кинетической и упругой энергии от  $a$ :

$$E_{\text{кин.}} = \frac{c_1}{a^2}, \quad E_{\text{упр.}} = -\frac{c_2 \lambda^2}{K a^D}, \quad (6.67)$$

где  $c_{1,2}$  — положительные константы порядка единицы. Для ответа на вопрос о локализации следует найти  $a$ , минимизирующее полную энергию

$$\frac{c_1}{a^2} - \frac{c_2 \lambda^2}{K a^D}, \quad (6.68)$$

имея в виду, что это выражение применимо только при  $a$ , большем постоянной решетки  $a_0$ . Видим, что имеется критическое значение  $\lambda_c \simeq K a_0^{D-2}$ , такое, что при  $\lambda < \lambda_c$  локализованное состояние невыгодно, а при  $\lambda > \lambda_c$  оно образуется, причем сразу сжимается до размера порядка постоянной решетки.

**Решение 33 б)** Чтобы определить эффективную массу полярона, найдем энергию полярона, движущегося с постоянной скоростью  $\mathbf{v}$ . Движение полярона удобно рассмотреть в сопутствующей системе отсчета. Для волновой функции электрона преобразование Галилея дает:

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \tilde{\psi}(\mathbf{r}', t) \exp \left[ \frac{i}{\hbar} \left( m \mathbf{v} \mathbf{r}' + \frac{m \mathbf{v}^2}{2} t \right) \right], \quad (6.69)$$

где  $\mathbf{r}' = \mathbf{r} - \mathbf{v}t$  — координата в движущейся системе отсчета (см. задачу к §17 [2]). Поскольку преобразование меняет только фазу  $\psi(\mathbf{r}, t)$ , но не  $|\psi|$ , взаимодействие с решеткой  $\lambda w(\mathbf{r}) |\psi(\mathbf{r})|^2$  в сопутствующей системе отсчета сохраняет свой вид, а из кинетической энергии электрона вычитается  $\frac{1}{2} m \mathbf{v}^2$ .

Влияние движения на энергию решетки оказывается более существенным. Поскольку при переходе в движущуюся систему отсчета временная производная оказывается связанной с пространственной производной ( $\partial_t = \partial_{t'} + \mathbf{v} \nabla_{\mathbf{r}'}$ ), скорость смещения среды в сопутствующей системе отсчета есть  $\dot{\mathbf{u}} = (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{u}$ . Следовательно, плотность кинетической энергии системы равна  $\frac{1}{2} \rho ((\mathbf{v} \nabla) \mathbf{u})^2$ . Упругая же энергия зависит от деформации  $w = \nabla \mathbf{u}$ , и поэтому не меняется при движении. Физическая причина отличия кинетической энергии от нуля — в том, что локализованная деформация, движущаяся с постоянной скоростью, раскачивает атомы решетки.

В размерности один получается плотность кинетической энергии  $\frac{1}{2}(\rho\mathbf{v}^2)w^2$ , совпадающая по форме с плотностью упругой энергии  $\frac{1}{2}Kw^2$ . Поэтому в данном случае уравнение для  $\tilde{\psi}$  будет иметь вид (6.61) с точностью до замены:  $E \rightarrow E - \frac{1}{2}m\mathbf{v}^2$  и  $K \rightarrow K + \rho\mathbf{v}^2$ . Используя результат (6.65) для энергии связи неподвижного полярона, получаем изменение энергии вследствие движения:

$$\Delta E(\mathbf{v}) = \frac{m\mathbf{v}^2}{2} + \frac{\lambda^4}{24K^2} - \frac{\lambda^4}{24(K + \rho\mathbf{v}^2)^2}. \quad (6.70)$$

Раскладывая выражение (6.70) при малом  $\mathbf{v}$ , получаем массу полярона:

$$m_* = m + \frac{\lambda^4\rho}{6K^3}. \quad (6.71)$$

Как видно из зависимости (6.70), приближение эффективной массы (6.71) применимо при скорости движения полярона много меньшей скорости звука,  $v \ll c$ .

В размерности  $D > 1$ , как уже отмечалось, задача об отыскании минимума энергии (6.13) и волновой функции автолокализованного состояния может быть решена только численно. Изменение энергии полярона в результате его движения рассматривается при  $D > 1$  аналогично одномерному случаю. Для массы полярона при этом получается формула вида (6.71), в которой коэффициент  $\frac{1}{6}$  заменяется на другое число, зависящее от размерности  $D$  и деталей взаимодействия на малых расстояниях.

Отметим, что масса полярона (6.71) может намного превосходить массу электрона. Например в случае, когда электрон-фононное взаимодействие не имеет никакой специфической малости, в атомных единицах  $\lambda \sim 1$ ,  $K \sim 1$ , а  $\rho \sim M/m$ , где  $M$  — характерная масса иона решетки. При этом  $m_* \sim M$ . Разумеется в реальных полупроводниках масса полярона обычно не достигает массы иона, поскольку константа связи  $\lambda$  как правило не превосходит нескольких долей единицы, а поправка к массе в (6.71) пропорциональна  $\lambda^4$ .

Сравним перенормировку массы полярона сильной связи (6.71) с результатом  $m_*/m = 1 + \frac{4}{3\pi^2}g^2m^2c \ln(k_D/mc)$  для полярона слабой связи, полученным в задаче 16 (см. выражение (4.45)). Прежде всего отметим, что константа связи  $\lambda$  в гамильтониане сильной связи (6.13) связана с константой связи  $g$  в гамильтониане Фрëлиха (6.6) следующим образом:  $\lambda = gK^{1/2}$ . Поэтому результат (6.71) можно записать в атомных единицах как  $m_*/m = 1 + \frac{1}{6}(g^2/c)^2$ . Сравнивая эти два выражения для эффективной массы, видим, что переход из режима слабой связи в режим сильной связи происходит при относительно малой величине константы  $g \ll 1$ .

## 6.4. Эффект Пайерлса — теория среднего поля

Электрон-фононное взаимодействие в металле может приводить к двум различным, хотя в чем-то и родственным, неустойчивостям: пайерлсовской, переводящей металл в диэлектрическое состояние, и куперовской, делающей металл сверхпроводником (см. главу 10). Эффектом Пайерлса (см. задачу 32) называется неустойчивость одномерной

электрон-фононной системы, приводящая к образованию модуляции смещения решетки с волновым вектором  $k = 2p_0$  (это соответствует периоду в пространстве равному среднему расстоянию между электронами с одной проекцией спина). Из-за рассеяния электронов на периодическом деформационном потенциале с  $k = 2p_0$  в окрестности уровня Ферми в спектре электронов открывается щель, величина которой пропорциональна амплитуде модуляции. Энергия заполненных состояний, находящихся под щелью, понижается на величину большую, чем затраченная системой при возникновении модуляции упругая энергия. Такой баланс энергии делает пайерлсовское состояние более выгодным по сравнению с исходным металлическим состоянием. Пайерлсовское состояние является диэлектриком, поскольку в нем отсутствуют электронные возбуждения с энергиями меньшими величины щели в спектре. Пайерлсовская неустойчивость наиболее ярко выражена в одномерной системе, но встречается также и в реальных трехмерных системах, структура которых в том или ином смысле «квазиодномерна».

Цель этого раздела — изложить простую теорию, позволяющую обосновать описанную картину и выяснить некоторые интересные детали устройства пайерлсовского состояния. Мы ограничимся здесь случаем нулевой температуры (некоторые вопросы термодинамики перехода Пайерлса рассмотрены в задаче 39). По характеру применяемого приближения использованный ниже метод является так называемой *теорией среднего поля*, поскольку модуляция решетки, на фоне которой двигаются электроны и фононы, рассматривается в этой теории как статическая. При этом предполагается, что действующий на электроны деформационный потенциал флуктуирует относительно слабо. Такое приближение позволяет найти гриновские функции электронов и фононов и определить, как их закон дисперсии меняется при переходе в пайерлсовское состояние.

Начнем с того, что явно выделим область импульсов вблизи поверхности Ферми. Запишем для этого  $\psi$ -оператор в виде суммы вкладов частиц с энергиями вблизи  $E_F$ , движущихся направо и налево:

$$\psi(x) = \psi_1(x) e^{ip_0x} + \psi_2(x) e^{-ip_0x}, \quad (6.72)$$

где  $\psi_i(x)$ ,  $i = 1, 2$ , предполагаются медленными функциями  $x$ . После этого гамильтониан свободных электронов принимает вид:

$$\mathcal{H}_0 = \int \psi^\dagger(x) \left( -\frac{\nabla^2}{2m} - \frac{p_0^2}{2m} \right) \psi(x) dx \approx -iv_F \int \left( \psi_1^\dagger(x) \frac{\partial \psi_1}{\partial x} - \psi_2^\dagger(x) \frac{\partial \psi_2}{\partial x} \right) dx \quad (6.73)$$

Предположим теперь, что в системе возникла статическая модуляция смещения решетки  $u(x) = u_0 \cos(2p_0x + \varphi)$ . При этом на электроны действует деформационный потенциал  $U(x) = g \partial u / \partial x$ . Соответствующий вклад в гамильтониан есть

$$\widehat{\mathcal{H}}_{\text{int}} = \int U(x) \psi^\dagger(x) \psi(x) dx \approx \Delta \int \left( \psi_1^\dagger(x) \psi_2(x) + \text{h.c.} \right) dx, \quad (6.74)$$

где  $\Delta = gu_0 p_0 e^{i\varphi}$ . Нам будет удобно воспользоваться матричной формой записи. Будем считать  $\psi$  двухкомпонентным вектором (его компоненты —  $\psi_1$  и  $\psi_2$ ). Тогда гамильтониан можно представить с помощью матрицы, действующей на этот вектор:

$$\widehat{H} = \begin{pmatrix} v_F \widehat{k} & \Delta \\ \bar{\Delta} & -v_F \widehat{k} \end{pmatrix} \quad (6.75)$$

Здесь  $\hat{k} = -i\partial/\partial x$ . Перейдя к импульсному представлению, нетрудно найти собственные значения и собственные векторы оператора (6.75):

$$\varepsilon_{\pm}(k) = \pm\sqrt{v_F^2 k^2 + \Delta^2}, \quad |\pm, k\rangle = \begin{pmatrix} u_{\pm} \\ -v_{\pm} \end{pmatrix}, \quad (6.76)$$

где

$$u_{\pm}^2 = \frac{1}{2} \left( 1 \pm \frac{v_F k}{\sqrt{v_F^2 k^2 + \Delta^2}} \right), \quad v_{\pm}^2 = \frac{1}{2} \left( 1 \mp \frac{v_F k}{\sqrt{v_F^2 k^2 + \Delta^2}} \right). \quad (6.77)$$

Таким образом, наш вывод о том, что в спектре возбуждений открывается щель, оказывается справедливым, причем величина щели есть  $2|\Delta|$ .

Используя найденные собственные состояния и их энергии (6.76), найдем изменение полной энергии электронов, вызванное «внешним» деформационным потенциалом  $U(x)$ . Все электронные состояния (6.76) с  $\varepsilon > 0$  при  $T = 0$  будут пустыми, а состояния с  $\varepsilon < 0$  — занятыми. Поэтому энергия системы равна

$$E_{\text{эл}} = -2 \sum_k \sqrt{v_F^2 k^2 + |\Delta|^2} \quad (6.78)$$

(множитель 2 учитывает спиновое вырождение). Эта сумма расходится степенным образом при  $k \rightarrow \pm\infty$ , благодаря электронным состояниям, расположенным глубоко под уровнем Ферми. Однако, поскольку энергия этих состояний почти не меняется при включении потенциала  $U(x)$ , они дают относительно небольшой вклад в изменение энергии

$$\delta E_{\text{эл}} = E_{\text{эл}}(\Delta) - E_{\text{эл}}(\Delta = 0) = -2 \sum_k \left( \sqrt{v_F^2 k^2 + |\Delta|^2} - v_F |k| \right). \quad (6.79)$$

Это выражение все еще расходится при больших  $k$ , но уже лишь логарифмически. Обрезая эту расходимость при  $k \approx \pm p_0$ , получаем

$$\delta E_{\text{эл}} = -\frac{L|\Delta|^2}{\pi v_F} \left( \ln \frac{2\varepsilon_*}{|\Delta|} - \frac{1}{2} \right) \quad (6.80)$$

где  $\varepsilon_* = v_F p_0$ , а  $L$  — размер системы. Наше вычисление  $\delta E_{\text{эл}}$  корректно, поскольку  $|\Delta| \ll \varepsilon_F$ .

Чтобы определить оптимальную величину энергетической щели  $\Delta$ , найдем изменение энергии решетки при возникновении модуляции:

$$E_{\text{реш}} = \frac{\rho c^2}{2} \int (\partial u / \partial x)^2 dx = \rho c^2 p_0^2 u_0^2 L = \frac{L|\Delta|^2}{g^2}. \quad (6.81)$$

Видно, что при самых малых  $|\Delta|$  отрицательное изменение энергии электронов (6.80) преобладает. Величина  $\Delta$  определяется из условия минимизации полной энергии  $\delta E_{\text{эл}} + E_{\text{реш}}$  как функции  $\Delta$ , что дает

$$\Delta_0 = \varepsilon_* \exp \left( -\frac{\pi v_F}{g^2} \right). \quad (6.82)$$

Величина  $\Delta_0$  определяет характерный масштаб энергий, при которых имеет место эффект Пайерлса. Как видно из (6.76), именно при энергиях  $\varepsilon \sim \Delta_0$  происходят изменения в спектре электронов. Величина  $\Delta_0$  также определяет температуру  $T_c \approx \Delta_0$ , при которой происходит фазовый переход в пайерлсовское состояние (см. задачу 39). В реальных материалах температура  $T_c$  может составлять от нескольких единиц до сотен градусов.

Рассмотрим теперь функции Грина электронов и фононов. Благодаря наличию правых и левых состояний, для описания электронов, рассеивающихся на модуляции с  $k = 2p_0$ , необходимо использовать четыре функции:

$$\begin{aligned} G_{11}(x, x') &= -i \langle T \psi_1(x) \psi_1^+(x') \rangle ; & G_{22}(x, x') &= -i \langle T \psi_2(x) \psi_2^+(x') \rangle ; \\ G_{12}(x, x') &= -i \langle T \psi_1(x) \psi_2^+(x') \rangle ; & G_{21}(x, x') &= -i \langle T \psi_2(x) \psi_1^+(x') \rangle . \end{aligned}$$

Функции  $G_{ij}(x, x')$  можно вычислить, обратив матрицу  $\varepsilon - \widehat{H}$ :

$$\begin{pmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{pmatrix}_{\varepsilon, k} = (\varepsilon - \widehat{H})^{-1} = \frac{1}{\varepsilon^2 - v_F^2 k^2 - |\Delta|^2 + i0} \begin{pmatrix} \varepsilon + v_F k & \Delta \\ \Delta^+ & \varepsilon - v_F k \end{pmatrix} . \quad (6.83)$$

Полюса электронных функций Грина (6.83) дают закон дисперсии квазичастиц  $\varepsilon(k) = \pm (k^2 v_F^2 + \Delta^2)^{1/2}$ , в точности совпадающий с (6.76). Наличие щели в спектре подтверждает наш вывод о диэлектрическом характере основного состояния.

Перед тем, как исследовать функцию Грина фононов, отметим некоторые качественные черты пайерлсовского состояния. При возникновении волны зарядовой плотности в системе спонтанно нарушается трансляционная симметрия движения электронов относительно решетки (возникающая модуляция решетки понижает симметрию основного состояния). При этом, однако, исходный микроскопический гамильтониан своей симметрии не теряет. Поэтому в системе должна появиться мягкая ветвь спектра элементарных возбуждений подобная акустическим фононам<sup>4</sup>, частота которой обращается в ноль при  $k = 0$ . В данном случае механизм возникновения мягкой моды следующий. Энергия системы никак не зависит от фазы волны зарядовой плотности  $\varphi$ , если последняя постоянна. Если же  $\varphi$  медленно изменяется в пространстве, то это эквивалентно тому, что волновой вектор  $k(x)$  отклоняется от  $2p_0$  на  $\partial\varphi/\partial x$ . Модуляция с волновым вектором, отклоняющимся от оптимального значения  $k = 2p_0$ , приводит к некоторому увеличению энергии системы. Из этих рассуждений видно, что только *изменение* фазы модуляции  $\varphi(x, t)$  в пространстве (или во времени) может привести к состоянию с большей энергией. Таким образом, фаза  $\varphi(x, t)$  и есть переменная, описывающая в данном случае мягкую моду, часто поэтому называемую «фазонной модой». Как мы увидим ниже, из-за взаимодействия с электронами фазонная мода приобретает скорость  $v_F \gg c$ . Кроме фазонной моды, в системе есть также другая мода, связанная с отклонением  $|\Delta|$  от  $\Delta_0$  (так называемый «амплитудон»). Поскольку энергия системы явно зависит от  $|\Delta|$ , мода колебаний амплитуды  $\Delta$  не

<sup>4</sup>Читатель, знакомый с теоремой Голдстоуна, знает, что в этом проявляется общий принцип, требующий появления мягкой *голдстоуновской* моды при нарушении непрерывной симметрии в основном состоянии системы.



является мягкой: спектр соответствующих возбуждений отделен от энергии основного состояния щелью конечной величины.

Имея в виду вышесказанное, рассмотрим функцию Грина фононов  $D(\omega, k)$ . Уравнение Дайсона в этом случае имеет вид

$$D^{-1}(\omega, k) = D_0^{-1}(\omega, k) - g^2 \Pi(\omega, k), \quad D_0(\omega, k) = \frac{\omega_0^2(k)}{\omega^2 - \omega_0^2(k)}, \quad (6.84)$$

где  $\omega_0(k) = c|k|$ . При интересующих нас  $k \approx 2p_0$  поляризационный оператор  $\Pi(\omega, k)$  имеет нетривиальную зависимость от  $\delta k = k - 2p_0$ . В этой области он выражается через матричные функции Грина (6.83) следующим образом:

$$\Pi(\omega, k) = -i \iint \text{Tr}(\sigma_x G(\varepsilon_+, q_+) \sigma_x G(\varepsilon_-, q_-)) \frac{d\varepsilon dq}{(2\pi)^2}, \quad (6.85)$$

где  $\varepsilon_{\pm} = \varepsilon \pm \frac{1}{2}\omega$ ,  $q_{\pm} = q \pm \frac{1}{2}\delta k$ , а матрица Паули  $\sigma_x$  и след  $\text{Tr} \dots$  определены в двумерном пространстве правых и левых состояний электронов, в соответствии с (6.83). Используя выражения (6.83) для матричных функций Грина, получаем

$$\Pi(\omega, k) = -i \iint \frac{(\varepsilon_+ - v_F q_+)(\varepsilon_- + v_F q_-) + \Delta^2}{(\varepsilon_+^2 - v_F^2 q_+^2 - \Delta^2 + i0)(\varepsilon_-^2 - v_F^2 q_-^2 - \Delta^2 + i0)} \frac{d\varepsilon dq}{(2\pi)^2}, \quad (6.86)$$

Рассмотрим сначала случай  $\omega = 0$ ,  $\delta k = 0$  (т. е.  $k = 2p_0$ ). Выражение (6.86) при этом дает

$$\Pi_0 \equiv \Pi(\omega = 0, k = 2p_0) = -\frac{i}{v_F} \iint \frac{\varepsilon^2 - \tilde{q}^2 + \Delta^2}{(\varepsilon^2 - \tilde{q}^2 - \Delta^2 + i0)^2} \frac{d\varepsilon d\tilde{q}}{(2\pi)^2}, \quad (6.87)$$

где  $\tilde{q} = v_F q$ . Вычислить интеграл в (6.87) можно следующим образом. Перейдем от вещественной частоты к мнимой по формуле  $\varepsilon \rightarrow i\varepsilon$ . При таком преобразовании, как нетрудно видеть, направления обхода полюсов в выражении (6.87) остаются прежними. В результате получаем интеграл от функции, обладающей круговой симметрией:

$$\Pi_0 = \frac{1}{v_F} \iint \frac{-\varepsilon^2 - \tilde{q}^2 + \Delta^2}{(\varepsilon^2 + \tilde{q}^2 + \Delta^2 + i0)^2} \frac{d\varepsilon d\tilde{q}}{(2\pi)^2} = \frac{1}{2\pi v_F} \int_0^{\varepsilon_0} \frac{-r^2 + \Delta^2}{(r^2 + \Delta^2)^2} r dr = -\frac{1}{2\pi v_F} \ln \frac{\varepsilon_0}{e\Delta}, \quad (6.88)$$

где  $r = (\varepsilon^2 + \tilde{q}^2)^{1/2}$ , а значение энергии  $\varepsilon_0$ , на которой обрзан логарифмически расходящийся интеграл, выбрано порядка  $E_F$ .

Частота фононов с  $k = 2p_0$ , согласно рассуждениям о мягкой моде, должна быть равна нулю. Нетрудно видеть, что именно так и получается, если записать закон дисперсии  $D^{-1}(\omega, k)_{k=2p_0} = 0$  с помощью уравнения Дайсона (6.84):

$$\left( \frac{\omega^2}{\omega_0^2(k)} - 1 - g^2 \Pi(\omega, k) \right)_{k=2p_0} = 0. \quad (6.89)$$

Условие того, что данное уравнение на  $\omega$  имеет решение  $\omega = 0$ , есть  $1 + g^2 \Pi_0 = 0$ , что, согласно результату (6.88), эквивалентно соотношению (6.82) теории среднего поля, определяющему величину щели  $\Delta$ .

С помощью изложенного метода можно найти поляризационный оператор  $\Pi(\omega, k)$  при произвольных  $\omega$  и  $k$ . Для этого перейдем к мнимым частотам  $\varepsilon \rightarrow i\varepsilon$ ,  $\omega \rightarrow i\omega$  непосредственно в выражении (6.86). При этом получаем

$$\Pi(w, \bar{w}) = \frac{1}{2iv_F} \iint \frac{-\bar{z}_+ z_- + \Delta^2}{(\bar{z}_+ z_+ + \Delta^2)(\bar{z}_- z_- + \Delta^2)} \frac{d\bar{z} dz}{(2\pi)^2}, \quad z_{\pm} = z \pm \frac{1}{2}w, \quad (6.90)$$

где  $z = v_F q + i\varepsilon$ ,  $w = v_F \delta k + i\omega$ . В силу круговой симметрии интегрируемой функции, выражение (6.90) зависит только от абсолютной величины комплексного  $w$ , причем  $\Pi(w=0) = \Pi_0$ . При малых  $w$  выражение (6.90) принимает вид

$$\Pi(w, \bar{w}) = \Pi_0 + \alpha \frac{g^2 \bar{w} w}{v_F \Delta^2}, \quad |w| \ll \Delta, \quad (6.91)$$

где  $\alpha > 0$  — константа порядка единицы. Интеграл в (6.90) нетрудно вычислить точно, если сначала проинтегрировать по углу  $\arg(z)$ , а затем — по  $|z|$ . Однако для анализа закона дисперсии при  $k \approx 2p_0$  нам будет вполне достаточно разложения (6.91).

Закон дисперсии  $D^{-1}(\omega, k) = 0$ , с учетом уравнения Дайсона (6.84), в котором мы используем поляризационный оператор в форме (6.91), дает

$$\frac{\omega^2}{\omega_0^2(k)_{k=2p_0}} - \alpha \frac{g^2 \bar{w} w}{v_F \Delta^2} = 0 \quad (6.92)$$

(мы учли, что  $1 + g^2 \Pi_0 = 0$ ). Переходя в выражении (6.92) от мнимой частоты обратно к вещественной,  $\omega \rightarrow \omega/i$ , получаем линейный закон дисперсии вблизи  $k \approx 2p_0$ :

$$\left( \frac{\Delta^2}{\omega_0^2(k)_{k=2p_0}} + \alpha \frac{g^2}{v_F} \right) \omega^2 = \alpha \frac{g^2}{v_F} v_F^2 \delta k^2 \quad (6.93)$$

При малой константе электрон-фононного взаимодействия  $g$  величина  $\Delta$  экспоненциально мала, и поэтому фазовая скорость  $v_* = d\omega/dk$  близка к  $v_F$ . Качественный вид закона дисперсии фононов, получающегося в изложенной теории среднего поля, изображен на рис. 6.6. Исходный линейный фононный спектр и линеаризованный закон дисперсии (6.92) в окрестности  $k = 2p_0$  показаны пунктиром.

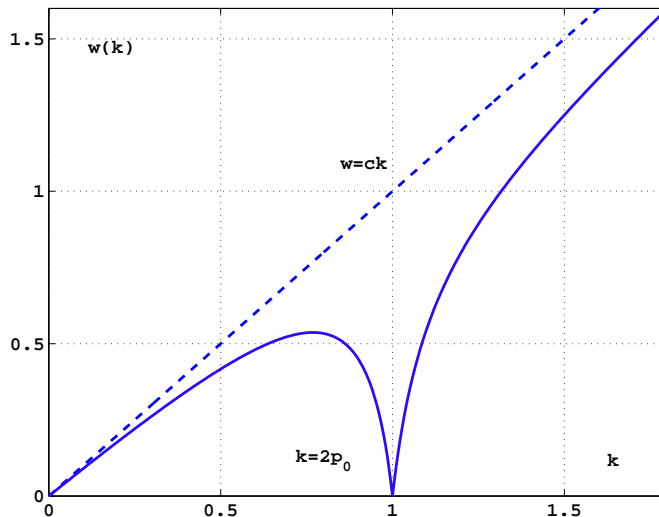


Рис. 6.6

Развитый выше аппарат во многом аналогичен теории сверхпроводимости (см. разд. 10.2.2). Основное формальное отличие состоит в том, что в теории сверхпроводимости рассматриваются процессы рассеяния электронов с противоположными импульсами, а нашей задаче — процессы переброса электронов с одной стороны ферми-поверхности на другую (или, что то же самое, рассеяние электрона и дырки с противоположными импульсами). Поэтому, как иногда говорят, в пайерлсовском диэлектрике имеет место спаривание электронов и дырок с противоположными импульсами.

Важное отличие от сверхпроводимости заключается однако в том, насколько теория среднего поля, пренебрегающая флуктуациями  $\Delta$ , соответствует реальному положению вещей. Оказывается, что в сверхпроводниках флуктуациями можно пренебречь из-за малости температуры фазового перехода по сравнению с  $E_F$  (эта малость связана с тем, что температура сверхпроводящего перехода пропорциональна  $\omega_D$ ). В случае же с эффектом Пайерлса все не столь просто. Во-первых, температура перехода Пайерлса, как правило, выше, чем в сверхпроводниках, и поэтому флуктуации сильнее. Во-вторых, дополнительное усиление флуктуаций происходит из-за квазиодномерности. Конечно реальные кристаллы все-таки трехмерны, и поэтому флуктуации не разрушают дальний порядок полностью, как это должно было бы случиться в чисто одномерном случае. Соответствующие эффекты трехмерности обычно малы, однако совсем пренебречь ими нельзя — они отвечают за поддержание дальнего порядка. Вследствие всего этого интервал температур вблизи  $T = T_c$ , в котором эффекты флуктуаций существенны, обычно оказывается довольно большим.

Отметим также, что одномерность играет в эффекте Пайерлса существенную роль. Можно проверить, что в размерностях больше единицы сингулярность поляризационного оператора при  $k = 2p_0$  (так называемая коновская особенность) оказывается более слабой и не приводит к неустойчивости.

Несмотря на одномерность, эффект Пайерлса — часто встречающееся явление. Существуют кристаллы, в которых молекулы упорядочены в одномерные цепочки, вдоль которых распространяются электроны. В таких квазиодномерных структурах эффект Пайерлса приводит к фазовому переходу, при котором изменяется период решетки. Физика возникающих в таких системах состояний весьма разнообразна и интересна, поскольку помимо электрон-фононного взаимодействия часто оказывается существенным также и электрон-электронное взаимодействие. В результате в таких системах могут возникать не только волны зарядовой плотности, рассмотренные выше, но и волны спиновой плотности, а также сверхпроводимость. Кроме того, иногда эффект Пайерлса может проявляться в «недоразвитом» виде и в трехмерных кристаллах (например, в висмуте, ферми-поверхность которого имеет плоские области, и выглядит скорее как гладко обструганный брусок, а не как сфера).

Подробнее с физикой волн зарядовой плотности можно ознакомиться по обзорам: Л.П. Булаевский, УФН, т.115, с.261 (1975); G. Grüner, Rev. Mod. Phys. **60**(4), с.1129–1181 (1988); и книге: Charge density waves in solids, eds. L.P. Gorkov, G. Grüner (North Holland, 1989); см. также оригинальные работы: P.A. Lee, T.M. Rice, P.W. Anderson, Solid State Comm. **14**, 703 (1974); С.А. Бразовский, И.Е. Дзялошинский, ЖЭТФ, т.71,

с.2338 (1976).

## Глава 7.

# Диаграммная техника при конечных температурах

### 7.1. Мацубаровское время.

В этой главе мы рассмотрим диаграммную технику для систем при конечной температуре. Обобщение нуль-температурной техники на конечные температуры оказывается удивительно простым и красивым. Оно называется *диаграммной техникой Мацубары*.

Основная задача, решаемая в статистической физике равновесных систем, состоит в усреднении различных величин по распределению Гиббса. При этом рассматриваются средние вида

$$\langle \hat{A} \dots \hat{B} \rangle_{\text{T}} = \sum_n w_n \langle n | \hat{A} \dots \hat{B} | n \rangle , \quad (7.1)$$

где индекс «Т» указывает на то, что среднее берется по распределению вероятностей различных состояний при конечной температуре  $T$ :

$$w_n = \frac{1}{Z} \exp(-\beta E_n) , \quad Z = \sum_n \exp(-\beta E_n) , \quad (7.2)$$

где  $|n\rangle$  — собственное состояние системы с энергией  $E_n$ ,  $w_n$  — вероятность пребывания в этом состоянии,  $\beta = 1/T$  — обратная температура, а  $Z$  — статистическая сумма. Выражение (7.1) можно записать так:

$$\langle \hat{A} \dots \hat{B} \rangle_{\text{T}} = \frac{\text{Tr}(\hat{A} \dots \hat{B} e^{-\beta \hat{\mathcal{H}}})}{\text{Tr} e^{-\beta \hat{\mathcal{H}}}} \quad (7.3)$$

Теория возмущений, позволяющая находить подобные средние, строится следующим образом. Представим гамильтониан в виде  $\hat{\mathcal{H}} = \hat{\mathcal{H}}_0 + \hat{\mathcal{H}}_{\text{int}}$ , где  $\hat{\mathcal{H}}_{\text{int}}$  — возмущение. В основе мацубаровской техники лежит аналогия между операторной экспонентой гамильтониана

$$\hat{U}_\beta = \exp(-\beta(\hat{\mathcal{H}}_0 + \hat{\mathcal{H}}_{\text{int}})) \quad (7.4)$$

и квантовомеханическим оператором эволюции

$$\hat{U}(t) = \exp(-it(\hat{\mathcal{H}}_0 + \hat{\mathcal{H}}_{\text{int}})) . \quad (7.5)$$

Переход от  $\hat{U}(t)$  к  $\hat{U}_\beta$  осуществляется простой заменой  $t = -i\beta$ .

Оказывается, что эта аналогия имеет далеко идущие последствия. А именно, можно рассмотреть эволюцию системы во мнимом времени  $t = -i\tau$  ( $\tau$  называют иногда *мацубаровским временем*). Введем гейзенберговские операторы

$$\hat{A}_M(\tau) = e^{\tau\hat{\mathcal{H}}} \hat{A} e^{-\tau\hat{\mathcal{H}}} . \quad (7.6)$$

Эволюция этих операторов во мнимом времени дается уравнением

$$\frac{d\hat{A}_M(\tau)}{d\tau} = [\hat{\mathcal{H}}, \hat{A}_M(\tau)] . \quad (7.7)$$

Далее можно ввести мацубаровское представление взаимодействия:

$$\hat{A}(\tau) = e^{\tau\hat{\mathcal{H}}_0} \hat{A} e^{-\tau\hat{\mathcal{H}}_0} \quad (7.8)$$

и мацубаровскую  $S$ -матрицу:

$$\hat{\mathcal{S}}(\tau) = e^{-\tau\hat{\mathcal{H}}} e^{\tau\hat{\mathcal{H}}_0} . \quad (7.9)$$

Нетрудно проверить, что эта  $S$ -матрица удовлетворяет уравнению

$$\frac{d\hat{\mathcal{S}}(\tau)}{d\tau} = -\hat{\mathcal{H}}_{\text{int}}(\tau)\hat{\mathcal{S}}(\tau) , \quad (7.10)$$

где

$$\hat{\mathcal{H}}_{\text{int}}(\tau) = e^{\tau\hat{\mathcal{H}}_0} \hat{\mathcal{H}}_{\text{int}} e^{-\tau\hat{\mathcal{H}}_0} \quad (7.11)$$

— оператор возмущения, записанный в представлении взаимодействия. Решение уравнения (7.10) имеет вид:

$$\hat{\mathcal{S}}(\tau) = T_\tau \exp \left( - \int_0^\tau \hat{\mathcal{H}}_{\text{int}}(\tau) d\tau \right) . \quad (7.12)$$

Символ  $T_\tau$  обозначает хронологическое упорядочение операторов по мацубаровскому времени  $\tau$ . Эта процедура аналогична обычному  $T$ -упорядочению (ср. с выражением (2.3), гл. 2).

В мацубаровском представлении взаимодействия средние (7.3) принимают следующий вид:

$$\langle \hat{A} \dots \hat{B} \rangle_\tau = \frac{\text{Tr} \left( \hat{A}(\beta) \dots \hat{B}(\beta) \hat{\mathcal{S}}(\beta) e^{-\beta\hat{\mathcal{H}}_0} \right)}{\text{Tr} \left( \hat{\mathcal{S}}(\beta) e^{-\beta\hat{\mathcal{H}}_0} \right)} \quad (7.13)$$

(Для вывода этого соотношения надо воспользоваться тем, что операторы под знаком следа можно переставлять циклически.) Таким образом,

$$\langle \hat{A} \dots \hat{B} \rangle_\tau = \frac{\langle \hat{A}(\beta) \dots \hat{B}(\beta) \hat{\mathcal{S}}(\beta) \rangle_{\text{T},0}}{\langle \hat{\mathcal{S}}(\beta) \rangle_{\text{T},0}} , \quad (7.14)$$

где усреднение  $\langle \dots \rangle_{T,0}$  обозначает  $\text{Tr}(\dots e^{-\beta \hat{\mathcal{H}}_0}) / \text{Tr}(e^{-\beta \hat{\mathcal{H}}_0})$  — среднее по распределению Гиббса с невозмущенным гамильтонианом  $\hat{\mathcal{H}}_0$ .

Таким образом, возникающие формулы отличаются от случая  $T = 0$  в основном заменой времени  $t = -i\tau$ . Другое отличие заключается в следующем. Усредняя по основному состоянию при  $T = 0$ , мы полагали, что возмущение при  $t = -\infty$  отсутствует, а затем медленно включается. Поэтому во всех выражениях возникали величины  $\hat{S}(t, -\infty)$ ,  $\hat{S}(\infty, t)$  и  $\hat{S}(\infty, -\infty)$ . При конечной же температуре во все формулы входит  $\hat{S}(\tau)$  только при  $0 < \tau < \beta$ . Поэтому в мацубаровской технике нас интересует эволюция системы во мнимом времени в интервале от 0 до  $\beta$ .

Кроме того в выражение (7.14) входит след, то есть сумма вида  $\sum_n \langle n | \dots | n \rangle$ . Это означает, что на квантовомеханическую задачу накладывается дополнительное ограничение: через время  $\beta$  система обязана вернуться в исходное состояние. Поэтому оказывается удобным считать, что мацубаровское время — это переменная, принимающая значения на окружности, а  $\beta$  — длина этой окружности.

Таким образом, мы приходим к важному выводу: вычисление средних по распределению Гиббса сводится к квантовомеханической задаче во мнимом времени  $0 < \tau < \beta$  с периодическими по времени граничными условиями.

Теперь можно развить теорию возмущений для вычисления термодинамических величин. Для этого вводится так называемая мацубаровская функция Грина:

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \tau, \tau') = -\langle T_\tau \psi(\mathbf{r}, \tau) \psi^\dagger(\mathbf{r}', \tau') \rangle_T. \quad (7.15)$$

(Для ферми- и бозе-статистики знак один и тот же.)

Поскольку в нашей задаче всегда  $0 < \tau < \beta$ , то  $-\beta < \tau - \tau' < \beta$ . Поэтому функция Грина (7.15) определена на отрезке  $[-\beta, \beta]$ . Кроме того, можно показать (см. [1], §11), что

$$G(\tau) = \pm G(\tau + \beta) \quad (7.16)$$

(верхний знак относится к бозевским частицам, а нижний — к фермиевским).

С помощью функции Грина можно вычислять  $\tau$ -упорядоченные средние. Оказывается, что и в температурной технике верна теорема Вика, поэтому  $\tau$ -упорядоченное произведение  $\psi$ -операторов всегда можно выразить через парные средние. Это, в свою очередь, означает, что можно построить диаграммную технику для вычисления таких средних. В координатном пространстве правила практически совпадают с правилами диаграммной техники при  $T = 0$ , за тем исключением, что область интегрирования по мацубаровскому времени  $\tau$  есть отрезок  $[0, \beta]$ . Кроме того, коэффициент перед мацубаровской диаграммой есть  $(-1)^{n+F}$  ( $n$  — порядок теории возмущений,  $F$  — число фермионных петель), а не  $i^n (-1)^F$ , как в обычной технике.

## 7.2. Дискретные частоты.

Вычисления в мацубаровской технике почти всегда проще производить не во временном, а в частотном представлении. Опишем, как выглядит соответствующий формализм. Поскольку функции Грина определены на отрезке  $[-\beta, \beta]$ , их можно разложить

в ряд Фурье:

$$G(\tau, \mathbf{r}, \mathbf{r}') = T \sum_{\omega_n} e^{-i\omega_n \tau} G(i\omega_n, \mathbf{r}, \mathbf{r}') , \quad (7.17)$$

где  $\omega_n = \pi n T$ , а множитель  $T$  введен для удобства. Условие (анти)периодичности (7.16) означает, что  $G(i\omega_n) \neq 0$  для  $\omega_n = 2\pi n T$  в случае бозе-частиц, и  $\omega_n = (2n+1)\pi T$  в случае фермионов. Поэтому в мацубаровской технике частота принимает *дискретные* значения — четные для бозонов и нечетные для фермионов. Роль дискретной частоты  $\omega_n$  в мацубаровской технике — такая же, как у энергии в обычной технике. Поэтому основное отличие диаграммной техники в частотном представлении состоит в замене интегралов по энергиям в функциях Грина на суммы по дискретным частотам. При этом сумма частот в вершине обязательно равна нулю («закон сохранения энергии»).

Приведем также выражения для электронной и фононной функций Грина в импульсном представлении:

$$G(i\varepsilon_n, \mathbf{p}) = \frac{1}{i\varepsilon_n - \xi(\mathbf{p})} , \quad \varepsilon_n = (2n+1)\pi T ; \quad (7.18)$$

$$D(i\omega_n, \mathbf{k}) = -\frac{\omega_0^2(\mathbf{k})}{\omega_n^2 + \omega_0^2(\mathbf{k})} , \quad \omega_n = 2\pi n T . \quad (7.19)$$

Заметим, что эти выражения можно получить из причинных функций Грина заменой  $\varepsilon, \omega \rightarrow i\varepsilon_n, i\omega_n$ . Приведем также полную сводку правил диаграммной техники в импульсном представлении для случая двухчастичного взаимодействия (ср. Гл. 4):

- 1) На каждой диаграмме нужно расставить импульсы  $\mathbf{p}$  и мацубаровские частоты  $\omega_n$  так, чтобы в каждой вершине выполнялись законы сохранения энергии и импульса. При этом линии бозе-частиц должны переносить четные частоты ( $\omega_n = 2\pi n T$ ), а линии ферми-частиц — нечетные ( $\omega_n = (2n+1)\pi T$ ).
- 2) Полученное выражение интегрируется по всем внутренним импульсам и суммируется по всем внутренним частотам.
- 3) Наконец, ответ следует умножить на

$$(-1)^{n+F} \frac{T^n}{(2\pi)^{3n}} , \quad (7.20)$$

где  $n$  — порядок теории возмущений, а  $F$  — число фермионных петель.

Итак, рецепт учета конечной температуры выглядит заманчиво просто. Нужно заменить энергии на  $i\varepsilon_n$ , интегралы по энергиям  $\int \dots d\varepsilon/2\pi$  на  $T \sum_{\varepsilon_n} \dots$  и просуммировать по дискретным частотам  $\varepsilon_n$ . Хотя на первый взгляд кажется, что выражения, полученные в мацубаровской технике при конечной температуре, должны быть как-то тривиально связаны с нуль-температурными выражениями, в действительности это не совсем так (см. задачи 40, 41).



### 7.2.1. Метод аналитического продолжения.

Мацубаровская техника позволяет легко вычислять одновременные средние любых величин. На первый взгляд, при рассмотрении динамики в реальном времени мацубаровская техника бесполезна. Ведь разновременные средние, которые эта техника использует, имеют вид  $\langle \hat{A}(\tau) \hat{B}(0) \rangle$ , где  $\tau$  — это мацубаровское время, а не настоящее! Однако оказывается, что при помощи специального приема, рассмотренного ниже, мацубаровская техника может быть использована для вычисления определенных *разновременных средних*.

Существуют весьма общие соотношения между мацубаровскими функциями, определенными во мнимом времени, и функциями Грина в реальном времени, такими как запаздывающие и опережающие гриновские функции. Эти соотношения следуют только из аналитических свойств функций Грина, и никак не используют конкретного вида этих функций в той или иной системе. Поэтому они имеют столь же общий характер, как, скажем, флуктуационно-диссипационная теорема или соотношения Крамерса-Кронига для восприимчивости.

Рассмотрим запаздывающую и опережающую функции Грина, определенные<sup>1</sup> при конечной температуре следующим образом:

$$G^R(\varepsilon, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = -i \int_0^{\infty} e^{i\varepsilon t_{12}} \langle \hat{\psi}(\mathbf{r}_1, t_1) \hat{\psi}^+(\mathbf{r}_2, t_2) \pm \hat{\psi}^+(\mathbf{r}_2, t_2) \hat{\psi}(\mathbf{r}_1, t_1) \rangle_{\tau} dt_{12}, \quad (7.21)$$

$$G^A(\varepsilon, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = i \int_{-\infty}^0 e^{i\varepsilon t_{12}} \langle \hat{\psi}(\mathbf{r}_1, t_1) \hat{\psi}^+(\mathbf{r}_2, t_2) \pm \hat{\psi}^+(\mathbf{r}_2, t_2) \hat{\psi}(\mathbf{r}_1, t_1) \rangle_{\tau} dt_{12}, \quad (7.22)$$

где  $t_{12} = t_1 - t_2$ , причем знак «+» соответствует фермионам, а знак «-» — бозонам. Оказывается, что мацубаровская функция Грина  $G_M(i\varepsilon_n, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ , аналитически продолженная с дискретных значений частоты  $\varepsilon_n > 0$  на верхней мнимой полуоси дает  $G^R(\varepsilon, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ , в то время как при продолжении с нижней полуоси,  $\varepsilon_n < 0$ , получается  $G^A(\varepsilon, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ . Принимая во внимание аналитичность  $G^R(\varepsilon, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$  и  $G^A(\varepsilon, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$  соответственно в верхней и нижней полуплоскостях комплексного  $\varepsilon$ , соотношение между  $G^R$ ,  $G^A$  и  $G_M$  можно записать так:

$$G_M(i\varepsilon_n, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \begin{cases} G^R(i\varepsilon_n, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2), & \varepsilon_n > 0; \\ G^A(i\varepsilon_n, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2), & \varepsilon_n < 0, \end{cases} \quad (7.23)$$

где мацубаровские частоты  $\varepsilon_n$  — четные для бозонов и нечетные для фермионов. Доказательство результата (7.23) приведено в задаче 40 а).

Из соотношений (7.23) между запаздывающими, опережающими и мацубаровскими функциями следует весьма полезное интегральное представление:

$$G(i\varepsilon_n, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{Im} G^R(\varepsilon, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)}{\varepsilon - i\varepsilon_n} d\varepsilon, \quad (7.24)$$

<sup>1</sup>см. [1] §17, формулы (17.15) и (17.16).

где интеграл по  $d\varepsilon$  берется по всей вещественной оси. Действительно, при  $\varepsilon_n > 0$  это соотношение есть следствие аналитических свойств запаздывающей функции Грина в верхней полуплоскости. Чтобы получить  $G(i\varepsilon_n)$  при  $\varepsilon_n < 0$ , следует заменить запаздывающую функцию Грина на опережающую функцию  $G^A(\varepsilon)$  и изменить знак в (7.24). Но поскольку на вещественной оси  $\text{Im } G^R(\varepsilon) = -\text{Im } G^A(\varepsilon)$ , соотношение (7.24) оказывается справедливым и при  $\omega_n < 0$ .

Важным применением соотношений (7.23) является задача об отыскании линейного отклика системы, возмущаемой внешним полем. Согласно формуле Кубо, функция отклика выражается через среднее от коммутатора двух операторов в разные моменты времени:

$$\chi_{AB}(\omega) = \frac{i}{\hbar} \int_0^{\infty} e^{i\omega t} \langle [\hat{A}(t), \hat{B}(0)] \rangle_T dt. \quad (7.25)$$

Имеется очевидное сходство между выражением (7.25) и запаздывающей бозонной функцией Грина (7.21), означающее, что эти две функции имеют сходные аналитические свойства. Чтобы получить для функции отклика (7.25) соотношения подобные (7.23), вводится *мацубаровская восприимчивость*

$$\chi_{AB}^{(M)}(i\omega_n) = \frac{1}{2\hbar} \int_{-\beta}^{\beta} \langle T_{\tau} \hat{A}(\tau) \hat{B}(0) \rangle_T e^{i\omega_n \tau} d\tau. \quad (7.26)$$

Справедлива<sup>2</sup> так называемая *теорема об аналитическом продолжении*: *Мацубаровская восприимчивость  $\chi_{AB}^{(M)}(i\omega_n)$ , продолженная с дискретного множества точек на положительной мнимой полуоси  $\omega = i\omega_n$ , ( $n > 0$ ), на вещественную ось  $\text{Im } \omega = 0$ , дает восприимчивость Кубо  $\chi_{AB}(\omega)$ .*

Эта теорема, доказательство которой приведено в задаче 37, позволяет находить восприимчивость (7.25) с помощью функции  $\chi_{AB}^{(M)}(i\omega_n)$ , которую, в свою очередь, можно вычислить с помощью мацубаровской диаграммной техники.

В отсутствие взаимодействия мацубаровская восприимчивость дается всего одной диаграммой — петлей с операторами  $\hat{A}$  и  $\hat{B}$  в вершинах. Мацубаровская восприимчивость имеет такие же аналитические свойства, как поляризационный оператор. Напомним (см. задачу 24), что аналитические свойства восприимчивости Кубо и поляризационного оператора в нуль-температурной технике оказываются различными. А в мацубаровской технике между восприимчивостью и поляризационным оператором имеется простая связь. Согласно приведенной выше теореме, для получения восприимчивости достаточно вычислить петлю с мацубаровскими функциями Грина, и затем определенным образом продолжить ее на вещественные частоты.

Отметим, что иногда и случай  $T = 0$  бывает удобнее рассматривать в мацубаровской технике. Для этого нужно вернуться от суммирования к интегрированию, поскольку при  $T = 0$  точки  $i\omega_n$  сливаются в мнимую ось в плоскости комплексной переменной  $\omega$ . При этом  $T \sum_{\omega_n} \dots$  переходит просто в  $\int \dots d\omega / 2\pi$ . При таком методе вычисления не возникает сложностей с обходом полюсов гриновских функций, поскольку направление обхода оказывается правильным автоматически.

<sup>2</sup>см. [1], §17, §37, п.2, [6], §91

Для иллюстрации использования мацубаровских функций при нулевой температуре, докажем теорему об аналитическом продолжении для невзаимодействующей системы. В этом случае восприимчивость дается формулой (5.4), полученной из (7.25) по теореме Вика. Рассмотрим выражение (5.4) и заменим  $\omega \rightarrow i\omega$ . Теперь запишем дробь в формуле (5.4) как интеграл по вспомогательной мнимой частоте:

$$\begin{aligned} \frac{n(E_m) - n(E_k)}{E_k - E_m - i\omega} &= -\frac{1}{2\pi} \int \frac{d\varepsilon}{(i\varepsilon + \omega - E_k)(i\varepsilon - E_m)} = \\ &= -\frac{1}{2\pi} \int G_k^M(i\varepsilon + i\omega) G_m^M(i\varepsilon) d\varepsilon, \end{aligned} \quad (7.27)$$

Подставляя это выражение в (5.4), получаем:

$$\chi_{AB}(i\omega) = -\frac{1}{2\pi} \int \text{Tr} \left( \hat{G}^M(i\varepsilon + i\omega) \hat{B} \hat{G}^M(i\varepsilon) \hat{A} \right) d\varepsilon. \quad (7.28)$$

Возвращаясь к вещественной частоте, видим, что физическая восприимчивость (7.25) действительно получается из восприимчивости (7.28) на мнимой частоте аналитическим продолжением по  $\omega$  с положительной мнимой полуоси на вещественную ось. Выражение (7.28) не зависит явно от выбора базиса. Поэтому оно оказывается весьма удобным в случаях, когда собственные функции неизвестны, как например в задаче о ферми-газе в случайном потенциале (см. гл. 9).

Подведем итог. Хотя мацубаровская техника и использует динамику во мнимом времени, иногда имеющую не вполне ясный физический смысл, она оказывается полезной при описании динамики в реальном времени как при конечной, так и при нулевой температуре. Переход от мнимого времени к физическому времени достигается аналитическим продолжением с мнимых дискретных частот на вещественные. Отметим еще раз, что мацубаровская техника позволяет изучать неравновесные явления лишь на уровне линейного отклика. Более сложные кинетические задачи, в которых внешнее поле может возбуждать систему так сильно, что она не успевает возвращаться в равновесное состояние, таким способом решать нельзя.

Дело в том, что в подобных случаях приходится иметь дело со средними, взятыми не по распределению Гиббса, а по неравновесному распределению. Такого рода средние можно изучать с помощью техники Келдыша ([7], §§ 92-95). Эта техника, однако, довольно сложна и ее рассмотрение выходит за рамки этой книги.

Как мы видели в разделе 5.1.1, для невзаимодействующей системы выражение (7.25) для восприимчивости Кубо может быть преобразовано к виду (5.10), содержащему запаздывающую и опережающую функции Грина. Для взаимодействующих систем, однако, результат (5.10) не имеет места.

В случае взаимодействия формулу (5.10) можно обобщить с помощью так называемой диаграммной техники Келдыша, позволяющей изучать произвольные неравновесные системы (см. [7], §§ 92-95). Техника Келдыша использует запаздывающие и опережающие функции Грина, а также матрицу плотности, и описывает динамику с помощью квантового аналога кинетического уравнения. В рамках этой техники можно изучать любые отклики, линейные и нелинейные, как в равновесных системах, так и в системах выведенных из равновесия.

Однако, из-за своей большой общности техника Келдыша оказывается довольно громоздкой. Поэтому применять ее в такой простой задаче, как вычисление линейного отклика в термодинамически равновесном состоянии системы, оказывается не очень удобным. Вместо этого обычно пользуются описанным в этом разделе приемом, основанном на аналитическом продолжении мацубаровских величин.

*Литература:* [1] гл. 3; [6] гл. IV

### 7.3. Задачи 34÷42

**Задача 34.** (*Затухание осцилляций*) При конечной температуре распределение ферми-частиц по энергиям размывается на величину порядка  $T$ , что соответствует неопределенности радиуса ферми-сферы  $\delta p_0 \simeq T/v_F$ . Пространственные осцилляции с  $k = 2p_0$ , имеющие место для неоднородной ферми-системы в основном состоянии соответственно видоизменяются.

Рассмотрите осцилляции<sup>3</sup> **а)** Фриделя (см. задачу 8) и **б)** Рудермана-Киттеля (см. задачу 22), и получите для них выражения верные при конечной температуре  $T \ll E_F$ . Покажите, что осцилляции сохраняются на расстояниях меньше *тепловой длины*  $l_T = \hbar v_F/T$  и экспоненциально затухают при  $r \geq l_T$ .

**Задача 35.** (*Термодинамический потенциал и функции Грина*) Рассмотрим взаимодействующую ферми-систему, в которой существенными являются диаграммы типа «собственно-энергетическая часть», а более сложные диаграммы, такие например, как поправка к вершине взаимодействия, — несущественны. (Подобная ситуация имеет место для электрон-фононного взаимодействия в металле.) Для нахождения термодинамического потенциала  $\Omega$  в этом случае необходимо рассмотреть диаграммы, показанные на рис. 7.1. Сумма этого диаграммного ряда дает изменение термодинамического потенциала  $\Omega - \Omega_0$  в результате взаимодействия.

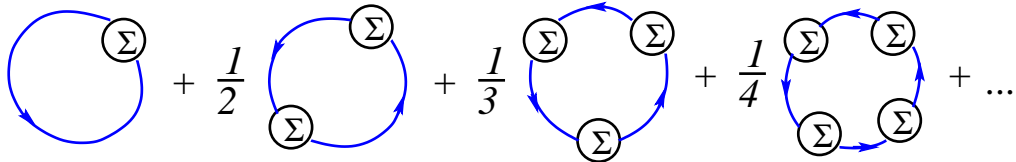


Рис. 7.1

**а)** Покажите, что термодинамический потенциал  $\Omega$  выражается через функцию Грина

$$G_\alpha(i\varepsilon_n, \mathbf{p}) = \frac{1}{i\varepsilon_n - \xi_\alpha(\mathbf{p}) - \Sigma_\alpha(i\varepsilon_n, \mathbf{p})}, \quad (7.29)$$

где  $\alpha$  — спиновый индекс, следующим образом:

$$\Omega = T \sum_{n, \mathbf{p}, \alpha} e^{i\varepsilon_n \tau} \ln G_\alpha(i\varepsilon_n, \mathbf{p}), \quad \tau \rightarrow +0. \quad (7.30)$$

**б)** (*Энтропия и теплоемкость*) Чтобы использовать формулу (7.30) для вычисления термодинамических функций, полезно привести ее к виду, содержащему вместо суммы по мацубаровским частотам интеграл по вещественным частотам. Воспользуйтесь для этого правилом

$$T \sum_{\varepsilon_n = \pi T(2n+1)} f(\varepsilon_n) = \frac{1}{4\pi i} \oint d\varepsilon \operatorname{th} \frac{\varepsilon}{2T} f(\varepsilon). \quad (7.31)$$

<sup>3</sup>На больших расстояниях  $r \gg p_0^{-1}$  удобно использовать функцию Грина в координатном представлении — см. задачу 22 и начало §38 [1].

и перейдите к интегрированию по контуру, обходящему мнимую ось, на которой расположены полюса функции  $\text{th}(\varepsilon/2T)$ .

Найдите линейный по  $T$  член в теплоемкости<sup>4</sup> металла при низких температурах  $T \ll \omega_D$  с учетом эффектов электрон-фононного взаимодействия. Как известно, в этом случае собственно-энергетическая часть  $\Sigma(\varepsilon, \mathbf{p})$  не зависит от  $\mathbf{p}$  и при малых энергиях  $|\varepsilon| \ll \omega_D$  с хорошей точностью дается выражением  $\Sigma(\varepsilon) = -b\varepsilon$  (см. задачу 29 и [1], §21 п.3).

**Задача 36.** (*Термодинамический потенциал фермионной цепочки*) Рассмотрим фермионную цепочку (1.19)

$$\mathcal{H} = \sum_{i=-\infty}^{\infty} J_1 a_i^+ a_{i+1} + J_1 a_{i+1}^+ a_i + J_2 a_i^+ a_{i+1}^+ + J_2 a_{i+1} a_i - V a_i^+ a_i, \quad (7.32)$$

обсуждавшуюся в задачах 2 и 20. Функция Грина для этой системы была найдена в задаче 20. Используя функцию Грина, найдите термодинамический потенциал  $\Omega$ .

**Задача 37.** (*Мацубаровская восприимчивость*)

а) Докажите теорему об аналитическом продолжении, сформулированную в разделе 7.2.1. Запишите мацубаровскую восприимчивость и восприимчивость Кубо при конечной температуре в базисе точных собственных состояний невозмущенной системы и покажите, что второе выражение получается из первого аналитическим продолжением частоты  $\omega$  с дискретных значений  $2\pi i T n$  на верхней мнимой полуоси ( $n > 0$ ) на вещественную ось (см. [1] §17, §37 п.2, [6] §91).

б) Используя теорему об аналитическом продолжении, решите снова задачу 24 б), в которой требуется найти динамическую спиновую восприимчивость идеального ферми-газа.

в) («Парадокс») Рассмотрим свободный спин  $s = 1/2$  при температуре  $T$  и найдем его восприимчивость  $\chi$  по отношению к слабому внешнему полю двумя различными способами: по формуле Кубо и методом аналитического продолжения. Поскольку в отсутствие внешних полей гамильтониан  $\mathcal{H}_0 = 0$ , в данном случае оператор спина не зависит от времени. Поэтому коммутатор в формуле Кубо обращается в ноль,  $[\hat{s}_\alpha(t), \hat{s}_\alpha(t')] = 0$  и, на первый взгляд,  $\chi = 0$ . Покажите, что мацубаровская восприимчивость в данном случае дает закон Кюри:  $\chi = \beta\mu^2$ , где  $\mu$  — магнитный момент. Разрешите возникающий парадокс.

**Задача 38.** (*Флуктуации смещений решетки*) Флуктуации смещений (6.1) атомов кристаллической решетки, возникающие вследствие нулевых колебаний и теплового движения, описываются корреляционной функцией  $\langle \mathbf{u}_\alpha(\mathbf{r}) \mathbf{u}_\beta(\mathbf{r}') \rangle_T$ . Выразите коррелятор продольных компонент смещений

$$C_T(\mathbf{r}) = \langle u_{\parallel}(\mathbf{r}) u_{\parallel}(0) \rangle_T, \quad u_{\parallel}(\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{|\mathbf{k}|} (\mathbf{k} \mathbf{u}_{\mathbf{k}}) e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}, \quad (7.33)$$

через температурную функцию Грина фононов  $D(i\omega_n, \mathbf{k})$  (см. (7.15), (7.19)), и получите для  $C_T(\mathbf{r})$  общую формулу, справедливую при произвольном законе дисперсии фононов.

<sup>4</sup>Электрон-фононное взаимодействие дает также нелинейный по температуре вклад в теплоемкость металла:  $\delta C \simeq (T/\omega_D)^2 \ln(\omega_D/T)$  — см. [1] §21, п.4.

Найдите коррелятор смещений  $C_T(\mathbf{r})$  для однородной изотропной упругой среды в размерностях  $D = 1, 2, 3$ , считая закон дисперсии фононов линейным. Рассмотрите  $C_T(\mathbf{r})$  при  $T \neq 0$  и  $T = 0$ , выделяя  $\Delta C_T(\mathbf{r}) = C_T(\mathbf{r}) - C_0(\mathbf{r})$ . Найдите по порядку величины зависимость  $C_0(\mathbf{r})$  и  $\Delta C_T(\mathbf{r})$  от  $T$  и  $\mathbf{r}$  при  $T \rightarrow 0$ ,  $r \rightarrow \infty$ . Определите способ обрезания интегралов, расходящихся инфракрасно (на больших расстояниях) и ультрафиолетово (на малых расстояниях).

**Задача 39.** (*Переход Пайерлса: критическая температура и флуктуации*) Вернемся к задаче 32, где изучалась пайерлсовская неустойчивость одномерного ферми-газа, возникающая вследствие электрон-фононного взаимодействия. Рассмотрим температурную функцию Грина фононов  $D(i\omega_n, k)$  с учетом электрон-фононного взаимодействия.

а) Найдите поляризационный оператор  $\Pi(i\omega_n, k)$  при  $|k| \simeq 2p_0$  и  $T \ll E_F$ . Рассмотрите корреляционную функцию фурье-компонент смещений:

$$C_T(k) = \langle u_k(t) u_{-k}(t) \rangle_T \quad (7.34)$$

при  $k$  близких к  $\pm 2p_0$ . Найдите температуру  $T_c$ , при которой  $C_T(k) \rightarrow \infty$ .

б) Вблизи температуры перехода  $T = T_c$  спектр фононов «смягчается». Из-за этого возрастают тепловые флуктуации гармоник поля смещений  $u(r, t)$  с  $|k| \simeq 2p_0$ . Интересующую нас часть поля с  $k$  вблизи  $\pm 2p_0$  можно записать в виде:

$$u(r, t) = \text{Re} \left( Q(r, t) e^{2ip_0 r} \right) \quad (7.35)$$

где  $Q(r, t)$  — плавно зависящая от координат функция. Покажите, что при  $T$  немного выше  $T_c$  спектр флуктуаций  $Q(r, t)$  имеет лоренцев вид

$$\langle Q_k(t) Q_{-k}(t) \rangle = \frac{A}{ak^2 + \tau}, \quad \tau \equiv \frac{T - T_c}{T_c} \ll 1, \quad |k| \ll T_c/v_F. \quad (7.36)$$

Найдите пространственную зависимость коррелятора смещений  $C_T(r)$ , определенного выражением (7.33). Обратите внимание, что при выделении в выражении для  $C_T(r)$  сильно флуктуирующей части, из всей суммы по  $\omega_n = 2\pi nT$  остается только член с  $n = 0$ . Это соответствует переходу к классической термодинамике.

Выражение (7.36) называют *законом Орнштейна-Цернике*. Оно описывает корреляционную функцию параметра порядка вблизи  $T_c$  в теории среднего поля для любого фазового перехода.

**Задача 40.** (*Связь между запаздывающими, опережающими и мацубаровскими функциями*)

а) Докажите соотношения (7.23), связывающие мацубаровскую функцию на верхней (нижней) мнимой полуоси с аналитическим продолжением запаздывающей (опережающей) функции Грина с вещественной оси в соответствующую полуплоскость комплексной частоты.

б) Существует весьма полезный метод вычисления мацубаровских диаграмм, опирающийся на аналитические свойства функций Грина<sup>5</sup>. С помощью этого метода можно «автоматизировать» процедуру аналитического продолжения, необходимую для перехода от мацубаровских к запаздывающим и опережающим функциям. Кроме того, он

позволяет выполнить в явном виде суммирование по мацубаровским частотам в любой диаграмме.

В качестве примера рассмотрим собственно-энергетическую часть  $\Sigma(i\varepsilon_n, \mathbf{p})$  мацубаровской функции Грина электрона, взаимодействующего с фононами:

$$\Sigma(i\varepsilon_n, \mathbf{p}) = -g^2 T \sum_{i\varepsilon'_m} \int G(i\varepsilon'_m, \mathbf{p}_1) D(i\varepsilon_n - i\varepsilon'_m, \mathbf{p} - \mathbf{p}_1) \frac{d\mathbf{p}_1}{(2\pi)^3}. \quad (7.37)$$

Соответствующая диаграмма изображена на рис. 4.10.

Выполните суммирование в (7.37) в общем виде, пользуясь аналитическими свойствами гриновских функций (7.23), (7.24). Получите формулу<sup>6</sup>

$$\Sigma^R(\varepsilon, \mathbf{p}) = \frac{g^2}{2\pi^2} \int \frac{d^3 \mathbf{p}_1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} d\varepsilon' \frac{\text{Im } G^R(\varepsilon', \mathbf{p}_1) \text{Im } D^R(\omega, \mathbf{p} - \mathbf{p}_1)}{\varepsilon - \varepsilon' - \omega + i0} \left( \text{th } \frac{\varepsilon'}{2T} + \text{cth } \frac{\omega}{2T} \right), \quad (7.38)$$

где интеграл берется по вещественным  $\varepsilon'$  и  $\omega$ . Выражение (7.38) по своей структуре напоминает полученные в задаче 24 б) формулы (5.57), (5.53), дающие восприимчивость при  $T = 0$  и явно учитывающие аналитические свойства, следующие из принципа причинности.

**Задача 41.** (*Динамика вблизи перехода*) Рассмотрим динамику электронов и фононов в одномерной системе при температуре вблизи перехода Пайерлса. Будем считать, что  $T$  несколько выше  $T_c$ . При этом, как мы выяснили в задаче 39, в системе имеются сильные флуктуации поля смещений решетки с  $k$  вблизи  $\pm 2p_0$ . Естественно ожидать, что динамика фононов с такими  $k$  является *медленной*.

а) Найдите запаздывающую функцию Грина фононов, используя выражение для мацубаровской функции Грина, найденное в задаче 39.

б) Найдите запаздывающую функцию Грина электронов, описывающую эффект рассеяния электронов на флуктуациях поля смещений вблизи  $T_c$ . Считайте рассеяние слабым и найдите собственно-энергетическую часть (7.38) во втором порядке по взаимодействию с «мягкими» фононами, функция Грина которых получена в части а).

**Задача 42\*.** (*Взаимодействие ван-дер-Ваальса при  $T > 0$* ) Рассмотрим два атома на расстоянии  $r$  друг от друга. При  $r$  много большем размера атомов  $a_B = \hbar^2/me^2$  обменное взаимодействие, обязанное своим существованием туннелированию электронов, становится экспоненциально малым, и основным является *ван-дер-ваальсово взаимодействие*, возникающее благодаря флуктуациям электромагнитного поля. Потенциал этого взаимодействия, как при нулевой, так и при конечной температуре, можно выразить через поляризуемости атомов.

Предположим, что область пространства, в которой находятся два атома, заполнена равновесным излучением с температурой  $T$ . На каждый из атомов со всех сторон падает свет и, рассеиваясь, оказывает давление. Для одного атома силы давления компенсируются, поскольку распределение излучения по углам изотропно. Если же имеется

<sup>5</sup>см. работу: Г.М. Элиашберг, ЖЭТФ **39**, 1437 (1960), а также [1] §21, п.3, [6] §96.

<sup>6</sup>В (7.38) используется стандартное определение мнимой части функций Грина. В частности, для свободных частиц  $\text{Im}(\varepsilon - \xi + i0)^{-1} = -\pi\delta(\varepsilon - \xi)$ .

второй атом, то он экранирует часть излучения, падающего на первый атом, и появляется результирующая сила притяжения.<sup>7</sup>

Выразите эту силу через поляризуемости атомов, считая их основные состояния изотропными, т. е. характеризующимися орбитальным угловым моментом  $L = 0$ . Используйте температурные гриновские функции фотонов  $D_{\alpha\beta}(r_1, r_2, \tau_1 - \tau_2) = -\langle T_\tau A_\alpha(r_1, \tau_1) A_\beta(r_2, \tau_2) \rangle_\tau$  в кулоновской калибровке  $A_0 = \Phi = 0$ . В мацубаровском фурье-представлении они имеют вид:

$$D_{\alpha\beta}(i\omega_n, k) = -\frac{4\pi\hbar}{\omega_n^2/c^2 + k^2} \left[ \delta_{\alpha\beta} + \frac{c^2 k_\alpha k_\beta}{\omega_n^2} \right] \quad (7.39)$$

(см. [1] §28, формула (28.27.6); [6] §79)

Ван-дер-ваальсово взаимодействие есть частный случай так называемой *корреляционной* энергии системы, состоящей из двух или большего числа взаимодействующих подсистем. Корреляционная энергия, найденная в низшем исчезающем порядке по взаимодействию, всегда отрицательна, поскольку она представляет собой поправку к энергии основного состояния второго порядка по взаимодействию. Другой пример системы, в которой корреляционная энергия играет важную роль — электронная ферми-жидкость (см. задачи 48 б) и 49).

## 7.4. Решения

**Решение 34 а)** Будем решать эту задачу по аналогии с задачей 8. Рассмотрим мацубаровскую функцию Грина

$$G(\tau, x, x') = -\langle T_\tau \psi(x, 0) \psi^\dagger(x', \tau) \rangle_\tau \quad (7.40)$$

и выразим плотность частиц  $n(x)$  через нее:

$$n(x) = -2 \lim_{\tau \rightarrow -0} G(\tau, x, x) \quad (7.41)$$

(как всегда, множитель 2 учитывает спин). Как и в задаче 8, функция Грина при наличии стенки получается методом изображений:

$$G(\tau, x, x') = G_0(\tau, x, x') - G_0(\tau, x, -x'), \quad (7.42)$$

где  $G_0(\tau, x, x')$  — гриновская функция ферми-газа на прямой  $-\infty < x < \infty$ . Отсюда получается выражение для плотности частиц через функцию Грина идеального ферми-газа:

$$n(x) = -2 [G_0(\tau = -0, x = 0) - G_0(\tau = -0, 2x)] . \quad (7.43)$$

Чтобы найти  $G_0(\tau, x)$ , вспомним, что ее фурье-образ есть просто

$$G_0(i\omega_n, p) = \frac{1}{i\omega_n - \xi_p} . \quad (7.44)$$

---

<sup>7</sup>Если бы вместо атомов в пространстве, заполненном излучением, находились два одинаковых макроскопических поглощающих шара, то сила притяжения между ними спадала бы как  $1/r^2$ . (Это справедливо при диаметре шаров  $a$  таком, что  $a \ll r \ll Ta^2/c\hbar$ .) В XVIII веке подобный механизм предлагался для объяснения закона тяготения.



Поэтому

$$G_0(\tau, x) = T \sum_{\omega_n} \int \frac{dp}{2\pi} \frac{e^{ipx - i\omega_n \tau}}{i\omega_n - \xi_p}. \quad (7.45)$$

Перейдем в (7.45) к интегрированию по  $\xi$ , выделяя области импульсов  $p \approx \pm p_0$ :

$$G_0(\tau, x) = \frac{T}{2\pi v_F} \sum_{\omega_n} e^{-i\omega_n \tau} \left( e^{ip_0 x} \int \frac{e^{i\xi x/v_F} d\xi}{i\omega_n - \xi} + e^{-ip_0 x} \int \frac{e^{-i\xi x/v_F} d\xi}{i\omega_n - \xi} \right) \quad (7.46)$$

Рассмотрим следующее выражение:

$$I(\tau, x) = \sum_{\omega_n} e^{-i\omega_n \tau} \int \frac{d\xi}{2\pi} \frac{e^{i\xi x/v_F}}{i\omega_n - \xi}. \quad (7.47)$$

Вычислим  $I(\tau, x)$  при  $x > 0$ . Замыкая контур интегрирования по  $\xi$  в верхней полуплоскости, получаем

$$I(\tau, x) = -i \sum_{\omega_n > 0} e^{-\omega_n(x + iv_F \tau)/v_F} = \frac{-i}{2 \operatorname{sh} \left( \pi T \left( \frac{x}{v_F} + i\tau \right) \right)}. \quad (7.48)$$

Нетрудно показать, что полученная формула справедлива и при  $x < 0$ . В результате

$$G_0(\tau, x) = -i \frac{T}{2v_F} \left( \frac{e^{ip_0 x}}{\operatorname{sh} \left( \pi T \left( \frac{x}{v_F} + i\tau \right) \right)} - \frac{e^{-ip_0 x}}{\operatorname{sh} \left( \pi T \left( \frac{x}{v_F} - i\tau \right) \right)} \right), \quad (7.49)$$

откуда

$$G_0(\tau \rightarrow -0, x) = -\frac{T \sin p_0 x}{v_F \operatorname{sh} \frac{\pi T x}{v_F}}. \quad (7.50)$$

Теперь, пользуясь (7.43), можно найти плотность частиц:

$$n(x) = \frac{2T}{v_F} \left( \frac{v_F p_0}{\pi T} - \frac{\sin 2p_0 x}{\operatorname{sh} (2\pi T x/v_F)} \right) = n_0 \left( 1 - \frac{\pi T}{v_F p_0} \frac{\sin 2p_0 x}{\operatorname{sh} (2\pi T x/v_F)} \right), \quad (7.51)$$

где  $n_0 = 2p_0/\pi$  — плотность газа вдали от стенки. При  $T \rightarrow 0$  это выражение, очевидно, воспроизводит ответ задачи 8. Заметим также, что при  $x \gg v_F/2\pi T$  осцилляции экспоненциально затухают. Характерное число осцилляций  $N \sim 2p_0 v_F/2\pi T$  велико при температурах, много меньших энергии Ферми.

**Решение 34 б)** Эффект Рудермана–Киттеля рассмотрим по аналогии с задачей 23. В первую очередь нам понадобится мацубаровская функция Грина в координатно-энергетическом представлении. Вычислим ее, как в задаче 22:

$$\begin{aligned} G(i\omega_n, \mathbf{r}) &= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{e^{i\mathbf{p}\mathbf{r}}}{i\omega_n - \xi_p} = \frac{\nu_0}{pr} \int \frac{\sin(p_0 + \xi/v_F)r}{i\omega_n - \xi} d\xi \\ &= \frac{\nu_0}{2ipr} \int \frac{e^{i(p_0 + \xi/v_F)r} - e^{-i(p_0 + \xi/v_F)r}}{i\omega_n - \xi} d\xi \\ &= -\frac{m}{2\pi r} e^{ir(p_0 + i\omega_n/v_F)\operatorname{sign}\omega_n}. \end{aligned} \quad (7.52)$$

Точно так же, как и в задаче 23, выразим плотность спина через функцию Грина. Все выкладки отличаются лишь заменой  $-i$  на  $-1$  в определениях функций Грина и в операторе возмущения. Поэтому

$$\sigma^i(r) = 2JS^i T \sum_{\omega_n} G_0^2(i\omega_n, r), \quad (7.53)$$

что приводит к

$$\sigma_i(r) = 2JS_i T \left( \frac{m}{2\pi r} \right)^2 \left( \sum_{\omega_n > 0} e^{2ip_0 r - 2\omega_n r/v_F} + \sum_{\omega_n < 0} e^{-2ip_0 r + 2\omega_n r/v_F} \right). \quad (7.54)$$

Выполняя суммирование по  $\omega_n$ , получаем:

$$\sigma^i(r) = JS^i \frac{m^2 T}{2\pi^2 r^2} \frac{\cos 2p_0 r}{\text{sh } 2\pi T r/v_F}. \quad (7.55)$$

При  $T \rightarrow 0$  это выражение переходит в полученное ранее. Длина, на которой затухают осцилляции, оказывается равной  $v_F/2\pi T$ , как и для фриделевских осцилляций (7.51).

**Решение 35 а)** Как известно, суммирование ряда для термодинамического потенциала осложняется тем, что по сравнению с рядом для функции Грина каждая из диаграмм содержит дополнительный множитель  $1/n$ , где  $n$  — порядок диаграммы по взаимодействию. Канонический способ преодоления этой трудности — дифференцирование диаграмм по константе связи, устраняющее множители  $1/n$ . В случае же диаграмм, изображенных на рис. 7.1, в использовании подобного приема нет необходимости, поскольку имеющийся ряд легко суммируется. Действительно,  $n$ -й член ряда представляет собой замкнутую петлю из  $n$  функций  $G_{0,\alpha}(i\varepsilon_n, \mathbf{p})$  и  $n$  функций  $\Sigma_\alpha(i\varepsilon_n, \mathbf{p})$ . Его вклад в термодинамический потенциал есть

$$\delta\Omega_n = \frac{1}{n} T \sum_{m, \mathbf{p}, \alpha} (G_{0,\alpha}(i\varepsilon_m, \mathbf{p}) \Sigma_\alpha(i\varepsilon_m, \mathbf{p}))^n \quad (7.56)$$

Сумма этих вкладов есть не что иное как

$$\Omega - \Omega_0 = -T \sum_{m, \mathbf{p}, \alpha} \ln(1 - G_{0,\alpha}(i\varepsilon_m, \mathbf{p}) \Sigma_\alpha(i\varepsilon_m, \mathbf{p})) = T \sum_{m, \mathbf{p}, \alpha} \ln \left( \frac{G_\alpha(i\varepsilon_m, \mathbf{p})}{G_{0,\alpha}(i\varepsilon_m, \mathbf{p})} \right) \quad (7.57)$$

С другой стороны, можно проверить, что для свободных фермионов

$$\Omega_0 = T \sum_{m, \mathbf{p}, \alpha} e^{i\varepsilon_m \tau} \ln(G_{0,\alpha}(i\varepsilon_m, \mathbf{p})) , \quad \tau \rightarrow +0 \quad (7.58)$$

Чтобы доказать соотношение (7.58), рассмотрим выражение

$$F(a) = -T \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{i\varepsilon_m \tau} \ln(i\varepsilon_m - a) \quad (\varepsilon_m = \pi T(2m+1), \tau \rightarrow +0). \quad (7.59)$$

Дифференцируя это выражение по  $a$ , получаем

$$F'(a) = -T \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\varepsilon_m \tau}}{a - i\varepsilon_m} = \frac{1}{e^{\beta a} + 1}. \quad (7.60)$$

В справедливости последнего равенства в (7.60) можно убедиться заметив, что полюса выражения  $1/(e^{\beta a} + 1)$  и вычеты в них совпадают с полюсами и вычетами выражения под знаком суммы в (7.60). Это условие определяет зависимость  $F'(a)$  от  $a$  с точностью до неизвестной целой функции  $a$ . Чтобы найти эту целую функцию (и убедиться в том, что она равна нулю) можно рассмотреть выражение (7.60) при больших  $a$ . В пределе  $|a| \gg T$  сумму в (7.60) можно заменить интегралом

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{e^{z\tau}}{z-a} dz = \begin{cases} 1, & \text{Re } a < 0 \\ 0, & \text{Re } a > 0 \end{cases} \quad (7.61)$$

Получающаяся зависимость от  $a$  совпадает с асимптотикой выражения  $-(e^{\beta a} + 1)^{-1}$ .

Зная  $F'(a)$ , нетрудно найти  $F(a)$  прямым интегрированием:

$$F(\xi) = - \int_{\xi}^{\infty} (e^{\beta a} + 1)^{-1} da = T \int_{e^{-\beta\xi}}^0 (1 + e^{-\beta a})^{-1} de^{-\beta a} = -T \ln(1 + e^{-\beta\xi}) \quad (7.62)$$

Данное выражение есть не что иное, как термодинамический потенциал одного фермиона с энергией  $\xi$ . Отсюда требуемое соотношение (7.58) получается суммированием по состояниям всех фермионов системы.

**Решение 35 б)** Рассмотрим общее выражение (7.30) для термодинамического потенциала и, не конкретизируя пока вид функции Грина, преобразуем это выражение к форме, удобной для вычисления термодинамических функций. Представим сумму по  $\varepsilon_m = \pi T(2m + 1)$  в виде контурного интеграла:

$$\Omega = \sum_{\mathbf{p}, \alpha} \left( \int_{C_1} + \int_{C_2} \right) \frac{dz}{4\pi i} \text{th} \frac{z}{2T} \ln G_{\alpha}(z, \mathbf{p}) e^{z\tau}, \quad (7.63)$$

где контуры  $C_1$  и  $C_2$  охватывают верхнюю и нижнюю мнимые полуоси  $\text{Im } z > 0$  и  $\text{Im } z < 0$ , как показано на рис. 7.2.

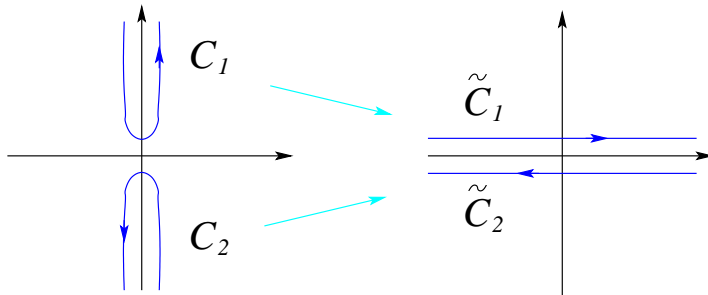


Рис. 7.2

Найдем энтропию  $S = -\partial\Omega/\partial T$ , дифференцируя интеграл (7.63) по параметру  $T$ :

$$S = \sum_{\mathbf{p}, \alpha} \left( \int_{C_1} + \int_{C_2} \right) \frac{dz}{4\pi i} \frac{z}{2T^2 \text{ch}^2 \frac{z}{2T}} \ln G_{\alpha}(z, \mathbf{p}) e^{z\tau}, \quad (7.64)$$

где  $G_\alpha(z, \mathbf{p})$  есть аналитическое продолжение мацубаровской функции Грина с положительной и отрицательной мнимой полуоси соответственно в области  $\text{Im } z > 0$  и  $\text{Im } z < 0$ .

Выражение (7.64) весьма удобно для вычислений, поскольку функция  $1/\text{ch}^2(z/2T)$  экспоненциально быстро убывает при удалении  $z$  от мнимой оси. Это обстоятельство позволяет развернуть контуры, направив их вдоль вещественной оси, как показано на рис. 7.2. В получившемся выражении можно пренебречь множителем  $e^{zT}$ , поскольку функция  $1/\text{ch}^2(z/2T)$  обеспечивает сходимость интеграла по  $z$ .

Заметим теперь, что аналитическое продолжение мацубаровской функции в области  $\text{Im } z > 0$  дает запаздывающую функцию  $G^R(z, \mathbf{p})$ , а в области  $\text{Im } z < 0$  — опережающую функцию  $G^A(z, \mathbf{p})$  (см. задачу 40). Поэтому интеграл по контурам  $\tilde{C}_1$  и  $\tilde{C}_2$  можно представить в виде интеграла по вещественным  $z$  от выражения, содержащего разность  $\ln G^R(z, \mathbf{p}) - \ln G^A(z, \mathbf{p})$ . Это дает следующую полезную формулу:

$$S = \sum_{\mathbf{p}, \alpha} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\varepsilon}{4\pi i} \frac{\varepsilon}{2T^2 \text{ch}^2 \frac{\varepsilon}{2T}} \ln \left( G_\alpha^R(\varepsilon, \mathbf{p}) / G_\alpha^A(\varepsilon, \mathbf{p}) \right). \quad (7.65)$$

Отметим, что при вещественном  $\varepsilon$  величины  $G_\alpha^R(\varepsilon, \mathbf{p})$  и  $G_\alpha^A(\varepsilon, \mathbf{p})$  комплексно сопряжены, и значит выражение в скобках в (7.65) есть не что иное, как  $2i \arg G_\alpha^R(\varepsilon, \mathbf{p})$ . Поэтому выражение (7.65) можно переписать так:

$$S = \sum_{\mathbf{p}, \alpha} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\varepsilon}{2\pi} \frac{\varepsilon}{2T^2 \text{ch}^2 \frac{\varepsilon}{2T}} \arg G_\alpha^R(\varepsilon, \mathbf{p}). \quad (7.66)$$

Рассмотрим теперь функцию Грина электронов, в которую включена собственно-энергетическая часть, описывающая взаимодействие с фононами. Как было выяснено в задаче 29, в данном случае собственно-энергетическая часть практически не зависит от импульса, являясь функцией одной лишь энергии. Запаздывающая функция Грина в этом случае есть  $G^R(\varepsilon, \mathbf{p}) = (\varepsilon - \Sigma(\varepsilon) - \xi(\mathbf{p}) + i0)^{-1}$ . Считая для простоты  $\Sigma(\varepsilon)$  вещественным, получаем

$$\arg G^R(\varepsilon, \mathbf{p}) = \begin{cases} -\pi, & \xi(\mathbf{p}) > \varepsilon - \Sigma(\varepsilon) \\ 0, & \xi(\mathbf{p}) < \varepsilon - \Sigma(\varepsilon) \end{cases} \quad (7.67)$$

Просуммируем теперь (7.67) по импульсам и проекциям спина. Поскольку нас интересует вклад от состояний с энергиями вблизи  $E_F$ , перейдем к интегрированию по  $\xi$  в конечных пределах  $-\xi_0 < \xi < \xi_0$ , где  $\xi_0 \simeq E_F$ . Вычисляем интеграл:

$$\sum_{\mathbf{p}, \alpha} \arg G^R(\varepsilon, \mathbf{p}) = -2\pi\nu_0 \int_{-\xi_0}^{\xi_0} \theta(\xi - \varepsilon + \Sigma(\varepsilon)) = 2\pi\nu_0 (\varepsilon - \Sigma(\varepsilon) - \xi_0) \quad (7.68)$$

(Множитель 2 возникает в результате суммирования по спинам.) Подставим это выражение в (7.66) и заметим, что слагаемое  $-2\pi\nu_0\xi_0$  приводит к интегралу по  $\varepsilon$  от

нечетной функции, равному нулю. В результате получаем независящее от параметра обрезки  $\xi_0$  окончательное выражение:

$$S = \nu_0 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varepsilon(\varepsilon - \Sigma(\varepsilon))}{2T^2 \operatorname{ch}^2 \frac{\varepsilon}{2T}} d\varepsilon . \quad (7.69)$$

Подставляя в (7.69) собственно-энергетическую часть в виде  $\Sigma(\varepsilon) = -b\varepsilon$ , находим

$$S = (1+b)\nu_0 T \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{2 \operatorname{ch}^2 \frac{x}{2}} dx = 4\zeta(2)(1+b)\nu_0 T , \quad (7.70)$$

где  $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$ . Отсюда теплоемкость  $C = T\partial S/\partial T = (1+b)C_0(T)$ , где  $C_0 = \frac{2}{3}\pi^2\nu_0 T$  — теплоемкость идеального ферми-газа.

Приведенное вычисление нетрудно обобщить на случай ферми-системы с произвольным взаимодействием, не разрушающим ферми-жидкостную картину. В этом случае при малых  $\varepsilon$  и  $\xi$  собственно-энергетическая часть имеет вид  $\Sigma(\varepsilon, \xi) = a\xi - b\varepsilon$ . Как нетрудно видеть, при этом формула (7.66) приводит к линейной по  $T$  энтропии и равной ей теплоемкости  $C(T) = \frac{1+b}{1+a}C_0(T)$ . Отметим, что та же самая константа дает перенормировку эффективной массы:  $m_*/m = (1+b)/(1+a)$ .

**Решение 36.** Как и в задаче 20, будем использовать представление гамильтониана фермионной цепочки (1.19) в виде суммы  $\mathcal{H}_0$  и  $\mathcal{H}_{\text{int}}$ , где  $\mathcal{H}_0$  содержит все члены, сохраняющие число фермионов, а  $\mathcal{H}_{\text{int}}$  — все члены, меняющие число фермионов на  $\pm 2$ . Графическое представление функций Грина, получающихся в этом представлении, было найдено в задаче 20. Соответствующая последовательность диаграмм для термодинамического потенциала показана на рис. 7.3.

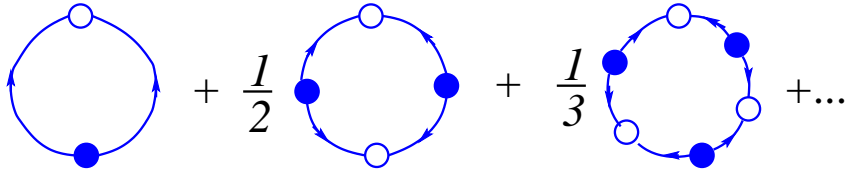


Рис. 7.3

Выражение, соответствующее  $n$ -му члену последовательности есть

$$\delta\Omega_n = \frac{1}{n} T \sum_{\varepsilon_m} \int_0^\pi \left( (2iJ_2 \sin q)^2 G_0(i\varepsilon_m, p) G_0(-i\varepsilon_m, -p) \right)^n \frac{dp}{2\pi} \quad (7.71)$$

Суммируя по  $n = 1, 2, \dots$ , получаем изменение потенциала вследствие присутствия «взаимодействия»  $\mathcal{H}_{\text{int}}$ :

$$\Omega - \Omega_0 = -T \sum_{\varepsilon_m} \int_0^\pi \ln \left( 1 - (2iJ_2 \sin q)^2 G_0(i\varepsilon_m, p) G_0(-i\varepsilon_m, -p) \right) \frac{dp}{2\pi} \quad (7.72)$$

$$= -T \sum_{\varepsilon_m} \int_0^\pi \ln \left( \frac{\varepsilon_m^2 + 4(J_1 \cos p - B)^2 + 4J_2^2 \sin^2 p}{\varepsilon_m^2 + 4(J_1 \cos p - B)^2} \right) \frac{dp}{2\pi} \quad (7.73)$$

Пользуясь соотношениями (7.58) и (7.62), полученными в задаче 35, находим

$$\Omega - \Omega_0 = -2T \int_0^\pi \ln \left( \frac{\operatorname{ch} \beta \sqrt{(J_1 \cos p - B)^2 + J_2^2 \sin^2 p}}{\operatorname{ch} \beta (J_1 \cos p - B)} \right) \frac{dp}{2\pi} \quad (7.74)$$

Отделяя вклад  $\Omega_0$ , получаем искомое выражение для термодинамического потенциала:

$$\Omega = -\frac{T}{\pi} \int_0^\pi \ln \left( 2 \operatorname{ch} \beta \sqrt{(J_1 \cos p - B)^2 + J_2^2 \sin^2 p} \right) dp \quad (7.75)$$

**Решение 37 а)** Докажем, что аналитическое продолжение мацубаровской восприимчивости (7.26) дает восприимчивость Кубо (7.25). Запишем формальные выражения для обеих восприимчивостей в базе точных собственных состояний  $|n\rangle$  рассматриваемой системы:  $\hat{\mathcal{H}}|n\rangle = E_n|n\rangle$ . Во избежание недоразумений заметим, что речь идет о многочастичных, а не об одночастичных состояниях.

Рассмотрим сначала восприимчивость Кубо:

$$\chi_{AB}(\omega) = i \int_0^\infty e^{i\omega t} \langle [\hat{A}(t)\hat{B}(0)] \rangle_{\text{T}} dt, \quad (7.76)$$

где  $\langle \dots \rangle_{\text{T}} = \operatorname{Tr}(e^{-\beta\hat{\mathcal{H}}} \dots) / \operatorname{Tr} e^{-\beta\hat{\mathcal{H}}}$  — усреднение по распределению Гиббса, а  $\hat{X}(t) = e^{-it\hat{\mathcal{H}}} \hat{X} e^{it\hat{\mathcal{H}}}$  — оператор в представлении Гейзенберга. Переходя к базису собственных состояний гамильтониана  $\hat{\mathcal{H}}$ , получаем:

$$\chi_{AB}(\omega) = \frac{i}{Z} \int_0^\infty dt e^{i\omega t} \sum_{m,n} e^{-\beta E_n} \left( e^{-i\omega_{nm}t} \langle n|\hat{A}|m\rangle \langle m|\hat{B}|n\rangle - e^{i\omega_{nm}t} \langle n|\hat{B}|m\rangle \langle m|\hat{A}|n\rangle \right), \quad (7.77)$$

где  $\omega_{nm} = E_n - E_m$  — частота перехода, а  $Z = \operatorname{Tr} \exp(-\beta\hat{\mathcal{H}})$  — статистическая сумма. Меняя индексы  $m$  и  $n$  во втором члене суммы местами и интегрируя по  $t$ , находим:

$$\chi_{AB}(\omega) = \sum_{m,n} \frac{e^{-\beta E_n} - e^{-\beta E_m}}{\omega - \omega_{nm} + i0} \langle n|\hat{A}|m\rangle \langle m|\hat{B}|n\rangle \quad (7.78)$$

(Мнимая часть  $i0$  возникает из-за множителя  $\exp(-\delta t)$ , который надо добавить в формально расходящийся интеграл по  $t$  для обеспечения его сходимости.)

Теперь сделаем аналогичное вычисление для мацубаровской корреляционной функции

$$\chi_{AB}^M(i\omega_n) = \frac{1}{2} \int_{-\beta}^{\beta} e^{i\omega_n \tau} \langle \text{T}_\tau \hat{A}^M(\tau) \hat{B}^M(0) \rangle_{\text{T}} d\tau. \quad (7.79)$$

Здесь  $\widehat{X}^M(\tau) = e^{-\tau\widehat{H}} \widehat{X} e^{\tau\widehat{H}}$  — мацубаровский оператор. В базисе собственных состояний получаем

$$\begin{aligned} \chi_{AB}^M(i\omega_n) &= \frac{1}{2Z} \int_0^\beta e^{i\omega_n\tau} \sum_{m,n} e^{-\beta E_n} e^{-\omega_{nm}\tau} \langle n|\widehat{A}|m\rangle \langle m|\widehat{B}|n\rangle d\tau \\ &+ \frac{1}{2Z} \int_{-\beta}^0 e^{i\omega_n\tau} \sum_{m,n} e^{-\beta E_n} e^{\omega_{nm}\tau} \langle n|\widehat{B}|m\rangle \langle m|\widehat{A}|n\rangle d\tau . \end{aligned}$$

Снова переставляем индексы во второй сумме и вычисляем интеграл по  $\tau$  (при этом полезно учесть, что  $\omega_n\beta = 2\pi n$ ). При этом получается

$$\chi_{AB}^M(i\omega_n) = \sum_{m,n} \frac{e^{-\beta E_n} - e^{-\beta E_m}}{i\omega_n - \omega_{nm}} \langle n|\widehat{A}|m\rangle \langle m|\widehat{B}|n\rangle . \quad (7.80)$$

Доказательство интересующего нас утверждения получается из сравнения (7.78) и (7.80). Вспомним, что восприимчивость  $\chi_{AB}(\omega)$  — аналитическая в верхней полуплоскости функция  $\omega$  (это следует из того, что она есть преобразование Фурье функции, отличной от 0 лишь при  $t > 0$ ). Значит, ее можно продолжить с вещественной оси на положительную мнимую полуось  $\text{Im } \omega > 0$ . При этом, согласно (7.78) и (7.80), в точках  $i\omega_n = 2\pi inT$ ,  $n > 0$ , оба выражения совпадают.

Теперь предположим, что существует аналитическое продолжение  $\chi_{AB}^M(i\omega_n)$  с верхней мнимой полуоси на всю верхнюю полуплоскость  $\omega$ . Тогда это аналитическое продолжение должно совпасть с  $\chi_{AB}(\omega)$ , поскольку, согласно теореме теории функций комплексного переменного, две функции, аналитические в некоторой области и совпадающие на бесконечном множестве точек, имеющем предельную точку, совпадают во всей области.

**Решение 37 б)** Найдем динамическую спиновую восприимчивость ферми-газа при  $T \ll E_F$ . В задаче 24 б) эта величина была найдена непосредственным усреднением операторов в формуле Кубо. Чтобы решить задачу с помощью мацубаровской техники мы вычислим мацубаровскую восприимчивость. Поскольку  $\chi_{\alpha\beta}^M(i\omega_n, k)$  — хронологически упорядоченная величина (по отношению к мнимому времени), ее можно вычислять как петлю, составленную из мацубаровских функций Грина:

$$\chi_{\alpha\beta}^M(i\omega_n, k) = -2\mu_B^2 \delta_{\alpha\beta} T \sum_{\omega_m} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} G(i\omega_m, \mathbf{p}) G(i\omega_m + i\omega_n, \mathbf{p} + \mathbf{k}) . \quad (7.81)$$

Рассмотрим выражение

$$T \sum_{\omega_m, \mathbf{p}} \frac{1}{(i\omega_m + i\omega_n - \xi_{p+k})(i\omega_m - \xi_p)} \quad (7.82)$$

и выполним в нем суммирование по  $\omega_m$ . Для этого представим произведение в виде суммы:

$$\sum_{\omega_m} \frac{1}{(i\omega_m + i\omega_n - \xi_{p+k})(i\omega_m - \xi_p)} = \sum_{\omega_m} \frac{1}{i\omega_n - \xi_{p+k} + \xi_p} \left( \frac{1}{i\omega_m - \xi_p} - \frac{1}{i\omega_m + i\omega_n - \xi_{p+k}} \right) . \quad (7.83)$$

Заметим при этом, что поскольку  $\omega_m = (2m + 1)\pi T$  и  $\omega_n = 2\pi nT$ , во втором члене в скобках можно сделать сдвиг переменной суммирования  $m \rightarrow m - n$ , при котором из него исчезает  $\omega_n$ . В каждом из слагаемых в скобках вещественная часть суммы сходится, а мнимая формально расходится. Однако она нечетна по  $m$ , и потому сокращается при приведении членов с противоположными  $m$ . Остается найти сумму вида

$$S(\xi) = T \sum_{\omega_m} \frac{\xi}{\omega_m^2 + \xi^2}, \quad (7.84)$$

что нетрудно сделать с помощью известного соотношения

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(2n + 1)^2 + a^2} = \frac{\pi}{2a} \operatorname{th} \frac{\pi a}{2}. \quad (7.85)$$

Поэтому интересующая нас сумма есть

$$S(\xi) = \frac{1}{2} \operatorname{th} \frac{1}{2} \beta \xi = \frac{1}{2} - \frac{1}{e^{\beta \xi} + 1} \equiv \frac{1}{2} - n_F(\xi), \quad (7.86)$$

где  $n_F(\xi)$  — ферми-распределение. Возвращаясь к выражению (7.82), мы получаем весьма полезное тождество

$$T \sum_{\omega_m} \frac{1}{(i\omega_m + i\omega_n - \xi_{p+k})(i\omega_m - \xi_p)} = \frac{n_F(\xi_{p+k}) - n_F(\xi_p)}{i\omega_n - \xi_{p+k} + \xi_p}, \quad (7.87)$$

которое часто используется при вычислении поляризационных операторов и восприимчивостей ферми-газа.

Используя соотношение (7.87), запишем мацубаровскую восприимчивость так:

$$\chi^M(i\omega, k) = 2\mu_B^2 \delta_{\alpha\beta} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{n_F(\xi_p) - n_F(\xi_{p+k})}{i\omega_n - \xi_{p+k} + \xi_p}. \quad (7.88)$$

Поскольку нас интересуют достаточно малые  $T \ll E_F$  и  $|\mathbf{k}| \ll p_0$ , перейдем к интегрированию по  $\xi$ . Поскольку  $\int (n_F(\xi) - n_F(\xi + \mathbf{v}\mathbf{k})) d\xi = \mathbf{v}\mathbf{k}$ , независимо от величины  $T$ , получаем

$$\chi^M(i\omega_n, k) = 2\mu_B^2 \nu_0 \int \frac{\mathbf{k}\mathbf{v}_F}{i\omega_n - \mathbf{k}\mathbf{v}_F} \frac{d\omega}{4\pi}. \quad (7.89)$$

Вычисляя интеграл по телесному углу так же, как в задаче 24 б), находим следующее выражение:

$$\chi_{\alpha\beta}^M(i\omega_n, k) = 2\mu_B^2 \nu_0 \delta_{\alpha\beta} \left( 1 + \frac{i\omega_n}{2kv_F} \ln \frac{i\omega_n - kv_F}{i\omega_n + kv_F} \right). \quad (7.90)$$

Для того, чтобы аналитически продолжить (7.90) на вещественную ось, достаточно сделать замену  $i\omega_n \rightarrow \omega + i0$ . В результате получается

$$\chi(\omega, k) = 2\mu_B^2 \nu_0 \left( 1 + \frac{\omega}{2kv_F} \ln \frac{\omega - kv_F + i0}{\omega + kv_F + i0} \right). \quad (7.91)$$



Отделяя вещественную и мнимую части, находим

$$\begin{aligned}\operatorname{Re} \chi(\omega, k) &= 2\mu_B^2 \nu_0 \left( 1 + \frac{\omega}{2kv_F} \ln \left| \frac{\omega - kv_F}{\omega + kv_F} \right| \right) ; \\ \operatorname{Im} \chi(\omega, k) &= \pi \mu_B^2 \nu_0 \frac{\omega}{kv_F} \theta(kv_F - |\omega|) .\end{aligned}$$

Заметим, что выражения (7.92), полученные при произвольной температуре  $0 \leq T \ll E_F$ , в точности совпадают с вещественной и мнимой частями восприимчивости, найденной в задаче 24 б) при  $T = 0$ .

**Решение 37 в)** Сначала рассмотрим мацубаровскую восприимчивость (7.26) спина во внешнем поле:

$$\chi(\omega_n) = \frac{\mu^2}{2} \int_{-\beta}^{\beta} \langle T_{\tau} \hat{\mathbf{s}}_z(\tau) \hat{\mathbf{s}}_z(0) \rangle e^{i\omega_n \tau} d\tau , \quad (7.92)$$

где  $\mu$  — магнитный момент спина. Поскольку гамильтониан  $\widehat{\mathcal{H}}_0$  свободного спина в отсутствие внешнего поля равен нулю, динамика отсутствует. Поэтому  $\hat{\mathbf{s}}_z(\tau) \hat{\mathbf{s}}_z(0) = \hat{\mathbf{s}}_z^2(\tau) = 1$  и, следовательно,

$$\chi(\omega_n) = \begin{cases} \beta \mu^2 , & \omega_n = 0 \\ 0 , & \omega_n \neq 0 \end{cases} = \frac{\beta \mu^2}{1 + \tau_0 \omega_n} , \quad \tau_0 T \gg 1 . \quad (7.93)$$

Мы записали результат в виде, позволяющем продолжить  $\chi(\omega_n)$  с мнимых значений частоты на вещественные. Аналитическое продолжение дает  $\chi(\omega) = \beta \mu^2 / (1 - i\tau_0 \omega)$ . Переходя к статическому пределу  $\omega \rightarrow 0$ , убеждаемся в том, что мацубаровская восприимчивость дает закон Кюри.

Теперь найдем восприимчивость, используя динамику в реальном времени. Следуя логике, обычно приводящей к формуле Кубо, рассмотрим среднее значение намагниченности в какой-то момент времени:

$$\langle \mu \hat{\mathbf{s}}_z(t) \rangle = \mu \operatorname{Tr} \left( e^{i\widehat{\mathcal{H}}(t-t_0)} \hat{\mathbf{s}}_z(t_0) e^{-i\widehat{\mathcal{H}}(t-t_0)} \hat{\rho} \right) , \quad \widehat{\mathcal{H}} = -\mu \hat{\mathbf{s}}_z B_{\text{ext}} , \quad (7.94)$$

где  $\hat{\rho} = Z^{-1} \exp(-\beta \widehat{\mathcal{H}})$ . Чтобы получить линейный отклик, надо разложить выражение (7.94) по  $B_{\text{ext}}$ , выделив линейный вклад. В стандартном выводе формулы Кубо по степеням  $B_{\text{ext}}$  разлагаются операторы эволюции  $e^{\mp i\widehat{\mathcal{H}}(t-t_0)}$ , что дает среднее от коммутатора операторов спина в различные моменты времени. При этом зависимость матрицы плотности  $\hat{\rho}$  от  $B_{\text{ext}}$  пренебрегают на том основании, что в пределе  $t - t_0 \rightarrow \infty$  зависимость от начальных условий в момент  $t_0$  отсутствует. Однако, это справедливо только в том случае, когда эволюция системы характеризуется «потерей памяти» о начальном состоянии, либо в силу эргодичности, либо из-за релаксационного характера динамики. В нашем же случае, поскольку  $\widehat{\mathcal{H}}_0 = 0$ , эволюция невозмущенной системы вообще отсутствует, в результате чего система бесконечно долго помнит начальное состояние. Поэтому при нахождении линейного отклика следует разложить по  $B_{\text{ext}}$  не только операторы эволюции, но и матрицу плотности  $\hat{\rho}$  начального состояния. Как нетрудно видеть, это приводит к закону Кюри  $\chi = \beta \mu^2$ .

Таким образом, формула Кубо в своей обычной форме дает правильный ответ для восприимчивости только в том случае, когда при эволюции система «забывает» о начальном состоянии. Если же это не так, следует либо поправлять формулу Кубо, вводя в нее члены, зависящие от начального состояния, либо использовать мацубаровскую восприимчивость.

**Решение 38.** Гриновская функция фононов определяется через поле деформации  $\hat{\varphi}(\mathbf{r}, t)$ , дающееся выражением (6.5). Сравнивая выражение (6.5) с оператором (6.1) поля смещений решетки  $\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{r}, t)$ , убеждаемся в том, что для дебаевских фононов с линейным законом дисперсии  $\omega(\mathbf{k}) = c|\mathbf{k}|$  поле деформации  $\hat{\varphi}$  есть  $c\sqrt{\rho}\operatorname{div}\hat{\mathbf{u}}$ . Следовательно, функция Грина фононов

$$\begin{aligned} D(\mathbf{r}, \tau) &= -\frac{c^2}{\rho} \langle T_\tau \hat{\varphi}(\mathbf{r}, \tau) \hat{\varphi}(0, 0) \rangle_T \\ &= -T \sum_{\omega_n} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{\omega(\mathbf{k})^2}{\omega_n^2 + \omega(\mathbf{k})^2} e^{-i\omega_n \tau + i\mathbf{k}\mathbf{r}} \end{aligned} \quad (7.95)$$

представляет собой коррелятор  $\operatorname{div}\hat{\mathbf{u}}$ , умноженный на  $\rho c^2$ . Поэтому коррелятор самих смещений получается<sup>8</sup> делением фононного пропагатора на  $\rho\omega_{\mathbf{k}}^2$ :

$$C_T(r) = \frac{T}{\rho} \sum_{\omega_n} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}}{\omega_n^2 + \omega_{\mathbf{k}}^2}. \quad (7.96)$$

Выполним суммирование по мацубаровским частотам с помощью формулы:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{n^2 + a^2} = \frac{\pi}{a} \operatorname{cth} \pi a. \quad (7.97)$$

Получаем

$$C_T(r) = \frac{1}{2\rho} \int \frac{e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}}{\omega(\mathbf{k})} \operatorname{cth} \frac{\omega(\mathbf{k})}{2T} \frac{d^D k}{(2\pi)^D}. \quad (7.98)$$

Удобно разделить вклады тепловых и квантовых флуктуаций в выражении (7.98), воспользовавшись представлением

$$\frac{1}{2} \operatorname{cth} \frac{\omega}{2T} = \frac{1}{2} + \frac{1}{e^{\beta\omega} - 1} \equiv \frac{1}{2} + n_B(\omega), \quad (7.99)$$

где  $n_B(\omega)$  — функция распределения Бозе. Очевидно, что  $\frac{1}{2}$  есть вклад нулевых колебаний, а  $n_B(\omega)$  — это тепловые флуктуации. Формулу (7.98) в таких обозначениях можно получить, не пользуясь мацубаровскими функциями Грина, а просто усредняя вторично квантованные операторы смещений (6.1) по гиббсовской матрице плотности.

Используя (7.99), представим (7.98) в виде  $C_T(r) = C_0(r) + \Delta C_T(r)$ , где

$$C_0(r) = \frac{1}{2\rho} \int \frac{e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}}{\omega(\mathbf{k})} \frac{d^D k}{(2\pi)^D}, \quad \Delta C_T(r) = \frac{1}{\rho} \int \frac{e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}}{\omega(\mathbf{k})} n_B(\omega(\mathbf{k})) \frac{d^D k}{(2\pi)^D}. \quad (7.100)$$

<sup>8</sup>Строго говоря, это дает коррелятор продольных компонент смещений  $\mathbf{u}_{\parallel} \parallel \mathbf{k}$ . Однако, поскольку корреляторы всех компонент смещений одинаковы по порядку величины, мы ограничимся рассмотрением лишь продольных компонент.

Коррелятор  $\Delta C_T(r)$  будет интересовать нас при  $r \gg c/T$ . В этом случае важен вклад лишь от достаточно малых  $k \sim 1/r$ , таких что  $\omega(\mathbf{k}) \ll T$ . Соответственно, разлагая бозевскую функцию распределения в (7.99) при малом  $\omega$ , получаем

$$\Delta C_T(r) \approx \frac{T}{\rho} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{e^{i\mathbf{k}r}}{\omega^2(\mathbf{k})}. \quad (7.101)$$

Отметим, что (7.101) есть прямое следствие теоремы о равномерном распределении из классической статистической физики.

После проведенной подготовки приступим к вычислению  $C_0(r)$  и  $\Delta C_T(r)$  в разных размерностях. Вначале вычислим  $C_0(r)$ .

**А.  $D = 3$ :**

$$C_0^{(3)}(r) = \frac{4\pi}{(2\pi)^3 \rho} \int_0^\infty \frac{\sin kr}{kr} \frac{k^2 dk}{ck} = \frac{1}{4\pi^2 \rho c r^2}. \quad (7.102)$$

Здесь использована формула

$$\int e^{i\mathbf{a}\mathbf{n}} d\mathbf{n} = 4\pi \frac{\sin a}{a}. \quad (7.103)$$

**Б.  $D = 2$ :**

$$C_0^{(2)}(r) = \frac{1}{4\pi \rho c} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2\pi} e^{ikr \cos \theta} dk = \frac{1}{4\pi \rho c} \int_0^\infty J_0(kr) dk = \frac{1}{4\pi \rho c r}. \quad (7.104)$$

**В.  $D = 1$ :**

$$C_0^{(1)}(r) = \frac{1}{4\pi \rho c} \int_{-\infty}^\infty \frac{dk}{|k|} e^{ikr} = \frac{1}{2\pi \rho c} \int_0^\infty \frac{dk}{k} \cos kr = \quad (7.105)$$

$$= \frac{1}{2\pi \rho c^2} \ln \frac{L}{r}. \quad (7.106)$$

При вычислении последнего интеграла, который формально расходится, необходимо обрезать логарифмическую расходимость. Как обычно, обрежем интеграл сверху на  $k \sim 1/r$  (при больших  $k$  осцилляции подинтегрального выражения гасятся), а снизу — на  $k \sim 1/L$ , где  $L$  — размер системы (гармоник с меньшими  $k$  не существует).

Теперь рассмотрим тепловые флуктуации.

**А.  $D = 3$ :**

$$\Delta C_T^{(3)}(r) = \frac{T}{2\pi^2 \rho c R} \int_0^\infty \frac{dk}{k} \sin kr = \frac{T}{4\pi \rho c r}. \quad (7.107)$$

**Б.  $D = 2$ :**

$$\Delta C_T^{(2)}(r) = \frac{T}{(2\pi)^2 \rho c^2} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \frac{dk d\theta}{k} e^{ikr \cos \theta}. \quad (7.108)$$

Этот расходящийся интеграл вычисляется так же, как и интеграл для  $C_0^{(1)}(r)$ . Получаем

$$\Delta C_T^{(2)}(r) = \frac{T}{2\pi \rho c^2} \ln \frac{L}{r}. \quad (7.109)$$

Табл. 7.1. Вклад тепловых и квантовых флуктуаций в корреляционную функцию

$D$	$C_0(r)$	$\Delta C_T(r)$
3	$\sim 1/r^2$	$\sim T/r$
2	$\sim 1/r$	$\sim T \ln(L/r)$
1	$\sim \ln(L/r)$	$\sim TL$

В.  $D = 1$  :

$$\Delta C_T^{(1)}(r) = \frac{T}{\pi \rho c^2} \int_{\sim L^{-1}}^{\infty} \frac{dk}{k^2} \cos kr = \alpha \frac{TL}{\rho c^2}. \quad (7.110)$$

В этом случае интеграл при малых  $k$  расходится не логарифмически, а степенным образом. Поэтому определение коэффициента  $\alpha$  в этом соотношении в общем виде невозможно: в частности, величина  $\alpha$  зависит от граничных условий, а также от расположения точек, в которых измеряются смещения, по отношению к границе системы.

Полученные результаты позволяют исследовать вопрос о разрушении дальнего порядка квантовыми и тепловыми флуктуациями. Для этого необходимо изучить поведение  $C_T(r)$  при  $r \rightarrow \infty$ . Если при этом  $C_T(r) \rightarrow 0$ , то дальний порядок флуктуациями не разрушается — даже значительное отклонение  $\mathbf{u}(\mathbf{r})$  от среднего значения не оказывает существенного влияния на  $\mathbf{u}(\mathbf{r}')$  в далеких точках  $\mathbf{r}'$ . А вот если  $C_T(r) \rightarrow \infty$ , то это означает, что дальний порядок исчезает. Как видно из проделанных вычислений, такая ситуация имеет место для квантовых флуктуаций при  $D=1$ , а для тепловых — при  $D=1, 2$ .

Изучая результаты, сведенные в Табл. 7.1, можно также сделать наблюдение, что с понижением размерности системы  $D$  смещения  $\mathbf{u}$  в далеких точках становятся более скоррелированными. Объяснить это можно следующим образом. Представим себе одномерный кристалл, в котором взаимодействуют лишь ближайшие соседи. Предположим, что за счет флуктуаций один из атомов слегка сместился. Тогда соседние с ним атомы начнут подстраиваться под это новое «неправильное» положение. Затем перестроятся атомы, соседние с уже сместившимися, и так далее. Таким образом, смещение одного атома вызывает перестройку всей цепочки. Поэтому нескольких локальных флуктуаций оказывается достаточно, чтобы дальний порядок «забылся». Однако, с повышением размерности роль флуктуаций уменьшается, потому что каждый атом «слышит подсказку» о том, какое положение он должен был бы занять в идеальной решетке, от все большего числа соседей и более далеких атомов. Поэтому чем выше размерность, тем труднее перестроить систему, смещая один атом.

**Решение 39 а)** Запишем выражение для мацубаровского поляризационного оператора

$$\Pi(i\omega_n, k) = \frac{2T}{2\pi} \sum_{\omega_m} \int \frac{dp}{(i\omega_m + i\omega_n - \xi_{p+k})(i\omega_m - \xi_p)} \quad (7.111)$$

и найдем сумму по  $\omega_m$  с помощью тождества (7.87), полученного в задаче 37 б):

$$\Pi(i\omega_n, k) = \frac{1}{\pi} \int dp \frac{n_F(\xi_{p+k}) - n_F(\xi_p)}{i\omega_n - \xi_{p+k} + \xi_p}. \quad (7.112)$$

Нас интересуют значения  $k$  вблизи  $\pm 2p_0$ . Пользуясь четностью  $\Pi(i\omega_n, k)$  по  $k$ , рассмотрим  $k \approx 2p_0$  и введем обозначения:

$$k \equiv 2p_0 + q, \quad p \equiv -p_0 + x - q/2, \quad p + k \equiv p_0 + x + q/2. \quad (7.113)$$

При малых  $|x|, |q| \ll p_0$  можно линеаризовать закон дисперсии. При этом

$$\Pi(i\omega_n, k = 2p_0 + q) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{n_F(v_F(x + q/2)) - n_F(-v_F(x - q/2))}{i\omega_n - 2v_Fx}. \quad (7.114)$$

Удобно переписать это выражение следующим образом:

$$\frac{\nu_{1D}}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \text{th} \frac{\beta\xi}{2} \left( \frac{1}{i\omega_n - v_Fq - 2\xi} + \frac{1}{i\omega_n + v_Fq - 2\xi} \right) d\xi, \quad (7.115)$$

где  $\xi = v_Fx$ ,  $\nu_{1D} = 1/(\pi v_F)$ . Интеграл по  $\xi$  в (7.115) нетрудно вычислить, воспользовавшись известным представлением

$$\text{th} z = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{z - \pi i(m + \frac{1}{2})}, \quad z = \beta\xi/2. \quad (7.116)$$

Получаем

$$-\frac{\nu_{1D}}{2} \sum_{m=0}^{m_*} \left( \frac{1}{m + \frac{1}{2} + w_+} + \frac{1}{m + \frac{1}{2} + w_-} \right), \quad w_{\pm} = \frac{|\omega_n| \pm i v_F q}{4\pi T}. \quad (7.117)$$

Логарифмическая расходимость суммы по  $m$  должна быть обрезана так, чтобы максимальная энергия  $E_0 = 2\pi T(2m_* + 1)$  была порядка  $E_F$ . (При энергиях  $E > E_0$  линеаризованный закон дисперсии перестает быть справедливым.) Преобразуем сумму (7.117), прибавляя и вычитая значение выражения (7.117) при  $w_{\pm} = 0$ :

$$-\nu_{1D} \sum_{m=0}^{m_*} \frac{1}{m + \frac{1}{2}} - \frac{\nu_{1D}}{2} \sum_{m=0}^{m_*} \left( \frac{1}{m + \frac{1}{2} + w_+} + \frac{1}{m + \frac{1}{2} + w_-} - \frac{2}{m + \frac{1}{2}} \right), \quad (7.118)$$

Удобство данного представления в том, что первая сумма не зависит от  $w_{\pm}$ , а вторая — сходится, и поэтому в ней можно распространить суммирование на произвольно большие  $m$ . Вычисляя первую сумму с логарифмической точностью, получаем окончательное выражение

$$\Pi(i\omega_n, k) = -\nu_{1D} \ln \frac{E_0}{4\pi T} + \frac{\nu_{1D}}{2} \left( \psi \left( \frac{1}{2} + w_+ \right) + \psi \left( \frac{1}{2} + w_- \right) - 2\psi \left( \frac{1}{2} \right) \right), \quad (7.119)$$

где

$$\psi(z) = \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} = -\gamma - \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{1}{k+z} - \frac{1}{k+1} \right), \quad (7.120)$$

$\gamma = 0.5772157\dots$  — постоянная Эйлера.

Теперь найдем мацубаровскую функцию Грина фононов. Запишем для этого уравнение Дайсона:

$$D^{-1}(i\omega_n, k) = D_0^{-1}(i\omega_n, k) - g^2 \Pi(i\omega_n, k) = -\frac{\omega_n^2 + \omega_0^2(k)}{\omega_0^2(k)} - g^2 \Pi(i\omega_n, k). \quad (7.121)$$

Получаем

$$D(i\omega_n, k) = -\frac{1}{1 + \frac{\omega_n^2}{\omega_0^2(k)} + g^2 \Pi(i\omega_n, k)}. \quad (7.122)$$

Интересующая нас корреляционная функция смещений  $\langle u_k(t)u_{-k}(t) \rangle_T$  есть не что иное, как

$$\langle u_k(t)u_{-k}(t) \rangle_T = -T \sum_n \frac{1}{\rho \omega_0^2(k)} D(i\omega_n, k) = \sum_n \frac{T}{\rho \omega_0^2(k) \left( 1 + \frac{\omega_n^2}{\omega_0^2(k)} + g^2 \Pi(i\omega_n, k) \right)} \quad (7.123)$$

(см. решение задачи 38). При достаточно высокой температуре  $T$  в сумме (7.123) при всех  $n$  знаменатель дроби не обращается в ноль. Однако, поскольку при уменьшении  $T$  поляризационный оператор  $\Pi(i\omega_n, k)$  становится все более и более отрицательным, при достижении некоторого значения  $T = T_c$  один из членов в сумме по  $n$  может начать расходиться. Расходимость флуктуаций  $\langle u_k(t)u_{-k}(t) \rangle_T$  свидетельствует о неустойчивости системы по отношению к возникновению модуляции с данным  $k$ .

Нетрудно показать, что чем меньше  $|\omega_n|$ , тем выше температура, при которой знаменатель выражения (7.123) обращается в ноль. Аналогично, максимальное значение температуры, при которой расходятся флуктуации, достигается при  $k = 2p_0$ . Поэтому волновой вектор модуляции, возникающей вследствие неустойчивости, есть  $k = 2p_0$ .

Иными словами, температура фазового перехода определяется из условия обращения в ноль частоты фононов с  $k = 2p_0$ . Подставляя  $\omega_n = 0$  в (7.122), получаем условие на температуру перехода:  $g^2 \Pi_0 + 1 = 0$ , где  $\Pi_0 = \Pi(\omega_n = 0, k = 2p_0)$ . Решая уравнение  $g^2 \nu_{1D} \ln(E_0/T_c) = 1$ , находим

$$T_c \simeq E_0 e^{-\frac{1}{g^2 \nu_{1D}}}. \quad (7.124)$$

Заметим, что температура перехода  $T_c$  по порядку величины совпадает с выражением (6.82) для щели  $\Delta_0$  при  $T = 0$ .

**Решение 39 б)** Нас интересует окрестность температуры перехода  $T_c$ , при которой в сумме (7.123) расходится член с  $n = 0$ . При этом существенно то, что поскольку последовательность частот  $\omega_n = 2\pi T n$  дискретна, слагаемые с  $n \neq 0$  имеют регулярное поведение в окрестности  $k = \pm 2p_0$ . Поэтому ими можно пренебречь по сравнению с особым вкладом с  $n = 0$ .

Поэтому рассмотрим поляризационный оператор  $\Pi(i\omega_n, k)$  при  $\omega_n = 0$  и  $k$  в окрестности  $2p_0$ . Разлагая выражение (7.119) при малом  $q = k - 2p_0$ , получаем

$$\Pi(q) \equiv \Pi(\omega_n = 0, k = 2p_0 + q) = -\nu_{1D} \left( \ln \frac{E_0}{4\pi T} - aq^2 \right), \quad a = -\frac{v_F^2 \psi''(\frac{1}{2})}{(4\pi T)^2}, \quad (7.125)$$

причем, согласно (7.120), величина  $\psi''(\frac{1}{2})$  есть

$$\psi''(\frac{1}{2}) = -2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k + \frac{1}{2})^3} = -2(2^3 - 1)\zeta(3) = -14\zeta(3) \quad (7.126)$$

Подставим разложение  $\Pi(q)$  в коррелятор смещений (7.123), оставляя только член суммы с  $n = 0$ , и примем во внимание, что при  $T = T_c$  выполняется равенство  $1 + g^2\Pi(q = 0) = 0$ . Получается следующее выражение:

$$\langle u_k(t)u_{-k}(t) \rangle_{\text{T}} = \frac{T}{g^2 \nu_{1D} \rho \omega_0^2 (2p_0) \left( \ln \frac{T}{T_c} + aq^2 \right)} \quad (7.127)$$

При  $T$  вблизи  $T_c$  разлагаем  $\tau \equiv \ln T/T_c = (T - T_c)/T_c$ . Получаем искомый лоренцев спектр (7.36) флуктуаций (7.33) поля  $Q(r, t)$ :

$$\langle Q_q(t)Q_{-q}(t) \rangle_{\text{T}} = \frac{A}{\tau + aq^2}, \quad A = \frac{T_c}{g^2 \nu_{1D} \rho \omega_0^2 (2p_0)}. \quad (7.128)$$

Чтобы получить коррелятор поля смещений  $u(x, t)$ , заметим, что зависимость (7.128) имеет место как в окрестности  $k \simeq 2p_0$ , так и в окрестности  $k \simeq -2p_0$ . Поэтому

$$C_{\text{T}}(r) = \int \frac{A}{\tau + aq^2} \left( e^{i(q+2p_0)r} + e^{i(q-2p_0)r} \right) \frac{dq}{2\pi} = \frac{A}{\tau b_{\text{T}}} e^{-|r|/b_{\text{T}}} \cos 2p_0 r, \quad (7.129)$$

где  $b_{\text{T}} = \sqrt{a/\tau}$  — так называемая *корреляционная длина*. Обратим внимание на то, что корреляционная длина  $b_{\text{T}}$  обращается в бесконечность при приближении к  $T_c$  и корреляционная функция  $C_{\text{T}}(r)$  перестает экспоненциально убывать. Это типичное для фазовых переходов второго рода проявление возникновения дальнего порядка в системе.

Рассмотренная задача иллюстрирует общий метод исследования фазовых переходов второго рода с помощью диаграммной техники. Вначале нужно исследовать флуктуации параметра порядка в квадратичном приближении. (В данном случае параметром порядка является фурье-компонента смещения решетки с волновым вектором  $k = 2p_0$ .) Если фазовый переход действительно имеет место, то должна существовать температура, при которой система «размягчается» настолько, что корреляционная функция в импульсном представлении обращается в бесконечность. Это и есть температура перехода, полученная в рамках теории среднего поля.

Следующим шагом (который мы здесь не сделали) должно быть изучение длинно-волновых флуктуаций параметра порядка. Взаимодействие флуктуаций друг с другом описывается диаграммой, показанной на рис. 7.4 (индексы  $\pm$  обозначают электроны

с импульсами  $\pm p_0$ ), а также подобными ей более сложными диаграммами. Эффекты взаимодействия флуктуаций важны для правильного понимания термодинамики системы в окрестности фазового перехода.

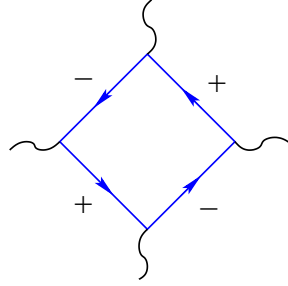


Рис. 7.4

**Решение 40 а)** Покажем, что аналитическое продолжение мацубаровской функции Грина  $G(i\omega_n, \mathbf{p})$  с верхней (нижней) мнимой полуоси дает запаздывающую (опережающую) функцию Грина  $G^{R(A)}(\omega, \mathbf{p})$ . Будем действовать по той же схеме, что и в задаче 37. Мы рассмотрим лишь случай фермионов, ибо для случая бозе-частиц доказательство получается аналогично.

Выразим запаздывающую и опережающую функции Грина (7.21), (7.22) через матричные элементы  $\langle n|\hat{\psi}|m\rangle$  в базисе собственных состояний. Выражая средние в (7.21), (7.22) через след и производя точно такие же преобразования, как в задаче 37, получим

$$G^{R(A)}(\omega, \mathbf{r}, \mathbf{r}') = Z^{-1} \sum_{m,n} \frac{e^{-\beta E_n} + e^{-\beta E_m}}{\omega - \omega_{nm} \pm i0} \langle n|\hat{\psi}^+(\mathbf{r}')|m\rangle \langle m|\hat{\psi}(\mathbf{r})|n\rangle, \quad (7.130)$$

где  $\omega_{nm} = \omega_n - \omega_m$ . Вычисление для мацубаровской функции Грина

$$G(i\omega_n, \mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\frac{1}{2} \int_{-\beta}^{\beta} e^{i\omega_n \tau} \langle T_{\tau} \hat{\psi}_M(\mathbf{r}, \tau) \hat{\psi}_M^+(\mathbf{r}', 0) \rangle_{\tau} d\tau \quad (7.131)$$

также совершенно аналогично тому, которое было проделано в задаче 37. Результат таков:

$$G(i\omega_n, \mathbf{r}, \mathbf{r}') = Z^{-1} \sum_{m,n} \frac{e^{-\beta E_n} + e^{-\beta E_m}}{i\omega_n - \omega_{nm}} \langle n|\hat{\psi}^+(\mathbf{r}')|m\rangle \langle m|\hat{\psi}(\mathbf{r})|n\rangle. \quad (7.132)$$

Сравнивая это выражение с (7.130) и рассуждая так же, как в задаче 37, убеждаемся в том, что аналитическое продолжение  $G(i\omega_n, \mathbf{r}, \mathbf{r}')$  с верхней мнимой полуоси дает  $G^R(\omega, \mathbf{r}, \mathbf{r}')$ , а с нижней —  $G^A(\omega, \mathbf{r}, \mathbf{r}')$ .

**Первое решение 40 б)** Перепишем мацубаровскую собственно-энергетическую часть (7.37) и при помощи интегрального представления (7.24) выразим мацубаровские функции Грина электронов и фононов через соответствующие запаздывающие функции Грина. Получим

$$\Sigma(i\varepsilon_n, \mathbf{p}) = -g^2 T \sum_{\varepsilon'_m} \int \frac{d^3 \mathbf{p}_1}{(2\pi)^3} \frac{dx d\omega}{\pi^2} \frac{\text{Im } G_n^R(x, \mathbf{p}_1)}{x - i\varepsilon'_m} \frac{\text{Im } D^R(\omega, \mathbf{p} - \mathbf{p}_1)}{\omega - i\varepsilon_n + i\varepsilon'_m}, \quad (7.133)$$



где оба интеграла по  $dx d\omega$  берутся по всей вещественной оси. Мацубаровскую сумму по  $\varepsilon'_m$  можно вычислить с помощью разложения на простые дроби:

$$S = T \sum_{\varepsilon'_m} \frac{1}{x - i\varepsilon'_m} \frac{1}{\omega - i\varepsilon_n + i\varepsilon'_m} = \frac{1}{\omega + x - i\varepsilon_n} T \sum_{\varepsilon'_m} \left( \frac{1}{x - i\varepsilon'_m} + \frac{1}{\omega - i\varepsilon_n + i\varepsilon'_m} \right). \quad (7.134)$$

Исходная мацубаровская сумма сходится, но каждая из сумм в (7.134) расходится. Поэтому добавим в (7.134) множитель сходимости  $\exp(i\varepsilon'_m \tau)$ , где  $\tau \rightarrow +0$ . Тогда величину  $i\varepsilon_n$  во втором слагаемом можно исключить, сдвинув переменную суммирования. После этого сдвига суммирование будет происходить уже не по фермиевским, а по бозевским частотам, так как обе мацубаровские частоты  $\varepsilon_n$  и  $\varepsilon'_m$  нечетны. Кроме того, каждый из членов в (7.134) можно представить как значение мацубаровской функции Грина в совпадающие моменты времени для системы с одним уровнем (в первом слагаемом энергия уровня равна  $(-x)$ , а во втором —  $\omega$ ). Поэтому сумма (7.134) выражается через числа заполнения:

$$S = \frac{1}{\omega + x - i\varepsilon_n} (n_F(-x) + n_B(\omega)) = \frac{1}{2(\omega + x - i\varepsilon_n)} \left( \operatorname{th} \frac{x}{2T} + \operatorname{cth} \frac{\omega}{2T} \right) \quad (7.135)$$

Продолжение полученного выражения на вещественную ось выполняется с помощью замены  $i\varepsilon_n \rightarrow \varepsilon + i0$ . Таким образом, получаем требуемое выражение для запаздывающей функции

$$\Sigma^R(\varepsilon, \mathbf{p}) = g^2 \int \frac{d^3 \mathbf{p}_1 d\omega dx}{\pi(2\pi)^4} \frac{\operatorname{Im} G_n^R(x, \mathbf{p}_1) \operatorname{Im} D^R(\omega, \mathbf{p} - \mathbf{p}_1)}{\varepsilon - \omega - x + i0} \left( \operatorname{th} \frac{x}{2T} + \operatorname{cth} \frac{\omega}{2T} \right). \quad (7.136)$$

**Другое решение 40 б)** Чтобы использовать аналитические свойства мацубаровских функций, применим стандартный прием, позволяющий преобразовать сумму (7.37) в контурный интеграл. Рассмотрим сумму

$$S = T \sum_{\varepsilon_1} G(\varepsilon_1, \mathbf{p}_1) D(\varepsilon - \varepsilon_1, \mathbf{p} - \mathbf{p}_1), \quad (7.137)$$

где суммирование происходит по  $\varepsilon_1 = \pi T(2n+1)i$ . Для определенности будем считать, что  $\varepsilon$  лежит в верхней полуплоскости. Одновременно рассмотрим функцию

$$f(z) = G(z, \mathbf{p}_1) D(\varepsilon - z, \mathbf{p} - \mathbf{p}_1) \operatorname{th} \frac{z}{2T}, \quad (7.138)$$

имеющую полюса при  $z = \pi T(2n+1)i$ . Вычислим интеграл

$$I = \oint_C f(z) dz, \quad (7.139)$$

взятый по контуру  $C$ , изображенному на рис. 7.5.

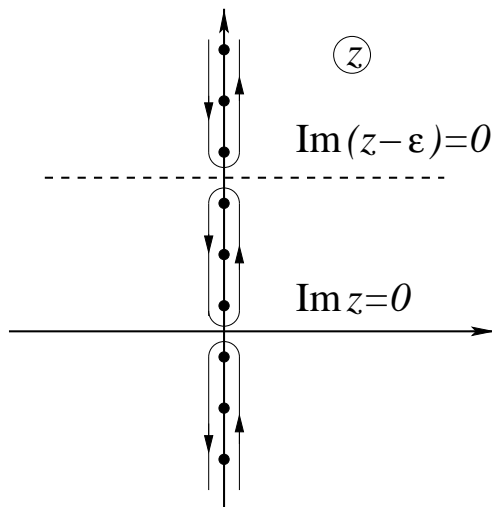


Рис. 7.5

Заметим, что в каждой из трех областей  $\text{Im } z < 0$ ,  $0 < \text{Im } z < \text{Im } \varepsilon$ ,  $\text{Im } \varepsilon < \text{Im } z$  функция  $f(z)$  допускает аналитическое продолжение с дискретных точек на мнимой оси во всю область. Это позволяет вычислить контурный интеграл с помощью теории вычетов. Вычет  $f(z)$  в полюсе  $z_n = \pi T i(2n + 1)$  равен

$$\text{Res}_{z=z_n} f(z) = 2T G(z_n, \mathbf{p}_1) D(\varepsilon - z_n, \mathbf{p} - \mathbf{p}_1). \quad (7.140)$$

Поэтому  $I = 4\pi i S$ .

В то же время аналитичность  $f(z)$  позволяет деформировать контур интегрирования, как показано на рис. 7.6.

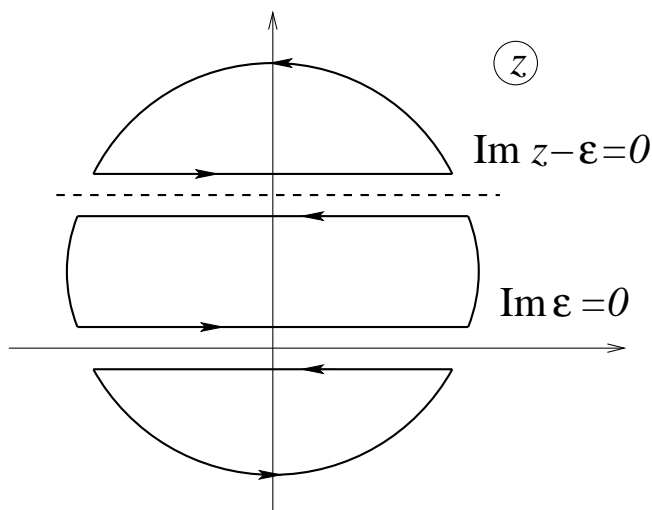


Рис. 7.6

Таким образом интеграл по контуру  $C$  сводится к двум интегралам вперед и назад по горизонтальным прямым  $z = x$  и  $z = \varepsilon + x$ ,  $-\infty < x < \infty$ , и мы приходим к равенству:

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \left( G^R(x) - G^A(x) \right) D^R(\varepsilon - x) \operatorname{th} \frac{x}{2T} - G^R(x + \varepsilon) \left( D^R(x) - D^A(x) \right) \operatorname{th} \frac{\varepsilon + x}{2T} \right] dx . \quad (7.141)$$

Зависимость гриновских функций от импульсов, опущенная в (7.141) для краткости, будет восстановлена ниже. Заметим, что поскольку  $\varepsilon = i\pi T(2n + 1)$ , в выражении (7.141) можно заменить  $\operatorname{th}(\varepsilon + x)/2T$  на  $-\operatorname{cth} x/2T$ .

Выразим теперь все стоящие здесь величины через мнимые части функций Грина. Из (7.130) видно, что опережающая и запаздывающая функции Грина отличаются лишь знаком перед  $i0$ , поэтому

$$G^R(\varepsilon, \mathbf{p}) - G^A(\varepsilon, \mathbf{p}) = 2i \operatorname{Im} G^R(\varepsilon, \mathbf{p}) . \quad (7.142)$$

Кроме того, из аналитических свойств функций Грина следует, что они удовлетворяют соотношениям типа Крамерса–Кронига:

$$G^R(\varepsilon, \mathbf{p}) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{Im} G^R(\omega, \mathbf{p}) d\omega}{\omega - \varepsilon - i0} , \quad G^A(\varepsilon, \mathbf{p}) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{Im} G^R(\omega, \mathbf{p}) d\omega}{\omega - \varepsilon + i0} . \quad (7.143)$$

Подставляя эти выражения в (7.141), получаем

$$I = \frac{2i}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{\operatorname{Im} G^R(x) \operatorname{Im} D^R(\omega)}{\omega - \varepsilon + x - i0} \operatorname{th} \frac{x}{2T} + \frac{\operatorname{Im} G^R(\omega) \operatorname{Im} D^R(x)}{\omega - \varepsilon - x - i0} \operatorname{cth} \frac{x}{2T} \right) dx d\omega . \quad (7.144)$$

Воспользовавшись соотношением  $\operatorname{Im} D^R(-x) = -\operatorname{Im} D^R(x)$ , сделаем во втором слагаемом замену  $x \rightarrow -x$ , после чего поменяем местами в этом слагаемом переменные  $x$  и  $\omega$ . Получаем окончательный результат:

$$I = \frac{2i}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{Im} G^R(x) \operatorname{Im} D^R(\omega)}{\omega - \varepsilon + x - i0} \left( \operatorname{th} \frac{x}{2T} + \operatorname{cth} \frac{\omega}{2T} \right) dx d\omega . \quad (7.145)$$

Теперь, пользуясь соотношением  $I = 4\pi i S$ , находим  $S$ . Восстанавливая зависимость от импульсов  $\mathbf{p}$  и  $\mathbf{p}_1$  и интегрируя по  $d^3\mathbf{p}_1$ , получаем искомое соотношение (7.38).

Как уже было отмечено, равенство (7.38) имеет совершенно общий характер и не зависит от конкретного вида функций Грина  $G^R(\varepsilon, \mathbf{p})$  и  $D^R(\omega, \mathbf{p})$ . Применение соотношения (7.38), однако, оказывается особенно удобным в случае свободных частиц, поскольку при этом мнимые части затравочных функций  $G^R(\varepsilon, \mathbf{p})$  и  $D^R(\omega, \mathbf{p})$  пропорциональны  $\delta$ -функциям — см. задачу 41 б).

**Решение 41 а)** Запаздывающая функция Грина может быть получена из мацубаровской функции (7.122) аналитическим продолжением с дискретных частот  $\omega_n \geq 0$ .

Выполняя замену  $i\omega_n \rightarrow \omega$  в поляризационном операторе (7.119) и разлагая по малым  $\omega$  и  $q = k - 2p_0$ , получаем<sup>9</sup>

$$\Pi(i\omega_n, k) = -\nu_{1D} \left( \ln \frac{E_0}{4\pi T} - aq^2 + ib\omega \right), \quad b = \frac{\psi'(\frac{1}{2})}{4\pi T}, \quad a = -\frac{v_F^2 \psi''(\frac{1}{2})}{(4\pi T)^2}. \quad (7.146)$$

Подставляя это разложение в (7.122) и учитывая, что при  $T = T_c$  имеет место равенство  $1 + g^2 \Pi_0 = 0$ , получаем выражение для запаздывающей функции Грина:

$$D(\omega, k = 2p_0 + q) = -\frac{1}{g^2 \nu_{1D} \left( \ln \frac{T}{T_c} + aq^2 - ib\omega \right) - \frac{\omega^2}{\omega_0^2(k)}}. \quad (7.147)$$

При  $T \rightarrow T_c$  разлагаем  $\ln T/T_c = (T - T_c)/T_c \equiv \tau$ . Поскольку в этой области характерные  $\omega$  малы, второе слагаемое в знаменателе выражения (7.147) несущественно, и в результате функция Грина есть

$$D(\omega, k = 2p_0 + q) = \frac{1}{g^2 \nu_{1D} b (i\omega - \gamma(q))}, \quad \gamma(q) = (\tau + aq^2)/b. \quad (7.148)$$

Полюса этого выражения определяют закон дисперсии вблизи  $T_c$ . Как видно, частота оказывается чисто мнимой:  $\omega(q) = -i\gamma(q)$ . Это соответствует релаксационной динамике: возмущение с волновым вектором  $k = 2p_0 + q$  затухает по закону  $e^{-\gamma(q)t}$ ,

**Решение 41 б)** Найдем собственно-энергетическую часть (7.38) функции Грина одномерных фермионов. Для определенности будем говорить о движущихся направо частицах с линеаризованным законом дисперсии  $\varepsilon = v_F p$ . Рассеиваясь на мягких фононах с передачей импульса близкого к  $-2p_0$ , правые «частицы» становятся «левыми» с законом дисперсии  $\varepsilon = -v_F p$ . Соответственно в выражении (7.38) мнимая часть функции Грина электронов есть  $-\pi \delta(\varepsilon_1 + v_F p_1)$ . Интегрируя  $\delta$ -функцию по  $\varepsilon_1$ , получаем:

$$\Sigma^R(\varepsilon, p) = -\frac{g^2}{2\pi} \int \frac{dp_1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{\text{Im } D^R(\omega, p - p_1)}{\varepsilon + v_F p_1 - \omega + i0} \left( \text{cth } \frac{\omega}{2T} - \text{th } \frac{v_F p_1}{2T} \right) \quad (7.149)$$

Мнимая часть функции Грина фононов, согласно (7.148), есть

$$\text{Im } D^R(\omega, q) = -\frac{1}{2bg^2 \nu_{1D}} \left( \frac{1}{\omega + i\gamma(q)} + \frac{1}{\omega - i\gamma(q)} \right) = -\frac{\omega}{bg^2 \nu_{1D} (\omega^2 + \gamma^2(q))}. \quad (7.150)$$

Поскольку  $\gamma(q = 0) = \tau/b \ll T$ , основной вклад в интеграл (7.149) дает область  $|\omega| \ll T$ . Поэтому можно заменить  $\text{cth } \omega/2T$  на  $2T/\omega$ , что физически соответствует переходу от рассеяния на квантово-механических фононах к рассеянию на классическом поле. Получающийся в результате сделанного приближения интеграл по  $\omega$  находится с помощью метода вычетов:

$$\Sigma^R(\varepsilon, p) = \frac{2\pi i}{bg^2 \nu_{1D}} \frac{g^2}{2\pi} \int \frac{dq}{2\pi} \frac{1}{\varepsilon + v_F q + i\gamma(q)} \left( \frac{2T}{i\gamma(q)} + \text{th } \frac{v_F(q+p)}{2T} \right), \quad (7.151)$$

<sup>9</sup>Согласно (7.120),  $\psi'(\frac{1}{2}) = 3\zeta(2)$ ,  $\psi''(\frac{1}{2}) = -14\zeta(3)$ .

где  $\tilde{\varepsilon} = \varepsilon + v_F p$ ,  $q = p_1 - p$ . Интеграл по  $q$  в (7.151) определяется областью  $|q| \leq (\tau/a)^{1/2} \ll v_F/T$ . Поэтому можно пренебречь слагаемым  $\text{th}(v_F(q+p)/2T)$  по сравнению с членом  $2T/\gamma(q)$ , а также — заменить  $i\gamma(q)$  в знаменателе первого сомножителя (7.151) на  $i0$ . В результате

$$\Sigma^R(\varepsilon, p) = \frac{4T}{\nu_{1D}} \int \frac{dq}{2\pi} \frac{1}{(\tilde{\varepsilon} + v_F q + i0)(\tau + aq^2)} = -\frac{2T}{a\nu_{1D}\lambda(\tilde{\varepsilon} + iv_F\lambda)}, \quad (7.152)$$

где  $\lambda = (\tau/a)^{1/2}$ .

Представляет интерес мнимая часть выражения (7.152), описывающая забывание электронами своего импульса из-за рассеяния на мягких фонах:

$$\text{Im } \Sigma^R(\varepsilon, p) = -\frac{2\pi T}{(a(p + \varepsilon/v_F)^2 + \tau)}, \quad (7.153)$$

Время жизни квазичастицы с малой энергией  $\varepsilon = v_F p \rightarrow 0$ , согласно (7.153), оказывается весьма коротким, порядка  $\tau/T = (T - T_c)/T_c^2$ .

Вообще, как следует из (7.153), рассеяние на мягких фонах существенно меняет функцию Грина в области  $|\varepsilon| \leq T_c$ ,  $|p| \leq T_c/v_F$ , поскольку при таких  $\varepsilon$  и  $p$  величина  $\Sigma^R(\varepsilon, p)$  оказывается больше характерной энергии квазичастиц. Поэтому наши выводы о поведении  $G^R(\varepsilon, p)$  и  $\Sigma^R(\varepsilon, p)$  в этой области, основанные на использовании в выражении (7.38) функции Грина свободных электронов, вообще говоря, не имеют количественного смысла. Чтобы получить более надежные результаты, следует использовать перенормированную функцию Грина, в которую включена собственно-энергетическая часть. При этом соотношение (7.38) становится уравнением самосогласования для  $\Sigma^R(\varepsilon, p)$ .

**42.** Нас интересует взаимодействие атомов, находящихся в равновесии с тепловым распределением фотонов. Гамильтониан взаимодействия атомов с внешним электрическим полем есть

$$\hat{V} = -\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}_1) \hat{\mathbf{d}}^{(1)} - \hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}_2) \hat{\mathbf{d}}^{(2)} = \sum_{i=1,2; \alpha=x,y,z} \hat{E}_\alpha(\mathbf{r}_i) \hat{d}_\alpha^{(i)}, \quad (7.154)$$

где  $\mathbf{d}^{(1,2)}$  — операторы дипольного момента атомов, а  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$  — оператор электрического поля в точке  $\mathbf{r}$ .

Изменение термодинамического потенциала системы, вызванное взаимодействием (7.154), можно записать так:

$$U \equiv \Omega - \Omega_0 = -T \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^\beta \dots \int_0^\beta \langle T_\tau \hat{V}(\tau_1) \dots \hat{V}(\tau_n) \rangle_\tau d\tau_1 \dots d\tau_n, \quad (7.155)$$

причем усреднение происходит как по флуктуациям дипольных моментов, так и по флуктуациям электрического поля. Нас интересует слагаемое в (7.155), отвечающее взаимодействию двух атомов. Поскольку средний дипольный момент атома равен нулю, очевидно, что интересующие нас члены должны содержать каждый из дипольных

моментов  $\mathbf{d}^{(1)}$  и  $\mathbf{d}^{(2)}$  четное число раз. Поэтому наименьшим порядком теории возмущений, дающим отличный от нуля вклад, оказывается четвертый:

$$U = -\frac{T}{4!} \int_0^\beta \dots \int_0^\beta \langle T_\tau \hat{V}(\tau_1) \dots \hat{V}(\tau_4) \rangle_\tau d\tau_1 \dots d\tau_4 . \quad (7.156)$$

Для вклада в  $\Omega - \Omega_0$  порядка  $n$  имеется  $(n-1)!$  комбинаторных возможностей для образования неприводимого среднего. В нашем случае  $n = 4$ , и комбинаторный множитель равен  $3! = 6$ . Кроме того, чтобы исключить эффекты самодействия атомов, мы должны выделить слагаемые, содержащие каждый из дипольных моментов  $\mathbf{d}^{(1)}$  и  $\mathbf{d}^{(2)}$  по два раза. Это дает еще две возможности для каждого из учтенных неприводимых средних. В результате полное число вкладов интересующего нас вида равно  $3! \cdot 2 = 12$ . Кроме того, усреднения по флуктуациям дипольных моментов различных атомов статистически независимы, а усреднение по флуктуациям электрического поля можно выполнить по теореме Вика. Таким образом,

$$\begin{aligned} U_{12} = & -\frac{T}{2} \int_0^\beta \dots \int_0^\beta \langle T_\tau \hat{d}_\alpha^{(1)}(\tau_1) \hat{d}_\beta^{(1)}(\tau_2) \rangle_\tau \langle T_\tau \hat{d}_\gamma^{(2)}(\tau_3) \hat{d}_\delta^{(2)}(\tau_4) \rangle_\tau \\ & \times \langle T_\tau \hat{E}_\alpha(\mathbf{r}_1, \tau_1) \hat{E}_\gamma(\mathbf{r}_2, \tau_3) \rangle_\tau \langle T_\tau \hat{E}_\beta(\mathbf{r}_1, \tau_2) \hat{E}_\delta(\mathbf{r}_2, \tau_4) \rangle_\tau d\tau_1 \dots d\tau_4 . \end{aligned}$$

Введем обозначения для коррелятора дипольных моментов:

$$\alpha_{\alpha\beta}^{(j)}(\tau) = \langle T_\tau \hat{d}_\alpha^{(j)}(0) \hat{d}_\beta^{(j)}(\tau) \rangle_\tau , \quad j = 1, 2 , \quad (7.157)$$

и электрических полей:

$$D_{\alpha\beta}^E(\mathbf{r}, \tau) = \langle T_\tau \hat{E}_\alpha(0, 0) \hat{E}_\beta(\mathbf{r}, \tau) \rangle_\tau . \quad (7.158)$$

Для простоты будем считать, что атомы находятся в синглетном состоянии. Тогда

$$\alpha_{\alpha\beta}^{(j)}(\tau) = \alpha_j(\tau) \delta_{\alpha\beta} , \quad (7.159)$$

и взаимодействие  $U_{12}$  принимает следующий вид:

$$U_{12} = -\frac{T}{2} \int_0^\beta \dots \int_0^\beta d\tau_1 \dots d\tau_4 \alpha_1(\tau_1 - \tau_2) \alpha_2(\tau_3 - \tau_4) D_{\alpha\beta}^E(\mathbf{r}, \tau_1 - \tau_3) D_{\alpha\beta}^E(\mathbf{r}, \tau_4 - \tau_2) . \quad (7.160)$$

Перейдем к мацубаровскому частотному представлению:

$$\alpha(\tau) = T \sum_{\omega_n} e^{-i\omega_n \tau} \alpha(i\omega_n) . \quad (7.161)$$

Интегрирование по  $\tau$  делает все частоты в выражении (7.160) равными, и мы получаем

$$U_{12} = -\frac{T}{2} \sum_{\omega_n} \alpha_1(i\omega_n) \alpha_2(i\omega_n) \left[ D_{\alpha\beta}^E(i\omega_n, \mathbf{r}) \right]^2 . \quad (7.162)$$

(Здесь мы воспользовались четностью мацубаровских корреляционных функций по частоте.)

Функцию  $D_{\alpha\beta}^E(i\omega_n, \mathbf{r})$  можно легко связать с функцией Грина (7.39), приведенной в условии. Поскольку в выбранной нами калибровке  $\Phi = 0$ , то  $\mathbf{E} = -\dot{\mathbf{A}}/c$ . Поэтому

$$D_{\alpha\beta}^E(i\omega_n, \mathbf{r}) = \frac{\omega_n^2}{c^2} D_{\alpha\beta}(i\omega_n, \mathbf{r}) \quad (7.163)$$

и выражение для энергии переписется как

$$U_{12} = -\frac{T}{2} \sum_{\omega_n} \frac{\omega_n^4}{c^4} \alpha_1(i\omega_n) \alpha_2(i\omega_n) [D_{\alpha\beta}(i\omega_n, \mathbf{r}_{12})]^2. \quad (7.164)$$

Чтобы найти функцию  $D_{\alpha\beta}(i\omega_n, \mathbf{r})$ , перейдем из импульсного представления в координатное, заменяя в выражении (7.39) компоненты вектора  $\mathbf{k}$  на пространственные производные по правилу:  $k_\alpha \rightarrow -i\partial/\partial x_\alpha$ . Получаем:

$$D_{\alpha\beta}(i\omega_n, \mathbf{r}) = -4\pi \left[ \delta_{\alpha\beta} - \frac{c^2}{\omega_n^2} \frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} \right] \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}}{k^2 + \omega_n^2/c^2}. \quad (7.165)$$

Вычислим интеграл:

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}}{k^2 + a^2} = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty \frac{k^2 dk}{k^2 + a^2} \frac{\sin kr}{kr} = -\frac{1}{2\pi^2 r} \frac{\partial}{\partial r} \int_0^\infty \frac{\cos kr}{k^2 + a^2} dk \\ &= -\frac{1}{2\pi^2 r} \frac{\partial}{\partial r} \frac{\pi}{2a} e^{-ar} = \frac{1}{4\pi r} e^{-ar}. \end{aligned} \quad (7.166)$$

Наконец, дифференцирование дает

$$D_{\alpha\beta}(i\omega_n, \mathbf{r}) = \frac{e^{-k_n r}}{k_n^2 r^3} \left( \delta_{\alpha\beta} (1 + k_n r + k_n^2 r^2) - n_\alpha n_\beta (3 + 3k_n r + k_n^2 r^2) \right), \quad (7.167)$$

где  $k_n = |\omega_n|/c$ . Получаем, что величина, входящая в выражение (7.164) для  $U_{12}$  есть

$$K(\omega_n, r) = k_n^4 [D_{\alpha\beta}(i\omega_n, \mathbf{r})]^2 = \frac{2e^{-2k_n r}}{r^6} \left( 3 + 6k_n r + 5k_n^2 r^2 + 2k_n^3 r^3 + k_n^4 r^4 \right). \quad (7.168)$$

Перед тем, как непосредственно приступить к вычислению  $U_{12}$ , свяжем мацубаровские функции  $\alpha_{(1,2)}(i\omega_n)$  с поляризуемостью атомов. Это возможно, поскольку определяемая по формуле Кубо поляризуемость есть

$$\alpha_{\alpha\beta}(\omega) = i \int_0^\infty e^{i\omega t} \langle [d_\alpha(t), d_\beta(0)] \rangle_T dt. \quad (7.169)$$

Выражение (7.169) при аналитическом продолжении на верхнюю мнимую полуось дает как раз мацубаровскую функцию  $\alpha(i\omega_n)$ . Воспользовавшись этим, выразим  $\alpha(i\omega_n)$  через  $\alpha(\omega)$ . При  $\omega_n > 0$  по формуле Крамерса-Кронига имеем

$$\alpha(i\omega_n) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^\infty \frac{\alpha''(\omega) d\omega}{\omega - i\omega_n} = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\omega \alpha''(\omega) d\omega}{\omega_n^2 + \omega^2}, \quad (7.170)$$

где  $\alpha''(\omega)$  — мнимая часть поляризуемости (мы воспользовались здесь ее нечетностью). Таким образом, получаем окончательный результат:

$$U_{12} = -\frac{2T}{\pi^2} \sum_{\omega_n} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\omega_1 \omega_2 \alpha_1(\omega_1) \alpha_2(\omega_2) d\omega_1 d\omega_2}{(\omega_n^2 + \omega_1^2)(\omega_n^2 + \omega_2^2)} K(\omega_n, r). \quad (7.171)$$

Общее выражение (7.171) справедливо при произвольном расстоянии между атомами. Это выражение упрощается в нескольких интересных предельных случаях. Определим характерные длины

$$\lambda_0 = \frac{c}{\omega_0}, \quad \lambda_T = \frac{c}{T}, \quad (7.172)$$

где  $\omega_0$  — частота, определяемая частотной дисперсией поляризуемости (фактически, в атомных единицах всегда  $\omega_0 \sim 1$ ). Поскольку  $\lambda_0$  много больше радиуса атомов, а  $\lambda_T$ , в свою очередь, много больше  $\lambda_0$ , имеется три различные области,

$$\mathbf{A}: r \ll \lambda_0; \quad \mathbf{B}: \lambda_0 \ll r \ll \lambda_T; \quad \mathbf{B}: \lambda_T \ll r.$$

Рассмотрим по отдельности каждый из этих случаев.

**A:** В этом случае  $k_n r \ll 1$ , т. е. запаздывание электромагнитного взаимодействия пренебрежимо мало. Согласно (7.168), при этом  $K(\omega_n, r) = 6/r^6$ .

Поскольку в этой области  $k_n \lambda_T \ll 1$ , мацубаровскую сумму можно заменить на интеграл по  $\omega$ :

$$U(r) = -\frac{12\hbar}{\pi^3 r^6} \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\omega_1 \omega_2 \alpha''(\omega_1) \alpha''(\omega_2) d\omega_1 d\omega_2 d\omega}{(\omega^2 + \omega_1^2)(\omega^2 + \omega_2^2)}. \quad (7.173)$$

Интегрируя по  $\omega$ , получаем:<sup>10</sup>

$$U(r) = -\frac{6\hbar}{\pi^2 r^6} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\alpha''(\omega_1) \alpha''(\omega_2) d\omega_1 d\omega_2}{\omega_1 + \omega_2} \quad (7.174)$$

В области  $r \ll \lambda_0$  ван-дер-ваальсово взаимодействие можно вывести и без использования диаграммной техники. Чтобы получить выражение (7.174), надо найти сдвиг энергии основного состояния двух атомов по квантово-механической теории возмущений:

$$\delta E_0 = - \sum_{m \neq 0} \frac{\langle m | \widehat{\mathcal{H}}_{12} | 0 \rangle^2}{E_m - E_0}, \quad (7.175)$$

где

$$\widehat{\mathcal{H}}_{12} = \frac{\widehat{\mathbf{d}}_1 \widehat{\mathbf{d}}_2 - 3(\widehat{\mathbf{d}}_1 \mathbf{n})(\widehat{\mathbf{d}}_2 \mathbf{n})}{r^3} \quad (7.176)$$

— гамильтониан дипольного взаимодействия двух атомов в пренебрежении запаздыванием.

**B:** В этом случае  $k_n \lambda_0 \gg 1$  и, значит, необходимо учитывать запаздывание электромагнитного взаимодействия. В то же время, поскольку  $k_n \lambda_T \ll 1$ , температура

<sup>10</sup>Соотношения (7.174) и (7.179) были получены Лондоном (1930) и Польдером и Казимиром (1948) — подробнее см. [1] гл. 6; [8] §85.



по-прежнему эффективно мала, и мацубаровскую сумму в (7.171) можно заменить на интеграл. Этот интеграл определяется областью частот  $\omega_n \sim c/r \ll \omega_0$  (из-за экспоненциального множителя в  $K(\omega, r)$ ), вследствие чего можно пренебречь  $\omega_n$  в знаменателях (7.171). В результате интегрирование по  $\omega_{1,2}$  даст  $\alpha_{1,2}(0)$  в силу соотношений Крамерса–Кронига. Остающийся интеграл по  $\omega$  в выражении для взаимодействия,

$$U(r) = -\frac{\alpha_1(0)\alpha_2(0)}{2\pi} \int_0^\infty d\omega K(\omega, r), \quad (7.177)$$

вычисляется с использованием формулы

$$\int_0^\infty x^m e^{-ax} dx = \frac{m!}{a^{m+1}}. \quad (7.178)$$

В результате получаем так называемое *взаимодействие Казимира*:

$$U(r) = -\frac{23\hbar c \alpha_1(0)\alpha_2(0)}{4\pi r^7}. \quad (7.179)$$

Отметим, что в области  $r \gg \lambda_0$  существенно запаздывание электромагнитного взаимодействия и квантово-механичность фотонов. Формально это проявляется в том, что взаимодействие (7.179) явно зависит от скорости света и постоянной Планка. Физически сила Казимира (7.179) возникает из-за квантовых флуктуаций электромагнитного излучения в вакууме при  $T = 0$ .

**В:** При  $r \gg \lambda_T$  все члены в выражении (7.168) с  $\omega_n \neq 0$  оказываются экспоненциально малыми. Поэтому в мацубаровской сумме в (7.171) достаточно оставить лишь член с  $n = 0$ . Тогда интегрирование по  $\omega_{1,2}$  дадут, как и раньше, статическую поляризуемость, а в  $K(r)_{\omega_n=0}$  достаточно удержать лишь первый член  $6/r^6$ . Получаем

$$U(r) = -\frac{3T \alpha_1(0)\alpha_2(0)}{r^6}. \quad (7.180)$$

Выражение (7.180), соответствующее пределу «высокой» температуры  $T \gg c/r$ , по существу элементарно. Его можно получить в рамках классической статистической физики, рассматривая взаимодействие классических диполей (7.175). Термодинамическое среднее выражения (7.175) равно нулю. Поэтому энергия взаимодействия дается вторым порядком термодинамической теории возмущений:

$$U(r) = -\frac{1}{2T} \langle \mathcal{H}_{12}^2 \rangle_T. \quad (7.181)$$

Среднеквадратичные флуктуации дипольного момента можно найти с помощью флуктуационно-диссипационной теоремы (или даже с помощью теоремы о равнораспределении):

$$\langle d_\alpha d_\beta \rangle_T = T \alpha(0) \delta_{\alpha\beta}. \quad (7.182)$$

В результате получается классическое выражение (7.180).



## **Часть II**

# **Методы теории многих тел**



## Глава 8.

# Теория ферми-жидкости

Теория ферми-жидкости изучает систему, состоящую из макроскопически большого числа взаимодействующих фермионов. Гамильтониан ферми-жидкости  $\widehat{\mathcal{H}} = \widehat{\mathcal{H}}_0 + \widehat{\mathcal{H}}_{\text{int}}$  есть сумма кинетической энергии фермионов и потенциальной энергии их взаимодействия. Выражения для  $\widehat{\mathcal{H}}_0$  и  $\widehat{\mathcal{H}}_{\text{int}}$ , записанные в импульсном представлении через операторы вторичного квантования  $a_{\mathbf{p},\sigma}^+$  и  $a_{\mathbf{p},\sigma}$ , имеют такой вид:

$$\widehat{\mathcal{H}}_0 = \sum_{\mathbf{p},\sigma} \xi(\mathbf{p}) a_{\mathbf{p},\sigma}^+ a_{\mathbf{p},\sigma}, \quad \widehat{\mathcal{H}}_{\text{int}} = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}} V_{\mathbf{k}} \rho_{\mathbf{k}} \rho_{-\mathbf{k}}, \quad (8.1)$$

где  $\xi(\mathbf{p}) = \mathbf{p}^2/2m - \mu$  — спектр свободных частиц,  $V_{\mathbf{k}}$  — фурье-образ потенциала взаимодействия  $V(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ , а  $\rho_{\mathbf{k}} = \sum_{\mathbf{p},\sigma} a_{\mathbf{p}+\mathbf{k},\sigma}^+ a_{\mathbf{p},\sigma}$  — фурье-гармоники оператора плотности фермионов. Как правило предполагается, что ферми-жидкость однородна и имеет фиксированную плотность.

Главная задача теории ферми-жидкости — выяснить характер основного состояния и возбуждений системы, описываемой гамильтонианом (8.1). Вообще говоря, характер основного состояния весьма сильно зависит от свойств взаимодействия между фермионами. В некоторых случаях может возникать сверхпроводящее или ферромагнитное состояние, вигнеровский кристалл, волна зарядовой или спиновой плотности, и т. п. Однако большинство взаимодействующих ферми-систем устроено относительно просто — их свойства в основном подобны свойствам невзаимодействующего ферми-газа. В таких случаях принято говорить о *ферми-жидкостном* состоянии. Элементарные возбуждения ферми-жидкости — это электрон-дырочные пары в окрестности ферми-поверхности. Эффекты взаимодействия проявляются лишь в перенормировке нескольких констант, определяющих теплоемкость, сжимаемость и другие свойства. Кроме того, в ферми-жидкости имеются специфические ветви коллективных возбуждений (нуль-звук, плазмоны, спиновые волны).

Существует несколько подходов к проблеме ферми-жидкости, отличающихся степенью «квантовомеханичности». Во-первых, имеется квазиклассическая (или феноменологическая) теория ферми-жидкости (см. разд. 8.1 и 8.2). Существует также более микроскопическая теория, основанная на так называемом *приближении случайных фаз* (см. разд. 8.3). И, наконец, наиболее строгая микроскопическая теория строится с помощью функций Грина (см. разд. 8.7). Хотя результаты всех трех теорий, по существу,

одинаковы, каждая из них имеет свои методические достоинства. Поэтому в задачах этой главы мы уделим равное внимание всем трем методам и постараемся продемонстрировать связи между ними.

Известно много разнообразных ферми-жидкостных систем. Классические примеры — нуклоны в атомном ядре, а также жидкий  ${}^3\text{He}$ . Но наиболее важные для нас применения теории ферми-жидкости относятся к электронам в металлах. Основное различие между этими видами ферми-жидкости заключается в характере взаимодействия. Взаимодействие между нуклонами, а также между атомами  ${}^3\text{He}$ , — короткодействующее, в то время как электроны взаимодействуют по закону Кулона. В первом случае фурье-образ взаимодействия  $V_{\mathbf{k}}$  в (8.1) весьма слабо зависит от  $\mathbf{k}$ , в то время как во втором случае зависимость от  $\mathbf{k}$  имеет сингулярный характер:  $V_{\mathbf{k}} = 4\pi e^2/k^2$ .

Для математически корректного описания кулоновского взаимодействия в металле обычно используется так называемая *модель желе*: электроны, движущиеся в потенциале равномерно размазанного статического положительного заряда, обеспечивающего электронейтральность. При этом пренебрегают динамикой ионов и всеми эффектами, связанными с фононами. Модель желе весьма неплохо описывает ферми-жидкостные свойства электронов в металлах.

## 8.1. Квазичастицы

Наиболее простое обоснование теории ферми-жидкости можно получить, следуя квазиклассической аргументации Ландау. Основная идея этого подхода та же, что и в теории многоэлектронного атома Томаса–Ферми. Напомним, что в многоэлектронном атоме распределение электронов по импульсам в каждой точке пространства описывается ферми-сферой, радиус которой  $p_0(\mathbf{r})$  есть функция координат. Взаимодействие учитывается заменой потенциала ядра, в поле которого движутся электроны, на эффективный потенциал, включающий среднее электрическое поле, создаваемое электронами. В свою очередь, кулоновский потенциал поля электронов находится по электронной плотности  $\rho(\mathbf{r}) = p_0^3(\mathbf{r})/3\pi^2$  и, таким образом, картина оказывается самосогласованной. Теория Томаса–Ферми позволяет найти распределение заряда в многоэлектронном атоме, энергию связи, и т. п.

Теория ферми-жидкости Ландау является своего рода обобщением теории Томаса–Ферми, описывающим динамику частиц в бесконечной однородной системе взаимодействующих фермионов. Предполагается, что равновесное распределение по импульсам есть ферми-сфера радиуса  $p_0 = (3\pi^2 n)^{1/3}$ , где  $n$  — плотность частиц. Теория утверждает, что динамику такой системы можно рассматривать при помощи *квазичастиц*, описывающих локальные отклонения распределения по импульсам от ферми-сферы. Слабо неравновесные состояния описываются распределением квазичастиц по импульсам и координатам, близким к фермиевскому в каждой точке пространства.

Квазичастицы являются элементарными возбуждениями в ферми-жидкости. Они образованы фермионами невзаимодействующего ферми-газа, «одетыми» взаимодействием с другими фермионами. Математическое описание «одевания» достигается введением в теорию эффективного поля, действующего на квазичастицы. Это поле определенным образом зависит от распределения всех остальных квазичастиц. В результате

динамика и взаимодействие квазичастиц определяются самосогласованно.

Чтобы выяснить, какие эффекты взаимодействия в ферми-жидкости являются наиболее существенными, рассмотрим ферми-газ, в котором одна из частиц имеет энергию  $\varepsilon$  над уровнем Ферми, причем  $\varepsilon \ll E_F$ . Пусть частицы взаимодействуют друг с другом. Из-за взаимодействия возможны переходы одной частицы в состояния с меньшей энергией  $\varepsilon' < \varepsilon$ , сопровождающиеся рождением электрон-дырочной пары с энергией  $\delta\varepsilon = \varepsilon - \varepsilon'$ . Плотность состояний пар с энергией  $\delta\varepsilon$  можно оценить как  $\nu_0^2 \delta\varepsilon$ , и поэтому, согласно золотому правилу, вероятность распада на частицу с меньшей энергией и электрон-дырочную пару есть  $\gamma(\varepsilon) = \lambda \varepsilon^2$ , где  $\lambda \simeq (e^2/\hbar v_F)^2/E_F$ . Из сказанного следует, что  $\gamma(\varepsilon) \ll \varepsilon$ , т. е. время жизни частицы очень велико. Таким же образом можно показать, что рассеяние частиц с малой энергией друг на друге происходит очень редко, поскольку при малой энергии фазовый объем конечных состояний рассеяния оказывается очень мал. Обратим внимание, что эти выводы справедливы даже при силе взаимодействия порядка единицы. Требуется лишь, чтобы энергия частицы была близка к  $E_F$ .

Таким образом, единственным существенным эффектом в динамике частиц ферми-жидкости оказывается *рассеяние вперед* (Ландау, 1956). При рассеянии частицы вперед остальная ферми-система образует своего рода однородную преломляющую среду, взаимодействие с которой дает поправку  $\delta\varepsilon t$  к фазе волновой функции частицы  $e^{-i(\varepsilon^{(0)} + \delta\varepsilon)t}$ , где

$$\delta\varepsilon = \int f(\mathbf{p}, \mathbf{p}') \delta n(\mathbf{p}', \mathbf{r}) \frac{d^3 p'}{(2\pi)^3} \quad (8.2)$$

— так называемый функционал Ландау. Рассеяние вперед не приводит к рождению других частиц или дырок. Таким образом, возникает представление о «квазичастицах», каждая из которых движется в самосогласованном поле окружающих квазичастиц.

Энергия квазичастицы  $\varepsilon$  в самосогласованном поле зависит от распределения по импульсам всех остальных квазичастиц:

$$\varepsilon(\mathbf{p}, \delta n) = \varepsilon^{(0)}(\mathbf{p}) + \int f(\mathbf{p}, \mathbf{p}') \delta n(\mathbf{p}', \mathbf{r}) \frac{d^3 p'}{(2\pi)^3} \quad (8.3)$$

Здесь  $\mathbf{p}$  — импульс квазичастицы,  $\varepsilon^{(0)}(\mathbf{p}) = v_F(p - p_0)$  — энергия квазичастицы, а  $\delta n = n - n_F$  — отклонение распределения квазичастиц от равновесного фермиевского распределения. Функция  $f(\mathbf{p}, \mathbf{p}')$  определяет зависимость энергии квазичастицы с импульсом  $\mathbf{p}$  от состояния квазичастицы с импульсом  $\mathbf{p}'$ .

Теория ферми-жидкости дает связь между функцией  $f(\mathbf{p}, \mathbf{p}')$  и наблюдаемыми величинами, такими как теплоемкость, магнитная восприимчивость и т. п. (см. [1], §§19, 22). При этом, как мы убедимся, функционал (8.3) полностью определяет динамику квазичастиц.

## 8.2. Кинетическое уравнение. Коллективные моды

Выражение (8.3) представляет собой гамильтониан  $H$  одной квазичастицы движущейся в самосогласованном поле других квазичастиц. Динамика квазичастицы описывается уравнением Гамильтона  $\partial n/\partial t = \{H, n\}$ , где  $\{\dots\} = \left[ \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}, \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \right]$  — скобки Пуассона.

Вычисляя скобки Пуассона с гамильтонианом (8.3), получаем кинетическое уравнение теории ферми-жидкости:

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial n}{\partial \mathbf{r}} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{p}} - \frac{\partial n}{\partial \mathbf{p}} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{r}} = 0 \quad (8.4)$$

Рассмотрим колебания системы, отвечающие малым отклонениям от равновесия. Для этого представим функцию распределения в виде  $n = n_0 + \delta n$  и линеаризуем уравнение (8.4) по  $\delta n$ . Получим

$$\frac{\partial \delta n}{\partial t} + \frac{\partial \delta n}{\partial \mathbf{r}} \frac{\partial \varepsilon^{(0)}}{\partial \mathbf{p}} - \frac{\partial \delta \varepsilon}{\partial \mathbf{r}} \frac{\partial n_0}{\partial \mathbf{p}} = 0, \quad (8.5)$$

где  $\delta \varepsilon$  есть функционал Ландау (8.2).

Нас интересуют решения уравнения (8.5), зависящие от времени и координат как  $e^{-i\omega t + i\mathbf{k}\mathbf{r}}$ . Нетрудно показать, что все решения  $\delta n$  имеют  $\delta$ -функциональную зависимость от  $|\mathbf{p}|$  и локализованы на ферми-поверхности  $|\mathbf{p}| = p_0$ . Поэтому, оказывается удобным использовать в качестве независимой переменной функцию единичного вектора  $\mathbf{n}$  на ферми-поверхности:

$$u(\mathbf{n}) = \int \delta n(\mathbf{p}) d|\mathbf{p}|, \quad (8.6)$$

где интеграл берется вдоль луча  $\mathbf{p} \parallel \mathbf{n}$ . Величина  $u(\mathbf{n})$  имеет смысл нормального смещения ферми-поверхности в точке  $p_0 \mathbf{n}$ .

Из (8.5) можно получить уравнение для  $u(\mathbf{n})$ , которое имеет следующий вид:

$$(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v})u(\mathbf{n}) = \mathbf{k}\mathbf{v} \int F(\mathbf{n}, \mathbf{n}') u(\mathbf{n}') \frac{d\mathbf{n}'}{4\pi}, \quad (8.7)$$

где  $\mathbf{v} = v_F \mathbf{n}$ , а функция  $F$  связана с функцией  $f$  в функционале Ландау (8.2) следующим образом:

$$F(\mathbf{n}, \mathbf{n}') = \nu_0 f(\mathbf{p}, \mathbf{p}')|_{|\mathbf{p}|=|\mathbf{p}'|=p_0}, \quad (8.8)$$

где  $\nu_0$  — плотность состояний с одной проекцией спина.

Полученное соотношение (8.7) следует рассматривать, как уравнение на собственные значения  $\omega(\mathbf{k})$ . Оно имеет решения двух типов: *квазичастичные* и *коллективные*. Для квазичастичных решений связь  $\omega$  и  $\mathbf{k}$  есть  $\omega = \mathbf{k}\mathbf{v}$ , а соответствующая функция  $u(\mathbf{n})$  описывает частицу с определенным направлением скорости  $\mathbf{v}$ . Из-за этого функция  $u(\mathbf{n})$  на ферми-поверхности имеет сингулярный характер:

$$u(\mathbf{n}') = \delta^{(2)}(\mathbf{n}' - \mathbf{n}) + u_{\text{reg}}(\mathbf{n}'), \quad (8.9)$$

Кроме  $\delta$ -функции, локализованной в точке  $\mathbf{n} = \mathbf{v}/|\mathbf{v}|$  ферми-поверхности, выражение (8.9) содержит  $u_{\text{reg}}(\mathbf{n})$  — более плавную функцию, обычно имеющую полюса при  $\mathbf{k}\mathbf{v} = \omega$  (см. задачу 43).

Решения другого типа описывают коллективные моды колебаний ферми-жидкости, или так называемый *нулевой звук*. Рассмотрим простейший случай, когда взаимодействие локально и изотропно, т. е. функция  $F$  есть просто константа:  $F(\mathbf{n}, \mathbf{n}') = F_0$ . (Примером системы с функцией Ландау подобного вида является жидкий  ${}^3\text{He}$ .) В этом



случае, ввиду симметрии задачи, функция  $u(\mathbf{n})$  зависит только от угла  $\theta$  между векторами  $\mathbf{n}$  и  $\mathbf{k}$ . Поэтому уравнение (8.7) принимает вид

$$(s - \cos \theta)u(\theta) = \frac{F_0}{2} \cos \theta \int u(\theta') d\theta', \quad \text{где } s = \frac{\omega}{v_F |\mathbf{k}|}. \quad (8.10)$$

Решение уравнения (8.10) есть  $u(\mathbf{n}) = A \cos \theta / (s - \cos \theta)$ , где  $A$  — произвольная константа. Подставляя это решение в (8.10), находим

$$\frac{s}{2} \ln \left( \frac{s+1}{s-1} \right) - 1 = \frac{1}{F_0} \quad (8.11)$$

При любом отталкивательном взаимодействии (т. е. при  $F_0 > 0$ ) это уравнение имеет ровно одно вещественное решение  $s > 1$  и, таким образом, определяет функцию  $s(F_0)$ . Поэтому закон дисперсии нулевого звука оказывается линейным:  $\omega_0(\mathbf{k}) = s(F_0)v_F |\mathbf{k}|$ .

Поскольку  $s(F_0) > 1$ , частота  $\omega_0(\mathbf{k})$  при любом  $\mathbf{k}$  лежит выше границы квази-частичного спектра:  $\omega_0(\mathbf{k}) > v_F |\mathbf{k}|$ . Это означает, что распространение нуль-звука и динамика отдельных квазичастиц «развязаны», вследствие чего нуль-звуковая мода оказывается незатухающей. Отметим, что более точное микроскопическое рассмотрение показывает, что эти результаты справедливы лишь при не слишком больших  $\mathbf{k}$  (см. задачи 44 б), 47 б)). Обычно законы дисперсии коллективных мод в ферми-жидкости имеют точку окончания  $k_{\max}$ , в которой происходит слияние с квазичастичным спектром — см. рис. 8.2, 8.9, а также задачу 70 б).

Коллективные моды в ферми-жидкости могут затрагивать не только распределение плотности частиц, но и поляризацию спина. В этом случае говорят о *спиновых волнах* (см. задачу 47).

Остановимся на том, как видоизменяются коллективные моды в металле, где взаимодействие между частицами кулоновское, т. е. дальнедействующее. В этом случае вместо нулевого звука возникают так называемые *плазменные колебания*. Запишем уравнение (8.4) с учетом силы, возникающей благодаря электрическому полю  $\mathbf{E} = -\nabla\Phi$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial n}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla_{\mathbf{r}})n + e(\mathbf{E}\nabla_{\mathbf{p}})n &= 0 \\ \Phi(\mathbf{r}) &= e \int \left[ \int n(\mathbf{p}, \mathbf{r}') \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3} - n_0 \right] \frac{d^3 \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}, \end{aligned} \quad (8.12)$$

где  $n_0$  — плотность фонового положительного заряда. Как и выше, линеаризуем уравнение и перейдем в импульсное представление.

Получающиеся уравнения оказываются точно такими же, как и в случае нулевого звука, с точностью до замены  $F_0 \rightarrow 4\pi e^2 \nu / \mathbf{k}^2$ , где  $\nu = 2\nu_0$  — плотность состояний с учетом спина. Это происходит потому, что уравнение (8.12), если выразить в нем электрическое поле через плотность частиц, приобретает такую же форму, как кинетическое уравнение ферми-жидкости (8.7) с нелокальным функционалом Ландау:

$$\delta\varepsilon(\mathbf{r}) = \iint \frac{e^2 \delta n(\mathbf{p}, \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \frac{d^3 \mathbf{r}' d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3} \quad (8.13)$$

Как и в случае изотропного взаимодействия, энергия зависит только от полной плотности частиц. Поэтому и угловая зависимость смещений ферми-поверхности, и дисперсионное уравнение выглядят точно так же, как для нуль-звука. Получаем:

$$\frac{\omega}{2v_F|\mathbf{k}|} \ln \left( \frac{\omega + v_F|\mathbf{k}|}{\omega - v_F|\mathbf{k}|} \right) - 1 = \frac{\mathbf{k}^2}{4\pi e^2 \nu} \quad (8.14)$$

Частота  $\omega(\mathbf{k})$ , определяемая из уравнения (8.14), остается конечной при малых  $\mathbf{k}$ :  $\omega_0 \equiv \omega(\mathbf{k} \rightarrow 0) = (4\pi n e^2 / m)^{1/2}$ , что совпадает с известным классическим результатом для плазменной частоты. Подробнее закон дисперсии плазменных волн будет рассмотрен в задаче 44.

Подведем итог. Большая часть возбуждений в ферми-жидкости — квазичастицы — имеет точно такой же спектр и динамику, как и в невзаимодействующей системе. Кроме того, благодаря взаимодействию могут появиться коллективные моды плазменных или нуль-звуковых колебаний. Появление коллективных мод и есть основной качественный эффект, к которому приводит взаимодействие.

### 8.3. Приближение случайных фаз

В этом разделе будет показано, как можно проквантовать динамику ферми-жидкости, используя гамильтонов формализм. Для этого потребуются ввести операторы электрон-дырочных пар, удовлетворяющие бозонным коммутационным соотношениям. Гамильтониан ферми-жидкости (8.1), записанный через такие операторы, содержит квадратичные члены, а также члены более высокого порядка, которыми можно пренебречь, если энергия рассматриваемых возбуждений мала по сравнению с  $E_F$ . Динамику, определяемую этим квадратичным гамильтонианом, можно исследовать точно и установить ее эквивалентность кинетическому уравнению ферми-жидкости. Возможность описать систему взаимодействующих фермионов (8.1) с помощью эквивалентного бозонного гамильтониана имеет разнообразные интересные применения. Одним из них является так называемый метод *бозонизации*, который мы рассмотрим в гл. 12.

Перейдем к определению бозе-операторов. Предположим, что функция распределения по импульсам имеет такой же вид, как и для свободных частиц, т. е. что ферми-поверхность не разрушается взаимодействием. Чтобы выяснить, как взаимодействие меняет характер возбуждений, приведем гамильтониан системы (8.1) к виду, содержащему операторы рождения и уничтожения электрон-дырочных пар. При этом, если использовать так называемое приближение случайных фаз Боме и Пайнса, коммутационные соотношения для операторов пар оказываются весьма простыми<sup>1</sup>.

С формальной точки зрения, рассматриваемый здесь метод является корректным в пределе высокой плотности, когда взаимодействие можно считать слабым. Для просто-

<sup>1</sup>Наше изложение опирается на работы Савады, Венцеля и др., в которых был введен введен так называемый «эффективный гамильтониан», описывающий взаимодействие электрон-дырочных пар. Основой для этой теории послужило приближение случайных фаз, предложенное Бомом и Пайнсом в 1953 г. Более подробно с методом эффективного бозонного гамильтониана можно ознакомиться по оригинальным работам: K. Sawada, *Phys. Rev.* **106**, 372 (1957); K. Sawada, K. A. Brueckner, N. Fukuda, and R. Brout, *Phys. Rev.* **108**, 507 (1957); G. Wentzel, *Phys. Rev.* **108**, 1593 (1957)

ты изложения будем считать фермионы бесспиновыми. При необходимости, восстановить спиновую зависимость в окончательных выражениях можно без особого труда.

Введем бозе-операторы рождения электрон-дырочных пар следующим образом:

$$c_{\mathbf{p},\mathbf{k}} = a_{\mathbf{p}}^+ a_{\mathbf{p}+\mathbf{k}} , \text{ где } |\mathbf{p}| < p_0, |\mathbf{p} + \mathbf{k}| > p_0 \quad (8.15)$$

Обратим внимание читателя на ограничение, наложенное на импульсы  $\mathbf{p}$  и  $\mathbf{k}$ . Оно выбрано так, чтобы при действии оператором  $c_{\mathbf{p},\mathbf{k}} = a_{\mathbf{p}}^+ a_{\mathbf{p}+\mathbf{k}}$  на основное состояние невзаимодействующей системы всегда рождалась ровно одна пара частица-дырка.

Условия  $|\mathbf{p}| < p_0$  и  $|\mathbf{p} + \mathbf{k}| > p_0$ , при фиксированном  $\mathbf{k}$  определяют подмножество ферми-сферы, имеющее в сечении серповидную форму:

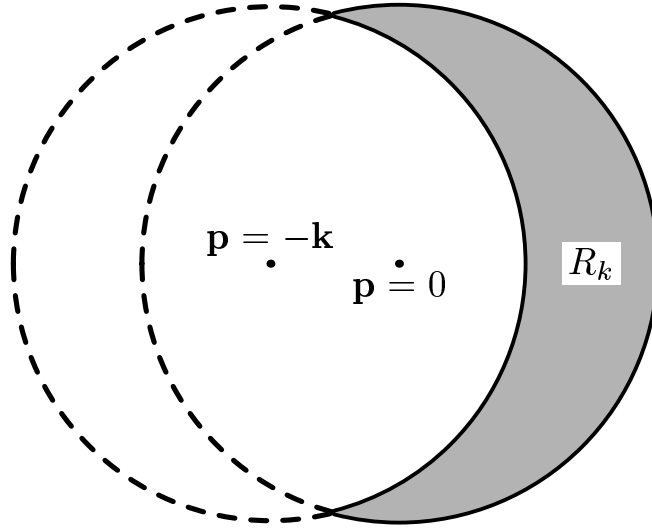


Рис. 8.1

Мы будем обозначать эту область  $R_k$  и записывать ограничение (8.15) на  $\mathbf{p}$  и  $\mathbf{k}$  в виде  $\mathbf{p} \in R_k$ .

Рассмотрим приближенное выражение для оператора плотности:

$$\tilde{\rho}_{\mathbf{k}} = \sum_{\mathbf{p} \in R_k} (c_{\mathbf{p},\mathbf{k}} + c_{-\mathbf{p},-\mathbf{k}}^+) . \quad (8.16)$$

Заметим, что наложенное условие  $\mathbf{p} \in R_k$  не нарушает вещественности оператора плотности  $\tilde{\rho}_{\mathbf{k}} = \tilde{\rho}_{-\mathbf{k}}^+$ . Смысл приближения (8.16) состоит в том, что из точного выражения  $\rho_{\mathbf{k}} = \sum_{\mathbf{p}} a_{\mathbf{p}}^+ a_{\mathbf{p}+\mathbf{k}}$  исключены матричные элементы, соответствующие «чересчур многочастичным» процессам. Говоря более точно, мы отбрасываем все слагаемые  $a_{\mathbf{p}}^+ a_{\mathbf{p}+\mathbf{k}}$ , дающие ноль при применении к любому состоянию с ровно одной электрон-дырочной парой, а также к основному состоянию невзаимодействующей системы.

Подставим выражение (8.16) в гамильтониан (8.1). Получающийся при этом приближенный гамильтониан совпадает с исходным гамильтонианом на состояниях, содержащих небольшое количество пар. Отличие между приближенным и точным гамильтонианами появляется только для достаточно сильно возбужденных состояний.

Теперь рассмотрим коммутационные соотношения гамильтониана взаимодействия  $\widehat{\mathcal{H}}_{\text{int}} = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}} V_{\mathbf{k}} \tilde{\rho}_{\mathbf{k}} \tilde{\rho}_{-\mathbf{k}}$  с операторами рождения пар  $c_{\mathbf{p},\mathbf{k}}$ . Коммутатор  $[\widehat{\mathcal{H}}_{\text{int}}, c_{\mathbf{p},\mathbf{k}}]$  описывает динамику флуктуации плотности. Исключим из коммутатора все члены, увеличивающие число пар. Получающееся приближенное выражение для коммутатора имеет вид

$$[\widehat{\mathcal{H}}_{\text{int}}, c_{\mathbf{p},\mathbf{k}}] = -V_{\mathbf{k}} \tilde{\rho}_{\mathbf{k}} , \quad [\widehat{\mathcal{H}}_{\text{int}}, c_{\mathbf{p},\mathbf{k}}^+] = V_{\mathbf{k}} \tilde{\rho}_{\mathbf{k}}^+ . \quad (8.17)$$

Физическим основанием для процедуры, примененной выше к оператору плотности и к коммутаторам  $[\widehat{\mathcal{H}}_{\text{int}}, c_{\mathbf{p},\mathbf{k}}]$ , является сделанное в разд. 8.1 наблюдение, заключающееся в том, что время жизни пары с малой энергией становится очень большим при уменьшении энергии. Поэтому при рассмотрении коммутаторов законно пренебречь процессами, не сохраняющими число пар и приводящими к превращению одной пары в несколько<sup>2</sup>.

Рассмотрим теперь коммутаторы операторов  $c_{\mathbf{p},\mathbf{k}}$  и  $c_{\mathbf{p}',\mathbf{k}'}^+$ . Используя определение (8.15), получаем:

$$[c_{\mathbf{p},\mathbf{k}}, c_{\mathbf{p}',\mathbf{k}'}^+] = \delta_{\mathbf{p}\mathbf{p}'} a_{\mathbf{p}'+\mathbf{k}'}^+ a_{\mathbf{p}+\mathbf{k}} + \delta_{\mathbf{p}'+\mathbf{k}',\mathbf{p}+\mathbf{k}} a_{\mathbf{p}}^+ a_{\mathbf{p}'} , \quad (8.18)$$

причем  $\mathbf{p} \in R_{\mathbf{k}}$ ,  $\mathbf{p}' \in R_{\mathbf{k}'}$ . Применяя приближение случайных фаз, необходимо выделить в правой части (8.18) члены, не создающие новых пар при действии на основное состояние или на состояние с уже имеющимся небольшим количеством пар. Это достигается заменой правой части (8.18) на среднее, взятое по основному состоянию. В результате коммутатор  $[c_{\mathbf{p},\mathbf{k}}, c_{\mathbf{p}',\mathbf{k}'}^+]$  оказывается  $c$ -числом:

$$[c_{\mathbf{p},\mathbf{k}}, c_{\mathbf{p}',\mathbf{k}'}^+] \approx \delta_{\mathbf{p}\mathbf{p}'} \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} , \quad [c_{\mathbf{p},\mathbf{k}}, c_{\mathbf{p}',\mathbf{k}'}] = 0 . \quad (8.19)$$

(Второй коммутатор в (8.19) получается аналогично.) Таким образом, мы установили, что операторы рождения пар удовлетворяют бозевским коммутационным соотношениям. Отметим, что найденные выше коммутаторы (8.17) могут быть получены непосредственно из (8.19) и найденного выше выражения  $\widehat{\mathcal{H}}_{\text{int}} = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}} V_{\mathbf{k}} \tilde{\rho}_{\mathbf{k}} \tilde{\rho}_{-\mathbf{k}}$ . Таким образом, приближение случайных фаз оказывается самосогласованным.

Займемся теперь оператором кинетической энергии  $\widehat{\mathcal{H}}_0 = \sum_{\mathbf{p}} (p^2/2m) a_{\mathbf{p}}^+ a_{\mathbf{p}}$ . Его коммутаторы с операторами рождения и уничтожения пар нетрудно вычислить точно:

$$[\widehat{\mathcal{H}}_0, c_{\mathbf{p},\mathbf{k}}^+] = \omega_{\mathbf{p},\mathbf{k}} c_{\mathbf{p},\mathbf{k}}^+ , \quad [\widehat{\mathcal{H}}_0, c_{\mathbf{p},\mathbf{k}}] = -\omega_{\mathbf{p},\mathbf{k}} c_{\mathbf{p},\mathbf{k}} , \quad (8.20)$$

где  $\omega_{\mathbf{p},\mathbf{k}} = (\mathbf{p} + \mathbf{k})^2/2m - \mathbf{p}^2/2m$ . Попытаемся представить оператор кинетической энергии через операторы пар  $c_{\mathbf{p},\mathbf{k}}^+$  и  $c_{\mathbf{p},\mathbf{k}}$  таким образом, чтобы это представление обеспечивало правильные коммутационные соотношения (8.20). Для этого достаточно

<sup>2</sup>Исключаемые члены характерны тем, что в представлении взаимодействия их зависимость от времени описывается быстро осциллирующими фазовыми множителями, в то время как все оставляемые члены не зависят от времени. Бом и Пайнс показали, что эти быстро осциллирующие члены дают малые поправки к уравнениям эволюции операторов (8.15), и поэтому их исключение законно. Этому и обязан своим появлением термин «приближение случайных фаз».

просто взять сумму по  $\mathbf{p}$  и  $\mathbf{k}$  от  $\omega_{\mathbf{p},\mathbf{k}} c_{\mathbf{p},\mathbf{k}}^+ c_{\mathbf{p},\mathbf{k}}$ . Заметим, что условие  $\mathbf{p} \in R_k$  обеспечивает положительность  $\omega_{\mathbf{p},\mathbf{k}}$ .

Вследствие всего сказанного выше, гамильтониан системы можно представить в следующей эквивалентной форме:

$$\widehat{\mathcal{H}}_{\text{RPA}} = \sum_{\mathbf{k}} \left( \sum_{\mathbf{p} \in R_k} \omega_{\mathbf{p},\mathbf{k}} c_{\mathbf{p},\mathbf{k}}^+ c_{\mathbf{p},\mathbf{k}} + \frac{1}{2} V_{\mathbf{k}} \tilde{\rho}_{\mathbf{k}} \tilde{\rho}_{-\mathbf{k}} \right) \quad (8.21)$$

Это выражение квадратично по бозе-операторам  $c_{\mathbf{p},\mathbf{k}}$  и  $c_{\mathbf{p},\mathbf{k}}^+$  и поэтому его изучение оказывается весьма простой задачей.

Удобно перейти к каноническим операторам координат и импульсов осцилляторов:

$$\begin{aligned} \phi_{\mathbf{p},\mathbf{k}} &\equiv \phi_{-\mathbf{p},-\mathbf{k}}^+ = (2\omega_{\mathbf{p},\mathbf{k}})^{-1/2} (c_{\mathbf{p},\mathbf{k}} + c_{-\mathbf{p},-\mathbf{k}}^+) \\ \pi_{\mathbf{p},\mathbf{k}} &\equiv \pi_{-\mathbf{p},-\mathbf{k}}^+ = i \left( \frac{1}{2} \omega_{\mathbf{p},\mathbf{k}} \right)^{1/2} (c_{\mathbf{p},\mathbf{k}}^+ - c_{-\mathbf{p},-\mathbf{k}}) \end{aligned} \quad (8.22)$$

В представлении осцилляторов оператор кинетической энергии есть сумма невзаимодействующих осцилляторов<sup>3</sup>:

$$\widehat{\mathcal{H}}_0 = \sum_{\mathbf{k}; \mathbf{p} \in R_k} \frac{1}{2} \left( \pi_{\mathbf{p},\mathbf{k}}^+ \pi_{\mathbf{p},\mathbf{k}} + \omega_{\mathbf{p},\mathbf{k}}^2 \phi_{\mathbf{p},\mathbf{k}}^+ \phi_{\mathbf{p},\mathbf{k}} \right) . \quad (8.23)$$

Взаимодействие в этом представлении записывается так:

$$\widehat{\mathcal{H}}_{\text{int}} = \sum_{\mathbf{k}} V_{\mathbf{k}} \left( \sum_{\mathbf{p} \in R_k} \omega_{\mathbf{p},\mathbf{k}}^{1/2} \phi_{\mathbf{p},\mathbf{k}}^+ \right) \left( \sum_{\mathbf{p}' \in R_k} \omega_{\mathbf{p}',\mathbf{k}}^{1/2} \phi_{\mathbf{p}',\mathbf{k}} \right) \quad (8.24)$$

Теперь можно диагонализировать гамильтониан  $\widehat{\mathcal{H}}_0 + \widehat{\mathcal{H}}_{\text{int}}$  с помощью канонического преобразования и найти нормальные моды колебаний системы.

Получающийся спектр частот нормальных колебаний состоит из двух компонент

---

<sup>3</sup>Мы опускаем константу

$$E_0 = \sum_{\mathbf{k}; \mathbf{p} \in R_k} \left( -\frac{1}{2} \omega_{\mathbf{p},\mathbf{k}} \right) , \quad (8.25)$$

появляющуюся из-за некоммутативности операторов  $c_{\mathbf{p},\mathbf{k}}$  и  $c_{\mathbf{p},\mathbf{k}}^+$ .

(см. рис. 8.2).

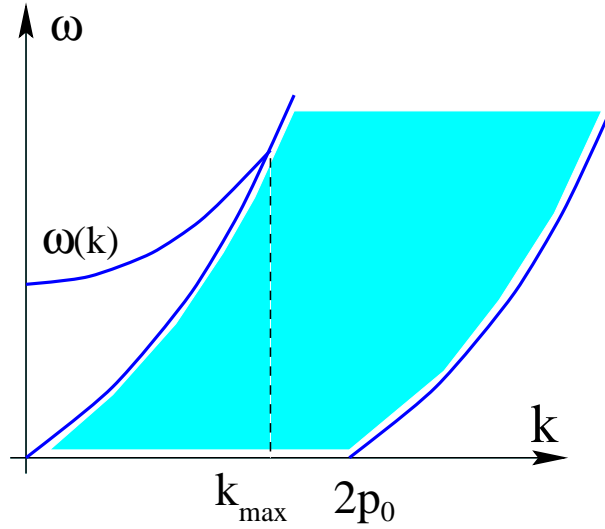


Рис. 8.2

Первая из них — непрерывный спектр  $\omega = \omega_{\mathbf{p},\mathbf{k}}$ , совпадающий со спектром невзаимодействующей системы. Вторая компонента — коллективная мода с законом дисперсии  $\omega(\mathbf{k})$ , определяемым из уравнения

$$1 = V_{\mathbf{k}} \sum_{\mathbf{p} \in R_{\mathbf{k}}} \frac{2\omega_{\mathbf{p},\mathbf{k}}}{\omega^2 - \omega_{\mathbf{p},\mathbf{k}}^2}. \quad (8.26)$$

Это выражение справедливо для бесспиновых частиц. В случае частиц со спином  $1/2$ , суммирование по спинам приводит к дополнительному множителю  $2$  в правой части (8.26). В задаче 44 будет показано, что при малых  $|\mathbf{k}| \ll p_0$  выражение (8.26) тождественно дисперсионному соотношению для коллективных мод, полученному из кинетического уравнения ферми-жидкости (8.7).

В случае кулоновского взаимодействия,  $V_{\mathbf{k}} = 4\pi e^2/k^2$ , коллективные возбуждения представляют собой плазменные волны, имеющие конечную частоту  $\omega_0 = (4\pi e^2 n/m)^{1/2}$  при  $\mathbf{k} \rightarrow 0$ . Плазменные колебания существуют в конечном интервале  $0 \leq |\mathbf{k}| < k_{\max}$ , причем их частота выше верхней границы непрерывного спектра. При  $|\mathbf{k}| \geq k_{\max} \geq (4\pi e^2 \nu)^{1/2}$  ветвь плазменных колебаний вливается в непрерывный спектр (см. задачу 44). В этой области частота  $\omega$ , определяемая из дисперсионного уравнения (8.26), оказывается комплексной, т. е. колебания приобретают конечное затухание.

Коллективные возбуждения, полученные в приближении случайных фаз, оказываются такими же, как в теории ферми-жидкости Ландау. Некоторое отличие имеется только в поведении, предсказываемом в области больших  $|\mathbf{k}| > k_{\max}$ , где теория ферми-жидкости теряет применимость, поскольку  $1/k_{\max}$  — это размер квазичастицы. Если взаимодействие слабое, то приближение случайных фаз дает правильный ответ даже при  $|\mathbf{k}| \geq k_{\max}$ .

Однако, приближение случайных фаз, основывающееся на гамильтониане электрон-дырочных пар, неприменимо в случае сильного взаимодействия. А теория ферми-жидкости, полученная весьма общим феноменологическим образом, имеет смысл и при сильном взаимодействии, и утверждает, что при  $|\mathbf{k}| \leq k_{\max}$  можно пользоваться квадратичным гамильтонианом пар  $\widehat{\mathcal{H}}_{\text{RPA}}$  с перенормированными константами, которые определяются функцией Ландау. Таким образом, пертурбативное приближение случайных фаз и феноменологическая теория ферми-жидкости прекрасно дополняют друг друга.

*Литература:* [1], §§ 2, 18-22; [6], §§ 15-20, 85

## 8.4. Задачи 43 ÷ 49

**Задача 43.** [*классификация возбуждений ферми-жидкости*] Рассмотрим двумерную ферми-жидкость с модельной функцией Ландау, отличной от нуля только в  $s$ -канале. Взаимодействие квазичастиц в этом случае есть  $F(\mathbf{n} - \mathbf{n}') = F_0$ . Ферми-поверхность представляет собой окружность, параметризуемую углом  $-\pi \leq \theta \leq \pi$ . Отклонение функции распределения квазичастиц от равновесия описывается функцией  $u(\theta)$ . Удобно разложить ее по фурье-гармоникам  $u(\theta) = \sum_m e^{im\theta} u_m$  и записать кинетическое уравнение (8.7) в виде

$$\omega u_m = \frac{1}{2} k v_F (\tilde{u}_{m+1} + \tilde{u}_{m-1}), \text{ где } \tilde{u}_m = \begin{cases} u_m, & \text{при } m \neq 0; \\ (1 + F_0) u_0, & \text{при } m = 0. \end{cases} \quad (8.27)$$

Полную систему решений этого уравнения можно построить, воспользовавшись методами теории рассеяния. Действительно, уравнение (8.27) трансляционно инвариантно по отношению к сдвигам  $m \rightarrow m \pm 1$  всюду, за исключением  $m = 0$ . Поэтому можно искать решения в виде  $u_m = A^\pm e^{i\alpha m}$  отдельно при положительных и отрицательных  $m$ , а затем шить эти выражения при  $m = 0$ .

Покажите, что при любом вещественном  $0 < \alpha < \pi$  имеется два независимых решения указанного вида, описывающие квазичастичные возбуждения с  $\theta = \pm\alpha$ . Покажите, что кроме этого при  $F_0 > 0$  имеется одно решение  $u_m$  с комплексным  $\alpha$ , затухающее при  $m \rightarrow \pm\infty$ . Это решение описывает коллективную нуль-звуковую моду. Квазичастичные решения характеризуются частотами  $|\omega| < k v_F$ , а частота коллективной моды лежит за пределами квазичастичного континуума:  $\omega(k) > k v_F$ .

Можно заметить аналогию с задачей о спектре оператора Шредингера для потенциала, убывающего на бесконечности. В общем случае спектр этого оператора содержит непрерывную и дискретную компоненты. Первая соответствует состояниям рассеяния, а вторая — локализованным состояниям.

**Задача 44.** [*плазменные колебания*] Рассмотрим диаграммы на рис. 8.3 при конечной передаваемой частоте  $\omega$  и импульсе  $\mathbf{k}$ . Говорят, что сумма диаграмм на рис. 8.3 описывает эффект *динамической экранировки* затравочного взаимодействия  $V_{\mathbf{k}}$ , изображенного волнистой линией. Закон дисперсии коллективных возбуждений  $\omega(\mathbf{k})$  опре-

деляется полюсами заэкранированного взаимодействия.

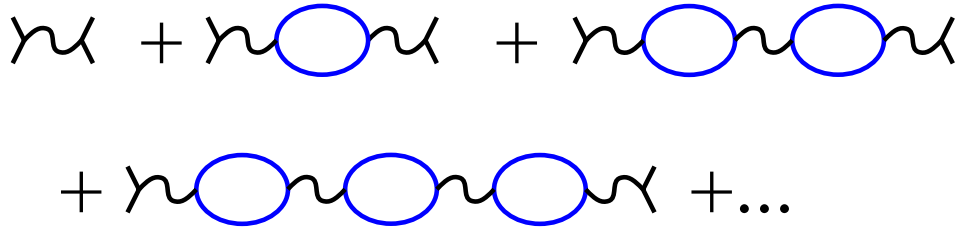


Рис. 8.3

а) Найдите поляризационный оператор  $\Pi(\omega, \mathbf{k})$  при  $|\mathbf{k}| \ll p_0$ ,  $\omega \ll E_F$ . Считая затравочное взаимодействие кулоновским,  $V_{\mathbf{k}} = 4\pi e^2/k^2$ , просуммируйте ряд и получите заэкранированное взаимодействие  $V_{\omega, \mathbf{k}}$ . Покажите, что в этом приближении закон дисперсии плазменных волн  $\omega(\mathbf{k})$  дается соотношением (8.14), полученным из кинетического уравнения ферми-жидкости. Определите поведение  $\omega(\mathbf{k})$  при малых и больших  $\mathbf{k}$ .

б) [точка окончания спектра] Оказывается, что закон дисперсии плазменных волн заканчивается при некотором  $k_{\max}$ , вливаясь в континуум квазичастичных возбуждений. Чтобы исследовать этот эффект с помощью диаграмм, показанных на рис. 8.3, необходимо найти поляризационный оператор более точно, чем это было сделано в части а).

Найдите поляризационный оператор при произвольных  $\omega$  и  $\mathbf{k}$ . Решая уравнение  $V_{\mathbf{k}}\Pi(\omega, \mathbf{k}) = 1$ , определите точку окончания спектра  $k_{\max}$ ,  $\omega_{\max}$ .

в) Убедитесь, что уравнение для частоты плазменных волн  $\omega(\mathbf{k})$  совпадает с соотношением (8.26), полученным в результате диагонализации гамильтониана  $\mathcal{H}_{\text{RPA}}$  электрон-дырочных пар.

**Задача 45.** [кулоновское экранирование]

а) Электроны в металле экранируют любой внешний электростатический потенциал. Этот эффект можно изучить, рассмотрев диаграммный ряд, показанный на рис. 8.3. Просуммируйте этот ряд в статическом пределе  $k \gg \omega/v_F$ , считая также, что  $k \ll p_0$ . Получите формулу Дебая для экранированного кулоновского взаимодействия:

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{e^{-\kappa|\mathbf{r}|}}{|\mathbf{r}|}, \quad \text{где} \quad \kappa^2 = 4\pi e^2\nu. \quad (8.28)$$

Разумеется, экранировка кулоновского взаимодействия в заряженной системе есть чисто классический эффект, возникающий из-за дальнего действия потенциала  $1/r$ . Для иллюстрации этого обстоятельства, напомним, как решается задача об экранировании в классической плазме.

Внесем в плазму статический заряд  $\rho_0(\mathbf{r})$ . Возникающий при этом потенциал удовлетворяет уравнению Пуассона  $\nabla^2\Phi(\mathbf{r}) = -4\pi(\delta\rho(\mathbf{r}) + \rho_0(\mathbf{r}))$ , где  $\delta\rho(\mathbf{r})$  — плотность экранирующего заряда, связанная с потенциалом формулой Больцмана:  $\delta\rho(\mathbf{r}) = en(e^{-e\Phi(\mathbf{r})/T} - 1)$ . Получившуюся систему уравнений Пуассона–Больцмана нетрудно линеаризовать:

$$\nabla^2\Phi(\mathbf{r}) - \kappa^2\Phi(\mathbf{r}) = -4\pi\rho_0(\mathbf{r}), \quad \text{где} \quad \kappa^2 = 4\pi e^2n/T. \quad (8.29)$$



Следовательно, экранированный потенциал точечного заряда дается таким же выражением (8.28), как и при  $T = 0$ . Отличие состоит только в величине длины экранирования  $\kappa^{-1}$ .

Другое явление, имеющее место не только в ферми-жидкости, но и в классической плазме, — это плазменные колебания.

б) Поучительно решить эту задачу другим способом, используя гамильтониан для электрон-дырочных возбуждений (8.21), выведенный в разделе 8.3. Рассмотрим внешнее поле, взаимодействующее с электронной плотностью. Используя представление (8.16) для оператора плотности, запишем взаимодействие электронов с внешним полем  $V^{(ext)}(\mathbf{r})$  так:

$$\widehat{\mathcal{H}}_{\text{ext}} = \sum_{\mathbf{k}} \left( V_{-\mathbf{k}}^{(ext)} \sum_{\mathbf{p} \in R_{\mathbf{k}}} (c_{\mathbf{p},\mathbf{k}} + c_{-\mathbf{p},-\mathbf{k}}^+) \right) \quad (8.30)$$

Это выражение линейно по бозе-операторам  $c_{\mathbf{p},\mathbf{k}}$ , а гамильтониан (8.21) — квадратичен. Поэтому можно найти отклик плотности на внешнее поле, спроектировав возмущение (8.30) на нормальные моды системы осцилляторов, найдя отклик каждой из этих мод, а затем просуммировав по всем модам. Найдите таким способом отклик электронной плотности на кулоновский потенциал и покажите, что результирующий заэкранированный потенциал совпадает с (8.29).

**Задача 46.** [*парамагнитная восприимчивость*] Рассмотрим ферми-жидкость со спином  $1/2$  и контактным взаимодействием между частицами:  $V(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = g\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ . К системе приложено однородное внешнее магнитное поле  $B$ . Будем считать, что фермионы незаряжены, так что поле действует только на спин. В этом случае ферми-жидкость описывается гамильтонианом (8.1), к которому добавлен член

$$\mathcal{H}_B = \omega_B \sum_{\mathbf{p}} (a_{\mathbf{p},\uparrow}^+ a_{\mathbf{p},\uparrow} - a_{\mathbf{p},\downarrow}^+ a_{\mathbf{p},\downarrow}) , \quad (8.31)$$

где  $\omega_B = \mu B$  — зеемановская энергия. Поскольку энергии состояний со спином вверх и вниз отличаются на  $2\omega_B$ , основное состояние системы описывается двумя ферми-сферами, имеющими разные радиусы  $p_{0,\downarrow}$  и  $p_{0,\uparrow}$ . В отсутствии взаимодействия радиусы ферми-сфер даются соотношениями  $p_{0,\downarrow/\uparrow}^2/2m = E_F \pm \omega_B$ .

а) [*метод среднего поля*] Найдите функции Грина  $G_{\uparrow}(\varepsilon, \mathbf{p})$  и  $G_{\downarrow}(\varepsilon, \mathbf{p})$ . Для этого вычислите собственно-энергетическую часть в низшем порядке по взаимодействию  $g$ , рассмотрев два вклада, прямой и обменный, показанные на рис. 8.4.

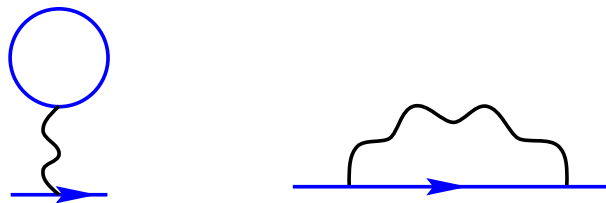


Рис. 8.4

Определите плотности частиц  $n_{\uparrow}$  и  $n_{\downarrow}$ . Рассмотрите поляризацию  $n_{\downarrow} - n_{\uparrow}$  в слабом

поле  $\mu B \ll E_F$  и покажите, что парамагнитная восприимчивость есть

$$\chi = \frac{\chi_0}{1 - g\nu_0} \quad (8.32)$$

где  $\chi_0 = \mu^2\nu$  — восприимчивость идеального ферми-газа (см. задачу 24). Знаменатель  $1 - g\nu_0$  в (8.32) описывает так называемое обменное усиление восприимчивости, возникающее из-за взаимодействия.

б) [спиновая лестница] Поучительно получить восприимчивость (8.32) другим способом, не рассматривая изменение основного состояния в статическом внешнем поле. Вместо этого можно найти восприимчивость непосредственно, вычисляя линейный отклик спиновой поляризации на слабое внешнее поле на фоне неполяризованного основного состояния.

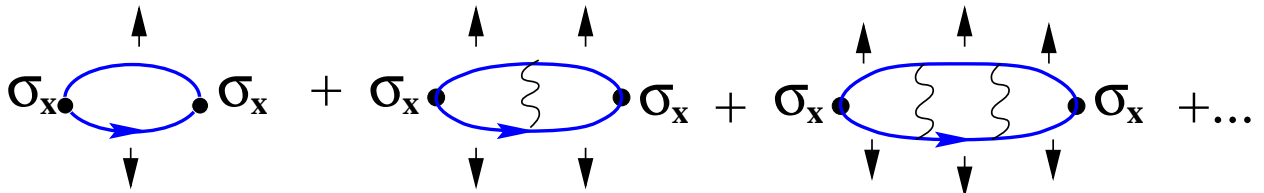


Рис. 8.5

Покажите, что при суммировании лестничных диаграмм, показанных на рис. 8.5, воспроизводится результат (8.32). Вычисление удобно проводить считая, что возмущающее поле направлено вдоль оси  $x$  и используя гриновские функции из части а), то есть проквантовав  $z$ -проекцию спина<sup>4</sup>. Интерпретируйте расходимость восприимчивости (8.32) при  $g\nu_0 \rightarrow 1$ .

**Задача 47.** [спиновые волны] В ферми газе, находящемся во внешнем магнитном поле (см. задачу 46) можно наблюдать парамагнитный резонанс. Для этого прикладывают слабое переменное поле в плоскости перпендикулярной постоянному полю, и выбирают частоту  $\omega$  переменного поля так, чтобы  $\omega$  равнялось зеемановской энергии  $2\omega_B$ , требуемой для переворота спина.

а) [теорема Лармора] Найдите поперечную восприимчивость  $\chi_{\perp}(\omega, \mathbf{k})$ , суммируя лестничный ряд, изображенный на рис. 8.5. Считайте переменное поле пространственно однородным, т. е. передаваемый импульс  $\mathbf{k} = 0$ . Используйте функции Грина, найденные в задаче 46 а). Покажите, что поперечная восприимчивость имеет полюс при  $\omega = 2\omega_B$ , независимо от величины взаимодействия  $g$ .

Покажите, что этот результат оказывается справедливым не только для точечного, а для произвольного взаимодействия между частицами (8.1), независимого от спинов. Общее утверждение об отсутствии сдвига частоты парамагнитного резонанса вследствие межэлектронного взаимодействия называется теоремой Лармора.

Аналогичное утверждение, известное под названием теоремы Кона, имеет место для циклотронного резонанса. Независимо от величины взаимодействия в гамильтониане (8.1), частота циклотронного

<sup>4</sup>При ином выборе направления возмущающего поля относительно координатных осей необходимо рассматривать диаграммы, в которых спиновый индекс может меняться от одной ступени лестницы к следующей. Ответ при этом, разумеется, получается такой же.

резонанса в однородном поле  $V$  есть  $\omega_c = eV/mc$ , где  $m$  — истинная (а не эффективная!) масса электрона.

б) [закон дисперсии спиновых волн] Полюса двухчастичных функций Грина связаны с коллективными модами. Полюс в поперечной восприимчивости  $\chi_{\perp}(\omega, \mathbf{k})$  соответствует *спиновым волнам* — специфической коллективной моде, возникающей в спин-поляризованной ферми-жидкости.

Найдите закон дисперсии спиновых волн. Для этого просуммируйте диаграммный ряд, показанный на рис. 8.5, при конечных  $\omega$  и  $\mathbf{k}$ . Рассмотрите полюс  $\chi_{\perp}(\omega, \mathbf{k})$ , даваемый  $\omega = 2\omega_B$  при  $\mathbf{k} = 0$ .

**Задача 48.** [энергия взаимодействия электронов в металле] При высокой электронной плотности металл является почти идеальным ферми-газом. Эффекты взаимодействия малы, и их можно вычислять, разлагая интересующие величины в ряд по степеням  $e^2/\hbar v_F$ .

а) [обменная энергия] Поправки к энергии системы первого порядка по взаимодействию даются двумя диаграммами, показанными на рис. 8.6.

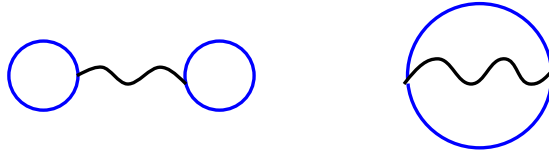


Рис. 8.6

Первый вклад, называемый энергией Хартри, хотя формально и расходится, на самом деле в данном случае полностью компенсируется взаимодействием с положительным фоном и вклада не дает. Второй же вклад, называемый обменной энергией, или энергией Фока, отличен от нуля. Вычислите его и покажите, что обменная энергия отрицательна и зависит от плотности электронов  $n$ , как  $-e^2 n^{4/3}$ .

б) [члены второго порядка] Во втором порядке по взаимодействию есть два существенных вклада:

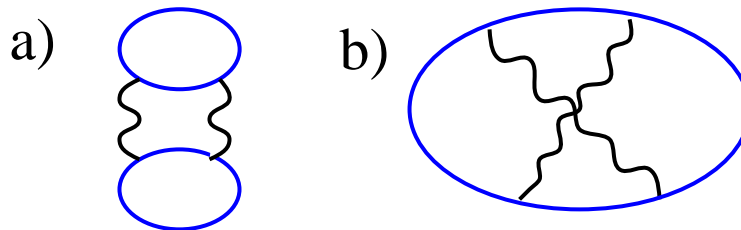


Рис. 8.7

Остальные графики второго порядка сокращаются благодаря компенсирующему фону, подобно первому графику на рис. 8.6.

Покажите, что сумма вкладов, изображенных на рис. 8.7, есть

$$\sum_{\mathbf{q}} \sum_{\mathbf{k} \in R_{\mathbf{q}}, \mathbf{k}' \in R_{\mathbf{q}}} \frac{V_{\mathbf{q}} [2V_{\mathbf{q}} - V_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}]}{\xi_{\mathbf{k}} + \xi_{\mathbf{k}'+\mathbf{q}} - \xi_{\mathbf{k}+\mathbf{q}} - \xi_{\mathbf{k}'}} , \quad (8.33)$$

где  $\xi_{\mathbf{p}} = \mathbf{p}^2/2m - E_F$ . Первое и второе слагаемое в квадратных скобках соответствует диаграммам *a)* и *b)* на рис. 8.7.)

Покажите, что первый вклад расходится логарифмически на малых  $\mathbf{q}$ , а второй конечен. Интерпретируйте найденную расходимость.

**Задача 49. а)** [*корреляционная энергия*<sup>5</sup>] Как мы убедились в задаче 48, начиная со второго порядка, формальный ряд теории возмущений по  $e^2/\hbar v_F$  для энергии кулоновского взаимодействия в металле содержит расходящиеся члены. Общий порядок действий в подобных случаях — найти наиболее сильно расходящиеся графики в каждом порядке теории возмущений и просуммировать их. Покажите, что в данном случае последовательность наиболее сингулярных графиков имеет вид

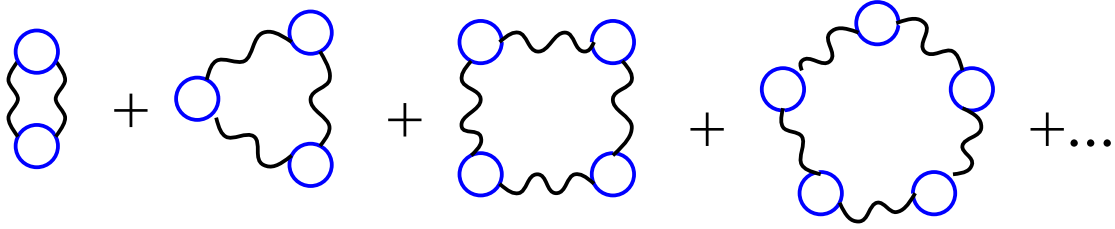


Рис. 8.8

Вычислите сумму этих графиков. Покажите, что с логарифмической точностью по  $e^2/\hbar v_F$  ответ можно получить, просто ужирнив в графике *a)* на рис. 8.7 одну из линий взаимодействия, т. е. заменив исходное кулоновское взаимодействие на заэкранированное взаимодействие  $V_{\mathbf{k},\omega}$ , рассмотренное в задаче 44 (см. рис. 8.3).

**б)** Эту задачу можно решить и другим способом, воспользовавшись гамильтонианом электрон-дырочных пар (8.21), квадратичным по бозе-операторам  $c_{\mathbf{p},\mathbf{k}}$ . Как обсуждалось в разделе (8.3), этот гамильтониан с помощью канонического преобразования может быть представлен в виде суммы невзаимодействующих осцилляторов. Интересующая нас часть энергии системы может быть представлена как суммарная энергия нулевых колебаний всех осцилляторов.

Вклад взаимодействия в энергию системы может быть записан в виде

$$\Delta E = \sum_{\alpha} \frac{1}{2} \hbar \omega_{\alpha} - \sum_{\mathbf{k}; \mathbf{p} \in R_{\mathbf{k}}} \frac{1}{2} \hbar \omega_{\mathbf{p},\mathbf{k}}, \quad (8.34)$$

где  $\omega_{\mathbf{p},\mathbf{k}}$  — частоты нормальных колебаний в невзаимодействующей системе, а  $\omega_{\alpha}$  — частоты колебаний во взаимодействующей системе. Найдите энергию взаимодействия электронов (8.34) и покажите, что результат совпадает с корреляционной энергией, найденной в части *a)*.

**в)** [*корреляционная энергия классической плазмы*] Рассмотрим предел высокой температуры  $T \gg E_F$ . Вычислите корреляционную добавку к термодинамическому потенциалу  $\Omega_{\text{корр}}$ . Ответ легко получить из графиков рис. 8.8, оставив один член с  $\omega_n = 0$  из всей мацубаровской суммы (см. [1], §22; [6], §85).

<sup>5</sup>Кольцевые диаграммы для корреляционной энергии были впервые рассмотрены в работе: M.Gell-Mann and K.A. Brueckner, Phys. Rev., **106**, 364 (1957).

## 8.5. Решения

**Решение 43.** Уравнение (8.27) инвариантно относительно замены  $m \rightarrow -m$ , поэтому решения можно искать в виде четных и нечетных функций:

$$u_m^{odd} = \sin \alpha m, \quad u_m^{even} = \begin{cases} \cos(\alpha m + \lambda) & m > 0 \\ \cos(\alpha m - \lambda) & m < 0 \\ u_0 & m = 0 \end{cases} \quad (8.35)$$

Подставляя выражения (8.35) в уравнения (8.27) при  $|m| > 1$ , находим  $\omega = kv_F \cos \alpha$ . При этом нечетное решение  $u_m^{odd}$  удовлетворяет (8.27) автоматически при всех  $m$ . Четное же решение, если подставить его в (8.27) при  $m = 0, 1$ , дает

$$\begin{aligned} \omega u_0 &= kv_F \cos(\alpha + \lambda); \\ \omega \cos(\alpha + \lambda) &= \frac{1}{2} kv_F ((1 + F_0)u_0 + \cos(2\alpha + \lambda)). \end{aligned}$$

Решая эти уравнения совместно с соотношением  $\omega = kv_F \cos \alpha$ , находим

$$\tan \lambda \tan \alpha = \frac{F_0}{1 + F_0}, \quad u_0 = \frac{\cos \lambda}{1 + F_0}. \quad (8.36)$$

Угловая зависимость  $u^{even}(\theta)$  и  $u^{odd}(\theta)$  оказывается довольно интересной. Функция  $u^{odd}$  есть просто суперпозиция двух свободных одночастичных состояний:

$$u^{odd}(\theta) = \frac{i}{2} (\delta(\theta - \alpha) - \delta(\theta + \alpha)). \quad (8.37)$$

Функция же  $u^{even}(\theta)$  выглядит более сложно. Она имеет при  $\theta = \pm \alpha$  как  $\delta$ -функциональные, так и полюсные особенности, в соответствии с (8.9).

Решение, описывающее коллективную моду, будем искать в виде

$$u_m = \begin{cases} e^{-\alpha m} & m > 0 \\ e^{\alpha m} & m < 0 \\ u_0 & m = 0 \end{cases} \quad (8.38)$$

Уравнение (8.27) удовлетворяется при  $|m| > 1$ , если  $\omega = kv_F \operatorname{ch} \alpha$ , а при  $m = 0, 1$  дает систему уравнений для  $\alpha$  и  $u_0$ . Решая их, находим

$$u_0 = \frac{1}{1 + F_0}, \quad e^{2\alpha} = 1 + 2F_0. \quad (8.39)$$

Таким образом, скорость нуль-звуковой моды есть

$$s = \omega/k = \frac{v_F}{2} \left( (1 + 2F_0)^{1/2} + (1 + 2F_0)^{-1/2} \right) \quad (8.40)$$

Выпишем явно угловую зависимость нуль-звуковых колебаний:

$$u(\theta) = -\frac{F_0}{1 + F_0} + \frac{(\omega^2 - k^2 v_F^2)^{1/2}}{\omega - kv_F \cos \theta} \quad (8.41)$$

Качественная картина такова. При  $F_0 \ll 1$  в нуль-звуковых колебаниях принимает участие малая область ферми-поверхности с  $\theta \sim F_0$ . А при  $F_0 \gg 1$  вся ферми-поверхность колеблется как целое:  $u(\theta) \sim \cos \theta$ .

**Решение 44.** Заэкранированное взаимодействие  $V_{\omega, \mathbf{k}}$  дается совокупностью диаграмм, показанных на рис. 8.3. Этот ряд суммируется, как геометрическая прогрессия:

$$V_{\omega, \mathbf{k}} = V_{\mathbf{k}} + V_{\mathbf{k}}^2 \Pi(\omega, \mathbf{k}) + V_{\mathbf{k}}^3 \Pi^2(\omega, \mathbf{k}) + \dots = \frac{V_{\mathbf{k}}}{1 - V_{\mathbf{k}} \Pi(\omega, \mathbf{k})} \quad (8.42)$$

Поляризационный оператор есть

$$\Pi(\omega, \mathbf{k}) = 2i \int G(\varepsilon_-, \mathbf{p}_-) G(\varepsilon_+, \mathbf{p}_+) \frac{d^3 p d\varepsilon}{(2\pi\hbar)^4}, \quad (8.43)$$

где  $\varepsilon_{\pm} = \varepsilon \pm \omega/2$ ,  $\mathbf{p}_{\pm} = \mathbf{p} \pm \mathbf{k}/2$ , а множитель два возникает при суммировании по спинам.

Интегрируя по частоте  $\varepsilon$ , находим<sup>6</sup>

$$\Pi(\omega, \mathbf{k}) = 2 \int \frac{n(\mathbf{p}_-) - n(\mathbf{p}_+)}{\omega - \xi(\mathbf{p}_+) + \xi(\mathbf{p}_-)} \frac{d^3 p}{(2\pi\hbar)^3}, \quad (8.44)$$

где  $n(\mathbf{p})$  — распределение Ферми (ср. с выводом (7.87)).

**Решение 44 а)** Рассмотрим случай малых  $|\mathbf{k}| \ll p_0$ . Приближенно можно записать

$$n(\mathbf{p}_-) - n(\mathbf{p}_+) = k \cos \theta \delta(|\mathbf{p}| - p_0), \quad (8.45)$$

где  $\theta$  — угол между векторами  $\mathbf{p}$  и  $\mathbf{k}$ . Из-за  $\delta$ -функции интеграл в (8.44) оказывается ограничен на поверхность ферми-сферы:

$$\Pi(\omega, \mathbf{k}) = 2\nu_0 \int_0^{\pi} \frac{k v_F \cos \theta d \cos \theta}{\omega - k v_F \cos \theta} \quad (8.46)$$

Интегрируя по  $\theta$ , находим

$$\Pi(\omega, \mathbf{k}) = 2\nu_0 \left( \frac{s}{2} \ln \frac{s+1}{s-1} - 1 \right), \quad (8.47)$$

где  $s = \omega/kv_F$ . Мы убеждаемся, что уравнение  $V_{\mathbf{k}} \Pi(\omega, \mathbf{k}) = 1$ , определяющее полюс заэкранированного взаимодействия  $V_{\omega, \mathbf{k}}$ , тождественно соотношению (8.14), выведенному из кинетического уравнения ферми-жидкости.

Закон дисперсии плазмона при малых  $\mathbf{k}$  можно получить, разложив выражение (8.47) по  $1/s$ :

$$\Pi(\omega, \mathbf{k}) = 2\nu_0 \left( \frac{1}{3s^2} + \frac{1}{5s^4} + \dots \right). \quad (8.48)$$

<sup>6</sup>Здесь и далее подразумевается, что частота в поляризационном операторе  $\Pi(\omega, \mathbf{k})$  имеет бесконечно малую мнимую часть:  $\omega + i0 \operatorname{sign} \omega$ . В этом случае  $\Pi(\omega, \mathbf{k})$  имеет аналитические свойства причинной двухчастичной функции Грина.

Тогда уравнение  $V_{\mathbf{k}}\Pi(\omega, \mathbf{k}) = 1$  принимает вид

$$\frac{\omega_0^2}{\omega^2} \left( 1 + \frac{3}{5} \frac{k^2 v_F^2}{\omega^2} \right) = 1, \quad (8.49)$$

где  $\omega_0^2 = 4\pi n e^2 / m$  ( $n = p_0^3 / 3\pi^2$  — плотность частиц). Следовательно, закон дисперсии при малых  $\mathbf{k}$  есть

$$\omega^2(\mathbf{k}) = \omega_0^2 + \frac{3}{5} \mathbf{k}^2 v_F^2 + O\left((k v_F / \omega_0)^4\right). \quad (8.50)$$

Закон дисперсии при больших  $\mathbf{k}$  можно определить, заметив, что выражение (8.47) стремится к бесконечности при  $s \rightarrow 1$ . Поэтому уравнение  $V_{\mathbf{k}}\Pi(s) = 1$  имеет решение при произвольно большом  $\mathbf{k}$ , причем  $s \rightarrow 1$  при  $\mathbf{k} \rightarrow \infty$ . Это означает, что  $\omega(\mathbf{k})$  приближается к  $v_F k$  при больших  $k$ , все время оставаясь выше границы квазичастичного континуума  $\omega(k) = v_F k$ .

**Решение 44 б)** Как мы сейчас покажем, на самом деле закон дисперсии плазменных волн имеет точку окончания при некотором  $k_{\max}$ , где происходит слияние с квазичастичным континуумом. Дело в том, что поляризационный оператор (8.44) на самом деле остается конечным на границе континуума. Расходимость же  $\Pi(s \rightarrow 1) \rightarrow \infty$ , полученная в части а), есть следствие принятого приближения (8.45). Конечность поляризационного оператора приводит к тому, что уравнение  $V_{\mathbf{k}}\Pi(\omega, \mathbf{k}) = 1$  не имеет решений за пределами квазичастичного континуума при достаточно больших  $|\mathbf{k}|$ .

Найдем  $\Pi(\omega, \mathbf{k})$  точно, не используя приближение (8.45). Для этого перепишем выражение (8.44) в виде

$$\Pi(\omega, \mathbf{k}) = 2 \int \left( \frac{n(\mathbf{p})}{\omega - \mathbf{k}^2/2m - \mathbf{k}\mathbf{v}} - \frac{n(\mathbf{p})}{\omega + \mathbf{k}^2/2m - \mathbf{k}\mathbf{v}} \right) \frac{d^3 p}{(2\pi\hbar)^3}, \quad (8.51)$$

где  $\mathbf{v} = \mathbf{p}/m$ . В этом выражении удобно сначала проинтегрировать по компонентам  $\mathbf{p}$  перпендикулярным вектору  $\mathbf{k}$ . Получается

$$\Pi(\omega, \mathbf{k}) = 2 \int_{-p_0}^{p_0} \left( \frac{\pi(p_0^2 - p_x^2)}{\omega - k^2/2m - k p_x/m} - \frac{\pi(p_0^2 - p_x^2)}{\omega + k^2/2m - k p_x/m} \right) \frac{d p_x}{(2\pi\hbar)^3}, \quad (8.52)$$

где  $p_x$  есть компонента  $\mathbf{p}$  вдоль  $\mathbf{k}$ . Оставшееся интегрирование по  $p_x$  выполняется элементарно. Результат удобно записать в виде

$$\Pi(\omega, \mathbf{k}) = \frac{\nu}{8a} (F(s - a) - F(s + a)), \quad a = \frac{k}{2p_0}, \quad s = \frac{\omega}{v_F k}, \quad (8.53)$$

где

$$F(u) = \int_{-1}^1 \frac{1 - x^2}{u - x} dx = 2u + (1 - u^2) \ln \left( \frac{u + 1}{u - 1} \right). \quad (8.54)$$

Выражения (8.53), (8.54) определяют точный поляризационный оператор.

Проверим, что при  $k \ll p_0$  получается выражение (8.47), найденное выше. Действительно, при  $a = k/2p_0 \rightarrow 0$  выражение (8.53) упрощается:

$$\Pi(\omega, \mathbf{k}) = -\frac{\nu}{4} F'(s) = -\frac{\nu}{4} \left( 4 - 2s \ln \left( \frac{s + 1}{s - 1} \right) \right), \quad (8.55)$$

что совпадает с (8.47).

Теперь воспользуемся выражениями (8.53), (8.54) и определим точку окончания спектра плазмонов. Граница квазичастичного континуума есть  $\omega = v_F k + k^2/2m$ . Это условие можно записать как  $s - a = 1$ . Поэтому точка окончания спектра, если таковая имеется, должна удовлетворять уравнению

$$\frac{\nu}{8a} (F(1) - F(1 + 2a)) = \frac{k^2}{4\pi e^2}. \quad (8.56)$$

Это уравнение нетрудно переписать в виде

$$(1 + a) \ln \left( \frac{1 + a}{a} \right) - 1 = \frac{2k^2}{\kappa^2}, \quad (8.57)$$

где  $\kappa^2 = 4\pi e^2 \nu$ . Покажем, что в интервале  $0 < a \leq 1$  у уравнения (8.57) всегда имеется ровно одно решение. Действительно, левая часть (8.57) при  $0 < a < 0.5$  монотонно убывает от  $\infty$  до значения порядка единицы, в то время как правая часть (8.57) монотонно возрастает от 0 до значения порядка  $p_0^2/\kappa^2$ . В то же время  $e^2/\hbar v_F \ll 1$ , поскольку мы занимаемся теорией возмущений в пределе большой плотности. Поэтому  $p_0^2/\kappa^2 \gg 1$ , и значит у уравнения (8.57) имеется корень, причем ровно один.

Из сказанного также следует, что решение лежит в области  $a \ll 1$ . Поэтому уравнение (8.57) можно упростить, отбросив в левой части малые члены. Получаем  $\ln(2p_0/ek) = 2k^2/\kappa^2$ , где  $e = 2.71828\dots$ . С логарифмической точностью решение этого уравнения есть

$$k_{\max} = \kappa \left( \frac{1}{2} \ln \left( \frac{p_0}{\kappa} \right) \right)^{1/2} \quad (8.58)$$

Находим частоту при  $k = k_{\max}$ :

$$\omega_{\max} = v_F k_{\max} = \omega_0 \left( \frac{3}{2} \ln \left( \frac{p_0}{\kappa} \right) \right)^{1/2} \quad (8.59)$$

При  $e^2/\hbar v_F \ll 1$  частота в точке окончания спектра  $\omega_0 \leq \omega_{\max} \ll \varepsilon_F$ .

Подчеркнем еще раз, что ключевым обстоятельством является отсутствие расходимости  $\Pi(\omega, \mathbf{k})$  на границе квазичастичного спектра. Оценить величину поляризационного оператора можно и не вычисляя  $\Pi(\omega = v_F |\mathbf{k}|)$  точно. Достаточно заметить, что ширина пояса, в котором сосредоточена функция  $n(\mathbf{p}_-) - n(\mathbf{p}_+)$  при малых  $\mathbf{k}$  порядка  $|\mathbf{k}|$ . Поэтому  $\delta$ -функция в (8.45) имеет ненулевую «ширину» порядка  $|\mathbf{k}|$ . В результате, при  $s = \omega/v_F k = 1$  логарифмическая расходимость выражения (8.47) обрезается на  $s - 1 \simeq k/p_0$ , и получается  $\Pi(\omega = v_F |\mathbf{k}|) = \nu_0 \ln(p_0/k)$ . Нетрудно видеть, что уравнение  $V_{\mathbf{k}} \Pi = 1$  с логарифмической точностью совпадает с (8.57).

**Решение 44 в)** Рассмотрим теперь коллективные моды, пользуясь представлением осцилляторов электрон-дырочных пар. Гамильтониан  $\mathcal{H}_{\text{RPA}}$ , даваемый суммой (8.23) и (8.24), квадратичен. Поэтому диагонализация производится так же, как в задаче о многомерном классическом осцилляторе. Уравнения на собственные значения имеют вид

$$\omega^2 \phi_{\mathbf{p}, \mathbf{k}} = \omega_{\mathbf{p}, \mathbf{k}}^2 \phi_{\mathbf{p}, \mathbf{k}} + 2\omega_{\mathbf{p}, \mathbf{k}}^{1/2} V_{\mathbf{k}} \left( \sum_{\mathbf{p}' \in R_{\mathbf{k}}} \omega_{\mathbf{p}', \mathbf{k}}^{1/2} \phi_{\mathbf{p}', \mathbf{k}} \right) \quad (8.60)$$



Находим:

$$\phi_{\mathbf{p},\mathbf{k}} = \frac{2\omega_{\mathbf{p},\mathbf{k}}^{1/2}}{\omega^2 - \omega_{\mathbf{p},\mathbf{k}}^2} V_{\mathbf{k}} \left( \sum_{\mathbf{p}' \in R_{\mathbf{k}}} \omega_{\mathbf{p}',\mathbf{k}}^{1/2} \phi_{\mathbf{p}',\mathbf{k}} \right) \quad (8.61)$$

Умножая эти равенства на  $\omega_{\mathbf{p},\mathbf{k}}^{1/2}$  и суммируя по  $\mathbf{k}$ ,  $\mathbf{p}$  и спинам, получаем уравнение самосогласования:

$$1 = 2V_{\mathbf{k}} \sum_{\mathbf{p} \in R_{\mathbf{k}}} \frac{2\omega_{\mathbf{p},\mathbf{k}}}{\omega^2 - \omega_{\mathbf{p},\mathbf{k}}^2}, \quad (8.62)$$

(коэффициент 2 перед  $V_{\mathbf{k}}$  — спиновое вырождение).

Итак, мы убедились в справедливости соотношения (8.26). Проверим теперь, что оно совпадает с  $1 = V_{\mathbf{k}}\Pi(\omega, \mathbf{k})$ . Для этого в выражении (8.44) для поляризационного оператора разделим область интегрирования по  $\mathbf{p}$  на две под-области:  $n(\mathbf{p}_-) > n(\mathbf{p}_+) = 0$  и  $n(\mathbf{p}_-) < n(\mathbf{p}_+) = 1$ . Простым сдвигом  $\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{p} + \mathbf{k}/2$  в первом случае, и  $\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{p} - \mathbf{k}/2$  — во втором, получаем области  $R_{\mathbf{k}}$  и  $R_{-\mathbf{k}}$ . Делая в интеграле по  $R_{-\mathbf{k}}$  замену  $\mathbf{k} \rightarrow -\mathbf{k}$ ,  $\mathbf{p} \rightarrow -\mathbf{p}$ , не меняющую результата, приводим поляризационный оператор (8.44) к виду:

$$\Pi(\omega, \mathbf{k}) = 2 \sum_{\mathbf{p} \in R_{\mathbf{k}}} \left( \frac{1}{\omega - \omega_{\mathbf{p},\mathbf{k}}} - \frac{1}{\omega + \omega_{\mathbf{p},\mathbf{k}}} \right). \quad (8.63)$$

Таким образом, действительно, соотношение  $1 = V_{\mathbf{k}}\Pi(\omega, \mathbf{k})$ , полученное суммированием диаграмм, есть не что иное, как (8.62).

В заключение отметим, что хотя точный поляризационный оператор (8.53), (8.54) и может оказаться полезным в некоторых случаях, обычно бывает совершенно достаточно пользоваться выражением (8.47), соответствующим приближению кинетического уравнения ферми-жидкости.

**Решение 45 а)** Сумма ряда на рис. 8.3 в статическом пределе  $\omega = 0$  равна

$$\Phi(\mathbf{k}) = \frac{V_{\mathbf{k}}}{1 - V_{\mathbf{k}}\Pi(\mathbf{k})}. \quad (8.64)$$

Поляризационный оператор (8.47) при  $\omega = 0$  есть  $\Pi(s = 0) = -\nu$ , а  $V_{\mathbf{k}} = 4\pi e^2/\mathbf{k}^2$ , поэтому

$$\Phi(\mathbf{k}) = \frac{4\pi e^2}{\mathbf{k}^2 + \kappa^2}, \quad (8.65)$$

где  $\kappa^2 = 4\pi e^2\nu$ . Делая преобразование Фурье, получаем искомое выражение (8.28). В справедливости последнего шага легче всего убедиться, не вычисляя фурье-образ непосредственно, а проверяя, что  $(\nabla^2 - \kappa^2)\Phi(\mathbf{r}) = -4\pi e^2\delta^{(3)}(\mathbf{r})$ .

Интересно отметить следующее. Вопреки ожиданиям, потенциал на большом расстоянии от заряда в ферми-газе спадает вовсе не экспоненциально. Дело в том, что вокруг внесенного заряда возникают фриделевские осцилляции плотности наведенного заряда (см. задачи 8,23), амплитуда которых спадает степенным образом, как  $1/r^3$ . Формально это проявляется в том, что поляризационный оператор  $\Pi_{\omega=0}(\mathbf{k})$  имеет слабую особенность при  $|\mathbf{k}| = 2p_0$ . Чтобы ее найти, воспользуемся точным выражением (8.53), (8.54). Получаем

$$\Pi_{\omega=0}(\mathbf{k}) = -\frac{\nu}{4a} \left( 2a - (1 - a^2) \ln \left( \frac{1+a}{1-a} \right) \right), \quad (8.66)$$

где  $a = |\mathbf{k}|/2p_0$ . Особенность при  $a = 1$  и дает главный вклад в потенциал при больших  $\mathbf{r}$ .

Оценим осциллирующую компоненту потенциала, возникающего при возмущении электронной системы внешним потенциалом  $V^{(ext)}(\mathbf{r})$ . Зазранированный потенциал в этом случае дается выражением (8.64) с  $V_{\mathbf{k}}^{(ext)}$  в числителе. Выделяя особенность при  $|\mathbf{k}| = 2p_0$  и делая фурье-преобразование, получаем

$$\Phi_{osc}(\mathbf{r}) \simeq \frac{e^2}{4\pi\hbar v_F} V_{|\mathbf{k}|=2p_0}^{(ext)} \frac{\cos(2p_0|\mathbf{r}|)}{|\mathbf{r}|^3}. \quad (8.67)$$

Отметим, что при  $\kappa \ll p_0$  относительно медленно убывающий фриделевский вклад (8.67) не противоречит экспоненциальной зависимости (8.28). Чтобы в этом убедиться, достаточно усреднить распределение потенциала (8.64) по большому числу осцилляций. Усредненный потенциал спадает экспоненциально, в соответствии с (8.28).

**Решение 45 б)** Рассмотрим задачу об экранировке в ферми-жидкости, пользуясь представлением осцилляторов (8.23), (8.24). Взаимодействие с внешним полем (8.30) линейно по смещениям осцилляторов:

$$\widehat{\mathcal{H}}_{ext} = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}} \sum_{\mathbf{p} \in R_{\mathbf{k}}} V_{-\mathbf{k}}^{(ext)} (2\omega_{\mathbf{p},\mathbf{k}})^{1/2} \phi_{\mathbf{p},\mathbf{k}} + \text{H.c.} \quad (8.68)$$

Нам понадобятся средние смещения осцилляторов, которые нетрудно найти из уравнений

$$\omega_{\mathbf{p},\mathbf{k}}^2 \phi_{\mathbf{p},\mathbf{k}} + (\omega_{\mathbf{p},\mathbf{k}})^{1/2} V_{\mathbf{k}} \sum_{\mathbf{p}' \in R_{\mathbf{k}}} (\omega_{\mathbf{p}',\mathbf{k}})^{1/2} \phi_{\mathbf{p}',\mathbf{k}} = -(2\omega_{\mathbf{p},\mathbf{k}})^{1/2} V_{\mathbf{k}}^{(ext)}. \quad (8.69)$$

Пользуясь выражением (8.16), записываем гармоники плотности

$$\rho_{\mathbf{k}} = \sum_{\mathbf{p} \in R_{\mathbf{k}}} (2\omega_{\mathbf{p},\mathbf{k}})^{1/2} \phi_{\mathbf{p},\mathbf{k}} \quad (8.70)$$

и, решая уравнения (8.69), находим

$$\rho_{\mathbf{k}}(1 - \Pi(\mathbf{k})V_{\mathbf{k}}) = \Pi(\mathbf{k})V_{\mathbf{k}}^{(ext)}, \quad \text{где } \Pi(\mathbf{k}) = - \sum_{\mathbf{p} \in R_{\mathbf{k}}} \frac{4}{\omega_{\mathbf{p},\mathbf{k}}} \quad (8.71)$$

Согласно задаче 44 в),  $\Pi(\mathbf{k})$  есть не что иное, как поляризационный оператор  $\Pi(\omega, \mathbf{k})$  при  $\omega = 0$ . Поэтому зазранированный потенциал

$$V_{\mathbf{k}}^{(tot)} = V_{\mathbf{k}}^{(ext)} + V_{\mathbf{k}}\rho_{\mathbf{k}} = \frac{V_{\mathbf{k}}^{(ext)}}{1 - V_{\mathbf{k}}\Pi(\mathbf{k})} \quad (8.72)$$

совпадает с (8.64).

**Решение 46 а)** В первом порядке по взаимодействию имеется два вклада в собственно-энергетическую часть, показанных на рис. 8.4. В случае короткодействия интегрирование по внутренним частоте и импульсу дают просто плотность частиц, в первой диаграмме  $n_{\uparrow} + n_{\downarrow}$ , а во второй —  $n_{\uparrow}$  или  $n_{\downarrow}$ , в зависимости от спинового индекса

внешней линии. При этом существенно, что знаки первого и второго вкладов противоположны, поскольку во второй диаграмме на рис. 8.4 отсутствует фермионная петля. Поэтому

$$\begin{aligned}\Sigma_{\uparrow} &= g(n_{\uparrow} + n_{\downarrow}) - gn_{\uparrow} = gn_{\downarrow} \\ \Sigma_{\downarrow} &= g(n_{\uparrow} + n_{\downarrow}) - gn_{\downarrow} = gn_{\uparrow}\end{aligned}\quad (8.73)$$

Величина  $\Sigma$  есть сдвиг химпотенциала в результате взаимодействия. То обстоятельство, что  $\Sigma$  для частиц с одной поляризацией спина зависит только от плотности частиц с противоположной поляризацией спина, имеет простой смысл. По принципу Паули фермионы с одинаковым спином никогда не оказываются в одной и той же точке. Поэтому контактное взаимодействие между такими фермионами отсутствует.

Теперь записываем функции Грина:

$$G_{\uparrow}(\varepsilon, \mathbf{p}) = \frac{1}{\varepsilon - \xi(\mathbf{p}) - \omega_B - \Sigma_{\uparrow}}, \quad G_{\downarrow}(\varepsilon, \mathbf{p}) = \frac{1}{\varepsilon - \xi(\mathbf{p}) + \omega_B - \Sigma_{\downarrow}}. \quad (8.74)$$

Эти выражения позволяют найти плотности частиц:

$$n_{\uparrow} = \frac{4\pi p_{0,\uparrow}^3}{3(2\pi\hbar)^3}, \quad n_{\downarrow} = \frac{4\pi p_{0,\downarrow}^3}{3(2\pi\hbar)^3}, \quad (8.75)$$

где

$$\frac{p_{\uparrow}^2}{2m} = E_F - \omega_B - \Sigma_{\uparrow}, \quad \frac{p_{\downarrow}^2}{2m} = E_F + \omega_B - \Sigma_{\downarrow} \quad (8.76)$$

Из этих соотношений нетрудно найти, как меняются плотности  $n_{\uparrow}$  и  $n_{\downarrow}$  при включении слабого поля  $\omega_B \ll E_F$ :

$$\delta n_{\uparrow} = \nu_0(-\omega_B - g \delta n_{\downarrow}), \quad \delta n_{\downarrow} = \nu_0(\omega_B - g \delta n_{\uparrow}). \quad (8.77)$$

Решая систему, находим

$$\delta n_{\downarrow} = -\delta n_{\uparrow} = \frac{\nu_0 \omega_B}{1 - g\nu_0} \quad (8.78)$$

Намагниченность равна  $\mu(\delta n_{\uparrow} - \delta n_{\downarrow})$ . В результате получаем восприимчивость

$$\chi = \frac{2\mu^2 \nu_0}{1 - g\nu_0}, \quad (8.79)$$

что есть требуемый результат (8.32).

**Решение 46 б)** Лестничный ряд, показанный на рис. 8.5, суммируется как геометрическая прогрессия:

$$\chi(\omega, \mathbf{k}) = -2\mu^2 \frac{\Pi(\omega, \mathbf{k})}{1 + g\Pi(\omega, \mathbf{k})} \quad (8.80)$$

Множитель 2 возникает из-за того, что направления поляризации спина в верхней и нижней ноге лестницы можно выбрать двумя различными способами. (Более формально,  $2 = \text{Tr} \sigma_x^2$ .)

Очень существенное отличие ряда (8.80) от ряда (8.42) для экранированного потенциала, рассматривавшегося в задачах 44 и 45, заключается в знаке «+» в знаменателе (8.80). Знак оказывается другим из-за того, что в ряде (8.42) для экранировки  $n$ -ый член содержит  $n-1$  фермионную петлю, что дает множитель  $(-1)^{n-1}$ . В то же время, каждая из диаграмм, изображенных на рис. 8.5, образована всего одной петлей, поэтому дополнительного множителя  $(-1)^n$  не возникает.

В статическом пределе  $k, \omega \rightarrow 0$ ,  $k \gg \omega/v_F$ , поляризационный оператор  $\Pi = -\nu_0$ . (В данном случае суммирование по спинам в  $\Pi$  не производится, поэтому ответ дается плотностью состояний  $\nu_0$  с одной проекцией спина.) Подставляя  $\Pi = -\nu_0$  в (8.80), получаем восприимчивость (8.32).

Расходимость восприимчивости при  $g\nu_0 \rightarrow 1$  означает, что система становится неустойчивой по отношению к спиновым флуктуациям. Эта неустойчивость связана с переходом в ферромагнитное состояние.

Критерий ферромагнитного перехода  $\nu_0 g > 1$  называется *соотношением Стонера*. Оно может быть получено элементарными средствами. Пусть  $n_\uparrow$  и  $n_\downarrow$  — плотности электронов со спинами вверх и вниз соответственно. Тогда средняя плотность спина равна  $m = n_\uparrow - n_\downarrow$ , а полная плотность частиц  $n_0 = n_\uparrow + n_\downarrow$ . В основном состоянии ферми-газа  $n_\uparrow = n_\downarrow = n_0/2$ . Пусть в системе каким-то образом число электронов с спинов вверх превышает число электронов со спином вниз. Энергия такого состояния отличается от энергии основного состояния. Вычислив энергию идеального ферми-газа как функцию его плотности и разложив до второго порядка по отклонению плотности от равновесной, получим

$$\delta E_{\text{free}} = \frac{1}{2\nu_0} (\delta n_\uparrow^2 + \delta n_\downarrow^2) = \frac{m^2}{4\nu_0} \quad (8.81)$$

Теперь вычислим энергию взаимодействия электронов. Поскольку  $V(\mathbf{r}-\mathbf{r}') = g\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$ , то взаимодействуют лишь электроны с противоположно направленными спинами (ибо два электрона с одинаковыми спинами не могут одновременно находиться в одной точке). Поэтому энергия взаимодействия электронов есть  $g n_\uparrow n_\downarrow$ , откуда

$$\delta E_{\text{int}} = g \delta n_\uparrow \delta n_\downarrow = -\frac{g}{4} m^2. \quad (8.82)$$

Таким образом, энергия системы зависит от магнитного момента следующим образом:

$$\delta E_{\text{total}} = \frac{m^2}{4\nu_0} (1 - g\nu_0). \quad (8.83)$$

Теперь видно, что при  $g\nu_0 < 1$  появление ненулевого магнитного момента энергетически невыгодно, а при  $g\nu_0 > 1$  — выгодно. В этом и состоит причина обнаруженной нами неустойчивости.

**Решение 47.** Восприимчивость  $\chi_\perp(\omega, \mathbf{k})$  дается в общем виде диаграммами лестничного ряда, изображенного на рис. 8.5. Сумма этого ряда есть

$$\chi_\perp(\omega, \mathbf{k}) = -2\mu^2 \frac{\Pi_{\uparrow\downarrow}(\omega, \mathbf{k})}{1 + g\Pi_{\uparrow\downarrow}(\omega, \mathbf{k})} \quad (8.84)$$

Это выражение получается точно так же, как (8.80), причем в данном случае поляризационный оператор  $\Pi_{\uparrow\downarrow}(\omega, \mathbf{k})$  нужно найти для состояния, поляризованного внешним полем.

Интересующий нас поляризационный оператор есть

$$\Pi_{\uparrow\downarrow}(\omega, \mathbf{k}) = i \int G_{\uparrow}(\varepsilon_-, \mathbf{p}_-) G_{\downarrow}(\varepsilon_+, \mathbf{p}_+) \frac{d^3 p d\varepsilon}{(2\pi\hbar)^4}, \quad (8.85)$$

где  $\varepsilon_{\pm} = \varepsilon \pm \omega/2$ ,  $\mathbf{p}_{\pm} = \mathbf{p} \pm \mathbf{k}/2$ , а соответствующие функции Грина были найдены в задаче 46 а).

Подставляя в (8.85) выражения (8.74) для  $G_{\uparrow}$  и  $G_{\downarrow}$ , и интегрируя по частоте  $\varepsilon$ , находим

$$\Pi_{\uparrow\downarrow}(\omega, \mathbf{k}) = \int \frac{n_{\downarrow}(\mathbf{p}_-) - n_{\uparrow}(\mathbf{p}_+)}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{v} - 2\omega_B - \Sigma_{\uparrow} + \Sigma_{\downarrow}} \frac{d^3 p}{(2\pi\hbar)^3}, \quad (8.86)$$

где  $n_{\uparrow}(\mathbf{p})$  и  $n_{\downarrow}(\mathbf{p})$  — распределения Ферми для двух поляризаций спина. Величины  $\Sigma_{\uparrow}$  и  $\Sigma_{\downarrow}$  даются выражениями (8.73), как и раньше.

**Решение 47 а)** Пусть  $\mathbf{k} = 0$ . В этом случае подинтегральное выражение в (8.86) зависит от  $\mathbf{p}$  только через  $n_{\uparrow}(\mathbf{p})$  и  $n_{\downarrow}(\mathbf{p})$ . Поэтому интеграл по  $d^3 p$  дает

$$\Pi_{\uparrow\downarrow}(\omega, \mathbf{k}) = \frac{n_{\downarrow} - n_{\uparrow}}{\omega - 2\omega_B - gn_{\downarrow} + gn_{\uparrow}}, \quad (8.87)$$

где  $n_{\uparrow}$  и  $n_{\downarrow}$  — плотности частиц со спином вверх и вниз.

Подставляя (8.87) в (8.84), получаем

$$\chi_{\perp}(\omega)_{\mathbf{k}=0} = 2\mu^2 \frac{\frac{n_{\downarrow} - n_{\uparrow}}{\omega - 2\omega_B - g(n_{\downarrow} - n_{\uparrow})}}{1 + g \frac{n_{\downarrow} - n_{\uparrow}}{\omega - 2\omega_B - g(n_{\downarrow} - n_{\uparrow})}} = 2\mu^2 \frac{n_{\downarrow} - n_{\uparrow}}{\omega - 2\omega_B} \quad (8.88)$$

Таким образом, при  $\mathbf{k} = 0$  поперечная восприимчивость совершенно не зависит от взаимодействия. В частности, резонансная частота  $\omega = 2\omega_B$  остается такой же, как в не взаимодействующей системе.

Нетрудно убедиться в том, что утверждение теоремы Лармора об отсутствии сдвига резонансной частоты справедливо для произвольного взаимодействия, не зависящего от спина. Гамильтониан фермионов в магнитном поле есть сумма (8.1) и (8.31). При этом члены (8.1) коммутируют с оператором полного спина системы  $\hat{s}^i = \int \psi_{\alpha}(\mathbf{r}) \sigma_{\alpha\beta}^i \psi_{\beta}(\mathbf{r}) d^3 r$ , а зеемановский член (8.31) — нет. Поэтому

$$\frac{d\hat{\mathbf{s}}}{dt} = i [\mathcal{H}_{\text{total}}, \hat{\mathbf{s}}] = i [\mathcal{H}_B, \hat{\mathbf{s}}] = -2\mu\mathbf{B} \times \hat{\mathbf{s}} \quad (8.89)$$

То обстоятельство, что свободная прецессия  $\mathbf{s}$  происходит с частотой  $2\omega_B$ , как раз и означает, что при возбуждении внешним переменным полем резонанс имеет место при  $\omega = 2\omega_B$ .

**Решение 47 б)** Рассмотрим теперь  $\chi_{\perp}(\omega, \mathbf{k})$  при  $\mathbf{k} \neq 0$ . Мы хотим найти зависимость положения полюса  $\chi_{\perp} \sim (\omega - \omega(\mathbf{k}))^{-1}$  от  $\mathbf{k}$ . Как станет ясно ниже, интерес

представляют относительно малые  $|\mathbf{k}| \simeq g(n_{\downarrow} - n_{\uparrow})/v_F$ . Поэтому в слабом магнитном поле  $\omega_B \ll E_F$ , когда  $n_{\downarrow} - n_{\uparrow} \ll n_{\text{total}}$ , в числителе (8.86) можно сделать замену:

$$n_{\downarrow}(\mathbf{p}_-) - n_{\uparrow}(\mathbf{p}_+) \longrightarrow \Delta n \delta(|\mathbf{p}|/p_0 - 1). \quad (8.90)$$

где  $\Delta n = n_{\downarrow} - n_{\uparrow}$ . Интеграл по поверхности ферми-сферы легко вычисляется:

$$\Pi_{\uparrow\downarrow}(\omega, \mathbf{k}) = \frac{\Delta n}{2} \int_0^{\pi} \frac{\sin \theta d\theta}{\tilde{\omega} - kv_F \cos \theta} = \frac{\Delta n}{2kv_F} \ln \left( \frac{\tilde{\omega} + kv_F}{\tilde{\omega} - kv_F} \right), \quad (8.91)$$

где  $\tilde{\omega} = \omega - 2\omega_B - g\Delta n$ .

Полос  $\chi_{\perp}(\omega, \mathbf{k})$  определяется уравнением  $g\Pi_{\uparrow\downarrow}(\omega, \mathbf{k}) = -1$ , решение которого в данном случае нетрудно выписать в явной форме:

$$\omega(\mathbf{k}) = 2\omega_B + g\Delta n - kv_F \operatorname{cth} u, \quad u = \frac{kv_F}{g\Delta n}. \quad (8.92)$$

Закон дисперсии спиновых волн (8.92) обладает следующими свойствами. При  $u \ll 1$  частота есть

$$\omega(\mathbf{k}) = 2\omega_B - \frac{\mathbf{k}^2 v_F^2}{3g\Delta n} \quad (8.93)$$

При  $u \gg 1$  выражение (8.92) стремится к  $2\omega_B + g\Delta n - kv_F$ . При этом частота  $\omega(\mathbf{k})$  вещественна для всех  $u$ , т. е. затухание отсутствует.

Описанное поведение при больших  $u$  определяется сингулярностью выражения (8.91) при  $\tilde{\omega} = -kv_F$ . Как мы убедились в задаче 44 б), эта сингулярность есть следствие принятого приближения (8.90), сводящего интегрирование в (8.86) по тонкому трехмерному слою к интегралу по двумерной ферми-поверхности. На самом же деле, поляризационный оператор (8.86) на границе квазичастичного спектра, т. е. при  $\tilde{\omega} = \pm kv_F$ , принимает конечное значение. По тем же причинам, что и в задаче 44 б), логарифмическую сингулярность в (8.91) следует обрезать при  $|\tilde{\omega} \pm kv_F| \sim k^2/2m$ .

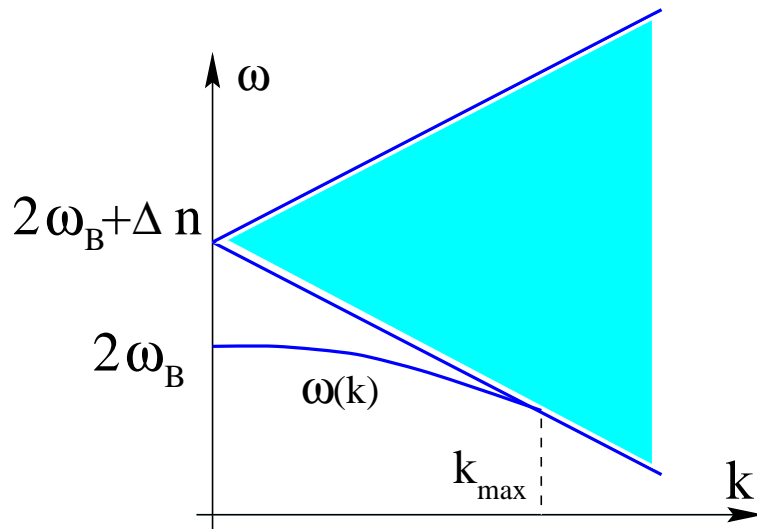


Рис. 8.9

В результате уравнение  $g\Pi_{\uparrow\downarrow}(\omega, \mathbf{k}) = -1$ , дающее закон дисперсии спиновых волн, имеет решение только при  $k$  меньших некоторого  $k_{\max}$ . Точка окончания закона дисперсии  $k_{\max}$  находится из уравнения

$$\frac{g\Delta n}{2kv_F} \ln\left(\frac{p_0}{k}\right) = 1. \quad (8.94)$$

С логарифмической точностью  $k_{\max} = (g\Delta n/2v_F) \ln(E_F/g\Delta n)$ . При  $k > k_{\max}$  частота спиновых волн оказывается внутри квазичастичного континуума  $|\tilde{\omega}| < v_F|k|$ . (см. рис. 8.9). Спиновые волны с такими  $k$  характеризуются конечным временем затухания, т. е. комплексной частотой  $\omega(\mathbf{k})$ .

**Решение 48 а)** Вычислим обменную энергию<sup>7</sup>, даваемую второй диаграммой на рис. 8.6. Соответствующее выражение для плотности термодинамического потенциала на единицу объема в мацубаровской технике равно

$$\Delta\Omega_{\text{обм}} = -\frac{1}{2}T^2 \lim_{\tau_{1,2} \rightarrow +0} \sum_{\substack{\varepsilon_1, \varepsilon_2 \\ p_1, p_2}} G(i\varepsilon_1, \mathbf{p}_1)G(i\varepsilon_2, \mathbf{p}_2) V_{\mathbf{p}_1-\mathbf{p}_2} e^{i\varepsilon_1\tau_1+i\varepsilon_2\tau_2}, \quad (8.95)$$

где  $G(i\varepsilon, \mathbf{p}) = 1/(i\varepsilon - \xi_{\mathbf{p}})$  — функция Грина электронов, а  $V_{\mathbf{k}} = 4\pi e^2/\mathbf{k}^2$  — фурье-компонента потенциала взаимодействия.

Отметим, что при выписывании выражения (8.95) имеется следующая тонкость. Поскольку взаимодействие в (8.1) считается мгновенным, в аналитических выражениях для диаграмм на рис. 8.6 возникает функция Грина, взятая при совпадающих временах. Но  $G(\mathbf{r}, \tau)$  имеет скачок при  $\tau = 0$ , и из-за этого выражения оказываются формально неопределенными. Эта трудность обычно преодолевается следующим образом. Оператор взаимодействия (8.1) содержит нормально упорядоченное произведение  $\psi$ -операторов, в котором  $\hat{\psi}$  всегда стоит правее  $\hat{\psi}^+$ , функцию Грина с совпадающими временами следует заменять на

$$G(\mathbf{r}, 0) \rightarrow \lim_{\tau \rightarrow +0} G(\mathbf{r}, -\tau). \quad (8.96)$$

Это соглашение и использовано в (8.95).

Суммирование по  $\varepsilon_1$  и  $\varepsilon_2$  в (8.95) оказываются независимыми. Воспользовавшись выражением

$$T \lim_{\tau \rightarrow +0} \sum_{\varepsilon_1} G(i\varepsilon_1, \mathbf{p}) e^{i\varepsilon_1\tau} = n_F(\xi_{\mathbf{p}}) \quad (8.97)$$

(см. формулу (7.60) в решении задачи 35), получаем

$$\Delta\Omega_{\text{обм}} = - \int \frac{d^3 p_1 d^3 p_2}{(2\pi)^6} n_F(\xi_{\mathbf{p}_1}) n_F(\xi_{\mathbf{p}_2}) V_{\mathbf{p}_1-\mathbf{p}_2} \quad (8.98)$$

<sup>7</sup>Нетрудно убедиться в том, что энергия Хартри, даваемая первой диаграммой на рис. 8.6, в модели желе точно сокращается при учете взаимодействия с однородным компенсирующим положительным фоновым зарядом. Мы не будем на этом останавливаться.

(множитель  $1/2$  исчез при суммировании по спину).

Теперь удобно перейти в координатное представление. Подставляя в (8.98)  $V_{\mathbf{p}_1-\mathbf{p}_2} = \int V(\mathbf{r}) e^{i(\mathbf{p}_1-\mathbf{p}_2)\mathbf{r}} d^3r$ , получаем

$$\Delta\Omega_{\text{обм}} = - \int d^3r V(\mathbf{r}) |I(\mathbf{r})|^2, \quad \text{где } I(\mathbf{r}) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} n_F(\xi_{\mathbf{p}}) e^{i\mathbf{p}\mathbf{r}}. \quad (8.99)$$

Рассмотрим случай  $T = 0$ . Интеграл  $I(\mathbf{r})$  легко вычисляется:

$$I(\mathbf{r}) = \int_{|\mathbf{p}| < p_0} e^{i\mathbf{p}\mathbf{r}} \frac{d^3p}{(2\pi)^3} = \int_0^{p_0} \frac{\sin pr}{pr} \frac{4\pi p^2 dp}{(2\pi)^3} = \frac{\sin p_0 r - p_0 r \cos p_0 r}{2\pi^2 r^3}. \quad (8.100)$$

Отсюда обменная энергия (8.99) есть:

$$\Delta\Omega_{\text{обм}} = - \frac{e^2}{4\pi^4} \int_0^\infty 4\pi r^2 dr \frac{(\sin p_0 r - p_0 r \cos p_0 r)^2}{r^7}. \quad (8.101)$$

Путем трехкратного интегрирования по частям получаем

$$\Delta\Omega_{\text{обм}} = - \frac{e^2 p_0^4}{4\pi^3} = - \frac{e^2 (3\pi^2 n)^{4/3}}{4\pi^3}. \quad (8.102)$$

Мы видим, что из-за достаточно быстрого убывания функции  $I(\mathbf{r})$  обменная энергия определяется  $|\mathbf{r}| \simeq p_0^{-1}$ , что порядка характерного расстояния между электронами. Это можно понять качественно, заметив, что только при сближении электронов на расстояние  $\leq p_0^{-1}$  их волновые функции начинают перекрываться, и эффекты неразличимости частиц становятся важны. Таким образом, обменная энергия на один электрон оказывается порядка  $e^2 p_0$ .

Интересно отметить, что масштаб  $p_0^{-1}$ , определяющий обменные эффекты, при  $e^2/\hbar v_F \ll 1$  оказывается много меньше длины кулоновского экранирования  $\kappa^{-1}$ , которая определяет корреляционную энергию (см. задачу 49). Поэтому говорят, что обменное взаимодействие *локально*.

Отрицательный знак  $\Delta\Omega_{\text{обм}}$  тоже нетрудно понять. В силу принципа Паули, электроны избегают друг друга на расстояниях  $\leq p_0^{-1}$ , в результате чего энергия кулоновского отталкивания уменьшается.

**Решение 48 б)** Рассмотрим вклады второго порядка по  $e^2/\hbar v_F$ , соответствующие диаграммам на рис. 8.7. Им соответствуют такие выражения:

$$\begin{aligned} \Delta\Omega_{\text{корр}}^{(a)} &= T^3 \sum_{\varepsilon, \varepsilon', \omega} \int \frac{d^3k d^3k' d^3q}{(2\pi)^9} G(i\varepsilon, \mathbf{k}) G(i\varepsilon' + \omega, \mathbf{k} + \mathbf{q}) \\ &\times G(i\varepsilon', \mathbf{k}') G(i\varepsilon' - \omega, \mathbf{k}' - \mathbf{q}) V_{\mathbf{q}}^2; \end{aligned} \quad (8.103)$$

$$\Delta\Omega_{\text{корр}}^{(b)} = -\frac{1}{2} T^3 \sum_{\varepsilon, \varepsilon', \omega} \int \frac{d^3k d^3k' d^3q}{(2\pi)^9} G(i\varepsilon, \mathbf{k}) G(i\varepsilon + \omega, \mathbf{k} + \mathbf{q})$$



$$\times G(i\varepsilon', \mathbf{k}') G(i\varepsilon' - \omega, \mathbf{k}' - \mathbf{q}) V_{\mathbf{q}} V_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'+\mathbf{q}} . \quad (8.104)$$

Принятые обозначения показаны на рис. 8.10. Знаки диаграмм *a*) и *b*) отличаются из-за разного числа фермионных петель, а коэффициенты — из-за того, что в диаграмме *a*) суммирование по спину происходит два раза, а в диаграмме *b*) — один раз.

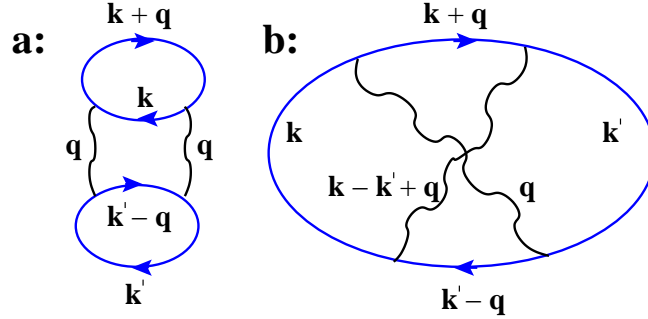


Рис. 8.10

Импульсы на рис. 8.10 выбраны таким образом, чтобы было удобно объединить вклады *a*) и *b*). Суммирование по  $\varepsilon$  и  $\varepsilon'$  выполняется с помощью тождества (7.87). В результате приходим к такому выражению для  $\Delta\Omega_{\text{кopp}}^{(a)+(b)}$ :

$$\begin{aligned} \Delta\Omega_{\text{кopp}}^{(a)+(b)} &= \frac{T}{2} \sum_{\omega} \int \frac{d^3k d^3k' d^3q}{(2\pi)^9} \frac{n_F(\xi_{\mathbf{k}}) - n_F(\xi_{\mathbf{k}+\mathbf{q}})}{i\omega - \xi_{\mathbf{k}} + \xi_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}} \\ &\times \frac{n_F(\xi_{\mathbf{k}'}) - n_F(\xi_{\mathbf{k}'-\mathbf{q}})}{-i\omega - \xi_{\mathbf{k}'} - \xi_{\mathbf{k}'-\mathbf{q}}} \left[ 2V_{\mathbf{q}}^2 - V_{\mathbf{q}} V_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'+\mathbf{q}} \right], \end{aligned} \quad (8.105)$$

где первый член в скобках соответствует диаграмме *a*), а второй — диаграмме *b*). Нас интересует случай нулевой температуры. Поэтому заменим суммирование по  $\omega$  интегрированием. При этом

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi(i\omega - \xi)(-i\omega - \xi')} = \frac{\theta(\xi') - \theta(-\xi)}{\xi + \xi'}. \quad (8.106)$$

Получаем

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \int \frac{d^3k d^3k' d^3q}{(2\pi)^9} (n_F(\xi_{\mathbf{k}}) - n_F(\xi_{\mathbf{k}+\mathbf{q}})) (n_F(\xi_{\mathbf{k}'}) - n_F(\xi_{\mathbf{k}'-\mathbf{q}})) \\ &\times \frac{\theta(\xi_{\mathbf{k}'} - \xi_{\mathbf{k}'-\mathbf{q}}) - \theta(\xi_{\mathbf{k}+\mathbf{q}} - \xi_{\mathbf{k}})}{\xi_{\mathbf{k}} - \xi_{\mathbf{k}+\mathbf{q}} + \xi_{\mathbf{k}'} - \xi_{\mathbf{k}'-\mathbf{q}}} \left[ 2V_{\mathbf{q}}^2 - V_{\mathbf{q}} V_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'+\mathbf{q}} \right] \end{aligned} \quad (8.107)$$

Проанализируем область интегрирования в (8.107). Одна из двух  $\theta$ -функций в этом выражении должна быть равна 1, а другая — 0. Пусть от нуля отлична первая  $\theta$ -функция. Тогда, поскольку в (8.107) входит также множитель  $n_F(\xi_{\mathbf{k}'}) - n_F(\xi_{\mathbf{k}'-\mathbf{q}})$ , то  $|\mathbf{k}'| > p_0$ , а  $|\mathbf{k}' - \mathbf{q}| < p_0$ . Аналогично получаем  $|\mathbf{k}| < p_0$ ,  $|\mathbf{k} + \mathbf{q}| > p_0$ . Если же от нуля

отлична другая  $\theta$ -функция, то ответ получается заменой  $\mathbf{k} \rightarrow \mathbf{k}'$ ,  $\mathbf{q} \rightarrow -\mathbf{q}$ . Поскольку выражение симметрично относительно этой замены, достаточно просто удвоить ответ. Поэтому

$$\Delta\Omega_{\text{корр}}^{(a)+(b)} = \int \int_{\substack{\mathbf{k} \in R_q \\ \mathbf{k}' - \mathbf{q} \in R_q}} \int \frac{d^3k d^3k' d^3q}{(2\pi)^9 (\xi_{\mathbf{k}} - \xi_{\mathbf{k}+\mathbf{q}} + \xi_{\mathbf{k}'} - \xi_{\mathbf{k}'-\mathbf{q}})} \left[ 2V_{\mathbf{q}}^2 - V_{\mathbf{q}} V_{\mathbf{k}-\mathbf{k}+\mathbf{q}} \right]. \quad (8.108)$$

Это выражение совпадает с (8.33).

Отметим, что формулу (8.33) можно получить и без диаграмм, вычисляя энергию основного состояния ферми-системы по обычной квантовомеханической теории возмущений до членов второго порядка (см. [6], §6).

Теперь рассмотрим поведение подинтегрального выражения в (8.108) при  $\mathbf{q} \rightarrow 0$ . Области интегрирования по  $\mathbf{k}$  и  $\mathbf{k}'$  представляют собой в этом случае слои толщины порядка  $q$  на поверхности ферми-сферы (см. рис. 8.1). С другой стороны, знаменатель при этом оказывается порядка  $qv_F$ . Поэтому первый член оказывается порядка  $q^{-3}$ , а второй — порядка  $q^{-1}$ . В результате оказывается, что при интегрировании по  $q$  первый член дает логарифмическую расходимость на малых  $q$ , а второй остается конечен.

Чтобы понять причину найденной расходимости, рассмотрим физический смысл диаграмм на рис. 8.7. Поляризационные петли на диаграмме *a*) — это коррелятор плотность-плотность. Поэтому эта диаграмма описывает вклад взаимодействия флуктуаций плотности в энергию системы. Ее расходимость при  $q = 0$  означает, что основной вклад дают флуктуации плотности в далеких точках. Но подсчитывать взаимодействие флуктуаций в точках, расположенных на расстоянии, большем радиуса экранирования, используя незаэкранированный потенциал  $1/r$  (как это и происходит в (8.108)), совершенно неправильно. Можно ожидать, что при правильном учете экранирования логарифмическая расходимость обрежется на обратном радиусе экранирования,  $q \simeq \kappa$ .

Что же касается диаграммы *b*), она описывает обменный эффект второго порядка. Как и все обменные эффекты, этот вклад в энергию определяется расстояниями порядка фермиевской длины волны  $1/p_0$ , и потому в нем не возникает расходимости на малых  $q$ .

**Решение 49 а)** Расходимость в диаграмме *a*) на рис. 8.7, найденная в задаче 48, — серьезная неприятность. В рамках теории возмущений обрезать эту расходимость нигде, и поэтому возникает необходимость суммировать диаграммы высших порядков. С физической точки зрения, требуется всего лишь корректно учесть экранирование (см. решение задачи 48 б)). Для этого следует «ужирнить» линию взаимодействия, наподобие рис. 8.3. В результате получается последовательность диаграмм, показанных на рис. 8.8.

Оценим эти диаграммы по порядку величины. Произведение  $n$  волнистых линий зависит от передаваемого импульса  $q$  как  $q^{-2n}$  и не зависит от передаваемой частоты  $\omega$  ( $q$  и  $\omega$  одинаковы для всех линий). Поляризационная петля  $\Pi(i\omega, \mathbf{q}) \simeq \nu$  при  $\omega \leq qv_F$  и убывает при  $\omega > qv_F$ . Интегрирование по  $0 < \omega \leq qv_F$  дает  $qv_F$ , и в результате диаграмма  $n$ -го порядка расходится при малых  $q$  как  $\int_0^{p_0} q^2 dq / q^{2n-1}$ . Чем выше  $n$ ,

тем сингулярней диаграмма. При  $n = 2$  расходимость логарифмическая, в соответствии с решением задачи 48 б). Из сделанной оценки видно, что кольцевые диаграммы, изображенные на рис. 8.8, обеспечивают максимальную расходимость в каждом порядке теории возмущений. Уже само по себе, без апелляции к физике экранирования, это дает достаточные основания для рассмотрения ряда на рис. 8.8.

Просуммируем последовательность кольцевых диаграмм. Для этого, как обычно, продифференцируем термодинамический потенциал по константе связи  $e^2$ . Это устраняет множители  $1/n$  перед диаграммами, после чего ряд суммируется, как геометрическая прогрессия. Выражение, которое при этом получается, есть произведение  $\Pi(i\omega, \mathbf{q})$  и заэкранированного взаимодействия  $V_{i\omega, \mathbf{q}}$ , из которого вычтено затравочное взаимодействие  $V_{\mathbf{q}}$  (потому что ряд начинается с  $n = 2$ ). Таким образом,

$$e^2 \frac{\partial \Omega_{\text{корр}}}{\partial e^2} = -\frac{1}{2} T \sum_{\omega} \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \Pi(i\omega, \mathbf{q}) (V_{i\omega, \mathbf{q}} - V_{\mathbf{q}}). \quad (8.109)$$

Согласно задаче 44, заэкранированное взаимодействие есть (8.42). Что касается поляризационного оператора  $\Pi(i\omega, \mathbf{q})$ , то аналитическое продолжение формулы (8.47) дает

$$\Pi(i\omega, \mathbf{q}) = -\nu \left( 1 - \frac{\omega}{qv_F} \operatorname{arctg} \frac{qv_F}{\omega} \right). \quad (8.110)$$

Заменяя при  $T = 0$  суммирование по  $\omega$  интегрированием, и подставляя  $V_{i\omega, \mathbf{q}}$  из (8.42), приводим (8.109) к виду

$$e^2 \frac{\partial \Omega_{\text{корр}}}{\partial e^2} = -\frac{1}{2} \int \frac{d\omega}{2\pi} \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \frac{\Pi^2(i\omega, \mathbf{q}) V_{\mathbf{q}}^2}{1 - \Pi(i\omega, \mathbf{q}) V_{\mathbf{q}}}. \quad (8.111)$$

Удобно ввести  $s = \omega/qv_F$  и обозначить  $\Pi(i\omega, \mathbf{q}) = -\nu P(s)$ . Получаем

$$e^2 \frac{\partial \Omega_{\text{корр}}}{\partial e^2} = - \int_0^{\infty} \frac{qv_F ds}{2\pi} \frac{4\pi q^2 dq}{(2\pi)^3} \frac{(4\pi e^2)^2 \nu^2 P^2(s)}{q^2(q^2 + \kappa^2 P(s))} = -\frac{\kappa^4 v_F}{4\pi^3} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{P^2(s)}{q^2 + \kappa^2 P(s)} ds q dq, \quad (8.112)$$

где  $\kappa^2 = 4\pi e^2 \nu$ . Интегрируем по  $q$ , обрезая интеграл сверху на  $p_0$ :

$$\frac{e^2}{V} \frac{\partial \Omega_{\text{корр}}}{\partial e^2} = -\frac{\kappa^4 v_F}{8\pi^3} \int_0^{\infty} \ln \frac{p_0^2}{\kappa^2 P(s)} P^2(s) ds \approx -\frac{\kappa^4 v_F}{4\pi^3} \ln \frac{p_0}{\kappa} \int_0^{\infty} P^2(s) ds \quad (8.113)$$

(последний шаг верен с логарифмической точностью, поскольку  $p_0^2/\kappa^2 = (\pi/4)\hbar v_F/e^2 \gg 1$ ). Интеграл

$$J = \int_0^{\infty} P^2(s) ds \quad (8.114)$$

удобно вычислить с помощью следующего представления  $P(s)$ , которое следует из определения поляризационного оператора:

$$P(s) = \int_0^1 \frac{x^2}{s^2 + x^2} dx = 1 - s \operatorname{arctg} \frac{1}{s}. \quad (8.115)$$

Интегрируем:

$$\begin{aligned} J &= \int_0^\infty \int_0^1 \int_0^1 \frac{x^2 y^2}{(s^2 + x^2)(s^2 + y^2)} dx dy ds = \pi \int_0^1 \int_0^1 \frac{xy}{x+y} dx dy \\ &= \frac{\pi}{2} \int_0^1 x dx \left[ 1 - x \ln \frac{x+1}{x} \right] = \frac{\pi(1 - \ln 2)}{3}. \end{aligned} \quad (8.116)$$

Учитывая соотношение  $\kappa^2 = 4\pi e^2 \nu$  и интегрируя по  $e^2$ , получаем окончательный ответ:

$$\Omega_{\text{корр}} = -\frac{1 - \ln 2}{24\pi^2} \kappa^4 v_F \ln \frac{p_0}{\kappa} \quad (8.117)$$

Таким образом, просуммировав кольцевые диаграммы, мы действительно получили конечную корреляционную энергию. При этом логарифмическая расходимость, найденная во втором порядке теории возмущений, автоматически обрезалась на обратном радиусе экранирования,  $q \sim \kappa$ .

**Решение 49 б)** Найдем энергию взаимодействия, представив ее как энергию нулевых колебаний осцилляторов электрон-дырочных пар. Воспользуемся формулой

$$\int_{-\infty}^{\infty} \ln \left( \frac{\omega^2 + \omega_1^2}{\omega^2 + \omega_2^2} \right) \frac{d\omega}{4\pi} = \frac{\omega_1}{2} - \frac{\omega_2}{2}, \quad (8.118)$$

которую нетрудно проверить интегрированием по частям. Применим ее к операторам

$$\hat{\mathcal{A}} = \sum_{\mathbf{k}; \mathbf{p} \in R_k} \omega_{\mathbf{p}, \mathbf{k}}^2 \phi_{\mathbf{p}, \mathbf{k}}^+ \phi_{\mathbf{p}, \mathbf{k}}, \quad \hat{\mathcal{B}} = 2 \sum_{\mathbf{k}} V_{\mathbf{k}} \left( \sum_{\mathbf{p} \in R_k} \omega_{\mathbf{p}, \mathbf{k}}^{1/2} \phi_{\mathbf{p}, \mathbf{k}}^+ \right) \left( \sum_{\mathbf{p}' \in R_k} \omega_{\mathbf{p}', \mathbf{k}}^{1/2} \phi_{\mathbf{p}', \mathbf{k}} \right), \quad (8.119)$$

сумма которых есть удвоенная «потенциальная энергия» осцилляторов, описываемых гамильтонианом  $\mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_{\text{int}}$  (см. (8.23) и (8.24)). Получаем

$$\Delta E = \text{Tr} \int_{-\infty}^{\infty} \ln \left( \frac{\omega^2 + \hat{\mathcal{A}} + \hat{\mathcal{B}}}{\omega^2 + \hat{\mathcal{A}}} \right) \frac{d\omega}{4\pi} \quad (8.120)$$

Разложим это выражение в ряд:

$$\Delta E = \sum_{\omega > 0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \text{Tr} \left( \hat{\mathcal{B}} (\omega^2 + \hat{\mathcal{A}})^{-1} \right)^n \quad (8.121)$$

Вычисляя след, находим

$$\begin{aligned} \Delta E &= \sum_{\omega > 0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \sum_{\mathbf{k}} \left( V_{\mathbf{k}} \left( \sum_{\mathbf{p} \in R_k} \frac{4\omega_{\mathbf{p}, \mathbf{k}}}{\omega^2 + \omega_{\mathbf{p}, \mathbf{k}}^2} \right) \right)^n \\ &= \sum_{\omega > 0} \sum_{\mathbf{k}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} (-V_{\mathbf{k}} \Pi(\omega, \mathbf{k}))^n \\ &= \int \int \ln (1 - V_{\mathbf{k}} \Pi(\omega, \mathbf{k})) \frac{d\omega d^3 k}{2(2\pi)^4} \end{aligned} \quad (8.122)$$

Чтобы установить соответствие с вычислением обменной и корреляционной энергий в задачах 48 и 49 а), заметим следующее. Первый член формального разложения логарифма в выражении (8.122) в ряд по степеням  $V_{\mathbf{k}}$  дает не что иное, как обменную энергию, вычисленную в задаче 48 а). В этот первый член  $V_{\mathbf{k}}$  входит в первой степени, что дает сходящийся при малых  $k$  интеграл. Нетрудно убедиться, что если вычесть из (8.122) обменную энергию (в силу сходимости интеграла, такое вычитание — корректная процедура), то получившееся выражение при дифференцировании по  $e^2$  дает выражение (8.111), определяющее корреляционную энергию. Поэтому выражение (8.122) есть сумма обменной и корреляционной энергий.

Результат (8.122), выведенный при  $T = 0$ , нетрудно обобщить на случай конечной температуры. Это делается по аналогии с задачей 35, где была получена связь между термодинамическим потенциалом и функцией Грина ферми-частиц. В результате получается выражение, подобное (8.122), в котором интегрирование  $\int \dots d\omega/2\pi$  заменено суммированием  $T \sum_n \dots$  по  $\omega_n = 2\pi nT$ .

**Решение 49 в)** Рассмотрим корреляционную энергию невырожденной плазмы. Можно воспользоваться формулой (8.109), оставляя в ней лишь член с  $\omega = 0$ :

$$e^2 \frac{\partial \Omega_{\text{корр}}}{\partial e^2} = -\frac{T}{2} \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \frac{V_{\mathbf{q}}^2 \Pi^2(\mathbf{q})_{\omega=0}}{1 - V_{\mathbf{q}} \Pi(\mathbf{q})_{\omega=0}}. \quad (8.123)$$

Величина  $\Pi(\mathbf{q})_{\omega=0}$  при малом  $|\mathbf{q}| \ll p_0$  есть

$$\Pi(\mathbf{q} \rightarrow 0)_{\omega=0} = \int \frac{2 d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{n_F(\xi_{\mathbf{p}}) - n_F(\xi_{\mathbf{p}+\mathbf{q}})}{\xi_{\mathbf{p}} - \xi_{\mathbf{p}+\mathbf{q}}} \approx \int \frac{2 d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{\partial n_F(\xi_{\mathbf{p}})}{\partial \xi_{\mathbf{p}}} \quad (8.124)$$

(мы использовали (7.87)). Поскольку нас интересуют большие температуры  $T \gg E_F$ , можно заменить распределение Ферми распределением Больцмана, для которого  $\partial n_B(\xi)/\partial \xi = -n_B(\xi)/T$ . Поэтому  $\Pi_{\omega=0}(\mathbf{q} \rightarrow 0) = -n/T$ , где  $n$  — плотность частиц. Отсюда

$$V_{\mathbf{q}} = \frac{V_{\mathbf{q}}}{1 - V_{\mathbf{q}} \Pi(\mathbf{q} \rightarrow 0)_{\omega=0}} = \frac{4\pi e^2}{\mathbf{q}^2 + \kappa^2}, \quad (8.125)$$

где  $\kappa^2 = 4\pi e^2 n/T$  — классический дебаевский радиус экранирования. В результате

$$e^2 \frac{\partial \Omega_{\text{корр}}}{\partial e^2} = -\frac{T}{2} \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \frac{\kappa^4}{q^2 (q^2 + \kappa^2)} = -\frac{T \kappa^3}{8\pi}. \quad (8.126)$$

Интегрируя по  $e^2$ , получаем

$$\Omega_{\text{корр}} = -\frac{T \kappa^3}{12\pi}, \quad (8.127)$$

что совпадает с результатом, известным для классической плазмы (см. [5] §78).

Обратим внимание на неаналитическую зависимость выражений (8.117) и (8.127) от  $e^2$ . При  $T = 0$  корреляционная энергия пропорциональна  $e^4 \ln e^2$ , а при  $T \gg E_F$  выражение (8.127) дает  $\Omega_{\text{корр}} \sim e^3$ . В результате формальное разложение  $\Omega_{\text{корр}}$  по целым степеням  $e^2$  оказывается невозможным. Эта неаналитичность и есть формальная причина того, что в ряду теории возмущений присутствуют расходящиеся члены.

## 8.6. Энергия взаимодействия в металле. Вигнеровский кристалл

Рассмотрим энергию основного состояния электронов в металле, используя модель желе. В пределе высокой плотности электронов  $n$  система будет почти идеальным ферми-газом с ферми-жидкостными поправками, малыми по параметру  $e^2/\hbar v_F \ll 1$ . Наиболее существенной энергией в этом случае будет кинетическая энергия, величина которой порядка  $p_0^2/2m$  на частицу. Это дает термодинамический потенциал на единицу площади  $\Omega_{\text{кин}} \sim n^{5/3}$ .

Поправки первого порядка по межэлектронному взаимодействию были найдены в задаче 48 а). Энергия Хартри в модели желе равна нулю из-за компенсации взаимодействия электронов с положительным фоном. Обменная же энергия  $\Omega_{\text{обм}}$  отлична от нуля и отрицательна. Как нетрудно видеть, сумма кинетической и обменной энергий  $\Omega_{\text{кин}} + \Omega_{\text{обм}}$  есть просто среднее  $\langle \widehat{\mathcal{H}}_0 + \widehat{\mathcal{H}}_{\text{int}} \rangle$  от гамильтониана (8.1), взятое по основному состоянию идеального ферми-газа, то есть по слэтеровскому детерминанту, построенному из плоских волн с  $|\mathbf{p}| < p_0$ .

Поправки второго порядка и выше по  $e^2/\hbar v_F$ , рассмотренные в задачах 48 б) и 49, учитывают изменение основного состояния благодаря взаимодействию. Эти поправки принимают во внимание изменение корреляций взаимного расположения электронов по сравнению с идеальным ферми-газом. Поэтому соответствующий вклад в энергию системы называют *корреляционной энергией*. Согласно задачам 48, 49, обменная и корреляционная энергии отрицательны и зависят от заряда  $e$  и плотности  $n$  так:  $\Omega_{\text{обм}} \sim -e^2 n^{4/3}$ ,  $\Omega_{\text{корр}} \sim -e^4 n \ln(n^{1/3}/e^2)$ .

Интересно, что корреляционная энергия имеет неаналитическую зависимость от параметра теории возмущений  $e^2/\hbar v_F$ . Поэтому формальное разложение  $\Omega_{\text{корр}}$  по целым степеням  $e^2/\hbar v_F$  не имеет смысла. В этом и состоит причина того, что, как мы убедились в задаче 48 б), в ряду теории возмущений появляются расходимости.

Здесь уместно отметить, что для отсутствия аналитичности термодинамического потенциала  $\Omega$  как функции константы связи  $e^2$  при малых  $e$  имеются весьма общие основания. Действительно, если бы аналитичность имела место в некоторой окрестности  $e = 0$ , то выражение для термодинамического потенциала, полученное при  $e^2 > 0$ , было бы применимо и к системе с  $e^2 < 0$ , то есть с притяжением между частицами. А в ней, как известно, возникает куперовское спаривание и происходит перестройка основного состояния. Отметим аналогию с квантовой электродинамикой, в которой с помощью сходного рассуждения доказывается (Дайсон, 1952), что любая физическая величина, как функция  $e^2$ , имеет особенность при  $e = 0$  (см. [4], гл. 1, §3).

Рассмотрим теперь, как меняется состояние металлической системы при изменении плотности. Зависимость кинетической и обменной энергии от плотности такова, что при высокой плотности  $\Omega_{\text{обм}}$  пренебрежимо мала по сравнению с  $\Omega_{\text{кин}}$ . Однако при уменьшении плотности взаимодействие начинает давать основной вклад в энергию. При этом, поскольку  $\Omega_{\text{обм}}$  отрицательно, состояние с однородной плотностью становится неустойчиво по отношению к возникновению неоднородностей, и жидкость превращается в кристалл (Вигнер, 1934).

Сравним энергии кристалла и ферми-жидкости. Рассмотрим кристаллическое со-

стояние, в котором волновые функции электронов локализованы вблизи узлов некоторой решетки. Для конкретности будем говорить о кубической решетке с периодом  $a = n^{-1/3}$ . Убедимся в том, что кинетическая энергия, оцениваемая как энергия нулевых колебаний, будет выше, чем в однородной системе с той же плотностью, а потенциальная — ниже. Поскольку при низкой плотности потенциальная энергия важнее кинетической, кристалл оказывается более выгодным состоянием, чем жидкость.

Начнем с того, что оценим изменение кулоновской энергии. При образовании кристалла она понижается, поскольку в жидкости системе электроны могут находиться ближе друг к другу, чем в кристалле при той же плотности. Уменьшение потенциальной энергии на один электрон будет порядка энергии взаимодействия соседей:

$$E_{\text{пот}}^{(\text{крист})} - E_{\text{пот}}^{(\text{жидк})} \sim -\frac{e^2}{a} = -e^2 n^{1/3}. \quad (8.128)$$

Теперь займемся кинетической энергией электронного кристалла. Электрон совершает нулевые колебания около одного из узлов решетки. Причем когда электрон находится точно в узле, кулоновские силы, действующие на него со стороны других электронов, в точности компенсируются. При отклонении же от узла на небольшое расстояние, из-за нескомпенсированного кулоновского отталкивания от соседей появляется возвращающая сила. При смещении  $x$  возвращающая сила будет порядка  $e^2/(a-x)^2 - e^2/(a+x)^2 \sim e^2 x/a^3$ . Записав ее как  $m\omega^2 x$ , получим частоту колебаний электрона и радиус локализации волновой функции:

$$\omega \simeq \left(\frac{e^2}{ma^3}\right)^{1/2}, \quad r_0 \simeq \left(\frac{\hbar}{m\omega}\right)^{1/2} \simeq \left(\frac{e^2}{\hbar v_F^{(0)}}\right)^{-1/4} a, \quad (8.129)$$

где  $v_F^{(0)}$  — скорость Ферми в идеальном ферми-газе данной плотности. Оценим энергию нулевых колебаний на один электрон:

$$E_{\text{кин}}^{(\text{крист})} \simeq \frac{\hbar\omega}{2} \simeq \left(\frac{e^2}{\hbar v_F^{(0)}}\right)^{-1/2} \frac{e^2}{a} \simeq \left(\frac{e^2}{\hbar v_F^{(0)}}\right)^{1/2} E_{\text{кин}}^{(\text{жидк})}, \quad (8.130)$$

где  $E_{\text{кин}}^{(\text{жидк})} \simeq \hbar^2/2ma^2$ .

Сделанные оценки показывают, что в пределе низкой плотности, т. е. при  $e^2/\hbar v_F^{(0)} \gg 1$ , имеют место такие неравенства:

$$E_{\text{кин}}^{(\text{жидк})} \ll E_{\text{кин}}^{(\text{крист})} \ll \left(E_{\text{пот}}^{(\text{жидк})} - E_{\text{пот}}^{(\text{крист})}\right). \quad (8.131)$$

Это означает, что образование кристалла энергетически выгодно. Отметим, что для применимости сделанных оценок требуется, чтобы электронные состояния были хорошо локализованы вблизи узлов. Но, как мы видели,  $r_0 \ll a$  при  $e^2/\hbar v_F^{(0)} \gg 1$ , что подтверждает корректность наших рассуждений.

Итак, при переходе в состояние вигнеровского кристалла кинетическая энергия увеличивается, а потенциальная уменьшается. Поэтому при высокой плотности такое состояние невыгодно, а при низкой — выгодно.

## 8.7. Микроскопическое обоснование теории ферми-жидкости

Диаграммная техника позволяет обосновать теорию ферми-жидкости весьма общим образом, а также установить границы ее применимости. Такой квантово-полевой подход к проблеме ферми-жидкости весьма полезен, поскольку он дает возможность использовать идеи и результаты этой теории в сильно взаимодействующей системе. В этом состоит преимущество по сравнению, скажем, с рассмотренным в разделе 8.3 гамильтоновым методом, в котором предполагается, что взаимодействие слабое. Кроме того, гамильтонов метод опирается на несколько эвристическое по своему характеру приближение случайных фаз, в то время как квантово-полевой подход является совершенно строгим.

Микроскопической теории ферми-жидкости уделено большое внимание в литературе (см. [1, 6, 4]), поэтому здесь мы ограничимся кратким перечислением основных результатов. Предполагается, что особенности одночастичной функции Грина, как функции энергии, качественно такие же, как для идеального ферми-газа. А именно,  $G(\varepsilon, \mathbf{p})$  имеет простой полюс при  $\varepsilon = \xi(\mathbf{p})$ , где закон дисперсии квазичастиц  $\xi(\mathbf{p})$  определяется самосогласованно через уравнение Дайсона. Показывается, что вычет  $a$  в полюсе

$$G(\varepsilon, \mathbf{p}) \sim \frac{a}{\varepsilon - \xi(\mathbf{p}) + i0 \operatorname{sign} \xi} \quad (8.132)$$

удовлетворяет условию  $0 < a < 1$ . Величина  $a$  имеет смысл спектрального веса квазичастицы в одночастичной функции Грина (ср. с (4.14) в гл.4). Единственной величиной, которая не перенормируется взаимодействием, оказывается импульс Ферми, выражающийся через плотность:  $p_0 = (3\pi^2 n)^{1/3}$ .

Оказывается возможным выяснить, какие диаграммы описывают динамику квазичастиц, и проследить связь с кинетическим уравнением ферми-жидкости. Для этого следует рассмотреть двухчастичные функции Грина и выделить в них вклады, соответствующие электрон-дырочным парам вблизи уровня Ферми. Следуя традиции, будем говорить о двухчастичной амплитуде рассеяния, имея при этом в виду, что другие двухчастичные функции рассматриваются аналогично.

Амплитуда рассеяния  $\Gamma$  есть, как обычно, сумма всех фейнмановских диаграмм с четырьмя концами. Она зависит обычным образом от входящих и выходящих импульсов, а также спинов. Выделим из диаграммного ряда все вклады с определенным количеством двухчастичных сечений, и пересуммируем ряд, как при выводе уравнения Бете-Солпитера 4.20. Для этого требуется использовать так называемую неприводимую вершину  $\Gamma^{(0)}$ , не содержащую двухчастичных сечений. Пересуммированный ряд для амплитуды  $\Gamma$  изображается графически, как показано на рис. 8.11, где неприводимая вершина  $\Gamma^{(0)}$  обозначена заштрихованным кружком.

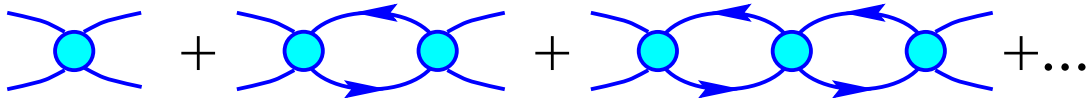




Рис. 8.11

Отметим, что при этом предполагается, что суммарные импульс  $\mathbf{k}$  и частота  $\omega$  в двухчастичных сечениях малы по сравнению с  $p_0$  и  $E_F$ , соответственно. Именно это ограничение на  $\mathbf{k}$  и  $\omega$  позволяет ограничиться лестничными диаграммами, изображенными на рис. 8.11.

Полученный ряд сводится к интегральному уравнению почти так же, как при выводе уравнения Бете-Солпитера 4.20. Разница состоит только в том, что надо пользоваться причинными функциями Грина, а не запаздывающими. В результате получается уравнение вида

$$\Gamma(p_1, p_2; k) = \Gamma^{(0)}(p_1, p_2; k) - i \int \Gamma^{(0)}(p_1, q; k) \Gamma(q, p_2; k) G(q) G(q+k) \frac{d^4 q}{(2\pi)^4}, \quad (8.133)$$

где  $p_{1,2}$  — импульсы входящих частиц, а  $k$  — передача импульса. Мы для простоты опустили все спиновые индексы и суммирование по ним.

Задача теперь состоит в том, чтобы выделить в (8.133) вклады полюсов функций Грина  $G(q)$  и  $G(q+k)$ , поскольку именно полюсные вклады отвечают квазичастицам. Для этого требуется выполнить еще одно пересуммирование ряда для  $\Gamma$ , в результате которого получается очень похожий ряд, с тем, однако, единственным отличием, что двухчастичные сечения содержат *только* полюсные вклады.

Формально это происходит так. При малых  $\omega$  и  $\mathbf{k}$  в двухчастичных сечениях, произведение функций Грина можно разложить на сингулярную и регулярную части:

$$-iG(q)G(q+k) = \frac{2\pi a^2}{v_F} \frac{\mathbf{k}\mathbf{v}}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}} \delta(\varepsilon) \delta(|\mathbf{q}| - p_0) + \varphi(q), \quad (8.134)$$

где  $q = (\varepsilon, \mathbf{q})$ ,  $k = (\omega, \mathbf{k})$ ,  $\mathbf{v} = \nabla_{\mathbf{k}} \xi(\mathbf{k})$ . Поясним происхождение сингулярного вклада в (8.134). Он возникает в тех случаях, когда полюса функций Грина  $G(q)$  и  $G(q+k)$  зажимают контур интегрирования по  $\varepsilon$  в уравнении (8.133). Зажимание контура происходит, когда полюса выражения  $G(q)G(q+k)$  находятся по разные стороны от вещественной оси. Это имеет место при  $|\mathbf{q}| < p_0$  и  $|\mathbf{q} + \mathbf{k}| > p_0$ , или наоборот. Но поскольку  $|\mathbf{k}| \ll p_0$ , импульс  $\mathbf{q}$  при этом оказывается на расстоянии  $\leq |\mathbf{k}|$  от ферми-поверхности. А значит, одновременно и  $\varepsilon = \xi_{\mathbf{q}}$  оказывается почти на уровне Ферми.

Запишем соотношение (8.134) в виде  $-iGG = \widehat{D} + \widehat{\varphi}$  проведем пересуммирование ряда на рис. 8.11, используя операторную запись:

$$\begin{aligned} \Gamma &= \Gamma^{(0)} - i\Gamma^{(0)}GG\Gamma^{(0)} + (-i)^2\Gamma^{(0)}GG\Gamma^{(0)}GG\Gamma^{(0)} + \dots \\ &= \Gamma^{(0)} \left(1 - (\widehat{D} + \widehat{\varphi})\Gamma^{(0)}\right)^{-1} \\ &= \Gamma^{(0)} \left(1 - \widehat{\varphi}\Gamma^{(0)}\right)^{-1} \left(1 - \widehat{D}\Gamma^{(0)} \left(1 - \widehat{\varphi}\Gamma^{(0)}\right)^{-1}\right)^{-1} \\ &= \Gamma_{\omega} \left(1 - \widehat{D}\Gamma_{\omega}\right)^{-1} \end{aligned} \quad (8.135)$$

где введено обозначение  $\Gamma_{\omega} = \Gamma^{(0)} \left(1 - \widehat{\varphi}\Gamma^{(0)}\right)^{-1}$ . Обратим внимание, что результат этой цепочки преобразований имеет форму, соответствующую ряду на рис. 8.11. Отличие этого представления от исходного в том, что теперь все несингулярные вклады собраны единым образом в вершину  $\Gamma_{\omega}$ .

Как всегда, элементарные возбуждения определяются полюсами соответствующей функции Грина. В данном случае необходимо рассмотреть полюса амплитуды рассеяния  $\Gamma$ , как функции  $\omega$  и  $\mathbf{k}$ . Из представления (8.135) следует, что полюсам соответствуют нулевые собственные значения оператора  $1 - \widehat{D}\Gamma_\omega$ . Пользуясь явной формой (8.134) для оператора  $\widehat{D}$ , уравнение на собственные значения можно записать в виде

$$(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v})u(\mathbf{p}) = \mathbf{k}\mathbf{v} \frac{2\pi a^2}{v_F} \Gamma_\omega u(\mathbf{p}), \quad (8.136)$$

где  $u(\mathbf{p})$  — соответствующая собственная функция, а действие  $\Gamma_\omega$  понимается в операторном смысле. Получившееся уравнение совпадает с кинетическим уравнением ферми-жидкости, причем функция Ландау  $F(\mathbf{n}, \mathbf{n}')$  оказывается связанной с амплитудой  $\Gamma_\omega$ , взятой на ферми-поверхности:

$$F(\mathbf{n}, \mathbf{n}') = \frac{2\pi a^2}{v_F} \Gamma_\omega(\mathbf{p}, \mathbf{p}')|_{|\mathbf{p}|=|\mathbf{p}'|=p_0} \quad (8.137)$$

Отметим, что амплитуда  $\Gamma_\omega$  получается простым образом из полной амплитудой рассеяния  $\Gamma$ , если рассмотреть предел  $\mathbf{k}\mathbf{v} \ll \omega$ . При этом, согласно (8.134), величина  $\widehat{D} \rightarrow 0$  и, вследствие этого,  $\Gamma_\omega = \Gamma$ .

Заметим, что связь между оператором  $\widehat{D}$  и кинетикой квазичастиц становится особенно наглядной, если перейти в координатно-временное представление. Чтобы избежать неоднозначностей, связанных с обходом полюсов, рассмотрим запаздывающую величину, заменив  $\omega$  на  $\omega + i0$ . Тогда

$$\widetilde{D}(\mathbf{r}, t) = \int \frac{\mathbf{k}\mathbf{v}e^{-i\omega t + i\mathbf{k}\mathbf{r}}}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{v} + i0} \frac{d\omega}{2\pi} \frac{d^3k}{(2\pi)^3} = \begin{cases} \mathbf{v}\nabla_{\mathbf{r}} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{v}t), & t > 0; \\ 0, & t < 0. \end{cases} \quad (8.138)$$

Это вычисление демонстрирует, что сингулярная часть произведения  $G(q)G(q+k)$  описывает распространение электрона по прямой между моментами, когда происходит взаимодействие с другими электронами. (Читатель, сталкивавшийся с задачей об определении кинетических коэффициентов из уравнения Больцмана, узнает в  $\mathbf{v}\mathbf{k}/(\omega - \mathbf{v}\mathbf{k})$  стандартное выражение, возникающее при подобных расчетах.)

Следует сказать, что связь между лестничными диаграммами с малым переданным импульсом и кинетическим уравнением, продемонстрированная на примере амплитуды рассеяния  $\Gamma$ , имеет более общий характер. Аналогичные рассуждения применимы к произвольной двухчастичной функции Грина. Примером тому могут служить лестничные диаграммы, рассмотренные в задачах 44 — 47.

Как мы убедились, теория ферми-жидкости на диаграммном языке соответствует учету определенных диаграмм с малой передачей импульса в двухчастичных сечениях. Исчерпываются ли описанными выше лестничными диаграммами все возможности? Чтобы в этом разобраться, рассмотрим диаграммы с ровно одним двухчастичным

сечением. Как видно из рис. 8.12, их всего три.

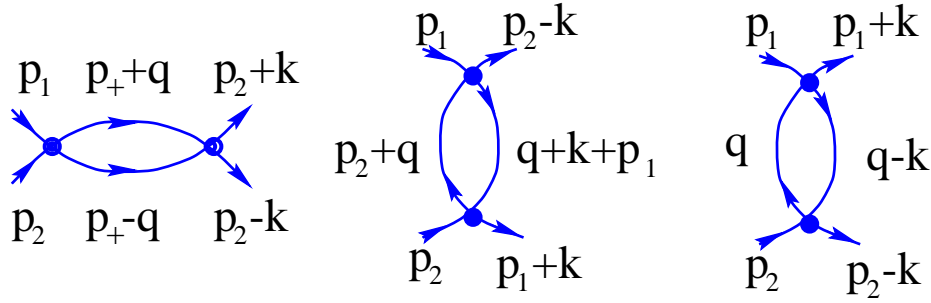


Рис. 8.12

Определим, при каких значениях внешних 4-импульсов  $p_1$ ,  $p_2$  и  $k$  эти диаграммы могут оказаться сингулярными. Как и выше, нас интересуют сингулярности, возникающие из-за интегрирования произведения двух функций Грина. Полюса этого произведения, как функция энергии  $\varepsilon$  в петле, даются полюсами каждой из двух гриновских функций:

$$\varepsilon = \xi_{\mathbf{q}} - i0 \operatorname{sign} \xi_{\mathbf{q}}, \quad \varepsilon = \omega + \xi_{\mathbf{q}+\mathbf{k}} - i0 \operatorname{sign} \xi_{\mathbf{q}+\mathbf{k}}. \quad (8.139)$$

При этом, как всегда, отличный от нуля вклад в интеграл по  $\varepsilon$  возникает лишь если полюса находятся по разные стороны от контура интегрирования (ср. с задачей 24). При определенных значениях внешних импульсов полюса могут сблизиться и зажать между собой контур интегрирования. Тогда этот контур будет невозможно увести из окрестности полюсов и возникнет сингулярность.

Выясним, при каких условиях это происходит в диаграммах на рис. 8.12. Пренебрегая частотой  $\omega$ , передаваемой через двухчастичное сечение, получим:

- a)  $|\mathbf{p}_+ + \mathbf{q}| = |\mathbf{p}_+ - \mathbf{q}|$ , где  $\mathbf{p}_+ = (\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2)/2$ ;
- b)  $|\mathbf{p}_2 + \mathbf{q}| = |\mathbf{q} + \mathbf{p}_1 + \mathbf{k}|$ ;
- c)  $|\mathbf{q}| = |\mathbf{q} - \mathbf{k}|$ .

При этом следует учесть, что сингулярность может исчезнуть при интегрировании по  $\mathbf{q}$ , если условие выполняется в слишком малой области  $\mathbf{q}$ . Поэтому условие возникновения сингулярности выглядит теперь следующим образом:

- a)  $\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 \approx 0$ ;
- b)  $\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1 - \mathbf{k} \approx 0$ ;
- c)  $\mathbf{k} \approx 0$ .

Итак, мы видим, что только диаграмма *c)* сингулярна при  $k = 0$ . Именно она и определяет динамику возбуждений в ферми-жидкости.

Что же касается остальных диаграмм, то диаграмма *b)* бывает важна очень редко из-за того, что в ней налагается условие  $\mathbf{p}_1 \approx \mathbf{p}_2$ . А вот диаграмма *a)* оказывается

важна в теории сверхпроводимости, и в гл.10 мы ее подробно изучим. Степень важности диаграммы  $a)$  и подобных ей более сложных диаграмм оказывается зависящей от знака взаимодействия. В случае притяжения ферми-жидкость исчезает, а взамен образуется сверхпроводящее состояние. В случае же отталкивания все выводы теории ферми-жидкости, полученные без учета диаграммы  $a)$ , остаются в силе.

## Глава 9.

# Электроны в случайном потенциале

### 9.1. Усреднение функций Грина по беспорядку

В этом разделе мы рассмотрим еще один вид задач, решаемых с помощью диаграммной техники — задачи о *невзаимодействующих* электронах, упруго рассеивающихся на примесях. Традиционно такие задачи описываются кинетическим уравнением Больцмана для функции распределения вероятности в фазовом пространстве  $n(\mathbf{p}, \mathbf{r}, t)$ . Кинетическое уравнение принимает наиболее простой вид в так называемом  $\tau$ -приближении, предполагающем изотропное рассеяние на примесях:

$$(\partial_t + \mathbf{v}\nabla_{\mathbf{r}} + \mathbf{F}\nabla_{\mathbf{p}}) n(\mathbf{p}, \mathbf{r}, t) = -\frac{1}{\tau} (n(\mathbf{p}, \mathbf{r}, t) - \bar{n}(|\mathbf{p}|, \mathbf{r}, t)). \quad (9.1)$$

Здесь  $\mathbf{F} = e\mathbf{E} + \frac{e}{c}\mathbf{v} \times \mathbf{B}$  — сила, действующая на электроны,  $\bar{n}(|\mathbf{p}|, \mathbf{r}, t)$  — среднее от функции распределения по направлениям импульса  $\mathbf{p}$ , а  $1/\tau$  — частота столкновений с примесями<sup>1</sup>.

Метод кинетического уравнения (9.1) является квазиклассическим, поскольку в нем используется понятие эволюции функции распределения  $n(\mathbf{p}, \mathbf{r}, t)$  в классическом фазовом пространстве. Кинетическое уравнение учитывает только те квантовые эффекты, которые относятся к статистике частиц. Диаграммная техника позволяет выяснить границы применимости кинетического уравнения, обосновать  $\tau$ -приближение, а также предсказать интересные квантовые эффекты в кинетике металлов, которые не описываются кинетическим уравнением.

Модель невзаимодействующих электронов представляют не только чисто методический интерес. Как известно, при рассмотрении динамики квазичастиц в ферми-жидкости роль взаимодействия сводится, главным образом, к переопределению различных констант ферми-газа (см. гл. 8). Поэтому в теории электронного транспорта в металлах пренебрежение электрон-электронным взаимодействием, в качестве первого приближения, вполне оправдано.

Рассмотрим, как формулируется диаграммная техника для задачи о рассеянии на примесях. Введем потенциал примесей в гамильтониан электронного газа. В простей-

---

<sup>1</sup>Обобщение интеграла столкновений в правой части (9.1) на случай более общего неізотропно-го рассеяния достигается введением своего времени релаксации для каждой сферической гармоники функции распределения.

шей модели потенциальное поле  $U(\mathbf{r})$ , в котором движутся электроны, создается рассеивающими центрами, расположенными в точках  $\mathbf{r}_i$ :

$$\widehat{\mathcal{H}}_{\text{int}} = \int U(\mathbf{r})\psi^+(\mathbf{r})\psi(\mathbf{r})d^3\mathbf{r}, \quad U(\mathbf{r}) = \sum_i u(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i). \quad (9.2)$$

Положения примесей  $\mathbf{r}_i$  будем считать случайными, а их концентрацию  $n$  — малой по сравнению с плотностью электронов  $n_{\text{el}} = \frac{4\pi}{3}(p_0/2\pi\hbar)^3$  (слабый беспорядок). Для упрощения вычислений мы примем, что потенциал примесей короткодействующий,  $u(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) = u_0\delta^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)$ , — иными словами, пренебрежем зависимостью амплитуды рассеяния от энергии и угла рассеяния. Помимо этого мы будем считать амплитуду рассеивающего потенциала  $u_0$  малой, что позволит рассмотреть рассеяние на одной примеси борновской теории возмущений для амплитуды рассеяния.

Функция Грина электрона, движущегося в потенциале (9.2), дается суммой таких диаграмм:

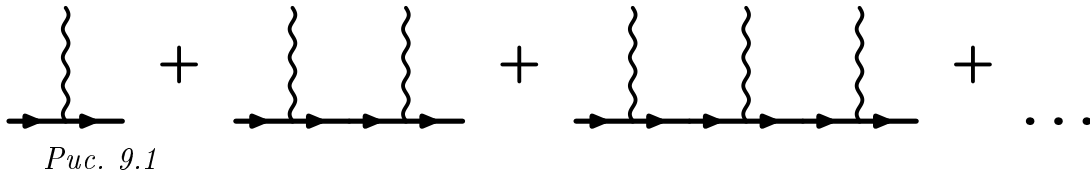


Рис. 9.1

Здесь волнистые линия обозначают потенциал примесей  $U(\mathbf{r})$  (см. рис. 3.1, гл. 3). Функция Грина в случайном внешнем поле (9.2), вообще говоря, не является трансляционно инвариантной. Однако практический интерес обычно представляют величины, усредненные по расположению примесей. Такие величины являются трансляционно инвариантными.

Выполним усреднение функции Грина по беспорядку. Для этого заметим, что потенциал  $U(\mathbf{r})$  в (9.2) есть сумма потенциалов отдельных примесей. Поэтому каждой вершине на рис. 9.1 может быть приписан номер примеси, по которому затем надо просуммировать:

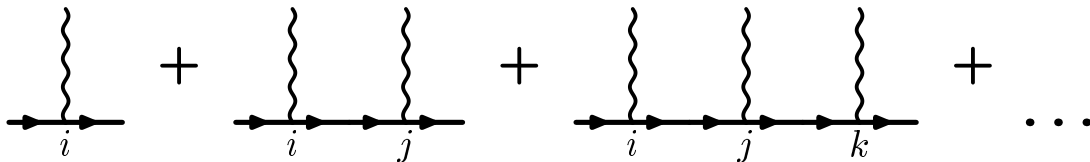


Рис. 9.2

Вначале рассмотрим диаграммы, в которых все номера примесей разные. Это означает, что рассеяние на каждой примеси рассматривается в первом борновском приближении, и что все вершины в диаграмме статистически независимы. После усреднения по положениям примесей мы получим, что все такие диаграммы приводят к сдвигу химпотенциала на величину  $\delta\mu = nu_0$ . Это естественно: средний потенциал примесей, равномерно размазанных по объему, равен именно этой величине.

Существенно однако то, что при рассмотрении рассеяния на одной примеси мы не можем ограничиться первым борновским приближением, ибо оно дает лишь тривиаль-

ный сдвиг химпотенциала, описанный выше. Нас интересует мнимая часть амплитуды рассеяния  $\text{Im } f$ , которая появляется лишь во втором борновском приближении по амплитуде рассеивающего потенциала  $u_0$ . Поскольку мнимая часть амплитуды рассеяния  $\text{Im } f$  возникает во втором порядке теории возмущений по  $u_0$ , она оказывается много меньше вещественной части  $\text{Re } f$ . Однако, согласно теореме унитарности (см. задачу 11, гл. 3), именно  $\text{Im } f$  определяет полное сечение рассеяния на потенциале примеси.

Поэтому нам необходимо изучить диаграммы, в которые одна и та же примесь входит два раза. Чтобы отметить этот факт, соединим пунктиром вершины, отвечающие совпадающим примесям:

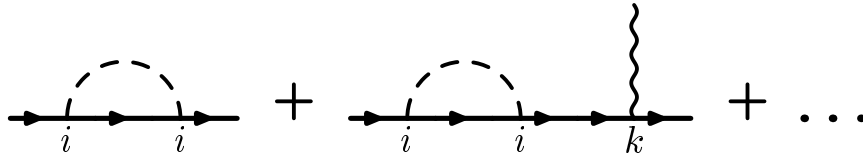


Рис. 9.3

Как и раньше, несвязанные пунктиром вершины, с точки зрения усреднения по положениям примесей, являются статистически независимыми. Вершины же, соединенные пунктиром, соответствуют одной и той же примеси. Мы будем рассматривать такой пунктир как новый элемент диаграммной техники. Усреднение по примесям дает для него такое выражение:

$$\sum_i \langle u(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) u(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_i) \rangle = nu_0^2 \delta^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (9.3)$$

Статический характер потенциала примесей  $U(\mathbf{r})$  выражается математически отсутствием какой-либо зависимости выражения (9.3) от моментов времени  $t$  и  $t'$ , в которые происходит первое и второе рассеяние.

Далее можно было бы учесть высшие порядки теории возмущений для рассеяния на одной примеси. Однако оказывается, что это эквивалентно замене амплитуды и сечения борновского рассеяния на соответствующие точные выражения (см. гл. 3), что, очевидно, не приводит к качественно новым эффектам. Поэтому разумно пренебречь такими поправками и принять, что рассеивающий потенциал слабый.

Подведем итог. На каждой примеси электрон рассеивается или один, или два раза. Однократные рассеяния просто сдвигают химпотенциал и потому могут вообще не учитываться. Вклад же двукратного рассеяния можно получить, вычисляя диаграммы следующего вида:



Рис. 9.4

При этом пунктирной линии сопоставляется выражение  $nu_0^2 \delta^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ .

В результате получается диаграммная техника *усреднения по беспорядку*<sup>2</sup>. Формально она напоминает диаграммную технику для электрон–фононного взаимодействия (с заменой функции Грина фононов на примесный пунктир). Однако имеются два существенных отличия:

- 1) Передача энергии по пунктиру равна нулю (упругое рассеяние).
- 2) Отсутствуют поляризационные петли, одевающие пунктир, подобные диаграммам на рис. 6.1.

Правило 1 очевидно. В справедливости же правила 2 легко убедиться, взглянув на диаграммы, показанные на рис. 9.1. Еще до усреднения по беспорядку в этих диаграммах отсутствуют замкнутые электронные петли.

Физически, замкнутые петли отсутствуют из-за того, что потенциал примесей, как говорят, «вмороженный», т. е., статический. Дело в том, что динамические величины, такие например как смещение атомов решетки, могут подстраиваться под заданную электронную плотность (и именно этот эффект и описывается поляризационными петлями в диаграммах на рис. 6.1). Статический же потенциал примесей не меняет свою реализацию с течением времени. Усреднение по нему происходит принципиально иным образом, чем по динамическим степеням свободы.

Напомним как определяется усреднение в системе электронов, взаимодействующих с фононами. В электрон–фононной диаграммной технике электронная функция Грина есть

$$G(x, x') = -i \frac{\langle T\psi^+(x)\psi(x')\hat{S} \rangle_0}{\langle \hat{S} \rangle_0}, \quad (9.4)$$

где среднее  $\langle \dots \rangle_0$  берется и по колебаниям решетки, и по основному состоянию ферми-газа. Обратим внимание, что усреднение происходит по-отдельности в числителе и в знаменателе.

Усреднение же по «вмороженному» беспорядку происходит иначе: вначале вычисляется функция Грина при заданной реализации беспорядка, и только потом происходит усреднение. Иными словами, по беспорядку усредняется сразу вся дробь (9.4):

$$\langle G(x, x') \rangle_{\text{disorder}} = -i \left\langle \frac{\langle T\psi^+(x)\psi(x')\hat{S} \rangle_0}{\langle \hat{S} \rangle_0} \right\rangle_{\text{disorder}}, \quad (9.5)$$

где среднее  $\langle \dots \rangle_0$  берется по основному состоянию ферми-газа. Усреднение функции Грина по беспорядку будет рассмотрено более подробно в задаче 50.

При оценке различных диаграмм, возникающих при усреднении по беспорядку, полезно иметь в виду их интерпретацию в координатном представлении. Выражение  $\delta^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$  в правой части (9.3) описывает возврат электрона на ту же примесь. Интересно, что в координатном представлении среднее от функции Грина принимает весьма простой вид (см. задачу 50 б)):

$$\langle G(\varepsilon, \mathbf{r}) \rangle = G_0(\varepsilon, \mathbf{r}) e^{-|\mathbf{r}|/2l}, \quad (9.6)$$

<sup>2</sup>По традиции ее также называют *крестовой диаграммной техникой*.



где  $G_0(\varepsilon, \mathbf{r})$  — неусредненная функция Грина, а  $l = v_F \tau$  — длина свободного пробега. Экспоненциальный множитель  $e^{-|\mathbf{r}|/2l}$  означает, что вероятность пролета электроном пути  $|\mathbf{r}|$  без столкновений с примесями равна  $e^{-|\mathbf{r}|/l}$  (вероятность есть квадрат амплитуды, т. е. квадрат модуля функции Грина). Такая же вероятность получается из кинетического уравнения (9.1).

В задачах, рассматриваемых в настоящей главе, электроны считаются невзаимодействующими, а рассеяние на примесях — упругим. Поэтому все обсуждаемые явления — одночастичные. Это означает, что, в принципе, можно было бы изучать поведение не ферми-системы, а одной частицы с заданной энергией  $E$ , найти ее вклад в кинетические величины, а затем просуммировать результат по всем занятым состояниям. Вместо этого мы будем пользоваться гриновскими функциями ферми-газа.

Естественно, при отсутствии взаимодействия эти два подхода, одночастичный и использующий ферми-газ, приводят к тождественным результатам. При одночастичном вычислении с последующим усреднением по фермиевскому распределению начальных состояний, вклады всех состояний, расположенных глубоко под ферми-поверхностью  $E = E_F$ , сократятся, поскольку в этой области энергий *все* состояния заполнены («дираковский вакуум»). Поэтому основной вклад всегда будет даваться только состояниями с энергиями в относительно узком интервале вокруг  $E_F$ , определяемом температурным размытием фермиевской ступеньки, частотой внешнего поля, и т. п. Сокращение вкладов состояний с энергиями, далеко отстоящими от  $E_F$ , означает, что при рассмотрении динамики в ферми-системе мы эффективно все равно имеем дело лишь с одной частицей на ферми-поверхности.

Кроме того (и это главное), использование функций Грина ферми-газа становится полностью оправданным, когда речь идет о взаимодействующих электронах. Хотя ситуации такого рода нам встретятся только в последующих главах (см. задачи 61, 62, 63, 64, 68), оказывается весьма полезным иметь некоторую преимущество.

Одночастичный характер рассматриваемых процессов упрощает физическую интерпретацию выражений, поскольку любой график, хотя формально и состоит из функций Грина ферми-газа, на самом деле описывает динамику всего одной частицы. Имея это в виду, можно считать электронную функцию Грина амплитудой перехода частицы из одной точки в другую, а дырочную — комплексно сопряженной амплитудой той же самой частицы.

## 9.2. Усреднение функций отклика

В задачах этой главы мы рассмотрим разнообразные функции отклика ферми-газа с примесями. Вообще говоря, функции отклика в неупорядоченной системе зависят от конкретной реализации беспорядка. Однако физический интерес в основном представляют функции отклика, усредненные по распределению всех возможных реализаций. Ниже мы обсудим, как выполняется такое усреднение.

Рассмотрим, например, линейный отклик плотности частиц  $\hat{n}(\mathbf{r}, t) = \psi^+(\mathbf{r}, t)\psi(\mathbf{r}, t)$  на слабое переменное внешнее поле  $V(\mathbf{r}, t)$ , взаимодействующее с плотностью:

$$\widehat{\mathcal{H}}_{int} = - \int \hat{n}(\mathbf{r}, t) V(\mathbf{r}, t) d^3\mathbf{r} . \quad (9.7)$$

Функция отклика плотности после перехода в представление Фурье по времени определяется соотношением:

$$\langle \hat{n}(\mathbf{r}_1, \omega) \rangle = \int K_{non-ave}(\omega, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) V(\mathbf{r}_2, \omega) d^3 \mathbf{r}_2 . \quad (9.8)$$

Ядро  $K_{non-ave}(\omega, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$  проще всего вычислять по мацубаровской технике, рассматривая отклик при дискретной мнимой частоте внешнего поля, который затем аналитически продолжается на вещественные частоты. Поскольку электрон-электронное взаимодействие в рассматриваемой задаче отсутствует, мацубаровский коррелятор плотность-плотность можно записать через точную функцию Грина электрона, движущегося в случайном потенциале:

$$K_{non-ave}(i\omega_n, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = T \sum_{\varepsilon_k} G^M(i\varepsilon_k, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) G^M(i\varepsilon_k + i\omega_n, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) . \quad (9.9)$$

В графическом представлении этот коррелятор выглядит так:

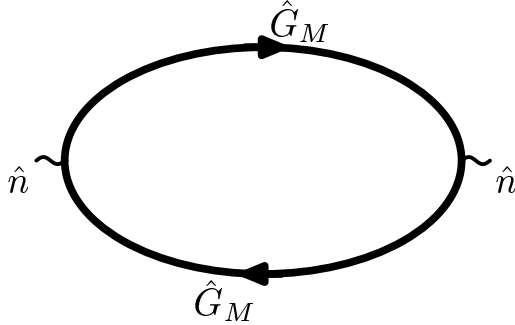


Рис. 9.5

Жирные линии обозначают точные функции Грина, изображенные на рис. 9.1.

Коррелятор  $K_{non-ave}(i\omega_n, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$  зависит от расположения примесей и поэтому зависит от обеих координат  $\mathbf{r}_1$  и  $\mathbf{r}_2$ , а не только от их разности. Однако система «в среднем» трансляционно инвариантна, поэтому усредненный по беспорядку коррелятор должен зависеть только от разности  $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ :

$$K(\omega, \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) = \langle K_{non-ave}(\omega, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \rangle_{\text{disorder}} . \quad (9.10)$$

Чтобы вычислить  $K(\omega, \mathbf{r})$ , нужно усреднить произведение двух функций Грина в (9.9) по беспорядку. Как и при усреднении одной функции Грина, нужно попарно связать примеси пунктирными линиями. Пунктиры, начинающиеся и заканчивающиеся на одной электронной линии, можно просуммировать, получив усредненную функцию Грина (см. задачу 50). Пунктиры же, соединяющие разные электронные линии, описывают отличие среднего произведения функций Грина в (9.9) от произведения средних. Таким образом, для вычисления среднего коррелятора в (9.10) надо просуммировать такую

последовательность диаграмм:

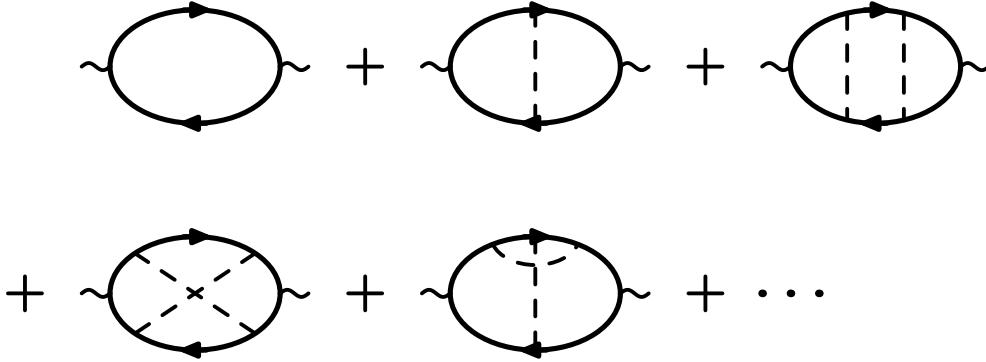


Рис. 9.6

Оказывается, однако, что не все диаграммы в этом ряде одинаково важны. В соответствии с основным принципом техники усреднения по беспорядку (см. разд. 9.5), основной вклад дается диаграммами, в которых примесные линии не пересекаются. Такая последовательность диаграмм называется *лестничным рядом*:

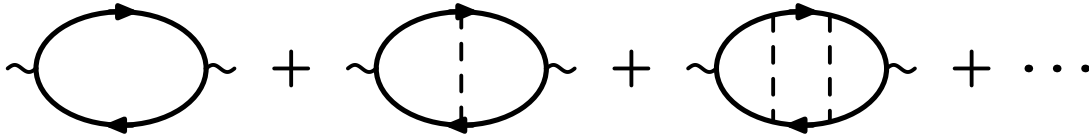


Рис. 9.7

При этом все функции Грина надо считать уже усредненными по беспорядку. Суммирование этой последовательности диаграмм будет выполнено в задаче 52.

Вычисление функции отклика тока  $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$  производится аналогично. В этом случае, однако, надо учитывать следующее обстоятельство. Оператор тока

$$\hat{\mathbf{j}}(\mathbf{r}, t) = \frac{e\hbar}{2m} \left( -i\psi^+(\mathbf{r}, t)\nabla\psi(\mathbf{r}, t) + \text{h.c.} \right) - \frac{e^2}{mc} \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \psi^+(\mathbf{r}, t)\psi(\mathbf{r}, t) \quad (9.11)$$

содержит векторный потенциал  $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$  в явном виде. Поэтому при добавлении в гамильтониан системы внешнего поля

$$\widehat{\mathcal{H}}_{\text{kinetic}} = \int \frac{1}{2m} \psi^+(\mathbf{r}) \left( -i\hbar\nabla - \frac{e}{c} \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \right)^2 \psi(\mathbf{r}) d^3\mathbf{r} \quad (9.12)$$

изменяется не только среднее значение оператора тока (как в случае с функцией отклика плотности), но и само выражение для этого оператора. Этот эффект не учитывается формулой Кубо, поэтому в неё необходимо добавить соответствующий вклад. В результате, в соответствие с (9.11), в токе имеется два вклада: градиентный и диамагнитный. Поэтому проводимость дается суммой выражений существенно разной природы. Во-первых, среднее от диамагнитного тока по основному состоянию есть  $\langle \mathbf{j}^{(1)} \rangle = -(ne^2/mc) \mathbf{A}$ , где  $n$  — электронная плотность. Во-вторых, находя мацубаровский отклик градиентной части тока на переменное поле, мы получаем:

$$\langle j_\alpha^{(2)}(\mathbf{r}) \rangle = -\frac{1}{c} \int \Pi_{\alpha\beta}^{(M)}(i\omega_n, \mathbf{r} - \mathbf{r}') A^\beta(\mathbf{r}') d^3\mathbf{r}', \quad (9.13)$$

где  $\Pi_{\alpha\beta}^{(M)}(i\omega_n, \mathbf{r} - \mathbf{r}')$  есть мацубаровский коррелятор ток–ток:

$$\Pi_{\alpha\beta}^{(M)}(i\omega_n, \mathbf{r} - \mathbf{r}') = -\frac{1}{2} \int_{-\beta}^{\beta} \langle T_{\tau} \hat{j}_{\alpha}(\tau, \mathbf{r}) \hat{j}_{\beta}(0, \mathbf{r}') \rangle e^{i\omega_n \tau} d\tau \quad (9.14)$$

(здесь  $\tau$  — мацубаровское время,  $\hat{j}_{\alpha}$  — компоненты градиентной части оператора тока). Поэтому полная мацубаровская корреляционная функция токов дается суммой двух слагаемых:

$$K_{\alpha\beta}^{jj(M)}(i\omega_n) = \Pi_{\alpha\beta}^{(M)}(i\omega_n, \mathbf{r} - \mathbf{r}') + \frac{ne^2}{m} \delta_{\alpha\beta} \delta^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (9.15)$$

Отклик на вещественной частоте получается из (9.15) аналитическим продолжением  $i\omega_n \rightarrow \omega$  ( $n > 0$ ).

Хотя, на первый взгляд, два члена в (9.15) имеют совершенно различную природу, на самом деле между ними имеется определенное соотношение. Действительно, в пределе низкой частоты проводимость должна быть конечной. Иными словами, однородный в пространстве и времени вектор-потенциал, не создающий электромагнитного поля, не должен создавать и ток. Поэтому должно выполняться тождество:

$$\Pi_{\alpha\beta}(\omega, \mathbf{k})|_{\mathbf{k}=0, \omega \rightarrow 0} = -\frac{ne^2}{m} \delta_{\alpha\beta}, \quad (9.16)$$

где  $\Pi_{\alpha\beta}(\omega, \mathbf{k}) = \int \Pi_{\alpha\beta}(\omega, \mathbf{r}) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}} d^3\mathbf{r}$  — поляризационный оператор (9.14) в частотно-импульсном представлении. Соотношение (9.16) аналогично известному из теории поля тождеству Уорда, гарантирующему калибровочную инвариантность поляризационного оператора. Подобно тождеству Уорда, в нашем случае равенство  $\Pi(0) = -ne^2/m$  обеспечивает калибровочную инвариантность проводимости.

В нормальном металле из-за калибровочной инвариантности запрещено соотношение между током и векторным потенциалом вида  $\mathbf{j} = \text{const } \mathbf{A}$ . Сокращение вкладов такого типа и обеспечивается тождеством (9.16). А вот в сверхпроводниках, из-за того, что калибровочная инвариантность нарушена, соотношение указанного вида справедливо (оно называется «уравнением Лондонов» и будет рассмотрено в задачах 60 и 62). В сверхпроводниках тождество (9.16) не имеет места.

Таким образом, хотя в токовой функции отклика (9.15) и появляется дополнительный диамагнитный член, «неправильно» ведущий себя на малых частотах, обычно он сокращается аналогичным вкладом из градиентной части функции отклика (9.14). Сама же градиентная часть вычисляется так же, как и функция отклика плотности. Она точно также описывается суммой диаграмм на рис. 9.7, только теперь на концах диаграмм стоят токовые вершины. Основной принцип, разумеется, работает и в этом случае, поэтому функция отклика тока тоже определяется лестничным рядом. В простейшем случае суммирование этого ряда проведено в задаче 51.

*Литература:* [1] §39, п.2; [6] гл. IX, §78

### 9.3. Задачи 50÷54

**Задача 50.** (*Функция Грина, усредненная по беспорядку*) Основной «принцип» техники усреднения по беспорядку заключается в том, что при усреднении какой-либо

величины по беспорядку основной вклад дают графики, в которых примесные пунктиры не пересекаются. Параметр, по которому графики с пересекающимися пунктирами оказываются малыми по сравнению с графиками, в которых пунктиры не пересекаются, есть  $(p_0 l)^{-1}$  — отношение фермиевской длины волны к длине свободного пробега  $l = v_F \tau$ . Обоснование этого «принципа» мы обсудим ниже, в разделе 9.5.

а) Усредните функцию Грина по беспорядку, рассматривая только графики с непересекающимися пунктирами. Получите среднее функции Грина в импульсном представлении:

$$\langle G(\varepsilon, \mathbf{p}) \rangle = \frac{1}{\varepsilon - \xi(\mathbf{p}) + \frac{i}{2\tau} \text{sign } \varepsilon}, \quad \frac{1}{2\tau} = \nu_0 n u_0^2, \quad (9.17)$$

где  $u_0 = \int u(\mathbf{r}) d^3 \mathbf{r}$ , а  $\nu_0 = m p_0 / 2\pi^2 \hbar^3$  — плотность состояний на уровне Ферми с одной проекцией спина.

б) Найдите  $\langle G(\varepsilon, \mathbf{r}) \rangle$  в координатном представлении при  $|\mathbf{r}| p_0 \gg 1$ . Выведите формулу (9.6). Покажите, что в случае усреднения функции Грина по беспорядку аналог квазиклассического выражения (5.23) принимает такой вид:

$$G(\varepsilon, \mathbf{r}) = -\frac{m}{2\pi |\mathbf{r}|} e^{(i p_0 \text{sign } \varepsilon + i|\varepsilon|/v_F - 1/2l)|\mathbf{r}|} \quad (9.18)$$

Это выражение справедливо при  $|\varepsilon| \ll \varepsilon_F$  и  $|\mathbf{r}| p_0 \gg 1$ .

**Задача 51.** (Проводимость электронного газа<sup>3</sup>) Проводимость газа электронов, рассеивающихся на примесях, дается хорошо известной формулой Друде:

$$\sigma(\omega) = \frac{\sigma_0}{1 - i\omega\tau}, \quad \sigma_0 = ne^2\tau/m. \quad (9.19)$$

Здесь  $\sigma_0$  — статическая проводимость,  $n$  — концентрация электронов,  $\tau$  — время свободного пробега. Нашей задачей будет получить соотношение (9.19) с помощью техники усреднения по беспорядку. Такой вывод представляет большой методический интерес, поскольку он позволяет проследить связь между диаграммной техникой и теорией кинетического уравнения.

Разумеется, наиболее простой вывод (9.19) использует кинетическое уравнение (9.1). Напомним, как это делается. В однородном электрическом поле  $e^{-i\omega t} \mathbf{E}$  функция распределения, возмущенная полем, не имеет явной зависимости от координат. Поэтому кинетическое уравнение (9.1), разложенное до членов линейных по полю  $\mathbf{E}$ , принимает вид:

$$-i\omega \delta n(\mathbf{p}) + e\mathbf{E} \nabla_{\mathbf{p}} n_0(\mathbf{p}) = -\frac{1}{\tau} \delta n(\mathbf{p}). \quad (9.20)$$

Здесь  $\delta n(\mathbf{p})$  — поправка к равновесной функции распределения  $n_0(\mathbf{p})$ , линейная по полю  $\mathbf{E}$ . Решая уравнение (9.20), получаем  $\delta n(\mathbf{p}) = (e\mathbf{E} \nabla_{\mathbf{p}} n_0(\mathbf{p})) / (i\omega - \tau^{-1})$  и находим ток:

$$\mathbf{j} = \int e v \delta n(\mathbf{p}) d^3 \mathbf{p} / (2\pi)^3 = \frac{e^2 n \mathbf{E}}{m(\tau^{-1} - i\omega)} \quad (9.21)$$

Напомним также, что в случае рассеяния более общего вида классическая проводимость определяется транспортным временем  $\tau_{\text{tr}}$ , вообще говоря не совпадающим с временем свободного пробега  $\tau$ .

<sup>3</sup> S.F. Edwards, *Phyl. Mag.*, series 8, **3**, 1020 (1958); А.А. Абрикосов, Л.П. Горьков, *ЖЭТФ* **35**, 1158 (1958); *ibid.*, **36**, 319 (1959)

Однако, для точечных примесей, рассеивающих изотропно, т. е. только в  $S$ - канале, эти два времени равны:  $\tau_{tr} = \tau$ .

Для вычисления проводимости с помощью диаграмм необходимо воспользоваться соотношением (9.15), связывающим функцию отклика с мацубаровским коррелятором ток-ток. Упростите мацубаровский коррелятор (9.14), предварительно записав его в форме

$$\Pi_{\alpha\beta}(i\omega_n) = T \sum_{\varepsilon_m=(2m+1)\pi T} \text{Tr} \left( \hat{G}^M(i\varepsilon_m + i\omega_n) \hat{j}_\alpha \hat{G}^M(i\varepsilon_m) \hat{j}_\beta \right), \quad (9.22)$$

справедливой для невзаимодействующих частиц (см. раздел 7.2.1). Выполните усреднение по беспорядку, рассматривая только диаграммы с непересекающимися пунктирами. С помощью соотношения (9.15) найдите проводимость.

**Задача 52.** (*Уравнение диффузии*) Выведите уравнение диффузии, рассматривая отклик плотности частиц на слабое переменное внешнее поле (9.7). Для этого просуммируйте лестничный ряд на рис. 9.7 (его в этой связи часто называют *диффузионной лестницей* или *диффузоном*). Покажите, что при  $|\mathbf{q}|l \ll 1$  и  $\omega_n\tau \ll 1$  усредненный коррелятор плотность–плотность есть

$$\mathcal{K}(i\omega_n, \mathbf{q}) = -\frac{\nu D \mathbf{q}^2}{|\omega_n| + D \mathbf{q}^2}, \quad D = \frac{1}{3} v_F l, \quad (9.23)$$

где  $\nu = 2\nu_0$  — плотность состояний на уровне Ферми для обеих проекций спина.

Рассмотрите графики, изображенные на рис. 9.7, в координатном представлении и объясните, почему они соответствуют процессу диффузии.

Выражение (9.23), аналитически продолженное с  $i\omega_n$  на верхней мнимой полуоси, согласуется с ответом, получающимся из классического уравнения диффузии. Действительно, уравнение диффузии в присутствии внешней силы  $F = -\nabla V$  записывается так:

$$\partial_t n = D \nabla^2 n - \eta \nabla(Fn), \quad (9.24)$$

где  $\eta = \nu D / n_0$  — подвижность. Поэтому, переходя к фурье–компонентам, имеем  $\mathcal{K}(\omega, \mathbf{q}) = -\nu D \mathbf{q}^2 / (-i\omega + D \mathbf{q}^2)$ .

Обратим внимание на то, что коэффициент диффузии  $D$  и проводимость, найденная в задаче 51, удовлетворяют соотношению Эйнштейна,

$$\sigma = e^2 \nu D, \quad (9.25)$$

как и должно быть.

**Задача 53.** (*Интерференционное удвоение вероятности возврата*) Рассмотрим вероятность  $p(t)$  того, что электрон после рассеяния на примесях возвращается в момент времени  $t$  в ту же точку, откуда он вышел при  $t = 0$ . В предыдущей задаче мы вывели уравнение диффузии, функция Грина которого, как известно, есть

$$\mathcal{D}(r, t) = (2\pi Dt)^{-\frac{n}{2}} e^{-r^2/2Dt}, \quad (9.26)$$

где  $n$  — размерность пространства. Для вероятности возврата это дает  $p(t) = (2\pi Dt)^{-\frac{n}{2}}$ .

Оказывается, благодаря эффектам интерференции рассеяния на разных примесях, которыми мы пренебрегли при выводе уравнения диффузии, вероятность возврата

$p(t)$  удваивается. Поясним физическое происхождение этого эффекта иллюстрацией из оптики. Пусть внутри большого ящика со случайно расположенными рассеивателями (примесями) находится монохроматический источник. Найдем интенсивность излучения, рассеянного точно обратно в источник. Интенсивность есть квадрат амплитуды, а амплитуда есть сумма амплитуд всех процессов многократного рассеяния на примесях:  $A_{\text{total}} = \sum_{\alpha} A_{\alpha}$ . Если примеси точечные, то вклады многократного рассеяния удобно характеризовать последовательностью примесей, пройденных излучением. Скажем, рассеявшись сначала на примеси 1, свет попадает на примесь 2, которая затем рассеивает его обратно в исходную точку. В общем случае

$$A_{\alpha} = A_{0 \rightarrow m} A_{m \rightarrow n} \dots A_{s \rightarrow 0} . \quad (9.27)$$

Поскольку расположение примесей случайно, фазы амплитуд  $A_{i \rightarrow j}$ , соответствующих различным последовательностям прохождения примесей, не скоррелированы. Поэтому интерференцией почти всех вкладов можно пренебречь — за одним единственным исключением, когда одна и та же (случайная!) последовательность примесей проходит-ся один раз в прямом, а другой — в обратном порядке. Каждые две такие амплитуды  $A_{\alpha}$  и  $A_{\alpha'}$  в точности равны друг другу и полностью интерферируют. Теперь заметим, что если бы интерференции вообще не было, интенсивность подчинялась бы уравнению диффузии, а из-за интерференции пар путей, проходящих по одной и той же траектории в противоположных направлениях, она оказывается в два раза больше:

$$|\sum A_{\alpha}|^2 = \sum' |A_{\alpha} + A_{\alpha'}|^2 = 2 \sum |A_{\alpha}|^2 . \quad (9.28)$$

(В сумме, помеченной штрихом, суммирование идет по последовательностям примесей без учета направления обхода.) Интерференционный вклад крайне чувствителен к положению конечной точки: уже на расстоянии нескольких длин волн от источника интенсивность рассеянного излучения уменьшается до «классического» значения, т. е. падает в два раза. Происходит это потому, что, как легко убедиться, для несовпадающих начальной и конечной точек одна и та же последовательность примесей при прохождении в противоположных направлениях дает разные набеги фаз.

Рассмотрим интерференционную часть коррелятора плотность-плотность электронов, соответствующую описанной картине. Покажите, что эта так называемая «квантовая поправка» дается *верными* графиками вида<sup>4</sup>

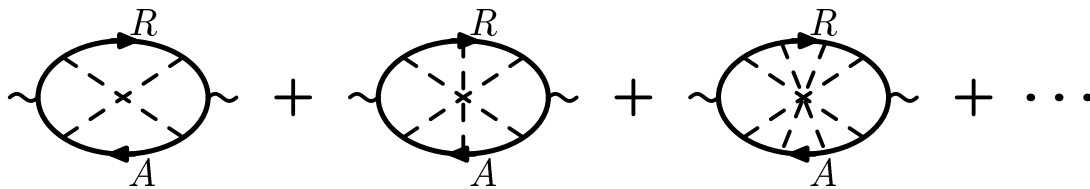


Рис. 9.8

<sup>4</sup>Верные графики для проводимости были впервые рассмотрены в работе: J. L. Langer, T. Neal, *Phys. Rev. Lett.* **16**, 984 (1966). Интерпретация роли соответствующего вклада в динамику электронов как интерференции при рассеянии назад принадлежит Д.Е. Хмельницкому.

а) (*Рассеяние точно назад*) Нарисуйте верные графики в координатном представлении. Пусть начальная и конечная точки совпадают. Покажите, что каждый вклад с фиксированным числом пунктиров в веере на рис. 9.8 равен соответствующему вкладу из диффузионной лестницы, рассмотренной в задаче 52 (см. рис. 9.7), и значит вероятность возврата в два раза больше классического значения.

Обратим внимание на то, что почленное соответствие между веерным и лестничным рядами неполное, поскольку первым двум членам диффузионной лестницы в веерных графиках сопоставить нечего. Однако, на больших временах  $t \gg \tau$ , когда справедливо диффузионное приближение, каждое слагаемое диффузионной лестницы много меньше их суммы (см. решение задачи 52). Поэтому поправка, возникающая из-за несоответствия первых двух членов диффузионного и веерного рядов, оказывается малой и не влияет на удвоение вероятности возврата.

б) (*Координатная зависимость*) Теперь рассмотрим случай, когда начальная и конечная точки находятся на расстоянии  $r$ . Найдите зависимость квантовой поправки от  $r$ . Вычисление удобно проводить в координатном представлении, пользуясь функцией Грина, найденной в задаче 22. Покажите, что интерференционная поправка ослабляется при  $p_0 r \simeq 1$  и определите характер ее убывания при  $p_0 r \gg 1$ .

**Задача 54.** (*Квантовая поправка к проводимости*<sup>5</sup>) Рассмотрим статическую проводимость  $\sigma_0$  двумерного электронного газа. Хотя в задаче 51 речь формально шла о трехмерной системе, все её результаты, как нетрудно видеть, переносятся без каких-либо существенных изменений на случай произвольной размерности. Поэтому проводимость двумерной системы в главном порядке по параметру  $(p_0 l)^{-1}$  дается формулой Друде.

В этой задаче нас будет интересовать следующий член в формальном разложении проводимости по степеням  $(p_0 l)^{-1}$ . Для того, чтобы его найти, нужно рассмотреть всевозможные способы усреднения петлевой диаграммы для коррелятора ток-ток (см. рис. 9.12), при которых примесные линии пересекаются, но делают это «минимальным образом».

Покажите, что при этом получаются веерные графики, подобные изображенным на рис. 9.8, и что ими исчерпываются все минимально пересекающиеся диаграммы. Эти графики определяют главную квантовую поправку в любой размерности, но наиболее интересной оказывается двумерная ситуация.

Просуммируйте последовательность графиков на рис. 9.8 при  $D = 2$ , перерисовав их в виде, показанном на рис. 9.9, и обращаясь с получившейся лестницей так же, как с диффузионной лестницей в задаче 51.

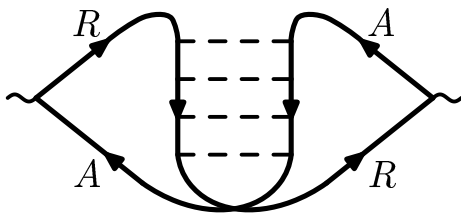


Рис. 9.9

<sup>5</sup>Явление слабой локализации в двумерной системе, которое приводит к особенностям в квантовой поправке к проводимости, было впервые рассмотрено в работе: Л.П. Горьков, А.И. Ларкин, Д.Е. Хмельницкий, *Письма в ЖЭТФ*, **30**, 248 (1979).



Получите поправку к проводимости

$$\delta\sigma(\omega) = -\frac{1}{\pi} \frac{e^2}{h} \ln \frac{1}{\omega\tau}, \quad (9.29)$$

где  $\omega$  — частота внешнего поля. Поправка *расходится* при  $\omega \rightarrow 0$ . Формально это означает, что теория кинетического уравнения неприменима на больших временах  $t \geq \tau \exp(p_0 l)$ , поскольку в этой области  $\delta\sigma$  сравнивается с  $\sigma_0$ . Поправка отрицательна и растет по абсолютной величине когда  $\omega \rightarrow 0$ , что указывает на отсутствие проводимости в двумерном электронном газе при  $T = 0$  (см. раздел 9.6).

## 9.4. Решения

**Решение 50 а)** Найдем функцию Грина, усредненную по беспорядку, используя импульсное представление. Гамильтониан имеет вид  $\widehat{\mathcal{H}} = \widehat{\mathcal{H}}_0 + \widehat{\mathcal{H}}_{\text{int}}$ , где  $\widehat{\mathcal{H}}_0$  — кинетическая энергия, а  $\widehat{\mathcal{H}}_{\text{int}} = \sum_i \widehat{\mathcal{H}}_i$  — потенциал примесей:

$$\widehat{\mathcal{H}}_i = \iint \psi^\dagger(\mathbf{p}) u(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \psi(\mathbf{p}') e^{i(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \mathbf{r}_i} \frac{d^3 p d^3 p'}{(2\pi)^6}. \quad (9.30)$$

(Здесь  $u(\mathbf{p}) = \int u(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{p}\mathbf{r}} d^3 \mathbf{r}$  — фурье-образ потенциала одной примеси.) Считая  $\widehat{\mathcal{H}}_{\text{int}}$  возмущением, разложим функцию Грина в ряд по потенциалу

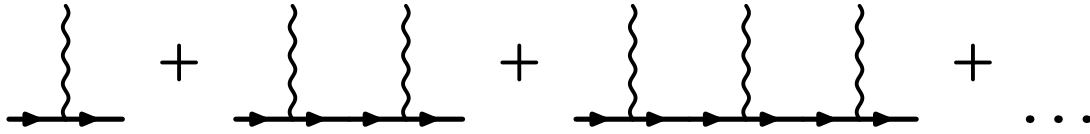


Рис. 9.10

и усредним почленно. Первое слагаемое от потенциала не зависит, и есть просто функция Грина свободной частицы:

$$G^{(0)}(\varepsilon, \mathbf{p}, \mathbf{p}') = (2\pi)^3 G_0(\varepsilon, \mathbf{p}) \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}'). \quad (9.31)$$

Второе слагаемое имеет вид  $\sum_i G_i^{(1)}$ , где

$$G_i^{(1)}(\varepsilon, \mathbf{p}, \mathbf{p}') = G_0(\varepsilon, \mathbf{p}) u(\mathbf{p} - \mathbf{p}') e^{i(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \mathbf{r}_i} G_0(\varepsilon, \mathbf{p}') \quad (9.32)$$

Усреднение по положениям примесей  $\mathbf{r}_i$  можно выполнить с помощью формулы

$$\langle e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}} \rangle = \frac{1}{V} \int e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}_i} d^3 r_i = \frac{1}{V} (2\pi)^3 \delta(\mathbf{q}). \quad (9.33)$$

Получаем

$$\langle G_i^{(1)}(\varepsilon, \mathbf{p}, \mathbf{p}') \rangle = [G_0(\mathbf{p})]^2 (2\pi)^3 \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \frac{u_0}{V}. \quad (9.34)$$

Сумма по  $i$  дает

$$\langle G^{(1)}(\varepsilon, \mathbf{p}, \mathbf{p}') \rangle = nu_0 (2\pi)^3 \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}') [G_0(\mathbf{p})]^2, \quad (9.35)$$

где  $n = N/V$  — концентрация примесей.

Перейдем к третьему слагаемому, имеющему вид  $\sum_{ij} G_{ij}^{(2)}$ , где

$$G_{ij}^{(2)}(\varepsilon, \mathbf{p}, \mathbf{p}') = G_0(\mathbf{p})G_0(\mathbf{p}') \int u(\mathbf{p} - \mathbf{p}_1)u(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}')G_0(\mathbf{p}_1) \\ \times e^{-i(\mathbf{p}-\mathbf{p}_1)\mathbf{r}_i - i(\mathbf{p}_1-\mathbf{p}')\mathbf{r}_j} \frac{d^3 p_1}{(2\pi)^3}.$$

Это выражение содержит вклады двух различных процессов: двукратного рассеяния на одной примеси ( $i = j$ ), и однократного рассеяния на двух различных примесях ( $i \neq j$ ). При усреднении эти вклады надо разделять.

В случае  $i = j$  усредняем по формуле

$$\langle e^{-i(\mathbf{p}-\mathbf{p}')\mathbf{r}_i} \rangle = \frac{1}{V}(2\pi)^3 \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \quad (9.36)$$

и получаем

$$\langle G_{ii}^{(2)}(\varepsilon, \mathbf{p}, \mathbf{p}') \rangle = \frac{1}{V}(2\pi)^3 \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}') G_0^2(\varepsilon, \mathbf{p}) \int \frac{d^3 p_1}{(2\pi)^3} |u(\mathbf{p} - \mathbf{p}_1)|^2 G_0(\varepsilon, \mathbf{p}_1). \quad (9.37)$$

Во втором случае ( $i \neq j$ ) усреднение выглядит так:

$$\langle e^{-i(\mathbf{p}-\mathbf{p}_1)\mathbf{r}_i - i(\mathbf{p}_1-\mathbf{p}')\mathbf{r}_j} \rangle = \frac{1}{V^2}(2\pi)^6 \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{p}_1) \delta(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}'). \quad (9.38)$$

Таким образом, находим

$$\langle G_{ij}^{(2)}(\varepsilon, \mathbf{p}, \mathbf{p}') \rangle = \frac{1}{V^2}(2\pi)^3 \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}') G_0^3(\varepsilon, \mathbf{p}) u_0^2 \quad (9.39)$$

После суммирования по всем примесям выражение (9.37) умножается на  $N$ , а выражение (9.39) — на  $N^2$ . Получаются два вклада, пропорциональные первой и второй степени концентрации примесей  $n = N/V$ , соответственно.

При усреднении следующих членов разложения функции Грина по потенциалу примесей, третьей и более высоких степеней, обозначенных точками на рис. 9.10, поступим так. В каждом порядке выделим процессы рассеяния, когда на каждой примеси электрон рассеивается либо один раз, либо два. Более высокими порядками будем пренебрегать, поскольку потенциал слабый. После усреднения и суммирования ряда, сводящегося, как обычно, к геометрической прогрессии, вклады однократных и двукратных процессов рассеяния выражаются как собственно-энергетическая часть усредненной гриновской функции. Ее нетрудно найти, сравнивая выражения (9.35), (9.37), и (9.39) с разложением

$$\langle G(\varepsilon, \mathbf{p}, \mathbf{p}') \rangle = (2\pi)^3 \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \left( G_0^{-1}(\varepsilon, \mathbf{p}) - \langle \Sigma \rangle \right)^{-1} \quad (9.40)$$

в ряд по  $\Sigma$ .

Отметим еще раз, что пренебречь двукратным рассеянием по сравнению с однократными нельзя. Согласно теореме унитарности (см. задачу 15), именно двукратные процессы рассеяния и определяют борновское сечение рассеяния. Действительно, сечение рассеяния равно мнимой части амплитуды рассеяния, в то время как борновская амплитуда первого порядка чисто вещественна.

Выражение (9.35) дает вклад в  $\Sigma$ , равный

$$\langle \Sigma^{(1)} \rangle = \frac{N}{V} u_0 = n u_0 . \quad (9.41)$$

Выражение (9.39) поправок к  $\Sigma$  не дает. Оно представляет собой просто член второго порядка в разложении  $\langle G(\varepsilon, \mathbf{p}, \mathbf{p}') \rangle$  по  $\langle \Sigma^{(1)} \rangle$ . Вклад  $\langle \Sigma^{(1)} \rangle$  действителен и не зависит от  $p$ . Поэтому его можно интерпретировать как перенормировку химического потенциала

$$\mu \rightarrow \mu^* = \mu - \langle \Sigma^{(1)} \rangle . \quad (9.42)$$

Гораздо больший интерес представляет вклад от двукратных процессов рассеяния. Выражение (9.37) дает

$$\langle \Sigma^{(2)} \rangle_{(ii)} = \frac{N}{V} \int |u(\mathbf{p} - \mathbf{p}_1)|^2 G_0(\mathbf{p}, \omega) \frac{d^3 p_1}{(2\pi)^3} . \quad (9.43)$$

Как мы видели в гл. 3, с точки зрения теории рассеяния это выражение представляет собой второй член борновского разложения амплитуды рассеяния вперед. Его мнимая часть, с точностью до коэффициента, есть просто полное борновское сечение рассеяния, пропорциональное квадрату борновской амплитуды первого порядка, проинтегрированной по углам.

Найдем  $\Sigma^{(2)}$  для  $\delta$ -функциональных примесей (для краткости знак усреднения по примесям здесь и далее будем опускать). Фурье-разложение потенциала  $u(\mathbf{r}) = u_0 \delta^{(3)}(\mathbf{r})$  есть константа:  $u(\mathbf{q}) = \int u(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{q}\mathbf{r}} d^3 r = u_0$ . Поэтому

$$\begin{aligned} \Sigma^{(2)} &= \int |u(\mathbf{p} - \mathbf{p}_1)|^2 G_0(\mathbf{p}_1) \frac{d^3 \mathbf{p}_1}{(2\pi)^3} = u_0^2 \int G_0(\mathbf{p}_1) \frac{d^3 \mathbf{p}_1}{(2\pi)^3} \\ &= \frac{u_0^2}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{\varepsilon - \xi + i0 \operatorname{sign} \varepsilon} = \frac{4\pi u_0^2 p_0^2}{(2\pi)^3 V_0} \int \frac{d\xi}{\varepsilon - \xi + i0 \operatorname{sign} \varepsilon} \\ &= \frac{4\pi u_0^2}{(2\pi)^3} m p_0 (-\pi i) \operatorname{sign} \varepsilon = -\frac{i}{2\pi} u_0^2 m p_0 \operatorname{sign} \varepsilon . \end{aligned} \quad (9.44)$$

Интегрирование по импульсу  $\mathbf{p}_1$  в  $\xi$ -приближении выделяет вклад, связанный с резкой поверхностью Ферми. Он мнимый, и его знак меняется на ферми-поверхности скачком, как и должно быть согласно аналитическим свойствам причинной гриновской функции. Более точное интегрирование, с учетом вкладов от импульсов далеких от ферми-поверхности, могло бы дать вклад в вещественную часть  $\Sigma^{(2)}$ , регулярную вблизи ферми-поверхности. Рассматривать такие вклады, представляющие собой поправки более высокого порядка к химическому потенциалу  $\mu$ , мы не будем. Таким образом, находим:

$$\Sigma^{(2)} = -\frac{i}{2\tau} \operatorname{sign} \varepsilon , \quad (9.45)$$

где время рассеяния  $\tau$  дается выражением

$$\frac{1}{\tau} = \frac{m p_0 n}{\pi} \left| \int u(\mathbf{r}) d^3 r \right|^2 . \quad (9.46)$$

Окончательно получаем функцию Грина в виде

$$\langle G(\varepsilon, \mathbf{p}, \mathbf{p}') \rangle = \frac{(2\pi)^3 \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}')}{\varepsilon - p^2/2m + \mu^* + \frac{i}{2\tau} \text{sign } \varepsilon}. \quad (9.47)$$

К такому же результату можно прийти и другим, несколько менее тяжеловесным способом, используя уравнение Дайсона. Снова представим точную функцию Грина в виде ряда рис. 9.10 по потенциалу. Усредняя каждый член по положениям примесей, будем пользоваться стандартными обозначениями: потенциал примеси обозначим волнистой линией, причем в случаях, когда рассеяние на одной и той же примеси происходит два раза<sup>6</sup>, будем вместо двух волнистых линий рисовать одну пунктирную, соединяющую точки взаимодействия.

Далее, каждую диаграмму, дающую вклад в среднее гриновской функции, разобьем на связанные графики, причем, естественно, будем считать пунктиры составной частью графиков. (Напомним, что связным называется график, который нельзя разбить на части, удалив какую-нибудь одну гриновскую функцию.) Сумма всех таких связанных графиков есть собственно-энергетическая часть  $\Sigma$ . С помощью уравнения Дайсона функция Грина  $G$  может быть выражена через  $\Sigma$  и затравочную гриновскую функцию  $G_0$  (см. (4.9), гл. 4). Таким образом, получаем:

$$\langle G \rangle = G_0 + G_0 \Sigma \langle G \rangle, \quad \text{или} \quad \langle G \rangle^{-1} = G_0^{-1} - \Sigma. \quad (9.48)$$

Здесь затравочная функция Грина есть  $G_0^{-1} = \varepsilon - \xi + i0 \text{sign } \varepsilon$ .

Собственно-энергетическая часть, взятая в борновском приближении, содержит вклад от однократного взаимодействия с потенциалом примесей, которому сопоставляется среднее от этого потенциала  $nu_0$ , а также вклад от двукратного рассеяния, изображаемый на диаграммах пунктиром, которому сопоставляется борновская амплитуда второго порядка. При этом, следуя «основному принципу» техники усреднения по беспорядку (см. раздел 9.5), мы пренебрегаем графиками с пересекающимися пунктирами. Графически, уравнение Дайсона для собственно-энергетической части имеет вид

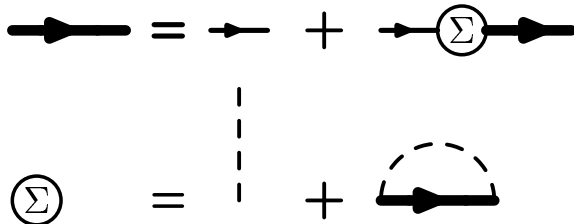


Рис. 9.11

То есть,

$$\Sigma(\varepsilon, \mathbf{p}) = nu_0 + n \int \frac{|u(\mathbf{p} - \mathbf{p}_1)|^2}{\varepsilon - \xi_{\mathbf{p}_1} - \Sigma(\varepsilon, \mathbf{p}_1) + i0 \text{sign } \varepsilon} \frac{d^3 \mathbf{p}_1}{(2\pi)^3} \quad (9.49)$$

<sup>6</sup>В борновском приближении для слабого потенциала рассеяния достаточно ограничиться однократными и двукратными процессами рассеяния.

Чтобы решить это уравнение, заметим, что в случае  $\delta$ -функциональных примесей фурье-компонента  $u(\mathbf{p} - \mathbf{p}_1) = u_0$  выносится из-под интеграла (9.49). Это позволяет искать решение в виде функции  $\Sigma(\varepsilon)$ , зависящей только от  $\varepsilon$ . Будем искать решение в такой форме:  $\Sigma(\varepsilon) = \delta\mu - (i/2\tau) \text{sign } \varepsilon$ . Подставив эту функцию в уравнение Дайсона (9.49), убеждаемся, что решение дается суммой выражений (9.41) и (9.45). Итак, усредняя по беспорядку, находим

$$\langle G(\varepsilon, \mathbf{p}) \rangle = \frac{1}{\varepsilon - \frac{p^2}{2m} + \mu^* + \frac{i}{2\tau} \text{sign } \varepsilon}. \quad (9.50)$$

**Решение 50 б)** Теперь нетрудно получить среднее гриновской функции в координатном представлении. В фурье-образе функции Грина  $G(\varepsilon, \mathbf{r}) = \int G(\varepsilon, \mathbf{p}) e^{i\mathbf{p}\mathbf{r}} \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3}$  переходим к интегралу по  $\xi$ :

$$\langle G(\varepsilon, \mathbf{r}) \rangle = \frac{4\pi}{(2\pi)^3} \int \frac{p_0}{v_0|\mathbf{r}|} \frac{\sin |\mathbf{r}|p(\xi) d\xi}{\varepsilon - \xi + \frac{i}{2\tau} \text{sign } \varepsilon}, \quad (9.51)$$

где  $p(\xi) = p_0 + \xi/v_F$ . Выполнить интегрирование по  $\xi$  можно точно таким же способом, как в задаче 22 (см. формулы (5.23) и (5.25)). При этом сдвиг полюса  $\varepsilon \rightarrow \varepsilon + i \text{sign } \varepsilon/2\tau$  приводит к дополнительному экспоненциальному множителю:

$$\langle G(\varepsilon, \mathbf{r}) \rangle = G_0(\varepsilon, \mathbf{r}) e^{-|\mathbf{r}|/2l}, \quad \text{где } G_0(\varepsilon, \mathbf{r}) = -\frac{m}{2\pi|\mathbf{r}|} e^{i \text{sign } \varepsilon(p_0 + \varepsilon/v_F)|\mathbf{r}|}, \quad (9.52)$$

а  $l = v_F\tau$  — длина свободного пробега, вычисленная по борновскому сечению рассеяния. В результате получается квазиклассическое выражение (9.18).

**Решение 51.** Вычислим проводимость в однородном переменном электрическом поле, используя теорию возмущений по малой концентрации примесей. Воспользуемся приведенным в условии задачи соотношением (9.15) между проводимостью и мацубаровским коррелятором ток-ток  $\Pi_{\alpha\beta}(i\omega_n)$ .

Даже если нас интересует статическая проводимость, лучше сначала рассмотреть проводимость на конечной частоте, а затем устремить частоту к нулю. Дело в том, проводимость «плохо себя ведет» в пределе нулевой концентрации примесей. Действительно, статическая проводимость чистого металла, то есть идеального ферми-газа, обращается в бесконечность, в то время как проводимость на переменном токе конечна:  $\sigma(\omega) = in e^2/m\omega$ . Поэтому, даже в присутствии рассеяния, правильно сначала рассматривать ток в переменном поле, и уже потом переходить к статическому пределу.

Согласно (9.22), для невзаимодействующих частиц коррелятор ток-ток выражается через произведение двух гриновских функций. Графически выражение (9.22) для  $\Pi_{\alpha\beta}(i\omega_n)$  изображается петлевой диаграммой:

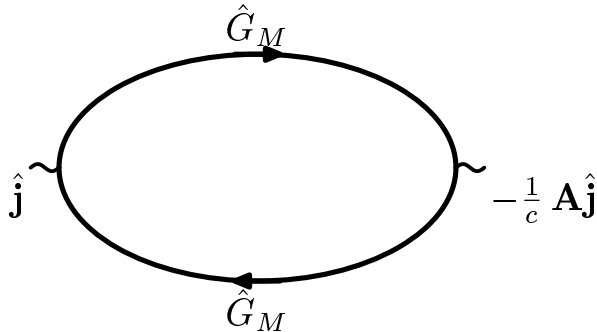


Рис. 9.12

Волнистые линии в вершинах обозначают компоненты оператора тока  $\hat{j}_\alpha = -i\frac{e\hbar}{2m}\psi^\dagger\nabla_\alpha\psi + \text{h.c.}$

Запишем среднее коррелятора  $\Pi_{\alpha\beta}(i\omega_n)$  по беспорядку:

$$\langle\Pi_{\alpha\beta}(i\omega_n)\rangle = e^2 T \sum_{\varepsilon_k} \left\langle \text{Tr} \left( \hat{G}^M(i\varepsilon_k + i\omega_n) \hat{v}_\alpha \hat{G}^M(i\varepsilon_k) \hat{v}_\beta \right) \right\rangle, \quad (9.53)$$

где  $\varepsilon_k = (2k+1)\pi T$ , а  $\hat{v}_\alpha = \hat{p}_\alpha/m$  — компоненты оператора скорости. Результат усреднения можно представить как сумму графиков, имеющих вид петли из мацубаровских функций Грина, показанной на рис. 9.12, всевозможными способами одетой примесными пунктирами.

Главный вклад при усреднении по беспорядку в случае малой концентрации примесей  $p_0 l \gg 1$  дают графики с непересекающимися примесными линиями:



Рис. 9.13

Если рассматривать только графики такого типа, то усреднение сильно упрощается.

Заметим что, вообще говоря, среднее  $\langle G^M(\varepsilon)G^M(\varepsilon') \rangle$  по беспорядку *не равно* произведению средних  $\langle G^M(\varepsilon) \rangle \langle G^M(\varepsilon') \rangle$ . В рассматриваемом приближении непересекающихся примесных линий в разность  $\langle G^M(\varepsilon)G^M(\varepsilon') \rangle - \langle G^M(\varepsilon) \rangle \langle G^M(\varepsilon') \rangle$  дают вклад диаграммы, содержащие примесные пунктиры, соединяющие  $G^M(\varepsilon)$  и  $G^M(\varepsilon')$ , подобные второму и четвертому графикам на рис. 9.13. Иными словами, отличие  $\langle G^M(\varepsilon)G^M(\varepsilon') \rangle$  от  $\langle G^M(\varepsilon) \rangle \langle G^M(\varepsilon') \rangle$  обусловлено примесями, входящими одновременно и в  $G^M(\varepsilon)$ , и в  $G^M(\varepsilon')$ .

Однако, оказывается, что для точечных  $\delta$ -примесей *любые* такие диаграммы с непересекающимися примесными линиями оказываются равными нулю. Причина этого заключается в том, что для точечных примесей пунктир не зависит от передаваемого по нему импульса. Поэтому, соединив две функции Грина на рис. 9.12 пунктиром, мы «развязываем» импульсы в вершинах диаграммы. В результате, поскольку токовая вершина нечетна по импульсу, любая такая диаграмма обращается в ноль при интегрировании по импульсам. Итак, в задаче о проводимости в приближении непересекающихся пунктиров отличие  $\langle G^M(\varepsilon)G^M(\varepsilon') \rangle$  от  $\langle G^M(\varepsilon) \rangle \langle G^M(\varepsilon') \rangle$  можно не учитывать.

Заметим, что с точно такой же ситуацией мы уже встречались в задаче 14, где точечность рассеивателя приводила к занулению диаграмм с разделенными токовыми вершинами при интегрировании по импульсам.

При этом существенно, что рассеяние чисто изотропное, т. е. при рассеянии отсутствует какая-либо корреляция между направлениями начальной и конечной скорости. Поэтому описанное упрощение имеет место только для точечных примесей, рассеивающих в  $S$ -канале, когда  $\tau_{\text{tr}} = \tau$ . Для примесей, рассеивающих не только в  $S$ -канале, эти два времени не равны. В этом случае приходится суммировать лестницу, напоминающую диффузионную (рис. 9.7), но с векторными вершинами, в результате чего и происходит замена  $\tau$  на  $\tau_{\text{tr}}$ .

Учитывая это обстоятельство, мы видим, что усреднение двух функций Грина в (9.53) расщепляется в произведение средних:

$$\langle \Pi_{\alpha\beta}(i\omega_n) \rangle = e^2 T \sum_{\varepsilon_k} \text{Tr} \left( \langle \hat{G}^M(i\varepsilon_k + i\omega_n) \rangle \hat{v}_\alpha \langle \hat{G}^M(i\varepsilon_k) \rangle \hat{v}_\beta \right) . \quad (9.54)$$

Функция Грина, усредненная по беспорядку, согласно (9.17), имеет вид  $\langle G(\varepsilon_k, \mathbf{p}) \rangle = 1/(i\varepsilon_k - \xi(\mathbf{p}) + \frac{i}{2\tau} \text{sign } \varepsilon_k)$ . Поэтому выражение (9.54) можно записать так:

$$\langle \Pi_{\alpha\beta}(i\omega_n) \rangle = e^2 T \sum_{\varepsilon_k} \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{(p_\alpha/m)(p_\beta/m)}{(i\tilde{\varepsilon}'_k - \xi(\mathbf{p}))(i\tilde{\varepsilon}_k - \xi(\mathbf{p}))} , \quad (9.55)$$

где  $\tilde{\varepsilon}'_k = \varepsilon_k + \omega_n + \frac{1}{2\tau} \text{sign}(\varepsilon_k + \omega_n)$ ,  $\tilde{\varepsilon}_k = \varepsilon_k + \frac{1}{2\tau} \text{sign } \varepsilon_k$ .

Прежде чем приступить к вычислению выражения (9.55), проверим, что выполняется тождество  $\langle \Pi_{\alpha\beta}(0) \rangle = -\frac{ne^2}{m} \delta_{\alpha\beta}$ . Для этого воспользуемся соотношением

$$\frac{1}{m} \mathbf{p} \langle \hat{G}^M(i\varepsilon, \mathbf{p}) \rangle^2 = \nabla_{\mathbf{p}} \langle \hat{G}^M(i\varepsilon, \mathbf{p}) \rangle , \quad (9.56)$$

и представим выражение (9.55), взятое при  $\varepsilon'_k = \varepsilon_k$ , в таком виде:

$$\langle \Pi_{\alpha\beta}(0) \rangle = \frac{e^2}{m} T \sum_{\varepsilon_k} \int p_\alpha \nabla_{p_\beta} \langle \hat{G}^M(i\varepsilon_k, \mathbf{p}) \rangle \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3} \quad (9.57)$$

Интеграл по  $d^3 \mathbf{p}$  возьмем по частям, перенеся действие  $\nabla_{p_\beta}$  на  $p_\alpha$ . Получим:

$$\langle \Pi_{\alpha\beta}(0) \rangle = -\frac{e^2}{m} \delta_{\alpha\beta} T \sum_{\varepsilon_k} \int \langle \hat{G}^M(i\varepsilon_k, \mathbf{p}) \rangle \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3} \quad (9.58)$$

Имея в виду известное соотношение (2.12) между плотностью частиц и функцией Грина, получаем требуемое тождество.

Перейдем теперь к вычислению выражения (9.55). С технической точки зрения, наиболее просто было бы проинтегрировать вначале по  $d^3 \mathbf{p}$ . Однако, формально этот интеграл расходится на  $|\mathbf{p}| \gg p_0$ . Чтобы обойти эту трудность, рассмотрим разность  $\langle \Pi_{\alpha\beta}(i\omega_n) \rangle - \langle \Pi_{\alpha\beta}(0) \rangle$  и представим ее в таком виде:

$$\frac{e^2}{m^2} T \sum_{\varepsilon_k} \int p_\alpha p_\beta \left[ \langle \hat{G}^M(i\varepsilon_k + i\omega_n, \mathbf{p}) \rangle - \langle \hat{G}^M(i\varepsilon_k, \mathbf{p}) \rangle \right] \langle \hat{G}^M(i\varepsilon_k, \mathbf{p}) \rangle \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3} . \quad (9.59)$$

В этом выражении интеграл по  $d^3 \mathbf{p}$  сходится, и более того, как нетрудно видеть, его величина определяется малой окрестностью ферми-поверхности:  $\delta\xi \sim \max[\omega_n, \tau^{-1}]$ . Поэтому в (9.59) можно перейти к интегрированию по  $\xi$ , заменив среднее по углам от  $p_\alpha p_\beta$  на  $\frac{1}{3} p_0^2 \delta_{\alpha\beta}$ . Интеграл по  $\xi$  от двух слагаемых в (9.59) можно вычислять по отдельности. (Отмеченная выше расходимость при больших  $\mathbf{p}$  не имеет отношения к вкладу малой окрестности ферми-поверхности, который мы получаем при интегрировании по  $\xi$ .)

Взяв интеграл по  $\xi$  от первого слагаемого в (9.59), получаем:

$$\frac{\pi}{3} e^2 v_F^2 \nu_0 T \sum_{\varepsilon_k} \frac{\text{sign } \varepsilon'_k - \text{sign } \varepsilon_k}{\tilde{\varepsilon}'_k - \tilde{\varepsilon}_k}, \quad (9.60)$$

где  $\tilde{\varepsilon}'_k$  и  $\tilde{\varepsilon}_k$  имеют тот же смысл, что и в (9.55). Нетрудно видеть, что интеграл по  $\xi$  от второго слагаемого в (9.59) обращается в ноль. Наконец, вычисляя тривиальную сумму по  $\varepsilon_k$ , имеем:

$$\langle \Pi_{\alpha\beta}(i\omega_n) \rangle - \langle \Pi_{\alpha\beta}(0) \rangle = \frac{ne^2}{m} \frac{|\omega_n|}{\omega_n + \frac{1}{\tau} \text{sign } \omega_n}. \quad (9.61)$$

Мы воспользовались здесь тем, что  $\frac{1}{3} \nu_0 v_F^2 = n/m$ .

Чтобы найти проводимость, воспользуемся доказанным тождеством (9.16). Поскольку векторный потенциал  $\mathbf{A}$  и электрическое поле  $\mathbf{E}$  связаны соотношением  $\mathbf{E} = -\frac{1}{c} \dot{\mathbf{A}}$ , то можно записать выражение для проводимости в таком виде:

$$\sigma_{\alpha\beta}(i\omega_n) = \frac{1}{\omega_n} [\Pi_{\alpha\beta}(i\omega_n) - \Pi_{\alpha\beta}(0)]. \quad (9.62)$$

Подставляя в (9.62) найденный результат (9.61), получаем:

$$\sigma_{\alpha\beta}(i\omega_n) = \frac{ne^2 \delta_{\alpha\beta}}{m(|\omega_n| + \frac{1}{\tau})}. \quad (9.63)$$

Для перехода к функциям вещественной частоты надо выполнить аналитическое продолжение с верхней мнимой полуоси:  $i\omega_n \rightarrow \omega$ . В результате получаем искомую формулу Друде (9.19).

Обратим внимание на то, что результат не зависит от температуры. Этого и следовало ожидать, поскольку проводимость — одночастичный эффект. Поэтому, если время рассеяния  $\tau$  не зависит от энергии, проводимость не должна зависеть от теплового размытия фермиевской ступеньки.

**52.** Нам необходимо усреднить коррелятор плотность–плотность (9.9) по беспорядку. На этот раз, в отличие от предыдущей задачи, уже нельзя игнорировать отличие  $\langle G^M G^M \rangle$  от  $\langle G^M \rangle \langle G^M \rangle$ . (Дело в том, что теперь мы имеем дело не с векторными вершинами, как при вычислении коррелятора ток–ток, а со скалярными, соответствующими плотности частиц.) В главном порядке по параметру  $(p_0 l)^{-1}$  интересующее нас среднее дается последовательностью лестничных диаграмм, показанной на рис 9.7.

Чтобы просуммировать эти диаграммы, обратим внимание на то, что каждая лестничная диаграмма разбивается на отдельные блоки («пузырьки»), окруженные с двух сторон пунктирными линиями примесей («перекладами»). При этом интегрирования по импульсам в каждом блоке независимы, так как примесный пунктир не зависит от переданного импульса. Заметим также, что из-за закона сохранения импульса разность импульсов в каждом блоке постоянна и равна импульсу  $\mathbf{q}$ , входящему в вершину. Кроме того, поскольку рассеяние на примесях упругое, частоты во всех ступенях лестницы попарно совпадают. Иными словами, независимо от числа перекладин, интегрирование



происходит всего по одной частоте. Рассмотрим сначала первый член суммы («пузырек без перекладин»). Выражение для него выглядит так:

$$T \sum_{\varepsilon_k} \int \langle G^M(i\varepsilon_k + i\omega_n, \mathbf{p}_+) \rangle \langle G^M(i\varepsilon_k, \mathbf{p}_-) \rangle \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3}, \quad (9.64)$$

где  $\varepsilon_k = (2k + 1)\pi T$ ,  $\omega_n = 2n\pi T$ ,  $\mathbf{p}_{\pm} = \mathbf{p} \pm \frac{1}{2}\mathbf{q}$ , а функции Грина, усредненные по беспорядку, имеют стандартный вид:

$$\langle G^M(i\varepsilon, \mathbf{p}) \rangle = \frac{1}{i\varepsilon - \xi(\mathbf{p}) + \frac{i}{2\tau} \text{sign } \varepsilon}, \quad (9.65)$$

где, как обычно,  $\xi(\mathbf{p}) = \mathbf{p}^2/2m - \mu$ . При интегрировании по  $\mathbf{p}$ , как нетрудно видеть, выражение (9.64) дает существенно различные результаты, в зависимости от того, находятся ли полюса двух гриновских функций по одну или по разные стороны от вещественной оси.

Рассмотрим этот вопрос более подробно. Здесь и в дальнейшем нам будет удобно воспользоваться связью мацубаровских функций с запаздывающими и опережающими функциями Грина:

$$\begin{aligned} G^M(i\varepsilon_k, \mathbf{p}) &= \theta(\varepsilon_k) G_R(i\varepsilon_k, \mathbf{p}) + \theta(-\varepsilon_k) G_A(i\varepsilon_k, \mathbf{p}) \\ &= \begin{cases} G_R(i\varepsilon_k, \mathbf{p}) & \text{при } \varepsilon_k > 0 \\ G_A(i\varepsilon_k, \mathbf{p}) & \text{при } \varepsilon_k < 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (9.66)$$

При вычислении выражения (9.64), в зависимости от относительного знака частот  $\varepsilon_k$  и  $\varepsilon_k + \omega_n$ , возникает два принципиально разных случая, которые следует рассматривать по-отдельности.

Знак частоты определяет, будет ли соответствующая гриновская функция запаздывающей или опережающей. В случае, когда знаки  $\varepsilon_k$  и  $\varepsilon_k + \omega_n$  одинаковы, возникают средние вида  $\langle G_R G_R \rangle$  и  $\langle G_A G_A \rangle$ . Они дают так называемый *статический* вклад в коррелятор, не обладающий дисперсией при  $\omega\tau \sim 1$  и  $|\mathbf{q}|l \sim 1$ . В случае же различных знаков частот  $\varepsilon_k$  и  $\varepsilon_k + \omega_n$ , получаются средние вида  $\langle G_R G_A \rangle$  и  $\langle G_A G_R \rangle$ . Они дают так называемый *кинетический* вклад в коррелятор, обладающий существенной дисперсией при  $\omega\tau \sim 1$  и  $|\mathbf{q}|l \sim 1$ .

Обоснование утверждения о характере частотной дисперсии статического и кинетического корреляторов будет дано ниже. Здесь же приведем следующее простое соображение, касающееся пространственной дисперсии. В координатном представлении

$$G_R^2(\mathbf{r}) = \bar{G}_A^2(\mathbf{r}) \sim e^{2ip_0|\mathbf{r}| - |\mathbf{r}|/l}. \quad (9.67)$$

В то же время  $G_A(\mathbf{r})G_R(\mathbf{r}) \sim e^{-|\mathbf{r}|/l}$ , т. е. медленно затухает, но не осциллирует. Поэтому пространственная дисперсия статического коррелятора должна иметь место при  $|\mathbf{q}| \sim p_0^{-1}$ , а динамического — при  $|\mathbf{q}| \sim 1/l$ .

Перейдем к вычислению.

- 1) Рассмотрим сначала ситуацию, когда  $\text{sign } \varepsilon_k = \text{sign}(\varepsilon_k + \omega_n)$ . В этом случае, поскольку полюса выражения (9.64) находятся по одну сторону от вещественной

оси, контур интегрирования по  $\xi$  можно деформировать так, чтобы он проходил далеко от полюсов. Такой интеграл набирается, в основном, в области  $\xi \sim E_F$ . По этой причине, поскольку нас интересуют  $|\omega_n| \ll E_F$  и  $|\mathbf{q}| \ll p_0$ , а раздвижка полюсов в выражении (9.64) есть  $i\omega_n - \mathbf{k}\mathbf{v}$ , этой раздвижкой можно вообще пренебречь.

Поэтому достаточно рассмотреть выражение (9.64) при  $\omega_n = 0$  и  $\mathbf{q} = 0$ . В этом случае можно воспользоваться тождеством  $\langle G(i\varepsilon, \mathbf{p}) \rangle^2 = -\partial \langle G(i\varepsilon, \mathbf{p}) \rangle / \partial \mu$ , где подразумевается, что при дифференцировании по  $\mu$  можно пренебречь зависимостью  $\tau$  от  $\mu$ . Это тождество позволяет представить выражение (9.64) в виде:

$$\mathcal{K}_0 = -\frac{\partial}{\partial \mu} T \sum_{\varepsilon_k} \int \langle G^M(i\varepsilon_k, \mathbf{p}) \rangle \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3}. \quad (9.68)$$

Заметим теперь, что сумма по  $\varepsilon_k$  и интеграл по  $\mathbf{p}$  дают среднюю плотность частиц в системе. Поэтому выражение (9.68), с точностью до знака, есть просто плотность состояний:  $\mathcal{K}_0 = -\nu = -\partial n / \partial \mu$ . Такой результат можно было бы предвидеть, поскольку в статическом пределе  $\omega = 0$  коррелятор плотность–плотность должен давать сжимаемость, т. е. термодинамическую плотность состояний.

- 2) Теперь рассмотрим случай  $\text{sign } \varepsilon_k = -\text{sign}(\varepsilon_k + \omega_n)$ . При этом, поскольку полюса подинтегрального выражения в (9.64) находятся по разные стороны вещественной оси, интеграл (9.64) определяется малой окрестностью поверхности Ферми.

Например, пусть  $\omega_n > 0$  и  $-\omega_n < \varepsilon_k < 0$ . Для дальнейшего полезно рассмотреть выражение (9.64) без суммирования по  $\varepsilon_k$ :

$$B_{RA}(\omega_n, \mathbf{q}) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} G_R(i\varepsilon_k + i\omega_n, \mathbf{p}_+) G_A(i\varepsilon_k, \mathbf{p}_-). \quad (9.69)$$

Вычислим интеграл по  $\xi$ :

$$\begin{aligned} B_{RA}(\omega_n, \mathbf{q}) &= \frac{\nu_0}{8\pi^2} \iint \frac{do d\xi}{(i\varepsilon_k + i\omega_n - \xi - \frac{1}{2}\mathbf{q}\mathbf{v} + \frac{i}{2\tau})(i\varepsilon_k - \xi + \frac{1}{2}\mathbf{q}\mathbf{v} - \frac{i}{2\tau})} = \\ &= \frac{\nu_0}{2} \int \frac{do}{\frac{1}{\tau} + \omega + i\mathbf{q}\mathbf{v}} \end{aligned}$$

Аналогично, при  $\omega_n < 0$  и  $0 < \varepsilon_k < -\omega_n$  выражение (9.68), непросуммированное по  $\varepsilon_k$ , принимает такой вид:

$$\begin{aligned} B_{AR}(\omega_n, \mathbf{q}) &= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} G_A(i\varepsilon_k + i\omega_n, \mathbf{p}_+) G_R(i\varepsilon_k, \mathbf{p}_-) = \\ &= \frac{\nu_0}{2} \int \frac{do}{\frac{1}{\tau} - \omega_n - i\mathbf{q}\mathbf{v}} \end{aligned} \quad (9.70)$$

Выполняя суммирование по  $\varepsilon_k$ , получаем  $\frac{|\omega_n|}{2\pi} B(\omega_n, \mathbf{q})$ , где

$$B(\omega_n, \mathbf{q}) = \begin{cases} B_{RA}(\omega_n, \mathbf{q}) & \text{при } \omega_n > 0 \\ B_{AR}(\omega_n, \mathbf{q}) & \text{при } \omega_n < 0 \end{cases} = \frac{\nu_0}{2} \int \frac{do}{\frac{1}{\tau} + |\omega_n| + i\mathbf{q}\mathbf{v} \text{ sign } \omega_n} \quad (9.71)$$

Теперь мы готовы к тому, чтобы найти сумму всех диаграмм лестничного ряда, изображенных на рис. 9.7. Примесная линия («перекладина лестницы») дается выражением  $nu_0^2 = 1/(2\pi\nu_0\tau)$ .

Поскольку все ступени лестницы совершенно одинаковы, удобно рассмотреть всего одну ступень, изображающуюся такой диаграммой:

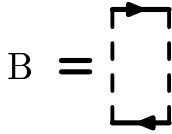


Рис. 9.14

(Мы не включаем примесные линии в определение ступени.) Нетрудно видеть, что получающееся выражение оказывается точно таким же, как рассмотренное выше выражение для первой ступени, непросуммированное по  $\varepsilon_k$ . Поэтому, как и выше, рассмотрим по-отдельности статический и кинетический случаи, когда знаки  $\varepsilon_k + \omega_n$  и  $\varepsilon_k$  совпадают, и когда они различны.

В первом случае, как нетрудно видеть, суммирование лестничного ряда дает несущественную поправку к первому члену  $\mathcal{K}_0 = -\nu$ , полученному выше. Действительно, если знаки  $\varepsilon_k + \omega_n$  и  $\varepsilon_k$  совпадают, то полюса всех гриновских функций находятся по одну и ту же сторону вещественной оси. Поэтому, как и при рассмотрении первого члена ряда, можно положить  $\omega_n = 0$  и  $\mathbf{q} = 0$ . Тогда весь ряд сворачивается в производную от функции Грина по химпотенциалу  $\mu$ . (Сумма членов лестничного ряда, начиная со второго, дает вклад, связанный с зависимостью амплитуды рассеяния на примеси от энергии  $\mu$ , которым мы пренебрегли выше.)

А вот во втором случае, когда знаки  $\varepsilon_k + \omega_n$  и  $\varepsilon_k$  различны, все члены лестничного ряда, включая произвольно далекие, оказываются одинаково важными. Чтобы понять, почему так получается, рассмотрим сначала случай  $\mathbf{q} = 0$ , и покажем, что сумма лестничного ряда в точности сокращает вклад  $-\nu$ , рассмотренный выше.

Действительно, при  $\mathbf{q} = 0$  одна ступень лестницы есть  $B(\omega_n)_{\mathbf{q}=0} = 2\pi\nu_0/(|\omega_n| + 1/\tau)$ . Весь же ряд в целом дается суммой геометрической прогрессии:

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_1(\omega_n, \mathbf{q} = 0) &= 2 \frac{|\omega_n|}{2\pi} \left[ \frac{B}{2\pi\nu_0\tau} + \frac{B^2}{(2\pi\nu_0\tau)^2} + \dots \right] = \\ &= \frac{|\omega_n|}{\pi} \frac{B}{1 - B/2\pi\nu_0\tau} = \\ &= \nu. \end{aligned} \tag{9.72}$$

Сокращение  $\mathcal{K} = \mathcal{K}_0 + \mathcal{K}_1 = 0$ , получающееся при  $\mathbf{q} = 0$ , имеет простой физический смысл. Коррелятор плотность–плотность при  $\mathbf{q} = 0$  и  $\omega \neq 0$  описывает отклик электронной плотности на независящий от координат переменный внешний потенциал. Очевидно, что поскольку полное число частиц сохраняется, а внешний потенциал один и тот же во всех точках пространства, отклика плотности в ответ на такое возмущение быть не должно. Поэтому указанное сокращение выражает сохранение числа частиц в системе.

Теперь повторим вычисление лестничного ряда при  $\mathbf{q} \neq 0$ . Выражение  $B(\omega_n, \mathbf{q})$  интересует нас при  $|\omega_n|\tau, |\mathbf{q}l| \ll 1$ , и поэтому его можно разложить:

$$\begin{aligned} B(\omega_n, \mathbf{q}) &= \frac{\nu_0\tau}{2} \int \frac{do}{1 + |\omega_n|\tau + i\mathbf{q}\mathbf{v}\tau \operatorname{sign} \omega_n} = \\ &= \frac{\nu_0\tau}{2} \int do \left[ 1 - |\omega_n|\tau - i\mathbf{v}\mathbf{q}\tau \operatorname{sign} \omega_n - (\mathbf{v}\mathbf{q})^2\tau^2 \right] = \\ &= 2\pi\nu_0\tau \left[ 1 - |\omega_n|\tau - \frac{1}{3}v_F^2q^2\tau^2 \right] = 2\pi\nu_0\tau \left[ 1 - \tau(|\omega_n| + Dq^2) \right], \end{aligned} \quad (9.73)$$

где  $D = v_F^2\tau/3$  — коэффициент диффузии.

Как и выше, при  $\mathbf{q} \neq 0$  вычисление ряда сводится к суммированию геометрической прогрессии:

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_1(\omega, k) &= 2 \frac{|\omega|B}{2\pi(1 - B/2\pi\nu_0\tau)} = \\ &= \frac{\nu|\omega_n|}{|\omega_n| + Dq^2}. \end{aligned} \quad (9.74)$$

Полный ответ для коррелятора плотность плотность дается суммой двух слагаемых:

$$\mathcal{K}(\omega_n, \mathbf{q}) = \mathcal{K}_0(\omega_n, \mathbf{q}) + \mathcal{K}_1(\omega_n, \mathbf{q}) = - \frac{\nu Dq^2}{|\omega_n| + Dq^2}, \quad (9.75)$$

что и требовалось.

Выражение для  $B(\omega_n, \mathbf{q})$  можно вычислить точно. Получается

$$B(\omega_n, \mathbf{q}) = \frac{\pi\nu_0 \operatorname{sign} \omega_n}{i|\mathbf{q}|v_F} \ln \frac{1 + |\omega_n|\tau + i|\mathbf{q}l \operatorname{sign} \omega_n}{1 + |\omega_n|\tau - i|\mathbf{q}l \operatorname{sign} \omega_n}. \quad (9.76)$$

Точное значение  $B(\omega_n, \mathbf{q})$  оказывается полезным в режиме баллистической динамики:  $\omega\tau \geq 1$  или  $|\mathbf{q}l| \geq 1$ . Обратим внимание, что при таких  $\omega$  и  $q$  величина  $B/2\pi\nu_0\tau$  не близка к единице, и поэтому члены лестничного ряда достаточно быстро убывают. Из-за этого ряд оказывается быстро сходящимся, и существенный вклад дает только первый член.

Остановимся на соответствии между диффузионной лестницей и классической картиной диффузии. Из проделанных вычислений ясно, что отдельная ступень лестницы  $B(\omega_n, \mathbf{q})$  соответствует траектории частицы, движущейся по прямой между двумя примесями. Чтобы продемонстрировать это более явно, перейдем от мацубаровских частот и времени к обычным. Выражение для  $B(\omega, \mathbf{q})$  может быть получено из (9.76) аналитическим продолжением  $i\omega_n \rightarrow \omega$  ( $n > 0$ ):

$$B(\omega, \mathbf{q}) = \frac{\pi\nu_0}{i|\mathbf{q}|v_F} \ln \frac{1 - i\omega\tau + i|\mathbf{q}l}{1 - i\omega\tau - i|\mathbf{q}l}. \quad (9.77)$$

Теперь запишем величину  $B(\omega, \mathbf{q})$  в координатно-временном представлении. Сделать это можно, либо используя выражения (9.18) для гриновских функций в координатном представлении, либо взяв фурье-образ точного выражения (9.77). Получается

$$B(t, \mathbf{r}) = \frac{\nu_0}{2|\mathbf{r}|^2} \delta(|\mathbf{r}| - v_F t) e^{-|\mathbf{r}|/l}. \quad (9.78)$$

Нетрудно видеть, что это есть просто вероятность того, что частица пролетит время  $t$  после столкновения с примесью, не столкнувшись с другими примесями. Величина  $B(t, \mathbf{r})$  правильно нормирована:

$$\int B(t, \mathbf{r}) d^3r = 2\pi\nu_0 e^{-t/\tau}. \quad (9.79)$$

Поэтому величины  $\tau$  и  $l$ , введенные выше, есть в точности классические время и длина свободного пробега.

Отметим любопытное формальное сходство между приведенным выше выводом  $\mathcal{K}(\omega, \mathbf{q})$  и вычислением распределения вероятностей для случайных блужданий в задаче 9. Геометрическая прогрессия, которую приходится суммировать и в том, и в другом случае, соответствует сумме по случайным путям с различным числом шагов. Каждому шагу ставится в соответствие «одношаговый формактор»:  $B(\omega, \mathbf{q})$  — для диффузии,  $\frac{z}{n}(\cos q_1 + \dots + \cos q_n)$  — для блужданий по  $n$ -мерной решетке, причем видно, что  $z$  имеет смысл  $e^{i\omega}$ . (Более точно,  $z = e^{i\omega\tau_0}$ , где  $\tau_0 = 1$  — время, за которое делается один шаг.) Чтобы перейти к диффузионному пределу в задаче о блужданиях по решетке, рассмотрим  $\omega \ll 1$  и  $q_i \ll 1$ . При таких  $\omega$  и  $q_i$  можно просто разложить знаменатель в выражении (2.16) для производящей функции:

$$\begin{aligned} G(z, q) &= \frac{1}{1 - (1/n) e^{i\omega} (\cos q_1 + \dots + \cos q_n)} \\ &= \frac{1}{1 - \frac{1+i\omega}{n} (n - \frac{1}{2}(q_1^2 + \dots + q_n^2))} = \frac{1}{-i\omega + \frac{1}{2n} q^2}. \end{aligned} \quad (9.80)$$

Таким образом, коэффициент диффузии для блужданий по  $n$ -мерной решетке равен  $(2n)^{-1}$ .

**53.** Сформулируем задачу о частице, которая при  $t < 0$  находилась в начале координат, а при  $t > 0$  стала двигаться свободно, следующим образом. Рассмотрим потенциальную яму  $V(\mathbf{r})$  с центром в начале координат, существующую при  $-\infty < t < 0$ , а затем мгновенно исчезающую. Основное состояние ферми-системы характеризуется избыточной плотностью, притянутой ямой («бугорком»). После выключения потенциала эта плотность начинает рассасываться, диффундируя в поле примесей.

Может показаться, что более естественно — рассмотреть эволюцию во времени состояния  $|\psi^+(\mathbf{r} = 0, t = 0)\rangle|0\rangle$ , получающегося добавлением к невозмущенному ферми-море одной частицы в начале координат в момент  $t = 0$ . При этом, однако, энергия добавленной частицы имеет очень широкий спектр и, вообще говоря, не близка к уровню Ферми. В результате, поскольку выбранный источник имеет большую некогерентность, при такой постановке задачи интересующий нас эффект, хотя и существует, оказывается весьма малым по величине.

Отклик ферми-системы на потенциал, зависящий от координат и времени, как мы выяснили в задаче 52, дается сверткой коррелятора плотность-плотность с потенциалом. В данном случае удобно воспользоваться координатно-частотным представлением, в котором возмущающий ферми-систему потенциал имеет вид  $-iV(\mathbf{r})/(\omega - i0)$ . Нам потребуются выражения для запаздывающей и опережающей функций Грина:

$$\begin{aligned} G_R(\varepsilon, \mathbf{r}) &= -\frac{m}{2\pi r} e^{ip_0 r + ir\varepsilon/v - r/2l}, \\ G_A(\varepsilon, \mathbf{r}) &= -\frac{m}{2\pi r} e^{-ip_0 r - ir\varepsilon/v - r/2l}, \end{aligned} \quad (9.81)$$

которые нетрудно получить из выражения (9.18) для усредненной причинной функции, если вспомнить, что  $G(r, \varepsilon > 0) = G_R(r, \varepsilon)$ , и  $G(r, \varepsilon < 0) = G_A(r, \varepsilon)$ .

При вычислении отклика, как и в задаче 52, следует различать статические и кинетические вклады, соответствующие средним двух одинаковых функций  $\langle G_R G_R \rangle$  и  $\langle G_A G_A \rangle$  или двух различных функций  $\langle G_R G_A \rangle$  и  $\langle G_A G_R \rangle$ . Нетрудно видеть, что статический вклад описывает часть плотности, существовавшую в то время, когда потенциал ямы был включен, но не описывает рассасывание плотности на временах  $t \gg \varepsilon_F^{-1}$ . Динамический же вклад, наоборот, описывает только динамику на временах  $t \gg \varepsilon_F^{-1}$  после выключения ямы.

Поэтому при усреднении коррелятора плотность–плотность по беспорядку нам будет достаточно учесть только динамический вклад. В главном порядке по  $(p_0 l)^{-1}$  — это лестничные графики, рассмотренные в задаче 52 (см. рис. 9.7). В следующем же порядке по  $(p_0 l)^{-1}$  возникает еще одна последовательность диаграмм — веерные графики, показанные на рис. 9.8. Рассмотрим их более подробно.

а) Пусть начальная и конечная точки совпадают. Тогда мы можем нарисовать лестничный и веерный графики, проходящие через одни и те же примеси (с номерами от 1 до  $N \geq 2$ ) так:

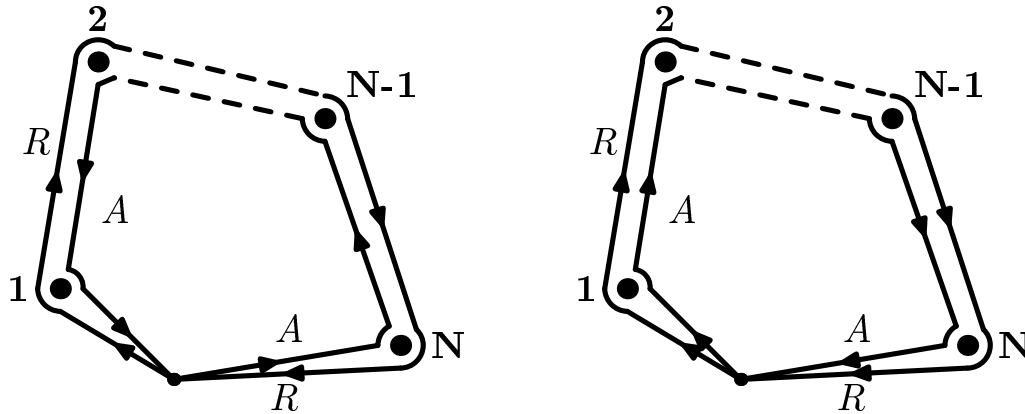


Рис. 9.15

Здесь буквы  $R$  и  $A$  обозначают запаздывающую и опережающую функции Грина соответственно. Сравнивая, мы видим, что в обоих графиках берется произведение одних и тех же величин. Единственное отличие состоит в порядке аргументов в  $G_A(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j)$ . Но поскольку  $G_A$  зависит только от  $|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|$ , порядок  $\mathbf{r}_i$  и  $\mathbf{r}_j$  несуществен, и значит графики в точности равны. Поэтому, с точностью до отмеченного в условии задачи несоответствия в первых двух членах ( $N = 0, 1$ ), веерный и лестничный ряды совпадают.

б) Теперь раздвинем начальную ( $0$ ) и конечную ( $\mathbf{r}$ ) точки. Тогда графики перерису-

ются так:

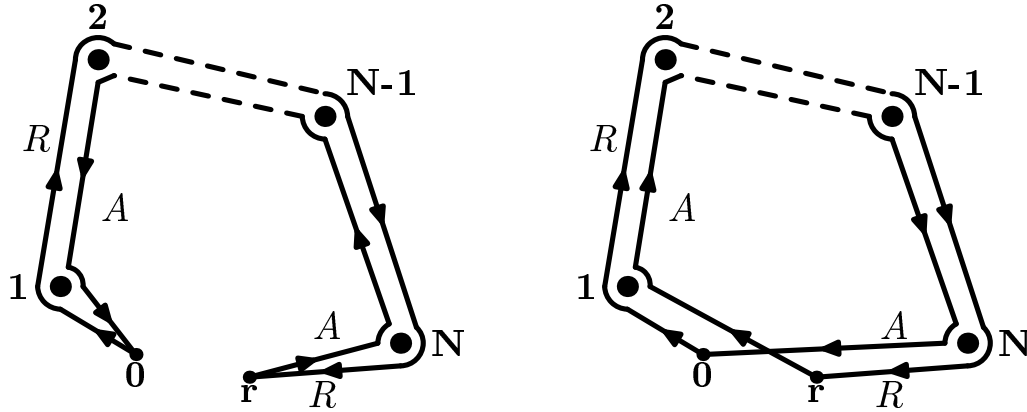


Рис. 9.16

В этом случае отличие веерного графика от лестничного заключается в том, что аргументы функций  $G_A$  на концах другие. Заметим, что части графиков от 1-й примеси до  $N$ -й есть в точности диффузионная лестница. Следовательно, как лестничный график, так и веерный можно представить в виде свертки диффузионного пропагатора, взятого в точках  $\mathbf{r}_1$  и  $\mathbf{r}_N$ , с четырьмя функциями Грина. Поскольку диффузионный пропагатор медленно меняется на расстояниях порядка длины свободного пробега, то достаточно просто проинтегрировать произведение функций Грина. Поэтому получаем, что вклады концов лестничного и веерного графиков соответственно равны<sup>7</sup>

$$W_L(\mathbf{r}) = \int d^3 r_1 d^3 r_N G_R(\mathbf{r}_1) G_A(\mathbf{r}_1) G_R(\mathbf{r}_N - \mathbf{r}) G_A(\mathbf{r}_N - \mathbf{r}), \quad (9.82)$$

$$W_F(\mathbf{r}) = \int d^3 r_1 d^3 r_N G_R(\mathbf{r}_1) G_A(\mathbf{r}_N) G_R(\mathbf{r}_N - \mathbf{r}) G_A(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}), \quad (9.83)$$

причем все запаздывающие функции Грина берутся при энергии  $\varepsilon + \omega/2$ , а опережающие — при  $\varepsilon - \omega/2$ .

Нас интересуют возвраты на больших временах  $t \gg \tau$ , т. е. при  $\omega\tau \ll 1$ . Динамика на таких временах имеет диффузионный характер. Это позволяет пренебречь зависимостью функций Грина в (9.82) и (9.83) от  $\omega$ . Дело в том, что, как будет видно из дальнейших вычислений, все четыре расстояния

$$|\mathbf{r}_1|, |\mathbf{r}_N|, |\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|, |\mathbf{r} - \mathbf{r}_N| \quad (9.84)$$

оказываются порядка длины пробега  $l$ , которая при  $\omega\tau \ll 1$  много меньше диффузионной длины  $\sqrt{D/\omega}$ .

Поэтому полагаем в (9.82) и (9.83) частоту  $\omega = 0$  и, пользуясь выражениями (9.81), находим вклад концов лестничного графика:

$$W_L(\mathbf{r}) = \left(\frac{m}{2\pi}\right)^4 \left(\int d^3 \mathbf{r} \frac{e^{-|\mathbf{r}|/l}}{|\mathbf{r}|^2}\right)^2 = (4\pi)^2 \left(\frac{m}{2\pi}\right)^4 l^2. \quad (9.85)$$

<sup>7</sup>Индексы  $L$  и  $F$  происходят от английских слов «ladder» и «fan».

Верные графики представляют интерес в области, когда расстояние между начальной и конечной точкой порядка  $p_0^{-1}$ , т. е. при  $|\mathbf{r}| \ll l$ . Тогда, поскольку характерные  $|\mathbf{r}_1|$ ,  $|\mathbf{r}_N|$  определяются медленно убывающими множителями  $\exp(-|\mathbf{r}_N|/l)$ ,  $\exp(-|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|/l)$ , и т. п., имеет место соотношение  $|\mathbf{r}_1|, |\mathbf{r}_N| \gg |\mathbf{r}|$ . Поэтому можно разложить расстояния между рассматриваемыми точками по малому  $\mathbf{r}$ :

$$|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}| = |\mathbf{r}_1| - \mathbf{r}\mathbf{n}_1, \quad |\mathbf{r}_N - \mathbf{r}| = |\mathbf{r}_N| - \mathbf{r}\mathbf{n}_N, \quad (9.86)$$

где  $\mathbf{n}_1 = \mathbf{r}_1/|\mathbf{r}_1|$ ,  $\mathbf{n}_N = \mathbf{r}_N/|\mathbf{r}_N|$  — единичные векторы. Таким образом, получаем

$$W_F(\mathbf{r}) = \left(\frac{m}{2\pi}\right)^4 \iint d^3\mathbf{r}_1 d^3\mathbf{r}_N \frac{e^{ip_0\mathbf{r}(\mathbf{n}_1 - \mathbf{n}_N) - |\mathbf{r}_1|/l - |\mathbf{r}_N|/l}}{|\mathbf{r}_1|^2 |\mathbf{r}_N|^2}. \quad (9.87)$$

Используя формулу

$$\int d\mathbf{o}_n e^{i\mathbf{a}\mathbf{n}} = 4\pi \frac{\sin a}{a}, \quad (9.88)$$

интегрируем в (9.87) по направлениям:

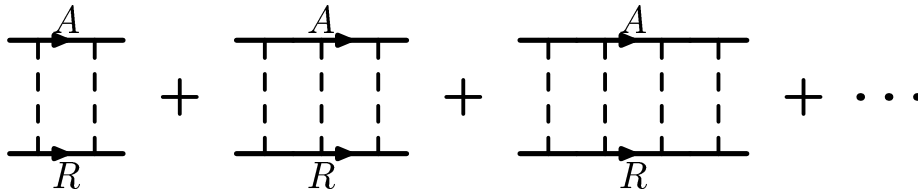
$$W_F(\mathbf{r}) = (4\pi)^2 \left(\frac{m}{2\pi}\right)^4 \left(\frac{\sin p_0 r}{p_0 r}\right)^2 \int_0^\infty d|\mathbf{r}_1| \int_0^\infty d|\mathbf{r}_N| e^{-|\mathbf{r}_1|/l - |\mathbf{r}_N|/l}. \quad (9.89)$$

Вычисляя оставшиеся интегралы по  $|\mathbf{r}_1|$  и  $|\mathbf{r}_N|$  и сравнивая результат с (9.85), находим относительную величину верного и лестничного вкладов:

$$\frac{W_F(\mathbf{r})}{W_L(\mathbf{r})} = \left(\frac{\sin X}{X}\right)^2, \quad \text{где } X = p_0 |\mathbf{r}|. \quad (9.90)$$

Характерный масштаб, на котором интерференционная поправка оказывается важна, равен  $\hbar/p_0$ , в полном соответствии с изложенными в условии качественными рассуждениями. Отметим сходство между полученным ответом и формулой для распределения интенсивности света при френгоферовской дифракции на щели. Это сходство лишней раз подчеркивает интерференционную природу рассматриваемого явления.

**54.** Как мы видели в предыдущей задаче, суммы верных и лестничных диаграмм отличаются несущественно, а именно, только первыми двумя членами. Поэтому в дальнейшем всегда подразумевается, что верные графики преобразованы (развернуты) так, что получается лестничный ряд. Рассмотрим сумму соответствующих лестничных диаграмм  $\mathcal{C}(\omega, \mathbf{q})$ , так называемый *куперон*<sup>8</sup>:



<sup>8</sup>Величину  $\mathcal{C}(\omega, \mathbf{q})$  называют купероном, потому что точно такая же величина описывает куперовские пары в сверхпроводнике в присутствии примесей (см. гл. 10). Аналогия между купероном в теории локализации и амплитудой куперовских пар оказывается весьма содержательной, поскольку в физических свойствах этих величин имеется немало общего. Эта общность проявляется в разнообразных физических эффектах, таких как, например, влияние магнитного поля, разница между магнитными и немагнитными примесями, температурная зависимость, и т. п.



Рис. 9.17

Эта лестница напоминает диффузионную лестницу из задачи 52, и, как мы увидим, дается похожим выражением (9.96). Это не случайно: как функции координат, куперовская и диффузионная лестницы совпадают, если система обладает инвариантностью по отношению к обращению времени. В самом деле, если мы обратим одну из электронных линий на рис. 9.17, то мы получим диффузионную лестницу<sup>9</sup> (рис. 9.7). Обратим внимание на то, что в купероне закон сохранения импульса приводит к постоянству *суммы* импульсов в каждом блоке диаграммы, и куперон оказывается функцией суммы импульсов  $\mathbf{q}$  и внешней частоты  $\omega$ . Из дальнейшего будет видно, что главный вклад в  $\mathcal{C}(\omega, \mathbf{q})$  происходит от малых импульсов  $|\mathbf{q}|l \ll 1$ .

Куперонную лестницу нетрудно связать с поправкой к проводимости. Для этого воспользуемся формулой (9.62) из решения задачи 51, связывающей проводимость с коррелятором  $\Pi(i\omega_n)$ . Как мы выяснили в задаче 51, проводимость определяется кинетическим вкладом в  $\Pi(i\omega_n)$ , продолженным с дискретных мнимых частот  $\omega_n \geq 0$  (см. также задачу 52). Поэтому запишем кинетический вклад как среднее от произведения запаздывающей и опережающей функций Грина и усредним по беспорядку, выделяя куперонный вклад (т.е. верные графики). В результате получим

$$\delta\sigma_{\alpha\beta} = \frac{e^2}{m^2\omega} \int_{-\omega/2}^{\omega/2} \frac{d\varepsilon}{2\pi} \int \frac{d^2\mathbf{q}}{(2\pi)^2} \frac{d^2\mathbf{p}}{(2\pi)^2} p_\alpha(q_\beta - p_\beta) \mathcal{C}(\omega, \mathbf{q}) \times \\ G_R(\varepsilon_+, \mathbf{p}) G_R(\varepsilon_+, \mathbf{q} - \mathbf{p}) G_A(\varepsilon_-, \mathbf{p}) G_A(\varepsilon_-, \mathbf{q} - \mathbf{p}).$$

Интегрируем по  $\mathbf{p}$ , считая  $\mathbf{q}$  малым:

$$\delta\sigma = -\frac{2\nu_{2D}e^2v_F^2}{2\omega} \int \frac{d^2\mathbf{q}}{(2\pi)^2} \int_{-\omega/2}^{\omega/2} \frac{d\varepsilon}{2\pi} \int \frac{d\xi}{(\varepsilon - \xi + i/2\tau)^2 (\varepsilon - \xi - i/2\tau)^2} \mathcal{C}(\omega, \mathbf{q}) \quad (9.91)$$

(здесь  $\nu_{2D} = m/2\pi$  — плотность состояний в двумерии с одной проекцией спина). Вычисляя интеграл по  $\xi$  и  $\varepsilon$ , находим

$$\delta\sigma = -\frac{4\nu_{2D}e^2\tau^3v_F^2}{2} \int \frac{d^2\mathbf{q}}{4\pi^2} \mathcal{C}(\omega, \mathbf{q}). \quad (9.92)$$

Теперь вычислим  $\mathcal{C}(\omega, \mathbf{q})$ . Для этого вначале найдем, чему равна ступень куперонной лестницы:

$$B_c = \int \frac{d^2p}{(2\pi)^2} \frac{1}{\varepsilon + \omega/2 - \xi_{\mathbf{p}} + i/2\tau} \frac{1}{\varepsilon - \omega/2 - \xi_{\mathbf{q}-\mathbf{p}} - i/2\tau} \quad (9.93)$$

Считая  $\mathbf{q}$  малым и заменяя поэтому  $\xi_{\mathbf{q}-\mathbf{p}} \approx \xi_{\mathbf{p}} - \mathbf{q}\mathbf{v}$ , точно так же, как и в задаче 52, получим

$$B_c(\omega, \mathbf{q}) = 2\pi\nu_{2D}\tau(1 + \tau(i\omega - D\mathbf{q}^2)), \quad (9.94)$$

<sup>9</sup>Это замечание не относится к спиновой зависимости — у куперона она другая.

где на этот раз  $D = v_F^2 \tau / 2$  — коэффициент диффузии в двумерии. Как и в случае диффузионной лестницы, наиболее существенной оказывается область  $\omega \tau \ll 1$ ,  $|\mathbf{q}|l \ll 1$ , вне ее слаболокализационные поправки несущественны. Сама же лестница равна<sup>10</sup>

$$\mathcal{C}(\omega, \mathbf{q}) = \frac{1}{(2\pi\nu_{2D}\tau)^2} \left( B_c + \frac{B_c^2}{2\pi\nu_{2D}\tau} + \dots \right). \quad (9.95)$$

Таким образом,

$$\mathcal{C}(\omega, \mathbf{q}) = \frac{1}{2\pi\nu_{2D}\tau^2(-i\omega + D\mathbf{q}^2)}. \quad (9.96)$$

Осталось лишь подставить это выражение в (9.92):

$$\delta\sigma = -\frac{De^2}{2\pi^3} \int \frac{d^2\mathbf{q}}{D\mathbf{q}^2 - i\omega}. \quad (9.97)$$

Этот интеграл логарифмически расходится. Снизу он обрезается на обратной диффузионной длине  $q_{min} = \sqrt{\omega/D}$ , а сверху — на  $q_{max} \sim 1/l$ , ибо при  $|\mathbf{q}|l \gg 1$  лестничный ряд мал. В результате получаем квантовую поправку к проводимости:

$$\delta\sigma(\omega) = -\frac{e^2}{2\pi^2\hbar} \ln \frac{1}{\omega\tau}. \quad (9.98)$$

Интересно отметить, что логарифмическая сингулярность квантовой поправки на малой частоте  $\omega$  не размывается при конечной температуре. Формально это проявляется в том, что в приведенном выше вычислении, выполненном при конечной температуре, в конце концов температура полностью выпадает. (Точно так же, как при выводе классической формулы Друде в задаче 51.) Физическая причина этого та же, что и в задаче 51 — одночастичный характер проводимости в случае упругого рассеяния. При упругом рассеянии состояния с различными энергиями не перемешиваются и, поэтому, степень размытия фермиевской ступеньки несущественна. Однако, если в системе имеется какое-либо неупругое рассеяние, скажем, из-за взаимодействия с электронами или фононами, сингулярность квантовой поправки на малой частоте размывается (см. раздел 9.6).

Другое любопытное свойство квантовой поправки — ее локальный характер в пространстве. Если рассмотреть проводимость на конечном волновом векторе, то пространственная дисперсия квантовой поправки будет иметь место при  $|\mathbf{q}| \sim p_0$ , в то время как для классической проводимости Друде дисперсия гораздо сильнее:  $|\mathbf{q}| \sim 1/l$ . Причина этого в том, что, как мы видели в задаче 53, интерференционный вклад в вероятность рассеяния назад спадает на очень малых масштабах  $\sim p_0^{-1}$ . Поскольку рассеяние назад — это и есть механизм возникновения квантовой поправки, она тоже должна иметь масштаб локальности порядка  $p_0^{-1}$ . В то же время классическая проводимость определяется рассеянием на (большой) длине свободного пробега и поэтому её пространственная дисперсия намного сильнее.

<sup>10</sup>Можно проверить, что независимо от размерности пространства  $d$  примесный пунктир всегда равен  $1/(2\pi\nu_d\tau)$ , поскольку он представляет собой сечение рассеяния на примеси, взятое в энергетической нормировке (см. задачу 11 в гл. 3).

## 9.5. Диаграммы без самопересечений

Остановимся на вопросе о связи между разложением по параметру  $(p_0 l)^{-1}$  и классификацией диаграмм, возникающих при усреднении по беспорядку. Диаграммы для рассеяния электронов на случайном потенциале содержат два элемента: электронные линии (функции Грина) и примесные пунктиры, которые, вообще говоря, могут пересекаться произвольным образом. Основной результат, на котором основаны все применения этой техники, состоит в том, что вклады наинизшего порядка по  $(p_0 l)^{-1}$  даются одними лишь непересекающимися графиками. Такие графики определяют так называемое «приближение кинетического уравнения». Условие  $p_0 l \gg 1$  в точности соответствует больцмановскому параметру, используемому при выводе классического кинетического уравнения, т. е. большой величине длины свободного пробега по сравнению с радиусом взаимодействия. Оказывается, что результаты, получающиеся при отбрасывании всех графиков с пересекающимися примесными пунктирами, в точности совпадают с результатами, выведенными из кинетического уравнения.

Попробуем понять, почему графики с непересекающимися примесными линиями оказываются выделенными, используя координатное представление. Рассмотрим для этого два графика, дающие поправки к собственно-энергетической части  $\Sigma$ :

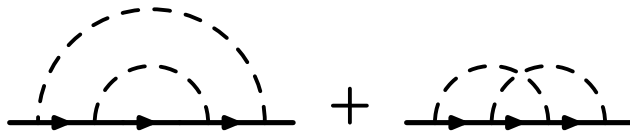


Рис. 9.18

Эти графики дают поправки второго порядка к «однопунктирной» собственно-энергетической части  $\Sigma = -\delta\mu - \frac{i}{2\tau} \text{sign } \varepsilon$ , найденной в задаче 50. Как мы увидим, вклад первого графика много больше вклада второго графика.

Перерисуем диаграммы, показанные на рис. 9.18, в координатном представлении:



Рис. 9.19

Все гриновские функции, за исключением первой и последней, прикрепляются обоими своими концами к примесям. В координатном представлении усреднение по взаимному

расположению примесей производится интегрированием по радиус-вектору  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ . Зависимость функций Грина от координат дается выражением (9.18).

Найдем вклады графиков, показанных на рис. 9.18 и 9.19, в мнимую часть  $\text{Im} \Sigma$ . Заметим, что  $\text{Im} \Sigma$  — это мнимая часть амплитуды рассеяния на двух примесях. Воспользуемся теоремой унитарности, связывающей мнимую часть амплитуды рассеяния с сечением рассеяния. Напомним графическое представление этой теоремы, найденное в задаче 15. В каждой диаграмме надо пометить одну из функций Грина  $G$  и заменить ее на  $GG^*$ , где  $G^*$  — комплексно сопряженная функция. Одновременно с этим, все функции, идущие после помеченной функции Грина, надо заменить на комплексно сопряженные. При этом, с одной стороны, суммирование по различным графикам и по всем способам пометить одну из функций данного графика дает мнимую часть амплитуды рассеяния. С другой стороны, независимое суммирование по различным частям графиков, встречающимся до и после помеченного места, дает произведение амплитуды рассеяния на комплексно сопряженную амплитуду с коэффициентом, равным плотности состояний.

Следуя этому рецепту, представим мнимую часть графиков, показанных на рис. 9.19, в виде суммы по помеченным графикам. Обратим внимание на то, что в зависимости от количества функций  $G$  и  $G^*$  осциллирующие фазовые множители  $G(\varepsilon, \mathbf{r}) \sim e^{ip_0|\mathbf{r}|\text{sign} \varepsilon}$ ,  $G^*(\varepsilon, \mathbf{r}) \sim e^{-ip_0|\mathbf{r}|\text{sign} \varepsilon}$  могут сократиться, а могут и не сократиться. Например, если на первом графике на рис. 9.19 помечена функция, выходящая из примеси 2 и возвращающаяся в нее же, то фазовые множители функций, идущих из примеси 1 в примесь 2, и обратно, сокращают друг друга. В то же время, на втором графике рис. 9.19 никакой способ пометки не приводит к сокращению фазовых множителей.

При усреднении по расположению примесей вклады с сокращающимися и с несокращающимися фазовыми множителями  $e^{\pm ip_0|\mathbf{r}|}$  ведут себя по-разному. Осциллирующий как функция расстояния между примесями  $|\mathbf{r}|$  множитель обрезает интеграл по  $d^3\mathbf{r}$  на  $|\mathbf{r}| \sim p_0^{-1}$ . Если же происходит сокращение  $e^{ip_0|\mathbf{r}|}$  и  $e^{-ip_0|\mathbf{r}|}$ , то обрезка интеграла по  $d^3\mathbf{r}$  определяется медленно убывающим множителем  $e^{-|\mathbf{r}|/2l}$  в выражении (9.18). Соответствующий масштаб есть  $|\mathbf{r}| \sim l$ , что много больше  $p_0^{-1}$ . Поэтому главный по  $p_0l$  вклад в  $\text{Im} \Sigma$  дается графиками, которые можно пометить так, чтобы все фазовые множители  $e^{\pm ip_0|\mathbf{r}|}$  сократили друг друга.

Вследствие этого, вклад первого графика на рис. 9.19 будет порядка  $\tau^{-1}$ , а второго — порядка  $\tau^{-2}$ . Сделанное наблюдение нетрудно обобщить на более сложные графики, в которые входит произвольно большое число примесей. Действительно, условие непересечения пунктиров означает просто, что функции Грина проходят одну и ту же (случайную) последовательность примесей, сначала в прямом порядке, а потом в обратном. Пример графика такого рода приведен на рис. 9.20. При этом всегда можно добиться сокращения фазовых множителей, если пометить любую из гриновских функций с совпадающими концами. Следовательно, произвольный график с  $N$  непересекающимися пунктирами по порядку величины равен  $\tau^{-N} \tau^{N-1} = \tau^{-1}$ , где первый сомножитель есть вклад  $N$  пунктиров, а второй — есть результат  $N-1$  интегрирования по взаимному расположению примесей.

Обратим внимание на то, что вклады всех графиков с непересекающимися пунктирами оказыва-

ются того же порядка, что и  $\text{Im } \Sigma = -\frac{1}{2\tau} \text{sign } \varepsilon$ , найденное в нулевом приближении (см. задачу 50). Вообще говоря, это означает, что при вычислении  $\Sigma$  ограничиваться нулевым приближением некорректно. Однако, как мы увидим в разделе 9.5.1, при суммировании *всех* графиков порядка  $\tau^{-1}$  получается ответ, совпадающий с нулевым приближением.

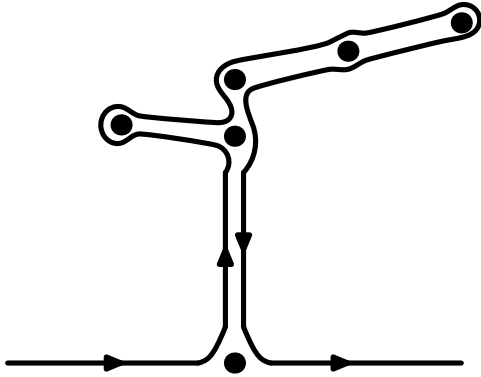


Рис. 9.20

Итак, если в каком-то графике пунктиры пересекаются, то становятся важны корреляции в расположении примесей на расстояниях порядка  $p_0^{-1}$ . (Это происходит из-за несокращения фазовых множителей, приводящего к интерференции волн, рассеянных на различных примесях.) Если же пунктиры не пересекаются, то такой корреляции нет, поскольку фазы волн, идущих в прямом и обратном направлении, компенсируются. В результате, когда пунктиры не пересекаются, интегрирования по положениям разных примесей оказываются независимыми. В противном случае интегрирования оказываются зависимыми. Каждое зависимое интегрирование дает лишний множитель  $(p_0 l)^{-1}$  по сравнению с независимыми интегрированиями.

При таком рассмотрении становится ясно, что пренебрежение пересекающимися пунктирами эквивалентно пренебрежению корреляциями между последовательными столкновениями с примесями. Это в точности то же самое приближение, как и то, что используется в теории кинетического уравнения. Поэтому параметр  $(p_0 l)^{-1}$  — это обычный больцмановский малый параметр кинетической теории.

Следовательно, любые кинетические коэффициенты, такие как проводимость или коэффициент диффузии, найденные с помощью диаграммной техники в главном порядке по  $(p_0 l)^{-1}$ , должны совпадать с результатами, полученными с помощью классического кинетического уравнения. В том, что это действительно так, мы убедились в задачах 51 и 52. Разумеется, с помощью диаграммной техники можно не только обосновать кинетическое уравнение квантовомеханически, но и рассмотреть эффекты следующего порядка по  $(p_0 l)^{-1}$ , не описываемые классической кинетической теорией. Оказывается, что в этом порядке возникают принципиально квантовые физические эффекты, требующие учета интерференции электронных волн (см. задачи 53 и 54).

С несколько более формальной теоретико-полевой точки зрения, ситуация при  $p_0 l \gg 1$  аналогична  $1/N$ -разложению в теориях поля с большим изоспином. Напомним, что  $1/N$ -разложение вводится для теории, содержащей  $N \gg 1$  свободных полей  $\phi_i(x^\mu)$ ,

взаимодействие между которыми изотропно по изоспину:

$$\mathcal{L} = \int \left( \frac{1}{2} \partial_\mu \phi_i \partial^\mu \phi^i + \frac{1}{2} g (\phi_i \phi^i)^2 \right) d^4 x \quad (9.99)$$

Оказывается, что в главном порядке по  $1/N$  важны только диаграммы, в которых линии, соответствующие полю  $\phi_i$ , не пересекаются. В теории поля такие диаграммы обычно называют *планарными*, поскольку, с топологической точки зрения, их всегда можно уложить на плоскость без самопересечений. Кроме того, для диаграмм произвольного вида в теории поля доказывается, что порядок диаграммы по  $1/N$  определяется минимальным родом поверхности (т. е. числом ручек), при котором диаграмму можно изобразить на этой поверхности без самопересечений.<sup>11</sup>

В задаче об упругом рассеянии на случайно расположенных примесях состояния частицы характеризуются импульсом, принимающим значения на ферми-поверхности. Из-за конечной длины свободного пробега, имеется неопределенность в импульсе порядка  $\delta p = l^{-1}$ . Поэтому количество различных состояний частицы оказывается порядка

$$N_0 = (p_0 / \delta p)^2 = (p_0 l)^{d-1}, \quad (9.100)$$

где  $d$  — размерность системы. Для объяснения роли непересекающихся диаграмм в [1] приводится рассуждение, использующее ограничение фазового объема при интегрировании по импульсам в диаграммах с пересекающимися примесными линиями. Нетрудно видеть, что эта аргументация точно такая же, как для теории взаимодействующего  $N$ -компонентного поля с  $N = N_0$ .

### 9.5.1. Самосогласованное борновское приближение

В разделе 9.5 мы рассмотрели ряд теории возмущений для собственно-энергетической части и показали, что главный вклад дается графиками с непересекающимися пунктирами. При этом оказалось, что вклады графиков с произвольно большим количеством пунктиров одинаковы и равны по порядку величины  $\tau^{-1}$ . Поэтому, вообще говоря, необходимо выполнить суммирование всех таких графиков. Это нетрудно сделать с помощью метода блочного суммирования.

Чтобы не загромождать формулы выражениями, зависящими от знака  $\varepsilon$ , рассмотрим запаздывающую функцию Грина, полагая  $\mu = 0$ . Невозмущенная функция Грина есть  $G_R^{(0)}(\varepsilon, \mathbf{p}) = (\varepsilon - \mathbf{p}^2/2m + i0)^{-1}$ . Введем собственно-энергетическую часть  $\Sigma(\varepsilon, \mathbf{p})$ , определив ее обычным образом, как сумму всех неприводимых диаграмм. Из графического представления  $\Sigma(\varepsilon, \mathbf{p})$  (см. рис. 9.21) ясно, что любой вклад в  $\Sigma(\varepsilon, \mathbf{p})$  можно представить в виде вклада в усредненную функцию Грина с концами, замкнутыми пунктиром.

$$\textcircled{\Sigma} = \text{---} + \text{---} + \text{---} + \dots$$

<sup>11</sup> см. оригинальную работу: G. t'Hooft, Nucl. Phys, **B72**, 461 (1974), или книгу [9]

Рис. 9.21

Поэтому уравнение Дайсона в данном случае выглядит весьма просто,

$$\Sigma(\varepsilon, \mathbf{p}) = nu_0 + \frac{nu_0^2}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 \mathbf{p}'}{\varepsilon - \mathbf{p}'^2/2m - \Sigma(\varepsilon, \mathbf{p}')}, \quad (9.101)$$

и его нетрудно решить. Выражение в правой части не зависит от  $\mathbf{p}$ , поскольку примеси точечные. Поэтому  $\Sigma(\varepsilon, \mathbf{p})$  является функцией одного лишь  $\varepsilon$ .

В главном порядке по  $nu_0^2$  решение получается, если заменить  $\Sigma(\varepsilon, \mathbf{p}')$  в правой части (9.101) на  $-i0$ . В случае, когда величина  $\text{Im} \Sigma(\varepsilon)$  отлична от нуля, но мала по сравнению с  $\varepsilon$ , значение выражения в правой части (9.101) останется таким же, как и в нулевом приближении (с точностью до членов более высокого порядка малости по  $(p_0 l)^{-1}$ ). Поэтому собственно-энергетическая часть  $\Sigma(\varepsilon, \mathbf{p})$ , найденная в задаче 50 в низшем порядке по  $(p_0 l)^{-1}$ , в действительности является самосогласованным решением уравнения Дайсона (9.101) при условии  $p_0 l \gg 1$ .

Почувствительно решить уравнение (9.101) явно, не предполагая малости  $\Sigma(\varepsilon)$  по сравнению с  $\varepsilon$ . Чтобы вычислить интеграл в правой части (9.101) надо регуляризовать расходимость при больших  $|\mathbf{p}|$ . Для этого обрежем интегрирование на  $a^{-1}$ , где  $a$  — радиус примеси. (Напомним, что примеси можно считать точечными при энергиях  $(2m\varepsilon)^{1/2}a \ll 1$ .) Перепишем уравнение (9.101) таким образом:

$$\Sigma(\varepsilon) = nu_0 - g \int_0^{a^{-1}} \frac{p^2 dp}{p^2 + \lambda^2(\varepsilon)}, \quad \lambda(\varepsilon) = \sqrt{2m(\Sigma(\varepsilon) - \varepsilon)}, \quad g = nu_0^2 m / \pi^2. \quad (9.102)$$

Интеграл в правой части (9.102) есть  $a^{-1} - \pi\lambda/2$ . Используя связь  $\lambda$  и  $\Sigma$ , получаем уравнение на  $\lambda$ :

$$\pi g \lambda - \lambda^2/m = 2\tilde{\varepsilon}, \quad (9.103)$$

где  $\tilde{\varepsilon} = \varepsilon - nu_0 + g/a$ . Решение этого уравнения имеет вид:

$$\lambda(\varepsilon) = \begin{cases} \frac{\pi}{2}mg + \sqrt{2m(\varepsilon_0 - \tilde{\varepsilon})} & \text{при } \tilde{\varepsilon} < \varepsilon_0 \\ \frac{\pi}{2}mg + i\sqrt{2m(\tilde{\varepsilon} - \varepsilon_0)} & \text{при } \tilde{\varepsilon} > \varepsilon_0, \end{cases} \quad (9.104)$$

где  $\varepsilon_0 = \pi^2 mg^2/8$ . Отсюда находим:

$$\Sigma(\varepsilon) = \frac{\pi}{2}g\lambda(\varepsilon) - nu_0 + g/a. \quad (9.105)$$

При больших положительных  $\varepsilon \gg nu_0$ , разлагая квадратный корень в (9.104), получаем:

$$\Sigma(\varepsilon) = 2\varepsilon_0 - nu_0 + g/a - i\pi nu_0^2 \nu(\varepsilon), \quad (9.106)$$

где  $\nu(\varepsilon) = m(2m\varepsilon)^{1/2}/2\pi^2$  — плотность состояний в отсутствие примесей. Нетрудно видеть, что вещественная часть  $\Sigma$  просто сдвигает дно электронной зоны (т. е. меняет химпотенциал) и поэтому несущественна. Мнимая же часть определяет время жизни

электрона в данном состоянии и при больших  $\varepsilon$  совпадает с результатом, найденным в задаче 50.

Полученное решение (9.104) уравнения Дайсона (9.101) часто используют не только при больших, но и при произвольных энергиях. Разумеется, формально это некорректно, поскольку (9.101) было выведено в предположении  $p_0 l \gg 1$ . Тем не менее, такое *самосогласованное борновское приближение* часто приводит к качественно правильным результатам.

Например, рассмотрим одночастичную плотность состояний. Воспользуемся известным соотношением между плотностью состояний и функцией Грина:  $\nu(\varepsilon) = \frac{1}{\pi} \text{Im Tr } \hat{G}$ . Нас интересует плотность состояний, усредненная по беспорядку. Поэтому, используя найденное выражение для усредненной функции Грина, получаем:

$$\begin{aligned} \nu(\varepsilon) &= \frac{1}{\pi(2\pi)^3} \text{Im} \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{\varepsilon - \frac{1}{2m} \mathbf{p}^2 - \Sigma(\varepsilon)} = - \text{Im} \frac{m}{\pi^3} \int_0^\infty \frac{p^2 dp}{p^2 + \lambda^2(\varepsilon)} = \\ &= \frac{m}{2\pi^2} \sqrt{2m(\varepsilon - \varepsilon_*)}, \quad \varepsilon_* = nu_0 - g/a + \varepsilon_0, \end{aligned} \quad (9.107)$$

где  $\lambda(\varepsilon)$  дается выражением (9.104). Получаем, что самосогласованное борновское приближение дает плотность состояний (9.107), отличающуюся от плотности состояний чистой системы лишь сдвигом энергии на определенную величину. Выражение (9.107) имеет качественно правильное поведение: ниже порога  $\varepsilon = \varepsilon_*$  плотность состояний  $\nu(\varepsilon)$  обращается в ноль, а при больших  $\varepsilon$  переходит в  $\nu(\varepsilon)$  чистой системы.

Следует отметить, что самосогласованное борновское приближение несправедливо непосредственно вблизи порога  $\varepsilon = \varepsilon_*$ . В этой области выражение (9.107) сильно упрощает истинную картину. Дело в том, что состояния в нижней части спектра в случайном потенциале всегда *локализованы*<sup>12</sup> и поэтому приближение слабого рассеяния в этом случае не имеет смысла. Для изучения локализованных состояний требуются совершенно иные методы, выходящие за рамки теории возмущений.

Локализация приводит к качественным изменениям в поведении плотности состояний системы. Рассмотрим, например, случай отталкивательного потенциала примесей,  $u_0 > 0$ . Согласно формуле (9.107), пороговая энергия  $\varepsilon_*$ , выше которой плотность состояний отлична от нуля, положительна (поскольку  $g/a \ll nu_0$  для точечных примесей). Однако в реальной системе имеются состояния с любыми неотрицательными энергиями. Причина этого в том, что из-за случайного расположения примесей с какой-то вероятностью произвольно большая область пространства может оказаться свободной от примесей. Состояния с энергиями  $0 < \varepsilon < \varepsilon_*$  образуют так называемый *хвост локализованных состояний*. Эта часть плотности состояний не может быть получена по теории возмущений, поскольку при энергиях  $\varepsilon \sim \varepsilon_*$  формально  $p_0 l \ll 1$ .

При самых низких энергиях  $0 < \varepsilon \ll \varepsilon_*$  плотность состояний допускает простую оценку.<sup>13</sup> Вероятность найти состояние с энергией  $\varepsilon$  определяется тем, что найдется достаточно большая область объема  $V_\varepsilon$ , свободная от примесей, в которой имеется состояние с требуемой энергией. Поскольку вероятность найти такую область

<sup>12</sup>Понятие локализации было впервые введено в работе: P.W. Anderson, Phys. Rev. v.109, p.1492-1505 (1958)

<sup>13</sup>И.М. Лифшиц, ЖЭТФ, т. 53, с. 743 (1967)



экспоненциально мала по  $V_\varepsilon$ , возникает задача о выборе оптимальной области как можно меньшего объема, так называемой *оптимальной флуктуации* случайного потенциала. Можно показать, что такая область должна быть сферической. Условие того, что сферическая полость содержит состояние с энергией  $\varepsilon$ , есть  $\sqrt{2m\varepsilon}R = \pi/2$ , где  $R$  — радиус полости. Поэтому  $V_\varepsilon^{\min} = 4\pi R^3/3 = (\pi^4/6)(2m\varepsilon)^{-3/2}$ . Вероятность того, что имеется такая свободная от примесей сферическая область, есть  $P(\varepsilon) = \exp(-nV_\varepsilon^{\min})$ . В результате плотность состояний при самых малых энергиях ведет себя как  $\exp(-\text{const}(\varepsilon_*/\varepsilon)^{3/2})$ .

Вопрос о плотности состояний вблизи «самосогласованного порога»  $\varepsilon = \varepsilon_*$  также может быть решен.<sup>14</sup> При этом, как и в предыдущем случае, ответ дается вероятностью оптимальной флуктуации. Однако, задача об отыскании такой флуктуации оказывается менее простой.

## 9.6. Слабая локализация

### 9.6.1. Квантовое магнитосопротивление

Квантовая поправка, рассмотренная в задачах 53 и 54, возникает из-за интерференции амплитуд для геометрически тождественных путей, пройденных частицей в противоположных направлениях. Существенно квантово-механический характер этого вклада в проводимость делает его особым во многих отношениях. Квантовая поправка к проводимости и связанная с ней физика лежит в основе целого ряда ярких эффектов, которые будут кратко рассмотрены в настоящем разделе. Возникновение совершенно нового круга явлений, связанных с квантовой когерентностью омической проводимости, обязано тому, что длина и пространственный масштаб наиболее существенных интерферирующих траекторий оказываются велики, много больше длины свободного пробега. Причина этого в том, что характерные времена, определяющие квантовую поправку, порядка времени диффузии внутри области, в которой имеет место фазовая когерентность. Обычно эти времена намного больше, чем время релаксации импульса, определяющее физику классической проводимости. Наличие большого временного масштаба приводит к весьма сильной чувствительности квантовой поправки к внешним полям и другим факторам, влияющим на когерентность распространения электронных волн.

Один из наиболее ярких эффектов такого рода — так называемое *отрицательное магнитосопротивление*, обязанное аномально сильной зависимости квантовой поправки от внешнего магнитного поля. Качественно зависимость от магнитного поля можно понять следующим образом. В присутствии магнитного поля интерференции амплитуд прохождения электроном одного и того же (случайного) пути в противоположных направлениях ослабляется. Причина этого в том, что магнитное поле меняет фазу волновой функции, делая ее зависящей от направления прохождения траектории, что полностью или частично разрушает интерференцию. Величина эффекта определя-

<sup>14</sup>см. работы: В.И. Halperin, М.А. Lax, Phys. Rev., **148**, 722 (1966), *ibid.*, **153**, 802 (1967); J. Zittartz, J.S. Langer, Phys. Rev., **148**, 741 (1966)

ется тем, насколько велик вклад в проводимость от траекторий большого размера  $L$ . Магнитное поле  $B$  эффективно исключает вклады траекторий, охватывающих больше одного кванта потока  $\Phi_0 = hc/e$ , для которых поток  $BL^2 \geq \Phi_0$ . Время диффузии, соответствующее размеру<sup>15</sup>  $L$ , есть  $t = L^2/D$ . Поэтому в магнитном поле  $B$  «работают» только траектории, время движения по которым меньше  $t_B = \Phi_0/BD$ .

С другой стороны, в отсутствие магнитного поля существенны траектории, время движения по которым не превосходит некоторого характерного времени сбой фазы  $\tau_\phi$ . Возникающий в теории слабой локализации масштаб времени  $\tau_\phi$  не имеет аналога в классической кинетике. Время  $\tau_\phi$  характеризует скорость потери фазовой когерентности из-за неупругих процессов. Величина  $\tau_\phi$  зависит от характера взаимодействия в системе и от температуры. (В отсутствие электрон-электронного и электрон-фононного взаимодействий динамика была бы чисто упругой и сбой фазы не было бы.) При низких температурах  $\tau_\phi$  обычно имеет степенную температурную зависимость,  $\tau_\phi \sim T^{-\alpha}$ , где величина  $\alpha$  положительна и зависит от вида доминирующего взаимодействия<sup>16</sup>.

Итак, если имеет место сбой фазы, в квантовую поправку к проводимости вклад дают траектории, время движения по которым не превосходит  $\tau_\phi$ . Поэтому, для подавления квантовой поправки достаточно приложить такое поле, чтобы  $t_B$  стало меньше  $\tau_\phi$ . Этот критерий определяет характерное поле  $B_c = \Phi_0/D\tau_\phi$ , величина которого достаточна, чтобы подавить квантовую поправку.

Для сравнения оценим величину магнитного поля, подавляющего классическую проводимость Друде-Лоренца

$$\sigma_{xx} = \frac{ne^2\tau}{m(1 + \omega_c^2\tau^2)}, \quad (9.108)$$

где  $\omega_B = eB/mc$  — циклотронная частота,  $\tau$  — время свободного пробега. Согласно (9.108), подавление начинается с полей  $B_*$ , при которых  $\omega_B \sim 1/\tau$ . Сравнивая с характерным полем  $B_c$ , подавляющим квантовую поправку, видим, что  $B_*$  и  $B_c$  отличаются примерно в  $E_F\tau_\phi/\hbar \gg 1$  раз. Поэтому квантовая поправка подавляется полностью уже в классически слабых полях. Кроме того, классический и квантовый эффекты имеют противоположные знаки. Подавление магнитным полем квантовой поправки, отрицательной по знаку, приводит к отрицательному магнитосопротивлению, наблюдаемому в области весьма слабых полей. Классическое же магнитосопротивление положительно.

Найдем зависимость квантовой поправки от магнитного поля в трехмерном случае. Это можно сделать с помощью соотношения (9.92), которое в координатном представлении принимает следующий вид:<sup>17</sup>

$$\delta\sigma = -4e^2\nu_0\tau^2 D \mathcal{C}(\omega, \mathbf{r} = \mathbf{r}') . \quad (9.109)$$

<sup>15</sup>Напомним, что случайная диффузионная траектория размера  $L$  имеет длину порядка  $v_F t = v_F L^2/D$ , где  $D = \frac{1}{3}v_F l$  — коэффициент диффузии.

<sup>16</sup>Вопрос о температурной зависимости времени сбой фазы и о влиянии неупругих процессов на слаболлокализационные поправки рассматривался в работах: В.Л. Altshuler, А.Г. Aronov and Д.Е. Khmel'nitskii, Solid State Comm. **39**, 619 (1981), ibid., J. Phys. C **15**, 7367 (1982); см. также обзоры: В.Л. Altshuler, А.Г. Aronov, in: Electron-Electron Interactions in Disordered Systems, North-Holland, Amsterdam, 1985; Р. А. Lee, Т. V. Ramakrishnan, Rev. Mod. Phys., **57**, 287 (1985).

Выражение для куперона  $\mathcal{C}(\omega, \mathbf{r}, \mathbf{r}')$  в присутствии магнитного поля можно получить следующим образом. Калибровочная инвариантность требует, чтобы при включении магнитного поля производные по координатам в уравнении для куперона изменялись по такому закону:

$$-i\nabla \rightarrow -i\nabla - \frac{2e}{c}\mathbf{A} \quad (9.110)$$

Обратим внимание на то, что в калибровочно инвариантном выражении (9.110) появляется удвоенный заряд электрона. Это связано с тем, что куперон описывает интерференцию *двух* электронных волн, распространяющихся по одному и тому же пути в прямом и в обратном направлении.

Теперь, чтобы получить уравнение для куперона, воспользуемся соотношением (9.96), помножив обе его части на  $-i\omega + D\mathbf{q}^2$ . В координатном представлении, согласно (9.110), следует заменить  $\mathbf{q}$  на  $-i\nabla - 2e/c\mathbf{A}$ . Потерю фазовой когерентности можно ввести в уравнение для куперона феноменологически, сдвинув частоту  $-i\omega$  на величину  $\tau_\phi^{-1}$ , так чтобы однородное решение этого уравнения затухало как  $\exp(-t/\tau_\phi)$ . Таким образом, мы приходим к следующему уравнению:

$$\left[ -i\omega + D \left( -i\nabla - \frac{2e}{c}\mathbf{A}(\mathbf{r}) \right)^2 + \frac{1}{\tau_\phi} \right] \mathcal{C}(\omega, \mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{2\pi\nu_0\tau^2} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (9.111)$$

В конечной системе уравнение (9.111) должно быть дополнено граничными условиями. В случае непроницаемой границы поток частиц через границу должен отсутствовать. Соответствующее граничное условие записывается так:

$$\left( \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} + \frac{2ie}{c}\mathbf{n} \cdot \mathbf{A} \right) \mathcal{C}(\omega, \mathbf{r}, \mathbf{r}') = 0 \quad (9.112)$$

где  $\mathbf{n}$  — единичный вектор нормали к границе. Обратим внимание на то, что векторный потенциал входит не только в уравнение для куперона, но и в выражение для потока.

В качестве простейшего применения уравнения (9.111) рассмотрим квантовую поправку к проводимости бесконечного трехмерного металла в однородном магнитном поле  $B$ . В этом случае выражение (9.111) имеет вид уравнения на функцию Грина для частицы с зарядом  $e_* = 2e$  и массой  $m_* = \hbar^2/2D$ , находящейся в поле  $B$ . Собственные значения и собственные функции этой задачи хорошо известны (например, см. [2] §112). Поэтому можно сразу записать решение в таком виде:

$$\mathcal{C}(\omega, \mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{2\pi\nu_0\tau^2} \sum_{n,\alpha} \frac{\psi_{\alpha,n}(\mathbf{r})\psi_{\alpha,n}^*(\mathbf{r}')}{-i\omega + Dq_z^2 + \Omega_*(n + \frac{1}{2}) + \frac{1}{\tau_\phi}}, \quad (9.113)$$

где  $\Omega_* = \hbar e_* B / m_* c = 4eDB / \hbar c$  есть «циклотронная частота», а  $\psi_{\alpha,n}(\mathbf{r})$  — собственные функции, соответствующие уровням Ландау ( $\alpha$  — квантовое число, различающее

<sup>17</sup>Если выразить квадрат фермиевской скорости в (9.92) через коэффициент диффузии  $D = \frac{1}{2}v_F^2\tau$  (мы пользуемся двумерным выражением), то зависящие от размерности множители сокращаются, и формула (9.109) оказывается справедливой в произвольной размерности.

состояния на одном уровне Ландау, например, импульс). Из-за функций  $\psi_{\alpha,n}$  сумма в (9.113) выглядит весьма устрашающе. Но нас, как следует из<sup>18</sup> (9.109), на самом деле интересует куперон в совпадающих точках. При  $\mathbf{r} = \mathbf{r}'$  куперон не должен зависеть от абсолютного расположения точек  $\mathbf{r}$  и  $\mathbf{r}'$ . Поэтому, усредняя по положению  $\mathbf{r}$  в объеме проводника  $V$  и используя условие ортонормированности собственных функций, получаем

$$\frac{1}{V} \int \mathcal{C}(\omega, \mathbf{r} = \mathbf{r}') d^3r = \frac{1}{2\pi\nu_0\tau^2V} \sum_{n,\alpha} \frac{1}{-i\omega + Dq_z^2 + \Omega_*(n + \frac{1}{2}) + \frac{1}{\tau_\phi}}. \quad (9.114)$$

Суммирование по  $\alpha$  (то есть суммирование в пределах одного уровня Ландау) можно легко выполнить, используя выражение для числа состояний на уровне Ландау (см. [2]):

$$dN = \frac{e_*BV}{(2\pi)^2\hbar c} dq_z \quad (9.115)$$

Таким образом, получаем выражение для куперона в совпадающих точках:

$$\mathcal{C}(\omega, \mathbf{r} = \mathbf{r}') = \frac{eB}{4\pi^2\nu_0\hbar c\tau^2} \int \frac{dq_z}{2\pi} \sum_n \frac{1}{-i\omega + Dq_z^2 + \Omega_*(n + \frac{1}{2}) + \frac{1}{\tau_\phi}}. \quad (9.116)$$

С учетом этого поправка к проводимости (9.109) равна

$$\delta\sigma = -\frac{De^3B}{\pi^2\hbar c} \int \frac{dq_z}{2\pi} \sum_n \frac{1}{-i\omega + Dq_z^2 + \Omega_*(n + \frac{1}{2}) + \frac{1}{\tau_\phi}}. \quad (9.117)$$

В дальнейших выкладках мы для простоты опустим частоту внешнего поля  $\omega$ . Вычислим интеграл по  $q_z$ :

$$\delta\sigma = -\frac{\sqrt{D}e^3B}{2\pi^2\hbar c\sqrt{\Omega_*}} \sum_n \frac{1}{\sqrt{n + \frac{1}{2} + x}}, \quad x = \frac{1}{\Omega_*\tau_\phi} = \frac{\hbar c}{4eBD\tau_\phi}. \quad (9.118)$$

Полученная сумма расходится на верхнем пределе. Очевидно, это в точности та же расходимость, что и в задаче 54 при вычислении интеграла по  $\mathbf{q}$ , и поэтому её следует обрезать на  $|\mathbf{q}|$  порядка обратной длины свободного пробега. Для этого оборвем сумму (9.118) на некотором  $n_{max}$ , определяемом соотношением

$$\Omega_*n_{max} \approx D/l^2 \quad (9.119)$$

( $\Omega_*n_{max}$  есть собственное значение оператора в (9.113), которое не должно превышать  $D/l^2$ ). Тогда сумма равна  $2\sqrt{n_{max}}$ , и поправка дается выражением

$$\delta\sigma(0) = -\frac{e^2}{4\pi^2} \sqrt{\frac{eB}{\hbar c}} \cdot 2\sqrt{n_{max}} \approx -\frac{e^2}{4\pi^2\hbar l}. \quad (9.120)$$

Это выражение не зависит ни от  $\tau_\phi$ , ни от магнитного поля, поскольку оно определяется малыми масштабами порядка  $l$ . Интересные эффекты (зависимость от магнитного

<sup>18</sup>Интегрирование по  $\mathbf{q}$  в (9.113) эквивалентно условию  $\mathbf{r} = \mathbf{r}'$ .

поля и т. п.) определяются большими масштабами и представляют собой поправки к (9.120).

Обрезание суммы после интегрирования по  $q_z$  может показаться внимательному читателю некорректным, поскольку при этом допускаются как угодно большие  $q_z$ , но только конечные  $n$ . Но  $q_z^2$  и  $n$  есть разные части квадрата волнового вектора  $\mathbf{q}^2$ . Можно более корректно обрезать сумму «вращательно-инвариантным образом», ограничивая как максимальные  $n$ , так и максимальные  $q_z$ . Это сделать, например, вводя в (9.117) множитель сходимости  $\exp(-\mu(Dq_z^2 + \Omega_*(n + 1/2)))$ , где  $\mu$  — малое число порядка  $l^2/D$ . Тем не менее, оказывается, что простая процедура обрезания по  $n$  приводит к тем же ответам.

Вычитая из  $\delta\sigma$  независимую от магнитного поля часть  $\delta\sigma(0)$ , получаем

$$\delta\sigma(B) - \delta\sigma(0) = -\frac{e^2}{2\pi^2\hbar} \sqrt{\frac{eB}{\hbar c}} f(x), \quad (9.121)$$

где

$$f(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left( \sum_{n=0}^N \frac{1}{\sqrt{n + 1/2 + x}} - 2\sqrt{N} \right). \quad (9.122)$$

Сумму в (9.122) можно найти в пределе сильных и слабых магнитных полей. Наиболее интересен случай сильного поля ( $x \ll 1$ ), который мы и рассмотрим. При малых  $x$  функция  $f(x)$  стремится к постоянному пределу, выражающемуся через  $\zeta$ -функцию Римана:

$$f(x \rightarrow 0) = -(\sqrt{2} - 1)\zeta(1/2) \approx 0.6049 \quad (9.123)$$

Таким образом,

$$\delta\sigma(B) - \delta\sigma(0) = \frac{\sqrt{2} - 1}{2\pi^2} \zeta(1/2) \frac{e^2}{\hbar} \sqrt{\frac{eB}{\hbar c}}. \quad (9.124)$$

Итак, слаболокализационная поправка в трехмерном случае пропорциональна корню из магнитного поля. Выход на этот режим происходит при  $\Omega_*\tau_\phi \sim 1$  в согласии с приведенными выше качественными рассуждениями.

Аналогично можно рассмотреть поведение слаболокализационной поправки в двумерном случае. Он отличается от трехмерного случая только отсутствием интегрирования по  $q_z$ , и поэтому

$$\delta\sigma_{2D}(B) = -\frac{e^2}{2\pi^2\hbar} \sum_{n=0}^{n_{max}} \frac{1}{n + 1/2 + x}. \quad (9.125)$$

Эту сумму можно выразить через дигамма-функцию  $\psi(x) = \Gamma'(x)/\Gamma(x)$  следующим образом:

$$\delta\sigma_{2D}(B) = -\frac{e^2}{2\pi^2\hbar} (\psi(n_{max} + 1/2 + x) - \psi(1/2 + x)). \quad (9.126)$$

При  $x \gg 1$  дигамма-функция растет логарифмически,  $\psi(x)_{x \gg 1} \approx \ln x$ , и поэтому в слабых полях

$$\delta\sigma_{2D}(0) = -\frac{e^2}{2\pi^2\hbar} \ln \frac{n_{max}}{x} = -\frac{e^2}{2\pi^2\hbar} \ln \frac{D\tau_\phi}{l^2}, \quad (9.127)$$

то есть слаболокализационная поправка определяется  $\tau_\phi$  и в первом приближении не зависит от магнитного поля. В сильных же полях можно положить  $x = 0$  :

$$\delta\sigma_{2D}(B) = -\frac{e^2}{2\pi^2\hbar} \left( \ln \frac{4\hbar c}{eBl^2} - \psi(1/2) \right) . \quad (9.128)$$

Как видно из этой формулы, в больших магнитных полях проводимость не зависит от  $\tau_\phi$ . Это происходит потому, что магнитное поле подавляет вклад длинных траекторий, и механизмы сбоя фазы просто не успевают сработать на оставшихся траекториях. Вычитая из (9.128) проводимость в нулевом поле (9.127), получим магнитосопротивление:

$$\delta\sigma_{2D}(B) - \delta\sigma_{2D}(0) = \frac{e^2}{2\pi^2\hbar} \left( \ln \frac{4D\tau_\phi eB}{\hbar c} - \psi(1/2) \right) . \quad (9.129)$$

Таким образом, как в двумерном, так и в трехмерном случае квантовая поправка к проводимости приводит к весьма необычному поведению магнитосопротивления в классически слабых полях, что позволяет выделять эффекты слабой локализации на фоне классического магнитосопротивления. При этом речь идет об изменении проводимости на величину порядка  $e^2/h$  в довольно слабых полях порядка  $B_c$ , так что эффект оказывается вполне измеримым. Вдобавок квантовое магнитосопротивление, в отличие от классического, в трехмерном случае не зависит от угла между током и полем и отлично от нуля даже если ток параллелен полю. Измеряя магнитосопротивление, можно найти время сбоя фазы  $\tau_\phi$ , которое определяется взаимодействием электронов. Поэтому данные по аномальному магнитосопротивлению — важный источник информации о квантовых эффектах в металлах.

Помимо этого, квантовая поправка оказывается чувствительна к любым эффектам, нарушающим симметрию по отношению к обращению времени. Например, сильное спин-орбитальное взаимодействие приводит к изменению знака квантовой поправки. Подробное изложение многочисленных эффектов слабой локализации не входит в задачу этой книги. Интересующийся читатель может обратиться к обзорам, посвященным этой теме (см. примечание на с. 252).

### 9.6.2. Эффект Ааронова-Бома

В предыдущем разделе мы показали, что магнитное поле приводит к подавлению слаболокализационной поправки, что проявляется в аномальном магнитосопротивлении. Но этот эффект накладывается на классическое магнитосопротивление. Нельзя ли сделать так, чтобы эффект классического магнитосопротивления исключался автоматически? Оказывается, можно. Для этого необходимо сделать так, чтобы магнитное поле в образце вообще отсутствовало, но вектор-потенциал был бы отличен от нуля. Поскольку в уравнение для куперона (9.111) входит именно вектор-потенциал  $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ , то  $C(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  будет «чувствовать» такое поле. Конечно, поскольку проводимость калибровочно инвариантна, интересующий нас вектор-потенциал  $\mathbf{A}(\mathbf{r})$  не должен сводиться к чистой калибровке.

Учитывая эти соображения, рассмотрим неодносвязный образец, например, металлический цилиндр, через который пропущен магнитный поток  $\Phi$ . Представим себе,

что магнитное поле отлично от нуля только в полости цилиндра. Тогда на поверхности цилиндра имеется отличный от нуля вектор-потенциал  $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ , такой, что

$$\oint \mathbf{A} d\mathbf{r} = \Phi, \quad (9.130)$$

где интеграл берется по любому контуру, охватывающему полость. Такой вектор-потенциал меняет фазы волновых функций электронов и влияет на интерференционные явления (это влияние называется *эффектом Ааронова-Бома*). Ниже мы рассмотрим, как эффект Ааронова-Бома проявляет себя в проводимости.

Итак, пусть имеется тонкая металлическая пленка, свернутая в цилиндр радиуса  $R$ , через который пропущен магнитный поток. Будем рассматривать задачу в цилиндрических координатах, выбрав ось  $z$  вдоль оси цилиндра. Вектор-потенциал внутри пленки выберем в виде

$$A_\varphi = \frac{\Phi}{2\pi R}, \quad A_r = A_z = 0. \quad (9.131)$$

Положим частоту внешнего поля  $\omega = 0$ . Тогда уравнение (9.111) переписется так:

$$\left( D \left( \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{1}{R^2} \left( \frac{\partial}{\partial \varphi} - i \frac{e\Phi}{\pi \hbar c} \right)^2 \right) + \frac{1}{\tau_\phi} \right) \mathcal{C}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{2\pi\nu_0\tau^2} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'). \quad (9.132)$$

Оно легко решается переходом в представление Фурье:

$$C(z, \varphi, z', \varphi') = \sum_{m, k_z} C_{m, k_z} e^{ik_z(z-z') + im(\varphi-\varphi')}. \quad (9.133)$$

Подставив (9.133) в (9.132), получим:

$$C_{m, k_z} = \frac{1}{2\pi\nu_0\tau^2 R} \frac{1}{\frac{1}{\tau_\phi} + Dk_z^2 + \frac{D}{R^2} \left( m - \frac{2\Phi}{\Phi_0} \right)^2}, \quad (9.134)$$

где  $\Phi_0 = \hbar c/e$  — *одноэлектронный* квант магнитного потока. Выражая слаболокализационную поправку через  $\mathcal{C}(\mathbf{r} = \mathbf{r}')$ , получаем:

$$\delta\sigma(\Phi) = -\frac{2e^2}{\pi\hbar R} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int \frac{dk_z}{2\pi} \frac{1}{k_z^2 + \frac{1}{R^2} \left( m - \frac{2\Phi}{\Phi_0} \right)^2 + \frac{1}{D\tau_\phi}} \quad (9.135)$$

Это выражение периодически зависит от магнитного потока  $\Phi$ , поскольку изменение  $\Phi$  на целое кратное  $\Phi_0/2$  можно компенсировать сдвигом  $m$ . Имеет смысл преобразовать это выражение так, чтобы периодическая зависимость стала явной. Для этого воспользуемся формулой суммирования Пуассона:

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} f(m) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{2\pi i k x} dx. \quad (9.136)$$

Применив эту формулу, сдвинув переменную интегрирования и вычислив интеграл по  $k_z$ , имеем:

$$\delta\sigma(\Phi) = -\frac{e^2}{\pi\hbar} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{2\pi ik(x+2\Phi/\Phi_0)} dx}{\sqrt{x^2 + R^2/D\tau_\phi}}. \quad (9.137)$$

Теперь видно, что  $k$ -й член этой суммы представляет собой  $k$ -ю гармонику  $\delta\sigma(\Phi)$ . Вычислим интеграл по  $x$ , используя формулу

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos tx dt}{(t^2 + 1)^\nu} = \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \frac{\Gamma(1/2)}{\Gamma(\nu + 1/2)} K_\nu(x), \quad (9.138)$$

где  $K_\nu(x)$  — функция Макдональда. Окончательно имеем:

$$\delta\sigma(\Phi) = -\frac{2e^2}{\pi\hbar} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{4\pi ik\Phi/\Phi_0} K_0\left(\frac{2\pi kR}{L_\phi}\right), \quad (9.139)$$

где  $L_\phi = \sqrt{D\tau_\phi}$  — длина сбой фазы. В этом выражении член с  $k = 0$  сингулярен. Соответствующий интеграл в (9.137) расходится при больших  $x$ . Это та же самая расходимость, что и в (9.97), поскольку величина  $x/R$  играет роль  $x$ -компоненты волнового вектора. Поэтому расходимость следует обрезать при  $x \sim R/l$ .

Имеется и другой, более удобный способ избавиться от расходимости — вычлсть из  $\delta\sigma(\Phi)$  её усредненное по вариациям потока значение:

$$\delta\sigma(\Phi) - \langle\delta\sigma\rangle_\Phi = \frac{4e^2}{\pi\hbar} \sum_{k=1}^{\infty} K_0\left(\frac{2\pi kR}{L_\phi}\right) \cos\left(\frac{4\pi k\Phi}{\Phi_0}\right). \quad (9.140)$$

Таким образом, сопротивление цилиндра периодически зависит от пропущенного через него магнитного потока<sup>19</sup>. Период осцилляций оказывается равен  $\Phi_0/2$ . Так происходит потому, что слаболокализационная поправка связана с интерференцией двух обращенных по времени замкнутых траекторий. Если такие траектории «наматываются» на цилиндр, то вдоль одной из них электрон набирает дополнительную фазу  $\delta\phi = 2\pi\Phi/\Phi_0$ , а вдоль другой  $-\delta\phi$ . Разность фаз равна  $2\pi$ , если  $\Phi = \Phi_0/2$ . Таким образом, величина интерференционных эффектов одна и та же при  $\Phi = 0$  и  $\Phi = \Phi_0/2$ .

Выражение (9.140) допускает простую интерпретацию. Амплитуда осцилляций  $K_0(2\pi kR/L_\phi)$  есть вероятность того, что случайная траектория успеет уйти от начальной точки на расстояние  $2\pi kR$  (т. е. обмотаться вокруг цилиндра  $k$  раз) за время  $\tau_\phi$ , в течение которого сохраняется фазовая когерентность. При  $2\pi kR \gg L_\phi$  функция Макдональда экспоненциально затухает. Это значит, что наиболее существенны гармоники с  $k \leq L_\phi/2\pi R$ . Поэтому для того, чтобы эффект был наблюдаемым, нужно, чтобы цилиндр был маленьким:  $2\pi R \ll L_\phi$ . Поскольку  $\tau_\phi$  растет с понижением температуры, то этому условию можно удовлетворить лишь при низких температурах или в достаточно маленьких образцах.

<sup>19</sup>На самом деле в реальный металлический цилиндр магнитное поле все-таки слегка проникает, и поэтому строгая периодичность разрушается.



Вернемся к вопросу о периоде осцилляций. Найденное значение периода  $\Phi_0/2$  выглядит несколько подозрительно, поскольку энергия и волновая функция электрона периодичны по магнитному потоку с периодом  $\Phi_0$ . В качестве примера можно рассмотреть электрон,двигающийся по кольцу без примесей. Его уровни энергии есть  $E_m = \hbar^2/2m_e R^2 (m - \Phi/\Phi_0)^2$ , где  $m_e$  — масса электрона, а  $m$  — его магнитное квантовое число. При  $\Phi = \Phi_0/2$  система явно не похожа на систему с нулевым потоком. Электрон, обходя цилиндр, меняет при  $\Phi = \Phi_0/2$  знак волновой функции, то есть эффект магнитного потока оказывается наиболее сильным. Каким же образом период осцилляций проводимости оказывается равным  $\Phi_0/2$ ?

Ответ состоит в том, что, вычисляя слаболокализационную поправку, мы учитываем только интерференцию двух траекторий, возвращающихся в исходную точку. Иными словами, мы вычисляем интерференционный вклад в вероятность «застревания» электрона в какой-то точке образца. Однако имеется также интерференционный вклад в вероятность перемещения электрона из одной точки в другую, и он устроен иначе. Этот вклад определяется траекториями, соединяющими две различные точки  $A$  и  $B$  и обходящими полость цилиндра с разных сторон. Разность фаз между такими траекториями равна  $2\pi\Phi/\Phi_0$ . Таким образом, интерференция между ними приводит к осцилляциям с периодом  $\Phi_0$ . Однако вклад таких траекторий также содержит большую фазу порядка  $\theta = p_F L$ , где  $L$  — длина траектории. Эта фаза зависит от формы траектории, то есть от реализации беспорядка. Если мы теперь усредним проводимость по беспорядку, то этот вклад исчезнет из-за усреднения по фазе  $\theta$ . Если же по беспорядку не усреднять, а рассматривать образец с конкретной реализацией беспорядка, то его проводимость должна иметь период  $\Phi_0$ .

Чтобы проверить справедливость этой качественной картины, нужно вычислить величину, в которой вклад с периодом  $\Phi_0$  не выпадает при усреднении по беспорядку. Чтобы изучить, как проводимость образца с данной реализацией беспорядка зависит от магнитного потока, рассмотрим произведение проводимостей при разных значениях потока и усредним его:

$$K_{\Phi, \Phi'} = \langle \sigma_{\alpha\beta}(\Phi) \sigma_{\mu\nu}(\Phi') \rangle_{\text{disorder}} - \langle \sigma_{\alpha\beta}(\Phi) \rangle_{\text{disorder}} \langle \sigma_{\mu\nu}(\Phi') \rangle_{\text{disorder}}. \quad (9.141)$$

Каждая из проводимостей в этом выражении дается до усреднения по беспорядку диаграммой на рис. 9.5, в которой жирная линия обозначает точную функцию Грина, изображенную на рис. 9.1. При усреднении по беспорядку нас интересуют перекрестные члены, поэтому мы должны связать примесными пунктирами функции Грина в разных петлях. Из-за усреднения по направлениям импульсов примесную лестницу в каждую из петель вставлять не надо. При этом мы должны постараться сделать так, чтобы примесные линии не пересекались.

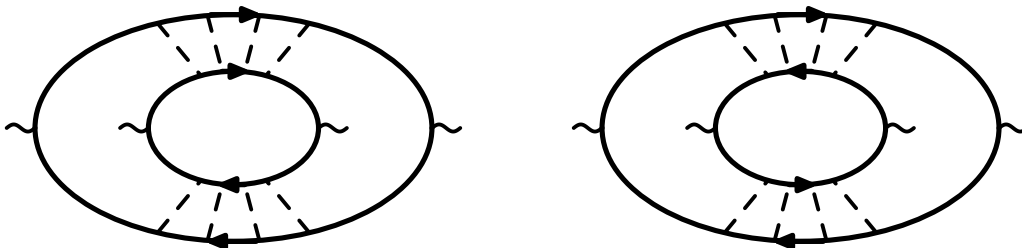


Рис. 9.22

Получаются диаграммы, показанные на рис. 9.22. В данном случае имеется два вклада: от куперона и от диффузона. При этом на электрон во внешней петле диаграммы действует магнитное поле, пропорциональное  $\Phi$ , а во внутренней — пропорциональное  $\Phi'$ . В этом случае уравнения для куперона и для диффузона можно получить тем же способом, что и выше. Нужно только учесть, что, поскольку куперон пропорционален  $\langle \psi\psi \rangle$ , то в нем векторные потенциалы внутренней и внешней петель на диаграммах рис. 9.22 складываются, в то время как диффузон пропорционален  $\langle \psi\psi^+ \rangle$ , и поэтому в нем векторные потенциалы вычитаются. (Тогда при  $\Phi = \Phi'$  получаем, что магнитное поле не меняет уравнение диффузии, как и должно быть.) Это означает, что в куперонных диаграммах эффективный магнитный поток есть  $(\Phi + \Phi')/2$ , а в диффузонных —  $(\Phi - \Phi')/2$ . В остальном же куперонный и диффузонный вклады совпадают.

Строго говоря, это не совсем правильно. Куперонный вклад, в отличие от диффузионного, экспоненциально затухает на временах  $t > \tau_\phi$ . (А диффузионный полюс при  $k = 0$  всегда есть  $\omega = 0$  из-за сохранения числа частиц.) Тем не менее, фазочувствительная часть диффузионного вклада, отвечающая за зависимость проводимости от  $\Phi$ , также исчезает при  $t > \tau_\phi$ . Поэтому мы для простоты игнорируем это различие между диффузоном и купероном.

Как мы увидим ниже, в ответ дают вклад только большие масштабы, поэтому характерный суммарный импульс в купероне и разность импульсов в диффузоне оказываются порядка  $R^{-1}$ . Это означает, что импульсы, бегущие по разные стороны каждой примесной лестницы, отличаются мало. Поэтому произведение токовых вершин и функций Грина на концах дает множитель

$$A_{\alpha\mu\beta\nu} = e^4 \int v_\alpha v_\mu v'_\beta v'_\nu G_R^2(p) G_A^2(p) G_R^2(p') G_A^2(p') \frac{d^2 p}{(2\pi)^2} \frac{d^2 p'}{(2\pi)^2} \quad (9.142)$$

(при выводе этой формулы несущественная зависимость функций Грина от энергии была опущена). Интегралы легко вычисляются переходом к интегрированию по  $\xi$ , что дает

$$A_{\alpha\mu\beta\nu} = \frac{e^4 v_F^4}{4} \delta_{\alpha\mu} \delta_{\beta\nu} (4\pi\nu_0\tau^3)^2 = 16\pi^2 \nu_0^2 \tau^4 D^2 \delta_{\alpha\mu} \delta_{\beta\nu}. \quad (9.143)$$

Интегрирование по энергиям дает, как обычно,  $\omega/2\pi$ , причем  $\omega$  сокращается после подстановки функции отклика в определение проводимости. Поэтому коррелятор проводимостей (9.141) есть<sup>20</sup>

$$K_{\Phi, \Phi'} = 2e^4 \pi^2 \nu_0^2 \tau^4 D^2 \delta_{\alpha\mu} \delta_{\beta\nu} \int d^2 r (|C(\mathbf{r}, \Phi, \Phi')|^2 + |D^2(\mathbf{r}, \Phi, \Phi')|^2). \quad (9.144)$$

Квадрат куперонной амплитуды можно найти по теореме Парсеваля:

$$I_C = \int C^2(\mathbf{r}) d^2 r = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk_z}{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} |C_{m, k_z}|^2. \quad (9.145)$$

<sup>20</sup>Интеграл по  $d^2 \mathbf{r}$  в (9.144) возникает потому, что начальная и конечная точки на диаграммах рис. 9.22 различаются.

Это выражение можно преобразовать, как и ранее, проинтегрировав по  $k_z$  и применив формулу суммирования Пуассона (9.136). Получим:

$$I_C = \frac{1}{16\pi^2\nu_0^2\tau^4D^2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{e^{2\pi ik(x+(\Phi+\Phi')/\Phi_0)} dx}{(x^2 + R^2/L_\phi^2)^{3/2}} \right). \quad (9.146)$$

Интеграл по  $x$ , согласно (9.139), выражается через функцию Макдональда:

$$I_C = \frac{1}{16\pi^2\nu_0^2\tau^4D^2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{4\pi k L_\phi}{R} K_1 \left( \frac{2\pi k R}{L_\phi} \right) e^{2\pi ik(\Phi+\Phi')/\Phi_0}. \quad (9.147)$$

Аналогичное выражение для диффузионного вклада отличается заменой  $\Phi + \Phi'$  на  $\Phi - \Phi'$ . Подставив (9.147) в (9.144) и приведя подобные члены, получим:

$$\begin{aligned} K_{\Phi, \Phi'} &= \frac{e^4 R^2}{\pi^2 \hbar^2 L_\phi^2} \delta_{\alpha\mu} \delta_{\beta\nu} \times \\ &\times \left( 1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2\pi k R}{L_\phi} K_1 \left( \frac{2\pi k R}{L_\phi} \right) \cos \left( \frac{2\pi k \Phi}{\Phi_0} \right) \cos \left( \frac{2\pi k \Phi'}{\Phi_0} \right) \right) \end{aligned} \quad (9.148)$$

(в члене с  $k = 0$  нужно взять предел малых  $k$  и использовать асимптотику функции Макдональда  $K_1(x \ll 1) \approx 1/x$ ).

Результат (9.148) подтверждает описанную выше качественную картину. Основная гармоника имеет период  $\Phi_0$ , а не  $\Phi_0/2$ . (Это видно из того, что зависящая от магнитного потока часть пропорциональна произведению двух косинусов с периодом  $\Phi_0$ ). Однако при усреднении проводимости по беспорядку этот вклад исчезает, поэтому он проявляется лишь в корреляции проводимостей одного и того же образца.

Обратим внимание на интересную немонотонную зависимость результата от параметра  $2\pi R/L_\phi$ . При  $2\pi R \gg L_\phi$  функции Макдональда, определяющие зависимость от магнитного потока, экспоненциально малы. В этом пределе электроны не могут обойти цилиндр, не потеряв при этом фазовую когерентность, так что исчезновение эффекта в этом пределе вполне естественно. Более интересно, что в противоположном пределе ( $2\pi R \ll L_\phi$ ) эффект тоже мал как  $R^2/L_\phi^2$ . Это происходит потому, что в этих условиях вклад дает большое число траекторий, проходящих в разных местах поверхности цилиндра, что эффективно приводит к усреднению по беспорядку. Но при  $2\pi R \sim L_\phi$  электроны, дающие вклад в интерференционную поправку, обходят цилиндр по траекториям, не слишком далеко отстоящим от наикратчайшей, поэтому усреднения по беспорядку не происходит.

Заметим, что отличие проводимости конкретного образца от средней может быть довольно заметным. При  $L_\phi \sim 2\pi R$  (необходимое условие наблюдения эффекта Ааронова–Бома) коррелятор проводимостей оказывается порядка  $e^4/h^2$ . Таким образом, при изменении беспорядка проводимость может измениться на величину порядка одного кванта, хотя образец при этом остается макроскопическим и содержит большое количество примесей ( $R \gg l$ ). Это означает, что интерференционная часть проводимости является макроскопически измеримой несосредняющейся величиной. Этот

неожиданный эффект есть проявление фазовой когерентности электронов при низких температурах.

Подведем итог. При достаточно низкой температуре, транспортные свойства образцов с размерами  $R$  много больше атомных оказываются существенно квантовыми. Для этого требуется лишь, чтобы выполнялось условие  $R \leq L_\phi$ . Раздел физики твердого тела, изучающий свойства таких систем, называется *мезоскопикой*, поскольку размеры системы должны быть достаточно велики, чтобы их можно было описывать макроскопически (и проводить измерения!) но одновременно достаточно малы, чтобы можно было наблюдать квантовые эффекты<sup>21</sup>.

---

<sup>21</sup>Читатель, желающий узнать побольше об этой активно развивающейся области, может обратиться к популярной статье: B.L. Altshuler, P.A. Lee, *Physics Today* **41**(12), 37 (1988)

# Глава 10.

## Сверхпроводимость

### 10.1. Микроскопическая теория сверхпроводимости

#### 10.1.1. Образование куперовских пар

Сверхпроводимость в металлах возникает из-за электрон-фононного взаимодействия, приводящего к притяжению между электронами. Качественно это можно понять так. Двигаясь в металле, электрон притягивает ионы. За счет этого, кристаллическая решетка слегка деформируется. Поэтому в области, через которую прошел электрон, на некоторое время остается нескомпенсированный положительный заряд ионов, который, в свою очередь, притягивает другие электроны.

На первый взгляд, электрон-фононное взаимодействие не должно существенно влиять на физику электронной системы. Ведь ядра решетки тяжелые, и электронам трудно сдвинуть их с места. Как мы выяснили в главе 6, где обсуждалась теория Мигдала, принимающая во внимание большую разницу масс электронов и ионов, это в каком-то смысле справедливо. Действительно, даже при величине электрон-фононного взаимодействия порядка единицы, поправки к различным физическим величинам оказываются либо малыми, либо сосредоточенными в интервале энергий порядка дебаевской, т. е. много меньше энергии Ферми.

Однако оказывается, что электрон-фононное притяжение весьма эффективно, если импульсы взаимодействующих электронов направлены в противоположные стороны. Один электрон, двигаясь сквозь кристалл, встряхивает решетку вдоль линии своего движения. Колебания решетки — это медленный процесс, поэтому электрон оставляет за собой сравнительно долгоживущий след. Характерная частота колебаний решетки порядка дебаевской частоты  $\omega_D \sim \sqrt{m/M}\varepsilon_F$ , где  $m/M$  — отношение массы электрона к массе иона. Поэтому время рассасывания возмущения решетки оказывается примерно в  $\sqrt{M/m}$  раз больше, чем время, за которое электрон проходит расстояние между соседними ионами. Это означает, что возмущение решетки, созданное движущимся электроном, образует след, вытянутый вдоль траектории электрона примерно на  $\sqrt{M/m}$  межатомных расстояний. Второй электрон, если он движется точно навстречу первому, проходит через те же самые точки пространства, но в обратном порядке. Все то время, пока рассасывается возмущение, этот электрон находится внутри следа, оставленного первым электроном. Поэтому притяжение между электронами с противоположными импульсами оказывается гораздо сильнее, чем между электрона-

ми, движущимися под углом.

Более формально электрон-электронное притяжение получается так. Взаимодействие между электронами за счет обмена виртуальным фононом описывается такой диаграммой:

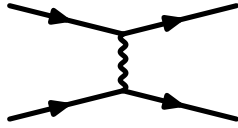


Рис. 10.1

Мы будем рассматривать этот процесс, как эффективное взаимодействие двух электронов с передачей импульса  $k$ . По правилам диаграммной техники, описанным в гл. 4 и 6, линии взаимодействия соответствует такое выражение:

$$g_{e-ph}^2 D(\omega, \mathbf{k}) = \frac{g_{e-ph}^2 \omega_{\mathbf{k}}^2}{\omega^2 - \omega_{\mathbf{k}}^2} \quad (10.1)$$

Интерес для нас представляют процессы, в которых переданный импульс  $\mathbf{k}$  порядка фермиевского, а переданная энергия мала:  $\omega \ll \omega_D$ . Поскольку  $\omega_{\mathbf{k}} \simeq \omega_D$ , выражение (10.1) оказывается равным просто  $-g_{e-ph}^2$ . Отрицательный знак амплитуды рассеяния на рис. 10.1 означает, что эффективное взаимодействие является притяжением. Заметим, что передача импульса порядка  $p_0$  возможна лишь если суммарный импульс мал. В противном случае, поскольку все состояния под ферми-поверхностью заняты, а суммарный импульс сохраняется, передача импульса от одной частицы к другой при взаимодействии оказывается малой. (Это наиболее очевидно, если суммарный импульс близок к  $2p_0$ , то есть взаимодействующие электроны находятся в близких точках ферми-поверхности. В этом случае возможная величина переданного импульса много меньше  $p_0$ .) Таким образом, взаимодействие (10.1) наиболее эффективно для электронов с противоположными импульсами.

Оказывается, что эффективное притяжение приводит к образованию связанного состояния. Электроны группируются в так называемые *куперовские пары* с противоположно направленными импульсами. Спины электронов в паре оказываются при этом направленными в разные стороны, так чтобы спиновая часть волновой функции пары была нечетной, а координатная — четной. При этом выигрыш в энергии пары из-за электрон-фононного взаимодействия максимален. Таким образом, куперовская пара представляет собой спиновый синглет, а ее орбитальный момент равен нулю.

Такое спаривание называется  $S$ -спариванием. Существуют и другие виды сверхпроводящего спаривания более общего вида, характеризующиеся отличным от нуля орбитальным моментом пары или спином пары равным единице. Такое спаривание реализуется, например, в  ${}^3\text{He}$ , а также в некоторых сверхпроводящих материалах, относящихся к классам так называемых «купратных» и «тяжелофермионных» сверхпроводников.

Наконец, остановимся на связи эффекта спаривания с явлением сверхпроводимости. Заметим, что куперовские пары подчиняются бозе-статистике, и поэтому при низкой температуре они формируют бозе-конденсат. В такой бозе-жидкости из куперовских пар все механизмы рассеяния электронов становятся неэффективными, потому что при рассеянии одного из спаренных электронов пара разрушилась бы. Но разрушение

пары требует затраты энергии порядка энергии связи электронов в паре. Поэтому при температуре меньше энергии связи пары рассеяние отдельных электронов оказывается энергетически невыгодным. Вследствие этого при низких температурах электрический ток может течь без диссипации.

Остановимся на влиянии кулоновского взаимодействия на сверхпроводимость. Можно было бы ожидать, что сверхпроводимость должна подавляться прямым электрон-электронным взаимодействием. Действительно, эффекты кулоновского взаимодействия обычно порядка единицы. При этом фононное притяжение между электронами короткодействующее, а кулоновское отталкивание — дальнедействующее. Поэтому, казалось бы, отталкивание должно перевесить. Однако все не так просто. Дело в том, что кулоновское взаимодействие запаздывает на время порядка обратной плазменной частоты, а электрон-фононное — на время порядка  $\omega_D^{-1}$ . Иными словами, электрон оставляет вдоль своей траектории фононный след, который не рассасывается относительно долго (см. задачу 61). Поэтому взаимодействие между электронами за счет обмена фононами происходит гораздо дольше, чем кулоновское отталкивание. Следствием этого является относительная малость эффект кулоновского взаимодействия (см. задачу 58). В результате электрон-фононное взаимодействие оказывается более существенным для сверхпроводимости, чем кулоновское.

Чтобы лучше понять механизм образования пар, мы упростим задачу и, следуя первоначальной идее Купера, рассмотрим всего два взаимодействующих электрона, движущихся на фоне ферми-моря. При этом мы будем пренебрегать эффектом рождения электрон-дырочных пар, и учтем влияние остальных электронов только в том смысле, что импульсы выбранных нами двух электронов будут обязаны лежать вовне ферми-сферы.

В импульсном представлении состояния пары электронов описываются волновой функцией  $\Psi_{\alpha\beta}(\mathbf{p}, \mathbf{p}')$ , где  $\mathbf{p}$  и  $\mathbf{p}'$  — импульсы, а  $\alpha$  и  $\beta$  — спиновые индексы. Взаимодействие между электронами сохраняет спин, поэтому будем рассматривать только синглетные состояния  $\Psi_{\alpha\beta}(\mathbf{p}, \mathbf{p}') = \Psi(\mathbf{p}, \mathbf{p}')(|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle)$ . Орбитальная часть волновой функции  $\Psi(\mathbf{p}, \mathbf{p}')$  удовлетворяет уравнению Шредингера в импульсном пространстве:

$$E \Psi(\mathbf{p}, \mathbf{p}') = (E_p + E_{p'})\Psi(\mathbf{p}, \mathbf{p}') + \sum_{\mathbf{p}+\mathbf{p}'=\mathbf{q}+\mathbf{q}'} V_{\mathbf{p}\mathbf{p}'\mathbf{q}\mathbf{q}'} \Psi(\mathbf{q}, \mathbf{q}') \quad (10.2)$$

Здесь  $E_p = p^2/2m - \mu$  — одночастичная энергия, а  $V_{\mathbf{p}\mathbf{p}'\mathbf{q}\mathbf{q}'}$  — эффективное взаимодействие между электронами. Как указано выше, мы предполагаем, что импульсы  $\mathbf{p}$  и  $\mathbf{p}'$  находятся снаружи ферми-сферы:  $|\mathbf{p}| > p_0$ ,  $|\mathbf{p}'| > p_0$ .

Следует заметить, что характерная энергия, переданная при электрон-фононном взаимодействии, не может быть больше дебаевской частоты  $\omega_D$ . Поэтому будем считать, что взаимодействие  $V_{\mathbf{p}\mathbf{p}'\mathbf{q}\mathbf{q}'}$  отлично от нуля только в узком интервале энергий порядка  $\omega_D$ :

$$V_{\mathbf{p}\mathbf{p}'\mathbf{q}\mathbf{q}'} = \begin{cases} -\lambda & \text{при } |E_p|, |E_{p'}| < \omega_D \\ 0 & \text{в противном случае} \end{cases} \quad (10.3)$$

Здесь мы ввели обозначение для эффективной константы взаимодействия:  $\lambda \equiv g_{e-ph}^2$ .

Рассмотрим вначале случай нулевого суммарного импульса пары  $\mathbf{P} = \mathbf{p} + \mathbf{p}' = 0$ .

При этом уравнение (10.2) принимает вид:

$$(E - 2E_p)\Psi(\mathbf{p}, -\mathbf{p}) = -\lambda \sum_{0 < E_q < \omega_D} \Psi(\mathbf{q}, -\mathbf{q}) \quad (10.4)$$

Поскольку правая часть этого уравнения не зависит от  $\mathbf{p}$  в области  $|E_p| < \omega_D$ , решение уравнения есть

$$\Psi(\mathbf{p}, -\mathbf{p}) = \frac{a}{E - 2E_p}. \quad (10.5)$$

Такое решение существует, если

$$-\lambda \sum_{0 < E_q < \omega_D} \frac{1}{2E_q - E} = 1. \quad (10.6)$$

Напомним, что условие  $0 < E_q$  в (10.6) возникает, поскольку в задаче присутствует фермиевское море, из-за чего рассматриваемые два электрона не могут переходить в состояния под ферми-поверхностью. Условие же  $E_q < \omega_D$  в (10.6) отражает тот факт, что электроны обмениваются фононами, и поэтому переданная при взаимодействии энергия не может быть больше  $\omega_D$ .

Нас интересует связанное состояние электронов пары, поэтому энергия  $E$  должна быть отрицательной. Переходя в (10.6) к интегрированию по  $\xi$ , имеем

$$1 = \lambda \nu_0 \int_0^{\omega_D} \frac{d\xi}{2\xi + |E|} = \frac{1}{2} \lambda \nu_0 \ln \left( 1 + \frac{2\omega_D}{|E|} \right), \quad (10.7)$$

где  $\nu_0 = mp_0/2\pi^2\hbar^3$  — одночастичная плотность состояний на уровне Ферми. Решая уравнение (10.7), получаем энергию связи пары:

$$E = -\frac{2\omega_D}{e^{2/\lambda\nu_0} + 1}. \quad (10.8)$$

При малой константе связи  $\lambda\nu_0 \ll 1$  выражение (10.8) превращается в  $E = -2\omega_D e^{-2/\lambda\nu_0}$ . Итак, связанное состояние двух электронов действительно существует. Обратим внимание на существенную роль ферми-статистики. Электроны не могут перейти в занятые состояния под ферми-поверхностью, поэтому в импульсном пространстве они всегда находятся в тонком двумерном сферическом слое между  $|\mathbf{p}| = p_0$  и  $|\mathbf{p}| \simeq p_0 + \omega_D/v_F$ . Аналогично можно рассмотреть образование пары с суммарным импульсом  $\mathbf{k}$  отличным от нуля. Нетрудно показать, что в этом случае минимальная энергия связи достигается при  $\mathbf{k} = 0$ .

Отметим интересную аналогию между рассмотренной задачей об одной куперовской паре и задачами 12 и 13, в которых обсуждается образование связанного состояния при движении частицы в поле мелкой ямы. Связанное состояние имеется только в пространстве размерности  $D \geq 2$ , причем при  $D = 2$  ситуация логарифмическая, как в (10.6), и энергия связи оказывается экспоненциально малой по глубине ямы. Особая роль размерности  $D = 2$  связана с тем, что плотность состояний  $\nu(\varepsilon)$  при  $D < 2$  расходится при энергии  $\varepsilon \rightarrow 0$ , в то время как при  $D = 2$  плотность состояний  $\nu(\varepsilon)$  остается конечной при сколь угодно малом  $\varepsilon$ . В то же время при  $D > 2$  плотность состояний обращается в ноль при  $\varepsilon \rightarrow 0$ , чем и объясняется отсутствие связанных состояний в мелкой яме. Нетрудно видеть,



что при  $D = 2$  задача о мелкой яме формально эквивалентна задаче о куперовской паре. Поэтому иногда говорят, что динамика куперовской пары эффективно двумерна.

Интересно оценить размер куперовской пары. Это можно сделать, например, из соотношения неопределенности. Энергия каждого из электронов в паре имеет неопределенность порядка  $\Delta$  (потому что фиксирована лишь суммарная энергия). Соответствующая неопределенность импульса есть  $\delta p \sim \Delta/v_F$  и, следовательно, положение каждого из электронов определено с точностью до

$$\xi = \frac{\hbar}{\delta p} \sim \frac{\hbar v_F}{\Delta} \quad (10.9)$$

Это и есть размер пары. Поскольку при слабом взаимодействии  $\lambda\nu_0 \ll 1$  энергия связи  $\Delta$  экспоненциально мала, расстояние между электронами в паре оказывается гораздо больше, чем среднее расстояние между электронами. Это означает, что пренебрежение взаимодействием электронов пары с электронами ферми-моря, вообще говоря, некорректно. Поэтому рассмотренная нами задача об одной куперовской паре представляет собой лишь наводящее соображение. Тем не менее, как будет показано ниже, полученная оценка энергии связи (10.8) не очень далека от значения, предсказываемого точной теорией. Кроме того, представление о куперовских парах оказывается весьма полезным при качественных рассуждениях.

### 10.1.2. Квазичастицы в сверхпроводнике

Перейдем к более формальному анализу задачи о сверхпроводящем спаривании. Запишем гамильтониан системы с притяжением:

$$\widehat{\mathcal{H}}_{\text{БКШ}} = \sum_p \xi_p a_p^+ a_p - \frac{1}{2} \sum_{p+p'=q+q'} V_{pp'qq'} a_{p\alpha}^+ a_{p'\beta}^+ a_{q\beta} a_{q'\alpha} \quad (10.10)$$

Как и раньше, будем считать, что взаимодействие отлично от нуля только вблизи ферми-поверхности:

$$V_{pp'qq'} = \begin{cases} \lambda & \text{при } \xi_{\max} < \omega_D; \\ 0 & \text{при } \xi_{\max} > \omega_D \end{cases}, \quad (10.11)$$

где  $\xi_{\max} = \max\{|\xi_p|, |\xi_{p'}|, |\xi_q|, |\xi_{q'}|\}$ . Выражение (10.10) называется гамильтонианом теории Бардина–Купера–Шриффера (БКШ).

При слабом взаимодействии между электронами, константу  $\lambda$  можно выразить через безразмерную константу  $\zeta$  электрон–фононного взаимодействия:  $\lambda = g_{e\text{-ph}}^2 = \zeta/\nu_0$  (см. с. 112). Следует отметить, что в реальных системах (т. е. при  $\zeta \sim 1$ ) связь между  $\lambda$  и  $\zeta$  не такая простая. В этом случае из-за сильной перенормировки электронного спектра теория сверхпроводимости должна самосогласованно учитывать все эффекты электрон–фононного взаимодействия, обсуждавшиеся в гл. 6. Тем не менее, гамильтониан БКШ с  $\lambda \sim g_{e\text{-ph}}^2$  оказывается вполне разумным приближением даже при  $\zeta \sim 1$ .

Упростим гамильтониан БКШ, оставив в нем лишь члены, отвечающие за взаимодействие с противоположными импульсами:

$$\widehat{\mathcal{H}} = \sum_p \xi_p a_p^+ a_p - \frac{\lambda}{2} \sum_{pq} a_{p\alpha}^+ a_{-p\beta}^+ a_{q\beta} a_{-q\alpha} \quad (10.12)$$

Но и этот гамильтониан все еще довольно сложен. Поэтому для его анализа мы воспользуемся теорией среднего поля.

В задаче о сверхпроводящем спаривании теория среднего поля оказывается весьма нетривиальной. Введем операторы  $\hat{B}_{\alpha\beta} = \sum_p a_{p\alpha}^+ a_{-p\beta}^+$ , описывающие рождение куперовской пары с конфигурацией спинов  $|\alpha\beta\rangle$ . Взаимодействие в гамильтониане (10.12) можно представить в виде  $-(\lambda/2) \sum_{\alpha\beta} \hat{B}_{\alpha\beta}^+ \hat{B}_{\alpha\beta}$ . Далее, нетрудно показать, что  $\hat{B}_{\uparrow\uparrow} = \hat{B}_{\downarrow\downarrow} = 0$ , а  $\hat{B}_{\uparrow\downarrow} = -\hat{B}_{\downarrow\uparrow}$ . (Для этого надо рассмотреть тождества  $\psi_\alpha^+(r)\psi_\alpha^+(r) = 0$  и  $\{\psi_\uparrow^+(r), \psi_\downarrow^+(r)\}_+ = 0$ , и перейти в фурье-представление.) Поэтому взаимодействие в (10.12) можно представить в виде  $-\lambda B_{\uparrow\downarrow}^+ \hat{B}_{\uparrow\downarrow}$ .

При бозе-конденсации пар все они оказываются в одном и том же квантовом состоянии, поэтому мы предполагаем, что в сверхпроводящем состоянии среднее от оператора рождения пары отлично от нуля:  $\langle \hat{B} \rangle \neq 0$ . Такое предположение может показаться противоречивым, ведь оператор  $\hat{B}$  не сохраняет число частиц, а состояния с различным числом частиц должны быть ортогональны. Дело, однако, заключается в том, что мы рассматриваем систему с очень большим числом частиц  $N$ , и изменение  $N$  на величину порядка единицы есть в некотором смысле «малая поправка». Поэтому можно считать, что основные состояния с  $N$  и с  $N+2$  частицами практически тождественны. Более подробно смысл так называемых «аномальных средних» мы обсудим ниже (см. разделы 10.2.1 и 10.2.2), а пока просто заменим в гамильтониане (10.12) операторы  $B_{\uparrow\downarrow}^+ = \sum_p a_{p\uparrow}^+ a_{-p\downarrow}^+$  и  $\hat{B}_{\uparrow\downarrow} = \sum_p a_{p\downarrow} a_{-p\uparrow}$  на их средние. При этом получается так называемый гамильтониан Боголюбова:

$$\widehat{\mathcal{H}} = \sum_p \left( \xi_p (a_{p\uparrow}^+ a_{p\uparrow} + a_{p\downarrow}^+ a_{p\downarrow}) + \Delta a_{p\downarrow}^+ a_{-p\uparrow}^+ + \bar{\Delta} a_{p\uparrow} a_{-p\downarrow} \right), \quad (10.13)$$

где

$$\Delta = \lambda \sum_q \langle a_{q\downarrow} a_{-q\uparrow} \rangle, \quad \bar{\Delta} = \lambda \sum_q \langle a_{q\uparrow}^+ a_{-q\downarrow}^+ \rangle. \quad (10.14)$$

(В выражении (10.13) мы пренебрегли несущественной константой  $-\lambda|\Delta|^2$ .) Гамильтониан (10.13) квадратичен по операторам  $a_{p\alpha}$ ,  $a_{p\beta}^+$ , и поэтому его можно легко диагонализировать с помощью канонического преобразования. Введем для этого новые фермионные операторы:

$$\begin{aligned} c_{p\uparrow} &= u_p a_{p\uparrow} + v_p a_{-p\downarrow}^+ \\ c_{p\downarrow} &= -v_p a_{p\downarrow}^+ + u_p a_{-p\uparrow}, \end{aligned} \quad (10.15)$$

Постараемся подобрать  $u_p$  и  $v_p$  так, чтобы гамильтониан (10.10) перешел в гамильтониан свободных частиц

$$\widehat{\mathcal{H}} = E_0 + \sum_p \varepsilon_p c_p^+ c_p \quad (10.16)$$

Это можно сделать любым из методов, рассмотренных в задачах гл. 1. Получаем

$$u_p^2 = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{\xi_p}{\varepsilon_p} \right), \quad v_p^2 = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{\xi_p}{\varepsilon_p} \right), \quad (10.17)$$

где  $\varepsilon_p = \sqrt{\xi_p^2 + |\Delta|^2}$  (см., например, задачу 2).

Таким образом, мы нашли *квазичастицы* гамильтониана БКШ, упрощенного методом Боголюбова. Как видно из соотношений (10.15) и (10.17), квазичастицы очень сильно отличаются от исходных электронов в интервале энергий  $\xi_p \sim \Delta$  вблизи ферми-поверхности, а за пределами этого интервала отличие невелико. На поверхности Ферми  $\xi_p = 0$ , и поэтому энергия квазичастицы есть  $\Delta$ , а энергия квазидырки равна  $-\Delta$ . Таким образом, в спектре квазичастиц открывается щель ширины  $2\Delta$ .

Чтобы определить величину  $\Delta$ , нужно учесть условие самосогласования (10.14). Вычисляя среднее  $\langle a_{q\downarrow} a_{-q\uparrow} \rangle$  с помощью преобразования (10.15), получаем:

$$\Delta = \lambda \sum_q \frac{\Delta}{2\sqrt{\xi_q^2 + \Delta^2}} \quad (10.18)$$

В этом выражении можно перейти к интегрированию по  $\xi$ :

$$\Delta = \frac{\lambda}{2} \Delta \nu_0 \int_{-\omega_D}^{\omega_D} \frac{d\xi}{\sqrt{\xi^2 + \Delta^2}}. \quad (10.19)$$

При  $\Delta \ll \omega_D$  интеграл в правой части (10.19), с логарифмической точностью, есть  $\ln(2\omega_D/\Delta)$ . Поэтому уравнение (10.19) принимает вид  $\Delta = \lambda \Delta \ln(2\omega_D/\Delta)$  и соответственно имеет нетривиальное решение

$$\Delta = 2\omega_D e^{-1/\lambda\nu_0}. \quad (10.20)$$

Итак, с помощью канонического преобразования мы диагонализировали гамильтониан БКШ и показали, что в спектре квазичастиц открывается щель. При этом были учтены все эффекты взаимодействия, как над, так и под ферми-поверхностью. Интересно, что при таком более строгом рассмотрении ответ для ширины щели в спектре системы не слишком сильно отличается от результата (10.8) задачи об одной паре.

Отметим интересную аналогию между теорией БКШ и теорией пайерлсовского диэлектрика в одномерной системе электронов, взаимодействующих с фононами (см. раздел 6.4). Можно проследить сходство между гамильтонианами, процедурой их диагонализации, спектрами получающихся квазичастиц, и уравнениями самосогласования для щели в спектре. Несмотря на формальное сходство, физика возникающего из-за взаимодействия основного состояния в этих системах совершенно разная. В теории БКШ спариваются электроны на противоположных участках ферми поверхности, а в теории Пайерлса спариваются электроны и дырки. В первом случае получается сверхпроводник, а во втором — диэлектрик. Сверхпроводящее состояние пространственно однородно, а в пайерлсовском состоянии имеется волна плотности (из-за чего это состояние возникает только в квазиодномерных системах).

## 10.2. Диаграммная техника для теории Бардина—Купера—Шриффера

### 10.2.1. Рассеяние в куперовском канале

Образование пар — явление существенно квантовое. Поэтому в задаче о сверхпроводимости формализм функций Грина оказывается весьма подходящим средством. С помощью соответствующим образом введенных гриновских функций теорию сверхпроводимости можно развить весьма далеко и рассмотреть такие вопросы, как термодинамика

сверхпроводников, роль кулоновского взаимодействия в спаривании, отклик сверхпроводников на внешнее электромагнитное поле, и т. д. Кроме того, большое значение имеет обобщение теории БКШ на случай так называемых «грязных» сверхпроводников, т. е. металлов с примесями. В последнем случае, как мы увидим, преимущества функций Грина особенно значительны.

В предыдущих главах мы рассматривали либо невзаимодействующие, либо слабо взаимодействующие системы, в которых квантовые эффекты, в основном, возникали из-за квантовой статистики (как, например, в ферми-газе). По этой причине многие из результатов предыдущих глав можно получить, используя вместо функций Грина какой-нибудь обходной прием. (Например, отклик ферми-газа на внешнее поле можно найти либо с помощью кинетического уравнения, либо выписывая явно второй порядок теории возмущений.) Теория же сверхпроводимости имеет дело с сильно взаимодействующей системой, в которой взаимодействие приводит к качественной перестройке основного состояния. Поэтому функции Грина оказываются не только наиболее естественным, но и во многих случаях единственно возможным инструментом.

Перейдем к переводу задачи о сверхпроводящем спаривании на язык диаграммной техники. Сначала разберемся, как на языке диаграмм выглядит утверждение об образовании связанного состояния для пары электронов с противоположными импульсами. Как известно, связанному состоянию соответствует полюс в амплитуде рассеяния (см. задачи 12, 13 в гл. 3), поэтому естественно рассмотреть вершинную часть, описывающую рассеяние электронов с противоположными импульсами друг на друге. Вклады первого и второго порядка по взаимодействию имеют вид

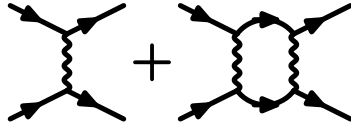


Рис. 10.2

Первой диаграмме соответствует

$$\Gamma_{\alpha\alpha'\beta\beta'}^0 = \frac{\lambda}{2} (\delta_{\alpha\alpha'}\delta_{\beta\beta'} - \delta_{\alpha\beta'}\delta_{\beta\alpha'}) . \quad (10.21)$$

Вторая диаграмма на рис. 10.2, представляющая собой поправку второго порядка теории возмущений, логарифмически расходится:

$$\lambda \nu_0 \ln(2\omega_D/\omega) \Gamma_{\alpha\alpha'\beta\beta'}^0 . \quad (10.22)$$

Здесь  $\omega$  — суммарная энергия взаимодействующих электронов. Соответствующая диаграмма будет вычислена в задаче 55 (см. также [1] § 33).

Диаграммы более высоких порядков, наиболее сингулярные при  $\omega \rightarrow 0$ , образуют такой ряд:

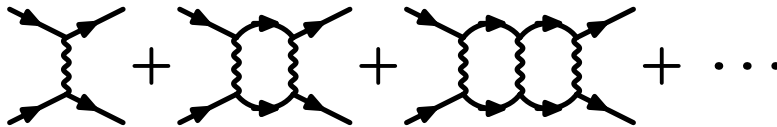


Рис. 10.3

В этом ряде диаграмма  $n$ -го порядка по  $\lambda$  имеет  $n - 1$  «опасных» сечений, импульсы частиц в которых попарно противоположны. Каждое такое сечение приводит к логарифмической расходимости, поэтому  $n$ -й член ряда (10.3) ведет себя как  $(-\lambda\nu_0 \ln(2\omega_D/\omega))^{n-1} \Gamma_{\alpha\alpha'\beta\beta'}^0$ . Суммируя геометрическую прогрессию, получаем:

$$\Gamma_{\alpha\alpha'\beta\beta'}^C(\omega) = \frac{1}{1 - \lambda\nu_0 \ln 2\omega_D/\omega} \Gamma_{\alpha\alpha'\beta\beta'}^0. \quad (10.23)$$

Амплитуда рассеяния электронов с противоположными импульсами, даваемая суммой ряда (10.3), называется *амплитудой рассеяния в куперовском канале*. Полюс в выражении (10.23) следует интерпретировать, как неустойчивость ферми-газа, связанную с образованием куперовских пар.

Оказывается, неустойчивость возникает только при достаточно низкой температуре. Чтобы в этом убедиться, рассмотрим ферми-газ с притяжением (10.10) и найдем «куперовскую восприимчивость». Введем в гамильтониан (10.10) возмущение

$$H_{pert} = \int \left\{ \psi_{\uparrow}^{\dagger}(\mathbf{r})\psi_{\downarrow}^{\dagger}(\mathbf{r})\Delta(\mathbf{r}) + \psi_{\downarrow}(\mathbf{r})\psi_{\uparrow}(\mathbf{r})\Delta^*(\mathbf{r}) \right\} d^3r, \quad (10.24)$$

и определим линейный отклик

$$\chi_C = -\frac{\partial \langle \psi_{\uparrow}(\mathbf{r})\psi_{\downarrow}(\mathbf{r}) \rangle}{\partial \Delta} \quad (10.25)$$

по отношению к возмущению (10.24). Среднее  $\langle \psi_{\uparrow}(\mathbf{r})\psi_{\downarrow}(\mathbf{r}) \rangle$  представляет собой, как обсуждалось выше, амплитуду куперовских пар, а  $\Delta$  играет роль вспомогательного внешнего поля.

Операторы  $\psi_{\uparrow}(\mathbf{r})\psi_{\downarrow}(\mathbf{r})$  и  $\psi_{\uparrow}^{\dagger}(\mathbf{r})\psi_{\downarrow}^{\dagger}(\mathbf{r})$  выглядят несколько непривычно, поскольку они не сохраняют число частиц. Среднее от такого оператора, взятое по состоянию с фиксированным числом частиц, обращается в ноль. Тем не менее, подчеркнем, что куперовская восприимчивость есть корректно определенная величина: в присутствии возмущения (10.24), не сохраняющего число частиц, среднее  $\langle \psi_{\uparrow}(\mathbf{r})\psi_{\downarrow}(\mathbf{r}) \rangle$  отлично от нуля.

Перед тем, как вычислять восприимчивость  $\chi_C$ , отметим, что она отличается от отклика на воздействие какого-либо реального поля тем, что поле  $\Delta$  нельзя приложить. Однако, нас интересует на самом деле лишь, устойчива ли система по отношению к такому возмущению. Неустойчивость, если она имеется, означает, что система сама перестраивается так, чтобы появился конденсат куперовских пар  $\langle \psi_{\uparrow}(\mathbf{r})\psi_{\downarrow}(\mathbf{r}) \rangle \neq 0$  (а вместе с ним и отличная от нуля  $\Delta$ ).

Покажем, что куперовская восприимчивость  $\chi_C$  конечна при  $T > T_c$  и обращается в бесконечность при  $T = T_c$ , где  $T_c \sim \Delta$  — температура перехода в сверхпроводящее состояние. Интересующая нас восприимчивость есть термодинамическая величина, поэтому ее следует вычислять с помощью мацубаровских функций Грина. Соответствующая последовательность диаграммы образует так называемую *куперовскую лестницу*:

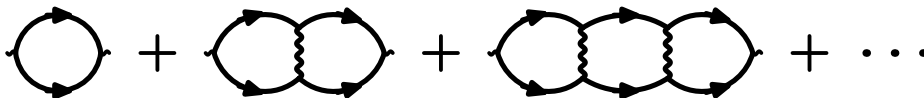


Рис. 10.4

Нетрудно видеть, что эти диаграммы получаются из диаграмм для амплитуды рассеяния замыканием внешних концов. Поэтому восприимчивость  $\chi_C$  равна

$$\chi_C(i\omega_n) = \Pi_C(i\omega_n) + \lambda \Pi_C^2(i\omega_n) + \dots = \frac{\Pi_C(i\omega_n)}{1 - \lambda \Pi_C(i\omega_n)} \quad (10.26)$$

где одна ступень куперовской лестницы есть

$$\Pi_C(i\omega_n) = T \sum_m \int \frac{d^3p}{(i\varepsilon_m + i\omega_n - \xi_p)(-i\varepsilon_m - \xi_p)}. \quad (10.27)$$

Нас интересует термодинамическая восприимчивость, поэтому положим  $\omega_n = 0$ . Суммируя по  $m$  с помощью формулы (7.87) (см. также (7.85)) и переходя к интегрированию по  $\xi$ , получаем

$$\Pi_C(0) = \frac{\nu_0}{2} \int_{-\omega_D}^{\omega_D} \text{th}(\xi/2T) \frac{d\xi}{\xi}, \quad (10.28)$$

что с логарифмической точностью есть  $\nu_0 \ln \omega_D/T$  (см. задачу 55, а также [1] § 33).

Итак, условие  $\lambda \Pi_C(0) = 1$ , определяющее температуру, при которой куперовская восприимчивость (10.26) расходится, принимает вид

$$\lambda \nu_0 \ln \left( \frac{\omega_D}{T} \right) = 1. \quad (10.29)$$

Решение этого уравнения дает температуру перехода в сверхпроводящее состояние:

$$T_c = \frac{2\gamma}{\pi} \omega_D e^{-1/\lambda \nu_0}. \quad (10.30)$$

Здесь  $\gamma = e^C$ , где  $C = 0.577\dots$  — постоянная Эйлера. Коэффициент  $2\gamma/\pi$  в этой формуле получается в результате более аккуратного вычисления (см. задачу 55). Как и следовало ожидать, температура  $T_c$  оказывается порядка величины энергетической щели (10.20), отделяющей основное состояние конденсата куперовских пар от возбужденных состояний, а также порядка частоты, при которой куперовская амплитуда рассеяния (10.23) имеет полюс.

### 10.2.2. Функции Грина в сверхпроводнике.

С формальной точки зрения, последовательность диаграмм на рис. 10.3 сильно напоминает ряд, соответствующий уравнению Бете-Солпитера (4.20) для двухчастичной амплитуды рассеяния (см. главу 4). Важное отличие, однако, состоит в том, что теперь задача многочастичная, а не двухчастичная. (Функции Грина на рис. 10.2, 10.3 учитывают эффекты ферми-статистики.) Многочастичность задачи означает, что в действительности спаривание есть не двухчастичное, а коллективное явление. Поэтому для его описания было бы недостаточно просто заменить затравочную амплитуду

рассеяния на полную, как мы поступали в одно- и двухчастичных задачах в главах 3 и 4.

Куперовская неустойчивость означает, что при включении взаимодействия основное состояние ферми-газа перестраивается нетривиальным образом. Эта перестройка и есть образование бозе-конденсата куперовских пар. Оказывается, что функции Грина, необходимые для описания этого явления, совершенно отличаются от обычных функций Грина ферми-системы.

Чтобы правильно ввести гриновские функции, приведем такое наводящее соображение. При  $\omega$  вблизи полюса выражения (10.23) куперовская лестница, показанная на рис. 10.3, становится «бесконечно длинной». (Имеется в виду, что знаменатель геометрической прогрессии (10.23) близок к единице, поэтому все члены ряда одинаково важны.) Поэтому для вычисления функций Грина нужно суметь просуммировать такие диаграммы:

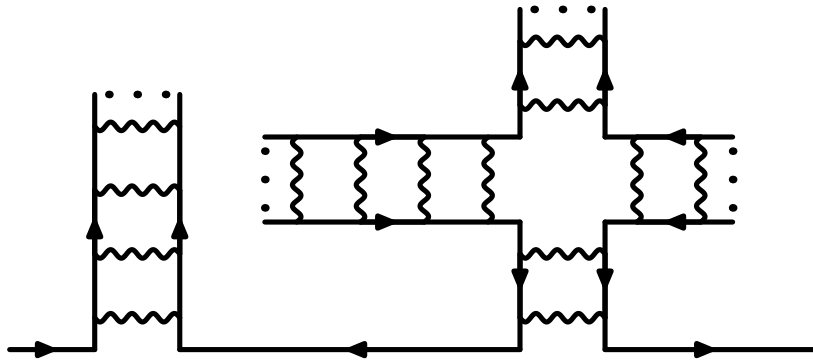


Рис. 10.5

Мы намеренно не изображали на этом рисунке концы лестниц, поскольку их длина оказывается ничем не ограниченной.

Чтобы суммировать последовательности диаграмм, показанные на рис. 10.5, удобно ввести две функции Грина:

$$\begin{aligned} G_{\alpha\beta}(x, x') &= -i\langle T\psi_\alpha(x) \psi_\beta^\dagger(x') \rangle \\ F_{\alpha\beta}(x, x') &= -i\langle T\psi_\alpha(x) \psi_\beta(x') \rangle \end{aligned} \quad (10.31)$$

Функцию  $F$  часто называют *аномальной функцией Грина*, потому что в нормальном металле она равна нулю. Выражение  $\langle T\psi_\alpha(x) \psi_\beta(x') \rangle$  выглядит несколько загадочно, поскольку обычно средние от операторов, не сохраняющих число частиц, обращаются в ноль. Однако в сверхпроводнике это не так. Можно считать, что  $F$  — это просто удобное обозначение, введенное для того, чтобы облегчить суммирование рядов, подобных изображенному на рис. 10.5.

Роль функции  $F$  можно понять, сравнив переход в сверхпроводящее состояние с переходом в магнетике из парамагнитной фазы в ферромагнитную. При таком переходе возникает спонтанная намагниченность  $\mathbf{M}$ , причем ориентацию вектора  $\mathbf{M}$  нельзя определить из гамильтониана ферромагнетика, обладающего вращательной симметрией. Ниже температуры магнитного перехода симметричное парамагнитное состояние неустойчиво, и произвольно малое внешнее поле  $\mathbf{h}$  ориентирует спины  $\mathbf{s}(\mathbf{r})$  по полю,

т. е. приводит к  $\mathbf{M} = \langle \mathbf{s}(\mathbf{r}) \rangle \neq 0$ . Формально это выражается в том, что магнитная восприимчивость  $\chi = \partial \mathbf{M} / \partial \mathbf{h}$  обращается в бесконечность в точке перехода. Ситуация в сверхпроводнике в значительной мере сходная: роль магнитной восприимчивости играет куперовская восприимчивость  $\chi_C$ , обсуждавшаяся в разделе 10.2.1. Мы видели, что  $\chi_C(T)$  расходится при  $T = T_c$  (см. (10.30)). Поэтому при  $T < T_c$  как угодно малое возмущение может создать конечное аномальное среднее  $F(x, x')$ .

Какая же симметрия нарушается при этом переходе? В ферромагнетике нарушенная симметрия — это  $T$ -инвариантность, а также симметрия по отношению к повороту спинов, а в сверхпроводнике — калибровочная инвариантность. При калибровочном преобразовании  $\psi \rightarrow \psi e^{i\phi}$  функция  $F$  преобразуется так:  $F \rightarrow F e^{2i\phi}$ . Поэтому она калибровочно неинвариантна и появление  $F \neq 0$  означает нарушение калибровочной инвариантности. Как и в случае магнетика, гамильтониан которого обладает полным набором симметрий, исчезновение калибровочной инвариантности в сверхпроводнике не означает неинвариантность гамильтониана относительно калибровочных преобразований. Калибровочно неинвариантным оказывается лишь основное состояние сверхпроводника. Вместо калибровочной инвариантности мы имеем теперь калибровочную ковариантность. Если при калибровочном преобразовании изменять основное состояние так, что  $F$  и  $\Delta$  будут тоже преобразовываться, то все физические величины останутся неизменными.

Вернемся к гриновским функциям  $G$  и  $F$ . На рис. 10.5 показаны не все диаграммы, дающие вклад в  $G$  и  $F$ , а только простейшие. Более сложные диаграммы, которые также надо учесть, получаются вставкой полубесконечных куперовских лестниц в гриновские функции, входящие в куперовские лестницы, показанные на рис. 10.5. Говоря иначе, все гриновские функции в лестницах на рис. 10.5, следует *ужурнить*. Формально это выполняется введением в графики нового элемента, внешнего поля  $\Delta_{\alpha\beta}$ :

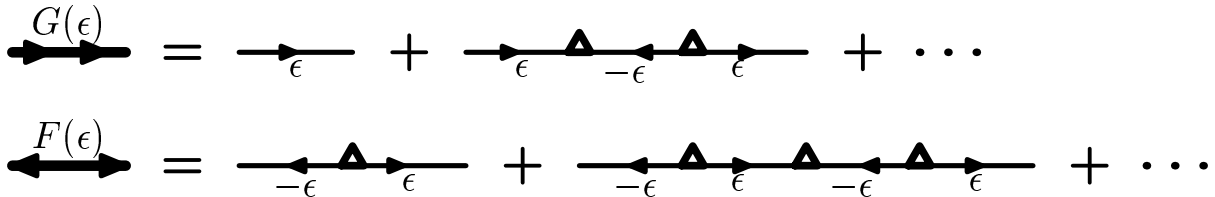


Рис. 10.6

причем  $\Delta_{\alpha\beta}$  удовлетворяет уравнению самосогласования:

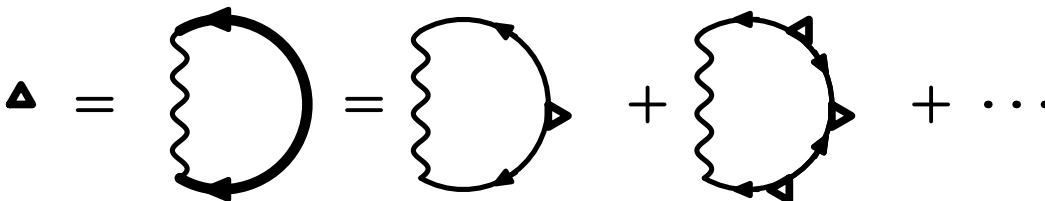


Рис. 10.7

Величина  $\Delta_{\alpha\beta}$  имеет смысл амплитуды куперовских пар.

Графики на рис. 10.6, 10.7 означают, что функции Грина сверхпроводника  $G_{\alpha\beta}$  и



$F_{\alpha\beta}$  связаны с гриновской функцией  $G_{\alpha\beta}^0(\varepsilon, \mathbf{p})$  идеального ферми-газа и полем  $\Delta_{\alpha\beta}$  такими уравнениями:

$$G_{\alpha\beta}(\varepsilon, \mathbf{p}) = G_{\alpha\beta}^0(\varepsilon, \mathbf{p}) + G_{\alpha\lambda}^0(\varepsilon, \mathbf{p}) \Delta_{\lambda\mu}^* F_{\mu\beta}(\varepsilon, \mathbf{p}) \quad (10.32)$$

$$F_{\alpha\beta}(\varepsilon, \mathbf{p}) = G_{\alpha\lambda}^0(-\varepsilon, \mathbf{p}) \Delta_{\lambda\mu} G_{\mu\beta}(\varepsilon, \mathbf{p}) \quad (10.33)$$

(подразумевается суммирование по спиновым индексам  $\lambda$  и  $\mu$ ).

Прежде чем решать уравнения (10.32), сделаем замечание о спиновой структуре функций  $G$  и  $F$ . Зависимость  $G$  от спина такая же, как в нормальном металле:  $G_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} G$ . А вот функция  $F$  устроена иначе. Поскольку куперовская пара есть спиновый синглет, амплитуда  $\Delta_{\alpha\beta} = \Delta(-i)\sigma_{\alpha\beta}^y$ . Нетрудно видеть, что уравнения (10.32) совместны только если спиновые структуры  $\Delta_{\alpha\beta}$  и  $F_{\alpha\beta}$  одинаковы. Поэтому:

$$\Delta_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Delta, \quad F_{\alpha\beta}(\varepsilon, \mathbf{p}) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} F(\varepsilon, \mathbf{p}). \quad (10.34)$$

С учетом спиновой структуры (10.34) уравнения (10.32) нетрудно решить:

$$G_{\alpha\beta}(\varepsilon, \mathbf{p}) = \frac{\varepsilon + \xi_{\mathbf{p}}}{\varepsilon^2 - \xi_{\mathbf{p}}^2 - |\Delta|^2} \delta_{\alpha\beta} \quad (10.35)$$

$$F_{\alpha\beta}(\varepsilon, \mathbf{p}) = \frac{\Delta i\sigma_{\alpha\beta}^y}{\varepsilon^2 - \xi_{\mathbf{p}}^2 - |\Delta|^2}. \quad (10.36)$$

Из выражений (10.35), (10.36) следует закон дисперсии квазичастиц

$$\varepsilon_{\mathbf{p}} = \sqrt{\xi_{\mathbf{p}}^2 + \Delta^2}. \quad (10.37)$$

Наконец, с помощью (10.36) можно определить щель из уравнения самосогласования,

$$\Delta_{\alpha\beta} = \lambda \int \frac{d\varepsilon d^3p}{(2\pi)^4} F_{\alpha\beta}(\varepsilon, \mathbf{p}) \quad (10.38)$$

часто также называемого уравнением Горькова, (см. рис. 10.7), и таким образом замкнуть теорию.

Для изучения термодинамики сверхпроводников нам потребуются мацубаровские функции  $G_{\alpha\beta}(i\omega_n, \mathbf{p})$  и  $F_{\alpha\beta}(i\omega_n, \mathbf{p})$ . Они получаются из нуль-температурных функций (10.35), (10.36) аналитическим продолжением на дискретные частоты, т. е. просто заменой  $\varepsilon \rightarrow i\omega_n$ . При этом уравнение (10.38) принимает вид:

$$\Delta = \lambda T \sum_{\omega_n} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} F(i\omega_n, \mathbf{p}) = \lambda T \sum_{\omega_n} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{\Delta}{\omega_n^2 + \xi_{\mathbf{p}}^2 + \Delta^2}, \quad (10.39)$$

Описанный формализм оказывается весьма эффективным в широком круге задач теории сверхпроводимости.

В заключении отметим, что вычисления гриновских функций сверхпроводника можно «автоматизировать», если работать не с функциями  $G$  и  $F$  по отдельности, а с так

называемыми матрицами Горькова–Намбу, составленными из них (см. (34.32) [1]). Приведем канонический способ записи этих матриц в температурной технике. Определим функции Грина,

$$G_{\uparrow\uparrow}(r_1, r_2, \tau_1, \tau_2) = -\langle T_\tau \psi_\uparrow(r_1, \tau_1) \psi_\uparrow^\dagger(r_2, \tau_2) \rangle, \quad (10.40)$$

$$G_{\downarrow\downarrow}(r_1, r_2, \tau_1, \tau_2) = -\langle T_\tau \psi_\downarrow(r_1, \tau_1) \psi_\downarrow^\dagger(r_2, \tau_2) \rangle, \quad (10.41)$$

и, аналогично,  $F_{\uparrow\downarrow}$ ,  $F_{\downarrow\uparrow}$ . Составим из них матричную функцию Грина:

$$\hat{G}_\omega(r_1, r_2) = \begin{bmatrix} G_{\uparrow\uparrow} & F_{\uparrow\downarrow} \\ F_{\downarrow\uparrow} & G_{\downarrow\downarrow} \end{bmatrix}. \quad (10.42)$$

Матрица  $\hat{G}$  удовлетворяет уравнению

$$\left( i\omega - \tau_z \xi(\hat{\mathbf{p}}) - \frac{1}{2} (\Delta(r_1) \tau_+ + \Delta^*(r_1) \tau_-) \right) \hat{G}_\omega(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \hat{\delta}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2), \quad (10.43)$$

где  $\tau_z$  и  $\tau_\pm = \tau_x \pm i\tau_y$  – матрицы Паули (мы обозначили их так для того, чтобы отличать от спиновых операторов). Матричное уравнение (10.43) есть сокращенная форма записи уравнений (10.32).

Основное удобство представления Горькова–Намбу заключается в том, что при работе с матричными величинами относительные знаки различных диаграмм, содержащих функции  $F$  и  $G$  автоматически получаются правильными. Кроме того, матричная запись весьма компактна (см. задачи 56, 60, 61).

В частности, матричный формализм весьма удобен при расчете отклика сверхпроводника на внешнее электромагнитное поле (см. задачи 60, 62). Магнитное поле включается в матричную запись заменой  $\hat{\mathbf{p}} \rightarrow \hat{\mathbf{p}} - \frac{e}{c} \tau_z \mathbf{A}$  и соответственно оператор тока есть

$$\hat{\mathbf{j}}(\mathbf{r}) = c \frac{\delta}{\delta \mathbf{A}(\mathbf{r})} \hat{G}^{-1}[\mathbf{A}(\mathbf{r})] \quad (10.44)$$

(ср. с формулой  $\hat{\mathbf{j}} = -c\delta\hat{H}/\delta\mathbf{A}$ ).

В теории сверхпроводимости имеется много интересных и красивых явлений. Однако подробное их изложение увело бы нас слишком далеко. В задачах этого раздела мы постарались отразить наиболее важные с нашей точки зрения факты микроскопической теории сверхпроводимости. Физика сверхпроводимости подробно освещается в учебной литературе, к которой мы и отсылаем заинтересованного читателя.<sup>1</sup>

*Литература:* [1], гл. 7, [6], гл. 5

### 10.3. Задачи 55÷61

**Задача 55.** (*Куперовская неустойчивость*) В разделе 10.2.1 при вычислении температуры перехода мы использовали приближение (10.11) для того, чтобы ограничить

<sup>1</sup> В.В. Шмидт, «Введение в физику сверхпроводимости» (М., Наука, 1982); А.А. Абрикосов, «Основы теории металлов» (М., Наука, 1987); П. де Жен «Сверхпроводимость металлов и сплавов» (М., 1968); М. Тинкхам, ...

сверху область интегрирования по энергии  $\xi(\mathbf{p})$  (см. также (10.3)). На самом деле, поскольку сверхпроводимость возникает из-за обмена фононами с относительно большим временем запаздывания, более корректно рассматривать нелокальное во времени взаимодействие, которое обрезало бы не интегралы по импульсам, а интегралы по частотам.

Рассмотрим мацубаровскую амплитуду рассеяния в куперовском канале  $\Gamma^C(i\varepsilon, i\varepsilon')$  (энергии сталкивающихся частиц равны  $\pm\varepsilon$ , а разлетающихся —  $\pm\varepsilon'$ ). Она дается суммой графиков:

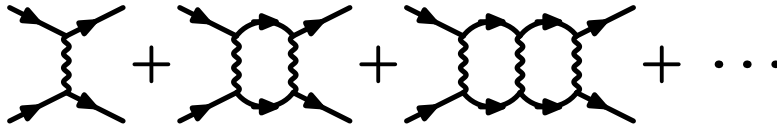


Рис. 10.8

Пусть каждой волнистой линии соответствует множитель  $\Gamma^0(i\varepsilon, i\varepsilon')$ . Будем считать взаимодействие точечным и соответственно пренебрежем зависимостью  $\Gamma^C$  и  $\Gamma^0$  от импульсов.

- а) Суммируя куперовскую лестницу, выведите интегральное уравнение, определяющее  $\Gamma^C(i\varepsilon, i\varepsilon')$ .
- б) Рассмотрите модель, в которой  $\Gamma^0(i\varepsilon, i\varepsilon')$  факторизуется:

$$\Gamma^0(i\varepsilon, i\varepsilon') = \lambda v(i\varepsilon)v(i\varepsilon'), \quad (10.45)$$

где  $\lambda$  — константа взаимодействия, а функция  $v(i\varepsilon)$  — формфактор, определяющий масштаб энергий (спиновая структура опущена). Найдите температуру, при которой  $\Gamma^C$  обращается в бесконечность.

- в) В случае, когда

$$v(i\varepsilon) = \frac{\omega_D}{\sqrt{\varepsilon^2 + \omega_D^2}}, \quad (10.46)$$

найдите связь между  $T_c$  и  $\omega_D$ .

Модель (10.45) нефизична, поскольку настоящее электрон-фононное взаимодействие приводит к затравочной вершине  $\Gamma^0$ , зависящей от переданной энергии  $\varepsilon - \varepsilon'$ . Тем не менее, поскольку эта модель учитывает запаздывание притяжения между электронами на временах  $\sim \omega_D^{-1}$ , она дает качественно правильные предсказания.

**Задача 56.** (Температурная зависимость щели  $\Delta(T)$ ) Определите температурную зависимость  $\Delta(T)$  для запаздывающего взаимодействия (10.45), (10.46) из задачи 55. Примите во внимание, что из-за запаздывания щель  $\Delta$  становится функцией энергии  $\varepsilon$  спаривающихся частиц.

- а) Соответственно рассмотрите величину  $\tilde{\Delta}(\varepsilon)$  и, модифицируя уравнения (10.38), (10.39), получите для  $\tilde{\Delta}(\varepsilon)$  уравнение самосогласования.

- б) В найденном уравнении вычислите интеграл по  $\xi$ . Изобразите качественное поведение решения уравнения  $\Delta(T)$  на графике. Как  $\Delta(T)$  ведет себя при  $T \rightarrow 0$  и при  $T \rightarrow T_c$ ?
- в) Найдите сверхпроводящую щель  $\Delta(T)$  в пределе низких температур,  $T \rightarrow 0$ , и вблизи точки перехода,  $T \rightarrow T_c$ .

**Задача 57.** (Теплоемкость при  $T < T_c$ ) Покажите, что вклад электронов в термодинамический потенциал  $\Omega$  сверхпроводящего металла дается диграммным рядом, показанным на рис. 10.9.

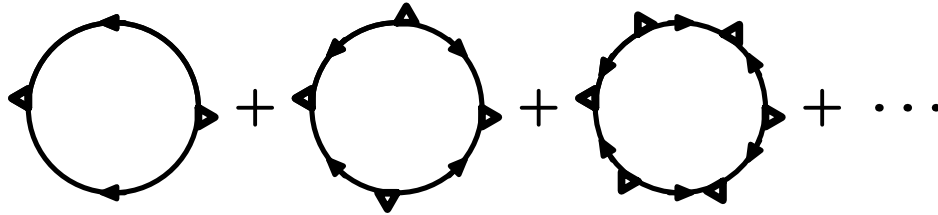


Рис. 10.9

Какие выражения сопоставляются различным диаграммам?

Выразите сумму графиков рис. 10.9 через функцию  $\Delta(T)$ , считая ее известной. Найдите температурную зависимость теплоемкости сверхпроводника:

- а) при  $T \ll T_c$ ;
- б) при  $T \rightarrow T_c$ . В этом случае достаточно взять первый график, показанный на рис. 10.9, поскольку вблизи  $T_c$   $\Delta$  мала. Сравните ответ с теплоемкостью нормального металла (см. [1], §36).

Вычисляя мацубаровскую сумму при низких температурах, удобно пользоваться формулой суммирования Пуассона

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{2\pi i k x} dx, \quad (10.47)$$

оставляя в сумме по  $k$  лишь члены с  $k = 0, \pm 1$ . Напомним, что применять формулу Пуассона следует с осторожностью, поскольку она справедлива лишь для функций, аналитических на всей вещественной оси.

**Задача 58.** (Влияние кулоновского взаимодействия<sup>2</sup> на сверхпроводимость) Как уже обсуждалось в разд. 10.1.1 влияние кулоновского взаимодействия на сверхпроводимость невелико благодаря сильному запаздыванию фононов (см. с. 265). Рассмотрим вопрос об относительной важности электрон-электронного и электрон-фононного взаимодействий более количественным образом.

Оказывается удобным ввести упрощенную модель взаимодействия, в которой между электронами имеется мгновенное отталкивание и запаздывающее притяжение, причем как отталкивание, так и притяжение считаются точечными. При этом затравочная

<sup>2</sup>Н.Н. Боголюбов, В.В. Толмачев, Д.В. Ширков, «Новый метод в теории сверхпроводимости», Изд-во АН СССР, М. 1958, §6.3, с. 84–88; P. Morel, P.W. Anderson, Phys. Rev. **125**, 1263 (1962)

амплитуда рассеяния в куперовском канале имеет вид

$$\Gamma^0(i\varepsilon, i\varepsilon') = \lambda v(i\varepsilon)v(i\varepsilon') - \mu, \quad (10.48)$$

где параметр  $\mu$  характеризует величину отталкивания между электронами.

Найдите температуру, при которой амплитуда рассеяния в куперовском канале обращается в бесконечность. Покажите, что эффект отталкивания сводится к замене константы  $\lambda$  в выражении (10.30) для  $T_c$  на

$$\lambda_* = \lambda - \frac{\mu}{1 + \nu_0 \mu \ln \frac{\varepsilon_F}{\omega_D}}. \quad (10.49)$$

Безразмерная величина кулоновского взаимодействия в металле есть  $\nu_0 \mu \simeq e^2 / \hbar v_F$  в пределе высокой электронной плотности и  $\nu_0 \mu \sim 1$  при обычных значениях плотности. Соответственно максимально возможная поправка к эффективной константе взаимодействия  $\lambda_*$ , согласно (10.49), имеет относительную малость  $1 / \ln(\varepsilon_F / \omega_D)$ . Поэтому кулоновское взаимодействие в нормальном металле не может превратить притяжение в отталкивание и, следовательно, не подавляет сверхпроводимость.

Чтобы установить соответствие между моделью (10.48) и реальным кулоновским взаимодействием  $V(\mathbf{q})$  в первом приближении достаточно подставить вместо  $\mu$  среднее значение  $V(\mathbf{q})$  в  $s$ -канале. Для случая экранированного кулоновского взаимодействия

$$V(\mathbf{q}) = \frac{4\pi e^2}{q^2 + \kappa^2}; \quad \kappa^2 = 8\pi\nu_0 e^2 \quad (10.50)$$

(см. задачу 45) получаем следующее выражение:

$$\mu = \langle V_c(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \rangle = \frac{\pi e^2}{p_0^2} \ln \left( 1 + \frac{4p_0^2}{\kappa^2} \right), \quad (10.51)$$

где усреднение производится по положениям импульсов  $\mathbf{p}$  и  $\mathbf{p}'$  на ферми-поверхности.

**Задача 59.** (*Тождество Уорда в нормальном металле*) При вычислении электромагнитного отклика сверхпроводника центральное место занимает рассмотренное в гл. 9 тождество Уорда (9.16), следующее из калибровочной инвариантности. Оно приводит к сокращению градиентного и диамагнитного вкладов в электрический ток, с которым мы уже сталкивались в задаче 51 при выводе формулы Друде. Прежде чем заниматься электродинамикой сверхпроводников, изучим тождество (9.16) более подробно в случае нормального металла.

**а)** Рассмотрим линейный отклик тока  $\mathbf{j}$  в идеальном ферми-газе электронов на неоднородный статический векторный потенциал  $\mathbf{A}$ . В импульсном представлении линейное соотношение  $\mathbf{j}$  и  $\mathbf{A}$  записывается как  $\mathbf{j}_{\mathbf{k}} = Q(\mathbf{k}) \mathbf{A}_{\mathbf{k}}$ . Калибровочная инвариантность требует, чтобы для ядра  $Q(\mathbf{k})$  выполнялось свойство  $Q(\mathbf{k} = 0) = 0$ . Согласно тождеству Уорда, это равенство обеспечивается сокращением градиентной  $\langle \mathbf{v} G \mathbf{v} G \rangle$  и диамагнитной частей тока  $\mathbf{j} = -\frac{e}{mc} \langle \psi^+(\mathbf{r}) \psi(\mathbf{r}) \rangle \mathbf{A}(\mathbf{r})$  (см. задачу 51).

Проверьте это сокращение еще раз в более общем виде, не предполагая спектр электронов  $\xi(\mathbf{p})$  квадратичным, а считая его произвольной функцией. Используйте соотношение  $\mathbf{v}(\mathbf{p}) = \nabla_{\mathbf{p}} \xi(\mathbf{p})$ .

б) (*Диамagnetизм Ландау*) С помощью тождества Уорда можно найти орбитальную магнитную восприимчивость  $\chi_0$  газа невзаимодействующих электронов. Согласно результату части а), разложение  $Q(\mathbf{k})$  по  $\mathbf{k}$  начинается с члена второй степени:  $Q(\mathbf{k}) = a\mathbf{k}^2 + O(\mathbf{k}^4)$ .

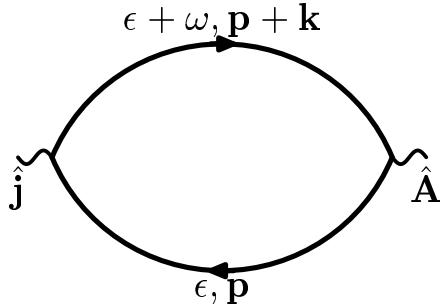


Рис. 10.10

Разложите петлю, показанную на рис. 10.10, по  $\mathbf{k}$  и определите константу  $a$ . Как  $a$  связана с  $\chi_0$ ? Проверьте, что  $\chi_0 = -\frac{1}{3}\chi_{\text{пара}}$ , где  $\chi_{\text{пара}}$  — парамагнитная восприимчивость, найденная в задаче 23 (см. [1] §37).

Если бы нас интересовало не сокращение  $Q(0)$ , а одно только вычисление  $\chi_0$ , можно было бы действовать иначе. Рассмотрим оператор орбитального магнитного момента  $\mu = \frac{e}{mc}[\mathbf{r} \times \mathbf{p}]$  и найдем его среднее, используя функцию Грина в слабом магнитном поле:  $G_H(E, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \exp(i\frac{e}{\hbar c} \int \mathbf{A}(\mathbf{r}') d\mathbf{r}') G_0(E, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ . (Интеграл берется по прямому пути, соединяющему  $\mathbf{r}_1$  и  $\mathbf{r}_2$ .) Восприимчивость  $\chi_0$  получится, если выделить из  $G_H$  линейный по  $H$  член (см. [1] §38, с. 416).

**Задача 60.** (*Уравнение Лондонов*) Найдите отклик тока в сверхпроводнике на статический векторный потенциал. Отличие от задачи 59 состоит в том, что теперь сокращения при  $\mathbf{q} = 0$  нет. Положив  $\mathbf{q} = 0$  в соотношении  $\mathbf{j}_{\mathbf{q}} = Q(\mathbf{q}) \mathbf{A}_{\mathbf{q}}$ , получим так называемое уравнение Лондонов:

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}) = -\frac{e^2}{mc} n_s \mathbf{A}(\mathbf{r}). \quad (10.52)$$

Величина  $n_s$  называется сверхтекучей плотностью. Как связаны  $n_s$  и  $\Delta$  при  $|T - T_c| \ll T_c$ ?

Физическая причина отсутствия сокращения вкладов в  $Q(0)$  заключается в том, что калибровочная инвариантность в сверхпроводнике спонтанно нарушена. В нормальном металле сокращение  $Q(0)$  обеспечивается тождеством Уорда (9.16), следующим из калибровочной инвариантности. А в сверхпроводнике калибровочная инвариантность отсутствует.

Определите глубину проникновения магнитного поля в сверхпроводник. Для этого с помощью уравнения Лондонов решите задачу о проникновении магнитного поля в объем сверхпроводника вблизи поверхности. Покажите, что магнитное поле затухает в глубину по экспоненциальному закону:  $H(x) = H(0) \exp(-x/\delta_\Lambda)$ ,  $x > 0$ , и найдите связь  $\delta_\Lambda$  с  $n_s$ .

Покажите, что пренебрегать зависимостью ядра  $Q(q)$  от  $q$  законно, если лондоновская глубина проникновения  $\delta_\Lambda$  достаточно велика:  $\delta_\Lambda \gg \xi_0 = \hbar v_F / \Delta_0$  (см. [1] §37, п. 1).

**Задача 61.** (Теорема Андерсона) Обычно говорят, что куперовские пары образованы электронами с противоположными импульсами и спинами. Оказывается, *беспорядок не разрушает куперовские пары*, хоть импульс и становится плохим квантовым числом. Качественно это можно пояснить так. В присутствии

б) Усредните по беспорядку диграмму для  $Q(\mathbf{k})$ , изображенную на рис. 10.10. Вычислив  $\text{Tr}(\hat{j}\hat{G}\hat{j}\hat{G})$  получите  $Q(\mathbf{k})$ , после чего по  $Q(\mathbf{k}=0)$  определите сверхтекучую плотность (см. [1] формула (39.28)).

**Задача 63\*.** (Влияние магнитных примесей на сверхпроводимость<sup>4</sup>) Пусть кроме обычных примесей имеются также и магнитные:

$$H_{int} = \sum_{\mathbf{r}_a} J\psi^+(\mathbf{r}_a)\hat{\sigma}^k\hat{S}_a^k\psi(\mathbf{r}_a). \quad (10.54)$$

Здесь  $\hat{S}_a^k$  — оператор спина  $a$ -й примеси. Спины примесей будем считать некоррелированными. Такие примеси нарушают симметрию по отношению к обращению времени и поэтому легко подавляют сверхпроводимость. Найдите  $T_c$  как функцию концентрации примесей  $n_{mag}$ . Покажите, что сверхпроводимость подавляется при относительно малой концентрации  $n_{mag} \sim T_c/v_F\sigma$ , где  $\sigma$  — сечение рассеяния на магнитной примеси.

**Задача 64\*.** (Верхнее критическое поле  $H_{c2}$  в грязном сверхпроводнике<sup>5</sup>)

Сверхпроводимость можно подавить магнитным полем, поскольку оно нарушает симметрию по отношению к обращению времени. Как именно происходит это подавление, зависит от характеристик сверхпроводника. Рассмотрим грязный сверхпроводник, в котором  $l \ll \xi_0$ , и, начиная с сильного поля  $H$ , в котором сверхпроводимость подавлена, будем постепенно уменьшать величину  $H$  и определим пороговое значение  $H$ , при котором сверхпроводимость восстанавливается. Оказывается, для этого нужно изучить устойчивость системы по отношению к малым *неоднородным* флуктуациям  $\Delta(\mathbf{r})$ . Формально, для этого надо рассмотреть куперовскую лестницу в слабом статическом поле  $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ , таком что  $\text{rot } \mathbf{A} = \mathbf{H}$ . Записав для этого случая уравнение самосогласования (10.38) в пределе  $\Delta \rightarrow 0$ , надо найти, при каком поле существует нетривиальное решение этого уравнения. Это поле называется *верхним критическим полем*  $H_{c2}$ .

## 10.5. Решения

**Решение 55 а)** Выведем уравнение на  $\Gamma^C(i\varepsilon, i\varepsilon')$ , суммируя диаграммы на рис. 10.8. Заметим, что в этих диаграммах сумма 4-импульсов  $s = p_1 + p_2$  одинакова в каждой петле. Поэтому интегральное уравнение, соответствующее этим диаграммам, имеет вид

$$\Gamma^C(p, p'; s) = \Gamma^0(p, p') + \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \Gamma^0(p, k)G(k)G(s-k)\Gamma^C(k, p'; s) \quad (10.55)$$

(конечно, по частотам следует брать не интеграл, а мацубаровскую сумму). Это уравнение отличается от аналогичного уравнения теории ферми-жидкости знаком перед интегральным членом. (Отличие возникает из-за того, что ферми-жидкостные диаграммы содержат фермионные петли, а куперовские диаграммы — нет.) Полагая  $s = 0$

<sup>4</sup>см. работу: А.А. Абрикосов, Л.П. Горьков, ЖЭТФ, т. 39, с. 1781 (1960)

<sup>5</sup>Л.П. Горьков, ЖЭТФ, т. 36, с. 1918 (1959); R. Helfand, N.R. Werthammer, Phys. Rev. Lett., 13, 686 (1964)



и пренебрегая зависимостью  $\Gamma^0$  и  $\Gamma^C$  от пространственного импульса, перепишем уравнение (10.55) так:

$$\begin{aligned} \Gamma^C(i\varepsilon, i\varepsilon') &= \Gamma^0(i\varepsilon, i\varepsilon') \\ &+ T \sum_{\varepsilon''} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \Gamma^0(i\varepsilon, i\varepsilon'') G(i\varepsilon'', \mathbf{p}) G(-i\varepsilon'', -\mathbf{p}) \Gamma^C(i\varepsilon'', i\varepsilon'). \end{aligned} \quad (10.56)$$

Интеграл по импульсам вычисляется переходом к интегрированию по  $\xi$ :

$$\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\varepsilon'' + \xi_p^2} = \frac{\pi\nu_0}{|\varepsilon''|}. \quad (10.57)$$

Поэтому уравнение на куперовскую амплитуду принимает вид:

$$\Gamma^C(i\varepsilon, i\varepsilon') = \Gamma^0(i\varepsilon, i\varepsilon') + \pi\nu_0 T \sum_{\varepsilon''} \frac{\Gamma^0(i\varepsilon, i\varepsilon'') \Gamma^C(i\varepsilon'', i\varepsilon')}{|\varepsilon''|} \quad (10.58)$$

**Решение 55 б)** Уравнение (10.58) можно решить, если зависимость от  $\varepsilon$  и  $\varepsilon'$  факторизуется. Тогда уравнение становится вырожденным. Перепишем его, явно выделяя зависимость от  $\varepsilon'$ :

$$\Gamma^C(i\varepsilon, i\varepsilon') = \lambda v(i\varepsilon) \left( v(i\varepsilon') + \pi\nu_0 T \sum_{\varepsilon''} \frac{v(i\varepsilon'') \Gamma^C(i\varepsilon'', i\varepsilon')}{|\varepsilon''|} \right). \quad (10.59)$$

Таким образом, оба члена в уравнении пропорциональны  $v(i\varepsilon)$ , поэтому  $\Gamma^C(i\varepsilon, i\varepsilon') \sim v(i\varepsilon)$ . Из соображений симметрии следует, что зависимость от  $\varepsilon'$  такая же:

$$\Gamma^C(i\varepsilon, i\varepsilon') = \alpha v(i\varepsilon) v(i\varepsilon'), \quad (10.60)$$

где  $\alpha$  — константа, которую можно определить, подставив (10.60) в (10.59). Получаем

$$\alpha = \lambda + \pi\nu_0 \alpha \lambda T \sum_{\varepsilon''} \frac{v^2(i\varepsilon'')}{|\varepsilon''|}. \quad (10.61)$$

Таким образом,

$$\alpha = \lambda \left( 1 - \pi\nu_0 \lambda T \sum_{\varepsilon''} \frac{v^2(i\varepsilon'')}{|\varepsilon''|} \right)^{-1}. \quad (10.62)$$

Это выражение обращается в бесконечность, если

$$\pi T \sum_{\varepsilon''} \frac{v^2(i\varepsilon'')}{|\varepsilon''|} = \frac{1}{\lambda\nu_0}. \quad (10.63)$$

Условие (10.63) и определяет температуру перехода  $T_c$ .

**Решение 55 в)** В случае

$$v(i\varepsilon) = \frac{\omega_D}{\sqrt{\omega_D^2 + \varepsilon^2}} \quad (10.64)$$

уравнение на температуру перехода (10.63) принимает такой вид:

$$2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\omega_D^2}{(\omega_D^2 + \pi^2 T_c^2 (2n+1)^2)(2n+1)} = \frac{1}{\lambda \nu_0}. \quad (10.65)$$

Удобно вначале решить это уравнение с логарифмической точностью, а затем найти  $T_c$  более точно. Множитель  $v^2(i\varepsilon)$  обрывает сумму в (10.63) при  $n \sim n_{max} = \omega_D/\pi T_c$ . Если считать  $n_{max} \gg 1$  и пренебречь множителем  $v^2(i\varepsilon)$ , заменив верхний предел суммы на  $n_{max}$ , получим

$$\sum_{n=0}^{n_{max}} \frac{1}{n+1/2} = \ln n_{max} = \frac{1}{\nu_0 \lambda}, \quad (10.66)$$

откуда

$$T_c \sim \frac{\omega_D}{\pi} \exp\left(-\frac{1}{\lambda \nu_0}\right). \quad (10.67)$$

Значение коэффициента в этой формуле таким образом найти нельзя. Для этого надо точнее вычислить сумму в (10.65).

Заметим, что в сумме (10.65) имеются два масштаба:  $T_c$  и  $\omega_D$ , причем, согласно (10.67),  $T_c \ll \omega_D$ . Поэтому вклады этих масштабов можно разделить, используя следующий стандартный прием. Разобьем сумму на две части: по  $n < n_0$  и по  $n > n_0$ , причем точку разбиения  $n_0$  выберем так, что  $n_0 \gg 1$ , и одновременно  $2\pi T_c n_0 \ll \omega_D$ . Найдем сумму по каждой из областей, а затем сложим результаты. В области  $n < n_0$  можно заменить функцию  $v(i\varepsilon)$  на единицу, после чего эта часть суммы легко вычисляется с помощью тождеств

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \ln 2, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n \right) = C, \quad (10.68)$$

где  $C = 0.577\dots$  — постоянная Эйлера. Складывая эти два тождества, получаем вклад области  $n < n_0$ :

$$S(n < n_0) = \sum_{n=0}^{n_0} \frac{2}{2n+1} \simeq \ln 2n_0. \quad (10.69)$$

В высокочастотной области  $n > n_0$  можно пренебречь  $T_c$  по сравнению с  $\omega_D$  и заменить сумму интегралом, который легко вычисляется:

$$S(n > n_0) = \int_{2\pi T_c n_0}^{\infty} \frac{d\varepsilon}{\varepsilon} \frac{\omega_D^2}{\varepsilon^2 + \omega_D^2} = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2 + \omega_D^2} \right) \Big|_{2\pi T_c n_0}^{\infty}. \quad (10.70)$$

В пределе  $\omega_D \gg 2\pi n_0 T_c$  находим:

$$S(n > n_0) = \ln \frac{\omega_D}{2\pi n_0 T_c}. \quad (10.71)$$

Теперь, суммируя вклады от областей  $n < n_0$  и  $n_0 < n$ , приводим уравнение (10.63) к виду

$$\frac{1}{\lambda \nu_0} = \ln \frac{\omega_D}{\pi T_c} + C. \quad (10.72)$$

Решая его, находим уточненное выражение для температуры перехода  $T_c$  :

$$T_c = \frac{2\gamma}{\pi} \omega_D e^{-1/\lambda\nu_0} , \quad (10.73)$$

где  $\gamma = e^C$  .

**Решение 56 а)** Диаграммы на рис. 10.6, 10.7 показывают, что щель  $\Delta$  возникает в результате свёртки аномальной функции  $F(i\varepsilon, \mathbf{p})$  и куперовской вершины  $\Gamma^0(i\varepsilon, i\varepsilon')$  . Поэтому в общем случае щель зависит от энергии и, соответственно, мы будем использовать обозначение  $\tilde{\Delta}(i\varepsilon)$  . При этом уравнение самосогласования принимает следующий вид:

$$\tilde{\Delta}(i\varepsilon) = T \sum_{\varepsilon'} \Gamma^0(i\varepsilon, i\varepsilon') F(i\varepsilon', \mathbf{r} = \mathbf{r}') , \quad (10.74)$$

а величина  $F(i\varepsilon, \mathbf{r} = \mathbf{r}')$  равна

$$F(i\varepsilon, \mathbf{r} = \mathbf{r}') = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{\tilde{\Delta}(i\varepsilon)}{\varepsilon^2 + \xi_p^2 + \tilde{\Delta}^2(i\varepsilon)} . \quad (10.75)$$

Таким образом, в общем случае щель следует определять из интегрального уравнения. Оно несколько упрощается, если зависимость  $\Gamma^0(i\varepsilon, i\varepsilon')$  от энергии факторизуется. Тогда легко видеть, что щель  $\tilde{\Delta}(i\varepsilon)$  пропорциональна  $v(i\varepsilon)$  . Таким образом, сверхпроводящие эффекты «выключаются» при  $|\varepsilon| \gg \omega_D$  . Записывая  $\tilde{\Delta}(i\varepsilon)$  в виде

$$\tilde{\Delta}(i\varepsilon) = \Delta(T)v(i\varepsilon) , \quad (10.76)$$

получим уравнение

$$\Delta(T) = \lambda T \sum_{\varepsilon} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{v^2(i\varepsilon)\Delta(T)}{\varepsilon^2 + \xi_p^2 + v^2(i\varepsilon)\Delta^2(T)} . \quad (10.77)$$

**Решение 56 б)** Вычисляя интеграл по  $\xi$  в соотношении (10.77), получаем:

$$\frac{1}{\lambda\nu_0} = \pi T \sum_{\varepsilon} \frac{v^2(i\varepsilon)}{\sqrt{\varepsilon^2 + \Delta^2(T)v^2(i\varepsilon)}} . \quad (10.78)$$

Рассмотрим качественно, как ведет себя решение этого уравнения. При  $T \ll \Delta(T)$  сумму в правой части можно заменить интегралом. Таким образом, в этом пределе зависимость от  $T$  исчезает, и  $\Delta(T)$  стремится к постоянному пределу. Зависимость от  $T$  должна быть очень слабой, поскольку для гладкой функции сумма очень хорошо аппроксимирует значение интеграла.

Ясно также, что при увеличении температуры величина щели  $\Delta(T)$  будет уменьшаться. Формально это следует из того, что сумма в правой части (10.78) переоценивает значение интеграла тем больше, чем больше расстояние между мацубаровскими частотами. Поэтому для того, чтобы удержать правую часть постоянной, рост температуры следует компенсировать убыванием  $\Delta(T)$  . Заметим, что при  $\Delta = 0$  уравнение (10.78) совпадает с уравнением для определения температуры перехода (10.63), рассмотренным в предыдущей задаче. Это означает, что при  $T = T_c$  щель  $\Delta(T)$  обратится

в нуль. Вблизи этой точки правая часть (10.78) зависит линейно от  $T - T_c$  и квадратично от  $\Delta(T)$ . Поэтому  $\Delta(T) \sim \sqrt{T_c - T}$ . Из этих рассуждений также следует, что  $\Delta(0) \sim T_c$ . Полученная таким образом качественная зависимость  $\Delta(T)$  согласуется с результатом численного решения уравнения Горькова, изображенном на рис. 10.11.

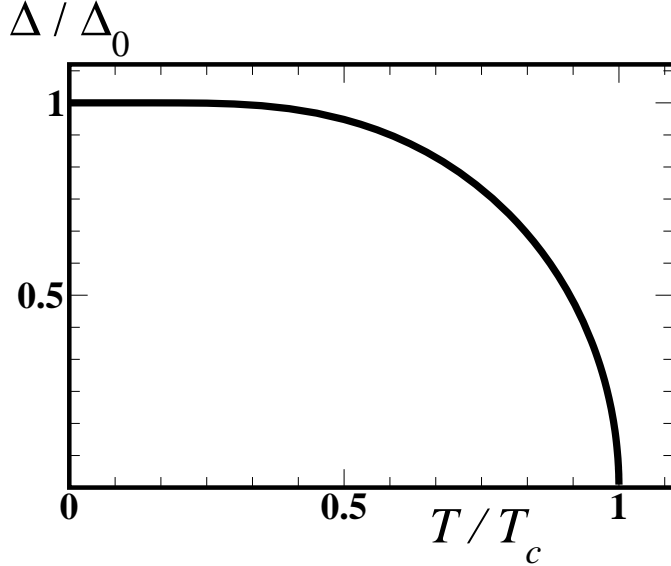


Рис. 10.11

**Решение 56 в)** Теперь вычислим  $\Delta(T)$  при  $T \rightarrow 0$ . Вначале мы просто заменим сумму в (10.78) интегралом и получим, что  $\Delta_0 \equiv \Delta(T = 0)$  удовлетворяет уравнению

$$\frac{1}{\nu_0 \lambda} = \int_0^{\infty} \frac{v^2(i\varepsilon) d\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon^2 + \Delta_0^2 v^2(i\varepsilon)}}. \quad (10.79)$$

Найдем этот интеграл для нашей модельной функции  $v(i\varepsilon) = \omega_D / (\varepsilon^2 + \omega_D^2)^{1/2}$ . Вычисление сильно упрощается, если заметить, что  $\Delta_0 \sim T_c \ll \omega_D$ . Множитель  $v^2(i\varepsilon)$  в подкоренном выражении важен лишь при  $\varepsilon \leq \Delta_0$ , но при таких энергиях  $v^2(i\varepsilon) \simeq 1$ . С учетом этого обстоятельства уравнение на щель переписывается так:

$$\frac{1}{\nu_0 \lambda} = \int_0^{\infty} \frac{\omega_D^2 d\varepsilon}{(\varepsilon^2 + \omega_D^2) \sqrt{\varepsilon^2 + \Delta_0^2}}. \quad (10.80)$$

В этом интеграле имеется два существенно разных масштаба энергий:  $\Delta_0$  и  $\omega_D$ . Поэтому можно применить прием, использованный при решении предыдущей задачи: разбить область интегрирования на две части:  $\varepsilon < \varepsilon_0$  и  $\varepsilon > \varepsilon_0$ , причем  $\Delta_0 \ll \varepsilon_0 \ll \omega_D$ . Тогда интеграл в правой части (10.80) равен

$$\int_0^{\varepsilon_0} \frac{d\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon^2 + \Delta_0^2}} + \int_{\varepsilon_0}^{\infty} \frac{\omega_D^2 d\varepsilon}{\varepsilon(\varepsilon^2 + \omega_D^2)} = \ln \frac{2\varepsilon_0}{\Delta_0} + \ln \frac{\omega_D}{\varepsilon_0}. \quad (10.81)$$

Промежуточная энергия  $\varepsilon_0$  выпадает. Окончательно получаем:

$$\frac{1}{\lambda\nu_0} = \ln \frac{2\omega_D}{\Delta_0}. \quad (10.82)$$

Сравнивая это соотношение с выражением (10.73) для температуры перехода  $T_c$ , получаем соотношение

$$\Delta_0 = \frac{\gamma}{\pi} T_c. \quad (10.83)$$

Заметим, что коэффициент в формуле (10.73) для  $T_c$  связан с конкретной формой обрезания по энергии. Что же касается соотношения (10.83) между  $\Delta_0$  и  $T_c$ , то при  $T_c \ll \omega_D$  оно определяется только физикой низкоэнергетической области  $\varepsilon \ll \omega_D$  и поэтому не зависит от выбора обрезавшей функции  $v(i\varepsilon)$ . Кроме того, точно такое же соотношение между  $\Delta_0$  и  $T_c$  получается и при обрезании по  $\xi$ . Таким образом, соотношение (10.83) носит универсальный характер.

Теперь найдем поведение  $\Delta(T)$  при конечных, но малых температурах. Для этого надо вычислить отличие суммы в правой части (10.78) от интеграла. Это можно было бы сделать с помощью формулы суммирования Пуассона (10.47). Однако гораздо проще получить ответ, заметив, что самым малым масштабом, на котором меняется правая часть (10.78), является  $\Delta_0$ . Поэтому при расчете низкотемпературных поправок структурой правой части на масштабе  $\omega_D$  можно пренебречь. Тогда можно переписать (10.77) как

$$\frac{1}{\lambda\nu_0} = T \sum_{\varepsilon} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\xi}{\varepsilon^2 + \xi^2 + \Delta^2}. \quad (10.84)$$

Преобразуем правую часть, используя (7.85):

$$\frac{1}{\lambda\nu_0} = \int_0^{\infty} \frac{d\xi}{\sqrt{\xi^2 + \Delta^2}} \operatorname{th} \frac{\sqrt{\xi^2 + \Delta^2}}{2T}. \quad (10.85)$$

Этот интеграл логарифмически расходится, но его значение при  $T = 0$  мы уже нашли, и сейчас нас интересуют поправки, возникающие при  $T \neq 0$ , которые, как мы сейчас увидим, описываются сходящимися интегралами. Минимальное значение аргумента гиперболического тангенса есть  $\Delta/2T$ , поэтому можно заменить  $\operatorname{th} x$  на  $\operatorname{sign} x(1 - 2 \exp(-|x|))$ . Таким образом,

$$\frac{1}{\lambda\nu_0} = \ln \frac{2\omega_D}{\Delta} - 2 \int_0^{\infty} \frac{d\xi}{\sqrt{\xi^2 + \Delta^2}} \exp\left(-\frac{\sqrt{\xi^2 + \Delta^2}}{T}\right). \quad (10.86)$$

При интегрировании второго члена дают вклад лишь  $\xi \ll \Delta$ , поэтому можно разложить квадратные корни:

$$\frac{1}{\nu_0\lambda} = \ln \frac{2\omega_D}{\Delta} - 2e^{-\Delta/T} \int_0^{\infty} \frac{d\xi}{\Delta} e^{-\xi^2/2\Delta T} \left(1 - \frac{\xi^2}{2\Delta^2}\right), \quad (10.87)$$

откуда

$$\ln \frac{\Delta}{\Delta_0} = -\sqrt{\frac{2\pi T}{\Delta}} e^{-\Delta/T} \left(1 - \frac{T}{8\Delta}\right), \quad (10.88)$$

где  $\Delta_0 = \gamma T_c / \pi$  — щель при  $T = 0$ . Выписанная поправка к  $\Delta_0$  понадобится нам при вычислении термодинамического потенциала в задаче 57. (Точность выражения (10.88) может показаться чрезмерной, но оказывается, что главный член в выражении (10.88) не дает вклада в термодинамический потенциал, и нам придется учесть выписанную поправку.) Окончательно получаем

$$\Delta(T \ll T_c) = \Delta_0 \left(1 - \sqrt{\frac{2\pi T}{\Delta_0}} e^{-\Delta_0/T} \left(1 - \frac{T}{8\Delta_0}\right)\right). \quad (10.89)$$

Теперь рассмотрим случай  $T \rightarrow T_c$ . В этом пределе  $\Delta(T) \ll T$ , поэтому правую часть (10.78) можно разложить по  $\Delta$ :

$$\frac{1}{\lambda \nu_0} = \pi T \sum_{\varepsilon} \left( \frac{v^2(i\varepsilon)}{|\varepsilon|} - \frac{\Delta^2 v^4(i\varepsilon)}{2|\varepsilon|^3} \right). \quad (10.90)$$

Как показано в задаче 55, первый член в правой части логарифмически зависит от  $T$  и сравнивается с левой частью при  $T = T_c$ . Поэтому его можно объединить с левой частью, получив  $\ln T_c / T$ . Что же касается второго члена, пропорционального  $\Delta^2$ , то он определяется областью  $\varepsilon \simeq \pi T$ , и в нем можно заменить  $v^4(i\varepsilon)$  на единицу. Таким образом,

$$\ln \frac{T}{T_c} = -\frac{\pi \Delta^2}{2} T \sum_{\varepsilon_n} \frac{1}{|\varepsilon_n|^3}. \quad (10.91)$$

Сумма по мацубаровским частотам легко выражается через  $\zeta$ -функцию:

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}; \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^x} = \left(1 - \frac{1}{2^x}\right) \zeta(x). \quad (10.92)$$

Разлагая логарифм в левой части, получаем:

$$\frac{T - T_c}{T_c} = -\frac{7\zeta(3)}{8\pi^2} \frac{\Delta^2}{T_c^2}, \quad (10.93)$$

откуда

$$\Delta_{T \rightarrow T_c}^2 = \frac{8\pi^2}{7\zeta(3)} T_c (T_c - T). \quad (10.94)$$

Таким образом, и в этом случае обрезка при  $\omega \sim \omega_D$  оказалась несущественной для вычисления щели.

Подводя итог, можно сказать, что конкретный вид обрезания важен в основном для определения  $T_c$ . Все остальные физические величины сверхпроводника могут быть выражены через  $T_c$  с помощью универсальных соотношений, не зависящих от вида конкретной функции запаздывания  $v(i\varepsilon)$ . Это происходит потому, что физика сверхпроводника определяется масштабами энергий порядка  $T_c \ll \omega_D$ . Это оправдывает

применение популярной модели, в которой запаздывание на временах порядка  $\omega_D^{-1}$  учитывается с помощью обрезания интегралов по  $\xi$ , а не по  $\varepsilon$ , то есть запаздывающее взаимодействие заменяется на взаимодействие нелокальное в пространстве.

**Решение 57.** Приступим теперь к расчету термодинамических величин сверхпроводника<sup>6</sup>. Характерный масштаб энергий, дающих вклад в термодинамику, оказывается порядка  $\max\{\Delta_0, T_c\}$ , и следовательно эффектами запаздывания на временах порядка  $\omega_D^{-1}$  можно пренебречь, выражая все величины через  $T_c$  или  $\Delta_0$ .

Рассмотрим диаграммное разложение термодинамического потенциала, показанное на рис. 10.9. Как обычно, продифференцируем термодинамический потенциал по константе связи  $\lambda$  для того, чтобы убрать множитель  $1/n$  перед диаграммами. Как нетрудно заметить, если в каждой из диаграмм на рис. 10.9 перерезать одну из электронных линий, то получается одна из диаграмм на рис. 10.6, причем соответствие взаимнооднозначное. Поэтому

$$\begin{aligned} \frac{\lambda}{V} \frac{\partial \Omega}{\partial \lambda} &= T \sum_{\omega_n} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} G_0^{-1}(i\omega_n, \mathbf{p}) (G(i\omega_n, \mathbf{p}) - G_0(i\omega_n, \mathbf{p})) \\ &= -T \sum_{\omega_n} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \Delta^* F(i\omega_n, \mathbf{p}) = -\frac{|\Delta|^2}{\lambda}. \end{aligned} \quad (10.95)$$

Делая преобразование, мы воспользовались соотношениями (10.32) и (10.39).

Термодинамический потенциал получается интегрированием  $\partial \Omega / \partial \lambda$  по  $\lambda$  от  $\lambda = 0$  до истинного значения. Чтобы проинтегрировать по  $\lambda$ , выразим  $d\lambda$  через  $d\Delta$  с помощью (10.39):

$$\frac{d\lambda}{\lambda^2} = T \sum_{\omega_n} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{2\Delta d\Delta}{(\omega_n^2 + \xi_{\mathbf{p}} + \Delta^2)^2}. \quad (10.96)$$

Поэтому

$$\frac{\Omega_s - \Omega_n}{V} = -2 \int_0^{\Delta} T \sum_{\omega_n} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{\Delta^3 d\Delta}{(\omega_n^2 + \xi_{\mathbf{p}}^2 + \Delta^2)^2}. \quad (10.97)$$

Интегрируя по  $\xi$  и  $\Delta$ , получим:

$$\frac{\Omega_s - \Omega_n}{V} = -\pi \nu_0 T \sum_{\omega_n} \left( \sqrt{\omega_n^2 + \Delta^2} + \frac{\omega_n^2}{\sqrt{\omega_n^2 + \Delta^2}} - 2|\omega_n| \right) \quad (10.98)$$

Снова рассмотрим предельные случаи.

- а)  $T \rightarrow 0$ . При очень низкой температуре мацубаровская сумма  $T \sum_{\omega_n} \dots$  хорошо аппроксимируется интегралом  $\int \dots \frac{d\omega}{2\pi}$ . Поправки нетрудно найти, перейдя от суммы к интегралу по формуле Пуассона, и удержав в ней только первые три члена:

$$\sum_n f(n) = \int f(x) dx + \int e^{2\pi i x} f(x) dx + \int e^{-2\pi i x} f(x) dx + \dots \quad (10.99)$$

<sup>6</sup>Эту задачу можно решить, вычисляя термодинамический потенциал идеального газа квазичастиц со спектром (10.37). Вместо этого мы воспользуемся диаграммами, чтобы проиллюстрировать некоторые общие положения.

Здесь

$$f(x) = \sqrt{(2\pi T x)^2 + \Delta^2} + \frac{\Delta^2}{\sqrt{(2\pi T x)^2 + \Delta^2}} - 4\pi T |x| \quad (10.100)$$

(Заметим, что неаналитичность  $|x|$  не мешает использовать формулу Пуассона, поскольку для последнего слагаемого сумму в формуле Пуассона можно вычислить явно, не делая никаких приближений.) После громоздких вычислений, приведенных в конце решения, получим

$$\Omega_s = -\frac{V \nu_0 \Delta^2}{2} \left( 1 + 2\sqrt{\frac{2\pi T}{\Delta}} e^{-\Delta/T} \left( 1 + \frac{15 T}{8 \Delta} \right) \right). \quad (10.101)$$

Подставляя сюда  $\Delta(T)$  из (10.89), находим

$$\Omega_s = -\frac{\nu_0 V \Delta_0^2}{2} \left( 1 + 4\sqrt{\frac{2\pi T^3}{\Delta_0^3}} e^{-\Delta_0/T} \right) \quad (10.102)$$

Обратим внимание на происходящее здесь сокращение главного температурно-зависящего члена. Из (10.102) найдем теплоемкость, дифференцируя энтропию по  $T$ :

$$C_s = T \frac{\partial S_s}{\partial T} = -T \frac{\partial^2 \Omega_s}{\partial T^2} = 2 \nu_0 V \sqrt{\frac{2\pi \Delta_0^5}{T^3}} e^{-\Delta_0/T}. \quad (10.103)$$

- б)  $T \rightarrow T_c$ . В этом случае достаточно просто разложить (10.98) до четвертого порядка по  $\Delta$  (член второго порядка обращается в нуль):

$$\frac{\Omega_s - \Omega_n}{V} = -\pi \nu_0 \Delta^4 T \sum_{\omega_n} \frac{1}{|\omega_n|^3}. \quad (10.104)$$

Сумма, как и в задаче 5б, выражается через  $\zeta$ -функцию:

$$\frac{\Omega_s - \Omega_n}{V} = -\frac{7\zeta(3) \nu_0 \Delta^4}{16\pi^2 T_c^2}. \quad (10.105)$$

Подставляя сюда  $\Delta$  из (10.94), получим

$$\Omega_s - \Omega_n = -\frac{4\pi^2}{7\zeta(3)} V \nu_0 (T - T_c)^2. \quad (10.106)$$

Дифференцируя по температуре, находим теплоемкость:

$$C_s - C_n = \frac{8\pi^2}{7\zeta(3)} \nu_0 T_c V. \quad (10.107)$$

Напомним, что теплоемкость нормального металла есть

$$C_n = \frac{2\pi^2}{3} \nu_0 V T, \quad (10.108)$$

поэтому

$$\frac{C_s - C_n}{C_n} = \frac{12}{7\zeta(3)}. \quad (10.109)$$



*Приложение.* Вычислим сумму в (10.98) при  $T \rightarrow 0$ . Согласно формуле суммирования Пуассона,

$$\frac{\Omega_s - \Omega_n}{V} = -\pi\nu_0 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} e^{ik\omega/T} \left( \sqrt{\omega^2 + \Delta^2} + \frac{\omega_n^2}{\sqrt{\omega^2 + \Delta^2}} - 2|\omega| \right). \quad (10.110)$$

Заметим, что первые два члена — плавные функции  $\omega$ , поэтому интегралы от них экспоненциально малы. Поэтому нам достаточно удержать их лишь при  $k = 0, \pm 1$ . Что же касается последнего члена, то интеграл от него легко вычисляется и равен  $-4T^2/k^2$ . В результате выражение для термодинамического потенциала приводится к виду

$$\begin{aligned} \frac{\Omega_s - \Omega_n}{V} = & -\nu_0 \left( \int_0^{\infty} d\omega \left( \sqrt{\omega^2 + \Delta^2} + \frac{\omega^2}{\sqrt{\omega^2 + \Delta^2}} - 2\omega \right) + \right. \\ & \left. + \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \left( \sqrt{\omega^2 + \Delta^2} + \frac{\omega^2}{\sqrt{\omega^2 + \Delta^2}} \right) \cos \frac{\omega}{T} - 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{T^2}{k^2} \right). \end{aligned} \quad (10.111)$$

Первый интеграл есть

$$\int_0^{\infty} d\omega \left( \sqrt{\omega^2 + \Delta^2} + \frac{\omega^2}{\sqrt{\omega^2 + \Delta^2}} - 2\omega \right) = \frac{\Delta^2}{2}, \quad (10.112)$$

а сумма равна

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}. \quad (10.113)$$

Оставшийся интеграл вычисляется так. Функция  $\sqrt{\omega^2 + \Delta^2}$  имеет скачок на разрезе, идущем от точки  $i\Delta$  до бесконечности. В остальной же части верхней полуплоскости функция аналитична, поэтому контур интегрирования можно деформировать так, чтобы он огибал этот разрез (см. рис. 10.12).

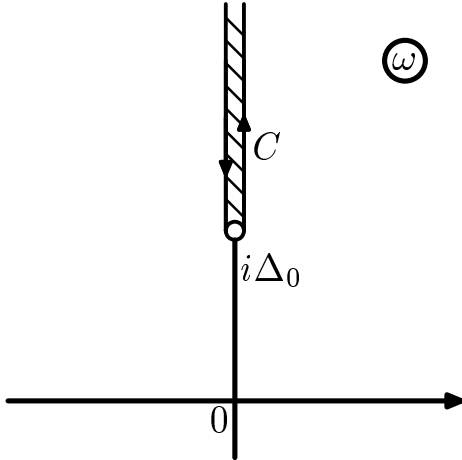


Рис. 10.12

Вводя переменную интегрирования  $u$  по формуле  $\omega = i\Delta + iu$ , приведем интеграл к виду

$$2 \int_0^{\infty} \frac{\Delta^2 + 2u^2 + 4u\Delta}{\sqrt{2\Delta u + u^2}} e^{-\Delta/T - u/T} du. \quad (10.114)$$

В этот интеграл дают вклад  $u \sim T$ , поэтому подынтегральное выражение можно разложить по  $u$ :

$$2\Delta^2 e^{-\Delta/T} \int_0^\infty e^{-u/T} \frac{du}{\sqrt{2\Delta u}} \left(1 + \frac{15}{4} \frac{u}{\Delta}\right) = \sqrt{2\pi T \Delta^3} e^{-\Delta/T} \left(1 + \frac{15}{8} \frac{T}{\Delta}\right) \quad (10.115)$$

В результате

$$\frac{\Omega_s - \Omega_n}{V} = -\frac{\nu_0 \Delta^2}{2} \left(1 + 2\sqrt{\frac{2\pi T}{\Delta}} e^{-\Delta/T} \left(1 + \frac{15}{8} \frac{T}{\Delta}\right)\right) + \frac{\pi^2 \nu_0 T^2}{3}. \quad (10.116)$$

Заметим, что последний член в этой формуле есть не что иное, как взятый с обратным знаком термодинамический потенциал нормального металла.

**Решение 58.** Рассмотрим уравнение (10.58) для куперовской амплитуды рассеяния, полученное в решении задачи 55. Если куперовская амплитуда  $\Gamma^C(i\varepsilon, i\varepsilon')$  имеет полюс при  $T \rightarrow T_c$ , то в уравнении (10.58) можно пренебречь свободным членом:

$$\Gamma^C(i\varepsilon, i\varepsilon') = \pi \nu_0 T \sum_{\varepsilon''} \frac{\Gamma^0(i\varepsilon, i\varepsilon'') \Gamma^C(i\varepsilon'', i\varepsilon')}{|\varepsilon''|}. \quad (10.117)$$

Зависимость от  $\varepsilon'$  в этом уравнении «сокращается». Поэтому можно считать, что решение факторизуется:

$$\Gamma^C(i\varepsilon, i\varepsilon') = \Phi(i\varepsilon) \Phi(i\varepsilon'). \quad (10.118)$$

(зависимость  $\Gamma^C$  от  $\varepsilon$  и  $\varepsilon'$  должна быть одинаковой ввиду симметрии куперовской лестницы.) Тогда функция  $\Phi(\varepsilon)$  удовлетворяет уравнению

$$\Phi(i\varepsilon) = \pi \nu_0 T \sum_{\varepsilon'} \frac{\Gamma^0(i\varepsilon, i\varepsilon') \Phi(i\varepsilon')}{|\varepsilon'|}. \quad (10.119)$$

Для  $\Gamma^0$  из условия задачи это интегральное уравнение оказывается вырожденным и легко решается. Видно, что функция  $\Phi(\varepsilon)$  содержит два члена: пропорциональный  $v(i\varepsilon)$  и не зависящий от  $\varepsilon$ . Ищем решение в виде

$$\Phi(\varepsilon) = av(i\varepsilon) + b. \quad (10.120)$$

Подставляя это выражение в (10.119) и приравнявая коэффициенты перед  $v(i\varepsilon)$  и перед константой, получаем:

$$a = \pi \lambda \nu_0 T \sum_{\varepsilon'} \frac{av^2(i\varepsilon') + bv(i\varepsilon')}{|\varepsilon'|}; \quad (10.121)$$

$$b = -\pi \mu \nu_0 T \sum_{\varepsilon'} \frac{av(i\varepsilon) + b}{|\varepsilon'|}. \quad (10.122)$$

На этот раз мы не будем заниматься точным вычислением сумм в этом выражении, а найдем их с логарифмической точностью, поскольку основной интерес будут представлять величины, стоящие перед логарифмами. Суммы, содержащие  $v(i\varepsilon)$  и  $v^2(i\varepsilon)$  следует обрезать сверху при  $\varepsilon \sim \omega_D$ . Сумму, не содержащую факторов запаздывания, мы обрежем сверху при  $\varepsilon \sim \omega_p \sim \varepsilon_F$  — на плазменной частоте, которая играет в

физике электрон-электронного взаимодействия роль, аналогичную  $\omega_D$  для электрон-фононного взаимодействия. Таким образом, получаем:

$$\begin{aligned} a &= \nu_0 \lambda \ln \frac{\omega_D}{T} (a + b) ; \\ b &= -\mu \nu_0 \left( a \ln \frac{\omega_D}{T} + b \left( \ln \frac{\omega_D}{T} + \ln \frac{\omega_p}{\omega_D} \right) \right) . \end{aligned} \quad (10.123)$$

Переносим во втором уравнении член с  $\ln \omega_p/\omega_D$  в левую часть, можно переписать его в таком виде, что оно становится похоже на первое:

$$b = -\nu_0 \mu_* \ln \frac{\omega_D}{T} (a + b) ; \quad \mu_* = \frac{\mu}{1 + \nu_0 \mu \ln \frac{\omega_p}{\omega_D}} . \quad (10.124)$$

Мы ввели здесь эффективную куперовскую амплитуду  $\mu_*$ , которая отличается от  $\mu$  из-за запаздывания фононов. Теперь, складывая первое из уравнений (10.123) с уравнением (10.124), приходим к условию совместности системы (10.123):

$$1 = (\lambda - \mu_*) \ln \frac{\omega_D}{T} , \quad (10.125)$$

из которого находим температуру перехода:

$$T_c \sim \omega_D e^{-1/\lambda_* \nu_0} , \quad \lambda_* = \lambda - \mu_* . \quad (10.126)$$

Таким образом, кулоновское взаимодействие действительно понижает температуру сверхпроводящего перехода, но не очень сильно. При  $\nu_0 \mu \ln \varepsilon_F/\omega_D \gg 1$  относительная поправка к  $\lambda$  мала как  $1/\ln(\varepsilon_F/\omega_D)$ .

**Решение 59 а)** Прежде чем вычислять  $Q(0)$  для произвольного электронного спектра  $\xi(\mathbf{p})$ , уточним выражение для тока. Гамильтониан частиц со спектром  $\xi(\mathbf{p})$  во внешнем магнитном поле  $\mathbf{A}(\mathbf{r})$  есть

$$\widehat{\mathcal{H}} = \int \psi^\dagger(\mathbf{r}) \xi \left( \widehat{\mathbf{p}} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right) \psi(\mathbf{r}) . \quad (10.127)$$

где  $\widehat{\mathbf{p}} = -i\nabla_{\mathbf{r}}$ . Ток, согласно общим принципам, получается варьированием гамильтониана по  $\mathbf{A}$ :

$$\widehat{\mathbf{j}} = e \psi^\dagger(\mathbf{r}) \nabla_{\mathbf{p}} \xi \left( \mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right) \psi(\mathbf{r}) . \quad (10.128)$$

Выделим линейный по  $\mathbf{A}$  член:

$$\widehat{\mathbf{j}} = e \psi^\dagger(\mathbf{r}) \nabla_{\mathbf{p}} \xi(\mathbf{p}) \psi(\mathbf{r}) - \frac{e^2}{c} \psi^\dagger(\mathbf{r}) \nabla_{\mathbf{p}} \left[ (\mathbf{A} \nabla_{\mathbf{p}}) \xi(\mathbf{p}) \right] \psi(\mathbf{r}) . \quad (10.129)$$

При  $\xi(\mathbf{p}) = \mathbf{p}^2/2m - E_F$  это выражение для тока переходит в обычную квантовомеханическую формулу.

Проще всего вычисляется вклад в  $Q(0)$  второго члена:

$$Q_{\alpha\beta}^{(2)}(\mathbf{k}) = -\frac{e^2}{c} \left\langle \psi^\dagger \frac{\partial^2 \xi(\mathbf{p})}{\partial p_\alpha \partial p_\beta} \psi \right\rangle = -\frac{e^2}{c} \int \frac{2d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{\partial^2 \xi(\mathbf{p})}{\partial p_\alpha \partial p_\beta} n_F(\xi(\mathbf{p})) . \quad (10.130)$$

Чтобы найти вклад первого члена, поступим стандартным образом. В линейном по  $\mathbf{A}$  приближении взаимодействие тока с полем есть

$$\widehat{\mathcal{H}}_{\text{int}} = -\frac{1}{c} \int \widehat{\mathbf{j}}(\mathbf{r}) \mathbf{A}(\mathbf{r}) d^3r . \quad (10.131)$$

Находя, как обычно, поправку первого порядка к функции Грина и вычисляя с ее помощью  $\langle \mathbf{j} \rangle$ , получаем, что этот вклад дается петлей:

$$Q_{\alpha\beta}^{(1)}(i\Omega, \mathbf{k}) = -\frac{e^2}{c} \lim_{\tau \rightarrow +0} T \sum_{\omega_n} \int \frac{v_\alpha(\mathbf{p}) v_\beta(\mathbf{p})}{i\omega_n - \xi(\mathbf{p})} \frac{e^{i\omega_n \tau}}{i\omega_n + i\Omega - \xi(\mathbf{p} + \mathbf{k})} \frac{2d^3p}{(2\pi)^3} \quad (10.132)$$

Мы ввели здесь множитель сходимости  $e^{i\omega_n \tau}$  ( $\tau \rightarrow +0$ ), который отвечает за правильный порядок  $\psi$  и  $\psi^+$  (ср. с задачей 35).

При  $\Omega = 0$  и  $\mathbf{k} = 0$  это выражение сводится к такому:

$$Q_{\alpha\beta}^{(1)}(0) = -\frac{e^2}{c} \lim_{\tau \rightarrow +0} T \sum_{\omega_n} e^{i\omega_n \tau} \int \frac{v_\alpha(\mathbf{p}) v_\beta(\mathbf{p})}{(i\omega_n - \xi(\mathbf{p}))^2} \frac{2d^3p}{(2\pi)^3} \quad (10.133)$$

Учитывая, что  $\mathbf{v} = \nabla_{\mathbf{p}} \xi(\mathbf{p})$ , перепишем  $Q_{\alpha\beta}^{(1)}(0)$  в виде:

$$Q_{\alpha\beta}^{(1)}(0) = -\frac{e^2}{c} \lim_{\tau \rightarrow +0} T \sum_{\omega_n} e^{i\omega_n \tau} \int v_\alpha(\mathbf{p}) \nabla_\beta \frac{1}{i\omega_n - \xi(\mathbf{p})} \frac{2d^3p}{(2\pi)^3}, \quad (10.134)$$

после чего проинтегрируем по частям:

$$Q_{\alpha\beta}^{(1)}(0) = +\frac{e^2}{c} \lim_{\tau \rightarrow +0} T \sum_{\omega_n} e^{i\omega_n \tau} \int \nabla_\beta v_\alpha(\mathbf{p}) \frac{1}{i\omega_n - \xi(\mathbf{p})} \frac{2d^3p}{(2\pi)^3} = -Q_{\alpha\beta}^{(2)} \quad (10.135)$$

(суммирование по мацубаровским частотам производится так же, как в выражении (7.60) в решении задачи 35). Итак,  $Q_{\alpha\beta}(0) = 0$ .

**Решение 59 б)** Чтобы найти диамагнитную восприимчивость ферми-газа  $\chi_0$ , свяжем ее с константой  $a$  в разложении  $Q(\mathbf{k}) = a\mathbf{k}^2 + \dots$ . По определению  $Q(\mathbf{k})$ ,

$$\mathbf{j} = \widehat{Q} \mathbf{A} = -a \nabla^2 \mathbf{A} . \quad (10.136)$$

С другой стороны, ток связан с намагниченностью:

$$\mathbf{j} = c \text{rot } \mathbf{M} = c \text{rot } \chi_0 \mathbf{B} = \chi_0 c \text{rot rot } \mathbf{A} . \quad (10.137)$$

Поскольку  $\text{div } \mathbf{A} = 0$ , ток можно записать так:

$$\mathbf{j} = -\chi_0 c \nabla^2 \mathbf{A} . \quad (10.138)$$

Отсюда находим  $\chi_0 = a/c$ .

Теперь вычислим  $a$ . Предположим, что волновой вектор  $\mathbf{k}$  направлен вдоль оси  $z$ , и найдем  $Q_{xx}$ :

$$Q_{xx} = -\lim_{\tau \rightarrow +0} \frac{e^2}{c} T \sum_{\omega_n} e^{i\omega_n \tau} \int \frac{v_x(\mathbf{p} + \mathbf{k}) v_x(\mathbf{p})}{(i\omega_n - \xi_{\mathbf{p}+\mathbf{k}})(i\omega_n - \xi_{\mathbf{p}})} \frac{2d^3p}{(2\pi)^3} . \quad (10.139)$$

В отличие от спиновой восприимчивости, орбитальная восприимчивость определяется не только окрестностью поверхности Ферми, но и всеми состояниями под ней, потому что квантование Ландау затрагивает все состояния с  $E < E_F$ , и конечная восприимчивость  $\chi_0$  возникает из-за отличия суммы квантованных энергий от интеграла по непрерывному спектру. Поэтому мы ограничимся случаем  $\xi(\mathbf{p}) = \mathbf{p}^2/2m - E_F$ . Разлагая  $Q(k)$  по  $k_z = k$ , и имея в виду, что для квадратичного спектра  $v_x(\mathbf{p} + \mathbf{k}) = v_x(\mathbf{p}) = p_x/m$ , запишем

$$Q_{xx} = -\frac{e^2 k^2}{c} T \sum_{\omega_n} e^{i\omega_n \tau} \int \frac{v_x^2}{i\omega_n - \xi_{\mathbf{p}}} \frac{\partial^2}{\partial p_z^2} \frac{1}{i\omega_n - \xi_{\mathbf{p}}} \frac{2 d^3 p}{(2\pi)^3}. \quad (10.140)$$

Проинтегрировав по частям, получим

$$\chi_0 = \frac{e^2}{c^2} T \sum_{\omega_n} e^{i\omega_n \tau} \int \frac{v_x^2 v_z^2}{(i\omega_n - \xi_{\mathbf{p}})^4} \frac{2 d^3 p}{(2\pi)^3}. \quad (10.141)$$

Теперь усредним по углам ( $\langle v_x^2 v_z^2 \rangle = v^4/15$ ):

$$\chi_0 = \frac{e^2}{15c^2 m^4} T \sum_{\omega_n} e^{i\omega_n \tau} \int \frac{p^4}{(i\omega_n - \xi_{\mathbf{p}})^4} \frac{2 d^3 p}{(2\pi)^3}. \quad (10.142)$$

Интеграл по модулю импульса трехкратным интегрированием по частям приводится к виду

$$\int_0^\infty \frac{p^6 dp}{\left(i\omega_n + E_F - \frac{p^2}{2m}\right)^4} = -\frac{5m^3}{2} \int_0^\infty \frac{dp}{i\omega_n + E_F - \frac{p^2}{2m}}, \quad (10.143)$$

после чего суммирование по  $\omega_n$  дает, как обычно, распределение Ферми (см. формулу (7.60) в решении задачи 35):

$$\chi_0 = -\frac{e^2}{12\pi^2 m c^2} \int_0^\infty dp n_F(\xi_p) = -\frac{e^2 p_0}{12\pi^2 m c^2}. \quad (10.144)$$

Используя выражение для спиновой восприимчивости, найденное в задаче 24

$$\chi_{\text{пара}} = 2\mu_B^2 \nu_0 = \frac{e^2}{4m^2 c^2} \frac{m p_0}{\pi^2}, \quad (10.145)$$

находим соотношение между орбитальной и спиновой восприимчивостью:

$$\chi_0 = -\frac{1}{3} \chi_{\text{пара}}. \quad (10.146)$$

Отметим, что это соотношение не универсально. Как видно из нашего вычисления, вклад в  $\chi_0$  дает весь спектр, а не только поверхность Ферми. Поэтому полученное соотношение между  $\chi_0$  и  $\chi_{\text{пара}}$  верно лишь для квадратичного спектра. При более общем законе дисперсии  $\xi(\mathbf{p})$  восприимчивость  $\chi_0$  по величине может оказаться даже больше, чем  $\chi_{\text{пара}}$ . В этом случае нормальный металл оказывается диамагнетиком.

**Решение 60.** В этой задаче мы вычислим  $Q(0)$  для сверхпроводника. При этом основное отличие от вычисления для нормального металла, сделанного в задаче 59, возникает из-за необходимости учесть как нормальные, так и аномальные средние.

Среднее от диамагнитного вклада в ток есть просто

$$Q^{(2)}(0) = -\frac{ne^2}{mc}. \quad (10.147)$$

Что же касается градиентного вклада  $Q_{\alpha\beta}^{(1)}(i\Omega, \mathbf{k})$ , то он получается усреднением произведения токов и дается следующим выражением

$$\begin{aligned} Q_{\alpha\beta}^{(1)}(i\Omega_s, \mathbf{k}) &= \frac{1}{2c} \sum_{\sigma, \sigma' = -\beta}^{\beta} \int e^{i\Omega\tau} d\tau \int d^3r e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} \times \\ &\times \langle T_{\tau} \psi_{\sigma}^{\dagger}(\mathbf{r}, \tau) \hat{j}_{\alpha} \psi_{\sigma}(\mathbf{r}, \tau) \psi_{\sigma'}^{\dagger}(0, 0) \hat{j}_{\beta} \psi_{\sigma'}(0, 0) \rangle \end{aligned} \quad (10.148)$$

( $\sigma, \sigma'$  — спиновые индексы, а  $\mathbf{j} = -i\frac{e}{m}\nabla_{\mathbf{r}}$ ).

Теперь необходимо спарить  $\psi$ -операторы, учитывая как нормальные, так и аномальные средние. При этом теорема Вика по-прежнему справедлива, поскольку операторы  $\psi$  и  $\psi^{\dagger}$  можно выразить линейным образом через операторы рождения и уничтожения квазичастиц сверхпроводника, для которых аномальные средние равны нулю. Таким образом,

$$\begin{aligned} \langle T_{\tau} \psi_{\sigma}^{\dagger}(\mathbf{r}, \tau) \hat{j}_{\alpha} \psi_{\sigma}(\mathbf{r}, \tau) \psi_{\sigma'}^{\dagger}(0, 0) \hat{j}_{\beta} \psi_{\sigma'}(0, 0) \rangle &= \\ = -\hat{j}_{\alpha} G_{\sigma\sigma'}(\mathbf{r}, \tau) \hat{j}_{\beta} G_{\sigma'\sigma}(-\mathbf{r}, -\tau) - \hat{j}_{\alpha} F_{\sigma\sigma'}^{\dagger}(\mathbf{r}, \tau) \hat{j}_{\beta} F_{\sigma'\sigma}(-\mathbf{r}, -\tau). \end{aligned} \quad (10.149)$$

Тогда  $Q_{\alpha\beta}^{(1)}(i\Omega, \mathbf{k})$  принимает вид:

$$\begin{aligned} Q_{\alpha\beta}^{(1)}(i\Omega, \mathbf{k}) &= -\frac{1}{2c} \int_{-\beta}^{\beta} e^{i\Omega\tau} d\tau \int d^3r e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} \times \\ &\times \left[ 2\hat{j}_{\alpha} G(\mathbf{r}, \tau) \hat{j}_{\beta} G(-\mathbf{r}, -\tau) + 2\hat{j}_{\alpha} F(\mathbf{r}, \tau) \hat{j}_{\beta} F^*(-\mathbf{r}, -\tau) \right]. \end{aligned} \quad (10.150)$$

Заметим, что знаки петель, содержащих функции  $G$  и  $F$ , оказываются одинаковыми. Перепишывая выражение (10.150) в импульсном представлении, получаем

$$\begin{aligned} Q_{\alpha\beta}^{(1)}(i\Omega, \mathbf{k}) &= -\frac{Te^2}{c} \sum_{\omega_n} \int \frac{2d^3p}{(2\pi)^3} v_{\alpha} \left( \mathbf{p} - \frac{\mathbf{k}}{2} \right) v_{\beta} \left( \mathbf{p} + \frac{\mathbf{k}}{2} \right) \times \\ &\times \left\{ G \left( i\omega_n, \mathbf{p} - \frac{\mathbf{k}}{2} \right) G \left( i\omega_n + i\Omega, \mathbf{p} + \frac{\mathbf{k}}{2} \right) + \right. \\ &\left. + F \left( i\omega_n, \mathbf{p} - \frac{\mathbf{k}}{2} \right) F^* \left( i\omega_n + i\Omega, \mathbf{p} + \frac{\mathbf{k}}{2} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (10.151)$$

Тогда при  $\mathbf{k} = 0$

$$Q^{(1)}(0) = \frac{1}{3} Q_{\alpha\alpha}^{(1)}(0) = -\frac{e^2 T}{3m^2 c} \sum_{\omega_n} \int \frac{2d^3p}{(2\pi)^3} \mathbf{p}^2 \left( G^2(i\omega_n, \mathbf{p}) + |F(i\omega_n, \mathbf{p})|^2 \right). \quad (10.152)$$

Собирая вместе  $Q^{(1)}$  и  $Q^{(2)}$  и учитывая определение  $n_s$ , получим

$$n - n_s = -\frac{2T\nu_0 p_0^2}{3m} \sum_{\omega_n} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Delta^2 + \xi^2 - \omega_n^2}{(\omega_n^2 + \xi^2 + \Delta^2)^2} d\xi. \quad (10.153)$$

Обратим внимание на то, что при интегрировании по  $\omega$  выражение (10.153) обращается в нуль, в то время как при интегрировании по  $\xi$  этого не происходит. Следовательно, оно не вполне корректно определено. Дело в том, что эта величина не «сидит» на поверхности Ферми, и для правильного учета состояний вдали от уровня Ферми следовало бы брать плотность состояний, зависящую от энергии. Однако сверхтекучая плотность, несомненно, определяется поверхностью Ферми, потому что только там и происходит перестройка электронных состояний. В глубине же фермиевского моря (т. е. при  $\xi \sim E_F$ ) ничего не происходит. Поэтому можно поступить так: вычесть из этого выражения аналогичное с  $\Delta = 0$ , т. е. для нормального металла. Тогда вклад глубоких состояний выпадет. При этом, как мы знаем, для нормального металла  $n_s = 0$ . В результате

$$n_s = \frac{2\nu_0 p_0^2}{3m} T \sum_{\omega_n} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \left[ \frac{\xi^2 - \omega_n^2}{(\xi^2 + \omega_n^2)^2} - \frac{\xi^2 - \omega_n^2 + \Delta^2}{(\xi^2 + \omega_n^2 + \Delta^2)^2} \right]. \quad (10.154)$$

Получившееся выражение можно интегрировать в любом порядке. Лучше всего сначала проинтегрировать по  $\xi$ . При этом оказываются полезными следующие соотношения:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + a^2)^2} = \frac{\pi}{2a^3}, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2 + a^2)^2} = \frac{\pi}{2a}. \quad (10.155)$$

После интегрирования получаем ответ:

$$n_s = \frac{2\nu_0 p_0^2}{3m} T \sum_{\omega_n} \frac{\pi \Delta^2}{(\omega_n^2 + \Delta^2)^{3/2}}. \quad (10.156)$$

Рассмотрим различные предельные случаи.

а)  $T \rightarrow 0$ . Заменяем сумму интегралом:

$$n_s = \frac{2\nu_0 p_0^2}{3m} \frac{\pi \Delta^2}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{(\omega^2 + \Delta^2)^{3/2}} = \frac{2\nu_0 p_0^2}{3m} = \frac{p_0^3}{3\pi^2} = n. \quad (10.157)$$

Видим, что при  $T = 0$  сверхтекучая плотность равна полной, как и должно быть в трансляционно-инвариантной системе.

б)  $T \rightarrow T_c$ . В этом случае достаточно пренебречь  $\Delta$  в знаменателе. Тогда сумма выражается через  $\zeta$ -функцию (см. задачу 56), что дает

$$\frac{n_s}{n} = \frac{7\Delta^2}{4\pi^2 T_c^2} = 2 \left( 1 - \frac{T}{T_c} \right). \quad (10.158)$$

Таким образом, при  $T \rightarrow T_c$  сверхтекучая плотность уменьшается до нуля.

Теперь свяжем  $n_s$  с глубиной проникновения. Запишем закон Ампера:

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} = -\frac{4\pi n_s e^2}{mc^2} \mathbf{A} . \quad (10.159)$$

Поскольку  $\mathbf{H} = \operatorname{rot} \mathbf{A}$ , имеем:

$$\nabla^2 \mathbf{A} = \frac{4\pi n_s e^2}{mc^2} \mathbf{A} . \quad (10.160)$$

Пусть граница образца перпендикулярна оси  $x$ , а магнитное поле параллельно оси  $z$ . Тогда

$$A_y(x) = A_y(0) e^{-x/\delta_\Lambda} , \quad (10.161)$$

где

$$\delta_\Lambda^2 = \frac{mc^2}{4\pi n_s e^2} . \quad (10.162)$$

Отсюда получаем, что магнитное поле

$$H_z = -\frac{\partial A_y}{\partial x} = \frac{A_y(0)}{\delta_\Lambda} e^{-x/\delta_\Lambda} = H_z(0) e^{-x/\delta_\Lambda} \quad (10.163)$$

экспоненциально затухает вглубь сверхпроводника, причем глубина проникновения равна  $\delta_\Lambda$ .

В нашем расчете мы пренебрегли дисперсией  $Q(k)$ . Выясним, при каких условиях это законно, или, иными словами, каков масштаб пространственной дисперсии в сверхпроводнике. Чтобы определить этот масштаб, следует сравнить  $\mathbf{k}\mathbf{v}$  (это и есть величина, которой мы пренебрегли) со всеми остальными величинами в знаменателях функций  $G$  и  $F$  в (10.151). Сравнивая  $\xi$  с  $\Delta$ , получаем характерный волновой вектор  $k_0 \sim \xi^{-1}(T) \sim \Delta(T)/\hbar v_F$ . Заметим, однако, что при  $T \rightarrow T_c$   $\Delta(T) \rightarrow 0$  и основную роль в знаменателе играет  $\omega_{n=0} = \pi T_c \sim \Delta_0$ . Поэтому на самом деле характерный волновой вектор при любых температурах есть  $k_0 \sim \xi_0^{-1} \sim \Delta_0/\hbar v_F$ . Для того, чтобы наш расчет был применим, должно быть  $\delta_\Lambda \gg \xi_0$ . В этом случае сверхпроводник называют лондоновским. Противоположный предельный случай называется пипшардовским.

Оказывается, что в сверхпроводниках есть два пространственных масштаба. Один из них,  $\xi(T)$ , — это масштаб корреляций параметра порядка  $\Delta$ . Другой,  $\xi_0$ , — это размер куперовской пары. При  $T \rightarrow T_c$  различие между ними становится весьма ощутимым, поскольку при приближении  $T$  к  $T_c$  корреляционная длина  $\xi(T)$  расходится, в то время как размер пары  $\xi_0$  (он же масштаб пространственной дисперсии) при этом остается конечным.

В заключение покажем, как производить подобные расчеты с помощью матричной функции Грина

$$\hat{G} = \begin{bmatrix} G_{\uparrow\uparrow} & F_{\uparrow\downarrow} \\ F_{\downarrow\uparrow} & G_{\downarrow\downarrow} \end{bmatrix} . \quad (10.164)$$

Она удовлетворяет такому уравнению:

$$(i\omega - \xi(\mathbf{p})\tau_z - \Delta_1\tau_x - \Delta_2\tau_y) \hat{G} = \hat{1} \quad (10.165)$$



( $\Delta = \Delta_1 + i\Delta_2$ ). Оператор тока равен

$$\hat{\mathbf{j}} = c \frac{\delta \hat{G}^{-1}}{\delta \mathbf{A}} = e \mathbf{v}(\mathbf{p}) \hat{1} - \frac{e^2}{mc} \mathbf{A} \tau_z. \quad (10.166)$$

Сама  $\hat{G}$  равна

$$\hat{G} = -\frac{1}{\omega_n^2 + \xi^2 + \Delta^2} \begin{pmatrix} i\omega_n + \xi & \Delta \\ \Delta^* & i\omega_n - \xi \end{pmatrix} \quad (10.167)$$

Вычисляя

$$\begin{aligned} & \text{Tr} \left( \hat{j}_\alpha \hat{G}(i\omega_n, \mathbf{p}) \hat{j}_\beta \hat{G}(i\omega_n, \mathbf{p}) \right) = \\ &= \frac{e^2 v_\alpha(\mathbf{p}) v_\beta(\mathbf{p})}{(\omega_n^2 + \xi^2 + \Delta^2)^2} \text{Tr} \left( (i\omega_n + \xi \tau_z + \Delta \tau_x) (i\omega_n + \xi \tau_z + \Delta \tau_x) \right) = \\ &= 2e^2 v_\alpha(\mathbf{p}) v_\beta(\mathbf{p}) \frac{\Delta^2 + \xi^2 - \omega_n^2}{(\omega_n^2 + \xi^2 + \Delta^2)^2}, \end{aligned} \quad (10.168)$$

получим то же выражение, что и ранее (см. (10.156)).

**Решение 61.** Для того, чтобы изучить влияние примесей на  $T_c$ , рассмотрим диаграммы, образующие один блок куперовской лестницы, и усредним их по беспорядку:

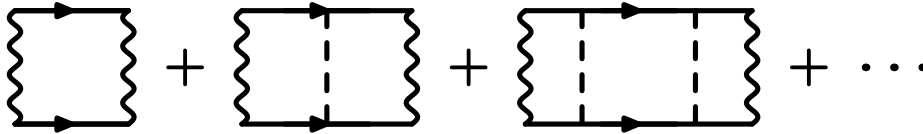


Рис. 10.13

Они имеют ту же структуру, что и диаграммы на рис. 10.8. Отличие состоит в том, что куперовская петля теперь содержит примесную лестницу, описывающую рассеяние куперовской пары на примесях. Поэтому

$$\Gamma^C = -\frac{\lambda}{1 + \lambda \Pi_c}, \quad (10.169)$$

где

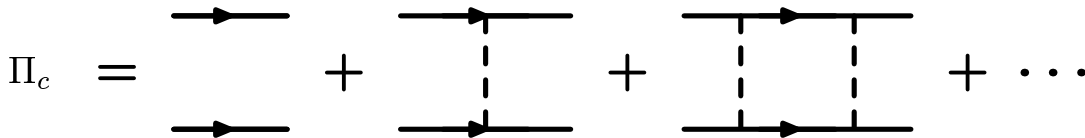


Рис. 10.14

— сумма лестничных диаграмм. По сути дела, такая сумма уже была вычислена нами в задаче 54. Напомним, что усредненная по беспорядку функция Грина в грязном металле равна

$$G(i\omega_n, \mathbf{p}) = \frac{1}{i\omega_n - \xi_p + \frac{1}{2\tau} \text{sign } \omega_n}. \quad (10.170)$$

Каждая ступенька куперовской лестницы, состоящая из двух функций Грина, взятая при  $\Omega = 0$ ,  $\mathbf{s} = 0$ , есть

$$\begin{aligned} B_c(i\omega_n) &= \int G(i\omega_n, \mathbf{p}) G(-i\omega_n, -\mathbf{p}) \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\nu_0 d\xi}{\left(\omega_n + \frac{1}{2\tau} \text{sign } \omega_n\right)^2 + \xi^2} = \frac{2\pi\nu_0\tau}{1 + 2\tau|\omega_n|}. \end{aligned} \quad (10.171)$$

Суммировать  $B_c$  по  $\omega_n$  не следует, поскольку столкновения с примесями — упругие.

Теперь вычислим всю примесную лестницу. При этом полезно вспомнить, что примесный пунктир равен  $nu_0^2 = (2\pi\nu_0\tau)^{-1}$  (см. гл. 9). Суммируя геометрическую прогрессию, получаем

$$\begin{aligned} L(i\omega_n) &= B_c(i\omega_n) + \frac{1}{2\pi\nu_0\tau} B_c^2(i\omega_n) + \dots = \\ &= \frac{B_c(i\omega_n)}{1 - \frac{B_c(i\omega_n)}{2\pi\nu_0\tau}} = \frac{\pi\nu_0}{|\omega_n|}. \end{aligned} \quad (10.172)$$

Как мы видим,  $\tau$  полностью исчезло из этой формулы. Отметим, что выпадение  $\tau$  из ответа формально обязано тому же сокращению, которое обеспечивает сохранение числа частиц при вычислении коррелятора плотность–плотность в ферми газе с примесями:

$$\langle n(\omega, \mathbf{q}) n(-\omega, -\mathbf{q}) \rangle_{\mathbf{q}=0} = \frac{\pi\nu_0}{i\omega} \quad (10.173)$$

(см. задачу 52). Находим куперовскую петлю:

$$\Pi_c = -T \sum_{\omega_n} L(i\omega_n) = -2\pi\nu_0 T \sum_{\omega_n > 0} \frac{1}{|\omega_n|} = -\nu_0 \ln \frac{2\gamma}{\pi} \frac{\omega_D}{T}. \quad (10.174)$$

Поэтому

$$T_c = \frac{2\gamma}{\pi} \omega_D e^{-1/\lambda\nu_0}, \quad (10.175)$$

как и в отсутствии примесей.

**Решение 62 а)** Начнем с усреднения функций Грина сверхпроводника по примесям. Для этого мы вычислим матричную собственно-энергетическую часть

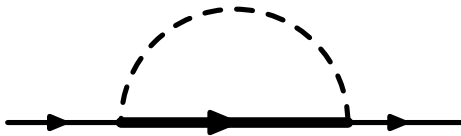


Рис. 10.15

При этом матричное выражение для примесного пунктира таково:

$$nu_0^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2\pi\nu_0\tau} \hat{1} \quad (10.176)$$

(примеси одинаково хорошо рассеивают как электроны, бегущие вперед, так и назад, и при этом не переводят одно из спаривающихся состояний в другое, поскольку у них разный спин). Вычисляем собственно-энергетическую часть в первом порядке по концентрации примесей, следуя методу задачи 50:

$$\hat{\Sigma}(i\omega_n) = \frac{1}{2\pi\nu_0\tau} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \hat{G}(i\omega_n, \mathbf{p}) = -\frac{1}{2\pi\nu_0\tau} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{i\omega_n \hat{1} + \xi_{\mathbf{p}} \hat{\tau}_z - \Delta \hat{\tau}_x}{\omega_n^2 + \Delta^2 + \xi_{\mathbf{p}}^2}. \quad (10.177)$$

Интегрируя по  $\xi$ , получаем

$$\hat{\Sigma}(i\omega_n) = -\frac{1}{2\tau} \frac{i\omega_n \hat{1} + \Delta \hat{\tau}_x}{\sqrt{\omega_n^2 + \Delta^2}}. \quad (10.178)$$

Таким образом,

$$\hat{G}^{-1} = \hat{G}_0^{-1} - \hat{\Sigma} = i\tilde{\omega}_n \hat{1} - \xi \hat{\tau}_z - \tilde{\Delta} \hat{\tau}_x, \quad (10.179)$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{\omega}_n &= \omega_n \left( 1 + \frac{1}{2\tau\sqrt{\omega_n^2 + \Delta^2}} \right) \\ \tilde{\Delta} &= \Delta \left( 1 + \frac{1}{2\tau\sqrt{\omega_n^2 + \Delta^2}} \right) \end{aligned}$$

Обратим внимание, что

$$\frac{\tilde{\omega}_n}{\tilde{\Delta}} = \frac{\omega_n}{\Delta}. \quad (10.180)$$

Как мы убедимся в дальнейшем, это свойство очень важно.

При вычислении  $\hat{\Sigma}$  мы использовали затравочные функции Грина  $G$  и  $F$ . Что произойдет, если теперь подставить исправленные функции Грина в выражение для  $\hat{\Sigma}$ ? Оказывается,  $\hat{\Sigma}$  при этом не изменится. Это легко видеть прямо из (10.178), поскольку при изменении в этом выражении  $\omega_n$  и  $\Delta$  в одно и то же число раз величина  $\hat{\Sigma}$  не меняется. Поэтому полученный нами ответ автоматически оказался решением интегрального уравнения для  $\hat{\Sigma}$ , точно так же, как и для нормального металла (см. задачу 50).

В принципе, щель в грязном сверхпроводнике следует определять заново, решая уравнение самосогласования (10.38), принимающее вид:

$$\Delta = \lambda T \sum_{\omega_n} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\nu_0 d\xi \tilde{\Delta}}{\tilde{\omega}_n^2 + \tilde{\Delta}^2 + \xi^2}. \quad (10.181)$$

Интегрируя по  $\xi$ , приходим к уравнению

$$\Delta = \pi\lambda\nu_0 T \sum_{\omega_n} \frac{\tilde{\Delta}}{\sqrt{\tilde{\omega}_n^2 + \tilde{\Delta}^2}} = \pi\lambda\nu_0 T \sum_{\omega_n} \frac{\Delta}{\sqrt{\omega_n^2 + \Delta^2}}, \quad (10.182)$$

не содержащему концентрации примесей. (Во втором равенстве мы использовали (10.180).) Таким образом, примеси не влияют не только на  $T_c$ , но и на термодинамику сверхпроводника вообще. Так происходит потому, что для термодинамических свойств существенна лишь полная плотность состояний (или, грубо говоря, сколько длин волн укладывается на каждой квазичастичной траектории) и совершенно не важно, как эти состояния устроены (т. е. по каким конкретно траекториям движутся квазичастицы, по прямым, или по ломаным, рассеиваясь на примесях).

**Решение 62 б)** Теперь рассмотрим отклик сверхтекучего тока на внешнее магнитное поле. В отличие от  $T_c$ , эта величина гораздо более чувствительна к форме траекторий и сильно изменяется даже при малых концентрациях примесей. (Достаточно, чтобы длина свободного пробега стала меньше, чем размер куперовской пары  $\xi_0$ .) Определим сверхтекучую плотность. Как и в задаче 51, для вычисления отклика достаточно провести вычисления с усредненными по примесям функциями Грина, потому что диаграмма с примесной линией, соединяющей разные функции Грина, равна нулю (из-за того, что вершина взаимодействия с электромагнитным полем векторная). Усредненные же функции Грина отличаются от затравочных лишь заменой  $\omega_n \rightarrow \tilde{\omega}_n$ ,  $\Delta \rightarrow \tilde{\Delta}$ . Поэтому можно сразу написать формулу для  $n_s$  по аналогии с задачей 50:

$$\frac{n - n_s}{n} = T \sum_{\omega_n} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \frac{\xi^2 + \tilde{\Delta} - \tilde{\omega}_n^2}{(\xi^2 + \tilde{\Delta} + \tilde{\omega}_n^2)^2}. \quad (10.183)$$

Как и ранее, вычтем из этого выражения его значение при  $\Delta = 0$ ,  $\tau = \infty$  для того, чтобы исключить вклад фермиевского моря. Интегрирование по  $\xi$  дает:

$$\frac{n_s}{n} = \pi T \sum_{\omega_n} \frac{\tilde{\Delta}^2}{(\tilde{\omega}_n^2 + \tilde{\Delta}^2)^{3/2}}. \quad (10.184)$$

Итак,

$$\frac{n_s}{n} = \pi T \sum_{\omega_n} \frac{\Delta^2}{(\omega_n^2 + \Delta^2)^{3/2} \left( 1 + \frac{1}{2\tau\sqrt{\omega_n^2 + \Delta^2}} \right)}. \quad (10.185)$$

При малой концентрации примесей, когда  $\tau\Delta_0 \gg 1$ , это выражение воспроизводит результат задачи 60, а в противоположном «грязном» пределе  $\tau\Delta_0 \ll 1$  дает следующее:

$$\frac{n_s}{n} = 2\pi\tau T \sum_{\omega_n} \frac{\Delta^2}{(\omega_n^2 + \Delta^2)^2} = \pi\tau\Delta \operatorname{th} \frac{\Delta}{2T}. \quad (10.186)$$

Интересно, что в грязном сверхпроводнике даже при  $T \rightarrow 0$  сверхтекучая плотность много меньше полной:

$$\frac{n_s(T \rightarrow 0)}{n} = \pi\tau\Delta_0 \ll 1. \quad (10.187)$$

Это связано с нарушением трансляционной инвариантности и «торможением» электронов примесями.

Подставляя  $n_s$  в формулу для глубины проникновения  $\delta_\Lambda$ , получаем

$$\delta_\Lambda = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{mc^2}{e^2 \Delta \tau \operatorname{th} \frac{\Delta}{2T}}} . \quad (10.188)$$

**Решение 63.** Вначале найдем усредненную по парамагнитным примесям функцию Грина. Для того, чтобы ее вычислить, мы используем модифицированную крестовую технику. Введем четырехкомпонентные функции Грина

$$\hat{G} = - \begin{pmatrix} \langle T_\tau \psi_\alpha^+(\mathbf{r}, \tau) \psi_\beta(0, 0) \rangle & \langle T_\tau \psi_\alpha(\mathbf{r}, \tau) \psi_\beta(0, 0) \rangle \\ \langle T_\tau \psi_\alpha^+(\mathbf{r}, \tau) \psi_\beta^+(0, 0) \rangle & \langle T_\tau \psi_\alpha(\mathbf{r}, \tau) \psi_\beta^+(0, 0) \rangle \end{pmatrix} \quad (10.189)$$

( $\alpha$  и  $\beta$  – спиновые индексы). При этом функция Грина в отсутствие примесей равна

$$\hat{G}_0 = - \frac{1}{\omega_n^2 + \xi^2 + \Delta^2} \begin{pmatrix} (i\omega_n + \xi)\delta_{\alpha\beta} & -\Delta_{\alpha\beta} \\ -\Delta_{\alpha\beta}^+ & (i\omega_n - \xi)\delta_{\alpha\beta} \end{pmatrix} , \quad (10.190)$$

а  $\Delta_{\alpha\beta} = i\Delta\sigma_{\alpha\beta}^y$  ( $\sigma_{\alpha\beta}^i$  – спиновые матрицы Паули). Как и в предыдущей задаче, найдем собственно-энергетическую часть из диаграммы на рис. 10.16:

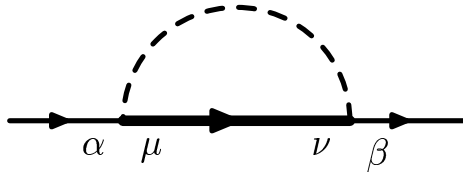


Рис. 10.16

В случае парамагнитных примесей пунктир имеет нетривиальную спиновую структуру. Её можно найти, вычислив коррелятор флуктуаций примесного потенциала:

$$\begin{aligned} \left\langle \sum_a J\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a) \sigma_{\alpha\beta}^i S_i^a \sum_b J\delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_b) \sigma_{\mu\nu}^k S_b^k \right\rangle &= \\ &= n_{mag} J^2 \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \langle S^i S^k \rangle \sigma_{\alpha\beta}^i \sigma_{\mu\nu}^k = \\ &= \frac{S(S+1)}{3} n_{mag} J^2 \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \sigma_{\alpha\beta}^i \sigma_{\mu\nu}^i \end{aligned} \quad (10.191)$$

Стоящее здесь скалярное произведение матриц Паули можно преобразовать, используя тождество Фирца (см. [8], §28):

$$\sigma_{\alpha\beta}^i \sigma_{\mu\nu}^i = 2\delta_{\alpha\nu} \delta_{\beta\mu} - \delta_{\alpha\beta} \delta_{\mu\nu} . \quad (10.192)$$

Таким образом,

$$\hat{\Sigma}_{\alpha\beta}(i\omega_n) = - \frac{n_{mag} J^2 S(S+1)}{3} (2\delta_{\alpha\beta} \delta_{\mu\nu} - \delta_{\alpha\mu} \delta_{\beta\nu}) \int_{-\infty}^{\infty} \nu_0 d\xi \hat{G}_{\mu\nu}(i\omega_n, \xi) . \quad (10.193)$$

Подставим вначале в этот интеграл  $\hat{G}_0$ . Интегрирование производится довольно просто, и мы получим

$$\hat{\Sigma}_{\alpha\beta}(i\omega_n) = -\frac{1}{2\pi\tau_s} \frac{i\omega_n \hat{1} - 2\delta_{\alpha\beta} \Delta_{\mu\nu} \delta_{\mu\nu} \hat{\tau}_x + \Delta_{\alpha\beta} \hat{\tau}_x}{\sqrt{\omega_n^2 + \Delta^2}}, \quad (10.194)$$

где

$$\tau_s = \frac{3}{\pi\nu_0 n_{mag} J^2 S(S+1)} \quad (10.195)$$

— время релаксации спина на примесях. Поскольку  $\Delta_{\mu\nu} \delta_{\mu\nu} = 0$ , то мы получаем таким образом, что  $\hat{G}^{-1} = \hat{G}_0^{-1} - \hat{\Sigma}$  отличается от  $\hat{G}_0$  заменой  $\omega_n$  и  $\Delta$  на

$$\begin{aligned} \tilde{\omega}_n &= \omega_n \left( 1 + \frac{1}{2\tau_s \sqrt{\omega_n^2 + \Delta^2}} \right) \\ \tilde{\Delta} &= \Delta \left( 1 - \frac{1}{2\tau_s \sqrt{\omega_n^2 + \Delta^2}} \right). \end{aligned}$$

Однако заметим, что теперь, в отличие от задачи 61,

$$\frac{\tilde{\omega}}{\tilde{\Delta}} \neq \frac{\omega}{\Delta}. \quad (10.196)$$

Поэтому если мы теперь подставим  $\hat{G}$  в (10.193), то получим другое значение  $\hat{\Sigma}$ . Попробуем решить задачу самосогласованно, подставляя в (10.193)  $\hat{G}$  с неизвестными  $\tilde{\omega}$  и  $\tilde{\Delta}$ . Тогда

$$\hat{\Sigma}_{\alpha\beta}(i\omega_n) = -\frac{1}{2\pi\tau_s} \frac{i\tilde{\omega}_n \hat{1} - \tilde{\Delta}_{\alpha\beta} \hat{\tau}_x}{\sqrt{\tilde{\omega}_n^2 + \tilde{\Delta}^2}} \quad (10.197)$$

Уравнение Дайсона теперь приводит к условию самосогласования, определяющему  $\tilde{\omega}$  и  $\tilde{\Delta}$ :

$$\tilde{\omega} = \omega + \frac{\tilde{\omega}}{2\tau_s \sqrt{\tilde{\omega}^2 + \tilde{\Delta}^2}} \quad (10.198)$$

$$\tilde{\Delta} = \Delta - \frac{\tilde{\Delta}}{2\tau_s \sqrt{\tilde{\omega}^2 + \tilde{\Delta}^2}} \quad (10.199)$$

Теперь запишем уравнение Горькова (10.38), определяющее щель:

$$\begin{aligned} \Delta &= \lambda T \sum_{\omega_n} \int_{-\infty}^{\infty} \nu_0 d\xi F(i\omega_n, \xi) = \lambda T \sum_{\omega_n} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tilde{\Delta} \nu_0 d\xi}{\tilde{\omega}_n^2 + \tilde{\Delta}^2 + \xi^2} = \\ &= \pi \lambda \nu_0 T \sum_{\omega_n} \frac{\tilde{\Delta}}{\sqrt{\tilde{\omega}_n^2 + \tilde{\Delta}^2}}. \end{aligned} \quad (10.200)$$

Из-за того, что  $\tilde{\omega}/\tilde{\Delta} \neq \omega/\Delta$ , это уравнение отличается от уравнения для чистого сверхпроводника.

Выведем отсюда уравнение, определяющее температуру перехода сверхпроводника с парамагнитными примесями  $T_c^*$ . Полагая  $\Delta \rightarrow 0$ , решим уравнения (10.198), (10.199):

$$\tilde{\omega} = \omega + \frac{1}{2\tau_s} \text{sign } \omega ; \quad (10.201)$$

$$\tilde{\Delta} \left( 1 + \frac{1}{2\tau_s |\tilde{\omega}|} \right) = \Delta \quad (10.202)$$

Тогда уравнение на  $T_c^*$  выглядит так:

$$\begin{aligned} 1 &= 2\pi\lambda\nu_0 T_c^* \sum_{\omega_n > 0} \frac{\tilde{\Delta}}{\Delta \tilde{\omega}_n} = 2\pi\lambda\nu_0 T_c^* \sum_{\omega_n > 0} \frac{1}{\tilde{\omega}_n + \frac{1}{2\tau_s}} = \\ &= 2\pi\lambda\nu_0 T_c^* \sum_{\omega_n > 0} \frac{1}{\omega_n + \frac{1}{\tau_s}} \end{aligned} \quad (10.203)$$

Остановимся на физическом смысле этой формулы. При рассеянии на парамагнитной примеси спин электрона может перевернуться, и  $\tau_s$  есть среднее время между двумя переворотами спина, то есть время жизни куперовской пары. Знаменатель в (10.203) описывает развал куперовских пар из-за рассеяния на магнитных примесях и уменьшение эффективного времени взаимодействия.

Если  $\tau_s$  велико по сравнению с  $\hbar/T_c^*$ , то парамагнитные примеси лишь слегка сдвигают  $T_c$ . Но при  $\tau_s \sim \hbar/T_c^*$  сверхпроводимость полностью подавляется. Найдем критическое  $\tau_s^*$ , полагая  $T_c^* = 0$  и заменяя сумму на интеграл:

$$\frac{1}{\lambda\nu_0} = \ln \frac{2\gamma\omega_D}{\pi T_c^*} = \int_0^{\omega_D} \frac{d\omega}{\omega + \frac{1}{\tau_s^*}} = \ln \omega_D \tau_s^* , \quad (10.204)$$

откуда

$$\tau_s^* = \frac{2\gamma\hbar}{\pi T_c} . \quad (10.205)$$

Таким образом, парамагнитные примеси даже в малых концентрациях могут существенно повлиять на свойства сверхпроводника и даже полностью подавить сверхпроводимость. При этом оказывается, что в определенном интервале по концентрации примесей существует режим так называемой бесщелевой сверхпроводимости, в котором сопротивление металла равно нулю, но энергетическая щель отсутствует. Так получается из-за того, что примеси меняют энергию связи электронов в паре по-разному в разных частях образца. Читатель, интересующийся этим эффектом, может обратиться к оригинальной работе<sup>7</sup>.

<sup>7</sup>А.А. Абрикосов, Л.П. Горьков, ЖЭТФ, т. 39, с. 178 (1960)

**Решение 64.** Как и в задаче 61, мы вначале найдем куперовскую примесную лестницу, а затем подставим её в уравнение самосогласования. Вычисление куперовской лестницы во внешнем магнитном поле в общем случае довольно сложно. Однако, если поле медленно меняется на длине свободного пробега, эта задача сильно упрощается. Заметим, что две ступеньки примесной лестницы находятся друг от друга на расстоянии порядка  $l$ . Это позволяет пренебречь изменением поля на одной ступеньке и рассмотреть ступеньку в постоянном поле. Изменение поля мы учтем, переходя к суммированию ступенек, каждая из которых чувствует магнитное поле на своем отрезке траектории.

Поскольку нас интересуют неоднородные решения уравнения самосогласования, мы вначале вычислим примесную лестницу при ненулевом суммарном импульсе  $\mathbf{s}$  в нулевом магнитном поле. Это можно сделать так же, как и в задаче 54. Одна ступенька лестницы вычисляется точно так же:

$$B_c = \int \int \frac{d\Omega}{4\pi} \frac{\nu_0 d\xi}{\left(i\omega - \xi + \frac{i}{2\tau} \text{sign } \omega\right) \left(-i\omega - \xi + \mathbf{s}\mathbf{v} - \frac{i}{2\tau} \text{sign } \omega\right)} = \quad (10.206)$$

$$= \int \frac{d\Omega}{4\pi} \frac{2\pi\nu_0\tau}{1 + 2|\omega|\tau + i\tau\mathbf{s}\mathbf{v}} = \frac{2\pi\nu_0\tau}{1 + 2|\omega|\tau + \tau D\mathbf{s}^2} \quad (10.207)$$

( $D$  — коэффициент диффузии). Суммируя лестницу, получаем

$$C_\omega(\mathbf{s}) = \frac{B_c}{1 - B_c/2\pi\nu_0\tau} = \frac{2\pi\nu_0}{2|\omega| + D\mathbf{s}^2}. \quad (10.208)$$

Теперь попробуем учесть магнитное поле. Пусть сначала его векторный потенциал  $\mathbf{A}(\mathbf{r})$  постоянен. Тогда его учет сведется к сдвигу импульсов  $\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{p} - e\mathbf{A}/c$  в функциях Грина. Поэтому в примесной лестнице  $\mathbf{s}$  заменится на  $\mathbf{s} - 2e\mathbf{A}/c$ . Следовательно,

$$C = \frac{2\pi\nu_0}{2|\omega| + D \left(\mathbf{s} - \frac{2e}{c}\mathbf{A}\right)^2}. \quad (10.209)$$

Удобно записать это выражение в координатном представлении. Будем считать  $C_\omega(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  функцией начальной и конечной точек. Заменяя  $\mathbf{s} \rightarrow -i\nabla_{\mathbf{r}}$ , перепишем выражение для куперона в форме дифференциального уравнения:

$$\left[2|\omega| + D \left(-i\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} - \frac{2e}{c}\mathbf{A}\right)^2\right] C_\omega(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = 2\pi\nu_0\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'). \quad (10.210)$$

Что изменится, если  $\mathbf{A}(\mathbf{r})$  — медленно меняющаяся функция? Если мы намерены учитывать лишь первые два порядка по  $\mathbf{A}$  в знаменателе (10.209), то легко понять, что все возможные усложнения связаны с появлением членов, зависящих от  $\text{div } \mathbf{A}$ , поскольку это единственная вращательно инвариантная комбинация из производных  $\mathbf{A}$ . (Иными словами, если  $\mathbf{A}$  становится функцией  $\mathbf{r}$ , возникает вопрос о порядке операторов  $\mathbf{A}(\mathbf{r})$  и  $\nabla$  в купероне.) Но выбирая калибровку, в которой  $\text{div } \mathbf{A} = 0$ , мы



всегда можем добиться исчезновения подобных поправок. Поэтому для того, чтобы вычислить примесную лестницу, достаточно решить уравнение

$$\left[ 2|\omega| + D \left( -i \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} - \frac{2e}{c} \mathbf{A}(\mathbf{r}) \right)^2 \right] C_\omega(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = 2\pi\nu_0 \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') . \quad (10.211)$$

Это уравнение можно вывести и напрямую. Для этого надо рассмотреть такие поправки к одной «ступеньке»:

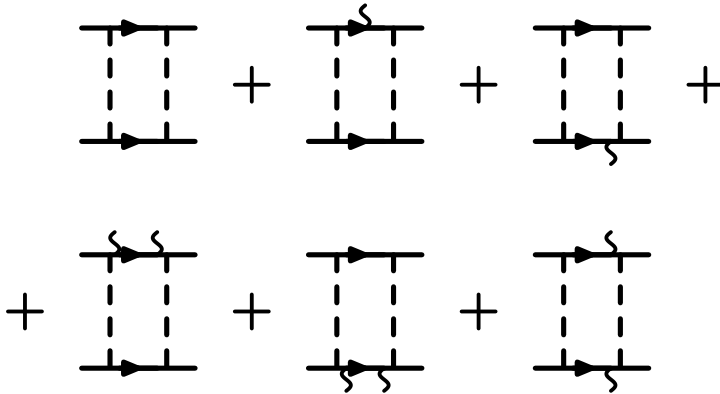


Рис. 10.17

(Волнистые линии на этом рисунке изображают взаимодействие с внешним магнитным полем.) После этого суммирование лестницы дает уравнение (10.211).

Теперь запишем уравнение самосогласования, полагая  $\Delta \rightarrow 0$ . Вблизи  $H_{c2}$  состояние неоднородно, поэтому  $\Delta$  зависит от  $\mathbf{r}$ . Уравнение Горькова имеет вид

$$\Delta(\mathbf{r}) = \lambda \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} F(\omega, \mathbf{r}, \mathbf{r}) . \quad (10.212)$$

Аномальная гриновская функция  $F(\omega, \mathbf{r}, \mathbf{r})$  дается при  $\Delta \rightarrow 0$  единственной диаграммой:

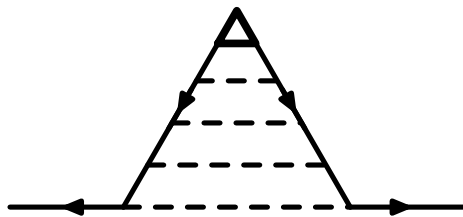


Рис. 10.18

Сравнивая ее с диаграммой для примесной лестницы, имеем

$$F(\omega, \mathbf{r}, \mathbf{r}) = \int d^3 r' \Delta(\mathbf{r}') C_\omega(\mathbf{r}, \mathbf{r}') . \quad (10.213)$$

Поэтому уравнение самосогласования записывается так:

$$\Delta(\mathbf{r}) = \lambda \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \int d^3 r' C_\omega(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \Delta(\mathbf{r}') . \quad (10.214)$$

Чтобы найти его решения, удобно разложить  $\Delta(\mathbf{r})$  по нормированным собственным функциям  $\phi_n(\mathbf{r})$  оператора в левой части (10.211). Эти функции обладают такими свойствами:

$$D \left( -i \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} - \frac{2e}{c} \mathbf{A}(\mathbf{r}) \right)^2 \phi_n(\mathbf{r}) = \mu_n \phi_n(\mathbf{r}) \quad (10.215)$$

( $\mu_n$  —  $n$ -е собственное значение);

$$\int d^3r \phi_n(\mathbf{r}) \phi_m^*(\mathbf{r}) = \delta_{nm} . \quad (10.216)$$

Запишем  $\Delta(\mathbf{r})$  в виде

$$\Delta(\mathbf{r}) = \sum_n \Delta_n \phi_n(\mathbf{r}) . \quad (10.217)$$

Куперон можно выразить через  $\phi_n(\mathbf{r})$ :

$$C_\omega(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = 2\pi\nu_0 \sum_n \frac{\phi_n(\mathbf{r}) \phi_n^*(\mathbf{r}')}{2|\omega| + \mu_n} . \quad (10.218)$$

Это соотношение легко проверить, заметив, что эта функция в силу (10.215) удовлетворяет уравнению при  $\mathbf{r} \neq \mathbf{r}'$ , а при  $\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}'$  левая часть уравнения совпадает с  $\delta$ -функцией, поскольку интеграл от нее по  $\mathbf{r}$  равен 1 в силу (10.216).

Тогда уравнение (10.214) переписывается так:

$$\Delta_n = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \frac{2\pi\nu_0 \lambda \Delta_n}{2|\omega| + \mu_n} . \quad (10.219)$$

Оно имеет нетривиальное решение при

$$\frac{1}{\nu_0 \lambda} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2|\omega| + \mu_n} . \quad (10.220)$$

Интеграл следует обрезать при  $\omega = \omega_D$ , как и ранее. В результате

$$\frac{1}{\nu_0 \lambda} = \ln \frac{2\omega_D}{\mu_n} . \quad (10.221)$$

Найдем собственные значения  $\mu_n$ . Для этого нужно решить уравнение (10.215). Выберем калибровку  $A_y = -Hx$ . Тогда можно заметить, что уравнение (10.215) совпадает с уравнением Шредингера для частицы с массой  $m = (2D)^{-1}$ , зарядом  $q = 2e$  и энергией  $\mu_n$  в магнитном поле  $H$ . Из квантовой механики известно, что в этом случае

$$E_n = \omega_H \left( n + \frac{1}{2} \right) + \frac{\hbar^2 k_z^2}{2m} ; \quad \omega_H = \frac{qH}{mc} . \quad (10.222)$$

Это означает, что

$$\mu_n = \frac{4DeH}{c} \left( n + \frac{1}{2} \right) + Dk_z^2 . \quad (10.223)$$

Поскольку собственные значения растут с ростом  $H$ , критическое магнитное поле определяется наименьшим собственным значением. Оно равно  $\mu_0 = 2DeH/c$ . Таким образом,

$$\frac{1}{\nu_0 \lambda} = \ln \frac{\omega_D c}{DeH_{c2}} . \quad (10.224)$$

Выражая  $\lambda$  через  $T_c$  с помощью (10.73), получим окончательно

$$H_{c2} = \frac{\pi T_c c}{2\gamma De} . \quad (10.225)$$

Заметим, что собственные функции, отвечающие минимальному собственному значению, локализованы:

$$\phi_{n,k_y}(x, y, z) = \frac{1}{\pi^{1/4} l_H^{1/2}} e^{ik_y y} e^{-(x-x_0)^2/2l_H^2} , \quad (10.226)$$

где

$$l_H = \sqrt{\frac{\hbar c}{qH}} ; \quad x_0 = \frac{ck_y}{qH} . \quad (10.227)$$

Таким образом, сверхпроводимость возникает в «нитях» толщины  $l_H$ . При понижении поля концентрация нитей быстро возрастает, пока они не заполнят собой весь объем.

В каких случаях переход от сверхпроводимости к нормальному металлу в магнитном поле устроен так, как описано в решении? Чтобы ответить на этот вопрос, надо сравнить магнитные поля, соответствующие различным сценариям разрушения сверхпроводимости. Мы вычислили магнитное поле, соответствующее разрушению сверхпроводимости неоднородным образом. Оценим поле, соответствующее разрушению сверхпроводимости сразу во всем объеме. Для этого надо сравнить энергию магнитного поля в объеме сверхпроводника с энергией конденсации. Энергия магнитного поля на единицу объема есть

$$E_{mag} = \frac{H^2}{8\pi} . \quad (10.228)$$

Энергию конденсации легко оценить, считая, что частицы в интервале энергий  $\Delta$  за счет конденсации понижают свою энергию на  $\Delta$ . Число таких частиц в единице объема есть  $\nu_0 \Delta$ , поэтому энергия конденсации равна

$$E_c \sim \nu_0 \Delta^2 \sim \nu_0 T_c^2 . \quad (10.229)$$

Таким образом, магнитное поле, соответствующее однородному разрушению сверхпроводимости (*термодинамическое критическое поле*), есть

$$H_c \sim T_c \sqrt{\nu_0} . \quad (10.230)$$

Сравним его с  $H_{c2}$ :

$$\frac{H_c}{H_{c2}} \sim \sqrt{De\nu_0 c} \sim \frac{v_F l \sqrt{m p_F / \hbar^3}}{c} \sim l \sqrt{\frac{e^2 p_F^3}{m c^3 \hbar^3}} \sim \frac{l}{\delta_\Lambda} , \quad (10.231)$$

где  $\delta_\Lambda$  — лондоновская глубина проникновения в чистом сверхпроводнике, определенная в (10.162). Таким образом,  $H_{c2} \gg H_c$  при  $l \ll \delta_\Lambda$ . В этом случае  $H_{c2}$  действительно определяет границу сверхпроводящей фазы. Если же  $H_{c2} \ll H_c$  (то есть  $\delta_\Lambda \ll l$ ), то переход происходит однородно по всему объему при поле  $H_c$ . В этом случае при  $H = H_{c2} < H_c$  ничего особенного не происходит.

## Глава 11.

# Измерение функций Грина

Одночастичные и двухчастичные функции Грина представляют собой корреляционные функции операторов  $\hat{\psi}$  и  $\hat{\psi}^+$  (см. гл. 4). Физические характеристики, такие, как теплоемкость, проводимость, и др., в принципе всегда можно выразить через гриновские функции. Однако эта связь довольно часто оказывается весьма сложной и «односторонней», поскольку она вообще говоря не позволяет восстановить функции Грина по экспериментальным данным. (Например, термодинамические величины даются интегралами от выражений, содержащих функции Грина, — см. задачи 35, 36, 49, 57.) Поэтому представляет особый интерес обсудить методы, позволяющие напрямую «измерить» функции Грина и получить весьма ценную с точки зрения теории информацию о свойствах систем взаимодействующих частиц.

### 11.1. Туннелирование

Рассмотрим сначала вопрос об измерении одночастичной функции Грина

$$G(x, x') = -i \langle T \psi(x) \psi^+(x') \rangle . \quad (11.1)$$

Для определенности будем говорить о гриновской функции электрона в металле. На первый взгляд, эксперимент, в котором корреляционная функция  $G(x, x')$  определялась бы напрямую, кажется невозможным. Ведь пропорциональное  $\hat{\psi}^+$  или  $\hat{\psi}$  поле к системе приложить невозможно (для этого нужно было бы создать электрон «из ничего»), и поэтому корреляционная функция  $G(x, x')$  не может быть связана ни с какой функцией отклика. Можно, однако, рассмотреть ситуацию, когда происходит перенос электронов из одного металла (который мы будем называть пробником) в другой (исследуемый образец). Если перенос заряда происходит мгновенно, то его можно описывать как уничтожение электрона в пробнике и рождение его в образце. Вероятность этого процесса оказывается связанной с функциями Грина исследуемого образца и пробника. Если свойства пробника известны и достаточно просты, то можно считать, что в таком эксперименте «измеряется» функция Грина электрона в образце.

Для того, чтобы реализовать эту идею, нужно создать такую связь между пробником и образцом, чтобы переносимый электрон в каждый момент времени был или на пробнике, или на образце. (Иначе говоря, заряды пробника и образца должны быть

хорошими квантовыми числами.) Это означает, что связь пробника с образцом должна быть слабой, и поэтому обычный омический контакт между двумя металлами не годится. Слабую связь можно получить, используя туннельный эффект. Рассмотрим так называемый *туннельный контакт* — два металла, разделенных потенциальным барьером, так что область между металлами оказывается классически запрещенной (см. рис. 11.1). На практике в качестве потенциального барьера обычно используется тонкий слой диэлектрика, например, окисла, образующегося на поверхности металла. На рис. 11.2 показан потенциал, действующий на электроны и заполнение энергетических уровней по обе стороны контакта.

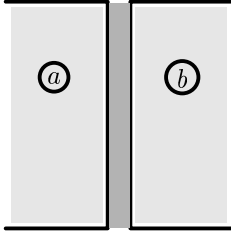


Рис. 11.1

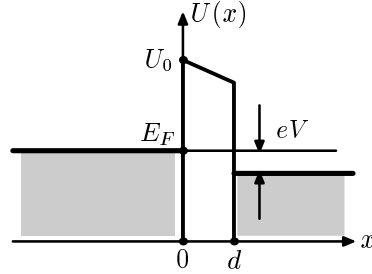


Рис. 11.2

Электроны могут туннелировать из одного металла в другой, причем вероятность туннелирования в единицу времени, согласно формуле ВКБ, является экспоненциальной функцией

$$W \sim e^{-A}, \quad A = \frac{\sqrt{2mU_0}d}{\hbar}, \quad (11.2)$$

где  $U_0$  — высота потенциального барьера, а  $d$  — его толщина. Если вероятность туннелирования  $W$  мала, то такой туннельный контакт обеспечивает слабую связь между двумя металлами.

В равновесии вероятности туннелирования справа налево и слева направо должны быть равны, так что ток через контакт отсутствует. Однако, если к туннельному контакту приложена разность потенциалов, то система выходит из равновесия. В результате через контакт течет ток, измеряя который можно определить вероятность туннелирования и, как следствие, функцию Грина.

Перейдем к количественному описанию туннелирования. Поскольку вероятность туннелирования через высокий барьер экспоненциально мала, то можно вначале рассмотреть задачу, пренебрегая туннельными эффектами, а затем учесть их по теории возмущений. Пусть  $\psi_{a(b)}(\mathbf{r})$  — оператор рождения электрона соответственно на пробнике или на образце в отсутствие туннелирования. Рассматривая туннелирование как мгновенный перенос заряда, можно записать гамильтониан для туннелирования следующим образом:

$$\widehat{H}_T = \int_{x < 0} d^3 \mathbf{r} \int_{x' > 0} d^3 \mathbf{r}' T(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \psi_a^+(\mathbf{r}') \psi_b(\mathbf{r}) + \text{h.c.} \quad (11.3)$$

Интегрирование по  $\mathbf{r}$  в этой формуле производится по левому берегу, а интегрирование по  $\mathbf{r}'$  — по правому. Туннельный гамильтониан вида (11.3) можно вывести<sup>1</sup> в пределе бесконечно тонкого и очень высокого барьера. Однако выражение (11.3) обычно используется и в более общем случае как наиболее простая формула, правильно

отражающая физику в пределе малой амплитуды туннелирования  $T(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ .

Перейдем в представление собственных состояний  $\psi_{a,\mathbf{p}}$ ,  $\psi_{b,\mathbf{p}'}$ :

$$\psi_a(\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{p}} \psi_{a,\mathbf{p}}(\mathbf{r}) \hat{a}_{\mathbf{p}}, \quad \psi_b(\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{p}'} \psi_{b,\mathbf{p}'}(\mathbf{r}) \hat{b}_{\mathbf{p}'}. \quad (11.5)$$

Собственные состояния в (11.5) вдали от барьера представляют собой линейные комбинации двух плоских волн, падающей и отраженной, удовлетворяющие граничным условиям на поверхности барьера. В представлении (11.5) туннельный гамильтониан принимает вид

$$H_T = \sum_{\mathbf{p}, \mathbf{p}'} T_{\mathbf{p}\mathbf{p}'} \hat{a}_{\mathbf{p}}^+ \hat{b}_{\mathbf{p}'} + \text{h.c.} \quad (11.6)$$

Следует иметь в виду, что нередко отражением от барьера пренебрегают и заменяют истинные собственные состояния в (11.5) на плоские волны. Хотя такое приближение на первый взгляд кажется весьма грубым, оно оказывается вполне достаточным для описания эффектов, в которых существенны только состояния с энергиями вблизи  $E_F$ . Более аккуратное рассмотрение приводит к более сложным выражениям, с которыми труднее работать. Согласие же с экспериментом, и без того обычно неплохое, при этом практически не улучшается.

Зависимость амплитуды туннелирования  $T_{\mathbf{p}\mathbf{p}'}$  от импульсов  $\mathbf{p}$ ,  $\mathbf{p}'$  в общем случае может оказаться довольно сложной. Обычно рассматривают две основные модели, соответствующие «шероховатому» и «гладкому» барьерам. В первом случае, поскольку вероятность туннелирования (11.2) экспоненциально зависит от толщины барьера, основной вклад в туннельный ток вносится тем местом, где барьер наиболее тонок и где поэтому вероятность туннелирования наибольшая. Обычно можно считать, что туннелирование происходит в какой-то определенной точке барьера. Амплитуда туннелирования  $T_{\mathbf{p}\mathbf{p}'}$  в этом случае есть константа, не зависящая от  $\mathbf{p}$  и  $\mathbf{p}'$ . Другая ситуация возникает в случае достаточно гладкого барьера, имеющего постоянную толщину. При туннелировании через такой барьер должна сохраняться компонента импульса электрона вдоль барьера  $\mathbf{p}_{\parallel}$ . Поэтому в этом случае амплитуда туннелирования имеет вид  $T_{\mathbf{p}\mathbf{p}'} = \tilde{T}_{\mathbf{p}_{\perp}\mathbf{p}'_{\perp}} \delta(\mathbf{p}_{\parallel} - \mathbf{p}'_{\parallel})$ . В этой главе мы будем рассматривать более часто встречающийся случай шероховатого барьера и соответственно считать амплитуду туннелирования константой:  $T_{\mathbf{p}\mathbf{p}'} = T_0$ .

Теперь найдем оператор туннельного тока. Полный гамильтониан системы есть

$$\hat{H} = \hat{H}_1(\hat{a}, \hat{a}^+) + \hat{H}_2(\hat{b}, \hat{b}^+) + \hat{H}_T, \quad (11.7)$$

где  $\hat{H}_{1(2)}$  — гамильтонианы соответственно пробника и образца. При этом  $\hat{H}_1$  и  $\hat{H}_2$  сохраняют заряд каждого из берегов контакта, а  $\hat{H}_T$  приводит к переносу заряда.

<sup>1</sup>В случае бесконечно высокого и тонкого барьера с резкими краями, находящегося в плоскости  $x = 0$ , граничные условия в отсутствие туннелирования имеют вид:  $\psi_a(x = +0) = 0$ ,  $\psi_b(x = -0) = 0$ . При этом туннельный гамильтониан есть

$$\hat{H}_T = - \int_{x=0} dydz T(y, z) \left. \frac{\partial}{\partial x} \psi_a^+(\mathbf{r}) \right|_{x=+0} \left. \frac{\partial}{\partial x} \psi_b(\mathbf{r}) \right|_{x=-0} + \text{h.c.} \quad (11.4)$$

где  $T(y, z)$  — прозрачность барьера, являющаяся в общем случае функцией координат.

Запишем скорость изменения заряда пробника, используя уравнения эволюции в представлении Гейзенберга:

$$\dot{\hat{Q}}_a = i[\hat{H}, \hat{Q}_a], \quad \hat{Q}_a = e \sum_{\mathbf{p}} \hat{a}_{\mathbf{p}}^+ \hat{a}_{\mathbf{p}}, \quad (11.8)$$

где вклад в коммутатор дает только  $\hat{H}_T$ . Определяя оператор тока  $\hat{I}$  как оператор скорости изменения заряда и вычисляя коммутатор в (11.8), получаем

$$\hat{I} = \dot{\hat{Q}}_a = ie \sum_{\mathbf{p}, \mathbf{p}'} T_{\mathbf{p}\mathbf{p}'} \hat{a}_{\mathbf{p}}^+ \hat{b}_{\mathbf{p}'} + \text{h.c.} \quad (11.9)$$

Чтобы найти средний по времени туннельный ток, нужно вычислить среднее от оператора (11.9) по состоянию, в котором химпотенциалы берегов различаются на  $eV$ , где  $V$  — приложенное к контакту напряжение. Это состояние — неравновесное, поэтому усреднение по нему нельзя выполнять с помощью обычной равновесной диаграммной техники. Можно однако воспользоваться полезным стандартным приемом, позволяющим перейти к эквивалентной задаче, в которой усреднение выполняется по равновесному состоянию. Для этого рассмотрим калибровочное преобразование

$$\hat{a}_{\mathbf{p}} \rightarrow \hat{a}_{\mathbf{p}} e^{ieVt}, \quad \hat{b}_{\mathbf{p}'} \rightarrow \hat{b}_{\mathbf{p}'}, \quad (11.10)$$

сдвигающее энергии всех состояний справа на  $-eV$  и выравнивающее таким образом химпотенциалы. После этого преобразования туннельный гамильтониан принимает вид:

$$H_T = \hat{X} e^{ieVt} + \hat{X}^+ e^{-ieVt}, \quad (11.11)$$

где

$$X = \sum_{\mathbf{p}, \mathbf{p}'} T_{\mathbf{p}\mathbf{p}'} \hat{a}_{\mathbf{p}}^+ \hat{b}_{\mathbf{p}'}. \quad (11.12)$$

Туннельный ток в этом представлении равен

$$\hat{I} = i\hat{X} e^{ieVt} - i\hat{X}^+ e^{-ieVt}. \quad (11.13)$$

Таким образом, после калибровочного преобразования (11.10) мы получили зависящее от времени возмущение, действующее на равновесное состояние. Это означает, что с формальной точки зрения задача о вычислении туннельного тока сводится к вычислению отклика зависящего от времени оператора туннельного тока (11.13) на «внешнее поле», пропорциональное туннельному оператору (11.12), причем разность потенциалов  $eV$  играет роль частоты «внешнего поля». Соответствующая диаграмма приведена на рис. 11.3

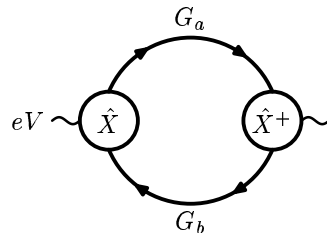




Рис. 11.3

Кружком обозначен оператор туннелирования  $\widehat{X}$ . Вычисление функции отклика (см. задачу 65) приводит к такому выражению для туннельного тока:

$$I(V) = 4e \sum_{\mathbf{p}, \mathbf{p}'} |T_{\mathbf{p}\mathbf{p}'}|^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\varepsilon}{\pi} \operatorname{Im} G_a^R(\mathbf{p}, \varepsilon + eV) \operatorname{Im} G_b^R(\mathbf{p}', \varepsilon) [n_F(\varepsilon) - n_F(\varepsilon + eV)] , \quad (11.14)$$

где  $n_F(\varepsilon)$  — фермиевская функция распределения, а  $G_{a(b)}^R(\mathbf{p}, \varepsilon)$  — фурье-образ запаздывающей функции Грина

$$G_a^R(\mathbf{p}, \varepsilon) = -i \int_0^{\infty} \langle [a_{\mathbf{p}}^+(t), a_{\mathbf{p}}(0)] \rangle e^{i\varepsilon t} dt . \quad (11.15)$$

Для модели шероховатого барьера  $T_{\mathbf{p}, \mathbf{p}'} = T_0$ , и результат (11.14) принимает вид

$$I(V) = 4\pi e |T_0|^2 \int_{-\infty}^{\infty} d\varepsilon \nu_a(\varepsilon + eV) \nu_b(\varepsilon) (n_F(\varepsilon) - n_F(\varepsilon + eV)) , \quad (11.16)$$

где

$$\nu_{a(b)}(\varepsilon) = -\frac{1}{\pi} \sum_{\mathbf{p}} \operatorname{Im} G_{a(b)}^R(\mathbf{p}, \varepsilon) \quad (11.17)$$

— так называемая *туннельная (или одночастичная) плотность состояний*. Происхождение этого названия становится яснее, если рассмотреть туннелирование между двумя металлами, пренебрегая эффектами взаимодействия. Тогда скорость перехода из пробника в образец можно найти по золотому правилу Ферми:

$$w_{a \rightarrow b} = \frac{2\pi}{\hbar} |T_0|^2 \nu_b(\varepsilon), \quad (11.18)$$

где  $\nu_b(\varepsilon)$  — плотность состояний в образце. Суммируя по всем заполненным состояниям в пробнике, получаем ток, текущий из пробника в образец:

$$I_{a \rightarrow b} = \frac{2 \cdot 2\pi e}{\hbar} |T_0|^2 \int_{-\infty}^{\infty} d\varepsilon \nu_a(\varepsilon + eV) \nu_b(\varepsilon) n_F(\varepsilon) (1 - n_F(\varepsilon + eV)) \quad (11.19)$$

(коэффициент 2 учитывает спиновое вырождение, а множитель  $1 - n_F(\varepsilon + eV)$  — принцип Паули). Аналогично, ток из образца в пробник равен

$$I_{b \rightarrow a} = \frac{2 \cdot 2\pi e}{\hbar} |T_0|^2 \int_{-\infty}^{\infty} d\varepsilon \nu_a(\varepsilon + eV) \nu_b(\varepsilon) n_F(\varepsilon + eV) (1 - n_F(\varepsilon)) . \quad (11.20)$$

Вычисляя суммарный ток  $I = I_{a \rightarrow b} - I_{b \rightarrow a}$ , получаем соотношение (11.16). Итак, выражение туннельного тока через плотность состояний в отсутствие взаимодействия

оказывается точно таким же, как и во взаимодействующей системе, если плотность состояний  $\nu(\varepsilon)$  определена с помощью соотношения (11.17).

Заметим, что туннельная плотность состояний (11.17), вообще говоря, отличается от *термодинамической плотности состояний*

$$\tilde{\nu}(\varepsilon) = \left. \frac{\partial n}{\partial \mu} \right|_{\mu=\varepsilon}, \quad (11.21)$$

которая определяет сжимаемость системы в равновесии. В отличие от туннельной плотности состояний, термодинамическая плотность состояний учитывает равным образом все состояния в системе, независимо от степени их одно- или многочастичности. Только в невзаимодействующей системе туннельная и термодинамическая плотности состояний совпадают, поскольку в этом случае многочастичные состояния есть простые комбинации одночастичных (слэтеровские детерминанты). Во взаимодействующей же системе это не так, и поэтому  $\nu(\varepsilon) \neq \tilde{\nu}(\varepsilon)$ .

По одночастичной плотности состояний (11.17), найденной из туннельных измерений, можно в принципе восстановить функцию Грина, используя соотношения типа Крамерса–Кронига. Туннельные измерения, таким образом, предоставляют важную информацию о системе взаимодействующих частиц, которую трудно получить другими методами. Особенность процесса туннелирования, как уже отмечалось, заключается в том, что при туннелировании из системы вырывается электрон, в то время как при измерении таких величин, как проводимость, теплоемкость или сжимаемость, происходит лишь перераспределение квазичастиц внутри системы. Поскольку квазичастицы в основном ведут себя подобно невзаимодействующим частицам, такие методы оказываются относительно менее чувствительны к эффектам взаимодействия. При туннелировании же отличие квазичастиц от реальных частиц оказывается весьма существенным. Поэтому иногда говорят, что туннельное измерение показывает в какой мере квазичастицы во взаимодействующей системе отличаются от «голых» электронов.

Одночастичную функцию Грина можно определить не только из туннельных экспериментов, но и из некоторых других, например оптических. При поглощении оптического фотона в кристалле происходит практически мгновенный переход электрона с одной ветви электронного спектра на другую. Этот процесс можно описать как рождение электрона в одной энергетической зоне и одновременное уничтожение в другой. Так, скажем, при оптическом переходе в собственном полупроводнике электрон поглощает энергию большую энергии запрещенной зоны и при этом переходит из (заполненной) валентной зоны в (пустую) зону проводимости. При этом валентная зона играет роль пробника, а зона проводимости — роль исследуемого образца. Вероятность поглощения выражается через одночастичные функции Грина в каждой из двух зон точно таким же образом, как это было проделано выше для вероятности туннелирования. При этом амплитуда туннелирования  $T_{\mathbf{p},\mathbf{p}'}$  заменяется на амплитуду перехода в присутствии внешнего электромагнитного поля, а энергия  $eV$  — на энергию квантов поля  $\hbar\omega$ . Единственное отличие —  $\delta$ -функциональная зависимость амплитуды  $T_{\mathbf{p},\mathbf{p}'}$  от переданного импульса  $\mathbf{p}' - \mathbf{p}$ , отражающая сохранение импульса при поглощении фотона. В общем случае  $T_{\mathbf{p},\mathbf{p}'} = \tilde{T}_{\mathbf{p},\mathbf{p}'} \delta(\mathbf{p}' - \mathbf{p} - \mathbf{k})$ , где  $\mathbf{k}$  — импульс фотона, а  $\tilde{T}_{\mathbf{p},\mathbf{p}'}$  — матричный элемент дипольного момента между начальным и конечным состояниями.

Исследование спектра поглощения, т. е. зависимости интенсивности поглощения от частоты фотонов, позволяет определить функцию Грина электрона в зоне проводимости и дает полезную информацию о динамике электрона.

Отметим в заключение, что факторизация вероятности туннелирования в произведение туннельных плотностей состояний образца и пробника имеет место далеко не всегда. Изложенная теория туннелирования, как нетрудно видеть, существенным образом опирается на предположение о независимости динамики в исследуемом образце и в пробнике. В случае же когда в системе имеется взаимодействие с радиусом превышающим толщину барьера, это предположение, вообще говоря, несправедливо. Наиболее опасным в этом смысле как правило является кулоновское взаимодействие, приводящее к притяжению протуннелировавшего заряда и оставшейся на другом берегу дырки. В результате этого динамика электрона и дырки становится скоррелированной, что меняет вероятность туннелирования и усложняет интерпретацию результатов. Точно такие же оговорки, причем еще даже в большей степени, относятся к оптическому поглощению. В этом случае взаимодействие может привести к образованию экситона — связанного водородоподобного состояния поглотившего фотон электрона и дырки в исходной зоне. При этом спектр поглощения оказывается определенной комбинацией вкладов свободных электронов и дырок, а также их связанных состояний. Эффекты подобного рода имеют место не только в полупроводниках, но и в металлах. Например, экситонные корреляции в конечном состоянии оказываются существенными при анализе спектра рентгеновского поглощения в металле (см. задачу 76).

## 11.2. Неупругое рассеяние

Двухчастичная функция Грина в общем случае зависит от четырех аргументов:

$$K(x_1, x_2, x_3, x_4) = \langle T \psi(x_1) \psi^+(x_3) \psi(x_2) \psi^+(x_4) \rangle . \quad (11.22)$$

Измерить такую функцию было бы непросто, однако это обычно и не требуется. Достаточно интересную информацию можно извлечь из функции (11.22) в случае, когда её аргументы попарно совпадают,  $x_1 = x_3$ ,  $x_2 = x_4$ . Эта функция представляет собой коррелятор плотности

$$\mathcal{K}(x_1, x_2) = \langle T \hat{\rho}(x_1) \hat{\rho}(x_2) \rangle , \quad \hat{\rho}(x) = \psi^+(x) \psi(x) . \quad (11.23)$$

Непосредственно измеряемой величиной является связанная с (11.23) запаздывающая корреляционная функция

$$\mathcal{K}^R(x_1, x_2) = \begin{cases} i \langle [\hat{\rho}(\mathbf{r}_1, t_1), \hat{\rho}(\mathbf{r}_2, t_2)] \rangle , & t_1 > t_2 \\ 0 & t_1 < t_2 \end{cases} \quad (11.24)$$

Функцию (11.24) можно измерить, исследуя рассеяние на изучаемой системе пучка каких-либо пробных частиц (обычно нейтронов или рентгеновских лучей). В этом разделе мы изложим основные факты, относящиеся к теории рассеяния частиц в конденсированных средах, а в задачах 69, 70 и 71 приведем соответствующие примеры.

Имеется два основных вида процессов рассеяния, представляющих интерес: *упругое* и *неупругое* рассеяние. Упругое рассеяние широко используется для изучения кристаллической структуры твердых тел, и поэтому этот вид рассеяния весьма важен с прикладной точки зрения. Неупругое рассеяние обычно используется для исследования элементарных возбуждений в кристаллах, жидкостях и других системах, и поэтому нас будет интересовать именно этот вид рассеяния. Вероятность неупругого рассеяния пробной частицы на атомах какой-либо среды с передачей среде энергии  $\omega = E - E'$  и импульса  $\mathbf{q} = \mathbf{k} - \mathbf{k}'$  оказывается пропорциональной мнимой части фурье-образа функции (11.24),

$$\mathcal{K}^R(\omega, \mathbf{q}) = \int \mathcal{K}^R(x_1, x_2) e^{i\omega t_{12} - i\mathbf{q}\mathbf{r}_{12}} dt_{12} d^3\mathbf{r}_{12}, \quad (11.25)$$

где  $t_{12} = t_1 - t_2$ ,  $\mathbf{r}_{12} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ .

Вид частиц, используемых в эксперименте, а также выбор их энергии  $E$  определяется тем, в какой области  $\omega$  и  $\mathbf{q}$  функция (11.25) представляет наибольший интерес. При этом следует иметь в виду, что энергии  $E$  и  $E'$  частиц до и после рассеяния связаны с их импульсами  $\mathbf{k}$  и  $\mathbf{k}'$  дисперсионным соотношением. (Например для нейтронов  $E = \mathbf{k}^2/2m_n$ ,  $E' = \mathbf{k}'^2/2m_n$ , где  $m_n$  — масса нейтрона, а для рентгеновских лучей  $E = c|\mathbf{k}|$ ,  $E' = c|\mathbf{k}'|$ , где  $c$  — скорость света.) Поэтому, вообще говоря, при фиксированной энергии частиц  $E$  можно исследовать только определенную область  $\omega$  и  $\mathbf{q}$ .

Теоретическое описание рассеяния частиц разного вида оказывается практически одинаковым. Ниже мы будем для определенности говорить о рассеянии нейтронов. Нейтроны удобно использовать в качестве пробных частиц при исследовании динамики атомов или ядер, поскольку они взаимодействуют с ядрами контактно. Рассеяние нейтронов с не слишком большой энергией на ядрах происходит преимущественно в  $s$ -канале, вследствие чего реальный довольно сложный потенциал взаимодействия нейтрона с ядром можно заменить на так называемый «псевдопотенциал»

$$V(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \frac{2\pi\hbar^2 a}{\mu} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \quad \mu = \frac{m_n m}{m + m_n}, \quad (11.26)$$

где  $a$  — длина рассеяния нейтрона на ядре,  $\mu$  — приведенная масса,  $m$  и  $m_n$  — массы ядра и нейтрона соответственно. Коэффициент в псевдопотенциале (11.26) подобран так, что сечение рассеяния нейтрона на одном ядре равно  $4\pi a^2$ , как и должно быть при полностью изотропном  $s$ -рассеянии.

Взаимодействие нейтрона с атомами какой-либо среды, скажем жидкости, можно выразить через оператор плотности частиц среды  $\hat{\rho}(\mathbf{r}, t)$ . Контактное взаимодействие (11.26) означает, что оператор взаимодействия нейтрона с системой есть

$$\widehat{\mathcal{H}}_{\text{int}} = \frac{2\pi a \hbar^2}{\mu} \hat{\rho}(\widehat{\mathbf{R}}, t), \quad (11.27)$$

где  $\widehat{\mathbf{R}}$  — координата нейтрона<sup>2</sup>. Можно показать (см. задачу 69), что сечение неупругого рассеяния нейтронов с передачей среде энергии  $\omega$  и импульса  $\mathbf{q}$  выражается через мнимую часть коррелятора плотности (11.25) следующим образом:

$$\frac{d\sigma(\omega, \mathbf{q})}{d\omega d\Omega} = \text{const} \frac{\text{Im} \mathcal{K}^R(\omega, \mathbf{q})}{1 - e^{-\beta\omega}}, \quad (11.28)$$

<sup>2</sup>Мы рассматриваем среду, на которой происходит рассеяние, в гейзенберговском представлении, а нейтрон — в шредингеровском. Такое смешанное представление удобно тем, что в нем нейтрон рассеивается на зависящем от времени потенциале, создаваемом флуктуациями плотности системы.

где  $d\sigma'$  — элемент телесного угла рассеяния. Величина

$$S(\omega, \mathbf{q}) = 2 \operatorname{Im} \mathcal{K}^R(\omega, \mathbf{q}) \quad (11.29)$$

называется *структурным фактором* неупругого рассеяния.

Наибольший интерес обычно представляют полюса двухчастичной функции Грина, поскольку они определяют спектр коллективных возбуждений системы  $\omega = \omega_0(\mathbf{q}) - i\gamma(\mathbf{q})$ . При малой величине затухания  $\gamma(\mathbf{q}) \ll \omega_0(\mathbf{q})$ , полюсу двухчастичной функции Грина соответствует узкий пик в структурном факторе  $S(\omega, \mathbf{q})$  при  $\omega \approx \omega_0(\mathbf{q})$ , имеющий ширину порядка  $\gamma(\mathbf{q})$ . Таким образом, положения пиков в  $S(\omega, \mathbf{q})$  «прорисовывают» ветви спектра коллективных возбуждений жидкости. Иллюстрирующие это обстоятельство примеры будут рассмотрены в задачах 70 б) и 71.

При этом весьма существенно то, что максимальные значения импульсов  $\mathbf{q}$ , для которых структурный фактор дает информацию о коллективных возбуждениях, могут достигать обратного расстояния между частицами. (При малых импульсах спектр можно также определить, изучая макроскопические свойства.) Например, гипотеза о существовании ротонов в сверхтекучем гелии была проверена именно с помощью измерений структурного фактора.

Рассмотрим пример реальных данных по неупругому рассеянию нейтронов. На рис. 11.4 показаны линии уровня структурного фактора жидкого  ${}^3\text{He}$ . Интересно сравнить эти данные со структурным фактором идеального ферми-газа (см. задачу 70) с импульсом Ферми  $p_0 = 0.786 \cdot 10^{-8} \text{ см}^{-1}$ , что соответствует плотности  ${}^3\text{He}$  при  $P = 1 \text{ атм}$ , и массой равной атомной массе  ${}^3\text{He}$ . Линии уровня структурного фактора идеального ферми-газа показаны на рис. 11.5. Для удобства сравнения мы перенесли на рис. 11.4 границу области  $S(\omega, \mathbf{q}) > 0$ , «квазичастичный гребень»  $\omega = v_F k - k^2/2m$ , а также параболу  $\omega = k^2/2m$  — линию максимумов  $S(\omega, \mathbf{q})$  при фиксированном  $|\mathbf{q}|$ .

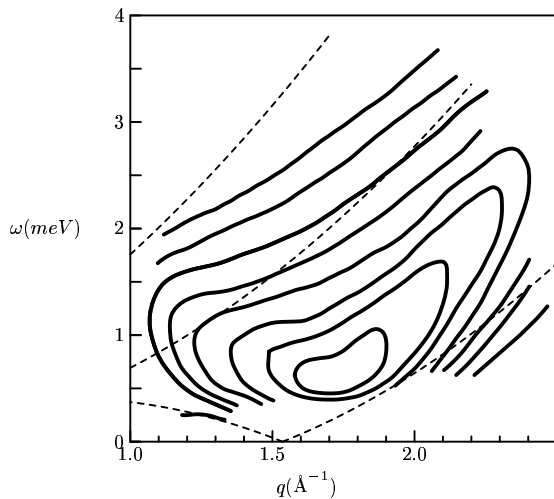


Рис. 11.4

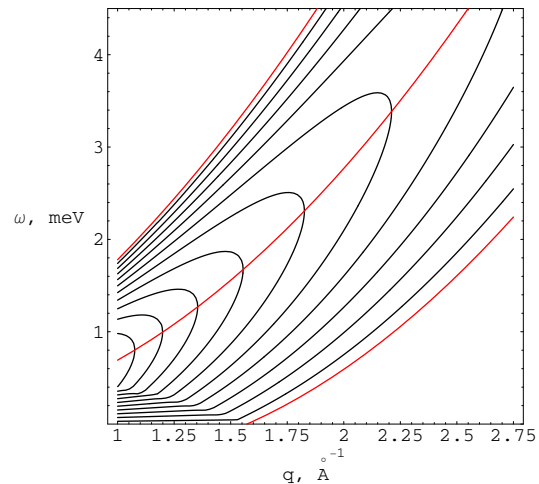


Рис. 11.5

Видно, что качественно элементарные возбуждения в  ${}^3\text{He}$  такие же, как в ферми-газе: граница области  $S(\omega, \mathbf{q}) > 0$  выглядит похоже и имеет правильный масштаб. Однако центральный максимум лежит на большом расстоянии от параболы  $\omega = k^2/2m$ .

Причина этого расхождения состоит в отличии эффективной массы в жидком  ${}^3\text{He}$  от массы атома в пустоте:  $m_* \approx 3m$  (это значение получено из данных по теплоемкости при  $T \ll E_F$ , т. е. из низкоэнергетических измерений). Если учесть трехкратное различие масс, то положение центрального максимума оказывается примерно на месте. В то же время было бы неправильно просто заменить  $m$  на  $m_*$  в формуле для  $S(\omega, \mathbf{q})$  идеального ферми-газа, поскольку при этом верхняя граница области  $S(\omega, \mathbf{q}) > 0$ , дающаяся выражением  $\omega = k^2/2m + kp_0/m$ , оказалась бы значительно ниже, чем на рис. 11.4.

Таким образом, в окрестности верхней границы спектра имеет смысл пользоваться массой атома в пустоте, а вблизи максимума — эффективной массой. Причина состоит в том, что на коротких временах, соответствующих большим энергиям, взаимодействие между атомами жидкости не успевает проявиться, и они эффективно ведут себя как свободные.

Обратим также внимание на максимум структурного фактора  ${}^3\text{He}$  при  $q \approx 1.75 \text{ \AA}^{-1}$ ,  $\omega \approx 0.5 \text{ meV}$ , отсутствующий в структурном факторе идеального ферми-газа. Этот максимум есть следствие взаимодействия. Более сильное чем в идеальном газе рассеяние при  $q$  порядка обратного расстояния между атомами  ${}^3\text{He}$  можно объяснить существованием в жидкости ближнего порядка, возникающего вследствие взаимодействия атомов и приводящего к кристаллизации при достаточно высоком давлении или низкой температуре.

### 11.3. Задачи 65÷71

**Задача 65. а)** Выведите формулу (11.14) для туннельного тока, используя мацубаровскую технику. Для этого рассмотрите отклик туннельного тока (11.13) на поле, пропорциональное туннельному оператору  $X$ , — см. (11.12). Используя аналитические свойства мацубаровских функций Грина, перейдите от мнимых частот к вещественным и тем самым свяжите функцию отклика с величинами в реальном времени.

**б)** Рассмотрите туннелирование между двумя идеальными ферми-газами с постоянной плотностью состояний. Покажите, что при  $eV \ll E_F$  вольт-амперная характеристика линейна, т. е. выполняется закон Ома  $V = RI$ , причем сопротивление контакта  $R$  не зависит от температуры и определяется соотношением

$$R^{-1} = 4\pi e^2 \nu_a \nu_b |T_0|^2, \quad (11.30)$$

где  $\nu_a$  и  $\nu_b$  — плотности состояний берегов контакта.

**в)** Пусть в одном из ферми-газов имеется взаимодействие между частицами, так что собственно-энергетическая часть оказывается равной

$$\Sigma(\xi, \varepsilon) = a\xi - b\varepsilon, \quad (11.31)$$

где  $\varepsilon$  — энергия частицы, а  $\xi = v_F(p - p_0)$ , причем  $\xi, \varepsilon \ll E_F$ . Найдите туннельное сопротивление.

*Замечание:* Для электрон-фононного взаимодействия собственно-энергетическая часть есть функция  $\varepsilon$ , а от  $\xi$  не зависит (см. гл. 6). Поэтому в этом случае  $a = 0$ . Для электрон-электронного

взаимодействия собственно-энергетическая часть зависит как от  $\xi$ , так и от  $\varepsilon$ , и поэтому  $a \neq 0$  и  $b \neq 0$ .

**Задача 66.** (*Туннельный ток в NS контакте*) Рассмотрим туннельный контакт между нормальным металлом и сверхпроводником, к которому приложено напряжение  $V$ . Выразите туннельный ток при  $T < T_c$  через сопротивление контакта  $R$  в нормальном состоянии, то есть при  $T > T_c$ . Покажите, что при нулевой температуре зависимость туннельного тока от  $V$  имеет порог:

$$I = \frac{1}{R} \sqrt{V^2 - (\Delta/e)^2} \operatorname{sign} V, \quad (11.32)$$

где  $\Delta$  — сверхпроводящая щель при  $T = 0$ . Найдите зависимость туннельного тока от температуры при  $0 < T < T_c$ ?

**Задача 67.** (*Эффект Джозефсона*) Туннельный ток через контакт, связывающий два сверхпроводника, обладает весьма интересными свойствами. В этом случае помимо одночастичного вклада в ток, рассмотренного в задачах 65 и 66, появляется дополнительный вклад, связанный с туннелированием куперовских пар. Формально этот вклад можно описать, заменив нормальные функции Грина в диаграмме на рис. 11.3 на аномальные — см. рис. 11.6. Таким образом, туннельный эксперимент позволяет «измерить» аномальную функцию Грина в сверхпроводнике.

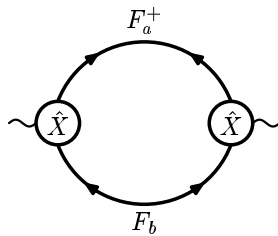


Рис. 11.6

Покажите, что в равновесии, при  $V = 0$ , двухчастичный ток отличен от нуля и равен

$$I = I_0 \sin(\phi_a - \phi_b), \quad (11.33)$$

где  $\phi_{a(b)}$  — значения фазы сверхпроводящего параметра порядка  $\Delta_{a(b)} = |\Delta_{a(b)}| e^{i\phi_{a(b)}}$  на разных берегах контакта. Туннельный контакт между двумя сверхпроводниками, в котором имеет место эффект Джозефсона (11.33), называется соответственно *джозефсоновским контактом*.

Рассмотрите случай, когда сверхпроводники по обе стороны контакта одинаковые, т. е.  $\Delta_{a(b)} = \Delta e^{i\phi_{a(b)}}$ . Получите формулу для максимального тока в джозефсоновском контакте:

$$I_0 = \frac{\pi \Delta}{2eR} \operatorname{th} \frac{\Delta}{2T}, \quad (11.34)$$

где  $R$  — сопротивление контакта при  $T > T_c$ . Связь между максимальным джозефсоновским током  $I_0$  и сопротивлением контакта в нормальном состоянии называется *соотношением Амбегаокара-Баратова*.

**Задача 68.** (*Плотность состояний в грязном металле*<sup>3</sup>) В неупорядоченном металле туннельная плотность состояний  $\nu(\varepsilon)$  имеет особенность на уровне Ферми. Сингулярность  $\nu(\varepsilon)$  при  $\varepsilon \rightarrow E_F$  свидетельствует о том, что ферми-жидкостное состояние в металле в присутствии рассеяния на случайном потенциале весьма сильно модифицируется. Чтобы найти поправку к туннельной плотности состояний, возникающую из-за кулоновского взаимодействия, сделайте следующее.

а) Вычислите вершину взаимодействия электрона с электрическим полем с учетом беспорядка, используя мацубаровскую технику. Просуммируйте для этого диаграммы на рис. 11.7.

Рис. 11.7

Считайте, что переданный импульс  $\mathbf{q}$  и переданная энергия  $\omega_n$  удовлетворяют условиям  $|\mathbf{q}|l \ll 1$ ,  $\omega_n \tau \ll 1$ , где  $\tau$  и  $l$  — время и длина свободного пробега. Покажите, что вершинная часть равна

$$\Gamma(\varepsilon_m, \omega_n, \mathbf{q}) = \begin{cases} \frac{1}{\tau(|\omega_n| + D\mathbf{q}^2)} & \text{при } \varepsilon_m(\varepsilon_m - \omega_n) < 0; \\ 1 & \text{при } \varepsilon_m(\varepsilon_m - \omega_n) > 0, \end{cases} \quad (11.35)$$

где  $D$  — коэффициент диффузии. Диффузионный полюс выражения (11.35) описывает эффект усиления взаимодействия с внешним полем вследствие диффузии.

Изменение величины взаимодействия можно качественно объяснить тем, что из-за диффузионного замедления динамики электроны проводят больше времени в области действия внешнего поля и поэтому взаимодействуют с ним более сильно. То, насколько сильно диффузия замедляет динамику, зависит от размерности системы. Как мы знаем из задачи 9, критической размерностью является  $D = 2$ , поскольку при  $D \leq 2$  число возвратов диффузионной траектории в исходную точку расходится, а при  $D > 2$  — сходится. Поэтому эффекты усиления взаимодействия в грязном металле оказываются наиболее интересными в двумерном случае.

б) Найдите эффективное электрон–электронное взаимодействие  $V(\omega_n, \mathbf{q})$  с учетом динамической экранировки. Для этого вычислите сумму диаграмм на рис. 8.3 и покажите, что заэкранированное взаимодействие есть

$$V(\omega_n, \mathbf{q}) = V_0(\mathbf{q}) \frac{|\omega_n| + D\mathbf{q}^2}{|\omega_n| + D\mathbf{q}^2 + \nu D\mathbf{q}^2 V_0(\mathbf{q})}, \quad (11.36)$$

где  $V_0(\mathbf{q})$  — затравочное взаимодействие. В качестве поляризационного оператора используйте мацубаровский коррелятор плотность–плотность, найденный в задаче 52.

<sup>3</sup>см. работы: Б.Л. Альтшулер, А.Г. Аронов, ЖЭТФ **77**, 2028 (1979); B.L. Altshuler, A.G. Aronov, P.A. Lee, Phys. Rev. Lett. **44**, 1288 (1980)



в) Найдите собственно-энергетическую поправку к функции Грина первого порядка по заэкранированному взаимодействию  $V(\omega_n, \mathbf{q})$ , соответствующую диаграмме на рис. 11.8.

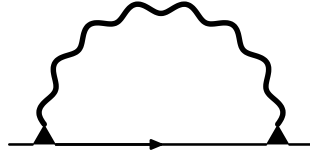


Рис. 11.8

Используя найденное выражение, найдите поправку  $\delta\nu(\varepsilon)$  к плотности состояний двумерного металла в случае кулоновского взаимодействия  $V_0(\mathbf{r}) = e^2/|\mathbf{r}|$ . Покажите, что в этом случае поправка к плотности состояний есть

$$\frac{\delta\nu(\varepsilon)}{\nu} = -\frac{e^2}{8\pi^2\hbar\sigma} \ln \frac{1}{|\varepsilon|\tau} \ln \frac{\tau D^2(\nu e^2)^4}{|\varepsilon|}, \quad (11.37)$$

где  $\sigma$  — двумерная проводимость. Расходимость  $\delta\nu(\varepsilon)$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$  означает, что квазичастицы в двумерной неупорядоченной ферми-системе сильно отличаются от свободных фермионов. Усиление эффектов взаимодействия в плотности состояний (11.37) при малых  $\varepsilon$  свидетельствует о неприменимости теории возмущений в двумерном неупорядоченном металле при энергиях вблизи уровня Ферми.

**Задача 69.** (*Рассеяние нейтронов*) Покажите, что сечение неупругого рассеяния нейтронов выражается через мнимую часть двухчастичной гриновской функции  $\mathcal{K}(q, \omega)$ . Получите соотношение (11.28).

**Задача 70. а)** Найдите структурный фактор  $S(\omega, \mathbf{q}) = 2 \operatorname{Im} \mathcal{K}^R(\omega, \mathbf{q})$  идеального ферми-газа при  $T = 0$ .

**б)** Рассмотрите структурный фактор  $S(\omega, \mathbf{q})$  ферми-жидкости. Это можно сделать либо с помощью кинетического уравнения ферми-жидкости ([1], (2.21)), либо вычислив мнимую часть нуль-звуковой лестницы (см. рис. 8.3). Покажите, что вклад нуль-звуковой моды в структурный фактор при  $|q| \ll p_0$  и  $T = 0$  имеет вид  $S_0(q, \omega) = A \delta(\omega - vq)$ , где  $v$  — скорость нуль-звуковой моды. Считая взаимодействие короткодействующим, определите константу  $A$  (см. [6], §§4, 91).

**Задача 71.** (*Спектр фононов*) Неупругое рассеяние нейтронов используют для определения закона дисперсии фононов в твердых телах. Нейтроны рассеиваются на ядрах, взаимодействуя с ними контактно, согласно (11.26) и (11.27). Рассмотрим фононы в рамках модели Дебая (см. с.109), считая, что ядерная плотность представляет собой однородное желе. Тогда флуктуации плотности, на которых происходит рассеяние, записываются через поле смещений решетки (6.1) как  $\delta\rho(\mathbf{r}) = -\rho_0 \operatorname{div} \mathbf{u}(\mathbf{r})$ , где  $\rho_0$  — средняя плотность ядер.

**а)** Найдите вклад дебаевских фононов в структурный фактор  $S(\omega, \mathbf{q})$  неупругого рассеяния нейтронов.

**б)** (*Коновская аномалия*) Спектр фононов в металле перенормируется из-за взаимодействия с электронами. Этот эффект для дебаевских фононов был рассмотрен в задаче 31

в рамках теории Мигдала. Найдите соответствующий структурный фактор  $S(\omega, \mathbf{q})$  и покажите, что перенормированный фононный спектр имеет особенность при  $q = 2p_0$ .

Эта особенность, называемая коновской аномалией, имеет то же самое происхождение, что и рассмотренное в задаче 32 смягчение спектра одномерных фононов вблизи  $q = 2p_0$ , приводящее к эффекту Пайерлса. В размерности больше единицы коновская аномалия является относительно слабой и, в отличие от одномерного случая, не приводит к неустойчивости.

## 11.4. Решения

**Решение 65 а)** Согласно формуле Кубо, среднее от оператора туннельного тока (11.13) в низшем порядке теории возмущений по туннельному гамильтониану (11.11) равно

$$I(t) = i \int_{-\infty}^t \langle [\widehat{H}_T(t'), \widehat{I}(t)] \rangle dt' . \quad (11.38)$$

Благодаря фазовым множителям  $e^{\pm ieVt}$  операторы  $\widehat{H}_T(t)$  и  $\widehat{I}(t)$  явно зависят от времени. Чтобы свести задачу вычисления туннельного тока к стандартной задаче о нахождении функции отклика в равновесном состоянии, введем обобщенную восприимчивость  $\chi(\omega)$ ,

$$\chi(\omega) = i \int_0^{\infty} \langle [\widehat{X}(t), \widehat{I}(0)] \rangle e^{i\omega t} dt , \quad (11.39)$$

описывающую отклик туннельного тока на поле  $\widehat{X}$ , определенное соотношением (11.12). Нетрудно видеть, что туннельный ток как функция напряжения  $V$  на туннельном контакте связан с  $\chi(\omega)$  следующим соотношением:

$$I(V) = 2 \operatorname{Re} \chi(\omega = eV) . \quad (11.40)$$

Чтобы вычислить  $\chi(\omega)$ , найдем мацубаровскую восприимчивость

$$\chi_M(i\Omega_n) = \frac{1}{2} \int_{-\beta}^{\beta} \langle T_{\tau} \widehat{X}(\tau) \widehat{I}(0) \rangle e^{i\Omega_n \tau} d\tau , \quad (11.41)$$

а затем продолжим ее на вещественные частоты. Подставляя в (11.41) операторы  $\widehat{I}$  и  $\widehat{X}$  из (11.9) и (11.12), получим

$$\begin{aligned} \langle T_{\tau} \widehat{X}(\tau) \widehat{I}(0) \rangle = & \sum_{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}'_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}'_2} T_{\mathbf{p}_1 \mathbf{p}'_1} \langle T_{\tau} \widehat{a}_{\mathbf{p}_1}^+(\tau) \widehat{b}_{\mathbf{p}'_1}(\tau) (T_{\mathbf{p}_2 \mathbf{p}'_2} \widehat{a}_{\mathbf{p}_2}^+(0) \widehat{b}_{\mathbf{p}'_2}(0) - \\ & - T_{\mathbf{p}_2 \mathbf{p}'_2}^* \widehat{a}_{\mathbf{p}_2}(0) \widehat{b}_{\mathbf{p}'_2}^+(0)) \rangle . \end{aligned} \quad (11.42)$$

В отсутствие сверхпроводящих корреляций в пробнике и образце средние вида  $\langle \widehat{a}_{\mathbf{p}}^+ \widehat{a}_{\mathbf{p}'}^+ \rangle$  и  $\langle \widehat{b}_{\mathbf{p}} \widehat{b}_{\mathbf{p}'} \rangle$  равны нулю. Поэтому только вклад второго члена в (11.42) оказывается отличным от нуля. Спаривая операторы в (11.42), находим

$$\langle T_{\tau} \widehat{X}(\tau) \widehat{I}(0) \rangle = -ie \sum_{\mathbf{p} \mathbf{p}'} |T_{\mathbf{p} \mathbf{p}'}|^2 G_a(\tau, \mathbf{p}) G_b(-\tau, \mathbf{p}') , \quad (11.43)$$

где  $G_a(\tau, \mathbf{p}) = -\langle T_\tau \hat{a}_\mathbf{p}(\tau) \hat{a}_\mathbf{p}^\dagger(0) \rangle$  и  $G_b(\tau, \mathbf{p}) = -\langle T_\tau \hat{b}_\mathbf{p}(\tau) \hat{b}_\mathbf{p}^\dagger(0) \rangle$  — мацубаровские функции Грина соответственно пробника и образца. Записав функции Грина в частотном представлении и подставив в (11.41), получим

$$\chi_M(i\Omega_n) = -2ieT \sum_{\omega_m} \sum_{\mathbf{p}\mathbf{p}'} |T_{\mathbf{p}\mathbf{p}'}|^2 G_a(i\omega_m + i\Omega_n, \mathbf{p}) G_b(i\omega_m, \mathbf{p}') , \quad (11.44)$$

где множитель 2 учитывает суммирование по проекциям спина.

Теперь выполним аналитическое продолжение выражения (11.44). Используем для этого интегральное представление (7.24), с помощью которого мацубаровские функции Грина выражаются через мнимые части запаздывающих функций. В результате мацубаровская восприимчивость (11.44) принимает следующий вид:

$$\chi_M(i\Omega_n) = -2ieT \sum_{\omega_m} \sum_{\mathbf{p}\mathbf{p}'} |T_{\mathbf{p}\mathbf{p}'}|^2 \int_{-\infty}^{\infty} \int \frac{d\varepsilon d\varepsilon'}{\pi^2} \frac{\text{Im} G_a^R(\varepsilon, \mathbf{p}) \text{Im} G_b^R(\varepsilon', \mathbf{p}')}{(i\omega_m + i\Omega_n - \varepsilon)(i\omega_m - \varepsilon')} . \quad (11.45)$$

Сумма по  $\omega_m$  в (11.45) вычисляется с помощью тождества (7.87). Таким образом,

$$\chi_M(i\Omega_n) = -\frac{2ie}{\pi^2} \sum_{\mathbf{p}\mathbf{p}'} |T_{\mathbf{p}\mathbf{p}'}|^2 \int_{-\infty}^{\infty} \int d\varepsilon d\varepsilon' \text{Im} G_a^R(\varepsilon, \mathbf{p}) \text{Im} G_b^R(\varepsilon', \mathbf{p}') \frac{n_F(\varepsilon) - n_F(\varepsilon')}{\varepsilon' - \varepsilon + i\Omega_n} . \quad (11.46)$$

Аналитическое продолжение (11.46) на вещественные частоты достигается заменой  $i\Omega_n$  на  $\omega + i0$ . Вещественная часть полученного выражения дает туннельный ток

$$I(V) = \frac{4e}{\pi} \sum_{\mathbf{p}\mathbf{p}'} |T_{\mathbf{p}\mathbf{p}'}|^2 \int_{-\infty}^{\infty} \int d\varepsilon d\varepsilon' \delta(\varepsilon' - \varepsilon - eV) \times \quad (11.47) \\ \times \text{Im} G_a^R(\varepsilon, \mathbf{p}) \text{Im} G_b^R(\varepsilon', \mathbf{p}') (n_F(\varepsilon) - n_F(\varepsilon')) .$$

Интегрирование по  $\varepsilon$  уничтожает  $\delta$ -функцию и мы получаем искомое выражение для туннельного тока:

$$I(V) = \frac{4e}{\pi} \sum_{\mathbf{p}\mathbf{p}'} |T_{\mathbf{p}\mathbf{p}'}|^2 \int_{-\infty}^{\infty} d\varepsilon \text{Im} G_a^R(\varepsilon + eV, \mathbf{p}) \text{Im} G_b^R(\varepsilon, \mathbf{p}') (n_F(\varepsilon) - n_F(\varepsilon + eV)) . \quad (11.48)$$

Формула (11.48) имеет совершенно общий характер, поскольку при её выводе не делалось никаких предположений о спектре и характере взаимодействия в пробнике и образце.

**Решение 65 б)** Применим результат (11.48) к задаче о туннельном контакте между двумя нормальными металлами. Мнимая часть запаздывающей функции Грина  $G^R(\varepsilon, \mathbf{p}) = (\varepsilon - \xi_\mathbf{p} + i0)^{-1}$  равна

$$\text{Im} G^R(\varepsilon, \mathbf{p}) = -\pi \delta(\varepsilon - \xi_\mathbf{p}) . \quad (11.49)$$

Рассмотрим более простой случай шероховатого барьера, когда туннельный матричный элемент не зависит от импульсов:  $T_{\mathbf{p}\mathbf{p}'} = T_0$ . Величина  $T_0$  есть значение туннельного матричного элемента при энергии вблизи  $E_F$ . При этом каждая из двух функций

Грина в (11.48) интегрируется по импульсам отдельно и соответственно вклад каждой из них есть

$$\int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \operatorname{Im} G_{a(b)}^R(\varepsilon, \mathbf{p}) = -\pi \nu_{a(b)}, \quad (11.50)$$

где  $\nu_{a(b)}$  — плотность состояний с одной проекцией спина.

Нетрудно проверить, что

$$\int (n_F(\varepsilon) - n_F(\varepsilon + eV)) d\varepsilon = eV \quad (11.51)$$

при произвольной температуре. Поэтому туннельный ток (11.48) можно записать в виде

$$I(V) = \frac{V}{R}, \quad \text{где } R = (4\pi e^2 |T_0|^2 \nu_a \nu_b)^{-1} \quad (11.52)$$

— сопротивление туннельного контакта. Таким образом, для контакта между нормальными металлами справедлив закон Ома, причем сопротивление при  $T \ll E_F$  не зависит от температуры.

Нетрудно убедиться в том, что закон Ома с независимым от температуры сопротивлением получается и при произвольной зависимости туннельного матричного элемента  $T_{\mathbf{p}\mathbf{p}'}$  от импульсов  $\mathbf{p}$  и  $\mathbf{p}'$ . Интересно, что даже в случае туннелирования через идеально гладкий барьер, при котором сохраняется параллельная барьеру компонента импульса, закон Ома по-прежнему имеет место при  $T \ll E_F$ . Эффект сохранения импульса при туннелировании существенно влияет на характер зависимости  $I(V)$  при  $eV, T \ll E_F$  только в тех случаях, когда и образец, и пробник представляют собой достаточно низкоразмерные системы.

**Решение 65 в)** Одночастичная функция Грина с собственно-энергетической частью вида (11.31) равна

$$G(\varepsilon, \mathbf{p}) = \frac{1}{G_0^{-1}(\varepsilon, \mathbf{p}) - \Sigma(\varepsilon, \mathbf{p})} = \frac{1}{\varepsilon(1+b) - \xi_{\mathbf{p}}(1+a) + i0}. \quad (11.53)$$

Туннельная плотность состояний соответственно есть

$$\nu(\varepsilon) = -\frac{1}{\pi} \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3} \operatorname{Im} G(\varepsilon, \mathbf{p}) = \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3} \delta(\varepsilon(1+b) - \xi_{\mathbf{p}}(1+a)) = \frac{\nu_0}{1+a}, \quad (11.54)$$

где  $\nu_0$  — плотность состояний без учета взаимодействия. Таким образом оказывается, что туннельная плотность состояний не зависит от константы  $b$ .

Полезно сравнить этот ответ с перенормировкой спектра квазичастиц. Функция Грина имеет полюс при

$$\varepsilon = \varepsilon_0(\mathbf{p}) = \frac{1+a}{1+b} v_F(|\mathbf{p}| - p_0). \quad (11.55)$$

Таким образом, константа  $b$  дает вклад в перенормировку спектра, но не меняет туннельный ток. Так происходит потому, что константа  $b$  определяет величину скачка в распределении частиц по импульсам на ферми-поверхности, равную вычету функции Грина в квазичастичном полюсе:

$$Z = \frac{1}{1+b}. \quad (11.56)$$

Но поскольку перенормировка туннельной плотности состояний пропорциональна

$$\nu(\varepsilon) \sim Z \left( \frac{\partial \varepsilon}{\partial \xi} \right)^{-1}, \quad (11.57)$$

вклады константы  $b$  в эффективную массу и в скачок  $Z$  сокращаются. Таким образом, туннельный ток зависит не только от перенормированного спектра квазичастиц  $\varepsilon = \xi(p)$ , но и от их структуры, описываемой  $Z$ -фактором.

В случае электрон-фононного взаимодействия  $a = 0$ , и поэтому туннельный ток оказывается точно таким же, как и в отсутствие взаимодействия. Качественно это объясняется адиабатичностью фононов. Туннелирование электрона в металл происходит мгновенно, поэтому при туннелировании решетку можно считать неподвижной. Таким образом, вероятность туннелирования определяется свойствами свободных электронов. Фононы же затем за время порядка  $\omega_D^{-1}$  подстраиваются под конечное состояние электронов после туннелирования, каким бы оно ни было.

Заметим, что наш вывод об отсутствии влияния электрон-фононного взаимодействия на туннельный ток имеет весьма общий характер. Как нетрудно видеть, туннельная плотность состояний (11.54) не меняется, если собственно-энергетическая часть  $\Sigma(\varepsilon)$  зависит от энергии  $\varepsilon$  произвольным образом. Для полного сокращения эффектов взаимодействия требуется лишь отсутствие зависимости  $\Sigma$  от  $\mathbf{p}$ , которое в случае электрон-фононного взаимодействия обеспечивается адиабатичностью фононов.

**Решение 66** Для нахождения туннельного тока между нормальным металлом и сверхпроводником можно воспользоваться общим соотношением (11.42). При этом в сверхпроводнике аномальные средние вида  $\langle \hat{a}_{\mathbf{p}_1}^+ \hat{a}_{\mathbf{p}_2}^+ \rangle$  отличны от нуля, и поэтому требуется заново проанализировать вклад двух членов (11.42) в туннельный ток. Однако оказывается, что поскольку в нормальном металле средние  $\langle \hat{b}_{\mathbf{p}_1} \hat{b}_{\mathbf{p}_2} \rangle$  равны нулю, первый член в (11.42) по-прежнему обращается в ноль при усреднении. Поэтому, как и в задаче 65, можно перейти от (11.42) к выражению (11.48), в которое входят туннельные плотности состояний пробника и образца.

Туннельная плотность состояний дается мнимой частью функции Грина. Аналитическое продолжение функции Грина сверхпроводника (10.35) с положительных мацубаровских частот на вещественную ось дает

$$G^R(\varepsilon, \mathbf{p}) = \frac{\varepsilon + \xi_{\mathbf{p}}}{\varepsilon^2 - \xi_{\mathbf{p}}^2 - \Delta^2 + i0 \operatorname{sign} \varepsilon}. \quad (11.58)$$

Следовательно туннельная плотность состояний есть

$$\nu(\varepsilon) = -\frac{1}{\pi} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \operatorname{Im} G^R(\varepsilon, \mathbf{p}) = \nu_0 \int_{-\infty}^{\infty} d\xi (\varepsilon + \xi) \delta(\varepsilon^2 - \xi^2 - \Delta^2) \operatorname{sign} \varepsilon. \quad (11.59)$$

Вычисляя интеграл от  $\delta$ -функции, находим

$$\nu(\varepsilon) = \begin{cases} \frac{\nu_0 |\varepsilon|}{\sqrt{\varepsilon^2 - \Delta^2}}, & |\varepsilon| > \Delta; \\ 0 & |\varepsilon| < \Delta. \end{cases} \quad (11.60)$$

Обратим внимание на то, что этот результат может быть записан в виде  $\pi\nu_0\partial\xi/\partial\varepsilon$ , т. е. как плотность состояний квазичастиц с законом дисперсии  $\varepsilon^2 = \Delta^2 + \xi^2$ . Хотя такой подход игнорирует различие между туннелирующими электронами и квазичастицами, в которые они превращаются в сверхпроводнике, результат в данном случае оказывается верным. Причина состоит в том, что квазичастицы теории БКШ состоят из двух электронов с одинаковой энергией. Их вклады в туннельную плотность состояний равны  $|u_p|^2$  и  $|v_p|^2$ , где  $u_p$  и  $v_p$  — коэффициенты преобразования Боголюбова. Но поскольку  $u_p^2 + v_p^2 = 1$ , суммарный вклад двух компонент квазичастицы в туннельный ток определяется только свойствами квазичастичного спектра. Так происходит потому, что эффекты взаимодействия в теории БКШ учитываются только в рамках теории среднего поля, и поэтому многочастичные эффекты оказываются относительно простыми.

Подставляя туннельную плотность состояний (11.60) в (11.48), находим туннельный ток:

$$I_{N-S}(V) = 4\pi e\nu_a\nu_b |T_0|^2 \int_{|\omega|>\Delta} \frac{|\omega| d\omega}{\sqrt{\omega^2 - \Delta^2}} (n_F(\omega) - n_F(\omega + eV)). \quad (11.61)$$

Рассмотрим случай нулевой температуры. Пусть  $eV > 0$ . Тогда интегрирование по энергиям производится в интервале  $-eV < \varepsilon < 0$ . При  $eV < \Delta$  интеграл (11.61) обращается в ноль, поскольку в этой области не выполнено условие  $|\varepsilon| > \Delta$ . Для  $eV > \Delta$  находим

$$I_{N-S}(V) = \frac{1}{eR} \int_{-eV}^{-\Delta} \frac{|\varepsilon| d\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon^2 - \Delta^2}} = \frac{\sqrt{(eV)^2 - \Delta^2}}{eR}. \quad (11.62)$$

Таким образом, зависимость туннельного тока от напряжения имеет порог, равный  $\Delta/e$ . Рассматривая аналогично случай  $eV < 0$ , получаем искомую зависимость (11.32), обладающую свойством антисимметрии:  $I_{N-S}(-V) = -I_{N-S}(V)$ .

Порог при  $eV = \Delta$  является резким только при нулевой температуре. При конечной температуре в нормальном металле всегда имеются квазичастицы с энергией  $\varepsilon > \Delta$ , которые могут туннелировать в сверхпроводник. Поэтому естественно ожидать, что при  $T > 0$  корневая особенность размывается и туннельный ток оказывается отличным от нуля при всех напряжениях.

Чтобы убедиться в том, что это действительно так, найдем туннельный ток под порогом при малых температурах  $T \ll \Delta$ . Интеграл в (11.61) при таких  $T$  определяется окрестностями точек  $\varepsilon = \pm\Delta$ . Введем обозначение  $\varepsilon = \pm(\Delta + x)$  в каждой из областей. Как будет ясно из дальнейших вычислений, характерное значение  $x$  оказывается порядка  $T$ , поэтому можно разложить плотность состояний по  $x/\Delta$ . Выражение для туннельного тока соответственно принимает вид

$$I_{N-S}(V, T) = 4\pi e\nu_a\nu_b |T_0|^2 \int_0^\infty dx \frac{\Delta}{\sqrt{2\Delta x}} (n_F(\Delta + x) + n_F(-\Delta - x) - n_F(\Delta + eV + x) - n_F(-\Delta - x + eV)). \quad (11.63)$$

Упростим полученное выражение, воспользовавшись тождеством  $n_F(-\varepsilon) = 1 - n_F(\varepsilon)$ , которому удовлетворяет фермиевская функция распределения. Получаем

$$I_{N-S}(V, T) = \frac{1}{eR} \int_0^\infty dx \sqrt{\frac{\Delta}{2x}} (n_F(\Delta - eV + x) - n_F(\Delta + x + eV)). \quad (11.64)$$

(мы выразили туннельный матричный элемент  $T_0$  через сопротивление контакта в нормальном состоянии).

При больших положительных значениях энергии фермиевская функция распределения переходит в больцмановскую,

$$n_F(\varepsilon \gg T) \approx e^{-\varepsilon/T}, \quad (11.65)$$

и поэтому выражение для туннельного тока принимает следующий вид:

$$I_{N-S}(V, T) = \frac{1}{eR} e^{-\Delta/T} \operatorname{sh} \frac{eV}{T} \int_0^\infty dx \sqrt{\frac{2\Delta}{x}} e^{-x/T}. \quad (11.66)$$

Вычисляя интеграл по  $x$  с помощью известного представление гамма-функции, находим:

$$I_{N-S}(V, T) = \frac{\sqrt{2\pi\Delta T}}{eR} e^{-\Delta/T} \operatorname{sh} \frac{eV}{T}. \quad (11.67)$$

Это выражение неприменимо в узкой окрестности порога при  $eV - \Delta \sim T$ , поскольку при таких напряжениях приближение (11.65) нельзя применять к первому члену в (11.64).

Итак, при  $0 < T \ll \Delta$  ток (11.61) при  $eV < \Delta$  экспоненциально мал. По мере роста температуры ток под порогом  $eV < \Delta$  возрастает, и когда температура достигает  $T_c$ , вольт-амперная характеристика становится омической, как для контакта между двумя нормальными металлами.

Помимо термоактивационного вклада в ток, описываемого формулой (11.67), под порогом  $eV = \Delta$  существует еще один весьма интересный вклад, не исчезающий при  $T \rightarrow 0$ . Он связан с когерентным туннелированием пары электронов с противоположными импульсами и спинами. Оказавшись в сверхпроводнике, такие два электрона могут образовать куперовскую пару. Туннелирование пары, в отличие от одночастичного туннелирования, не требует затраты энергии  $\Delta$  на каждую частицу, и поэтому такой вклад не «вымерзает» при низких температурах. Когерентное туннелирование пар электронов часто называют *андрееским отражением*, поскольку описанный процесс перехода двух электронов из нормального металла в сверхпроводник можно рассматривать как превращение электрона в дырку при отражении от поверхности сверхпроводника. Вероятность двухчастичного туннелирования пропорциональна  $|T_0|^4$ , а не  $|T_0|^2$ , как для одночастичного туннелирования. Поэтому при  $|T_0| \ll 1$  и не слишком низкой температуре двухчастичные процессы очень редки по сравнению с одночастичными. Вследствие этого андрееское отражение вносит существенный вклад в туннельный ток лишь при достаточно низких температурах.<sup>4</sup>

**Решение 67** Поскольку теперь у нас с обеих сторон контакта находятся сверхпроводники, первый член в выражении (11.42) оказывается не равным нулю. Поэтому усреднение (11.42) необходимо выполнить заново. Как нетрудно видеть, усреднение первого члена (11.42) выполняется так же, как и раньше, с единственной разницей,

<sup>4</sup> Андрееское отражение более подробно рассмотрено в литературе, процитированной на с. 276.

состоящей в замене нормальных средних на аномальные. Соответствующий вклад в восприимчивость  $\chi_M$  выписывается по аналогии с задачей 65 и оказывается равным

$$\chi_{M,S-S}(i\Omega_n) = ieT \sum_{\omega_m} \sum_{\mathbf{p}\mathbf{p}'} |T_{\mathbf{p}\mathbf{p}'}|^2 F_{a,\mu\nu}^+(i\Omega_n + i\omega_m, \mathbf{p}) F_{b,\nu\mu}(i\omega_m, \mathbf{p}') , \quad (11.68)$$

где  $F_a(i\varepsilon_n, \mathbf{p})$  и  $F_b(i\varepsilon_n, \mathbf{p})$  — аномальные функции Грина берегов контакта, а  $\mu$  и  $\nu$  — спиновые индексы. Суммируя по  $\mu$  и  $\nu$  с учетом спиновой структуры аномальных функций Грина, получаем выражение по виду сходное с (11.45) с точностью до замены нормальных функций Грина на аномальные:

$$\chi_{M,S-S}(i\Omega_n) = -2ieT \sum_{\omega_m} \sum_{\mathbf{p}\mathbf{k}} |T_{\mathbf{p}\mathbf{k}}|^2 F_a^+(i\Omega_n + i\omega_m, \mathbf{p}) F_b(i\omega_m, \mathbf{k}) . \quad (11.69)$$

Обратим внимание на то, что знаки выражений (11.45) и (11.69) совпадают. Это соответствует общему наблюдению о совпадении знаков «нормальных» и «аномальных» петель, сделанному в решении задачи 60.

Поскольку, как мы увидим, джозефсоновский ток отличен от нуля в равновесии, т. е. при  $V = 0$ , нам будет достаточно<sup>5</sup> вычислить  $\chi_{M,S-S}(i\Omega_n)$  при  $\Omega_n = 0$ . Аналитическое продолжение оказывается ненужным, и можно сразу записать выражение для туннельного тока:

$$\begin{aligned} I_{S-S} &= 4e |T_0|^2 T \operatorname{Im} \sum_{\omega_m} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Delta_a^* \nu_a d\xi_b}{\omega_m^2 + \xi_a^2 + |\Delta_a|^2} \frac{\Delta_b \nu_b d\xi_b}{\omega_m^2 + \xi_b^2 + |\Delta_b|^2} = \\ &= 4\pi^2 e |T_0|^2 \nu_a \nu_b T \operatorname{Im} \sum_{\omega_m} \frac{\Delta_a^* \Delta_b}{\sqrt{\omega_m^2 + |\Delta_b|^2} \sqrt{\omega_m^2 + |\Delta_b|^2}} . \end{aligned} \quad (11.70)$$

Полученное выражение отлично от нуля в случае, когда фаза параметра порядка по разные стороны контакта не одна и та же. Пусть  $\Delta_{a,b} = |\Delta_{a,b}| e^{i\phi_{a,b}}$ . Выражая туннельный матричный элемент  $T_0$  через сопротивление контакта в нормальном состоянии, получаем соотношение Джозефсона:

$$I = I_0 \sin(\phi_b - \phi_a) , \quad \text{где} \quad I_0 = \frac{\pi}{eR} T \sum_{\omega_m} \frac{|\Delta_a| |\Delta_b|}{\sqrt{\omega_m^2 + |\Delta_a|^2} \sqrt{\omega_m^2 + |\Delta_b|^2}} \quad (11.71)$$

— максимальный ток через контакт. Отметим еще раз, что, в отличие от других разновидностей туннельного тока, джозефсоновский ток не связан с релаксацией к равновесному состоянию. Эффект Джозефсона (11.33) имеет место в термодинамическом равновесии, и соответственно ток (11.71) между двумя сверхпроводниками с различающимися фазами параметра порядка может течь неограниченно долго.

Формула (11.71) для  $I_0$  упрощается в случае, когда параметры порядка по обе стороны контакта отличаются только фазой:  $|\Delta_a| = |\Delta_b| \equiv \Delta$ . При этом

$$I_0 = \frac{\pi}{eR} T \sum_{\omega_m} \frac{\Delta^2}{\omega_m^2 + \Delta^2} , \quad (11.72)$$

<sup>5</sup>По этой же причине мы не рассматриваем вклад в туннельный ток (11.42), содержащий нормальные средние. Как мы видели в задачах 65 и 66, такой вклад описывает некогерентное туннелирование отдельных электронов и приводит к току, исчезающему при  $V = 0$ .



после чего суммирование легко производится с помощью тождества (7.85). В этом случае мы получаем соотношение (11.34) для максимального джозефсоновского тока  $I_0$ .

Что произойдет, если пропустить через контакт ток, больший чем  $I_0$ ? Детальный ответ на этот вопрос зависит от свойств цепи, в которую включен контакт. Однако джозефсоновский контакт используемый в таком режиме обладает одним весьма общим свойством. При токе превосходящем  $I_0$  на контакте появится конечное напряжение  $V(t)$ , в общем случае зависящее от времени. Это напряжение приводит к изменению фазы  $\phi = \phi_b - \phi_a$  согласно соотношению Джозефсона для фазы

$$\hbar \frac{d\phi}{dt} = 2eV(t), \quad (11.73)$$

которое следует из калибровочной инвариантности. Таким образом, фаза и ток оказываются зависящими от времени. Зная свойства внешней цепи, можно самосогласованно связать напряжение на контакте  $V(t)$  и туннельный ток  $I(t)$ , и таким образом определить динамику системы. Читатель, интересующийся этим режимом работы джозефсоновского контакта, обычно называемым нестационарным эффектом Джозефсона, может найти обсуждение соответствующих вопросов в литературе, процитированной на с. 276.

**Решение 68 а)** Рассмотрим вершинную часть взаимодействия электрона с внешним полем. Затрафовочная вершинная часть (в отсутствие примесей) равна единице. Вычислим вершинную часть, дающуюся диаграммами на рис. 11.7, используя усредненные по беспорядку мацубаровские функции Грина — см. (9.17). Рассмотрим вначале поправку к вершине, соответствующую изображенной на рис. 11.9 диаграмме с одной примесной линией:

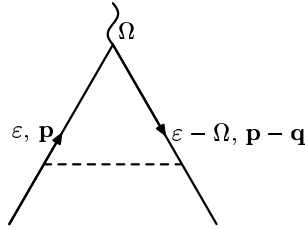


Рис. 11.9

Интересующее нас выражение

$$\begin{aligned} \Gamma^{(1)}(\varepsilon_m, \omega_n, \mathbf{q}) &= \frac{1}{2\pi\nu_0\tau} \int \frac{d^2\mathbf{p}}{(2\pi)^2} \frac{1}{\left(i\varepsilon_m - \xi_{\mathbf{p}} + \frac{i}{2\tau} \text{sign} \varepsilon_m\right)} \times \\ &\times \frac{1}{\left(i\varepsilon_m - i\omega_n - \xi_{\mathbf{p}-\mathbf{q}} + \frac{i}{2\tau} \text{sign}(\varepsilon_m - \omega_n)\right)}. \end{aligned} \quad (11.74)$$

вычисляется таким же образом, как ступенька примесной лестницы в задаче 52. Заменяя интеграл по  $d^2\mathbf{p}$  интегралом по  $\xi$  и вычисляя его методом вычетов, нетрудно показать, что выражение отлично от нуля только в том случае, когда знаки энергий  $\varepsilon_m$  и  $\varepsilon_m - \omega_n$  различаются. (В противном случае оба вычета интегрируемого выражения попадают в одну и ту же полуплоскость комплексного  $\xi$ .)

В случае, когда знаки энергий различны и  $\omega_n > 0$ , получаем выражение

$$\Gamma^{(1)}(\varepsilon_m, \omega_n, \mathbf{q}) = \frac{1}{1 + \tau\omega_n + \tau D\mathbf{q}^2} \quad (11.75)$$

подобное найденному в задаче 52.

Теперь просуммируем всю примесную лестницу, показанную на рис. 11.7. Как и в задаче 52, интересующий нас лестничный ряд образует геометрическую прогрессию. Поэтому

$$\Gamma(\varepsilon_m, \omega_n, \mathbf{q}) = \frac{1}{1 - \Gamma^{(1)}} \approx \frac{1}{\tau(\omega_n + D\mathbf{q}^2)}. \quad (11.76)$$

Рассматривая аналогично случай  $\omega_n < 0$ , можно убедиться в том, что  $\omega_n$  в (11.76) следует заменить на  $|\omega_n|$ .

Если же знаки энергий  $\varepsilon_m$  и  $\varepsilon_m - \omega_n$  в функциях Грина в (11.74) совпадают, то зануляется не только первая поправка  $\Gamma^{(1)}$ , но, как нетрудно видеть, и все остальные члены диаграммного ряда на рис. 11.7. Это является следствием общего правила, отмеченного в гл. 9 — примесная лестница отлична от нуля только если энергии в функциях Грина имеют разные знаки.

**Решение 68 б)** Эффективное взаимодействие с учетом динамической экранировки вычисляется суммированием последовательности «пузырьковых» диаграмм (см. задачу 45):

$$V(\omega_n, \mathbf{q}) = \frac{V_0(\mathbf{q})}{1 - \Pi(\omega_n, \mathbf{q}) V_0(\mathbf{q})}, \quad (11.77)$$

где  $\Pi(\omega_n, \mathbf{q})$  — поляризационный оператор, а  $V_0(\mathbf{q})$  — затравочное взаимодействие. Подставляя поляризационный оператор  $\Pi(\omega_n, \mathbf{q}) = -\nu D\mathbf{q}^2 / (|\omega_n| + D\mathbf{q}^2)$  из (9.23), получаем искомое выражение (11.36).

Для дальнейших вычислений нам понадобится двумерный фурье-образ кулоновского потенциала взаимодействия. Его проще всего найти, проинтегрировав известный фурье-образ трехмерного кулоновского потенциала по  $q_z$ :

$$V_0^{(2)}(\mathbf{q}) = V_0^{(3)}(q_x, q_y, z = 0) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dq_z}{2\pi} \left( \frac{e^2}{|\mathbf{r}|} \right)_{\mathbf{q}} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dq_z}{2\pi} \frac{4\pi e^2}{\mathbf{q}^2 + q_z^2} = \frac{2\pi e^2}{|\mathbf{q}|} \quad (11.78)$$

где  $\mathbf{q} = (q_x, q_y)$ .

**Решение 68 в)** Поправка к туннельной плотности состояний  $\nu(\varepsilon)$  получается из поправки к функции Грина интегрированием по импульсам, которое можно заменить интегрированием по  $\xi$ :

$$\frac{\delta\nu(\varepsilon)}{\nu_0} = -\frac{1}{\pi} \int \delta G(\varepsilon, \xi) d\xi \quad (11.79)$$

Вычислим  $\delta G(i\varepsilon, \mathbf{p})$  при  $T = 0$ , заменяя суммы по мацубаровским частотам интегралами. Будем для определенности считать, что  $\varepsilon > 0$ . Выражение, соответствующее диаграмме на рис. 11.8, есть

$$\delta G(i\varepsilon, \mathbf{p}) = G_0^2(i\varepsilon, \mathbf{p}) \int \int \frac{d^2q}{(2\pi)^2} \frac{d\omega}{2\pi} \Gamma^2(\varepsilon, \omega, \mathbf{q}) V(\omega, \mathbf{q}) G(i\varepsilon - i\omega, \mathbf{p} - \mathbf{q}). \quad (11.80)$$

Наибольший вклад в интеграл по энергии возникает от области  $\omega > \varepsilon$ , так как в этой области вершинная часть  $\Gamma(\varepsilon, \omega, \mathbf{q})$  имеет диффузионный полюс и поэтому велика

— см. (11.35). Пренебрегая вкладом области  $\omega < \varepsilon$ , имеем

$$\begin{aligned} \delta G(i\varepsilon, \mathbf{p}) &= \frac{1}{(i\varepsilon - \xi_{\mathbf{p}} + \frac{i}{2\tau})^2} \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \int \frac{d^2q}{(2\pi)^2} \frac{1}{(i\varepsilon - i\omega - \xi - \mathbf{q}\mathbf{v}_{\mathbf{p}} - \frac{i}{2\tau})} \times \\ &\times \frac{V_0(\mathbf{q})}{(\omega + D\mathbf{q}^2)(\omega + D\mathbf{q}^2 + \nu D\mathbf{q}^2 V_0(\mathbf{q}))}. \end{aligned} \quad (11.81)$$

Удобно сразу проинтегрировать это выражение по  $\xi$ . При этом мы пренебрегаем членами  $\omega$  и  $\mathbf{q}\mathbf{v}$  в знаменателе по сравнению с  $\tau^{-1}$ , поскольку нас интересует вклад малых энергий и импульсов. Таким образом, получаем

$$\int \delta G(i\varepsilon, \xi) d\xi = 2 \int_{\varepsilon}^{\infty} d\omega \int \frac{d^2q}{(2\pi)^2} \frac{V_0(\mathbf{q})}{(\omega + D\mathbf{q}^2)(\omega + D\mathbf{q}^2 + \nu D\mathbf{q}^2 V_0(\mathbf{q}))} \quad (11.82)$$

Подставляя в это выражение фурье-образ затравочного взаимодействия (11.78), получаем

$$\int \delta G(i\varepsilon, \xi) d\xi = -2e^2 \int_{\varepsilon}^{\infty} d\omega \int_0^{\infty} dq \frac{1}{(\omega + Dq^2)(\omega + Dq^2 + 2\pi\nu e^2 Dq)}. \quad (11.83)$$

Проинтегрируем найденное выражение по  $q$ . Наибольший вклад в интеграл вносит область

$$\frac{\omega}{2\pi\nu D e^2} \leq q \leq \sqrt{\frac{\omega}{D}}, \quad (11.84)$$

в которой можно пренебречь  $Dq^2$  по сравнению с  $\omega$ , и  $\omega$  — по сравнению с  $\nu e^2 Dq$ . Обрезая логарифмически расходящийся интеграл на границах области (11.84), получаем

$$\int \delta G(i\varepsilon, \xi) d\xi = \frac{1}{4\pi\nu D} \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{d\omega}{\omega} \ln \frac{(\nu e^2)^2}{D\omega}. \quad (11.85)$$

Интеграл по частотам также логарифмически расходится на верхнем пределе. Чтобы получить вклад диффузионной области обрежем интеграл по  $\omega$  на  $\omega\tau \sim 1$ , (При больших значениях  $\omega$  электроны движутся баллистически, поэтому эта область описывается теорией ферми-жидкости и не приводит к сингулярности в плотности состояний.) Вычисляя интеграл по  $\omega$  и удерживая при аналитическом продолжении с мнимых частот на вещественные лишь главный дважды логарифмический член, получаем поправку к туннельной плотности состояний:

$$\frac{\delta\nu(\varepsilon)}{\nu} = -\frac{1}{8\pi^2\nu D} \ln \frac{(\nu e^2)^4 \tau D^2}{|\varepsilon|} \ln \frac{1}{|\varepsilon|\tau} \quad (11.86)$$

Вклад (11.86) в плотность состояний имеет отрицательный знак и сингулярен на малых энергиях  $\varepsilon \rightarrow 0$ . С помощью соотношения Эйнштейна  $\sigma = e^2\nu D$  произведение  $\nu D$  можно выразить через проводимость, что дает искомое выражение (11.37) для плотности состояний двумерного металла.

Остановимся на физическом смысле результата (11.86). Туннельная плотность состояний описывает реакцию электронной жидкости на добавление в нее электрона. Роль кулоновского взаимодействия в этом процессе состоит в следующем. Сразу после того, как электрон протуннелировал в металл, его заряд незаэкранирован и создает кулоновское поле. Под действием этого поля остальные электроны начинают двигаться так, чтобы заэкранировать вновь прибывший электрон. Макроскопически этот процесс приводит к максвелловской релаксации заряда. Таким образом, туннелирование одного электрона сопровождается коллективным растеканием заряда многих других электронов, что приводит к уменьшению вероятности туннелирования. В чистом металле максвелловская релаксация происходит почти мгновенно (за время порядка обратной плазменной частоты). Соответственно в этом случае поправки к  $G(t-t')$  из-за взаимодействия достаточно быстро затухают на больших временах, и сингулярности в  $G(\varepsilon)$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$  не возникает. В то же время в неупорядоченной системе, характеризующейся омической проводимостью, максвелловская релаксация происходит более медленно. Поэтому в этом случае влияние индуцированного туннелирующим электроном растекания заряда на амплитуду туннелирования оказывается существенным и соответствующая поправка к плотности состояний расходитя на малых энергиях. Можно сказать, что плохо проводящая система сильнее «сопротивляется» попыткам добавить в нее электрон. Этот эффект и приводит к уменьшению одночастичной плотности состояний.

Поправка (11.86) приводит к специфической температурной зависимости туннельного тока, а также к его неомичности. Повторив сделанное выше вычисление  $\delta\nu(\varepsilon)$  при конечной температуре, нетрудно убедиться в том, что результат (11.86) остается в силе с точностью до замены  $\varepsilon \rightarrow \varepsilon_m = \pi T(2m+1)$ . Соответствующая зависимость туннельного тока от  $T$  и  $V$  оказывается следующей:

$$G = \frac{dI}{dV} = G_0 \left( 1 + \frac{\delta\nu(\varepsilon_{T,eV})}{\nu} \right), \quad \varepsilon_{T,eV} = \max[T, eV]. \quad (11.87)$$

Как видно из этого выражения, при уменьшении температуры и напряжения имеет место подавление туннельного тока, причем насыщения при  $eV, T \rightarrow 0$  не происходит. Сингулярное поведение туннельного сопротивления при малых температурах или напряжениях, возникающее вследствие сингулярности  $\nu(\varepsilon)$  при  $\varepsilon \rightarrow E_F$ , называется *туннельной аномалией*.

**Первое решение 69** Найдем сечение рассеяния нейтрона при рассеянии на флуктуациях плотности среды, пользуясь золотым правилом Ферми для квантовомеханической вероятности перехода. Общее выражение для вероятности перехода в единицу времени имеет вид

$$w_{i \rightarrow f} = \frac{2\pi}{\hbar^2} |\langle f, \mathbf{p}' | \widehat{\mathcal{H}}_{\text{int}} | i, \mathbf{p} \rangle|^2 \delta \left( E_f + \frac{\mathbf{p}'^2}{2m_n} - E_i - \frac{\mathbf{p}^2}{2m_n} \right), \quad (11.88)$$

где  $\mathbf{p}$  и  $\mathbf{p}'$  — начальный и конечный импульсы нейтрона, а  $|i\rangle$  и  $|f\rangle$  — исходное и конечное состояния среды. Нормируем начальную волновую функцию нейтрона на единичный поток,  $\psi_{n,i}(\mathbf{r}) = e^{i\mathbf{p}\mathbf{r}}/\sqrt{v}$ , где  $v = p/m$ . Функцию же, описывающую конечное состояние, нормируем на  $\delta(\mathbf{p}/2\pi\hbar)$ , что дает  $\psi_{n,f}(\mathbf{r}) = e^{i\mathbf{p}'\mathbf{r}}/\sqrt{V}$ , где  $V$  — объем

системы. При этом выражение для вероятности перехода приобретает следующий вид:

$$dw_{i \rightarrow f} = \frac{2\pi}{\hbar^2 v V} \left( \frac{2\pi \hbar^2 a}{\mu} \right)^2 \left| \langle i | \int \hat{\rho}(\mathbf{r}) e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}} d^3\mathbf{r} | f \rangle \right|^2 \delta(E_f - E_i - \hbar\omega) \frac{d^3\mathbf{p}'}{(2\pi\hbar)^3}, \quad (11.89)$$

где

$$\mathbf{q} = \mathbf{p} - \mathbf{p}', \quad \hbar\omega = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} - \frac{\mathbf{p}'^2}{2m} \quad (11.90)$$

— импульс и энергия, переданные нейтроном среде. Записывая элемент объема в импульсном пространстве как

$$d^3\mathbf{p}' = p'^2 dp' d\omega d\omega', \quad (11.91)$$

получим выражение для сечения рассеяния, дающего парциальную вероятность перехода:

$$\frac{d\sigma_{i \rightarrow f}}{d\omega' d\omega} = \frac{a^2 p'^2}{\mu^2 v v' V} \left| \langle i | \int \hat{\rho}(\mathbf{r}) e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}} d^3\mathbf{r} | f \rangle \right|^2 \delta(E_f - E_i - \hbar\omega). \quad (11.92)$$

Теперь усредним (11.92) по начальным состояниям системы и просуммируем по конечным:

$$\frac{d\sigma}{d\omega' d\omega} = \frac{\tilde{a}^2 p'}{V p} \sum_{i,f} w(E_i) \delta(E_f - E_i - \hbar\omega) \int \int \langle i | \hat{\rho}(\mathbf{r}) | f \rangle \langle f | \hat{\rho}(\mathbf{r}') | i \rangle e^{i\mathbf{q}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')} d^3\mathbf{r} d^3\mathbf{r}', \quad (11.93)$$

где  $w(E_i) = Z^{-1} e^{-\beta E_i}$  — распределение Гиббса, и  $\tilde{a} = am_n/\mu = a(1 + m_n/m)$ . В силу пространственной однородности системы выражение под знаком интеграла зависит лишь от  $\mathbf{r} - \mathbf{r}'$ , и поэтому один из интегралов по  $d^3\mathbf{r} d^3\mathbf{r}'$  сокращается с объемом системы  $V$ . Принимая это во внимание, получаем окончательное выражение для сечения рассеяния:

$$\frac{d\sigma}{d\omega' d\omega} = \frac{\tilde{a}^2 p'}{p} \sum_{i,f} \int w(E_i) \delta(E_f - E_i - \hbar\omega) \langle i | \hat{\rho}(\mathbf{r}) | f \rangle \langle f | \hat{\rho}(0) | i \rangle e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}} d^3\mathbf{r}. \quad (11.94)$$

Чтобы связать полученное выражение со структурным фактором, определенным в (11.29) через мнимую часть двухчастичной функции Грина,  $S(\omega, \mathbf{q}) = 2 \text{Im} \mathcal{K}^R(\omega, \mathbf{q})$ , рассмотрим выражение (11.24) для запаздывающей корреляционной функции плотности и перепишем его в базисе собственных состояний системы. Повторяя вычисления, подобные проделанным в задаче 37, запишем фурье-образ  $\mathcal{K}^R(\omega, \mathbf{q})$  в следующем виде:

$$\mathcal{K}^R(\omega, \mathbf{q}) = \sum_{i,f} \int e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}} d^3\mathbf{r} \frac{\langle i | \hat{\rho}(\mathbf{r}) | f \rangle \langle f | \hat{\rho}(0) | i \rangle}{\omega + E_i - E_f + i0} (w(E_f) - w(E_i)). \quad (11.95)$$

Рассмотрим мнимую часть выражения (11.95):

$$\text{Im} \mathcal{K}^R(\omega, \mathbf{q}) = \pi \sum_{i,f} \int e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}} d^3\mathbf{r} \langle i | \hat{\rho}(\mathbf{r}) | f \rangle \langle f | \hat{\rho}(0) | i \rangle (w(E_i) - w(E_f)) \delta(E_f - E_i - \omega). \quad (11.96)$$

Заметим, что  $w(E_i) - w(E_f) = w(E_i)(1 - e^{-\beta(E_f - E_i)}) = w(E_i)(1 - e^{-\beta\omega})$ . Сравнивая результаты (11.94) и (11.96), получаем

$$\frac{d\sigma}{d\omega} = \frac{\tilde{a}^2 p'}{\pi p} \frac{\text{Im} \mathcal{K}^R(\omega, \mathbf{q})}{1 - e^{-\beta\omega}} = \frac{\tilde{a}^2 p'}{2\pi p} \frac{S(\omega, \mathbf{q})}{1 - e^{-\beta\omega}}, \quad (11.97)$$

что и доказывает соотношение (11.28).

**Другое решение 69.** Выведем соотношение (11.28) между сечением рассеяния нейтрона и функцией Грина  $\mathcal{K}^R(\omega, \mathbf{q})$ , не используя золотого правила. Изложенный ниже вывод опирается на полученный в задаче 40 общий результат (7.38), связывающий мацубаровские и запаздывающие функции Грина.

Идея заключается в том, чтобы рассмотреть функцию Грина нейтрона, рассеивающегося на флуктуациях плотности среды. Вероятность рассеяния в единицу времени может быть получена из соответствующей собственно-энергетической части по формуле  $\frac{1}{2\tau} = -\text{Im} \Sigma(\varepsilon, \mathbf{p})$ . Поскольку взаимодействие нейтрона с атомами системы можно описать с помощью псевдопотенциала (11.26), нам будет достаточно рассмотреть изображенную на рис. 11.10 диаграмму для собственно-энергетической части низшего порядка:

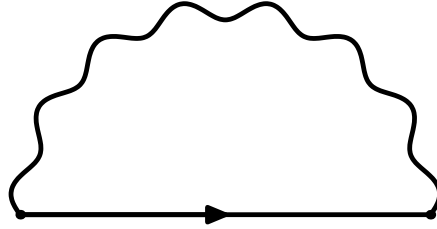


Рис. 11.10

На этой диаграмме прямая линия обозначает гриновскую функцию нейтрона

$$G_n(\varepsilon, \mathbf{p}) = \frac{1}{\varepsilon - \mathbf{p}^2/2m_n + \mu_n + i0 \text{ sign } \varepsilon}, \quad (11.98)$$

а волнистая — пропагатор флуктуаций плотности  $\mathcal{K}(x, x')$ . Величина  $\mu_n$  есть химический потенциал нейтронов, который следует устремить к  $-\infty$ , поскольку в системе отсутствуют равновесные нейтроны. Рассматривая среду при конечной температуре, удобно воспользоваться мацубаровской техникой. Тогда собственно-энергетическая часть нейтрона равна

$$\Sigma(i\varepsilon_m, \mathbf{p}) = \left(\frac{2\pi a}{\mu}\right)^2 T \sum_{\omega_n} \int \frac{d^3 \mathbf{p}'}{(2\pi)^3} G_n(i\varepsilon_m - i\omega_n, \mathbf{p}') \mathcal{K}(i\omega_n, \mathbf{p}' - \mathbf{p}). \quad (11.99)$$

Аналитическое продолжение мацубаровской собственно-энергетической части (11.99) может быть выполнено методом, рассмотренным в задаче 40 б).

Чтобы установить соответствие с использованными в задаче 40 б) величинами, заметим, что корреляционная функция плотности  $\mathcal{K}(i\omega_n, \mathbf{q})$  по своим аналитическим свойствам аналогична фононному пропагатору, а функция Грина нейтрона — электронной функции Грина. Выражение (11.99) имеет тот же вид, что электрон-фононная

собственно-энергетическая часть (7.37). Поэтому в результате аналитического продолжения получается следующее выражение:

$$\Sigma(\varepsilon, \mathbf{p}) = \left( \frac{2\pi a}{\mu} \right)^2 \int \frac{d^3 p' d\omega d\varepsilon'}{\pi(2\pi)^4} \frac{\text{Im } G_n^R(\varepsilon', \mathbf{p}') \text{Im } \mathcal{K}^R(\omega, \mathbf{p} - \mathbf{p}')}{\varepsilon - \varepsilon' - \omega + i0} \left( \text{th } \frac{\varepsilon'}{2T} + \text{cth } \frac{\omega}{2T} \right). \quad (11.100)$$

Мнимая часть (11.100) есть обратное время рассеяния,  $\frac{1}{2\tau} = \text{Im } \Sigma(\varepsilon, \mathbf{p})$ , поэтому

$$\frac{1}{\tau} = 2\pi \left( \frac{2\pi a}{\mu} \right)^2 \int \frac{d^3 \mathbf{p}' d\omega}{(2\pi)^4} \left( \text{th } \frac{\varepsilon'}{2T} + \text{cth } \frac{\omega}{2T} \right) \text{Im } \mathcal{K}^R(\omega, \mathbf{p} - \mathbf{p}') \delta(\varepsilon - \omega - \varepsilon'), \quad (11.101)$$

где  $\varepsilon' = \mathbf{p}'^2/2m_n - \mu_n$  — энергия рассеянного нейтрона. Как уже было отмечено, переход к пределу одного нейтрона соответствует большим отрицательным  $\mu_n$ . В пределе  $|\mu_n| \gg T$  гиперболический тангенс  $\text{th } \varepsilon'/2T$  в (11.101) можно заменить единицей, после чего выражение в скобках в (11.101) оказывается равным  $2/(1 - e^{-\beta\omega})$ . Последним необходимым шагом является интегрирование по  $|\mathbf{p}'|$ , устраняющее оставшуюся  $\delta$ -функцию. Получаем

$$\frac{1}{\tau} = \frac{a^2}{\pi\mu^2} \int m_n |\mathbf{p}'| \frac{\text{Im } \mathcal{K}^R(\omega, \mathbf{p} - \mathbf{p}')}{1 - e^{-\omega/T}} d\omega d\omega', \quad (11.102)$$

где  $|\mathbf{p}'|$  определяется из закона сохранения энергии при рассеянии,  $\mathbf{p}'^2/2m_n = \mathbf{p}^2/2m_n - \omega$ .

Сечение рассеяния связано с временем рассеяния по формуле  $\tau^{-1} = \sigma v$ , где  $v = p/m_n$  — скорость нейтрона (мы считаем нормировочный объем равным единице). Получаем

$$\sigma = \frac{a^2 m_n^2}{\pi\mu^2} \int \frac{p'}{p} \frac{\text{Im } \mathcal{K}^R(\omega, \mathbf{p} - \mathbf{p}')}{1 - e^{-\omega/T}} d\omega d\omega'. \quad (11.103)$$

Представив полное сечение в виде

$$\sigma = \int \frac{d\sigma}{d\omega d\omega'} d\omega d\omega' \quad (11.104)$$

и сравнивая это выражение с (11.103), приходим к (11.97).

**Решение 70 а)** Вычислим структурный фактор  $S(\omega, \mathbf{q})$  идеального ферми-газа. Рассмотрим для этого мацубаровский коррелятор плотность-плотность

$$\mathcal{K}_M(i\omega_n, \mathbf{q}) = \frac{1}{2} \int_{-\beta}^{\beta} \langle T_{\tau} \hat{\rho}(\mathbf{r}, \tau) \hat{\rho}(0, 0) \rangle e^{i\omega_n \tau - i\mathbf{q}\mathbf{r}} d^3 \mathbf{r} d\tau. \quad (11.105)$$

Как обычно, спаривая  $\psi$ -операторы, получим, что неприводимая часть среднего (11.105) дается петлевой диаграммой и равна

$$\mathcal{K}_M(i\omega_n, \mathbf{q}) = T \sum_{\varepsilon_m} \int \frac{2d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3} G\left(i\varepsilon_m, \mathbf{p} - \frac{\mathbf{q}}{2}\right) G\left(i\varepsilon_m + i\omega_n, \mathbf{p} + \frac{\mathbf{q}}{2}\right) \quad (11.106)$$

(приводимая часть (11.105) не зависит от  $\tau$  и потому не дает вклада в структурный фактор при ненулевой частоте). Суммируя по  $\varepsilon_m$  с помощью тождества (7.87), получаем

$$\mathcal{K}_M(i\omega_n, \mathbf{q}) = \int \frac{2d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{n_F(\xi_{\mathbf{p}-\mathbf{q}/2}) - n_F(\xi_{\mathbf{p}+\mathbf{q}/2})}{i\omega_n - \xi_{\mathbf{p}-\mathbf{q}/2} + \xi_{\mathbf{p}+\mathbf{q}/2}}. \quad (11.107)$$

Аналитическое продолжение этого выражения достигается простой заменой  $i\omega_n$  на  $\omega + i0$ . Вычисляя мнимую часть и связывая ее со структурным фактором согласно  $S(\omega, \mathbf{q}) = 2 \operatorname{Im} \mathcal{K}^R(\omega, \mathbf{q})$ , получаем общую формулу

$$S(\omega, \mathbf{q}) = 2\pi \int \frac{2d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} (n_F(\xi_{\mathbf{p}-\mathbf{q}/2}) - n_F(\xi_{\mathbf{p}+\mathbf{q}/2})) \delta(\omega + \xi_{\mathbf{p}-\mathbf{q}/2} - \xi_{\mathbf{p}+\mathbf{q}/2}). \quad (11.108)$$

Упростим интеграл по  $d^3\mathbf{p}$  в выражении (11.108). Пусть ось  $z$  направлена вдоль вектора  $\mathbf{q}$ . Введем обозначение  $x = \cos \theta$ , где  $\theta$  — угол между  $\mathbf{p}$  и  $\mathbf{q}$ . Тогда интеграл (11.108) переписется в таком виде:

$$S(\omega, \mathbf{q}) = 2\pi \int_0^\infty \int_{-1}^1 \frac{2\pi p^2 dp dx}{(2\pi)^3} (n_F(\xi_-) - n_F(\xi_+)) \delta\left(\omega - \frac{pqx}{m}\right), \quad (11.109)$$

где

$$\xi_\pm = \frac{p^2 - p_0^2}{2m} + \frac{q^2}{8m} \pm \frac{pqx}{2m}. \quad (11.110)$$

Интегрирование по  $x$  сводится к замене  $x$  на  $x_0 = m\omega/pq$ . При этом следует учесть, что интеграл равен нулю, если  $|x_0| > 1$ . Таким образом, структурный фактор есть

$$S(\omega, \mathbf{q}) = \frac{m}{\pi q} \int_{m|\omega|/q}^\infty p dp (n_F(\xi_-) - n_F(\xi_+)). \quad (11.111)$$

До сих пор мы не делали никаких предположений о величине температуры. Интеграл в (11.111) вычисляется элементарно при произвольной температуре. Мы, однако, найдем структурный фактор (11.111) только в пределе нулевой температуры. При  $T = 0$  фермиевская функция распределения принимает значения 0 и 1. Поэтому выражение (11.111) можно записать в виде

$$S(\omega, q) = \frac{m}{\pi q} \int_{m|\omega|/q}^\infty p dp (\theta(p_-^2 - p^2) - \theta(p_+^2 - p^2)), \quad (11.112)$$

где

$$p_\pm^2 = p_0^2 - \frac{q^2}{4} \mp m\omega \quad (11.113)$$

— корни уравнений  $\xi_\pm = 0$ . Рассмотрим для определенности случай  $\omega > 0$ . Тогда  $p_- > p_+$ . В зависимости от того, как нижний предел интегрирования  $m\omega/q$  соотносится с  $p_+$  и  $p_-$ , возможны разные случаи:



- а) Во-первых, при  $m\omega/q > p_-$  интеграл (11.112) оказывается равным нулю. Это происходит при

$$\left(\frac{m\omega}{q}\right)^2 > p_0 + m\omega - \frac{q^2}{4}. \quad (11.114)$$

Выделяя полный квадрат, получаем уравнение границы области  $S(\omega, \mathbf{q}) > 0$ :

$$\left|\frac{m\omega}{q} - \frac{q}{2}\right| = p_0. \quad (11.115)$$

Эта граница состоит из двух несвязных частей:

$$\omega_{1,2}(q) = \pm \frac{p_0 q}{m} + \frac{q^2}{2m}. \quad (11.116)$$

- б) Во-вторых, при  $m\omega/q < p_+$  интегрирование в (11.112) производится от  $p_-$  до  $p_+$ , что дает

$$S = \frac{m}{2\pi q} (p_+^2 - p_-^2) = \frac{m\omega}{\pi q}. \quad (11.117)$$

Это выражение справедливо в области

$$\left(\frac{m\omega}{q}\right)^2 < p_0 - m\omega - \frac{q^2}{4}, \quad (11.118)$$

то есть при

$$\omega < \omega_3(q) = \frac{p_0 q}{m} + \frac{q^2}{2m}. \quad (11.119)$$

- в) Наконец, если  $p_+ < m\omega/q < p_-$ , то интегрировать следует от точки  $m\omega/q$  до  $p_-$ . Таким образом, в этом случае структурный фактор равен

$$S(\omega, \mathbf{q}) = \frac{m}{2\pi q} \left( p_-^2 - \left(\frac{m\omega}{q}\right)^2 \right). \quad (11.120)$$

Удобно переписать это выражение, выделив полный квадрат:

$$S(\omega, \mathbf{q}) = \frac{m}{2\pi q} \left( p_0^2 - \left(\frac{m\omega}{q} - \frac{q}{2}\right)^2 \right). \quad (11.121)$$

Собирая результаты для различных предельных случаев вместе и вводя безразмерные переданные энергию  $\tilde{\omega} = m\omega/p_0^2$  и импульс  $\tilde{q} = q/p_0$ , приходим к следующему окончательному ответу

$$S(q, \omega) = \frac{mp_0}{2\pi\tilde{q}} \times \begin{cases} 0 & \text{при } \tilde{\omega} > \tilde{q} + \frac{\tilde{q}^2}{2}; \\ 0 & \text{при } 0 < \tilde{\omega} < \frac{\tilde{q}^2}{2} - \tilde{q}; \\ 2\tilde{\omega} & \text{при } 0 < \tilde{\omega} < \tilde{q} - \frac{\tilde{q}^2}{2}; \\ 1 - \left(\frac{\tilde{\omega}}{\tilde{q}} - \frac{\tilde{q}}{2}\right)^2 & \text{при } \tilde{\omega} > \tilde{q} - \frac{\tilde{q}^2}{2}; \end{cases} \quad (11.122)$$

На рис. 11.11 изображены линии уровня  $S(\omega, q)$  и показаны границы области, где  $S(\omega, q) \neq 0$ . Изображены также кривые  $\omega = q^2/2m$  и  $m\omega = p_0q - q^2/2$ .

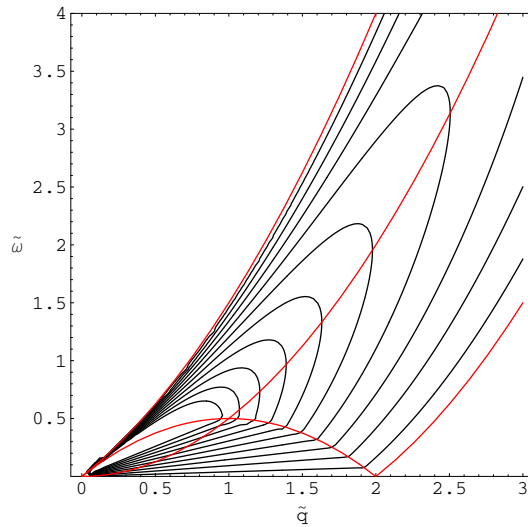


Рис. 11.11

Граница области  $S(\omega, \mathbf{q}) > 0$  пересекает прямую  $\omega = 0$  при  $q = 2p_0$ . В этой же точке оканчивается граница области  $m\omega = p_0q - q^2/2$ . Таким образом, точка  $q = 2p_0$  оказывается особой точкой структурного фактора. Эту особенность можно интерпретировать, рассматривая рассеяние нейтрона жидкостью как рождение пары частица–дырка. При этом  $\omega$  — это энергия пары, а  $\mathbf{q}$  — ее импульс. Если  $q < 2p_0$ , то энергия пары может быть как угодно мала, потому что пару с таким импульсом можно создать, переместив частицу вдоль ферми-поверхности в состояние с другим импульсом, но с почти той же энергией. Если же  $q > 2p_0$ , то частицу придется перевести в состояние с другой энергией, поскольку на ферми-поверхности нет состояний с требуемым импульсом. Именно этот эффект и создает особенность при  $q = 2p_0$ .

Интересно отметить, что максимум структурного фактора  $S(\omega, \mathbf{q})$  при фиксированном  $|\mathbf{q}| > p_0$  достигается при  $\omega = \mathbf{q}^2/2m$ , что соответствует закону дисперсии частиц, — см. (11.121). Парабола  $\omega = q^2/2m$  изображена на рис. 11.11.

**Решение 70 б)** Рассмотрим структурный фактор ферми-жидкости. Естественно ожидать, что он будет похож на структурный фактор ферми-газа, с тем лишь отличием, что в нем должно быть слагаемое, отвечающее процессам рассеяния с испусканием кванта нуль-звука.

Гамильтониан взаимодействующих фермионов имеет вид (8.1). Для простоты будем считать, что взаимодействие между частицами слабое и короткодействующее:  $V(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = g\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ . Мацубаровский коррелятор плотность–плотность  $K(\omega, \mathbf{q})$ , через который выражается структурный фактор, получается суммированием «пузырьковых»

диаграмм, изображенных на рис. 11.12.

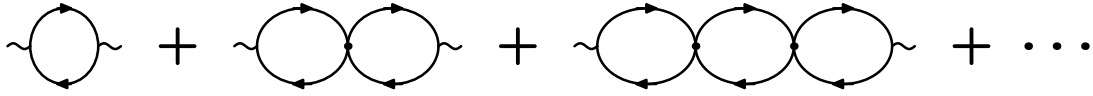


Рис. 11.12

Соответствующая запаздывающая двухчастичная функция Грина есть

$$K^R(\omega, \mathbf{q}) = -\Pi(\omega, \mathbf{q}) - g\Pi^2(\omega, \mathbf{q}) - g^2\Pi^3(\omega, \mathbf{q}) - \dots = -\frac{\Pi(\omega, \mathbf{q})}{1 - g\Pi(\omega, \mathbf{q})}, \quad (11.123)$$

где  $\Pi(\omega, \mathbf{q})$  — запаздывающий поляризационный оператор. Воспользуемся найденным в задаче (44) точным выражением для  $\Pi(\omega, \mathbf{q})$  идеального ферми-газа:

$$\Pi(\omega, \mathbf{k}) = \frac{\nu}{8a} (F(s - a) - F(s + a)), \quad a = \frac{k}{2p_0}, \quad s = \frac{\omega + i0}{v_F k}, \quad (11.124)$$

где

$$F(u) = \int_{-1}^1 \frac{1 - x^2}{u - x} dx = 2u + (1 - u^2) \ln \left( \frac{u + 1}{u - 1} \right). \quad (11.125)$$

Чтобы получить запаздывающую функцию мы добавили  $i0$  к  $\omega$ .

Структурный фактор  $S(\omega, \mathbf{q}) = 2 \text{Im} K^R(\omega, \mathbf{q})$ , соответствующий (11.123) и (11.124), изображен на рис. 11.13 для  $g\nu = 3$ .

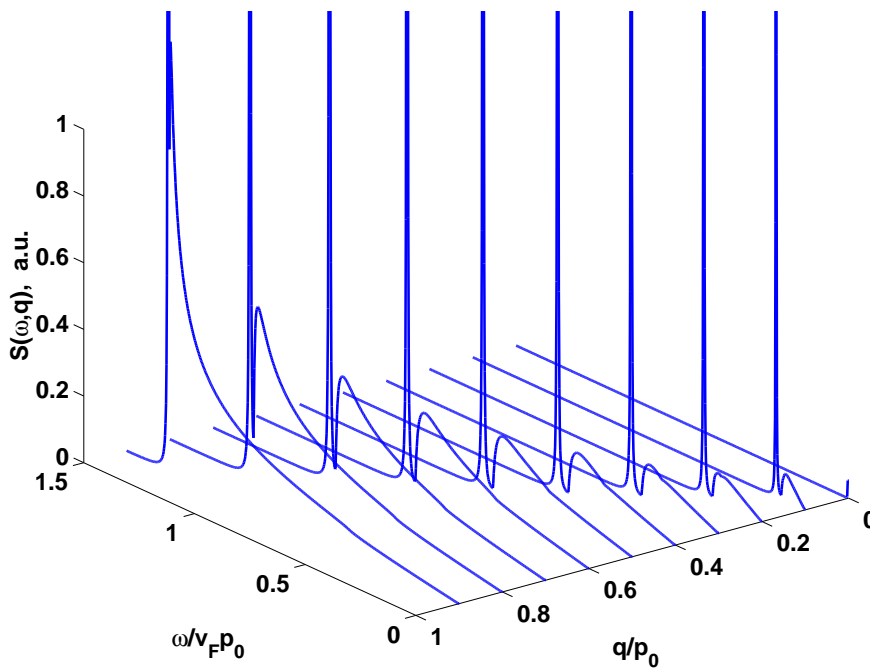


Рис. 11.13

Обратим внимание на резкий пик при частотах несколько выше границы непрерывного спектра, соответствующего рассмотренному в части а) вкладу квазичастиц. Этот пик представляет собой вклад нуль-звуковой моды. Как видно из рис. 11.13, нуль-звуковой пик характеризуется приблизительно линейной зависимостью  $\omega$  от  $\mathbf{q}$ . Он существует только при достаточно малых  $q$  и вливается в непрерывный спектр при  $q \approx 0.8p_0$ . Такое поведение иллюстрирует рассмотренное в задаче (44) свойство закона дисперсии коллективных мод в ферми-жидкости — иметь точку окончания на границе непрерывного спектра квазичастичных возбуждений.

Интересно рассмотреть область малых  $q \ll p_0$ ,  $\omega \ll E_F$ , в которой выражение для поляризационного оператора (11.124) упрощается:

$$\Pi(\omega, \mathbf{q}) \equiv \Pi(s) = -\nu \left( 1 - \frac{s}{2} \ln \left( \frac{s+1}{s-1} \right) \right), \quad s = \frac{\omega + i0}{v_F q}. \quad (11.126)$$

Уравнение  $g\Pi(s) = 1$  для полюса  $K^R(\omega, \mathbf{q})$  в точности совпадает с полученным в гл. 8 уравнением (8.11), дающим закон дисперсии нулевого звука. Скорость нуль-звуковой моды  $\omega = s_0 v_F |\mathbf{q}|$  зависит от константы взаимодействия  $g$ , причем  $s_0 > 1$  при любом отталкивательном взаимодействии  $g > 0$ .

С другой стороны, мнимая часть выражения (11.126) отлична от нуля только при  $s < 1$ , причем в этой области  $\text{Im} \Pi(s) = \frac{\pi}{2} \nu s$ . Поэтому структурный фактор (11.123) можно записать в виде

$$K(s) = \frac{A}{s - s_0} + K_{\text{reg}}(s), \quad (11.127)$$

где  $A$  — вычет  $K(s)$  в полюсе  $s = s_0$ , а  $K_{\text{reg}}(s)$  — регулярная функция, равная нулю при  $s > 1$ .

Величину  $A$  нетрудно найти, вычисляя вычет выражения  $K(s) = -\Pi(s)/(1 - g\Pi(s))$ . Получаем

$$A = \frac{\Pi(s_0)}{g \left. \frac{d\Pi(s)}{ds} \right|_{s=s_0}} = \frac{g^{-1}}{\frac{g\nu}{2} \left[ \ln \frac{s_0 + 1}{s_0 - 1} - \frac{2s_0}{s_0^2 - 1} \right]}. \quad (11.128)$$

Учитывая, что скорость нуль-звука  $s_0$  удовлетворяет соотношению  $g\Pi(s) = 1$ , выражение для  $A$  можно упростить:

$$A = \frac{s_0(s_0^2 - 1)}{g \left[ 1 - g\nu (s_0^2 - 1) \right]}. \quad (11.129)$$

Итак, нуль-звуковой полюс в (11.127) приводит к  $\delta$ -функциональной особенности в структурном факторе. Пик оказывается резким, поскольку в линеаризованной теории ферми-жидкости нуль-звук не затухает. В действительности же пик должен иметь небольшую, но конечную ширину, пропорциональную  $\max[\omega^2, T^2]$  и равную обратному времени затухания.

Подчеркнем еще раз, что выражение (11.127) справедливо только при достаточно малых  $q$ , а при больших  $q$  нуль-звуковой пик сливается с непрерывным вкладом

$K_{\text{рег}}(s)$  и исчезает. Отметим, что с формальной точки зрения наши результаты ограничены предположением о малости взаимодействия  $g$ , позволяющим отбросить все диаграммы кроме пузырьковых. На самом же деле все сказанное о поведении структурного фактора в области  $q \ll p_0$ ,  $\omega \ll E_F$  справедливо для произвольно сильного взаимодействия. Дело в том, что в этой области работает теория ферми-жидкости и для нахождения корреляционной функции плотность-плотность можно воспользоваться кинетическим уравнением (8.7), решение которого эквивалентно суммированию пузырьковых диаграмм.

**Решение 71 а)** Сравним выражение (11.27) для рассмотренного в задачах (69) и (70) взаимодействия нейтронов с плотностью ядер с взаимодействием в модели дебаевского желе,

$$\widehat{\mathcal{H}}_{\text{int}} = -\frac{2\pi a\hbar^2}{\mu} \delta\widehat{\rho}(\widehat{\mathbf{R}}, t), \quad \delta\widehat{\rho} = -\rho_0 \operatorname{div} \mathbf{u}, \quad (11.130)$$

где  $\widehat{\mathbf{R}}$  — координата нейтрона. Как нетрудно видеть, вклад фононов в структурный фактор есть  $S(\omega, \mathbf{q}) = 2 \operatorname{Im} \mathcal{K}^R(\omega, \mathbf{q})$ , где

$$\mathcal{K}^R(\mathbf{r}, t) = -i \left( \frac{2\pi a\hbar^2}{\mu} \right)^2 \begin{cases} \langle \delta\widehat{\rho}(\mathbf{r}, t) \delta\widehat{\rho}(0, 0) - \delta\widehat{\rho}(0, 0) \delta\widehat{\rho}(\mathbf{r}, t) \rangle, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases} \quad (11.131)$$

Сравнивая это выражение с определением фоновой функции Грина  $\mathcal{D}^R(x, x') = -i\theta(t-t') \langle [\widehat{\varphi}(x), \widehat{\varphi}(x')] \rangle$ , где  $\widehat{\varphi}(x) = c\sqrt{\rho_0} \operatorname{div} \mathbf{u}$  (см. выражения (6.5) и (6.7)), получаем соотношение:

$$\mathcal{K}^R(\mathbf{r}, t) = \left( \frac{2\pi a\hbar^2}{\mu c} \right)^2 \mathcal{D}^R(\mathbf{r}, t). \quad (11.132)$$

Запаздывающая функция Грина дебаевских фононов есть

$$\mathcal{D}^R(\omega, \mathbf{k}) = \frac{\omega_0^2(\mathbf{k})}{\omega^2 - \omega_0^2(\mathbf{k}) + i0 \operatorname{sign} \omega}, \quad \omega_0(\mathbf{k}) = c|\mathbf{k}|. \quad (11.133)$$

Отсюда  $\operatorname{Im} \mathcal{D}^R(\omega, \mathbf{k}) = \frac{\pi}{2} \omega_0 (\delta(\omega - \omega_0(\mathbf{k})) - \delta(\omega + \omega_0(\mathbf{k})))$ , и поэтому

$$S(\omega, \mathbf{k}) = \pi \left( \frac{2\pi a\hbar^2}{\mu c} \right)^2 \omega_0(\mathbf{k}) (\delta(\omega - \omega_0(\mathbf{k})) - \delta(\omega + \omega_0(\mathbf{k}))). \quad (11.134)$$

Отметим, что отрицательный знак второго слагаемого в (11.134) согласуется с требованием положительности вероятности рассеяния нейтронов. Это обеспечивается множителем  $1/(1 - e^{-\beta\omega})$  в выражении (11.28) для сечения рассеяния.

Как следует из (11.134), вероятность рассеяния с передачей кристаллу энергии  $\omega$  и импульса  $\mathbf{k}$  пропорциональна

$$(N_B(\omega_0(\mathbf{k})) + 1) \delta(\omega - \omega_0(\mathbf{k})) + N_B(\omega_0(\mathbf{k})) \delta(\omega + \omega_0(\mathbf{k})), \quad (11.135)$$

где  $N_B(\omega)$  — бозевская функция распределения. Таким образом, положение пика в структурном факторе как функция  $\omega$  и  $\mathbf{k}$  позволяет определить спектр фононов.

**Решение 71 б)** Функция Грина фонона в металле  $D_0(\omega, \mathbf{q}) = \omega_0^2(\mathbf{q})/(\omega^2 - \omega_0^2(\mathbf{q}))$  перенормируется за счет электрон-фононного взаимодействия. Согласно теории Мигдала (см. задачу 31), все наиболее существенные эффекты можно учесть с помощью поляризационного оператора, причем сам поляризационный оператор может быть найден через перенормированные функции Грина без учета вершинных поправок. Соответственно

$$D(\omega, \mathbf{q}) = \frac{D_0(\omega, \mathbf{q})}{1 - g^2 \Pi(\omega, \mathbf{q}) D_0(\omega, \mathbf{q})} = \frac{\omega_0^2(\mathbf{q})}{\omega^2 - \omega_0^2(\mathbf{q})(1 + g^2 \Pi(\omega, \mathbf{q}))}, \quad \omega_0(\mathbf{q}) = c|\mathbf{q}|, \quad (11.136)$$

где поляризационный оператор  $\Pi(\omega, \mathbf{q})$  дается соотношениями (11.124) и (11.125). Поскольку характерные  $\omega$  и  $q$ , представляющие для нас интерес, есть  $\omega \simeq cq$ , безразмерный параметр  $s = \omega/v_F q$  в данном случае много меньше единицы. Соответственно, переходя в (11.124) к пределу  $s \ll a = k/2p_0$ , мы получаем

$$\Pi(a) = -\frac{\nu}{4a} \left( 2a + (1 - a^2) \ln \left| \frac{1+a}{1-a} \right| \right). \quad (11.137)$$

Плотность состояний  $\nu$  в (11.137) должна быть определена с учетом электрон-фононной перенормировки, найденной в задаче 29. Полюс функции Грина (11.136) дает перенормированный закон дисперсии фононов:

$$\omega = \omega_0(\mathbf{q})(1 + g^2 \Pi(|\mathbf{q}|/2p_0)) \quad (11.138)$$

Выражение (11.137) имеет при  $|\mathbf{q}| = 2p_0$  слабую особенность, приводящую к логарифмической расходимости перенормированной скорости звука  $\tilde{c} = d\omega/dq$ . Эта особенность и есть коновская аномалия.

Вклад фононов в структурный фактор, согласно (11.132) и (11.136), есть

$$S(\omega, \mathbf{q}) = 2 \left( \frac{2\pi a \hbar^2}{\mu c} \right)^2 \operatorname{Im} \frac{\omega_0^2(\mathbf{q})}{(\omega + i0)^2 - \omega_0^2(\mathbf{q})(1 + g^2 \Pi(\omega + i0, \mathbf{q}))}. \quad (11.139)$$

На рис. 11.14 мы изобразили структурный фактор, получающийся при использовании выражений (11.124) и (11.125) для  $\Pi(\omega, \mathbf{q})$ . Значение константы электрон-фононного

взаимодействия было выбрано равным  $g^2\nu = 8/9$ .

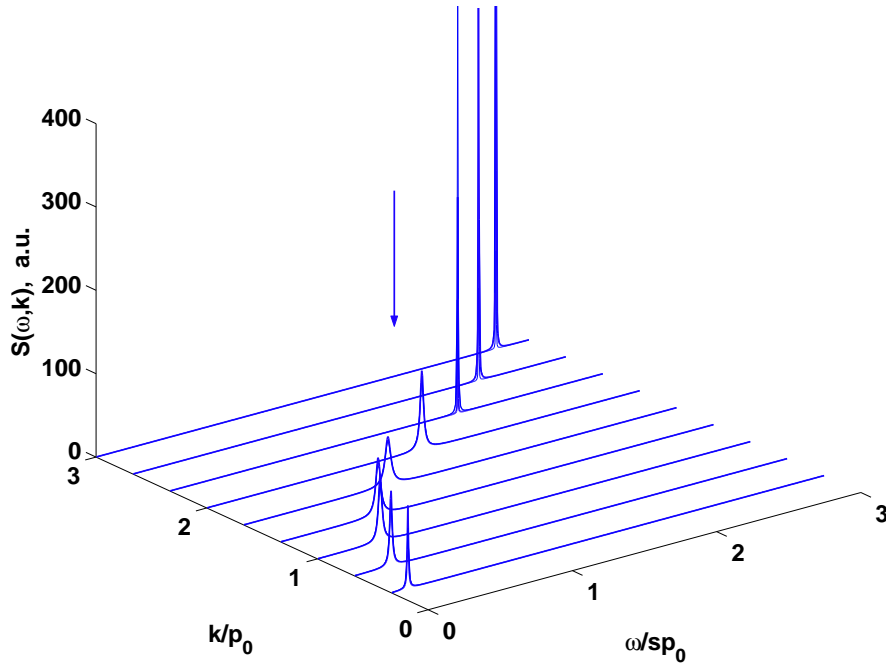


Рис. 11.14

Положение пика в плоскости  $(\omega, q)$  дает закон дисперсии фононов  $\omega(q)$ . При  $q \leq 2p_0$  закон дисперсии приблизительно линейный с наклоном  $c\sqrt{1 - g^2\nu}$ , что соответствует перенормировке скорости акустических фононов — см. задачу 31. При  $q > 2p_0$  перенормировка скорости постепенно исчезает. На рис. 11.14 хорошо видно резкое возрастание наклона зависимости  $\omega(q)$  в окрестности  $q = 2p_0$ . Отметим также, что конечная ширина пиков на рис. 11.14 связана с тем, что электрон-фононное взаимодействие приводит к затуханию фононов в металле — см. задачу 31 б).





## Глава 12.

# Бозонизация и латтинжеровская жидкость

Взаимодействующие фермионы на прямой представляют собой особую интересную систему. Оказывается, даже слабое взаимодействие полностью меняет характер одномерной ферми-системы, приводит к перестройке спектра возбуждений и делает теорию ферми-жидкости неприменимой. Одномерные фермионы могут быть успешно описаны в рамках модели Томонаги-Латтинжера и ее обобщений, и по этой причине часто используется название *латтинжеровская жидкость*.

Метод бозонизации, с помощью которого строится теория латтинжеровской жидкости, является своеобразным квантовомеханическим аналогом гидродинамики. Элементарные возбуждения системы вводятся с помощью фурье-компонент операторов плотности и коммутационных соотношений между ними. Соответствующие квазичастицы подчиняются статистике Бозе. Исходные же фермионные операторы в таком представлении выражаются через бозонные операторы весьма нетривиально.

Вообще говоря, представление возбуждений ферми-системы с помощью эквивалентных бозонов имеет место для произвольной размерности системы. Так, в главе 8 мы продемонстрировали, что теорию ферми-жидкости можно «проквантовать», используя бозе-операторы электрон-дырочных пар (см. раздел 8.3 и задачи 44, 45, 49). Однако только в одномерном случае метод бозонизации приводит к результатам, которые невозможно или же трудно получить более стандартными методами.

Помимо задачи о взаимодействующих фермионах на прямой, метод бозонизации находит применение также при изучении динамики невзаимодействующих фермионов в произвольной размерности. В частности, этот метод оказывается весьма удобным при описании встряски ферми-системы под действием возмущения, зависящего от времени. Примерами такого рода являются «катастрофа ортогональности» и задача о крае рентгеновского спектра поглощения в металле (см. задачи 75 и 76).

### 12.1. Гидродинамика одномерного ферми-газа

Гидродинамическое описание применимо, если характерные пространственный и временной масштабы велики по сравнению с микроскопическими длинами и временами.

Соответствующие условия для ферми-газа записываются в виде:  $k \ll p_0$ ,  $\omega \ll E_F$ .

Некоторые факты гидродинамики одномерного ферми-газа нам уже известны из задачи 24, в которой мы нашли флуктуации числа частиц одномерного ферми-газа внутри фиксированного интервала большой длины  $L \gg p_0^{-1}$ ,

$$\langle\langle N_L^2 \rangle\rangle = \langle N_L^2 \rangle - \langle N_L \rangle^2 = \frac{1}{\pi^2} \ln p_0 L, \quad (12.1)$$

а также из задачи 25, в которой был найден коррелятор плотность-плотность

$$Q(\omega, k) = \nu \frac{v^2 k^2}{\omega^2 - v^2 k^2 + i\delta \operatorname{sign} \omega}, \quad k \ll p_0, \quad \omega \ll E_F, \quad (12.2)$$

где  $\nu$  — плотность состояний на уровне Ферми.

Интересно сопоставить эти результаты со свойствами одномерной упругой среды. Гриновская функция фононов в одномерной модели Дебая есть  $D(x - x', t - t') = -i\rho c^2 \langle T \partial_x \hat{u}(x, t) \partial_x \hat{u}(x', t') \rangle$ , где  $\hat{u}(x, t)$  — оператор смещения среды<sup>1</sup>. В одномерном случае оператор  $\hat{u}(x, t)$  имеет вид:

$$\hat{u}(x, t) = \frac{1}{\sqrt{L}} \sum_k \frac{\operatorname{sign} k}{\sqrt{2\rho c|k|}} \left( b_k e^{ikx - ic|k|t} + b_k^+ e^{-ikx + ic|k|t} \right), \quad (12.3)$$

где  $L$  — длина системы, а  $b_k$  и  $b_k^+$  — канонические бозевские операторы фононов<sup>2</sup> (ср. с трехмерным выражением (6.1)). В Фурье-представлении:

$$D(\omega, k) = \frac{c^2 k^2}{\omega^2 - c^2 k^2 + i\delta \operatorname{sign} \omega}. \quad (12.4)$$

Обратим внимание на то, что это выражение совпадает с коррелятором плотности (12.2), с точностью до множителя  $\nu$  и замены  $v \rightarrow c$ . Можно сделать еще одно наблюдение, сравнив флуктуации числа частиц (12.1) в интервале большой длины с коррелятором смещений (12.3). Пользуясь теоремой Вика, усредняем:

$$\langle \hat{u}(x, t) \hat{u}(x', t') \rangle_{t'=t} = \int \frac{dk}{2\pi} \frac{e^{ik(x'-x)}}{2\rho c|k|} = \frac{1}{2\pi\rho c} \ln \frac{L}{|x - x'|}. \quad (12.5)$$

Отсюда нетрудно получить, что

$$\langle (\hat{u}(x, t) - \hat{u}(x', t))^2 \rangle = \frac{1}{\pi\rho c} \ln \frac{|x - x'|}{a}, \quad (12.6)$$

где  $a$  — период решетки (см. также задачу 54, где коррелятор смещений (12.5) найден при произвольной температуре).

<sup>1</sup>Обычно гриновская функция фононов вводится несколько иначе, через операторы  $\hat{\varphi}(x, t)$  (см. (7.9)-(7.16) [1]). Однако в модели Дебая  $\nabla u$  и  $\varphi$  отличаются множителем:  $\varphi(r, t) = c\sqrt{\rho} \nabla u(r, t)$ .

<sup>2</sup>Предполагается, что  $\sum_k \dots = \int \dots \frac{dk}{2\pi}$  и  $[b_k, b_{k'}^+] = 2\pi L \delta(k - k')$ , где  $L$  — размер системы. Данные соглашения используются всюду в этой главе.

Совпадение корреляторов (12.6) и (12.1) подсказывает, что должно существовать преобразование, переводящее одну задачу в другую. Сравнивая коэффициенты перед логарифмами, определяем правило соответствия:

$$\partial_x \hat{u}(x, t) \Leftrightarrow (\pi/\rho c)^{1/2} \hat{n}(x, t) = (\pi/\rho c)^{1/2} \hat{\psi}^+(x, t) \psi(x, t) . \quad (12.7)$$

Нетрудно видеть, что если бы нашлось преобразование, обеспечивающее такую связь, то при этом коррелятор плотность-плотность (12.2) в точности перешел бы в гриновскую функцию фононов.

Преобразование фермионной задачи в эквивалентную задачу динамики одномерной упругой среды называется *бозонизацией*. Оно имеет много общего с преобразованием Йордана-Вигнера, связывающим спиновые и фермиевские операторы в одномерной цепочке (см. раздел 1.4). Причина сходства заключается в том, что спиновые операторы на разных узлах коммутируют, а значит, они удовлетворяют таким же бозонным коммутационным соотношениям, как и операторы фононов. Эту аналогию можно развить, построив из спиновых операторов, взятых на узлах, операторы спиновых волн в импульсном представлении: и фононы, и спиновые волны представляют собой квазичастицы, подчиняющиеся бозе-статистике. Однако, в отличие от точного преобразования Йордана-Вигнера, преобразование бозонизации — приближенное. Точность его ограничена пределом длинных волн. Иначе говоря, оно законно только если речь идет об эффектах в ферми-системе, связанных с электронами или дырками вблизи уровня Ферми.

## 12.2. Коммутаторы операторов плотности

Преобразование бозонизации нетрудно построить явно. Начнем с того,<sup>3</sup> что разобьем фурье-компоненту оператора плотности бесспиновых фермионов на два слагаемых:

$$\hat{\rho}(k) = \sum_p a_{p-k/2}^+ a_{p+k/2} = \hat{\rho}_1(k) + \hat{\rho}_2(k) , \quad (12.8)$$

где

$$\hat{\rho}_1(k) = \frac{1}{L} \sum_{p>0} a_{p-k/2}^+ a_{p+k/2} , \quad \hat{\rho}_2(k) = \frac{1}{L} \sum_{p<0} a_{p-k/2}^+ a_{p+k/2} . \quad (12.9)$$

Как уже было отмечено, всегда подразумевается, что существенными окажутся только состояния вблизи уровня Ферми, поэтому  $k$  мало, а  $p$  близко либо к  $p_0$ , либо к  $-p_0$ . Такого рода соображения и служат основой для выбора представления (12.8) оператора  $\hat{\rho}(k)$  в виде суммы «правого» и «левого» операторов плотности (12.9), а также всех нижеследующих манипуляций с  $\hat{\rho}_{1,2}(k)$ .

Рассмотрим коммутационные соотношения для введенных операторов. Фурье-компоненты полной плотности  $\hat{\rho}(k)$  просто коммутируют:

$$[\hat{\rho}(k), \hat{\rho}(k')] = 0 . \quad (12.10)$$

<sup>3</sup>Мы следуем работе: S. Tomonaga, *Progr. Theor. Phys. (Kyoto)*, **5**, p. 544 (1950)

А вот коммутаторы  $\hat{\rho}_1(k)$  и  $\hat{\rho}_2(k)$  нетривиальны. Для примера найдем

$$\begin{aligned} [\hat{\rho}_1(k), \hat{\rho}_1(k')] &= \frac{1}{L} \sum_{p>0} \left[ a_{p-k/2}^+ a_{p+k/2} \theta \left( p + \frac{k}{2} + \frac{k'}{2} \right) - a_{p-k'-k/2}^+ a_{p+k/2} \right. \\ &\quad \left. \times \theta \left( p - \frac{k}{2} - \frac{k'}{2} \right) \right] = \frac{1}{L} \sum_p a_{p-q}^+ a_{p+q} \left( \theta \left( p + \frac{k}{2} \right) - \theta \left( p - \frac{k}{2} \right) \right), \end{aligned} \quad (12.11)$$

где  $q = \frac{1}{2}(k + k')$ . Заметим, что разность  $\theta$ -функций ограничивает область изменения  $p$  следующим образом:  $|p| < k/2$ . В то же время, при интересующих нас малых  $|k| \ll p_0$  практически все состояния, дающие вклад в сумму (12.11), находятся глубоко под уровнем Ферми. Поэтому естественный шаг — заменить в (12.11) произведения операторов  $a_{p_1}^+ a_{p_2}$  на их средние значения  $\langle a_{p_1}^+ a_{p_2} \rangle = 2\pi L n(p_1) \delta(p_1 - p_2)$ , где  $n(p_1)$  — фермиевское распределение. Сделав такую замену, получаем

$$[\hat{\rho}_1(k), \hat{\rho}_1(-k')] = \delta_{kk'} \begin{cases} k, & |k| < 2p_0 \\ 2p_0 \operatorname{sign} k, & |k| > 2p_0 \end{cases}. \quad (12.12)$$

Аналогично вычисляем остальные коммутаторы. Как уже отмечалось, нас интересуют малые  $k, k' \ll p_0$ . При этом условии находим:

$$[\hat{\rho}_1(k), \hat{\rho}_1(-k')] = k \delta_{kk'}, \quad [\hat{\rho}_2(k), \hat{\rho}_2(-k')] = -k \delta_{kk'}, \quad (12.13)$$

$$[\hat{\rho}_1(k), \hat{\rho}_2(-k')] = 0. \quad (12.14)$$

Из вывода ясно, что эти выражения есть результат приближения, пренебрегающего изменением состояний частиц глубоко под уровнем Ферми.

Отметим, что в координатном представлении коммутационные соотношения (12.13) – (12.14) принимают вид:

$$[\hat{\rho}_j(x), \hat{\rho}_l(x')] = \pm \frac{1}{2\pi i} \delta_{jl} \delta'(x - x'), \quad (\delta'(x) \equiv \partial_x \delta(x)), \quad (12.15)$$

где положительный знак соответствует правым частицам, а отрицательный — левым. Соотношение такого вида называют «аномальным коммутатором Швингера».

Замена операторов в правой части коммутационных соотношений на скаляры, позволяющая перейти от (12.11) к (12.13), (12.14), является центральным пунктом теории Томонаги. Хотя на первый взгляд такого рода приближение может показаться малообоснованным, было выяснено, что приближение Томонаги в точности соответствует переходу от микроскопического описания к гидродинамическому, и поэтому на масштабах, много больших среднего расстояния между электронами, оно всегда является точным<sup>4</sup>.

Оказывается удобным выразить операторы плотности правых и левых частиц  $\hat{\rho}_{1,2}(k)$  через бозевские операторы. Наиболее естественно выбрать  $b_k$  и  $b_k^+$  с  $k > 0$  для правых частиц, и с  $k < 0$  для левых частиц:

$$\hat{\rho}_1(x) = \sum_{k>0} \frac{1}{\lambda_k L} (b_k e^{ikx} + b_k^+ e^{-ikx}), \quad \hat{\rho}_2(x) = \sum_{k<0} \frac{1}{\lambda_k L} (b_k e^{ikx} + b_k^+ e^{-ikx}), \quad (12.16)$$

<sup>4</sup>Подробное обсуждение этих вопросов можно найти в работе: F.D.M. Haldane, *J. Phys. C*14, 2585 (1981)

где  $\lambda_k = (2\pi/|k|L)^{1/2}$ . Определение (12.16) согласовано с коммутационными соотношениями (12.13), (12.14). Из (12.13), (12.14) следуют канонические коммутационные соотношения между операторами  $b_k$  и  $b_{k'}^+$ , причем нормировка в (12.16) такова, что  $[b_k, b_{k'}^+] = 2\pi L \delta_{kk'}$ .

### 12.3. Модель Томонаги

Рассмотрим задачу, для решения которой, собственно говоря, преобразование бозонизации и было впервые введено. Пусть имеется одномерная система бесспиновых фермионов, взаимодействующих друг с другом:

$$\widehat{\mathcal{H}} = \frac{1}{L} \sum_p \xi(p) a_p^+ a_p + \frac{1}{2L^2} \sum_{p_1+p_3=p_2+p_4} V_{p_1-p_2} a_{p_1}^+ a_{p_2} a_{p_3}^+ a_{p_4}, \quad (12.17)$$

где  $\xi(p) = (p^2 - p_0^2)/2m$ . Здесь  $V_k = \int V(r) e^{-ikr} dr$  — формфактор потенциала взаимодействия. Рассмотрим случай, когда радиус взаимодействия  $r_0$  много больше  $p_0^{-1}$ . При этом формфактор  $V_k$  как функция  $k$  быстро спадает при  $k \sim r_0^{-1} \ll p_0$ . Как всегда, нас интересуют только состояния вблизи уровня Ферми, то есть при  $p_i \simeq \pm p_0$ .

Легко видеть, что при этих условиях все взаимодействия сводятся к двум существенно различным процессам рассеяния, при которых две частицы, рассеивающиеся друг на друге, движутся в одну сторону или навстречу друг другу. Поэтому достаточно рассмотреть такие комбинации импульсов:

$$(i) \quad p_1 \simeq p_0, \quad p_2 \simeq p_0, \quad p_3 \simeq p_0, \quad p_4 \simeq p_0;$$

$$(ii) \quad p_1 \simeq p_0, \quad p_2 \simeq p_0, \quad p_3 \simeq -p_0, \quad p_4 \simeq -p_0$$

(и, конечно, отличающиеся знаком всех импульсов и/или перестановкой частиц). Введем обозначения:

$$g_1(k) \equiv V_k, \quad g_2(k) \equiv V_{2p_0+k}, \quad (12.18)$$

причем будем считать, что  $k \ll p_0$ . Амплитуда  $g_1(k)$  описывает процесс рассеяния частиц, находящихся с одной и той же стороны поверхности Ферми (рассеяние вперед), а  $g_2(k)$  — переброс двух частиц с одной стороны поверхности Ферми на другую навстречу друг другу (рассеяние назад).

Запишем гамильтониан, явно выделяя малые импульсы  $k_1, k_2, q$ :

$$\widehat{\mathcal{H}} = \widehat{\mathcal{H}}_0 + \widehat{\mathcal{H}}_1 + \widehat{\mathcal{H}}_2; \quad (12.19)$$

$$\widehat{\mathcal{H}}_0 = \frac{1}{L} \sum_{k \ll p_0} \xi(p_0 + k) \left( a_{p_0+k}^+ a_{p_0+k} + a_{-p_0-k}^+ a_{-p_0-k} \right),$$

$$\widehat{\mathcal{H}}_1 = \frac{1}{2L^2} \sum_{k_1 k_2 q} g_1(q) \left( a_{p_0+k_1+q/2}^+ a_{p_0+k_1-q/2} a_{p_0+k_2-q/2}^+ a_{p_0+k_2+q/2} + \right. \\ \left. + (p_0 \rightarrow -p_0) \right),$$

$$\widehat{\mathcal{H}}_2 = \frac{1}{L^2} \sum_{k_1 k_2 q} g_2(q) a_{p_0+k_1+q/2}^+ a_{p_0+k_1-q/2} a_{-p_0+k_2-q/2}^+ a_{-p_0+k_2+q/2}$$

Постараемся теперь выразить гамильтониан через операторы  $\hat{\rho}_{1,2}(k)$ . Для этого заметим, что суммирование по  $k_1$  и  $k_2$  в  $\widehat{\mathcal{H}}_1$  и  $\widehat{\mathcal{H}}_2$  сводится к суммированию по  $p$  в (12.9). С учетом этого обстоятельства  $\widehat{\mathcal{H}}_1$  и  $\widehat{\mathcal{H}}_2$  можно переписать так:

$$\begin{aligned}\widehat{\mathcal{H}}_1 &= \frac{1}{2} \sum_q g_1(q) \left( \hat{\rho}_1(q) \hat{\rho}_1(-q) + \hat{\rho}_2(q) \hat{\rho}_2(-q) \right), \\ \widehat{\mathcal{H}}_2 &= \sum_q g_2(q) \hat{\rho}_1(q) \hat{\rho}_2(-q).\end{aligned}\quad (12.20)$$

В отличие от взаимодействия  $\widehat{\mathcal{H}}_1 + \widehat{\mathcal{H}}_2$ , гамильтониан  $\widehat{\mathcal{H}}_0$  невзаимодействующих частиц не удастся столь же просто выразить через  $\hat{\rho}_{1,2}(k)$ , поскольку в нем присутствует множитель  $\xi(p_0 + k)$ . Тем не менее, оказывается, что если заменить квадратичный спектр фермионов  $\xi(p) = (p^2 - p_0^2)/2m$  на линейный  $\xi(p) = v(|p| - p_0)$ , то и гамильтониан  $\widehat{\mathcal{H}}_0$  можно представить в виде оператора квадратичного по  $\hat{\rho}_{1,2}(k)$ . Модель одномерного ферми-газа, получающаяся таким образом, называется моделью Томонаги-Латтинжера.

Чтобы угадать, как  $\widehat{\mathcal{H}}_0$  выражается через  $\hat{\rho}_1(k)$  и  $\hat{\rho}_2(k)$ , применим небольшую хитрость. Предположим, что ответ записывается в виде

$$\widehat{\mathcal{H}}_0 = \sum_k \alpha_k \left( \hat{\rho}_1(k) \hat{\rho}_1(-k) + \hat{\rho}_2(k) \hat{\rho}_2(-k) \right) \quad (12.21)$$

и найдем коммутатор  $[\hat{\rho}_1(k), \widehat{\mathcal{H}}_0]$ . С одной стороны, согласно (12.13),

$$[\hat{\rho}_1(k), \widehat{\mathcal{H}}_0] = \sum_{k'} \alpha_{k'} [\hat{\rho}_1(k), \hat{\rho}_1(k') \hat{\rho}_1(-k')] = \frac{k}{\pi} \alpha_k \hat{\rho}_1(k). \quad (12.22)$$

Теперь найдем этот же коммутатор «по-честному»:

$$\begin{aligned}[\hat{\rho}_1(k), \widehat{\mathcal{H}}_0] &= \frac{1}{L^2} \sum_{p>0} \sum_{p'} v(p' - p_0) \left[ a_{p-k/2}^+ a_{p+k/2}, a_{p'}^+ a_{p'} \right] \\ &= \frac{1}{L^2} \sum_{p>0} \sum_{p'} v(p' - p_0) \left( a_{p-k/2}^+ \left[ a_{p+k/2}, a_{p'}^+ a_{p'} \right] + \left[ a_{p-k/2}^+, a_{p'}^+ a_{p'} \right] a_{p+k/2} \right) \\ &= \frac{2\pi}{L} \sum_{p>0} \sum_{p'} v(p' - p_0) \left( a_{p-k/2}^+ a_{p'} \delta_{p+k/2-p'} - a_{p'}^+ a_{p+k/2} \delta_{p-k/2-p'} \right) \\ &= \frac{vk}{L} \sum_{p>0} a_{p-k/2}^+ a_{p+k/2} = vk \hat{\rho}_1(k)\end{aligned}\quad (12.23)$$

Сравнивая (12.22) и (12.23), находим  $\alpha_k = \pi v$  и получаем

$$\widehat{\mathcal{H}}_0 = \pi v \sum_k \left( \hat{\rho}_1(k) \hat{\rho}_1(-k) + \hat{\rho}_2(k) \hat{\rho}_2(-k) \right). \quad (12.24)$$

Итак, длинноволновая динамика ферми-газа допускает описание в терминах волн плотности в газе фермионов. Отметим, что вместо величин  $\hat{\rho}_1(k)$  и  $\hat{\rho}_2(k)$  иногда бывает удобнее пользоваться их комбинациями  $\hat{\rho}(k) = \hat{\rho}_1(k) + \hat{\rho}_2(k)$  и  $\hat{j}(k) = \hat{\rho}_1(k) - \hat{\rho}_2(k)$ , которые есть просто плотность и ток частиц.

Теперь можно заняться задачей о спектре возбуждений одномерного ферми-газа с взаимодействием. Все члены в преобразованном гамильтониане оказываются квадратичными по  $\hat{\rho}_{1,2}(k)$ . Выражая  $\hat{\rho}_1(k)$  и  $\hat{\rho}_2(k)$  через операторы  $b_k^+$ ,  $b_k$  по формулам (12.16), находим

$$\widehat{\mathcal{H}} = \frac{1}{2\pi L} \sum_{k>0} \left[ (2\pi k v + k g_1(k)) (b_k^+ b_k + b_{-k}^+ b_{-k}) + k g_2(k) (b_k^+ b_{-k}^+ + b_k b_{-k}) \right]. \quad (12.25)$$

Переходим к квазичастицам, выполняя преобразование Боголюбова,

$$\begin{aligned} \tilde{b}_k &= \text{ch } \theta_k b_k + \text{sh } \theta_k b_{-k}^+ \\ \tilde{b}_{-k}^+ &= \text{ch } \theta_k b_{-k}^+ + \text{sh } \theta_k b_k, \end{aligned} \quad (12.26)$$

и подбирая параметр преобразования  $\theta_k$  так, чтобы гамильтониан стал диагональным:

$$\text{th } 2\theta_k = \frac{g_2(k)}{g_1(k) + 2\pi v}. \quad (12.27)$$

Получаем гамильтониан и спектр возбуждений квазичастиц:

$$\widehat{\mathcal{H}} = \frac{1}{L} \sum_k \omega(k) \tilde{b}_k^+ \tilde{b}_k, \quad \omega(k) = \frac{|k|}{2\pi} \left( (2\pi v + g_1(k))^2 - g_2^2(k) \right)^{1/2}. \quad (12.28)$$

Полученное решение показывает, что квазичастицами в модели Томонаги-Латтинжера являются не фермионы, а бозоны со спектром (12.28). Перестройка спектра элементарных возбуждений происходит из-за того, что взаимодействие вблизи ферми-поверхности сильное, и поэтому время жизни фермионов оказывается слишком малым. Это означает, что в одном измерении теория ферми-жидкости неприменима.

Модель Томонаги-Латтинжера нетрудно обобщить на частицы со спином, что приводит к бозонизованной задаче, в которой имеются операторы как плотности заряда, так и плотности спина, причем гамильтониан остается квадратичным. К сожалению, детальное изложение всех связанных с этим вопросов увело бы нас слишком далеко. Поэтому ограничимся ссылкой на книгу *Many-Particle Physics*, G. D. Mahan (Plenum Press, 1990), Chap. 4, а также на оригинальные работы (см. A. Luther and V. J. Emery, *Phys. Rev. Lett.* **33**, 589 (1974), A. Luther and I. Peschel, *Phys. Rev. B* **9**, 2911 (1974), и цитированную в них литературу).

## 12.4. От бозонов к фермионам

Важную роль в теории латтинжеровской жидкости играет обратное преобразование бозонизации, позволяющее выразить фермионные операторы через бозонные (!) и получить выражение для функции Грина взаимодействующей ферми-системы.

Представление фермионных операторов можно найти, рассматривая коммутационные соотношения. Поскольку гамильтониан записывается только через операторы плотности (12.16), достаточно построить из них такие операторы  $\hat{\psi}_j(x)$ ,  $\hat{\psi}_j^+(x)$ , чтобы выполнялись стандартные соотношения

$$[\hat{\psi}_j(x), \hat{\psi}_l(x')]_+ = [\hat{\psi}_j^+(x), \hat{\psi}_l^+(x')]_+ = 0,$$

$$[\widehat{\psi}_j^+(x), \widehat{\psi}_l(x')]_+ = \delta_{jl} \delta(x - x'), \quad (12.29)$$

( $j, l = 1, 2$ ). Оказывается, соотношения (12.29) можно получить, выбрав представление фермионных операторов следующим образом:

$$\widehat{\psi}_j(x) = A_j e^{i\widehat{\phi}_j(x)}, \quad \widehat{\psi}_j^+(x) = \bar{A}_j e^{-i\widehat{\phi}_j(x)}, \quad (12.30)$$

$$\widehat{\phi}_j(x) = 2\pi \int_{-\infty}^x \widehat{\rho}_j(x') dx', \quad (12.31)$$

где константы  $A_j$ , зависящие от ультрафиолетовой обрезки интеграла (12.31), будут определены позже. Выражения (12.30) по форме напоминают струну, возникающую в преобразовании Йордана-Вигнера.<sup>5</sup> Хотя на первый взгляд выражения (12.30), (12.31) выглядят несколько таинственно, можно убедиться прямым вычислением, что они приводят к антикоммутирующим фермиевским операторам.

Проверим коммутационные соотношения (12.29) между  $\widehat{\psi}_{1,2}^+(x)$  и  $\widehat{\psi}_{1,2}(x')$ . Воспользуемся для этого известным тождеством Бейкера-Хаусдорфа,

$$e^U e^V = e^{U+V+\frac{1}{2}[U,V]}, \quad (12.32)$$

верным, если  $[U, V]$  коммутирует как с  $U$ , так и с  $V$ . План вычисления заключается в том, чтобы с помощью (12.32) преобразовать произведения  $\widehat{\psi}_j^+(x)\widehat{\psi}_l(x')$  и  $\widehat{\psi}_j(x)\widehat{\psi}_l^+(x')$  к такому виду, в котором сингулярность при  $x' = x$  выделена явным образом.

Запишем операторы фазы, стоящие в показателе экспонент (12.30), через бозонные операторы:

$$\widehat{\phi}_1(x) = 2\pi \int_{-\infty}^x \widehat{\rho}_1(x') dx' = i \sum_{k>0} \lambda_k [b_k^+ e^{-ikx} - b_k e^{ikx}] e^{-a|k|/2}, \quad (12.33)$$

$$\widehat{\phi}_2(x) = 2\pi \int_{-\infty}^x \widehat{\rho}_2(x') dx' = -i \sum_{k<0} \lambda_k [b_k^+ e^{-ikx} - b_k e^{ikx}] e^{-a|k|/2}, \quad (12.34)$$

где, как и выше,  $\lambda_k = (2\pi/kL)^{1/2}$ . Величина  $a$  введена в (12.33), (12.34) для регуляризации, причем подразумевается предельный переход  $a \rightarrow +0$ .

Рассмотрим произведение операторов  $\widehat{\psi}_1^+(x)\widehat{\psi}_1(x')$  и, воспользовавшись (12.32), запишем его как

$$\widehat{\psi}_1^+(x)\widehat{\psi}_1(x') = |A_1|^2 e^{-i\widehat{\phi}(x)+i\widehat{\phi}(x')+\frac{1}{2}[\widehat{\phi}(x),\widehat{\phi}(x')]}, \quad (12.35)$$

где

$$[\widehat{\phi}(x), \widehat{\phi}(x')] = \sum_{k>0} \lambda_k^2 L (e^{ik(x-x')} - e^{-ik(x-x')}) e^{-a|k|}. \quad (12.36)$$

Далее, приведем (12.35) к нормально-упорядоченному виду:

$$\widehat{\psi}_1^+(x)\widehat{\psi}_1(x') = |A_1|^2 e^{\widehat{B}^+} e^{-\widehat{B}} e^{\frac{1}{2}([\widehat{B}^+, \widehat{B}] + [\widehat{\phi}(x), \widehat{\phi}(x')])}, \quad (12.37)$$

$$\widehat{B} = \sum_{k>0} \lambda_k b_k (e^{ikx} - e^{ikx'}) e^{-a|k|/2}. \quad (12.38)$$

---

<sup>5</sup>move to intro



Вычисляем коммутатор:

$$[\hat{B}^+, \hat{B}] = \sum_{k>0} \lambda_k^2 L \left( e^{ik(x-x')} + e^{-ik(x-x')} - 2 \right) e^{-a|k|} . \quad (12.39)$$

Прибавляя к (12.39) выражение (12.36), получаем<sup>6</sup>

$$\frac{1}{2} \left( [\hat{B}^+, \hat{B}] + [\hat{\phi}(x), \hat{\phi}(x')] \right) = \sum_{k>0} \lambda_k^2 L \left( e^{ik(x-x')} - 1 \right) e^{-a|k|} \quad (12.40)$$

$$= \int_0^\infty \frac{dk}{k} \left( e^{ik(x-x')} - 1 \right) e^{-a|k|} = \ln \frac{a}{a + i(x' - x)} \quad (12.41)$$

Нормальное упорядочение произведения  $\hat{\psi}_1(x')\hat{\psi}_1^+(x)$  выполняется совершенно аналогично (12.35) — (12.41). Единственное отличие заключается в том, что коммутатор  $[\hat{\phi}(x), \hat{\phi}(x')]$  входит в аналог (12.35) со знаком « $-$ ». Вследствие этого, вместо (12.41) имеем

$$\frac{1}{2} \left( [\hat{B}^+, \hat{B}] - [\hat{\phi}(x), \hat{\phi}(x')] \right) = \int_0^\infty \frac{dk}{k} \left( e^{ik(x'-x)} - 1 \right) e^{-ak} = \ln \frac{a}{a - i(x' - x)} \quad (12.42)$$

Поэтому антикоммутатор

$$[\hat{\psi}_1^+(x), \hat{\psi}_1(x')]_+ = \hat{\psi}_1^+(x)\hat{\psi}_1(x') + \hat{\psi}_1(x')\hat{\psi}_1^+(x) \quad (12.43)$$

оказывается равен

$$a|A_1|^2 e^{-\hat{B}^+} e^{\hat{B}} \left( \frac{1}{a - i(x - x')} + \frac{1}{a + i(x - x')} \right) . \quad (12.44)$$

Выражение (12.44) при  $a \rightarrow +0$  дает:

$$[\hat{\psi}_1^+(x), \hat{\psi}_1(x')]_+ = 2\pi a |A_1|^2 \delta(x - x') , \quad (12.45)$$

откуда находим, что при выполнении условия  $|A_1| = (2\pi a)^{-1/2}$  антикоммутатор  $[\hat{\psi}_1^+(x), \hat{\psi}_1(x')]_+$  имеет требуемый вид (12.29). Аналогично можно проверить антикоммутативность  $\hat{\psi}_1(x)$  и  $\hat{\psi}_1(x')$ , а также  $\hat{\psi}_1^+(x)$  и  $\hat{\psi}_1^+(x')$ .

Наконец, рассмотрим коммутационные соотношения между операторами правых и левых частиц. В построенном выше представлении они коммутируют, а должны были бы антикоммутировать. Вообще говоря, поскольку эти частицы соответствуют разным ветвям спектра, коммутационные соотношения между ними могут быть выбраны произвольно, поскольку ни в каких наблюдаемых величинах они не проявляются<sup>7</sup>. Однако, чтобы не было необходимости делать оговорки, принято вводить в определение

<sup>6</sup>В (12.41) использовано тождество  $\int_0^\infty (e^{-ax} - e^{-bx})dx/x = \ln b/a$ .

<sup>7</sup>Подобно тому, как в обычном вторичном квантовании имеется произвол, когда гамильтониан системы не содержит явной зависимости от спина частиц. В этом случае, при определении операторов рождения и уничтожения частицы с определенной проекцией спина принципиально важна только антикоммутативность операторов с одинаковыми спинами, а операторы с различными спинами, вообще говоря, могут быть выбраны коммутирующими — это дело вкуса.

величин  $A_j$  дополнительные множители:

$$A_1 = \frac{e^{\frac{i}{2}\hat{\phi}_2(\infty)}}{(2\pi a)^{1/2}}, \quad A_2 = \frac{e^{-\frac{i}{2}\hat{\phi}_1(\infty)}}{(2\pi a)^{1/2}}, \quad \hat{\phi}_{1,2}(\infty) = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\rho}_{1,2}(x) dx. \quad (12.46)$$

Нетрудно проверить, что после этого все коммутационные соотношения принимают канонический вид (12.29).

С помощью обратного преобразования бозонизации можно найти функцию Грина латтинжеровской жидкости. Рассмотрим средние:

$$G_j(x, t) = \langle \hat{\psi}_j(x, t) \hat{\psi}_j^\dagger(0, 0) \rangle = (2\pi a)^{-1} \langle e^{i\hat{\phi}_j(x, t)} e^{-i\hat{\phi}_j(0, 0)} \rangle. \quad (12.47)$$

С функциями Грина, определенными таким (несколько нестандартным) образом<sup>8</sup>, оказывается весьма удобным проводить вычисления в координатно-временном представлении (см. задачи 76, 78).

Функции Грина (12.47) будут найдены в задаче 77. В случае, когда константы связи  $g_1$  и  $g_2$  в (12.27) не зависят от  $k$ , результат принимает довольно простой вид:

$$\begin{aligned} G_1(x, t) &= \frac{i}{2\pi} \frac{1}{x - v't + ia} \left( \frac{a^2}{(x - v't + ia)(x + v't - ia)} \right)^{\text{sh}^2 \theta} \\ G_2(x, t) &= \frac{-i}{2\pi} \frac{1}{x + v't - ia} \left( \frac{a^2}{(x - v't + ia)(x + v't - ia)} \right)^{\text{sh}^2 \theta} \end{aligned} \quad (12.48)$$

где  $\text{th } 2\theta = g_2/(g_1 + 2\pi v)$  и  $v' = \omega_k/k = ((2\pi v + g_1)^2 - g_2^2)^{1/2}/2\pi$  — перенормированная скорость квазичастиц, определенная в (12.28). Нетрудно видеть, что в отсутствие рассеяния назад ( $g_2 = 0$ ) выражения (12.48) воспроизводят известные результаты для свободных фермионов.

С помощью гриновских функций (12.48) можно рассмотреть разнообразные вопросы. Так, интересно выяснить, как взаимодействие меняет распределение частиц по импульсам в основном состоянии,  $n(p) \propto \text{Im } G(\varepsilon, p)_{\varepsilon \rightarrow 0}$ . Оказывается, фермиевская ступенька в  $n(p)$ , резкая в отсутствие взаимодействия, размывается и становится нерезкой при сколь угодно слабом взаимодействии. Размытие фермиевской сингулярности в  $n(p)$  есть проявление того, что истинными квазичастицами в одномерном ферми-газе с взаимодействием являются не фермионы, а бозоны со спектром (12.28). Причина в том, что из-за взаимодействия время жизни ферми-жидкостных квазичастиц оказывается слишком малым (см. задачу 79). Нетривиальное основное состояние взаимодействующей системы обладает и другими интересными свойствами. Например, в задаче 78 мы увидим, что взаимодействие в латтинжеровской жидкости приводит к появлению аномалии в туннельной плотности состояний. Эта аномалия проявляется в неомической (степенной) вольт-амперной характеристике туннельного тока.

*Литература:* G.D. Mahan, *Many-Particle Physics*, ..., M. Stone, ...

<sup>8</sup>Напомним, что каноническая причинная функция Грина есть хронологически упорядоченное среднее:  $G_c = -i \langle T \hat{\psi}_j(x, t) \hat{\psi}_j^\dagger(x', t') \rangle$ .

## 12.5. Задачи 72÷79

**Задача 72.** Найдите теплоемкость одномерного идеального ферми-газа, пользуясь бозонным представлением. Сравните с результатом, полученным в каноническом представлении.

**Задача 73.** Рассмотрим идеальный ферми-газ в конечной области  $0 < x < L$  с периодическими граничными условиями. Как одночастичный, так и многочастичный спектры этой конечной системы являются дискретными. Попытаемся установить соответствие между индивидуальными состояниями в каноническом и в бозонизованном представлениях.

Линеаризуем закон дисперсии фермионов вблизи  $E_F$ . Покажите, что дискретный спектр многочастичных возбужденных состояний в обоих представлениях имеет вид  $E_m = m\Delta$ , где  $m = 1, 2, 3, \dots$ , а  $\Delta = 2\pi v_F/L$  — расстояние между одночастичными уровнями вблизи  $E_F$ . Обозначим через  $N_m$  кратность вырождения уровня  $\varepsilon_m$ . В силу многочастичности задачи, кратность вырождения  $N_m$  является весьма быстро возрастающей функцией  $m$ . Найдите  $N_m$  для нескольких первых уровней энергии в каноническом и в бозонном представлениях и покажите, что результаты совпадают.

**Задача 74.** [алгебра операторов] Докажите, что операторы  $e^{i\mu\hat{\phi}_{1,2}(x)}$  и гармоники плотности (12.16) удовлетворяют следующим соотношениям

$$e^{i\mu\hat{\phi}_j(x)}\hat{\rho}_l(k)e^{-i\mu\hat{\phi}_j(x)} = \hat{\rho}_l(k) \pm \mu e^{-ikx}\delta_{jl}, \quad (j, l = 1, 2), \quad (12.49)$$

где знак «+» соответствует правым частицам ( $j = l = 1$ ), а знак «−» — левым частицам ( $j = l = 2$ ). Соотношение (12.49) в координатном представлении имеет вид

$$e^{i\mu\hat{\phi}_j(x)}\hat{\rho}_l(x')e^{-i\mu\hat{\phi}_j(x)} = \hat{\rho}_l(x') \pm \mu\delta_{jl}\delta(x - x'). \quad (12.50)$$

При такой записи видно, что оператор  $e^{-i\mu\hat{\phi}_j(x)}$  «вставляет» в систему  $\mu$  частиц, где значение  $\mu$  может быть как целым, так и дробным.

Докажите также, что бозонизованные фермиевские операторы  $\hat{\psi}_j(x) = A_j e^{i\hat{\phi}_j(x)}$ ,  $\hat{\psi}_j^+(x) = \bar{A}_j e^{-i\hat{\phi}_j(x)}$ ,  $j = 1, 2$ , и гармоники плотности (12.16) подчиняются следующим коммутационным соотношениям:

$$[\hat{\psi}_j(x), \hat{\rho}_l(p)] = \pm e^{-ipx}\hat{\psi}_j(x)\delta_{jl}, \quad (j, l = 1, 2). \quad (12.51)$$

Обратим внимание, что коммутаторы (12.51) совпадают с коммутаторами, найденными в каноническом представлении. Наряду с (12.49), соотношения (12.51) оказываются полезными при решении задач.

**Задача 75.** [катастрофа ортогональности] Применим метод бозонизации к изучению катастрофы ортогональности, рассмотренной в задаче 27. Напомним, что речь идет о вычислении интеграла перекрытия  $K = \langle 0'|0\rangle$  основных состояний ферми-газа в отсутствие и в присутствии локализованного рассеивающего потенциала. Верно равенство

$$|K_\gamma| = e^{-\alpha \ln(E_F/\gamma)}, \quad \alpha = 2 \sum_l (2l + 1) \frac{\delta_l^2}{\pi^2}, \quad (12.52)$$

где  $\delta_l$  — фазы рассеяния в канале с угловым моментом  $l$  при  $E = E_F$ , а  $\gamma \ll E_F$  — скорость включения возмущения, определенная в задаче 27.

В случае сильного рассеяния суммирование ряда теории возмущений (5.19) оказывается весьма трудоемким<sup>9</sup>. Вместо этого можно применить следующий весьма полезный прием. Рассмотрим каждый канал рассеяния как систему одномерных киральных<sup>10</sup> фермионов, движущихся слева направо со скоростью  $v = v_F$ . При этом область  $x < 0$  соответствует падающим волнам, область  $x > 0$  — рассеянным, а само рассеяние происходит вблизи точки  $x = 0$ . В такой постановке задачи встряхивание ферми-газа при включении рассеяния на потенциале эквивалентно возбуждению одномерных фермионов при пролете через окрестность  $x = 0$ , в которой действует внешнее переменное поле.

Запишите бозонизованный гамильтониан для фермионов в плавно меняющемся электромагнитном поле  $a(x, t)$ , локализованном вблизи  $x = 0$ . Скачку фазы рассеяния соответствует импульс поля. Определите соответствие между фазой рассеяния  $\delta$  и амплитудой поля  $a(x, t)$ .

Бозонизованный гамильтониан квадратичен, а член, описывающий взаимодействие с полем  $a$ , линеен по операторам  $\hat{\rho}(k)$ . Рассмотрите эволюцию основного состояния при включении поля и определите перекрытие начального и конечного состояний. Получите формулу (12.52).

**Задача 76.** [*Край спектра рентгеновского поглощения в металле*] При поглощении мягких рентгеновских лучей в металле<sup>11</sup>, электрон, поглотив фотон, может перейти с одной из внутренних оболочек атома решетки в свободные состояния в зоне проводимости. При этом на отдавшем электрон атоме остается дырка, обладающая положительным зарядом. Электроны в зоне проводимости, а также вылетевший электрон, могут рассеиваться на возникшем при поглощении фотона статическом потенциале дырки. Поскольку это рассеяние включается мгновенно, электроны проводимости испытывают встряску, приводящую к рождению электрон-дырочных пар. Оказывается, что именно эта динамика ферми-системы определяет характер спектра поглощения, когда энергия выбитого электрона близка к  $E_F$ .

Будем считать, что потенциал рассеяния на неподвижной дырке сферически симметричен и характеризуется фазами рассеяния  $\delta_l$ , где  $l = 1, 2, 3, \dots$  нумерует каналы с различным угловым моментом. Предположим также, что электрон, поглощающий фотон, переходит в состояние с угловым моментом  $l = j$ . (Если электрон вырывается из  $S$ -состояния, то  $j = 1$  по правилу отбора для дипольных переходов.) Покажите, что

<sup>9</sup>Отметим, что в данном случае оказывается возможным провести полное суммирование ряда теории возмущений (5.19). Это связано с тем, что высшие члены ряда (5.19) не становятся более сингулярными — в каждом порядке расходимость логарифмическая по  $\gamma$ . Однако, соответствующие вычисления требуют использования специальной техники (P. Nozières, C. T. deDominicis, *Phys.Rev.*, **178**, p. 1097 (1969)).

<sup>10</sup>Теорию поля и, в частности, латтинжеровскую жидкость, называют киральной, если в ней имеются только правые или же только левые частицы.

<sup>11</sup>Именно при решении этой и родственной ей задачи о катастрофе ортогональности (см. задачи 27 и 75), были впервые введены соотношения (12.30) между бозонными и фермионными операторами (K. D. Schotte и U. Schotte, *Phys. Rev.* **182**, 479 (1969)).

спектр поглощения фотонов вблизи нижней границы имеет степенное поведение:

$$W(\omega) \propto (\omega - \omega_0)^\beta, \quad \beta = \alpha - 2\delta_j/\pi, \quad (12.53)$$

где величина  $\alpha$  определена выражением (12.52), а порог поглощения  $\omega_0 = E_F + E_0$  есть сумма энергии образования дырки и энергии Ферми, отсчитанной от энергии связи выбитого электрона.

Два слагаемых в выражении для  $\beta$  известны как андерсоновский и махановский вклады. При этом  $\alpha$ , согласно задаче 75, описывает встряхивание ферми-системы при включении рассеяния, приводящее к сложным неупругим процессам, связанным с множественным рождением электрон-дырочных пар. Вклад же  $-2\delta_j/\pi$  описывает эффект притяжения выбитого электрона неподвижной дыркой<sup>12</sup>. Интересно, что, благодаря второму слагаемому, знак  $\beta$  может оказаться произвольным. При  $\beta > 0$  низкоэнергетическое поглощение подавляется по сравнению с идеальным ферми-газом, а при  $\beta < 0$  — наоборот, усиливается.

**Задача 77.** [функция Грина] Рассмотрите латтинжеровскую жидкость с взаимодействием (12.20), в котором величины  $g_{1,2}(q)$  не зависят от  $q$ .

а) Получите выражения (12.48) для функции Грина (12.47) при  $T = 0$ .

б) Найдите функцию Грина при конечной температуре  $T$ .

**Задача 78.** [туннельная плотность состояний] Рассмотрим две параллельные одномерные системы  $A$  и  $B$  с точечным туннельным контактом между ними. Обе системы являются латтинжеровскими жидкостями и описываются гамильтонианом (12.20) с константами взаимодействия  $g_{1,2}^{A,B}$ . Гамильтониан системы имеет вид  $\widehat{\mathcal{H}}_{\text{total}} = \widehat{\mathcal{H}}_A + \widehat{\mathcal{H}}_B + \widehat{\mathcal{H}}_{\text{tunnel}}$ , причем

$$\widehat{\mathcal{H}}_{\text{tunnel}} = w \psi_B^\dagger(x) \psi_A(x) \Big|_{x=x_0} + \text{H.c.}, \quad (12.54)$$

где  $w$  — амплитуда туннелирования. При записи (12.54) предполагается, что туннелирование происходит в малой окрестности точки  $x_0$ .

Покажите, что при  $T = 0$  туннельный ток является степенной функцией напряжения на контакте:

$$I \propto V^{\alpha_{AB}-1}, \quad \alpha_{AB} = 2(1 + \text{sh}^2 \theta_A + \text{sh}^2 \theta_B), \quad (12.55)$$

где  $\theta_{A,B}$  связаны с константами взаимодействия  $g_{1,2}^{A,B}$  соотношением (12.27). Как меняется вольт-амперная характеристика (12.55) при конечной температуре  $T$ ?

**Задача 79.** Рассмотрим одномерные фермионы с взаимодействием (12.20). Найдите функцию Грина, пользуясь теорией возмущений и уравнением Дайсона. Учитывайте вклады в собственно-энергетическую часть  $\Sigma(\varepsilon, p)$  первого и второго порядка<sup>13</sup> по взаимодействию  $g_{1,2}(q)$ . Покажите, что полученное выражение для  $\Sigma(\varepsilon, p)$  содержит расходимость при малых  $\varepsilon$ , указывающую на нефермижидкостное поведение.

<sup>12</sup>G.D. Mahan, Phys. Rev. **163**, 612 (1967)

<sup>13</sup>Вычисление функции Грина одномерной системы, в котором учтены вклады всех порядков теории возмущений, содержится в работе: И.Е. Дзялошинский, А.И. Ларкин, ЖЭТФ **65**, 411 (1973). В этой работе продемонстрировано совпадение результатов вычислений, проведенных по теории возмущений и с помощью метода бозонизации.

## 12.6. Решения

**Решение 72.** Термодинамический потенциал одномерной бозе-системы имеет вид

$$\Omega_B = T \int \ln \left( 1 - e^{-\varepsilon(k)/T} \right) \frac{dk}{2\pi\hbar}, \quad (12.56)$$

где  $\varepsilon(k) = v_F |k|$ . Переходим к интегрированию по  $\varepsilon$ :

$$\Omega_B = \frac{2T^2}{v_F} \int_0^\infty \ln \left( 1 - e^{-\varepsilon} \right) \frac{d\varepsilon}{2\pi\hbar} \quad (12.57)$$

Разлагая логарифм в ряд и меняя порядок суммирования и интегрирования, получаем:

$$\Omega_B = -\frac{T^2}{\pi v_F} \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2} = -\zeta(2) \frac{T^2}{\pi v_F \hbar} \quad (12.58)$$

Отсюда находим теплоемкость  $C = \frac{\pi^2}{6} \frac{T}{\pi v_F \hbar}$ .

Найдем теперь термодинамический потенциал, пользуясь каноническим фермионным представлением:

$$\Omega_F = -T \int \ln \left( 1 + e^{-(k^2/2m - \mu)/T} \right) \frac{dk}{2\pi\hbar}. \quad (12.59)$$

Нас интересует зависящая от температуры часть  $\Omega_F$ , которая определяется состояниями с энергией  $\varepsilon \sim \pm T$  вблизи уровня Ферми. Поэтому можно линеаризовать закон дисперсии в окрестности ферми-поверхности  $k = \pm p_0$ :  $\xi(k) = \pm v_F (|k| - p_0)$ . Теперь вычтем из выражения (12.59) его значение при  $T \rightarrow 0$ . Результат можно записать в виде

$$\Omega_F = -\frac{4T^2}{v_F} \int_0^\infty \ln \left( 1 + e^{-\xi} \right) \frac{d\xi}{2\pi\hbar} \quad (12.60)$$

Как и выше, разлагаем логарифм в ряд и меняем порядок суммирования и интегрирования:

$$\Omega_F = -\frac{2T^2}{\pi v_F} \sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = -\frac{1}{2} \zeta(2) \frac{2T^2}{\pi v_F \hbar} \quad (12.61)$$

Видим, что  $\Omega_F = \Omega_B$ . Значит, теплоемкости, найденные обоими способами, совпадают.

**Решение 73.** Состояния ферми-газа с малыми энергиями, для которых справедливо представление бозонизации, можно разделить на правые и левые, построенные, соответственно, из плоских волн с  $p \simeq p_0$  и  $p \simeq -p_0$ . Не теряя общности, ограничимся рассмотрением правых состояний. После того, как соответствие между каноническим и бозонным представлениями будет установлено для правых состояний, обобщений на другие состояния будет очевидно. Для простоты будем рассматривать бесспиновые частицы.

Одночастичные состояния фермионов на кольце длины  $L$  характеризуются дискретными импульсами  $p_j = 2\pi j/L$ ,  $j \in Z$ . Основное состояние  $2j_{\max} + 1$  частиц

есть слэтеровский детерминант  $|\text{vac}_f\rangle$ , построенный из плоских волн с  $p_j$ , такими что  $|j| \leq j_{\max}$ .

Линеаризуя спектр вблизи  $p = p_{j_{\max}}$ , находим закон дисперсии правых частиц:  $\varepsilon(j) = \Delta(j - j_{\max})$ , где  $\Delta = 2\pi p_{j_{\max}}/mL = 2\pi v_F/L$  — расстояние между уровнями вблизи  $E_F$ . Ниже будет удобно нумеровать одночастичные уровни с помощью  $m = j - j_{\max}$ . При этом  $\varepsilon_m = m\Delta$ , причем в основном состоянии заполнены уровни с  $m \leq 0$ , а уровни с  $m > 0$  пусты.

Перейдем теперь к рассмотрению многочастичных возбужденных состояний. Каждое возбужденное состояние характеризуется заполнением некоторого количества одночастичных состояний с  $m > 0$  одновременно с образованием точно такого же количества дырок с  $m \leq 0$ . В простейшем случае, когда имеется всего одна пара частица–дырка, состояния выглядят так:  $\psi_{m|n} = a_m^+ a_n |\text{vac}_f\rangle$ , где  $m > 0$ ,  $n \leq 0$ , а энергия  $E_{m|n} = (m - n)\Delta$ . При каждом значении энергии  $E_k = k\Delta$ ,  $k = 1, 2, 3, 4, \dots$ , имеется ровно  $k$  таких состояний.

Можно построить также состояния с двумя, тремя и большим числом пар частица–дырка. Нетрудно убедиться в том, что при энергиях  $E = \Delta, 2\Delta, 3\Delta$  состояния с более чем одной парой отсутствуют. При энергии же  $E = 4\Delta$  имеется ровно одно такое состояние:

$$\psi_{2,1|0,-1} = a_2^+ a_1^+ a_0 a_{-1} |\text{vac}_f\rangle. \quad (12.62)$$

При  $E = 5\Delta$  имеется два состояния с двумя парами:  $\psi_{3,1|0,-1}$  и  $\psi_{2,1|0,-2}$ , где обозначения соответствуют (12.62). А при  $E = 6\Delta$  имеется уже четыре состояния такого вида:  $\psi_{4,1|0,-1}$ ,  $\psi_{3,1|0,-2}$ ,  $\psi_{2,1|0,-3}$ ,  $\psi_{2,1|-1,-2}$ .

Добавляя состояния с одной парой, получаем кратности вырождения  $N_m$  первых шести уровней  $E_m = m\Delta$ :

$$N_1 = 1, N_2 = 2, N_3 = 3, N_4 = 5, N_5 = 7, N_6 = 11. \quad (12.63)$$

Начиная с  $E = 7\Delta$  требуется учитывать состояния с тремя и большим числом пар. Поэтому здесь мы ограничимся первыми шестью уровнями.

Теперь найдем многочастичные уровни и кратности их вырождения в бозонном представлении. В этом представлении спектр квазичастиц есть  $\omega(p) = v_F|p|$ , причем в силу периодических граничных условий импульс  $p$  принимает дискретные значения  $p_j = (2\pi/L)j$ ,  $j \in Z$ . Правой ветви фермионов соответствуют правые бозоны с  $j > 0$ . Основное состояние  $|\text{vac}_b\rangle$  есть симметризованное произведение основных состояний всех правых бозонов. На языке канонических бозе-операторов  $b_j$ ,  $b_j^+$  состояние  $|\text{vac}_b\rangle$  подчиняется соотношениям  $b_j |\text{vac}_b\rangle = 0$  при всех  $j > 0$ .

Возбужденные состояния получаются применением к  $|\text{vac}_b\rangle$  некоторого количества операторов  $b_j^+$ . При этом собственные энергии, как нетрудно видеть, все оказываются кратными  $\Delta$ , то есть совпадают с энергиями, найденными в фермионном представлении.

Найдем теперь кратности вырождения. При  $E = \Delta$  имеется всего одно состояние  $\psi_1 = b_1^+ |\text{vac}_b\rangle$ . При  $E = 2\Delta$  существует два состояния:  $\psi_2 = b_2^+ |\text{vac}_b\rangle$  и  $\psi_{1^2} = (b_1^+)^2 |\text{vac}_b\rangle$ . При  $E = 3\Delta$  имеется три состояния:

$$\psi_3 = b_3^+ |\text{vac}_b\rangle, \quad \psi_{1^3} = (b_1^+)^3 |\text{vac}_b\rangle, \quad \psi_{2,1} = b_2^+ b_1^+ |\text{vac}_b\rangle. \quad (12.64)$$

При  $E = 4\Delta$  имеется всего пять состояний:

$$\psi_4, \quad \psi_{3,1}, \quad \psi_{2^2}, \quad \psi_{2,1^2}, \quad \psi_{1^4} . \quad (12.65)$$

При  $E = 5\Delta$  состояния имеют вид

$$\psi_5, \quad \psi_{4,1}, \quad \psi_{3,2}, \quad \psi_{3,1^2}, \quad \psi_{2^2,1}, \quad \psi_{2,1^3}, \quad \psi_{1^5} , \quad (12.66)$$

итого семь состояний. При  $E = 6\Delta$  находим

$$\psi_6, \psi_{5,1}, \psi_{4,2}, \psi_{4,1^2}, \psi_{3^2}, \psi_{3,2,1}, \psi_{3,1^3}, \psi_{2^3}, \psi_{2^2,1^2}, \psi_{2,1^4}, \psi_{1^6}, \quad (12.67)$$

итого одиннадцать состояний.

Получается, что для нижних шести уровней кратности вырождения (12.63), найденные в бозонном и фермионном представлениях, совпадают. Для более высоких уровней кратности вырождения быстро растут, и получить их прямым перечислением состояний становится непросто. Чтобы убедиться в совпадении кратностей вырождения для произвольно высоких уровней, удобно воспользоваться производящими функциями. В бозонном представлении производящая функция для кратностей заполнений есть

$$F_B(z) = \sum_{m>0} N_m^B z^m = \prod_{m>0} \frac{1}{1 - z^m} \quad (12.68)$$

Аналогично, производящая функция в фермионном представлении строится так:

$$F_F(z) = \sum_{m>0} N_m^F z^m = \oint_{|\eta|=1} \frac{d\eta}{2\pi i \eta} \left( \prod_{m>0} (1 + \eta z^m) \prod_{m>0} (1 + \eta^{-1} z^{m-1}) \right) \quad (12.69)$$

Здесь первое и второе произведения соответствуют вкладам частиц и дырок. Контурный интеграл по  $\eta$  выделяет вклады с одинаковым числом частиц и дырок. Это ограничение необходимо, поскольку в фермионном представлении число частиц фиксировано.

Доказательство совпадения кратностей вырождения  $N_m^F = N_m^B$  при всех  $m$  эквивалентно проверке того, что  $F_B(z) = F_F(z)$ . Это равенство можно переписать так:

$$\oint_{|\eta|=1} \frac{d\eta}{2\pi i \eta} \prod_{m>0} (1 - z^m)(1 + \eta z^m)(1 + \eta^{-1} z^{m-1}) = 1 \quad (12.70)$$

Соотношение (12.70) следует из так называемого тройного тождества Якоби:

$$\prod_{n=0}^{\infty} (1 - w^{2n+2})(1 + \eta w^{2n+1})(1 + \eta^{-1} w^{2n+1}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \eta^n w^{n^2} \quad (12.71)$$

Доказательство этого тождества неэлементарно<sup>14</sup>.

<sup>14</sup>см. Г. Эндрус, Теория разбиений, с. 35, М.: Наука, 1982



**Решение 74.** Рассмотрим оператор  $\hat{\eta}_k(\mu) = e^{i\mu\hat{\phi}_1(x)}\hat{\rho}_1(k)e^{-i\mu\hat{\phi}_1(x)}$  как функцию параметра  $\mu$ . Вычислим производную

$$\frac{\partial\hat{\eta}_k(\mu)}{\partial\mu} = ie^{i\mu\hat{\phi}_1(x)}[\hat{\phi}_1(x), \hat{\rho}_1(k)]e^{-i\mu\hat{\phi}_1(x)} \quad (12.72)$$

Коммутатор  $[\hat{\phi}_1(x), \hat{\rho}_1(k)]$  находим, пользуясь (12.16) и (12.33):

$$[\hat{\phi}_1(x), \hat{\rho}_1(k)] = -i \sum_{k'>0} 2\pi \left( \delta(k-k')e^{-ik'x} \delta(k+k')e^{-ik'x} \right) = -ie^{-ikx} \quad (12.73)$$

Интегрируя (12.72) по  $\mu$ , находим  $\hat{\eta}_k(\mu) = \hat{\rho}_1(k) + e^{-ikx}$ , что и требовалось. Рассмотрение других комбинаций  $j$  и  $l$  производится аналогично.

Для доказательства соотношения (12.51) умножим левую и правую части (12.49) на  $|A_j|^2 e^{i\mu\hat{\phi}_j(x)}$ . Полагая  $\mu = 1$ , приходим к (12.51).

**Решение 75.** Рассмотрим рассеяние на зависящем от времени точечном потенциале, воспользовавшись представлением киральных фермионов, отдельно для каждого канала рассеяния. Гамильтониан, записанный через операторы  $\hat{\rho}_1(k)$  гармоник плотности правых частиц, имеет вид

$$\hat{\mathcal{H}} = 2\pi v_F \sum_{k>0} \hat{\rho}_1(k)\hat{\rho}_1(-k) + w e^{\gamma t} \hat{\rho}_1(x=0) \quad (12.74)$$

Первый член (12.74) представляет собой кинетическую энергию (12.24), а второй — потенциал рассеяния, включаемый со скоростью  $\gamma$ .

Свяжем амплитуду возмущения  $w$  в (12.74) с фазой рассеяния  $\delta_l$ . Рассмотрим для этого одномерный идеальный ферми-газ в плавно меняющемся электромагнитном поле:

$$\hat{\mathcal{H}}_{int} = -\frac{1}{c} \int \hat{j}_1(x)a(x,t)dx \quad (12.75)$$

Поле приложено в небольшой окрестности  $x = 0$ , причем его поток  $\Phi(t) = \int a(x,t)dx$  плавно меняется как функция времени по закону  $e^{\gamma t}$ . Квазиклассический набег фазы, возникающий благодаря  $a(x,t)$ , дается множителем  $\exp(2\pi i\Phi(t)/\Phi_0)$ , где  $\Phi_0 = hc/e$ .

Квантовомеханическая фаза рассеяния  $\delta_l$  в канале с угловым моментом  $l$  определяется с помощью асимптотики волновой функции:  $\psi(r) \propto \sin(kr + \delta_l + \pi l)$ . Из этого выражения видно, что изменение относительной фазы рассеянной и падающей волн при включении рассеяния есть  $2\delta_l$ . Сравнивая с фазой, возникающей в поле  $a(x,t)$ , находим

$$2\pi\Phi(t) = \Phi_0 2\delta_l e^{\gamma t} \quad (12.76)$$

Подставляя это соотношение в (12.75) и выражая ток через плотность по формуле  $\hat{j}_1 = ev_F \hat{\rho}_1$ , получаем второй член гамильтониана (12.74). При этом  $w = -2\delta_l \hbar v_F$ .

Найдем интеграл перекрытия состояния в момент  $t = 0$  с исходным состоянием  $|0\rangle$ , имевшимся при  $t = -\infty$ . Перекрытие состояний, записанное в представлении взаимодействия, есть

$$K_\gamma = \langle 0 | T \exp\left(-i \int_{-\infty}^0 \tilde{\mathcal{H}}_{int}(t) dt\right) | 0 \rangle, \quad (12.77)$$

где

$$\tilde{\mathcal{H}}_{int}(t) = we^{\gamma t} \tilde{\rho}_1(x, t)_{x=0} \quad (12.78)$$

где  $\tilde{\rho}_1(x, t) = e^{i\hat{\mathcal{H}}_0 t} \tilde{\rho}_1(x) e^{-i\hat{\mathcal{H}}_0 t}$ . Пользуясь соотношениями (12.16), выразим плотность  $\tilde{\rho}_1(x)$  через бозе-операторы  $b_k$  и  $b_k^+$ , и перейдем в представление взаимодействия:

$$\tilde{\rho}_1(x, t) = \sum_{k>0} (\lambda_k L)^{-1} \left( e^{ikx-iv|k|t} b_k + e^{-ikx+iv|k|t} b_k^+ \right) \quad (12.79)$$

При этом гамильтониан взаимодействия (12.78) оказывается линейным по бозе-операторам, что делает задачу усреднения экспоненты (12.77) весьма простой. Отметим, что именно на этом шаге становится очевидным преимущество бозонизации по сравнению с прямым вычислением.

Найдем среднее от экспоненты (12.77), пользуясь правилом гауссова усреднения и теоремой Вика:

$$K_\gamma = \exp \left( -w^2 \int_{-\infty}^0 dt \int_{-\infty}^t dt' e^{\gamma(t+t')} \langle \tilde{\rho}_1(x, t) \tilde{\rho}_1(x, t') \rangle_{x=0} \right). \quad (12.80)$$

Согласно (12.16), интересующий нас коррелятор величин  $\tilde{\rho}_1(x, t)_{x=0}$  есть

$$\langle \tilde{\rho}_1(0, t) \tilde{\rho}_1(0, t') \rangle = \sum_{k>0} \frac{e^{-i|k|v(t-t')-a|k|}}{\lambda_k^2 L} \quad (12.81)$$

Подставляя (12.81) в (12.80) и вычисляя интегралы по  $t'$  и  $t$ , находим

$$K_\gamma = \exp \left( -w^2 \sum_{k>0} \frac{k}{2\pi} \frac{e^{-ak}}{(\gamma + ikv_F)2\gamma} \right). \quad (12.82)$$

При вычислении интеграла (12.82) оставляем только вещественную часть, поскольку относительная фаза начального и конечного состояний нас не интересует. Результат есть

$$K_\gamma = \exp \left( -\frac{w^2}{4\pi} \sum_{k>0} \frac{ke^{-ak}}{k^2 v_F^2 + \gamma^2} \right) = \exp \left( -\frac{\delta^2}{2\pi^2} \ln \frac{v_F}{\gamma a} \right). \quad (12.83)$$

Остается только заметить, что  $a \simeq v_F/E_F$ , и что вклады в  $K_\gamma$  от каналов рассеяния с различными значениями спина и углового момента факторизуются. Произведение независимых вкладов различных каналов дает формулу (12.52).<sup>15</sup>

**Решение 76.** Вероятность поглощения фотона, согласно «золотому правилу», записывается в виде

$$W(\omega) = 2\pi \sum_f \left| \sum_p u_p(\omega) \langle f | a_p^+ b | i \rangle \right|^2 \delta(\omega - \omega_0 - E_f), \quad (12.84)$$

где  $a_p^+$  — оператор рождения электрона с импульсом  $p$  в зоне проводимости,  $b$  — оператор рождения дырки (уничтожения электрона) на внутренней оболочке атома,  $u_p(\omega)$

<sup>15</sup>up to множитель 2 ?!

— дипольный матричный элемент,  $\omega_0$  — порог поглощения, равный сумме минимальной энергии выбитого электрона  $E_F$  и энергии образования дырки  $E_0$ . Суммирование в (12.84) происходит по импульсам  $p$  электрона, попадающего в зону проводимости, а также по всем конечным состояниям  $|f\rangle$  системы с добавленными электроном и дыркой. Начальное состояние  $|i\rangle$  представляет собой основное состояние идеального ферми-газа.

Преобразуем выражение (12.84), воспользовавшись соотношением

$$2\pi \sum_f \delta(\omega - \omega_0 - E_f) |f\rangle \langle f| = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\widehat{\mathcal{H}}_{sc}t + i(\omega - \omega_0)t} dt, \quad (12.85)$$

где  $\widehat{\mathcal{H}}_{sc}$  — гамильтониан ферми-газа в присутствии рассеивающего центра, характеризующегося фазами рассеяния  $\delta_l$ . Пренебрегая зависимостью матричного элемента  $u_p(\omega)$  от  $\omega$ , запишем (12.84) в виде

$$W(\omega) = A \int_{-\infty}^{\infty} \langle i | b^+ \widehat{\psi}_{exc} e^{-i\widehat{\mathcal{H}}_{sc}t} \widehat{\psi}_{exc}^+ b | i \rangle e^{i(\omega - \omega_0)t} dt \quad (12.86)$$

где  $\widehat{\psi}_{exc}^+(r) = A^{-1/2} \sum_p u_p a_p^+ e^{-ipr}$  — оператор рождения электрона в состоянии с угловым моментом  $j$ , локализованным в окрестности точки  $r = 0$ , где происходит поглощение фотона. (Здесь  $A = \sum_p |u_p|^2$  — нормировочный множитель.)

Теперь удобно избавиться от состояний дырки, заменив  $b^+b$  на 1. Получаем:

$$W(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \text{Tr} \left( e^{i\widehat{\mathcal{H}}_0 t} \widehat{\psi}_{exc} e^{-i\widehat{\mathcal{H}}_{sc} t} \widehat{\psi}_{exc}^+ \right) e^{i(\omega - \omega_0)t} dt \quad (12.87)$$

При записи (12.87) мы воспользовались тем, что для гамильтониана  $\widehat{\mathcal{H}}_0$  системы в отсутствие рассеяния ( $\delta_l = 0$ ) исходное состояние  $|i\rangle$  является собственным.

Теперь бозонизуем задачу так же, как это было сделано в задаче 75. При этом гамильтониан есть сумма независимых вкладов каналов с различными  $l$ :

$$\widehat{\mathcal{H}}_{sc} = \sum_l \widehat{\mathcal{H}}_l \quad (12.88)$$

Гамильтониан  $\widehat{\mathcal{H}}_l$ , описывающий рассеяние в канале с угловым моментом  $l$ , может быть записан через гармоники плотности киральных фермионов  $\widehat{\rho}_1^{(l)}(k)$  следующим образом:

$$\widehat{\mathcal{H}}_l = 2\pi v_F \sum_{k>0} \left( \widehat{\rho}_1^{(l)}(k) \widehat{\rho}_1^{(l)}(-k) - \frac{\delta_l}{\pi} \left( \widehat{\rho}_1^{(l)}(k) + \widehat{\rho}_1^{(l)}(-k) \right) \right) \quad (12.89)$$

В выражении (12.89) учтена связь между фазой рассеяния и константой связи в бозонизованном представлении точечного рассеяния, найденная в задаче 75.

Оператор рождения электрона в бозонизованном представлении записывается следующим образом:

$$\widehat{\psi}_{exc}^+ = (2\pi a)^{-1/2} e^{i\widehat{\phi}_1(x)} \Big|_{l=j, x=0}. \quad (12.90)$$

Обратим внимание на то, что оператор  $\widehat{\psi}_{\text{exc}}^+$  действует нетривиально только в канале с  $l = j$ , а в остальных каналах он действует как единичный оператор.

Подинтегральное выражение (12.87) есть произведение вкладов каналов с различными  $l$ . Рассмотрим сначала  $l \neq j$ . В этом случае, применяя доказанное в задаче 74 тождество  $e^{i\mu\widehat{\phi}_1(x)}\widehat{\rho}_1(k)e^{-i\mu\widehat{\phi}_1(x)} = \widehat{\rho}_1^{(l)}(k) + \mu e^{-ikx}$  с  $\mu = -\delta_l/\pi$  и  $x = 0$ , находим:

$$e^{i\mu\widehat{\phi}_1(x)}\widehat{\mathcal{H}}_0 e^{-i\mu\widehat{\phi}_1(x)} = \widehat{\mathcal{H}}_0 + 2\pi v_F \sum_{k>0} \left( -\frac{\delta_l}{\pi} \left( \widehat{\rho}_1^{(l)}(k) + \widehat{\rho}_1^{(l)}(-k) \right) + \frac{\delta_l^2}{\pi^2} \right) \quad (12.91)$$

Правая часть этого выражения, с точностью до несущественной константы<sup>16</sup>, есть  $\widehat{\mathcal{H}}_l$ . Сделанное наблюдение позволяет переписать вклад  $l$ -го канала в выражение (12.87) следующим образом:

$$\text{Tr} \left( e^{i\widehat{\mathcal{H}}_0 t} e^{-i\widehat{\mathcal{H}}_l t} \right) = e^{-i\Delta_l t} \langle e^{i\widehat{\mathcal{H}}_0 t} e^{i\mu\widehat{\phi}_1} e^{-i\widehat{\mathcal{H}}_0 t} e^{-i\mu\widehat{\phi}_1} \rangle = e^{-i\Delta_l t} \langle e^{i\mu\widehat{\phi}_1(t)} e^{-i\mu\widehat{\phi}_1(0)} \rangle, \quad (12.92)$$

где  $\mu = -\delta_l/\pi$ ,  $\widehat{\phi}_1(t) = \widehat{\phi}_1(x, t)_{x=0}$ . Чтобы вычислить среднее в (12.92), приведем произведение операторов к нормально-упорядоченной форме. Это нетрудно сделать, воспользовавшись тождеством Бейкера–Хаусдорфа:

$$\begin{aligned} e^{i\mu\widehat{\phi}_1(t)} e^{-i\mu\widehat{\phi}_1(0)} &= e^{i\mu(\widehat{\phi}_1(t) - \widehat{\phi}_1(0)) + \frac{\mu^2}{2} [\widehat{\phi}_1(t), \widehat{\phi}_1(0)]} \\ &= e^{\mu\widehat{B}^+} e^{-\mu\widehat{B}} e^{\frac{\mu^2}{2} ([\widehat{B}^+, \widehat{B}] + [\widehat{\phi}(t), \widehat{\phi}(0)])}, \\ \widehat{B} &= \sum_{k>0} \lambda_k b_k (e^{-ikv_F t} - 1) e^{-a|k|/2}. \end{aligned}$$

Вычисляя среднее, получаем

$$\langle e^{i\mu\widehat{\phi}_1(t)} e^{-i\mu\widehat{\phi}_1(0)} \rangle = \exp \left( \frac{\delta_l^2}{\pi^2} \ln \left( \frac{a}{a + iv_F t} \right) \right) \quad (12.93)$$

При больших  $t$  это выражение ведет себя как  $t^{-\delta_l^2/\pi^2}$ .

Теперь рассмотрим динамику в канале с  $l = j$ . Пользуясь тем же методом, что и выше, находим вклад этого канала:

$$\text{Tr} \left( e^{i\widehat{\mathcal{H}}_0 t} e^{i\widehat{\phi}_1} e^{-i\widehat{\mathcal{H}}_1 t} e^{-i\widehat{\phi}_1} \right) = \langle e^{i\widehat{\mathcal{H}}_0 t} e^{i(1+\mu)\widehat{\phi}_1} e^{-i\widehat{\mathcal{H}}_0 t} e^{-i(1+\mu)\widehat{\phi}_1} \rangle, \quad (12.94)$$

где  $\mu = -\delta_j/\pi$ . В результате выполненного преобразования операторы  $e^{\pm i\widehat{\phi}_1}$  удобно комбинируются с  $e^{\pm i\mu\widehat{\phi}_1}$ . Дальнейшие вычисления ничем не отличаются от случая  $l \neq j$ , с точностью до замены  $\mu \rightarrow 1 + \mu = 1 - \delta_j/\pi$ . В результате получаем

$$\exp \left( (1 - \delta_j/\pi)^2 \ln \left( \frac{a}{a + iv_F t} \right) \right) \quad (12.95)$$

<sup>16</sup>Роль этой константы, величина которой есть  $\Delta_l = 2\pi v_F \sum_{k>0} \delta_l^2/\pi^2$ , сводится к небольшому сдвигу порога поглощения  $\omega_0$ .

Вычисляя произведение вкладов всех  $l$ , с учетом кратности  $2l + 1$  орбитального вырождения и двукратного спинового вырождения, получаем следующее выражение:

$$W(\omega) = A^2 \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{a}{a + iv_F t} \right)^{1-2\delta_j/\pi+2 \sum_l (2l+1)\delta_l^2/\pi^2} e^{i(\omega-\omega_0)t} dt. \quad (12.96)$$

Показатель степени есть не что иное как  $1 + \beta$ . При вычислении интеграла по  $t$  замыкаем контур в верхней или нижней полуплоскости комплексного  $t$ , в зависимости от знака  $\omega - \omega_0$ . В результате получаем искомое соотношение  $W(\omega) \propto (\omega - \omega_0)^\beta$  при  $\omega > \omega_0$  и  $W(\omega) = 0$  при  $\omega < \omega_0$ .

**Решение 77 а)** Сначала найдем гриновскую функцию  $G_j^0(x, t)$  в отсутствии взаимодействия для правых частиц:  $j = 1$ . Ход вычисления напоминает преобразования, сделанные выше при проверке коммутационных соотношений. Сначала преобразуем произведение операторов в (12.47) с помощью тождества Бейкера-Хаусдорфа (12.32):

$$e^{i\hat{\phi}_j(x,t)} e^{-i\hat{\phi}_j(0,0)} = e^{i\hat{\phi}_j(x,t) - i\hat{\phi}_j(0,0)} e^{\frac{1}{2}[\hat{\phi}_j(x,t), \hat{\phi}_j(0,0)]} \quad (12.97)$$

Теперь нормально упорядочиваем это выражение, еще раз применяя тождество (12.32), и вычисляем коммутаторы, пользуясь (12.33):

$$\begin{aligned} e^{i\hat{\phi}_j(x,t)} e^{-i\hat{\phi}_j(0,0)} &= e^{-\hat{B}^+} e^{\hat{B}} e^{\frac{1}{2}([\hat{B}^+, \hat{B}] + [\hat{\phi}_j(x,t), \hat{\phi}_j(0,0)])} \\ &= e^{-\hat{B}^+} e^{\hat{B}} \exp \left( 2\pi \sum_{k>0} \frac{e^{-ak}}{k} (e^{ik(x-vt)} - 1) \right), \end{aligned} \quad (12.98)$$

$$\hat{B} = \sum_{k>0} \lambda_k b_k (e^{ikx - kv_F t} - 1) \quad (12.99)$$

Сумма в экспоненте, как было найдено в (12.41), есть  $\ln(a/(a - i(x - vt)))$ . Подставим результат в (12.47), усредняем по основному состоянию, и получаем

$$G_1^0(x, t) = (2\pi)^{-1} \frac{1}{a - i(x - vt)}, \quad a \rightarrow 0. \quad (12.100)$$

Действуя аналогично, находим

$$G_2^0(x, t) = (2\pi)^{-1} \frac{1}{a + i(x + vt)}, \quad a \rightarrow 0. \quad (12.101)$$

Разумеется, точно такие же выражения можно получить прямым вычислением с помощью вторично-квантованных фермиевских операторов.

Перейдем к вычислению функции Грина взаимодействующих фермионов. Временная зависимость оператора  $\hat{\phi}_j(x, t)$  может быть получена из (12.26), (12.27), (12.28). Упростим задачу, считая константы связи  $g_1$  и  $g_2$  независимыми от  $k$  величинами. При этом угол  $\theta$  в преобразовании Боголюбова (12.26) есть константа.

Преобразуем операторы  $b_k$ ,  $b_k^+$  в (12.33) с помощью соотношений (12.26). При этом оператор фазы правых частиц  $\hat{\phi}_1(x, t)$  приобретает вид:

$$i \sum_{k>0} \lambda_k e^{-ak} \left( e^{-ikx} (\text{ch } \theta \tilde{b}_k^+(t) - \text{sh } \theta \tilde{b}_{-k}(t)) - e^{ikx} (\text{ch } \theta \tilde{b}_k(t) - \text{sh } \theta \tilde{b}_{-k}^+(t)) \right), \quad (12.102)$$

где  $\tilde{b}_k(t) = e^{-i\omega_k t} \tilde{b}_k$ ,  $\tilde{b}_{-k}^+(t) = e^{i\omega_k t} \tilde{b}_{-k}^+$ , а  $\omega_k$  дается (12.28). После перегруппировки слагаемых это выражение можно компактно записать так:

$$\phi_1(x, t) = \text{ch } \theta \tilde{\phi}_1(x, t) - \text{sh } \theta \tilde{\phi}_2(x, t) . \quad (12.103)$$

Аналогично, для левых частиц находим

$$\phi_2(x, t) = \text{ch } \theta \tilde{\phi}_2(x, t) - \text{sh } \theta \tilde{\phi}_1(x, t) , \quad (12.104)$$

Как и выше в (12.26), (12.28), тильда в (12.103), (12.104) обозначает представление, в котором гамильтониан диагонален.

Чтобы найти функции Грина с помощью (12.103) и (12.104), заметим следующее. В диагонализированном представлении операторы  $\tilde{\phi}_1(x, t)$  и  $\tilde{\phi}_2(x', t')$  коммутируют, и поэтому среднее в (12.47) распадается на произведение средних от экспонент левых и правых величин. Каждое из этих средних практически совпадает с функцией Грина свободных частиц, найденной выше, отличаясь лишь множителями  $\text{ch } \theta$  и  $\text{sh } \theta$  в показателях экспонент. Поэтому усреднение можно заново не проводить и сразу записать ответ:

$$G_1(x, t) = (2\pi a)^{\text{ch}^2 \theta + \text{sh}^2 \theta - 1} \left( G_1^0(x, t) \right)^{\text{ch}^2 \theta} \left( G_2^0(x, t) \right)^{\text{sh}^2 \theta} , \quad (12.105)$$

$$G_2(x, t) = (2\pi a)^{\text{ch}^2 \theta + \text{sh}^2 \theta - 1} \left( G_2^0(x, t) \right)^{\text{ch}^2 \theta} \left( G_1^0(x, t) \right)^{\text{sh}^2 \theta} . \quad (12.106)$$

Подставляя в (12.105) выражения (12.100) и (12.101) для  $G_1^0(x, t)$  и  $G_2^0(x, t)$ , получаем (12.48).

**Решение 77 б)** Функция Грина при конечной температуре может быть найдена тем же методом, что и функция Грина при  $T = 0$ . Сначала мы рассмотрим ситуацию, когда взаимодействие отсутствует. После этого соотношения (12.103) и (12.104) позволят связать взаимодействующий и не взаимодействующий случаи.

В отсутствие взаимодействия вычисление производится так. Преобразуем произведение операторов в определении функции Грина (12.47) по формуле (12.97) и усредним получившееся выражение по матрице плотности при конечной температуре. Это усреднение гауссово, поэтому имеем

$$\langle e^{i\hat{\phi}_j(x, t)} e^{-i\hat{\phi}_j(0, 0)} \rangle = e^{-\frac{1}{2} \langle (\hat{\phi}_j(x, t) - i\hat{\phi}_j(0, 0))^2 \rangle} e^{\frac{1}{2} [\hat{\phi}_j(x, t), \hat{\phi}_j(0, 0)]} . \quad (12.107)$$

Рассмотрим правые частицы ( $j = 1$ ). Вычисляем среднее в (12.107), пользуясь (12.33):

$$\langle (\hat{\phi}_j(x, t) - i\hat{\phi}_j(0, 0))^2 \rangle = \sum_{k>0} \lambda_k^2 L e^{-ak} (2n_B(k) + 1) |e^{ikx(t)} - 1|^2 , \quad (12.108)$$

где  $x(t) = x - vt$ , а  $n_B(k)$  — бозевская функция распределения. Коммутатор в правой части (12.107) есть

$$[\hat{\phi}_j(x, t), \hat{\phi}_j(0, 0)] = \sum_{k>0} \lambda_k^2 L e^{-ak} (e^{ikx(t)} - e^{-ikx(t)}) . \quad (12.109)$$

Поэтому выражение (12.107) можно переписать в виде  $e^A$ , где

$$A = 2\pi \sum_{k>0} \frac{e^{-ak}}{k} \left( (n_B(k) + 1) (e^{ikx(t)} - 1) + n_B(k) (e^{-ikx(t)} - 1) \right) \quad (12.110)$$

Чтобы найти величину  $A$ , разложим функцию распределения в ряд:

$$n_B(k) = \frac{1}{e^{vk/T} - 1} = e^{-bk} + e^{-2bk} + e^{-3bk} + \dots, \quad b = v/T. \quad (12.111)$$

Подставляя (12.111) в (12.110), и интегрируя каждый член ряда (12.111) по отдельности, получаем

$$A = \sum_{m \geq 0} \ln \left( \frac{mb + a}{mb + a - ix(t)} \right) + \sum_{m > 0} \ln \left( \frac{mb + a}{mb + a + ix(t)} \right) \quad (12.112)$$

Отсюда, переходя к пределу  $a \rightarrow 0$ , находим:

$$e^A = \frac{a}{a - ix(t)} \frac{\pi x(t)/b}{\text{sh}(\pi x(t)/b)} = \frac{\pi ia/b}{\text{sh}(\pi(x(t) + ia)/b)} \quad (12.113)$$

В результате приходим к следующему выражению для функции Грина:

$$G_1^0(x, t) = \frac{i}{2b \text{sh}(\frac{\pi}{b}(x - vt + ia))}, \quad G_2^0(x, t) = -\frac{i}{2b \text{sh}(\frac{\pi}{b}(x + vt - ia))} \quad (12.114)$$

(Функция Грина левых частиц получается аналогично.)

Для нахождения функций Грина взаимодействующей системы применим прием, использованный выше при рассмотрении случая  $T = 0$ . Заметим, что соотношения (12.103), (12.104), дающие правило преобразования операторов фазы  $\hat{\phi}_{1,2}(x, t)$  при диагонализации гамильтониана (12.19), верны и при  $T > 0$ . Выражая с помощью (12.103), (12.104) операторы  $\hat{\phi}_{1,2}(x, t)$  через операторы фазы квазичастиц  $\tilde{\phi}_{1,2}(x, t)$ , подставляем их в определение функции Грина (12.47). При этом вклады  $\tilde{\phi}_1(x, t)$  и  $\tilde{\phi}_2(x', t')$  в (12.47) факторизуются. По этой причине, как и выше, каждый из вкладов есть не что иное, как функция Грина свободных частиц, правых или левых, возведенная в степень  $\text{ch}^2 \theta$  или  $\text{sh}^2 \theta$ , соответственно. В результате находим

$$G_1(x, t) = \frac{1}{2\pi a} \left( \frac{\pi T i \tilde{a}}{\text{sh}(\pi T (\frac{x}{v'} - t + i \tilde{a}))} \right)^{\text{ch}^2 \theta} \left( \frac{\pi T i \tilde{a}}{\text{sh}(\pi T (-\frac{x}{v'} - t + i \tilde{a}))} \right)^{\text{sh}^2 \theta}, \quad (12.115)$$

$$G_2(x, t) = \frac{1}{2\pi a} \left( \frac{\pi T i \tilde{a}}{\text{sh}(\pi T (-\frac{x}{v'} - t + i \tilde{a}))} \right)^{\text{ch}^2 \theta} \left( \frac{\pi T i \tilde{a}}{\text{sh}(\pi T (\frac{x}{v'} - t + i \tilde{a}))} \right)^{\text{sh}^2 \theta}, \quad (12.116)$$

$$v' = \left( (2\pi v + g_1)^2 - g_2^2 \right)^{1/2} / 2\pi, \quad \tilde{a} = a/v' \quad (12.117)$$

где, как и в (12.48),  $v'$  — скорость квазичастиц, перенормированная взаимодействием, и  $\text{th} 2\theta = g_2/(g_1 + 2\pi v)$ .

**Решение 78.** Начнем с вывода общего выражения для туннельного тока. Напряжение  $eV$ , поданное на туннельный контакт между системами  $A$  и  $B$ , представляет собой разность химпотенциалов:  $eV = \mu_B - \mu_A$ . Удобно сделать калибровочное

преобразование, приводящее гамильтониан к виду  $\widehat{\mathcal{H}}_{\text{total}} = \widehat{\mathcal{H}}_A + \widehat{\mathcal{H}}_B + \widehat{\mathcal{H}}_{\text{tunnel}}(t)$ , где гамильтониан туннелирования явно зависит от времени следующим образом:

$$\widehat{\mathcal{H}}_{\text{tunnel}}(t) = w e^{-ieVt} \psi_B^+ \psi_A \Big|_{x=x_0} + \text{H.c.} , \quad (12.118)$$

Оператор туннельного тока определяется как производная по времени от оператора заряда:

$$\widehat{I} = ie [\widehat{\mathcal{H}}_{\text{total}}, \widehat{Q}_A] , \quad \widehat{Q}_A = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_A^+(x) \psi_A(x) dx \quad (12.119)$$

Вычисляя коммутатор в (12.119), получаем:

$$\widehat{I} = ie \left( w e^{-ieVt} \psi_B^+ \psi_A - \bar{w} e^{ieVt} \psi_A^+ \psi_B \right)_{x=x_0} \quad (12.120)$$

Поскольку мы будем искать туннельный ток с помощью теории возмущений по амплитуде туннелирования  $w$ , предполагающейся малой, перейдем в представление взаимодействия по отношению к «возмущению»  $\widehat{\mathcal{H}}_{\text{tunnel}}(t)$ :

$$\langle \widehat{I}(t) \rangle = \langle \widehat{U}^{-1}(t) \widehat{I}(t) \widehat{U}(t) \rangle_0 , \quad \widehat{U}(t) = \text{T exp} \left( -i \int_{-\infty}^t \widehat{\mathcal{H}}_{\text{tunnel}}(t') dt' \right) \quad (12.121)$$

Разлагая  $\widehat{U}(t)$  в ряд по степеням  $w$ , убеждаемся, что главный вклад дается членом разложения первого порядка. Соответствующий оператор под знаком усреднения  $\langle \dots \rangle_0$  в (12.121) есть

$$e|w|^2 \int_{-\infty}^t \left( [\psi_B^+(t') \psi_A(t'), \psi_A^+(t) \psi_B(t)] e^{-ieV(t'-t)} \right) \quad (12.122)$$

$$- [\psi_A^+(t') \psi_B(t'), \psi_B^+(t) \psi_A(t)] e^{ieV(t'-t)} dt' \quad (12.123)$$

Два из четырех слагаемых, получающихся при расписывании коммутаторов в (12.122), можно преобразовать, сделав замену  $t - t' \rightarrow t' - t$ . При этом (12.122) приобретает форму, в которой области  $t' < t$  и  $t' > t$  оказываются равноправными. В результате выражение для туннельного тока (12.121) приобретает весьма удобный вид:

$$\langle \widehat{I}(t) \rangle = e|w|^2 \int_{-\infty}^{\infty} \left( K_{BA}(t-t') e^{-ieV(t'-t)} - K_{AB}(t-t') e^{ieV(t'-t)} \right) dt' , \quad (12.124)$$

где

$$K_{BA}(t-t') = \langle \psi_B^+(t') \psi_B(t) \rangle \langle \psi_A(t') \psi_A^+(t) \rangle , \quad (12.125)$$

$$K_{AB}(t-t') = \langle \psi_A^+(t') \psi_A(t) \rangle \langle \psi_B(t') \psi_B^+(t) \rangle \quad (12.126)$$

Средние в (12.125) берутся по основным состояниям систем  $A$  или  $B$  соответственно. Отметим, что полученное выражение (12.124) не зависит от конкретных деталей физики туннелирования и имеет весьма общий характер.



Нас интересует ситуация, когда системы  $A$  и  $B$  представляют собой латтинже-ровские жидкости. Выразим операторы рождения и уничтожения электрона в (12.124) через операторы в бозонном представлении. Для определенности рассмотрим операторы  $\psi_A^+(x)$  и  $\psi_A(x)$  рождения и уничтожения электрона в системе  $A$ . Наиболее общее выражение для этих операторов, справедливое при сколь угодно сильном взаимодействии, имеет следующий вид:

$$\psi_A(x) = \sum_{m-m'=1} A_{m,m'} e^{i(m-m')p_0x} e^{im\hat{\phi}_1(x)+im'\hat{\phi}_2(x)}, \quad (12.127)$$

$$\psi_A^+(x) = \sum_{m-m'=1} \bar{A}_{m,m'} e^{-i(m-m')p_0x} e^{-im\hat{\phi}_1(x)-im'\hat{\phi}_2(x)} \quad (12.128)$$

Физический смысл этого выражения в том, что туннелирующий в систему  $A$  электрон описывается суперпозицией нескольких возможных состояний. Электрон может превратиться в правую или в левую частицу, а может — в две правых частицы и левую дырку, и т.п. Ниже мы рассмотрим задачу, не учитывая вклады составных операторов. Будем считать, что  $\psi_A(x) = (2\pi a)^{-1/2} e^{i\hat{\phi}_1(x)}$ ,  $\psi_A^+(x) = (2\pi a)^{-1/2} e^{-i\hat{\phi}_1(x)}$ . Как будет видно из дальнейшего, решение без труда обобщается на более сложные случаи.

Корреляционные функции операторов  $e^{\pm i\hat{\phi}_1(x)}$  при произвольной температуре были найдены в задаче 77. Рассмотрим сначала более простой случай  $T = 0$ . Подставляя выражение (12.48) для функций Грина в (12.125), находим

$$K_{BA}(t-t') = (2\pi a)^{-2} \left( \frac{\tilde{a}}{\tilde{a} - i(t'-t)} \right)^\alpha, \quad K_{AB}(t-t') = K_{BA}(t'-t), \quad (12.129)$$

где  $\tilde{a} = a/v_F$  и  $\alpha = 2(1 + \text{sh}^2 \theta_A + \text{sh}^2 \theta_B)$ .

Выражение (12.125) удобно вычислить с помощью известного представления гамма-функции:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{(a+it)b} (a+it)^{-z} dt = 2\pi \frac{b^{z-1}}{\Gamma(z)}, \quad (12.130)$$

верного при  $b > 0$  и  $z > 0$ . Находим, что при  $V > 0$  вклад в интеграл по времени в (12.125) дает только первый член, а при  $V < 0$  — только второй член. Соответственно, туннельный ток есть

$$I = e|w|^2 \frac{\tilde{a}^\alpha}{2\pi a^2 \Gamma(\alpha)} \begin{cases} (eV)^{\alpha-1}, & V > 0 \\ -(-eV)^{\alpha-1}, & V < 0 \end{cases} \quad (12.131)$$

Получаем, что туннельный ток при  $T = 0$  есть степенная функция  $I \propto V^{\alpha-1}$ , причем показатель степени зависит от силы взаимодействия в системах  $A$  и  $B$ . Отметим также, что в случае невзаимодействующих фермионов, когда  $\theta_A = \theta_B = 0$  и  $\alpha = 2$ , для туннельного тока выполняется закон Ома  $I \propto V$ , как и следовало.

При конечной температуре  $T > 0$  корреляционные функции операторов  $e^{\pm i\hat{\phi}_1(x)}$  даются выражениями (12.115). При этом

$$K_{BA}(t-t') = (2\pi a)^{-2} \left( \frac{\pi T i \tilde{a}}{\text{sh}(\pi T(t'-t) + iT\tilde{a})} \right)^\alpha, \quad K_{AB}(t-t') = K_{BA}(t'-t) \quad (12.132)$$

Интеграл по времени в первом слагаемом (12.125) удобно преобразовать, сдвинув контур интегрирования по  $t'$  в комплексную плоскость. Выберем новый контур так:  $\pi T(t' - t) = u + i\pi/2$ , где  $u$  вещественно и  $-\infty < u < \infty$ . Сдвигая контур таким образом, мы не задеваем особенностей интегрируемого выражения и, значит, значение интеграла при этом не меняется. Переходя к интегрированию по  $u$ , получаем

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{\pi T i \tilde{a}}{\text{sh}(\pi T(t' - t) + i\tilde{a})} \right)^{\alpha} e^{-ieV(t'-t)} dt' = \frac{e^{eV/2T}}{\pi T} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{\pi T \tilde{a}}{\text{ch } u} \right)^{\alpha} e^{-i(eV/\pi T)u} du \quad (12.133)$$

Второе слагаемое в (12.125) имеет особенность по другую сторону от вещественной оси. Поэтому в данном случае, чтобы не задеть особенностей интегрируемого выражения, надо сдвинуть контур в другую сторону:  $\pi T(t' - t) = u - i\pi/2$ , где  $-\infty < u < \infty$ . Как нетрудно видеть, это приводит к выражению, получающемуся из (12.133) заменой  $V \rightarrow -V$ .

Интеграл по  $u$  в правой части (12.133) сводится к известному интегралу

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ibu}}{\text{ch}^{\alpha} u} du = 2^{\alpha-1} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}(\alpha + ib)\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}(\alpha - ib)\right)}{\Gamma(\alpha)} \quad (12.134)$$

Вычитая друг из друга найденные таким способом вклады первого и второго членов (12.125), получаем окончательное выражение для туннельного тока:

$$I = \frac{e|w|^2}{(2\pi\alpha)^2} \frac{(2\pi T \tilde{a})^{\alpha}}{\pi T} \text{sh}\left(\frac{eV}{2T}\right) \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}(\alpha + i\frac{eV}{\pi T})\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}(\alpha - i\frac{eV}{\pi T})\right)}{\Gamma(\alpha)} \quad (12.135)$$

Это выражение обобщает найденную выше зависимость  $I \propto V^{\alpha-1}$ , имеющую место при  $T = 0$ , на случай произвольной температуры.

С помощью (12.135) нетрудно рассмотреть предельные случаи высокой и низкой (по сравнению с  $eV$ ) температуры:

$$I \propto \begin{cases} T^{\alpha-2} V, & eV \ll T \\ V^{\alpha-1}, & eV \gg T \end{cases} \quad (12.136)$$

Таким образом, при конечной температуре и достаточно малом  $eV$  имеет место закон Ома. Для наблюдения неомического поведения туннельного тока, характерного для латтинжеровской жидкости, требуется, чтобы выполнялось соотношение  $eV \geq \alpha\pi T$ .

**Решение 79.** Функции Грина в отсутствие взаимодействия имеют вид

$$G_{1,2}(\varepsilon, p) = \frac{1}{i\varepsilon \mp v_F p}, \quad (12.137)$$

где знаки « $-$ » и « $+$ » соответствуют правым и левым частицам.

Будем считать взаимодействие слабым и применим теорию возмущений для отыскания собственно-энергетической части  $\Sigma_{1,2}(i\varepsilon, p)$ . Вклады первого порядка по взаимодействию сводятся к сдвигу химпотенциала и перенормировке скорости  $v_F$ , и поэтому интереса не представляют.

Рассмотрим вклады в собственно-энергетическую часть, возникающие во втором порядке по взаимодействию. Для правых частиц имеются три различные вклада, дающиеся диаграммами, изображенными на рис. 12.1

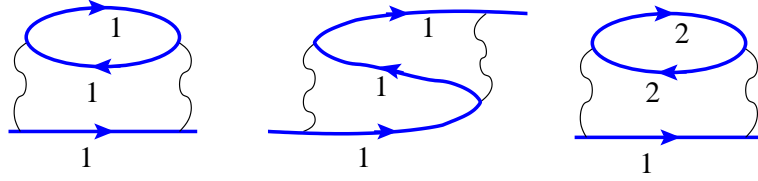


Рис. 12.1

Нетрудно видеть, что первый и второй графики, описывающие рассеяния правых частиц друг на друге, отличаются лишь знаками и поэтому сокращаются. Остается третий график, описывающий рассеяние правых частиц на левых. Соответствующее выражение имеет вид

$$\Sigma_1(\varepsilon, p) = g_2^2 \int \int \Pi_2(\omega, k) G_1^0(\omega + \varepsilon, k + p) \frac{dk d\omega}{(2\pi)^2}, \quad (12.138)$$

где

$$\Pi_2(\omega, k) = \int \int G_2(\varepsilon'_+, p'_+) G_2(\varepsilon'_-, p'_-) \frac{dp' d\varepsilon'}{(2\pi)^2}, \quad (12.139)$$

$$= \int \frac{n(p'_-) - n(p'_+)}{i\omega + v_F k} \frac{dp'}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \frac{k}{i\omega + v_F k} \quad (12.140)$$

— поляризационный оператор левых частиц ( $\varepsilon'_\pm = \varepsilon' \pm \omega/2$ ,  $p'_\pm = p \pm k/2$ ).

Подставляя выражение для  $\Pi_2(\omega, k)$  в (12.138), вычисляем интеграл по  $\omega$  и получаем

$$\Sigma_1(i\varepsilon, p) = \frac{g_2^2}{(2\pi)^2} \int_{-k_{\max}}^{k_{\max}} (n(-k) - n(k+p)) \frac{k dk}{i\varepsilon - v_F(2k+p)} \quad (12.141)$$

Мы ввели конечные пределы интегрирования  $-k_{\max} < k < k_{\max}$  в выражение (12.141), чтобы иметь возможность регуляризовать расходящийся интеграл по  $k$ .

Рассмотрим по отдельности вклады в интеграл (12.141) от двух слагаемых в интегрируемом выражении. Слагаемое с  $n(-k)$  приводит к интегралу по области  $0 < k < k_{\max}$ , а слагаемое с  $n(k+p)$  — по области  $-k_{\max} < k < -p$ . После сдвига переменной  $k \rightarrow k - p$  во втором интеграле получаем

$$\int_0^{k_{\max}} \frac{k dk}{i\varepsilon - v_F(2k+p)} - \int_{-k_{\max}-p}^0 \frac{(k-p) dk}{i\varepsilon - v_F(2k-p)} \quad (12.142)$$

Теперь вычисляем оба интеграла и оставляем только сингулярные при  $\varepsilon, p \rightarrow 0$  члены. (Несингулярные члены дают обычные ферми-жидкостные перенормировки и поэтому

интереса не представляют.) Результат имеет вид

$$\Sigma_1(i\varepsilon, p) = -\frac{g_2^2}{(4\pi v_F)^2} (i\varepsilon - v_F p) \left( \ln \left( \frac{2v_F k_{\max}}{-(i\varepsilon - v_F p)} \right) + \ln \left( \frac{2v_F k_{\max}}{i\varepsilon + v_F p} \right) \right) \quad (12.143)$$

$$= -\frac{g_2^2}{(4\pi v_F)^2} (i\varepsilon - v_F p) \ln \left( \frac{4v_F^2 k_{\max}^2}{\varepsilon^2 + v_F^2 p^2} \right) \quad (12.144)$$

Логарифмическая расходимость полученного выражения демонстрирует, что уже во втором порядке теории возмущений ферми-жидкостное поведение функции Грина разрушается.

Из приведенного вычисления видно, что логарифмическая расходимость во втором порядке теории возмущений есть чисто одномерный эффект. В размерности  $D > 1$  процессы рассеяния ферми-частиц друг на друге, подобные изображенным на рис. 12.1, дают вклад в  $\Sigma(\varepsilon, p)$  аналогичный (12.138). Однако, сингулярность поляризационного оператора  $\Pi(\omega, k)$  при  $\omega, k \rightarrow 0$  оказывается не такой сильной, как у выражения (12.139). (Это видно, например, из трехмерного выражения (8.47), найденного в задаче 44 а.) По этой причине при  $D > 1$  диаграммы, описывающие рассеяние частиц, не приводят к расходимостям, и теория ферми-жидкости оказывается устойчивой конструкцией.

# Список обозначений:

$E_F$  — энергия Ферми;

$p_0$  — фермиевский импульс;

$v_F$  — скорость Ферми;

$\xi_{\mathbf{p}} = v_F(|\mathbf{p}| - p_0)$  — спектр электронов, линеаризованный вблизи уровня Ферми;

$\nu_0 = mp_0/2\pi^2\hbar^3$  — плотность состояний трехмерного бесспинового ферми-газа;

$\nu_{2D} = m/2\pi\hbar^2$  — плотность состояний двумерного бесспинового ферми-газа;

$\nu_{1D} = m/\pi\hbar p_0$  — плотность состояний одномерного бесспинового ферми-газа;

$\mu_B = e\hbar/2mc$  — магнетон Бора;

$c$  — скорость звука;

$\omega_D$  — дебаевская частота;

$k_D$  — дебаевский волновой вектор;

$g$  — константа электрон-фононного взаимодействия;

$\zeta = g^2\nu_0$  — безразмерная константа электрон-фононного взаимодействия  
Постоянная Планка  $\hbar$  полагается равной 1.



## При ссылках использованы следующие сокращения:

- [1] А. А. Абрикосов, Л. П. Горьков, И. Е. Дзялошинский, *Методы квантовой теории поля в статистической физике*, ГИФМЛ, М. (1962); переиздание: Добросвет, М. (1998)
- [2] Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшиц, *Квантовая Механика*, Наука, М. (1974).
- [3] Р. Фейнман, *Статистическая Механика*, Мир, М. (1978).
- [4] А. Б. Мигдал, *Качественные методы в квантовой теории*, Наука, М. (1978).
- [5] Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшиц, *Статистическая Физика*, Наука, М. (1976).
- [6] Е. М. Лифшиц, Л. П. Питаевский, *Статистическая Физика*, Наука, М. (1978).
- [7] Е. М. Лифшиц, Л. П. Питаевский, *Физическая Кинетика*, Наука, М. (1979).
- [8] В. Б. Берестецкий, Е. М. Лифшиц, Л. П. Питаевский, *Квантовая электродинамика*, Наука, М. (1989).
- [9] А. М. Поляков, *Калибровочные поля и струны*, Черноголовка, 1995 (in English: A. M. Polyakov, *Gauge Fields and Strings*, Harwood, 1987)

# Предметный указатель

- автолокализация полярона, 117
- амплитуда рассеяния
  - в куперовском канале, 286
- аналитичность
  - эффективного взаимодействия, 85
- блуждание по решетке, 30
  - вероятность возврата, 31, 41
  - производящая функция, 31, 40
- взаимодействие
  - ван-дер-Ваальса, 150
  - Казимира, 176
- волна
  - зарядовой плотности, 138
  - спиновой плотности, 138
- время
  - дискретное, 31, 39
  - мацубаровское, 140
  - мнимое, 140
- время сбоя фазы, 265
- гамильтониан
  - БКШ, 282
  - Боголюбова, 283
- деформационный потенциал, 112
- диаграммная техника
  - крестовая, 228
- динамика вблизи перехода, 150
- диффузон, 235
- длина
  - корреляционная, 167
  - тепловая, 145
- закон
  - Кюри, 147, 160, 161
  - Орнштейна-Цернике, 148
- затухание звука в ферми-жидкости, 116
- коррелятор
  - ток-ток мацубаровский, 232, 235
- лестница
  - куперовская, 286
- масса
  - автолокализованного состояния, 117, 130
  - эффективная, 67, 70–72, 81
- мезоскопика, 276
- модель
  - Дебая, 15, 111
  - Эйнштейна, 111
- неустойчивость
  - пайерлсовская, 148
- осцилляции
  - Рудермана-Киттеля, 145
  - Фриделя, 145
- отражение
  - андреевское, 347
- пара
  - куперовская, 278
- перенормировка
  - спектра фононов, 116
- поляризационный оператор, 114
  - ферми-газа, 84
  - фононов,  $D = 1$ , 126
- полярон
  - сильной связи, 117
  - слабой связи, 70, 75
- преобразование
  - Боголюбова, 13, 15, 18, 19, 283



Галилея волновой функции, 130  
Йордана-Вигнера, 19, 24

разложение

$1/N$ , 261

регуляризация

эффективного взаимодействия, 85

ренормгруппа, 48, 87

ряд

лестничный, 232

теории

среднего поля, 148

теория

Мигдала, 115

полярона, 115

среднего поля, 132

термодинамический потенциал

сверхпроводника, 293

тождество

Уорда, 233, 295

уравнение

Лондонов, 295

ренормгруппы, 49, 87

фононы, 15

акустические, 111

оптические, 111

функция Грина

мацубаровская, 141

фононов при  $D = 1$ , 148

электронов, усредненная по беспорядку, 229, 234

функция Грина фонона

$D(\mathbf{p}, t)$ , 123

функция Грина электрона

$G(\varepsilon, \mathbf{r})$ , 83

$G(\mathbf{p}, t)$ , 123

энергия

корреляционная, 150

эффект

Яна-Теллера, 128