

К. ИЦИКСОН  
Ж.-Б. ЗЮБЕР

---

# КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ ПОЛЯ



CLAUDE ITZYKSON  
and  
JEAN-BERNARD ZUBER

Commissariat à l'Energie Atomique  
Centre d'Etudes Nucleaires de Saclay

# QUANTUM FIELD THEORY

McGRAW HILL  
BOOK COMPANY

New York St. Louis San Francisco Auckland Bogota Hamburg  
Johannesburg London Madrid Mexico Montreal New Delhi  
Panama Paris São Paulo Singapore Sydney Tokyo Toronto

---

К. ИЦЦИКСОН  
Ж-Б ЗЮБЕР

# КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ ПОЛЯ

В 2-х томах

ТОМ 2

Перевод с английского  
под редакцией  
Р. М. МИР-КАСИМОВА

Москва «Мир» 1984

ББК 22.31  
И 96  
УДК 530.145

Ициксон К., Зюбер Ж.-Б.

И96 Квантовая теория поля: Пер. с англ.—М.: Мир, 1984.—  
400 с., ил.—Т. 2.

Книга известных французских теоретиков К. Ициксона и Ж.-Б. Зюбера представляет собой современный курс квантовой теории поля, охватывающий основные положения этой области физики и новые результаты. В русском переводе книга издается в двух томах. Во втором томе рассматриваются теория перенормировок, функциональные методы, теория неабелевых калибровочных полей, ренормализационная группа, динамика на световом конусе и др.

Книга рассчитана на научных работников, аспирантов и студентов старших курсов, занимающихся проблемами квантовой теории поля и физикой элементарных частиц

И 1704020000—315  
041(01)—84 45—83, ч. 1

ББК 22.31  
530.1

*Редакция литературы по физике*

---

Клод Ициксон, Жан-Бернар Зюбер  
КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ ПОЛЯ  
В двух томах  
Том 2

Научный редактор А. Н. Куксенко. Мл. научн. редактор И. А. Зиновьева.  
Художник Н. И. Василевский. Художественный редактор Л. Е. Безручневков.  
Технический редактор Е. С. Потапенкова. Корректор Т. И. Стифеева

ИБ № 3225

Сдано в набор 06.06 83. Подписано к печати 11.11.83.  
Формат 60×90<sup>1/16</sup>. Бумага типографская № 1. Гарнитура литературная. Печать высокая  
Объем 12,50 бум. л. п. л. Усл. печ. л. 25. Усл. кр.-отт. 25. Уч.-изд. л. 23,83.  
Изд. № 2/2048 Тираж 8000 экз. Зак. 1845. Цена 2 р 80 з к. 39,

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР» Москва, 1-й Рижский пер., 2.

Ордена Октябрьской Революции и ордена Трудового Красного Знамени Первая Образцовая  
типография имени А. А. Жданова Союзполиграфпрома при Государственном комитете СССР  
по делам издательств, полиграфии и книжной торговли, Москва, М-54, Валовая, 28

Отпечатано с матриц в Ленинградской типографии № 6 Ордена Трудового Красного Знамени  
Ленинградского объединения «Техническая книга» им. Евгении Соколовой Союзполиграфпрома  
при Государственном комитете СССР по делам издательств, полиграфии и  
книжной торговли 193144, г. Ленинград, ул. Моисеенко, 10

---

Copyright © 1980 McGraw-Hill Inc.  
© Перевод на русский язык, «Мир»,  
1984

## Глава 8

# ПЕРЕНОРМИРОВКА

Проблема перенормировок во всех порядках теории возмущений является в теории поля центральной. После введения, посвященного изучению различных методов регуляризации, мы изложим схему вычитаний Боголюбова—Циммермана. Мы наметим доказательство сходимости перенормированных интегралов, а также изучим ультрафиолетовое поведение (теорема Вайнберга) и безмассовые теории. Будет кратко рассмотрена перенормировка составных операторов. В конце главы мы проанализируем взаимосвязь, существующую между калибровочной инвариантностью и перенормировками<sup>1)</sup>.

### 8.1. РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ И ПОДСЧЕТ СТЕПЕНИ РАСХОДИМОСТИ

#### 8.1.1. Введение

Настоящая глава посвящена систематическому изучению процедуры перенормировок. Общие рассуждения, лежащие в основе этой процедуры, уже изложены в предыдущей главе на примере квантовой электродинамики. Мы видели, что расходимости могут быть поглощены переопределением различных параметров теории—массы, константы связи и т. д. Целесообразно отвлечься вначале от трудностей, специфических для электродинамики, а именно от калибровочной инвариантности, и изучить перенормировку в скалярной теории. Дополнительные проблемы, возникающие в связи с существованием симметрий, будут рассмотрены в конце этой главы для случая квантовой электродинамики, а в гл. 11 и 12—для других внутренних симметрий.

Природа и свойства перенормировок были впервые сформулированы и изучены основателями квантовой теории поля Томонагой, Фейнманом, Дайсоном, Швингером и др. Важный вклад внесли Салам, Вайнберг, Боголюбов и Парасюк, а также Хепп. Сравнительно недавно Циммерман и его последователи внесли еще

<sup>1)</sup> Обзор современного состояния теории перенормировок дан в книге О. И. Завьялова (см. примечания редактора перевода в конце настоящей главы).— *Прим. ред.*

большую ясность в процедуру перенормировок. Эпштейн и Глазер развили аксиоматический подход

Математическая природа проблемы ясна Расходимости возникают в вычислениях по теории возмущений из-за отсутствия должной осмотрительности при умножении обобщенных функций Например, усеченная диаграмма собственной энергии на рис 8.1, а

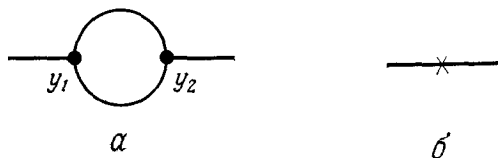


РИС 8.1 Расходящаяся диаграмма и соответствующий контрчлен

соответствует формально заданному выражению  $[G_F(y_1 - y_2)]^2$  Непосредственного смысла оно не имеет Соответствующее выражение в импульсном пространстве, т.е. преобразование Фурье данной величины, логарифмически расходится Как мы видели в гл. 7 (см. т. 1), в таких расходящихся выражениях необходимо производить вычитания Поскольку мы требуем, чтобы вычитания были локальны в конфигурационном пространстве, данная операция сводится к изменению параметров лагранжиана на бесконечную величину Таким образом, мы оставляем мысль о том, чтобы использовать или измерять параметры исходного лагранжиана, так называемые «голые» величины, а выражаем все через конечные «перенормированные» наблюдаемые параметры.

Вначале заменим  $G_F^2(y_1 - y_2)$  выражением

$$\Pi(y_1 - y_2) = [G_F(y_1 - y_2)]^2 - S(y_1 - y_2),$$

где  $S$  — обобщенная функция, сосредоточенная в начале координат и выбранная таким образом, чтобы величина  $\Pi$  в целом имела смысл Здесь достаточно использовать член, пропорциональный  $\delta$ -функции С помощью преобразования Фурье величина

$$[G_F(y_1 - y_2)]^2 = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{i p (y_1 - y_2)} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - m^2 + i\epsilon) [(p-k)^2 - m^2 + i\epsilon]}$$

заменяется, например, хорошо определенным выражением

$$\begin{aligned} \Pi(y_1 - y_2) &= \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{i p (y_1 - y_2)} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \times \\ &\times \left[ \frac{1}{(k^2 - m^2 + i\epsilon) [(p-k)^2 - m^2 + i\epsilon]} - \frac{1}{(k^2 - m^2 + i\epsilon)^2} \right], \end{aligned}$$

и мы можем записать формально

$$\Pi(y_1 - y_2) = [G_F(y_1 - y_2)]^2 + A\delta(y_1 - y_2). \quad (8.1)$$

Строго говоря, константа  $A$  бесконечна, но формально можно считать, что второй член в (8.1) является вкладом от контрчлена нулевого порядка, представленного на рис. 8.1, б. Накладывая определенное условие нормировки на  $\Pi$ , можно однозначно зафиксировать конечную часть величины  $A$ . Подчеркнем, что эта ренормализационная процедура применима вследствие локальности и вещественности вычитания и, следовательно, контрчлена.

Ниже мы покажем, что операцию вычитания можно сформулировать систематическим образом. Если для исключения расходимостей в функциях Грина требуется ввести в лагранжиан лишь конечное число дополнительных членов, то перенормированная теория будет зависеть только от конечного числа параметров. Такие теории называют перенормируемыми или суперперенормируемыми. Остается доказать, что перенормированные интегралы действительно конечны и удовлетворяют условиям локальности и унитарности. Ниже рассмотрим кратко эти вопросы.

Несколько другой подход, предложенный Дайсоном и Швингером, основывается на системе интегральных уравнений, связывающих полные функции Грина (см. разд. 10.1). К сожалению, в этом подходе на промежуточных этапах также приходится иметь дело с бесконечными константами мультипликативных перенормировок.

Наконец, наиболее ортодоксальная процедура, предложенная Эпштейном и Глазером, опирается непосредственно на аксиомы локальной теории поля в конфигурационном пространстве. Она свободна от математически неопределенных выражений, однако в ней завуалирован мультипликативный характер перенормировок. Последнее же свойство весьма существенно, так как при надлежащей интерпретации оно подводит к изучению ренормализационной группы (см. гл. 13).

### 8.1.2. Регуляризация

Чтобы придать смысл формальным и расходящимся выражениям, важно в качестве первого шага регуляризовать разложение теории возмущений. После того как выполнены ренормализационные вычитания, эту регуляризацию можно снять произвольным образом. Разработано несколько способов снятия регуляризации. Окончательные результаты конечны и не зависят от выбранного способа.

Наиболее простой рецепт состоит в том, чтобы произвести поворот Вика и обрезать большие значения (евклидовых) 4-импульсов для каждой петли. Тогда любое интегрирование ограничивается компактной сферой  $(k^2)^{1/2} < \Lambda$ , что определенно делает любую фейнмановскую амплитуду конечной. Однако при этом разрушается столь важная для нас пуанкаре- (или, точнее, евклидова) инвариантность. Поэтому данный рецепт используется крайне

редко, лишь в эвристических рассуждениях. Еще один рецепт состоит в переходе к дискретному пространству-времени, т. е. в предположении о том, что конфигурационные переменные  $x_\mu$  принимают только дискретные значения, соответствующие, скажем, узлам регулярной решетки. Ясно, что обрезание на малых расстояниях эквивалентно обрезанию больших импульсов. При введении решетки утрачивается инвариантность относительно вращений.

Ковариантная регуляризация получается, если заменить пропагатор Фейнмана  $G_F(x-y, m)$  выражением вида

$$G_F^{\text{рег}}(x-y) = G_F(x-y, m) + \sum_k C_k G_F(x-y, M_k), \quad (8.2)$$

где коэффициенты  $C_k$ , зависящие от  $m$  и  $M$ , подобраны таким образом, чтобы устранить некоторые из сингулярностей пропагатора  $G_F$ . Какая степень сингулярности допустима, чтобы любая диаграмма Фейнмана данной теории была конечной, и, следовательно, сколько членов должно содержаться в сумме (8.2), — это станет ясным после того, как мы сформулируем критерий сходимости. Здесь же достаточно сказать, что любую данную диаграмму с помощью такого вычитания можно сделать конечной. Например, в случае диаграммы собственной энергии, рассмотренной нами в разд. 8.1.1, можно сделать подстановку

$$G_F(x-y, m) \rightarrow G_F(x-y, m) - G_F(x-y, M),$$

или в импульсном пространстве

$$\frac{1}{k^2 - m^2} \rightarrow \frac{1}{k^2 - m^2} - \frac{1}{k^2 - M^2},$$

и убедиться в том, что это действительно так. В общем случае, если для всех вспомогательных масс  $M_k$  ввести общее обозначение  $\Lambda$ , исходный пропагатор восстанавливается, когда  $\Lambda \rightarrow \infty$ .

Поведение пропагатора при больших импульсах можно изменить также с помощью параметрического представления. Это изменение связано со следующей модификацией интегрирования в области малых значений параметра  $\alpha$ :

$$\int_0^\infty d\alpha e^{i\alpha(k^2 - m^2 + i\epsilon)} \rightarrow \int_0^\infty d\alpha \rho_\Lambda(\alpha) e^{i\alpha(k^2 - m^2 + i\epsilon)},$$

где функция  $\rho_\Lambda(\alpha)$  обращается в нуль вместе с несколькими своими производными при  $\alpha = 0$ . Мы требуем также, чтобы при устранении обрезания, т. е. при  $\Lambda \rightarrow \infty$ , выполнялось условие  $\rho_\Lambda(\alpha) \rightarrow 1$  для всех  $\alpha > 0$ . Например, мы можем взять  $\rho_\Lambda(\alpha) = \theta(\alpha - 1/\Lambda^2)$  или  $\rho(\alpha) = \alpha^{\lambda-1}$ , где  $\lambda \rightarrow 1$  при  $\Lambda \rightarrow \infty$ . Последний случай соот-



ветствует в импульсном пространстве пропагатору  $(k^2 - m^2 + i\epsilon)^{-\lambda}$ . Этот тип регуляризации подробно изучался Спиром.

Иногда с целью обеспечить какие-либо свойства инвариантности, например калибровочную инвариантность, приходится прибегать к более утонченной процедуре. Для этого можно использовать регуляризацию Паули—Вилларса, которая уже встречалась нам в предыдущей главе. Каждый фотонный пропагатор заменяется суммой вида (8.2). С другой стороны, из фермионных пропагаторов модифицируются лишь те, которые входят во внутренние замкнутые фермионные петли. Точнее говоря, замкнутой петле с  $2n$  вершинами мы сопоставляем выражение

$$\begin{aligned} & \text{Sp} \left[ \prod_{p=1}^{2n} \gamma_{\mu_p} S_F(z_p - z_{p-1}, m) \right] - \\ & - \sum_{s=1}^S C_s \text{Sp} \left[ \prod_{p=1}^{2n} \gamma_{\mu_p} S_F(z_p - z_{p-1}, M_s) \right], \end{aligned} \quad (8.3)$$

где  $z_0 \equiv z_{2n}$ . Более подробно эта регуляризация рассматривается в разд. 8.4.2.

Расходящиеся интегралы Фейнмана становятся сходящимися в ультрафиолетовой области, если перейти к пространству-времени меньшей размерности. В случае размерной регуляризации т'Хофта и Велтмана интегралы Фейнмана вычисляются для произвольной целой размерности  $d$  пространства-времени. Результат интегрирования может быть далее аналитически продолжен на произвольные вещественные или даже комплексные значения  $d$ . В данной регуляризации ультрафиолетовые расходимости проявляются как полюс при рациональных или целых значениях  $d$ . Нас интересует в конечном итоге переход к значению  $d$ , равному четырем, т. е. к размерности физического пространства-времени. Поэтому мы сосредоточим свое внимание на простых или кратных полюсах при  $d=4$ . Такое продолжение можно определить и для теорий, содержащих  $\gamma$ -матрицы Дирака, за исключением матрицы  $\gamma_5$ , определение которой связано с размерностью  $d=4$  (или в общем случае с пространством-временем четной размерности). Достоинство этого метода состоит в том, что он автоматически сохраняет внутренние симметрии, не связанные с  $\gamma_5$ -матрицами. Технически все действия, которые мы производим для проверки тождеств Уорда (см. гл. 7 или разд. 8.4), такие, как сдвиг переменных интегрирования, сворачивание лоренцевых индексов и т. д., согласуются с этой регуляризацией.

Аналитическое продолжение к  $d$ -мерному пространству-времени легче всего выполнить после осуществления поворота Вика в евклидову область с помощью параметрического представления, введенного в гл. 6 (см. т. 1). В самом деле, можно вычислить амплитуду (6.94) в случае произвольной целой размерности  $d$  (впредь мы будем опускать шляпки, отмечающие евклидовы им-

пульсы);

$$(2\pi)^d \delta^d(\sum p) I_G(P) = \int \prod_{l=1}^l \frac{d^d k_l}{(2\pi)^d} \frac{1}{k_l^2 + m_l^2} \prod_v (2\pi)^d \delta^d \left( P_v - \sum_l \varepsilon_{vl} k_l \right). \quad (8.4)$$

Нетрудно заметить, что здесь применим метод, изложенный в разд. 6.2.3, и мы получаем следующий результат:

$$I_G(P) = \int_0^\infty \prod_{l=1}^l d\alpha_l \frac{\exp \left\{ -[Q_G(P, \alpha) + \sum \alpha_l m_l^2] \right\}}{[(4\pi)^L \mathcal{P}_G(\alpha)]^{d/2}}, \quad (8.5)$$

где функции  $Q_G$  и  $\mathcal{P}_G$  определяются выражениями (6.86) и (6.87). Интеграл по  $\lambda$ , т. е. по параметру однородности переменных  $\alpha$ , сходится при  $\lambda=0$ , если  $l-dL/2=L(1-d/2)+V-1 > 0$ . Таким образом,

$$\begin{aligned} I_G(P) &= \int_0^\infty \frac{d\lambda}{\lambda} \lambda^{l-dL/2} \int_0^1 \prod_{l=1}^l d\alpha_l \frac{\exp -\lambda [Q_G(P, \alpha) + \sum \alpha_l m_l^2]}{[(4\pi)^L \mathcal{P}_G(\alpha)]^{d/2}} \delta(1 - \sum \alpha) = \\ &= \Gamma \left( l - \frac{dL}{2} \right) \int_0^1 \prod_{l=1}^l d\alpha_l \delta(1 - \sum \alpha) \frac{[Q_G(P, \alpha) + \sum \alpha_l m_l^2]^{dL/2-l}}{[(4\pi)^L \mathcal{P}_G(\alpha)]^{d/2}}. \end{aligned} \quad (8.6)$$

Например, при  $p, n \geq 1$

$$\begin{aligned} I_G(p) &= \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{1}{[(p-k)^2 + m_1^2]^n (k^2 + m_2^2)^p} = \\ &= \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \frac{\Gamma(n+p-d/2)}{\Gamma(n)\Gamma(p)} \int_0^1 d\alpha \alpha^{n-1} (1-\alpha)^{p-1} \times \\ &\times [\alpha(1-\alpha)p^2 + \alpha m_1^2 + (1-\alpha)m_2^2]^{d/2-n-p}. \end{aligned} \quad (8.7)$$

Полная зависимость от  $d$  может быть выделена явно, если выполнить интегрирование по  $\alpha$ . Для достаточно малых  $d$  результат является конечным. При  $d \rightarrow 4$  могут появиться ультрафиолетовые расходимости либо в функции Эйлера, стоящей перед выражением (8.6), либо в интеграле по  $\alpha$ , либо в том и другом месте одновременно. Однако в случае однопетлевых диаграмм, таких, как (8.7), бесконечной становится только величина  $\Gamma(l-dL/2)$ . Если  $l-2L$  представляет собой целое неположительное число, то

$$\Gamma \left( l - \frac{dL}{2} \right) \underset{d \rightarrow 4}{\sim} \frac{(-1)^{2L-l}}{(2L-l)!} \frac{2}{(4-d)L}, \quad (8.8)$$

и функция  $I_G(P)$  имеет простой полюс при  $d=4$ . При наличии также и внутренних расходимостей, связанных с интегрированием по  $\alpha$ , этот полюс может стать кратным (см. примеры, приводимые ниже).

Для полноты рассмотрения нам нужно договориться также, как следует обращаться с интегралами, включающими лоренцевы векторы и (или) спиноры. Первый случай не представляет какой-либо трудности: 4-векторы преобразуются в  $d$ -векторы, интегрирование можно выполнить, а результат продолжить на произвольные размерности. Например, в евклидовом пространстве

имеем

$$\int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{k_\mu}{[(p-k)^2 + m_1^2]^n (k^2 + m_2^2)^p} = \frac{p_\mu}{(4\pi)^{d/2}} \frac{\Gamma(n+p-d/2)}{\Gamma(n)\Gamma(p)} \times$$

$$\times \int_0^1 d\alpha \alpha^n (1-\alpha)^{p-1} [\alpha(1-\alpha)p^2 + \alpha m_1^2 + (1-\alpha)m_2^2]^{d/2-n-p}, \quad (8.9a)$$

$$\int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{k_\mu k_\nu}{[(p-k)^2 + m_1^2]^n (k^2 + m_2^2)^p} = \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \frac{1}{\Gamma(n)\Gamma(p)} \times$$

$$\times \left\{ \int_0^1 d\alpha \alpha^{n-1} (1-\alpha)^{p-1} [\alpha(1-\alpha)p^2 + \alpha m_1^2 + (1-\alpha)m_2^2]^{d/2+1-n-p} \frac{\delta_{\mu\nu}}{2} \times \right.$$

$$\times \Gamma\left(n+p-\frac{d}{2}-1\right) +$$

$$\left. + \int_0^1 d\alpha \alpha^{n+1} (1-\alpha)^{p-1} [\alpha(1-\alpha)p^2 + \alpha m_1^2 + (1-\alpha)m_2^2]^{d/2-n-p} \times \right.$$

$$\left. \times p_\mu p_\nu \Gamma\left(n+p-\frac{d}{2}\right) \right\}. \quad (8.9b)$$

В данном выражении  $\delta_{\mu\nu}$  является единичным тензором в  $d$ -мерном пространстве, удовлетворяющим условию

$$\sum_\mu \delta_{\mu\mu} = d. \quad (8.10)$$

Полагают, что это условие остается справедливым и при продолжении на нецелые размерности. Такой рецепт обеспечивает согласованность данного продолжения с алгебраическими действиями, такими, как сдвиги или сдвиги переменных интегрирования. Например, нетрудно проверить, что

$$\int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{k_\mu k_\nu \delta^{\mu\nu} - m_2^2}{[(p-k)^2 + m_1^2]^n (k^2 + m_2^2)^p} = \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{1}{[(p-k)^2 + m_1^2]^n (k^2 + m_2^2)^{p-1}}.$$

Обращение со спинорами требует большой осторожности. Во-первых, в исходном фейнмановском подынтегральном выражении мы отличаем  $\gamma$ -матрицы, входящие в фермионные петли, от  $\gamma$ -матриц, принадлежащих фермионным линиям, связанным с внешними линиями. Последние исключаются с помощью проектирующих операторов в четырех измерениях. Поэтому для каждой диаграммы следует рассматривать набор структур, включающих лишь  $\gamma$ -матрицы, относящиеся к петлям. Предполагается, что эти матрицы удовлетворяют правилам

$$\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = -2\delta_{\mu\nu} \quad (8.11a)$$

(напомним, что мы совершили поворот Вика и, следовательно,  $\gamma$ -матрицы являются теперь антиэрмитовыми),

$$\text{Sp}(\text{нечетное число } \gamma\text{-матриц}) = 0, \quad (8.11b)$$

$$\text{Sp } I = f(d), \quad (8.11b)$$

где  $f(d)$  — произвольная гладкая функция, удовлетворяющая условию  $f(4) = 4$ , например,  $f(d) = 4$  или  $f(d) = d$ . Для регуляризации явный вид функции  $f$  не

играет роли (он был бы, однако, существен, если бы мы действительно попытались строить теорию в  $d$ -измерениях) С помощью правил (8.11) мы можем перестроить всю систему тождеств для сверток и следов произведений  $\gamma$ -матриц, приведенных в конце настоящей книги в приложении П 2 для  $d=4$  в пространстве Минковского. Например,

$$\begin{aligned}\text{Sp } \gamma_\mu \gamma_\nu &= -f(d) \delta_{\mu\nu}, \\ \gamma_\mu \gamma_\mu &= -dI, \\ \gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\mu &= (d-2) \gamma_\nu.\end{aligned}$$

Мы не определили  $d$ -мерный аналог  $\gamma_5$ -матрицы. Это связано с тем, что обычное определение  $\gamma_5$ -матрицы опирается на существование абсолютно антисимметричного тензора  $\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$ , который определен только при  $d=4$ . Отсюда можно сделать заключение, что невозможно продолжить фермионные петли, содержащие нечетное число  $\gamma_5$ -матриц. Это кажущееся невинным ограничение есть не что иное, как проявление, в рамках размерной регуляризации, серьезной проблемы, а именно возможного возникновения киральных аномалий (см. гл. 11 и 12).

Рассмотренные выше рецепты могут показаться скептическому читателю довольно кустарными. Их самосогласованность, хотя и вполне вероятная и проверенная в практических вычислениях, не была, насколько нам известно, никогда полностью доказана. Особенно смущает случай безмассовых теорий. Например, мы встречаем интегралы вида

$$\int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{k_{\mu_1} \cdots k_{\mu_p}}{(k^2)^n},$$

которые не зависят от какого-либо масштаба. Аналитическое продолжение такого интеграла не определено, поскольку не существует размерности  $d$ , при которой он имел бы смысл. Он расходится либо в инфракрасной, либо в ультрафиолетовой области в зависимости от того, какое из неравенств,  $d+p-2n \leq 0$  или  $d+p-2n \geq 0$ , выполнено. Мы будем пренебрегать этими проблемами и придерживаться в тех случаях, где это необходимо, правила, гласящего, что такие интегралы, отвечающие безмассовым диаграммам типа «головастики», обращаются в нуль при размерной регуляризации.

При вычислениях с этой регуляризацией нужно помнить, что в  $d$ -измерениях некоторые константы связи могут приобрести размерность. Например, электрический заряд, т. е. коэффициент при выражении

$$\int d^d x A_\mu(x) \bar{\psi}(x) \gamma^\mu \psi(x)$$

в безразмерном действии ( $\hbar=1$ ) имеет в массовой шкале размерность

$$[e] = d - (d-1) - (d-2)/2 = (4-d)/2,$$

поскольку  $[\psi] = (d-1)/2$  и  $[A] = (d-2)/2$ . Следовательно,  $e$  заменяется на  $\mu^{(4-d)/2} e'$ , где  $e'$  — безразмерная величина,  $\mu$  — либо одна из масс рассматриваемых частиц, либо некоторый произвольный масштаб энергии, если все частицы безмассовые. Следовательно, при разложении результата в окрестности  $d=4$  получаем логарифмы этого масштаба.

Будем ли мы в окрестности  $d=4$  разлагать также и факторы  $(4\pi)^{-Ld/2}$ , входящие в выражение (8.6), — дело вкуса, так же как выбор функции  $f(d)$  в (8.11v). Важный момент состоит в том, что при вычислении контрчленов калибровочно-инвариантным образом или при сравнении диаграмм с целью проверки тождеств Уорда мы всегда рассматриваем классы диаграмм с одним и тем же полным числом петель  $L$ , т. е. с одинаковыми степенями величины  $4\pi$  и с одним и тем же числом фермионных петель, т. е. с одинаковыми степе-

ниями функции  $f(d)$ . Меняя рецепт, мы не нарушим справедливости тождеств Уорда, а лишь изменим контрчлены на конечную величину.

В качестве иллюстрации рассмотрим поляризацию вакуума в скалярной электродинамике. Правила Фейнмана для этой теории приведены в гл. 6 (см. т. 1). После поворота Вика (для евклидова внешнего импульса  $p$ ) диаграммы, приведенные на рис. 8.2, дают вклады

$$\Gamma_{\mu\nu}^{(a)} = -2e^2 \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{\delta_{\mu\nu}}{k^2 + m^2} = -\frac{2e^2 \delta_{\mu\nu}}{(4\pi)^{d/2}} \Gamma\left(1 - \frac{d}{2}\right) (m^2)^{d/2-1}$$

и

$$\begin{aligned} \Gamma_{\mu\nu}^{(b)} &= e^2 \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{(2k+p)_\mu (2k+p)_\nu}{[(p+k)^2 + m^2](k^2 + m^2)} = \\ &= \frac{e^2}{(4\pi)^{d/2}} \left\{ 2\delta_{\mu\nu} \Gamma\left(1 - \frac{d}{2}\right) \int_0^1 d\alpha [\alpha(1-\alpha)p^2 + m^2]^{d/2-1} + \right. \\ &\quad \left. + p_\mu p_\nu \Gamma\left(2 - \frac{d}{2}\right) \int_0^1 d\alpha (1-2\alpha)^2 [\alpha(1-\alpha)p^2 + m^2]^{d/2-2} \right\}. \end{aligned}$$

В соответствии с (8.8) выделим в сумме  $\Gamma^{(a)} + \Gamma^{(b)}$  полюс при  $d=4$ :

$$\Gamma_{\mu\nu}^{(a)} + \Gamma_{\mu\nu}^{(b)} = \frac{e^2}{(4\pi)^2} \frac{2}{4-d} \frac{1}{3} (p_\mu p_\nu - p^2 \delta_{\mu\nu}) + \text{Регулярные члены.} \quad (8.12)$$

Можно проверить, что а) в этой сумме расходящиеся члены, пропорциональные  $m^2$ , сократились, а б) тензорная структура расходящегося вклада и, следовательно, контрчлен является поперечной по отношению к  $p$ . Оба результата согласуются с тем, что ожидалось из калибровочной инвариантности. Вычисление конечной части рассматриваемой величины предоставляется читателю.

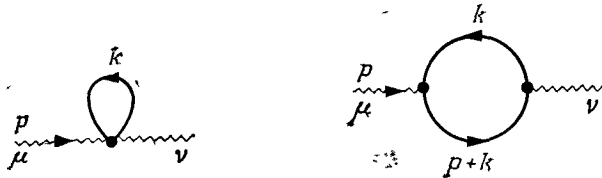


РИС. 8.2. Поляризация вакуума в однопетлевом приближении в скалярной электродинамике.

Можно построить и другие регуляризационные схемы. Существенным здесь является то, чтобы конечный перенормированный результат не зависел от выбора регуляризации. Однако найти регуляризацию и показать, что она делает все диаграммы конечными, недостаточно. Мы должны также доказать, что структура расходимостей такова, что они могут быть устранены с помощью допустимых контрчленов, т. е. с помощью локальных и эрмитовых полиномов от операторов полей. Например, расходимости вида  $\log p^2 \log \Lambda^2$  или расходимости с комплексным коэффициентом были бы катастрофой. В самом конце процедуры перенормировки

мы будем действовать другим способом. Мы докажем, что фейнмановские подынтегральные выражения с достаточным количеством вычитаний приводят к конечной теории. Поскольку вычитания соответствуют введению допустимых контрчленов, этот вывод будет следовать *a posteriori*. Иными словами, никакая конкретная регуляризация не будет фигурировать в доказательстве конечности теории. Однако итоги и смысл последней процедуры были бы неясными, если бы не подразумевалось применение некоторой регуляризации, что, таким образом, является удобным и общепринятым приемом.

### 8.1.3. Подсчет степени расходимости

Мы уже использовали понятие условной степени расходимости при обосновании сходимости фейнмановских интегралов из соображений размерности. Рассмотрим здесь это понятие более подробно.

В настоящем и следующем разделах мы будем иметь дело лишь с проблемой ультрафиолетовых расходимостей и отложим для дальнейшего изучения возможные трудности, связанные с инфракрасной областью, которые могут возникнуть из-за отсутствия массы у каких-либо частиц. Для конкретности предположим на время, что все поля являются массовыми.

Наивный способ оценить сходимость некоторой диаграммы Фейнмана состоит в том, чтобы одновременно растянуть все внутренние импульсы диаграммы с помощью общего множителя  $\lambda$ , т. е.  $k_i \rightarrow \lambda k_i$  и изучить поведение соответствующей амплитуды  $I_G \sim \lambda^\omega$  при  $\lambda \rightarrow \infty$ . В параметрическом представлении это сводится к изучению поведения подынтегрального выражения, когда все  $\alpha \rightarrow 0$  одинаковым образом, а именно  $\alpha_i \rightarrow \lambda^{-2} \alpha_i$ . Мы ожидаем и это будет скоро доказано, что если общая степень величины  $\lambda$ , называемая условной степенью расходимости и обозначаемая через  $\omega$ , неотрицательна ( $\omega \geq 0$ ), то интеграл, вообще говоря, расходится. Если она отрицательна, то некоторые интегралы, отвечающие поддиаграммам, все еще могут быть расходящимися; при этом говорят, что интеграл является условно сходящимся.

Мы рассматриваем теорию, включающую бозонные поля со спином 0 или 1 и фермионные поля со спином 1/2. Фермионные пропагаторы ведут себя при больших импульсах  $\lambda k$  как  $\lambda^{-1}$ , а бозонные — как  $\lambda^{-2}$ . Мы предполагаем здесь, что массивным векторным полям сопоставляются пропагаторы в калибровке Штюкельберга (3.147) (см. т. 1). В гл. 12 рассматривается случай, когда массивные поля связаны с несохраняющимися токами. Поля с высокими спинами в этой книге мы обсуждать не будем.

Здесь применяются те же обозначения, что и в гл. 6 (см. т. 1). Если соответствующий член в лагранжиане взаимодействия содер-

жит производные поля, то вершина  $v$  диаграммы  $G$  вносит степень  $\lambda^{\delta_v}$ . Каждое интегрирование  $d^4q$  по импульсам петли дает вклад  $\lambda^4$ . Если  $L$ —число независимых петель,  $I_B$  и  $I_F$ —число внутренних бозонных и фермионных линий соответственно, а  $V$ —полное число вершин, то условная степень расходимости  $\omega$  диаграммы  $G$  запишется в виде<sup>1)</sup>

$$\omega(G) = 4L + \left( \sum_{\text{По вершинам}} \delta_v \right) - I_F - 2I_B, \quad (8.13a)$$

или

$$\omega(G) - 4 = 3I_F + 2I_B + \sum_{\text{По вершинам}} (\delta_v - 4), \quad (8.13б)$$

если учесть равенство (6.69) (см. т. 1):

$$L = I_B + I_F + 1 - V. \quad (8.14)$$

Величина  $\delta_v$  равна числу производных, действующих на те поля в вершине  $v$ , которые входят в спаривания, отвечающие пропагаторам внутренних линий. Если  $f_v$ —число внутренних фермионных, а  $b_v$ —число внутренних бозонных линий, входящих в вершину  $v$ , то, очевидно,

$$I_F = \frac{1}{2} \sum_v f_v, \quad I_B = \frac{1}{2} \sum_v b_v, \quad (8.15)$$

поскольку в сумме по вершинам каждая внутренняя линия учитывается дважды. Таким образом, равенство (8.13б) можно переписать в виде

$$\omega(G) - 4 = \sum_v (\hat{\omega}_v - 4), \quad (8.13в)$$

где

$$\hat{\omega}_v \equiv \delta_v + \frac{3}{2}f_v + b_v. \quad (8.16)$$

Интерпретация этой величины, относящейся к вершине  $v$ , становится ясной, если вспомнить соображения размерности, приведенные в разд. 6.2.1 (см т. 1). На шкале масс размерность фермионного поля со спином  $1/2$  равна  $3/2$ , а для бозонного поля она равна 1. Следовательно,  $\hat{\omega}_v$  является вкладом в размерность лагранжиана взаимодействия, отвечающим  $f_v$  внутренних фермионов,  $b_v$  внутренних бозонов и  $\delta_v$  производных внутренних полей. С другой стороны, если  $\omega_v$  является размерностью члена  $\mathcal{L}_{вз}$ ,

<sup>1)</sup> См подстрочное примечание на с. 414 (т. 1 настоящей книги).— *Прим. ред.*

отнесенного к вершине  $v$ , включая как внутренние, так и внешние поля, т. е.

$$\omega_v = \text{Полное число бозонных полей} + (3/2) (\text{Полное число фермионных полей}) + \text{Полное число производных полей}, \quad (8.17)$$

и если  $E_F$  и  $E_B$  — число соответственно внешних фермионных и бозонных линий диаграммы, то из (8.13в) с очевидностью следует, что

$$\omega(G) - 4 = \sum_{\text{По вершинам}} (\omega_v - 4) - \frac{3}{2} E_F - E_B - \delta, \quad (8.18)$$

где  $\delta$  — полная степень внешних импульсов, факторизованных из фейнмановского интеграла. Разумеется, в размерность  $\omega_v$  вершины не входит вклад от размерной константы связи  $g_v$ , относящейся к данной вершине. Как уже отмечалось в гл. 6 (см. т. 1),

$$\omega_v + [g_v] = 4. \quad (8.19)$$

Нет ничего удивительного в том, что сходимость фейнмановских интегралов связана с размерностью констант связи. В самом деле, если  $\omega_v < 4$  для вершин, то размерность константы связи  $g_v$  положительна. Переход к более высоким порядкам теории возмущений означает включение более высоких степеней величины  $g$ ; при этом фейнмановское подынтегральное выражение при больших импульсах должно убывать все быстрее, чтобы общая размерность оставалась неизменной. Наоборот, если все  $\omega_v > 4$ , то интегралы будут расходиться все быстрее. Данные соображения в равной степени приложимы к любой поддиаграмме. В общем случае диаграмма с  $\omega(G) \geq 0$  называется условно расходящейся.

Таким образом, существуют следующие три класса теорий поля:

1. Неперенормируемые теории — это теории, в которых хотя бы один из мономов в лагранжиане взаимодействия имеет степень  $\omega_v > 4$ . Для данной функции Грина из соотношения (8.18) следует, что условная степень расходимости растет с числом вершин, т. е. с порядком теории возмущений. Как будет показано ниже, любая функция в достаточно высоком порядке становится расходящейся.
2. Перенормируемые теории представляют наибольший интерес. В этом случае всем членам в лагранжиане взаимодействия отвечает  $\omega_v \leq 4$  и хотя бы одному из них отвечает  $\omega_v = 4$ . Если для всех этих членов  $\omega_v = 4$ , то мы видим из (8.18), что все диаграммы, дающие вклад в данную функцию, имеют одну и ту же степень расходимости. В перенормируемых



теориях лишь конечное число функций Грина является источником расходимостей.

3. Суперперенормируемые теории содержат лишь вершины с  $\omega_v < 4$ . Степень расходимости уменьшается с увеличением порядка теории возмущений. В таких теориях имеется лишь конечное число расходящихся диаграмм.

Слово «неперенормируемая» может ввести в заблуждение. Оно не означает, что такие теории не могут быть сделаны конечными, но что размножение расходимостей, а стало быть и контрчленов делает нереалистичным применение здесь теории возмущений. После перенормировки эти теории зависят от бесконечного набора произвольных параметров, за исключением тех случаев, когда существует какой-либо принцип, позволяющий установить связь между этими параметрами. Такие теории мы больше не будем рассматривать. С другой стороны, суперперенормируемые теории образуют слишком ограниченный класс и часто являются патологическими.

Опираясь на правило (8.17), с помощью простой проверки нетрудно найти все возможные перенормируемые и суперперенормируемые теории. Для этого из операторов дифференцирования, скалярных полей  $\phi$ , полей Дирака  $\psi$  и векторных полей  $A_\mu$  (которым по предположению сопоставляется пропагатор Штюкельберга) нужно построить все возможные лагранжианы взаимодействия, представляющие собой лоренцевы скаляры, являющиеся эрмитовыми и имеющие степень  $\omega_v \leq 4$ . Выражениям  $\bar{\psi}\phi$  или  $\bar{\psi}\gamma_5\psi$ ,  $\phi^4$  или  $(A^2)^2$ ,  $\bar{\psi}A\psi$  (или, возможно,  $\bar{\psi}A\gamma_5\psi$ )  $\phi^\dagger\partial_\mu\phi A^\mu$ ,  $\phi^\dagger\phi A^2$  наряду с выражениями  $\bar{\psi}\partial\psi$ ,  $(\partial\phi)^2$ ,  $(\partial_\mu A_\nu)^2$ ,  $(\partial_\mu A^\mu)^2$ , обычно входящими в кинетический лагранжиан, соответствует  $\omega_v = 4$ . С точностью до введения нескольких полей каждого типа и дополнительных внутренних симметрий этим исчерпывается список перенормируемых лагранжианов взаимодействия. Членам  $\phi^3$ ,  $\bar{\psi}\psi$ ,  $\bar{\psi}\gamma_5\psi$ ,  $\phi^2$ ,  $A^2$  соответствуют  $\omega_v = 3$  или  $\omega_v = 2$ , т. е. это суперперенормируемые лагранжианы. Среди неперенормируемых теорий укажем псевдоскалярную связь  $\bar{\psi}\gamma_0\gamma_5\psi\partial^0\phi$ , взаимодействие Ферми  $\bar{\psi}\gamma_0(1-\gamma_5)\times\phi\bar{\psi}\gamma^0(1-\gamma_5)\psi$ , а также высшие степени поля  $\phi$ :  $\phi^5$ ,  $\phi^6$  и т. д.

Данный анализ и классификация теорий проведены нами для четырехмерного пространства-времени. С целью обобщения или для нужд статистической механики может оказаться необходимым распространение этого анализа на другие размерности. Читатель без особого труда может вывести аналогии соотношений (8.13)—(8.18) и определить, в пространстве какой размерности теория Ферми или скалярные теории  $\phi^3$ ,  $\phi^6$ ,  $(\partial_\mu\phi)^2 P(\phi)$  (где  $P$ —произвольный полином) являются перенормируемыми.

### 8.1.4. Теорема о сходимости

Рассмотрим более детально связь между сходимостью интегралов Фейнмана и степенью расходимости. Заметим сначала, что, поскольку пропагаторы содержат мнимую часть  $i\epsilon$ , безразлично, в каком пространстве изучать сходимость, — в пространстве Минковского или в евклидовом. Мы рассмотрим здесь только второй случай.

Предел  $\epsilon \rightarrow +0$  изучался Боголюбовым и Парасюком, а также Хеппом. Они показали, что существует эквивалентность между абсолютной сходимостью в евклидовой области, определяющей аналитическую функцию внешних импульсов, и сходимостью соответствующего фейнмановского интеграла к обобщенной функции медленного роста (т. е. полиномиально-ограниченной) в пространстве Минковского в пределе  $\epsilon \rightarrow +0$ .

Определим здесь поддиаграмму  $g$  диаграммы  $G$  как подсистему вершин диаграммы  $G$  и всех внутренних линий, соединяющих их в  $G$ . Каждой сильносвязной (т. е. одночастично-неприводимой) диаграмме мы сопоставляем семейство  $\mathcal{F}$  всех ее связных собственных поддиаграмм. Разумеется,  $\mathcal{F}$  включает и саму диаграмму  $G$ .

**Теорема.** Если  $\omega(g) < 0$  для всех  $g \in \mathcal{F}$ , то интеграл Фейнмана, соответствующий диаграмме  $G$ , абсолютно сходится (в евклидовой области)

Чтобы иметь дело с относительно простыми выражениями, проведем доказательство только для случая скалярной теории без связей с производными. Мы используем при этом параметрическое представление. В евклидовой области оно имеет вид

$$I_G(P) = \int_0^\infty d\alpha_1 \dots d\alpha_l \frac{\exp\{-[\sum \alpha_l m_l^2 + Q(P, \alpha)]\}}{(4\pi)^{2L} \mathcal{P}(\alpha)^2}. \quad (8.20)$$

Предположим, что  $m_l^2 > 0$  для всех  $l$ , и напомним, что  $Q$  — это квадратичная положительно-определенная форма внешних импульсов и однородная рациональная дробная функция первой степени относительно  $\alpha$ . Следовательно, неясной остается лишь сходимость при  $\alpha = 0$ . Экспонента, ограниченная в нуле, не играет здесь роли. Полином  $\mathcal{P}$  является суммой мономов степени  $L$  [ср с выражением (6.86)]:

$$\mathcal{P}(\alpha) = \sum_{\text{По деревьям}} \prod_{l \notin \mathcal{F}} \alpha_l. \quad (8.21)$$

Следуя Хеппу, разобьем область интегрирования на секторы:

$$0 \leq \alpha_{\pi_1} \leq \alpha_{\pi_2} \leq \dots \leq \alpha_{\pi_l},$$

где  $\pi$  — перестановка из  $(1, 2, \dots, l)$ . Докажем сходимость интеграла по секторам. Каждому сектору соответствует семейство вложенных друг

в друга подсистем  $\gamma_l$  линий диаграммы  $G$  (необязательно поддиаграмм):

$$\gamma_1 \subset \gamma_2 \subset \dots \subset \gamma_l = G,$$

где  $\gamma_l$  содержит линии, отвечающие набору  $(\alpha_{\pi_1}, \dots, \alpha_{\pi_l})$ . Ради простоты обозначений проведем рассуждение для первого сектора, соответствующего тождественной перестановке. Произведем в этом секторе следующую замену переменных:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \beta_1^2 \beta_2^2 \dots \beta_l^2, \\ \alpha_2 &= \beta_2^2 \dots \beta_l^2, \\ &\dots \\ \alpha_{l-1} &= \beta_{l-1}^2 \beta_l^2, \\ \alpha_l &= \beta_l^2. \end{aligned} \tag{8.22}$$

Якобиан данного преобразования равен

$$\frac{D(\alpha_1, \dots, \alpha_l)}{D(\beta_1, \dots, \beta_l)} = 2^l \beta_1 \beta_2^3 \dots \beta_l^{2l-1}.$$

Область интегрирования  $\Delta$  по переменным  $\beta$  запишется в виде

$$0 \leq \beta_l \leq \infty \text{ и } 0 \leq \beta_l \leq 1 \text{ при } 1 \leq l \leq l-1.$$

Для любой (необязательно связной) подсистемы  $\gamma_l$  можно определить условную степень расходимости

$$\omega_l = \omega(\gamma_l) = 4L_l - 2I_l, \tag{8.23}$$

где  $I_l = l$  — число внутренних линий подсистемы  $\gamma_l$ . Число независимых петель

$$L_l = I_l + C_l - V_l \tag{8.24}$$

выражается через число связных частей  $C_l$  и вершин  $V_l$ . Это обобщение формулы (6.69) нетрудно доказать по индукции. Очевидно,  $L_1 = 0$ ,  $L_l = L$ . Как функция от  $\beta$ ,  $\mathcal{P}$  является полиномом, причем коэффициенты при различных мономах, входящих в него, равны единице. Докажем, что он имеет вид

$$\mathcal{P} = \beta_1^{2L} \beta_2^{2L_2} \dots \beta_l^{2L} [1 + O(\beta)]. \tag{8.25}$$

Прежде всего отметим, что при одновременном растяжении всех  $\alpha$  в  $\rho$  раз справедливо равенство

$$\mathcal{P}(\rho\alpha_1, \dots, \rho\alpha_l) = \rho^L \mathcal{P}(\alpha_1, \dots, \alpha_l).$$

Изучим теперь поведение полинома  $\mathcal{P}$  в случае, когда  $\alpha$ , принадлежащие только  $\gamma_l$ , растягиваются в  $\rho$  раз:

$$\mathcal{P}(\rho\alpha_1, \dots, \rho\alpha_l, \alpha_{l+1}, \dots, \alpha_l) \tag{8.26}$$

Равенство (8.21) выражает  $\mathcal{P}$  через деревья диаграммы  $G$ . Каждое дерево  $\mathcal{F}$  диаграммы  $G$  проектируется на  $\gamma_l$  как объединение  $C'_l \supseteq C_l$  связных деревьев  $\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_{C'_l}$ . Это дает вклад в (8.21) в виде члена, который при растяжении (8.26) ведет себя как степень величины  $\rho$  с по-

казателем, равным числу линий подсистемы  $\gamma_l$ , не принадлежащих системе

$$\mathcal{U} = \mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2 \cup \dots \cup \mathcal{F}_{C'_l}.$$

Поскольку система  $\mathcal{U}$  удовлетворяет соотношению типа (8.24), в котором число петель положено равным нулю (это объединение деревьев) и объединяет все вершины подсистемы  $\gamma_l$ , то полное число линий равно

$$l_{\mathcal{U}} = V_l - C'_l.$$

Следовательно, степень величины  $\rho$  в соответствующем мономе, входящем в  $\mathcal{P}$ , равна  $l_l - l_{\mathcal{U}} = l - V_l + C'_l \geq l - V_l + C_l = L_l$ . Наимизшая степень величины  $\rho$  достигается для тех деревьев  $\mathcal{F}$  диаграммы  $G$ , для которых  $C'_l = C_l$ , т. е. для таких деревьев, которые проектируются в соответствии с формулой

$$\mathcal{F}|_{\text{проект.}, \gamma_l} = \bigcup_1^{C_l} \mathcal{F}_l.$$

Все эти деревья  $\mathcal{F}$  можно задать, если построить независимые связанные деревья в каждой связанной части подсистемы  $\gamma_l$ , а затем дополнить их объединение до дерева диаграммы  $G$ . Следовательно, их общий вклад в  $\mathcal{P}$  факторизуется в произведение  $\mathcal{P}_{\gamma_l}$ , т. е. в полином  $\mathcal{P}$ , соответствующий  $\gamma_l$ , согласно правилу (8.21), и в полином  $\mathcal{P}_{G/\gamma_l}$ , причем приведенная диаграмма  $G/\gamma_l$  получается стягиванием всех линий и вершин каждой связанной части подсистемы  $\gamma_l$  в одну вершину. Таким образом, мы приходим к выводу, что

$$\mathcal{P}(\rho\alpha_1, \dots, \rho\alpha_l, \alpha_{l+1}, \dots, \alpha_l) = \rho^{L_l} \times \\ \times [\mathcal{P}_{\gamma_l}(\alpha_1, \dots, \alpha_l) \mathcal{P}_{G/\gamma_l}(\alpha_{l+1}, \dots, \alpha_l) + O(\rho)]. \quad (8.27)$$

Вернемся теперь к переменным  $\beta$ . Очевидно,  $\beta_l^2$  является фактором однородности для параметров, относящихся к  $\gamma_l = G$ ,  $\beta_{l-1}^2$  — для параметров, относящихся к  $\gamma_{l-1}, \dots$ , и т. д. Поскольку  $\gamma$  вложены друг в друга, соотношение (8.27) может быть использовано повторно:

$$\mathcal{P}(\beta_1^2 \beta_2^2 \dots \beta_l^2, \beta_2^2 \dots \beta_l^2, \dots, \beta_{l-1}^2 \beta_l^2, \beta_l^2) = \\ = \beta_l^{2L_l} \mathcal{P}(\beta_1^2 \dots \beta_{l-1}^2, \beta_2^2 \dots \beta_{l-1}^2, \dots, \beta_{l-1}^2, 1) = \\ = \beta_l^{2L_l} \beta_{l-1}^{2L_{l-1}} [\mathcal{P}_{\gamma_{l-1}}(\beta_1^2 \dots \beta_{l-2}^2, \beta_2^2 \dots \beta_{l-2}^2, \dots, \beta_{l-2}^2, 1) \times \\ \times \mathcal{P}_{G/\gamma_{l-1}}(1) + O(\beta_{l-1}^2)] = \dots, \quad (8.28)$$

что в итоге приводит к (8.25). Коэффициент, стоящий перед ведущим членом, равен 1, так как в исходном полиноме  $\mathcal{P}$  данную комбинацию степеней величины  $\beta$  может иметь лишь единственный моном. Рассмотрим теперь интеграл (8.20), вычисляемый в секторе  $\Delta$ . В предположении теоремы, а именно, что  $\omega(g) < 0$  для любой сильносвязанной поддиаграммы  $g$ , нетрудно показать, что  $\omega(\gamma) < 0$  для любой подсистемы  $\gamma$  — как сильносвязанной, так и не сильносвязанной. Следовательно, подынтегральное выра-

жение мажорируется с точностью до множителя величиной

$$\frac{\beta_1^1 \beta_2^3 \dots \beta_l^{2l-1}}{\beta_1^{4L} \beta_2^{4L} \dots \beta_l^{4L}} = \prod_{l=1}^l \beta_l^{-4L+2l-1} = \prod_{l=1}^l \beta_l^{-\omega_l - 1},$$

и, поскольку  $\omega_l < 0$ , интеграл  $\int_0^\infty \prod d\beta_l \beta_l^{-\omega_l - 1}$  абсолютно сходится в нуле. Таким образом, интеграл (8.20) абсолютно сходится в любом секторе, что и требовалось доказать.

В случае скалярной теории, лагранжиан которой не содержит производных, из проведенного выше доказательства следует также, что, если сильносвязная поддиаграмма имеет неотрицательную условную степень расходимости, интеграл Фейнмана расходится. В самом деле, расходимость имеется по меньшей мере в одном секторе, а, поскольку интеграл является положительно-определенным, она не может сократиться. С другой стороны, в электродинамике мы встречали примеры сокращений различных членов, входящих в числитель фейнмановского подынтегрального выражения в импульсном пространстве. Например, мы показали, что диаграмма поляризации вакуума расходится лишь логарифмически, а не квадратично и что диаграмма рассеяния света на свете сходится.

Ниже мы должны будем показать, что, после того как произведены вычитания во всех поддиаграммах, для которых  $\omega(g) \geq 0$ , интеграл абсолютно сходится. Заметим, что предыдущие рассуждения об абсолютной сходимости оправдывают а posteriori произведенные при выводе (8.20) изменения порядка интегрирования или замены переменных интегрирования. При этом мы нашли также, сколько членов следует вычесть из обычного пропагатора (8.2), чтобы регуляризовать теорию. Например, в теории  $\phi^4$  замена  $(k^2 - m^2)^{-1} \rightarrow (k^2 - m^2)^{-1} - (k^2 - \Lambda^2)^{-1}$  делает любую диаграмму, кроме однопетлевого головастика, сходящейся, так как условная степень расходимости записывается теперь в виде

$$\omega(G) = 4L - 4I = 4(1 - V)$$

и является отрицательной при  $V > 1$ . Однопетлевой головастик можно либо регуляризовать независимым образом, либо исключить, переопределив правило Вика. Действуя таким образом, мы получаем в результате конечную регуляризованную теорию. Такой же анализ можно провести и для квантовой электродинамики (см. разд. 8.4.2.)

Из предыдущей теоремы можно сделать следующий полезный вывод. Если диаграмма  $G$  не содержит условно расходящихся поддиаграмм, т. е.  $\omega(g) < 0$ , для всех поддиаграмм  $g \neq G$ , но сама  $G$  условно расходится, т. е.  $\omega(G) \geq 0$ , то расходящаяся

часть соответствующей амплитуды является полиномом по внешним импульсам и внутренним массам степени, меньшей или равной  $\omega(G)$ . Действительно, поскольку  $\omega(G)$  служит мерой степени однородности  $I_G(P)$  по импульсам и массам, то производные порядка  $\omega(G)+1$  по  $P_i$  и  $m_i$  имеют степень  $-1$  и, следовательно, являются условно сходящимися. Согласно теореме, производные  $[\partial^{\omega+1}/(\partial P)^{\omega+1}] I_G(P)$  [или  $(\partial^{\omega+1}/\partial m^{\omega+1}) I_G$ , или смешанные производные этого порядка] являются конечными.

Читателю предоставляется в качестве простого упражнения показать, что наше доказательство теоремы остается в силе и в этом случае.

Окончательно получаем

$$I_{G, \text{рег}}(P, m, \Lambda) = I_{\text{конечн}}(P) + D(P, m, \Lambda), \quad (8.29)$$

где  $I_{\text{конечн}}(P)$  остается конечным после устранения обрезания, а  $D$  является полиномом от  $P$  и  $m$  степени, меньшей или равной  $\omega(G)$ .

## 8.2. ПЕРЕНОРМИРОВКА

### 8.2.1. Условия нормировки и структура контрчленов

Мы подошли теперь вплотную к самой операции перенормировки. Сформулируем еще раз основные идеи и подчеркнем главные результаты этой операции.

Наша цель состоит в том, чтобы выразить сильносвязные функции Грина через интегралы Фейнмана, соответствующие исходным диаграммам. Этого можно достигнуть посредством трех эквивалентных процедур. В первом подходе, описанном в гл. 7 (см. т. 1), к первоначальному лагранжиану добавляется формальный ряд (по  $\hbar$ ) контрчленов. Это, в свою очередь, сводится ко второму подходу, состоящему в переопределении параметров теории в каждом порядке теории возмущений. Голые параметры, входящие в лагранжиан, являются неявными функциями перенормированных параметров. Первые ненаблюдаемы и расходятся при снятии регуляризации, в то время как последние являются истинными параметрами теории—это массы, константы связи и т. д. В следующих разделах мы увидим, что эти две процедуры эквивалентны некоторому алгоритму вычитаний в подынтегральном выражении. Достоинством этого подхода, предложенного Боголюбовым, является то, что он обеспечивает конечный результат для каждой диаграммы, не требуя регуляризации на промежуточном этапе.

Мы попытаемся манипулировать этими тремя эквивалентными подходами настолько искусно, насколько нам это удастся, и применить к решению каждой конкретной задачи наиболее подходящей из них. Например, чтобы подчеркнуть мультипликативный

характер процедуры перенормировок, обсудим сначала рекуррентную конструкцию контрчленов в произвольном порядке и затем используем связь между голой и перенормированной теорией. В заключение на основе вычитательной операции Боголюбова будет дано (эвристическое) доказательство фундаментальной теоремы о сходимости.

Построение контрчленов производится по индукции. Мы предполагаем, что теория сделана конечной до некоторого порядка  $\hbar^{L-1}$  (где  $L-1$  — число петель) с помощью разумным образом подобранных контрчленов. Согласно подсчету степеней расходимости [соотношения (8.13) — (8.18)], в следующем порядке  $\hbar^L$  лишь конечное число сильносвязных функций имеет неотрицательную условную степень расходимости. За исключением сокращений, возможных при наличии симметрии, мы сопоставляем каждой функции локальный моном из полей и их производных. Разумеется, такой моном представляет собой лоренцев скаляр; его структура отражает характер функции Грина, поскольку он должен давать вклад в изучаемый процесс, а дополнительный вклад, вносимый им в данную функцию в этом порядке, должен сокращать ее расходимость. Остается, безусловно, произвол, связанный с возможностью изменения контрчленов на конечную величину. После введения регуляризации коэффициенты при контрчленах полностью определяются условиями нормировки, налагаемыми на условно расходящиеся функции Грина. Если эти условия нормировки выполняются в низшем порядке (в приближении деревьев для исходного лагранжиана), то требование, чтобы функция Грина удовлетворяла им в каждом порядке однозначно, фиксирует не только бесконечную, но и конечную часть контрчленов.

Например, в перенормируемой теории  $\varphi^4$  скалярного поля с массой  $m$  двухточечная функция  $\Gamma^{(2)}$  квадратично расходится [ $\omega(\Gamma^{(2)}) = 2$ ]. Мы требуем, чтобы перенормированная функция  $\Gamma_R^{(2)}$  удовлетворяла условиям

$$\Gamma_R^{(2)}(m^2) = 0, \quad \frac{d}{dp^2} \Gamma_R^{(2)}(m^2) = 1. \quad (8.30)$$

Это естественные условия для физической массы, поскольку из интерпретации теории в терминах частиц вытекает, что полный пропагатор  $G_R^{(2)}(p^2) = i[\Gamma_R^{(2)}(p^2)]^{-1}$  должен иметь полюс с вычетом  $i$  при  $p^2 = m^2$ . В  $L$ -м порядке регуляризованная функция  $\Gamma_{\text{рег}}^{(2)}$ , уже перенормированная до  $L-1$ -го порядка, записывается в виде

$$\Gamma_{\text{рег}}^{(2)}(p^2) = \Gamma_{\text{конечн}}^{(2)}(p^2, m^2, \Lambda^2) + p^2 \Delta_1 \Gamma^2(m^2, \Lambda^2) + \Delta_2 \Gamma^{(2)}(m^2, \Lambda^2), \quad (8.31)$$

где функция  $\Gamma_{\text{конечн}}^{(2)}(p^2, m^2, \Lambda^2)$  конечна при  $\Lambda^2 \rightarrow \infty$ , тогда как  $\Delta_1 \Gamma^{(2)}(m^2, \Lambda^2)$  ведет себя самое худшее как степень величины  $\ln(\Lambda^2/m^2)$ , а  $\Delta_2 \Gamma^{(2)}$  как  $\Lambda^2$  [умноженная на  $\ln^p(\Lambda^2/m^2)$ ]. Контрчлен

$L$ -го порядка дается выражением

$$\Delta \mathcal{L}^{(L)} = a \frac{(\partial \Phi)^2}{2} - b m^2 \frac{\Phi^2}{2}; \quad (8.32)$$

это определяет дополнительный вклад в  $\Gamma^{(2)}$  вида

$$\Delta \Gamma^{(2)} = a p^2 - b m^2. \quad (8.33)$$

Поскольку в низшем порядке условия (8.30) уже удовлетворяются, в  $L$ -м порядке они дают

$$\begin{cases} \Gamma_R^{(2) [L]}(p^2 = m^2) = \Gamma_{\text{рег}}^{(2)}(p^2 = m^2) + (a - b) m^2 = 0, \\ \left. \frac{\partial}{\partial p^2} \Gamma_R^{(2) [L]}(p^2) \right|_{p^2 = m^2} = \left. \frac{\partial \Gamma_{\text{рег}}^{(2)}}{\partial p^2} \right|_{p^2 = m^2} + a = 0, \end{cases} \quad (8.34)$$

откуда можно определить  $a$  и  $b$ . Аналогичное условие нормировки налагается на другую условно расходящуюся функцию, а именно на четырехточечную функцию теории  $\varphi^4$ . Физически разумное и симметричное условие состоит в том, чтобы эта функция принимала значение  $-\lambda$  (перенормированная константа связи) в расположенной на массовой поверхности (но нефизической) точке  $S_m$ :

$$S_m \begin{cases} p_1^2 = p_2^2 = p_3^2 = p_4^2 = m^2, \quad \Gamma_R^{(4)}|_{S_m} = -\lambda, \\ s = t = u = \frac{4m^2}{3}. \end{cases} \quad (8.35)$$

Очевидно, это согласуется со значением  $\Gamma^{(4) [0]} = -\lambda$  в низшем порядке. Аналогичные условия нормировки могут и должны быть введены в любую перенормируемую теорию.

Предыдущие рассуждения ни в коей мере не доказывают, что расходимости можно устранить с помощью контрчленов. В частности, мы не доказали того, что из равенства  $\omega(\Gamma^{(2)}) = 2$  следует, что  $\Gamma_{\text{рег}}^{(2)}$  ведет себя в соответствии с (8.31). В самом деле, условия того, чтобы выполнялось равенство (8.29), не выполнены, поскольку не все поддиаграммы с необходимостью сходятся, хотя, возможно, они перенормированы контрчленами низших порядков. То, что наши рассуждения тем не менее верны, выяснится фактически а posteriori, когда мы покажем, что данная процедура действительно приводит к конечной перенормированной теории. Здесь мы хотим лишь напомнить логические основы метода и подчеркнуть необходимость условий нормировки. Имеет смысл также напомнить, что перенормируемые и неперенормируемые теории различаются между собой числом этих условий. В то время как для первых достаточно иметь конечное число условий, чтобы определить теорию с помощью конечного числа перенормированных параметров, перенормировка последних требует бесконечного набора таких условий. В конечном счете неперенормируемая теория будет зависеть от бесконечного числа параметров.



Имеется большой произвол в выборе условий нормировки. Единственное ограничение состоит в том, что они должны быть удовлетворены в низшем порядке таким образом, чтобы однозначно определялись вычитания в высших порядках. В разд. 8.2.5 мы вновь рассмотрим данный вопрос.

Благодаря этому произволу можно использовать более удобную, но физически менее очевидную промежуточную перенормировку. В случае когда все поля имеют ненулевую массу, надежнее выбрать условия нормировки в начале координат импульсного пространства. Для приведенного выше примера теории  $\varphi^4$  условия запишутся в виде

$$\Gamma_R^{(2)}(p^2) \Big|_{p^2=0} = -m^2, \quad \frac{d}{dp^2} \Gamma_R^{(2)} \Big|_{p^2=0} = 1, \tag{8.36}$$

$$\Gamma_R^{(4)}(0, 0, 0, 0) = -\lambda.$$

Определяемая этими соотношениями величина  $m^2$  уже не является квадратом физической массы, хотя и связана с ней.

В случае частиц с ненулевым спином необходимо учитывать тензорную структуру функций Грина. Может оказаться так, что расходится лишь часть формфакторов при некоторых тензорах (например, изучая в предыдущей главе вершинную функцию, мы показали, что величина  $F_2$  конечна, а  $F_1$  расходится). Тогда вычитания и условия нормировки необходимы только для этих формфакторов.

Одно из следствий описанной выше рекурсивной процедуры построения контрчленов имеет отношение к их структуре. В перенормируемых теориях контрчлены удовлетворяют критерию перенормируемости. Так было в случае однопетлевого приближения в спинорной электродинамике, где присутствовали лишь контрчлены вида

$$:(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)^2:, \quad :\bar{\psi}\psi:, \quad \frac{i}{2}:\bar{\psi}\partial\psi:, \quad :\bar{\psi}A\psi:.$$

Аналогично в теории  $\varphi^4$  контрчлены имеют степень, меньшую или равную четырем:  $:(\partial\varphi)^2:, \quad :\varphi^2:, \quad :\varphi^4:.$  В скалярной электродинамике ситуация несколько иная, поскольку здесь к мономам исходного лагранжиана взаимодействия, отвечающего минимальной связи, помимо контрчленов такой же структуры добавляется новый член типа  $:(\varphi^\dagger\varphi)^2:.$  Таким образом, мы приходим к смеси электродинамики и самодействия  $\varphi^4.$  Однако теория остается при этом перенормируемой. Отсюда также следует, что скалярная электродинамика зависит от дополнительного незапланированного параметра, а именно от значения четырехточечной функции в данной точке.

Вообще, если сильносвязная диаграмма  $G$  в перенормируемой теории условно расходится:

$$0 \leq \omega(G) \leq 4 - \frac{3}{2} E_F - E_B - \delta$$

[здесь используется выражение (8.18), при  $\omega_v \leq 4$ ], то соответствующий контрчлен содержит  $E_F$  фермионных полей,  $E_B$  бозонных полей и  $\delta$  производных. Поэтому его размерность в смысле соотношения (8.17) равна

$$\omega_{v_c} = \frac{3}{2} E_F + E_B + \delta \leq 4 - \omega(G). \quad (8.37)$$

Размерность этого контрчлена меньше или равна четырем; следовательно, он также перенормируем.

В любом случае, если контрчлены имеют ту же структуру, что и мономы исходного лагранжиана, их можно рассматривать как переопределение параметров теории. Величины, которые входят в лагранжиан после добавления контрчленов к первоначальному выражению, будем рассматривать как голые параметры. Голые параметры определяются последовательно в каждом порядке теории возмущений как функции перенормированных величин таким образом, чтобы условия перенормировки были выполнены. В предыдущей главе (см. т. 1) мы рассмотрели такое построение применительно к электродинамике (см. также разд. 8.4). В случае же теории  $\varphi^4$  лагранжиан вместе с относящимися к нему контрчленами запишется в виде

$$\begin{aligned} \mathcal{L} + \Delta\mathcal{L} &= \mathcal{L}_R = \frac{1}{2} (\partial_\mu \varphi)^2 - \frac{m^2}{2} \varphi^2 - \frac{\lambda}{4!} \varphi^4 + \\ &+ \frac{1}{2} (Z-1) (\partial_\mu \varphi)^2 - \frac{1}{2} (Zm_0^2 - m^2) \varphi^2 - \frac{1}{4!} (Z^2 \lambda_0 - \lambda) \varphi^4 = \\ &= \frac{1}{2} Z (\partial_\mu \varphi)^2 - \frac{Zm_0^2}{2} \varphi^2 - \frac{Z^2 \lambda_0}{4!} \varphi^4 = \\ &= \frac{1}{2} (\partial_\mu \varphi_0)^2 - \frac{m_0^2}{2} \varphi_0^2 - \frac{\lambda_0}{4!} \varphi_0^4, \end{aligned} \quad (8.38)$$

где

$$\varphi_0 \equiv Z^{1/2} \varphi.$$

Данное выражение иногда называют перенормированным лагранжианом, хотя этот термин неудачный, поскольку в лагранжиан входят бесконечные коэффициенты. С точностью до замен  $\varphi \rightarrow \varphi_0$ ,  $\lambda \rightarrow \lambda_0$ ,  $m \rightarrow m_0$  лагранжиан  $\mathcal{L}_R$  имеет тот же вид, что и исходный. Напомним, что в теории возмущений

$$\begin{aligned} \lambda_0(\lambda, \Lambda/m) &= \lambda [1 + O(\lambda \hbar)], \\ \frac{m_0(\lambda, \Lambda/m)}{m} &= 1 + O(\lambda \hbar), \\ Z(\lambda, \Lambda/m) &= 1 + O(\lambda^2 \hbar^2). \end{aligned} \quad (8.39)$$

Последнее соотношение характерно для  $\varphi^4$ -взаимодействия. А priori мы ожидали бы  $Z = 1 + O(\hbar)$ .

То, что перенормировка сводится к переопределению параметров, означает, что перенормированные (или голые) и перенормированные функции Грина связаны соотношениями

$$\begin{aligned} G_R^{(n)}(p_1, \dots, p_n, m, \lambda) &= Z^{-n/2} G_{\text{per}}^{(n)}(p_1, \dots, p_n, m_0, \lambda_0, \Lambda), \\ \Gamma_R^{(n)}(p_1, \dots, p_n, m, \lambda) &= Z^{n/2} \Gamma_{\text{per}}^{(n)}(p_1, \dots, p_n, m_0, \lambda_0, \Lambda). \end{aligned} \quad (8.40)$$

Мы видим, что данное соотношение выполняется как для связанных, так и для сильносвязных диаграмм. В самом деле, связанные перенормированные функции вычисляются из лагранжиана  $\mathcal{L}_R = \mathcal{L} + \Delta\mathcal{L}$ , к которому добавлен источник  $j\varphi$ . В то же время перенормированные функции можно вычислить с помощью  $\mathcal{L}_R$  (при наличии регуляризации), к которому добавлена связь источника с  $\varphi_0$ , т. е. член  $j\varphi_0$ . Дифференцируя  $n$  раз по  $j$ , приходим к требуемому соотношению. В правой части соотношений (8.40) предполагается переход к пределу  $\Lambda \rightarrow \infty$ . Сильносвязные функции получаются после исключения одночастично приводимых диаграмм (операции, коммутирующей с перенормировкой) и перехода к усеченным функциям путем умножения на перенормированный или перенормированный пропагатор соответственно, откуда и следует различие в степени величины  $Z$ .

### 8.2.2. Рекуррентная формула Боголюбова

В разд. 8.2.1 контрчлены ассоциировались с сильносвязными функциями, т. е. с суммой диаграмм Фейнмана, вычисленных до определенного порядка. Существование условий нормировки позволяет нам сопоставить каждой условно расходящейся диаграмме контрчлен, вычисленный с учетом условия нормировки. Здесь следует указать на некоторую тонкость, связанную с сокращениями, вызванными симметриями (симметрия Бозе или Ферми, внутренние симметрии и т. д.), благодаря чему отдельные диаграммы могут расходиться сильнее, чем их сумма в данном порядке. В этом случае надежнее рассматривать только совокупность диаграмм, в которых эти сокращения происходят, например калибровочно-инвариантные совокупности диаграмм в квантовой электродинамике. В дальнейшем мы будем избегать этого несущественного осложнения, ограничиваясь рассмотрением скалярной теории без производных.

Изучим теперь вклад в данную сильносвязную диаграмму Фейнмана  $G$ , который вносят контрчлены более низкого порядка. В самом деле, в  $G$  могут входить условно расходящиеся сильносвязные поддиаграммы  $\gamma$ :  $\omega(\gamma) \geq 0$ . Каждой из этих поддиаграмм можно сопоставить контрчлен порядка  $\hbar^{L_\gamma}$  (где  $L_\gamma$  — число петель

в  $\gamma$ ). Обозначим через  $\mathcal{Y}_G$  подынтегральное выражение для диаграммы Фейнмана  $G$  в импульсном пространстве,  $\bar{\mathcal{R}}_G$  — то же подынтегральное выражение, но с учетом всех контрчленов более низкого порядка, и  $\mathcal{R}_G$  — перенормированное подынтегральное выражение, дающее конечный интеграл. Если  $G$  условно сходится, то

$$\mathcal{R}_G = \bar{\mathcal{R}}_G \quad \text{при } \omega(G) < 0. \quad (8.41)$$

Однако если  $\omega(G) \geq 0$ , то  $\mathcal{R}_G$  отличается от  $\bar{\mathcal{R}}_G$  вкладом, вносимым контрчленом, отвечающим самой диаграмме  $G$ . Иными словами, в  $\bar{\mathcal{R}}_G$  нужно произвести вычитание, чтобы получить  $\mathcal{R}_G$ , интеграл от которого конечен и удовлетворяет условиям нормировки. После интегрирования по внутренним импульсам  $\int (\mathcal{R}_G - \bar{\mathcal{R}}_G)$  дает полином от независимых внешних импульсов диаграммы  $G$ , причем его степень будет меньше или равна  $\omega(G)$ . В рамках промежуточной перенормировки (вычитание при нулевом импульсе)  $\bar{\mathcal{R}}_G - \mathcal{R}_G$  есть не что иное, как разложение Тейлора  $T_G \bar{\mathcal{R}}_G$  величины  $\bar{\mathcal{R}}_G$  по внешним импульсам в окрестности начала координат до порядка  $\omega(G)$  включительно. Мы будем писать

$$\mathcal{R}_G = (1 - T_G) \bar{\mathcal{R}}_G \quad \text{при } \omega(G) \geq 0. \quad (8.42)$$

Нам остается найти связь  $\bar{\mathcal{R}}_G$  с первоначальным подынтегральным выражением  $\mathcal{Y}_G$ . Различие между ними обусловлено контрчленами, отвечающими ренормализационным частям  $\gamma$  диаграммы  $G$ . Согласно Циммерману, это относится к сильносходящимся условно расходящимся поддиаграммам, т. е. в соответствии с определением, данным к разд. 8.1.4, к поддиаграммам, содержащим все линии диаграммы  $G$ , которые соединяют две их вершины. Вклад контрчлена, отвечающего  $\gamma$ , равен  $-T_\gamma \bar{\mathcal{R}}_\gamma$ . Подстановка его в диаграмму  $G$  вместо  $\gamma$  дает

$$\mathcal{Y}_{G/\gamma} (-T_\gamma \bar{\mathcal{R}}_\gamma). \quad (8.43)$$

Здесь  $T_\gamma \bar{\mathcal{R}}_\gamma$  обозначает разложение в ряд Тейлора модифицированного подынтегрального выражения  $\bar{\mathcal{R}}_\gamma$  как функции независимых внешних импульсов поддиаграммы  $\gamma$  до порядка  $\omega(\gamma)$  (включительно).

Данное разложение в ряд Тейлора не является столь же хорошо определенным, как в случае самой  $G$ , так как здесь требуется большая осторожность при различении внутренних и внешних независимых импульсов. Будем считать, что мы можем в любом случае определить эти внешние переменные. Заинтересованный читатель может обратиться к работам, цитируемым в примечаниях, помещенных в конце главы.

С другой стороны,  $\mathcal{Y}_{G/\gamma}$  обозначает вклад в подынтегральное выражение линий и вершин первоначальной диаграммы, внешних по отношению к  $\gamma$ . В частности, в него входят пропагаторы, относящиеся к линиям, которые соединяют  $\gamma$  с остальной частью  $G$  (см. для иллюстрации рис. 8.3). Выражение (8.43) содержит вклад контрчлена, относящегося к  $\gamma$  (и, возможно, контрчленов, дающих вклад в  $\bar{\mathcal{R}}_\gamma$ ). Теперь легко записать вклад двух контрчленов,

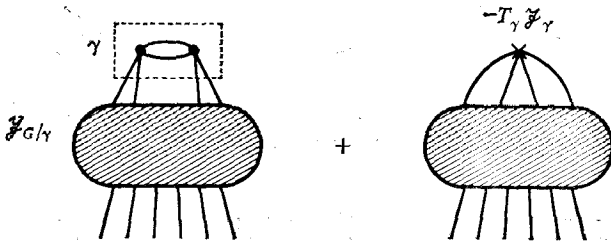


РИС. 8.3. Вычитание внутренней ренормализационной части  $\gamma$  в подынтегральном выражении  $\mathcal{Y}$ .

относящихся к двум несвязным ренормализационным частям  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$ . Под несвязными понимаются диаграммы, не имеющие общих линий или вершин:  $\gamma_1 \cap \gamma_2 = \emptyset$ . Этот вклад записывается в виде

$$\mathcal{Y}_{G/(\gamma_1, \gamma_2)} (-T_{\gamma_1} \bar{\mathcal{R}}_{\gamma_1}) (-T_{\gamma_2} \bar{\mathcal{R}}_{\gamma_2}), \quad (8.44)$$

где  $\mathcal{Y}_{G/(\gamma_1, \gamma_2)}$  обозначает вклад в первоначальное подынтегральное выражение всех линий и вершин диаграммы  $G$ , за исключением тех, которые принадлежат  $\gamma_1$  или  $\gamma_2$ . То, почему рассматриваются лишь несвязные ренормализационные части, объясняется тем, что в противном случае ни одну из них нельзя будет заменить соответствующим ей контрчленом. Это перечисление возможных вкладов в  $\bar{\mathcal{R}}_G$  может быть продолжено: В результате получается рекуррентная формула, данная Боголюбовым:

$$\bar{\mathcal{R}}_G = \mathcal{Y}_G + \sum_{\substack{(\gamma_1, \dots, \gamma_s) \\ \gamma_a \cap \gamma_b = \emptyset}} \mathcal{Y}_{G/(\gamma_1, \dots, \gamma_s)} \prod_{a=1}^s (-T_{\gamma_a} \bar{\mathcal{R}}_{\gamma_a}). \quad (8.45)$$

В правой части первый член совпадает с исходным подынтегральным выражением, а суммирование проводится по всем семействам несвязных ренормализационных частей. Из формулы (8.45) после итерации с учетом (8.41) и (8.42) получаем перенормированное подынтегральное выражение. Если  $G$  не содержит условно расходящихся сильносвязных поддиаграмм, то  $\bar{\mathcal{R}}_G = \mathcal{Y}_G$ . К таким диаграммам относятся все диаграммы, изучавшиеся в гл. 7 (см. т. 1). Для однопетлевых диаграмм либо  $\omega(G) < 0$  и  $\bar{\mathcal{R}}_G = \mathcal{Y}_G$ , либо  $\omega(G) \geq 0$  и  $\bar{\mathcal{R}}_G = (1 - T_G) \mathcal{Y}_G$ .

Приведем теперь простые примеры, в которых имеется большее число петель. Ради простоты рассмотрим теорию скалярного поля  $\phi$  с взаимодействием  $\mathcal{L}_{\text{вз}} = -\lambda\phi^3/3!$  в шестимерном пространстве-времени. Хотя такая теория страдает серьезными недостатками — ее гамильтониан не ограничен снизу, — имеет смысл построить для нее разложение в ряд теории возмущений. Это перенормируемая теория (в шести измерениях). Подсчет степеней расходимости проводится в соответствии с формулой  $\omega(G) = 6L - 2I = 6 - 2E$  вместо (8.18). Рас-

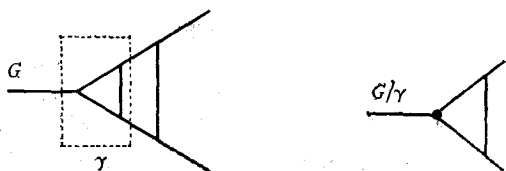


РИС. 8.4. Расходимости вложенных диаграмм.

смотрим диаграмму, изображенную на рис. 8.4. Поддиаграмма  $\gamma$  внутри прямоугольника, очерченного штриховой линией, является единственной ренормализационной частью, не считая самой  $G$ . Согласно (8.45),

$$\begin{aligned}\bar{\mathcal{R}}_G &= \mathcal{Y}_G + \mathcal{Y}_{G/\gamma} (-T_\gamma \bar{\mathcal{R}}_\gamma), \\ \bar{\mathcal{R}}_\gamma &= \mathcal{Y}_\gamma,\end{aligned}$$

откуда следует выражение

$$\bar{\mathcal{R}}_G = \mathcal{Y}_G + \mathcal{Y}_{G/\gamma} (-T_\gamma \mathcal{Y}_\gamma) = (1 - T_\gamma) \mathcal{Y}_G.$$

Здесь допущена некоторая вольность в обозначениях. Следуя (8.42), имеем

$$\mathcal{R}_G = (1 - T_G) \bar{\mathcal{R}}_G = (1 - T_G) (1 - T_\gamma) \mathcal{Y}_G. \quad (8.46)$$

Мы видим, что в случае с вложенными диаграммами  $\gamma \subset G$  имеются два фактора  $(1 - T)$ . Это утверждение продолжает оставаться справедливым, если к этой диаграмме добавлять новые (параллельные) ступени. Здесь мы имеем хорошее упражнение, позволяющее убедиться в том, что перенормированное подынтегральное выражение приводит к конечному интегралу.

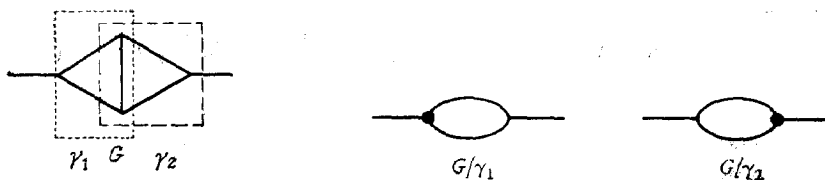


РИС. 8.5. Расходимости перекрывающихся диаграмм.

Обратимся теперь к диаграмме, приведенной, на рис. 8.5. Она условно расходится [ $\omega(G) = 2$ ] так же, как и две ее ренормализационные части  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  [ $\omega(\gamma_1) = \omega(\gamma_2) = 0$ ]. Здесь мы сталкиваемся с новым явлением:  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  не входят одна в другую и не являются несвязными — они перекрываются. У них имеются одна общая линия и две вершины, однако ни одна из них не вклю-

чена в другую. Следовательно, формула (8.45) дает

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{R}}_G &= \mathcal{Y}_G + \mathcal{Y}_{G/\gamma_1} (-T_{\gamma_1} \bar{\mathcal{R}}_{\gamma_1}) + \mathcal{Y}_{G/\gamma_2} (-T_{\gamma_2} \bar{\mathcal{R}}_{\gamma_2}), \\ \bar{\mathcal{R}}_{\gamma_1} &= \mathcal{Y}_{\gamma_1}, \\ \bar{\mathcal{R}}_{\gamma_2} &= \mathcal{Y}_{\gamma_2}. \end{aligned}$$

Записывая тождество  $T_\gamma \mathcal{Y}_G \equiv \mathcal{Y}_{G/\gamma} T_\gamma \mathcal{Y}_\gamma$  окончательно получаем

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{R}}_G &= (1 - T_{\gamma_1} - T_{\gamma_2}) \mathcal{Y}_G, \\ \mathcal{R}_G &= (1 - T_G) \bar{\mathcal{R}}_G = (1 - T_G) (1 - T_{\gamma_1} - T_{\gamma_2}) \mathcal{Y}_G. \end{aligned} \quad (8.47)$$

Мы видим, что  $\mathcal{R}_G$  не равно величине  $(1 - T_G) (1 - T_{\gamma_1}) (1 - T_{\gamma_2}) \mathcal{Y}_G$ . Дополнительные члены, а именно  $(1 - T_G) (T_{\gamma_1} T_{\gamma_2})$ , в точности соответствуют перекрывающимся поддиаграммам.

Диаграмму, приведенную на рис. 8.5, мы изучим в разд. 8.4.4 для случая четырехмерной квантовой электродинамики.

### 8.2.3. Явное решение Циммермана<sup>1)</sup>

Приведенные примеры подсказывают общее решение рекуррентного уравнения (8.45). Следуя Циммерману, определим лес ренормализационных частей как семейство  $U$  сильно-связных неприводимых условно расходящихся поддиаграмм  $\gamma$ , таких, что

$$\text{если } \gamma_1 \text{ и } \gamma_2 \in U, \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{то либо } \gamma_1 \subset \gamma_2, \\ \text{либо } \gamma_2 \subset \gamma_1, \\ \text{либо } \gamma_1 \cap \gamma_2 = \emptyset. \end{array} \right. \quad (8.48)$$

Напомним, что равенство  $\gamma_1 \cap \gamma_2 = \emptyset$  означает, что эти поддиаграммы не имеют ни общих вершин, ни линий. Лес может быть пустым. Кроме того, обозначим через  $V$  леса диаграммы  $G$ , такие, что если  $G$  сама условно расходится, то  $G$  не принадлежит  $V$ . Разумеется, если  $G$  не является условно расходящейся, то две системы лесов  $\{U\}$  и  $\{V\}$  совпадают.

Пусть выбрана согласованная система внутренних импульсов, для которой операции  $T_\gamma$  имеют смысл. Тогда такие операции, относящиеся к несвязным  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$ , коммутируют, в то время как в случае  $\gamma_1 \subset \gamma_2$  подразумевается, что величина  $T_{\gamma_1}$  должна стоять справа от  $T_{\gamma_2}$  [ср. с примерами, описываемыми формулами (8.46) и (8.47)]. При этих условиях покажем, что выражения

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{R}}_G &= \sum_V \prod_{\gamma \in V} (-T_\gamma) \mathcal{Y}_G, \\ \mathcal{R}_G &= \sum_U \prod_{\gamma \in U} (-T_\gamma) \mathcal{Y}_G \end{aligned} \quad (8.49)$$

<sup>1)</sup> Решение рекуррентных соотношений, определяющих  $R$ -операцию, было впервые найдено О. И. Завьяловым и В. М. Степановым (см. примечания редактора перевода в конце настоящей главы). — *Прим. ред.*

представляют собой решение уравнения (8.45). Во-первых, заметим, что пустому лесу соответствует член  $\mathcal{Y}_G$ . Во-вторых, если  $G$  является ренормализационной частью, мы можем сопоставить каждому  $V$  два леса  $U$ -типа, а именно  $U_1 = V$  и  $U_2 = \{G\} \cup V$ . Следовательно, в этом случае выражения (8.49) дают  $\mathcal{R}_G = (1 - T_G) \overline{\mathcal{R}}_G$ , тогда как если  $\omega(G) < 0$ , то  $\mathcal{R}_G = \overline{\mathcal{R}}_G$  по определению  $V$ . Оба случая согласуются с (8.41) и (8.42). Доказательство того, что (8.49) действительно является решением уравнения (8.45), проведем по индукции, предполагая, что утверждение доказано для произвольных диаграмм с числом петель не более  $L - 1$ . Рассмотрим случай, когда  $G$  содержит  $L$  петель. Запишем уравнение (8.45) и подставим в него выражение (8.49) для каждого  $\overline{\mathcal{R}}_\gamma$ . Мы получим

$$\overline{\mathcal{R}}_G = \mathcal{Y}_G + \sum_{\substack{\{\gamma_1, \dots, \gamma_s\} \\ \gamma_a \cap \gamma_b = \emptyset}} \mathcal{Y}_{G/\{\gamma_1, \dots, \gamma_s\}} \prod_{a=1}^s -T_{\gamma_a} \left[ \sum_{V_{\gamma_a}} \prod_{\gamma' \in V_{\gamma_a}} (-T_{\gamma'}) \mathcal{Y}_{\gamma_a} \right]. \quad (8.50)$$

Обозначения здесь являются громоздкими, но очевидными. Простая проверка показывает, что (8.50) воспроизводит все члены первого из выражений (8.49), соответствующие лесам экстремальных элементов  $\gamma_1, \dots, \gamma_s$ . По определению экстремальный элемент леса — это элемент  $\gamma$ , который не входит ни в один другой лес. В сумму по несвязным системам все леса диаграммы  $G$  входят по одному и только по одному разу.

Мы пока не говорим о выборе условий нормировки. Поскольку природа тейлоровых вычитаний зависит от этого выбора, наиболее подходящим из них является промежуточная перенормировка, определенная выше, т. е. вычитание при нулевом импульсе. Если выбирается другая точка, например в безмассовых теориях, в которых вычитания при нулевом импульсе запрещены (см. разд. 8.3.1), то необходимо специально позаботиться о сохранении лоренц-инвариантности.

Аналогичным образом можно провести последовательно дополнительные вычитания, т. е. сверх степени  $\omega(G)$ , вытекающей из наших правил подсчета степеней. Мы не будем этим заниматься здесь и рекомендуем читателю обратиться к цитируемой в конце главы литературе (см. также замечания в конце разд. 8.2.6).

Структура выражения  $\mathcal{R}$  такова, что в него входят лишь несвязные ренормализационные части, т. е. части, не имеющие общих вершин или линий. Ради последовательности изложения покажем, что перенормированное подынтегральное выражение для некоторой сочлененной (или одновершинно-приводимой) диаграммы может быть факторизовано (рис. 8.6). В качестве примера рассмотрим диаграмму, приведенную на рис. 8.6, б, для четырехмерной  $\Phi^4$  теории. Имеются следующие леса  $U$ :

$$\emptyset, \{\gamma_1\}, \{\gamma_2\}, \{\gamma_1, G\}, \{\gamma_2, G\}, \{G\}$$

Следовательно,

$$\mathcal{R}_G = (1 - T_G - T_{\gamma_1} - T_{\gamma_2} + T_G T_{\gamma_1} + T_G T_{\gamma_2}) \mathcal{Y}_{\gamma_1} \mathcal{Y}_{\gamma_2}.$$



Для такой диаграммы  $T_G = T_{\gamma_1} T_{\gamma_2}$ . Поскольку степень расходимости для  $G$ ,  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  одна и та же и разложение в ряд Тейлора до порядка  $\omega$  не влияет на полином степени  $\omega$ , мы имеем

$$T_G = T_G T_{\gamma_1} = T_G T_{\gamma_2} = T_{\gamma_1} T_{\gamma_2}.$$

Следовательно,  $\mathcal{R}_G$  можно записать также в виде

$$\mathcal{R}_G = (1 - T_{\gamma_1}) \mathcal{Y}_{\gamma_1} (1 - T_{\gamma_2}) \mathcal{Y}_{\gamma_2} = \mathcal{R}_{\gamma_1} \mathcal{R}_{\gamma_2}.$$

Это доказательство нетрудно обобщить на произвольный случай.

Можно непосредственно проверить, что в случае, когда все ренормализационные части диаграммы  $G$  являются вложенными одна в другую, выра-

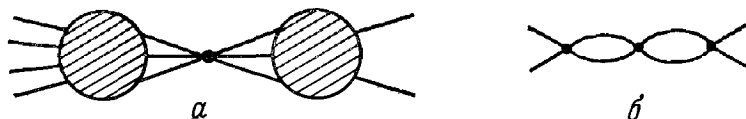


РИС. 8.6. Сочлененные (одновершинно приводимые) диаграммы

жения (8.49) сводятся к произведению операторов  $(1 - T_\gamma)$  по всем  $\gamma$ . В общем случае такое произведение нужно расписать почленно и опустить в нем все члены, соответствующие перекрывающимся поддиаграммам. Эти два утверждения являются непосредственным обобщением свойств, найденных для частных примеров в конце разд 8.2.2.

Соотношения (8.49) представляют собой главный результат, однако мы не можем быть полностью удовлетворены до тех пор, пока мы не докажем, что они приводят к сходящемуся интегралу. Особое затруднение вызывает случай перекрывающихся расходимостей. Действительно ли рецепт, выражаемый соотношениями (8.49), достаточен, чтобы в таких случаях получалось сходящееся выражение? Как мы увидим ниже, ответ на этот вопрос является утвердительным. После того как это будет доказано, использование промежуточной регуляризации не будет необходимым, поскольку вычитание подынтегрального выражения приводит к сходящемуся интегралу Фейнмана. Тем не менее часто более удобно иметь дело с регуляризованными амплитудами, а не с громоздкими выражениями (8.49). Прежде чем дать схематическое доказательство сходимости, рассмотрим вычитания в параметрическом представлении.

### 8.2.4. Перенормировка в параметрическом представлении

Рецепты вычитательной процедуры можно сформулировать в параметрическом представлении. При этом мы получаем более простое доказательство теоремы о сходимости. Опишем кратко наиболее важные этапы этого доказательства.

В качестве предварительного примера рассмотрим снова однопетлевую диаграмму собственной энергии (8.7) для  $\phi^3$ -теории в шести измерениях. Соот-

ветствующая амплитуда в евклидовой области запишется в виде

$$I(P^2) = \int_0^\infty d\alpha_1 d\alpha_2 \frac{e^{-[m^2(\alpha_1 + \alpha_2) + Q(P, \alpha)]}}{(4\pi)^3 \mathcal{P}(\alpha)^3},$$

где  $\mathcal{P}(\alpha) = \alpha_1 + \alpha_2$ ,  $Q(P, \alpha) = [\alpha_1 \alpha_2 / (\alpha_1 + \alpha_2)] P^2$ . Мы имеем здесь квадратичную расходимость, обусловленную неинтегрируемостью в начале координат



РИС. 8.7. Диаграмма «пузырь».

в параметрическом пространстве. Если мы используем промежуточную перенормировку, то перенормированная форма будет получаться после вычитания конечной части разложения в ряд Тейлора по  $P^2$  в окрестности нуля:

$$\begin{aligned} I_R(P^2) &= I(P^2) - I(0) - P^2 \left. \frac{dI}{dP^2} \right|_0 = \\ &= \int_0^\infty d\alpha_1 d\alpha_2 \frac{e^{-m^2(\alpha_1 + \alpha_2)}}{(4\pi)^3 \mathcal{P}(\alpha)^3} \left( e^{-Q(P, \alpha)} - e^{-Q(0, \alpha)} - P^2 \left. \frac{d}{dP^2} e^{-Q(P, \alpha)} \right|_0 \right). \end{aligned} \quad (8.51)$$

При одновременном растяжении параметров  $\alpha_1, \alpha_2$  на величину  $\lambda$  подынтегральное выражение, подвергнутое вычитанию, будет вести себя как  $\lambda^{-1}$ . Благодаря дополнительному фактору  $\lambda$ , возникающему из меры  $d\alpha_1 d\alpha_2$ , интеграл будет сходящимся в нуле. Теперь вычитание по  $P^2$  можно преобразовать в вычитание по параметру  $\lambda$ , если мы вспомним свойства однородности величин  $Q$  и  $\mathcal{P}$  и заметим, что

$$Q(\rho P, \alpha) = Q(P, \rho^2 \alpha)$$

и

$$\begin{aligned} &[\mathcal{P}(\alpha)]^{-3} \left( e^{-Q(P, \alpha)} - e^{-Q(0, \alpha)} - P^2 \left. \frac{d}{dP^2} e^{-Q(P, \alpha)} \right|_0 \right) = \\ &= [\mathcal{P}(\alpha)]^{-3} e^{-Q(P, \alpha)} - \sum_{n=0}^2 \frac{1}{n!} \frac{\partial^n}{\partial P^n} \{ [\mathcal{P}(\alpha)]^{-3} e^{-Q(\rho P, \alpha)} \} \Big|_{\rho=0} = \\ &= [\mathcal{P}(\alpha)]^{-3} e^{-Q(P, \alpha)} - \sum_0^2 \frac{1}{n!} \frac{\partial^n}{\partial \rho^n} \{ \rho^n e^{-Q(P, \rho^2 \alpha)} [\mathcal{P}(\rho^2 \alpha)]^{-3} \} \Big|_{\rho=0}. \end{aligned} \quad (8.52)$$

Этот явный пример приводит нас к следующему определению. Пусть  $f(\rho)$  — функция переменной  $\rho$ , такая, что величина  $\rho^p f(\rho)$  дифференцируема в нуле до некоторого целого порядка  $p$ . Определим оператор  $\mathcal{F}^k$  следующим образом:

$$\mathcal{F}^k f(\rho) = \rho^{-p_1} \sum_{s=0}^{k+p_1} \frac{\rho^s}{s!} \frac{d^s}{d\rho^s} [\rho^{p_1} f(\rho)] \Big|_{\rho=0}, \quad \forall p_1 \geq p; \quad (8.53)$$

здесь  $k$  — целое число. Можно непосредственно проверить, что это определение не зависит от условия  $\rho_l \geq p$  и что его можно обобщить на нецелые значения  $\rho$ . Выражение (8.53) имеет смысл при условии, что  $k + p \geq 0$ , а это значит, что  $k$  может принимать отрицательные значения. Мы полагаем по определению, что

$$\mathcal{F}^k = 0 \text{ при } k + p < 0.$$

Существенное свойство этого обобщенного разложения Тейлора состоит в том, что

$$(1 - \mathcal{F}^k) f(\rho) \sim O(\rho^{k+1}). \tag{8.54}$$

В предыдущем примере мы имели следующее перенормированное подынтегральное выражение:

$$(1 - \mathcal{F}^{-4}) \{ [\mathcal{P}(\rho^2 \alpha)]^{-3} e^{-Q(P, \rho^2 \alpha)} \} \Big|_{\rho=1},$$

где обозначения указывают, что вычитания выполняются при  $\rho=0$  и затем функция вычисляется при  $\rho=1$ .

Эти действия обобщаются на произвольные ситуации. Если вернуться к четырехмерному случаю, то формулы (8.49), переведенные на язык параметрического представления, дают следующую перенормированную амплитуду:

$$I_R(P) = \frac{1}{(4\pi)^{2L}} \int_0^\infty \prod_{s=1}^l (d\alpha_s e^{-\alpha_s m_s^2}) \mathcal{R}(P, \alpha),$$

$$\mathcal{R}(P, \alpha) = \sum_U \prod_{\gamma \in U} (-\mathcal{F}_{\rho_\gamma}^{-2I_\gamma}) \{ [\mathcal{P}(\alpha)]^{-2} e^{-Q(P, \alpha)} \} \Big|_{\rho_\gamma=1}. \tag{8.55}$$

Оператор  $\mathcal{F}_{\rho_\gamma}$  действует на параметры  $\alpha_l$ , относящиеся к ренормализационной части  $\gamma$  после растяжения  $\alpha_l \rightarrow \rho_\gamma^2 \alpha_l$ ;  $I_\gamma$  обозначает число внутренних линий в поддиаграмме  $\gamma$ . Вычитания выполняются при  $\rho_\gamma=0$ , а результат вычисляется при  $\rho_\gamma=1$ . Эти действия выполняются для всех  $\gamma$ , принадлежащих лесу  $U$ , а затем проводится суммирование по  $U$  ( $U = \emptyset$  соответствует тождеству без вычитаний). Для простоты в выражениях (8.55) рассматривается скалярная теория в евклидовой области, не содержащая связей с производными, а перенормировка производится в начале координат импульсного пространства. Обобщение на случай ненулевого спина, связей с производными высших размерностей и т. п. не вносит каких-либо трудностей, усложняются лишь обозначения.

Формулировка вычитаний в параметрическом пространстве обладает замечательными алгебраическими свойствами. Можно показать, что полное выражение (8.55) не зависит от порядка, в котором производятся тейлоровы вычитания, хотя две отдельные операции  $\mathcal{F}$ , относящиеся к перекрывающимся поддиаграммам, вообще говоря, не коммутируют. Кроме того, для данной диаграммы или конечной системы диаграмм существует ограничение сверху на значения степени  $\rho$ . Следовательно, операторы  $\mathcal{F}_{\rho_\gamma}$  зависят только от числа внутренних линий  $I_\gamma$  и уже не зависят от конкретной топологии диаграммы.

Можно избавиться даже от последней ссылки на топологию в (8.55), а именно на нумерацию лесов и ренормализационных частей. Мы докажем сначала, что

$$\mathcal{R}(P, \alpha) = \prod \left( 1 - \mathcal{F}_{\rho_\gamma}^{-2I_\gamma} \right) \{ [\mathcal{P}(\alpha)]^{-2} e^{-Q(P, \alpha)} \} \Big|_{\rho_\gamma=1}, \tag{8.56}$$

где произведение берется по всем ренормализационным частям диаграммы. Иными словами, вычитания, относящиеся к перекрывающимся поддиаграммам,

в это выражение не входят. В качестве иллюстрации проверим это свойство на примере диаграммы  $G$  и ее поддиаграммы  $\gamma_1$ ,  $\gamma_2$  и  $\gamma$  являются ренормализационными частями. Чтобы показать эквивалентность выражений (8.55) и (8.56), мы должны доказать тождество

$$0 = (1 - \mathcal{F}_\lambda^{-2l} G) (-\mathcal{F}_{\rho_1}^{-l} \gamma_1) (1 - \mathcal{F}_\rho^{-2l} \gamma) (-\mathcal{F}_{\rho_2}^{-2l} \gamma_2) \times \\ \times [\mathcal{F}^{-2}(\alpha) e^{-Q(P, \alpha)}] |_{\rho_1 = \rho_2 = \rho = \lambda = 1},$$

где  $\lambda$  — параметр растяжения для  $G$ . Если обозначить через  $f$  функцию в квадрат

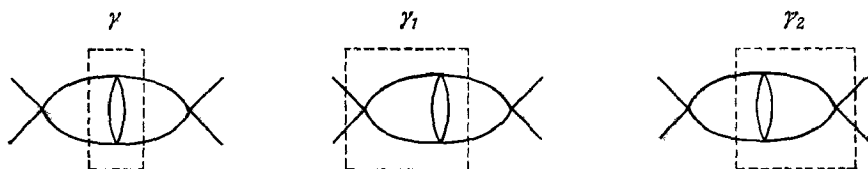


РИС. 8.8. Расходимости перекрывающихся диаграмм, изучаемые в параметрическом пространстве.

ратных скобках, то нетрудно показать, что она имеет вид

$$f = f(\lambda \rho_1 \rho_2 \rho, \lambda \rho_1, \lambda \rho_2),$$

поскольку только  $\alpha$ , принадлежащие  $\gamma$ , одновременно растягиваются в  $\rho_1^2$  и  $\rho_2^2$  раз. Следовательно, действие оператора  $\mathcal{F}_{\rho_2}$  дает

$$-\mathcal{F}_{\rho_2}^{-2l} \gamma_2 f = \sum_{k \leq -2l \gamma_2} (\lambda \rho_2)^k f_k(\rho_1 \rho, \lambda \rho_1).$$

(Ограничение снизу на  $k$  зависит от того, какую теорию мы рассматриваем; в скалярной теории это  $-4L_{\gamma_2}$ , где  $L_{\gamma_2}$  — число петель в  $\gamma_2$ .) Таким образом,

$$(1 - \mathcal{F}_\rho^{-2l} \gamma) (-\mathcal{F}_{\rho_2}^{-2l} \gamma_2) f = \sum_{\substack{k \leq -2l \gamma_2 \\ m > -2l \gamma}} (\lambda \rho_2)^k (\rho_1 \rho)^m f_{k, m}(\lambda \rho_1)$$

и

$$\begin{aligned} & (-\mathcal{F}_{\rho_1}^{-2l} \gamma_1) (1 - \mathcal{F}_\rho^{-2l} \gamma) (-\mathcal{F}_{\rho_2}^{-2l} \gamma_2) f = \\ & = \sum_{\substack{k \leq -2l \gamma_2 \\ m > -2l \gamma \\ n+m \leq -2l \gamma_1}} (\lambda \rho_2)^k (\rho_1 \rho)^m (\lambda \rho_1)^n f_{k, m, n}. \end{aligned}$$

Каждый отдельный член в сумме является однородной функцией от  $\lambda$  степени  $k+n$ . Однако

$$k+n \leq -2(l_{\gamma_1} + l_{\gamma_2}) - m \leq -2(l_{\gamma_1} + l_{\gamma_2} - l_{\gamma}) = -2l_G.$$

Следовательно, действие последнего вычитания  $(1 - \mathcal{F}_\lambda^{-2l} G)$ , которое оставляет лишь члены степени выше, чем  $-2l_G$ , дает нуль. Обобщение этого доказательства на произвольную ситуацию — дело простого пересчета.

Наконец, нетрудно показать, что вычитания по параметру однородности подсистем параметров, не соответствующих условно расходящимся связным поддиаграммам, не сказываются на полном выражении. Таким образом, окончательный результат нашего рассмотрения запишется в виде

$$\mathcal{R}(P, \alpha) = \prod_g \left( 1 - \mathcal{F}_{\rho_g}^{-2I} g \right) \left[ \mathcal{P}^{-2}(\alpha) e^{-Q(P, \alpha)} \right] \Big|_{\rho_g=1}, \quad (8.57)$$

где произведение берется по  $(2^I g - 1)$  непустым системам параметров  $\alpha$ . Результат опять не зависит от порядка операторов. Последнее выражение имеет два достоинства. Во-первых, оно не зависит от топологии диаграммы. Во-вторых, оно позволяет нам, по крайней мере качественно, понять аргументацию доказательства сходимости. Действительно, для любого семейства  $g$  параметров  $\lambda$  в (8.57) можно перенести оператор  $(1 - \mathcal{F}_{\rho_g}^{-2I} g)$  влево от произведения. Из (8.54) следует, что подынтегральное выражение ведет себя как  $\rho_g^{-2I} g^{+1}$  и, следовательно, интегрируемо по  $\rho_g$ , поскольку мера по-прежнему содержит фактор  $\rho_g^{2I} g^{-1} d\rho_g$ . К сожалению, того, что возможная сингулярность в произвольной подсистеме параметров  $\alpha$  интегрируема, еще недостаточно, чтобы обеспечить сходимость всего интеграла. Например, в интеграле

$$\int_0^1 \int_0^1 d\alpha_1 d\alpha_2 \frac{2\alpha_1}{(\alpha_1^2 + \alpha_2)^2}$$

сингулярности, отвечающие пределам  $\alpha_1 \rightarrow 0, \alpha_2 \neq 0$ , или  $\alpha_2 \rightarrow 0, \alpha_1 \neq 0$ , или  $\alpha_1 \sim \alpha_2 \rightarrow 0$ , интегрируемы, однако интегрирование по  $\alpha_1$  приводит к расходящемуся интегралу

$$\int_0^1 \frac{d\alpha_2}{\alpha_2(1+\alpha_2)}.$$

Мы не будем воспроизводить здесь утомительного доказательства того, что в случае интегралов Фейнмана таких явлений не возникает. Как и в разд. 8.1.4, необходимо разбить область интегрирования на секторы и воспользоваться свойствами однородности параметрических функций.

В заключение этого длинного и технически сложного анализа вновь приведем формулировку важной теоремы Боголюбова — Парасюка — Хеппа. Операция вычитания, описываемая соотношениями (8.45), (8.49) или (8.57), дает абсолютно сходящийся интеграл и определяет аналитическую функцию от импульсов в евклидовой области и обобщенную функцию ограниченного роста в пространстве Минковского.

### 8.2.5. Конечные перенормировки

До сих пор мы рассматривали вычитания бесконечностей. Однако выводы, сделанные относительно структуры контрчленов, мультипликативном характере перенормировок и алгебре вычитаний,

применимы также и к конечным перенормировкам. Этим термином мы обозначаем операции, которые необходимо произвести при изменении условий нормировки. При этом (перенормированные) параметры теории претерпевают конечное изменение. Это имеет место, например, при переходе от условий нормировки (8.30) и (8.35) к (8.36). В более общем случае рассмотрим в рамках  $\varphi^4$ -теории следующую систему условий нормировки, зависящую от произвольного массового масштаба  $\mu$ :

$$\begin{aligned} \Gamma_R^{(2)}(p^2) \Big|_{p^2=\mu^2} &= \mu^2 - m^2, & \frac{\partial}{\partial p^2} \Gamma_R^{(2)}(p^2) \Big|_{p^2=\mu^2} &= 1, \\ \Gamma_R^{(4)}|_{S_\mu} &= -\lambda, \end{aligned} \quad (8.58)$$

где  $S_\mu$  определяется выражением (8.35), в котором  $m$  заменено на  $\mu$ .

Это весьма разумный выбор нормировочного условия, поскольку оно удовлетворяется в низшем порядке и является обобщением условия (8.30) и условий (8.35) и (8.36). Имеет смысл выбрать  $\mu$  таким образом, чтобы точки перенормировки  $p^2 = \mu^2$  и  $S_\mu$  лежали внутри областей аналитичности двух- и четырехточечных функций соответственно. В противном случае следует подразумевать, что приведенное выше условие выполняется только для вещественной части амплитуды.

Теория зависит теперь от двух массовых масштабов  $m$  — массы, входящей в пропагатор в диаграммах Фейнмана, и  $\mu$  — массы, определяющей точку перенормировки. Что касается физической массы, определяемой как полюс полного пропагатора, то она является некоторой функцией от  $m$ ,  $\mu$ ,  $\lambda$  и ее можно вычислить в каждом порядке теории возмущений. Кроме того, вычет в полюсе теперь не равен единице и его необходимо учитывать при вычислении элементов  $S$ -матрицы.

Как связаны между собой две перенормированные теории, соответствующие двум различным  $\mu$ ? Очевидно, что каждая из них может быть получена из другой путем перестройки с помощью конечных контрчленов, определяемых в каждом порядке теории возмущений на основании новых условий. Как и в случае бесконечной перенормировки, это в свою очередь эквивалентно переопределению параметров теории  $m$  и  $\lambda$  при условии, что мы учитываем также конечную перенормировку оператора поля. Поскольку эти параметры равны значению функций Грина в данной точке  $\mu$ , переход от  $\mu$  к  $\mu'$  равносильен переходу от параметров  $m$ ,  $\lambda$  (и 1) к  $m'$ ,  $\lambda'$  и  $z$ . Следовательно, справедливо соотношение

$$\Gamma_R^{(n)}(p_1, \dots, p_n; m, \lambda, \mu) = z^{n/2} \Gamma_R^{(n)}(p_1, \dots, p_n; m', \lambda', \mu'), \quad (8.59)$$

где  $m'$ ,  $\lambda'$  и  $z$  являются функциями от  $m$ ,  $\lambda$ ,  $\mu$  и  $\mu'$ , вычисляемыми по теории возмущений.

Проиллюстрируем это на примере двухточечных функций  $\varphi^3$ -теории в шестимерном пространстве. Эта перенормируемая теория имеет то свойство, что в ней перенормировка оператора поля в однопетлевом приближении негравитальна. Если  $\mathcal{L}_{\text{вз}} = -\lambda/3! \varphi^3$ , то амплитуда отвечающая диаграмме собственной энергии, представленной на рис. 87, записывается в виде

$$i\Gamma^{(2)(1)}(P^2) = -\lambda^2 \int \frac{d^6 k}{(2\pi)^6} \frac{1}{[(P-k)^2 - m^2](k^2 - m^2)},$$

где подразумевается, что произведена какая-либо регуляризация, а значок [1] означает, что берется однопетлевая поправка. С помощью непосредственного вычисления получаем

$$\Gamma^{(2)(1)}(P^2) = \frac{\lambda^2}{(4\pi)^3} \int_{1/\Lambda^2}^{\infty} \frac{d\rho}{\rho^2} \int_0^1 d\alpha e^{-\rho [m^2 - \alpha(1-\alpha)P^2]},$$

и

$$\frac{\partial^2 \Gamma^{(2)(1)}}{(\partial P^2)^2} = \frac{\lambda^2}{(4\pi)^3} \int_0^1 \frac{d\alpha \alpha^2 (1-\alpha)^2}{m^2 - \alpha(1-\alpha)P^2}.$$

Перенормированная функция  $\Gamma_R^{(2)(1)}$ , удовлетворяющая условиям (8.58), записывается в виде

$$\Gamma_R^{(2)(1)}(P^2) = \frac{\lambda^2}{(4\pi)^3} \int_0^1 d\alpha \left\{ [m^2 - \alpha(1-\alpha)P^2] \ln \frac{m^2 - \alpha(1-\alpha)P^2}{m^2 - \alpha(1-\alpha)\mu^2} + \alpha(1-\alpha)(P^2 - \mu^2) \right\}, \quad (8.60)$$

где мы не позаботились выполнить интегрирование по  $\alpha$  явно. Если теперь заменить  $\mu$  на  $\mu'$ , то нетрудно показать, что  $\Gamma_R^{(2)} = P^2 - m^2 + \Gamma_R^{(2)(1)}$  удовлетворяет уравнению (8.59), причем

$$m'^2 = m^2 + \frac{\lambda^2}{(4\pi)^3} \int_0^1 d\alpha \left[ (1-\alpha + \alpha^2) m^2 \ln \frac{m^2 - \alpha(1-\alpha)\mu^2}{m^2 - \alpha(1-\alpha)\mu'^2} + \alpha(1-\alpha)(\mu^2 - \mu'^2) \right], \quad (8.61)$$

$$z = 1 + \frac{\lambda^2}{(4\pi)^3} \int_0^1 d\alpha \alpha(1-\alpha) \ln \frac{m^2 - \alpha(1-\alpha)\mu^2}{m^2 - \alpha(1-\alpha)\mu'^2}.$$

Функция  $\lambda'$  определяется из однопетлевой трехточечной функции. Мы представляем это вычисление читателю в качестве упражнения.

Полученные выше результаты можно обобщить на произвольные условия нормировки в любой перенормируемой теории, причем мы получим уравнение, аналогичное (8.59). Уравнение (8.59) отражает эквивалентность схем перенормировки, соответствующих различному выбору точек перенормировки или перенормированных параметров. Это свойство теории называется инвариантностью

относительно ренормализационной группы. В гл. 13 мы изучим следствия, вытекающие из этого уравнения или его инфинитезимальной формы, так называемого ренормгруппового уравнения. Мы увидим, что кажущаяся невинной свобода выбора условий нормировки имеет нетривиальные и важные следствия.

### 8.2.6. Составные операторы

Функции Грина, рассматриваемые до сих пор, включали только элементарные поля, т. е. динамические переменные, входящие в лагранжиан. Процедура перенормировки, выполняемая либо с помощью вычислительной  $R$ -операции Боголюбова, либо с помощью введения контрчленов, распространяется на более широкий класс функций, включающих составные поля. Под составными полями мы подразумеваем локальные мономы операторов поля и их производных. Прототипом этих операторов является электромагнитный ток  $\bar{\psi}\gamma_\mu\psi$ . Составные поля играют важную роль во многих построениях.

Ради простоты будем рассматривать снова лишь скалярную  $\phi^4$ -теорию. Составные операторы имеют вид  $\phi^2$ ,  $(\partial\phi)^2$ ,  $\phi\Box\phi$ ,  $\phi^4$ ,  $\phi^6$  и т. д., а также  $\phi\partial_\mu\phi$ ,  $\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi$ , ..., если мы строим вектороподобные и тензороподобные операторы. При подсчете степени расходимости эти поля имеют, очевидно, размерности  $\omega_i = 2, 4, 4, 4, 6, \dots, 3, 4, \dots$  соответственно. Чтобы проводить вычисления с функциями Грина, включающими в себя вставки этих операторов  $O_i(x)$ , удобно добавить источники  $\chi_i$ , связанные с ними в действии. Следовательно, эти новые функции будут определяться выражением

$$Z(j, \chi) = \langle 0 | T \exp \left\{ i \int d^4x [j(x)\phi(x) + \chi_i(x)O_i(x)] \right\} | 0 \rangle. \quad (8.62)$$

Связные функции Грина определяются с помощью логарифма величины  $Z$ , как в (6.71) (см. т. 1). Преобразование Лежандра, введенное в гл. 6 (т. 1), выполненное только над источником  $j$ , будет задавать сильносвязные, т. е. одночастично-неприводимые функции, но с произвольным числом  $O_i$ -вставок. Если нас интересует конечное число вставок, то мы дифференцируем конечное число раз по  $\chi_i$  и затем полагаем  $\chi_i = 0$ .

Если мы рассмотрим диаграмму с  $N$  вставками операторов размерности  $\omega_i$ , то простое применение соотношения (8.13в) показывает, что новая условная степень расходимости  $\omega'$  отличается от соответствующей степени в отсутствие вставок на величину

$$\omega' - \omega = \sum_{i=1}^N (\omega_i - 4). \quad (8.63)$$



Вставки операторов степени, меньшей или равной четырем, в условно сходящуюся диаграмму сохраняют сходимость, тогда как вставки со степенью, большей четырех, ухудшают степень расходимости. Тем не менее для любого (конечного) числа вставок составных операторов существует рецепт вычитания или, что эквивалентно, построения контрчленов, который позволяет сделать сильносвязные функции Грина конечными. Например, предположим, что двухточечная (два внешних  $\phi$ ) функция

$$\langle TO_1(x_1) O_2(x_2) \dots O_N(x_N) \phi(y) \phi(z) \rangle_{\text{сильносвязн}} \quad (8.64)$$

является условно расходящейся со степенью  $\omega'$ . Существует локальный контрчлен, квадратичный по  $\phi$  и пропорциональный  $\chi_1(x) \dots \chi_N(x)$ , с полиномом производных степени, меньшей или равной  $\omega'$ . Очевидно, что этот контрчлен будет давать вклад только в функцию (8.64). Проиллюстрируем это на простых примерах

1. Вставка оператора  $\phi^2$ . Этот оператор имеет размерность  $\omega(\phi^2) = 2$ , и, следовательно, его вставка улучшает сходимость. Имеются две условно расходящиеся сильносвязные функции с  $\phi^2$ -вставками. Эти функции представлены на рис. 8.9. Обеим

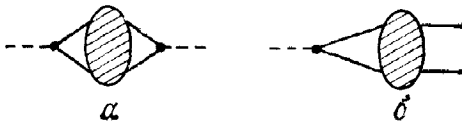


РИС 8.9. Расходящиеся диаграммы со вставками  $\phi^2$ .

соответствует  $\omega = 0$ . Первой мы сопоставляем контрчлен, квадратичный по  $\chi$ , но не зависящий от  $\phi$ , второй нужно сопоставить контрчлен вида  $(1/2) \chi \phi^2$ . Таким образом, в лагранжиане первоначальный член  $(1/2) \chi \phi^2$  заменяется на величину

$$(1/2) (1 + \delta_1) \chi \phi^2 + \delta_2 \chi^2,$$

где  $\delta_1, \delta_2$  — расходящиеся скалярные величины. Определим величину  $Z_{\phi^2}$  через константу перенормировки  $Z$  оператора поля  $\phi$  следующим образом:

$$1 + \delta_1 = ZZ_{\phi^2}.$$

Мы видим, что  $n$ -точечные функции с одной  $\phi^2$ -вставкой удовлетворяют соотношению

$$\Gamma_{\phi^2}^{(n)}, R(q; p_1, \dots, p_n, \lambda, m) = Z_{\phi^2} Z^{n/2} \Gamma_{\phi^2}^{(n)}, \text{рег}(q; p_1, \dots, p_n, \lambda_0, m_0). \quad (8.65)$$

Здесь  $q$  — импульс, входящий в диаграмму в  $\phi^2$ -вершине. Мы видим, что  $\phi^2$  перенормируется мультипликативно, как и  $\phi$ ,

с помощью константы перенормировки волнового оператора  $Z_{\varphi^2}$ . Вставка нескольких операторов является непосредственным обобщением соотношения (8.65):

$$\begin{aligned} & \Gamma_{\varphi^2 \varphi^2, R}^{(n)}(q_1, q_2; p_1, \dots, p_n, \lambda, m) = \\ & = Z_{\varphi^2}^2 Z^{n/2} \Gamma_{\varphi^2 \varphi^2, \text{рег}}^{(n)}(q_1, q_2; p_1, \dots, p_n, \lambda_0, m_0) + 2\delta_2 \delta_{n,0}, \end{aligned} \quad (8.66)$$

где последний член учитывает вакуумные диаграммы ( $n=0$ ), представленные на рис. 8.9, а.

Разумеется, чтобы полностью определить эти новые вычитания, требуются новые условия нормировки. Например, в низшем порядке можно наложить следующие условия при нулевом импульсе:

$$\Gamma_{\varphi^2, R}^{(2)}(0; 0) = 1, \quad \Gamma_{\varphi^2 \varphi^2, R}^{(0)}(0, 0) = 0. \quad (8.67)$$

Перенормировка  $\varphi^2$ -оператора не является независимой от перенормировки массы. Добавление члена  $(1/2) \chi(x) \varphi^2(x)$  в лагранжиан можно рассматривать как зависящее от  $\chi$  изменение массы:  $m^2 \rightarrow m^2 - \chi(x)$ . Поэтому мы можем написать соотношение

$$\Gamma_{\varphi^2, R}^{(2)}(0; p; \lambda, m) = -Z_{\varphi^2} \frac{\partial}{\partial m^2} \Gamma_R^{(2)}(p; \lambda, m) \Big|_{\lambda_0},$$

где дифференцирование выполняется при фиксированном  $\lambda_0$ . Следовательно, если вычитания производятся при нулевом импульсе, как в (8.36) и (8.67), можно сделать вывод, что

$$Z_{\varphi^2} = \frac{\partial m_0^2}{\partial m^2} \Big|_{\lambda_0}. \quad (8.68)$$

2. *Вставка оператора  $\varphi^4$ .* Вставка операторов размерности четыре не влияет на степень расходимости. Контрчлены являются линейными функциями источника  $\chi_{\varphi^4}$ , т. е. контрчлены, соответствующие отдельной вставке, будут комбинациями величин  $\{O_i, i=1, \dots, 4\} \equiv \{\varphi^2(x), \varphi^4(x), (\partial\varphi)^2(x), \varphi \square \varphi(x)\}$  (две последние величины, будучи проинтегрированы по  $x$ , эквивалентны, но, вообще говоря, они отличаются друг от друга). Эти операторы фактически перемешиваются перенормировкой. Поэтому оператор  $\varphi^4$  нельзя рассматривать независимо от остальных. В явном виде обобщение (8.65) записывается следующим образом:

$$\Gamma_{O_i, R}^{(n)}(q; p_1, \dots, p_n; \lambda, m) = \sum_j Z^{n/2} Z_{ij} \Gamma_{O_j}^{(n)} \text{рег}(q; p_1, \dots, p_n; \lambda_0, m_0). \quad (8.69)$$

Это равносильно утверждению, что перенормированная  $\varphi^4$ -вставка требует добавления в лагранжиан следующего источника:

$$\chi_{\varphi^4} \left[ Z_{21} Z \frac{\varphi^2}{2} + Z_{22} Z^2 \frac{\varphi^4}{4!} + Z_{23} Z \frac{(\partial\varphi)^2}{2} + Z_{24} Z \frac{\varphi \square \varphi}{2} \right],$$

где  $Z_{ij}$  определяется после выбора подходящих условий нормировки. Наконец, нам известно из предыдущего анализа, что оператор  $\varphi^2$  является мультипликативно перенормируемым, а это означает, что  $Z_{1j} = 0$  при  $j \neq 1$  и  $Z_{11} = Z_{\varphi^2}$ .

Вообще говоря, в перенормируемой теории полная система составных операторов  $O_i$  размерности, меньшей или равной данному числу  $D$ , и с одинаковыми квантовыми числами мультипликативно перенормируема в рассмотренной выше матричной форме, по крайней мере пока мы имеем дело с одной вставкой. Кроме того,  $Z_{ij} = 0$ , если размерность оператора  $O_i$  меньше размерности оператора  $O_j$  (матрица  $Z_{ij}$  не является симметричной). Оба этих результата вытекают с очевидностью из подсчета степеней (8.63).

В качестве упражнения читатель может изучить соотношение между  $Z_{ij}$  для операторов размерности четыре и голыми константами  $\lambda_0, m_0, Z$ . Мы рекомендуем также провести анализ перенормировки операторов размерности шесть, или одного из тензорных операторов, например тензора энергии-импульса.

В некоторых случаях может оказаться интересным приписать какому-либо оператору размерность больше той, которая следует из непосредственного подсчета, и перенормировать его в соответствии с этим. Например, если, вместо того чтобы рассматривать  $\varphi^2$  как оператор размерности два, мы припишем ему размерность четыре, то погребется больше вычитаний (и условий нормировки). Новый (или «жесткий») оператор, обозначаемый  $N_4(\varphi^2)$ , чтобы отличить его от старого (или «мягкого») оператора  $N_2(\varphi^2)$ , должен рассматриваться на равной основе с  $\varphi^4$ ,  $(\partial\varphi)^2$  и  $\varphi \square \varphi$ . В частности,  $Z_{1j}$  теперь отличен от нуля. Это обобщение, полезное в некоторых приложениях, было введено Циммерманом.

В случае нескольких вставок, пользуясь правилом (8.63) как нитью Ариадны, мы находим, что размерность контрчленов (мультилинейных относительно источников) сохраняется равной четырем до тех пор, пока исходные операторы  $O_i$  имеют размерность четыре. Однако размерность контрчленов возрастает, когда размерность  $O_i$  становится больше четырех. Например, для двойной вставки операторов  $\varphi^4$  и  $\varphi \square \varphi$  контрчлены снова должны быть типа  $\varphi^2$ ,  $\varphi^4$ ,  $\varphi \square \varphi$  и  $(\partial\varphi)^2$ , в то время как вставка операторов  $\varphi^4$  и  $\varphi^6$  требует, чтобы все операторы имели размерность шесть, а двойная вставка  $\varphi^6$  приводит к контрчленам размерности восемь!

### 8.3. ПРЕДЕЛ НУЛЕВОЙ МАССЫ, АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ И ТЕОРЕМА ВАЙНБЕРГА

До сих пор мы не касались проблем, связанных с безмассовыми частицами. Цель данного раздела — дать эвристическое изложение некоторых аспектов этих проблем и показать их связь с теоремой Вайнберга. Последняя относится к изучению поведения диаграмм Фейнмана при очень больших внешних импульсах.

### 8.3.1. Безмассовые теории

Используя для внутренних линий пропагаторы безмассовых частиц, мы рискуем столкнуться с новыми расходимостями. В нашу задачу входит показать, что подобное явление не встречается, пока мы удалены от некоторых выделенных значений внешних импульсов. В евклидовой (т. е. преобразованной с помощью поворота Вика) форме теории, когда размерность всех вершин лагранжиана равна четырем (или выше), сильносвязные функции конечны при любом ненулевом и неисключительном значении внешних импульсов. Неисключительные импульсы — это такие конфигурации, в которых никакая частичная сумма входящих импульсов  $p_i$  не обращается в нуль. Интегралы остаются конечными для малых значений внутренних импульсов, поскольку внешние импульсы обеспечивают обрезание снизу.

Это утверждение не выполняется в теориях, содержащих суперперенормируемые связи. Например, на рис. 8.10, а диаграмма с  $\phi^2$ -вершиной (или, что эквивалентно,  $\phi^2$ -вставкой при нулевом импульсе) имеет инфракрасную расходимость:

$$I_a(P) \sim \int \frac{d^4 k}{(k^2)^2 (P-k)^2}.$$

Эту амплитуду можно также рассматривать как шеститочечную функцию в  $\phi^4$ -теории (рис. 8.10, б), но тогда она вычисляется для исключительной конфигурации.



РИС. 8.10. Диаграмма с инфракрасной расходимостью.

Строгое доказательство требует аккуратного разбиения области интегрирования, весьма похожего на то, которое проводилось при доказательстве теоремы в разд. 8.1.4. Здесь мы приведем лишь простую аргументацию, основанную на подсчете степеней расходимости без учета возможных ультрафиолетовых расходимостей.

Подсчет степеней инфракрасных расходимостей сводится к нахождению числа внутренних импульсов, которые могут стать мягкими в диаграмме, если обеспечено сохранение импульса в каждой вершине. Рассмотрим  $N$ -точечную функцию с ненулевыми внешними импульсами и предположим, что для этих жестких внешних импульсов выбран определенный поток через диаграмму. Поскольку выбранные таким образом импульсы не являются исключительными, любой внутренней линии, через которую протекает этот поток, отвечает ненулевой импульс, тогда как импульсы, отвечающие петлям, равны нулю. Кроме того, то же самое свойство означает, что эти жесткие внутренние ли-

нии образуют связный узор на диаграмме (в примере, приведенном на рис. 8.11, он отвечает жирным линиям). Следовательно, поскольку нас интересует поведение в инфракрасной области, эти внутренние линии можно сжать в одну вершину. С этой вершиной связаны  $N$  жестких внешних и  $l$  внутренних линий, причем  $i \geq 2$ , поскольку диаграмма одночастично-неприводима. Пусть  $l$ ,  $L$ ,  $V_3$  и  $V_4$  обозначают соответственно число внутренних линий, петель, трех- и четырехточечных вершин в сжатой диаграмме. Тогда можно записать обычные топологические соотношения

$$\begin{aligned} L &= l + 1 - (V_3 + V_4 + 1), \\ N + 2l &= 3V_3 + 4V_4 + (N + i). \end{aligned}$$

Поскольку по предположению все вершины лагранжиана имеют степень четыре, каждой трехточечной вершине отвечает одна степень импульса. Следовательно, степень однородности сжатой диаграммы, которая определяет условную степень инфракрасной расходимости, когда импульсы всех внутренних петель одновременно малы, равна

$$\omega_{ir} = 4L - 2l + V_3 = i \geq 2.$$

Это, по крайней мере эвристически, является условием инфракрасной сходимости.

Можно поинтересоваться, не становится ли неверным проведенный подсчет степеней расходимости, если смягчить гипотезу о том, что после сжатия импульсы всех внутренних петель малы. Например, предположим, что  $l_H \leq l$  внутренних импульсов остаются жесткими и что они образуют узор с  $L_H$  пет-

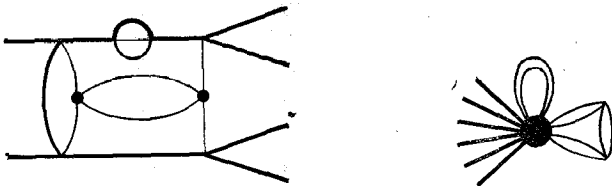


РИС. 8.11. Поток жестких импульсов через диаграмму и соответствующая сжатая диаграмма.

лями,  $V_{3H}$  и  $V_{4H}$  вершинами каждого типа. Может показаться, что  $\omega_{ir}$  заменяется на  $\omega'_{ir} = \omega_{ir} - \Delta\omega_{ir}$ , где  $\Delta\omega_{ir} = 4L_H + V_{3H} - 2l_H$ , и что мы можем столкнуться с трудностями. К счастью, это не так. Жесткий узор можно рассматривать как диаграмму (возможно, несвязную), все внешние линии которой являются мягкими по построению. Таким образом, она ведет себя, как эти импульсы в степени  $\Delta\omega_{ir}$ . Следовательно,  $\omega_{ir}$  не изменяется. Это не удивительно, поскольку  $\omega_{ir}$  является степенью однородности диаграммы.

Можно пойти еще дальше и показать, что, когда один из импульсов  $p$  обращается в нуль, а остальные не равны нулю и не являются исключительными, функции Грина остаются конечными.

Читатель не столкнется с трудностями при обобщении на этот случай рассуждений, приведенных выше, и в демонстрации того, что  $\omega_{ir}$  уменьшается самое большее на единицу.

При этих нестрогих рассуждениях мы пренебрегали возможными трудностями в ультрафиолетовой области. Для того чтобы перенормировка не нарушала нашего результата, необходимо выбрать

разумные условия нормировки. Вычитания при нулевом импульсе следует исключить, поскольку функции Грина обычно расходятся в этой точке. В безмассовой теории имеет смысл выбрать в качестве точек нормировки вместо (8.34) или (8.36) евклидовы значения импульса, например  $p^2 = -\mu^2 < 0$ . Необходимость введения ненулевой точки нормировки означает, что теория, в которой отсутствуют физические массы, тем не менее содержит массовый масштаб  $\mu$ . Независимость физических величин от выбора этой величины приводит к связям, соответствующим ренормализационной группе, которые мы обсудим ниже.

Приведенные соображения применимы также к теориям, в которых рассматриваются как безмассовые, так и массивные частицы, например к квантовой электродинамике. Функции Грина конечны при любом ненулевом и неисключительном значении импульса. Когда в нуль обращается более чем один внешний импульс, в каждом отдельном случае необходимо проводить независимый анализ.

Таким образом, в случае, когда все (или некоторые) массы внутренних линий диаграммы Фейнмана обращаются в нуль, не будет никаких сингулярностей, если

- 1) степень всех вершин равна четырем;
- 2) внешние импульсы не являются исключительными;
- 3) имеется самое большее один мягкий внешний импульс;
- 4) перенормировка проводится в некоторой фиксированной точке евклидова пространства.

Труднее ответить на вопрос, что происходит, если внешние импульсы продолжить из евклидовой области к физическим значениям на массовой поверхности. Представляют интерес следствия, вытекающие из предыдущей теоремы. Рассмотрим сильносвязную двухточечную функцию и предположим, что ее можно аналитически продолжить в псевдоевклидову область, не наталкиваясь на пороговые сингулярности. Функция Грина при этом остается конечной, как и ее абсорбтивная часть. Согласно правилам Кутковского (см. гл. 6 в т. 1) это означает, что все ширины распадов в конечные состояния, в которых присутствуют безмассовые частицы, являются конечными. Этот результат, полученный Киноситой, следует сравнить с теоремой, доказанной Ли и Науенбергом. По этой теореме любая вероятность перехода в теории, рассматривающей безмассовые частицы, конечна при условии, что производится суммирование по вырожденным состояниям. Это, разумеется, согласуется с тем, что мы обнаружили на частных примерах, разобранных в гл. 4 и 7 (см. гл. 1), в которых мы рассматривали главным образом мягкое излучение. Следует иметь в виду, что при рождении коллинеарных безмассовых частиц с ненулевой энергией могут возникнуть дополнительные расходимости. Теорема Ли и Науенберга справедлива и для таких расходимостей.

### 8.3.2. Поведение в ультрафиолетовой области и теорема Вайнберга

Найдем точное соотношение между условной степенью ультрафиолетовой расходимости  $\omega(G)$  и поведением интегралов Фейнмана в случае, когда все внешние импульсы велики. Умножение всех этих импульсов на общий большой множитель  $\lambda$  эквивалентно, из соображений размерности, делению на этот же фактор всех внутренних масс. Следовательно, проблема тесно связана с пределом нулевой массы, рассмотренной в разд. 8.3.1.

Для простоты вернемся опять к скалярной теории со связями без производных. Возьмем функцию Грина, вычисленную для евклидовых внешних импульсов, и ограничимся на время рассмотрением случая, когда имеется сходимость в ультрафиолетовой области. После интегрирования по общему параметру однородности выражение (8.20) принимает вид

$$I_G(P) = \frac{\Gamma[-\omega(G)/2]}{(4\pi)^{2L}} \int_0^1 \prod_l d\alpha_l \delta\left(1 - \sum_l \alpha_l\right) \frac{\left[\sum_l \alpha_l m_l^2 + Q(P, \alpha)\right]^{\omega(G)/2}}{[\mathcal{P}(\alpha)]^2}.$$

Если импульсы  $P$  растягиваются в  $\lambda$  раз,  $P \rightarrow \lambda P$ , то интеграл ведет себя как  $\lambda^{\omega(G)}$  [напомним, что по предположению  $\omega(G) < 0$ ], при условии что интеграл

$$\int \prod d\alpha_l \delta\left(1 - \sum_l \alpha_l\right) \frac{[Q(P, \alpha)]^{\omega(G)/2}}{[\mathcal{P}(\alpha)]^2}$$

сходится. Это в свою очередь зависит от существования предела нулевых масс для  $I_G(P)$ . Мы видим, в частности, что поведение при больших  $\lambda$  связано с конфигурациями импульсов  $P$ . Из разд. 8.3.1 известно, что если евклидовы импульсы не равны нулю и не являются исключительными, то такой предел существует. В этом случае асимптотическое поведение определяется посредством подсчета степеней ультрафиолетовых расходимостей:

$$I_G(\lambda P) \underset{\lambda \rightarrow \infty}{\sim} \lambda^{\omega(G)}. \quad (8.70)$$

Полученный результат обобщается на случай условно расходящихся, но перенормированных диаграмм. Однако степенную зависимость можно заменить на зависимость в виде степеней логарифма:

$$I_G(\lambda P) \sim \lambda^{\omega(G)} \sum_{q=0}^{q_{\max}} C_q \ln^q \lambda [1 + O(\lambda^{-1})]. \quad (8.71)$$

Если предел нулевых масс плохо определен, т. е. если диаграмма содержит вершины степени, меньшей четырех, и (или) исключительные внешние импульсы, мы ожидаем, что будет иметь

место некоторое отклонение от этого поведения, а именно, мы получим более высокие степени, чем  $\lambda^{\omega(G)}$ , и возможные логарифмические поправки.

Чтобы проиллюстрировать эту точку зрения, рассмотрим однопетлевую диаграмму на рис. 8.12, в которой имеются  $n+2$  линий и вершин; среди этих вершин  $n$  представляют собой массовые вставки. Условная степень равна  $\omega(G) = -2n$ . Соответствующий (евклидов) интеграл имеет вид

$$I_G(P) = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 + m^2)^{n+1} [(P+k)^2 + m^2]} = \\ = \frac{1}{(4\pi)^2 n} \int_0^1 d\alpha \alpha^n [m^2 + \alpha(1-\alpha)P^2]^{-n}.$$

При  $P^2 \rightarrow \infty$  амплитуда  $I_G(P)$  ведет себя как

$$I_G(P)_{P^2 \rightarrow \infty} \sim \begin{cases} \frac{1}{P^2} \ln \frac{P^2}{m^2} & \text{при } n=1, \\ \frac{m^2}{P^2} \frac{1}{(m^2)^n} & \text{при } n > 1. \end{cases}$$

Оценка, основанная на подсчете степеней, дала бы  $(P^2)^{-n}$ . Это можно объяснить, заметив, что большой импульс протекает через один из пропагаторов (верхний пропагатор на рис. 8.12), что дает степень  $(P^2)^{-1}$ . Коэффициент,

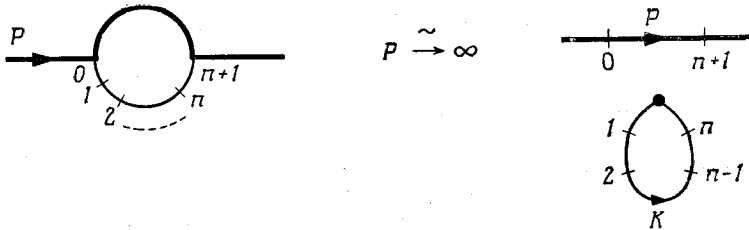


РИС. 8.12. Диаграмма собственной энергии с  $n$  вставками  $\Phi^2$ .

возникающий из нижней цепочки пропагаторов  $\int^1 P^1 d^4 k / (k^2 + m^2)^{n+1}$ , пропорционален  $\ln P^2$  при  $n=1$  и равен постоянной при  $n > 1$ .

В общем случае, изученном Вайнбергом, поведение при больших  $\lambda$  определяется минимальным числом пропагаторов, по которым протекает большой импульс. Для перенормируемых (или суперперенормируемых) теорий, не содержащих безмассовые частицы, справедлив следующий результат. Если евклидовы импульсы (возможно, исключительные) умножаются на большой фактор  $\lambda$ , то интеграл Фейнмана мажорируется величиной

$$I_G(\lambda P) \sim \lambda^{\omega+e}, \quad (8.72)$$



где  $\omega$  символически выражает тот факт, что степенная зависимость  $\lambda^\alpha$  умножается на целую степень логарифма, причем

$$\Omega = \sup_g \omega(g). \tag{8.73}$$

Здесь  $g$  пробегает по всем подсистемам диаграммы  $G$ , таким, что 1) в каждую вершину приведенной диаграммы  $G/g$  входит нулевой полный внешний импульс и 2) каждая связная часть диаграммы  $G/g$  соединена с некоторыми внешними линиями. Короче говоря, это означает, что (большие) внешние импульсы могут протекать



РИС. 8.13. Возможные потоки больших внешних импульсов (жирные линии) через диаграмму «ящик» в неисключительной (а) и исключительной (б) конфигурациях.

через  $g$ , не давая вклад в  $G/g$  (см. рис. 8.13). В выражении (8.73) величина  $\omega(g)$  является ультрафиолетовой условной степенью расходимости поддиаграммы  $g$ .

В случае когда теория является строго перенормируемой (отсутствуют суперперенормируемые связи), а импульсы неисключительные, можно показать, что верхняя граница  $\Omega$  совпадает с  $\omega(G)$  в соответствии с предшествующими рассуждениями. Читателю предлагается применить эти общие правила к примеру, приведенному на рис. 8.12.

Данные результаты можно обобщить на случай, когда импульсы принадлежат пространству Минковского, или на конфигурации, в которых только часть импульсов становится большой. Можно получить также ограничения на степень логарифма величины  $\lambda$ .

### 8.4. СЛУЧАЙ КВАНТОВОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ

Данный раздел посвящен рассмотрению проблем, характерных для квантовой электродинамики, а именно проблем, связанных с калибровочной инвариантностью и тождествами Уорда. Мы уже встречались с этими вопросами и изучали их в рамках однопетлевого приближения (см. разд. 7.1.4 в т. 1). Наша цель здесь заключается в проведении анализа во всех порядках таким образом, чтобы он согласовался с перенормировкой. Сначала дадим более последовательный и формальный вывод тождеств Уорда по сравнению с тем, который проводился в гл. 7 (см. т. 1).

### 8.4.1. Формальный вывод тождеств Уорда — Такахаси

Будем исходить из лагранжиана (6.25) (см. т. 1) с фотонной массой  $\mu$ . Согласно теореме Нётер, сохранение тока

$$j_\rho(x) = e: \bar{\psi}(x) \gamma_\rho \psi(x):, \quad \partial^\rho j_\rho(x) = 0 \quad (8.74)$$

было следствием инвариантности лагранжиана относительно глобальных фазовых преобразований

$$\psi(x) \rightarrow e^{i\chi} \psi(x), \quad \chi = \text{const}.$$

Это свойство приводит к соотношениям между функциями Грина, содержащими единственный оператор тока и произвольное число полей  $\psi$ ,  $\bar{\psi}$ ,  $A$ .

Наша программа состоит в том, чтобы вывести сначала систему ковариантных тождеств как следствие сохранения тока и того факта, что функции Грина можно представить через хронологические произведения в пространстве Минковского. Позаботимся затем о том, чтобы эти соотношения сохранились при перенормировке. Выражения, которые получаются таким способом, имеют лоренц-ковариантную форму, причем подразумевается, что мы имеем дело с ковариантными  $T$ -произведениями (см. раздел 5.1.7 в т. 1).

Таким образом, получаем

$$\begin{aligned} \partial_x^\rho \langle 0 | T j_\rho(x) \psi(x_1) \bar{\psi}(y_1) \dots \bar{\psi}(y_n) A_\rho(z_1) \dots A_{\rho_p}(z_p) | 0 \rangle = \\ = \sum_{i=1}^n \langle 0 | T \{ [j_\rho(x), \psi(x_i)] \delta(x^0 - x_i^0) \bar{\psi}(y_i) + \psi(x_i) [j_\rho(x), \bar{\psi}(y_i)] \times \\ \times \delta(x^0 - y_i^0) \} \overbrace{\psi(x_1) \bar{\psi}(y_1) \dots \psi(x_i) \bar{\psi}(y_i) \dots A_{\rho_p}(z_p)} | 0 \rangle + \\ + \sum_{j=1}^p \langle 0 | T \psi(x_1) \dots \bar{\psi}(y_n) A_\rho(z_1) \dots [j_\rho(x), A_{\rho_j}(z_j)] \delta(x^0 - z_j^0) \dots \\ \dots A_{\rho_p}(z_p) | 0 \rangle. \end{aligned} \quad (8.75)$$

(Здесь угловая скобка над каким-либо членом означает, что этот член опускается.) Член, содержащий  $\partial_\rho j^\rho$ , исчез, в то время как появление остальных членов обусловлено зависимостью от  $x^0$ , содержащейся неявно в  $T$ -произведении. Обратимся теперь к каноническим коммутационным соотношениям:

$$\begin{aligned} [j_\rho(x), \psi(x')] \delta(x^0 - x'^0) &= -e\psi(x) \delta^4(x - x'), \\ [j_\rho(x), \bar{\psi}(x')] \delta(x^0 - x'^0) &= e\bar{\psi}(x) \delta^4(x - x'), \\ [j_\rho(x), A_\rho(x')] \delta(x^0 - x'^0) &= 0, \end{aligned} \quad (8.76)$$

которые выражают тот факт, что  $\psi$ ,  $\bar{\psi}$  и  $A$  рождают кванты электрического заряда  $Q = \int j_0(x, t) d^3x$ , равные соответственно

—  $e$ ,  $e$  и нулю. В противоположность явному виду тока, который вытекает из минимального взаимодействия, данные соотношения или по крайней мере их интегральные версии играют ключевую роль для сохранения заряда. Тожество Уорда—Такахаси (8.75) принимает вид

$$\begin{aligned} \partial_\rho^e \langle 0 | T j_\rho(x) \psi(x_1) \bar{\psi}(y_1) \dots A_{\rho p}(z_p) | 0 \rangle = \\ = e \langle 0 | T \psi(x_1) \bar{\psi}(y_1) \dots A_{\rho p}(z_p) | 0 \rangle \sum_{i=1}^n [\delta^4(x-y_i) - \delta^4(x-x_i)] \end{aligned} \quad (8.77)$$

Изучим далее следующие случаи:

$n=1,$	$p=0$	собственная энергия и вершина,
$n=0,$	$p=1$	поляризация вакуума,
$n=0,$	$p=3$	фотон-фотонное рассеяние

Заметим, что соотношение (8.77) справедливо также для связанных частей функций Грина. Последующее наше рассмотрение будет формальным, поскольку мы не учитываем ультрафиолетовые расходимости. В разд. 8.4.2, в котором мы введем регуляризацию, сохраняющую тождества, будет показано, что такой подход является справедливым.

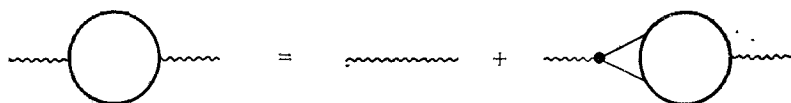


РИС. 8.14. Поляризация вакуума в квантовой электродинамике.

1. Пусть  $G_{\rho\sigma}$  — полный фотонный пропагатор, а  $G_{\rho\sigma}^{[0]}$  — свободный фотонный пропагатор (рис. 8.14):

$$G_{\rho\sigma}(x) = G_{\rho\sigma}^{[0]}(x) - i \int d^4x' G_{\rho\sigma'}^{[0]}(x-x') \langle 0 | T j_{\sigma'}(x') A_\sigma(0) | 0 \rangle. \quad (8.78)$$

Из (8.77) следует, что

$$\partial_x^\rho G_{\rho\sigma}(x) = \partial_x^\rho G_{\rho\sigma}^{[0]}(x). \quad (8.79)$$

В импульсном пространстве это соотношение является условием поперечности амплитуды поляризации вакуума:

$$\begin{aligned} k^\nu \bar{\omega}_{\rho\sigma}(k) &= 0, \\ \bar{\omega}_{\rho\sigma}(k) &= -i (g_{\rho\sigma} k^2 - k_\rho k_\sigma) \bar{\omega}(k^2), \end{aligned} \quad (8.80)$$

т. е. обобщением результата, выраженного формулой (7.6) (см. т. 1 настоящей книги).

Действительно, в импульсном пространстве соотношение (8.79) записывается в виде

$$k^\rho G_{\rho\sigma}(k) = k^\rho G_{\rho\sigma}^{[0]}(k) = -i \frac{M^2 k_\sigma}{\mu^2 (k^2 - M^2)},$$

где  $M^2 = \mu^2/\lambda$  или, после умножения на  $G_{\rho\rho}^{-1} = -i\Gamma_{\rho\rho}$ ,

$$k_\rho = -\frac{M^2}{\mu^2 (k^2 - M^2)} k^\sigma \Gamma_{\sigma\rho}(k). \quad (8.81)$$

Если записать  $\Gamma_{\sigma\rho}$  в следующей параметрической форме:

$$\begin{aligned} \Gamma_{\sigma\rho}(k) &= -[g_{\rho\sigma} k^2 - k_\rho k_\sigma (1-\lambda)] + g_{\rho\sigma} \mu^2 + \bar{\omega}_{\rho\sigma}(k) = \\ &= A(k^2) (g_{\rho\sigma} k^2 - k_\rho k_\sigma) + B(k^2) k_\rho k_\sigma, \end{aligned} \quad (8.82)$$

то из тождества (8.81) следует, что

$$B(k^2) = -\lambda \frac{k^2 - M^2}{k^2}.$$

Иными словами, радиационные поправки не затрагивают  $B(k^2)$ , а величина поляризации вакуума  $\bar{\omega}_{\rho\sigma}$  является поперечной.

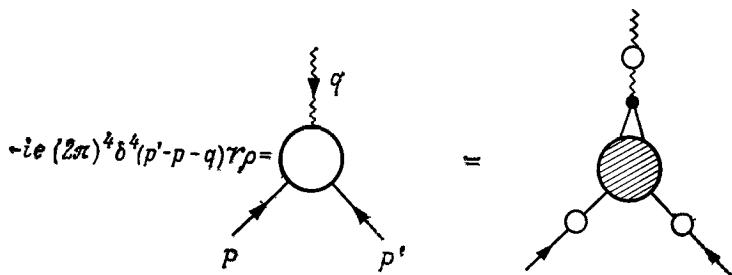


РИС. 8.15. Вершинная функция и ее разложение на сильносвязную вершину, одетую полными пропагаторами.

2. Соотношение между функцией собственной энергии электрона и вершинной функцией получается из рассмотрения полной (не обязательно сильносвязной, но обязательно связанной) вершинной функции  $\mathcal{V}_\rho(p', p)$ , определяемой в виде (рис. 8.15)

$$\begin{aligned} & -ie (2\pi)^4 \delta^4(p' - p - q) \mathcal{V}_\rho(p', p) = \\ & = \int d^4x d^4x_1 d^4y_1 e^{i(p' \cdot x_1 - p \cdot y_1 - q \cdot x)} \langle 0 | T A_\rho(x) \psi(x_1) \bar{\psi}(y_1) | 0 \rangle = \\ & = -i G_{\rho\sigma}^{[0]}(q) \int d^4x d^4x_1 d^4y_1 e^{i(p' \cdot x_1 - p \cdot y_1 - q \cdot x)} \times \\ & \quad \times \langle 0 | T j^\sigma(x) \psi(x_1) \bar{\psi}(y_1) | 0 \rangle. \end{aligned} \quad (8.83)$$

В терминах вершинной функции  $\Lambda_\rho(p', p)$ , которая нам уже встречалась в (7.46) (см. т. I настоящей книги), [ $\Lambda_\rho^{[0]}(p', p) = \gamma_\rho$ ], и полного электронного пропагатора  $iS(p)$  [ $S^{[0]}(p) = (\not{p} - m)^{-1}$ ] мы

имеем (ср. с рис. 8.15)

$$\mathcal{V}_\rho^\sigma(p', p) = G_{\rho\rho'}(q) [iS(p') \Lambda^\sigma(p', p) iS(p)]. \quad (8.84)$$

Сворачивая соотношение (8.83) с  $q_\rho$  и используя соотношения (8.84) и (8.79), получаем

$$\begin{aligned} e(2\pi)^4 \delta^4(p' - p - q) q^\rho G_{\rho\sigma}^{[01]}(q) S(p') \Lambda^\sigma(p', p) S(p) = \\ = -q^\rho G_{\rho\sigma}^{[01]}(q) \int d^4x d^4x_1 d^4y_1 e^{i(p' \cdot x_1 - p \cdot y_1 - q \cdot x)} \langle 0 | T j^\sigma(x) \psi(x_1) \bar{\psi}(y_1) | 0 \rangle. \end{aligned} \quad (8.85)$$

Поскольку величина  $q^\rho G_{\rho\sigma}^{[01]}(q)$  пропорциональна  $q^\sigma$ , имеем

$$\begin{aligned} e(2\pi)^4 \delta^4(p' - p - q) S(p') q^\rho \Lambda_\rho(p', p) S(p) = \\ = i \int d^4x d^4x_1 d^4y_1 e^{i(p' \cdot x_1 - p \cdot y_1 - q \cdot x)} \partial_x^\rho \langle 0 | T j_\rho(x) \psi(x_1) \bar{\psi}(y_1) | 0 \rangle. \end{aligned}$$

Мы можем теперь использовать общее тождество (8.77) при  $n=1$ ,  $p=0$ :

$$\begin{aligned} e(2\pi)^4 \delta^4(p' - p - q) S(p') q^\rho \Lambda_\rho(p', p) S(p) = \\ = ie \int d^4x d^4x_1 d^4y_1 e^{i(p' \cdot x_1 - p \cdot y_1 - q \cdot x)} \langle 0 | T \psi(x_1) \bar{\psi}(y_1) | 0 \rangle \times \\ \times [\delta^4(x - y_1) - \delta^4(x - x_1)]. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$S(p') q^\rho \Lambda_\rho(p', p) S(p) = S(p) - S(p'), \quad (8.86)$$

$$q^\rho \Lambda_\rho(p', p) = S^{-1}(p') - S^{-1}(p) = [p' - m - \Sigma(p')] - [p - m - \Sigma(p)]. \quad (8.87)$$

Дифференцирование по  $p'^\rho$  при  $q=0$  дает

$$\Lambda_\rho(p, p) = \frac{\partial}{\partial p^\rho} S^{-1}(p), \quad (8.88)$$

что согласуется с (7.47б).

3. Наконец, тождество Уорда для амплитуды фотон-фотонного рассеяния позволяет нам отделить в виде множителей четыре степени внешних импульсов и, следовательно, уменьшить степень расходимости. Из (8.77) при  $n=0$ ,  $p=3$  получаем соотношение для четырехфотонной функции Грина:

$$k_1^{\rho_1} \Gamma_{\rho_1 \rho_2 \rho_3 \rho_4}(k_1, k_2, k_3, k_4) = 0, \quad k_1 + k_2 + k_3 + k_4 = 0,$$

и аналогичные условия поперечности по отношению к  $k_2, k_3, k_4$ . Отсюда следует, что

$$\Gamma_{\rho_1 \rho_2 \rho_3 \rho_4}(k_1, k_2, k_3, k_4) = k_1^{\sigma_1} \Gamma_{1, \sigma_1 \rho_2 \rho_3 \rho_4}(k_1, k_2, k_3, k_4);$$

здесь  $\Gamma_1$  антисимметрична по первой паре индексов  $\sigma, \rho_1$ . Эта факторизация импульсов фотона может быть продолжена для  $k_2, k_3, k_4$  без введения сингулярностей. Мы придем к четырехточечной функции, условная степень расходимости которой равна не нулю, а минус четырем.

Остается показать, что эти тождества не нарушаются операциями регуляризации и перенормировки.

### 8.4.2. Регуляризация Паули — Вилларса во всех порядках

Будем иметь здесь дело с традиционной регуляризацией Паули — Вилларса, а не с размерной регуляризацией. Последняя используется при вычислениях в двухпетлевом приближении в разд. 8.4.4. Напомним, что метод Паули — Вилларса сводится к независимой регуляризации фермионных петель и фотонных пропагаторов. Фотонный пропагатор заменяется стандартным путем суперпозицией свободных пропагаторов. Однако фермионные петли трактуются

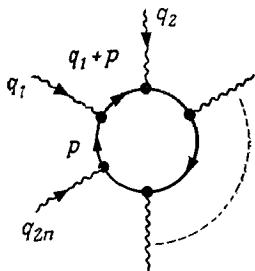


РИС. 8.16. Фермионная петля.

как целое, каждая представляет собой теперь сумму вкладов, соответствующих фермионам с различными массами, минимальным образом связанных с электромагнитным током (рис. 8.16). Соответствующая амплитуда записывается в виде

$$I = \sum_{s=0}^S C_s \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \text{Sp} \left( \frac{1}{\not{p} - M_s + i\epsilon} \gamma_{\mu_1} \frac{1}{\not{p} + q_1 - M_s + i\epsilon} \dots \gamma_{\mu_{2n}} \right), \quad (8.89)$$

причем  $C_0 \equiv 1$ ,  $M_0 = m$ , а  $q_1, \dots, q_{2n}$  — импульсы, входящие в петлю. Избавляясь в знаменателях от  $\gamma$ -матриц, вычисляя след и разлагая числители и знаменатели по степеням величины  $M_s^2$ , получаем

$$\begin{aligned} I &= \sum_{s=0}^S C_s \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{P_n(p^2, p \cdot q_i, q_i^2) + M_s^2 P_{n-1}(p^2, p \cdot q_i, q_i^2) + \dots}{Q_{2n}(p^2, p \cdot q_i, q_i^2) + M_s^2 Q_{2n-1}(p^2, p \cdot q_i, q_i^2) + \dots} = \\ &= \sum_{s=0}^S C_s \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \left[ \frac{P_n}{Q_{2n}} + M_s^2 \left( \frac{P_{n-1}}{Q_{2n}} - \frac{P_n Q_{2n-1}}{Q_{2n}^2} \right) + \dots \right]; \quad (8.90) \end{aligned}$$

здесь  $P_k$  и  $Q_k$  — полиномы от  $p$  степени, меньшей или равной  $2k$ . Для больших  $|p|$  коэффициент при  $M_s^{2k}$  ведет себя как  $|p|^{-2n-2k}$ . Следовательно, если мы наложим два условия

$$\sum_{s=0}^S C_s = 0 \quad \text{и} \quad \sum_{s=0}^S C_s M_s^2 = 0, \quad (8.91)$$

то подынтегральное выражение для любой фермионной петли будет вести себя как  $|p|^{-6}$  (мы отбрасываем вакуумные диаграммы; поэтому  $n \geq 1$ ) и, значит, петля является условно сходящейся. Такие условия можно реализовать посредством введения только двух вспомогательных масс:

$$\begin{aligned} M_1^2 &= m^2 + 2\Lambda^2, \\ M_2^2 &= m^2 + \Lambda^2, \quad (M_0^2 \equiv m^2), \end{aligned} \quad (8.92)$$

где  $\Lambda^2$  — обрезание (которое в конечном счете стремится к бесконечности). Этот выбор таков, что

$$C_1 = \frac{M_2^2 - m^2}{M_1^2 - M_2^2} = 1, \quad C_2 = \frac{M_1^2 - m^2}{M_2^2 - M_1^2} = -2. \quad (8.93)$$

Вскоре мы выясним, почему требуется, чтобы  $C_1$  и  $C_2$  были целыми. Что касается фотонного пропагатора, то единственное вычитание

$$G_{\text{рег}}(k) = \left[ -i \left( \frac{g_{\rho\sigma} - k_\rho k_\sigma / \mu^2}{k^2 - \mu^2} - \frac{k_\rho k_\sigma / \mu^2}{k^2 - \mu^2 / \lambda} \right) \right] - [\mu^2 \rightarrow \mu_1^2] \quad (8.94)$$

делает его достаточно быстро убывающим, чтобы все диаграммы сходились. Подразумевается, что  $\mu_1^2 \rightarrow \infty$  при  $\Lambda^2 \rightarrow \infty$ . Все приведенные выше рецепты следуют из регуляризованного лагранжиана

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{рег}} &= \frac{1}{\mu_1^2 - \mu^2} \left[ -\frac{1}{4} (\partial_\rho A_\sigma - \partial_\sigma A_\rho) (\square + \mu^2 + \mu_1^2) (\partial^\rho A^\sigma - \partial^\sigma A^\rho) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\mu^2 \mu_1^2}{2} A^2 - \frac{\lambda}{2} \partial \cdot A (\lambda \square + \mu^2 + \mu_1^2) \partial \cdot A \right] + \\ &\quad + \sum_{s=0}^3 \bar{\psi}_s (i\partial - eA - M_s) \psi_s. \end{aligned} \quad (8.95)$$

После интегрирования по частям квадратичная по  $A$  часть принимает вид

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_A &= \frac{1}{2(\mu_1^2 - \mu^2)} A_\rho K^{\rho\sigma}(\mu^2) K_{\sigma\nu}(\mu_1^2) A = \\ &= \frac{1}{2} A_\tau K^{\tau\rho}(\mu^2) [K(\mu_1^2) - K(\mu^2)]^{-1}{}_{\rho\sigma} K^{\sigma\nu}(\mu_1^2) A_\nu \end{aligned}$$

где дифференциальный оператор  $K_{\rho\sigma}(\mu^2)$  определяется следующим образом:

$$K_{\rho\sigma}(\mu^2) = g_{\rho\sigma}(\square + \mu^2) - \partial_\rho \partial_\sigma (1 - \lambda).$$

При этом очевидно, что пропагатор поля  $A$ , т. е. оператор, обратный по отношению к квадратичной форме, входящей в  $\mathcal{L}_A$ , имеет вид  $i[K^{-1}(\mu^2) - K^{-1}(\mu_1^2)]_{\rho\sigma}$ . С другой стороны, мы ввели в (8.95) три вспомогательных поля ( $\psi_0 \equiv \psi$ ), взаимодействующие минимальным образом с электромагнитным полем и наделенные массами  $M_1, M_2 \equiv M_3$ , определяемыми соотношениями (8.92). Кроме того,  $\psi_1$  рассматривается как обычное поле Ферми, в то время как  $\psi_2$  и  $\psi_3$  квантуются согласно статистике Бозе! Такие странные правила, разумеется, формулируются для того, чтобы воспроизвести рецепт (8.93). Вследствие вырождения, существующего между полями  $\psi_2$  и  $\psi_3$ , и отсутствия знака минус в соответствующих им замкнутых петлях мы имеем  $C_2 = -2$ .

Мы достигли нашей цели. Теория регуляризована удовлетворительным образом, поскольку в (8.95)  $\mathcal{L}_{\text{рег}}$  является калибровочно-инвариантным (с точностью до члена, отвечающего фотонной массе, и поперечных членов, фиксирующих калибровку в  $\partial \cdot A$ ), а тождества Уорда, рассмотренные в разд. 8.4.1, очевидно, удовлетворяются.

### 8.4.3. Перенормировка

Нам нужно теперь показать, что перенормировку можно выполнить, не нарушая тождеств Уорда, при условии, что выбраны подходящие условия нормировки. Потребуем, чтобы выполнялись следующие условия:

$$\Gamma_R^{(2)}(\not{p})|_{\not{p}=m} \equiv S_R^{-1}(\not{p})|_{\not{p}=m} = 0, \tag{8.96a}$$

$$\frac{\partial \Gamma_R^{(2)}(\not{p})}{\partial \not{p}} \Big|_{\not{p}=m} = 1, \tag{8.96б}$$

$$\Lambda_R^0(p, p)|_{\not{p}=m} = \gamma^0, \tag{8.96в}$$

$$\Gamma_R^{0\sigma}(k) = - \{ (k^2 g^{\rho\sigma} - k^\rho k^\sigma) [1 + \bar{\omega}_R(k^2)] - g^{\rho\sigma} \mu^2 + \lambda k^\rho k^\sigma \}, \tag{8.96г}$$

$$\bar{\omega}_R(0) = 0 \tag{8.96д}$$

Очевидно, эти условия выполняются в низшем порядке. Соотношения (8.96б) и (8.96в) согласуются с тождеством (8.87), а (8.96г) и (8.96д) включают информацию, содержащуюся в (8.79) и (8.82). Что касается условий (8.96а) и (8.96б), то они определяют физическую массу электрона, поскольку ими гарантируется, что полный пропагатор  $S$  имеет полюс с вычетом, равным единице при  $\not{p} = m$ . Аналогично условие (8.96в) дает физическое определение



заряда как связи между фермионом на массовой поверхности и фотоном с нулевым импульсом. Однако, как уже отмечено в гл. 7 (см. т. 1), условия (8.96б), (8.96в) и (8.96д) не могут выполняться, если масса фотона  $\mu \rightarrow 0$ . В самом деле, производная от собственной энергии на массовой поверхности  $(\partial/\partial p) \sum(p)|_{p=m}$  и, следовательно, гершинная функция подвержены инфракрасным расходимостям, когда  $\mu^2 \rightarrow 0$ . Поэтому если мы настаиваем на переходе к пределу  $\mu \rightarrow 0$ , то следует выбрать другие условия нормировки. На всякий случай выберем массу  $\mu^2$  малой, но конечной.

Доказательство того, что тождества Уорда сохраняются при перенормировке, проводится по индукции. Мы предполагаем, что они справедливы до данного порядка  $\hbar^L$ . Иными словами, мы определили в данном порядке голые величины  $Z_1, Z_2, Z_3, m_0, \mu_0^2$  и  $\lambda_0$  таким образом, что лагранжиан

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{[L]} = & -\frac{Z_3}{4} (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) - \frac{\lambda_0 Z_3}{2} (\partial^\mu A_\mu)^2 + \\ & + \frac{\mu_0^2 Z_3}{2} A^2 + Z_2 \bar{\psi} (i\partial - m_0) \psi - e Z_1 \bar{\psi} A \psi = \\ = & -\frac{1}{4} (\partial^\mu A_0^\nu - \partial^\nu A_0^\mu) (\partial_\mu A_{0\nu} - \partial_\nu A_{0\mu}) - \frac{\lambda_0}{2} (\partial \cdot A_0)^2 + \\ & + \frac{\mu_0^2}{2} A_0^2 + \bar{\psi}_0 (i\partial - m_0 - e_0 A_0) \psi_0 \end{aligned} \quad (8.97)$$

приводит к перенормированным функциям Грина, удовлетворяющим соотношениям (8.96). Напомним, что

$$A_0 = Z_3^{1/2} A, \quad \psi_0 = Z_2^{1/2} \psi, \quad e_0 = \frac{Z_1 e}{Z_2 Z_3^{1/2}}. \quad (8.98)$$

Кроме того, мы предполагаем, что в данном порядке тождества Уорда означают, что

$$Z_3 \mu_0^2 = \mu^2, \quad Z_3 \lambda_0 = \lambda, \quad Z_1 = Z_2. \quad (8.99)$$

В следующем порядке  $\hbar^{L+1}$  функции Грина пока расходятся. Мы введем калибровочно-инвариантную регуляризацию, такую, как в разд. 8.4.2, чтобы регуляризовать теорию и вычислить функции Грина, используя  $\mathcal{L}^{[L]}$ , т. е. учитывая все контрчлены низших порядков. Структура лагранжиана  $\mathcal{L}^{[L]}$  такова, что эти регуляризованные функции  $\Gamma_{\text{рег}}^{[L+1]}$  удовлетворяют тождествам, выведенным в разд. 8.4.1. Используя эти тождества и условия нормировки (8.96), можно непосредственно убедиться в том, что новые контрчлены, которые необходимо ввести в  $L+1$ -м порядке, имеют ту же структуру, что и контрчлены в более низких порядках [собственно, вводить контрчлен вида  $(A^2)^2$  нет необходимости] и

что по-прежнему выполняются соотношения (8.99).

Например,

$$Z_2^{[L+1]} = \frac{\partial}{\partial p} \left[ \Gamma_R^{(2)[L+1]}(p) - \Gamma_{\text{per}}^{(2)[L+1]}(p) \right]_{p=m} = - \frac{\partial}{\partial p} \Gamma_{\text{per}}^{(2)[L+1]}(p) \Big|_{p=m}$$

и

$$Z_1^{[L+1]} \gamma_\rho = \left[ \Lambda_{\rho R}^{[L+1]}(p, p) - \Lambda_{\rho, \text{per}}^{[L+1]}(p, p) \right]_{p=m} = - \Lambda_{\rho, \text{per}}^{[L+1]}(p, p) \Big|_{p=m}.$$

Наконец, из соотношения (8.88) следует, что  $Z_2^{[L+1]} = Z_1^{[L+1]}$ .

В перенормированной теории мы приходим в итоге к функциям, связанным с голыми регуляризованными функциями соотношением

$$\begin{aligned} \Gamma_R^{(2n, \rho)}(p'_1, p_1, \dots, p'_n, p_n, q_1, \dots, q_\rho, m, \mu, e, \lambda) = \\ = \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} Z_3^{p/2} Z_2^n \Gamma_{\text{per}}^{(2n, \rho)}(p'_1, \dots, q_\rho, m_0, \mu_0, e_0, \lambda_0, \Lambda). \end{aligned} \quad (8.100)$$

Эти перенормированные функции Грина удовлетворяют тождествам Уорда как тривиальному следствию мультипликативного характера перенормировок

Подчеркнем важную роль тождества  $Z_1 = Z_2$  в перенормировке заряда  $e_0 = e Z_3^{-1/2}$ . Если с электромагнитным полем связано несколько разновидностей заряженных частиц (электрон, мюон и т. д.), то тождества  $Z_1^{(e)} = Z_2^{(e)}$ ,  $Z_1^{(\mu)} = Z_2^{(\mu)}$ , ..., гарантируют универсальность перенормировки. Концепция универсальности заряда имеет смысл только благодаря этому тождеству.

Правильнее было бы говорить, что отношение перенормированного заряда к голому не зависит от типа заряженной частицы, поскольку в рамках этого ограниченного рассмотрения не существует естественного объяснения квантования заряда. Интерпретация квантования заряда имеется в случае объединенных моделей слабых и электромагнитных взаимодействий, где электромагнитная калибровочная инвариантность соответствует подгруппе более широкой простой группы инвариантности (см. гл. 11).

В целом метод, описанный в данном разделе, предназначен для того, чтобы показать, как симметрии связаны с тождествами Уорда, и доказать их совместимость с перенормировкой. Мы вновь вернемся к этому методу в дальнейшем при рассмотрении киральной симметрии, неабелевых калибровочных симметрий и т. д.

#### 8.4.4. Поляризация вакуума в двухпетлевом приближении

Вычисление амплитуды поляризации вакуума в двухпетлевом приближении будет проведено для случая безмассовой евклидовой квантовой электродинамики ( $\mu = m = 0$ ) с использованием размерной регуляризации.

Это вычисление поучительно во многих аспектах:

- 1) оно дает пример свойств, характерных для поправок высших порядков, т. е. свойств, не проявляющихся в однопетлевом приближении;

- 2) демонстрирует действие размерной регуляризации в спинорном случае;
- 3) убеждает нас, что перенормировки можно провести даже в тех случаях, когда имеются перекрывающиеся диаграммы;
- 4) иллюстрирует результаты, относящиеся к безмассовым теориям и асимптотическому поведению; можно также считать, что вычисление при нулевых массах дает асимптотическое (при больших  $k$ ) поведение амплитуды поляризации вакуума  $\bar{\omega}(k^2)$  в массивной квантовой электродинамике;
- 5) служит проверкой общих результатов, выведенных в предыдущих разделах, а именно условия поперечности тензора поляризации вакуума;
- 6) выявляет интересное свойство поляризации вакуума, а именно неожиданные сокращения, происходящие при больших импульсах; последнее свойство мы рассмотрим подробно в конце вычислений.

Приведем сначала ряд полезных формул, требующихся при работе с евклидовой версией теории при больших импульсах. Как и в выражениях (8.11), антиэрмитовы матрицы удовлетворяют соотношениям

$$\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = -2\delta_{\mu\nu}, \tag{8.101}$$

причем считается, что выполнено условие [ср с (8.116)]

$$\text{Sp } I = 4. \tag{8.102}$$

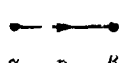
Все стандартные тождества для свертков и следов  $\gamma$ -матриц можно вывести отсюда ( $d$  — размерность евклидова пространства):

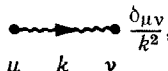
$$\begin{aligned} \gamma_\rho \gamma_\rho &= -d, \\ a^2 &= -a^2, \\ \gamma_\rho \gamma_\mu \gamma_\rho &= (d-2) \gamma_\mu, \\ \gamma_\rho \gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\rho &= -(d-4) \gamma_\mu \gamma_\nu + 4\delta_{\mu\nu}, \\ \gamma_\rho \gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\sigma \gamma_\rho &= (6-d) \gamma_\sigma \gamma_\nu \gamma_\mu - 2(d-4) (\delta_{\mu\nu} \gamma_\sigma - \delta_{\mu\sigma} \gamma_\nu + \delta_{\nu\sigma} \gamma_\mu), \\ \text{Sp } \gamma_\mu \gamma_\nu &= -4\delta_{\mu\nu}, \\ \text{Sp } \gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\rho \gamma_\sigma &= 4 (\delta_{\mu\nu} \delta_{\rho\sigma} - \delta_{\mu\rho} \delta_{\nu\sigma} + \delta_{\mu\sigma} \delta_{\nu\rho}), \\ \text{Sp } \gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\rho \gamma_\sigma \gamma_\tau \gamma_\nu &= -4 (\delta_{\mu\nu} \delta_{\rho\sigma} \delta_{\tau\nu} - \text{перестановки}). \end{aligned} \tag{8.103}$$

В евклидовом пространстве действие в безмассовой квантовой электродинамике имеет вид

$$I_B = \int d^d x \left[ \bar{\Psi} (i\hat{\partial} - A\mathcal{A}) \Psi + \frac{1}{4} (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)^2 + \frac{\lambda}{2} (\partial_\mu A_\mu)^2 \right]. \tag{8.104}$$

В калибровке Фейнмана,  $\lambda=1$ , правила для теорий возмущений, отвечающие экспоненте  $e^{-I_B}$ , записываются следующим образом:

фермионный пропагатор   $\left( \frac{1}{p} \right)_{\beta\alpha} = -\frac{(p)_{\beta\alpha}}{p^2},$

фотонный пропагатор   $\frac{\delta_{\mu\nu}}{k^2},$

вершина   $e (\gamma_\mu)_{\beta\alpha},$

и, разумеется, каждой фермионной петле приписывается знак минус. Как уже отмечалось в разд (8.12), если размерность  $d \neq 4$ , то заряд  $e$  приобретает размерность  $(4-d)/2$ . Если  $\mu$  — произвольная масса, то можно записать равенство

$$e = \mu^{(4-d)/2} e', \quad (8.105)$$

где  $e'$  — безразмерная величина. Этим выражением мы будем пользоваться в любом случае, когда производится разложение в ряд вблизи  $d=4$ , чтобы правильно воспроизвести свойства однородности. Таким образом, в безмассовую теорию неизбежно прокрадывается массовый масштаб

Сначала в рамках этого формализма вычислим в однопетлевом приближении поляризацию вакуума, фермионную собственно-энергетическую часть и вершинную функцию

Собственно-энергетическая часть в однопетлевом приближении (см. рис. 7.5 в т. 1 настоящей книги) имеет вид

$$\begin{aligned} \Gamma_{\rho\sigma}(k) &= -e^2 \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \frac{\text{Sp}[\not{p}\gamma_\sigma(\not{p}+\not{k})\gamma_\rho]}{p^2(p+k)^2} = \\ &= -e^2 \text{Sp}(\gamma_\mu\gamma_\rho\gamma_\nu\gamma_\sigma) \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} B\left(\frac{d}{2}, \frac{d}{2}\right) (k^2)^{d/2-2} \times \\ &\times \left[ -k_\mu k_\nu \Gamma\left(2-\frac{d}{2}\right) + \frac{\delta_{\mu\nu}}{2} k^2 \Gamma\left(1-\frac{d}{2}\right) \right]. \end{aligned}$$

При интегрировании мы использовали соотношения (8.9), в которых положили  $m_1^2 = m_2^2 = 0$ , и определение  $B$ -функции Эйлера:

$$B(x, y) = \int_0^1 d\alpha \alpha^{x-1} (1-\alpha)^{y-1} = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}.$$

Определяя величину  $\epsilon = 4-d$ , приходим к выражению

$$\begin{aligned} \Gamma_{\rho\sigma}(k) &= -\frac{8e'^2}{(4\pi)^{d/2}} B\left(\frac{d}{2}, \frac{d}{2}\right) \Gamma\left(2-\frac{d}{2}\right) \left(\frac{k^2}{\mu^2}\right)^{d/2-2} (\delta_{\rho\sigma}k^2 - k_\rho k_\sigma) \approx \\ &\stackrel{\approx}{\approx}_{d \rightarrow 4} -\frac{\alpha}{3\pi} \left[ \frac{2}{\epsilon} - \ln \frac{k^2}{\mu^2} + \text{const} + O(\epsilon) \right] (\delta_{\mu\nu}k^2 - k_\mu k_\nu), \quad (8.106) \end{aligned}$$

которое согласуется с (7.9), если отождествить  $2/\epsilon$  с  $\ln(\Lambda^2/m^2)$ . С учетом определений, данных в гл. 6 (см т. 1 настоящей книги), евклидова сильносвязанная двухточечная функция равна по величине и противоположна по знаку пропагатору в минус первой степени. Следовательно, после введения члена

$$(Z_3 - 1)^{[1]} = -\frac{\alpha}{3\pi} \frac{2}{\epsilon}$$

перенормированная амплитуда поляризации вакуума принимает в четырех измерениях вид

$$\begin{aligned} \Gamma_{\rho\sigma}^{[1]} &= -(\delta_{\rho\sigma}k^2 - k_\rho k_\sigma) \bar{\omega}^{[1]}(k^2), \\ \bar{\omega}^{[1]}(k^2) &= -\frac{\alpha}{3\pi} \left( \ln \frac{k^2}{\mu^2} + \text{const} \right). \quad (8.107) \end{aligned}$$

Здесь постоянная представляет собой малоинтересную комбинацию величин  $\mu$ ,  $\gamma$  (константы Эйлера) и т. д. Подчеркнем, что нами использовались нормировочные условия нового типа. Вместо того чтобы фиксировать значение  $\bar{\omega}(k^2)$  в некоторой точке, мы решили вычестить из (8.106) только полюсный член. Будем придерживаться этого удобного рецепта, который называют минимальной перенормировкой. В рамках этой процедуры автоматически выполняются гожества Уорда. Остальные две диаграммы на рис. 7.7 и 7.10 (см. г. 1 настоящей книги) вычисляются тем же способом. Собственная энергия фермиона имеет вид

$$\begin{aligned} \Gamma^{(2)}(p) &= -e^2 \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{\gamma_\rho \kappa \gamma_\rho}{(p-k)^2 k^2} = \\ &= -e^2 (d-2) \gamma_\mu \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{k_\mu}{(p-k)^2 k^2} = \\ &= -\frac{e^2 (d-2) (p^2)^{d/2-2}}{(4\pi)^{d/2}} \not{p} \Gamma\left(2-\frac{d}{2}\right) B\left(\frac{d}{2}-1, \frac{d}{2}\right) \approx \\ &\approx_{d \approx 4} -\frac{e^2}{(4\pi)^2} \not{p} \left(\frac{2}{\varepsilon} + \text{Конечные члены}\right). \end{aligned} \quad (8.108)$$

Это выражение требует перенормировки волновой функции, равной

$$(Z_2 - 1)^{11} = -\frac{e^2}{(4\pi)^2} \frac{2}{\varepsilon}. \quad (8.109)$$

Что касается вершинной функции, то она равна

$$\begin{aligned} \Gamma_\mu(p, q) &= e^3 \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{\gamma_\nu (\kappa + q) \gamma_\mu \kappa \gamma_\rho}{(p-k)^2 (k+q)^2 k^2} = \\ &= e^3 [(6-d) \gamma_\nu \gamma_\mu \gamma_\alpha - 2(d-4) (\delta_{\alpha\mu} \gamma_\beta - \delta_{\alpha\beta} \gamma_\mu + \delta_{\mu\beta} \gamma_\alpha)] \times \\ &\quad \times \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{(k+q)_\lambda k_\beta}{(p-k)^2 (k+q)^2 k^2} \approx \\ &\approx_{d \approx 4} \frac{e^3}{(4\pi)^2} \frac{2}{\varepsilon} \gamma + \text{Конечные члены}. \end{aligned}$$

Отсюда мы получаем следующий контрчлен:

$$(Z_1 - 1)^{11} = -\frac{e^2}{(4\pi)^2} \frac{2}{\varepsilon}, \quad (8.110)$$

Мы убеждаемся, что в данном порядке выполнено тождество  $Z_1 = Z_2$  и что  $Z_1, Z_2, Z_3$  — те же величины, что и в массивной псевдоевклидовой теории, если отождествить  $2/\varepsilon = \ln(\Lambda^2/m^2)$ . Ясно, что в этом вычислении не было необходимости!

Обратимся теперь к двухпетлевым диаграммам, представленным на рис. 8.17.  $a_1, a_2, b$  На рис. 8.17 изображены также вставки контрчленов порядка  $\hbar$ . Две диаграммы  $a_1$  и  $a_2$ , очевидно, дают одинаковые вклады. Выразим сначала величину  $\Gamma_{\rho\sigma}^{(2)} = \Gamma_{\rho\sigma}^{(a_1)} + \Gamma_{\rho\sigma}^{(a_2)}$  через амплитуду собственной энергии фермиона  $\Gamma^{(2)}(p)$ , определяемую выражением (8.108):

$$\begin{aligned} \Gamma_{\rho\sigma}^{(2)}(k) &= -2e^2 \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \text{Sp} \left[ \frac{1}{\not{p} + \not{\kappa}} \gamma_\rho \frac{1}{\not{p}} \Gamma^{(2)}(p) \frac{1}{\not{p}} \gamma_\sigma \right] = \\ &= \frac{2e^4 (d-2)}{(4\pi)^{d/2}} \Gamma\left(2-\frac{d}{2}\right) B\left(\frac{d}{2}-1, \frac{d}{2}\right) \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \frac{\text{Sp}[(\not{p} + \not{\kappa}) \gamma_\rho \not{p} \gamma_\sigma]}{(p+k)^2 (p^2)^{d/2}}. \end{aligned}$$

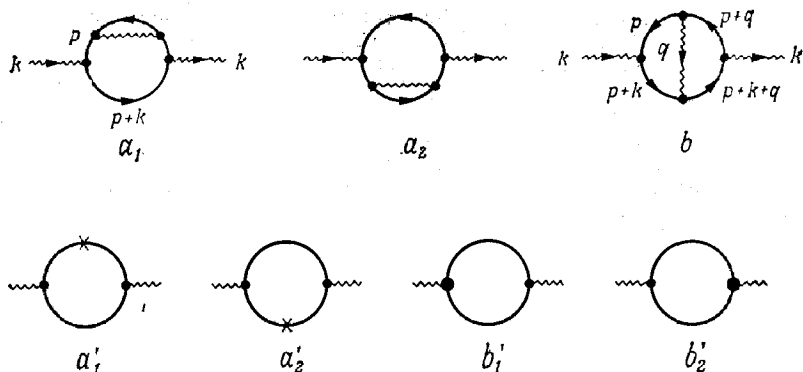


РИС 8.17. Двухпетлевые вклады в поляризацию вакуума. Показаны также вклады контрчленов порядка  $\hbar$ .

Чтобы вычислить интеграл по  $p$ , воспользуемся тождеством

$$\frac{1}{(p^2)^{3-d/2}} = \frac{1}{\Gamma(3-d/2)} \int_0^\infty dx x^{2-d/2} e^{-xp^2} \quad (8.111)$$

и параметрическим представлением. Это дает

$$\int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \frac{(p+k)_\mu p_\nu}{(p+k)^2 (p^2)^{3-d/2}} = \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \frac{1}{\Gamma(3-d/2)} B\left(\frac{d}{2}, d-2\right) (k^2)^{d-4} \times \\ \times \left[ -k_\mu k_\nu \Gamma(4-d) + \frac{1}{2} \delta_{\mu\nu} k^2 \Gamma(3-d) \right].$$

После простых алгебраических выкладок получаем

$$\Gamma_{\rho\sigma}^{(a)}(k) = \frac{8e^4(d-2)}{(4\pi)^d} \frac{B(d/2-1, d/2) B(d/2, d-2) (k^2)^{d-4}}{2-d/2} \times \\ \times [-2k_\mu k_\nu \Gamma(4-d) + \delta_{\mu\nu} k^2 \Gamma(3-d) (1-d/2) + k^2 \delta_{\mu\nu} \Gamma(4-d)]. \quad (8.112)$$

Разложим это выражение в окрестности  $d=4$ :  $\Gamma(4-d) = 1/\varepsilon - \gamma + O(\varepsilon)$ ,  $\Gamma(3-d) = -1/\varepsilon + (\gamma-1)$  и т. д. Мы находим

$$\Gamma_{\rho\sigma}^{(a)}(k) \equiv \frac{\alpha^2}{3\pi^2} \left\{ k_\rho k_\sigma \left[ -\frac{1}{\varepsilon^2} + \frac{1}{\varepsilon} \left( \gamma + \ln \frac{k^2}{\mu^2} - \frac{7}{4} \right) - \frac{1}{2} \ln^2 \frac{k^2}{\mu^2} + \right. \right. \\ \left. \left. + \ln \frac{k^2}{\mu^2} \left( -\gamma + \frac{7}{4} \right) + \dots \right] - \right. \\ \left. - \delta_{\rho\sigma} k^2 \left[ -\frac{1}{\varepsilon^2} + \frac{1}{\varepsilon} \left( \gamma + \ln \frac{k^2}{\mu^2} - 2 \right) - \frac{1}{2} \ln^2 \frac{k^2}{\mu^2} + \right. \right. \\ \left. \left. + \ln \frac{k^2}{\mu^2} (-\gamma + 2) + \dots \right] \right\}; \quad (8.113)$$

здесь опущены постоянные члены. Нетрудно также вычислить вклад  $\Gamma_{\rho\sigma}^{(a')}$  контрчленов (рис. 8.17,  $a'_1, a'_2$ ):

$$\begin{aligned} \Gamma_{\rho\sigma}^{(a')} (k) &= -2e^2 \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \text{Sp} \left\{ \frac{1}{(p+k)} \gamma_\nu \frac{1}{p} \left[ \frac{e^2}{(4\pi)^2} p \frac{2}{\varepsilon} \right] \frac{1}{p} \gamma_\nu \right\} = \\ &= -\frac{\alpha^2}{\pi^2} \frac{2}{\varepsilon} B \left( \frac{d}{2}, \frac{d}{2} \right) (k^2)^{d/2-2} (k^2 \delta_{\mu\nu} - k_\mu k_\nu) \Gamma \left( 2 - \frac{d}{2} \right) \approx \\ &\approx -\frac{\alpha^2}{3\pi^2} (k^2 \delta_{\mu\nu} - k_\mu k_\nu) \left\{ \frac{2}{\varepsilon^2} + \frac{1}{\varepsilon} \left( -\ln \frac{k^2}{\mu^2} + \frac{5}{3} - \gamma \right) + \right. \\ &\left. + \left[ \frac{1}{4} \ln^2 \frac{p^2}{\mu^2} + \left( \frac{\gamma}{2} - \frac{5}{6} \right) \ln \frac{p^2}{\mu^2} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (8.114)$$

Необходимо сделать следующие три замечания. Во-первых, вклад контрчленов обладает свойством поперечности — очевидный факт, поскольку это, по существу, однопетлевые диаграммы, вычисленные ранее. Величины  $\Gamma_{\rho\sigma}^{(a')}$  этим свойством не обладают. Условию поперечности удовлетворяет лишь сумма всех вкладов, изображенных на рис. 8.17. Во-вторых, в сумме  $\Gamma^{(a)} + \Gamma^{(a')}$  расходящиеся члены не сокращаются, что не является неожиданностью, поскольку для этой диаграммы еще требуется произвести общее вычитание. На первый взгляд кажется удивительным, что доминирующие члены  $1/\varepsilon^2$  (или  $\ln^2 \Lambda^2$ ) не сокращаются, поскольку внутренние расходимости были вычтены с помощью контрчленов. Но перенормированная собственно-энергетическая часть электрона ведет себя при больших  $p^2$  как  $\ln p^2$ ; поэтому ее вставка в условно расходящуюся диаграмму приводит к расходимости типа  $\ln^2 \Lambda^2$ , т. е.

$$\int \frac{d^d p}{p^2 (p+k)^2} \ln p^2 \sim \ln^2 \Lambda^2.$$

Коэффициент при члене  $\ln(k^2 \mu^2)$  зависит от условия нормировки для диаграммы собственной энергии. Как видно из выражения (8.114), изменение контрчлена  $(Z_2 - 1)^{[1]}$  на конечную величину приводит к изменению члена  $\ln(k^2/\mu^2)$  (а также несущественного постоянного члена). Однако в полном выражении для  $\Gamma_{\rho\sigma}$  эта зависимость отсутствует. Это иллюстрирует тот факт, что ренормгрупповому уравнению (8.59) удовлетворяют не отдельные диаграммы, а лишь функция Грина в данном порядке.

Мы переходим теперь к гораздо более громоздким вычислениям для диаграмм, изображенных на рис. 8.17, б. В обозначениях, принятых на этом рисунке, амплитуда записывается в виде

$$\Gamma_{\rho\sigma}^{(b)} (k) = -e^4 \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d q^2} \text{Sp} (\gamma_\nu \gamma_\sigma \gamma_\mu \gamma_\lambda \gamma_\alpha \gamma_\rho \gamma_\beta \gamma_\lambda) I_{\alpha\beta\mu\nu} (k, q), \quad (8.115)$$

$$\text{где } I_{\alpha\beta\mu\nu} = \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \frac{p_\beta (p+k)_\alpha (p+k+q)_\mu (p+q)_\nu}{p^2 (p+k)^2 (p+q+k)^2 (p+q)^2}.$$

Сначала проводится интегрирование по  $p$ . Введем параметры Фейнмана  $\alpha_1, \dots, \alpha_4$  для линий, которым отвечают соответственно импульсы  $p, p+q, p+q+k, p+k$ . Мы получаем выражения

$$\begin{aligned} I_{\alpha\beta\mu\nu} &= \int_0^\infty d\alpha_1 d\alpha_2 d\alpha_3 d\alpha_4 J_{\alpha\beta\mu\nu}, \\ J_{\alpha\beta\mu\nu} &= \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} p_\beta (p+k)_\alpha (p+k+q)_\mu (p+q)_\nu \times \\ &\times \exp \left[ -(\alpha_{23} q^2 + \alpha_{34} k^2 + 2\alpha_3 k \cdot q + \Sigma p^2 + 2\alpha_{23} q \cdot p + 2\alpha_{34} k \cdot p) \right], \end{aligned} \quad (8.116)$$

где использованы сокращенные обозначения  $\alpha_{23} = \alpha_2 + \alpha_3$  и т. д., а  $\Sigma = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4$ . Удобно сместить переменную интегрирования следующим образом:

$$p' = p + \frac{\alpha_{23}}{\Sigma} q + \frac{\alpha_{34}}{\Sigma} k \equiv p + Q$$

и переписать числитель в (8.116) в виде

$$p_3 (p+k)_\alpha (p+k+q)_\mu (p+q)_\nu = \\ = (p'-Q)_\beta (p'+k-Q)_\alpha (p'+k+q-Q)_\mu (p'+q-Q)_\nu.$$

Таким образом, нам нужно вычислить интегралы вида

$$\int \frac{d^d p'}{(2\pi)^d} \exp(-\Sigma p'^2) = \frac{1}{(4\pi\Sigma)^{d/2}}, \\ \int \frac{d^d p'}{(2\pi)^d} p'_\mu p'_\nu \exp(-\Sigma p'^2) = \frac{1}{2\Sigma (4\pi\Sigma)^{d/2}} \delta_{\mu\nu}, \\ \int \frac{d^d p'}{(2\pi)^d} p'_\mu p'_\nu p'_\alpha p'_\beta \exp(-\Sigma p'^2) = \frac{1}{4\Sigma^2 (4\pi\Sigma)^{d/2}} (\delta_{\mu\nu}\delta_{\alpha\beta} + \delta_{\mu\alpha}\delta_{\nu\beta} + \delta_{\mu\beta}\delta_{\nu\alpha}), \quad (8.117)$$

тогда как интегралы, включающие нечетные степени величины  $p'$ , обращаются в нуль. Нам понадобятся также следы  $\gamma$ -матриц. Из (8.103) находим

$$\text{Sp} (\gamma_\nu \gamma_\sigma \gamma_\mu \gamma_\lambda \gamma_\alpha \gamma_\rho \gamma_\beta \gamma_\lambda) = \\ = -4 (d-2) [\delta_{\alpha\rho} (\delta_{\nu\sigma}\delta_{\mu\beta} - \delta_{\nu\mu}\delta_{\sigma\beta} + \delta_{\nu\beta}\delta_{\sigma\mu}) + \delta_{\beta\rho} (\delta_{\nu\sigma}\delta_{\mu\alpha} - \delta_{\nu\mu}\delta_{\sigma\alpha} + \\ + \delta_{\nu\alpha}\delta_{\sigma\mu}) - \delta_{\alpha\beta} (\delta_{\nu\sigma}\delta_{\mu\rho} - \delta_{\nu\mu}\delta_{\rho\sigma} + \delta_{\nu\rho}\delta_{\sigma\mu})] - \\ - 4 (6-d) [\delta_{\nu\beta} (\delta_{\sigma\alpha}\delta_{\mu\rho} - \delta_{\rho\sigma}\delta_{\mu\alpha}) + \delta_{\nu\alpha} (\delta_{\rho\sigma}\delta_{\mu\beta} - \delta_{\sigma\beta}\delta_{\mu\rho}) + \\ + \delta_{\nu\rho} (\delta_{\sigma\beta}\delta_{\mu\alpha} - \delta_{\sigma\alpha}\delta_{\mu\beta})]. \quad (8.118)$$

Первая квадратная скобка здесь симметрична, а вторая антисимметрична относительно замены  $\alpha$  на  $\beta$ . Утомительные, но несложные алгебраические выкладки дают

$$(4\pi\Sigma)^{d/2} \exp \left[ \frac{\alpha_{23}\alpha_{14}q^2 + \alpha_{12}\alpha_{34}k^2 + 2(\alpha_1\alpha_3 - \alpha_2\alpha_4)q \cdot k}{\Sigma} \right] \times \\ \times \int \alpha_\beta \mu_\nu \text{Sp} (\gamma_\nu \gamma_\sigma \gamma_\mu \gamma_\lambda \gamma_\alpha \gamma_\rho \gamma_\beta \gamma_\lambda) = \\ = -4 (d-2) \{ Q_\rho Q_\sigma (k^2 - 2q^2) + Q_\rho q_\sigma [-k \cdot (k+2q) + 4q \cdot Q] + \\ + Q_\rho k_\sigma [(k+2q) \cdot q - 2k \cdot Q] + \\ + k_\rho q_\sigma Q \cdot (k-2q) - k_\rho k_\sigma Q \cdot (q-Q) + 2q_\rho q_\sigma Q \cdot (k-Q) - \\ - \delta_{\rho\sigma} (k+q-Q) \cdot (q-Q) \cdot Q \cdot (k-Q) \} + \\ + 4 (6-d) \{ (\delta_{\rho\sigma} k^2 - k_\rho k_\sigma) Q \cdot (Q-q) - (\delta_{\rho\lambda} k \cdot Q - Q_\rho k_\lambda) \times \\ \times [\delta_{\lambda\sigma} k \cdot (Q-q) - k_\lambda (Q-q)_\sigma] \} - \\ - \frac{4(d-2)}{2\Sigma} \{ (2-d) (2q_\rho q_\sigma - k_\rho k_\sigma) + (d-2) \times \\ \times \delta_{\rho\sigma} [(k+q-Q) \cdot (q-Q) - Q \cdot (k-Q)] + 2\delta_{\rho\sigma} (k-2Q) \cdot (k+2q-2Q) \} + \\ + \frac{4(6-d)}{2\Sigma} \{ [k^2 \delta_{\rho\sigma} - k_\rho k_\sigma] (d-2) \} - \frac{4(d-2)}{4\Sigma^2} [\delta_{\rho\sigma} d (d+2)] \equiv \\ \equiv -4 (d-2) A_1 + 4 (6-d) A_2 - \frac{4(d-2)}{2\Sigma} B_1 + \\ + \frac{4(6-d)}{2\Sigma} B_2 - \frac{4(d-2)}{4\Sigma^2} C_1. \quad (8.119)$$



Мы воспользовались здесь симметрией между  $\rho$  и  $\sigma$ . Происхождение и смысл каждого члена очевидны.

Теперь следует провести интегрирование по  $q$ . Запишем

$$\frac{1}{q^2} = \frac{\alpha_{23}\alpha_{14}}{\Sigma} \int_0^{\infty} dx \exp\left(-\frac{x\alpha_{23}\alpha_{14}q^2}{\Sigma}\right). \quad (8.120)$$

Поскольку подынтегральное выражение содержит экспоненту

$$\exp\left[-\frac{(x+1)\alpha_{23}\alpha_{14}q^2 + \alpha_{12}\alpha_{34}k^2 + 2(\alpha_1\alpha_3 - \alpha_2\alpha_4)q \cdot k}{\Sigma}\right],$$

умноженную на степени величины  $q$ , произведем новый сдвиг переменной интегрирования:

$$q = q' - \alpha k, \quad (8.121)$$

где

$$\alpha = \frac{\alpha_1\alpha_3 - \alpha_2\alpha_4}{(x+1)\alpha_{14}\alpha_{23}}.$$

Соответственно  $Q$  запишется в виде

$$Q = \hat{\alpha}_{23}q' + zk, \quad (8.122)$$

причем

$$z = \frac{\alpha_{34}}{\Sigma} - \frac{\alpha_1\alpha_3 - \alpha_2\alpha_4}{\Sigma(x+1)\alpha_{14}}, \quad \hat{\alpha}_{23} = \frac{\alpha_{23}}{\Sigma}.$$

Обозначим коэффициент при  $q^2$  в показателе экспоненты через  $y$

$$y = (x+1) \frac{\alpha_{23}\alpha_{14}}{\Sigma} = \frac{1}{x'} \frac{\alpha_{23}\alpha_{14}}{\Sigma}. \quad (8.123)$$

Следовательно, искомая амплитуда  $\Gamma_{\rho\sigma}^{(b)}(k)$  имеет вид

$$\begin{aligned} \Gamma_{\rho\sigma}^{(b)}(k) = & -e^4 \int_0^{\infty} d\alpha_1 \dots d\alpha_4 \int_0^1 \frac{dx'}{x'^2} \frac{1}{(4\pi\Sigma)^{d/2}} \frac{\alpha_{23}\alpha_{14}}{\Sigma} \times \\ & \times \exp\left[-\frac{\alpha_{12}\alpha_{23}\alpha_{34}\alpha_{41} - x'(\alpha_1\alpha_3 - \alpha_2\alpha_4)^2}{\Sigma\alpha_{23}\alpha_{14}} k^2\right] \times \\ & \times \int \frac{d^d q'}{(2\pi)^d} e^{-yq'^2} \left[-4(d-2)A_1 + \dots - \frac{4(d-2)}{4\Sigma^2} C_1\right]. \end{aligned} \quad (8.124)$$

Для того чтобы вычислить следующие выражения, требуется проявить лишь терпение. Мы имеем

$$\begin{aligned} (4\pi y)^{d/2} \int \frac{d^d q'}{(2\pi)^d} e^{-yq'^2} A_1 = & k_{\rho} k_{\sigma} \frac{\alpha_{23}\alpha_{14} + 2(\alpha_1 - \alpha_3)(\alpha_4 - \alpha_2)}{2y\Sigma^2} (d-2) + \\ & + \delta_{\rho\sigma} [(k^2)^2 z(1-z)(\alpha+z)(1-\alpha-z) + \\ & + \frac{k^2}{2y} \{2\hat{\alpha}_{23}(1-\hat{\alpha}_{23})[\alpha+2z-2z(\alpha+z)] + \\ & + \frac{2(\alpha_1 - \alpha_3)(\alpha_4 - \alpha_2)}{\Sigma^2}\}] - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{k^2 d}{2y} [(\alpha+z)(1-\alpha-z)\hat{\alpha}_{23}^2 + (1-\hat{\alpha}_{23})^2 z(1-z)] + \\
& + \frac{d(d+2)}{4y^2} \hat{\alpha}_{23}^2 (1-\hat{\alpha}_{23})^2, \\
(4\pi y)^{d/2} \int \frac{d^d q'}{(2\pi)^d} e^{-yq'^2} B_1 = & (2-d)(2\alpha^2-1)k_\rho k_\sigma - \\
& - (d-2)\delta_{\rho\sigma} \left\{ \frac{1}{y} + k^2 [(\alpha+z)(1-\alpha-z) + z(1-z)] - \right. \\
& \left. - \frac{d}{2y} [\hat{\alpha}_{23}^2 + (1-\hat{\alpha}_{23})^2] \right\} + \\
& + 2\delta_{\rho\sigma} \left[ k^2(1-2z)(1-2z-2\alpha) - 2\hat{\alpha}_{23}(1-\hat{\alpha}_{23}) \frac{d}{y} \right], \\
(4\pi y)^{d/2} \int \frac{d^d q'}{(2\pi)^d} e^{-yq'^2} A_2 = & \frac{d-2}{2y} \hat{\alpha}_{23}(1-\hat{\alpha}_{23})(k_\rho k_\sigma - k^2 \delta_{\rho\sigma}).
\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}
\Gamma_{\rho\sigma}^{(A_2+B_2)} = & -\frac{e^4}{(4\pi)^d} 4(6-d)(d-2)(k^2 \delta_{\rho\sigma} - k_\rho k_\sigma) \times \\
& \times \int_0^1 \frac{dx'}{x'^2} \int_0^\infty \frac{d\alpha_1 \dots d\alpha_4 \alpha_{23} \alpha_{14} (1-x')}{2\Sigma^{d/2} + 2y^{d/2}} \times \\
& \times \exp \left[ -\frac{\alpha_{12} \alpha_{23} \alpha_{34} \alpha_{41} - x' (\alpha_1 \alpha_3 - \alpha_2 \alpha_4)^2}{\Sigma \alpha_{23} \alpha_{14}} k^2 \right] = \\
= & -\frac{e^4}{(4\pi)^d} 2(6-d)(d-2)(k^2 \delta_{\rho\sigma} - k_\rho k_\sigma) (k^2)^{d-4} \Gamma(4-d) \times \\
& \times \int_0^1 dx' x'^{d/2-2} (1-x') \int_0^1 \frac{d\alpha_1 \dots d\alpha_4 \delta(1-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3-\alpha_4)}{(\alpha_{14} \alpha_{23})^{3d/2-5}} \times \\
& \times [\alpha_{12} \alpha_{23} \alpha_{34} \alpha_{41} - x' (\alpha_1 \alpha_3 - \alpha_2 \alpha_4)^2]^{d-4}.
\end{aligned}$$

Произведем следующую замену переменных;

$$\begin{aligned}
\alpha_1 = \beta u, \quad \alpha_2 = (1-\beta)v, \quad \alpha_3 = (1-\beta)(1-u), \quad \alpha_4 = \beta(1-u), \quad \alpha_{14} = \beta, \quad \alpha_{23} = 1-\beta, \\
[\alpha_{12} \alpha_{23} \alpha_{34} \alpha_{41} - x' (\alpha_1 \alpha_3 - \alpha_2 \alpha_4)^2] = \\
= \beta(1-\beta) \{ [\beta(1-u) + (1-\beta)(1-v)] [\beta u + (1-\beta)v] - x' \beta(1-\beta)(u-v)^2 \}, \\
\int_0^1 d\alpha_1 \dots d\alpha_4 \delta(1-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3-\alpha_4) F(\alpha_i) = \int_0^1 d\beta \beta(1-\beta) \int_0^1 du \int_0^1 dv F(\alpha_i).
\end{aligned}$$

Нетрудно проверить, что последний интеграл сходится при  $d=4$ . Следовательно, пренебрегая, как и выше, постоянными членами в  $\bar{\omega}(k^2)$ , получаем

$$\Gamma_{\rho\sigma}^{(A_2+B_2)} \underset{d=4-\varepsilon}{\approx} \frac{\alpha^2}{4\pi^2} \left( \frac{1}{\varepsilon} - \ln \frac{k^2}{\mu^2} + \dots \right) (k_\rho k_\sigma - \delta_{\rho\sigma} k^2). \quad (8.125)$$

Аналогично получаем вклад, соответствующий  $C_1$ :

$$\Gamma_{\rho\sigma}^{(C_1)} = \frac{e^4 (d-2) d (d+2) \delta_{\rho\sigma}}{(4\pi)^d} (k^2)^{d-3} \Gamma(3-d) \times \\ \times \int_0^1 dx' x'^{d/2-2} \int_0^1 d\alpha_1 \dots d\alpha_4 \frac{\delta(1-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3-\alpha_4)}{(\alpha_{14}\alpha_{23})^{3d/2-4}} \times \\ \times [\alpha_{12}\alpha_{23}\alpha_{34}\alpha_{41} - x' (\alpha_1\alpha_3 - \alpha_2\alpha_4)^2]^{d-3},$$

где интеграл по  $\beta$  также сходится при  $d=4$ . Следовательно,

$$\Gamma_{\rho\sigma}^{(C_1)} \approx -\frac{3\alpha^2}{\pi^2} \delta_{\rho\sigma} k^2 \left( \frac{1}{\varepsilon} - \ln \frac{k^2}{\mu^2} + \dots \right) \int_0^1 dx' \int_0^1 d\beta \int_0^1 du \int_0^1 dv \times \\ \times \{ [\beta(1-u) + (1-\beta)(1-v)] [\beta u + (1-\beta)v] - x'\beta(1-\beta)(u-v)^2 \} \approx \\ \approx -\frac{\alpha^2}{\pi^2} \frac{13}{24} \delta_{\rho\sigma} k^2 \left( \frac{1}{\varepsilon} - \ln \frac{k^2}{\mu^2} + \dots \right). \quad (8.126)$$

В противоположность этому вклады от  $A_1$  и  $B_1$  имеют внутренние расходимости при  $\beta=0$  или  $\beta=1$ . Например, члены, пропорциональные  $k_\rho k_\sigma$ , можно записать в виде

$$\Gamma_{\rho\sigma}^{(A_1+B_1)} = \frac{4e^4}{(4\pi)^d} (d-2)^2 \Gamma(4-d) (k^2)^{d-4} k_\rho k_\sigma \int_0^1 dx' x'^{d/2-2} \int_0^1 du \int_0^1 dv \times \\ \times \int_0^1 d\beta [\beta(1-\beta)]^{2-d/2} \{ [\beta(1-u) + (1-\beta)(1-v)] \times \\ \times [\beta u + (1-\beta)v] - x'\beta(1-\beta)(u-v)^2 \}^{d-4} \times \\ \times \left\{ x' \frac{\beta^2 u(1-u) + (1-\beta)^2 v(1-v)}{\beta(1-\beta)} - x' [uv + (1-u)(1-v)] + \right. \\ \left. + \frac{1+x'}{2} - x'^2 (u-v)^2 \right\} + \delta\rho\sigma \dots$$

Однако требуемое разложение в окрестности  $d=4$  легко получается, если заметить, что для любой функции  $F(\beta)$ , регулярной в точках 0 и 1, выполняется соотношение

$$\int_0^1 d\beta [\beta(1-\beta)]^{-1+\varepsilon/2} F(\beta) = \int_0^1 d\beta [\beta^{-1+\varepsilon/2} + (1-\beta)^{-1+\varepsilon/2}] F(\beta) + O(\varepsilon).$$

В итоге получаем

$$\Gamma_{\rho\sigma}^{(A_1+B_1)} \approx \frac{\alpha^2}{3\pi^2} k_\rho k_\sigma \left[ \frac{1}{\varepsilon^2} - \frac{1}{\varepsilon} \left( \ln \frac{k^2}{\mu^2} + \gamma - \frac{7}{4} \right) + \frac{1}{2} \ln^2 \frac{k^2}{\mu^2} + \right. \\ \left. + \ln \frac{k^2}{\mu^2} \left( \gamma - \frac{7}{4} \right) + \dots \right] - \\ - \frac{\alpha^2}{3\pi^2} \delta_{\rho\sigma} k^2 \left[ \frac{1}{\varepsilon^2} + \frac{1}{\varepsilon} \left( \frac{3}{8} - \gamma - \ln \frac{k^2}{\mu^2} \right) + \frac{1}{2} \ln^2 \frac{k^2}{\mu^2} + \right. \\ \left. + \ln \frac{k^2}{\mu^2} \left( \gamma - \frac{3}{8} \right) + \dots \right]. \quad (8.127)$$

Таким образом, полный вклад, соответствующий диаграмме на рис. 8.17, б, запишется в виде

$$\Gamma_{\rho\sigma}^{(b)} = \frac{\alpha^2}{3\pi^2} \left\{ k_\rho k_\sigma \left[ \frac{1}{\varepsilon^2} + \frac{1}{\varepsilon} \left( \frac{5}{2} - \gamma - \ln \frac{k^2}{\mu^2} \right) + \frac{1}{2} \ln^2 \frac{k^2}{\mu^2} + \right. \right. \\ \left. \left. + \ln \frac{k^2}{\mu^2} \left( \gamma - \frac{5}{2} \right) + \dots \right] - \delta_{\rho\sigma} k^2 \left[ \frac{1}{\varepsilon^2} + \frac{1}{\varepsilon} \left( \frac{11}{4} - \gamma - \ln \frac{k^2}{\mu^2} \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{2} \ln^2 \frac{k^2}{\mu^2} + \ln \frac{k^2}{\mu^2} \left( \gamma - \frac{11}{4} \right) + \dots \right] \right\}. \quad (8.128)$$

Нам остается еще вычислить вклад вершинных контрчленов, изображенных на рис 8.17, б<sub>1</sub>, б<sub>2</sub>. Однако благодаря тождеству Уорда они в точности сокращаются с вкладом собственно-энергетических контрчленов (а<sub>1</sub>, а<sub>2</sub>). В самом деле, последние пропорциональны (Z<sub>2</sub><sup>-1</sup> - i)<sup>[1]</sup> = -(Z<sub>2</sub> - 1)<sup>[1]</sup>, тогда как первые пропорциональны (Z<sub>1</sub> - 1)<sup>[1]</sup>. Это типичное явление для квантовой электродинамики.

Складывая выражения (8.113) и (8.128), окончательно получаем следующий результат:

$$\Gamma_{\rho\sigma}^{[2]} = (k_\rho k_\sigma - \delta_{\rho\sigma} k^2) \bar{\omega}^{[2]}(k^2), \quad (8.129) \\ \bar{\omega}^{[2]}(k^2) = -\frac{\alpha^2}{\pi^2} \left( -\frac{1}{4\varepsilon} + \frac{1}{4} \ln \frac{k^2}{\mu^2} + \dots \right).$$

Мы видим, что он обладает всеми требуемыми свойствами:

1. Расходящиеся члены вида (1/ε) ln(k<sup>2</sup>/μ<sup>2</sup>), которые нельзя было бы исключить с помощью локальных контрчленов, сократились.
2. Благодаря тождеству Уорда тензор поляризации вакуума, как и ожидалось, является поперечным. Это справедливо как для расходящейся, так и для конечной части. Следовательно, первую можно перенормировать с помощью контрчлена порядка ħ<sup>2</sup>, удовлетворяющего условию поперечности. Для больших евклидовых k<sup>2</sup> с точностью до α<sup>2</sup> перенормированная функция  $\bar{\omega}_R(k^2)$  дается выражением

$$\bar{\omega}_R(k^2) = -\frac{\alpha}{3\pi} \ln \frac{k^2}{\mu^2} - \frac{\alpha^2}{4\pi^2} \ln \frac{k^2}{\mu^2} + O(\alpha^3). \quad (8.130)$$

Читатель, если он отважится, может проверить, что конечные члены, которыми мы пренебрегли, также поперечны или (это даже предпочтительнее) что полное выражение для  $\bar{\omega}(k^2)$  не зависит от калибровочного параметра λ.

3. К счастью, выражение (8.130) совпадает с результатами, полученными другими авторами. Мы заключаем, что в сумме Γ<sup>(a)</sup> + Γ<sup>(b)</sup> отсутствует зависимость от условия нормировки собственно-энергетической части. Очевидно, это объясняется тем, что два контрчлена действительно сокращают друг друга.

4. Неожиданно мы обнаруживаем, что теперь отсутствуют расходящиеся члены с  $1/\epsilon^2$  [которые в общепринятой регуляризации записываются как  $\ln^2(\Lambda^2/\mu^2)$ ] и, соответственно,  $\ln^2(k^2/\mu^2)$ . Это общее свойство поляризации вакуума, справедливое во всех порядках, если мы ограничиваемся диаграммами с одной фермионной петлей. Действительно, калибровочный параметр  $\lambda$  можно последовательно в каждом порядке фиксировать таким образом, чтобы выполнялись равенства  $Z_1 = Z_2 = 1$ . Следовательно, выбранная подсистема диаграмм не содержит каких-либо внутренних расходимостей и ее вклад в калибровочно-инвариантную величину  $\bar{\omega}(k^2)$  ведет себя как первая степень величины  $\ln(\Lambda^2/k^2)$ .

Исходя из вышесказанного, Джонсон, Вилли и Бейкер, а также Адлер высказали интересные предположения. Возможно ли, чтобы коэффициент  $f(\alpha)$  при логарифмическом члене обращался в нуль для ненулевого значения  $\alpha$ ? Поскольку та же функция умножается на  $\ln \Lambda^2$  (или на  $1/\epsilon$ ), это, по-видимому, указывало бы на то, что, переупорядочивая ряды теории возмущений, можно исключить ультрафиолетовые расходимости при некоторых подходящих значениях голых констант связи.

## ПРИМЕЧАНИЯ

Полное описание перенормировок в электродинамике впервые дал Дайсон (см. *Dyson F. J.*— *Phys. Rev.*, 1949, vol. 75 p. 1736) [Имеется перевод в сб. статей: Новейшее развитие квантовой электродинамики.— М.: ИЛ, 1954, с. 205.]. Более раннюю историю этого вопроса можно проследить в книге: *Schwinger J.* *Quantum Electrodynamics.*— New York: Dover, 1958. Значительный вклад внесли Н. Н. Боголюбов и О. С. Парасюк (см.: *Acta Math.*, 1958, vol. 97, p. 227). Подробное изложение теории перенормировок содержится также в учебнике: Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В. Введение в теорию квантованных полей.— М.: Наука, 1976. Вопрос о сходимости перенормированных интегралов Фейнмана подробно изложен в книге: *Hepp K.* *Theorie de la Renormalisation.*— Berlin: Springer-Verlag, 1969. [Имеется перевод. *Xenn K.* Теория перенормировок.— М.: Наука, 1974.]; см. также: *Hepp K.* *Commun. Math. Phys.*, 1966, vol. 2, p. 301. В начале 70-х гг. Циммерман дал исчерпывающее изложение теории перенормировок, включая метод вычитания подынтегральных выражений (см.: *Lectures on Elementary Particles and Quantum Field Theory*, Brandeis Summer Institute (1970)/ed. S. Deser, M. Grisaru, H. Pendleton.— MIT Press, 1970; см. также: *Zimmerman W.*— *Ann. of Phys. (N. Y.)*, 1973, vol. 77, p. 536. Элегантная, хотя и несколько абстрактная, работа Эпштейна и Глазера (см.: *Epstein H., Glaser V.*— *Annales de L'Institut Poincaré*, 1973, vol. XIX, p. 211) в этот вопрос внесла окончательную ясность, показав, что процедура перенормировок сохраняет все свойства локальной теории поля.

Каждая из многочисленных процедур перенормировки имеет свои достоинства. Метод Паули—Вилларса освещен в литературе, приведенной в гл. 7 (см. т. I настоящей книги). Размерная регуляризация обсуждается в статье: *'t Hooft G., Veltman M.*— *Nucl. Phys.*, ser. B., 1972, vol. 44, p. 189; см. также: *Speer E. R.* В кн: *Renormalization Theory* (Erice Summer School 1975)/ed. G. Velo, A. S. Wightman.— Dordrecht, Holland, and Boston Mass.: D. Reidel Publishing Company, 1976.

Сходимость перенормированных интегралов изучали Вайнберг (см.: Weinberg S.—Phys. Rev., 1960, vol. 118, p. 838) и Хепп (см.: Hepp K.—Commun. Math. Phys., 1966, vol. 2, p. 301). Некоторые аспекты данной проблемы, относящиеся к параметрическому представлению, изложены в следующих работах: Appelquist T.—Ann of Phys. (N. Y.), 1969, vol. 54, p. 27; Bergère M., Zuber J. B.—Commun. Math. Phys., 1974, vol. 35, p. 113; Bergère M., Lam Y. M. P.—Commun. Math. Phys., 1974, vol. 39, p. 1.

Безмассовые теории рассмотрены в работе. Symanzik K.—Commun. Math. Phys., 1973, vol. 34, p. 7. Сокращение инфракрасных расходимостей см. в работе: Kinoshita T.—J. Math. Phys., 1962, vol. 3, p. 650; Lee T. D., Nauenberg M.—Phys. Rev., 1964, ser. B, vol. 133, p. 1549; Kinoshita T., Uikawa A. Phys. Rev., 1976, ser. D, vol. 13, p. 1573. Принятый нами эвристический способ изложения заимствован из работы: Poggio E. C., Quinn H. R.—Phys. Rev., 1976, ser. D, vol. 14 p. 578.

Вычисление поляризации вакуума в порядке  $\alpha^2$  выполнено в работе: Jost R., Luttinger J. M.—Helv. Phys. Acta, 1950, vol. 23, p. 201. См. также учебник: Bjorken J. D., Drell S. D. Relativistic Quantum Fields.—New York: McGraw Hill, 1965. [Имеется перевод: Бьеркен Дж. Д., Дрелл С. Д. Релятивистская квантовая теория. Т. 2. Релятивистские квантовые поля — М.: Наука, 1978.]. Возможность существования конечной квантовой электродинамики рассматривается в статьях: Johnson K., Willey R., Baker M.—Phys. Rev., 1967, vol. 163, p. 1699; Adler S. L.—Phys. Rev, ser D, 1972, vol. 5, p. 3021.

## ПРИМЕЧАНИЕ РЕДАКТОРА ПЕРЕВОДА

Обзор современного состояния теории перенормировок дан в книге: Завьялов О. И. Перенормированные диаграммы Фейнмана.— М.: Наука, 1979. Здесь имеются подробные «Литературные указания», в которых можно найти дальнейшие ссылки, а также проследить историю развития этого важного раздела квантовой теории поля.

Общее решение рекуррентных соотношений (8.45) впервые приведено в работе: Завьялов О. И., Степанов Б. М.— ЯФ, 1965, т. 1, с. 922.

Кроме рассмотренных автором регуляризации Паули—Вилларса и размерной регуляризации укажем на аналитическую регуляризацию, предложенную Спиром: Speer E. R.—J. Math. Phys., 1968, vol. 9, p. 1404.

## Глава 9

# ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ МЕТОДЫ

Формализм континуального интегрирования, развитый Фейнманом и Кацем, позволяет рассматривать с единой точки зрения квантовую механику, теорию поля и модели статистической механики. Мы вводим этот формализм сначала для систем с конечным числом степеней свободы, затем обобщаем его на фермионные системы и на системы с бесконечным числом степеней свободы. Метод перевала выявляет тесную связь данного формализма с квантовой механикой и позволяет заново воспроизвести результаты обычной теории возмущений. Среди различных приложений мы рассматриваем здесь понятие эффективного действия, квантование систем со связями и вычисление высших порядков теории возмущений.

### 9.1. КОНТИНУАЛЬНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Впервые идея о представлении квантовомеханических амплитуд через интегралы по путям была предложена в 1933 г. Дираком. Эта идея получила дальнейшее развитие в 40-х гг. в блестящей работе Фейнмана. Швингер разработал эквивалентный подход, основанный на функциональном дифференцировании. В начале к этим работам относился с некоторым предубеждением, поскольку их практическое применение требовало преодоления серьезных математических трудностей. Однако в 70-е гг. было показано, что данный метод является наиболее удобным при решении задач, возникающих в современной теории поля, и, следовательно, заслуживает детального изучения.

#### 9.1.1. Роль классического действия в квантовой механике

Вернемся к квантовой механике, чтобы выяснить, какую роль в теории играет лагранжево-гамильтонов формализм по сравнению с гамильтоновым. Для простоты рассмотрим систему с одной степенью свободы, описываемую парой сопряженных операторов  $Q$  и  $P$ , удовлетворяющих коммутационному соотношению

$$[Q, P] = i. \quad (9.1)$$

Для обозначения операторов используем заглавные буквы, чтобы отличать их от соответствующих классических  $c$ -числовых величин. Пусть гамильтониан имеет вид

$$H(P, Q) = P^2/2m + V(Q). \quad (9.2)$$

Обозначим состояния системы через  $|a\rangle$ ,  $|b\rangle$ , ... Наша цель найти выражение для амплитуды перехода

$$\langle b(t') | a(t) \rangle = \langle b | e^{-iH(t'-t)} | a \rangle. \quad (9.3)$$

В обычном представлении коммутационных соотношений (9.1) можно ввести квадратично-интегрируемые волновые функции

$$a(q) = \langle q | a \rangle, \quad \tilde{a}(p) = \langle p | a \rangle$$

и попытаться решить уравнение Шредингера в частных производных, вытекающее из (9.2). Несобственные состояния  $|q\rangle$  и  $|p\rangle$  здесь таковы, что выполняются соотношения

$$Q|q\rangle = q|q\rangle, \quad P|p\rangle = p|p\rangle, \quad (9.4)$$

$$\langle q' | q \rangle = \delta(q' - q), \quad \langle p' | p \rangle = \delta(p' - p), \quad \langle q | p \rangle = \langle p | q \rangle^* = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ipq},$$

$$\langle q | P | p \rangle = p \langle q | p \rangle = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial q} \langle q | p \rangle.$$

Возвращаясь к выражению для амплитуд перехода, используем принцип суперпозиции и подставим в это выражение полную систему состояний, отвечающих промежуточному моменту времени. Это аналогично использованию принципа Гюйгенса в оптике. Разобьем эволюцию во времени на бесконечно малые этапы  $t \rightarrow t + \Delta t$  и вычислим сначала величину

$$\langle q_2(t + \Delta t) | q_1(t) \rangle = \langle q_2 | e^{-i\Delta t H} | q_1 \rangle.$$

Граничное условие требует, чтобы при  $\Delta t \rightarrow 0$  эта амплитуда сводилась к  $\delta(q_2 - q_1)$ . Для малых  $\Delta t$  естественно ожидать, что, если  $q_2$  заметно отличается от  $q_1$ , матричный элемент пренебрежимо мал либо вследствие убывания его модуля, либо вследствие быстрых осцилляций его фазы. Это наводит на мысль, что вместо оператора потенциала  $V(Q)$  можно подставить его значение  $V(q_1)$  [или  $V(q_2)$ ], что дает приближение следующего вида:

$$e^{-i\Delta t H} \sim e^{-i\Delta t (P^2/2m)} e^{-i\Delta t V(Q)}.$$

Члены, которыми мы пренебрегли, содержат коммутаторы  $[P^2/2m, V(Q)]$ , умноженные на высшие степени величины  $\Delta t$ . Ими можно пренебречь, если  $V$  медленно меняется в окрестности  $q_1$  и  $q_2$ . Это означает, что на коротком промежутке  $\Delta t$  мы не учитываем переход потенциальной энергии в кинетическую. Для



матричного элемента получаем оценку

$$\begin{aligned} \langle q_2(t + \Delta t) | q_1(t) \rangle &\approx \langle q_2 | e^{-i \Delta t (P^2/2m)} e^{-i \Delta t V(Q)} | q_1 \rangle = \\ &= \left( \frac{me^{-i\pi/2}}{2\pi \Delta t} \right)^{1/2} \exp \left\{ i \left[ \frac{m}{2} \frac{(q_2 - q_1)^2}{\Delta t} - \Delta t V(q_1) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (9.5)$$

Мы видим, что эта процедура является последовательной. При  $|q_2 - q_1| \gg (\hbar \Delta t/m)^{1/2}$  амплитуда подавляется сильными осцилляциями таким образом, что поправочные члены оказываются исчезающе малыми при условии, что  $|V'/V| (\hbar \Delta t/m)^{1/2} \ll 1$ , где  $V'$  — производная потенциала. Это можно использовать для получения более симметричной формы записи, например заменяя  $V(q_1)$  на  $(1/2)[V(q_1) + V(q_2)]$ .

Основываясь на выражении (9.5), можно рассуждать следующим образом. Величина  $(q_2 - q_1)/\Delta t$  является аналогом скорости  $\dot{q}$ , а выражение в показателе экспоненты сводится к  $i \Delta t L(q, \dot{q})$ , где  $L(q, \dot{q})$  — функция Лагранжа:

$$L(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} m \dot{q}^2 - V(q). \quad (9.6)$$

Более точно, пусть  $q(t')$  — траектория, проходящая от  $q_1$  до  $q_2$  в течение интервала времени  $(t, t + \Delta t)$  согласно классической механике, т. е. в соответствии с принципом наименьшего действия. Как мы только что видели, при  $\Delta t \rightarrow 0$  ядро дает заметный вклад только для значений  $q_2$ , лежащих вблизи  $q_1$ , в области порядка  $(\Delta t/m)^{1/2}$ . Таким образом, фаза амплитуды перехода эквивалентна действию

$$I(2, 1) = \int_{q_1(t)}^{q_2(t+\Delta t)} dt' L(q, \dot{q}), \quad (9.7)$$

вычисленному вдоль классической траектории, проходящей от точки  $(q_1, t)$  до  $(q_2, t + \Delta t)$ . Эта траектория почти совпадает с прямолинейным путем

$$q(t') = \left( 1 + \frac{t-t'}{\Delta t} \right) q_1 + \frac{t'-t}{\Delta t} q_2.$$

Следовательно, можно написать

$$I(2, 1) \approx \frac{m}{2} \frac{(q_2 - q_1)^2}{\Delta t} - \int_t^{t+\Delta t} dt' V[q(t')] \approx \frac{m}{2} \frac{(q_2 - q_1)^2}{\Delta t} - \Delta t V(q_1) \quad (9.8)$$

и

$$\langle q_2(t + \Delta t) | q_1(t) \rangle \approx \left( \frac{me^{-i\pi/2}}{2\pi \Delta t} \right)^{1/2} e^{iI[q_2(t+\Delta t), q_1(t)]}. \quad (9.9)$$

В пределе  $\Delta t \rightarrow 0$  эта величина стремится к  $\delta(q_2 - q_1)$ .

Для конечного промежутка времени в силу принципа суперпозиции амплитуда запишется в виде

$$\langle q_f, t_f | q_i, t_i \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \int \prod_{p=1}^{n-1} dq_p \prod_{p=0}^{n-1} \langle q_{p+1}, t_{p+1} | q_p, t_p \rangle, \quad (9.10)$$

$$t_p = t_i + \frac{p}{n} (t_f - t_i), \quad t_0 \equiv t_i, \quad t_n \equiv t_f;$$

$$\langle q_f, t_f | q_i, t_i \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \int \prod_{p=1}^{n-1} dq_p \left[ \frac{n m e^{-i\pi/2}}{2\pi (t_f - t_i)} \right]^{n/2} \exp \left[ i \int_{t_i}^{t_f} dt L(q, \dot{q}) \right]. \quad (9.11)$$

Фактически оказывается, что исходная фаза является суммой вида

$$I = I(n, n-1) + I(n-1, n-2) + \dots + I(1, 0),$$

т. е. действие вычисляется вдоль ломаной линии, показанной на рис. 9.1. Устремляя интервал  $\Delta t = (t_f - t_i)/n$  к нулю, можно получить действие вдоль произвольной траектории. Определить точно

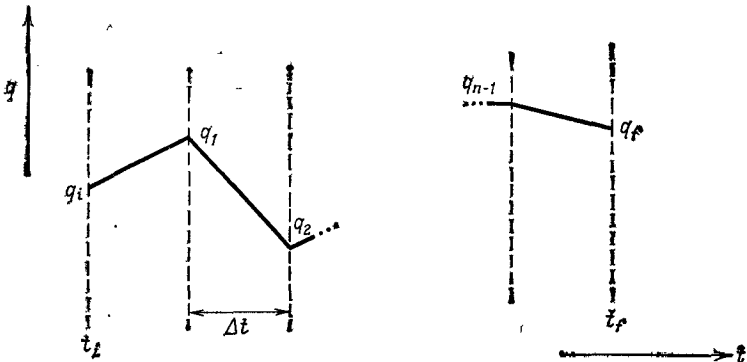


РИС. 9.1. Ломаный путь интегрирования.

набор функций  $q(t)$ , которые дают существенный вклад в этом пределе, является нетривиальной математической задачей. В данном случае достаточно гладкие потенциалы  $V(q)$  представляют собой так называемые функции Липшица порядка  $1/2$ . Это означает, что величина  $|q(t') - q(t)|$  ограничена постоянной, умноженной на  $|t' - t|^{1/2}$ . Читателя, интересующегося методическими подробностями, мы отсылаем к соответствующей литературе. Те же, кого интересуют физические приложения, могут без опасений продвигаться вперед и извлечь удивительно много информации из формул типа (9.11), причем нет необходимости более подробно анализировать предельный переход  $n \rightarrow \infty$ .

Мы будем использовать краткое обозначение

$$\langle q_f, t_f | q_i, t_i \rangle = \int \mathcal{D}(q) \exp \left[ i \int_{t_i}^{t_f} dt L(q, \dot{q}) \right]. \quad (9.12)$$

«Мера» на функциональном пространстве траекторий  $q(t)$  обозначается через  $\mathcal{D}(q)$ , она включает произведение нормировочных множителей  $(me^{-i\pi/2}/2\pi \Delta t)^{1/2}$ , а концы траектории  $q(t)$  фиксируются граничными условиями  $q(t_i) = q_i, q(t_f) = q_f$ . Существенное свойство континуальных интегралов отражает принцип суперпозиции. Оно состоит в том, что, если  $t$  принадлежит интервалу  $t_i, t_f$ , должно выполняться равенство

$$\int \mathcal{D}(q) e^{iI(t, \hbar)} = \int dq(t) \int \mathcal{D}(q) e^{iI(t, \hbar)} \int \mathcal{D}(q) e^{iI(t, \hbar)}. \quad (9.13)$$

Если в этих формулах восстановить  $\hbar$ , то подынтегральное выражение примет вид  $e^{iI/\hbar}$ . Переход к классическому пределу  $\hbar \rightarrow 0$  включает, естественно, вычисление интеграла по путям методом стационарной фазы. При этом классические траектории соответствуют экстремуму действия. Такая формулировка квантовой механики приводит, следовательно, непосредственным образом к динамическому принципу классической механики как предельному случаю. Если классическая траектория, соединяющая  $q_i$  с  $q_f$ , является единственной, то естественно ожидать, что с точностью до нормировочного множителя

$$\langle f | i \rangle \xrightarrow{\hbar \rightarrow 0} e^{(i/\hbar) I(f, \hbar)}.$$

Таким образом, квантовомеханическое описание можно интерпретировать как учет флуктуаций около этой классической траектории.

Математические тонкости, связанные с рассматриваемым формализмом, проистекают из того факта, что „мера“  $\mathcal{D}(q)$  является комплексной, а подынтегральное выражение представляет собой осциллирующую функцию. Это наводит на мысль, что евклидова теория, получаемая с помощью поворота Вика к мнимому времени, может оказаться объектом, изучение которого с математической точки зрения более простое. В евклидовой теории входят матричные элементы оператора  $e^{-Hi}$ , что соответствует переходу от уравнения Шредингера к уравнению теплопроводности или диффузии. Фактически эта проблема была рассмотрена Винером, который впервые ввел континуальные интегралы в математике. В итоге мы получили ответ на вопрос, сформулированный в названии данного раздела, установив, что классическое действие входит в квантовомеханические амплитуды как показатель экспоненты в весовой функции траекторий в континуальных интегралах.

Формализм можно обобщить на матричные элементы операторов. При этом мы воспроизведем квантовомеханический принцип действия Швингера. Предположим, например, что нам нужно вычислить матричный элемент оператора  $\hat{O}$  в момент времени  $t$ ,

промежуточный между  $t_i$  и  $t_f$ :

$$\begin{aligned} \langle q_f, t_f | \mathcal{G}(t) | q_i, t_i \rangle &= \langle q_f | e^{-iH(t_f-t)} \mathcal{G} e^{-iH(t-t_i)} | q_i \rangle = \\ &= \int dq' dq'' \int \mathcal{D}(q) e^{iI(q_f, t_f; q', t)} \langle q'' | \mathcal{G} | q' \rangle \int \mathcal{D}(q) e^{iI(q', t; q_i, t_i)}. \end{aligned}$$

Для простоты предположим, что оператор  $\mathcal{G}$  является диагональным в  $q$ -представлении:

$$\langle q'' | \mathcal{G} | q' \rangle = \mathcal{G}(q') \delta(q'' - q').$$

Тогда предыдущее выражение можно символически записать в виде

$$\langle q_f, t_f | \mathcal{G}(t) | q_i, t_i \rangle = \int \mathcal{D}(q) e^{iI(f, i)} \mathcal{G}[q(t)]. \quad (9.14)$$

Этот результат можно обобщить на хронологическое произведение операторов

$$\mathcal{G}_1(t_1) \mathcal{G}_2(t_2) \dots, \text{ причем } t_1 \geq t_2 \geq \dots$$

Если все эти операторы в  $q$ -представлении диагональны, то мы имеем

$$\langle q_f, t_f | \mathcal{G}_1(t_1) \mathcal{G}_2(t_2) \dots | q_i, t_i \rangle = \int \mathcal{D}(q) e^{iI(f, i)} \mathcal{G}_1[q(t_1)] \mathcal{G}_2[q(t_2)] \dots \quad (9.15)$$

Используя приведенные выше выражения, можно изучить последствия инфинитезимального изменения в динамике между моментами времени  $t_i$  и  $t_f$  (например, небольшого изменения потенциала или граничных условий). Соответствующее изменение амплитуды перехода можно записать в виде

$$\delta \langle q_f, t_f | q_i, t_i \rangle = i \int \mathcal{D}(q) e^{iI(f, i)} \delta I(f, i).$$

Это соотношение по форме совпадает с выражениями (9.14) и (9.15), записанными для оператора  $\delta I$ . Последний может зависеть от промежуточных моментов времени, так что в общем случае мы имеем

$$\delta \langle q_f, t_f | q_i, t_i \rangle = i \langle q_f, t_f | \delta I | q_i, t_i \rangle. \quad (9.16)$$

Данное выражение можно использовать как инфинитезимальный эквивалент континуального интеграла. Например, если вариация является результатом перехода к более позднему моменту времени для конечного состояния, т. е. перехода от  $t_f$  к  $t_f + \delta t_f$ , при котором  $\delta I = -H \delta t$ , то формула (9.16) приводит к уравнению Шредингера в виде

$$\delta \langle q_f, t_f | q_i, t_i \rangle = -i \langle q_f, t_f | H(t_f) | q_i, t_i \rangle \delta t_f.$$

Изучим соотношение (9.11) на примере гармонического осциллятора

$$V(Q) = \frac{m\omega^2}{2} Q^2 \quad (9.17)$$

с частотой  $\omega$  и уровнями энергии  $E_n = (n + 1/2)\omega$ .

Применим здесь выражение (9.11). Для любого малого интервала  $(t, t + \Delta t)$  произвольный путь можно аппроксимировать прямолинейным отрезком таким образом, что соответствующее приращение действия запишется в виде

$$\Delta I(2, 1) = \frac{m}{2} \left[ \frac{(q_2 - q_1)^2}{\Delta t} - \omega^2 \Delta t \frac{q_2^2 + q_2 q_1 + q_1^2}{3} \right].$$

Положим  $t = t_f - t_i$ . Мы находим

$$\langle f | i \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \int \prod_{p=1}^{n-1} dq_p \left( \frac{nme^{-t\pi/2}}{2\pi i t} \right)^{n/2} \times \\ \times \exp \left\{ i \frac{m}{2} \sum_{p=1}^n \left[ \frac{n}{t} (q_p - q_{p-1})^2 - \frac{\omega^2 t}{3n} (q_p^2 + q_p q_{p-1} + q_{p-1}^2) \right] \right\}. \quad (9.18)$$

Нам нужно проинтегрировать экспоненту от квадратичной формы  $e^{i(m/2)qMq}$ , где  $q$  обозначает набор величин  $q_0 \equiv q_i, q_1, \dots, q_{n-1}, q_n \equiv q_f$ , а матрица  $M$  такова, что

$$M_{00} = M_{nn} = \frac{n}{t} - \frac{\omega^2}{3n} t, \\ M_{k, k} = 2 \left( \frac{n}{t} - \frac{\omega^2 t}{3n} \right), \\ M_{k, k+i} = M_{k+i, k} = - \left( \frac{n}{t} + \frac{\omega^2 t}{6n} \right), \quad 0 \leq k \leq n-1.$$

Все остальные матричные элементы равны нулю. Переменными интегрирования являются  $q_1, \dots, q_{n-1}$ . Если  $N$  представляет собой матрицу, полученную из матрицы  $M$  вычеркиванием в ней строк и столбцов с индексами 0 и  $n$ , то имеет место равенство

$$qMq = M_{00}(q_0^2 + q_n^2) + 2M_{01}(q_0 q_1 + q_{n-1} q_n) + \sum_{i,j=1}^{n-1} q_j N_{ji} q_i.$$

Используя классический метод вычисления гауссовых интегралов, получаем

$$\int d^{n-1}q e^{i(m/2)qNq} = \left( \frac{2\pi}{m} e^{i\pi/2} \right)^{(n-1)/2} (\det N)^{-1/2}.$$

В показателе экспоненты линейные члены учитываются с помощью трансляций, что дает

$$\langle f | i \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{nme^{-i\pi/2}}{2\pi i t} \right)^{n/2} \left( \frac{2\pi e^{i\pi/2}}{m} \right)^{(n-1)/2} (\det N)^{-1/2} \times \\ \times \exp \left\{ \frac{im}{2} [M_{00}(q_0^2 + q_n^2) - M_{01}^2 (N_{11}^{-1} q_0^2 + N_{n-1, n-1}^{-1} q_n^2 + 2N_{1, n-1}^{-1} q_0 q_n)] \right\}.$$

Определяя величину  $a$  в виде

$$a = \frac{1}{2} \frac{1 + \omega^2 t^2 / 6n^2}{1 - \omega^2 t^2 / 3n^2},$$

детерминант матрицы  $N$  можно записать следующим образом:

$$\det N = 2^{n-1} \left( \frac{n}{t} - \frac{\omega^2 t}{3n} \right)^{n-1} \det_{n-1} \begin{vmatrix} 1 & -a & 0 & \dots \\ -a & 1 & -a & \dots \\ 0 & -a & 1 & -a & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{vmatrix}.$$

Детерминант, входящий в правую часть этого выражения, обозначим через  $I_{n-1}(a)$ . При фиксированном  $a$  он удовлетворяет рекуррентному соотношению

$$I_p(a) = I_{p-1}(a) - a^2 I_{p-2}(a), \quad I_0(a) = I_1(a) = 1,$$

решение которого имеет вид

$$\begin{pmatrix} I_p(a) \\ I_{p-1}(a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - a^2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{p-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Диагонализуя  $2 \times 2$ -матрицу, находим

$$I_{n-1}(a) = \frac{\lambda_+^n(a) - \lambda_-^n(a)}{\lambda_+(a) - \lambda_-(a)}, \quad \lambda_{\pm}(a) = \frac{1 \pm t \sqrt{4a^2 - 1}}{2} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{2} e^{\pm i\omega t/n}.$$

Таким образом, при больших  $n$

$$I_{n-1}(a) \sim \frac{n}{2^{n-1}} \frac{\sin \omega t}{\omega t}.$$

Следовательно,

$$\langle f | i \rangle = \left( \frac{m\omega e^{-i\pi/2}}{2\pi \sin \omega t} \right)^{1/2} \times \\ \times \lim_{n \rightarrow \infty} \exp \left\{ \frac{im}{2} [(q_i^2 + q_f^2) (M_{00} - M_{01}^2 N_{11}^{-1}) - 2q_f q_i M_{01}^2 N_{1, n-1}^{-1}] \right\}.$$

При  $\sin \omega t < 0$  последовательный расчет позволяет нам выбрать правильную фазу. Исключим этот случай, полагая  $\omega t < \pi$ . Вычислим теперь величины

$$N_{1,1}^{-1} = \frac{t}{2n(1 - \omega^2 t^2 / 3n^2)} \frac{I_{n-2}(a)}{I_{n-1}(a)} \sim \frac{t}{n} \left( 1 - \frac{\omega t}{n} \operatorname{ctg} \omega t \right) + O(n^{-3}), \\ N_{1, n-1}^{-1} = \frac{t}{2n(1 - \omega^2 t^2 / 3n^2)} \frac{a^{n-2}}{I_{n-1}(a)} \sim \frac{\omega t^2}{n^2 \sin \omega t} + O(n^{-3}).$$

Окончательное выражение

$$\langle f | i \rangle = \left( \frac{m\omega e^{-i\pi/2}}{2\pi \sin \omega t} \right)^{1/2} \exp \left\{ \frac{im\omega}{2} \left[ (q_i^2 + q_f^2) \operatorname{ctg} \omega t - \frac{2q_f q_i}{\sin \omega t} \right] \right\}, \quad (9.19)$$

безусловно, совпадает с результатом, полученным традиционными способами. Интересно отметить, что в данном частном случае коэффициент перед экспонентой равен значению действия для реальной классической траектории на конечном промежутке времени. Это является характерным свойством квадратичных гамильтонианов.

В качестве второго упражнения читатель может применить этот метод к случаю, когда зависящий от времени гамильтониан описывает одномерное движение частицы под воздействием внешней силы:

$$H = \frac{P^2}{2m} - QF(t). \quad (9.20)$$

Соответствующая амплитуда запишется в виде

$$\langle f | i \rangle_F = \left[ \frac{me^{-i\pi/2}}{2\pi(t_f - t_i)} \right]^{1/2} e^{iI(f, i)}, \quad (9.21)$$

где  $I(f, i)$  вновь обозначает действие, вычисленное вдоль классической траектории:

$$I(f, i) = \frac{m}{2} \frac{(q_f - q_i)^2}{t_f - t_i} + \int_{t_i}^{t_f} dt F(t) \left( q_f \frac{t - t_i}{t_f - t_i} + q_i \frac{t_f - t}{t_f - t_i} \right) + \frac{1}{2m} \int_{t_i}^{t_f} \int_{t_i}^{t_f} dt' dt'' F(t') \left[ \frac{(t' - t_i)(t'' - t_i)}{t_f - t_i} - \text{Inf}(t' - t_i, t'' - t_i) \right] F(t'') \quad (9.22)$$

Выражение  $G(t', t'') = t't''/T - \text{Inf}(t', t'')$  является симметричной функцией Грина классической задачи, описываемой уравнением  $\ddot{q} = F(t)/m$ , с граничными условиями  $G(0, t'') = G(T, t'') = 0$ , которую мы уже рассматривали в гл. 1 (см т. 1)

Из выражения, аналогичного (9.16), следует

$$\frac{\delta}{i\delta F(t)} \langle f | i \rangle_F = \langle f | Q(t) | i \rangle_F. \quad (9.23)$$

Эта формула позволяет нам дать алгебраическое определение амплитуды перехода для произвольного гамильтониана вида (9.2). В данном случае можно записать

$$\int \mathcal{D}(q) \exp \left\{ i \int_{t_i}^{t_f} dt \left[ \frac{mq^2}{2} - V(q) \right] \right\} = \exp \left\{ -i \int_{t_i}^{t_f} dt V \left[ \frac{\delta}{i\delta F(t)} \right] \right\} \langle f | i \rangle_F |_{F=0}. \quad (9.24)$$

Если здесь экспоненциальный оператор разложить в степенной ряд и построить теорию возмущений, то формальное выражение (9.24) принимает операторную форму

Все приведенные выше рассуждения можно без труда обобщить на любое конечное число степеней свободы

Рассмотрим теперь кратко более общий вывод ядра оператора эволюции (9.12). Идея состоит в использовании обоих базисов  $|q\rangle$  и  $|p\rangle$  в гильбертовом пространстве. Предположим, что смешанный матричный элемент гамильтониана можно записать в виде

$$\langle p | H | q \rangle = h(p, q) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-ipq}. \quad (9.25)$$

«Классическое» значение  $h(p, q)$  равно квантовому оператору  $H$ , упорядоченному таким образом, что, после того как мы заменим  $c$ -числа операторами, величины  $P$  расположатся слева от  $Q$ . В случае когда гамильтониан имеет вид (9.2), это не приведет к каким-либо затруднениям. Для бесконечно малого временного интервала  $\Delta t$  получаем из (9.25) следующее регулярное приближение:

$$\langle p | e^{-i\Delta t H} | q \rangle \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-ipq - i\Delta t h(p, q)}.$$

Таким образом, записывая выражение

$$\begin{aligned} \langle q_f, t_f | q_i, t_i \rangle &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int \prod_{s=1}^n dp_s \prod_{r=1}^{n-1} dq_r \langle q_n | p_n \rangle \langle p_n | e^{-itH/n} | q_{n-1} \rangle \dots \\ &\dots \langle q_1 | p_1 \rangle \langle p_1 | e^{-itH/n} | q_0 \rangle, \end{aligned}$$

где, как обычно,  $q_0 \equiv q_i$ ,  $q_n \equiv q_f$ ,  $t = t_f - t_i$ , мы получаем

$$\begin{aligned} \langle q_f, t_f | q_i, t_i \rangle &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int \frac{\prod_{s=1}^n dp_s \prod_{r=1}^{n-1} dq_r}{(2\pi)^n} \times \\ &\times \exp \left\{ i \left[ p_n (q_n - q_{n-1}) + \dots + p_1 (q_1 - q_0) - \frac{t}{n} h(p_n, q_{n-1}) - \dots - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{t}{n} h(p_1, q_0) \right] \right\} = \\ &= \int \mathcal{D}(p, q) \exp \left\{ i \int_{t_i}^{t_f} dt [p\dot{q} - h(p, q)] \right\}. \quad (9.26) \end{aligned}$$

Разумеется, последнее выражение носит символический характер. Заметим, что интегрирование производится по одной дополнительной переменной  $p$  таким образом что граничные условия содержат только  $q_i$  и  $q_f$ . В подынтегральном выражении мы узнаем классическое действие

$$I(f, i) = \int_{t_i}^{t_f} dt [p\dot{q} - h(p, q)], \quad (9.27)$$

записанное с помощью канонических переменных  $p$  и  $q$ . Если зависимость  $h(p, q)$  от  $p$  является, как обычно, квадратичной, то интеграл по  $p$  сводится к интегралу Гаусса. Выполняя это интегрирование, (9.26) можно свести к (9.12)

Данный формализм позволяет также изучить проблему рассеяния. Для простоты ограничимся рассмотрением одномерного короткодействующего потенциала. В соответствии с этим для больших значений времени эволюция системы сводится к свободной, отвечающей гамильтониану  $H_0$ , а  $S$ -матрица получается как предел

$$S = \lim_{\substack{t_f \rightarrow \infty \\ t_i \rightarrow -\infty}} e^{i t_f H_0} e^{-i (t_f - t_i) H} e^{-i t_i H_0}. \quad (9.28)$$



Ее матричные элементы между состояниями  $\psi_f$  и  $\psi_i$  запишутся в виде

$$\langle \psi_f | S | \psi_i \rangle = \lim \int dq_f dq_i \psi_f^*(q_f, t_f) \langle q_f, t_f | q_i, t_i \rangle \psi_i(q_i, t_i). \quad (9.29)$$

В наших обозначениях

$$\psi(q) = \int \frac{dp}{\sqrt{2\pi}} e^{ipq} \tilde{\psi}(p)$$

и  $\psi(q, t)$  определяется как решение свободного уравнения Шредингера, такое, что  $\psi(q, 0) = \psi(q)$ , т. е.

$$\psi(q, t) = \int \frac{dp}{\sqrt{2\pi}} e^{i(pq - p^2 t/2m)} \tilde{\psi}(p). \quad (9.30)$$

При  $|t| \rightarrow \infty$  величину  $\psi(q, t)$  можно оценить методом стационарной фазы:

$$\psi(q, t) \sim \left( \frac{m}{|t|} \right)^{1/2} e^{-i\pi/4 \operatorname{sign}(t) + imq^2/2t} \tilde{\psi}\left(\frac{mq}{t}\right). \quad (9.31)$$

Это выражение можно подставить в (9.29), в котором мы заменяем переменные по формулам  $q_f = p_f t_f / m$ ,  $q_i = p_i t_i / m$ , что дает

$$\langle \psi_f | S | \psi_i \rangle = \lim \int dp_f dp_i \left( \frac{e^{-i\pi} |t_f t_i|^{1/2}}{m^2} \right)^{1/2} \times \\ \times \tilde{\psi}_f^*(p_f) e^{-ip_f^2 t_f/2m} \left\langle \frac{p_f}{m} t_f, t_f \middle| \frac{p_i}{m} t_i, t_i \right\rangle e^{ip_i^2 t_i/2m} \tilde{\psi}_i(p_i). \quad (9.32)$$

Можно проверить этот результат для тривиального случая  $V=0$ ,  $S=1$ . В случае когда континуальный интеграл используется для того, чтобы построить выражение для матричного элемента оператора эволюции, соотношение (9.32) допускает интересную интерпретацию. В самом деле, из этого соотношения следует, что интеграл включает пути, которые асимптотически ведут себя как свободные траектории:

$$\begin{aligned} t \rightarrow \infty, & \quad q(t) \rightarrow \frac{p_f t}{m}, \\ t \rightarrow -\infty, & \quad q(t) \rightarrow \frac{p_i t}{m}. \end{aligned}$$

Разумеется, в случае одномерного движения из закона сохранения энергии следует, что  $p_f = \pm p_i$ , однако этот формализм легко обобщается на более интересные многомерные случаи.

В качестве приложения рассмотрим приближение эйконала для трехмерного рассеяния на короткодействующем потенциале  $V(r)$  при больших энергиях и малых передачах импульса.

Мы исходим из представления оператора эволюции

$$\langle \mathbf{r}_2, t_2 | \mathbf{r}_1, t_1 \rangle = \int \mathcal{D}[\mathbf{r}(t)] \exp \left\{ i \int_{t_1}^{t_2} dt \left[ \frac{1}{2} m \dot{\mathbf{r}}^2 - V[\mathbf{r}(t)] \right] \right\} \quad (9.33)$$

В свободном случае ( $V=0$ ) это представление сводится к следующему:

$$\left[ \frac{me^{-i\pi/2}}{2\pi(t_2-t_1)} \right]^{3/2} e^{im(\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1)^2/2(t_2-t_1)}.$$

В тех физических условиях, которые нас интересуют, основной вклад в континуальный интеграл вносят классические экстремальные траектории, которые для больших прицельных параметров можно аппроксимировать прямыми линиями:

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_1 + \frac{t-t_1}{t_2-t_1} (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1). \quad (9.34)$$

Проводя факторизацию закона сохранения энергии и осуществляя переход с помощью преобразования Фурье в импульсное пространство, нетрудно получить следующее выражение для матричных элементов оператора перехода  $T=(S-1)/i$ :

$$\langle \mathbf{p} - \frac{\mathbf{q}}{2} | T | \mathbf{p} + \frac{\mathbf{q}}{2} \rangle \approx \frac{i|\mathbf{p}|}{m} \int \frac{d^2\mathbf{b}}{(2\pi)^2} e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{b}} \left\{ \exp \left[ -i \int_{-\infty}^{+\infty} dt V \left( \mathbf{b} + \frac{\mathbf{p}t}{m} \right) \right] - 1 \right\},$$

$$\mathbf{p}^2 \rightarrow \infty, \quad \frac{\mathbf{q}^2}{\mathbf{p}^2} \rightarrow 0; \quad (9.35)$$

здесь  $\mathbf{b}$  ( $|\mathbf{b}|$  — прицельный параметр) и  $\mathbf{q}$  — двумерные векторы в плоскости, перпендикулярной среднему импульсу.

Это приближение было обобщено на релятивистский случай. Рассмотрим амплитуду рассеяния, соответствующую набору лестничных диаграмм с перекрестным обменом. В этих диаграммах происходит обмен скалярными бозонами с массой  $\mu$  и константой связи  $g$  (рис. 9.2). Данную амплитуду можно

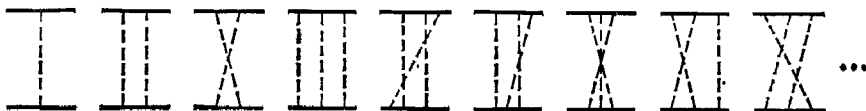


РИС. 9.2. Лестничные диаграммы с перекрестным обменом.

представить в виде континуального интеграла, аналогичного (9.32) и (9.33). В результате получается следующее выражение для амплитуды при больших  $s$  (квадрат энергии в системе центра масс) и малых передачах импульса  $t = -q^2$ :

$$T(s, t) \approx -2s \int d^2\mathbf{b} e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{b}} \left[ \exp \left( \frac{ig^2}{4\pi s} \int \frac{d^2\mathbf{k}}{2\pi} \frac{e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{b}}}{k^2 + \mu^2} \right) - 1 \right]. \quad (9.36)$$

Читатель может определить, как ведет себя выражение (9.36) при  $s \rightarrow \infty$  и обобщить данный результат на случай электродинамики, где соответствующие амплитуды имеют полюсы, отвечающие связанным состояниям с правильным нерелятивистским пределом (см. разд. 2.3.2 в т. 1 настоящей книги).

### 9.1.2. Траектории в пространстве Баргмана — Фока

До сих пор континуальные интегралы рассматривались либо в конфигурационном [(9.12)], либо в фазовом пространстве [(9.26)]. В обоих случаях граничные условия зависели от  $q$  или  $p$  на обоих пределах интегрирования. Введем теперь новый тип траекторий, подходящий для обобщения на теорию поля. Он в сильной степени инспирирован примером гармонического осциллятора, поскольку поле можно рассматривать как ансамбль взаимодействующих осцилляторов. Континуальные интегралы этого типа можно обобщить без затруднений на случай фермионных систем.

Будем использовать когерентные состояния Баргмана и Фока, которые введены в гл. 3 (см. т. 1 настоящей книги). Это дает представление операторов уничтожения и рождения

$$a = \frac{Q + iP}{\sqrt{2}}, \quad a^\dagger = \frac{Q - iP}{\sqrt{2}}, \quad [a, a^\dagger] = 1 \quad (9.37)$$

в пространстве аналитических функций комплексной переменной, которую обычно обозначают буквой  $\bar{z}$  с чертой над ней как комплексно-сопряженную величину  $\bar{\alpha}$  или  $\bar{z}$ . Причина такого выбора станет ясной из дальнейшего изложения. Если в исходной задаче об осцилляторе фигурировала частота  $\omega$ , то, прежде чем вводить  $a$  и  $a^\dagger$  в соответствии с формулой (9.37), можно выполнить каноническое преобразование  $Q \rightarrow Q\omega^{-1/2}$ ,  $P \rightarrow P\omega^{1/2}$ . Аналитические функции, которые мы рассматривали, порождают гильбертово пространство со скалярным произведением

$$\langle g | f \rangle = \int \frac{dz d\bar{z}}{2i\pi} e^{-z\bar{z}} \bar{g}(z) f(\bar{z}), \quad (9.38)$$

и мы имеем соответствие

$$a \rightarrow \frac{\partial}{\partial \bar{z}}, \quad a^\dagger \rightarrow \bar{z}, \quad (9.39)$$

которое приводит к паре сопряженных операторов. Ортонормированный базис в этом пространстве имеет вид

$$f_n(\bar{z}) = \frac{\bar{z}^n}{\sqrt{n!}}. \quad (9.40)$$

Унитарное преобразование отображает данный базис на более привычную систему квадратично-интегрируемых функций конфигурационной переменной  $q$ . Функциям  $f_n$  соответствуют известные волновые функции осциллятора, а именно функции Эрмита. Разумеется,  $f_n$  являются собственными функциями оператора  $H = a^\dagger a = \bar{z} \partial / \partial \bar{z}$  с собственным значением  $n$ .

Обычно оператор  $A$  характеризуют его матричными элементами  $\langle q' | A | q \rangle$  таким образом, что действие оператора  $A$  на вектор состояния  $\psi$  дает волновую функцию

$$[A\psi](q) = \int dq' \langle q | A | q' \rangle \psi(q').$$

Проведем аналогичное построение в пространстве Баргмана—Фока. Если  $|n\rangle$  обозначает состояние, отвечающее функции  $f_n$ , определяемой выражением (9.40), то можно написать

$$A = \sum_{n, m} |n\rangle A_{n, m} \langle m|, \quad A_{n, m} = \langle n | A | m \rangle. \quad (9.41)$$

Соответственно для любого состояния  $f$  имеем

$$\begin{aligned} \langle \bar{z} | Af \rangle &= [Af](\bar{z}) = \sum_{n, m} \frac{\bar{z}^n}{\sqrt{n!}} A_{n, m} \langle m | f \rangle = \\ &= \sum_{n, m} \int \frac{d\xi d\bar{\xi}}{2\pi i} e^{-\bar{\xi}\xi} \frac{\bar{z}^n}{\sqrt{n!}} A_{n, m} \frac{\xi^m}{\sqrt{m!}} f(\bar{\xi}). \end{aligned} \quad (9.42)$$

Ядро  $A(\bar{z}, \xi)$ , которое естественным образом ассоциируется с  $A$  и обладает тем свойством, что

$$[Af](\bar{z}) = \int \frac{d\xi d\bar{\xi}}{2\pi i} e^{-\bar{\xi}\xi} A(\bar{z}, \xi) f(\bar{\xi}),$$

имеет вид

$$A \rightarrow A(\bar{z}, \xi) = \sum_{n, m} \frac{\bar{z}^n}{\sqrt{n!}} A_{n, m} \frac{\xi^m}{\sqrt{m!}}. \quad (9.43)$$

Для достаточно регулярного оператора  $A$  функция  $A(\bar{z}, \xi)$  является аналитической функцией двух комплексных переменных  $\xi$  и  $\bar{z}$ . Кстати, наш выбор обозначений, в которых аргумент аналитической функции отмечается значком комплексного сопряжения, оправдывается стремлением записать операторы в такой форме.

Для представления (9.43) справедливо следующее правило суперпозиции, вытекающее из ортогональности функций  $f_n$ :

$$A_1 A_2(\bar{z}, \xi) = \int \frac{d\eta d\bar{\eta}}{2\pi i} e^{-\bar{\eta}\eta} A_1(\bar{z}, \eta) A_2(\bar{\eta}, \xi). \quad (9.44)$$

Возвращаясь к выражению (9.41), перепишем его в виде

$$A = \sum_{n, m} \frac{a^{\dagger n}}{\sqrt{n!}} |0\rangle A_{n, m} \langle 0| \frac{a^m}{\sqrt{m!}}.$$

Напомним, что проектор на основное состояние  $|0\rangle\langle 0|$  можно выразить через нормальное произведение следующим образом:

$$|0\rangle\langle 0| = :e^{-a^\dagger a}:. \quad (9.45)$$

Следовательно,

$$A = \sum_{n,m} \frac{A_{n,m}}{\sqrt{n! m!}} : a^{\dagger n} e^{-a^{\dagger} a} a^m : = \sum_{n,m} A_{n,m}^N \frac{a^{\dagger n} a^m}{\sqrt{n! m!}}. \quad (9.46)$$

Данная нормальная форма подсказывает определение нормального ядра, представляющего оператор  $A$ . Обозначим это ядро через  $A^N(\bar{z}, z)$ , чтобы отличить его от ядра, которое использовалось выше. Величины  $\bar{z}$  и  $z$  рассматриваются как независимые переменные:

$$A^N(\bar{z}, z) = \sum_{n,m} \frac{\bar{z}^n}{\sqrt{n!}} A_{n,m}^N \frac{z^m}{\sqrt{m!}}, \quad A = : A^N(a^{\dagger}, a) :. \quad (9.47)$$

Чтобы получить соотношение между  $A^N(\bar{z}, z)$  и  $A(\bar{z}, z)$ , можно либо использовать (9.46), либо заметить, что в гильбертовом пространстве целых функций имеется репродуцирующее ядро, аналогичное  $\delta$ -функции Дирака, вида

$$\begin{aligned} f(\bar{z}) &= \sum_n \frac{\bar{z}^n}{\sqrt{n!}} \langle n | f \rangle = \sum_n \int \frac{d\xi d\bar{\xi}}{2\pi i} e^{-\bar{\xi}\xi} \frac{\bar{z}^n \xi^n}{n!} f(\bar{\xi}) = \\ &= \int \frac{d\xi d\bar{\xi}}{2\pi i} e^{-\bar{\xi}\xi + \bar{z}\bar{\xi}} f(\bar{\xi}). \end{aligned} \quad (9.48)$$

В случае оператора  $a^{\dagger n} a^m$ ,

$$\begin{aligned} [a^{\dagger n} a^m f](\bar{z}) &= \bar{z}^n \frac{d^m}{dz^m} f(\bar{z}) = \int \frac{d\xi d\bar{\xi}}{2\pi i} e^{-\bar{\xi}\xi + \bar{z}\bar{\xi}} \bar{z}^n \frac{d^m}{d\xi^m} f(\bar{\xi}) = \\ &= \int \frac{d\xi d\bar{\xi}}{2\pi i} e^{-\bar{\xi}\xi + \bar{z}\bar{\xi}} \bar{z}^n \xi^m f(\bar{\xi}) \end{aligned}$$

имеем

$$A(\bar{z}, \xi) = e^{\bar{z}\xi} A^N(\bar{z}, \xi). \quad (9.49)$$

Благодаря линейности это свойство распространяется на произвольный оператор.

Исходя из соотношений (9.44) и (9.49), можно вычислить ядро, соответствующее оператору эволюции квантовомеханической задачи. Предположим, что гамильтониан задан в нормальной форме через операторы  $a^{\dagger}$  и  $a$ . Его нормальное ядро получается, если вместо операторов рождения и уничтожения подставить комплексные числа. Обозначим это ядро через  $h(\bar{z}, \xi)$ . Для бесконечно малого интервала времени  $\Delta t$  выполняется следующее приближенное соотношение:

$$U(\bar{z}, \xi, \Delta t) \approx e^{\bar{z}\xi - i \Delta t h(\bar{z}, \xi)}, \quad (9.50)$$

которое сводится к ядру единичного оператора при  $\Delta t \rightarrow 0$ . Повторное применение соотношений (9.44) на конечном интервале приводит к континуальному интегралу

$$\begin{aligned}
 U(\bar{z}_f, t_f; z_i, t_i) &= \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int \prod_{k=1}^{n-1} \frac{dz_k d\bar{z}_k}{2\pi i} \exp \left[ \sum_{k=0}^{n-1} \bar{z}_{k+1} z_k - \sum_{k=1}^{n-1} \bar{z}_k z_k + \bar{z}_1 z_0 - \right. \\
 &\quad \left. - i \frac{t_f - t_i}{n} \sum_{k=0}^{n-1} h(\bar{z}_{k+1}, z_k) \right]. \quad (9.51)
 \end{aligned}$$

Выражение, которое получается в пределе, обозначим символически следующим образом:

$$\begin{aligned}
 U(\bar{z}_f, t_f; z_i, t_i) &= \\
 &= \int \mathcal{D}(z, \bar{z}) \exp \left\{ \frac{\bar{z}_f z_f + \bar{z}_i z_i}{2} + i \int_{t_i}^{t_f} dt \left[ \frac{\dot{\bar{z}} z - \bar{z} \dot{z}}{2i} - h(\bar{z}, z) \right] \right\}. \quad (9.52)
 \end{aligned}$$

Здесь переменные интегрирования  $z(t_f)$  и  $\bar{z}(t_i)$  остаются независимыми от величин  $\bar{z}(t_f)$  и  $z(t_i)$ , которые фиксированы граничными условиями.

Мы видим опять, что выражение, стоящее в показателе экспоненты в (9.52), есть не что иное, как классическое действие. В самом деле, форму  $p dq$ , точнее  $(1/2)(p dq - q dp)$ , в соответствии с (9.37) можно записать в виде

$$\frac{1}{2} (p dq - q dp) = \frac{1}{2i} (z d\bar{z} - \bar{z} dz), \quad (9.53)$$

откуда следует, что  $z$  и  $\bar{z}$  нужно рассматривать как независимые переменные. Очевидно, что все сказанное выше непосредственно обобщается на гамильтонианы, зависящие от времени и на случай нескольких степеней свободы.

Вычислим оператор эволюции для гармонического осциллятора, на который воздействует зависящая от времени внешняя сила, так что гамильтониан имеет вид

$$H = \omega a^\dagger a - f(t) a^\dagger - \bar{f}(t) (a). \quad (9.54)$$

Здесь  $\bar{f}$  — величина, комплексно-сопряженная по отношению к  $f$ . Как видно из соотношений (9.19) и (9.21), результат должен быть пропорционален  $e^{iI(f, \bar{f})}$ , где  $I(f, \bar{f})$  — действие, вычисленное на экстремальной траектории, удовлетворяющей классическим уравнениям движения

$$\begin{aligned}
 \dot{z} + i[\omega z - f(t)] &= 0, & z(t_i) &= z_i, \\
 \dot{\bar{z}} - i[\omega \bar{z} - \bar{f}(t)] &= 0, & \bar{z}(t_f) &= \bar{z}_f.
 \end{aligned}$$

Решение записывается в виде

$$z(t) = z_i e^{-i\omega(t-t_i)} + i \int_{t_i}^t dt' e^{-i\omega(t-t')} f(t'),$$

$$\bar{z}(t) = \bar{z}_f e^{i\omega(t-t_f)} + i \int_{t_f}^t dt' e^{i\omega(t-t')} \bar{f}(t').$$

Вследствие асимметрии граничных условий эти величины, очевидно, не являются комплексно-сопряженными друг другу. Соответствующий показатель экспоненты в континуальном интеграле вдоль этой траектории дается выражением

$$iI = \frac{1}{2} (\bar{z}_f z_f + \bar{z}_i z_i) + \frac{1}{2} \int_{t_i}^{t_f} dt [\dot{z}\bar{z} - \dot{\bar{z}}z - 2ih(\bar{z}, z, t)] =$$

$$= \bar{z}_f e^{i\omega(t_f-t_i)} z_i + i \int_{t_i}^{t_f} dt [\bar{z}_f e^{-i\omega(t_f-t)} f(t) + \bar{f}(t) e^{-i\omega(t-t_i)} z_i] -$$

$$- \int_{t_i}^{t_f} \int_{t_i}^{t_f} dt dt' \bar{f}(t) e^{-i\omega(t-t')} f(t') \theta(t-t'). \quad (9.55a)$$

Явное вычисление континуального интеграла дает простой результат:

$$U(\bar{z}_f, t_f; z_i, t_i) = e^{iI}. \quad (9.55b)$$

Таким образом, в данном формализме описание осциллятора, находящегося в поле внешней силы, является очень простым. Соответствующее ядро всюду регулярно.

Имеет смысл привести здесь формулу для гауссова интегрирования, которая многократно использовалась в наших вычислениях и является краеугольным камнем при применении континуальных интегралов. Если  $A$  — матрица квадратичной формы, эрмитова часть которой положительна, а  $z$  и  $u$  обозначают векторы-столбцы из комплексных чисел, то

$$\int \prod_1^N \frac{dz_k d\bar{z}_k}{2\pi i} e^{-\bar{z}Az + uz + u\bar{z}} = (\det A)^{-1} e^{\bar{u}A^{-1}u}. \quad (9.56)$$

Заметим, что в правой части показатель экспоненты равен значению показателя экспоненты подынтегрального выражения в точке перевала.

### 9.1.3. Фермионные системы

Поскольку континуальные интегралы демонстрируют тесную связь между классической и квантовой механикой, то априори следует ожидать, что при обобщении этого метода на случай фермионов мы натолкнемся на трудности. К счастью, соответствующая схема в рамках антикоммутиративной алгебры была развита Березиным. Мы уже использовали этот метод в гл. 4 (см. т. 1 настоящей книги).

Будем исходить из двухуровневой системы, описываемой двумя операторами  $a$  и  $a^\dagger$ , удовлетворяющими соотношениям

$$\{a, a^\dagger\} = 1, \quad a^2 = a^{\dagger 2} = 0. \quad (9.57)$$

Попытаемся найти представление для них в гильбертовом пространстве «аналитических функций». Аналогия с бесконечными рядами по  $z$  и  $\bar{z}$ , использованными выше для бозонов, подсказывает следующий ход действий. Рассмотрим ряд с комплексными коэффициентами по двум антикоммутирующим переменным  $\eta$  и  $\bar{\eta}$ , т. е. таким, что

$$\eta\bar{\eta} + \bar{\eta}\eta = 0, \quad \eta^2 = \bar{\eta}^2 = 0. \quad (9.58)$$

Эти ряды сводятся к полиномам вида

$$P(\bar{\eta}, \eta) = p_0 + p_1\bar{\eta} + \bar{p}_1\eta + p_{12}\eta\bar{\eta}. \quad (9.59)$$

Система этих полиномов размерности  $2^2 = 4$  может быть отождествлена с внешней алгеброй двумерного векторного пространства (порожденного однородными полиномами первой степени). Ассоциативное умножение определяется в соответствии с правилами (9.58). Введем также операторы линейного дифференцирования

$$\partial P = \bar{p}_1 + p_{12}\bar{\eta}, \quad \bar{\partial} P = p_1 - p_{12}\eta. \quad (9.60)$$

Действие этих операторов на произвольный моном сводится к опусканию соответственно  $\eta$  (в случае  $\partial$ ) или  $\bar{\eta}$  (в случае  $\bar{\partial}$ ) при условии, что  $\bar{\eta}$  перенесена влево. Во всех остальных случаях дифференцирование дает нуль.

Определим подсистему аналитических функций, удовлетворяющих условию

$$\partial f = 0, \quad (9.61)$$

откуда следует, что  $f$  зависит только от  $\bar{\eta}$ .

Заметим, что справедливы соотношения

$$\partial^2 P = \bar{\partial}^2 P = 0 \quad \text{и} \quad \bar{\partial} \partial P = -\partial \bar{\partial} P = p_{12}.$$



Это означает, что полиномы по операторам дифференцирования имеют ту же структуру, что и исходная антикоммутирующая алгебра. Легко видеть, что  $\partial(P_1 P_2) \neq \partial P_1 P_2 + P_1 \partial P_2$ . Читатель без труда найдет правильную формулу для дифференцирования произведения. Данную конструкцию нетрудно обобщить на случай нескольких степеней свободы. Для  $2n$  степеней свободы внешняя алгебра будет иметь размерность  $2^{2n}$ , а пространство аналитических функций — размерность  $2^n$ .

Возвращаясь к случаю  $n=1$ , запишем аналитическую функцию в виде

$$f = f_0 + f_1 \bar{\eta}$$

и определим скалярное произведение

$$(g, f) = \bar{g} f_0 + \bar{g}_1 f_1. \tag{9.62}$$

Здесь черта над скаляром означает комплексное сопряжение. Можно ли представить это скалярное произведение в виде интеграла, как в бозонном случае? Ответ является утвердительным, если отождествить дифференцирование и интегрирование следующим образом. Определим операцию интегрирования, исходя из условий

$$\int d\bar{\eta} \bar{\eta} = 1, \quad \int d\eta \eta = 1, \quad \int d\bar{\eta} 1 = \int d\eta 1 = 0. \tag{9.63}$$

Благодаря свойству линейности эти условия достаточны, чтобы вычислить интеграл от произвольной функции (9.59). Если мы условимся также, что  $d\eta$  и  $d\bar{\eta}$  антикоммутируют и что правила (9.63) применяются, когда в парах величин  $d\bar{\eta}$  и  $\bar{\eta}$  или  $d\eta$  и  $\eta$  вторая следует за первой, мы увидим, что интегралы и производные действительно совпадают. Таким образом,

$$\int d\eta P = \partial P, \quad \int d\bar{\eta} P = \bar{\partial} P, \quad \int d\bar{\eta} d\eta P = \bar{\partial} \partial P. \tag{9.64}$$

Поэтому интеграл от производной равен нулю ( $\partial^2 = \bar{\partial}^2 = 0$ ). Данная процедура легко распространяется на случай нескольких степеней свободы

Мы можем произвести замену переменных под знаком интеграла. Если ограничиться на время линейными преобразованиями, которые автоматически учитывают структуру (9.58), т. е. имеют вид

$$\begin{pmatrix} \eta \\ \bar{\eta} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \xi \\ \bar{\xi} \end{pmatrix},$$

где  $A$  — несингулярная  $c$ -числовая матрица, то подстановка в любой полином  $P$  дает

$$P(\eta, \bar{\eta}) = Q(\xi, \bar{\xi})$$

и, в частности,

$$\rho_{12} \eta \bar{\eta} = q_{12} \xi \bar{\xi} = (\rho_{12} \det A) \xi \bar{\xi}.$$

В результате мы имеем

$$\int d\bar{\eta} d\eta P(\eta, \bar{\eta}) = \int d\bar{\xi} d\xi (\det A)^{-1} Q(\xi, \bar{\xi}). \quad (9.65)$$

Это правило отличается от обычного в том смысле, что якобиан входит сюда в минус первой степени, поскольку

$$\det A = J \left( \begin{array}{c} \eta, \bar{\eta} \\ \xi, \bar{\xi} \end{array} \right).$$

Необходимо выбрать базис, допускающий определение аналитических функций. Определим комплексное сопряжение как

$$\bar{f}(\eta) = \bar{f}_0 + \bar{f}_1 \eta. \quad (9.66)$$

Мы убеждаемся далее, что скалярное произведение можно записать в виде

$$(g, f) = \int d\bar{\eta} d\eta e^{-\bar{\eta}\eta} \bar{g}(\eta) f(\bar{\eta}), \quad (9.67)$$

аналогичном формуле (9.38) для бозонов. Мы имеем теперь следующее представление для  $a$  и  $a^\dagger$  через пару взаимно сопряженных операторов:

$$a \rightarrow \bar{\partial}, \quad a^\dagger \rightarrow \bar{\eta}. \quad (9.68)$$

Очевидно, что  $a^2 = a^{\dagger 2} = 0$ . Кроме того,

$$a(a^\dagger f) = f_0, \quad a^\dagger(af) = \bar{f}_1 \bar{\eta}.$$

Таким образом, мы имеем

$$aa^\dagger + a^\dagger a = 1,$$

а также

$$(g, af) = \bar{g}_0 f_1, \quad (f, a^\dagger g) = \bar{f}_1 g_0 = \overline{(g, af)}.$$

Вообще говоря, линейному оператору, действующему в пространстве  $\mathcal{H}$  аналитических функций, можно сопоставить некоторое интегральное ядро. Рассмотрим ортонормированные состояния  $|0\rangle$  и  $|1\rangle$ , соответствующие функциям 1 и  $\bar{\eta}$ , такие, что  $a|0\rangle = 0$ ,  $a^\dagger|0\rangle = |1\rangle$ . Запишем выражения

$$\begin{aligned} A &= \sum_{n, m} |n\rangle A_{n, m} \langle m|, \\ (Af)(\bar{\eta}) &= \int d\bar{\xi} d\xi e^{-\bar{\xi}\xi} A(\bar{\eta}, \xi) f(\bar{\xi}), \\ A(\bar{\eta}, \xi) &= \sum_{n, m} \bar{\eta}^n A_{n, m} \xi^m. \end{aligned} \quad (9.69)$$

Как и в случае бозонов, мы представим оператор проектирования на основное состояние в виде

$$|0\rangle\langle 0| =: e^{-a^\dagger a} := 1 - a^\dagger a \quad (9.70)$$

и перепишем  $A$  в нормальной форме:

$$A = \sum_{n, m} A_{n, m} : a^{\dagger n} e^{-a^\dagger a} a^m := \sum_{n, m} A_{n, m}^N a^{\dagger n} a^m. \quad (9.71)$$

Соответствующее нормальное ядро

$$A^N(\bar{\eta}, \eta) = \sum_{n, m} A_{n, m}^N \bar{\eta}^n \eta^m \quad (9.72)$$

связано с ним с помощью соотношения

$$A(\bar{\eta}, \eta) = e^{\bar{\eta}\eta} A^N(\bar{\eta}, \eta). \quad (9.73)$$

Например, ядро единичного оператора равно  $e^{\bar{\eta}\eta}$ , и мы имеем

$$f(\bar{\eta}) = \int d\bar{\xi} d\xi e^{-\bar{\xi}\xi + \bar{\eta}\xi} f(\bar{\xi}), \quad (9.74)$$

тогда как произведение операторов дается выражением

$$A_1 A_2(\bar{\eta}, \eta) = \int d\bar{\xi} d\xi e^{-\bar{\xi}\xi} A_1(\bar{\eta}, \xi) A_2(\bar{\xi}, \eta). \quad (9.75)$$

Аналог формулы (9.56) для интегралов Гаусса имеет вид

$$\begin{aligned} \int \prod_1^n d\bar{\eta}_k d\eta_k \exp \left[ - \sum_{k, l} \bar{\eta}_k A_{kl} \eta_l + \sum_k (\bar{\eta}_k \bar{\xi}_k + \bar{\xi}_k \eta_k) \right] = \\ = \det A \exp \left[ \sum_{k, l} \bar{\xi}_k (A^{-1})_{kl} \bar{\xi}_l \right]. \end{aligned} \quad (9.76)$$

Близкая аналогия со случаем бозонов позволяет записать непосредственно континуальный интеграл для амплитуды перехода. Пусть  $H(a^\dagger, a, t)$  — нормально упорядоченный гамильтониан фермионной системы. Соответствующее нормальное ядро получается подстановкой  $\bar{\eta}, \eta$  вместо  $a^\dagger, a$  в том же порядке. Следовательно, ядро оператора эволюции можно записать в виде

$$\begin{aligned} U(\bar{\eta}_f, t_f; \eta_i, t_i) = \int \mathcal{D}(\bar{\eta}, \eta) \exp \left\{ \frac{\bar{\eta}_f \eta_f + \bar{\eta}_i \eta_i}{2} + \right. \\ \left. + i \int_{t_i}^{t_f} dt \left[ \frac{\dot{\bar{\eta}} \dot{\eta}}{2i} - h(\bar{\eta}, \eta, t) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (9.77)$$

В качестве упражнения рассмотрим движение кванта со спином  $1/2$ , подверженного действию постоянного поля  $B$ , направленного вдоль оси  $z$ . Основное состояние определяется как состояние, отвечающее значению проекции

спина  $S_z = 1/2$ . Гамильтониан имеет вид  $H = \mu B (2a^\dagger a - 1)$ , где  $\mu$  — гиромагнитное отношение. Из выражения (9.77) имеем

$$U(\bar{\eta}_j, t_j; \eta_i, t_i) = \exp \left[ i\mu B (t_j - t_i) + \bar{\eta}_j \eta_i e^{-2i\mu B (t_j - t_i)} \right]. \quad (9.78)$$

Отметим аналогию со случаем гармонического осциллятора. Наше рассмотрение можно обобщить на случай поля, зависящего от времени, включая, в частности, поперечное поле, вращающееся с частотой  $\omega$ .

Замечательным свойством соотношения (9.76) является то, что интеграл от квадратичной формы здесь также определяется (с точностью до множителя) значением на «экстремальной траектории», т. е. значением на траектории, отвечающим стационарному значению показателя экспоненты.

## 9.2. РЕЛЯТИВИСТСКАЯ ФОРМУЛИРОВКА

В данном разделе мы обобщим сформулированный выше подход на случай взаимодействующих полей.

### 9.2.1. Запись $S$ -матрицы и функций Грина через континуальные интегралы

Начнем с изучения хорошо знакомого случая нейтрального скалярного поля, связанного с внешним  $c$ -числовым источником  $j(x)$ . Запишем классическое действие

$$I_0(\varphi, j) = \int d^4x \left[ \frac{1}{2} (\partial\varphi)^2 - \frac{m^2}{2} \varphi^2 + j\varphi \right], \quad (9.79)$$

и квантовомеханический гамильтониан

$$H = \int d^3x \left[ \frac{1}{2} \pi_{\text{ор}}^2 + \frac{1}{2} (\nabla\varphi_{\text{ор}})^2 + \frac{m^2}{2} \varphi_{\text{ор}}^2 - j\varphi_{\text{ор}} \right]. \quad (9.80)$$

Гамильтониан описывает ансамбль квантовых осцилляторов, связанных с различными внешними силами (см. гл. 3 и 4 в т. 1 настоящей книги). В данный момент времени разложение Фурье для поля имеет вид

$$\begin{aligned} \varphi_{\text{ор}}(x) &= \int d\bar{k} [a(k) e^{ik \cdot x} + a^\dagger(k) e^{-ik \cdot x}], \\ \pi_{\text{ор}}(x) &= -i \int d\bar{k} \omega(k) [a(k) e^{ik \cdot x} - a^\dagger(k) e^{-ik \cdot x}]. \end{aligned} \quad (9.81)$$

С учетом (9.81) гамильтониан запишется следующим образом:

$$\begin{aligned} H &= \int d\bar{k} [\omega(k) a^\dagger(k) a(k) - f(t, \mathbf{k}) a^\dagger(k) - \bar{f}(t, \mathbf{k}) a(k)], \\ f(t, \mathbf{k}) &= \int d^3x e^{-ik \cdot x} j(\mathbf{x}, t). \end{aligned} \quad (9.82)$$

В этой записи гамильтониан является диагональным, и мы можем применить формулу (9.55), определяющую ядро оператора эво-

ЛЮЦИИ:

$$\begin{aligned}
 U(\bar{z}_f, t_f; z_i, t_i) = & \exp \left\{ \int d\bar{k} \left[ \bar{z}_f(k) e^{-i\omega(k)(t_f - t_i)} z_i(k) + \right. \right. \\
 & + i \int_{t_i}^{t_f} dt \left[ \bar{z}_f(k) e^{-i\omega(k)(t_f - t)} f(t, \mathbf{k}) + \bar{f}(t, \mathbf{k}) e^{-i\omega(k)(t - t_i)} z_i(k) \right] - \\
 & \left. \left. - \frac{1}{2} \int_{t_i}^{t_f} \int_{t_i}^{t_f} dt dt' \bar{f}(t, \mathbf{k}) e^{-i\omega(k)|t - t'|} f(t', \mathbf{k}) \right\}. \quad (9.83)
 \end{aligned}$$

Если источник выключается при  $|t| \rightarrow \infty$ , то  $S$ -матрица определяется как предел оператора  $e^{it_f H_0} U(t_f, t_i) e^{-it_i H_0}$ , где  $H_0$  получается из  $H$  при  $j=0$ . Для когерентных состояний, таких, которые рассматриваются в нашем случае, действие оператора  $e^{-itH_0}$  сводится к простому сдвигу  $z \rightarrow ze^{-i\omega t}$ , где  $\omega$  — частота осциллятора, описываемого переменной  $z$ . Ядро, отвечающее  $S$ -матрице, записывается следующим образом:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{S}(\bar{z}_f, z_i) = & \lim_{-t_i, t_f \rightarrow \infty} \exp \left\{ \int d\bar{k} \left[ \bar{z}_f(k) z_i(k) + \right. \right. \\
 & + i \int_{t_i}^{t_f} dt \left[ \bar{z}_f(k) e^{i\omega(k)t} f(t, \mathbf{k}) + \bar{f}(t, \mathbf{k}) e^{-i\omega(k)t} z_i(k) \right] - \\
 & \left. \left. - \frac{1}{2} \int_{t_i}^{t_f} \int_{t_i}^{t_f} dt dt' \bar{f}(t, \mathbf{k}) e^{-i\omega(k)|t - t'|} f(t', \mathbf{k}) \right] \right\}. \quad (9.84)
 \end{aligned}$$

Если опустить в этой формуле первый член в показателе экспоненты и учесть (9.49), то получится выражение для нормального ядра. Остающаяся часть может быть выражена через классическое асимптотическое поле, т. е. решение однородного уравнения Клейна — Гордона:

$$\varphi_{ac}(\mathbf{x}, t) = \int d\bar{k} [z_i(k) e^{-ik \cdot \mathbf{x}} + \bar{z}_f(k) e^{ik \cdot \mathbf{x}}]. \quad (9.85)$$

Поскольку величина  $\bar{z}_f(k)$  не является комплексно-сопряженной по отношению к  $z_i(k)$ , то  $\varphi_{ac}$  определяется граничными условиями для положительных частот при  $t \rightarrow -\infty$  и для отрицательных частот при  $t \rightarrow +\infty$ . Это известные нам смешанные граничные

условия Фейнмана. В этих обозначениях имеем:

$$\begin{aligned} & \int d\bar{k} \int_{-\infty}^{+\infty} dt [\bar{z}_f(k) e^{i\omega(k)t} f(t, k) + \bar{f}(t, k) e^{-i\omega(k)t} z_i(k)] = \\ & = \int d^4x \int d\bar{k} j(x) [\bar{z}_f(k) e^{i\omega(k)t - ik \cdot x} + z_i(k) e^{-i\omega(k)t + ik \cdot x}] = \\ & = \int d^4x j(x) \varphi_{ac}(x). \end{aligned}$$

Кроме того,

$$\begin{aligned} & \int d\bar{k} \iint dt dt' \bar{f}(t, k) e^{-i\omega(k)|t-t'|} f(t', k) = \\ & = \iint d^4x d^4x' j(x) j(x') \int d\bar{k} e^{-i\omega(k)|t-t'| + ik \cdot (x-x')}. \end{aligned}$$

Интеграл по  $k$  совпадает с пропагатором Фейнмана:

$$\begin{aligned} \int d\bar{k} e^{-i\omega(k)|t-t'| + ik \cdot (x-x')} & = i \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ik \cdot (x-x')}}{k^2 - m^2 + i\epsilon} = \\ & = -iG_F(x-x') = \langle 0 | T \varphi_{op}(x) \varphi_{op}(x') | 0 \rangle, \end{aligned}$$

где  $\varphi_{op}$  — квантованное скалярное свободное поле. В итоге получаем

$$\begin{aligned} \mathcal{S}^N(\bar{z}_f, z_i) | J \rangle = \exp \left[ i \int d^4x j(x) \varphi_{ac}(x) + \right. \\ \left. + \frac{i}{2} \iint d^4x d^4x' j(x) G_F(x-x') j(x') \right]. \quad (9.86) \end{aligned}$$

Это выражение фактически совпадает с выражением (4.63) (см. т. 1 настоящей книги), которое мы использовали как отправную точку при анализе теоремы Вика. Релятивистская инвариантность, а также фейнмановская добавка для пропагаторов, естественно, вытекают из формализма континуального интегрирования.

Чтобы получить оператор  $S$ , который будет обозначаться как  $S_0(j)$ , мы подставим  $\varphi_{op}$  вместо  $\varphi_{ac}$  и произведем нормальное упорядочение:

$$\begin{aligned} S_0(j) & = : \exp \left[ i \int d^4x j(x) \varphi_{op}(x) \right] : Z_0(j), \\ Z_0(j) & = \exp \left[ \frac{i}{2} \iint d^4x d^4x' j(x) G_F(x-x') j(x') \right]. \quad (9.87) \end{aligned}$$

Учитывая соотношение

$$(\square + m^2) \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta j(x)} Z_0(j) = j(x) Z_0(j),$$

формулу (9.87) можно переписать в виде

$$S_0(j) = : \exp \left\{ \int d^4x \left[ \varphi_{op}(x) (\square + m^2) \frac{\delta}{\delta j(x)} \right] \right\} : Z_0(j), \quad (9.88)$$

где  $(\square + m^2) (\delta/\delta j)$  действует только на  $Z_0(j)$ .

Рассмотрим теперь более сложные взаимодействия. Введем, например, самодействие с помощью потенциала  $V(\varphi)$ . При этом действие принимает вид

$$I = \int d^4x \left[ \frac{1}{2} (\partial\varphi)^2 - \frac{m^2}{2} \varphi^2 - V(\varphi) \right], \quad I(\varphi, j) = I + \int d^4x j\varphi. \quad (9.89)$$

Как видно из обозначения, мы выбрали для простоты взаимодействие  $V(\varphi)$ , зависящее только от поля  $\varphi$ , но не от его градиента. Например, можно взять  $V(\varphi) = \lambda\varphi^4/4!$ . Чтобы получить  $S$ -матрицу, воспользуемся тем же ходом рассуждений, который привел нас к соотношениям (9.23) и (9.24). Иными словами, между нормальными ядрами существует следующее соотношение:

$$\mathcal{S}^N = \exp \left[ -i \int d^4x V \left( \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta j(x)} \right) \right] \mathcal{S}^N(j) \Big|_{j=0}, \quad (9.90)$$

где  $\mathcal{S}^N(j)$  определяется выражением (9.86).

Ряды теории возмущений получаются разложением экспоненциального оператора в (9.90). Сама  $S$ -матрица может быть записана в виде

$$S = : \exp \left[ \int d^4x \varphi_{\text{оп}}(x) (\square + m^2) \frac{\delta}{\delta j(x)} \right] : Z(j) \Big|_{j=0}, \quad (9.91)$$

$$Z(j) = \exp \left[ -i \int d^4x \dot{V} \left( \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta j(x)} \right) \right] Z_0(j).$$

Величина  $Z(j)$  представляет собой не что иное, как производящий функционал функций Грина, а предыдущая формула совпадает с (5.38) (см. т. I настоящей книги). Новым здесь является то, что мы вывели функциональные представления для нормальных ядер  $S$ -матрицы и  $Z(j)$ . Действительно, оператор  $\exp \left[ -i \int d^4x V(\delta/i\delta j(x)) \right]$  генерирует самодействие, что приводит к следующему выражению:

$$\mathcal{S}(\bar{z}_f, z_i) = \lim \int \mathcal{D}(z, \bar{z}) \exp \left\{ \int d\bar{k} \left[ \frac{\bar{z}_f(k) z_f(k) + \bar{z}_i(k) z_i(k)}{2} + iI(f, i) \right] \right\}, \quad (9.92)$$

где

$$I(f, i) = \int_{t_i}^{t_f} dt \int d\bar{k} \left[ \frac{\dot{z}(t, k) z(t, k) - \bar{z}(t, k) \dot{z}(t, k)}{2i} - \omega(k) \bar{z}(t, k) z(t, k) - h_{\text{вз}}(\bar{z}, z) \right]. \quad (9.93)$$

В данном случае

$$h_{\text{вз}} = \int d^3x V[\varphi(x)], \quad (9.94)$$

где  $\varphi$  является функционалом от  $z(t, k)$  и  $\bar{z}(t, k)$ , полученным заменой в (9.81) операторов  $a(t, k)$  и  $a^\dagger(t, k)$  на эти  $c$ -числа:

$$\begin{aligned}\varphi(x, t) &= \int d\bar{k} [z(t, k) e^{ik \cdot x} + \bar{z}(t, k) e^{-ik \cdot x}], \\ \pi(x, t) &= -i \int d\bar{k} \omega(k) [z(t, k) e^{ik \cdot x} - \bar{z}(t, k) e^{-ik \cdot x}].\end{aligned}\quad (9.95)$$

Прежде чем совершить эту подстановку, следует переписать  $H_{\text{вз}}$  в нормальной форме. Наконец, чтобы получить  $S$ -матрицу из оператора эволюции, кроме предельных переходов  $t_f, t_i \rightarrow \infty$  необходимо наложить свободные асимптотические условия

$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow \infty} \bar{z}(t, k) &= \bar{z}_f(k) e^{i\omega(k)t}, \\ \lim_{t \rightarrow -\infty} z(t, k) &= z_i(k) e^{-i\omega(k)t}.\end{aligned}\quad (9.96)$$

Нормировка континуального интеграла следует из предыдущего случая, если  $V$  отождествить с  $j\varphi$ . Для краткости обозначим меру черз  $\mathcal{D}(\varphi, \pi)$  или  $\mathcal{D}(\varphi)$ .

Аналогично функционалы  $Z_0(j)$  и  $Z(j)$  записываются в виде интегралов

$$Z_0(j) = \int \mathcal{D}(\varphi) \exp \left[ iI_0(\varphi) + i \int d^4x \varphi(x) j(x) \right], \quad (9.97)$$

$$Z(j) = \int \mathcal{D}(\varphi) \exp \left[ iI(\varphi) + i \int d^4x \varphi(x) j(x) \right], \quad (9.98)$$

$$I_0(\varphi) = \int d^4x \left[ \frac{1}{2} (\partial\varphi)^2 - \frac{m^2}{2} \varphi^2(x) \right],$$

$$I(\varphi) = \int d^4x \left[ \frac{1}{2} (\partial\varphi)^2 - \frac{m^2}{2} \varphi^2 - V(\varphi) \right].$$

Предполагается, что в меру включен нормировочный фактор, т. е.  $Z(0) = 1$ .

Из выражения для  $Z_0(j)$  получаем

$$\begin{aligned}\int \mathcal{D}(\varphi) \varphi(x_1) \dots \varphi(x_{2n}) e^{iI_0(\varphi)} &= \\ &= \frac{(-i)^n}{2^n n!} \sum_{\text{перестановки}} G_F(x_{P_1} - x_{P_2}) \dots G_F(x_{P_{2n-1}} - x_{P_{2n}}),\end{aligned}\quad (9.99)$$

т. е. теорему Вика в явном виде.

Разумеется, можно рассматривать континуальный интеграл (9.98) как формальный степенной ряд, если учесть соотношения (9.91) и (9.99). Это позволяет нам убедиться в том, что для континуальных интегралов можно производить операции, оправданные для обычных интегралов, — такие, как замена переменных интегрирования, интегрирование по частям и т. д. В качестве примера рассмотрим следствия бесконечно малого изменения переменной вида

$$\varphi(x) = \chi(x) + \varepsilon F(\chi, x), \quad (9.100)$$



где  $F$  — произвольный функционал от  $\chi$ , который может быть разложен в степенной ряд по  $\chi$ . Данная замена является канонической в том смысле, что отображение  $\varphi \rightarrow \chi$  можно обратить (как формальный ряд). Учитывая якобиан, возникающий при замене переменной, в первом порядке по  $\varepsilon$  получаем

$$Z(j) = \int \mathcal{D}(\chi) \left[ 1 + \varepsilon \int d^4x \frac{\delta F(\chi, x)}{\delta \chi(x)} \right] \left\{ 1 + i\varepsilon \int d^4x \left[ \frac{\delta I(\chi)}{\delta \chi(x)} + j(x) \right] \times \right. \\ \left. \times F(\chi, x) \right\} \exp \left\{ i \left[ I(\chi) + \int d^4x j(x) \chi(x) \right] \right\}. \quad (9.101)$$

Собирая члены, пропорциональные  $\varepsilon$ , и отделяя множители перед интегралом с помощью замены  $\chi$  на  $\delta/i\delta_j(x)$ , находим

$$\int d^4x \left\{ i \left[ \frac{\delta I}{\delta \chi(x)} \left( \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta j} \right) + j(x) \right] F \left( \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta j}, x \right) + \right. \\ \left. + \frac{\delta F}{\delta \chi(x)} \left( \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta j}, x \right) \right\} Z(j) = 0. \quad (9.102)$$

Это выражение можно также записать в виде

$$\int d^4x F \left( \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta j}, x \right) \left[ \frac{\delta I}{\delta \chi(x)} \left( \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta j} \right) + j(x) \right] Z(j) = 0. \quad (9.103)$$

Данную формулу можно проверить непосредственно с помощью (9.98).

Рассмотрим это общее тождество в частном случае, когда  $F(\chi, x) = f(x)$ , т. е. когда замена переменной является локальным сдвигом поля. Соотношение (9.103) при этом сводится к следующему:

$$\left[ \frac{\delta I}{\delta \chi(x)} \left( \frac{\delta}{i\delta j} \right) + j(x) \right] Z(j) = 0. \quad (9.104a)$$

В случае скалярного поля получаем в явном виде

$$\left[ (\square + m^2) \frac{\delta}{i\delta j(x)} + V' \left( \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta j(x)} \right) - j(x) \right] Z(j) = 0. \quad (9.104b)$$

Это тождество — прямое следствие уравнений движения — связывает  $(n+1)$ -,  $n$ - и  $(n-1)$ -точечные функции. Первая включает оператор Клейна — Гордона, вторая — вставку величины  $V'$ . Все это показано на рис. 9.3

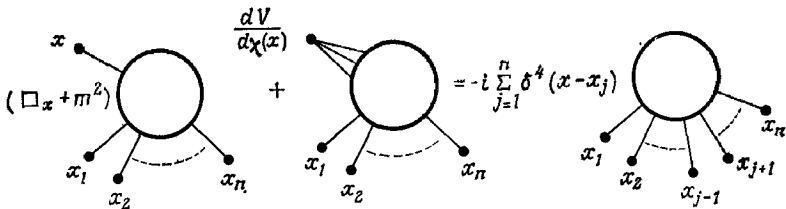


РИС. 9.3. Графическое представление уравнений (9.104a) и (9.104b).<sup>1</sup>

### Упражнения

1. Выведите соответствующее тождество, которому удовлетворяет производящий функционал для связанных функций Грина  $G_c(j)$ .
2. Обратите внимание на то, что если функционал  $F(\chi, x)$  локален, т. е. содержит только  $\chi$  в точке  $x$ , то в выражение (9.102) входит величина  $\delta F/\delta \chi(x) = F'[\chi(x)] \delta(0)$ . Каким образом можно интерпретировать эту вели-

чину? Покажите, что она имеет более высокий порядок по  $\hbar$  по сравнению с другими членами, входящими в (9.102), и что она компенсируется виковским спариванием между  $F(\chi)$  и членом  $(\square + m^2)\chi$ , содержащимся в  $\delta I / \delta \chi$ .

3. Используя уравнение движения, покажите, что вставка оператора  $\int d^4x \varphi(x) \times [\delta I / \delta \varphi(x)]$  позволяет сосчитать число внешних линий у функций Грина.
4. Докажите теорему эквивалентности. Последняя состоит в том, что, хотя инфинитезимальная обратимая замена полевой переменной изменяет функции Грина, она не затрагивает  $S$ -матрицу. Иными словами, если  $F(\varphi) = O(\varphi^2)$ , то  $S$ -матрица, которая получается, если записать  $Z'(j)$  в виде (9.91)

$$Z'(j) = \int \mathcal{D}(\varphi) \exp \left( i \left\{ I(\varphi) + \int d^4x j(x) [\varphi(x) + F(\varphi, x)] \right\} \right), \quad (9.105)$$

совпадает с  $S$ -матрицей, вычисленной с помощью  $Z(j)$ . В самом деле, при усечении внешних линий, на которое указывает оператор  $(\square + m^2)$  в (9.91), действии величины  $F(\varphi)$  сводится лишь к перенормировке волновой функции.

5. Покажите, что и в случае лагранжиана взаимодействия, содержащего производные, разложение континуального интеграла по теории возмущений приводит к ковариантным правилам Фейнмана
6. В заключение обобщите формализм на поля Ферми. Запишите производящий функционал  $Z(j)$  для связи Юкавы фермионов со скалярными бозонами и для случая электродинамики. В последнем примере покажите, что если замена переменных является инфинитезимальным калибровочным преобразованием, то мы получаем систему тождеств Уорда, рассмотренную в гл. 8.

В последующих главах мы будем широко пользоваться рассмотренными здесь функциональными методами получения тождеств между функциями Грина.

### 9.2.2. Эффективное действие и метод перевала

Мы определили производящий функционал для связанных функций Грина  $G_c(j)$  следующим образом:

$$Z(j) = \exp [G_c(j)], \quad (9.106)$$

а также ввели эффективное действие с помощью преобразования Лежандра

$$\varphi(x, j) = \frac{\delta}{i\delta j(x)} G_c(j), \quad (9.107)$$

$$i\Gamma(\varphi) = G_c(j) - i \int d^4x j(x) \varphi(x).$$

Чтобы вычислить величину  $Z(j)$ , заданную континуальным интегралом, в показателе экспоненты можно удержать квадратичную часть действия, разложить оставшуюся часть в ряд и применить теорему Вика (9.99). При этом делается предположение, что константа связи мала. Несколько более общий способ рассуждений подсказывается самим функциональным представлением. Поскольку лишь гауссовы интегралы можно вычислить в замкнутой форме, идея состоит в том, чтобы использовать метод перевала или метод стационарной фазы (в пространстве Минковского) и тем самым выбрать наиболее подходящую точку, около которой следует произвести разложение в ряд. Малым параметром здесь

является постоянная Планка  $\hbar$ ; это становится очевидным, если выписать явно размерные величины, а действие  $I$  заменить на  $I/\hbar$ . Следовательно, указанный выше метод является естественным аналогом квазиклассического приближения в квантовой механике и приводит к разложению в ряд по числу петель.

Таким образом, наша цель состоит в том, чтобы найти **вначале** экстремальные значения показателя экспоненты в интеграле (9.98), т. е. поля  $\varphi_0$ , удовлетворяющие классическому уравнению

$$(\square + m^2) \varphi_0 + V'(\varphi_0) = j. \quad (9.108)$$

Будем предполагать, что при  $j=0$  решение сводится к тривиальному решению  $\varphi_0=0$ , так что по крайней мере в смысле формального разложения решение единственно. Функция Грина, которую следует использовать при решении уравнения (9.108), имеет фейнмановскую добавку  $i\epsilon$ .

Предположение о том, что в отсутствие источника имеется только тривиальное решение, в ряде физических интересных случаев оказывается несправедливым. Для того чтобы получить правильную интерпретацию в таких крайних случаях, требуется провести детальный анализ

Вблизи экстремальной траектории произведем сдвиг переменной интегрирования  $\varphi \rightarrow \varphi_0 + \varphi$ , удерживая в экспоненте квадратичные по полю члены, а члены более высокого порядка разложим в ряд теории возмущений. В силу условия стационарности (9.108) линейные члены отсутствуют, а, согласно условию нормировки,  $Z(0)=1$ . Таким образом, мы имеем

$$Z(j) = e^{(i/\hbar)I(\varphi_0, j)} \int \mathcal{D}(\varphi) \exp \left( \frac{i}{\hbar} \int d^4x \left\{ \frac{1}{2} (\partial\varphi)^2 - \frac{\varphi^2}{2} [m^2 + V''(\varphi_0)] - \sum_{\rho \geq 3} \frac{\varphi^\rho}{\rho!} V^{(\rho)}(\varphi_0) \right\} \right). \quad (9.109)$$

Новая квадратичная часть дается выражением

$$\int d^4x \left\{ \frac{1}{2} (\partial\varphi)^2 - \frac{\varphi^2}{2} [m^2 + V''(\varphi_0)] \right\} = - \int d^4x (1/2) \varphi [\square + m^2 + V''(\varphi_0)] \varphi, \quad (9.110)$$

благодаря зависимости которого от  $\varphi_0$  мы получаем нетривиальное выражение для пропагатора. Для того чтобы получить разложение по степеням  $\hbar$ , переопределим поле следующим образом:  $\varphi \rightarrow \hbar^{1/2} \varphi$ . В результате находим

$$Z(j) = e^{iI(\varphi_0, j)/\hbar} = e^{(i/\hbar)I(\varphi_0, j)} \int \mathcal{D}(\varphi) \exp \left( i \int d^4x \left\{ \frac{1}{2} (\partial\varphi)^2 - \frac{\varphi^2}{2} [m^2 + V''(\varphi_0)] - \sum_{\rho \geq 3} \hbar^{\rho/2-1} \frac{\varphi^\rho}{\rho!} V^{(\rho)}(\varphi_0) \right\} \right). \quad (9.111)$$

Применяя здесь теорему Вика, мы видим, что остаются лишь полиномы четной степени по  $\varphi$ . В петлевом разложении встречаются поэтому только целые степени величины  $\hbar$ . Из (9.111) следует, что ведущий член (порядка  $\hbar^0$ ) в разложении  $G_c(j)$  равен  $I(\varphi_0, j)$ . Вычислим следующий член. Интеграл от квадратичной части дает

$$\int \mathcal{D}(\varphi) \exp \left\{ -i \int d^4x \varphi [\square + m^2 + V''(\varphi_0)] \varphi \right\} = (\text{Det } K_0^{-1} K_V)^{-1/2},$$

$$K_V = \{ \square_x + m^2 + V''[\varphi_0(x)] \} \delta^4(x-y), \quad (9.112)$$

$$K_0 = (\square_x + m^2) \delta^4(x-y)$$

Как и в гл. 4 (см. т. 1), обозначения детерминантов операторов бесконечной размерности будем начинать с прописной буквы, а следов — со строчной. Обратный по отношению к  $K_0$  оператор, вводимый на основании условия нормировки, был выбран равным  $G_F(x-y)$ . Следовательно,

$$K_0^{-1} K_V = \delta^4(x-y) + G_F(x-y) V''[\varphi_0(y)].$$

Поскольку детерминант можно записать в виде

$$\text{Det } A = e^{\text{sp}(\ln A)}, \quad (9.113)$$

мы находим

$$-iG_c(j) = I(\varphi_0, j) + \frac{i}{2} \hbar \text{sp} \ln [1 + G_F V''(\varphi_0)] + O(\hbar^2). \quad (9.114)$$

Чтобы получить  $\Gamma(\varphi)$ , нужно обратить соотношение

$$\varphi(x, j) = \frac{\delta G_c(j)}{i \delta j(x)}.$$

В соответствии с (9.114) и (9.108) поле  $\varphi$  определяется в главном порядке с точностью до поправок порядка  $\hbar$  величиной  $\varphi_0$ . Кроме того, поскольку  $I$  стационарно при  $\varphi_0$ , мы имеем  $I(\varphi, j) - I(\varphi_0, j) = O(\hbar^2)$ . Наконец, чтобы получить  $\Gamma$ , необходимо из  $-iG_c(j)$  вычесть  $\int d^4x \varphi(x) j(x)$ . Таким образом, получаем

$$\Gamma(\varphi) = I(\varphi) + \frac{i}{2} \hbar \text{sp} \ln [1 + G_F V''(\varphi)] + O(\hbar^2). \quad (9.115)$$

Смысл второго члена с точки зрения теории возмущений становится ясным, если его разложить следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{i\hbar}{2} \text{sp} \ln [1 + G_F V''(\varphi)] &= i\hbar \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n} \text{sp} \{ [G_F V''(\varphi)]^n \} = \\ &= i\hbar \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n} \int d^4z_1 \dots d^4z_n G_F(z_1-z_2) V''[\varphi(z_2)] \times \\ &\quad \times G_F(z_2-z_3) \dots V''[\varphi(z_n)] G_F(z_n-z_1) V''[\varphi(z_1)]. \end{aligned}$$

Данное выражение представляет собой сумму вкладов однопетлевых диаграмм, состоящих из  $n$  пропагаторов  $-iG_F(x-y)$  и  $n$  вершин  $-iV^n(\varphi)$ . На рис. 9.4 это разложение изображено графически для случая, когда  $V(\varphi) = \lambda\varphi^4/4!$ . Заметим, что множитель  $1/2n$ , стоящий перед каждым членом суммы, является фактором симметрии для соответствующей диаграммы ( $n$  отвечает враще-

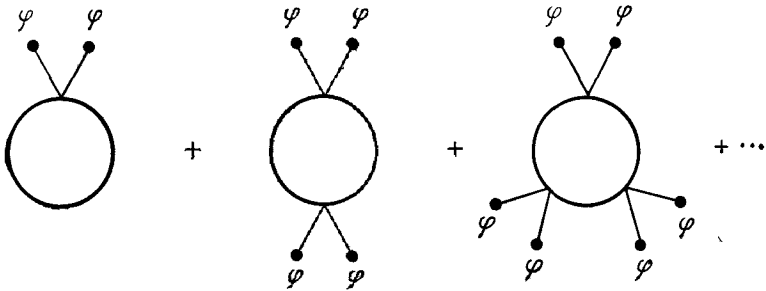


РИС. 9.4. Эффективный потенциал в однопетлевом приближении.

нием, 2—отражению). Аналогично в случае теории  $\varphi^4$  фактор  $1/2$  в  $V^n(\varphi) = \lambda\varphi^2/2$  учитывает симметрию между двумя внешними концами, входящими в каждую вершину

Это разложение можно провести во всех порядках. Последующие члены в  $G_c$  представляются связными диаграммами Фейнмана, соответствующими взаимодействию  $-\sum_{p \geq 3} \hbar^{p/2-1} (\varphi^p/p!) V^p(\varphi_0)$ , а входящие в них пропагаторы получаются обращением ядра  $\square + m^2 + V''(\varphi_0)$ .

Что касается  $\Gamma(\varphi)$ , то здесь, учитывая преобразование Лежандра, из вышеуказанных диаграмм нужно отобрать только одночастично неприводимые и заменить всюду  $\varphi_0$  на произвольный аргумент  $\varphi$ . Разумеется, в любом реальном вычислении мы сталкиваемся с ультрафиолетовыми расходимостями.

Таким образом, метод перевала или метод стационарной фазы дает изящный способ получения квазиклассического разложения по числу петель. Чтобы выйти за рамки теории возмущений, необходимо либо выполнить разложение около нетривиального экстремума, либо аппроксимировать континуальный интеграл совершенно иным способом

Рассмотрим снова величину  $\Gamma(\varphi)$ . Напомним, что разложение по  $\varphi$  порождает одночастично-неприводимые функции Грина. В физике частиц именно это свойство функционала  $\Gamma(\varphi)$  является важным. Можно также подчеркнуть, что  $\Gamma(\varphi)$  играет роль эффективного действия. Учитывая трансляционную инвариантность, мы можем найти разложение, включающее производные по полю  $\varphi$  все более высокого порядка:

$$\Gamma(\varphi) = \int d^4x [-V_{\varphi\varphi\varphi}(\varphi) + (1/2) Z_{\varphi\varphi\varphi}(\varphi) (\partial\varphi)^2 + \dots]. \quad (9.116)$$

В (9.116) первый член включает сумму по всем сильносвязным функциям при нулевом внешнем импульсе, второй член

включает все вторые производные в той же точке, и т. д. В принципе функция  $\varphi(x)$  остается произвольной. Однако, если нужно определить только  $V_{\text{эфф}}$ , можно удовлетвориться вычислением при постоянном  $\varphi$  при условии, что расходящийся четырехмерный интеграл по  $x$  факторизуется однозначным образом.

В качестве примера вычислим  $V_{\text{эфф}}$  с точностью до  $\hbar$  из соотношений (9.114) и (9.115). В общем случае можно записать

$$V_{\text{эфф}} = V_{\text{эфф}}^{(0)} + \hbar V_{\text{эфф}}^{(1)} + \hbar^2 V_{\text{эфф}}^{(2)} + \dots \quad (9.117)$$

Используя (9.114), вначале находим

$$V_{\text{эфф}}^{(0)} = \frac{m^2}{2} \varphi^2 + V(\varphi). \quad (9.118)$$

В детерминанте, входящем в (9.112),  $\varphi$  является теперь константой, а пропагатор  $[\square + m^2 + V''(\varphi)]^{-1}$  диагонален в импульсном пространстве:

$$\begin{aligned} \text{sp ln} \{ [\square + m^2 + V''(\varphi)] (\square + m^2)^{-1} \} &= \\ = \int d^4x \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \ln \left[ 1 - V''(\varphi) \frac{1}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \right], & \quad (9.119) \\ V_{\text{эфф}}^{(1)} = \frac{-i}{2} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \ln \left[ 1 - V''(\varphi) \frac{1}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \right]. \end{aligned}$$

Разумеется, это выражение не имеет смысла, до тех пор пока мы не выполним ультрафиолетовые вычитания. Для конкретности выберем потенциал в виде

$$V(\varphi) = \frac{\lambda \varphi^4}{4!}, \quad V''(\varphi) = \frac{\lambda \varphi^2}{2}.$$

Чтобы удовлетворить требованию о нормальном упорядочении, необходимо также добавить член вида  $\varphi^2$ . В противном случае нам пришлось бы включить диаграммы типа головастика, отвечающие спариванию двух полей в одной вершине.

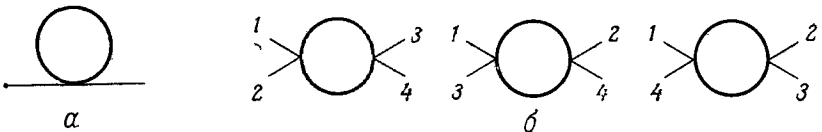


РИС. 9.5. Расходящиеся диаграммы в однопетлевом приближении.

Это единственная расходящаяся однопетлевая диаграмма для двухточечной функции  $\Gamma^{(2)}$  (рис. 9.5, а); она дает квадратично-расходящийся вклад, пропорциональный  $\varphi^2$  в разложении  $V_{\text{эфф}}^{(1)}$ :

$$\frac{\lambda \varphi^2}{4} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon}.$$

В этом порядке мы имеем также логарифмическую расходимость четырехточечной функции  $\Gamma^{(4)}$ , соответствующей диаграмме на рис. 9.5, б:

$$\frac{i}{4} \left( \frac{\lambda \varphi^2}{2} \right)^2 \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{1}{(p^2 - m^2 + i\epsilon)^2}.$$

Более высокие степени величины  $\varphi$  отвечают сходящимся интегралам. Перенормировка приводит к контрчленам, необходимым, чтобы удовлетворить условиям

$$\Gamma^{(2)}(m_{\text{физ}}^2) = 0, \quad \frac{d\Gamma^{(2)}}{dp^2}(m_{\text{физ}}^2) = 1, \quad (9.120)$$

а также к ограничениям на четырехточечную функцию, например на ее значение в симметричной точке  $S$ , лежащей на массовой поверхности, что придает этой функции смысл перенормированной константы связи:

$$\begin{aligned} p_i^2 &= m_{\text{физ}}^2, \\ (p_i + p_j)^2 &= \frac{4}{3} m_{\text{физ}}^2, \quad i \neq j, \\ \Gamma^{(4)}(p_i)|_S &= -\lambda_{\text{физ}}. \end{aligned} \quad (9.121)$$

Эти условия являются полезными, когда мы имеем дело с каким-либо реальным приложением к задаче рассеяния. Однако они создают неудобства при вычислении величин, входящих в эффективное действие, разложенное в окрестности нулевых внешних импульсов.

С точностью до конечной перенормировки величины (9.120) и (9.121) можно заменить следующими:

$$\Gamma^{(2)}(0) = -m^2, \quad \frac{d\Gamma^{(2)}}{dp^2}(0) = 1, \quad \Gamma^{(4)}(0) = -\lambda. \quad (9.122)$$

Чтобы подчеркнуть различие, мы ввели нижний индекс „физ.“ для массы и константы связи, отвечающим предыдущей нормировке

Достоинство соотношений (9.122) состоит в том, что их можно рассматривать как условия, накладываемые на эффективный перенормированный потенциал и функцию  $Z_{\varphi\varphi\varphi\varphi}(\varphi)$ , а именно

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{d\varphi^2} V_{\varphi\varphi\varphi\varphi}(0) &= m^2, \quad \frac{d^4}{d\varphi^4} V_{\varphi\varphi\varphi\varphi}(0) = \lambda, \\ Z_{\varphi\varphi\varphi\varphi}(0) &= 1. \end{aligned} \quad (9.123)$$

Из (9.118) следует, что эти требования, очевидно, выполнены в порядке  $\hbar^0$ . Кроме того, с этой точностью мы имеем

$$Z_{\varphi\varphi\varphi\varphi}^{(0)} = 1. \quad (9.124)$$

В выражениях для  $V_{\text{эфф}}$  и  $Z_{\text{эфф}}$  контрчлены типа  $\varphi^2$  и  $\varphi^4$  сокращают соответствующие члены в высших порядках. Следовательно, правильный однопетлевой вклад в эффективный потенциал запишется в виде

$$V_{\text{эфф}}^{(1)} = \frac{-i}{2} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \left[ \ln \left( 1 - \frac{\lambda \varphi^2/2}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \right) + \frac{\lambda \varphi^2/2}{p^2 - m^2 + i\epsilon} + \frac{1}{2} \frac{(\lambda \varphi^2/2)^2}{(p^2 - m^2 + i\epsilon)^2} \right]. \quad (9.125)$$

На данном этапе целесообразно выполнить поворот Вика  $p_0 \rightarrow \rightarrow i p_0$ . Обозначая через  $k$  соответствующий евклидов четырехимпульс, можно написать

$$V_{\text{эфф}}^{(1)} = \frac{1}{2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \left[ \ln \left( 1 + \frac{\lambda \varphi^2/2}{k^2 + m^2} \right) - \frac{\lambda \varphi^2/2}{k^2 + m^2} + \frac{1}{2} \left( \frac{\lambda \varphi^2/2}{k^2 + m^2} \right)^2 \right]. \quad (9.126)$$

Выполняя интегрирование и добавляя это выражение к члену нулевого порядка, определяемому выражением (9.118), получаем

$$V_{\text{эфф}} = \frac{m^2 \varphi^2}{2} + \frac{\lambda \varphi^4}{4!} + \frac{1}{(8\pi)^2} \left[ \left( \frac{\lambda \varphi^2}{2} + m^2 \right)^2 \ln \left( 1 + \frac{\lambda \varphi^2}{2m^2} \right) - \frac{\lambda \varphi^2}{2} \left( \frac{3}{2} \frac{\lambda \varphi^2}{2} + m^2 \right) \right] + \dots \quad (9.127)$$

Мы видим, что при больших  $\varphi$  квантовые поправки меняют поведение  $V(\varphi)$ . Чтобы показать это яснее, полезно ввести новую систему нормировочных условий, позволяющую нам положить  $m=0$ . Можно определить новую константу связи  $\lambda_M$ , такую, что

$$\lambda_M = \frac{d^4}{d\varphi^4} V_{\text{эфф}}(\varphi) \Big|_{\varphi=M}. \quad (9.128)$$

Из (9.127) следует, что

$$\lambda_M = \lambda + \frac{\lambda^2}{(8\pi)^2} \left[ 6 \ln \frac{\lambda M^2}{2m^2} + 16 + O\left(\frac{m^2}{M^2}\right) \right].$$

Подставим эту величину в (9.127) и рассмотрим предельную безмассовую теорию, для которой

$$V_{\text{эфф}}(\varphi) = \lambda_M \frac{\varphi^4}{4!} + \frac{\lambda_M^2 \varphi^4}{(16\pi)^2} \left( \ln \frac{\varphi^2}{M^2} - \frac{25}{6} \right) + \dots \quad (9.129)$$

Эта формула получена Коулменом и Вайнбергом. В выражении (9.127) нельзя положить непосредственно  $m=0$ . Это связано со структурой ультрафиолетовых вычитаний в (9.126), второе из которых, предназначенное для того, чтобы обеспечить выполнение условия  $(d^4 V_{\text{эфф}}/d\varphi^4)(0) = 0$ , вносит инфракрасную расходимость в пределе  $m=0$ . Чтобы определить безмассовую теорию, нужно выбрать произвольную, но не равную нулю точку вычитания  $\varphi=M$ . Рассматриваемые отдельно  $\Gamma$ -функции при нулевом им-



пульсе, определяемые разложением (9.127), сингулярны при  $m \rightarrow 0$ . Поведение при  $\varphi \rightarrow \infty$  можно установить, используя тот факт, что размерность величины  $V$  равна четырем, так что доминирующие члены должны быть пропорциональны  $\varphi^4$  с точностью до логарифмов  $\varphi/M$ . Заметим, что произвол в выборе точки  $M$  означает, что согласованное изменение  $M$  и  $\lambda_M$  должно оставлять  $V_{\text{эфф}}$  инвариантным. Мы видим здесь проявление ренормализационной группы, которая будет рассмотрена ниже.






В теории  $\varphi^4$  в первом порядке разложения по петлям отсутствует перенормировка волновой функции. Тем не менее функция  $Z_{\text{эфф}}$  является негравитационной в этом порядке, хотя она и не содержит логарифмов. Используя выражение для эффективного действия (9.115), можно показать, что эту функцию можно записать в виде

$$Z_{\text{эфф}}(\varphi) = 1 + \frac{\lambda^2}{6(4\pi)^2} \frac{\varphi^2}{(2m^2 + \lambda\varphi^2)} + \dots \quad (9.130)$$

Предел нулевой массы можно получить, как и в (9.129). Вычисления были выполнены в высших порядках. Приведем здесь результаты, полученные до второго порядка, а также соответствующие диаграммы. Вводя обозначения

$$x = \frac{\lambda\varphi^2}{2m^2}, \quad \alpha = \frac{\hbar\lambda}{(4\pi)^2}, \quad V_{\text{эфф}} = \frac{m^4}{\lambda} v(x, \alpha), \quad Z_{\text{эфф}}(\varphi) = z(x, \alpha), \quad (9.131)$$

получаем

Диаграмма $v$	$z$
 $x$	1
 $\frac{x^2}{6}$	0
 $\frac{\alpha}{4} \left[ (1+x)^2 \ln(1+x) - \left( x + \frac{3x^2}{2} \right) \right]$	$\frac{\alpha}{6} \frac{x}{1+x}$
 $\frac{\alpha^2}{8} [(1+x) \ln(1+x) - x]^2$	$\frac{\alpha^2}{12} \frac{x}{1+x} \left[ \ln(1+x) + \frac{x}{1+x} \right]$
 $\frac{\alpha^2}{2} x \left[ \frac{1+x}{2} \ln^2(1+x) - 2(1+x) \times \right.$ $\left. \times \ln(1+x) + 2x \right]$	$\frac{\alpha^2}{6} \left\{ -\frac{1}{2} \ln(1+x) + \frac{x}{1+x} + \right.$ $\left. + \frac{2x}{1+x} \left[ \ln(1+x) + \frac{4A}{3} - 1 \right] - \right.$ $\left. - \frac{x^2}{(1+x)^2} \left[ \ln(1+x) + \frac{4}{3} \times \right. \right.$ $\left. \left. \times (A-1) \right] + \frac{4}{3} \frac{x^2}{(1+x)^2} + B \right\}$

(9.132)

Здесь  $B$  — постоянная, зависящая от условий нормировки, а  $A$  дается выражением

$$A = - \int_0^1 du \frac{\ln u}{1-u+u^2} = \frac{3}{2} \sum_{\rho=0}^{\infty} \left[ \frac{1}{(1+3\rho)^2} - \frac{1}{(2+3\rho)^2} \right] = 1,17195. \quad (9.133)$$

Рассматриваемое здесь эффективное действие аналогично лагранжиану Эйлера—Гейзенберга в электродинамике (разд. 4.3.4 в т. 1 настоящей книги). Мы предоставляем читателю более подробно разобрать эту аналогию.

Для  $S$ -матрицы существует разложение по степеням величины  $\hbar$ , аналогичное разложению функций Грина. Читателю предлагается показать, что первые два члена разложения соответствующего ядра запишутся в виде

$$\mathcal{S}(\bar{z}_f, z_i) = \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} I(\varphi_{\text{кл}}) - \frac{1}{2} \text{Sp} \ln [1 + G_F V''(\varphi_{\text{кл}})] + O(\hbar) \right\}, \quad (9.134)$$

где  $\varphi_{\text{кл}}$  является решением уравнения

$$(\square + m^2) \varphi_{\text{кл}} + V'(\varphi_{\text{кл}}) = 0 \quad (9.135)$$

с фейнмановскими граничными условиями;  $\varphi_{\text{кл}}$  удовлетворяет также интегральному уравнению

$$\varphi_{\text{кл}}(x) = \varphi_{\text{ас}}(x) - \int d^4y G_F(x-y) V'[\varphi_{\text{кл}}(y)], \quad (9.136)$$

причем  $\varphi_{\text{ас}}$  определяется формулой (9.85).

Можно дать более физическое определение эффективного действия. В частности,  $V_{\text{эфф}}(\varphi)$  можно рассматривать как плотность энергии основного состояния при том ограничении, что среднее значение поля равно  $\varphi$  всюду. Это позволяет нам изучать возможные неустойчивости системы (см. гл. 11).

### 9.3. СИСТЕМЫ СО СВЯЗЯМИ

Ряд динамических систем можно описать с помощью наблюдаемых, подчиняющихся связям в фиксированный момент времени. В качестве известного примера мы можем сослаться на электродинамику. Такие системы нельзя квантовать непосредственно. Вскоре нам придется встретиться с более серьезными трудностями в случае неабелевых калибровочных теорий. Континуальное интегрирование представляет собой идеальную основу для описания таких систем, поскольку этот формализм тесно связан с классическим случаем, допускающим простую трактовку. Метод квантования требует исключения стольких пар канонически сопряженных переменных, сколько имеется связей. Последние должны удовлетворять соответствующим условиям совместимости, которые мы будем рассматривать ниже.

При первом чтении можно пропустить эти технические построения и вернуться к ним, когда будет рассматриваться конкретное применение теории калибровочных полей (гл. 12), в котором будет использоваться соотношение (9.159).

### 9.3.1. Общее рассмотрение

Пусть на классическую систему с  $n$  ( $n > 1$ ) степенями свободы вначале наложена единственная связь

$$I(p, q) = 0. \quad (9.137)$$

Обозначим  $(2n-1)$ -мерное многообразие в фазовом пространстве, характеризуемое условием (9.137), через  $S$ . Наши рассуждения будут носить локальный характер, т. е. будут относиться к окрестности точки, принадлежащей  $S$ . Кроме того, мы не будем делать различия между двумя функциями  $f$  и  $F$ , обращающимися в нуль на  $S$ , т. е. такими, что  $F(p, q) = \alpha(p, q)f(p, q)$ . Пусть  $\mathcal{A}$  представляет собой кольцо (дифференцируемых) функций, которые обращаются в нуль на  $S$ . Для функций  $F \in \mathcal{A}$  будем использовать обозначение  $F \sim 0$ .

Мы можем рассматривать связь как часть действия, используя зависящий от времени множитель Лагранжа  $\lambda(t)$ . Уравнения движения вытекают из условий стационарности для величины

$$I = \int dt [pq\dot{q} - h(p, q) - \lambda(t)f(p, q)]. \quad (9.138)$$

В число этих уравнений, наряду с уравнением (9.137), получающимся при варьировании  $\lambda$ , входят также следующие уравнения:

$$\dot{q}_i = \frac{\partial h}{\partial p_i} + \lambda \frac{\partial f}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial h}{\partial q_i} - \lambda \frac{\partial f}{\partial q_i}, \quad 1 \leq i \leq n. \quad (9.139)$$

Разумеется, многообразие  $S$  содержит слишком много переменных  $(p_i, q_i)$ . Естественное условие совместности состоит в том, что эволюция, описываемая системой (9.139), оставляет многообразие  $S$  инвариантным. С помощью скобок Пуассона это условие записывается следующим образом:

$$\{h, f\} \sim 0. \quad (9.140)$$

Вообще говоря, скобка Пуассона любой  $F \sim 0$  с  $h$  принадлежит  $\mathcal{A}$ :

$$F \sim 0 \Rightarrow \{h, F\} \sim 0. \quad (9.141a)$$

Кольцо  $\mathcal{A}$  стабильно относительно скобочной операции Пуассона, поскольку оно имеет единственный генератор

$$F \sim 0 \Rightarrow \{f, F\} \sim 0. \quad (9.141b)$$

Соотношения (9.141a) и (9.141б) означают, что это кольцо функций (но не обязательно его отдельный элемент) стабильно относительно эволюции (9.139). Пусть  $F$  — произвольный фиксированный элемент в  $\mathcal{A}$ . Определим отношение эквивалентности  $E$  на  $\mathcal{C}$  следующим образом. Рассмотрим поток, генерируемый функцией  $F$  в фазовом пространстве. В инфинитезимальной форме он описывается уравнениями

$$\frac{dq_i}{du}(u) = \frac{\partial F}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{du}(u) = -\frac{\partial F}{\partial q_i}, \quad F \sim 0. \quad (9.142)$$

Две точки на  $\mathcal{C}$  эквивалентны тогда и только тогда, когда они принадлежат одной и той же траектории потока (9.142). Это отношение эквивалентности  $E$  имеет следующие свойства: 1) оно не зависит от выбора  $F$  в  $\mathcal{A}$  и 2) инвариантно относительно эволюции во времени.

В самом деле, мы видим, что если линия потока проходит через точку, принадлежащую  $\mathcal{C}$ , то эта линия целиком находится в  $\mathcal{C}$ . Кроме того, если  $F'$  является каким-то другим элементом в  $\mathcal{A}$ , то поскольку  $F = aF'$ , векторы, касательные к двум потокам, пропорциональны друг другу на  $\mathcal{C}$ , что доказывает первое свойство. Из (9.141) следует, что гамильтониан  $h$  постоянен на линиях потока, принадлежащих  $\mathcal{C}$ . Наконец, пусть  $G$  — произвольная функция, которая является постоянной вдоль линий потока (9.142), принадлежащих  $\mathcal{C}$ , т. е. такая, что

$$F \sim 0 \Rightarrow \{G, F\} \sim 0. \quad (9.143)$$

Ее временная эволюция в течение инфинитезимального интервала  $\delta t$  дается выражением  $G \rightarrow G + \dot{G} \delta t$ , причем  $\dot{G} = \{h + \lambda f, G\} \sim \{h, G\}$  и  $\{\{h, G\}, F\} = \{h, \{G, F\}\} - \{G, \{h, F\}\} \sim 0$ , что следует из тождества Якоби и условий (9.141a) и (9.143). Следовательно, функция  $G + \delta G$  является снова постоянной вдоль линий потока, что доказывает свойство 2.

Таким образом, многообразие  $\mathcal{C}$  в соответствии с  $E$  расслаивается не зависящим от времени способом на систему классов эквивалентности. В свою очередь фактор-пространство  $\mathcal{C}/E$  можно рассматривать как фазовое пространство размерностью  $2n - 2$  при условии, что функция  $f$  удовлетворяет некоторым условиям регулярности. Все потоки вида (9.142) эквивалентны на  $\mathcal{C}$ , а физические наблюдаемые (такие, как энергия) постоянны на этих потоках. Таким образом, достаточно выбрать представителя в каждом классе, причем опять регулярным способом. С этой целью пересечем многообразие  $\mathcal{C}$  другим многообразием, которое описывается вспомогательным условием

$$g(p, q) = 0 \quad (9.144)$$

таким образом, чтобы каждая линия потока имела единственное пересечение с данной пересекающей поверхностью. Это условие будет выполнено, если  $g$  монотонно меняется вдоль любой линии потока, что имеет место в случае, когда

$$\{f, g\} \neq 0. \quad (9.145)$$

При этих условиях можно ввести явную параметризацию на  $C/E$ , выполняя следующее каноническое преобразование:

$$(p_i, q_i) \rightarrow (P_j, Q_j), \quad 1 \leq i, j \leq n, \quad (9.146)$$

$$P_n = g(p, q).$$

В новых переменных скобка  $\{f, g\}$  имеет вид

$$\{f, g\} = -\frac{\partial f}{\partial Q_n},$$

а условие (9.145) позволяет найти решение уравнения

$$f(Q, P) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial Q_n} \neq 0, \quad (9.147)$$

для  $Q_n$  как функции от  $Q_1, \dots, Q_{n-1}, P_1, \dots, P_n$ :

$$Q_n \equiv Q_n(Q_1, \dots, Q_{n-1}, P_1, \dots, P_n). \quad (9.147a)$$

Определение фактор-пространства  $C/E$  завершается условием (9.144), которое принимает теперь вид

$$P_n = 0. \quad (9.148)$$

Наконец, нетрудно проверить, что величина

$$H(Q_1, \dots, Q_{n-1}, P_1, \dots, P_{n-1}) = h(q_i, p_i) \Big|_{\substack{Q_n \equiv Q_n(Q_1, \dots, P_{n-1}, 0) \\ P_n = 0}} \quad (9.149)$$

является эффективным гамильтонианом на фактор-пространстве.

Произвол, имеющийся в выборе функции  $g$ , удовлетворяющей условию (9.145), может привести к некоторым затруднениям при общем определении во всем фазовом пространстве.

Вышеописанную конструкцию легко обобщить на случай  $m < n$  независимых связей

$$f_1(p, q) = 0, \dots, f_m(p, q) = 0. \quad (9.150)$$

Кольцо  $\mathcal{A}$  состоит из гладких функций, обращающихся в нуль на многообразии  $C$ , определенном записанными выше уравнениями, т. е. из функций вида

$$F(p, q) = \sum_{k=1}^m \alpha_k(p, q) f_k(p, q). \quad (9.151)$$

Потребуем, чтобы скобка  $\{h, F\}$  принадлежала  $\mathcal{A}$ , если  $F$  принадлежит  $\mathcal{A}$ :

$$F \sim 0 \Rightarrow \{h, F\} \sim 0. \quad (9.152)$$

Для того чтобы на  $S$  можно было определить отношение эквивалентности, исключаяющее остальные  $m$  координат, потребуем также, чтобы кольцо  $\mathcal{A}$  было инвариантно относительно скобочной операции Пуассона

$$F_1, F_2 \sim 0 \Rightarrow \{F_1, F_2\} \sim 0. \quad (9.153)$$

Это условие автоматически выполнялось, когда кольцо  $\mathcal{A}$  имело единственный генератор.

Действуя, как и прежде, определим расслоение на многообразии  $S$ , рассматривая в произвольной его точке систему траекторий, порождаемых произвольным элементом  $F \sim 0$ . Касательные к этим траекториям образуют  $m$ -мерное линейное многообразие в  $(2n - m)$ -мерном пространстве, касательном к  $S$ . Не зависящее от времени отношение эквивалентности  $E$  отождествляет точки, принадлежащие одному и тому же  $m$ -мерному многообразию, порождаемому кольцом  $\mathcal{A}$ ;  $S/E$  имеет естественную структуру фазового пространства. Эту структуру можно продемонстрировать явным образом, вводя  $m$  вспомогательных условий:

$$g_1(p, q) = 0, \dots, g_m(q, p) = 0, \quad (9.154)$$

которые фиксируют единственную точку в  $m$ -мерном слое в  $S$ . Достаточное условие этого записывается в виде

$$\det \{g_k, \dot{t}_l\} \neq 0, \quad 1 \leq k, l \leq m. \quad (9.155)$$

Если потребовать, чтобы скобки Пуассона между величинами  $g$  обращались в нуль, то каноническое преобразование  $(q, p) \rightarrow (Q, P)$  определяется таким образом, что

$$P_{n-m+1} = g_1, \dots, P_n = g_m, \quad (9.156)$$

чтобы можно было выразить на  $S$  величины  $Q_{n-m+1}, \dots, Q_n$  через  $Q_1, \dots, Q_{n-m}, P_1, \dots, P_n$ . При этом фактор-пространство  $S/E$  определяется условиями

$$P_{n-m+1} = 0, \dots, P_n = 0. \quad (9.157)$$

В фактор-пространстве динамика описывается гамильтонианом  $H$ , полученным из первоначального гамильтониана  $h(p, q)$  с помощью канонического преобразования, учитывающего вышеописанную процедуру исключения лишних переменных.

Покажите, что соответствующая конструкция в случае  $m$  связей следует рекуррентным образом из конструкции, полученной лишь при наличии единственной связи.

Для того чтобы можно было квантовать такие системы в терминах независимых канонических переменных  $P$  и  $Q$  гамильтониана  $H$  и соответствующих наблюдаемых, запишем амплитуду перехода в виде

$$\langle f | i \rangle = \int \mathcal{D}(P, Q) \exp \left\{ i \int dt [P\dot{Q} - H(P, Q)] \right\}. \quad (9.158)$$

В реальных случаях, вообще говоря, нецелесообразно производить исключение переменных, приводящее к канонической параметризации на  $C/E$ . Поэтому будем искать выражение для амплитуды (9.158) через исходные связанные переменные  $(p, q)$ . Для этого запишем меру в каждый момент времени в континуальном интеграле следующим образом:

$$\begin{aligned} & \prod_{k=1}^{n-m} dP_k dQ_k = \\ & = \prod_{k=1}^n dP_k dQ_k \prod_{s=n-m+1}^n \delta(P_s) \delta[Q_s - Q_s(Q_1, \dots, Q_{n-m}, P_1, \dots, P_n)]. \end{aligned}$$

Поскольку выражение  $\prod_{k=1}^n dP_k dQ_k$  инвариантно относительно канонических преобразований, его можно записать в виде  $\prod_{k=1}^n dp_k dq_k$ .

Кроме того, используя соотношение  $\prod_{s=n-m+1}^n \delta(P_s) = \prod_{k=1}^m \delta(g_k)$  и обычное правило для  $\delta$ -функций, получаем

$$\begin{aligned} & \prod_{s=n-m+1}^n \delta[Q_s - Q_s(Q_1, \dots, Q_{n-m}, P_1, \dots, P_n)] = \\ & = \prod_{k=1}^m \delta[f_k(p, q)] \frac{D(f_1, \dots, f_m)}{D(Q_{n-m+1}, \dots, Q_n)}. \end{aligned}$$

Из (9.156) следует, что якобиан есть не что иное, как  $\det \{g_k, f_l\}$ , который мы будем обозначать кратко через  $\det \{g, f\}$ . Используя интегральное представление

$$\prod_{k=1}^m \delta(f_k) = \int \prod_{k=1}^m \frac{d\lambda_k}{2\pi} \exp \left( -i \sum_{k=1}^m \lambda_k f_k \right)$$

и производя перегруппировку, находим

$$\langle f | i \rangle = \int \mathcal{D}(p, q, \lambda) \prod_i [\delta(g) \det \{g, f\}] \exp \left[ i \int dt (p\dot{q} - h - \lambda f) \right]. \quad (9.159)$$

Связи входят сюда явным образом, и мы видим, что в экспоненте здесь стоит действие, определяемое выражением (9.138). В (9.159) не входят переменные, сопряженные с  $\lambda$ .

Для того чтобы это построение имело смысл, необходимо, чтобы выражение (9.159) не зависело от выбора вспомогательных условий  $g_k = 0$ . Убедимся в этом на примере инфинитезимальных изменений. Рассмотрим, к каким следствиям приводит небольшое изменение

$$g_k + \delta g_k = 0, \quad 1 \leq k \leq m. \quad (9.160)$$

В силу условия (9.155) линейная система уравнений

$$\delta g_k = \sum_{s=1}^m \delta v_s \{f_s, g_k\} \quad (9.161)$$

допускает единственное решение. Это означает, что

$$\delta g_k \sim \{\delta F, g_k\}, \quad \delta F = \sum_{s=1}^m \delta v_s f_s. \quad (9.162)$$

Соответствующее  $\delta F$  порождает каноническое преобразование, записываемое в виде

$$p \rightarrow p + \delta p, \quad q \rightarrow q + \delta q, \quad \delta p = \{\delta F, p\}, \quad \delta q = \{\delta F, q\}, \quad (9.163)$$

которое оставляет меру  $\prod dp dq$  инвариантной. Вспоминая условие (9.153), мы видим, что  $\delta F$  порождает также несингулярное линейное преобразование связей:

$$f \rightarrow (1 + \delta A)f, \quad (9.164)$$

где матрица  $\delta A$  является, вообще говоря, функцией переменных  $(p, q)$ . Наконец, действие  $\int dt (p\dot{q} - h)$  изменяется самое большее из-за наличия граничных членов, которые необходимы для того, чтобы учесть изменение граничных условий.

Если выполнить в (9.159) интегрирование по  $\lambda$ :

$$\langle f | i \rangle = \int \mathcal{D}(p, q) \prod_i [\delta(f) \delta(g) \det \{g, f\}] \exp \left[ i \int dt (p\dot{q} - h) \right],$$

то мы увидим, что благодаря присутствию  $\delta(f)$  все величины определены с точностью до функции на  $\mathcal{A}$ . Применяя затем каноническое преобразование (9.163) и используя соотношение

$$\prod_{k=1}^m \delta(f_k) \rightarrow \det(1 + \delta A)^{-1} \prod_{k=1}^m \delta(f_k),$$

можно показать, что

$$\begin{aligned} & \prod_{k=1}^m [\delta(f_k) \delta(g_k)] \det \{g, f\} \rightarrow \\ & \rightarrow \det(1 + \delta A)^{-1} \prod_{k=1}^m [\delta(f_k) \delta(g_k + \delta g_k)] \det \{g + \delta g, f + \delta f\}, \end{aligned}$$



поскольку разности  $\delta g - \{\delta F, g\}$  и их скобки Пуассона с  $f$  и  $f + \delta f$  обращаются в нуль на  $C$ . Наконец, мы можем записать

$$\det \{g + \delta g, f + \delta f\} = \det (1 + \delta A) \det \{g + \delta g, f\}.$$

В итоге получаем

$$\prod_{k=1}^m [\delta (f_k) \delta (g_k)] \det \{g, f\} \rightarrow \prod_{k=1}^m [\delta (f_k) \delta (g_k + \delta g_k)] \det \{g + \delta g, f\}. \quad (9.165)$$

Таким образом, мы доказали, что континуальный интеграл (9.159) с точностью до граничных членов, присутствующих в фазе, действительно не зависит от инфинитезимального изменения вспомогательных условий. Читателю предлагается объяснить роль этих граничных членов, равных  $\exp \{i [p \delta \delta F / \delta p]_i\}$ , а также обобщить данные рассуждения на случай, когда вспомогательные условия зависят от времени.

### 9.3.2. Электромагнитное поле как пример

Чтобы познакомиться ближе с рассмотренным выше методом квантования, вернемся к случаю электромагнитного поля с  $c$ -числовым внешним сохраняющимся током. В этом случае действие записывается в виде

$$I = \int d^4x \left( \frac{\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2}{2} - \rho A^0 + \mathbf{j} \cdot \mathbf{A} \right).$$

Вместо того чтобы в качестве динамической переменной использовать только потенциал, мы предпочтем так называемый формализм первого порядка, в котором основными переменными являются как поля, так и потенциалы. Перепишем действие  $I$  следующим образом.

$$I = \int d^4x \left[ -\mathbf{E} \cdot (\nabla A^0 + \dot{\mathbf{A}}) - \mathbf{B} \cdot \text{rot } \mathbf{A} + \frac{\mathbf{B}^2 - \mathbf{E}^2}{2} - \rho A^0 + \mathbf{j} \cdot \mathbf{A} \right]. \quad (9.166)$$

Это выражение сводится к предыдущему, если в него вместо  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$  подставить их выражения через  $A^0$  и  $\mathbf{A}$ . Варьируя действие по полю, мы находим соотношения между полем и потенциалом:

$$\mathbf{E} = -(\nabla A^0 + \dot{\mathbf{A}}), \quad \mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}, \quad (9.167a)$$

которые приводят к первой паре однородных уравнений Максвелла:

$$\text{rot } \mathbf{E} + \dot{\mathbf{B}} = 0, \quad \text{div } \mathbf{B} = 0. \quad (9.167b)$$

Вариация по  $\mathbf{A}$  дает вторую пару уравнений:

$$\text{div } \mathbf{E} = \rho, \quad \text{rot } \mathbf{B} - \dot{\mathbf{E}} = \mathbf{j}. \quad (9.168)$$

Заметим, что

$$\frac{\delta}{\delta \mathbf{A}(\mathbf{x})} \int d^3y \mathbf{B}(\mathbf{y}) \cdot \text{rot } \mathbf{A}(\mathbf{y}) = \text{rot } \mathbf{B}(\mathbf{x}),$$

Среди этих уравнений  $\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$  и  $\text{div } \mathbf{E} = \rho$  выступают в качестве связей. Первое из них можно решить просто, заменяя всюду  $\mathbf{B}$  на  $\text{rot } \mathbf{A}$ . После интегрирования по частям получаем следующее выражение для действия:

$$I = \int d^4x \left\{ -\mathbf{E} \cdot \dot{\mathbf{A}} - \left[ \frac{E^2 + (\text{rot } \mathbf{A})^2}{2} + \mathbf{j} \cdot \mathbf{A} \right] + A^0 (\text{div } \mathbf{E} - \rho) \right\}. \quad (9.169)$$

Сравнивая данное выражение с (9.138), видим, что  $A^0$ , как и  $\lambda$ , играет роль множителя Лагранжа, которому не соответствует какая-либо сопряженная переменная. Таким образом, мы пришли к отождествлению канонических переменных  $(p_i, q_i)$  с  $\mathbf{A}(\mathbf{x})$  и  $\mathbf{E}(\mathbf{x})$  соответственно. Скобки Пуассона определяются посредством соотношения

$$\{A_i(\mathbf{x}), E_j(\mathbf{y})\} = \delta_{ij} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \quad (9.170)$$

Условия совместимости (9.152) необходимо обобщить, чтобы охватить случаи, когда  $\rho$  зависит от времени. Эти условия записываются теперь в виде

$$F \sim 0 \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial t} + \{h, F\} \sim 0, \quad (9.171)$$

где дифференцирование по времени выполняется для функции, имеющей явную зависимость от времени. В нашем случае  $F = \text{div } \mathbf{E} - \rho$  и

$$\frac{\partial}{\partial t} (\text{div } \mathbf{E} - \rho) = -\frac{\partial \rho}{\partial t}.$$

Условие (9.171) сводится к равенству

$$-\frac{\partial \rho}{\partial t} + \left\{ \int d^3y \left[ \frac{E^2 + (\text{rot } \mathbf{A})^2}{2} + \mathbf{j} \cdot \mathbf{A} \right], \text{div } \mathbf{E} - \rho \right\} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} - \text{div } \mathbf{j} = 0, \quad (9.172)$$

которое выполняется тождественно благодаря сохранению тока. Таким образом, за исключением этого минимального обобщения, рассматриваемый случай укладывается в рамки описания, приведенного в разд. 9.3.1.

Остается выбрать вспомогательные условия  $g(\mathbf{E}, \mathbf{A}) = 0$ . Разумеется, такой выбор в значительной степени является произвольным. В случае когда как  $g$ , так и связь  $\text{div } \mathbf{E} - \rho = 0$  являются линейными относительно динамических переменных, имеет место серьезное упрощение. При этих условиях  $\det \{g, f\}$  не зависит от переменных и, следовательно, его можно включить в нормировку континуального интеграла. Допустимым условием является следующее:

$$\partial_\mu A^\mu \equiv \dot{A}^0 + \text{div } \mathbf{A} = c(\mathbf{x}, t), \quad (9.173)$$

где  $c(\mathbf{x}, t)$  — произвольная функция.

Вернемся к ковариантным обозначениям и запишем амплитуду перехода в виде

$$\int \mathcal{D}(F, A) \prod_x \delta(\partial \cdot A - c) \exp \left\{ i \int d^4x \left[ \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{2} F_{\mu\nu} (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) - j \cdot A \right] \right\}. \quad (9.174)$$

Интеграл Гаусса по  $\mathbf{V}$  автоматически осуществляет подстановку  $\mathbf{V} \rightarrow \text{rot } \mathbf{A}$ . Аналогично интеграл по  $\mathbf{E}$  дает вместо электрического поля его значение  $-(\nabla A^0 + \dot{\mathbf{A}})$ . Выполняя эти действия, получаем следующее выражение для амплитуды:

$$\int \mathcal{D}(A) \prod_x \delta(\partial \cdot A - c) \times \exp \left\{ -i \int d^4x \left[ \frac{1}{4} (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) + j \cdot A \right] \right\}. \quad (9.175)$$

Это не совсем то выражение, которое использовалось в предыдущих главах. Однако, поскольку (9.175) не зависит от произвольной функции  $c(x, t)$ , можно получить полную идентификацию данных выражений, интегрируя по этим функциям  $c(x, t)$  с весом  $\exp \left[ -(i\lambda/2) \int d^4x c^2 \right]$ . Обозначая разность  $\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$  через  $F_{\mu\nu}$ , находим окончательный вариант континуального интеграла, который совпадает с известным выражением

$$\int \mathcal{D}(A) \exp \left\{ -i \int d^4x \left[ \frac{F^2}{4} + \frac{\lambda}{2} (\partial \cdot A)^2 + j \cdot A \right] \right\}. \quad (9.176)$$

Данный подход иллюстрирует произвол, связанный с калибровочной инвариантностью. Имеет также смысл сравнить его с операторным формализмом.

## 9.4. ВЫСОКИЕ ПОРЯДКИ ТЕОРИИ ВОЗМУЩЕНИЙ

### 9.4.1. Введение

Функциональные интегралы дают нам новое средство для исследования различных аспектов теории поля. В качестве иллюстрации приведем в заключение настоящей главы анализ теории возмущений в высоких порядках. Одна из целей нашего изучения состоит в том, чтобы попытаться лучше понять причины поразительной точности, которую дают последовательные приближения в квантовой электродинамике и в других многообещающих моделях с малыми константами связи. Мы предпринимаем это исследование, надеясь также преодолеть ограничения, характерные для разло-

жений теории возмущений, и включить в рассмотрение явления сильной связи. Хотя наши знания на сегодняшний день еще далеки от того, чтобы их можно было считать удовлетворительными, достигнутые важные результаты оправдывают те усилия, которые предпринимаются в данном направлении. Кроме того, здесь нам представляется случай продемонстрировать применение методов расчета, связанных с использованием континуальных интегралов.

По своей природе ряд теории возмущений связан с аналитическими свойствами функций Грина как функций константы связи в окрестности нуля. Изучение этих свойств возможно, но является чрезвычайно сложным делом.

К счастью, существует менее строгий, но реально осуществимый подход, который приводит к аналогичным выводам, а именно что ряд теории возмущений во всех интересных случаях сильно расходится. Однако, несмотря на это, ряд теории возмущений, как будет видно из дальнейшего изложения, может оказаться весьма полезным.

Таким образом, нашу задачу можно разбить на две независимые части. Сначала мы ищем оценку для высоких порядков разложения функции Грина, заданного хорошо определенными правилами Фейнмана и рецептами перенормировки. Некоторые аспекты этой программы уже завершены. Стоит заметить, что здесь мы уже не зависим от ответа на вопрос, определяет ряд однозначную математическую величину или нет. Для некоторых практических целей этот первый этап может оказаться вполне достаточным. Например, может случиться так, что квантовая электродинамика в ее современном виде не является полностью последовательной и что в рамках более глубокой теории степенные ряды по  $\alpha$  окажутся асимптотическими.

Вторая часть задачи состоит в том, чтобы попытаться восстановить из данных разложений однозначную теорию в соответствии с некоторыми определенными рецептами. Эта задача, очевидно, трудноразрешима, и для ее решения потребуются дополнительная информация. Последнюю можно получить с помощью независимого построения. Тем не менее в самой структуре ряда можно обнаружить такие свойства, которые подскажут нам разумные способы его суммирования.

Природу расходимостей нетрудно понять на примере исследования простого случая. Для этой цели заменим континуальные интегралы обычными интегралами вида

$$Z(g) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} d\varphi e^{-(\varphi^2/2 + g\varphi^4)}, \quad (9.177)$$

Разумеется, этот случай настолько тривиален, что можно получить  $Z(g)$  в замкнутой форме. В точке  $g=0$  имеется существенная сингулярность. При отрицательных  $\operatorname{Re} g$  (и при  $|\operatorname{Arg} g| < \pi$ ) контур интегрирования в (9.177) можно повернуть. Это становится невозможным, когда  $g$  приближается к отрицательной вещественной оси и интеграл расходится при больших  $\varphi$ . Величину  $\varphi$  можно рассматривать как значение поля в точке, а выражение  $\varphi^2/2 + g\varphi^4$  — как что-то похожее на действие. Отрицательные значения  $g$  отвечают нестабильной ситуации, когда «потенциал» не ограничен снизу. Это находит отражение в разложении по теории возмущений, если записать

$$Z(g) = \sum_{k=0}^{\infty} g^k Z_k,$$

где

$$Z_k = \frac{(-1)^k}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} d\varphi \frac{\varphi^{4k}}{k!} e^{-\varphi^2/2} = (-1)^k 4^k \frac{\Gamma(2k + \frac{1}{2})}{\sqrt{\pi} k!}. \quad (9.178)$$

Используя формулу Стирлинга

$$k! \sim \sqrt{2\pi k} e^k \ln k - k,$$

мы видим, что при больших  $k$  величина  $Z_k$  дается выражением

$$Z_k \sim \frac{(-16)^k}{\sqrt{\pi}} e^{(k-1/2) \ln k - k}. \quad (9.179)$$

Тем не менее степенной ряд по  $g$  является асимптотическим в комплексной  $g$ -плоскости, разрезанной вдоль отрицательной вещественной полуоси, поскольку из оценки

$$\left| Z(g) - \sum_{k=0}^n Z_k g^k \right| < \frac{4^{n+1} \Gamma(2n + \frac{3}{2})}{\sqrt{\pi} (n+1)!} \frac{|g|^{n+1}}{\{\cos \{(1/2) \operatorname{Arg} g\}\}^{2n+3/2}} \quad (9.180)$$

следует, что при фиксированном  $n$  и достаточно малом  $g$  ее правую часть можно сделать сколь угодно малой.

Асимптотическое поведение величины  $Z_k$  было получено с помощью формулы Стирлинга, примененной к точному выражению. Однако в реальных случаях точное выражение получить невозможно. Рассмотренный пример наводит на мысль применить к выражению

$$Z_k = \frac{(-1)^k}{k!} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} d\varphi e^{-\varphi^2/2 + 4k \ln \varphi} \quad (9.181)$$

при больших  $k$  метод перевала. Положение седловой точки определяется равенством

$$\varphi_c^2 = 4k, \quad (9.182)$$

а интегрирование по квадратичным отклонениям от  $\varphi_c$  дает

$$Z_k \sim \frac{(-1)^k}{k!} \sqrt{2} e^{2k \ln 4k - 2k} = \frac{(-16)^k}{\sqrt{\pi}} e^{(k-1/2) \ln k - k}, \quad (9.183)$$

как и прежде.

Какую информацию можно извлечь из такого расходящегося ряда помимо использования его в асимптотическом смысле для вычисления функции при малых  $g$ ? При некоторых благоприятных обстоятельствах, подобных тем, которые мы здесь обсуждали, степенной ряд (9.178) в действительности содержит достаточно информации для однозначного восстановления функции. Конечно, имеется возражение, что всегда можно добавить произвольную функцию типа  $\exp(-1/\sqrt{g})$ , производные которой обращаются в нуль в начале координат при стремлении к нему вдоль положительной вещественной оси. Однако в хорошо определенном классе функций, в котором исключены такого рода патологии [и к которым принадлежит  $Z(g)$ ], мы можем с помощью преобразования Бореля восстановить  $Z(g)$  из соответствующего расходящегося ряда теории возмущений.

Введем функцию

$$B(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{Z_k t^k}{\Gamma(k+3/2)}, \quad (9.184)$$

в которой присутствие в знаменателе  $\Gamma(k+3/2)$  оправдывается поведением, описываемым формулой (9.179). В зависимости от рассматриваемого случая эта величина может несколько меняться. Ряд в (9.184) будет сходиться в круге конечного радиуса комплексной  $t$ -плоскости. Если функцию  $B(t)$  можно продолжить на всю вещественную положительную полуось и она не возрастает слишком быстро на бесконечности, то  $Z(g)$  можно записать в виде

$$Z(g) = \int_0^{\infty} dt t^{1/2} B(gt) e^{-t}. \quad (9.185)$$

Для доказательства суммируемости по Борелю недостаточно того, что нам известен ряд теории возмущений. Однако этого достаточно, чтобы доказать отсутствие суммируемости в случае, когда  $B(t)$  имеет сингулярность на положительной вещественной полуоси. Это имеет место, например, когда  $Z_k$  имеют асимптотически одинаковые фазы.

В нашем простом случае мы имеем

$$B(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{1-u},$$

$$u = \frac{\sqrt{1+16t}-1}{\sqrt{1+16t}+1},$$
(9.186)

причем  $B(t)$  является аналитической в плоскости, разрезанной на промежутке от  $-1/16$  до  $-\infty$ .

Для того чтобы получить сходящееся разложение функции  $Z(g)$ , отобразим разрезанную  $t$ -плоскость на круг, не меняя положение нуля (здесь это обеспечено выбором переменной  $u$ ), и выпишем сходящийся ряд Тейлора для  $\tilde{B}(u)$ :

$$B(t) = \tilde{B}(u) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k [u(t)]^k,$$
(9.187)

вытекающий из соответствующего разложения по  $t$ . При этом

$$Z(g) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k \int_0^{\infty} dt t^{1/2} [u(gt)]^k e^{-t}.$$
(9.188)

Поскольку коэффициенты  $b_k$  убывают здесь как  $k^{-3/2}$ , легко видеть, что этот новый ряд будет сходиться как  $e^{-z(k/3g^{1/2})^{2/3}}$ .

Поведение, обнаруживаемое в данном примере, говорит о тесной связи с некоторыми расходимостями, которые встречались нам в теории поля, поскольку коэффициенты разложения  $Z(g)$  по степеням величины  $g$  равны числу вакуумных диаграмм в теории  $\phi^4$ . Это следует непосредственно из того факта, что теорема Вика применима к интегралам от мономов с гауссовым весом.

Данное замечание применимо и к другим теориям поля. Рассмотрим, например, в электродинамике интеграл

$$\tilde{Z}(j, \bar{\eta}, \eta) = \frac{1}{\pi} \int dA d\bar{\psi} d\psi e^{-A^2/2 - \bar{\psi}(1-eA)\psi + \bar{\eta}\eta + \bar{\eta}\psi + jA} =$$

$$= \int \frac{dA}{1-eA} e^{-A^2/2 + \bar{\eta}\eta/(1-eA) + jA},$$
(9.189)

где предполагается, что  $\psi$  и  $\bar{\psi}$  представляют собой комплексно-сопряженные  $c$ -числовые переменные. За исключением сокращений, вытекающих из теоремы Фарри, разложение функции  $\ln \tilde{Z}$  по степеням величины  $e$  дает число диаграмм, отвечающих связным функциям. Это осуществляется симметризацией производящей функции для заряженных петель по отношению к  $e$ , когда  $\ln(1-eA) \rightarrow (1/2) \ln(1-e^2 A^2)$ ,  $\tau$   $e$  заменой  $\tilde{Z}$  на

$$Z(j, \bar{\eta}, \eta) = \int \frac{dA}{\sqrt{1-e^2 A^2}} e^{-A^2/2 + \bar{\eta}\eta/(1-eA) + jA},$$
(9.190)

Интеграл имеет смысл при отрицательных  $e^2$ . Фотонный и электронный пропагаторы  $G$  и  $S$ , связанные с поляризацией вакуума  $\bar{\omega}$  и собственной энергией  $\Sigma$ , запишутся соответственно в виде

$$\begin{aligned} G &= (1 - \bar{\omega})^{-1} = \langle A^2 \rangle, \\ S &= (1 - \Sigma)^{-1} = \left\langle \frac{1}{1 - e^2 A^2} \right\rangle, \end{aligned} \quad (9.191)$$

где усреднение выполняется с мерой  $(dA/\sqrt{1 - e^2 A^2}) e^{-A^2/2}$ . Удивительно, что эти выражения совпадают:

$$G = S = -2z \left[ 1 + \frac{d}{dz} \ln K_0(z) \right], \quad z = -\frac{1}{4e^2}; \quad (9.192)$$

здесь  $K_0(z)$  — модифицированная функция Бесселя:

$$K_0(z) = \int_0^{\infty} d\theta e^{-z \operatorname{ch} \theta}.$$

Разложение выражения (9.192) при больших  $z$  дает

$$\begin{aligned} G = S &= 1 + e^2 + 4e^4 + 25e^6 + 208e^8 + 2146e^{10} + 26368e^{12} + \dots, \\ \bar{\omega} = \Sigma &= e^2 + 3e^4 + 18e^6 + 153e^8 + 1638e^{10} + 20898e^{12} + \dots \end{aligned} \quad (9.193)$$

Эти выражения следует сравнивать с числом диаграмм для поляризации вакуума при наличии лишь одной заряженной петли:

$$\bar{\omega}_1 = \Sigma (2n - 1)!! e^{2n} = e^2 + 3e^4 + 15e^6 + 105e^8 + 945e^{10} + 10395e^{12} + \dots \quad (9.194)$$

Аналогично производящая функция для вершинных диаграмм равна

$$\Gamma = 4z(1 - S)S^{-2}G^{-1} = 1 + e^2 + 7e^4 + 72e^6 + 891e^8 + 12672e^{10} + \dots \quad (9.195)$$

Особо смелые люди берутся за вычисление 891 диаграммы для электронной аномалии в восьмом порядке, но можно ли всерьез задумываться о рассмотрении 12672 диаграмм в десятом порядке?

#### 9.4.2. Ангармонический осциллятор

Применим рассмотренные выше идеи к изучению квантовомеханической системы. Хотя метод работает для любого полиномиального потенциала, для определенности рассмотрим энергию основного состояния ангармонического осциллятора с гамильтонианом

$$H = \frac{1}{2}(p^2 + \varphi^2) + g\varphi^4. \quad (9.196)$$

Обозначим конфигурационную переменную через  $\varphi$ , а сопряженный ей импульс — через  $p$ , чтобы подчеркнуть формальную аналогию с теориями поля высших размерностей. Задачу о разложении по степеням величины  $g$  можно рассматривать в рамках уравнения Шредингера. Мы ожидаем, что в случае бесконечно малых отрицательных  $g$  имеет место неустойчивость, которую можно исследовать с помощью приближения ВКБ (приближение



Вентцеля — Крамерса — Бриллюена). Поскольку в случае высших размерностей этот метод неприменим непосредственно, поучительно использовать альтернативный подход, построенный по аналогии с предыдущим примером.

Матричные элементы оператора эволюции  $e^{-itH}$  можно представить в виде континуальных интегралов. Такое же представление существует и для следа оператора  $e^{-\beta H}$ , который интерпретируется как функция распределения канонического ансамбля осцилляторов. Здесь  $\beta^{-1}$  равно абсолютной температуре, умноженной на постоянную Больцмана, причем величина

$$F = -\frac{1}{\beta} \ln (\text{sp } e^{-\beta H}) \quad (9.197)$$

является свободной энергией. Когда температура стремится к нулю, или  $\beta$  — к бесконечности, величина  $F$  представляет собой энергию основного состояния

Таким образом, функцию распределения  $Z(g)$  можно записать в виде континуального интеграла от экспоненты, показатель степени которой есть не что иное, как евклидово действие (т. е. действие, в котором относительный знак между кинетической и потенциальной энергией заменен на обратный по сравнению с обычным выражением). Функции  $\varphi(t)$  являются периодическими во «времени»:  $\varphi(0) = \varphi(\beta)$  в соответствии с тем фактом, что мы вычисляем след

$$\text{sp } e^{-\beta H} = Z(g) = \int \mathcal{D}\varphi \exp \left[ -\int_0^\beta dt \left( \frac{\dot{\varphi}^2 + \varphi^2}{2} + g\varphi^4 \right) \right]. \quad (9.198)$$

Энергия основного состояния дается формулой

$$E(g) - E(0) = \lim_{\beta \rightarrow \infty} \left[ -\frac{1}{\beta} \ln \frac{Z(g)}{Z(0)} \right], \quad (9.199)$$

где  $Z(g)$  определяется выражением (9.198).

Разложение отношения  $Z(g)/Z(0)$  по степеням  $g$  имеет вид

$$\frac{Z(g)}{Z(0)} = \sum_{k=0}^{\infty} Z_k g^k, \quad (9.200)$$

$$Z_k = \frac{(-1)^k}{k!} \frac{1}{Z(0)} \int \mathcal{D}\varphi \exp \left[ -\int_0^\beta dt \frac{\dot{\varphi}^2 + \varphi^2}{2} + k \ln \left( \int_0^\beta dt \varphi^4 \right) \right].$$

При больших  $k$  величина  $Z_k$  вычисляется посредством метода перевала. Мы ищем седловую точку  $\varphi_c(t)$ , для которой выполняется равенство  $\varphi_c(0) = \varphi_c(\beta)$  и которая минимизирует эффек-

тивное действие

$$I = \int_0^\beta dt \frac{\dot{\varphi}^2 + \varphi^2}{2} - k \ln \left( \int_0^\beta dt \varphi^4 \right), \quad (9.201)$$

т. е.  $\varphi_c$  должно удовлетворять уравнению

$$\ddot{\varphi}_c - \varphi_c + \frac{4k\varphi_c^3}{\int_0^\beta dt' \varphi_c^4(t')} = 0. \quad (9.202)$$

Переопределяя  $\varphi_c$  с помощью соотношения

$$\varphi_c(t) = \left[ \frac{4k}{\int_0^\beta dt' \tilde{\varphi}^4(t')} \right]^{1/2} \tilde{\varphi}(t), \quad (9.203)$$

приходим к уравнению

$$\ddot{\tilde{\varphi}} - \tilde{\varphi} + \tilde{\varphi}^3 = 0, \quad (9.204)$$

которое выражает тот факт, что  $\tilde{\varphi}$  имеет первый порядок, тогда как  $\varphi_c$  растет как  $k^{1/2}$ . По сравнению с обычным уравнением движения в уравнении (9.204) изменены два знака, а также бла-

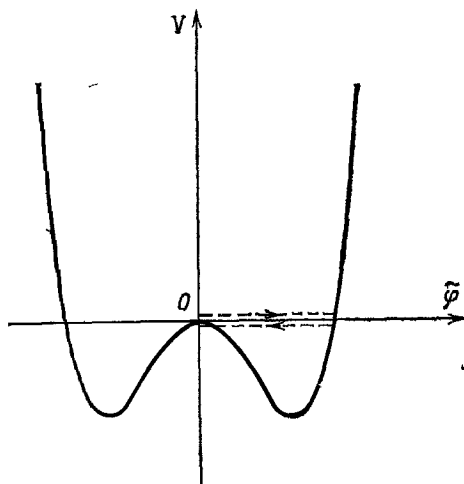


РИС. 9.6. Эффективный потенциал в евклидовом пространстве.  $V(\tilde{\varphi}) = -\tilde{\varphi}^2/2 + \tilde{\varphi}^4/4$ . Штриховой линией показано движение в ограниченных пределах.

годаря (9.203) отсутствует зависимость от константы связи. Во-первых, знак потенциала, а следовательно, и силы, изменен на противоположный благодаря повороту к евклидову времени (другой способ перехода в евклидову область состоит в замене  $t$

на  $it$ , изменяющей знак ускорения) Во-вторых, эффективная связь отрицательна, о чем говорит относительный знак между гармоническим ( $\tilde{\varphi}$ ) и ангармоническим ( $\tilde{\varphi}^3$ ) членами Эффективный потенциал изображен на рис 9 6 Уравнение является трансляционно-инвариантным во времени и симметричным относительно преобразования  $\tilde{\varphi} \rightarrow -\tilde{\varphi}$

Сдвигая начало отсчета времени  $t$ , можно перейти вместо  $[0, \beta]$  к симметричному временному интервалу  $[-\beta/2, \beta/2]$  В пределе  $\beta \rightarrow \infty$  интервал становится бесконечным, и решение, минимизирующее действие, записывается в виде

$$\tilde{\varphi}_\tau(t) = \frac{V\sqrt{2}}{\text{ch}(t-\tau)} \quad (9.205)$$

с точностью до общего знака и при произвольном выборе начала отсчета времени  $\tau$  Очевидно, что данное выражение удовлетворяет периодическим граничным условиям, которые здесь дополнены условием конечности действия Таким образом, имеется бесконечное число вырожденных седловых точек, удовлетворяющих условиям

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dt \frac{\tilde{\varphi}^2}{2} = 2, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} dt \frac{\tilde{\varphi}^4}{4} = \frac{4}{3}, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} dt \frac{\tilde{\varphi}^2}{2} = \frac{2}{3}, \quad (9.206)$$

$$I_c = \lim_{\beta \rightarrow \infty} \left[ \int_0^\beta dt \frac{\dot{\varphi}_c^2 + \varphi_c^2}{2} - k \ln \left( \int_0^\beta dt \varphi_c^4 \right) \right] = -k \ln(3k^2) + 2k. \quad (9.207)$$

В этом пределе соотношение между  $\varphi_c$  и  $\tilde{\varphi}$  запишется в виде

$$\varphi_c = \sqrt{3k/4} \tilde{\varphi} \quad (9.208)$$

Из-за вырождения седловых точек, которое является следствием симметрий задачи, интегрирование по квадратичным отклонениям от минимума требует некоторой осторожности Правильнее отнести это к проблемам квантования, поскольку мы ищем квантовые частоты осцилляций около классического экстремума действия Этот вопрос возникает всякий раз, когда классическая седловая точка используется с целью нахождения приближенного выражения для континуального интеграла и имеется вырождение, связанное с непрерывной инвариантностью Нулевой частоте отвечают одна или несколько мод В данном случае они соответствуют трансляции во времени и их следует отделить прежде всего для того, чтобы после интегрирования по  $\tau$  получить множитель  $\beta$  Разумеется, существенно то, чтобы величина  $\beta$  оставалась конечной, хотя и большой, несмотря на то что для тех величин, которые допускают конечный предел, её можно было бы выбрать даже

бесконечной. Рассматриваемая задача имеет непосредственное отношение к квантованию систем со связями, которые мы изучали в разд. 9.3

Таким образом, наша цель состоит в том, чтобы исследовать отдельно коллективную моду, возникающую благодаря трансляционной степени свободы. Для этого введем в континуальный интеграл следующий фактор, равный единице:

$$1 = \int_{-\beta/2}^{\beta/2} d\tau \delta(\theta_\varphi - \tau), \quad (9.209)$$

где  $\theta_\varphi$  определяется неявно с помощью условия

$$\int dt \psi(t - \theta_\varphi) \varphi(t) = 0, \quad (9.210)$$

а функция  $\psi$  является нормированной производной от  $\tilde{\varphi}$ , соответствующей, скажем, точке  $\tau = 0$ :

$$\psi(t) = \frac{\dot{\tilde{\varphi}}(t)}{\left(\int dt \dot{\tilde{\varphi}}^2\right)^{1/2}}. \quad (9.211)$$

Мы вскоре выясним, почему нам пришлось сделать такой выбор.

Если над полем  $\varphi$  произведено преобразование трансляции на величину  $\tau$ , а именно  $\varphi(t) \rightarrow \varphi_\tau(t) = \varphi(t - \tau)$ , то при этом предельное действие и континуальный интеграл по путям остаются инвариантными, но  $\theta_\varphi$  заменяется на  $\theta_\varphi + \tau$ . Таким образом, интегрирование по  $\tau$  можно выполнить явно, что дает, как и ожидалось, множитель  $\beta$ . Следовательно,

$$Z_k = \beta \frac{(-1)^k}{k!} e^{-Ic} \frac{1}{Z(0)} \int \mathcal{D}\varphi \delta(\theta_\varphi) e^{-(I-Ic)}. \quad (9.212)$$

С точностью до знака благодаря  $\delta$ -функции мы получим единственную седловую точку. Можно произвести разложение около одного из двух решений (например, положительного) при условии, что результат умножается на два, поскольку вследствие симметрии оба вклада равны друг другу. Положим

$$\varphi = \varphi_c + \chi \quad (9.213)$$

и удержим главные члены в разложении по  $\chi$ . При этом получаем

$$\delta(\theta_\varphi) = \left| \int dt \dot{\psi}(\varphi_c + \chi) \right| \delta\left(\int dt \dot{\psi}\chi\right). \quad (9.214)$$

В главном порядке мы опускаем  $\int dt \dot{\psi}\chi$  и видим, что

$$-\int dt \dot{\psi}\varphi_c = \sqrt{\frac{3k}{4}} \left(\int dt \dot{\tilde{\varphi}}^2\right)^{1/2} = \sqrt{k}. \quad (9.215)$$

Во втором порядке по  $\chi$  величина  $I - I_c$  имеет вид

$$I - I_c = \frac{1}{2} \left[ \int dt \left( \dot{\chi}^2 + \chi^2 - \frac{6\chi^2}{\text{ch}^2 t} \right) + \left( \int dt u \chi \right)^2 \right], \quad (9.216)$$

где

$$u = \frac{\sqrt{3}}{2} \bar{\varphi}^3.$$

В скобочных обозначениях Дирака имеем

$$Z_k = \beta \frac{(-1)^k}{k!} e^{-I_c} (2k^{1/2}) \frac{\int \mathcal{D}\chi^\delta \langle \psi | \chi \rangle \exp \left[ -\frac{1}{2} \langle \chi | (K + 1 + |u\rangle \langle u|) | \chi \rangle \right]}{\int \mathcal{D}\chi \exp \left[ -\frac{1}{2} \langle \chi | (K_0 + 1) | \chi \rangle \right]}; \quad (9.217)$$

здесь  $K$  — оператор Шредингера:

$$K = -\frac{d^2}{dt^2} - \frac{6}{\text{ch}^2 t}, \quad (9.218)$$

а  $K_0$  соответствует свободной части, т. е.  $K_0 = -d^2/dt^2$ . Согласно предписанию, необходимо проинтегрировать нормированную величину  $\varphi$  по подпространству, ортогональному  $\psi$ . Спектр оператора  $K + 1$  содержит дискретную нулевую моду с собственной функцией, определяемой  $\psi$ . Действительно, дифференцируя (9.204) по времени и подставляя в результат решение (9.205), имеем

$$\left( -\frac{d^2}{dt^2} + 1 - \frac{6}{\text{ch}^2 t} \right) \dot{\varphi} = 0. \quad (9.219)$$

Это не влияет на интегрирование с  $\delta$ -функцией. Кроме того, поскольку  $\psi$  имеет один узел, существует единственная нормированная величина  $\chi$ , соответствующая отрицательному собственному значению оператора  $K + 1$ . Остальная часть спектра представляет собой положительный континуум. Из определения  $u$  следует, что  $\langle \psi | u \rangle = 0$ .

Оператор  $K$  соответствует новой задаче Шредингера с так называемым потенциалом Баргмана, которая допускает явные решения. Вычислим не равный нулю детерминант оператора  $K + 1 + |u\rangle \langle u|$  в пространстве, ортогональном  $\psi$ .

Таким образом, окончательное выражение для  $Z_k$  запишется в виде

$$Z_k = \beta \frac{(-1)^k}{k!} e^{-I_c} (2k^{1/2}) N, \quad (9.220)$$

$$N^{-2} = 2\pi \frac{\det (K + 1 + |u\rangle \langle u|)_{\perp}}{\det (K_0 + 1)_{\perp}}.$$

Множитель  $2\pi$  здесь обусловлен наличием гауссова интеграла по  $\psi$ , который не учитывается в знаменателе, когда мы рассматриваем

оператор  $(K_0 + 1)_\perp$ . Этот множитель станет другим, если мы предпочтем не нормировать  $\psi$ . От дополнительного проектора  $|u\rangle\langle u|$  нетрудно избавиться, если заметить, что

$$(K + 1)\tilde{\varphi} = -2\tilde{\varphi}^3 = -(4/\sqrt{3})u. \quad (9.221)$$

Выше мы отмечали, что, поскольку  $|u\rangle$  принадлежит подпространству, ортогональному  $\psi$ , уравнение (9.221) можно обратить в этом пространстве, и мы получим

$$\begin{aligned} \det(K + 1 + |u\rangle\langle u|)_\perp &= \det(K + 1)_\perp \left(1 + \langle u | \frac{1}{K+1} |u\rangle\right) = \\ &= \det(K + 1)_\perp \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{4} \langle \tilde{\varphi} |u\rangle\right) = \\ &= -\det(K + 1)_\perp. \end{aligned} \quad (9.222)$$

Знак минус нас вполне устраивает, так как остается единственное отрицательное собственное значение оператора  $(K + 1)_\perp$ . На практике, для того чтобы отделить вклад поперечных мод, можно использовать предельную процедуру, заменяя  $K + 1$  на  $K + z$  и отделяя коэффициент при  $(z - 1)$ , когда  $z \rightarrow 1$ . Таким образом,

$$N^{-2} = -2\pi \frac{\det(K + 1)_\perp}{\det(K_0 + 1)_\perp} = -2\pi \lim_{z \rightarrow 1} \frac{1}{z - 1} \frac{\det(K + z)}{\det(K_0 + z)}. \quad (9.223)$$

Существует несколько методов получения явного выражения для этого детерминанта Фредгольма. Наиболее поучительный из них, допускающий обобщение на произвольный одномерный потенциал, состоит в том, чтобы связать вычисление флуктуаций около седловой точки в континуальном интеграле и обычное ВКБ-приближение для волновых функций. Следует также заметить, что в данном случае проблема флуктуаций сводится к решаемому уравнению. Применение находят оба метода, которые в результате дают

$$\frac{\det(K + z)}{\det(K_0 + z)} = \frac{\Gamma(1 + \sqrt{z})\Gamma(\sqrt{z})}{\Gamma(3 + \sqrt{z})\Gamma(\sqrt{z} - 2)}, \quad (9.224)$$

откуда мы находим

$$N^{-2} = \pi/6. \quad (9.225)$$

Объединяя все сомножители, получаем

$$Z_k = \beta \frac{(-1)^k}{k!} 2k^{1/2} \sqrt{\frac{6}{\pi}} e^{k \ln(3k^2) - 2k}. \quad (9.226)$$

Как и следовало ожидать, это приводит к растущему фактору вида  $k!$ , как, например, для функции

$$Z_k = \beta \Gamma(k + 1/2) (-3)^k (6/\pi^3)^{1/2}. \quad (9.227)$$

Благодаря такому поведению данный результат можно переписать в терминах разложения для энергии. Действительно, главный вклад в коэффициент при  $g^k$  в разложении для  $\ln\left(1 + \sum_{p=1}^{\infty} c_p g^p\right)$  имеет вид  $c_k [1 + O(1/k)]$ , где  $c_k$  растет как  $k!$ . Таким образом, применяя формулу (9.199), находим, что множитель  $\beta$  выпадает, и мы получаем

$$E(g) = (1/2) + \sum_{k=1}^{\infty} g^k E_k, \tag{9.228}$$

$$E_k = (-1)^{k+1} \Gamma\left(k + \frac{1}{2}\right) 3^k \left(\frac{6}{\pi^3}\right)^{1/2} \left[1 + O\left(\frac{1}{k}\right)\right].$$

Впервые это соотношение получили Бендер и Ву.

Граффи, Греччи и Саймон в случае ангармонического осциллятора сумели показать, что функция  $E(g)$  суммируема по Борелю, т. е. может быть записана в виде преобразования Бореля с помощью соотношения типа (9.185).

Затем, используя стандартную технику теории возмущений в окрестности седловой точки, можно получить систематическим образом поправки по степеням величины  $1/k$ . Данный метод можно также обобщить на возбужденные состояния, удерживая в выражении для действия в седловой точке члены порядка  $e^{-\beta}$  и разлагая  $e^{-I_c}$  по степеням величины  $e^{-\beta}$ .

Заметим, наконец, что помимо периодических решений с периодом  $\beta$  существуют решения с дробными периодами  $\beta/2, \beta/3, \dots$ , которым также могут соответствовать седловые точки. Этим решениям отвечают значения классического действия, которые превосходят наименьшее в два, три и т. д. раз. Следовательно, поправки, вносимые ими в наши результаты, экспоненциально малы.

В принципе эти методы можно непосредственно обобщить на теорию поля, по крайней мере пока не рассматриваются перенормировки. Аналогичным образом находят точки неустойчивости при малых константах связи. Они ответственны за сингулярности в плоскости, преобразованной по Борелю. До тех пор пока эти сингулярности не достигают положительной вещественной оси (считается, что последняя отвечает физической ситуации), теория последовательно. Эта дополнительная информация позволяет использовать наиболее эффективным образом первые несколько членов ряда теории возмущений с целью точного определения физических величин. Данная программа привела к большому успеху в ряде приложений бозонной теории  $\phi^4$  в трех измерениях к проблемам статистической механики. Эту программу можно обобщить и на фермионные поля. Однако могут встретиться также сингулярности на положительной вещественной полуоси, которые являются следствием подлинных неустойчивостей. С такими сингулярностями можно столкнуться даже при квазиклассическом рассмотрении (например, в случае калибровочных полей, рассматриваемых в гл. 12). Вследствие этого для построения теории возмущений мы должны среди нескольких вырожденных минимумов классической энергии выбрать один. При этом расходимость ряда отражает квантовый туннельный эффект между данными основными состояниями. Классические евклидовы

решения уравнений поля с конечным действием  $I$  интерполируют между этими состояниями, давая вклад в амплитуду перехода  $e^{-I/h}$ . Следовательно, для построения разумной теории необходимо устранить это вырождение, вводя дополнительные квантовые числа.

Дополнительные сингулярности могут возникнуть также в результате перенормировки. Это, по-видимому, ставит трудные проблемы, связанные с последовательностью перенормируемых теорий поля.

## ПРИМЕЧАНИЯ

Идея о континуальных интегралах, основанных на принципе суперпозиции, в квантовой механике впервые появилась в работе Дирака (см.: *Dirac P. A. M.*—*Physikalische Zeitschrift der Sowjetunion*, 1933 vol 3, p 64) и была развита Фейнманом (см.: *Feynman R. P.*—*Rev. Mod. Phys.*, 1948, vol. 20, p. 367). Подробное изложение можно найти в книге: *Feynman R. P., Hibbs A. R. Quantum Mechanics and Path Integrals.*—New York: McGraw-Hill, 1965 [Имеется перевод: *Фейнман Р., Хиббс А.* Квантовая механика и интегралы по траекториям.—М.: Мир, 1968.]. Фермионный случай рассмотрен в монографии: *Березин Ф. А.* Метод вторичного квантования.—М.: Наука, 1965. Среди многочисленной литературы последнего времени можно сослаться на лекции Зинн-Жюстена (см.: *Zinn-Justin J. Trends in Elementary Particle Theory: В сб. статей: Lecture Notes in Physics No. 37*/ed. H. Rolnik, K. Dietz.—Berlin: Springer-Verlag, 1975), а также на лекции Л. Д. Фаддеева (см.: *Faddeev L. D.* В сб. статей. *Methods in Field Theory*/ed. R. Balian, J. Zinn-Justin.—Amsterdam: North-Holland, 1976). Подход, основанный на функциональных производных, развит Швингером (см.: *Schwinger J.*—*Phys. Rev.*, 1951, vol. 82, p 914 [Имеется перевод в сб. статей: Новейшее развитие квантовой электродинамики.—М.: ИЛ, 1954, с. 115.].

Эйкональное приближение в теории поля рассмотрено в лекциях Абарбанела (см.: *Abarbanel H. D. I.* В сб. статей: *Cargèse Lectures in Physics*/ed. D. Bessis.—New York: Gordon and Beach, 1970).

Эффективный потенциал обсуждается в статье: *Coleman S., Weinberg E.*—*Phys. Rev.*, ser. D, 1973, vol. 7, p. 1888, а также в лекциях Коулмена (см.: *Coleman S. Secret Symmetry.*—В кн.: *Laws of Hadronic Matter. Proc. of the 11th Course, International School in Physics «Ettore Majorana»*/ed. A. Zichichi.—New York: Academic Press, 1975 [Имеется перевод в книге: Квантовая теория калибровочных полей.—М.: Мир, 1977.]. Вычисления, приведенные в тексте, заимствованы из статьи: *Iliopoulos J., Itzykson C., Martin A.*—*Rev. Mod. Phys.*, 1975, vol. 47, p. 165.

Дирак впервые дал общую трактовку квантования систем со связями (см.: *Dirac F. A. M.*—*Proc Roy. Soc.*, 1958, vol. 246A, p. 326). В рамках метода континуальных интегралов эту проблему рассматривал Л. Д. Фаддеев (см.: *Теор. и мат. физика*, 1969, т. 1, с. 3).

Нестабильности вакуума и их связь с расходимостью ряда теории возмущений были впервые рассмотрены в статье: *Dyson F. J.*—*Phys. Rev.*, 1952, vol. 85, p. 631. Суммируемость по Борелю изучал Джаффе (см.: *Jaffe A. M.*—*Commun. Math. Phys.*, 1965, vol. 1, p. 127). В случае ангармонического осциллятора она была доказана Граффи, Греччи и Саймоном (см.: *Graffi S., Grecchi K., Simon B.*—*Phys. Lett.* ser. B, 1970, vol. 32, p. 631). Соотношения для ангармонического осциллятора получены Бендерсом и Ву (см.: *Bender S. M., Wu T. T.*—*Phys. Rev.*, 1969, vol. 184, p. 1231. *Phys. Rev Lett.*, 1971, vol. 27, p. 461; *Phys. Rev.*, ser. D, 1973, vol. 7, p. 1620). Квантование вблизи классического экстремума обсуждаюся в работе: *Dashen R. F., Hasslacher B., Neveu A.*—*Phys. Rev.*, ser. D, 1974, vol. 10, p. 4114.

В теории поля оценки высоких порядков рассмотрены в следующих статьях: *Лунатов Л. Н.*—ЖЭТФ, 1977, т. 45, с. 216; *Brézin E., Le Guillou J. C., Zinn-Justin J.*—*Phys. Rev.*, ser. D, 1977, vol. 15, pp. 1544, 1588.



---

## ПРИМЕЧАНИЕ РЕДАКТОРА ПЕРЕВОДА

Изложение теории континуального интеграла и ее приложений имеется в книгах: *Славнов А. А., Фаддеев Л. Д.* Введение в квантовую теорию калибровочных полей.— М.: Наука, 1978; *Попов В. Н.* Континуальные интегралы в квантовой теории поля и статистической физике.— М.: Атомиздат, 1976; *Васильев А. Н.* Функциональные методы в квантовой теории поля и статистике.— Л.: Изд-во ЛГУ, 1976.

Высокие порядки теории возмущений рассматриваются в лекциях: *Казанков Д. И., Ширков Д. В.* Суммирование асимптотических рядов в квантовой теории поля.— Дубна: P2-80-462, 1980.

## Глава 10

# ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ПРОБЛЕМА СВЯЗАННЫХ СОСТОЯНИЙ

Интегральные уравнения, связывающие амплитуды, являются важным средством изучения особенностей теории, выходящих за рамки теории возмущений. В частности, они представляют собой адекватный метод исследования релятивистских связанных состояний. Сосредоточим свое внимание в первую очередь на этой проблеме, оставляя в стороне другие интересные вопросы. В настоящей главе дано весьма подробное описание формализма, основанного на интегральных уравнениях. В качестве иллюстрации мы рассмотрим сверхтонкое расщепление позитрония.

### 10.1. УРАВНЕНИЯ ДАЙСОНА — ШВИНГЕРА

Применяя различные методы, Швингер и Дайсон независимо вывели интегральные уравнения для функций Грина как следствие уравнений поля, т. е. характерной структуры лагранжиана. В гл. 9 нам уже встречались подобные уравнения, соответствующие случаю самодействующего скалярного поля.

Если эти уравнения перенормировать должным образом, то их можно использовать как независимую основу для построения теории возмущений. Более внимательное рассмотрение показывает, что данная система уравнений представляет собой бесконечную иерархию. Вследствие этого, помимо анализа общих свойств, практическая применимость таких уравнений ограничена приближениями, необходимыми для того, чтобы придать им обозримый вид. Это досадное обстоятельство можно увязать с тем фактом, что в данном случае естественным математическим аппаратом является функциональное исчисление — метод, не очень распространенный.

#### 10.1.1. Уравнения поля

Для определенности мы будем рассматривать электродинамику, хотя данный метод применим в общем случае. Как обычно, определим производящий функционал с источником электромагнитного потенциала  $J_\mu(x)$  и антикоммутирующими источниками электрон-позитронного поля  $\eta(x)$  и  $\bar{\eta}(x)$ . Этот функционал выражается

через континуальный интеграл следующим образом:

$$Z(J, \eta, \bar{\eta}) = e^{G(J, \eta, \bar{\eta})} = \int \mathcal{D}(A, \psi, \bar{\psi}) e^{i\sigma}, \quad (10.1)$$

где

$$\sigma = I(A, \psi, \bar{\psi}) + \int d^4x [J_\mu(x) A^\mu(x) + \bar{\eta}(x) \psi(x) + \bar{\psi}(x) \eta(x)].$$

Здесь действие  $I$  представляет собой функцию от  $A, \psi, \bar{\psi}$ , определяемую соотношениями (6.25) (см т. 1 настоящей книги). Подразумевается также, что присутствует нормировочный множитель, благодаря которому связанный функционал, у которого для краткости записи опущен индекс  $c$ , удовлетворяет условию  $G(0) = 0$ .

Чтобы учесть перенормировку, можно регуляризовать действие и включить в него контрглины. Для простоты они не будут выписываться явным образом до конца наших вычислений. Уравнения поля получаются как следствие того факта, что интеграл от производной равен нулю. Мы имеем, например,

$$\begin{aligned} 0 &= \int \mathcal{D}(A, \psi, \bar{\psi}) \left[ \frac{\delta I}{\delta A^\mu(x)} + J_\mu(x) \right] e^{i\sigma} = \\ &= \left[ \frac{\delta I}{\delta A^\mu(x)} \left( \frac{1}{i\delta J}, \frac{\delta}{i\delta \eta}, -\frac{\delta}{i\delta \bar{\eta}} \right) + J_\mu(x) \right] Z(J, \eta, \bar{\eta}). \end{aligned} \quad (10.2)$$

Выпишем уравнение для производной

$$\frac{\delta I}{\delta A^\mu(x)} = [\square g_{\mu\nu} - (1 - \lambda) \partial_\mu \partial_\nu] A^\nu - e \bar{\psi} \gamma_\mu \psi. \quad (10.3)$$

С учетом этого равенства уравнение (10.2) принимает вид

$$J_\mu(x) + [\square g_{\mu\nu} - (1 - \lambda) \partial_\mu \partial_\nu] \frac{\delta G}{i\delta J_\nu(x)} - e \frac{\delta G}{\delta \mu} \gamma_\mu \frac{\delta G}{\delta \bar{\eta}} - e \frac{\delta}{\delta \eta} \left( \gamma_\mu \frac{\delta G}{\delta \bar{\eta}} \right) = 0. \quad (10.4)$$

Удобно с помощью преобразования Лежандра перейти к неприводимым функциям

$$G(J, \eta, \bar{\eta}) = i\Gamma(A, \psi, \bar{\psi}) + i \int d^4x (J \cdot A + \bar{\psi} \eta + \bar{\eta} \psi), \quad (10.5)$$

которые удовлетворяют следующим соотношениям:

$$\begin{aligned} A_\mu(x) &= \frac{1}{i} \frac{\delta G}{\delta J^\mu(x)}, \quad \psi(x) = \frac{1}{i} \frac{\delta G}{\delta \bar{\eta}(x)}, \quad \bar{\psi}(x) = -\frac{1}{i} \frac{\delta G}{\delta \eta(x)}, \\ J_\mu(x) &= -\frac{\delta \Gamma}{\delta A^\mu(x)}, \quad \eta(x) = -\frac{\delta \Gamma}{\delta \bar{\psi}(x)}, \quad \bar{\eta}(x) = \frac{\delta \Gamma}{\delta \psi(x)}. \end{aligned} \quad (10.6)$$

Подставляя эти величины в (10.4) и учитывая, что

$$-\delta_{\alpha\beta} \delta^4(x-y) = \frac{1}{i} \int d^4z \frac{\delta^2 G}{\delta \eta_\alpha(x) \delta \bar{\eta}_\beta(z)} \frac{\delta^2 \Gamma}{\delta \psi_\gamma(z) \delta \bar{\psi}_\beta(y)} \Big|_{\eta=\bar{\eta}=0, \psi=\bar{\psi}=0}, \quad (10.7)$$

в случае, когда фермионные источники равны нулю, уравнение (10.4) можно переписать в виде

$$\frac{\delta\Gamma}{\delta A^\mu(x)} \Big|_{\psi=\bar{\psi}=0} = [\square g_{\mu\nu} - (1-\lambda) \partial_\mu \partial_\nu] A^\nu(x) - ie \text{Sp} \left[ \gamma_\mu \left( \frac{\delta^2\Gamma}{\delta\bar{\psi}\delta\psi} \right)^{-1}(x, x) \right]. \quad (10.8)$$

Величина, обратная  $\delta^2\Gamma/\delta\bar{\psi}(x)\delta\psi(y)$ , является электронным пропагатором, в который включены радиационные поправки в присутствии внешнего поля. Возьмем производную по  $A$  и приравняем ее

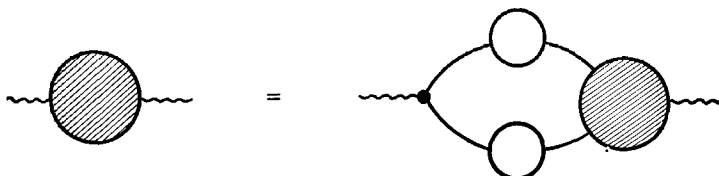


РИС. 10.1. Интегральное уравнение для амплитуды поляризации вакуума.

нулю. При этом возникают неприводимая вершинная функция (7.46) (см. т. 1 настоящей книги):

$$\frac{\delta}{\delta A^\mu(x)} \frac{\delta^2\Gamma}{\delta\bar{\psi}(y)\delta\psi(z)} \Big|_{A, \psi, \bar{\psi}=0} = e\Lambda_\mu(x; y, z), \quad (10.9)$$

амплитуда поляризации вакуума

$$\frac{\delta^2\Gamma}{\delta A^\mu(x)\delta A^\nu(y)} \Big|_{A, \psi, \bar{\psi}=0} = [\square g_{\mu\nu} - (1-\lambda) \partial_\mu \partial_\nu] \delta^4(x-y) + (\square g_{\mu\nu} - \partial_\mu \partial_\nu) \bar{\omega}(x-y) \quad (10.10)$$

и полный электронный пропагатор  $iS(x, y)$ , удовлетворяющий соотношению (рис. 10.1)

$$(g_{\mu\nu} \square - \partial_\mu \partial_\nu) \bar{\omega}(x, y) = ie^2 \int d^4z_1 d^4z_2 \text{Sp} [\gamma_\mu S(x, z_1) \Lambda_\nu(y; z_1, z_2) S(z_2, x)]. \quad (10.11)$$

Условия нормировки таковы, что в низшем порядке мы имеем

$$\Lambda_\nu(y; z_1, z_2) = \gamma_\nu \delta^4(y-z_1) \delta^4(y-z_2) + \dots, \quad (10.12)$$

$$S(x, y) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ip(x-y)}}{p - m - \Sigma(p)}.$$

Иными словами, уравнение (10.4) представляет собой усложненную форму уравнений Максвелла, по отношению к которым (10.11) является лишь малой частью. Высшие функциональные производные приводят к последующим соотношениям. Непосредственным

образом уравнения можно вывести, используя графическую интерпретацию, данную на рис. 10.1. Аналогично, уравнение Дирака следует из тождества

$$0 = \int \mathcal{D}(A, \bar{\psi}, \psi) \left[ \frac{\delta I}{\delta \bar{\psi}(x)} + \eta(x) \right] e^{i\sigma} = \\ = \left[ \frac{\delta I}{\delta \bar{\psi}(x)} \left( \frac{\delta}{i\delta J}, \frac{\delta}{i\delta \bar{\eta}}, -\frac{\delta}{i\delta \eta} \right) + \eta(x) \right] Z(J, \eta, \bar{\eta}). \quad (10.13)$$

Здесь удобно работать с полными функциями Грина в отсутствие несвязных фотонных амплитуд, получаемых как производные от  $Z(J, \eta, \bar{\eta})/Z(J, 0, 0)$ . Записывая для краткости  $Z(J, 0, 0) \equiv Z(J)$ , получаем

$$\left[ \eta(x) + \left( i\partial - m - e\gamma^\mu \frac{\delta}{i\delta J^\mu(x)} \right) \frac{\delta}{i\delta \bar{\eta}(x)} \right] Z(J, \eta, \bar{\eta}) = 0. \quad (10.14)$$

Дифференцируя по  $\eta$  и полагая  $\eta = \bar{\eta} = 0$ , имеем

$$\delta^4(x-y) Z(J) - \left[ i\partial - m - e\gamma^\mu \frac{\delta}{i\delta J^\mu(x)} \right] Z(J) S(x, y; J) = 0;$$

здесь функция  $S(x, y; J)$  описывает распространение в присутствии источника  $J$ . Вводя обозначение

$$A_\mu(x; J) = Z^{-1}(J) \frac{\delta}{i\delta J^\mu(x)} Z(J) = \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J^\mu(x)} G(J, 0, 0),$$

последнее уравнение можно переписать в виде

$$\delta^4(x-y) - \left[ i\partial - m - eA(x; J) - e\gamma^\mu \frac{\delta}{i\delta J^\mu(x)} \right] S(x, y; J) = 0, \quad (10.15)$$

где мы опустили символ Кронекера  $\delta$  для спинорных индексов. В данном уравнении можно продифференцировать по  $J$  и положить источник равным нулю, вследствие чего будет выполняться равенство  $A(x; J)|_{J=0} = 0$ . Это дает

$$(i\partial - m) S(x, y) - ie^2 \int d^4z d^4x' d^4y' \gamma_\mu G^{\mu\nu}(x, z) S(x, x') \times \\ \times \Lambda_\nu(z; x', y') S(y', y) = \delta^4(x-y), \quad (10.16)$$

поскольку полная трехточечная функция содержит неприводимую вершину, свернутую с пропагаторами двух фермионов и фотона:

$$G^{\mu\nu}(x, y) = \int d^4k e^{-ik \cdot (x-y)} \left\{ -\frac{g_{\mu\nu}}{k^2 [1 + \bar{\omega}(k^2)]} + \text{Продольные члены} \right\}. \quad (10.17)$$

Смысл уравнения (10.16) становится более ясным, если записать его в виде

$$[(i\partial - m - \Sigma) S(x, y)] = \delta^4(x-y), \quad (10.18)$$

где оператор собственной массы  $\Sigma$  дается выражением

$$\Sigma(x, y) = ie^2 \int d^4z d^4x' \gamma_\mu G^{\mu\nu}(x, z) S(x, x') \Lambda_\nu(z; x', y). \quad (10.19)$$

Это выражение иллюстрируется на рис. 10.2.

Полагая  $\eta = \bar{\eta} = 0$ , уравнение (10.4) можно переписать следующим образом:

$$\begin{aligned} [\square g_{\mu\nu} - (1-\lambda) \partial_\mu \partial_\nu] A^\nu(x; J) = \\ = -J_\mu - ie \text{Sp} [\gamma_\mu S(x, x; J)]. \end{aligned} \quad (10.20)$$

В сочетании с (10.15) это дает замкнутую функциональную систему, в которой аргументом является источник  $J$ . Альтернативно можно

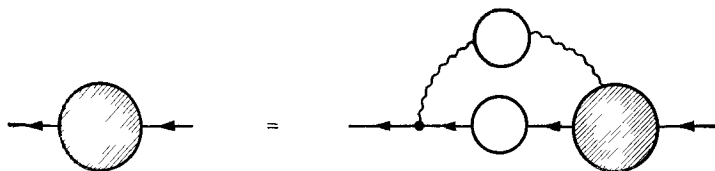


РИС. 10.2. Представление оператора собственной массы.

записать эквивалентную систему, в которой аргументом является внешний потенциал  $A$ . Для этого введем фотонный пропагатор  $G_{\nu\rho}(x, y; A)$ . Дифференцируя уравнение (10.20) по  $J$ , получаем

$$\begin{aligned} [\square_x g_\mu^\nu - (1-\lambda) \partial_\mu \partial^\nu] G_{\nu\rho}(x, y; A) + \\ + ie \int d^4z \text{Sp} \left[ \gamma_\mu \frac{\delta S(x, x; A)}{\delta A^\nu(z)} G_{\nu\rho}(z, y; A) \right] = g_{\mu\rho} \delta^4(x-y). \end{aligned} \quad (10.21)$$

В то же время (10.15) можно записать в виде

$$\begin{aligned} [i\partial_x - m - eA(x)] S(x, y; A) - \\ - ie \int d^4z \gamma_\mu G^{\mu\rho}(x, z; A) \frac{\delta S(x, y; A)}{\delta A^\rho(z)} = \delta^4(x-y). \end{aligned} \quad (10.22)$$

Мы вновь получили полную систему уравнений, определяющую  $S$  и  $G$ . К сожалению, они дают мало пользы, поскольку у нас нет опыта работы с такими выражениями.

Возвращаясь к уравнению (10.14), можно получить дальнейшую информацию, вычисляя производные более высокого порядка по спинорным источникам. Большой интерес представляет собой функция Грина  $S(x_1, x_2, y_1, y_2, J)$ , соответствующая распространению двух заряженных частиц. Действуя так же, как и прежде, найдем

$$\begin{aligned} \left[ i\partial_{x_1} - m - eA(x_1; J) - e\gamma^\mu \frac{\delta}{i\delta J^\mu(x_1)} \right] S(x_1, x_2; y_1, y_2; J) = \\ = \delta^4(x_1 - y_1) S(x_2, y_2; J) - \delta^4(x_1 - y_2) S(x_2, y_1; J). \end{aligned} \quad (10.23)$$

В правой части антисимметричная комбинация является отражением принципа Паули. Учитывая соотношение (10.18), которому удовлетворяет двухточечная функция, можно подействовать на переменную  $x_2$  оператором  $i\partial - m - \Sigma$  (В других случаях нас

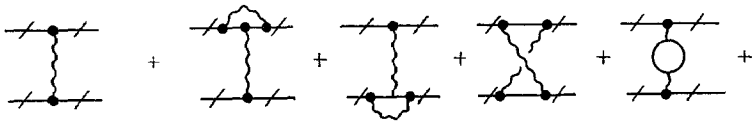


РИС. 10.3. Ядро  $V$  уравнения Бете—Солпитера. Перечеркивание соответствует усечению соответствующей пропагаторной линии

мог бы интересоваться результатом действия этого оператора на оставшиеся переменные  $y_1$  или  $y_2$ .) Во всяком случае, полагая  $J = 0$ , находим

$$\begin{aligned}
 (i\partial_{x_2} - m - \Sigma)(i\partial_{x_1} - m - \Sigma) S(x_1, x_2; y_1, y_2) &= \\
 &= \delta^4(x_1 - y_1) \delta^4(x_2 - y_2) - \delta^4(x_1 - y_2) \delta^4(x_2 - y_1) + \\
 &+ (i\partial_{x_2} - m - \Sigma) \left[ \gamma^\mu \frac{\delta}{\delta J^\mu(x_1)} - \Sigma \right] S(x_1, x_2; y_1, y_2; J) \Big|_{J=0}. \quad (10.24)
 \end{aligned}$$

Нетрудно заметить, что в правой части первые два члена являются вкладом несвязной амплитуды. Роль третьего члена легче понять с помощью графического анализа. Будучи записан в виде свертки

$$\int d^4z_1 d^4z_2 V(x_1, x_2; z_1, z_2) S(z_1, z_2; y_1, y_2),$$

этот член содержит ядро  $V(x_1, x_2; y_1, y_2)$ , описываемое усеченными четырехфермионными диаграммами, которые нельзя сделать несвяз-

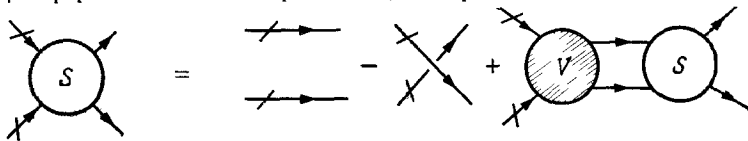


РИС. 10.4. Уравнение Бете—Солпитера

ными, разрезая две фермионные линии (рис. 10.3). Вводя для  $\gamma$ -матриц значки, указывающие, на какие индексы они действуют, получаем в наинизшем порядке

$$V(x_1, x_2; y_1, y_2) = ie^2 \gamma_\mu^{(1)} G^{\mu\nu}(x_1 - x_2) \gamma_\nu^{(2)} \delta^4(x_1 - y_1) \delta^4(x_2 - y_2) \quad (10.25)$$

В этих обозначениях уравнение Бете—Солпитера окончательно запишется в виде

$$\begin{aligned}
 (i\partial_{x_2} - m - \Sigma)(i\partial_{x_1} - m - \Sigma) S(x_1, x_2; y_1, y_2) &= \\
 &= \delta^4(x_1 - y_1) \delta^4(x_2 - y_2) - \delta^4(x_1 - y_2) \delta^4(x_2 - y_1) + \\
 &+ \int d^4z_1 d^4z_2 V(x_1, x_2; z_1, z_2) S(z_1, z_2; y_1, y_2). \quad (10.26)
 \end{aligned}$$

Это уравнение представлено графически на рис. 10.4, на котором перечеркивание указывает на то, что соответствующие пропагаторные линии являются усеченными.

Уравнение (10.26) записано для электрон-электронного канала. Разумеется, соответствующее уравнение можно вывести и для перекрестного электрон-позитронного канала, где оно описывает связанные состояния позитрония.

### 10.1.2. Перенормировка

Уравнения поля требуют, очевидно, перенормировки. Чтобы избежать громоздких обозначений, мы не вводили контрчлены в действие. Их следует теперь восстановить. Поскольку перенормировка не является здесь нашей основной заботой, не будем вдаваться в подробности. Обрисуем лишь схематически изменения, которые приносит учет мультипликативных перенормировок функций Грина, когда мы выражаем их через физическую массу и константу связи.

Рассмотрим сначала уравнение (10.15) для электронного пропагатора. Запишем его через константы перенормировки волновой функции ( $Z_2$ ) и константы перенормировки вершины ( $Z_1$ ) следующим образом:

$$\delta^4(x-y) - \left\{ Z_2 (i\partial - m) - e Z_1 \left[ A(x, J) + \gamma^\mu \frac{\delta}{i\delta J^\mu(x)} \right] \right\} S(x, y; J) = 0. \quad (10.27)$$

Тождество Уорда требует выполнения равенства  $Z_1 = Z_2$ , причем обе эти величины бесконечны. Аналогично уравнение для фотонного пропагатора (10.21) следует записать в виде

$$Z_3 [\square_x g_\mu^\nu - \partial_\mu \partial^\nu] G_\nu(x, y) + \lambda \partial_\mu \partial^\nu G_{\nu\mu}(x, y) + i Z_1 e \int d^4 z \text{Sp} \left[ \gamma_\mu \frac{\delta S(x, x)}{\delta A^\nu(z)} G_{\nu\sigma}(z, y) \right] = g_\mu^\nu \delta^4(x-y) \quad (10.28)$$

Такая запись вновь указывает на то, что, когда эти уравнения итерированы в случае конечных функций Грина  $G$  и  $S$ , для получения конечных результатов необходимы бесконечные константы перенормировки.

Если не возвращаться к разложению теории возмущений, мы приходим к довольно неприятной ситуации.

### Упражнения

1. Выведите перенормированные формы соотношений (10.11) и (10.19).
2. Свяжите вершинную функцию с ядром Бете—Солпитера и изучите ренормализационные свойства уравнения (10.26).
3. Получите аналогичные уравнения в модели  $\Phi^4$  и рассмотрите их ренормализационные свойства.



## 10.2. РЕЛЯТИВИСТСКИЕ СВЯЗАННЫЕ СОСТОЯНИЯ

В релятивистском подходе связанные состояния и резонансы определяются по положению полюсов функций Грина. Простое обобщение уравнения Шредингера, к сожалению, невозможно, за исключением особых случаев, таких, как случай статических внешних источников, обсуждавшийся в связи с уравнением Дирака.

Вообще говоря, имеются трудности двух типов. Прежде всего необходимо учесть эффекты запаздывания, из-за которых в задачу вводится дополнительная переменная, а именно относительное время. Альтернативное описание опирается на использование промежуточного поля. Однако при этом нельзя пренебрегать квантовыми свойствами последнего. Таким образом, оказывается, что само понятие связанного состояния двух тел является лишь результатом чрезмерного упрощения реальной ситуации. Несмотря на различные следствия, которые могут иметь практическое значение, во всех случаях, когда необходимо иметь последовательное описание, необходимо вернуться к общей теоретико-полевой картине. Это верно и тогда, когда мы хотим учесть высшие радиационные поправки.

Данному вопросу посвящено большое количество работ. Здесь будет дан лишь небольшой обзор этих работ, но, как мы надеемся, наиболее важной их части. Напомним, что в гл. 2 (т. 1) уже рассматривались связанные состояния водородоподобных атомов, а в гл. 7 (т. 1) вычислялись поправки за счет лэмбовского сдвига в низшем порядке.

### 10.2.1. Однородное уравнение Бете — Солпитера

Вместо того чтобы иметь дело со всеми сложностями спинорной задачи, рассмотрим пока более простую модель скалярных частиц, взаимодействующих посредством обмена скалярными частицами другого типа. Разумеется, это представляет собой теоретическое упражнение, цель которого заключается в том, чтобы продемонстрировать некоторые особенности реальной проблемы. Ядро  $V$  также должно быть усеченным. Кроме того, мы будем пренебрегать эффектами статистики, полагая, что две «заряженные» частицы принадлежат разным типам.

В символических обозначениях уравнение (10.26) можно переписать следующим образом:

$$S^{(12)} = S^{(1)}S^{(2)} + S^{(1)}S^{(2)}VS^{(12)}, \quad (10.29)$$

здесь  $S^{(1)}$  — полный пропагатор частицы 1, который мы ниже аппроксимируем свободным пропагатором с физической массой, а эффектами перенормировки пренебрежем. Определяя величину  $-D$  как ядро оператора, обратного произведению  $S^{(1)}S^{(2)}$ , можно за-

писать формальное решение этого уравнения в виде

$$S^{(12)} = -(D + V)^{-1}. \quad (10.30)$$

Отсюда следует, что полюсы могут находиться в тех точках, которым отвечает нулевое собственное значение оператора  $D + V$ . Таким образом, мы пришли к однородному уравнению, описывающему свойства связанных состояний. Чтобы быть более точными, определим величины

$$\begin{aligned} S^{(12)} &= \langle 0 | T \varphi_1(x_1) \varphi_2(x_2) \varphi_1^\dagger(y_1) \varphi_2^\dagger(y_2) | 0 \rangle, \\ S^{(1)} &= \langle 0 | T \varphi_1(x_1) \varphi_1^\dagger(y_1) | 0 \rangle. \end{aligned} \quad (10.31)$$

Вклад связанного состояния (которое для простоты предполагается невырожденным) с массой  $M$  в  $S^{(12)}$  запишется в виде

$$\int \frac{d^3 P}{(2\pi)^3 2 \sqrt{P^2 + M^2}} \chi_P(x_1, x_2) \bar{\chi}_P(y_1, y_2), \quad (10.32)$$

где

$$\begin{aligned} \chi_P(x_1, x_2) &= \langle 0 | T \varphi_1(x_1) \varphi_2(x_2) | P \rangle, \\ \bar{\chi}_P(y_1, y_2) &= \langle P | T \varphi_1^\dagger(y_1) \varphi_2^\dagger(y_2) | 0 \rangle = \\ &= \langle 0 | \bar{T} \varphi_1(y_1) \varphi_2(y_2) | P \rangle^* \end{aligned} \quad (10.33)$$

Здесь  $\bar{T}$  обозначает антихронологическое упорядочение. Обобщение на случай, когда имеется несколько вырожденных связанных состояний, производится непосредственно аппроксимируя  $S^{(1)}$  и  $S^{(2)}$  свободными пропагаторами:

$$S^{(1)} = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{i}{k^2 - m_i^2 + i\epsilon} e^{-ik \cdot (x_1 - y_1)}, \quad (10.34)$$

находим

$$\begin{aligned} (\square_{x_1} + m_1^2) (\square_{x_2} + m_2^2) \chi_P(x_1, x_2) + \\ + \int d^4 z_1 d^4 z_2 V(x_1, x_2; z_1, z_2) \chi_P(z_1, z_2) = 0, \\ \bar{\chi}_P(y_1, y_2) (\overleftarrow{\square}_{y_1} + m_1^2) (\overleftarrow{\square}_{y_2} + m_2^2) + \\ + \int d^4 z_1 d^4 z_2 \bar{\chi}_P(z_1, z_2) V(z_1, z_2; y_1, y_2) = 0. \end{aligned} \quad (10.35)$$

Уравнения (10.35) достаточно хорошо иллюстрируют способ рассуждений, типичный для уравнений Бете — Солпитера.

Хотя и имеется некоторое сходство, уравнения данного типа весьма сильно отличаются от нерелятивистского уравнения Шредингера. Это различие отражается в наличии большего числа конфигурационных переменных, в том, что мы имеем дело с интегро-дифференциальными уравнениями четвертого порядка, в том, что имеется ядро  $V$ , которое определяется из теории возмущений, а

также в том, каким образом энергия связанного состояния входит в уравнение.

Из трансляционной инвариантности следует, что

$$\chi_P(x_1 + a, x_2 + a) = e^{-iP \cdot a} \chi_P(x_1, x_2). \quad (10.36)$$

Естественно ввести относительную пространственно-временную координату  $x = x_1 - x_2$ . Однако общая конфигурационная переменная является априори произвольной. Мы можем выбрать две положительные величины  $\eta_1$  и  $\eta_2$  таким образом, что

$$\begin{aligned} \eta_1 + \eta_2 &= 1, & x_1 &= X + \eta_2 x, \\ X &= \eta_1 x_1 + \eta_2 x_2, & x_2 &= X - \eta_1 x. \end{aligned} \quad (10.37)$$

Якобиан данного преобразования равен единице. Запишем приведенные амплитуды Бете—Солпитера в виде

$$\chi_P(x_1, x_2) = e^{-iP \cdot x} \chi_P(x), \quad \bar{\chi}_P(x_1, x_2) = e^{iP \cdot x} \bar{\chi}_P(x). \quad (10.38)$$

Согласно определениям (10.33), величины  $\chi$  и  $\bar{\chi}$  не следует путать с волновыми функциями, они скорее являются обобщенными формфакторами. Условия нормировки нельзя получить непосредственно, поскольку в них входит относительное время  $x_0$ . Эта проблема, которая выглядит на первый взгляд безобидной, потребовала длительных исследований. Роль нормировки состоит в том, чтобы задать правильную связь между функцией  $\chi$  и четырехточечной функцией Грина. Кроме того, условие нормировки существенно при отборе физических решений уравнения (10.35). Вернемся к неоднородному уравнению (10.29). Введем полный импульс пары (1, 2) с помощью соотношения

$$S^{(12)}(x_1, x_2; y_1, y_2 | P) = \int d^4 a e^{iP \cdot a} S^{(12)}(x_1 + a, x_2 + a; y_1, y_2).$$

Связанное состояние и состояние, *CPT*-сопряженное ему, дают полюсный вклад по переменной  $P^2$ , который можно записать в виде

$$S^{(12)}(x_1, x_2; y_1, y_2 | P) = \frac{i \chi_P(x_1, x_2) \bar{\chi}_P(y_1, y_2)}{P^2 - M^2 + i\epsilon} + R, \quad (10.39)$$

где  $R$ —величина, регулярная в окрестности полюса  $P^2 = M^2$ . Существенным для интерпретации решений в терминах связанных состояний является свойство факторизуемости вычета. В случае вырождения его следует соответствующим образом обобщить.

Проинтегрируем уравнение  $(D + V) S^{(12)} = -1$ , записав его предварительно в виде  $S^{(12)}(D + V) S^{(12)} = -S^{(12)}$ , затем подставим соотношение (10.39) и воспользуемся соотношениями  $(D + V) \chi = \bar{\chi}(D + V) = 0$ , чтобы сравнить вычеты обеих частей при  $P^2 = M^2$ .

Результат символически записывается в виде

$$\lim_{P \rightarrow M} \bar{\chi} \frac{(D+V)\chi}{P^2 - M^2} = i$$

или, что эквивалентно, в ковариантной форме

$$\bar{\chi} \left[ \frac{\partial}{\partial P_i} (D+V) \right] \chi = 2iP_i, \quad (10.40)$$

причем в левой части производится интегрирование по относительным переменным. В общем случае условие нормировки в отличие от нерелятивистского случая зависит от «потенциала»  $V$ .

Полезно записать эти уравнения также и в импульсном пространстве. Пусть  $p$  — переменная, сопряженная с  $x$ . В соответствии с (10.37) имеем

$$P = p_1 + p_2, \quad p = \eta_2 p_1 - \eta_1 p_2, \quad (10.41)$$

где  $p_1 = \eta_1 P + p$  и  $p_2 = \eta_2 P - p$  — импульсы полей  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  соответственно (рис 10.5). Мы не имеем другого естественного определения относительного импульса, как то, которое возникает при раз-

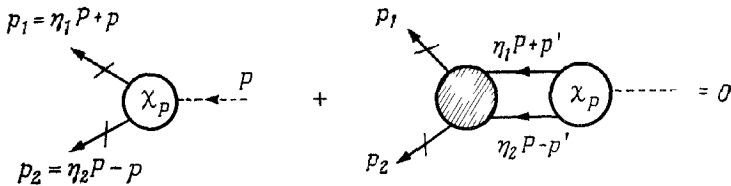


РИС 10.5. Однородное уравнение для амплитуды  $\chi$  связанного состояния.

делении переменных в случае нерелятивистского движения. Нерелятивистское определение переменных  $P$  и  $p$  соответствует частному выбору величин  $\eta_{1,2} = m_{1,2}/(m_1 + m_2)$ . В релятивистском случае такой выбор может быть полезным в целях сравнения с нерелятивистским описанием. Используя для фурье-образов те же символы, что и в конфигурационном пространстве, и учитывая трансляционную инвариантность, получаем

$$\begin{aligned} \chi_P(p) &= \int e^{i p \cdot x} \chi_P(x) d^4 x, \\ [(\eta_1 P + p)^2 - m_1^2][(\eta_2 P - p)^2 - m_2^2] \chi_P(p) &+ \\ &+ \int \frac{d^4 p'}{(2\pi)^4} V(p, p'; P) \chi_P(p') = 0, \quad (10.42) \\ \bar{\chi}_P(p)[(\eta_1 P + p)^2 - m_1^2][(\eta_2 P - p)^2 - m_2^2] &+ \\ &+ \int \frac{d^4 p'}{(2\pi)^4} \bar{\chi}_P(p') V(p', p; P) = 0. \end{aligned}$$

Обмен скалярной частицей, имеющей массу  $\mu$  и константы связи  $g_1$  и  $g_2$ , с частицами 1 и 2, так что соответствующий лагранжиан взаимодействия имеет вид  $\mathcal{L}_{вз} = (g_1 \varphi_1^\dagger \varphi_1 + g_2 \varphi_2^\dagger \varphi_2) \phi$ , приводит в борновском приближении к величине

$$V_1(p, p'; P) = - \frac{ig_1 g_2}{(p-p')^2 - \mu^2 + i\epsilon},$$

которая не зависит от  $P$ . Условие нормировки записывается в явном виде следующим образом:

$$\int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{d^4 p'}{(2\pi)^4} \bar{\chi}_P(p') \frac{\partial}{\partial P^\mu} \{[\eta_1 P + p]^2 - m_1^2\} \times \\ \times [(\eta_2 P - p)^2 - m_2^2] (2\pi)^4 \delta^4(p - p') + V(p', p; P) \chi_P(p) = 2iP_\mu. \quad (10.43)$$

Уравнение (10.35) и условие (10.40), или эквивалентные им (10.42) и (10.43), дают основу для изучения некоторых конкретных моделей.

### 10.2.2. Поворот Вика

Уравнения для связанных состояний выведены в пространстве Минковского. В своих ранних исследованиях Вика применил аналитическое продолжение к евклидовым переменным, которое теперь принято называть поворотом Вика. Нетрудно обосновать эту процедуру с помощью теории возмущений, т. е. точно, без учета появления возможных новых сингулярностей, подобных тем, которые изучались здесь. Для того чтобы применить эту теорию к нашей задаче, требуется некоторая осторожность. Физически существенным обстоятельством является необходимость обеспечения критерия устойчивости. Привлекательность этого приема состоит, конечно, в том, что он позволяет представить уравнение в более удобной для изучения форме.

Мы будем действовать прямолинейно, полагая, что при  $X=0$

$$\chi_P(x) = \theta(x^0) f(x, P) + \theta(-x^0) g(x, P), \\ \bar{\chi}_P(x) = \theta(x^0) g^*(x, P) + \theta(-x^0) f^*(x, P), \quad (10.44)$$

причем

$$f(x, P) = \langle 0 | \varphi_1(\eta_2 x) \varphi_2(-\eta_1 x) | P \rangle = \\ = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{-i p \cdot x} f(p; P), \\ g(x, P) = \langle 0 | \varphi_2(-\eta_1 x) \varphi_1(\eta_2 x) | P \rangle = \\ = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{-i p \cdot x} g(p; P). \quad (10.45)$$

Используя представление

$$\theta(x_0) = -\frac{1}{2i\pi} \int d\omega \frac{e^{-i\omega x_0}}{\omega + i\epsilon}, \quad (10.46)$$

получаем выражения для  $\chi$  и  $\bar{\chi}$  в импульсном пространстве:

$$\begin{aligned} \chi_P(p) &= -\frac{1}{2i\pi} \int dq_0 \frac{f(q_0, \mathbf{p}, P)}{p^0 - q^0 + i\epsilon} + \frac{1}{2i\pi} \int dq_0 \frac{g(q_0, \mathbf{p}, P)}{p^0 - q^0 - i\epsilon}, \\ \bar{\chi}_P(p) &= -\frac{1}{2i\pi} \int dq_0 \frac{f^*(q_0, \mathbf{p}, P)}{p^0 - q^0 + i\epsilon} + \frac{1}{2i\pi} \int dq_0 \frac{g^*(q_0, \mathbf{p}, P)}{p^0 - q^0 - i\epsilon}. \end{aligned} \quad (10.47)$$

Соотношение между  $\chi$  и  $\bar{\chi}$  таково, что их скачки на разрезах являются взаимно сопряженными. Поворот к мнимой оси будет допустим при условии, что  $f$  и  $g$  имеют соответствующий носитель по переменной  $q_0$ . Это следует из их определения, если вставить систему промежуточных состояний

$$\begin{aligned} f(q, P) &= \int d^4x e^{iq \cdot x} \sum_n \langle 0 | \varphi_1(0) | n \rangle \langle n | \varphi_2(0) | P \rangle e^{-i(p_n - \eta_1 P) \cdot x} = \\ &= \sum_n (2\pi)^4 \delta^4(q - p_n + \eta_1 P) \langle 0 | \varphi_1(0) | n \rangle \langle n | \varphi_2(0) | P \rangle, \end{aligned} \quad (10.48)$$

$$g(p, P) = \sum_n (2\pi)^4 \delta^4(q + p_n - \eta_2 P) \langle 0 | \varphi_2(0) | n \rangle \langle n | \varphi_1(0) | P \rangle.$$

Для того чтобы частица 1 была стабильной, в первом выражении должно быть  $p_n^2 \geq m_1^2$ ,  $p_n^0 > 0$ . Это означает, что величина  $f(q, P)$  обращается в нуль, если не выполнены условия  $(\eta_1 P + q)^2 \geq m_1^2$ ,  $\eta_1 P_0 + q_0 > 0$ . Аналогично во втором выражении должно быть  $p_n^2 \geq m_2^2$ ,  $p_n^0 > 0$ , следовательно,  $g(q, P)$  обращается в нуль, если не выполнены условия  $(\eta_2 P - q)^2 \geq m_2^2$ ,  $\eta_2 P_0 - q_0 > 0$ . В представлении (10.47) интеграл от  $f$  (или  $f^*$ ) берется в пределах от  $\omega_+$  до  $\infty$ , а интеграл от  $g$  (или  $g^*$ ) — от  $-\infty$  до  $\omega_-$ , причем

$$\begin{aligned} \omega_+ &= \sqrt{m_1^2 + (\eta_1 \mathbf{P} + \mathbf{p})^2} - \eta_1 P_0, \\ \omega_- &= -\sqrt{m_2^2 + (\eta_2 \mathbf{P} - \mathbf{p})^2} + \eta_2 P_0. \end{aligned} \quad (10.49)$$

Поворот к мнимой оси без пересечения сингулярностей возможен, если  $\omega_- < \omega_+$ . Для стабильного связанного состояния  $P_0 < \sqrt{(m_1 + m_2)^2 + \mathbf{P}^2}$ . Если выбрать систему центра масс, в которой  $\mathbf{P} = 0$  и  $\eta_{1,2} = m_{1,2}/(m_1 + m_2)$ , то

$$\omega_+ = \sqrt{m_1^2 + \mathbf{p}^2} - \frac{m_1 P_0}{m_1 + m_2} > 0, \quad \omega_- = \frac{m_2 P_0}{m_1 + m_2} - \sqrt{m_2^2 + \mathbf{p}^2} < 0.$$

Следовательно, в интегральном представлении (10.47) между двумя разрезами имеется щель

Теперь можно вернуться к уравнению Бете—Солпитера и, используя полученные результаты, выполнить поворот Вика. Для

простоты рассмотрим систему центра масс и не будем менять выбранные значения  $\eta_{1,2}$ . Кроме того, ограничимся так называемым лестничным приближением, т. е. ядром  $V$ , вычисленным в борновском приближении:

$$V = -\frac{ig_1g_2}{(p-p')^2 - \mu^2 + i\varepsilon}. \quad (10.50)$$

Уравнение принимает вид

$$\left[ \left( \frac{m_1}{m_1+m_2} P_0 + p_0 \right)^2 - p^2 - m_1^2 \right] \left[ \left( \frac{m_2}{m_1+m_2} P_0 - p_0 \right)^2 - p^2 - m_2^2 \right] \chi_P(p) - \frac{ig_1g_2}{(2\pi)^4} \int d^4p' \frac{\chi_P(p')}{(p-p')^2 - \mu^2 + i\varepsilon} = 0. \quad (10.51)$$

Рассмотрим аналитическое продолжение  $p^0 \rightarrow p^0 e^{i\theta}$ , где  $\theta$  изменяется от 0 до  $\pi/2$ . Воспользуемся для первого члена в (10.51) представлением (10.47) и изучим по отдельности случаи  $p^0 > 0$  и  $p^0 < 0$ . Используя свойства  $\omega_- < 0 < \omega_+$ , можно убедиться в том, что при аналитическом продолжении нам не встретятся сингулярности. Во втором члене мы совершим одновременно повороты  $p^0 \rightarrow p^0 e^{i\theta}$ ,  $p'^0 \rightarrow p'^0 e^{i\theta}$  и по той же причине не встретим какой-либо сингулярности ни для величины  $\chi_P(p')$ , ни для знаменателя. Если при  $\theta = \pi/2$  употребить те же обозначения для функций от евклидова аргумента, что и в псевдоевклидовой области, то окончательный результат запишется в виде

$$\left[ \left( p_0 - \frac{im_1}{m_1+m_2} P_0 \right)^2 + p^2 + m_1^2 \right] \left[ p_0 + \frac{im_2}{m_1+m_2} P_0 \right]^2 + p^2 + m_2^2 \chi_P(p) - \frac{g_1g_2}{(2\pi)^4} \int d^4p' \frac{\chi_P(p')}{(p-p')^2 + \mu^2} = 0. \quad (10.52)$$

Метрика, используемая в (10.52), является евклидовой:  $(p-p')^2 = \sum_{i=0}^3 (p_i - p'_i)^2$

Обобщение рассмотренного метода на ядра высших порядков требует более детального анализа применительно к нескольким переменным. Аналогичным образом можно исследовать случай рассеяния, когда часть контура интегрирования огибается зажатой между двумя разрезами. Мы оставляем изучение этих случаев читателю в качестве упражнения.

### 10.2.3. Обмен скалярными безмассовыми частицами в лестничном приближении

В качестве иллюстрации методов и проблем, встречающихся при исследовании релятивистских уравнений для связанных состояний, рассмотрим полученное Виком и Куткоским решение уравнения (10.52) при  $\mu^2 = 0$ . Этот выбор не является полностью произвольным с физической точки зрения, поскольку, несмотря на

чрезмерное упрощение, связанное, в частности, с пренебрежением спином (в том числе спином обмениваемого поля), данный пример имеет некоторое сходство с реальными ситуациями, например со случаем позитрония. Кроме того, в данном случае существует почти аналитическое решение и проявляются особенности, которые могут иметь место в более сложных моделях.

Система лестничных диаграмм выглядит на первый взгляд как естественное обобщение нерелятивистской потенциальной теории. Однако в этом приближении остаются неучтенными существенные свойства релятивистской квантовой теории. Из-за отсутствия перекрестных лестничных диаграмм здесь нарушается инвариантность относительно  $(s-u)$ -кроссинг-преобразования. Это означает соответствие между правильным хронологическим упорядочением релятивистских взаимодействий. При этом мы ничего не можем сказать о релятивистском статическом пределе, когда одна из масс становится очень большой. В случае реальных систем такое ограничение является весьма сильным. Например, в электродинамике, если нет каких-либо особых причин, чтобы использовать частную калибровку (скажем, нековариантную кулоновскую калибровку), это приближение не будет калибровочно-инвариантным. Не выполняется также важный критерий, состоящий в том, чтобы уравнение Бете—Солпитера в пределе, когда одна из масс становится очень большой, переходило в уравнение Клейна—Гордона (или Дирака в случае спина  $1/2$ ).

Чтобы удовлетворить данному критерию, необходимо включить в рассмотрение по крайней мере систему перекрестных лестничных диаграмм, приводящих к бесконечно большому ядру  $V$ . Найдите соответствующее приближение на функциональном языке уравнений (10.23) и (10.24).

Учитывая эти ограничения, вернемся к уравнению (10.52), в котором положим  $\mu^2 = 0$ . Вик и Кутковский заметили здесь аналогию с задачей об атоме водорода в импульсном пространстве и предложили использовать стереографическую проекцию на единичную сферу в пятимерном пространстве. Этот метод, предложенный Фокком в нерелятивистском случае, позволяет использовать конформные преобразования и продемонстрировать динамическую симметрию системы. Удобно обозначить через  $\lambda$  следующую безразмерную величину:

$$\lambda = \frac{g_1 g_2}{16\pi m_1 m_2}. \quad (10.53)$$

Это соотношение напоминает нам, что  $g$  являются размерными константами связи для взаимодействия  $\varphi^3$ . Данный случай можно сравнить с электродинамикой, рассматривая  $\lambda$  как постоянную тонкой структуры. Ограничимся сначала случаем равных масс



$m_1 = m_2 = m$ . Принимая  $m$  за единицу энергии, находим

$$\left[ \left( p - i \frac{P}{2} \right)^2 + 1 \right] \left[ \left( p + i \frac{P}{2} \right)^2 + 1 \right] \chi_P(p) = \frac{\lambda}{\pi^3} \int d^4 p' \frac{\chi_P(p')}{(p-p')^2}; \quad (10.54)$$

здесь  $P$  — четырехвектор  $(P_0, 0)$ . Уравнение (10.54) можно рассматривать как уравнение на собственные значения для константы связи  $\lambda$ , а, обратившись к теории Фредгольма, можно показать, что оно допускает дискретный спектр. Стереографическая проек-

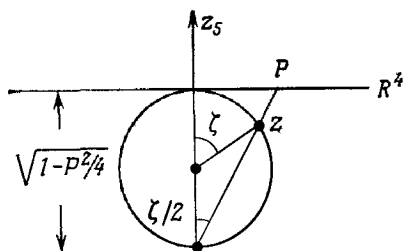


РИС. 10.6. Проектирование из четырехмерного  $p$ -пространства на сферу диаметром  $\sqrt{1 - P^2/4}$ .

ция, которую более подробно мы рассмотрим в гл. 13, сводится к сопоставлению точки  $p$  в  $R^4$  вектору  $z$  в пятимерном пространстве на сфере радиусом  $(1/2)\sqrt{1 - P^2/4}$ , проекция которого на четырехмерное пространство направлена вдоль  $p$  с полярным углом  $\zeta$ , таким, что  $\text{tg}(\zeta/2) = |p|/\sqrt{1 - P^2/4}$  (рис. 10.6). Пусть  $(\beta, \theta, \varphi)$  — дополнительные полярные углы четырехвектора  $p$ ; тогда  $p \cdot P = |p| |P| \cos \beta$  и

$$\begin{aligned} & \left[ \left( p - i \frac{P}{2} \right)^2 + 1 \right] \left[ \left( p + i \frac{P}{2} \right)^2 + 1 \right] = \\ & = \frac{1}{\cos^4(\zeta/2)} \left( 1 - \frac{P^2}{4} \right) \left( 1 - \frac{P^2}{4} + \frac{P^2}{4} \sin^2 \zeta \cos^2 \beta \right). \end{aligned} \quad (10.55)$$

Если  $d\Omega_4$  — элемент телесного угла на сфере, нормированный согласно условию  $\int d\Omega_4 = 8\pi^2/3$ , то справедливо следующее равенство:

$$\frac{d^4 p'}{(p-p')^2} = \frac{(1 - P^2/4) \cos^2(\zeta/2)}{8 \cos^6(\zeta'/2)} \frac{d\Omega'_4}{1 - \cos \alpha}, \quad (10.56)$$

где  $\alpha$  — угол между соответствующими векторами  $z$  и  $z'$ , т. е.  $z \cdot z' = [(1 - P^2/4)/4] \cos \alpha$ . Наконец, определим новую функцию  $K(z)$  с помощью соотношения

$$K(z) = \frac{1}{\cos^6(\zeta/2)} \chi(p). \quad (10.57)$$

Таким образом, уравнение (10.54) запишется в виде

$$\left(1 - \frac{P^2}{4} + \frac{P^2}{4} \sin^2 \zeta \cos^2 \beta\right) K(z) = \frac{\lambda}{8\pi^3} \int \frac{d\Omega'_4}{1 - \cos \alpha} K(z'). \quad (10.58)$$

Предельный случай  $P^2 = 0$  является  $O(5)$ -инвариантным, причем  $K$  пропорциональна пятимерной сферической гармонике. Пусть степень этой сферической гармонике равна  $N-1$ ; это означает, что умножение ее на  $|z|^{N-1}$  дает гармоническую функцию в пятимерном пространстве. Чтобы вычислить собственные значения [с вырождением  $N(N+1)(2N+1)/6$ ,  $N=1, 2, \dots$ ], достаточно применить (10.58) к сферическим гармоникам специального вида, зависящим только от угла с пятой осью. Это ортогональные полиномы (обобщающие полиномы Лежандра), полученные путем разложения по степеням величины  $z_{<}/z_{>}$  элементарной функции Грина

$$\frac{1}{|z-z'|^3} = \frac{1}{|z_{>}|^3 [1 + z_{<}^2/z_{>}^2 - 2(z_{<}/z_{>}) \cos \alpha]^{3/2}},$$

$$\frac{1}{[1+t^2-2t \cos \alpha]^{3/2}} = \sum_{N=1}^{\infty} C_{N-1}(\cos \alpha) t^{N-1}. \quad (10.59)$$

Таким образом, если выбрать вектор  $z$ , направленный вдоль пятой оси, то  $\lambda_N$  дается выражением

$$C_{N-1}(1) = \frac{\lambda_N}{8\pi^3} \int d\Omega'_4 \frac{C_{N-1}(\zeta')}{1 - \cos \zeta'} = \frac{\lambda_N}{4\pi} \int_0^\pi \frac{d\zeta \sin^3 \zeta C_{N-1}(\zeta)}{1 - \cos \zeta},$$

что при  $|t| < 1$  эквивалентно выражению

$$\sum_{N=1}^{\infty} \frac{t^{N-1}}{\lambda_N} C_{N-1}(1) = \frac{1}{4\pi} \int_0^\pi \frac{d\zeta \sin^3 \zeta}{1 - \cos \zeta} \frac{1}{(1+t^2-2t \cos \zeta)^{3/2}} = \frac{1}{2\pi(1-t)}.$$

Из определяющих выражений (10.59) следует, что  $C_{N-1}(1) = N(N+1)/2$ ; таким образом,

$$\lambda_N/\pi = N(N+1). \quad (10.60)$$

В общем случае  $0 < P^2 < 4$  уравнение (10.58), как и в случае атома водорода, является  $O(4)$ -инвариантным. Это следует из того факта, что помимо  $O(5)$ -инвариантных выражений в уравнение входит единственная величина  $\sin \zeta \cos \beta$ , пропорциональная проекции вектора  $z$  на нулевую ось (т. е. на направление  $P$ ). Следовательно,  $O(4)$ -инвариантность относится к вращениям, оставляющим неподвижной нулевую ось.

Единичную сферу в  $R^5$  можно затем спроектировать обратно на евклидово пространство  $R^4$ , но теперь уже из точки, распо-

ложенной на нулевой оси. Пусть  $\gamma$  таково, что  $\cos \gamma = \sin \zeta \cos \beta$ ; тогда можно рассмотреть четырехвектор  $q$ , полученный проектированием с единичной сферы, такой, что  $|q| = \operatorname{tg}(\gamma/2)$ , а  $\tilde{\chi}(q) = \cos^6(\gamma/2) K(z)$ . Выполняя преобразования, аналогичные (10.55) и (10.56), находим уравнение, обладающее явной  $O(4)$ -инвариантностью:

$$\left[ q^4 + 2q^2 \left( 1 - \frac{P^2}{2} \right) + 1 \right] \tilde{\chi}(q) = \frac{\lambda}{\pi^3} \int \frac{d^4 q'}{(q-q')^2} \tilde{\chi}(q'). \quad (10.61)$$

Разумеется, преобразование, связывающее  $p$  с  $q$  и  $\chi$  с  $\tilde{\chi}$ , можно выполнить непосредственно. Пусть  $n$  — единичный вектор, направленный вдоль нулевой оси; тогда

$$p = \sqrt{1 - \frac{P^2}{4}} \left( n + 2 \frac{q \cdot n}{q^2 - 2q \cdot n + 1} \right)$$

и

$$\chi_p = \left( 1 - \frac{P^2}{4} \right)^3 (q^2 - 2q \cdot n + 1) \tilde{\chi}(q). \quad (10.62)$$

Инвариантностью уравнения (10.62) можно воспользоваться для того, чтобы произвести разложение по парциальным волнам в пространстве  $R^4$ , т. е. по  $\mathcal{Y}_{nlm}(\hat{q})$ , представляющим собой ортонормированные сферические гармоники группы  $O(4)$ . Положительные целые числа  $n \geq 1$ , аналогичные главному квантовому числу в атомной физике, нумеруют представления  $O(4)$ , имеющие размерность  $n^2$ . Обычный орбитальный момент  $l$  принимает значения между 0 и  $n-1$ .

Если  $O(4)$  отождествляется с  $SU(2) \times SU(2)/Z_2$ , то гармоники  $\mathcal{Y}_{nlm}$  образуют базис представления  $(j, j)$ , где  $n = 2j + 1$ . Подгруппа  $O(3)$ , которая не меняется при комбинированном преобразовании (10.62), является диагональной подгруппой группы  $SU(2) \times SU(2)/Z_2$ .

В пространстве  $R^4$  мы имеем разложение, аналогичное (10.59), а именно

$$\frac{1}{(q-q')^2} = \frac{2\pi^2}{q^2} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{q_{(<)}}{q_{(>)}} \right)^{n-1} \frac{1}{n} \sum_{l,m} \mathcal{Y}_{nlm}(\hat{q}) \mathcal{Y}_{nlm}^*(\hat{q}'). \quad (10.63)$$

Определим радиальную амплитуду  $R_n(q^2)$  с помощью соотношения

$$\tilde{\chi}(q) = \frac{R_n(q^2)}{|q|^{n+1} [q^4 + 2q^2(1 - P^2/2) + 1]} \mathcal{Y}_{nlm}(\hat{q}). \quad (10.64)$$

Подставляя последние два выражения в (10.61), получаем одномерное уравнение относительно переменной  $x = q^2$ :

$$R_n(x) = \frac{\lambda}{n\pi} \int_0^{\infty} dx' \left[ \theta(x-x') + \left( \frac{x}{x'} \right)^n \theta(x'-x) \right] \times \\ \times \frac{R_n(x')}{x'^2 + 2x'(1 - P^2/2) + 1}, \quad (10.65)$$

эквивалентное дифференциальному уравнению

$$x \frac{d^2 R_n}{dx^2} - (n-1) \frac{dR_n}{dx} + \frac{\lambda}{\pi} \frac{R_n}{x^2 + 2x(1-P^2/2) + 1} = 0, \quad (10.66)$$

дополненному условиями, что при  $x \rightarrow 0$  величина  $R_n$  обращается в нуль, как  $x^n$ , а  $R_n/x^n$  стремится к нулю при  $x \rightarrow \infty$ .

Используя переменную

$$z = \frac{x-1}{x+1}, \quad (10.67)$$

изменяющуюся от  $-1$  до  $+1$ , а также функцию  $g_n$ , такую, что

$$R_n(x) = \frac{1}{(1-z)^n} g_n(z), \quad (10.68)$$

Вик и Кутковский записали уравнения, эквивалентные (10.65) и (10.66), в виде

$$g_n(z) = \frac{\lambda}{2\pi n} \int_{-1}^{+1} dz' \left[ \theta(z'-z) \left( \frac{1+z}{1+z'} \right)^n + \theta(z-z') \left( \frac{1-z}{1-z'} \right)^n \right] \times \\ \times \frac{g_n(z')}{1-(P^2/4)(1-z'^2)} \quad (10.69)$$

и

$$\left[ (1-z^2) \frac{d^2}{dz^2} + 2(n-1)z \frac{d}{dz} - n(n-1) + \frac{\lambda}{\pi} \frac{1}{1-(P^2/4) + (P^2/4)z^2} \right] g_n(z) = 0 \quad (10.70)$$

при условии, что  $g_n(\pm 1) = 0$ .

Применяя стандартные методы к уравнению (10.66) или (10.70), мы видим, что при  $0 \leq P^2 \leq 4$  имеется дискретный спектр величин  $\lambda_n$ , которые можно найти численными методами. При фиксированном  $n$  (и  $P^2$ ) мы имеем последовательность решений, которые нумеруются целыми числами  $K$  ( $K=0, 1, \dots$ ), соответствующими числу нулей радиальной функции (за исключением граничных точек).

В случае неодинаковых масс можно провести аналогичное рассмотрение, показывающее, что здесь существует  $O(4)$ -симметрия, и задача фактически сводится к случаю равных масс. Сохраним прежние значения величины  $\eta_{1,2}$ , а именно  $\eta_{1,2} = m_{1,2}/(m_1 + m_2)$ ,

и определим следующие величины:

$$\begin{aligned}\Delta &= \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}, \\ \varepsilon^2 &= (1 - \Delta^2) \left[ 1 - \frac{P^2}{(m_1 + m_2)^2} \right], \\ \operatorname{tg} \theta &= i \frac{\sqrt{(1 - \Delta^2 - \varepsilon^2)(1 - \Delta^2)}}{\varepsilon \Delta},\end{aligned}\quad (10.71)$$

$$\begin{aligned}p &= \frac{m_1 + m_2}{2} \frac{\varepsilon}{D} \{ \sin \theta (1 + q^2) n + 2q - 2n [(1 + \cos \theta) q \cdot n + \sin \theta] \}, \\ D &= 1 + \cos \theta + (1 - \cos \theta) q^2 - 2 \sin \theta q \cdot n.\end{aligned}$$

Единичный вектор  $n$  направлен вдоль  $P$ , а все эти формулы определяют комплексное конформное преобразование. Пусть контур интегрирования деформируется таким образом, чтобы конечное уравнение, которому удовлетворяет функция

$$\tilde{\chi}(q) = D^{-3} \chi(p), \quad (10.72)$$

было вещественным и записывалось в виде

$$\left\{ q^4 + 2q^2 \left[ \frac{2\varepsilon^2}{(1 - \Delta^2)^2} - 1 \right] + 1 \right\} \tilde{\chi}(q) = \frac{\lambda}{\pi^3} \int d^4 q' \frac{\tilde{\chi}(q')}{(q' - q)^2}. \quad (10.73)$$

Это уравнение аналогично уравнению (10.61), к которому оно сводится при  $m_1 = m_2$ , поскольку

$$\frac{2\varepsilon^2}{(1 - \Delta^2)^2} - 1 = \frac{2}{1 - (m_1 - m_2)^2 / (m_1 + m_2)^2} \left[ 1 - \frac{P^2}{(m_1 + m_2)^2} \right] - 1.$$

Напомним, что в (10.61) общая масса  $m$  была принята за единицу энергии.

Таким образом, с помощью соответствующей замены переменных соотношения, полученные для одинаковых масс, можно преобразовать в соотношения, относящиеся к неравным массам. Рассмотрим поэтому снова первый случай и уравнения (10.66) и (10.70).

Особый интерес представляет поведение вблизи порога  $P^2 = 4$ , где ядро можно аппроксимировать выражением

$$\frac{1}{\pi [x^2 + 2x(1 - P^2/2) + 1]} \approx \frac{1}{\pi [(x-1)^2 + x(4 - P^2)]} \underset{P^2 \rightarrow 4}{\approx} \frac{\delta(x-1)}{\sqrt{4 - P^2}}.$$

Таким образом, из (10.65) следует

$$R_n(x) \approx \frac{\lambda}{n \sqrt{4 - P^2}} R_n(1) [\theta(x-1) + x^n \theta(1-x)] \quad (10.74)$$

Требование согласованности, т. е. равенства обеих частей при  $x=1$  (мы полагаем формально  $\theta(0)=1/2$ ), сводится к условию

$$\sqrt{4 - P^2} = \lambda/n, \quad (10.75)$$

выражая которое через энергию связи  $B$ , причем  $P^2 = (2 - B/m)^2$ , получаем известную формулу для спектра атома водорода:

$$B = \frac{m}{2} \frac{\lambda^2}{2n^2} + \dots, \quad (10.76)$$

где  $m/2$  — приведенная масса, а  $\lambda$  отождествляется с  $e^2/4\pi$ . К сожалению, наше рассмотрение на этом не заканчивается.

Выражение (10.74) определяет функцию без узлов ( $K=0$ ) и, следовательно, не приводит к ограничению на величины собственных значений, соответствующих  $K \geq 1$ . Последние отвечают аномальным решениям, для которых  $\lambda$  не обращается в нуль в пределе нулевой энергии связи, и не имеют поэтому нерелятивистских аналогов! Вик и Кутковский показали, что соответствующие собственные значения для функции с  $K$  узлами стремятся при  $P^2 \rightarrow 4$  к не зависящему от  $n$  пределу

$$\frac{\lambda_K}{\pi} \underset{P^2 \rightarrow 4}{\approx} \frac{1}{4} + \frac{\pi^2}{[\ln(1 - P^2/4)]^2}, \quad K \geq 1. \quad (10.77)$$

Это не единственный порок данной модели. Можно изучить поправки к разумному набору решений ( $K=0$ ), которые в низшем порядке воспроизводят нерелятивистский результат, т. е. соотношения (10.75) и (10.76). Такое рассмотрение показывает, что величина  $2n\epsilon/\lambda$ , где  $\epsilon = \sqrt{1 - P^2/4}$ , имеет следующее разложение:

$$\frac{2n\epsilon}{\lambda} = 1 + \epsilon (a_{11} \ln \epsilon + a_{12}) + \epsilon^2 [a_{21} (\ln \epsilon)^2 + a_{22} \ln \epsilon + a_{23}] + \dots, \quad (10.78)$$

причем  $\epsilon$  имеет порядок  $\lambda$ . В более физическом приближении, чем лестничный ряд, эти логарифмические члены отсутствуют.

Кроме того, Наканиши показал, что некоторые решения имеют отрицательную норму! Их называют «духами», и не ясно, возникают ли они из-за неадекватности приближения или являются проявлением более глубокой непоследовательности теории.

Проведенное выше рассмотрение можно обобщить на случай неоднородного уравнения для амплитуды рассеяния, в частности на случай высокоэнергетического поведения в перекрестном канале (соответствующем обмениваемым частицам). Можно обнаружить реджевское поведение  $s^{\alpha(t)}$  и вычислить соответствующую траекторию  $\alpha(t)$ .

Чтобы сократить число степеней свободы в релятивистской задаче о связанных состояниях и, в частности, избавиться от вызывающего постоянные трудности относительного времени, делались различные попытки ввести приближение эффективного потенциала (или квазипотенциала). Несмотря на то что эти попытки приводят к интересным практическим результатам, они так или иначе нарушают последовательность теории и, вообще говоря, приносят ложные сингулярности.<sup>1)</sup>

<sup>1)</sup> См примечания редактора перевода в конце настоящей главы. — *Прим. ред*

### 10.3. СВЕРХТОНКОЕ РАСЩЕПЛЕНИЕ В ПОЗИТРОНИИ

Не следует делать заключения, что в случае релятивистской слабосвязанной системы двух тел нельзя получить релятивистских поправок, согласующихся с экспериментом. Наоборот, состояния позитрония являются примером хорошего согласия, что как-то оправдывает теорию. Тем не менее нужно признаться в том, что получение точных предсказаний требует от исследователя особого искусства, поскольку до сих пор не существует систематического метода получения поправок.

Приведем здесь некоторые важные результаты и напомним, что предварительное рассмотрение было уже выполнено в разд. 2.3 и 5.2 (см т. 1 настоящей книги). Хотя позитроний представляет собой практически чисто электромагнитную систему, некоторые из развитых для него методов оказываются полезными и в других случаях, в таких, например, как модели связанных состояний кварков в адронах.

Разность энергий между более высоким триплетным (орто) и более низким синглетным (пара) основными состояниями позитрония, которые обозначают соответственно как  $1^3S_1$  и  $1^1S_0$  (в спектроскопических обозначениях  $n^{2S+1}L_J$ ), в настоящее время измерена с высокой точностью. Значения этого сверхтонкого расщепления  $\Delta E_{ts}^1$ , которые приводятся в литературе, равны

$$\begin{aligned} \Delta E_{ts} &= 2,033870 (16) \times 10^5 \text{ МГц} \\ &\quad (\text{Миллз и Бирман}), \\ \Delta E_{ts} &= 2,033849 (12) \times 10^5 \text{ МГц} \\ &\quad (\text{Иган, Фриз, Хьюдж и Ям}). \end{aligned} \tag{10.79}$$

Эту разницу иногда также называют тонкой структурой позитрония. Недавно Миллз, Берко и Кантер измерили расстояние между  $n=2$  триплетными возбужденными уровнями:

$$E(2^3S_1) - E(2^3P_2) = 8624 \pm 2,8 \text{ МГц}. \tag{10.80}$$

Напомним, что все эти состояния нестабильны. Радиационная ширина основного состояния в  $n$ -изшем порядке уже обсуждалась (см. разд 5.2 в т. 1).

Происхождение величины и знака синглет-триплетного расщепления в позитронии можно понять, если заметить, что оно соответствует сумме двух эффектов. Магнитное взаимодействие учитывается с помощью оценки Ферми, которая уже рассматривалась нами в случае атома водорода (см разд 2.3.2 в т. 1). Эта оценка, выраженная через параметры, относящиеся к электрону и позитрону, для значения гиромагнитного отношения, равного 2, записы

<sup>1)</sup> Индекс ts означает синглет-триплетное расщепление. — *Прим. ред.*

вается в виде

$$\Delta E_b = \frac{e^2}{6m^2} |\Phi_0|^2 \langle \sigma_1 \cdot \sigma_2 \rangle,$$

где  $|\Phi_0|^2$  — квадрат нерелятивистской волновой функции в начале координат для системы двух частиц с равными массами,  $|\Phi_0|^2 = (m\alpha)^3/8\pi$

Как уже отмечалось в предварительном обсуждении электрон-позитронного рассеяния (см разд 6.1.3 в т. 1), мы должны также рассмотреть новый эффект, соответствующий аннигиляционному каналу. Если ограничиться эффектами низшего порядка, то он отвечает однофотонному каналу, который дает  $s$ -волновой вклад в энергию взаимодействия порядка  $\alpha$  в триплетном состоянии только благодаря его отрицательной зарядовой четности. Искомый сдвиг энергии можно вычислить с помощью эффективного потенциала, отождествляемого с соответствующим элементом  $T$ -матрицы на пороге ( $S = I + iT$ ), умноженным на  $|\Phi_0|^2$ . Из результатов гл 6 (см т 1) следует, что амплитуда рассеяния на пороге равна

$$-e^2 \frac{\bar{v}(2) \gamma^{\nu} u(1) \bar{u}(1) \gamma_{\nu} v(2)}{(2m)^2}.$$

Знакам в этом выражении уделяется особое внимание, а под спинорами  $u$  и  $v$  подразумеваются их пороговые выражения для электрона и позитрона соответственно:

$$u(1) = \begin{pmatrix} \chi_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{u}(1) = (\chi_1^{\dagger}, 0), \quad v(2) = C\bar{u}^T(2) = \begin{pmatrix} 0 \\ -i\sigma_2 \chi_2^* \end{pmatrix}.$$

Матричный элемент в явном виде записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} & -\frac{e^2}{4m^2} \chi_2^T (-i\sigma_2) \sigma \chi_1 \cdot \chi_1^{\dagger} \sigma (-i\sigma_2) (\chi_2^{\dagger})^T = \\ & = \frac{e^2}{4m^2} \left( \frac{3}{2} \chi_2^{\dagger} \chi_2 \chi_1^{\dagger} \chi_1 + \frac{1}{2} \chi_2^{\dagger} \sigma \chi_2 \cdot \chi_1^{\dagger} \sigma \chi_1 \right); \end{aligned}$$

Здесь мы использовали преобразование Фирца. Следовательно, можно написать

$$\Delta E_A = \frac{e^2}{4m^2} |\Phi_0|^2 \left\langle \frac{3 + \sigma_1 \cdot \sigma_2}{2} \right\rangle.$$

Член  $\langle (3 + \sigma_1 \cdot \sigma_2)/2 \rangle$  есть не что иное, как  $S^2$ , где  $S = (\sigma_1 + \sigma_2)/2$  — полный спин. Таким образом, этот член вносит положительный вклад только в энергию триплетного состояния. Последнее позволяет предположить, что сдвиг энергии основного состояния в низшем порядке имеет следующую зависимость от спина:

$$\Delta(E_b + E_A) = \frac{e^2}{2m^2} |\Phi_0|^2 \left\langle \frac{\sigma_1 \cdot \sigma_2}{3} + \frac{S^2}{2} \right\rangle.$$

Чтобы получить сверхтонкое расщепление, найдем разность значений этого выражения, соответствующих  $S=1$  и  $S=0$ . Таким образом, имеем

$$\Delta E_{ts} = \frac{7}{6} \alpha^2 \text{Ryd}, \quad (10.81)$$

где  $\text{Ryd}$  — постоянная Ридберга

$$\text{Ryd} = m\alpha^2/2 = 3,28984 \cdot 10^{15} \text{ Гц}. \quad (10.82)$$



Формула (10.81) дает  $\Delta E = 2,04 \cdot 10^7$  МГц. Это значение хорошо согласуется с экспериментальными данными с точностью до величины  $\alpha$ . К счастью, это на два порядка больше, чем скорость двухфотонного распада синглетного состояния  $\Gamma_{2\gamma} = \alpha^3 \text{Ryd}$ . Следовательно, вычисление сверхтонкого расщепления является точной проверкой как квантовой электродинамики, так и применимости уравнения Бете—Солпитера.

### 10.3.1. Общая постановка задачи

В нашем изложении будем следовать оригинальной работе Карпуса и Клейна. Отправным пунктом для нас является записанное в электрон-позитронном канале уравнение, аналогичное (10.26). Амплитуда связанного состояния  $\chi = \langle 0 | \psi(x) \bar{\psi}(y) | P \rangle$  обозначается  $4 \times 4$ -матрицей в пространстве индексов Дирака. Следует подчеркнуть, что  $\chi$  представляет собой калибровочно-ковариантную величину. Поэтому если  $\chi$  удовлетворяет решаемому приближенно уравнению, то нам не безразлично, как нужно выбрать частную калибровку. На практике, учитывая, что относительные скорости малы, естественно в качестве первого приближения для энергии связи взять нерелятивистское соотношение

$$E_0 = 2m - m\alpha^2/4n^2, \quad (10.83)$$

а  $\chi$  определить из волнового уравнения Паули—Шредингера.

Для получения этого результата, по-видимому, лучше всего подходит нековариантная калибровка излучения. Однако такой выбор является небезопасным, поскольку высшие поправки потребуют перенормировки. С другой стороны, известно, что для введения калибровочной инвариантности релятивистским образом необходимо включить в ядро  $V$  бесконечный ряд диаграмм с пересечениями. Мы сталкиваемся с дилеммой, которую можно практически разрешить следующим образом. Будем использовать ковариантную калибровку, а именно, калибровку Фейнмана. При этом необходимо отделить мгновенное взаимодействие от запаздывающего. Это является следствием того, что нельзя точно решить уравнение, эквивалентное релятивистскому уравнению Вика—Кутковского. Поэтому запаздывающее взаимодействие будем рассматривать как возмущение, на том же основании, что и члены высших порядков в  $V$ . Если мы будем получать все меньшие и меньшие поправки, которые согласуются с экспериментом, то эту процедуру, несмотря на ее недостаточное теоретическое обоснование, можно рассматривать по крайней мере как полезный метод расчета. Это справедливо по отношению к поправкам порядка  $\alpha^3 \text{Ryd}$ . Однако дальнейшее изучение данного вопроса показывает, что даже специалисты наталкиваются на затруднения при расчетах вкладов более высоких порядков, учет которых требуется для сравнения с очень точными измерениями.

Предлагался ряд усовершенствований, таких, как разложение  $\chi$  по лоренц-инвариантным скалярным амплитудам, умноженным на ковариантные величины, проведение полного разложения Фурье по угловым переменным для амплитуды, над которой совершен поворот Вика, или попытка найти эквивалентную, но решаемую форму релятивистского лестничного приближения.

Пренебрегая вначале радиационными поправками, запишем уравнение, которому удовлетворяет  $\chi$  в импульсном пространстве, в виде

$$\left(\frac{P}{2} + \not{p} - m\right) \chi \left(\frac{P}{2} - \not{p} + m\right) = (V_B + V_a) \chi,$$

$$V_B \chi = i \frac{\alpha}{4\pi^3} \int \frac{d^4 p'}{(p-p')^2} \gamma_\mu \chi(p') \gamma^\mu, \quad (10.84)$$

$$V_a \chi = -i \frac{\alpha}{4\pi^3} \frac{1}{p^2} \gamma \int d^4 p' \text{Sp} [\gamma \chi(p')],$$

где  $V_B$  отвечает однофотонному обмену в перекрестном  $t$ -канале, а  $V_a$  — ядро, соответствующее однофотонному аннигиляционному взаимодействию. Даже на этом раннем этапе сложность проблемы несколько отпугивает.

Удобно работать с величиной  $K$ , получаемой действием антисимметричной матрицы зарядового сопряжения  $C$  на второй индекс матрицы  $\chi$ :

$$K_{\alpha\beta} = C_{\beta\beta'} \chi_{\alpha\beta'}. \quad (10.85)$$

Эта амплитуда имеет те же трансформационные свойства, что и амплитуда, соответствующая каналу частица-частица, за тем лишь исключением, что в последнем отсутствуют электромагнитные связанные состояния. Амплитуда удовлетворяет уравнению

$$\left(\frac{P}{2} + \not{p} - m\right)_1 \left(\frac{P}{2} - \not{p} - m\right)_2 K = (V_B + V_a) K(p),$$

причем

$$V_B K = i \frac{\alpha}{4\pi^3} \int \frac{d^4 p'}{(p-p')^2} \gamma_{1\mu} \gamma_2^\mu K(p'), \quad (10.86)$$

$$V_a K = -i \frac{\alpha}{4\pi^3} \frac{1}{p^2} \gamma_\mu C \int d^4 p' \text{Sp} [\gamma^\mu K(p') C].$$

Мы добавили индексы в произведение  $\gamma$ -матриц, чтобы различать электронные и позитронные переменные.

Структура  $\gamma_{1\mu} \gamma_2^\mu / k^2$ , где  $k = (p - p')$ , возникает в связи с использованием калибровки Фейнмана. Однако это взаимодействие можно разделить на мгновенную и запаздывающую часть в общей системе покоя,  $P = (E, \mathbf{0})$ , с помощью соотношения

$$\frac{\gamma_1^\nu \gamma_2^\nu - \gamma_1 \cdot \gamma_2}{k^2} = -\frac{\gamma_1^0 \gamma_2^0}{k^2} + \frac{\gamma_1^0 \gamma_2^0 k_c^2}{k^2 k^2} - \frac{\gamma_1 \cdot \gamma_2}{k^2}. \quad (10.87)$$

Здесь в правой части второй член содержит как запаздывающее, так и статическое магнитное взаимодействие. Мы будем анализировать его, опираясь на теорию возмущений (конечно, нам хотелось бы сделать большее); то же самое относится и к вкладу аннигиляционных членов

Приближение нулевого порядка для  $K$  получается, если в соответствии с (10.87) отделить в  $V_B$  кулоновскую часть  $V_0$  от остальной части, которую мы обозначим через  $V_b$ . Следовательно, в приближении мгновенного взаимодействия можно записать следующее уравнение:

$$\left(\frac{P}{2} + \not{p} - m\right)_1 \left(\frac{P}{2} - \not{p} - m\right)_2 K(p) = -i \frac{\alpha}{4\pi^3} \int \frac{d^4 p'}{(p-p')^2} \gamma_1^0 \gamma_2^0 K(p'). \quad (10.88)$$

Отсюда можно вывести уравнение для

$$\Phi(p) = \int d\rho^0 K(\rho^0, p), \quad (10.89)$$

которое получается, если разделить обе части уравнения (10.88) на волновые операторы и проинтегрировать результат по  $\rho^0$ . Таким образом получаем

$$\begin{aligned} \Phi(p) = & -i \frac{\alpha}{4\pi^3} \int d\rho^0 \frac{(\not{P}_2/2 + \not{p} + m)_1}{(P/2 + \rho)^2 - m^2 + i\epsilon} \frac{(\not{P}/2 - \not{p} + m)_2}{(P/2 - \rho)^2 - m^2 + i\epsilon} \times \\ & \times \int \frac{d^3 p'}{(p-p')^2} \gamma_1^0 \gamma_2^0 \Phi(p'). \end{aligned} \quad (10.90)$$

Присутствие в знаменателях добавки  $i\epsilon$  вытекает из вывода уравнения. Интеграл по  $\rho^0$  сходится, и его можно вычислить, замыкая в верхней полуплоскости контур, охватывающий полюсы в точках  $\rho^0 = \mp E/2 - \omega + i\epsilon$ , где  $\omega = \sqrt{p^2 + m^2}$ . Если мы используем обозначения Дирака  $\beta = \gamma^0$  и  $\alpha = \beta\gamma$ , а также следующие величины:

$$\begin{aligned} H(p) &= \alpha \not{p} + \beta m, \\ \Lambda^\pm(p) &= \frac{\omega \pm H(p)}{2\omega}, \\ \Lambda^{\pm\pm} &= \Lambda_\Gamma^\pm(p) \Lambda_{\Gamma'}^\pm(-p), \end{aligned} \quad (10.91)$$

то интегрирование по  $\rho^0$  дает

$$\Phi(p) = \frac{1}{2} \left( \frac{\Lambda^{++}}{\omega - E/2} + \frac{\Lambda^{--}}{\omega + E/2} \right) \frac{\alpha}{2\pi^2} \int \frac{d^3 p' \Phi(p')}{(p-p')^2}. \quad (10.92)$$

Заметим, что две формы записи пропагатора Фейнмана эквивалентны между собой:

$$S = \frac{\not{p} + m}{p^2 - m^2 + i\epsilon} = \left[ \frac{\Lambda^+(p)}{p_0 - \omega + i\epsilon} + \frac{\Lambda^-(p)}{p_0 + \omega - i\epsilon} \right] \gamma^0.$$

В силу равенства

$$H(\mathbf{p}) \Lambda^\pm(\mathbf{p}) = \pm \omega \Lambda^\pm(\mathbf{p})$$

уравнение (10.92) можно также записать как эффективное уравнение для одной частицы, а именно

$$[H_1(\mathbf{p}) + H_2(-\mathbf{p}) - E] \varphi(\mathbf{p}) = (\Lambda^{++} - \Lambda^{--}) \frac{\alpha}{2\pi^2} \int \frac{d^3 p'}{(\mathbf{p} - \mathbf{p}')^2} \varphi(\mathbf{p}'). \quad (10.93)$$

Вводя обозначения  $\varphi^{\pm\pm} = \Lambda^{\pm\pm} \varphi$ , мы видим, что уравнение (10.93) эквивалентно системе связанных уравнений

$$\begin{aligned} (2\omega - E) \varphi^{++}(\mathbf{p}) &= \Lambda^{++} \frac{\alpha}{2\pi^2} \int \frac{d^3 p'}{(\mathbf{p} - \mathbf{p}')^2} [\varphi^{++}(\mathbf{p}') + \varphi^{--}(\mathbf{p}')], \\ (2\omega + E) \varphi^{--}(\mathbf{p}) &= \Lambda^{--} \frac{\alpha}{2\pi^2} \int \frac{d^3 p'}{(\mathbf{p} - \mathbf{p}')^2} [\varphi^{++}(\mathbf{p}') + \varphi^{--}(\mathbf{p}')], \\ \varphi^{+-}(\mathbf{p}) &= \varphi^{-+}(\mathbf{p}) = 0. \end{aligned} \quad (10.94)$$

Для наших целей недостаточно иметь уравнение (10.88) или (10.92), поскольку в них опущены запаздывающая часть  $V_b$  и аннигиляционное ядро, существенные для сверхтонкого расщепления. Правильное уравнение, впервые рассмотренное Брейтом для задач такого рода, мы получим, включив оба этих взаимодействия.

Чтобы обсудить этот эффект, воспользуемся здесь той формой теории возмущений, которая была первоначально разработана Солпитером. Она предназначена для преодоления трудности, возникающей вследствие того, что энергия  $E$  входит в дифференциальный оператор уравнения квадратично (и, вообще говоря, параметрически в ядро). Данный метод приспособлен для описания мгновенного невозмущенного взаимодействия.

Умножив обе части уравнения (10.88) на  $\gamma_1^0 \gamma_2^0$ , получим

$$\begin{aligned} \left[ \frac{E}{2} + p_0 - H_1(\mathbf{p}) \right] \left[ \frac{E}{2} - p_0 - H_2(-\mathbf{p}) \right] K &= -\frac{i}{2\pi} v \varphi(\mathbf{p}), \\ v \varphi(\mathbf{p}) &= \frac{\alpha}{2\pi^2} \int \frac{d^3 p'}{(\mathbf{p} - \mathbf{p}')^2} \varphi(\mathbf{p}'). \end{aligned} \quad (10.95)$$

Предполагая, что  $\varphi$  известно, и используя добавку  $i\epsilon$  при обращении оператора  $D$ , действующего на  $K$ , можно написать следующие выражения:

$$\begin{aligned} K &= D^{-1} \frac{1}{2i\pi} v \varphi, \\ D^{-1} &= \sum_{\pm\pm} \frac{\Lambda^{\pm\pm}}{[E/2 + p_0 \mp (\omega - i\epsilon)][E/2 - p_0 \mp (\omega - i\epsilon)]}. \end{aligned} \quad (10.96)$$

Интегрирование по  $p_0$  возвращает нас к уравнению (10.92). Для краткости записи определим величину  $\eta$  таким образом, чтобы

выполнялось соотношение

$$(H - E) \eta = v \varphi, \quad (10.97)$$

в котором мы положили

$$H(p) = H_1(p) + H_2(-p).$$

Из уравнения (10.93) следует, что

$$\varphi = (\Lambda^{++} - \Lambda^{--}) \eta, \quad (10.98)$$

а величина  $K$  дается выражением

$$K = (H - E) \frac{1}{2i\pi} D^{-1} \eta. \quad (10.99)$$

При фиксированном  $\eta$ , соответствующем данному решению уравнения, определим амплитуду  $Q$  с помощью выражения, аналогичного (10.99), но с энергией  $E$ , замененной на  $E'$ . Напомним, что  $D$  также зависит от  $E$ ; таким образом,

$$Q = (H - E') \frac{1}{2i\pi} D^{-1}(E') \eta. \quad (10.100)$$

Рассмотрим выражение

$$\begin{aligned} \left[ D(E') - \frac{1}{2i\pi} \int dp^0 v \right] Q = \\ = (H - E') \frac{1}{2i\pi} \eta - \frac{1}{2i\pi} \int dp^0 v (H - E') \frac{1}{2i\pi} D^{-1}(E') \eta. \end{aligned}$$

При  $E'$ , равном  $E$ , и  $Q$ , равном  $K$ , левая часть этого выражения обращается в нуль. В правой части единственная зависимость от  $p^0$  имеется в пропагаторе  $D^{-1}(E')$ . Интеграл совпадает с тем, что был выше, поэтому мы имеем

$$\begin{aligned} \left[ D(E') - \frac{1}{2i\pi} \int dp^0 v \right] Q = (H - E') \frac{1}{2i\pi} \eta - \frac{1}{2i\pi} v (\Lambda^{++} - \Lambda^{--}) \eta = \\ = - \frac{1}{2i\pi} (E' - E) \eta. \quad (10.101) \end{aligned}$$

Последнее равенство следует из формул (10.97) и (10.98). Аналогично, если

$$\tilde{Q} = \eta^\dagger (H - E') \frac{1}{2i\pi} D^{-1}(E'), \quad (10.102)$$

то, учитывая эрмитовость величин  $H$  и  $v$ , получаем

$$\tilde{Q} D(E') - \frac{1}{2i\pi} \int dp^0 \tilde{Q} v = - \frac{1}{2i\pi} \eta^\dagger (E' - E). \quad (10.103)$$

Мы готовы теперь обсудить вопрос о том, к каким эффектам приводит возмущение мгновенного кулоновского взаимодействия,

имеющее вид

$$\delta V = \gamma_1^0 \gamma_2^0 (V_b + V_c). \quad (10.104)$$

Новая волновая функция  $K'$  и энергия  $E'$  удовлетворяют уравнению

$$\left[ D(E') - \frac{1}{2i\pi} \int dp^0 v - \delta V \right] K' = 0. \quad (10.105)$$

Умножим это уравнение слева на амплитуду  $\bar{Q}$ , определенную, как и выше, для энергии  $E'$ , и проинтегрируем по 4-импульсу  $p$ . Из (10.103) находим

$$(E' - E) \int d^3 p \eta^\dagger(p) \varphi'(p) = -2i\pi \int d^4 p \bar{Q}(p) (\delta V K')(p).$$

Это точный результат. Чтобы использовать его как приближение первого порядка, заменим  $\varphi'$  на  $\varphi$ , а  $K'$  и  $Q$  — на  $K$ . Таким образом, получим выражение

$$\Delta E^{(1)} = -\frac{i}{(2\pi)^2} \int d^4 p \bar{K}(p) (\delta V K)(p) \quad (10.106)$$

при условии, что использована нормировка

$$\int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \eta^\dagger(p) \varphi(p) \equiv \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} [|\varphi^{++}(p)|^2 - |\varphi^{--}(p)|^2] = 1. \quad (10.107)$$

В будущем нам понадобится также выражение для сдвига энергии во втором порядке. В принципе оно включает в себя величину, обратную полному пропагатору  $\left[ D(E) - 1/2i\pi \int dp^0 v \right]^{-1}$ . Однако в нашем случае можно обойтись свободным двухчастичным пропагатором. В итоге будем иметь

$$\Delta E^{(2)} = -\frac{i}{(2\pi)^2} \int d^4 p (\bar{K} \delta V)(p) D^{-1}(E; p) (\delta V K)(p). \quad (10.108)$$

Читателю предлагается исследовать условие нормировки с точки зрения, развитой в разд 10.2, и установить соотношение между этим условием и рассмотренным выше разложением энергии связанного состояния по теории возмущений

### 10.3.2. Вычисление в порядке $\alpha^5$

Анализируя проблему сверхтонкого расщепления, мы имеем дело со сферически-симметричными  $n=1$  состояниями. Теперь, когда нам известно достаточно точное решение невозмущенного уравнения (10.92) или (10.93), можно вычислить сдвиг энергии.

В низшем порядке он состоит из двух вкладов:

$$\Delta E_b^{(1)} = \frac{\alpha}{\pi (2\pi)^4} \int d^4 p d^4 p' \bar{K}(p') \frac{1}{(p' - p)^2} \left[ \gamma_0^i \gamma_2 \frac{(\rho_0 - \rho'_0)^2}{(p - p')^2} - \gamma_1 \cdot \gamma_2 \right] K(p), \quad (10.109)$$

$$\Delta E_a^{(1)} = -\frac{\alpha}{\pi (2\pi)^4} \frac{1}{4m^2} \int d^4 p d^4 p' \text{Sp}[\bar{K}(p') \gamma_\mu C] \text{Sp}[C \gamma^\mu K(p)],$$

где  $\bar{K} = \bar{K} \gamma_1^0 \gamma_2^0$ .

Включая в рассмотрение радиационные поправки, мы намереваемся получить  $\Delta E$  в порядке  $\alpha^3$ , тогда как ведущий член имеет порядок  $\alpha^4$ . Желательно поэтому найти подходящее приближение для мгновенной волновой функции  $\Phi$ , являющейся решением уравнения (10.92) или (10.93). Напомним, что соответствующая волновая функция Шредингера, удовлетворяющая уравнению

$$\Phi_S(p) = \frac{m}{p^2 + m^2 \alpha^2 / 4} \frac{\alpha}{2\pi^2} \int \frac{d^4 p'}{(p - p')^2} \Phi_S(p'), \quad (10.110)$$

т. е. при энергии  $E$ , заданной в наименьшем приближении (10.83), и  $\omega$ , разложенной до порядка  $p^2$ , равна

$$\Phi_S(p) = \frac{4\pi\alpha m}{(p^2 + m^2 \alpha^2 / 4)^2} \Phi_0; \quad (10.111)$$

здесь  $\Phi_0$  — значение волновой функции в начале координат в конфигурационном пространстве:

$$|\Phi_0|^2 = (m\alpha)^3 / 8\pi. \quad (10.112)$$

Если данное выражение [умноженное на произведение двух спиноров в состоянии покоя, т. е. на форму  $\begin{pmatrix} \chi_1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \chi_2 \\ 0 \end{pmatrix}$ , которая не будет выписываться явно] подставить в (10.96), то мы получим приближение, которое является достаточным для наших целей:

$$K(p) = \frac{2\alpha}{i} \sum \frac{\Lambda^{\pm\pm}}{[E_0/2 + \rho_0 \mp (\omega - i\varepsilon)] [E_0/2 - \rho_0 \mp (\omega - i\varepsilon)]} \times \\ \times \frac{\Phi_0}{(p^2 + m^2 \alpha^2 / 4)}. \quad (10.113)$$

Величина  $E_0$  здесь определяется выражением (10.83). Следовательно, с требуемой степенью точности можно написать

$$\Delta E_b^{(1)} = -\frac{2\alpha^3}{\pi^2} \frac{|\Phi_0|^2}{(2\pi)^3} \int \frac{d^4 p d^4 p'}{(p - p')^2 + i\varepsilon} \frac{1}{(p^2 + m^2 \alpha^2 / 4) (p'^2 + m^2 \alpha^2 / 4)} \times \\ \times \left\langle \sum \frac{\Lambda^{\pm\pm}}{[E_0/2 + \rho'_0 \mp (\omega' - i\varepsilon)] [E_0/2 - \rho'_0 \mp (\omega - i\varepsilon)]} \right\rangle \times \\ \times \left[ \frac{(\rho_0 - \rho')^2}{(p - p')^2} - \alpha_1 \cdot \alpha_2 \right] \sum \frac{\Lambda^{\pm\pm}}{[E_0/2 + \rho_0 \mp (\omega - i\varepsilon)] [E_0/2 - \rho_0 \mp (\omega - i\varepsilon)]}. \quad (10.114)$$

Выражение, стоящее в угловых скобках, обозначает среднее значение в состоянии, описываемом произведением спиноров в покое. Перед интегралом в (10.114) имеется зависимость  $\alpha^b$ . Следовательно, члены, которые нам предстоит вычислить, могут возникнуть лишь благодаря вкладам в интеграл порядка  $1/\alpha^2$  и  $1/\alpha$ . Ясно, что из-за присутствия в знаменателе величины  $[\mathbf{p}^2 + m^2\alpha^2/4][\mathbf{p}'^2 + m^2\alpha^2/4]$  главный член определяется областью малых  $|\mathbf{p}|$ ,  $|\mathbf{p}'|$  и что множитель вида  $|\mathbf{p}|$  или  $|\mathbf{p}'|$  будет увеличивать степень величины  $\alpha$  перед интегралом на единицу. В выражение для среднего значения входят запаздывающее кулоновское взаимодействие и взаимодействие Брейта  $\alpha_1 \alpha_2$ . В первом с относительной ошибкой порядка  $\alpha^2$  можно заменить  $(p_0 - p'_0)^2$  на  $(p - p')^2$ , сокращая тем самым фотонный знаменатель. Затем можно выполнить интегрирование по  $p_0$  и  $p'_0$  и показать, что в числителе члены, содержащие зависимость от спина, включают в себя трехмерные импульсы в четвертой степени. Следовательно, в порядке  $\alpha^3$  этими членами можно пренебречь.

Перейдем далее к рассмотрению взаимодействия Брейта  $\alpha_1 \alpha_2$ . В этом случае с помощью фурье-преобразования волновых функций удобно ввести относительное время. Перепишем часть интеграла по  $p_0$  и  $p'_0$ , отвечающую взаимодействию Брейта, в виде

$$\int \frac{dp_0 dp'_0}{(p-p')^2 + i\varepsilon} \langle \rangle = \int \frac{2\pi dt dk_0}{k_0^2 - k^2 + i\varepsilon} e^{itk_0} \langle D^{-1}(-t)(-\alpha_1 \cdot \alpha_2) D^{-1}(t) \rangle, \quad (10.115)$$

где  $\mathbf{k} = \mathbf{p} - \mathbf{p}'$ , а

$$\begin{aligned} D^{-1}(t) &= \\ &= \sum_{\varepsilon_1, \varepsilon_2} \Lambda^{\varepsilon_1 \varepsilon_2} \int \frac{dp_0}{2\pi} e^{-itp_0} \frac{1}{[E_0/2 + p_0 - \varepsilon_1(\omega - i\varepsilon)][E_0/2 - p_0 - \varepsilon_2(\omega - i\varepsilon)]} = \\ &= -i \sum_{\varepsilon_1, \varepsilon_2} \frac{\Lambda^{\varepsilon_1 \varepsilon_2}}{E_0 - (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)\omega} \{ [\theta(\varepsilon_1)\theta(t) - \theta(-\varepsilon_1)\theta(-t)] e^{-it(\varepsilon_1\omega - E_0/2)} + \\ &\quad + [\theta(\varepsilon_2)\theta(-t) - \theta(-\varepsilon_2)\theta(t)] e^{it(\varepsilon_2\omega - E_0/2)} \}. \end{aligned} \quad (10.116)$$

В этой сумме единственный вклад будет давать знаменатель, соответствующий  $\Lambda^{++}$ , поскольку  $E_0 - 2\omega \approx -(1/m)(\mathbf{p}^2 + m^2\alpha^2/4)$ , и в интегрировании, которое предстоит выполнить, доминирует область малых  $\mathbf{p}^2$ . Если бы главный вклад, который мы ищем, имел порядок  $\alpha^4$ , то достаточно было бы удержать множитель при проекторе на положительные энергии. Однако, чтобы получить следующую поправку, необходимо использовать полное выражение. К счастью, вклады порядка  $\mathbf{p}^2$  можно опустить. Это является следствием того, что они дают поправки относительного порядка  $\alpha^2$  при условии, что  $\mathbf{p}^2$  связано с фактором, обес-



печивающим ультрафиолетовую сходимость. Заменяя  $E_0$  всюду, где это возможно, на  $2m$ , получаем для  $D^{-1}(t)$  удовлетворительное приближение вида

$$D^{-1}(t) \approx \frac{im}{2\omega(p^2 + m^2\alpha^2/4)} \left(1 + \frac{\alpha_1 \cdot p}{2m}\right) \left(1 - \frac{\alpha_2 \cdot p}{2m}\right) \times \\ \times [(\omega + m)e^{-i|t|( \omega - m)} - (\omega - m)e^{-i|t|( \omega + m)}]. \quad (10.117)$$

Применяя то же правило, что и прежде, и удерживая в матричном элементе только член, ответственный за сверхтонкое расщепление, находим

$$\left\langle \left(1 + \frac{\alpha_1 \cdot p'}{2m}\right) \left(1 - \frac{\alpha_2 \cdot p'}{2m}\right) (-\alpha_1 \cdot \alpha_2) \left(1 + \frac{\alpha_1 \cdot p}{2m}\right) \left(1 - \frac{\alpha_2 \cdot p}{2m}\right) \right\rangle \approx \\ \approx -\frac{k^2}{4m^2} \left\langle (\sigma_1 - \hat{k}\sigma_1 \cdot \hat{k}) \cdot (\sigma_2 - \hat{k}\sigma_2 \cdot \hat{k}) \right\rangle.$$

Поскольку оставшаяся часть интеграла инвариантна относительно трехмерных вращений, мы можем заменить правую часть на выражение  $-(k/4m^2)(2/3)\langle \sigma_1 \cdot \sigma_2 \rangle$ . Подставляя эти выражения в (10.115) и интегрируя результат по  $t$ , получаем

$$\Delta E_b^{(1)} = -\frac{2\alpha^3}{3\pi} \frac{|\Phi_0|^2}{(2\pi)^3} \langle \sigma_1 \cdot \sigma_2 \rangle \int \frac{d^3p d^3p' dk_0}{(p^2 + \alpha^2 m^2/4)^2 (p'^2 + \alpha^2 m^2/4)^2 (k_0^2 - k^2 + i\epsilon)} \times \\ \times \left( \frac{i}{k_0 - \omega - \omega' + 2m + i\epsilon} - \frac{i}{k_0 + \omega + \omega' - 2m - i\epsilon} \right).$$

Интеграл по  $k_0$  легко вычислить, замыкая контур в верхней полуплоскости, что дает

$$\Delta E_b^{(1)} = \frac{4\alpha^3}{3(2\pi)^3} |\Phi_0|^2 \langle \sigma_1 \cdot \sigma_2 \rangle \int \frac{d^3p d^3p'}{(p^2 + \alpha^2 m^2/4)^2 (p'^2 + \alpha^2 m^2/4)^2} \times \\ \times \frac{|k|}{2\omega\omega'} \left[ \frac{(\omega + m)(\omega' + m)}{\omega + \omega' + |k| - 2m} - 2 \frac{(\omega\omega' + m^2)}{\omega + \omega' + |k|} + \frac{(\omega - m)(\omega' - m)}{\omega + \omega' + |k| + 2m} \right]. \quad (10.118)$$

Последний член можно опустить, поскольку интеграл сходится, если в обоих знаменателях положить  $\alpha^2 = 0$ . Используем тождество  $(\omega + m)(\omega' - m) + (\omega - m)(\omega' + m) = 2(\omega\omega' - m^2)$  и учтем симметрию интеграла. Это позволит нам отбросить в знаменателях одно из  $\alpha^2$ ; таким образом, имеем

$$-2 \int \frac{d^3p d^3p'}{p^2 (p'^2 + m^2\alpha^2/4)^2} \frac{(\omega' + m)|k|}{(4\omega + m)\omega\omega'(\omega + \omega' + |k|)}.$$

Производя замены  $p' \rightarrow \left(\frac{m\alpha}{2}\right)p'$ ,  $p \rightarrow mp$  и удерживая основной вклад порядка  $\alpha^{-1}$ , получаем простой интеграл

$$-\frac{2}{m^2\alpha} (4\pi)^2 \int_0^\infty \frac{dp}{\sqrt{1+p^2}} \frac{p}{(1+\sqrt{1+p^2})(1+p+\sqrt{1+p^2})} \int_0^\infty \frac{dp' p'^2}{(1+p'^2)^2} = \\ = -\frac{(2\pi)^3}{m^2\alpha} (1 - \ln 2).$$

Первый интеграл в (10.118) дает главный вклад. Запишем его в виде

$$\int \frac{d^3 p d^3 p'}{(p^2 + m^2 \alpha^2 / 4)^2 (p'^2 + m^2 \alpha^2 / 4)^2} \frac{(\omega + m)(\omega - m)}{4\omega\omega'} \frac{|k|}{\omega + \omega' + |k| - 2m} =$$

$$= \frac{\pi (2\pi)^3}{2 m^2 \alpha^2} + \int \frac{d^3 p d^3 p'}{(p^2 + m^2 \alpha^2 / 4)^2 (p'^2 + m^2 \alpha^2 / 4)^2} \left[ \frac{(\omega + m)(\omega + m)}{4\omega\omega'} \frac{|k|}{\omega + \omega' + |k| - 2m} - 1 \right].$$

Здесь нельзя непосредственно применить тот же метод, которым мы пользовались выше. В противном случае благодаря энергетическому знаменателю  $(\omega + \omega' + |k| - 2m)$  возникла бы дополнительная инфракрасная расходимость. Чтобы преодолеть эту трудность, введем искусственным образом массу фотона  $\mu$ , заменяя в знаменателе  $|k|$  на  $\sqrt{k^2 + \mu^2}$ . Если масса  $\mu$  такова, что  $m\alpha/2 \ll \mu \ll m$ , то можно действовать, как и прежде. Оставшийся интеграл нетрудно вычислить, и мы получаем

$$- \frac{(2\pi)^3}{m^2 \alpha} \left[ 1 + \ln \left( \frac{m}{\mu} \right) \right].$$

Объединяя полученные нами результаты, имеем

$$\Delta E_b^{(2)} = \frac{2\pi\alpha}{3m^2} |\Phi_0|^2 \langle \sigma_1 \cdot \sigma_2 \rangle \left[ 1 - \frac{4\alpha}{\pi} \left( 1 + \frac{1}{2} \ln \frac{m}{2\mu} \right) \right]. \quad (10.119)$$

Вклад порядка  $\alpha^4$  согласуется, очевидно, с первоначальной оценкой. Следующая поправка содержит ложную инфракрасную расходимость, обусловленную нашим способом оценки интегралов (эта оценка является правильной, если  $\mu$  выбрать, как указано выше). Когда будут собраны все величины одного порядка, то члены вида  $\ln(m/\mu)$  сократятся (ниже мы убедимся, что они действительно сокращаются)

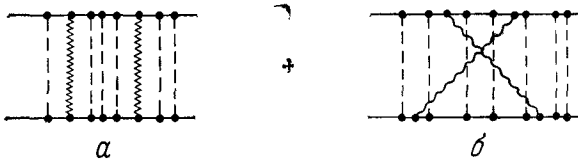


РИС. 10.7. Обмен во втором порядке. а — запаздывающее взаимодействие  $V_b$  во втором порядке, б — перекрестный обмен фотонами. Штриховые линии соответствуют мгновенному обмену, ломаные линии — запаздывающему обмену, а волнистые линии — ковариантному фотонному пропагатору

Вместо того чтобы переходить непосредственно к вычислению аннигиляционного вклада, рассмотрим снова эффекты второго порядка и тем самым продемонстрируем предсказанное сокращение. Однако неразумно вычислять эффект второго порядка от потенциала  $V_b$ , не вводя поправок к ядру Бете — Солпитера, обусловленных перекрестным обменом двумя фотонами (рис. 10.7, б), обеспечивающим калибровочную инвариантность. Обозначим сумму этих вкладов через  $\Delta E_{bb+x}^{(2)}$ . Применяя выражение (10.108), произведем дальнейшее упрощение. Заметим, что в это выражение вместо полного входит свободный пропагатор элект-

рон-позитронной пары. На рис. 10.7, а это сводится к пренебрежению вкладом мгновенного обмена, линии которого заключены между линиями, соответствующими  $V_b$ -взаимодействию. В том же духе вместо  $K$  (и  $\tilde{K}$ ) можно подставить его нулевое приближение, т. е. значение волновой функции в конфигурационном пространстве в нуле:

$$K(p) \rightarrow \int d^4 p K(p) = (2\pi)^3 \varphi_0.$$

Короче говоря, мы имеем

$$\begin{aligned} \Delta E_{bb+x}^{(2)} = & \frac{4i\alpha^2}{(2\pi)^3} |\varphi_0|^2 \int \frac{d^4 k}{(k^2 + i\varepsilon)^2} \left\langle \left( \frac{\gamma_1^0 \gamma_2^0 k_0^2}{k^2} - \gamma_1 \cdot \gamma_2 \right) \times \right. \\ & \times \frac{(P/2 + K + m)_1 (P/2 - K + m)_2}{[(k_0 + m)^2 - \omega^2 + i\varepsilon] [(k_0 - m)^2 - \omega^2 - i\varepsilon]} \left( \frac{\gamma_1^0 \gamma_2^0 k_0^2}{k^2} - \gamma_1 \cdot \gamma_2 \right) \Bigg\rangle + \\ & + \frac{\gamma_1^\mu (P/2 + K + m)_1 \gamma_{1\nu} \gamma_2^\nu (P/2 + K + m)_2 \gamma_{2\mu}}{[(k_0 + m)^2 - \omega^2 + i\varepsilon]^2}. \quad (10.120) \end{aligned}$$

Второй член, очевидно, описывает перекрестный фотонный обмен.

Здесь через  $\omega$  обозначена величина  $\sqrt{k^2 + m^2}$ , а четырехимпульс  $P = (2m, \mathbf{0})$ . Мы перейдем теперь к матричной алгебре, учитывая тот факт, что можно вычислить сферическое среднее по  $\mathbf{k}$ . Таким образом, часть, дающая вклад в расщепление, запишется в виде

$$\begin{aligned} & \left\langle \left( \gamma_1^0 \gamma_2^0 \frac{k_0^2}{k^2} - \gamma_1 \cdot \gamma_2 \right) \left( \frac{P}{2} + K + m \right)_1 \left( \frac{P}{2} - K + m \right)_2 \times \right. \\ & \quad \left. \times \left( \gamma_1^0 \gamma_2^0 \frac{k_0^2}{k^2} - \gamma_1 \cdot \gamma_2 \right) \right\rangle_{\text{сред}} \rightarrow \frac{2}{3} \langle \sigma_1 \cdot \sigma_2 \rangle k_0^2, \\ & \left\langle \gamma_1^\mu \left( \frac{P}{2} + K + m \right)_1 \gamma_{1\nu} \gamma_2^\nu \left( \frac{P}{2} + K + m \right)_2 \gamma_{2\mu} \right\rangle_{\text{сред}} \rightarrow \frac{2}{3} \langle \sigma_1 \cdot \sigma_2 \rangle (3k_0^2 - 2k^2). \end{aligned}$$

В результате мы приходим к выражению

$$\begin{aligned} \Delta E_{bb+x}^{(2)} = & \frac{8i\alpha^2}{3\pi} |\varphi_0|^2 \langle \sigma_1 \cdot \sigma_2 \rangle \int_0^\infty k^2 dk \int_{-\infty}^\infty \frac{dk_0}{(k_0^2 - k^2 + i\varepsilon)^2} \times \\ & \times \left\{ \frac{k_0^2}{[(k_0 + m)^2 - \omega^2 + i\varepsilon] [(k_0 - m)^2 - \omega^2 + i\varepsilon]} + \frac{3k_0^2 - 2k^2}{[(k_0 - m)^2 - \omega^2 + i\varepsilon]^2} \right\}. \end{aligned}$$

Восстановим теперь массу фотона  $\mu$  и применим ту же технику, что и выше; тогда

$$\Delta E_{bb+x}^{(2)} = \frac{4\alpha^2}{3m^2} |\varphi_0|^2 \langle \sigma_1 \cdot \sigma_2 \rangle \left( \frac{5}{4} + \ln \frac{m}{2\mu} \right). \quad (10.121)$$

Происхождение инфракрасной расходимости связано здесь с использованием свободного двухчастичного пропагатора, однако, как и ожидалось, это приближение оправдано, поскольку члены  $\ln(m/\mu)$ , входящие в (10.119) и (10.121), сокращаются.

При учете радиационных поправок второго порядка  $\Delta E_{bR}^{(2)}$  вершины и потенциал  $V_b$  изменяются за счет поляризации вакуума. Эта поправка к  $V_b$  не влияет на синглет-триплетное расщепление в порядке  $\alpha^2$ , поскольку они вносят изменения на малых расстояниях, тогда как изменение вершинных функций можно учесть, включив аномальные магнитные моменты электрона и позитрона, т. е. умножив главный член в (10.119) на  $(1 + \alpha/2\pi)^2$ . Таким образом, в требуемом порядке имеем

$$\Delta E_{bR}^{(2)} = \frac{2\alpha^2}{3m^2} |\Phi_0|^2 \langle \sigma_1 \cdot \sigma_2 \rangle. \quad (10.122)$$

Обратимся теперь к аннигиляционной части  $\Delta E_a^{(1)}$ , определяемой выражением (10.109), в котором замена  $p^2$  на  $4m^2$  была обоснована для данного расчета. Здесь мы сталкиваемся с новой трудностью, поскольку при введении кулоновской волновой функции необходимо учитывать входящую в нее в скрытой форме часть перенормировки заряда в вершине. Это ясно показано на

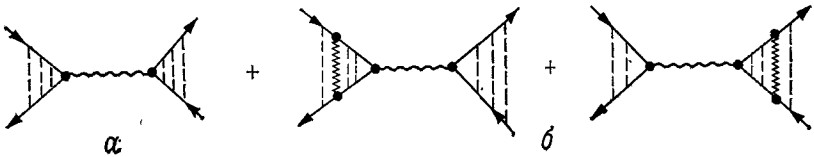


РИС. 10.8. Аннигиляционные диаграммы. *a* — член низшего порядка; *b* — вклад второго порядка от перекрестного члена  $V_a D^{-1} V_b + V_b D^{-1} V_a$ .

рис. 10.8. Поскольку потенциал, связанный с однофотонным обменом, разбит на части нековариантным образом, вычитания следует проводить с осторожностью. Для того чтобы восстановить ковариантность процедуры, необходимо включить в рассмотрение члены второго порядка  $V_b D^{-1} V_a + V_a D^{-1} V_b$ . При этом фотонный пропагатор дополняется до ковариантного. Фактически то, что в данном приближении сдвиг энергии во втором порядке определяется свободным двухчастичным пропагатором, означает, что оператор  $V_b$  стоит непосредственно перед или после аннигиляционной вершины. Разумеется, главный вклад порядка  $\alpha^4$  нечувствителен к этому эффекту. Таким образом, объединяя непосред-

ственно  $\Delta E_a^{(1)} + \Delta E_{ab+ba}^{(2)}$ , находим

$$\begin{aligned} \Delta E_a^{(1)} + \Delta E_{ab+ba}^{(2)} &= -\frac{\alpha}{4\pi (2\pi)^4 m^3} Z_1^2 \times \\ &\times \int d^4 p' \operatorname{Sp} \{ [\bar{K}(p') + \Delta \bar{K}'(p')] \gamma_\mu C \} \int d^4 p \operatorname{Sp} \{ C \gamma^\mu [K(p) + \Delta K(p)] \}, \\ \int d^4 p \operatorname{Sp} [C \gamma^\mu K(p)] &= 4\pi \alpha m^2 \int \frac{d^3 p}{\omega(p^2 + m^2 \alpha^2 / 2)^2} \times \\ &\times \operatorname{Sp} \left\{ C \gamma^\mu \left[ \left( 1 + \frac{\alpha_1 \cdot p}{2m} \right) \left( 1 - \frac{\alpha_2 \cdot p}{2m} \right) + \frac{p^2}{4m^2} \right] \Phi_0 \right\}, \\ \int d^4 p \operatorname{Sp} [C \gamma^\mu \Delta K(p)] &= 2i\alpha \times \\ &\times \int d^4 p \left\{ \frac{\operatorname{Sp} [C \gamma^\mu D^{-1}(p, P) (\rho_0^2 / p^2 - \alpha_1 \cdot \alpha_2) \Phi_0]}{p^2 - \mu^2 + i\epsilon} - \right. \\ &\left. \frac{\operatorname{Sp} [C \gamma^\mu D^{-1}(p, 0) \gamma_1^\nu \gamma_{2\nu} \Phi_0]}{p^2 - \Lambda^2 + i\epsilon} \right\}. \quad (10.123) \end{aligned}$$

Заметим, что на этот раз мы удержали в  $K(p)$  полный двухчастичный свободный пропагатор, в то время как по-прежнему считается, что  $\Phi_0$  содержит произведение  $\chi_1 \otimes \chi_2$  двухкомпонентных спиноров, описывающее поляризацию состояния, и фигурирует поэтому как матрица под знаком  $\operatorname{Sp}$ . В выражении для  $\Delta K(p)$  мы аппроксимировали кулоновскую волновую функцию ее значением в начале координат в импульсном пространстве и использовали инфракрасное обрезание  $\mu$ . Перенормировка вершины проводится, как и в гл. 7 (см. т. 1), посредством вычитания аналогичного выражения с большой фотонной массой  $\Lambda$  и использования константы перенормировки  $Z_1 = Z_2$  в калибровке Фейнмана, вычисленной тем же методом, что и в (7.34):

$$Z_1 = 1 - \frac{\alpha}{2\pi} \left( \ln \frac{\Lambda}{m} + 2 \ln \frac{\mu}{m} + \frac{9}{4} \right). \quad (10.124)$$

В разд. 10.3.1 уже отмечалось, что вклад в расщепление уровней дают только пространственно-подобные значения поляризации (индекс  $\mu$ ) виртуального фотона в аннигиляционном. Кроме того, матрица зарядового сопряжения

$$C = i\gamma^2 \gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & -i\sigma_2 \\ -i\sigma_2 & 0 \end{pmatrix}$$

является нечетной в употребляемом нами представлении, вследствие чего

$$\operatorname{Sp} [C \gamma ( )_1 ( )_2 \Phi_0]$$

следует считать равным величине

$$(0, \chi_2^f (-i\sigma_2) [C^{-1} ( )_2^T C \gamma ( )_1] \begin{pmatrix} \chi_1 \\ 0 \end{pmatrix} \Phi_0.$$

Непосредственное (хотя и утомительное) вычисление с учетом этого замечания дает

$$\begin{aligned} \Delta E_a^{(1)} + \Delta E_{ab+ba}^{(2)} &= \frac{\pi\alpha}{m^2} \left(1 - \frac{4\alpha}{\pi}\right) \text{Sp}(\varphi_0^\dagger \gamma C) \cdot \text{Sp}(C \gamma \varphi_0) = \\ &= -\frac{\pi\alpha}{m^2} \left(1 - \frac{4\alpha}{\pi}\right) [\chi_1^\dagger \sigma (-i\sigma_2) \chi_2^*] \cdot [\chi_2^T (-i\sigma_2) \sigma \chi_1] |\varphi_0|^2 = \\ &= -\frac{\pi\alpha}{m^2} \left(1 - \frac{4\alpha}{\pi}\right) |\varphi_0|^2 \langle \mathbf{S}^2 \rangle. \end{aligned} \quad (10.125)$$

Для того чтобы учесть радиационную поправку порядка  $\alpha$ , связанную с поляризацией вакуума, записанное выше выражение следует еще умножить на величину  $[1 - \bar{\omega}(4m^2)]$ . В данном формализме эту поправку следует учитывать, начиная с члена второго порядка  $V_a D^{-1} V_a$ :

$$\bar{\omega}(4m^2) = 8\alpha/9\pi. \quad (10.126)$$

Это дает дополнительный вклад

$$\Delta E_{aa}^{(2)} = \frac{\pi\alpha}{m^2} \left(-\frac{8\alpha}{9\pi}\right) |\varphi_0|^2 \langle \mathbf{S}^2 \rangle. \quad (10.127)$$

Последний элемент, который необходимо учесть для решения нашей задачи — это член, отвечающий двухфотонной аннигиляции, мнимая часть которого (со знаком минус) равна половине ширины

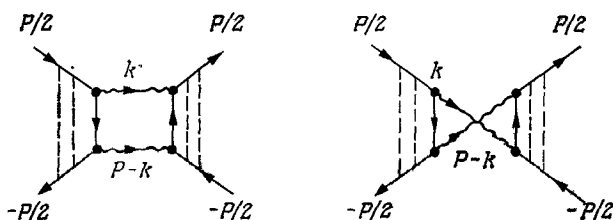


РИС. 10.9. Диаграммы двухфотонной аннигиляции.

синглетного уровня (рис. 10.9). Выражение для него определяется путем добавления нового члена к ядру Бете—Солпитера. Лучше всего вернуться к уравнению (10.84) и в качестве приближения для волновой функции использовать ее нерелятивистское значение в нуле. Это дает главный эффект порядка  $\alpha^5$  в зарядово-четном канале. Для того чтобы проследить за различными коэффициентами, проще использовать релятивистские обозначения, в которых

$u$  (1) и  $v$  (2) являются спинорами в системе покоя:

$$\Delta E_{2\gamma}^{(2)} - i \frac{\Gamma_{2\gamma}}{2} = \frac{i\alpha^2}{\pi^2} |\Phi_0|^2 \int \frac{d^4k}{[k^2 + i\epsilon] [(P-k)^2 + i\epsilon]} \times \\ \times \bar{v}(2) \gamma^\nu \frac{1}{P/2 - k - m} \gamma^{\mu\nu} u(1) \times \\ \times \bar{u}(1) \left( \gamma_\mu \frac{1}{P/2 - k - m} \gamma_\nu + \gamma_\nu \frac{1}{-P/2 + k - m} \gamma_\mu \right) v(2). \quad (10.128)$$

Вычисляя интеграл и спинорный матричный элемент, получаем коэффициент, пропорциональный проектору на синглетное состояние:

$$\Delta E_{2\gamma}^{(2)} - \frac{i\Gamma_{2\gamma}}{2} = - \frac{\alpha^2}{m^2} |\Phi_0|^2 \langle 2 - S^2 \rangle (2 - 2 \ln 2 + i\pi). \quad (10.129)$$

Мнимая часть этого коэффициента дает значение ширины  $\Gamma_{2\gamma} = m\alpha^5/2$ , определяемой выражением (5.128) в т. 1.

Мы имеем теперь полное выражение в порядке  $\alpha^5$  для сверхтонкого расщепления уровней позитрония. Беря выражения (10.119), (10.121) и (10.122) для обменного канала, а также (10.125), (10.127) и (10.129) для аннигиляционного канала и вычитая соответствующие значения в состояниях  $S=1$  и  $0$ , приходим к формуле Карплуса и Клейна:

$$\Delta E_{1s} = \frac{1}{2} \alpha^2 \text{Ryd} \left[ \frac{7}{3} - \left( \frac{32}{9} + 2 \ln 2 \right) \frac{\alpha}{\pi} \right]. \quad (10.130)$$

Это значение все еще не является достаточным, чтобы можно было производить сравнение с результатом эксперимента. Читатель может оценить усилия, необходимые для извлечения поправок порядка  $\alpha^6$ . Трудность частично связана с необходимостью последовательного учета эффектов отдачи, т. е. правильного описания релятивистских кулоновских волновых функций, что фактически приводит к членам порядка  $\alpha^6 \ln(1/\alpha)$ . Остальные эффекты, такие, как поляризация вакуума в обменном канале, также дают вклад в этот член, причем поправка имеет вид  $(\alpha^2/2) \text{Ryd} [B\alpha^2 \ln(1/\alpha) + C]$ . Последнее теоретическое значение коэффициента  $B$ , сообщенное Лепажем в 1977 г., равно  $B = -1/6$ . Учитывая это значение в (10.130), получаем теоретическое значение сверхтонкого расщепления  $2,033774 \cdot 10^6$  МГц, которое можно сравнить со значениями, приведенными в (10.79).

Формализм Бете—Солпитера можно также применить для получения радиационных поправок к ширинам распада, а также к другим системам, таким, как атом водорода. Читатель может в качестве упражнения получить в рамках

данного формализма возбужденный спектр позитрония с точностью до  $\alpha^4$ :

$$\begin{aligned}
 E_{n, L, J}^S &= 2m + \text{Ryd} \left( -\frac{1}{2n^2} + \frac{11\alpha^2}{32n^4} + \frac{\alpha^2}{n^3} \varepsilon_{L, J}^S \right), \\
 \varepsilon_{L, J}^0 &= -\delta_{L, J} \frac{1}{2L+1}, \\
 \varepsilon_{L, J}^1 &= -\frac{1}{2L+1} + \frac{7}{6} \delta_{L, 0} + \frac{1-2\delta_{L, 0}}{2(2L+1)} \times \\
 &\quad \times \left\{ \begin{array}{l} \frac{3L+4}{(L+1)(2L+3)}, \quad J=L+1, \\ -\frac{1}{L(L+1)}, \quad J=L, \\ -\frac{(3L-1)}{L(2L-1)}, \quad J=L-1. \end{array} \right. \quad (10.131)
 \end{aligned}$$

Каким образом это можно сравнить со значением триплетного расщепления (10 80)?

## ПРИМЕЧАНИЯ

Полевые уравнения рассмотрены в работах Дайсона (см.: *Dyson F. J.*—*Phys. Rev.*, 1949, vol. 75, p. 1736 [Имеется перевод: Новейшее развитие квантовой электродинамики: Сб. статей.— М.: ИЛ, 1954, с. 205]) и Швингера (см.: *Schwinger J.*—*Proc. Nat. Acad. Sci.*, 1951, vol. 37, pp. 452, 455 [Имеется перевод: Проблемы современной физики, 1955, № 3, с. 28, 33]).

Уравнения для связанных состояний имеют долгую историю, которую можно проследить по книге *Bethe H. A., Salpeter E. E. Quantum mechanics of One and Two Electron Atoms.*— Berlin: Springer-Verlag, 1957 [Имеется перевод: *Бете Г., Солтпер Э.* Квантовая механика атомов с одним и двумя электронами.— М.: Физматгиз, 1960.] Современное развитие этого вопроса началось с работ *Bethe H. A., Salpeter E. E.*—*Phys. Rev.*, 1951, vol. 82, p. 309; vol. 84, p. 1232 [Имеется перевод второй из этих статей: Новейшее развитие квантовой электродинамики: Сб. статей.— М.: ИЛ, 1954, с. 334.], с работы Швингера, процитированной выше, а также со статьи: *Gell-Mann M., Low F.*—*Phys. Rev.*, 1951, vol. 84, p. 350 [Имеется перевод: Проблемы современной физики, 1955, № 10, с. 43]. Обмен лестничными диаграммами рассматривался в работах: *Nambu Y.*—*Prog. Theor. Phys.*, 1950, vol. 5, p. 614; *Wick G. C.*—*Phys. Rev.*, 1954, vol. 96, p. 1124; *Cutcosky R. E.*—*Phys. Rev.*, 1954, vol. 96, p. 1135. Обзор, составленный Наканиши (*Nakanishi N.*—*Suppl. Prog., Theor. Phys.*, 1969, vol. 43, p. 1), содержит результаты как его собственных работ, так и работ многих других авторов, выполненных до конца 60-х гг.

Теория возмущений в случае сверхтонкого расщепления была развита в работе: *Salpeter E. E.*—*Phys. Rev.*, 1952, vol. 87, p. 328, а для случая позитрония— в работе: *Karplus R., Klein A.*—*Phys. Rev.*, 1952, vol. 87, p. 848. Результаты последних весьма точных измерений приведены в статьях: *Mills A. P., Bearman G. H.*—*Phys. Rev. Lett.*, 1975, vol. 34, p. 246; *Egan P. O., Frieze W. E., Hughes V. W., Yam. M. H.*—*Phys. Lett., Ser. A*, 1975, vol. 54, p. 412. Значение величины расщепления возбужденного триплетта, приведенное в настоящей главе, заимствовано из работы: *Mills A. P., Berko S., Canter K. F.*—*Phys. Rev. Lett.*, 1975, vol. 34, p. 1541. Позитронию посвящен следующий обзор: *Strosio A.*—*Phys. Rep., ser. C*, 1975, vol. 22, p. 215. Среди работ,



выполненных в последнее время, отметим следующие: *Lepage G. P.*— *Phys. Rev.*, ser. A, 1977, vol. 16, p. 863; *Bodwin G. T.*, *Yennie D. R.*— *Phys. Rep.* ser. C, 1978, vol. 43, p. 267. В этих статьях имеются ссылки на более ранние работы.

Спектр позитрония рассматривается в книге: *Schwinger J.* *Particles, Sources and Fields*, vol. 2.— Reading: Addison-Wesley 1973 [Имеется перевод: *Швингер Д.* *Частицы, источники, поля.* Т. 2.— М.: Мир, 1976.]

## ПРИМЕЧАНИЕ РЕДАКТОРА ПЕРЕВОДА

Формализм трехмерных уравнений в релятивистской проблеме двух тел возник еще до появления ковариантной формулировки теории поля (см. *Fock V. A.*— *Zs. Phys.* Sowjetunion, 1934, Band 6, s. 425; *Tamm I. E.*— *J. Phys.* USSR, 1945, vol. 9, p. 449; *Dancoff S. M.*— *Phys. Rev.* 1950, vol. 78, p. 382).

Трехмерный квазипотенциальный подход в квантовой теории поля (см. *Logunov A. A.*, *Tavkhelidze A. N.*— *Nuovo Cimento*, 1963, vol. 29, p. 380) можно рассматривать как непосредственное обобщение на релятивистский случай потенциальной теории двух тел.

Помимо отсутствия относительного времени, которое является причиной серьезных трудностей в четырехмерном подходе, важной особенностью трехмерного описания является справедливость вероятностной интерпретации волновой функции и возможность простой формулировки граничных условий [см. *Kadyshevsky V. G.*— *Nucl. Phys.*, 1968, vol. B6, p. 125; *Логунов А. А.*, *Хрусталева О. А.* В сб. статей: *Проблемы теоретической физики (Памяти И. Е. Тамма)*.— М.: Наука, 1972; *Klein A.*, *Tsung-Shung Lee H.*— *Phys. Rev.*, D, 1974, vol. 10, p. 4308; *Кадышевский В. Г.*, *Тавхелидзе А. Н.* В сб. статей: *Проблемы теоретической физики (Сборник, посвященный Н. Н. Боголюбову)*.— М.: Наука, 1969].

Квазипотенциальный подход явился эффективным средством решения таких задач, как нахождение асимптотического поведения амплитуд при высоких энергиях, определение релятивистских поправок к спектру атома водорода, в модели кварков (см. обзоры: *Фаустов Р. Н.*— *ЭЧАЯ*, 1972, т. 3, вып. 3; *Боголюбов П. Н.*— *ЭЧАЯ*, 1973, т. 3, вып. 1).

Результаты теоретических расчетов и экспериментальных исследований позитрония, полученные за истекшие годы, приведены в обзорах: *Lepage G. P.* В кн.: *Atomic Physics*, v. 7 (Proc. 7th Intern. Confer. on Atomic Physics, 1980)/ed. *Kleppner D.*, *Pipkin F. M.*— New York: Plenum Press, 1981, p. 297; *Rich A.*— *Rev. Mod. Phys.*, 1981, v. 53 (1), p. 127. После недавних уточнений экспериментальных значений времен жизни пара- и ортопозитрония намечилось расхождение с теорией для триплетного состояния (см.: *Gidley D. W.*, *Rich A.*, *Sweetman E.*, *West D.*— *Phys. Rev. Lett.*, 1982, v. 49, p. 525).

## Глава II

# СИММЕТРИИ

Важная роль симметрий в квантовых системах и в физике частиц стимулировала целый ряд специальных исследований. Для построения теоретико-полевых моделей и понимания структуры фундаментальных взаимодействий необходимо идентифицировать различные инвариантности и способы, которыми они реализуются и нарушаются. Значимость такого анализа подкрепляется захватывающими результатами, полученными в теории унитарной симметрии, в алгебре токов и в кирально-инвариантных моделях, а также все возрастающим интересом к кварковой структуре адронов. С другой стороны, соображения, основанные на симметриях, являются главными в теории фазовых переходов в макроскопических средах, что еще раз подчеркивает глубокую связь теории поля и статистической механики. Здесь мы рассмотрим некоторые из моделей, изучение которых привело к открытию специфических теоретико-полевых явлений, таких, как почти вырожденные мультиплеты полей, спонтанное нарушение симметрий и квантовые аномалии.

### 11.1. РЕАЛИЗАЦИЯ СИММЕТРИЙ В КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ

Выше мы уже встречались с несколькими примерами симметрий. Некоторые из них были дискретными: симметрии относительно пространственной инверсии, обращения времени и зарядового сопряжения. Другие были непрерывными, например лоренцева инвариантность, или даже зависящими от пространственно-временных координат, как в случае калибровочной инвариантности. Здесь мы сосредоточим наше внимание на рассмотрении непрерывных внутренних симметрий и обсудим реализацию квантовых симметрий в рамках лагранжевой теории поля, хотя для формулировки некоторых утверждений и результатов нет нужды в таком специальном ограничении.

### 11.1.1. Постановка задачи

Рассмотрим некоторую теорию, инвариантную относительно группы непрерывных преобразований, ограничившись пока классическим случаем. В гл. 1 (см. т. 1 настоящей книги) мы объяснили понятие инвариантности; она означает, что лагранжиан (или гамильтониан), а следовательно, и уравнения движения остаются инвариантными при данных преобразованиях. Задача теперь состоит в том, чтобы выяснить, каким образом свойство инвариантности отражается на поведении квантовой системы, и, в частности, исследовать, к каким следствиям для спектра ее состояний оно приводит.

Анализ симметрий в рамках квантовой теории предполагает существование группы преобразований (локальных автоморфизмов), действующей на физические наблюдаемые и, следовательно, на динамические полевые переменные. На инфинитезимальном уровне это приводит к задаче построения 4-векторных токовых плотностей и соответствующих зарядов. Возникает вопрос о возможности реализации этих преобразований унитарными операторами в гильбертовом пространстве состояний. В локальной постановке задача состоит в изучении сохранения токов, с глобальной же точки зрения необходимо задаться вопросом: генерируются ли зарядами унитарные операторы, коммутирующие с  $S$ -матрицей?

В гл. 1 (т. 1 настоящей книги) в рамках классической теории мы уже обсуждали, как сопоставлять инфинитезимальным преобразованиям группы соответствующие нетеровские токи. В случае когда поля преобразуются по закону

$$\begin{aligned}\phi(x) &\rightarrow \phi(x) + \delta\phi(x), \\ \delta\phi(x) &= \mathcal{F}_a(x) \delta\alpha^a,\end{aligned}\quad (11.1)$$

где  $\delta\alpha^a$  — бесконечно малый параметр, токи определяются следующим образом:

$$j_\mu^a(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu \phi)} \frac{\delta\phi(x)}{\delta\alpha^a}; \quad (11.2)$$

здесь  $\mathcal{L}$  — лагранжиан теории. Это определение не зависит от того, инвариантно ли действие относительно преобразований (11.1) или не инвариантно и лишь предполагает, что лагранжиан является некоторой функцией полей и их первых производных. С учетом уравнений движения Эйлера — Лагранжа вариация  $\mathcal{L}$  сводится к

$$\delta \mathcal{L} = \partial^\mu j_\mu^a \delta\alpha^a. \quad (11.3)$$

Заряды, определяемые интегралами

$$Q^a(t) = \int d^3x j_0^a(x, t). \quad (11.4)$$

генерируют тогда преобразования (11.1) с помощью скобок Пуассона:

$$\{Q^a(t), \phi(x, t)\} = \frac{\delta\phi}{\delta\alpha^a}(x, t). \quad (11.5)$$

Соотношение (11.5) предполагает, что скобка Пуассона  $\phi$  с  $\delta\phi$  исчезает. Это справедливо в том случае, когда  $\delta\phi$  не зависит от сопряженного к  $\phi$  импульса поля. В частности, величины  $Q^a(t)$  удовлетворяют тогда коммутационным соотношениям, характерным для алгебры Ли группы преобразований со структурными константами  $C_{ab}^c$  [см. выражение (1.146) в т. I]:

$$\{Q^a(t), Q^b(t)\} = -C_{ab}^c Q^c(t). \quad (11.6)$$

В соответствии с (11.3), если  $\mathcal{L}$  инвариантен относительно рассматриваемых преобразований, токи сохраняются в классическом смысле, т. е.

$$\partial_\mu j_\mu^a = 0, \quad (11.7)$$

а заряды не зависят от времени. Это легко установить, используя теорему Стокса и пренебрегая пространственными поверхностными членами.

В квантовом случае нам хотелось бы повторить все эти шаги и, в частности, построить сохраняющиеся токи. Но так как токи, вообще говоря, являются локальными полиномами по полям, то при этом может возникнуть ряд трудностей. Так, иногда полезно произвести предварительную регуляризацию, а именно осуществить малый относительный сдвиг аргументов полей, вычесть расходящиеся члены и т. д. В результате может оказаться так, что, для того, чтобы удовлетворить законам сохранения в этих случаях, нам придется решать нетривиальную задачу. На практике не всегда известны правила коммутации полей, чаще мы пытаемся проверить справедливость предположения о выполнении законов сохранения в каждом порядке теории возмущений после проведения соответствующей перенормировки. Реализация этой программы сводится к установлению ряда тождеств, которым должны подчиняться функции Грина в случае сохранения данного тока. Указанные тождества подобны тождествам Уорда в электродинамике и могут быть проверены по теории возмущений. На примере киральной симметрии в  $\sigma$ -модели Гелл-Манна и Леви мы продемонстрируем, что классические законы сохранения могут нарушаться аномалиями, связанными с ультрафиолетовыми расходимостями. Следовательно, эта область исследований не является чисто академической.

Рассмотрим теперь глобальный аспект проблемы, а именно унитарную реализацию симметрий и соответствующие следствия для спектра. Здесь надо различать два случая. Первый из них наиболее известен и детально изучался (см. первые работы Вейля

и Вигнера) Он соответствует унитарному представлению группы симметрий  $g \rightarrow U(g)$  в гильбертовом пространстве состояний. Действие этого представления на наблюдаемые дается формулой

$$A \rightarrow gA = U(g)AU^\dagger(g). \quad (11.8)$$

Именно с такой ситуацией мы встречались при изучении пуанкаре-инвариантности. Обсуждаемый случай предполагает введение фазовых множителей, что в свою очередь приводит к рассмотрению представлений односвязной накрывающей группы (теорема Вигнера). Состояния классифицируются по мультиплетам, которые соответствуют неприводимым представлениям. В частности, вакуум или основное состояние отвечает тождественному представлению. Симметрии иногда основываются на приближениях, в которых, например, пренебрегается более слабыми взаимодействиями. Это имеет место в случае изотопической инвариантности, о которой часто говорят, что она слабо нарушается электромагнитными силами. Ниже мы кратко коснемся этого вопроса. Однако может случиться так, что симметрия проявляется только динамическим путем и вакуум относительно нее не инвариантен. Мы называем эту ситуацию голдстоуновской реализацией симметрии. В этом случае унитарные операторы  $U(g)$  не существуют и симметрия оказывается спонтанно нарушенной. Состояния уже не классифицируются по мультиплетам, и при определенных условиях возникают безмассовые частицы. Подобные ситуации в физике нередки: примером могут служить спиновые волны и ферромагнетизм. В физике частиц эта схема позволяет приближенно описать динамику пионов.

### 11.1.2. Основное состояние

Свойства симметрии системы характеризуются поведением ее основного состояния. Впоследствии мы увидим, что если совокупность зарядов аннигилирует вакуум, то сохраняются соответствующие токи, а группа симметрии вводится с помощью унитарных преобразований. Напротив, если токи сохраняются, а вакуум оказывается неинвариантным, симметрия спонтанно нарушена.

Если бы вакуум был не единственным, мы могли бы определить ортонормированный базис в подпространстве основных состояний, диагонализуя все коммутирующие эрмитовы наблюдаемые. Для определенности рассмотрим дискретный набор таких состояний  $|n\rangle$ . Выберем любую пару операторов  $A(x)$ ,  $B(y)$ . Если их аргументы разделены бесконечным пространственно-подобным интервалом, то в соответствии с обобщенной леммой Римана—Лебега вклад в матричный элемент их произведения могут давать лишь промежуточ-

ные трансляционно-инвариантные основные состояния:

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \langle n | A(x) B(0) | m \rangle = \sum_p \langle n | A(0) | p \rangle \langle p | B(0) | m \rangle.$$

Здесь суммирование выполняется по набору всех основных состояний. В силу условия причинности матричный элемент коммутатора  $\langle n | [A(x), B(0)] | m \rangle$  обращается в нуль при  $|x| \rightarrow \infty$ . Следовательно, матрицы  $\langle n | A(0) | m \rangle$  и  $\langle n | B(0) | m \rangle$  коммутируют и могут быть одновременно диагонализированы. В данном секторе вакуумные матричные элементы произведения локальных операторов факторизуются, когда пространственно-подобный интервал между их аргументами становится большим. Это называется свойством кластеризации.

Кажущееся вырождение вакуума может возникать вследствие грубого приближения. Реальное основное состояние единственно и определяется из требования минимума энергии. В качестве примера рассмотрим квантовомеханическую одномерную систему с потенциалом  $V(x) = (x^2 - 1)^2$ , имеющим два симметричных минимума. В квантовой механике возможно туннелирование сквозь барьер, в результате которого восстанавливается единственное симметричное основное состояние.

Мы можем ввести основное состояние трансляционно-инвариантным способом, требуя, чтобы оно минимизировало эффективный потенциал  $V_{\text{эфф}}(\phi)$ . Последний играет роль плотности потенциальной энергии в состоянии с данным средним значением поля.

Опишем важное свойство, следующее из локальности теории. Допустим, что имеется оператор сохраняющегося тока  $j^\mu(x)$ , такой, что  $\partial_\mu j^\mu(x) = 0$ . Определим интеграл от  $j^0(x, t)$  по ограниченной области пространства  $V$ :

$$Q_V(t) = \int_V d^3x j^0(x, t). \quad (11.9)$$

Ясно, что этот оператор можно корректно определить с большей вероятностью, чем его предел  $Q(t)$ , в котором интегрирование распространяется на все пространство. Коммутатор  $Q_V(t)$  с локальным оператором  $A$  не зависит от времени при интегрировании по достаточно большому объему  $V$ :

$$\lim_{V \rightarrow \infty} \frac{d}{dt} [Q_V(t), A] = 0. \quad (11.10)$$

Действительно, из сохранения тока следует:

$$0 = \int_V d^3x [\partial_\mu j^\mu(x, t), A] = \frac{1}{dt} \int_V d^3x [j^0(x, t), A] + \int_V dS \cdot [j(x, t), A].$$

Когда  $V$  становится достаточно большим, то поверхностный интеграл обращается в нуль поскольку коммутатор включает в себя локальные операторы, разделенные очень большим пространственно-подобным интервалом.

Это утверждение справедливо и в более общих случаях. В частности,  $A$  можно заменить на любой мультилокальный оператор. Доказательство можно обобщить

даже и на нерелятивистские системы при условии, что имеются лишь короткодействующие силы.

Ответ на вопрос, является ли вакуум инвариантным или нет, что на первый взгляд кажется довольно тривиальным, имеет важное значение для обширного ряда ситуаций с разнообразным физическим содержанием. Что происходит, например, если вакуум инвариантен? Теорема Коулмена гласит, что соответствующие токи сохраняются. Допустим, что  $Q(t)$ , т. е. пространственный интеграл от  $j^0$ , хорошо определен (по крайней мере на плотном подмножестве гильбертова пространства, содержащем основное состояние) и приводит к аннигиляции вакуума:

$$Q(t)|0\rangle = \int d^3x j_0(\mathbf{x}, t)|0\rangle = 0. \quad (11.11)$$

Если в спектре имеется энергетическая щель, то из трансляционной инвариантности следует, что любое состояние с нулевым импульсом обладает тем свойством, что

$$\langle n, \mathbf{P}_n = 0 | j_0(\mathbf{x}, t) | 0 \rangle = 0,$$

поскольку этот матричный элемент не зависит от  $\mathbf{x}$ , а в силу условия (11.11) его пространственный интеграл равен нулю. Этот вывод не вполне корректен, так как, строго говоря, рассматриваемое состояние не является нормируемым. Однако в доказательство можно внести необходимые поправки. Таким образом,

$$\langle n, \mathbf{P}_n = 0 | \partial_0 j^0(\mathbf{x}, t) | 0 \rangle = \langle n, \mathbf{P}_n = 0 | \partial_\mu j^\mu(\mathbf{x}, t) | 0 \rangle = 0. \quad (11.12)$$

Последнее равенство следует из того факта, что  $\nabla \cdot \mathbf{j}(\mathbf{x}, t) = = i[\mathbf{P}, \mathbf{j}(\mathbf{x}, t)]$ . Предполагая, что матричный элемент  $\mathbf{j}(\mathbf{x}, t)$  имеет смысл, можно утверждать, что матричный элемент его трехмерной дивергенции должен обращаться в нуль между состояниями с нулевыми 3-импульсами. Поскольку  $\partial_\mu j^\mu(x)$  представляет собой лоренцев скаляр, уравнение (11.12) справедливо и для произвольного матричного элемента между вакуумом и любым другим состоянием. Следовательно  $\partial_\mu j^\mu$  аннигилирует вакуум. Можно показать, что для локального оператора это возможно только в том случае, если он сам равен нулю.

Таким образом, мы делаем вывод, что

$$\partial_\mu j^\mu = 0. \quad (11.13)$$

Симметрия является точной и допускает унитарное представление операторами вида  $U = e^{i\omega Q}$ .

## 11.2. СПЕКТР МАСС, МУЛЬТИПЛЕТЫ И ГОЛДСТОУНОВСКИЕ БОЗОНЫ

### 11.2.1. Октетная модель Гелл-Манна и Неемана

В случае когда внутренние симметрии образуют компактную группу Ли, фазы операторов представления можно выбрать таким образом, что мы получим унитарное представление ее накрывающей группы. Это представление расщепляется на неприводимые компоненты, действующие в подпространствах исходного гильбертова пространства. Следовательно, последнее порождается мультиплетами состояний.

Здесь мы коротко обсудим модель приближенной  $SU(3)$ -симметрии сильных взаимодействий (октетную модель), которая обобщает уже известную нам изотопическую инвариантность ядерных сил, открытую Гейзенбергом в 30-х гг.

При высоких энергиях проявляются более широкие группы ароматов, как их теперь называют. В процессе изучения новых узких резонансов в области нескольких ГэВ уже имеются данные о наличии  $SU(4)$ -симметрии, и вполне вероятно, что это еще далеко не предел<sup>1)</sup>.

Члены элементарного изодублета — протон и нейтрон — классифицируются в соответствии с собственными значениями третьей компоненты изоспина  $T_3$ , принимающей в данном случае значения  $\pm 1/2$ ; при этом имеет место следующее соотношение:

$$Q = N/2 + T_3, \quad (11.14)$$

где  $N$  — барионный заряд. В рамках лагранжевой теории соответствующие поля объединяются в изоспинор  $\psi$ , и, если пренебречь различиями в массах, можно записать свободный лагранжиан

$$\mathcal{L}_0 = \bar{\psi}(i\partial + M)\psi,$$

который оказывается инвариантным при изоспиновых вращениях:

$$\psi \rightarrow U\psi, \quad \bar{\psi} \rightarrow \bar{\psi}U^\dagger, \quad (11.15)$$

<sup>1)</sup> В настоящее время приближенная  $SU(4)$ -симметрия адронов твердо установлена; помимо частиц со скрытым чармом  $J/\psi$  и  $\psi'$  (связанных состояний  $\bar{c}c$  четвертого кварка  $c$  и антикварка  $\bar{c}$ ) экспериментально обнаружены частицы, обладающие явным чармом. Эти частицы образуют  $SU(4)$ -мультиплеты. Эксперимент свидетельствует о наличии приближенной  $SU(5)$ -симметрии и существовании пятого  $t$ -кварка (от английского top — верх). Связанное состояние  $\bar{t}t$ , ислон-частица, является аналогом частицы  $\psi-J$ . Наконец, имеются веские соображения в пользу существования шестого кварка и, следовательно,  $SU(6)$ -симметрии адронов. — *Прим. перев.*



где  $U$  — унитарная  $2 \times 2$ -матрица. Простейшая инвариантная связь — это связь с пионным изовекторным полем  $\pi$  (см. гл. 5 в т. 1). Для пиона в соотношении, аналогичном (11.14), нужно положить  $N=0$  и приписать  $T_3$  значения  $+1$ ,  $0$  или  $-1$ . С учетом свойства псевдоскалярности пиона единственным перенормируемым инвариантным взаимодействием является

$$\mathcal{L}_{\text{вз}} = ig_{\pi NN} \bar{\Psi} \gamma^5 \tau \cdot \pi \Psi. \quad (11.16)$$

Обозначение матриц Паули и пионных полей полужирными буквами означает, что они являются векторами в изопространстве. Формула (11.16) представляет собой запись в компактном виде ряда соотношений между различными константами связи:

$$g_{\pi^+ p n} = \sqrt{2} g_{\pi^0 p p} = -\sqrt{2} g_{\pi^0 n n}, \quad (11.17)$$

выражающих динамическое содержание симметрии. Эти соотношения можно получить, замечая, что обычные поля  $\pi^{(+)}$ ,  $\pi^{(-)} = (\pi^{(+)})^\dagger$  и  $\pi^{(0)}$  связаны с их декартовыми компонентами следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} (\pi_1^2 + \pi_2^2 + \pi_3^2) &= \pi^{(-)} \pi^{(+)} + \frac{1}{2} \pi^{(0)2}, \\ \pi^{(0)} &= \pi_3, \\ \pi^{(\pm)} &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\pi_1 \mp i \pi_2). \end{aligned} \quad (11.18)$$

Отметим, что оператор  $\pi^{(-)}$  рождает положительный пион или уничтожает отрицательный. Выше при обсуждении пион-нуклонного рассеяния мы упоминали о некоторых динамических следствиях этой симметрии, таких, как неравенства треугольника для соответствующих сечений. В начале 1960-х гг. Гелл-Манну и Нееману удалось обобщить изотопическую симметрию до более широкой группы  $SU(3)$ . Как оказалось, все известные мультиплеты адронов соответствуют представлениям фактор-группы  $SU(3)/Z_3$ , где  $Z_3$  является абелевым центром группы  $SU(3)$ , генерируемым кубическими корнями из тождественного элемента. Генераторы центра действуют как единица на все адронные состояния, которые, таким образом, обладают нулевой триальностью.

Напомним, что представления удобно описывать в терминах алгебры Ли инфинитезимальных эрмитовых генераторов группы. Метод такого описания нам хорошо известен из квантовой механики. Мы диагонализуем максимальный набор коммутирующих генераторов (подалгебру Картана). Базисные состояния задаются весовыми векторами, компоненты которых совпадают с собственными значениями этих генераторов в пространстве, размерность которого равна рангу алгебры Ли, т. е. размерности подалгебры Картана. В случае группы  $SU(2)$ , имеющей ранг единица, весовые диаграммы являются одномерными, причем по оси абсцисс

откладывают собственные значения  $T_3$  (рис. 11.1). Выделенную роль играет присоединенное представление, действующее на самой

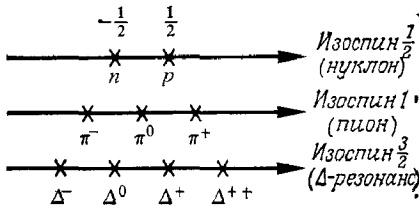


РИС. 11.1. Весовые диаграммы для  $SU(2)$ .

алгебре Ли посредством операции коммутирования. В случае  $SU(2)$  оно соответствует единичному изоспину, причем

$$T_{\pm} = T_1 \pm iT_2. \tag{11.19}$$

$$[T_3, T_{\pm}] = \pm T_{\pm}.$$

Этот метод можно обобщить на группу  $SU(3)$ , которая порождается восемью эрмитовыми генераторами (в фундаментальном представлении это бесследовые  $3 \times 3$ -матрицы) и алгебра Ли которой имеет ранг два. Два диагональных генератора представляют собой линейные комбинации изоспина  $T_3$  и гиперзаряда  $Y$ , который опреде-

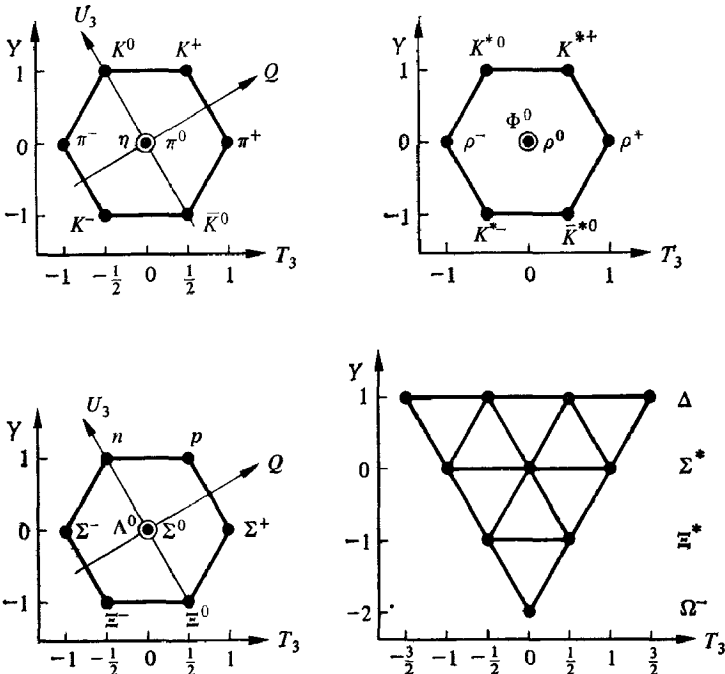


РИС. 11.2. Мезонные и барионный октеты и резонансный декуплет в модели Гелл-Манна и Неемана.

ляется как сумма барионного числа и странности. Формула Гелл-Манна и Нишиджимы дает связь этих операторов с зарядом:

$$Q = Y/2 + T_3, \quad Y = N + S, \quad (11.20)$$

обобщая тем самым соотношение (11.14). На рис. 11.2 показаны мультиплеты наименьшей размерности — октеты барионов и псевдоскалярных мезонов [они соответствуют присоединенному представлению  $SU(3)$ ], а также декуплет резонансов, на основе которого было предсказано существование частицы  $\Omega^-$ .

В представлении матрицами Гелл-Манна базис алгебры Ли, обобщающий матрицы Паули, записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_2 &= \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \lambda_4 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_5 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_6 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \\ \lambda_7 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_8 &= \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & -2/\sqrt{3} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (11.21)$$

Эти матрицы нормированы в соответствии с условием

$$\text{Sp}(\lambda_k \lambda_l) = 2\delta_{lk}$$

и подчиняются коммутационным и антикоммутационным соотношениям

$$[\lambda_k, \lambda_l] = 2if_{klm}\lambda_m, \quad \{\lambda_k, \lambda_l\} = \frac{4}{3}\delta_{kl} + 2d_{klm}\lambda_m, \quad (11.22)$$

где  $f_{klm}$  полностью антисимметричны, а  $d_{klm}$  полностью симметричны; в следующей таблице приведены ненулевые компоненты этих величин:

$k$	$l$	$m$	$2f_{klm}$	$k$	$l$	$m$	$2d_{klm}$	$k$	$l$	$m$	$2d_{klm}$
1	2	3	2	1	1	8	$2/\sqrt{3}$	3	6	6	-1
1	4	7	1	1	4	6	1	3	7	7	-1
1	5	6	-1	1	5	7	1	4	4	8	$-1/\sqrt{3}$
2	4	6	1	2	2	8	$2/\sqrt{3}$	5	5	8	$-1/\sqrt{3}$
2	5	7	1	2	4	7	-1	6	6	8	$-1/\sqrt{3}$
3	4	5	1	2	5	6	1	7	7	8	$-1/\sqrt{3}$
3	6	7	-1	3	3	8	$2/\sqrt{3}$	8	8	8	$-2/\sqrt{3}$
4	5	8	$\sqrt{3}$	3	4	4	1				
6	7	8	$\sqrt{3}$	3	5	5	1				

С момента открытия унитарной симметрии оставалось загадкой, почему в природе отсутствуют мультиплеты с ненулевой триальностью. Простейший из таких мультиплетов мог бы соответствовать триплету гипотетических кварков, введенных Гелл-Манном

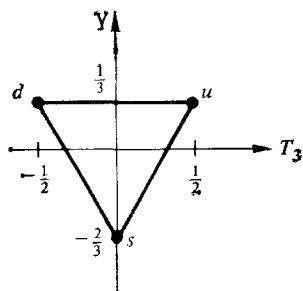


РИС. 11.3 Кварковый триплет.

и Цвейгом. Эти частицы [изодублет ( $u, d$ ) и изосинглет ( $s$ )] должны иметь дробные заряд и барионное число (рис. 11.3). Если унитарная группа сильных взаимодействий на самом деле шире, чем  $SU(3)$ , то должны существовать кварки, несущие новые квантовые числа, такие, как очарованный кварк ( $c$ ), изосинглет с зарядом  $2/3$  и гиперзарядом  $1/3$ . Соответствующая новая группа симмет-

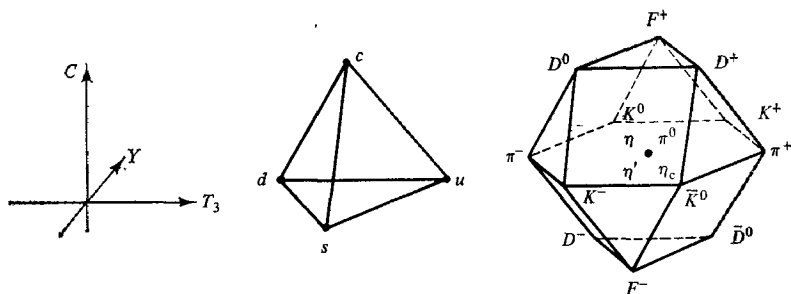


РИС. 11.4. Фундаментальное и присоединенное представления для  $SU(4)$   
Указаны новые мезоны с чармом.

рии  $SU(4)$  имеет ранг три. На рис. 11.4 представлены весовые диаграммы для ее (четырёхмерного) фундаментального представления и (пятнадцатимерного) присоединенного представления<sup>1)</sup>.

Было предпринято много безуспешных попыток обнаружить свободные кварки, главным образом используя факт дробности их зарядов. Оказалось, что все известные адроны ведут себя как связанные состояния кварков. Идея о том, что кварки могут существовать только в связанных состояниях, привела к понятию

<sup>1)</sup> См. примечание на с. 176.

«конфайнмента»<sup>1)</sup>). Было предложено несколько механизмов его реализации. Один из наиболее обещающих подходов базируется на локальной ненарушенной цветовой симметрии. Мы рассмотрим этот подход в следующих главах.

Октетная симметрия является приближенной инвариантностью сильных взаимодействий. Это утверждение заведомо справедливо и в отношении любой более широкой группы инвариантности. Однако нарушение симметрии вводится довольно однотипно, исходя из так называемого правила октетной доминантности. Чтобы показать это на примере, рассмотрим расщепление масс между членами одного из мультиплетов, взяв для определенности барионный октет, включающий нуклоны, а также  $\Lambda$ -,  $\Sigma$ -,  $\Xi$ -частицы. В предположении, что имеется лишь изоспиновая инвариантность, в эффективный лагранжиан массовые члены должны входить с коэффициентами  $m_N$ ,  $m_\Lambda$ ,  $m_\Sigma$ ,  $m_\Xi$ . Любая билинейная комбинация полей, такая, как  $\bar{p}p + \bar{n}n + \dots$ , преобразуется относительно  $SU(3)$  как прямое произведение двух октетных представлений, которое можно разложить на неприводимые части согласно стандартной процедуре Клебша—Гордана:

$$8 \otimes 8 = 1 \oplus 8' \oplus 8'' \oplus 10 \oplus \bar{10} \oplus 27. \quad (11.24)$$

Требование нейтральности исключает несамосопряженные представления  $10$  и  $\bar{10}$  из массовой матрицы. Из этого следует, что четыре физические массы можно записать в виде следующих линейных комбинаций четырех голых параметров, стоящих при полевых комбинациях, имеющих определенные трансформационные свойства в  $SU(3)$ :

$$\begin{aligned} m_N &= (m_1 - 2m'_8 + m''_8 - 3m_{27}), \\ m_\Lambda &= (m_1 - m'_8 - m''_8 + 9m_{27}), \\ m_\Sigma &= (m_1 + m'_8 + m''_8 + m_{27}), \\ m_\Xi &= (m_1 + m'_8 - 2m''_8 - 3m_{27}). \end{aligned} \quad (11.25)$$

Разумеется, эта перегруппировка не представляла бы особого интереса, если бы ни один из неприводимых параметров не обращался в нуль. Предположим, однако, что расщепление масс заложено в более фундаментальном лагранжиане на уровне массовых членов кварков типа  $\bar{\psi}(a + b\lambda_8)\psi$ , содержащих лишь синглетные и октетные представления, и что это свойство (таинственным образом) сохраняется при учете всех взаимодействий. Это означает, что в выражении (11.25) параметр  $m_{27}$  обращается в нуль; отсюда

<sup>1)</sup> Проблема невылетания кварков (конфайнмент) является одной из ключевых проблем теории элементарных частиц. Последовательной теории этого явления в настоящее время не существует (см. примечание редактора в конце настоящей главы).— *Прим. ред.*

мы получаем соотношение Гелл-Манна и Окубо:

$$(1/2)(m_N + m_\Sigma) = (1/4)(3m_\Lambda + m_\Sigma), \quad (11.26)$$

которое хорошо согласуется с экспериментальными данными, а именно

$$(1/2)(m_N + m_\Sigma) = 1,128 \text{ ГэВ}, \quad (1/4)(3m_\Lambda + m_\Sigma) = 1,134 \text{ ГэВ}.$$

В аналогичную формулу для псевдоскалярного октета ( $K$ ,  $\pi$ ,  $\eta$ ) входят квадраты масс:

$$4m_K^2 = 3m_\eta^2 + m_\pi^2. \quad (11.27)$$

Необходимо учитывать смешивание с девятым  $\eta'$  мезоном, дополняющим октет до нонета. Само по себе соотношение (11.27) предсказывает  $m_\eta^2 = 0,320 (\text{ГэВ})^2$ , в то время как экспериментальное значение  $m_\eta^2 = 0,301 (\text{ГэВ})^2$ .

Правило октетной доминантности, примененное к декуплету, ведет к эквидистантному расщеплению масс, которое хорошо согласуется с экспериментальными результатами; главным достижением этого правила является предсказание полного набора квантовых чисел  $\Omega^-$ -частицы:

$$\begin{aligned} m_{\Sigma^*} - m_\Delta &= 152 \text{ МэВ}, \\ m = m_0 + m_8 Y, \quad m_{\Xi^*} - m_{\Sigma^*} &= 149 \text{ МэВ}, \\ m_\Omega - m_{\Xi^*} &= 139 \text{ МэВ}. \end{aligned} \quad (11.28)$$

Унитарная симметрия позволяет написать различные соотношения между амплитудами рассеяния, которые находятся в удовлетворительном согласии с экспериментом. Мы будем подробно говорить об этом при обсуждении применений алгебры токов.

### 11.2.2. Спонтанное нарушение симметрии

Спонтанное нарушение симметрии возникает, когда основное состояние не инвариантно относительно данной группы преобразований. В этом случае группа действует в более широком несепабельном гильбертовом пространстве, что хорошо видно на примере поведения бесконечного ферромагнетика при вращении (см гл. 4 в т. I настоящей книги). Можно пояснить это с помощью следующего эвристического рассуждения. Вычислим норму состояния  $Q|0\rangle$ , где  $Q$ —величина, которую мы условно назовем полным зарядом:

$$\langle 0|Q^2|0\rangle = \int d^3x \langle 0|J_0(x)Q|0\rangle. \quad (11.29)$$

Благодаря трансляционной инвариантности правую часть этой формулы можно записать также в виде

$$\int d^3x \langle 0 | j_0(0) Q | 0 \rangle.$$

Очевидно, что интеграл здесь будет бесконечным, когда  $Q | 0 \rangle \neq 0$ .

Наиболее характерной особенностью спонтанного нарушения, установленной Голдстоуном, является то, что нарушение непрерывных симметрий обязательно сопровождается возникновением безмассовых частиц. Эти состояния порождаются операторами, осуществляющими инфинитезимальный «поворот» данного вакуума в другой вакуум из вырожденного набора, поскольку из физических соображений ясно, что такое преобразование не может генерировать какой-либо энергии.

Для более строгого доказательства теоремы Голдстоуна предположим, что существует сохраняющийся ток и рассмотрим некоторый оператор  $A$ , такой, что

$$\delta a(t) \equiv \lim_{V \rightarrow \infty} \langle 0 | [Q_V(t), A] | 0 \rangle \neq 0. \quad (11.30)$$

В существовании такой наблюдаемой как раз и проявляется неинвариантность вакуума. Вставим в это соотношение полный набор промежуточных состояний с определенным 4-импульсом:

$$\begin{aligned} \delta a(t) &= \lim_{V \rightarrow \infty} \sum_n \int_V d^3x [\langle 0 | j_0(0) | n \rangle \langle n | A | 0 \rangle e^{-iP_n \cdot x} - \\ &\quad - \langle 0 | A | n \rangle \langle n | j_0(0) | 0 \rangle e^{iP_n \cdot x}] = \\ &= \sum_n (2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{P}_n) [\langle 0 | j_0(0) | n \rangle \langle n | A | 0 \rangle e^{-iE_n t} - \\ &\quad - \langle 0 | A | n \rangle \langle n | j_0(0) | 0 \rangle e^{iE_n t}] \neq 0. \end{aligned} \quad (11.31)$$

При обсуждении уравнения (11.10) мы уже показали, что из сохранения тока следует соотношение

$$\frac{d}{dt} \delta a(t) = 0. \quad (11.32)$$

Таким образом, имеем

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_n (2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{P}_n) E_n [\langle 0 | j_0(0) | n \rangle \langle n | A | 0 \rangle e^{-iE_n t} + \\ &\quad + \langle 0 | A | n \rangle \langle n | j_0(0) | 0 \rangle e^{iE_n t}]. \end{aligned} \quad (11.33)$$

Из уравнений (11.31) и (11.33) следует, что должно существовать состояние  $|n\rangle$ , такое, что  $\langle 0 | A | n \rangle \langle n | j_0(0) | 0 \rangle \neq 0$ , и для которого  $E_n \delta^3(\mathbf{P}_n)$  обращается в нуль. Это безмассовое состояние имеет такие же квантовые числа, как  $j_0$  (и  $A$ ), поскольку порождается действием указанного оператора на вакуум.

Эти безмассовые состояния называют голдстоуновскими бозонами, связанными со спонтанным нарушением данной симметрии. Они действительно являются бозонами, если  $j_0$  — бозе-оператор. В более общей ситуации, например в современных теориях суперсимметрий,  $j_\mu$  может в действительности переносить полужелтый спин, тогда соответствующая ему безмассовая частица является фермионом. Иными словами, спин голдстоуновских состояний определяется трансформационными свойствами  $j_\mu(x)$  относительно лоренцевых преобразований.

Тонкость заключается в том, что безмассовые состояния не обязательно должны быть наблюдаемыми. Это замечание относится к теориям, имеющим нефизический сектор ненаблюдаемых состояний (к таким, например, как квантовая электродинамика в формулировке Гупта—Блейлера), и может быть существенным, если мы хотим обойти следствия теоремы Голдстоуна.

В противоположность специальным рецептам нарушения симметрии, с которыми мы встречались, например, при обсуждении октетной модели, механизм спонтанного нарушения симметрии обладает эстетической привлекательностью. Он является экономным в том смысле, что не требует введения новых параметров. Он выгоден и с теоретической точки зрения, поскольку сохраняет свойства перенормируемости. В ряде случаев присутствие безмассовых голдстоуновских частиц может оказаться нежелательным. В следующей главе мы рассмотрим изящный способ преодоления этой трудности с помощью механизма Хиггса.

В качестве элементарного примера спонтанного нарушения симметрии рассмотрим свободное безмассовое скалярное поле с лагранжианом

$$\mathcal{L} = (1/2) (\partial\phi)^2, \quad (11.34)$$

инвариантным относительно сдвига поля;

$$\phi(x) \rightarrow \phi(x) + \lambda. \quad (11.35)$$

Соответствующий сохраняющийся ток имеет вид

$$j^\mu(x) = \partial^\mu \phi(x). \quad (11.36)$$

Понятно, что вакуум не инвариантен относительно таких преобразований. Подставляя в выражение (11.30) вместо  $A$  поле  $\phi(x)$ , получаем

$$\delta \langle 0 | \phi(x) | 0 \rangle = \lambda \langle 0 | 0 \rangle \neq 0. \quad (11.37)$$

Альтернативная точка зрения состоит в том, что полный «заряд»

$$\lim_{V \rightarrow \infty} Q_V(t) = \lim_{V \rightarrow \infty} \int_V d^3x \partial_0 \phi(x, t) \quad (11.38)$$

не является хорошо определенным. В этом случае голдстоуновский бозон представляет собой квант самого поля  $\phi$ . Интересная особенность рассматриваемого примера в том, что мы можем найти явный вид состояния, получаемого действием на вакуум



оператора  $e^{i\lambda Q_V}$ . Из фурье-разложения поля

$$\phi(x) = \int \frac{d^3k}{2k^0 (2\pi)^3} [a(k) e^{-ik \cdot x} + a^\dagger(k) e^{ik \cdot x}] \quad (11.39)$$

следует, что в пределе бесконечного объема состояние

$$|\lambda\rangle = \lim_{V \rightarrow \infty} e^{i\lambda Q_V^{(0)}} |0\rangle \quad (11.40)$$

принимает вид

$$\begin{aligned} |\lambda\rangle &= \lim_{V \rightarrow \infty} \exp \left\{ \lambda \int_V d^3x \int \frac{d^3k}{2(2\pi)^3} [a(k) e^{ik \cdot x} - a^\dagger(k) e^{-ik \cdot x}] \right\} |0\rangle = \\ &= e^{\lambda/2} [a^{(0)} - a^{\dagger(0)}] |0\rangle. \end{aligned} \quad (11.41)$$

Таким образом, оно оказывается когерентной суперпозицией состояний с нулевыми энергией и импульсом. Чтобы показать, что  $\langle \lambda | 0 \rangle$  обращается в нуль, следует быть более осторожными при переходе к бесконечному объему. Лучше всего для этого ввести гладкое обрезание в пространственных направлениях, например, следующим образом:

$$Q_V = \int d^3x \partial_0 \phi(\mathbf{x}, 0) e^{-x^2/V^{2/3}}. \quad (11.42)$$

Читатель может легко убедиться в том, что

$$\langle 0 | \lambda \rangle = e^{-\pi (\lambda V^{1/3})^{2/64}} \xrightarrow{V \rightarrow \infty} 0. \quad (11.43)$$

Простейшая физически осмысленная модель со спонтанным нарушением симметрии включает совокупность  $n$  взаимодействующих скалярных полей, описываемых лагранжианом

$$\mathcal{L}(\phi) = \frac{1}{2} (\partial\phi)^2 - \frac{\mu^2}{2} \phi^2 - \frac{\lambda}{4} (\phi^2)^2, \quad (11.44)$$

инвариантным относительно внутренней группы симметрии  $O(n)$ .

В такой записи  $\phi$  обозначает вектор-столбец этих полей, и симметрия нарушается, если квадрат голой массы  $\mu^2$  отрицателен. В классическом случае основному состоянию соответствует ненулевое среднее значение поля, поскольку минимум потенциала

$$V(\phi) = (\mu^2/2) \phi^2 + (\lambda/4) (\phi^2)^2 \quad (11.45)$$

достигается при ненулевом значении поля (рис. 11.5):

$$|\phi| = v = (-\mu^2/\lambda)^{1/2}. \quad (11.46)$$

Чтобы обеспечить стабильность теории, предположим, что большие значения  $\phi$  энергетически подавлены, т. е.  $\lambda > 0$ . Это напоминает вырождение вакуума: каждое состояние с  $|\phi| = v$  можно априори назвать вакуумным состоянием. Однако различ-

ным выбором вакуумного поля  $\phi_v$  соответствуют неэквивалентные гильбертовы пространства. Заметим, что такой выбор  $\phi_v$  оставляет ненарушенной  $O(n-1)$ -подгруппу, состоящую из преобразований, сводящихся на  $\phi_v$  к тождественному.

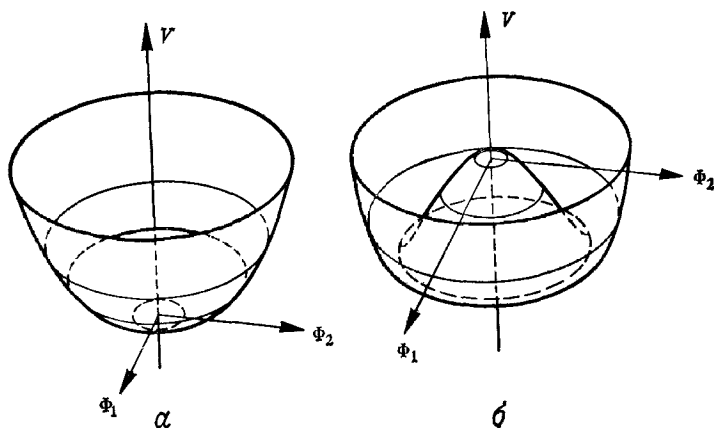


РИС. 11.5. Потенциал  $V(\phi) = (\mu^2/2)\phi^2 + (\lambda/4)(\phi^2)^2$ . а —  $\mu^2 > 0$ ; б —  $\mu^2 < 0$ .

Для конкретности выберем во внутреннем пространстве такую систему координат, чтобы лишь  $n$ -я составляющая вакуумного вектора  $\phi_v = \langle 0 | \phi | 0 \rangle$  была отлична от нуля, и параметризуем поле в терминах радиального смещения  $\rho$  и ортогонального  $O(n-1)$ -поворота:

$$\phi = e^{t \cdot \xi / v} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ v + \rho \end{pmatrix}. \quad (11.47)$$

Здесь  $t_a$  (где  $1 \leq a \leq n-1$ ) обозначает  $n-1$  генераторов группы  $O(n)$ , действующих эффективно на векторы  $\phi_v$  в отличие от остальных генераторов, образующих алгебру Ли подгруппы  $O(n-1)$  и обращающих в нуль  $\phi_v$ . Записывая лагранжиан в новых динамических переменных  $\rho$  и  $\xi$ , имеем<sup>1)</sup>

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial\rho)^2 + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\rho}{v}\right)^2 (\nabla_\mu \xi)^2 - \frac{\mu^2}{2}(v + \rho)^2 - \frac{\lambda}{4}(v + \rho)^4. \quad (11.48)$$

<sup>1)</sup> Во втором члене выражения (11.48),  $\nabla_\mu$  — ковариантная производная, определяемая соотношением

$$\nabla_\mu \xi^a t_a = \frac{v}{2} \left[ e^{-t \frac{\xi}{v}} \partial_\mu e^{t \frac{\xi}{v}} - e^{t \frac{\xi}{v}} \partial_\mu e^{-t \frac{\xi}{v}} \right]$$

(см. примечание редактора перевода в конце настоящей главы). — Прим. перев.

Отсюда мы видим, что «угловые» переменные  $\xi$  соответствуют  $n-1$  безмассовым полям, как предсказывается теоремой Голдстоуна.

В предшествующем примере, который более подробно мы изучим в разд. II 4, вырождение основного состояния возникает на классическом уровне. Однако в гл. 9 мы видели, что радиационные поправки могут изменить вид потенциала и привести к вырождению вакуума на квантовом уровне. Как показали Коулмен и Вайнберг, такой механизм реализуется в определенной модели скалярной электродинамики. В ней комплексное безмассовое бозонное поле минимальным образом взаимодействует с электромагнитным полем. При этом лагранжиан записывается в виде

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{em}} + \frac{1}{2} (\partial\phi_1 - eA\phi_2)^2 + \frac{1}{2} (\partial\phi_2 + eA\phi_1)^2 - \frac{\lambda}{4!} (\phi_1^2 + \phi_2^2)^2. \quad (11.49)$$

Комплексное поле  $\phi$  представлено здесь своими вещественными составляющими  $\phi_1$  и  $\phi_2$ . Кроме того, ангармоническую константу связи мы обозначили через  $\lambda/4!$ , чтобы удобнее было сравнивать однопетлевое значение эффективного потенциала с выражением (9.129), соответствующим лагранжиану

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial\phi)^2 - \frac{\lambda}{4!} \phi^4. \quad (11.50)$$

Построенный по этому лагранжиану эффективный потенциал имеет вид

$$V = \frac{\lambda}{4!} \phi^4 + \frac{\lambda^2 \phi^4}{(16\pi)^2} \left( \ln \frac{\phi^2}{M^2} - \frac{25}{6} \right). \quad (11.51)$$

В гл. 9 была выполнена перенормировка при значении поля, равном  $M$ , чтобы обеспечить равенство

$$\lambda = \frac{d^4}{d\phi^4} V(\phi) \Big|_{\phi=M}. \quad (11.52)$$

Возвращаясь к скалярной электродинамике, можно повторить аналогичное вычисление вклада  $\phi_1^4$  в  $V$ , учитывая факторы симметрии, указанные на рис. 11.6. Результат запишется в виде

$$V = \frac{\lambda}{4!} (\phi_1^2 + \phi_2^2)^2 + \left( \frac{5}{1152\pi^2} \lambda^2 + \frac{3e^4}{64\pi^2} \right) (\phi_1^2 + \phi_2^2)^2 \left[ \ln \frac{(\phi_1^2 + \phi_2^2)}{M^2} - \frac{25}{6} \right]. \quad (11.53)$$

Вычисление было выполнено в калибровке Ландау. Последняя диаграмма, приведенная на рис. 11.6, *г*, не дает вклада при нулевом импульсе. Наличие множителя 3 в диаграмме на рис. 11.6, *в* обусловлено следом тензора  $(g^{\mu\nu} - k^\mu k^\nu / k^2)$ . Остальные веса связаны с вершинами

Логично предположить, что  $\lambda$  и  $e^4$  сравнимы по величине. Действительно,  $\lambda$ -связь генерируется дополнительной расходимостью, появляющейся в порядке  $e^4$ . Следовательно, мы можем

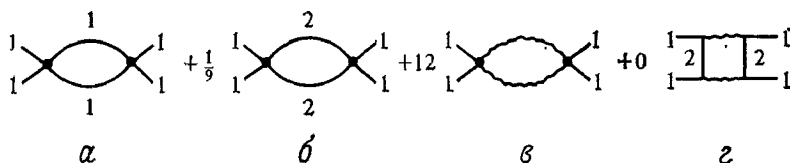


РИС. 11.6. Относительные веса однопетлевых диаграмм для функции Грина с четырьмя полями  $\phi_1$ .

пренебречь  $\lambda^3$  по сравнению с  $e^4$ . При этом потенциал  $V$ , определяемый выражением (11.53), имеет минимум при ненулевом значении  $\phi_v^2 \equiv \phi_{v,1}^2 + \phi_{v,2}^2$ , определяемом из соотношения

$$\left[ \frac{\lambda}{6} - 11 \left( \frac{e^2}{4\pi} \right)^2 \right] + 3 \left( \frac{e^2}{4\pi} \right)^2 \ln \frac{\phi_v^2}{M^2} = 0. \quad (11.54)$$

Если выбрать масштаб  $\phi$  так, чтобы  $M^2 = \phi_v^2$ , т. е. положить

$$\lambda = \frac{d^4 V}{d\phi^4} \Big|_{\phi^2 = \phi_v^2}, \quad (11.55)$$

то придем к соотношению

$$\lambda = 66 \left( \frac{e^2}{4\pi} \right)^2, \quad (11.56)$$

откуда мы действительно получаем  $\lambda$  порядка  $e^4$ . Параметрами теории теперь являются  $e$  и  $\phi_v$ .

Подобные рассуждения неприменимы к обычной  $\phi^4$ -теории, когда лагранжиан записывается в виде (11.50). В этом случае потенциал  $V$  действительно имеет минимум для значения  $\phi_v$ , такого, что

$$\frac{\lambda}{6} - \frac{11\lambda^2}{192\pi^2} + \frac{\lambda^2}{64\pi^2} \ln \frac{\phi_v^2}{M^2} = 0, \quad (11.57)$$

или

$$\lambda \ln \frac{\phi_v^2}{M^2} = -\frac{32}{3} \pi^2 + O(\lambda). \quad (11.58)$$

Однако величина  $\lambda \ln(\phi_v^2/M^2)$  теперь соизмерима с основным вкладом, и можно ожидать, что квантовые поправки более высоких порядков не будут пренебрежимо малы. Иначе говоря, в этом случае незаконно считать, что  $\phi_v^2 = M^2$ , поскольку такое отождествление привело бы к большому значению константы  $\lambda$ , при котором разложение в ряд по теории возмущений становится несправедливым.

В скалярной электродинамике спонтанное нарушение симметрии не приводит к появлению какого-либо безмассового бозона. Наоборот, как векторная, так и скалярная частица приобретают

массы, равные

$$\begin{aligned} m_\phi^2 &= 6 \left( \frac{e^2}{4\pi} \right)^2 \phi_0^2, \\ m_A^2 &= e^2 \phi_0^2. \end{aligned} \quad (11.59)$$

Эти массы связаны между собой замечательным соотношением:

$$\frac{m_\phi^2}{m_A^2} = O(e^2). \quad (11.60)$$

В следующей главе мы подробно объясним механизм такого поведения.

Завершим этот раздел обсуждением роли размерности пространства-времени. Теорема Мермина и Вагнера утверждает, что непрерывную симметрию можно спонтанно нарушить только при размерности большей двух. Для дискретной симметрии низшая критическая размерность равна единице. Фактически это хорошо известно, поскольку в квантовой механике с конечным числом степеней свободы (что соответствует теории поля в одномерном случае) туннелирование между двумя вырожденными состояниями, отвечающими двум классическим минимумам, приводит к восстановлению единственного симметричного основного состояния. С другой стороны, можно рассмотреть дискретный аналог теории поля, взяв в качестве простейшего примера модель Изинга в статистической механике. Интегралы по траекториям заменяются суммами членов вида  $e^{-E/kT}$ , где  $E$  — энергия данной конфигурации. Для модели Изинга  $E = -J \sum_{ij} \sigma_i \sigma_j$ , где сумма берется по всем смежным узлам решетки,

а дискретный «спин»  $\sigma_i$  принимает значения  $\pm 1$ . Такая модель допускает дискретную симметрию, соответствующую изменению направлений всех спинов на противоположные, т. е.  $\sigma_i \rightarrow -\sigma_i$ . В низкотемпературной фазе ниже критической точки эта симметрия оказывается спонтанно нарушенной, если пространство двумерно или имеет большее число измерений; однако в одномерном случае никаких переходов не происходит (Пайерлс, 1938).

Аналогичная модель, называемая классической моделью Гейзенберга, вместо переменных  $\sigma_i$  использует единичные векторы  $S_i$  на сфере. В этом случае, если  $S_i$  имеет  $n$  составляющих, существует непрерывная группа  $O(n)$ , но при числе измерений, меньше чем 3, спонтанного намагничивания не возникает.

В рамках теории поля теорема Мермина — Вагнера была вновь открыта Коулменом. В соответствии с общей теоремой Голдстоуна спонтанное нарушение непрерывной симметрии должно было бы приводить к голдстоуновскому бозону. Но в двумерном пространстве-времени невозможно построить оператор безмассового скалярного поля. Действительно, соответствующая двухточечная функция Вайтмана

$$\langle 0 | \phi(x) \phi(0) | 0 \rangle = \int \frac{d^2k}{2\pi} \theta(k^0) \delta(k^2) e^{ik \cdot x} = \int_0^\infty \frac{dk^1}{2\pi k^1} \cos(k^1 x^1) e^{ik^1 x^0} \quad (11.61)$$

оказывается инфракрасно расходящимся интегралом, не имеющим смысла. При этом не удается придумать никакой процедуры вычитания, чтобы обойти эту трудность, не отказавшись от каких-либо фундаментальных свойств теории поля, например положительности метрики гильбертова пространства.

Таким образом, в двумерном мире безмассовая скалярная теория поля не определена из-за сильных инфракрасных расходимостей. В рамках статистической физики это означает, что флуктуации превышают энергию взаимодействия, разрушая в этой размерности дальний порядок.

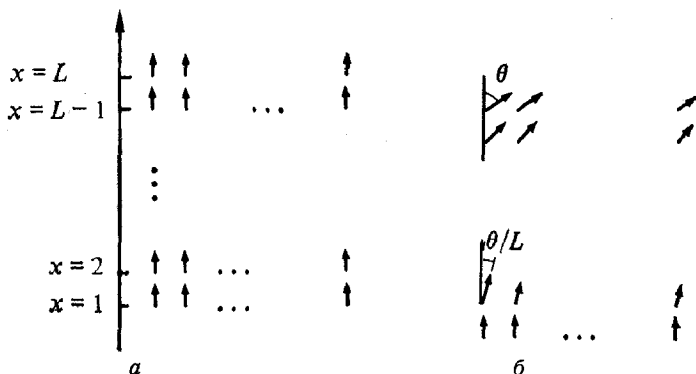


РИС. 11.7. Две конфигурации, рассматриваемые в классической модели Гейзенберга на  $d$ -мерной решетке. Одно из направлений выделено для того, чтобы указать эффект непрерывного вращения усредненного спина.

Простое доказательство объясняет происхождение этого явления. Рассмотрим дискретную классическую модель Гейзенберга на решетке. Сравним две конфигурации, изображенные на рис. 11.7, где ориентация «спина» может изменяться, скажем, вдоль направления первой оси. Действие заменяется энергией, пропорциональной соответственно  $E_a = -L^d$  и  $E_b = -L^{d-1} \sum_l \cos(\theta/L)$ . Относительный вес этих конфигураций задается фактором Больцмана

$$e^{\beta(E_b - E_a)} \sim e^{-\beta\theta^2 L^{d-2}/2}$$

Мы видим, что в случае  $d > 2$  конфигурация на рис. 11.7, б входит с пренебрежимо малым весом в термодинамическом пределе при достаточно низкой температуре; это означает, что предпочтителен порядок. В случае  $d=2$  усреднение по флуктуациям будет разрушать этот порядок. Аналогичные соображения для дискретных симметрий показывают, что в этом случае наименьшая критическая размерность равна единице.

### 11.3. АЛГЕБРА ТОКОВ

#### 11.3.1. Коммутаторы токов

Слабые взаимодействия приводят к необходимости детального изучения структуры и свойств адронных токов. В феноменологическом плане эти взаимодействия хорошо описываются эффективным лагранжианом ток  $\times$  ток:

$$\mathcal{L} = -\frac{G}{\sqrt{2}} J^\mu(x) J_\mu^\dagger(x), \quad (11.62)$$

где  $G$  — константа Ферми, равная

$$G = (1,026 \pm 0,001) \cdot 10^{-5} m_p^{-2}. \quad (11.63)$$

Полный ток  $J_\mu(x)$  есть сумма лептонного ( $l_\mu$ ) и адронного ( $h_\mu$ ) токов:

$$J_\mu(x) = l_\mu(x) + h_\mu(x). \quad (11.64)$$

Если пренебречь вкладом недавно открытого массивного лептона, то в лептонный ток будут входить только левоспиральные компоненты электрона  $e^-$ , мюона  $\mu^-$  и нейтрино  $\nu_e, \nu_\mu$ :

$$l_\rho(x) = \bar{\Psi}_e(x) \gamma_\rho (1 - \gamma_5) \Psi_{\nu_e}(x) + \bar{\Psi}_\mu(x) \gamma_\rho (1 - \gamma_5) \Psi_{\nu_\mu}(x). \quad (11.65)$$

Адронный же ток состоит из сохраняющей странность  $h_\rho^{(\Delta S=0)}$  и изменяющей странность  $h_\rho^{(\Delta S=1)}$  частей:

$$h_\rho = \cos \theta_c h_\rho^{(\Delta S=0)} + \sin \theta_c h_\rho^{(\Delta S=1)}, \quad (11.66)$$

где  $\theta_c$  — угол Кабиббо, приближенно равный

$$\theta_c \approx 0,25. \quad (11.67)$$

Такое разбиение подразумевает, что мы можем соотнести масштаб различных составляющих, отвечающих за переходы с различными квантовыми числами. Существование такого общего масштаба обеспечивается нелинейной алгеброй коммутаторов токов.

Каждый из этих токов, как и лептонный, представляет собой суперпозицию  $V-A$  векторной и аксиальной частей. В рамках унитарной симметрии они образуют октеты токов, обозначаемых  $V^a, A^a$  ( $a = 1, \dots, 8$ ), причем

$$\begin{aligned} h_\mu^{(\Delta S=0)} &= (V_\mu^1 - iV_\mu^2) - (A_\mu^1 - iA_\mu^2), \\ h_\mu^{(\Delta S=1)} &= (V_\mu^4 - iV_\mu^5) - (A_\mu^4 - iA_\mu^5). \end{aligned} \quad (11.68)$$

Читатель не должен путать применяемое здесь обозначение  $A_\mu$  для аксиального тока с обозначением  $A_\mu$  для потенциала в электродинамике.

Слабое взаимодействие токов, дополненное этими гипотезами, приводит к замечательным свойствам универсальности. Рассмотрим, например, матричный элемент, измеряемый в  $\beta$ -распаде нейтрона:

$$G \langle p | h_\mu^{(\Delta S=0)} | n \rangle = \bar{u}_p \gamma_\mu (G_V - G_A \gamma_5) u_n. \quad (11.69)$$

В правой части формфакторы  $G_V$  и  $G_A$  вычисляются при нулевом передаваемом импульсе ввиду малого различия масс нейтрона и протона. С однопроцентной точностью наблюдаемое значение  $G_V$  совпадает с соответствующим значением, измеряемым в распаде мюона. Значение константы  $G$  в (11.63) получается из распада

мюона с учетом радиационных поправок. Наиболее точные измерения для сильно взаимодействующих частиц обычно проводятся в разрешенных  $\beta$ -переходах между состояниями ядер ( $0^+ \rightarrow 0^+$ ). При этом учитываются различные тонкие эффекты, такие, как радиационные поправки, наличие угла Кабиббо и т. п. Приведем некоторые значения, полученные сравнительно недавно:

$${}^{14}\text{O} \xrightarrow{\beta^+} {}^{14}\text{N}, \quad G_V/G = 1,006,$$

$${}^{26}\text{Al} \rightarrow {}^{26}\text{Mg}, \quad G_V/G = 1,011.$$

Тот факт, что  $G_V(0)$  не перенормируется сильными взаимодействиями, находит естественную интерпретацию, если вслед за Гелл-Манном и Фейнманом мы предположим, что векторный ток  $V_\mu$  сохраняется<sup>1)</sup> и генерирует унитарную симметрию адронов. Иными словами,  $V_\mu^a$  ( $a=1, 2, 3$ ) являются составляющими изоспинового тока, а  $V_\mu^{(\Delta S=1)}$  сохраняется приближенно, если пренебречь нарушением  $SU(3)$ -симметрии. Следовательно, адронный электромагнитный ток можно записать в виде

$$j_\mu^{\text{em}} = V_\mu^3 + \frac{1}{\sqrt{3}} V_\mu^8,$$

где для удобства сравнения мы опустили множитель  $e$  в определении  $j^{\text{em}}$ . Данная гипотеза возникла как обобщение известного свойства электродинамики, состоящего в том, что сохранение тока приводит к универсальной перенормировке заряда. Напомним (см. гл. 7 и 8), что тождество Уорда, выражающее закон сохранения, показывает, что перенормировка заряда целиком обусловлена поляризацией вакуума. Все взаимодействия фермионов дают вклад лишь в перенормировку волновой функции с константой  $Z_2 = Z_1$ .

Таким образом, определенные составляющие векторного адронного слабого тока и изовекторная часть электромагнитного тока входят в один и тот же мультиплет и одновременно сохраняются. Эту гипотезу Гелл-Манна и Фейнмана о сохраняющемся векторном токе (СВТ) можно проверить, сравнивая вероятности слабого и электромагнитного распадов частиц, входящих в один изоспиновый мультиплет. Из физики частиц нам известны ширины распадов  $\pi^+ \rightarrow \pi^0 + e^+ + \nu$  и  $\pi^- \rightarrow \pi^0 + e^- + \bar{\nu}$ . В силу того что передаваемый импульс ничтожно мал, амплитуды этих распадов можно нормировать непосредственно на электрический заряд посредством соответствующего поворота матричных элементов в изоспиновом пространстве. При этом предсказывается следующее значение ширины распада:

$$\Gamma_{\pi^\pm \rightarrow \pi^0 + (e\nu)} = \frac{G^2 (m_{\pi^\pm} - m_{\pi^0})^6}{30\pi^3} = 0,45 \text{ с}^{-1},$$

<sup>1)</sup> Гипотеза о сохранении векторного тока была одновременно и независимо сформулирована С. С. Герштейном и Я. Б. Зельдовичем. — *Прим. перев.*



где вкладами порядка  $m_e^2/(m_{\pi^+} - m_{\pi^0})^2 \sim 10^{-2}$  мы пренебрегли. Это значение следует сравнить с экспериментальным результатом

$$\Gamma_{\pi^\pm \rightarrow \pi^0 + (e\nu)} = (0,39 \pm 0,03) \text{ с}^{-1}.$$

В ядерной физике можно также выполнить точную проверку справедливости гипотезы СВТ.

Напротив, аксиальный ток не сохраняется даже в пределе точной  $SU(3)$ -симметрии. Это находится в соответствии с тем фактом, что аксиальная константа связи, измеряемая в  $\beta$ -распаде, вовсе не равна векторной константе:

$$G_A/G_V = 1,22 \pm 0,02. \quad (11.70)$$

Однако мы можем изучать приближение, в котором аксиальные токи будут сохраняться, по крайней мере те, что не изменяют странность. Это соответствует требованию инвариантности относительно дополнительной группы киральных преобразований  $SU(2) \times SU(2)$ , генерируемой зарядами  $Q^a$  и  $Q_5^a$  ( $a = 1, 2, 3$ ).

Если для описания адронов в качестве фундаментальных динамических переменных использовать кварковые поля, то можно получить следующие выражения для токов:

$$V_\mu^a(x) = \bar{q}(x) \gamma_\mu \frac{\lambda^a}{2} q(x), \quad A_\mu^a(x) = \bar{q}(x) \gamma_\mu \gamma_5 \frac{\lambda^a}{2} q(x). \quad (11.71)$$

Для этих токов можно вычислить одновременные коммутационные соотношения; это же справедливо для соответствующих зарядов:

$$Q^a(t) = \int d^3x V_0^a(x, t), \quad Q_5^a(t) = \int d^3x A_0^a(x, t). \quad (11.72)$$

Гелл-Манн постулировал, что эти коммутационные соотношения, выведенные в рамках модели кварков, остаются справедливыми независимо от предположения о кварковой структуре адронов. Если  $SU(3)$  не является точной симметрией, некоторые из зарядов могут зависеть от времени, однако вид алгебры одновременных коммутаторов при этом не изменяется:

$$\begin{aligned} [Q^a, Q^b] &= if_{abc} Q^c, \\ [Q^a, Q_5^b] &= if_{abc} Q_5^c, \\ [Q_5^a, Q_5^b] &= if_{abc} Q^c \end{aligned} \quad (11.73)$$

Мы видим, что данные коммутационные соотношения образуют алгебру Ли группы  $SU(3) \times SU(3)$ . Это легко проверить, если построить лево- и правосторонние комбинации генераторов

$$Q_\mp^a = \frac{1}{2} (Q^a \mp Q_5^a), \quad (11.74)$$

которые подчиняются следующим правилам коммутации:

$$\begin{aligned} [Q_{\pm}^a, Q_{\pm}^b] &= if_{abc} Q_{\pm}^c, \\ [Q_+^a, Q_-^b] &= 0. \end{aligned} \quad (11.75)$$

Обычная унитарная группа входит в  $SU(3) \times SU(3)$  как диагональная подгруппа, а оператор четности переводит эти два набора зарядов друг в друга:

$$\mathcal{P} Q_+ \mathcal{P}^{-1} = Q_- . \quad (11.76)$$

Поскольку алгебра этих зарядов нелинейна, с ее помощью можно придать ясный смысл концепции универсальности. Например, из соотношения

$$[Q^{1+i2}, Q^{1-i2}] = 2Q^3 \quad (11.77)$$

следует, что матричный элемент коммутатора в левой части, входящий в слабую амплитуду, универсально нормирован относительно изоспиновых состояний.

Соотношения (11.73) можно обобщить в два этапа. Вначале мы можем написать коммутационные соотношения между зарядами и токами, выражающие трансформационные свойства операторов  $V_{\mu}^a$  и  $A_{\mu}^a$  относительно преобразований  $SU(3) \times SU(3)$ . Из кварковой модели следует, что токи принадлежат представлению  $(1, 8) \oplus (8, 1)$ :

$$\begin{aligned} [Q^a(t), V_{\mu}^b(x, t)] &= if_{abc} V_{\mu}^c(x, t), \\ [Q^a(t), A_{\mu}^b(x, t)] &= if_{abc} A_{\mu}^c(x, t), \\ [Q_5^a(t), V_{\mu}^b(x, t)] &= -if_{abc} A_{\mu}^c(x, t), \\ [Q_5^a(t), A_{\mu}^b(x, t)] &= if_{abc} V_{\mu}^c(x, t). \end{aligned} \quad (11.78)$$

Беря интегралы от соотношений (11.78) по пространственным координатам, мы снова придем к коммутационным соотношениям между зарядами.

На втором этапе, исходя снова из кварковой модели, можно вывести одновременные коммутаторы для временных составляющих:

$$\begin{aligned} [V_0^a(x, t), V_0^b(y, t)] &= if_{abc} V_0^c(x, t) \delta^3(x-y), \\ [V_0^a(x, t), A_0^b(y, t)] &= if_{abc} A_0^c(x, t) \delta^3(x-y), \\ [A_0^a(x, t), A_0^b(y, t)] &= if_{abc} V_0^c(x, t) \delta^3(x-y). \end{aligned} \quad (11.79)$$

Данные соотношения между временными составляющими, по-видимому, выполняются с высокой степенью достоверности и в общем случае. Однако это уже не так, если попытаться продвинуться дальше и включить в рассмотрение все составляющие. При этом появятся члены с производными от  $\delta$ -функции. Например, мы получаем

$$[V_0^a(x, t), V_i^b(y, t)] = if_{abc} V_i^c(x, t) \delta^3(x-y) + S_{ab; ij} \partial_j \delta^3(x-y). \quad (11.80)$$

Такие дополнительные члены были первоначально введены Швингером при обсуждении сохраняющегося электромагнитного тока [ $U(1)$ -симметрия]. В данном случае предположим, что справедливо соотношение вида

$$[j_0(x, t), j_i(y, t)] = 0. \quad (11.81)$$

В правой части каких-либо вкладов от  $\delta$ -функции мы не имеем, поскольку структурные константы в этом абелевом случае равны нулю. Таким образом,

$$[j_0(x, t), \nabla \cdot \mathbf{j}(y, t)] = 0. \quad (11.82)$$

В силу сохранения тока это также означает, что

$$[j_0(x, t), \partial_0 j_0(y, t)] = 0. \quad (11.83)$$

Вычисляя вакуумное среднее этой величины и вставляя полный набор собственных состояний оператора энергии, приходим в пределе  $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{y}$  к следующему равенству:

$$\sum_n E_n |\langle 0 | j_0(0) | n \rangle|^2 = 0. \quad (11.84)$$

Из свойства положительности энергии мы заключаем, что  $j_0$  обращается в нуль! По крайней мере в этом случае швингеровские члены неизбежны.

Эти дополнительные вклады выпадают из коммутаторов  $[Q, j_\mu]$ , получаемых интегрированием. Ситуация оказывается даже более запутанной, когда дело касается одновременных коммутаторов пространственных составляющих, которые сильно зависят от модели и не будут рассматриваться в дальнейшем.

В разд. 5.1.7 (см. т. 1 настоящей книги) мы уже встречались с швингеровскими членами, когда пытались написать спектральные представления для вакуумного среднего хронологического произведения электромагнитных токов или их коммутатора. Мы обнаружили связь между швингеровским членом и локальной нековариантной разностью «наивного» хронологического произведения ( $\tilde{T}$ ) и его ковариантной версии ( $T$ ). Было найдено, что

$$\langle 0 | T j_\mu(x) j_\nu(y) | 0 \rangle = \langle 0 | \tilde{T} j_\mu(x) j_\nu(y) | 0 \rangle - i(g_{\mu\nu} - g_{\mu 0} g_{\nu 0}) \delta^4(x - y) \xi, \quad (11.85)$$

где  $\xi$  — интеграл от спектральной функции:

$$\xi = \int dM^2 \frac{\rho(M^2)}{M^2}. \quad (11.86)$$

С другой стороны, было также показано, что

$$\langle 0 | [j_0(x, t), j_k(y, t)] | 0 \rangle = i \partial_k \delta^3(x - y) \xi. \quad (11.87)$$

Если предположить существование такой же связи между швингеровскими членами и нековариантными частями «наивного» хронологического произведения (вклады диаграммы типа чайка) для произвольных токов и состояний, то эти нежелательные вклады будут сокращаться в окончательных выражениях, возникающих в приложениях алгебры токов. В самом деле, типичный результат следует из тождества Уорда, которому удовлетворяет ковариантное хронологическое произведение

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} \langle A | T j^\mu(x) j^\nu(y) | B \rangle = \langle A | T \partial_\mu j^\mu(x) j^\nu(y) | B \rangle + \\ + \delta(x^0 - y^0) \langle A | [j^0(x), j^\nu(y)] | B \rangle + \frac{\partial}{\partial x^\mu} \text{(чайка)}. \quad (11.88)$$

Если последний член компенсируется швингеровским членом, появляющимся из одновременного коммутатора, то мы можем их оба опустить, после чего это тождество сводится к своей «наивной» форме:

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} \langle A | T j^\mu(x) j^\nu(y) | B \rangle = \langle A | T \partial_\mu j^\mu(x) j^\nu(y) | B \rangle + \\ + \delta(x^0 - y^0) \langle A | [j^0(x), j^\nu(y)] | B \rangle |_{\text{наивн}}. \quad (11.89)$$

Примем это как постулат. Тождество Уорда будет использоваться для того, чтобы получить низкоэнергетические теоремы и правила сумм всякий раз, когда имеется определенная информация о дивергенции тока. Можно постулировать правило частичного сохранения аксиальных токов (ЧСАТ), точное содержание которого мы установим ниже. Однако покажем вначале, как можно проверять локальные коммутационные соотношения. Это позволит нам ввести новый технический прием — так называемую систему бесконечно большого импульса Дирака, Фубини и Фурлана.

Выбирая нуклонные состояния  $A$  и  $B$  с равными импульсами  $p$  и усредняя по поляризациям нуклонов, определим величину

$$W_{\mu\nu}(p, q) = \frac{1}{2\pi} \int d^4x e^{iq \cdot x} \frac{1}{2} \sum_{\text{Поляр}} \langle p | [j_\mu^a(x), j_\nu^b(0)] | p \rangle. \quad (11.90)$$

Интегрирование по  $q^0$  приводит к одновременному коммутатору

$$\int dq^0 W_{00}(p, q) = \int d^3x e^{-iq \cdot x} \frac{1}{2} \sum_{\text{Поляр}} \langle p | [j_0^a(\mathbf{x}, 0), j_0^b(0)] | p \rangle. \quad (11.91)$$

В типичных приложениях токи выбираются как векторные плотности  $j_0^{ab} = V_0^{\pm i2}$  или  $V_0^{\pm i5}$ , коммутаторы которых сводятся к

комбинациям  $V_0^3$  и  $V_0^8$ . Например,

$$\int d^3x e^{-iq \cdot x} \frac{1}{2} \sum_{\text{Поляр}} \langle p | [V_0^{1+12}(x, 0), V_0^{1-12}(0)] | p \rangle = \\ = 4 \int d^3x \delta^3(x) \frac{1}{2} \sum_{\text{Поляр}} \langle p | V_0^3(0) | p \rangle = 4 \frac{p_0}{m} T^3; \quad (11.92)$$

здесь  $T^3$  — третья составляющая изоспина нуклона, а состояния нормированы в соответствии с условием  $\langle p | p' \rangle = (p_0/m) (2\pi)^3 \times \delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{p}')$

Ковариантную амплитуду  $W_{\mu\nu}$  можно разложить следующим образом:

$$W_{\mu\nu} = -W_1 g_{\mu\nu} + W_2 \frac{p_\mu p_\nu}{m^2} - iW_3 \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \frac{p_\rho q_\sigma}{2m^2} + \\ + W_4 \frac{q_\mu q_\nu}{m^2} + W_5 \frac{p_\mu q_\nu + p_\nu q_\mu}{2m^2} + iW_6 \frac{p_\mu q_\nu - p_\nu q_\mu}{2m^2}, \quad (11.93)$$

где  $W_1, \dots, W_6$  — функции лоренц-инвариантных переменных  $q^2$ , а  $\nu = q \cdot p$ . Следовательно,

$$\int dq^0 W_{00}(p, q) = p_0 \int d\nu \left( -\frac{W_1}{p_0} + \frac{W_2}{m^2} + \frac{q_0^2}{p_0^2 m^2} W_4 + \frac{q_0}{p_0 m^2} W_5 \right)_{\text{фикс. } \mathbf{q}}. \quad (11.94)$$

Если выбрать систему отсчета, в которой  $\mathbf{p} \cdot \mathbf{q} = 0$ , и потому  $q_0 = \nu/p_0$  и  $q^2 = (\nu/p_0)^2 - \mathbf{q}^2$ , то выражение (11.94) можно переписать в виде

$$\int dq^0 W_{00}(p, q) = p_0 \int d\nu \left( -\frac{W_1}{p_0} + \frac{W_2}{m^2} + \frac{\nu^2 W_4}{p_0^4 m^2} + \frac{\nu W_5}{p_0^2 m^2} \right)_{\text{фикс. } \mathbf{q}}. \quad (11.95)$$

Интерпретация этого правила сумм все еще затруднена из-за его зависимости от  $p_0$ . Вместо системы координат, в которой нуклон покоится, а потому  $p_0 = m$ , разумнее выбрать предельную систему, в которой  $p_0 \rightarrow \infty$ , а  $q^2$  остается фиксированным, т. е.

$$p_0, |\mathbf{p}| \rightarrow \infty, \quad \mathbf{p} \cdot \mathbf{q} = 0, \\ q^2 \rightarrow -\mathbf{q}^2 \text{ фиксировано} \quad (11.96)$$

Если допустить законность перестановки операций перехода к пределу и интегрирования, то можно написать

$$\frac{1}{m^2} \int d\nu W_2(\nu, q^2 = -\mathbf{q}^2) = \lim_{p_0 \rightarrow \infty} \frac{1}{p_0} \int dq^0 W_{00}. \quad (11.97)$$

Вспоминая (11.91) и (11.92), видим, что мы получили сильное ограничение на амплитуду, поскольку из него, в частности, сле-

дует, что левая часть полученного соотношения не зависит от  $q^2$ . Этим подтверждается локальный характер алгебры токов.

Правило сумм этого типа имеет ряд приложений. Мы приведем здесь только некоторые из них. Если применить соотношение (11.97) к изоспиновым векторным токам  $V^{1+i2}$ ,  $V^{1-i2}$ , то мы получим правило сумм Кабиббо—Радикати. Оно записывается в виде

$$2 \frac{dF_1^V}{dq^2}(0) = \left[ \frac{F_2^V(0)}{2m} \right]^2 + \frac{1}{2\pi^2\alpha} \int_{\nu \text{ порог}}^{\infty} \frac{d\nu}{\nu} (2\sigma_{1/2}^V - \sigma_{3/2}^V). \quad (11.98)$$

Функции  $F_1^V(q^2)$ ,  $F_2^V(q^2)$  представляют собой изовекторные форм-факторы нуклона, определяемые через матричный элемент электромагнитного тока следующим образом:

$$\langle p_2 | j_{\mu}^{\text{em}}(0) | p_1 \rangle = \bar{u}_2 \left[ \gamma_{\mu} \left( \frac{F_1^S + F_1^V \tau_3}{2} \right) + \frac{i\sigma_{\mu\nu}}{2m} q^{\nu} \left( \frac{F_2^S + F_2^V \tau_3}{2} \right) \right] u_1. \quad (11.99)$$

Величины  $\sigma_{1/2}^V$ ,  $\sigma_{3/2}^V$  — это полные адронные сечения рассеяния «изовекторных» фотонов на нуклонах в каналах с полным изо-

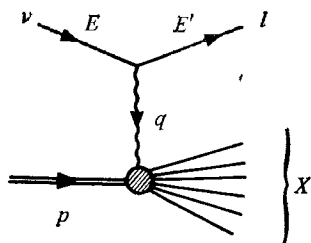


РИС. 11.8. Инклюзивный процесс  $\nu + N \rightarrow l + X$ .

спином соответственно  $1/2$  и  $3/2$ . Экспериментальные значения обеих частей выражения (11.99) находятся в хорошем согласии друг с другом. В единицах обратного квадрата массы пиона имеем

$$2 \frac{dF_1^1}{dq^2}(0) = 0,132\pi^{-2}, \quad \left[ \frac{F_2^1(0)}{2m} \right]^2 + \frac{1}{2\pi^2\alpha} \int_{\nu \text{ порог}}^{\infty} \frac{d\nu}{\nu} (2\sigma_{1/2}^V - \sigma_{3/2}^V) = 0,126m_{\pi}^{-2}. \quad (11.100)$$

Инклюзивное сечение процесса Нейтрино ( $\nu$ ) [или антинейтрино ( $\bar{\nu}$ )] + Нуклон ( $N$ )  $\rightarrow$  Лептон ( $l$ ) +  $X$  где  $X$  — неидентифицированное адронное состояние (рис 11.8), записывается через структурные функции  $W_1$ ,  $W_2$ ,  $W_3$ , появляющиеся в выражении (11.93),

следующим образом:

$$\frac{d\sigma^{(\nu, \bar{\nu})}}{d|q^2|d\nu} = \frac{G^2}{2\pi m} \frac{E'}{E} \left( 2W_1^{(\nu, \bar{\nu})} \sin^2 \frac{\theta}{2} + W_2^{(\nu, \bar{\nu})} \cos^2 \frac{\theta}{2} \mp \mp W_3^{(\nu, \bar{\nu})} \frac{E+E'}{m} \sin^2 \frac{\theta}{2} \right). \quad (11.101)$$

В этом процессе кинематические переменные  $\nu$  и  $q^2$  связаны с энергией  $E$  входящего нейтрино, энергией  $E'$  конечного лептона и углом рассеяния  $\theta$  в лабораторной системе соотношениями:

$$\begin{aligned} \nu &= p \cdot q = m(E - E'), \\ q^2 &= -4EE' \sin^2(\theta/2). \end{aligned} \quad (11.102)$$

В экспериментах с лептонами высоких энергий их массами можно пренебречь. Этим объясняется отсутствие в (11.101) функций  $W_4$ ,  $W_5$ ,  $W_6$  и простое выражение для передаваемого импульса. В гл. 13 мы изучим такие процессы более подробно.

При фиксированных  $q^2$  и  $\nu$ , когда  $E$  (а следовательно, и  $E'$ ) растет,  $\theta$  стремится к нулю и величину сечения можно аппроксимировать единственным вкладом  $W_2$ . Следовательно,

$$\lim_{E \rightarrow \infty} \frac{d\sigma^{(\nu, \bar{\nu})}}{d|q^2|} = \frac{G^2}{2\pi m} \int_{-q^2/2}^{\infty} d\nu W_2^{(\nu, \bar{\nu})}(\nu, q^2). \quad (11.103)$$

Перекрестная симметрия приводит тогда к условию

$$W_i^{(\nu)}(\nu, q^2) = -W_i^{(\bar{\nu})}(-\nu, q^2), \quad (11.104)$$

и алгебра токов позволяет написать правило сумм Адлера:

$$\lim_{E_1 \rightarrow \infty} \left( \frac{d\sigma^{(\nu)}}{d|q^2|} - \frac{d\sigma^{(\bar{\nu})}}{d|q^2|} \right) = \frac{G^2}{\pi} \left[ 2T_3 \cos^2 \theta_c + \left( T_3 + \frac{3Y}{2} \right) \sin^2 \theta_c \right], \quad (11.105)$$

где  $T_3$  — третья составляющая изоспина,  $Y$  — гиперзаряд частицы мишени и  $\theta_c$  — угол Кабиббо. Аналогичный результат можно получить для инклюзивных сечений неупругого рассеяния электрона  $e + N \rightarrow e + X$ , которое описывается векторным током  $V^{(i+1/2)}$ . Однако, поскольку алгебра токов неприменима к изоскалярной части электромагнитного тока, предсказание, полученное Бьеркеном, представляет собой всего лишь ограничение на сумму сечений рассеяния электронов на нейтронной и протонной мишенях:

$$\lim_{E_1 \rightarrow \infty} \left( \frac{d\sigma^{en}}{d|q^2|} + \frac{d\sigma^{ep}}{d|q^2|} \right) \geq \frac{2\pi\alpha^2}{(q^2)^2}. \quad (11.106)$$

### 11.3.2. Частичное сохранение аксиального тока и киральная симметрия

Коммутационные соотношения векторных и аксиальных зарядов образуют алгебру Ли группы  $SU(2) \times SU(2)$ . Предполагая, что аксиальные токи приближенно сохраняются, приходим к симметрии, называемой киральной. Она реализуется с помощью голдстоуновского механизма, в котором роль безмассовых частиц играют пионы. Эта гипотеза позволяет извлечь новые следствия из алгебры токов в виде правил сумм и низкоэнергетических теорем. Обобщение на киральную симметрию  $SU(3) \times SU(3)$ , включающую токи, изменяющие странность, является, по-видимому, более проблематичным.

Рассмотрим матричный элемент аксиального тока между состоянием пиона и вакуумом:

$$\langle 0 | A_\mu^i(x) | \pi^k(p) \rangle = i p_\mu \delta^{jk} f_\pi e^{-i p \cdot x}. \quad (11.107)$$

Эта амплитуда определяет вероятность распада  $\pi \rightarrow \mu \bar{\nu}$  в виде

$$\Gamma_{\pi \rightarrow \mu \nu} = \frac{G^2 m_\pi^2 f_\pi^2 (m_\pi^2 - m_\mu^2)^2}{4\pi m_\pi^3} \cos^2 \theta_c. \quad (11.108)$$

Экспериментально измеренное значение  $f_\pi$  равно

$$f_\pi \approx 93 \text{ МэВ} \quad (11.109)$$

Из (11.107) следует, что матричный элемент дивергенции  $\partial^\mu A_\mu(x)$  записывается в виде

$$\langle 0 | \partial^\mu A_\mu^i(x) | \pi^k(p) \rangle = m_\pi^2 \delta^{jk} f_\pi e^{-i p \cdot x}. \quad (11.110)$$

Поэтому сохранение тока означает, что  $f_\pi m_\pi^2 = 0$ , и мы приходим к двум возможностям. либо  $f_\pi$ , либо  $m_\pi^2$  равно нулю, что противоречит экспериментальным фактам. Тем не менее в качестве первого приближения попытаемся сконструировать мир с безмассовыми пионами. Если при выборе группы  $SU(2) \times SU(2)$  предположить инвариантность вакуума, то у нас получится нереальный мир с вырожденными по четности мультиплетам с соответствующими правилами отбора. С другой стороны, голдстоуновская реализация согласуется с тем фактом, что масса пионов много меньше, чем у остальных мезонов.

Поэтому исследуем вопрос о том, к каким следствиям приводят предположения  $\partial^\mu A_\mu = 0$  и  $m_\pi^2 = 0$ . Вычислим матричный элемент аксиального тока между нуклонными обкладками:

$$\langle N(p_2) | A_\mu^i(0) | N(p_1) \rangle = \bar{u}(p_2) \frac{\tau^i}{2} [\gamma_\mu \gamma_5 g_A(q^2) + q_\mu \gamma_5 h_A(q^2)] u(p_1), \quad (11.111)$$



где  $q = p_2 - p_1$ . Сравнение с формулой (11.69) дает

$$g_A(0) = G_A/G_V \approx 1,22. \quad (11.112)$$

В силу сохранения тока имеем равенство

$$2mg_A(q^2) + q^2 h_A(q^2) = 0, \quad (11.113)$$

из которого было бы ошибочным заключить, что  $g_A(0) = 0$ . Действительно, формфактор  $h(q^2)$  имеет полюс при  $q^2 = 0$ , отвечающий обмену пионом (рис 11 9) Вклад его запишется в виде

$$if_\pi \frac{q_\mu}{q^2} i g_{\pi NN} \bar{u}(p_2) \gamma_5 \tau^j u(p_1), \quad (11.114)$$

где  $g_{\pi NN}$  — эффективная константа пион-нуклонного взаимодействия (см. раздел 5.3.4 в т. 1 настоящей книги), приближенно равная

$$g_{\pi NN}^2/4\pi = 14,6. \quad (11.115)$$

Из соотношений (11.113) и (11.114) при нулевой передаче импульса получаем соотношение Голдбергера — Треймана

$$g_A(0) = G_A/G_V = g_{\pi NN} f_\pi / m, \quad (11.116)$$

которое находится в согласии с экспериментальными данными в пределах 10%-ной ошибки [правая часть выражения (11.116) равна 1,34, а левая — 1,22]. Это замечательное соотношение, по-

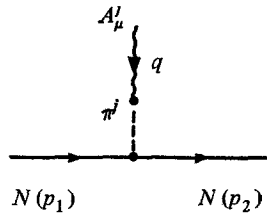


РИС. 11 9. Вклад пиона в матричный элемент аксиального тока между состояниями нуклона

скольку оно связывает параметры сильного ( $g_{\pi NN}$ ) и слабого ( $f_\pi$ ,  $G_A/G_V$ ) взаимодействий. Для установления соответствия с реальным миром массивных пионов необходимо уметь экстраполировать амплитуды из нефизической точки  $q^2 = 0$  в точку  $q^2 = m_\pi^2$ . Это становится возможным в рамках гипотезы о частичном сохранении аксиального тока (ЧСАТ).

$$\partial^\mu A'_\mu(x) = m_\pi^2 f_\pi \pi^j(x), \quad (11.117)$$

которая отождествляет дивергенцию тока с гладко меняющимся интерполирующим пионным полем Мы уже знаем, что дивергенция  $\partial^\mu A'_\mu$  имеет нужные квантовые числа Соотношение (11.110) указывает, что ее действительно можно использовать в качестве

оператора рождения асимптотических пионных состояний, если  $m_{\pi}^2 f_{\pi} \neq 0$ . Уравнение (11.117) дополняется гипотезой о гладком импульсном поведении формфакторов вблизи массовой поверхности. Это означает, что в матричные элементы  $\partial^{\mu} A_{\mu}$  при малых значениях передаваемого импульса  $|q^2| \ll m_{\pi}^2$  основной вклад дает пионный полюс:

$$D(q^2) = \langle A | \partial^{\mu} A_{\mu} | B \rangle = \frac{C}{q^2 - m_{\pi}^2} + \dots; \quad (11.118)$$

здесь  $C$  — вычит, величину которого нам надо определить. Такого практического содержания гипотезы ЧСАТ.

### 11.3.3. Низкоэнергетические теоремы и правила сумм

Низкоэнергетические теоремы можно вывести с помощью алгебры токов и ЧСАТ. Ситуация здесь аналогична той, которая имеет место в электродинамике. Поэтому мы начнем с изучения комптоновского рассеяния при низких энергиях

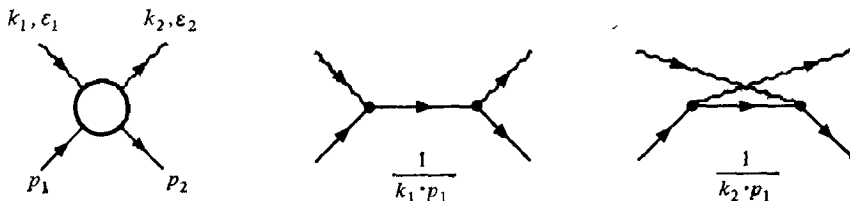


РИС. 11.10. Комптоновская амплитуда и борновские члены.

Для простоты амплитуду рассеяния фотонов запишем для бесспиновой мишени с единичным зарядом (рис. 11.10):

$$\begin{aligned} (2\pi)^4 \delta^4(p_1 + k_1 - p_2 - k_2) \mathcal{F} &= \\ &= ie^2 \int d^4x d^4y \epsilon_2^{\mu} \epsilon_1^{\nu} e^{i(k_2 \cdot x - k_1 \cdot y)} \langle p_2 | T j_{\mu}(x) j_{\nu}(y) | p_1 \rangle, \\ \mathcal{F} &= ie^2 \int d^4x \epsilon_2^{\mu} \epsilon_1^{\nu} e^{ik_2 \cdot x} \langle p_2 | T j_{\mu}(x) j_{\nu}(0) | p_1 \rangle = e^2 \epsilon_2^{\mu} \epsilon_1^{\nu} T_{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (11.119)$$

Выбирая для удобства векторы поляризации так, что  $\epsilon_1 \cdot k_1 = \epsilon_2 \cdot k_2$ , и учитывая лоренцеву инвариантность и инвариантность относительно обращения времени, можно записать амплитуду  $T_{\mu\nu}$  в общем виде:

$$T_{\mu\nu} = Ag_{\mu\nu} + BP_{\mu}P_{\nu} + C(P_{\nu}k_{1\mu} + P_{\mu}k_{2\nu}) + Dk_{1\mu}k_{2\nu}. \quad (11.120)$$

Здесь  $P$  — средний импульс частицы мишени,  $P = (p_1 + p_2)/2$ . Параметризация выбрана таким образом, что скалярные амплитуды  $A$ ,

$B$ ,  $C$  и  $D$  свободны от кинематических сингулярностей. Из сохранения тока следует, что  $k_2^\mu T_{\mu\nu} = 0$ . Поэтому

$$\begin{aligned} A + P \cdot k_2 C + k_1 \cdot k_2 D &= 0, \\ P \cdot k_2 B + k_1 \cdot k_2 C &= 0. \end{aligned} \quad (11.121)$$

В низкоэнергетическом пределе  $k_1, k_2 \rightarrow 0$  в амплитуды  $B$ ,  $C$  и  $D$  основной вклад вносят динамические полюсные члены, определяемые борновскими членами с перенормированными вычетами. Элементарное вычисление приводит к следующему значению амплитуды  $A$  на пороге:

$$\lim_{k_1, k_2 \rightarrow 0} A = 2. \quad (11.122)$$

Таким образом, в этом пределе без каких-либо приближений, связанных с теорией возмущений, сечение дается выражением

$$\lim_{k_1, k_2 \rightarrow 0} \frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{m^2} (\varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2)^2, \quad (11.123)$$

которое находится в согласии с классической оценкой, произведенной в гл 1 (т. 1) и вычислениями в низшем порядке теории возмущений (см. раздел 5.2.1 в т. 1). Впервые этот подход разработали Лоу, Гелл-Манн и Гольдбергер, которые, исходя из тех же предположений, для частиц-мишеней со спином  $1/2$  вычислили в комптоновской амплитуде следующий член, линейный по  $k_1$  и  $k_2$ . Амплитуда  $\mathcal{F}$  для рассеяния вперед имеет вид

$$\mathcal{F} = f_1(\omega^2) \varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2 + i\omega f_2(\omega^2) (\varepsilon_2 \times \varepsilon_1) \cdot \sigma \quad (11.124)$$

(здесь  $\omega = p \cdot k/m$  — полная энергия в лабораторной системе отсчета). Поляризации выбраны здесь так, что они имеют равные нулю временные компоненты. При этом низкоэнергетическая теорема записывается в виде соотношений

$$\begin{aligned} f_1(0) &= -e^2/m, \\ f_2(0) &= -(e^2/8m^2)(g-2)^2. \end{aligned} \quad (11.125)$$

Амплитуда  $f_2$  включает аномальную часть магнитного момента частицы-мишени (для протона  $g-2 = 3,58$ ). Первое соотношение, конечно, эквивалентно соотношению (11.122). Это предсказание трудно проверить непосредственно. Лучше преобразовать его в правило сумм, как это предложили сделать Дрелл и Хирн<sup>1)</sup>. Используя безвычитательное дисперсионное соотношение для  $f_2(\omega^2)$  [соответствующее соотношение для  $f_1(\omega^2)$  требует по крайней мере

<sup>1)</sup> Несколько ранее это правило сформулировал С. Б. Герасимов (см. примечание редактора перевода в конце настоящей главы). — *Прим. перев.*

одно вычитание], можно написать

$$f_2(\omega^2) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} d\omega'^2 \frac{\text{Im} f_2(\omega'^2)}{\omega'^2 - \omega^2} = \frac{1}{2\pi} \int d\omega'^2 \frac{\sigma_-(\omega'^2) - \sigma_+(\omega'^2)}{\omega'^2 - \omega^2}.$$

Здесь  $\sigma_{\pm}(\omega^2)$  — полные сечения для циркулярно-поляризованных фотонов со спинами, соответственно параллельными или антипараллельными спину мишени. Обмен в  $t$ -канале, отвечающий амплитуде с переворотом спиральности, указывает на то, что интеграл от разности сечений с большой вероятностью является сходящимся, и тем самым подтверждается наше предположение о справедливости безвычитательного дисперсионного соотношения. Из последнего находим

$$\frac{\alpha\pi^2(g-2)^2}{2m^2} = \int \frac{d\omega}{\omega} [\sigma_+(\omega) - \sigma_-(\omega)]. \quad (11.126)$$

Для протонов левая часть этого соотношения равна 205 мкб, в то время как, согласно данным при высоких энергиях, значение правой части находится в пределах 200—270 мкб.

С помощью аналогичных методов вычислим амплитуды, включающие аксиальные токи. Это позволит нам получить определенную информацию о пион-нуклонном рассеянии при низких энергиях. Введем матричный элемент аксиального векторного тока между начальным нуклонным и конечным пион-нуклонным состояниями:

$$(2\pi)^4 \delta^4(p_1 + q_1 - p_2 - q_2) T_{\mu}^{jk} = \int d^4x e^{-iq_1 \cdot x} \langle \pi^j(q_2) N(p_2) | A_{\mu}^c(x) | N(p_1) \rangle. \quad (11.127)$$

В соответствии с (11.117) этот матричный элемент связан с пион-нуклонной амплитудой  $\mathcal{F}_{\pi N}$ . Чтобы убедиться в этом, свернем обе части выражения (11.127) с  $q_1$  и получим

$$\begin{aligned} (2\pi)^4 \delta^4(p_1 + q_1 - p_2 - q_2) q_1^{\mu} T_{\mu}^{jk} &= \\ &= -i \int d^4x e^{-iq_1 \cdot x} \langle \pi^j(q_2) N(p_2) | \partial^{\mu} A_{\mu}^c(x) | N(p_1) \rangle = \\ &= -i \frac{m_{\pi}^2}{m_{\pi}^2 - q_1^2} \int d^4x e^{-iq_1 \cdot x} \times \\ &\times (\square_x + m_{\pi}^2) \langle \pi^j(q_2) N(p_2) | \pi^k(x) | N(p_1) \rangle. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$q_1^{\mu} T_{\mu}^{jk} = -i f_{\pi} \frac{m_{\pi}^2}{m_{\pi}^2 - q_1^2} \mathcal{F}_{\pi N}^{jk}(p_2, q_2; p_1, q_1). \quad (11.128)$$

Если устремить  $q_1$  к нулю, то левая часть обращается в нуль при условии, что  $T_{\mu}^{jk}$  не имеет в этой точке сингулярности. Един-

ственная сингулярность возникает из нуклонного полюса (рис. 11.11). Но в противоположность случаю комптоновского рассеяния эта сингулярность компенсируется тем, что в точке  $q_1 = 0$  числитель обращается в нуль и  $q_1^\mu T_\mu^{lk} \sim q_1^2/q_1 \cdot p_1 \rightarrow 0$  при  $q_1 \rightarrow 0$ .

Это приводит для экстраполированной амплитуды к условию совместности Адлера:

$$\lim_{q_1 \rightarrow 0} \mathcal{F}_{\pi l}^{lk} (p_2, p_2; p_1, q_1) = 0. \quad (11.129)$$

Разумеется, такой предельный случай мягких пионов является нефизическим. В альтернативном выводе соотношения (11.129) прямо полагают  $m_\pi = 0$  и  $\partial_\mu A^\mu = 0$ . Из условия  $q_1^\mu T_\mu = 0$  выражение (11.129) получается посредством отделения пионного полюса от других сингулярностей.

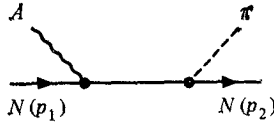


РИС. 11.11. Вклад нуклонного полюса в матричный элемент  $\langle \pi N | A | N \rangle$ .

Если всерьез принять этот несколько нереальный мир с безмассовыми пионами, то для амплитуды можно написать тождество Урда типа (11.89):

$$T_{\mu\nu}^{lk} = \int d^4x e^{iq \cdot x} \langle H(p_2) | T A_\mu^l(x) A_\nu^k(0) | H(p_1) \rangle; \quad (11.130)$$

здесь  $H$  — произвольное адронное состояние.

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} q^\mu T_{\mu\nu}^{lk} &= i \int d^4x e^{iq \cdot x} \langle H(p_2) | \delta(x^0) [A_\nu^l(x), A_\nu^k(0)] | H(p_1) \rangle = \\ &= -\varepsilon^{jkl} \int d^4x e^{iq \cdot x} \delta^4(x) \langle H(p_2) | V_\nu^l(0) | H(p_1) \rangle = \\ &= -\varepsilon^{jkl} (p_1^\nu + p_2^\nu) T_H^l. \end{aligned} \quad (11.131)$$

Мы использовали здесь алгебру токов и тот факт, что  $V_\mu^l$  представляет собой изоспиновый ток, так что  $T_H^l$  является изоспином адрона. В случае когда  $p_1 = p_2$ ,  $T^{\mu\nu}$  имеет двойной полюс при  $q^2 = 0$  с вычетом, пропорциональным амплитуде  $\pi N$ -рассеяния на пороге:

$$T_{\mu\nu}^{lk} = i \frac{q_\mu q_\nu}{(q^2)^2} f_\pi^2 \mathcal{F}_{\pi H}^{lk} + \dots \quad (11.132)$$

Следовательно, пороговое значение амплитуды  $\mathcal{F}_{\pi H}$  (в реальном мире, когда  $p \cdot q = m_\pi m_H$ ) дается выражением

$$\mathcal{F}_{\pi H} |_{\text{порог}} \approx -\frac{m_\pi m_H}{f_\pi^2} \langle 2\mathbf{T}_H \cdot \mathbf{T}_\pi \rangle. \quad (11.133)$$

Обозначая через  $T$  полный изоспин в  $s$ -канале, можно получить соотношение

$$\langle 2T_H \cdot T_\pi = T(T+1) - T_H(T_H+1) - 2 \quad (11.134)$$

Этот же результат можно записать по-другому в терминах  $s$ -волновых длин рассеяния в различных изоспиновых каналах, определяемых как

$$\mathcal{F}_{\pi N}^T |_{\text{порог}} = 8\pi (m_H + m_\pi) a_T \quad (11.135)$$

В случае пион-нуклонного рассеяния это дает значения

$$a_{1/2} = 0,166 m_\pi^{-1}, \quad a_{3/2} = -0,083 m_\pi^{-1}, \quad a_{1/2} + 2a_{3/2} = 0, \quad (11.136)$$

которые удивительно хорошо согласуются с экспериментальными данными:

$$a_{1/2}^{\text{эксп}} = (0,171 \pm 0,005) m_\pi^{-1}, \quad a_{3/2}^{\text{эксп}} = -(0,088 \pm 0,004) m_\pi^{-1}. \quad (11.137)$$

Аналогичные вычисления, дающие хорошие результаты, можно выполнить для пион-пионного и пион-каонного рассеяния

Используя дисперсионные соотношения, можно представить эти низкоэнергетические теоремы также в виде правил сумм. Разложим амплитуду пион-нуклонного рассеяния на четную и нечетную части относительно преобразования кроссинг-симметрии (см. разд. 5.3.4 в т. 1):

$$\mathcal{F}_{\pi N}^{jk} = \mathcal{F}^+ \delta^{jk} + i \varepsilon^{jkl} \tau^l \mathcal{F}^- \quad (11.138)$$

и возьмем в качестве переменных  $\nu = p \cdot q$  и переданный импульс  $t$ . Феноменологическое рассмотрение предсказывает следующее поведение этих амплитуд для больших  $\nu$  при  $t=0$ :

$$\mathcal{F}^+ \underset{\nu \rightarrow \infty}{\sim} \nu (\ln \nu)^\alpha, \quad \mathcal{F}^- \underset{\nu \rightarrow \infty}{\sim} \nu^{0,5}.$$

Поэтому можно предположить, что  $\mathcal{F}^-(\nu, 0)/\nu$  удовлетворяет дисперсионному соотношению без вычитаний. Правило сумм, выведенное ниже, позволяет проверить справедливость этого предположения. Выделяя вклад нуклонного промежуточного состояния в полюсе  $2\nu + m_\pi^2 = 0$ , дисперсионное соотношение для рассеяния вперед можно написать в виде

$$\frac{\mathcal{F}^-(\nu, 0)}{\nu} = \frac{m_\pi^2 g_{\pi NN}^2}{\nu^2 - m_\pi^2/4} + \frac{2}{\pi} \int_{m_\pi m_N}^\infty d\nu' \frac{\text{Im} \mathcal{F}^-(\nu')}{\nu'^2 - \nu^2}. \quad (11.139)$$

Используя общую формулу (11.133) и пренебрегая  $m_\pi^2$  по сравнению с  $m_N^2$  в знаменателе борновского члена, получаем на пороге

следующее значение:

$$\frac{1}{f_\pi^2} = \frac{g_{\pi NN}^2}{m_N^2} + \frac{2}{\pi} \int_{m_\pi m_N}^{\infty} \frac{dv}{v^2} \operatorname{Im} \mathcal{F}^-(v) + O\left(\frac{m_\pi^2}{m_N^2}\right). \quad (11.140)$$

Наконец, используя оптическую теорему, выразим  $\operatorname{Im} \mathcal{F}$  через полные сечения и применим соотношение Гольдбергера—Треймана, чтобы заменить  $f_\pi^2$  на  $G_A/G_V$ . Это приводит к правилу сумм Адлера—Вайсбергера:

$$1 - \frac{G_V^2}{G_A^2} = \frac{2m_N^2}{\pi g_{\pi NN}^2} \int_{m_N m_\pi}^{\infty} \frac{dv}{v} [\sigma_{\text{полн}}^{\pi^+ p}(v) - \sigma_{\text{полн}}^{\pi^- p}(v)]. \quad (11.141)$$

Согласие с экспериментом опять очень убедительное. Численная оценка дает для  $G_A/G_V$  значения в пределах 1,16—1,24, что согласуется со значением, полученным из  $\beta$ -распада и равным  $1,22 \pm 0,02$ .

Имеется внушительный список приложений алгебры токов и техники мягких пионов к слабым полулептонным и нелептонным распадам, для ознакомления с которыми мы рекомендуем читателю обратиться к соответствующей литературе.

В заключение заметим, что киральная симметрия является хорошим приближением в физике адронов. Обобщение на  $SU(3) \times SU(3)$  не вполне законно из-за больших масс  $K$ - и  $\eta$ -мезонов. Гелл-Манн, Окс и Реннер дали феноменологическую схему нарушения симметрии  $SU(3) \times SU(3)$ , записав эффективный гамильтониан сильных взаимодействий в виде

$$H = H_0 + H_1. \quad (11.142)$$

Здесь член  $H_1$ , ответственный за нарушение  $SU(3) \times SU(3)$ , должен был бы иметь вид

$$H_1 = \varepsilon_0 u_0 + \varepsilon_8 u_8, \quad (11.143)$$

где  $u_0$  преобразуется как скаляр относительно группы  $SU(3)$ , а  $u_8$  — как восьмая составляющая октета. Феноменологический анализ показывает, что величина  $\varepsilon_8/\varepsilon_0$  равна приблизительно  $-\sqrt{2}$ , а не нулю. Это указывает на то, что лучшим приближением должна быть симметрия  $SU(2) \times SU(2)$ , а не  $SU(3)$ .

## 11.4. $\sigma$ -МОДЕЛЬ

Опишем теперь теоретико-полевую модель, первоначально развитую Гелл-Манном и Леви в 1960 г., как пример реализации киральной симметрии и частичного сохранения аксиального тока. Название  $\sigma$ -модель возникло из-за введенных ими обозначений. Мы воспользуемся этой моделью, чтобы изучить взаимосвязь перенормировки и симметрий, что позволит нам, следуя идеям Ли и Симанзика, изложить технику тождеств Уорда, которая будет полезна при изучении калибровочных теорий.

### 11.4.1. Описание модели

Рассматриваемая  $\sigma$ -модель включает фермионное изодублетное поле  $\psi$  с нулевой голой массой, триплет псевдоскалярных пионов и скалярное поле  $\sigma$ . Соответствующий лагранжиан записывается в виде

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_S + c\sigma,$$

где

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_S = \bar{\psi} [i\partial + g(\sigma + i\pi \cdot \tau \gamma_5)] \psi + \frac{1}{2} [(\partial\pi)^2 + (\partial\sigma)^2] - \\ - \frac{\mu^2}{2} (\sigma^2 + \pi^2) - \frac{\lambda}{4} (\sigma^2 + \pi^2)^2. \end{aligned} \quad (11.144)$$

Его обычно называют лагранжианом линейной  $\sigma$ -модели по причинам, которые мы обсудим ниже.

Часть  $\mathcal{L}_S$  (индекс  $S$  означает симметричный) инвариантна по отношению к преобразованиям киральной группы  $SU(2) \times SU(2)$ , которые вводятся следующим образом. Правая и левая спинорные компоненты  $\psi_R = (1/2)(1 + \gamma_5)\psi$ ,  $\psi_L = (1/2)(1 - \gamma_5)\psi$  преобразуются по представлениям соответственно  $(1/2, 0)$  и  $(0, 1/2)$ , в то время как совокупность полей  $(\sigma, \pi)$  преобразуется по представлению  $(1/2, 1/2)$ .

Чтобы убедиться в этом, запишем лагранжиан взаимодействия в виде

$$\bar{\psi}(\sigma + i\pi \cdot \tau \gamma_5)\psi = \bar{\psi}_L(\sigma + i\pi \cdot \tau)\psi_R + \bar{\psi}_R(\sigma - i\pi \cdot \tau)\psi_L.$$

Если  $(U, V)$  обозначает элемент группы  $SU(2) \times SU(2)$  с независимыми  $U$  и  $V$ , то преобразование  $(\sigma + i\pi \cdot \tau) \rightarrow V(\sigma + i\pi \cdot \tau)U^{-1}$  есть допустимое  $SU(2) \times SU(2)$ -преобразование, приводящее к действительным полям  $\sigma'$  и  $\pi'$ . Следовательно, если мы одновременно произведем вращения изоспиноров  $\psi_R \rightarrow U\psi_R$ ,  $\psi_L \rightarrow V\psi_L$ , то лагранжиан взаимодействия, очевидно, останется инвариантным. Инвариантна и величина  $\sigma^2 + \pi^2$ , пропорциональная детерминанту  $(\sigma + i\pi \cdot \tau)$ . Наконец, кинетический член  $\bar{\psi}i\partial\psi$  равен  $\bar{\psi}_R i\partial\psi_R + \bar{\psi}_L i\partial\psi_L$  и явно инвариантен. Следовательно, мы показали инвариантность лагранжиана  $\mathcal{L}_S$ .

Соответствующие инфинитезимальные преобразования генерируются киральными зарядами  $Q_{R,L}^\alpha$ , где  $\alpha$  пробегает значения от единицы до трех:

$$\begin{aligned} [Q_R^\alpha, \psi_R] &= -\frac{1}{2} \tau^\alpha \psi_R, & [Q_L^\alpha, \psi_L] &= -\frac{1}{2} \tau^\alpha \psi_L, \\ [Q_R^\alpha, \psi_L] &= 0, & [Q_L^\alpha, \psi_R] &= 0, \\ [Q_R^\alpha, \sigma] &= \frac{i}{2} \pi^\alpha, & [Q_L^\alpha, \sigma] &= -\frac{i}{2} \pi^\alpha, \\ [Q_R^\alpha, \pi^\beta] &= -\frac{i}{2} \delta^{\alpha\beta} \sigma + \frac{i}{2} \varepsilon^{\alpha\beta\gamma} \pi^\gamma, & [Q_L^\alpha, \pi^\beta] &= \frac{i}{2} \delta^{\alpha\beta} \sigma + \frac{i}{2} \varepsilon^{\alpha\beta\gamma} \pi^\gamma, \end{aligned} \quad (11.145)$$



В компактной записи преобразования полей  $(\sigma, \pi)$  представляются соотношениями

$$\begin{aligned} [Q_R^\alpha, (\sigma + i\pi \cdot \tau)] &= (\sigma + i\pi \cdot \tau) \frac{\tau^\alpha}{2}, \\ [Q_L^\alpha, (\sigma + i\pi \cdot \tau)] &= -\frac{\tau^\alpha}{2} (\sigma + i\pi \cdot \tau). \end{aligned} \quad (11.146)$$

Такая форма киральных преобразований позволяет особенно легко проверить инвариантность лагранжиана. Алгебра Ли группы  $SU(2) \times SU(2)$  изоморфна алгебре одной из ее фактор-групп  $O(4) = SU(2) \times SU(2)/Z_2$ , и  $(\sigma, \pi)$  преобразуется как вектор по отношению к  $O(4)$ .

В отсутствие нарушающего члена  $\sigma\sigma$  векторный и аксиальный ток сохраняются. Они имеют вид

$$\begin{aligned} V_\mu^\alpha &= \bar{\psi} \gamma_\mu \frac{\tau^\alpha}{2} \psi + \varepsilon^{\alpha\beta\gamma} \pi^\beta \partial_\mu \pi^\gamma, \\ A_\mu^\alpha &= \bar{\psi} \gamma_\mu \gamma_5 \frac{\tau^\alpha}{2} \psi + (\sigma \partial_\mu \pi^\alpha - \pi^\alpha \partial \sigma). \end{aligned} \quad (11.147)$$

Нарушающий член  $\sigma\sigma$  оставляет ненарушенной только диагональную группу  $SU(2)$ . При этом векторный ток остается сохраняющимся, а аксиальный ток, выражение которого не меняется, приобретает ненулевую дивергенцию:

$$\partial^\mu A_\mu^\alpha = -\pi \sigma^\alpha. \quad (11.148)$$

Таким образом, эта модель обладает всеми желаемыми свойствами алгебры токов, а дивергенция аксиального тока оказывается, естественно, пропорциональной полю пионов.

Присутствие линейного нарушающего члена приводит к тому, что в квантовом случае поле  $\sigma$  приобретает отличное от нуля вакуумное среднее  $\langle 0 | \sigma | 0 \rangle = v$ . Поэтому в разложении по теории возмущений следует учитывать флуктуации этого поля относительно значения  $v$ , а не нуля. Для построения корректной квантовой теории необходимо произвести следующий сдвиг поля:

$$\sigma' = \sigma - v$$

и потребовать, чтобы  $\sigma'$  имело нулевое вакуумное среднее. Переписывая полный лагранжиан в терминах поля  $\sigma'$ , получаем

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \bar{\psi} [i\partial + gv + g(\sigma' + i\pi \cdot \tau \gamma_5)] \psi + \frac{1}{2} [(\partial\pi)^2 + (\partial\sigma')^2] - \\ &\quad - \frac{1}{2} (\mu^2 + 3\lambda v^2) \sigma'^2 - \frac{1}{2} (\mu^2 + \lambda v^2) \pi^2 - \lambda v \sigma' (\sigma'^2 + \pi^2) - \\ &\quad - \frac{\lambda}{4} (\pi^2 + \sigma'^2)^2 + \sigma' (c - \mu^2 v - \lambda v^3). \end{aligned} \quad (11.149)$$

Выполненный нами сдвиг имеет три следствия. Во-первых, исчезло вырождение по массе у мезонных полей. Теперь их массы равны

$$m_{\pi}^2 = \mu^2 + \lambda v^2, \quad m_{\sigma}^2 = \mu^2 + 3\lambda v^2. \quad (11.150)$$

Во-вторых, фермион приобрел массу, равную

$$m_N = -gv. \quad (11.151)$$

И в-третьих, мы видим, что появилось новое трилинейное взаимодействие  $\sigma' \pi \pi$ .

Вакуумное среднее  $v$  ограничено непростым условием  $\langle \sigma' \rangle = 0$ . Лучший способ удовлетворить ему — это потребовать, чтобы в тео-



РИС. 11.12. Диаграмма типа головастика.

рии возмущений вклады от диаграмм типа головастик для перехода  $\sigma' \rightarrow$  вакуум обращались в нуль (рис 11.12). В борновском приближении это условие, как видно из формулы (11.149), можно записать в виде

$$c - \mu^2 v - \lambda v^3 = 0.$$

Сравнение соотношений (11.117) и (11.148) приводит к следующей идентификации:

$$f_{\pi} m_{\pi}^2 = -c = -v(\mu^2 + \lambda v^2) = -v m_{\pi}^2.$$

Следовательно,

$$f_{\pi} = -v, \quad m_N = g f_{\pi}, \quad (11.152)$$

что есть не что иное, как соотношение Гольдбергера—Треймана в приближении  $G_A/G_V = 1$ .

При  $c \rightarrow 0$  могут возникнуть две различные ситуации. Одна из возможностей состоит в том, что мы имеем также  $v \rightarrow 0$ ; в этом случае симметрия реализуется в описанной выше нормальной моде с безмассовыми нуклонами. Альтернативная возможность возникает, когда  $\mu^2 < 0$ . В этом пределе имеем:

$$v^2 = -\mu^2/\lambda. \quad (11.153)$$

Эта симметрия реализуется голдстоуновским способом, рассматриваемым нами в разд. 11.2.2, с нулевой массой пиона:

$$m_{\pi}^2 = \mu^2 + \lambda v^2 = 0.$$

В этой фазе  $\sigma$ -модель можно применить для вывода низкоэнергетических теорем для пион-пионного или пион-нуклонного рассеяния.

### 11.4.2. Перенормировка

Лагранжиан  $\mathcal{L}(\sigma', \pi, \psi)$ , полученный выше с помощью сдвига поля  $\sigma$ , или его разновидность в пределе  $c=0$ , соответствующая голдстоуновской моде, приводят к перенормируемой теории, как показывает подсчет степеней расходимости. Все вершины в лагранжиане взаимодействия имеют размерность, которая не больше четырех, то же самое справедливо для любых возможных контрчленов. Остается лишь показать, что форма лагранжиана вместе со всеми контрчленами будет такой же, как в выражении (11.149), отражающем структуру исходного лагранжиана (11.144). В частности, можно поставить вопрос, что произойдет с соотношением ЧСАТ (11.148)? Мы покажем, что все свойства теории сохраняются. Для этого произведем вначале перенормировку в симметричной фазе, а затем докажем, что при этом автоматически охватываются случаи явного ( $c \neq 0$ ) или спонтанного ( $c=0, \mu^2 < 0$ ) нарушения симметрии.

Чтобы упростить рассмотрение, опустим в лагранжиане члены с фермионными полями, поскольку они не вносят каких-либо принципиально новых трудностей. Будем также использовать компактные обозначения, причем мультиплет  $n$  полей, преобразующихся по векторному представлению группы симметрии  $O(n)$ , обозначим через  $\phi$ . В предыдущем примере  $n$  было равно четырем. Напишем лагранжиан в виде

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \mathcal{L}_S + c \cdot \phi, \\ \mathcal{L}_S &= \frac{1}{2} (\partial\phi)^2 - \frac{\mu^2}{2} \phi^2 - \frac{\lambda}{4} (\phi^2)^2. \end{aligned} \quad (11.154)$$

Очевидно, что лагранжиан  $\mathcal{L}_S$  инвариантен при преобразованиях

$$\phi \rightarrow \phi + \delta\phi, \quad \delta\phi_j = \delta\omega_\alpha T_{jk}^\alpha \phi_k, \quad (11.155)$$

где  $T_{jk}^\alpha$  — инфинитезимальные генераторы группы, в данном случае  $n(n-1)/2$  антисимметричных вещественных  $n \times n$ -матриц  $T_{jk}^\alpha + T_{kj}^\alpha = 0$ .

Вначале удобно произвести инвариантную регуляризацию теории. Это можно сделать, например, путем следующей модификации кинетического члена:

$$\int d^4x (\partial\phi)^2 = \int d^4x \phi (-\square) \phi \rightarrow - \int d^4x \phi \square \left( 1 + a \frac{\square}{\Lambda^2} + b \frac{\square^2}{\Lambda^4} + \dots \right) \phi,$$

что приведет к пропагатору с достаточно **гладким** поведением при больших импульсах, чтобы обеспечить сходимость всех интегралов Фейнмана. Далее будем всегда подразумевать, что такая регуляризация выполнена.

Рассмотрим теперь производящий функционал для связанных функций Грина в симметричной теории:

$$e^{G_S(j)} = \int \mathcal{D}(\phi) \exp \left\{ i \int d^4x [\mathcal{L}_S(\phi) + j \cdot \phi] \right\}. \quad (11.156)$$

Вследствие инвариантности (регуляризованного) лагранжиана при преобразованиях (11.155) функция  $G_S(j)$  удовлетворяет соотношению

$$G_S(j) = G_S[j + \delta\omega(Tj)], \quad (11.157a)$$

которое эквивалентно условию

$$\int d^4x j_k(x) T_{ki}^{\alpha} \frac{\delta G_S(j)}{\delta j_i(x)} = 0. \quad (11.157b)$$

Чтобы выявить структуру расходимостей, необходимо иметь аналогичное тождество для неприводимых функций Грина, полученных с помощью преобразования Лежандра:

$$\begin{aligned} i\Gamma_S(\phi) + i \int d^4x j \cdot \phi &= G_S(j), \\ \phi_k(x) &= \frac{\delta G_S(j)}{i\delta j_k(x)}. \end{aligned} \quad (11.158)$$

Поскольку справедливо обратное соотношение

$$j_k(x) = - \frac{\delta \Gamma_S(\phi)}{\delta \phi_k(x)},$$

мы видим, что при преобразованиях (11.155)  $\Gamma_S(\phi)$  обладает свойствами инвариантности, аналогичными (11.157b):

$$\int d^4x \phi_k(x) T_{ki}^{\alpha} \frac{\delta \Gamma_S(\phi)}{\delta \phi_i(x)} = 0. \quad (11.159)$$

Следовательно, если инвариантны условия нормировки, любые контрчлены, необходимые для перенормировки, должны быть инвариантными. Действительно, предположим, что это свойство справедливо в приближении  $L$  петель. Поскольку  $\mathcal{L}_S$  представляет собой наиболее общий инвариантный полином четвертой степени, введение контрчленов может только перенормировать массу  $\mu$  и константу связи  $\lambda$ , а также мультипликативно изменить поле (одновременно все его компоненты) за счет умножения на константу перенормировки волновой функции  $Z$ . Так как  $\mathcal{L}_S + \Delta\mathcal{L}_S^{(L)}$  обладает той же симметрией, что и  $\mathcal{L}_S$ , заключаем, что  $\Gamma$ , вычисленное по этому лагранжиану, в приближении  $L+1$  петли удовлетворяет тому же самому условию (11.159). Его расходящаяся часть  $(L+1)$ -го порядка представляет собой локальный симметричный полином, генерирующий контрчлены в порядке  $L+1$ . Это

индуктивное доказательство мы провели здесь довольно формально. В более сложных случаях параметризация групповых преобразований может изменяться в каждом порядке за счет перенормировки, но приведенные выше рассуждения и тогда остаются полезными.

Рассмотрим теперь полный лагранжиан  $\mathcal{L}$ , включающий линейный нарушающий член  $c \cdot \phi$ . Чтобы можно было правильно использовать теорию возмущений, необходимо произвести сдвиг поля  $\phi$ :

$$\phi = \phi' + v, \quad \langle \phi \rangle = v. \quad (11.160)$$

Опуская штрих, имеем выражение

$$e^{G(j)} = \frac{\int \mathcal{D}(\phi) \exp \left\{ i \int d^4x [\mathcal{L}_S(\phi + v) + \phi \cdot (j + c)] \right\}}{\int \mathcal{D}(\phi) \exp \left\{ i \int d^4x [\mathcal{L}_S(\phi + v) + \phi \cdot c] \right\}}, \quad (11.161)$$

знаменатель в котором гарантирует, что  $G(0) = 0$ . Поскольку  $\phi$  является немой переменной, ее можно сдвинуть без изменения значения функционального интеграла:

$$e^{G(j)} = \frac{\int \mathcal{D}(\phi) \exp \left\{ i \int d^4x [\mathcal{L}_S(\phi) + (\phi - v) \cdot (j + c)] \right\}}{\int \mathcal{D}(\phi) \exp \left\{ i \int d^4x [\mathcal{L}_S(\phi) + (\phi - v) \cdot c] \right\}} \quad (11.162)$$

и записать  $G(j)$  через симметричный функционал

$$G(j) = G_S(j + c) - G_S(c) - i \int d^4x j \cdot v, \quad (11.163)$$

где  $v$  определяется из условия обращения в нуль производной  $G(j)$  по  $j$  при  $j=0$ :

$$v_k = \left. \frac{\delta G_S(j)}{i \delta j_k(x)} \right|_{j(x)=c} \quad (11.164)$$

Аналогично находим

$$\begin{aligned} i\Gamma(\phi) &= G(j) - i \int d^4x j \cdot \phi = \\ &= G_S(j + c) - G_S(c) - i \int d^4x j \cdot (\phi + v), \end{aligned} \quad (11.165)$$

причем

$$\phi_k(x) = \frac{\delta G(j)}{i \delta j_k(x)} = \frac{\delta G_S(j + c)}{i \delta j_k(x)} - v_k. \quad (11.166)$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \Gamma(\phi) &= \Gamma_S(\phi + v) - \Gamma_S(v) + \int d^4x c \cdot \phi(x), \\ c_k &= - \frac{\delta \Gamma_S(v)}{\delta v_k}. \end{aligned} \quad (11.167)$$

Из тождества (11.159), выраженного через  $\Gamma(\phi)$ , получаем

$$\int d^4x [\phi_k(x) + v_k] T_{kl}^z \left[ \frac{\delta\Gamma(\phi)}{\delta\phi_l(x)} - c_l \right] = 0. \quad (11.168)$$

Разберемся более подробно в смысле уравнения (11.168). Например, возьмем производную по  $\phi$  и положим  $\phi = 0$ :

$$T_{kl}^z \left[ \frac{\delta\Gamma(\phi)}{\delta\phi_l(x)} - c_l \right] \Big|_{\phi=0} + v_m T_{ml}^z \int d^4y \frac{\delta^2\Gamma(\phi)}{\delta\phi_k(x)\delta\phi_l(y)} \Big|_{\phi=0} = 0. \quad (11.169)$$

Примем во внимание условие  $\delta\Gamma(\phi)/\delta\phi_l(x)|_{\phi=0} = 0$ , которое следует из определения величины  $v$  и антисимметрии матриц  $T$ . Тогда из (11.169) следует, что обратный пропагатор  $\Gamma_{mk}^{(2)}(p^2)$  при нулевом импульсе удовлетворяет следующему уравнению:

$$T_{ml}^z [c_l \delta_{mk} + v_l \Gamma_{mk}^{(2)}(0)] = 0. \quad (11.170)$$

Отсюда вытекает, что векторы  $c$  и  $v$  коллинеарны, что было уже очевидно из выражений (11.167). Если рассматривать  $c$  как внешнее магнитное поле, то вектор намагниченности  $v$  будет направленным вдоль  $c$ . Масса поперечных (по отношению к  $c$ ) состояний определяется выражениями

$$\Gamma_T^{(2)}(0) = -m_T^2 \quad (11.171)$$

и

$$c = m_T^2 v. \quad (11.172)$$

Величина  $m_T$  в  $\sigma$ -модели играет роль массы пиона и обобщает результат, полученный в разд. 11.4.1. Из (11.167) следует, что перенормировка симметричной теории автоматически решает проблему перенормировки нарушенной теории. Точнее говоря, если

$$\Gamma_{SR}(\phi, \mu^2, \lambda) = \Gamma_{S, \text{per}}(Z^{1/2}\phi, \mu^2 + \delta\mu^2, \lambda_0), \quad (11.173)$$

то соответствующий перенормированный функционал в случае нарушенной симметрии записывается в виде

$$\Gamma_R(\phi, \mu^2, \lambda, c) = \Gamma_{\text{per}}(Z^{1/2}\phi, \mu^2 + \delta\mu^2, \lambda_0, Z^{-1/2}c). \quad (11.174)$$

Здесь оказалось необходимым изменить масштаб нарушающего симметрию параметра  $c$ :

$$c_l = Z^{-1/2} c \quad (11.175)$$

таким образом, чтобы произведение  $c \cdot \phi$  осталось инвариантным:  $c \cdot \phi = c_0 \cdot \phi_0$ . Последнее обеспечивает справедливость соотношений

$$\begin{aligned} v_0 &= Z^{1/2} v, \\ c_k &= - \frac{\delta\Gamma_{SR}(v)}{\delta v_k}, \\ c_{0k} &= - \frac{\delta\Gamma_{S, \text{per}}(v_0)}{\delta v_{0k}}. \end{aligned} \quad (11.176)$$

Соотношения (11.167) предполагают, что в случае нарушенной симметрии амплитуды получаются суммированием вставок диаграмм типа головастик в симметричной теории. Например,  $p$ -точечные функции Грина ( $p > 1$ ) можно записать в виде (рис. 11.13)

$$\Gamma_{k_1, \dots, k_p}^{(p)}(x_1, \dots, x_p) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\nu^n}{n!} \int d^4 y_1 \dots d^4 y_n \Gamma_{S, k_1, \dots, k_p, 1, \dots, 1}^{(n+p)}(x_1, \dots, x_p, y_1, \dots, y_n). \quad (11.177)$$

Для компактности записи мы предположили, что  $\nu$  направлен вдоль первой оси в изотопическом пространстве.

Обсуждение перенормировки можно провести и в том случае, когда нарушающие симметрию члены имеют более сложную структуру и включают опе-

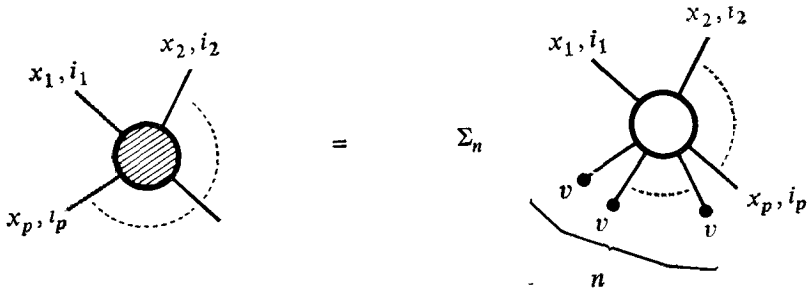


РИС. 11.13. Суммирование диаграмм типа головастик.

раторы более высокой размерности. Урок, который можно извлечь из работы Симанзика, состоит в том, что только нарушающие члены размерности  $\omega < 4$  требуют введения контрчленов, размерность которых ниже или равна  $\omega$ . Например, нарушающий симметрию массовый член ( $\omega=2$ ) не будет влиять на контрчлены степени три или четыре, и они будут оставаться симметричными. Таким образом, при мягком нарушении ( $\omega < 4$ ) остается след исходной симметрии. Жесткое нарушение ( $\omega=4$ ) будет заведомо полностью разрушать симметрию.

Эти свойства ультрафиолетовых расходимостей отражаются в асимптотическом поведении перенормированных функций Грина при больших импульсах, по крайней мере в евклидовой области. Это — другой аспект теоремы Вайнберга (см. разд. 8.3.2). Мягкое нарушение не влияет на асимптотический режим, который остается таким же, как и в симметричной теории.

Читатель может задать вопрос, в чем состоит связь между этим обсуждением и тождествами Уорда

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu} \langle T j_\mu^\alpha(x) A_1(x_1) \dots A_n(x_n) \rangle = \langle T \partial^\mu j_\mu^\alpha(x) A_1(x_1) \dots A_n(x_n) \rangle + \sum_{p=1}^n \langle T A_1(x_1) \dots \delta(x^0 - x_p^0) [j_0^\alpha(x), A_p(x_p)] \dots A_n(x_n) \rangle, \quad (11.178)$$

которые встречаются в квантовой электродинамике или в приложениях алгебры токов. Легко убедиться, что предшествующие соотношения являются соотношениями типа (11.178), проинтегрированными по  $x$ . Поля  $A_p(x_p)$  отождествляются с  $\phi_{k_p}(x_p)$ , а  $j$  представляет собой негерцовский ток  $j_\mu^\alpha(x) =$

$= [\partial_\mu \phi_k(x)] T_{kl}^\alpha [\phi_l(x) + v_l]$  При интегрировании левая часть соотношения (11.178) обращается в нуль, поскольку она представляет собой полную производную, а поверхностные члены в отсутствие безмассовых частиц не появляются. В правой части величина  $\partial^\mu j_\mu^\alpha(x)$  равна  $c_l T_{lm}^\alpha [\phi_m(x) + v_m]$ , а последний член можно переписать в виде вариации поля

$$\delta(x^0 - y^0) [j_0^\alpha(x), \phi_k(y)] = -i \delta^4(x - y) T_{kl}^\alpha [\phi_l(y) + v_l]$$

В результате мы получим тождество (11.168).

Мы рекомендуем читателю вывести соотношение (11.178) из функционального интеграла (11.162) на основе того свойства, что последний не изменяется при замене переменных  $\phi \rightarrow \phi + \delta\phi$ ,  $\delta\phi = (T^\alpha \phi) \delta\omega_\alpha(x)$ , где  $\delta\omega_\alpha(x)$  зависит от  $x$ . Эта зависимость приводит к вариации  $\delta \mathcal{L}_S(\phi) = j \cdot \partial(\delta\omega)$  в соответствии с определением тока Бера производную по  $\omega$ , мы получаем соотношение (11.178). Перенормировку этого тождества можно изучить сначала в симметричной теории, чтобы показать, что токи не перенормируются, или, иными словами, что  $Z_j = 1$ . Более того, на это свойство не влияет введение мягкого нарушения, так что мультипликативная константа перенормировки тока и в этом случае равна единице. При этом возникает вопрос: встретятся ли какие-нибудь новые трудности, если мы попытаемся вывести тождества при наличии в теории нескольких токов?

Теперь мы готовы обсудить интересный случай спонтанного нарушения симметрии. На первый взгляд кажется разумным начать с перенормируемой симметричной теории при  $\mu^2 > 0$ , а затем продолжить ее в область  $\mu^2 < 0$ . Однако при этом мы столкнемся с трудностью, а именно с переходом через сингулярную точку. Физические величины, такие, как  $m_T^2(\mu^2, c)$ , будут неаналитичны по  $\mu^2$  при  $c = 0$ . Чтобы справиться с этой трудностью и обойти сингулярность, введем малый линейный нарушающий член ( $c \neq 0$ ). На рис. 11.14 показано, как можно перейти в голдстоуновскую фазу, продвигаясь по пути  $\alpha\beta\gamma\delta$  посредством последовательного изменения  $c$  и  $\mu^2$ . Из предыдущего рассмотрения следует, что контрчлены симметричной теории (точка  $\alpha$ ) обеспечивают конечность в точке с нарушенной симметрией  $\beta$ . Симметричные массовые контрчлены будут переходить из точки  $\beta$  в точку  $\gamma$ , соответственно изменению величины  $\mu^2$ . Наконец, при обращении  $c$  в нуль (точка  $\delta$ ) перенормированные функции будут удовлетворять тождеству

$$\int d^4x [\phi_k(x) + v_k] T_{kl}^\alpha \frac{\delta \Gamma(\phi)}{\delta \phi_l(x)} = 0, \quad (11.179)$$

а соотношение (11.170) примет вид

$$v_l T_{lm}^\alpha \Gamma_{mk}^{(c)}(0) = 0. \quad (11.180)$$

Это означает, что  $n-1$  поперечных бозонов становятся безмассовыми голдстоуновскими бозонами спонтанно нарушенной симметрии.

Уравнение (11.179) неявно включает в себя все соотношения между функциями Грина в голдстоуновской фазе и приводит к ряду низкоэнергетических теорем.



Тот факт, что линейная  $\sigma$ -модель и ее голдстоуновский предел явным образом реализуют ограничения алгебры токов и ЧСАТ уже на уровне борновских членов, предполагает ее использование в качестве феноменологического лагранжиана, подобно теории Ферми для слабых взаимодействий. На самом деле можно найти

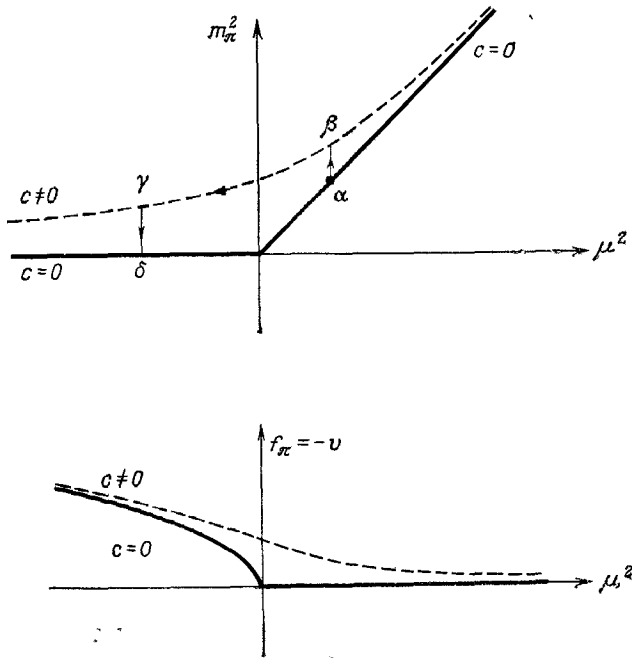


РИС. 11.14. Зависимость  $m_\pi^2$  и  $f_\pi = -v$  от  $\mu^2$  в отсутствие (сплошная линия) и в присутствии (штриховая линия) внешнего поля  $c$ .

целый ряд феноменологических взаимодействий с такими свойствами. Общая идеология этого подхода состоит в том, что в нем не рассматриваются проблемы перенормировок и учитываются соотношения между амплитудами процессов лишь в низшем порядке.

Примером такого рода служит нелинейная  $\sigma$ -модель. Ее название связано с нелинейной реализацией киральной группы на многообразии:

$$\sigma^2(x) + \pi^2(x) = f_\pi^2. \quad (11.181)$$

Выражая  $\sigma$  через пионное поле, соответствующий лагранжиан можно записать в виде

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial\pi)^2 + \frac{1}{2} \frac{(\pi \cdot \partial\pi)^2}{\sqrt{f_\pi^2 - \pi^2}}. \quad (11.182)$$

Отсюда мы видим, что на классическом уровне киральная симметрия реализуется в голдстоуновской фазе. Составное поле  $\sigma = \sqrt{f_\pi^2 - \pi^2}$  отлично от нуля, а пион является безмассовым.

Хотя в 4-мерном пространстве-времени эта теория не является перенормируемой в соответствии с обычными критериями, она вызывает большой интерес благодаря своим приложениям к статистической физике, в которой она описывает непрерывный предел классической модели Гейзенберга. Кроме того, теория, в которой используется лагранжиан типа (11.182), перенормируема в двумерном пространстве, где скалярное поле безразмерно и, как можно показать, тождества Уорда ограничивают структуру контрчленов. Таким образом, эта теория характеризуется свойствами, присущими современным теориям сильных взаимодействий (квантовой хромодинамике).

## 11.5. АНОМАЛИИ

До сих пор мы имели дело лишь с такими примерами, в которых перенормировка не вступала в конфликт с симметриями, наблюдаемыми на классическом уровне. В этом разделе рассматривается представляющая большой интерес обратная ситуация, когда после перенормировки теория приобретает новые свойства. В гл. 13 аналогичное явление встретится при изучении масштабной инвариантности. Чтобы ввести в предмет, разберем один кажущийся парадокс, возникающий в применениях алгебры токов.

### 11.5.1. Распад $\pi^0 \rightarrow 2\gamma$ и алгебра токов

При перечислении в разд. 11.3 успехов алгебры токов мы намеренно не упомянули о том, что на первый взгляд кажется ее

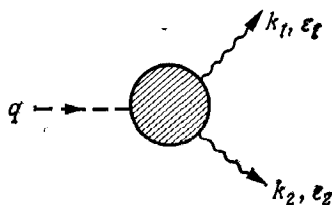


РИС. 11.15. Распад  $\pi^0 \rightarrow 2\gamma$ .

неудачей: о ее применении к описанию распада  $\pi^0$  на два фотона (рис. 11.15). Изучим теперь этот процесс. Амплитуду его можно написать в виде

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}(q^2) \Big|_{q^2=m_\pi^2} = \lim_{q^2 \rightarrow m_\pi^2} \varepsilon_1^\mu \varepsilon_2^\nu T_{\mu\nu}(q), \quad (11.183)$$

$$\mathcal{F}(q^2) = (q^2 - m_\pi^2) e^2 \varepsilon_1^\mu \varepsilon_2^\nu \int d^4x d^4y \langle 0 | T j_\mu(x) j_\nu(y) \pi(0) | 0 \rangle e^{i(k_1 \cdot x + k_2 \cdot y)}. \quad (11.184)$$

Мы явно выделили хронологическое произведение двух электромагнитных токов, связанных с двумя фотонами ( $k_1, \varepsilon_1$  и  $k_2, \varepsilon_2$ ) и пионным полем  $\pi(x)$ . Здесь  $q = k_1 + k_2$  и фотоны находятся на массовой поверхности  $k_1^2 = k_2^2 = 0$ . Пользуясь соотношением ЧСАТ (11.117), заменим нейтральное пионное поле дивергенцией аксиального тока, опустив изотопический индекс 3. Тогда

$$\mathcal{F}(q^2) = \frac{m_\pi^2 - q^2}{f_\pi m_\pi^2} \varepsilon_1^\mu \varepsilon_2^\nu q^\rho T_{\mu\nu\rho}, \quad (11.185)$$

причем

$$T_{\mu\nu\rho} = -ie^2 \int d^4x d^4y e^{i(k_1 \cdot x + k_2 \cdot y)} \langle 0 | T j_\mu(x) j_\nu(y) A_\rho(0) | 0 \rangle. \quad (11.186)$$

При вынесении производной аксиального тока из-под знака хронологического упорядочения мы воспользовались тем фактом, что коммутатор  $\delta(x^0 - y^0) [j_\mu(x), A_\rho(y)]$  обращается в нуль для набора квантовых чисел, входящих в (11.186). Напишем теперь разложение тензора  $T_{\mu\nu\rho}(k_1, k_2)$  в самом общем виде. При этом надо учесть отрицательную четность аксиального тока, симметрию относительно комбинированной замены  $(k_1, \mu) \leftrightarrow (k_2, \nu)$ , отражающую тот факт, что фотоны подчиняются статистике Бозе, и, наконец, поперечность по отношению к векторам  $k_1^\mu$  и  $k_2^\nu$ , которая следует из сохранения электромагнитного тока:

$$k_1^\mu T_{\mu\nu\rho} = k_2^\nu T_{\mu\nu\rho} = 0. \quad (11.187)$$

Учитывая также, что  $k_1^2 = k_2^2 = 0$ , получаем

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu\rho}(k_1, k_2) = & \varepsilon_{\mu\nu\sigma\tau} k_1^\sigma k_2^\tau q_\rho T_1(q^2) + (\varepsilon_{\mu\rho\sigma\tau} k_{2\nu} - \varepsilon_{\nu\rho\sigma\tau} k_{1\mu}) k_1^\sigma k_2^\tau T_2(q^2) + \\ & + [(\varepsilon_{\mu\rho\sigma\tau} k_{1\nu} - \varepsilon_{\nu\rho\sigma\tau} k_{2\mu}) k_1^\sigma k_2^\tau - \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} (k_1^\sigma - k_2^\sigma) k_1 \cdot k_2] \times \\ & \times T_3(q^2). \end{aligned} \quad (11.188)$$

Следовательно,

$$q^\rho T_{\mu\nu\rho} = \varepsilon_{\mu\nu\sigma\tau} k_1^\sigma k_2^\tau q^2 [T_1(q^2) + T_3(q^2)]. \quad (11.189)$$

Вычислим эти амплитуды с точностью до ведущего порядка по электромагнетизму. Поскольку при этом не имеется каких-либо сильно взаимодействующих частиц с нулевой массой (массу  $m_\pi^2$  считаем отличной от нуля), из (11.189) следует

$$\mathcal{F}(0) = 0. \quad (11.190)$$

В рамках теории мягких пионов это означает, что величина  $\mathcal{F}(m_\pi^2)$  подавляется:

$$\mathcal{F}(m_\pi^2) \approx 0. \quad (11.191)$$

Таким образом, в соответствии с наблюдением Сазерланда и Вельтмана доминирующая компонента амплитуды распада  $\pi^0 \rightarrow 2\gamma$

оказывается запрещенной. К счастью, из-за эффектов перенормировки это заключение является некорректным. Подчеркнем, что при этом не ставится под сомнение справедливость экстраполяции от (11.190) к (11.191), а лишь предполагается, что соотношения (11.189) и (11.190) должны быть изменены. Решение проблемы основано на вычислениях по теории возмущений в рамках данной модели. Интерпретация полученного результата будет состоять в том, что в присутствии электромагнитного взаимодействия соотношение ЧСАТ (11.117) требует модификации.

### 11.5.2. Аксиальная аномалия в $\sigma$ -модели

Для конкретности воспользуемся  $\sigma$ -моделью с фермионами. Для простоты рассмотрим лишь ферми-поле с зарядом  $+1$  (протон) и два мезона  $\pi^0$  и  $\sigma$ . Согласно разд. 11.4.1, лагранжиан имеет вид

$$\mathcal{L} = \bar{\Psi} [(i\partial - m + g(\sigma + i\pi\gamma_5)] \Psi + \frac{1}{2} (\partial\pi)^2 + \frac{1}{2} (\partial\sigma)^2 - \frac{m_\pi^2}{2} \pi^2 - \frac{m_\sigma^2}{2} \sigma^2 - \lambda\sigma(\sigma^2 + \pi^2) - \frac{\lambda}{4} (\pi^2 + \sigma^2)^2. \quad (11.192)$$

В низшем порядке справедливы соотношения

$$m = -gv, \quad m_\sigma^2 - m_\pi^2 = 2\lambda v^2. \quad (11.193)$$

Протон является единственной заряженной частицей, дающей вклад в ток:

$$j_\mu = \bar{\Psi} \gamma_\mu \Psi.$$

В этой модели аксиальный ток

$$A_\mu = \frac{1}{2} \bar{\Psi} \gamma_\mu \gamma_5 \Psi + (\sigma \partial_\mu \pi - \pi \partial_\mu \sigma) + v \partial_\mu \pi \quad (11.194)$$

имеет дивергенцию, которая формально равна

$$\partial^\mu A_\mu = m_\pi^2 f_\pi \pi, \quad f_\pi = -v. \quad (11.195)$$

Амплитуда  $\pi^0$ -распада, вычисленная в низшем однопетлевом порядке, дается выражением (рис 11.16)

$$T_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}^{(1)}(k_1, k_2) + T_{\nu\mu}^{(1)}(k_2, k_1), \quad (11.196)$$

$$T_{\mu\nu}^{(1)}(k_1, k_2) = g e^2 \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{\text{Sp} [(q + p - k_1 + m) \gamma_\mu (q + p + m) \gamma_5 (p + m) \gamma_\nu]}{[(q + p - k_1)^2 - m^2] [(q + p)^2 - m^2] (p^2 - m^2)}.$$

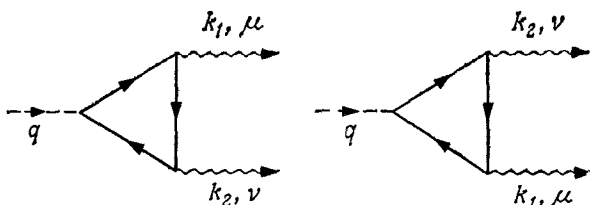


РИС. 11 16. Однопетлевые диаграммы для распада  $\pi^0$ .

В числителе след равен  $4im\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}k_1^\rho k_2^\sigma$  (причем  $\varepsilon_{0123} = -1$ ), и оставшийся интеграл является сходящимся:

$$\begin{aligned}
 T_{\mu\nu}^{(1)}(k_1, k_2) &= 4ige^2m\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}k_1^\rho k_2^\sigma \times \\
 &\times \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{1}{[(q+p-k_1)^2 - m^2][(p+q)^2 - m^2](p^2 - m^2)} = \\
 &= 4ge^2m\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}k_1^\rho k_2^\sigma \frac{1}{(4\pi)^2} \times \\
 &\times \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \frac{1}{m^2 - xk_1^2 - yk_2^2 + (xk_1 - yk_2)^2}. \quad (11.197)
 \end{aligned}$$

На массовой поверхности мы имеем  $k_1^2 = k_2^2 = 0$ ,  $2k_1 \cdot k_2 = q^2$ , и вклад двух диаграмм имеет вид

$$\mathcal{F}(q^2) = \frac{e^2 g m}{2\pi^2} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \varepsilon_1^\mu \varepsilon_2^\nu k_1^\rho k_2^\sigma \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \frac{1}{m^2 - xyq^2}. \quad (11.198)$$

Это находится в противоречии с соотношением (11.190), поскольку  $\mathcal{F}(0)$  не равно нулю, а представляет собой в действительности величину

$$\mathcal{F}(0) = \frac{e^2 g}{4\pi^2 m} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \varepsilon_1^\mu \varepsilon_2^\nu k_1^\rho k_2^\sigma. \quad (11.199)$$

Заметим, что (11.198) предполагает гладкое поведение  $\mathcal{F}(q^2)$  в окрестности  $q^2 = 0$ , причем

$$\mathcal{F}(q^2) = \left(1 + \frac{q^2}{12m^2} + \dots\right) \mathcal{F}(0). \quad (11.200)$$

Используя соотношение  $g/m = 1/f_\pi$ , где  $f_\pi \sim 93$  МэВ, находим следующее численное значение ширины, обусловленное главным вкладом  $\mathcal{F}(0)$ :

$$\begin{aligned}
 \Gamma &= \frac{1}{2m_\pi} \sum_{\varepsilon_1, \varepsilon_2} \int \frac{d^3k_1 d^3k_2}{4(2\pi)^6 \omega_1 \omega_2} |\mathcal{F}|^2 (2\pi)^4 \delta(q - k_1 - k_2) = \\
 &= \frac{\alpha^2 m_\pi^3}{64\pi^3 f_\pi^2} = 7,63 \text{ эВ}. \quad (11.201)
 \end{aligned}$$

Здесь при интегрировании по телесному углу  $2\pi$  мы учли, что фотоны подчиняются статистике Бозе. Экспериментальная ширина

$$\Gamma_{\text{эксп}} = (7,37 \pm 1,5) \text{ эВ} \quad (11.202)$$

находится в разумном согласии с вышеприведенной оценкой. В действительности еще в 1949 г. Стейнбергер пришел к аналогичной оценке без учета всех тонкостей алгебры токов.

В кварковой модели электромагнитный ток связан с дробно заряженными фермионами (с зарядами  $Q_i$ ). Аксиальный ток дается выражением

$$A_{\mu}^3 = \sum_i \bar{\psi}_i \gamma_{\mu} \gamma_5 \frac{\tau_3^i}{2} \psi_i + \text{Мезонные вклады.}$$

Таким образом, амплитуду  $\mathcal{F}$  следовало бы умножить на величину  $x = \sum_i \tau_3^i Q_i^2$ .

Кварковый триплет ( $u, d, s$ ) имеет заряды  $Q_i = (2/3, 1/3, -1/3)$ , а соответствующие значения  $\tau_3^i$  равны  $(1, -1, 0)$ , поэтому  $x = 1/3$ . Согласие с экспериментом становится неудовлетворительным, если только кварки не являются трижды вырожденными по скрытому квантовому числу, называемому цветом. В действительности наряду с вопросом о статистике кварков в барионных состояниях это наблюдение является одним из наиболее прямых аргументов в пользу введения такого вырождения.

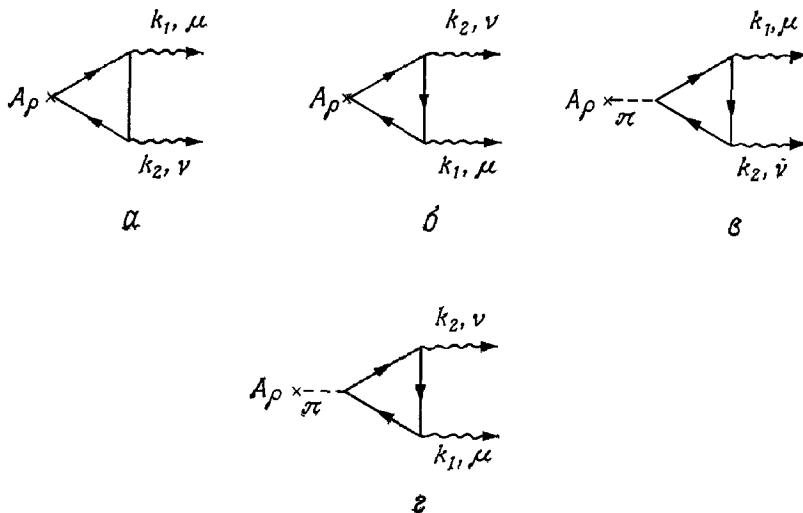


РИС 11.17. Диаграммы, соответствующие амплитуде  $T_{\mu\nu\rho}$ , в низшем порядке.

Попробуем теперь понять, в чем состоит некорректность вывода Вельтмана—Сазерланда. Для этой цели вычислим в рамках обсуждаемой модели амплитуду  $T_{\mu\nu\rho}$ , определяемую выражением (11.186). Из (11.194) видно, что аксиальный ток связан либо с пионом при помощи множителя  $i q_{\rho} \nu = -i q_{\rho} \dagger \pi$ , либо непосред-

ственно с протоном. Следовательно, в низшем порядке

$$T_{\mu\nu\rho} = \hat{T}_{\mu\nu\rho} + f_{\pi} q_{\rho} \frac{1}{m_{\pi}^2 - q^2} T_{\mu\nu}. \quad (11.203)$$

В  $\hat{T}_{\mu\nu\rho}$  дают вклад первые две диаграммы, представленные на рис. 11.17; последние две диаграммы включают пионную амплитуду  $T_{\mu\nu}$ . Вызывающее наибольшие сомнения тождество (11.185) принимает вид

$$\frac{m_{\pi}^2 - q^2}{f_{\pi} m_{\pi}^2} q^{\rho} T_{\mu\nu\rho} = T_{\mu\nu}, \quad (11.204)$$

или в другой записи:

$$q^{\rho} \hat{T}_{\mu\nu\rho} = f_{\pi} T_{\mu\nu} = \frac{m}{g} T_{\mu\nu}. \quad (11.205)$$

Разумеется, желательно обеспечить сохранение электромагнитного тока (11.187) и после перенормировки. Вычислим вклад двух первых диаграмм, приведенных на рис. 11.17. Учитывая коэффициент 1/2, который надо ввести в соответствии с определением (11.194), находим

$$\begin{aligned} \hat{T}_{\mu\nu\rho}^{(1)}(k_1, k_2) &= \hat{T}_{\nu\mu\rho}^{(2)}(k_2, k_1) = \\ &= i \frac{e^2}{2} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \text{Sp} \left( \frac{i}{\not{p} - m} \gamma_{\mu} \frac{i}{\not{p} + \not{k}_1 - m} \gamma_{\rho} \gamma_5 \frac{i}{\not{p} - \not{k}_2 - m} \gamma_{\nu} \right). \end{aligned} \quad (11.206)$$

Сворачивая эту амплитуду с  $q^{\rho}$ , получаем

$$\begin{aligned} q^{\rho} \hat{T}_{\mu\nu\rho}^{(1)}(k_1, k_2) &= \\ &= \frac{e^2}{2} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{\text{Sp} [(\not{p} + m) \gamma_{\mu} (\not{p} + \not{k}_1 + m) (\not{k}_1 + \not{k}_2) \gamma_5 (\not{p} - \not{k}_2 + m) \gamma_{\nu}]}{(p^2 - m^2) [(p + k_1)^2 - m^2] [(p - k_2)^2 - m^2]}. \end{aligned} \quad (11.207)$$

Центральный член в следе можно перегруппировать следующим образом:

$$\begin{aligned} &(\not{p} + \not{k}_1 + m) (\not{k}_1 + \not{k}_2) \gamma_5 (\not{p} - \not{k}_2 + m) = \\ &= (\not{p} + \not{k}_1 + m) (\not{p} + \not{k}_1 - m + \not{k}_2 + m - \not{p}) \gamma_5 (\not{p} - \not{k}_2 + m) = \\ &= 2m (\not{p} + \not{k}_1 + m) \gamma_5 (\not{p} - \not{k}_2 + m) + [(\not{p} + \not{k}_1)^2 - m^2] \gamma_5 (\not{p} - \not{k}_2 + m) + \\ &\quad + (\not{p} + \not{k}_1 + m) \gamma_5 [(\not{p} - \not{k}_2)^2 - m^2]. \end{aligned}$$

Таким образом, имеем

$$\begin{aligned} q^{\rho} \hat{T}_{\mu\nu\rho}^{(1)}(k_1, k_2) &= \frac{m}{g} T_{\mu\nu}^{(1)}(k_1, k_2) + \frac{e^2}{2} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \times \\ &\times \text{Sp} \left\{ \frac{(\not{p} + m) \gamma_{\mu} \gamma_5 (\not{p} - \not{k}_2 + m) \gamma_{\nu}}{(p^2 - m^2) [(p - k_2)^2 - m^2]} \frac{(\not{p} + \not{k}_1 + m) \gamma_{\nu} \gamma_5 (\not{p} + m) \gamma_{\mu}}{[(p + k_1)^2 - m^2] (p^2 - m^2)} \right\}. \end{aligned} \quad (11.208)$$

Здесь первый член есть не что иное, как амплитуда  $T_{\mu\nu}^{(1)}(k_1, k_2)$  в  $\pi^0$ -распаде [см. выражение (11.196)]. Следовательно, справед-

ливость уравнения (11.205) зависит от того, обратится ли в нуль второй член. На первый взгляд можно было бы думать, что каждый член, дающий вклад в этот интеграл, равен нулю, будучи лоренцевым псевдотензором, зависящим от одного 4-векторного аргумента. Кроме того, можно было бы привести соображение, что сдвиг переменной интегрирования  $p \rightarrow p + k_2$  показывает сокращение первого члена в подынтегральном выражении для величины  $q^0 \hat{T}_{\mu\nu\rho}^{(1)}$  со вторым членом в подынтегральном выражении для  $q^0 \hat{T}_{\mu\nu\rho}^{(2)}$ . Однако оба этих соображения являются ошибочными, поскольку рассматриваемые интегралы линейно расходятся. Для прояснения ситуации следует прибегнуть к надежному методу, а именно к калибровочно-инвариантной регуляризации Паули — Вилларса. Метод размерной регуляризации здесь не подходит из-за отсутствия величин  $\gamma_5$  и  $\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$ , которые хорошо определены лишь для четырехмерного пространства-времени.

Введение регуляризующего поля с большой массой ( $M$ ) изменяет (11.208) следующим образом:

$$q^0 [\hat{T}_{\mu\nu\rho}^{(1)}(m) - \hat{T}_{\mu\nu\rho}^{(1)}(M)] = \left[ \frac{m}{g} T_{\mu\nu}^{(1)}(m) - \frac{M}{g} T_{\mu\nu}^{(1)}(M) \right], \quad (11.209)$$

поскольку приведенные выше аргументы уже справедливы для регуляризованного конечного интеграла в (11.208). Используя результаты предыдущих вычислений, нетрудно найти, что

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \frac{M}{g} T_{\mu\nu}^{(1)}(M) = \frac{\alpha}{2\pi} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} k_1^\rho k_2^\sigma. \quad (11.210)$$

В результате регуляризации как раз и обнаруживается этот конечный член, представляющий собой вклад второго интеграла в (11.208). Наконец, добавляя вклад диаграмм, изображенных на рис. 11.17, *a* и *б*, получаем выражение

$$q^0 \hat{T}_{\mu\nu\rho} = \frac{m}{g} T_{\mu\nu} - \frac{\alpha}{\pi} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} k_1^\rho k_2^\sigma, \quad (11.211)$$

где аномальный член в правой части исправляет (11.205). Следует заметить, что тождества (11.187) выполняются по-прежнему.

Может возникнуть вопрос: нельзя ли в (11.211) устранить этот новый член, используя какую-либо другую схему вычитаний? Ведь даже, хотя выражение  $q^0 T_{\mu\nu\rho}$  является конечным,  $\hat{T}_{\mu\nu\rho}$  имеет линейную расходимость. Незвестный вычитательный член  $\Delta \hat{T}_{\mu\nu\rho}$  должен быть линейным полиномом по  $k_1$ ,  $k_2$  и преобразовываться как лоренцев псевдотензор, симметричный относительно замены  $(k_1, \mu) \leftrightarrow (k_2, \nu)$ . Единственным кандидатом на эту роль является выражение

$$\Delta \hat{T}_{\mu\nu\rho} = \text{const} \cdot \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} (k_1 - k_2)^\sigma, \quad (11.212)$$



но оно не удовлетворяет условию (11.187). Для аксиального тока можно написать тождество Уорда без аномалий в виде (11.205), но ценой потери обычной калибровочной инвариантности.

Аномалия, которая появилась в (11.211), оказывается весьма кстати, поскольку она приводит к удовлетворительной оценке времени жизни  $\pi^0$ . Вместо того чтобы пытаться любой ценой сохранить соотношение ЧСАТ, плодотворнее исправить его в первом порядке по  $\alpha$ , записав в виде

$$\partial^\mu A_\mu^j = f_\pi m_\pi^2 \pi^0 - \frac{\alpha}{8\pi} \varepsilon_{\mu\nu\sigma\tau} F^{\mu\nu} F^{\sigma\tau}, \quad (11.213)$$

где  $F_{\mu\nu}$  — тензор электромагнитного поля. Эта поправка оставляет в силе все предыдущие результаты, полученные с применением алгебры токов. Поскольку в регуляризованной или перенормированной теории невозможно сохранить все тождества Уорда, справедливые в классическом приближении, название «аномальные тождества Уорда» представляется оправданным. Перейдем теперь к изучению некоторых свойств и следствий этих тождеств.

### 11.5.3. Общие свойства

Явление, проанализированное в рамках  $\sigma$ -модели, оказывается общим для всех теорий, в которых фермионы связаны с аксиальными токами. Оно возникает, когда мы пытаемся удовлетворить одновременно аксиальному и векторному тождествам Уорда. Это явление открыл Швингер в 1951 г., Адлер изучил его подробно в электродинамике, а Белл и Джекив — в  $\sigma$ -модели.

Проверим в электродинамике соотношение

$$\partial_\mu j_5^\mu = \partial_\mu (\bar{\psi} \gamma^\mu \gamma_5 \psi) = 2m \bar{i} \psi \gamma_5 \psi = 2m j_5, \quad (11.214)$$

утверждающее, что в присутствии фермионного массового члена сохранение аксиального тока невозможно. В соотношении (11.214) аксиальный ток отличается множителем 2 от тока, рассмотренного выше. Следствием уравнения (11.214) является соотношение между функциями Грина (рис. 11.18), аналогичное (11.205):

$$\begin{aligned} q^\rho R_{\mu\nu\rho} &= ie^2 q^\rho \int d^4x d^4y e^{i(k_1 \cdot x + k_2 \cdot y)} \langle T j_\mu(x) j_\nu(y) j_5^\rho(0) \rangle = \\ &= 2me^2 \int d^4x d^4y e^{i(k_1 \cdot x + k_2 \cdot y)} \langle T j_\mu(x) j_\nu(y) j_5(0) \rangle = \\ &= 2m R_{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (11.215)$$

Определим для аксиального тока и псевдоскалярной плотности сильносвязанные функции

$$\begin{aligned} \Gamma_{\pi\mu}(p', p) &= \int d^4x d^4y e^{i(p' \cdot x - p \cdot x)} \langle T j_{5\mu}(0) \psi(y) \bar{\psi}(x) \rangle_T, \\ \Gamma_5(p', p) &= \int d^4x d^4y e^{i(p' \cdot y - p \cdot x)} \langle T j_5(0) \psi(y) \bar{\psi}(x) \rangle_T, \end{aligned} \quad (11.216)$$

где нижний индекс  $T$  означает, что фермионные пропагаторы усечены. Из (11.214) имеем

$$(p'_\mu - p_\mu) \Gamma_5^\mu(p', p) = -2im\Gamma_5(p', p) + \gamma_5 S^{-1}(p) + S^{-1}(p') \gamma_5. \quad (11.217)$$

Согласно нашим обычным обозначениям,  $iS(p)$  представляет собой полный фермионный пропагатор, такой, что в низшем порядке

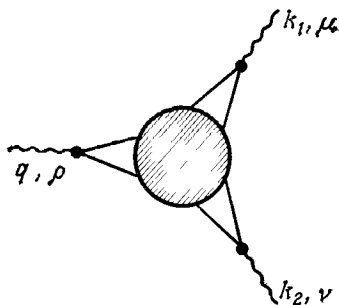


РИС. 11.18. Функция Грина с двумя векторными и одним аксиальным токами.

$S^{-1}(p) = \not{p} - m$ . Уравнение (11.217) является аналогом тождества Уорда для вершинной функции (8.87):

$$(p'_\mu - p_\mu) \Lambda^\mu(p', p) = S^{-1}(p') - S^{-1}(p). \quad (11.218)$$

Уравнение (11.217) могло бы означать общую мультипликативную перенормировку величин  $m j_5$  и  $j_5^\mu$  с постоянной перенормировки  $Z_5 = 1$ .

В действительности тождество (11.214) и его следствия (11.215) и (11.217) невозможно проверить по теории возмущений. Как мы видели на примере  $\sigma$ -модели, они изменяются из-за аномалий, вносимых треугольными диаграммами. Вычисления, проведенные в предыдущем разделе, нетрудно обобщить на рассматриваемый случай, причем результат запишется в виде

$$q^\sigma R_{\mu\nu\rho} = 2mR_{\mu\nu} + \frac{2}{\pi} \alpha \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} k_1^\rho k_2^\sigma, \quad (11.219)$$

что является подправленным вариантом соотношения (11.215) в приближении одной петли. В операторной форме аномалия имеет вид

$$\partial_\mu j_5^\mu(x) = 2m j_5(x) - \frac{\alpha}{4\pi} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} F^{\mu\nu} F^{\rho\sigma}. \quad (11.220)$$

Аналогичным образом изменяется и соотношение (11.217):

$$(p'_\mu - p_\mu) \Gamma_5^\mu(p', p) = -2im\Gamma_5(p', p) + \gamma_5 S^{-1}(p) + S^{-1}(p') \gamma_5 + i \frac{\alpha}{4\pi} F(p', p), \quad (11.221)$$

$$F(p', p) = \int d^4x d^4x' e^{i(p' \cdot y - p \cdot x)} \langle T \psi(y) \bar{\psi}(x) \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} F^{\mu\nu} F^{\rho\sigma}(0) \rangle_T.$$

Из равенств (11.221) при нулевом импульсе можно найти, что для  $2mj_5$  константа перенормировки по-прежнему равна единице. Однако это уже не справедливо по отношению к  $j_5^\mu$ . Нарушение киральной инвариантности теперь происходит за счет компоненты  $\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} F^{\mu\nu} F^{\rho\sigma}$ , т. е. является жестким.

В том же духе можно рассмотреть структуру аномалий в перенормируемой теории, когда фермионные поля переносят индексы внутренней симметрии и связаны с векторными, аксиальными, скалярными и псевдоскалярными полями. Общий вывод состоит в том, что к аномалиям приводят только те диаграммы, в кото-

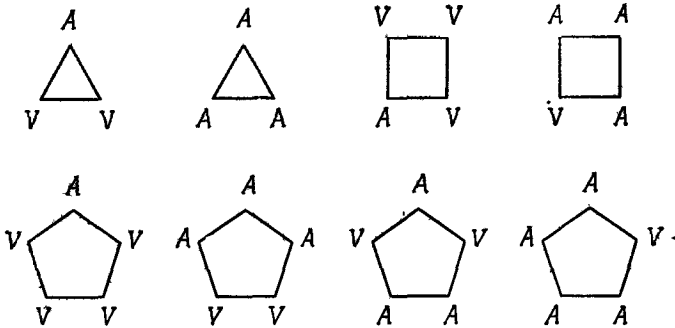


РИС. 11.19. Однопетлевые фермионные диаграммы, приводящие к аномалиям в аксиальных тождествах Уорда.

рых к фермионным петлям присоединены векторные и аксиальные токи, причем число аксиальных токов нечетно. Более того, любая петля, содержащая скалярную или псевдоскалярную связь, может быть исключена с помощью подходящего вычитания. Если потребовать сохранения нормальных тождеств Уорда для векторных токов, то диаграммы на рис. 11.19 приведут к аномалиям для аксиальных токов. Как и в случае «треугольной» диаграммы, при проверке тождества  $\partial_\mu j_5^\mu = 2mj_5$  мы будем иметь дело с расходящимися интегралами в диаграммах вплоть до пятиугольной.

Пусть  $\mathcal{V}_\mu$  и  $\mathcal{A}_\mu$  — соответственно векторное и аксиальное поля, рассматриваемые как матрицы, действующие на индексы внутренней симметрии фермионов таким образом, что лагранжиан взаимодействия имеет вид

$$\mathcal{L}_{\text{вз}} = \bar{\psi} \gamma^\mu (\mathcal{V}_\mu + \gamma_5 \mathcal{A}_\mu) \psi. \tag{11.222}$$

Соответствующие токи

$$J^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathcal{V}_\mu^T}, \quad J_5^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathcal{A}_\mu^T} \tag{11.223}$$

также являются матрицами по индексам внутренней симметрии. Предположим, что векторные тождества Уорда записываются

в обычном виде

$$\partial_\mu J^\mu(x) = j(x). \quad (11.224)$$

В то же время для аксиального тока имеют место аномальные соотношения

$$\begin{aligned} \partial_\mu J_5^\mu(x) = j_5(x) - \frac{1}{4\pi^2} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} & \left( \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^V F_{\rho\sigma}^V + \frac{1}{12} F_{\mu\nu}^A F_{\rho\sigma}^A + \frac{2}{3} i A_\mu A_\nu F_{\rho\sigma}^V + \right. \\ & \left. + \frac{2}{3} i F_{\mu\nu}^V A_\rho A_\sigma + \frac{2}{3} i A_\mu F_{\nu\rho}^V A_\sigma - \frac{8}{3} A_\mu A_\nu A_\rho A_\sigma \right). \end{aligned} \quad (11.225)$$

В этих выражениях через  $j$  и  $j_5$  обозначены наивные выражения для дивергенций токов, а тензоры полей определены следующим образом:

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu}^V &= \partial_\mu \mathcal{V}_\nu - \partial_\nu \mathcal{V}_\mu - i[\mathcal{V}_\mu, \mathcal{V}_\nu] - i[A_\mu, A_\nu], \\ F_{\mu\nu}^A &= \partial_\mu \mathcal{A}_\nu - \partial_\nu \mathcal{A}_\mu - i[A_\mu, \mathcal{V}_\nu] - i[\mathcal{V}_\mu, A_\nu]. \end{aligned} \quad (11.226)$$

Если соответствующие операторы перенормировать надлежащим образом, то ни структура, ни коэффициент аномальных членов в таких выражениях, как (11.213), (11.221) или (11.225), не будут изменяться за счет поправок высших порядков. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим в качестве примера электродинамику. Будем исходить из того, что существует регуляризация фотонного пропагатора, например, в виде  $-1/4 F_{\mu\nu}(1 + \square^2/\Lambda^4) F^{\mu\nu}$ , такая, что все интересующие нас диаграммы, за исключением однопетлевых, оказываются сходящимися. В самом деле, новый подсчет степеней расходимости для диаграммы, имеющей  $E_F$  внешних фермионных линий,  $E_A$  фотонных линий или вставок токов и  $L$  петель, дает  $\omega = 8 - (l/2) E_F - E_A - 4L$ . Следовательно, амплитуды с  $L \geq 2$  будут сходиться. Естественно, что стандартная программа перенормировки квантовой электродинамики устраняет все внутренние расходимости. Эта регуляризация калибровочно-инвариантна и не меняет структуры аксиального тока. Таким образом, аномалии возникают единственно из-за однопетлевых поддиаграмм, которые только что рассматривались.

Заметим, что можно определить другой аксиальный ток, которому соответствует обычное тождество Уорда, но который нарушает калибровочную инвариантность. Например, в электродинамике такой ток имеет вид

$$\hat{j}_{\mu 5} = j_{\mu 5} + \frac{\alpha}{2\pi} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} A^\nu F^{\rho\sigma} \quad (11.227)$$

и удовлетворяет условию

$$\partial_\mu \hat{j}_5^\mu = 2m j_5. \quad (11.228)$$

Эти различные возможности можно интерпретировать по-разному. Можно было бы построить оператор  $\hat{j}_5^\mu$  непосредственно из полей  $\psi$  и  $\bar{\psi}$  в присут-

ствии внешнего потенциала. Поскольку комбинация типа  $\psi(x)\bar{\psi}(y)$  сингулярна в пределе  $x \rightarrow y$ , предположим, что аргументы в ней отличаются на бесконечно малый пространственно-подобный интервал  $\varepsilon$ ; при этом получим

$$j_5^{(1)\mu}(x, \varepsilon) = \bar{\psi}(x + \varepsilon) \gamma^\mu \gamma_5 \psi(x). \quad (11.229)$$

Этот новый оператор не является калибровочно-инвариантным. Согласно предложению Швингера, поправим его следующим образом. Умножим (11.229) на фазовый множитель, включающий интеграл от векторного потенциала по пространственно-подобному пути от  $x$  до  $x + \varepsilon$ , вдоль которого различные полевые компоненты коммутируют:

$$j_5^\mu(x, \varepsilon) = \bar{\psi}(x + \varepsilon) \gamma^\mu \gamma_5 \psi(x) \exp \left[ -ie \int_x^{x+\varepsilon} dz^\rho A_\rho(z) \right]. \quad (11.230)$$

Если использовать уравнения движения, то дивергенцию этого оператора можно записать в виде

$$\begin{aligned} \partial_\mu j_5^\mu(x, \varepsilon) = \\ = 2m i \bar{\psi}(x + \varepsilon) \gamma_5 \psi(x) \exp \left[ -ie \int_x^{x+\varepsilon} dz^\rho A_\rho(z) \right] - i e j_5^\mu(x, \varepsilon) F_{\mu\nu}(x) \varepsilon^\nu [1 + O(\varepsilon)]. \end{aligned} \quad (11.231)$$

В правой части второй член сингулярен в пределе  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Вакуумный матричный элемент  $j_5^\mu$  в присутствии внешнего поля ведет себя как  $1/\varepsilon$ , и мы получаем прежнее предельное соотношение

$$\langle 0 | \partial_\mu j_5^\mu(x) | 0 \rangle = \langle 0 | 2m i \bar{\psi}(x) \gamma_5 \psi(x) | 0 \rangle - \frac{\alpha}{4\pi} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} F^{\mu\nu} F^{\rho\sigma}(x). \quad (11.232)$$

В присутствии электромагнитных взаимодействий аксиальная аномалия изменяет условие ЧСАТ [см. выражение (11.213)]. Добавочный член соответствует жесткому нарушению киральной симметрии и приводит к существенному изменению ренормализационных свойств аксиального тока. Вернемся к обсуждению  $\pi^0$ -распада и запишем его амплитуду в виде

$$\varepsilon_1^\mu \varepsilon_2^\nu T_{\mu\nu}(q^2) = (m_\pi^2 - q^2) \langle \gamma(k_1, \varepsilon_1), \gamma(k_2, \varepsilon_2) | \pi(0) | 0 \rangle. \quad (11.233)$$

Это выражение в соответствии с (11.213) можно представить также следующим образом;

$$\begin{aligned} \varepsilon_1^\mu \varepsilon_2^\nu T_{\mu\nu}(q^2) = \frac{m_\pi^2 - q^2}{m_\pi^2 f_\pi} \left[ \langle \gamma(k_1, \varepsilon_1), \gamma(k_2, \varepsilon_2) | \partial^\rho A_\rho^j(0) | 0 \rangle + \right. \\ \left. + \frac{\alpha}{8\pi} \varepsilon_{\rho_1 \sigma_1 \rho_2 \sigma_2} \langle \gamma(k_1, \varepsilon_1), \gamma(k_2, \varepsilon_2) | F^{\rho_1 \sigma_1} F^{\rho_2 \sigma_2} | 0 \rangle \right]. \end{aligned} \quad (11.234)$$

Здесь второй матричный элемент в низшем порядке по  $\alpha$  равен  $(\alpha/\pi) \varepsilon_1^\mu \varepsilon_2^\nu \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} k_1^\rho k_2^\sigma$ , в то время как первый обращается в нуль в пределе  $q^2 = 0$ . Поэтому мы приходим к выражению

$$T_{\mu\nu}(0) = \frac{\alpha}{\pi f_\pi} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} k_1^\rho k_2^\sigma, \quad (11.235)$$

которое находится в согласии с (11.199). Благодаря тому что аномалия не перенормируется высшими порядками, эта низкоэнергетическая теорема фактически оказывается справедливой во всех порядках по  $\alpha$ . Однако процедура экстраполяции в точку  $q_0^2 = m^2$  будет зависеть от порядка приближения.

Мы приходим к заключению, что аномалии не являются чем-то случайным, а естественно следуют из перенормировок, отражая более глубокие аспекты теории поля. В каждой решаемой модели мы в состоянии вычислить их явным образом, как, например, в швингеровской модели двумерной электродинамики с безмассовыми фермионами, которая имеет вычисляемую аномалию вида

$$\partial^\mu j_\nu^\mu = c e_{\mu\nu} F^{\mu\nu}. \quad (11.236)$$

Дополнительный свет на это явление проливает проблема аномальных размерностей в асимптотическом поведении (см. гл. 13).

## ПРИМЕЧАНИЯ

Теория унитарной симметрии изложена ее создателями Гелл-Манном и Нееманом в книге: *Gell-Mann M., Ne'eman Y. The Eightfold Way.*—New York: Benjamin 1964. Кварковая модель была независимо предложена в работах: *Gell-Mann M.*—*Phys Lett.*, 1963, vol. 8, p. 214; *Zweig G.* (неопубликованный отчет, CERN, 1963).

Спектр, связанный с нарушением симметрии, обсуждался в статьях: *Goldstone J.*—*Nuovo Cimento*, 1961, vol. 19, p. 154; *Nambu Y., Jona-Lasinio G.*—*Phys. Rev.*, vol. 122, p. 345; *Goldstone J., Salam A., Weinberg S.*—*Phys. Rev.*, 1962, vol. 127, p.965. Невозможность нарушения непрерывной симметрии в двумерной модели была продемонстрирована в рамках статистической физики в работе: *Mermin N. D., Wagner H.*—*Phys. Rev. Lett.*, 1966, vol. 17, p. 1133. Этот вывод был затем распространен на теорию поля Коулменом: *Coleman S.*—*Comm. Math. Phys.*, 1973, vol. 31, p. 259. Доказательство существования фазовых переходов в кристаллических системах с дискретной симметрией см. в статье: *Peierls R. E.*—*Phys. Rev.*, 1938, vol. 54, p. 918. Инвариантность основного состояния анализировалась Коулменом: *Coleman S.*—*J. Math. Phys.*, 1966, vol. 7, p. 787. Общий обзор проблем симметрии дается Гуральником, Хагеном и Кибблом в книге: *Advances in Particle Physics* /ed R. L. Cool, R. E. Marshak.—New York: Interscience, 1968. Этот вопрос рассматривается также Коулменом в книге: *Laws of Hadronic Matter*/ed. A. Zichichi.—New York: Academic Press, 1975.

Богатая подборка работ по алгебре токов имеется в книгах: *Adler S., Dashen R.* *Current Algebras.*—New York: Benjamin, 1968 [Имеется перевод: *Адлер С., Дашен Р.* Алгебры токов и их применение в физике частиц — М.: Мир, 1970.]; *Alfaro V. de, Fubini S., Furlan G., Rosetti C.* *Currents in Hadron Physics.*—Amsterdam: North-Holland, 1973 [Имеется перевод *Де Альфаро В. и др.* Токи в адронной физике.—М.: Мир, 1976.]. См. также лекцию Вайнберга в сб.: *Lectures on Elementary Particles and Quantum Field Theory*, Brandeis, 1970/ed. S. Deser, M. Grisaru, H. Pendleton.—Cambridge, Mass.: MIT Press, 1970; *Treiman S. B.* *Lectures on Current Algebra and Its Applications.*—Princeton University Press, 1972 [Имеется перевод: *Трейман С., Джекив Р., Гросс Д.* Лекции по алгебре токов — М.: Атомиздат, 1977].

Феноменологические лагранжианы обсуждаются в статье: *Gasiorowicz S., Geffen D. A.*—*Rev. Mod. Phys.*, 1969, vol. 41, p. 531.

Конкретные вопросы, обсуждавшиеся в настоящей главе, рассматриваются в следующих работах:

#### Правила сумм

- Cabibbo N., Radicati L. A.*— Phys. Lett., 1965, vol. 19, p. 697;  
*Adler S.*— Phys. Rev., 1966, vol. 143, p. 1144;  
*Bjorken J. D.*— Phys. Rev., 1966, vol. 16, p. 408.

#### Следствия ЧСАТ

- Goldberger M. L., Treiman S. B.*— Phys. Rev., 1958, vol. 110, p. 1178.

#### Низкоэнергетические теоремы

- Low F. E.*— Phys. Rev., 1954, vol. 96, p. 1428; 1958, vol. 110, p. 974;  
*Gell-Mann M., Goldberger M. L.*— Phys. Rev., 1954, vol. 96, p. 1433;  
*Drell S. D., Hearn A. C.*— Phys. Rev. Lett., 1966, vol. 16, p. 908;  
*Adler S. L.*— Phys. Rev., 1965, vol. 140, ser. B, p. 736;  
*Weisberger W. I.*— Phys. Rev., 1966, vol. 143, p. 1302.

#### Мягкопионные теоремы

- Adler S.*— Phys. Rev., 1965, vol. 139, ser. B, p. 1638;  
*Weinberg S.*— Phys. Rev. Lett., 1966, vol. 17, p. 616.

#### Нарушение симметрии $SU(3) \times SU(3)$

- Gell-Mann M., Oakes R. J., Renner B.*— Phys. Rev., 1968, vol. 175, p. 2195.

Предложенная Гелл-Манном и Леви  $\sigma$ -модель обсуждается в работе: *Gell-Mann M., Lévy M.*— Nuov. Cimento, 1960, vol. 16, p. 705; обзор ее дал Ли (см. *Lee B. W.* в кн.: *Chiral Dynamics.*— Gordon and Breach, 1972).

Распад нейтрального пиона изучался Стейнбергером (см. *Steinberger J.*— Phys. Rev., 1949, vol. 76 p. 1180); в рамках алгебры токов этот вопрос рассматривали Сазерленд и Вельгман (см. *Sutherland D. G.*— Nucl. Phys., ser. B, 1967, vol. 2, p. 433; *Veltman M.*— Proc. Roy. Soc., ser. A, 1967, vol. 301 p. 107).

Аномальные соотношения впервые появились в работе Швингера (*Schwinger J.*— Phys. Rev., 1951, vol. 82, p. 664) и были проанализированы в следующих статьях: *Adler S.*— Phys. Rev., 1969, vol. 177, p. 2426; *Bell J. S., Jackiw R.*— Nuov. Cimento, ser. A., 1969, vol. 60, p. 47. Общая структура аномалий обсуждалась в работе: *Bardeen W. A.*— Phys. Rev., 1969, vol. 184, p. 1848. Кроме того, см. лекции Адлера в сб. *Lectures on Elementary Particles and Quantum Field Theory*, Brandeis, 1970/ed. S. Deser, M. Grisaru, H. Pendleton.— Cambridge, Mass. MIT Press, 1970; см. также *Jackiw R.* в сб.: „*Lectures on Current Algebra and Its Applications.*— Princeton University Press, 1972. Безмассовая двумерная модель квантовой электродинамики разработана Швингером (см. *Schwinger J.*— Phys. Rev., 1962, vol. 128, p. 2425).

## ПРИМЕЧАНИЕ РЕДАКТОРА ПЕРЕВОДА

Общий метод изучения квантовых систем со спонтанно нарушенной симметрией был разработан Н. Н. Боголюбовым в 1960 г. в связи с решением таких задач статистической механики, как сверхпроводимость, сверхтекучесть, ферромагнетизм. В частности, он впервые ввел в квантовой теории преобразование (11.35). См. *Боголюбов Н. Н.* Избранные труды по статической физике.— М.: изд-во МГУ, 1979.

Гипотеза о сохранении векторного тока была высказана в работе: *Герштейн С. С., Зельдович Я. Б.*— ЖЭТФ, 1955, т. 29, с. 698.

Правило сумм (11.126) предложено С. Б. Герасимовым (Ядерная физика, 1965, т. 2, с. 598).

Вопросы алгебры токов и феноменологических лагранжианов рассмотрены в книге: *Волков М. К., Первушин В. Н.* Существенно нелинейные квантовые теории, динамические симметрии и физика мезонов.— М.: Атомиздат, 1978, а также в обзорных статьях: *Вайнштейн А. И., Захаров В. И.*— УФН, 1970, т. 100, с. 225; *Волков Д. В.* Физика элементарных частиц и атомного ядра, 1973, т. 4, вып. 1, с. 3 [в этом обзоре дано общее определение ковариантной производной; см. выражение (11.48) и подстрочное примечание в связи с ним].

Кварковая структура адронов, включая одну из наиболее важных проблем физики элементарных частиц, а именно проблему конфайнмента, рассматривается в следующем обзоре: *Арбузов Б. А., Логунов А. А.*— УФН, 1977, т. 123, вып. 3, с. 505, а также в книгах: *Клоуз Ф.* Кварки и партоны.— М.: Мир, 1982; *Окунь Л. Б.* Лептоны и кварки.— М.: Наука, 1981.



# НЕАБЕЛЕВЫ КАЛИБРОВОЧНЫЕ ПОЛЯ

Начнем рассмотрение с короткого введения в геометрию полей Янга—Миллса, а затем детально обсудим их квантовую теорию. Особое внимание будет уделено процедурам квантования и перенормировки для случаев как точной, так и спонтанно нарушенной симметрии. Мы также кратко рассмотрим явление вырождения вакуума и классические решения. Приложения к единой теории слабых и электромагнитных взаимодействий будут обсуждаться при рассмотрении модели Вайнберга—Салама.

### 12.1. КЛАССИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ

Предложенное Янгом и Миллсом в 1954 г. обобщение принципа калибровочной инвариантности на неабелевы группы оказалось чрезвычайно привлекательным и вполне естественным. До конца 60-х гг. теория неабелевых калибровочных полей развивалась довольно медленно, несмотря на обилие посвященных ей работ. Затем были блестяще решены важнейшие проблемы квантования, перенормировки и инвариантного включения массы полей Янга—Миллса. Теперь все верят, что теория такого типа может обеспечить единое описание слабых, электромагнитных, а возможно, и сильных взаимодействий.

Модели калибровочных полей сложны во многих отношениях. Их трудно квантовать и перенормировать, они обнаруживают замечательные механизмы нарушения симметрий и приводят к уникальному поведению на малых расстояниях. В то же время большинство аспектов, связанных с дальнодействием, все еще не выяснено до конца. Как было осознано совсем недавно, калибровочные теории имеют удивительно богатую структуру даже на классическом уровне.

Практически невозможно уместить столь большое количество информации на нескольких десятках страниц. Поэтому мы ограничимся изложением основ и лишь упомянем некоторые из возможных путей развития теории и разрешения существующих проблем.

### 12 1.1. Калибровочное поле $A_\mu$ и тензор $F_{\mu\nu}$

Модель, рассмотренная Янгом и Миллсом, была основана на изотопической симметрии с  $SU(2)$ -симметрией в качестве группы глобальной инвариантности. Можно ли обобщить эту глобальную инвариантность до локальной таким образом, чтобы система отсчета, в которой определяются изоспины, могла произвольно меняться от точки к точке? Если допустить такую возможность, то для другого наблюдателя утверждение, что в данной точке пространства-времени рождена частица, скажем протон, было бы бессмысленным, пока не нашлось бы способа согласовать обе системы отсчета. В обеспечении такого согласования и состоит роль калибровочного поля. Подчеркнем аналогию с электродинамикой, где относительные фазы заряженных полей в различных точках имеют смысл только из-за возможности их сравнения посредством электромагнитного потенциала.

Для определенности рассмотрим  $N$  полей (в целях упрощения — лоренцевы скаляры), преобразующихся по неприводимому представлению  $U$  некоторой компактной группы Ли  $G$ :

$$\phi(x) \rightarrow ({}^g\phi)(x) = U(g)\phi(x), \quad (12.1)$$

где  $U(g)$  — унитарная (или ортогональная) матрица  $N \times N$ . Предположим, что лагранжиан инвариантен при этом преобразовании. Наша задача — построить более сложную теорию, инвариантную относительно преобразований (12.1), когда  $g$  зависит от пространственно-временной точки  $x$ . Пусть  $g(x)$  является такой функцией со значениями, принадлежащими группе  $G$ . Понятие обычной производной поля  $\partial_\mu\phi$  перестает быть полезным, поскольку мы сравниваем поля  $\phi(x+\delta x)$  и  $\phi(x)$ , которые преобразуются независимо при (12.1). Чтобы сделать возможным такое сравнение, необходимо ввести новый объект.

Рассмотрим инфинитезимальное преобразование

$$g = e + \delta\alpha_a t^a, \quad (12.2)$$

где  $e$  — тождественный элемент группы  $G$ , а  $t^a$  — элементы алгебры Ли, удовлетворяющие коммутационным соотношениям

$$[t^a, t^b] = C^{ab}_c t^c. \quad (12.3)$$

В представлении, к которому принадлежат поля  $\phi$ , генераторы  $t^a$  реализуются антиэрмитовыми матрицами  $T^a$ , так что при преобразовании  $g$  в соответствии с (12.2) имеем

$$\begin{aligned} \phi(x) &\rightarrow ({}^g\phi)(x) = \phi(x) + \delta\phi(x), \\ \delta\phi(x) &= \delta\alpha_a T^a \phi(x) \equiv \delta\alpha\phi. \end{aligned} \quad (12.4a)$$

Если инфинитезимальные параметры  $\delta\alpha_a(x)$  зависят от  $x$ , то соответствующие преобразования называются (локальными) калибро-

вочными преобразованиями, а группа таких преобразований — калибровочная группа — формально определяется как бесконечное произведение  $\prod_x G_x$ :

$$\delta\phi(x) = \delta\alpha(x)\phi(x) = \delta\alpha_a(x)T^a\phi(x). \quad (12.46)$$

Введем калибровочные поля  $x \rightarrow A^a_\mu(x)$ . Они являются векторными полями и несут индекс присоединенного представления группы  $G$ . Обозначим через  $A^a$  соответствующий элемент алгебры Ли:

$$A^a(x) = A^a_\mu(x)t^a \quad (12.5)$$

и будем использовать одно и то же обозначение для любого его представления:  $A^a_\mu(x)T^a$ .

Бесконечно малому пути  $(x, x + dx)$  калибровочное поле составляет элемент группы

$$g(x + dx, x; A) = e + dx^\mu A_\mu(x). \quad (12.6)$$

Это позволяет сравнивать две соседние системы отсчета. Данное рассуждение можно обобщить на конечный путь  $C$ , идущий из точки  $x_1$  в  $x_2$ . Если путь задать параметрически, т. е. ввести параметр  $s$ ,  $s \rightarrow x(s)$ ,  $0 \leq s \leq 1$ , причем  $s(0) = x_1$ ,  $s(1) = x_2$ , то элемент группы  $G$ , ассоциированный с  $C$ , определяется следующим образом:

$$\begin{aligned} g(C; A) &= P \exp\left(\int_0^1 ds \frac{dx}{ds} \cdot A\right) = \\ &= \sum_0^\infty \int_0^1 ds_n \int_0^{s_n} ds_{n-1} \dots \int_0^{s_2} ds_1 \frac{dx}{ds_n} \cdot A[x(s_n)] \dots \frac{dx}{ds_1} \cdot A[x(s_1)]. \end{aligned} \quad (12.7)$$

Символ  $P$  означает упорядочение по  $s$ , аналогичное известному хронологическому упорядочению  $T$ .

На языке дифференциальной геометрии величина  $A^a$  есть связность, задающая параллельный перенос геометрических объектов, определенных в пространстве представления группы. Параллельный перенос поля  $\phi$  из  $x$  в  $x + dx$  дается соотношением

$$\phi_t(x) = g^{(x+dx, x)}\phi(x) = \phi(x) + dx \cdot A(x)\phi(x), \quad (12.8)$$

из которого следует естественное определение ковариантной производной:

$$\begin{aligned} dx^\mu D_\mu\phi(x) &\equiv \phi(x+dx) - \phi_t(x) = dx^\mu [\partial_\mu - A_\mu(x)]\phi(x), \\ D_\mu &\equiv \partial_\mu - A_\mu(x). \end{aligned} \quad (12.9a)$$

Записанная в компонентах эта производная имеет вид

$$(D_\mu)_A^B = \partial_\mu \delta_A^B - (T^c)_A^B A_{\mu c}(x). \quad (12.96)$$

В частности, в присоединенном представлении  $(T^c)_a^b = C^{cb}_a = -C^{bc}_a$  получаем

$$(D_\mu)_a^b = \partial_\mu \delta_a^b + C^{bc}_a A_{\mu c}(x). \quad (12.9в)$$

Если в качестве  $G$  взять группу  $U(1)$ , то данное определение сведется к известному понятию ковариантной производной в электродинамике. Трансформационный закон калибровочного поля при калибровочных преобразованиях можно определить из требования, чтобы  $\phi_t(x)$  преобразовывалось как  $\phi(x + dx)$ . Для этого достаточно положить

$$g(x + dx, x; A + \delta A) = g(x + dx, x; A) g^{-1}(x). \quad (12.10)$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \phi_t(x) &\rightarrow U[g(x + dx, x; A + \delta A)] U[g(x)] \phi(x) = \\ &= U[g(x + dx)] \phi_t(x), \end{aligned} \quad (12.11)$$

что и требовалось. В инфинитезимальной форме это преобразование записывается в виде

$$\delta D_\mu \phi(x) = \delta \alpha(x) D_\mu \phi(x), \quad (12.12)$$

т. е.  $D_\mu \phi(x)$  преобразуется как  $\phi(x)$ . Разлагая (12.10) в ряд по  $\delta \alpha$  до первого порядка, получаем

$$\delta A_\mu = \partial_\mu \delta \alpha(x) + [\delta \alpha, A_\mu] = D_\mu \delta \alpha(x); \quad (12.13а)$$

здесь величина  $\delta \alpha$  считается принадлежащей присоединенному представлению. Последнюю формулу можно также записать в более явном виде

$$\delta A_{\mu a}(x) = \partial_\mu \delta \alpha_a(x) + C^{bc}_a \delta \alpha_b(x) A_{\mu c}(x). \quad (12.13б)$$

Используя равенство (12.10), для конечного калибровочного преобразования имеем

$$A_\mu(x) \rightarrow {}^g A_\mu(x) = [\partial_\mu g(x)] g^{-1}(x) + g(x) A_\mu(x) g^{-1}(x). \quad (12.14)$$

По сравнению с абелевым случаем появилось новое свойство: при постоянном  $g$  (или  $\delta \alpha$ )  $A_\mu$  преобразуется как заряженное поле, принадлежащее присоединенному представлению, что видно из структуры второго члена в правой части соотношений (12.13) и (12.14).

В классической электродинамике два потенциала, локально связанные несингулярным калибровочным преобразованием, физически эквивалентны, а потому им соответствует один и тот же

тензор  $F_{\mu\nu}$  напряженности электромагнитного поля. Наша задача состоит в том, чтобы построить аналогичный тензор кривизны  $F_{\mu\nu}$  в неабелевом случае. С этой целью рассмотрим параллельный перенос некоторого данного поля  $\phi$  вдоль бесконечно малого замкнутого пути  $C$ . После возвращения в начальную точку поле  $\phi$  окажется повернутым с помощью преобразования

$$g(C; A) = P \exp \left[ \int_C dx \cdot A(x) \right].$$

Пусть  $l$  — характерный размер пути  $C$ . Разложим экспоненту в последнем выражении до членов порядка  $l^2$ :

$$g(C; A) = e + \int_C dx \cdot A + \iint_{\substack{CC \\ x_2 > x_1}} dx_2 \cdot A(x_2) dx_1 \cdot A(x_1) + O(l^3).$$

Здесь, как и выше, упорядочение означает, что кривая параметризуется таким образом, что  $x_0 = x(0) = x(1)$ . Разложим также величину  $A_\mu[x(s)]$ :

$$A_\mu[x(s)] = A_\mu(x_0) + [x^\nu(s) - x_0^\nu] \partial_\nu A_\mu(x_0) + \dots$$

Тогда получим

$$g(C; A) = e + \frac{1}{2} \iint_{\mathcal{A}} dx^\mu \wedge dx^\nu (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - [A_\mu, A_\nu]) + O(l^3), \tag{12.15}$$

где  $\mathcal{A}$  — бесконечно малая площадь, ограниченная контуром  $C$ . Полагая

$$F_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - [A_\mu, A_\nu] = (\partial_\mu A_{\nu a} - \partial_\nu A_{\mu a} - C^{bc}{}_a A_{\mu b} A_{\nu c}) t^a, \tag{12.16}$$

получаем обобщенное определение электрического и магнитного полей. Тензор  $F_{\mu\nu}$  часто называют тензором напряженностей. Из предыдущего обсуждения следует полезное тождество

$$[D_\mu, D_\nu] = -F_{\mu\nu}. \tag{12.17}$$

Калибровочное преобразование величины  $g(C; A)$  записывается в виде

$$g(C; A) \rightarrow g(x_0) g(C; A) g^{-1}(x_0)$$

[ср с формулой (12.10)]. Следовательно,  $F$  преобразуется как заряженное поле, принадлежащее присоединенному представлению:

$$F(x) \rightarrow g(x) F(x) g^{-1}(x). \tag{12.18}$$

В инфинитезимальной форме это соответствует

$$\begin{aligned} F &\rightarrow F + \delta F, \\ \delta F &= [\delta\alpha(x), F], \\ \delta F_{\mu\nu a}(x) &= C^{bc}{}_a \delta\alpha_b(x) F_{\mu\nu c}(x). \end{aligned} \quad (12.19)$$

В частности, ковариантную производную величины  $F$  можно записать следующим образом:

$$D_{\mu a}{}^b F_{\nu\rho b} t^a = [D_{\mu}, F_{\nu\rho}] = \partial_{\mu} F_{\nu\rho} - [A_{\mu}, F_{\nu\rho}].$$

В электродинамике внешняя производная дифференциальной формы  $A_{\mu}(x) dx^{\mu}$ , а именно  $(1/2) F_{\mu\nu} dx^{\mu} \wedge dx^{\nu}$  представляет собой замкнутую форму второго порядка:

$$\partial_{\rho} F_{\mu\nu} + \text{Циклические перестановки} = 0. \quad (12.20)$$

Это свойство  $F_{\mu\nu}$  эквивалентно однородным уравнениям Максвелла  $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$ ,  $\operatorname{rot} \mathbf{E} + \partial \mathbf{B} / \partial t = 0$ . Наоборот, если задана такая замкнутая форма, из леммы Пуанкаре следует локальное существование потенциала  $A$ , через который выражается  $F$  (см раздел 112 в т. 1 настоящей книги). В неабелевом случае ситуация несколько иная. Здесь действительно существует аналогичное тождество

$$[D_{\mu}, F_{\nu\rho}] + [D_{\nu}, F_{\rho\mu}] + [D_{\rho}, F_{\mu\nu}] = 0, \quad (12.21)$$

являющееся следствием тождества Якоби и тождества (12.17). Однако следует заметить, что уравнение (12.21) уже предполагает существование  $A$ , так как  $A$  явно присутствует в ковариантной производной. Более того, можно показать, что если  $F_{\nu\rho}$  и  $A_{\mu}$  удовлетворяют уравнению (12.21), то из этого факта не следует с необходимостью, что  $F$  есть тензор напряженности, отвечающий потенциалу  $A$ . Соответственно, в противоположность абелеву случаю, тензор напряженности  $F$  не определяет однозначно все калибровочно-инвариантные величины.

Если  $F_{\mu\nu}$  обращается в нуль в окрестности некоторой точки, то  $A_{\mu}$  представляет собой чистую калибровку:

$$F_{\mu\nu} = 0 \Leftrightarrow \exists g(x) : A_{\mu}(x) = [\partial_{\mu} g(x)] g^{-1}(x). \quad (12.22)$$

Действительно, если  $F = 0$ , то в соответствии с определением  $F$  интеграл от  $A_{\mu}$  вдоль пути  $C$  из его начала в точку  $x$  не зависит от вида кривой:

$$g(x) = g(x, 0; A) = P \exp \left[ \int_{\tilde{C}} dx \cdot A(x) \right].$$

Этот элемент  $g(x)$  удовлетворяет соотношению (12.22). Обратное, подставляя вместо  $A$  чистую калибровку, мы видим, что  $F$  обращается в нуль.

За счет принципа свободы в калибровке иногда можно потребовать, чтобы потенциал локально удовлетворял некоторому условию. Это называется выбором калибровки. Пусть, например,  $n^{\mu}$  — фиксированный 4-вектор. Существует калибровочное преобразование

$A \rightarrow A'$ , такое, что

$$n \cdot A'(x) = 0. \quad (12.23)$$

Такая калибровка называется аксиальной.

Покажем, что такая калибровка возможна. Для этого введем 4-вектор  $N_\mu$  такой, что  $N \cdot n \neq 0$  (например,  $N = n$ , если  $n^2 \neq 0$ ). Любую величину  $x$  можно однозначно представить следующим образом:

$$x = \lambda(x) n + x_\perp, \quad x_\perp \cdot N = 0,$$

где

$$\lambda(x) = \frac{N \cdot x}{N \cdot n}, \quad x_\perp = x - n \frac{N \cdot x}{N \cdot n}.$$

Рассмотрим отрезок  $C$ ,  $x(s) = s\lambda(x)n + x_\perp$  ( $0 \leq s \leq 1$ ), и интеграл

$$g(x) = P \exp \left\{ \int_0^1 ds \frac{dx}{ds} \cdot A[x(s)] \right\} = P \exp \left[ \int_0^{\lambda(x)} d\lambda n \cdot A(\lambda n + x_\perp) \right].$$

Используя величину

$$A'_\mu = (\partial_\mu g^{-1})g + g^{-1}A_\mu g,$$

мы видим, что

$$n \cdot A' = (n \cdot \partial g^{-1})g + g^{-1}n \cdot Ag = g^{-1}(n \cdot A - n \cdot \partial)g.$$

В соответствии с определением функции  $g(x)$  можно написать

$$\frac{\partial}{\partial \lambda(x)} g(x) = n \cdot \partial g(x) = n \cdot A(x)g(x),$$

откуда следует, что  $n \cdot A' = 0$

Аналогичным образом мы могли бы показать, что посредством калибровочного преобразования в любом случае можно локально удовлетворить условию Лоренца

$$\partial \cdot A = 0, \quad (12.24)$$

а также любому другому условию, которое получается из (12.23) или (12.24) заменой правой части на некоторую функцию со значениями в алгебре Ли группы  $G$ .

### 12.1.2. Классическая динамика

Наша цель заключается теперь в том, чтобы определить калибровочно-инвариантное действие. Что касается введения взаимодействий с различными мультиплетами заряженных полей (материальных полей), то здесь достаточно применить принцип минимальной связи. Будем использовать всюду ковариантную производную вместо обычной:

$$d_\mu \rightarrow D_\mu = \partial_\mu - A_\mu, \quad (12.25)$$

где  $A_\mu = A_{\mu a} T^a$  берется в представлении, по которому преобразуются поля материи. Часть действия, зависящая от  $A$ , должна быть лоренцевым скаляром и калибровочно-инвариантной величиной, содержащей производные не выше второго порядка. Единственным кандидатом на эту роль является след свертки  $F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$ , взятый в некотором неприводимом представлении. Для простой группы Ли следы от одинаковых комбинаций генераторов в различных неприводимых представлениях с точностью до числовых множителей совпадают, так как существует единственный в алгебре Ли квадратичный инвариант. Выберем фундаментальное представление как имеющее наименьшую размерность и нормируем его генераторы следующим образом:

$$\text{Sp}(t^a t^b) = -\frac{1}{2} \delta^{ab}. \quad (12.26)$$

Здесь знак минус поставлен в силу того, что  $t$  является антиэрмитовым. Например, в случае групп  $SU(2)$  и  $SU(3)$  мы соответственно выбираем

$$t^a = i\sigma^a/2, \quad a = 1, 2, 3,$$

и

$$t^a = i\lambda^a/2, \quad a = 1, \dots, 8.$$

Действие полей  $A$  записывается в виде

$$I = \frac{1}{2g^2} \int d^4x \text{Sp}(F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}) = -\frac{1}{4g^2} \int d^4x \sum_a F_{\mu\nu a} F^{\mu\nu a}. \quad (12.27)$$

Безразмерный параметр  $g$  (не путать его с элементом группы  $G$ ) играет роль константы связи. В этом можно убедиться, если произвести изменение масштаба поля Янга—Миллса:

$$A \rightarrow gA, \quad I \rightarrow \frac{1}{2} \int d^4x \text{Sp}(F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}),$$

где

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - g[A_\mu, A_\nu] = -\frac{1}{g}[D_\mu, D_\nu], \quad (12.28)$$

$$D_\mu = \partial_\mu - gA_\mu^i.$$

Однако для простоты, прежде чем мы выведем правила Фейнмана, не будем использовать это изменение масштаба.

В общем случае алгебра Ли калибровочной группы представляет собой прямую сумму простых алгебр Ли плюс генераторы абелевых множителей. С каждым из этих слагаемых может быть связан квадратичный инвариант и независимая константа связи. Примером такого рода является модель слабого и электромагнитного взаимодействий Вайнберга—Салама, основанная на группе



$SU(2) \times U(1)$ . Две ее константы взаимодействия связаны с константой Ферми и электрическим зарядом (см разд. 12.6).

Классические уравнения движения полей  $A^\mu$  легко вывести из принципа стационарного действия [см. (12.27)]:

$$0 = \delta I = \frac{2}{g^2} \int d^4x \operatorname{Sp} [\delta A^\nu (\partial^\mu F_{\mu\nu} - [A^\mu, F_{\mu\nu}])].$$

Следовательно,

$$[D^\mu, F_{\mu\nu}] = \partial^\mu F_{\mu\nu} - [A^\mu, F_{\mu\nu}] = 0,$$

$$\text{или} \quad (D^\mu)_a{}^b F_{\mu\nu b} = 0. \quad (12.29)$$

Эти уравнения представляют собой неабелево обобщение уравнений Максвелла. Поскольку они нелинейны, решать их трудно.

Уравнения (12.29) обладают необходимым свойством ковариантности. Если  $A_\mu$  есть решение, то решениями будут и функции, полученные из него с помощью калибровочных преобразований. Очевидно также, что система (12.29) является совместной. В частности, ее свертка с  $\partial_\nu$  дает нуль:

$$\begin{aligned} \partial^\nu \partial^\mu F_{\mu\nu} &= \partial^\nu [A^\mu, F_{\mu\nu}] = \\ &= [\partial^\nu A^\mu, F_{\mu\nu}] + [A^\mu, \partial^\nu F_{\mu\nu}] = \\ &= [\partial^\nu A^\mu, F_{\mu\nu}] + [A^\mu, [A^\nu, F_{\mu\nu}]] = \\ &= \frac{1}{2} [\partial^\nu A^\mu - \partial^\mu A^\nu - [A^\nu, A^\mu], F_{\mu\nu}] = 0. \end{aligned}$$

Полагая  $g=1$ , находим канонический тензор энергии-импульса [ср. с выражением (1.105) в т. 1 настоящей книги]:

$$\tilde{\Theta}^{\mu\nu} = 2 \operatorname{Sp} \left( F^{\mu\rho} \partial^\nu A_\rho - \frac{1}{4} g^{\mu\nu} F^{\rho\sigma} F_{\rho\sigma} \right).$$

Однако этот тензор не является калибровочно-инвариантным. Его можно сделать таковым, если вычесть из него полную производную  $\Delta \tilde{\Theta}^{\mu\nu}$ :

$$\Delta \tilde{\Theta}^{\mu\nu} = 2 \operatorname{Sp} [F^{\mu\rho} (\partial_\rho A^\nu + [A^\nu, A_\rho])] = 2 \partial_\rho \operatorname{Sp} (F^{\mu\rho} A^\nu),$$

где были использованы полевые уравнения (12.29). Таким образом, имеем

$$\begin{aligned} \Theta^{\mu\nu} &= \tilde{\Theta}^{\mu\nu} - \Delta \tilde{\Theta}^{\mu\nu} = 2 \operatorname{Sp} \left( F^{\mu\rho} F_\rho^\nu - \frac{1}{4} g^{\mu\nu} F^{\rho\sigma} F_{\rho\sigma} \right) = \\ &= \sum_a \left( F_a^{\mu\rho} F_{\rho a}^\nu - \frac{1}{4} g^{\mu\nu} F_a^{\rho\sigma} F_{\sigma a \rho} \right). \end{aligned} \quad (12.30)$$

Определим аналоги электрического и магнитного полей следующим образом:

$$E_a^i = F^{i0}_a, \quad B_a^i = -\frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} F^{jk}_a, \quad i, j, k = 1, 2, 3. \quad (12.31)$$

Здесь, как и всюду в данной главе, будем считать индексы  $i, j, k$  пространственными ( $i, j, k = 1, 2, 3$ ), а индексы  $a, b, c$  — относящимися к алгебре Ли. Записывая соответствующие величины через  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$ , мы имеем

$$\begin{aligned}\Theta^{00} &= \frac{1}{2} \sum_a (\mathbf{E}_a \cdot \mathbf{E}_a + \mathbf{B}_a \cdot \mathbf{B}_a) = -\text{Sp} (\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2), \\ \Theta^{0i} &= \sum_a (\mathbf{E}_a \times \mathbf{B}_a)^i = -2 \text{Sp} (\mathbf{E} \times \mathbf{B})^i.\end{aligned}\tag{12.32}$$

### 12.1.3. Решения классических уравнений движения в евклидовой области

Исследование классических решений стимулируется уверенностью в том, что полуклассический подход может помочь в понимании квантового мира и что классические конфигурации полей, для которых действие стационарно, играют важную роль.

Особый интерес представляют недиссипативные конфигурации с конечной энергией, т. е. конфигурации, энергия которых остается локализованной в конечной области пространства и не уходит в виде излучения на бесконечность. Такие объекты можно рассматривать как модели для описания на квантовом уровне систем, протяженных в пространстве. Это когерентные состояния фундаментальных полей, если они не подвержены распадам. Свойство стабильности может обеспечиваться каким-либо законом сохранения, возможно, топологической природы. Системы такого рода называются солитонами или сгустками энергии. Поскольку они возникают при разложении действия вблизи нетривиальной стационарной точки, эти сгустки и их квантовые возбуждения обладают свойствами, которые нельзя получить путем обычного разложения по теории возмущений. В разд 12.5.3 мы рассмотрим пример четырехмерной калибровочной теории, включающей скалярные поля, которая дает решения с конечной энергией. С другой стороны, можно показать, что нетривиальные недиссипативные решения при конечной энергии не существуют в неабелевых калибровочных теориях, содержащих только калибровочные поля. Иными словами, в такой теории любое решение этого сорта эквивалентно  $A_\mu \equiv 0$ .

Рассмотрим функцию Лагранжа для не зависящего от времени решения, т. е. интеграл по пространству от лагранжиана

$$L = L_1 - L_2 = \frac{1}{2} \int d^3x (\mathbf{E}_a \cdot \mathbf{E}_a - \mathbf{B}_a \cdot \mathbf{B}_a);$$

здесь приняты те же обозначения, что и в формуле (12.31). Полная энергия  $H$  равна сумме  $L_1 + L_2$ ; следовательно, ее конечность означает, что величины  $L_1$ ,  $L_2$  и  $L$  также являются конечными. Решение, если оно существует, неустойчиво относительно масштабных преобразований

$$\begin{aligned}A_a^0(x) &\rightarrow \rho \lambda A_a^0(\lambda x), \\ A_a^i(x) &\rightarrow \lambda A_a^i(\lambda x).\end{aligned}$$

При этом функция Лагранжа преобразуется следующим образом:

$$L \rightarrow \rho^2 \lambda L_1 - \lambda L_2$$

и должна быть стационарной при  $\rho = \lambda = 1$ . Это приводит к

$$L_1 = L_2 = 0.$$

Следовательно,  $F_{\mu\nu} = 0$ , и в силу глобального обобщения локального утверждения (12.22) это калибровочное поле сводится всюду к чистой калибровке. Можно показать, что рассуждение, основанное на таком масштабном преобразовании (принадлежащее Коулмену), запрещает существование нетривиальных, не зависящих от времени решений в любом пространстве, размерность которого отлична от четырех. Этот аргумент можно применить и к более общим недиссипативным конфигурациям.

Существуют, однако, нетривиальные решения классических уравнений в четырехмерном евклидовом пространстве. Прежде чем объяснить природу и роль этих евклидовых решений, займемся дальнейшим анализом структуры основного состояния в неабелевых калибровочных теориях.

Для этой цели удобно наложить калибровочное условие  $A_0 = 0$ . Классически основное состояние должно соответствовать независящим от времени конфигурациям поля с исчезающе малой плотностью энергии.

Таким образом, мы имеем  $F_{\mu\nu} = 0$ , откуда следует, что поле  $A$  является чистой калибровкой

$$A(x) = \partial [g(x)] g^{-1}(x). \quad (12.33)$$

Кроме того, мы предполагаем, что можно ограничиться калибровочными функциями  $g(x)$ , которые имеют один и тот же предел по всем пространственным направлениям. Этот предел можно отождествить с единицей группы

$$g(x) \xrightarrow{|x| \rightarrow \infty} e \quad (12.34)$$

(в действительности не существует каких-либо убедительных аргументов, оправдывающих это допущение). При этих обстоятельствах все конфигурации поля, записываемые в виде (12.33) и (12.34), можно рассматривать как описывающие основное состояние. Мы можем задать вопрос, все ли экземпляры вакуума эквивалентны, т. е. существует ли исчезающее на пространственной бесконечности непрерывное калибровочное преобразование, которое связывает любые два из них. Как правило, хотя это и неожиданно, ответ на данный вопрос является отрицательным. Предположим для определенности, что калибровочной группой является  $SU(2)$ . Любая матрица  $SU(2)$  может быть параметризована с помощью матриц Паули в виде

$$g(x) = u_0 + i u \cdot \sigma, \quad (12.35)$$

где  $u$  является вещественным и удовлетворяет условию  $u_0^2 + u^2 = 1$ . Следовательно,  $SU(2)$  изоморфна трехмерной сфере  $S_3$ :  $u_0^2 + u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 1$ . С другой стороны, трехмерное пространство, все точки которого на бесконечности отождествлены, также топологически эквивалентно  $S_3$ . Поэтому калибровочное преобразование  $g(x)$ , связанное с каждым вакуумом, осуществляет отображение  $S_3$  на  $S_3$ . Согласно теории гомотопий, такие отображения распадаются на классы эквивалентности. Два отображения  $x \rightarrow g_1(x)$  и  $x \rightarrow g_2(x)$  принадлежат одному и тому же классу, если существует непрерывная деформация  $g_1(x)$  в  $g_2(x)$ . В рассматриваемом случае классы обозначаются положительным или отрицательным целым числом, называемым степенью отображения, или индексом Понтрягина, класса. Это целое число характеризует число отображений сферы  $S_3$  на саму себя. Оно равно

$$n = \frac{1}{2\pi^2} \int d^3x \det \{A_a^k(x)\}, \quad (12.36)$$

где  $iA_a^k(x) \sigma^a$  дается соотношением (12.33). Примерами представителей класса с  $n = 1$  являются

$$g_1(x) = - \exp \left( i\pi \frac{\sigma \cdot x}{\sqrt{x^2 + 1}} \right) \quad \text{или} \quad g_1(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} + 2i \frac{\sigma \cdot x}{x^2 + 1},$$

а  $g_n(x) = g_1^n(x)$  принадлежит  $n$ -му классу. Тот же самый вывод справедлив и для других простых групп, а именно что существует дискретный набор неэквивалентных вакуумов  $|n\rangle$ , нумеруемых целыми числами  $n$ .

Как объяснялось в гл. 11, такое вырождение основного состояния недопустимо, и оно в действительности исчезает за счет квантового туннельного эффекта. Истинный вакуум представляет собой линейную суперпозицию вырожденных приближенных вакуумов  $|n\rangle$ . Поскольку вышеприведенное калибровочное преобразование сдвигает  $n$  на единицу и поскольку истинный вакуум должен быть инвариантен (с точностью до фазы) относительно любого калибровочного преобразования, мы имеем

$$|\theta\rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\theta} |n\rangle, \quad (12.37)$$

где  $\theta$  — новый произвольный (и неожиданный!) параметр теории.

Теперь нам будет легче понять, как происходят туннельные переходы между вырожденными состояниями вакуума  $|n\rangle$ . Начнем с того, что запишем формулу Фейнмана—Каца [см. (9.198)]

$$\langle n_2 | e^{-TH} | n_1 \rangle = \int \mathcal{D}(A) e^{-I}, \quad (12.38)$$

где  $H$  — гамильтониан системы, а  $I$  — евклидово действие на интервале времени от 0 до  $T$ :

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{4g^2} \int_0^T d\tau \int d^3x F^{\mu\nu}{}_a F^{\mu\nu}{}_a = \\ &= \frac{1}{2g^2} \int_0^T d\tau \int d^3x (\mathbf{E}_a \cdot \mathbf{E}_a + \mathbf{B}_a \cdot \mathbf{B}_a). \end{aligned} \quad (12.39)$$

Здесь мы обобщили определение тензора напряженности на случай евклидовых переменных. В выражении (12.38) функциональный интеграл вычисляется при следующих граничных условиях, накладываемых на степень отображения  $n(A)$ :

$$\begin{aligned} n[A(x, \tau = 0)] &= n_1, \\ n[A(x, \tau = T)] &= n_2. \end{aligned} \quad (12.40)$$

Нами допущена здесь небольшая хитрость, поскольку мера  $\mathcal{D}(A)$  не определена пока надлежащим образом. Точное ее определение дается при обсуждении процедуры квантования в разд 12.2. Покажем теперь, как можно по-другому объяснить классификацию основных состояний в соответствии с гомотопическими классами поверхности  $S_3 \rightarrow S_3$ . Рассмотрим при  $T \rightarrow \infty$  те конфигурации, окрестность которых дает конечный вклад в формулу Фейнмана—Каца. Поскольку их евклидово действие конечно,  $F_{\mu\nu}$  должно исчезать на бесконечности во всех направлениях евклидова пространства, а это сводится к утверждению, что  $A_\mu$  является чисто калибровочным полем и осуществляет отображение поверхности  $S_3$ , заданной на бесконечности в четырехмерном евклидовом пространстве, — на группу, например,  $SU(2) \sim S_3$ . Кроме того, можно показать, что число  $n$ , связанное с этим отображением, записывается в виде евклидова интеграла

$$n = \frac{1}{64\pi^2} \int d^4x \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F^{\mu\nu}{}_a F^{\rho\sigma}{}_a = \frac{1}{32\pi^2} \int d^4x F^{\mu\nu}{}_a \tilde{F}^{\mu\nu}{}_a, \quad (12.41)$$

где дуальный тензор  $\bar{F}^{\mu\nu}{}_a \equiv (1/2) \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F^{\rho\sigma}{}_a$ . Мы видим, что

$$F^{\mu\nu}{}_a \bar{F}^{\mu\nu}{}_a = \partial^\mu K_\mu, \quad (12.42)$$

$$K_\mu = 2\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} A^\nu{}_a \left( \partial^\rho A^\sigma{}_a - \frac{1}{3} \varepsilon_{abc} A^\rho{}_b A^\sigma{}_c \right).$$

Предполагается, что в интеграл (12.38) при очень больших  $T$  доминирующий вклад дает окрестность стационарных конфигураций, которые являются решениями классических уравнений движения в евклидовом пространстве

$$D_\mu{}_{ab} F^{\mu\nu}{}_b = 0, \quad (12.43)$$

удовлетворяющими граничному условию (12.40) или, что эквивалентно, условию

$$n \equiv n_2 - n_1 = \frac{1}{32\pi^2} \int d^4x F^{\mu\nu}{}_a \bar{F}^{\mu\nu}{}_a. \quad (12.44)$$

Такому решению соответствует действие, ограниченное снизу по  $n$ . Это обусловлено положительностью интеграла

$$0 \leq \int d^4x (F^{\mu\nu}{}_a \pm \bar{F}^{\mu\nu}{}_a)^2 = 2 \int d^4x [(F^{\mu\nu}{}_a)^2 \pm F^{\mu\nu}{}_a \bar{F}^{\mu\nu}{}_a]. \quad (12.45)$$

Следовательно,

$$I = \frac{1}{4g^2} \int d^4x (F^{\mu\nu}{}_a)^2 \geq \frac{1}{4g^2} \left| \int d^4x F^{\mu\nu}{}_a \bar{F}^{\mu\nu}{}_a \right| = \frac{8\pi^2 |n|}{g^2}. \quad (12.46)$$

Последнее неравенство насыщается самодуальными или антисамодуальными конфигурациями  $F = \pm \bar{F}$ , поскольку при этом уравнения движения удовлетворяются автоматически благодаря тождеству (12.21)

В последнее время были получены явные решения с произвольным числом Понтрягина. Решение, предложенное Белавиным, Поляковым, Шварцем и Тюпкинским при  $n = \pm 1$ , записывается в виде

$$A_\mu = \frac{x^2}{x^2 + \lambda^2} [\partial_\mu g(x)] g^{-1}(x), \quad (12.47)$$

$$g(x) = \frac{x_0 \pm i\sigma \cdot \mathbf{x}}{(x^2)^{1/2}}.$$

Очевидно, что на бесконечности  $A_\mu$  сводится к чистой калибровке, соответствующей тождественному отображению  $S_3$  на  $S_3$ . Таким образом, мы ожидаем и можем проверить прямым вычислением, что это решение имеет  $n = \pm 1$ . Если мы используем в более общем случае параметризацию

$$A^i{}_a = (\varepsilon_{aik} \partial_k \mp \delta_{ai} \partial_0) \ln f, \quad i, k = 1, 2, 3, \quad (12.48)$$

$$A^0{}_a = \pm \partial_a \ln f,$$

то уравнение  $F = \pm \bar{F}$  принимает вид

$$\frac{1}{f} \square_E f = 0, \quad \square_B \equiv \partial_0^2 \pm \nabla^2, \quad (12.49)$$

Случай  $n = \pm 1$  соответствует  $f^{(1)} = 1 + \lambda^2/\lambda^2$ , но могут быть построены и другие решения, отвечающие степеням отображения  $\pm n$ :

$$f^{(n)}(x) = \sum_{i=1}^{n+1} \frac{\lambda_i^2}{(x-x_i)^2}. \quad (12.50)$$

Они зависят от  $n+1$  произвольных масштабных параметров  $\lambda_i$  и координат  $x_i$ . Такие решения называются псевдочастицами (из-за мнимой временной координаты) или инстантонами (благодаря их локализации во времени в отличие от трехмерных солитонов). Известно, что должны существовать и другие решения. Для  $SU(2)$ , например, общее решение с точностью до калибровочного преобразования зависит от  $8n-3$  параметров. Мы не будем останавливаться ни на этой, быстро развивающейся области исследований, ни на многих других связанных с ней задачах, таких, как модификации, возникающие в рассматриваемой картине в присутствии безмассовых фермионов.

Несмотря на их привлекательность, в дальнейшем мы не будем возвращаться к изучению глобальных свойств. Это связано с тем, что ниже будет использоваться лишь разложение теории возмущений, а оно не чувствительно к выбору вакуума, относительно которого производится.

#### 12.1.4. Калибровочная инвариантность и дополнительные связи

Уравнений движения недостаточно для того, чтобы можно было вычислить поле  $A_\mu(x)$  при заданном наборе условий Коши в момент времени  $t_0$ . Два решения, сводящиеся одно к другому посредством калибровочного преобразования  $g(x)$ , такого, что  $g(x) = e$  при  $t \leq t_0$ , удовлетворяют одним и тем же условиям Коши, но могут различаться для моментов времени  $t > t_0$ . Поэтому калибровочный произвол следует ограничить с помощью дополнительных условий, не влияющих на калибровочно-инвариантные физические наблюдаемые. Последующее рассмотрение, основанное на работах Фаддеева, приведет нас к функциональному квантованию, которое кратко обсуждалось в гл. 9.

Ограничимся рассмотрением простой компактной группы Ли. Действие, как и в абелевом случае, первоначально записывается через независимые переменные  $F$  и  $A$ :

$$I = \frac{1}{g^2} \int d^4x \text{Sp} \left[ (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - [A_\mu, A_\nu]) F^{\mu\nu} - \frac{1}{2} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right]. \quad (12.51)$$

Варьируя по  $F$  и  $A$ , получаем соответственно уравнения (12.16) и (12.29). Введем обозначения  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$  в соответствии с формулами (12.31) и, чтобы исключить последнюю величину, используем не зависящее от времени соотношение между  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$ . В дальнейшем для  $\mathbf{B}$  будем применять обозначение  $\mathbf{B}(\mathbf{A})$ . После интегрирования по частям имеем

$$\begin{aligned} I &= \frac{2}{g^2} \int d^4x \text{Sp} \left[ (\partial^0 \mathbf{A} + \nabla \mathbf{A}^0 - [\mathbf{A}^0, \mathbf{A}]) \cdot \mathbf{E} + \frac{1}{2} (\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2) \right] = \\ &= \frac{2}{g^2} \int d^4x \text{Sp} \left[ \partial^0 \mathbf{A} \cdot \mathbf{E} + \frac{1}{2} (\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2) - \mathbf{A}^0 (\nabla \cdot \mathbf{E} + [\mathbf{A}, \mathbf{E}]) \right]. \quad (12.52) \end{aligned}$$

Поскольку член  $(1/2)(\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2)$  есть не что иное, как плотность энергии, мы имеем типичную проблему системы со связями. Роль канонических переменных  $p$  и  $q$  играют здесь  $\mathbf{A}/g$  и  $\mathbf{E}/g$ . Переменные  $A^0$  играют роль множителей Лагранжа для связей

$$\Gamma(x) \equiv \nabla \cdot \mathbf{E} + [\mathbf{A}, \mathbf{E}] = 0 \quad (12.53)$$

и являются составляющими уравнений движения (12.29) при  $v = 0$ . Вследствие диагональности метрики (12.26) (что позволяет задать полностью антисимметричные структурные константы  $C_{abc}$ ) одно-временные скобки Пуассона можно записать следующим образом:

$$\{A^i_a(x), E^j_b(y)\}_{x_0=y_0} = g^2 \delta^{ij} \delta_{ab} \delta^3(x-y). \quad (12.54)$$

Нам понадобятся также выражения для скобок  $\{H, \Gamma\}$  и  $\{\Gamma, \Gamma\}$ , причем

$$H = \frac{1}{2g^2} \int d^3x \sum_a (\mathbf{E}_a^2 + \mathbf{B}_a^2). \quad (12.55)$$

Следовательно, мы имеем выражения

$$\begin{aligned} \{E_a(x), \Gamma(y)\}_{x_0=y_0} &= g^2 [E(x), t^a] \delta^3(x-y), \\ \{A_a(x), \Gamma(y)\}_{x_0=y_0} &= g^2 [D(y), t^a] \delta^3(x-y), \end{aligned} \quad (12.56)$$

в которых  $\mathbf{D}(y) = \nabla_y + \mathbf{A}(y)$  и правила перестановок учитываются как для производных, так и для элементов алгебры Ли. С другой стороны, не зависящие от времени инфинитезимальные калибровочные преобразования векторов  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{A}$  запишутся в виде

$$\begin{aligned} \delta E_a(x) &= C_{abc} \delta \alpha_b(x) E_c(x) = \\ &= \frac{1}{g^2} \int_{y_0=x_0} d^3y \left\{ E_a(x), \sum_b \delta \alpha_b(y) \Gamma_b(y) \right\}, \\ \delta A_a(x) &= -\nabla \delta \alpha_a(x) + C_{abc} \delta \alpha_b(x) A_c(x) = \\ &= \frac{1}{g^2} \int_{y_0=x_0} d^3y \left\{ A_a(x), \sum_b \delta \alpha_b(y) \Gamma_b(y) \right\}. \end{aligned}$$

Следовательно, в гамильтоновом формализме  $\Gamma$  являются генераторами не зависящих от времени калибровочных преобразований. Не производя каких-либо дальнейших выкладок, приходим к заключению, что

$$\begin{aligned} \{\Gamma_a(x), \Gamma_b(y)\}_{x_0=y_0} &= g^2 C_{abc} \Gamma_c(y) \delta^3(x-y), \\ \{H, \Gamma_a(x)\} &= 0. \end{aligned} \quad (12.57)$$

При этом уравнения движения можно записать в виде

$$\begin{aligned} \partial_0 E^i &= (\text{rot } \mathbf{B})^i + \varepsilon_{ijk} [A^j, B^k] + [A^0, E^i], \\ \partial_0 A &= -\mathbf{E} - \nabla A^0 + [A^0, \mathbf{A}], \end{aligned} \quad (12.58)$$

а уравнения для связей запишутся следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathbf{V} \cdot \mathbf{E} + [\mathbf{A}, \mathbf{E}] &= 0, \\ B^i &= (\text{rot } \mathbf{A})^i + \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} [A^j, A^k]. \end{aligned} \quad (12.59)$$

Наблюдаемые являются функционалами от величин  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{A}$ , ограниченных на многообразии (12.59), так что скобки Пуассона величины  $\Gamma$  с  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{A}$  на этом многообразии обращаются в нуль. Следовательно, такие функционалы оказываются инвариантными относительно не зависящих от времени калибровочных преобразований. Именно такой случай реализуется, например, для плотности гамильтониана.

## 12.2. КВАНТОВАНИЕ КАЛИБРОВОЧНЫХ ПОЛЕЙ

Следующий шаг состоит в том, чтобы провести квантование теории и вывести правила теории возмущений для вычисления функций Грина. Физическая интерпретация, которая служила полезным руководством в случае электродинамики, здесь отсутствует. В частности, мы не знаем, будут ли возникать в результате квантования асимптотические безмассовые состояния, подобные фотону.

### 12.2.1. Квантование при наличии связей

В методе, описанном в разд. 9.3, использовался гамильтониан и динамические переменные, заданные нековариантным способом. Тем не менее мы надеемся получить в итоге ковариантные выражения.

$r$  уравнений связей ( $r$  — порядок группы Ли)

$$\Gamma = \mathbf{V} \cdot \mathbf{E} + [\mathbf{A}, \mathbf{E}] \equiv \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} = 0 \quad (12.60)$$

на поверхности (12.60) имеют нулевые скобки Пуассона с  $H$  и друг с другом, как это предписывается соотношениями (9.152) и (9.153). Две пары  $(\mathbf{A}, \mathbf{E})$ , удовлетворяющие уравнению (12.60), эквивалентны, если они принадлежат одной и той же траектории потока (9.142):

$$d\mathbf{A}/du = \{\Gamma, \mathbf{A}\}, \quad d\mathbf{E}/du = \{\Gamma, \mathbf{E}\},$$

т. е. если они связаны друг с другом не зависящим от времени калибровочным преобразованием. При этом следует ввести дополнительное условие, которое в каждом классе эквивалентности выделит единственного представителя.



В любом случае можно произвести калибровочное преобразование, такое, что во всем пространстве будет выполняться условие

$$A^3 = 0 \quad (12.61)$$

[см. соотношение (12.23)]. Эти  $r$  дополнительных связей аксиальной калибровки определяют единственный элемент на каждой траектории, если предположить, что на бесконечности поля достаточно быстро обращаются в нуль. Поскольку калибровочные преобразования, которые сохраняют условие  $A^3 = 0$ , не зависят от переменной  $x^3$  и должны сводиться на бесконечности к тождественным преобразованиям, они согласуются с указанным предположением во всем пространстве. Это условие также запрещает проведение каких-либо глобальных преобразований

Следующий этап состоит в вычислении скобок Пуассона между  $\Gamma$  и дополнительными условиями. Преимущество аксиальной калибровки (12.61) состоит в том, что эти скобки не зависят от динамических переменных  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{A}$ . Действительно,  $\{\Gamma, A^3\}$  есть инфинитезимальное калибровочное преобразование  $A^3$ , но ограниченное условием  $A^3 = 0$ , и не зависит от  $\mathbf{A}$  или  $\mathbf{E}$ . Детерминант этих скобок, который появляется в интеграле по путям (9.159), можно включить в нормировку, и мы его не будем выписывать в дальнейшем. Производящий функционал функций Грина записывается в виде

$$e^{G_A(J)} = \int \mathcal{D}(\mathbf{E}, \mathbf{A}, A^0) \prod_x \delta(A^3) \times \\ \times \exp \left\{ \frac{2i}{g^2} \int d^4x \operatorname{Sp} \left[ \partial^0 \mathbf{A} \cdot \mathbf{E} + \frac{1}{2} (\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2) - A^0 \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} - g \mathbf{A} \cdot \mathbf{J} \right] \right\}. \quad (12.62)$$

Здесь для всех четырех компонент величины  $A^\mu$  добавлены источники, несмотря на то что  $A^3$  обращается в нуль, а по  $A^0$  можно явно проинтегрировать.

Введение источника позволяет нам «зондировать» систему. Некоторые ее отклики, такие, как функции Грина, могут зависеть от выбора калибровки и являются просто промежуточным шагом на пути получения физической информации. Разумеется, заманчиво было бы рассмотреть непосредственно калибровочно-инвариантные величины, такие, как  $S$ -матрица. К сожалению, асимптотические состояния неизвестны и любое вычисление объектов, претендующих на роль элементов  $S$ -матрицы, осложняется присутствием сильных, хотя и небезынтересных, инфракрасных расходимостей. Кроме того, теория требует перенормировки и необходимо еще найти алгоритм устранения ультрафиолетовых расходимостей, не базирующийся на функциях Грина.

Поскольку в (12.62) вектор  $\mathbf{E}$  входит в экспоненту только квадратично, мы имеем по этой переменной гауссов интеграл,

который можно вычислить:

$$e^{G_A(J)} = \int \mathcal{D}(A^\mu) \prod_x \delta(A^3) \exp \left\{ \frac{i}{g^2} \int d^4x [\mathcal{L} - 2g \operatorname{Sp}(A \cdot J)] \right\}, \quad (12.63)$$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \operatorname{Sp}(F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}).$$

В функции  $G_A(J)$  наличие нижнего индекса  $A$  подчеркивает тот факт, что функции Грина зависят от выбора калибровки. Несмотря на простоту этой аксиальной калибровки, правила Фейнмана, которые можно вывести, не являются лоренц-ковариантными. Поэтому естественно рассмотреть более общие условия. Решим эту задачу в несколько этапов.

Изучим вначале другую нековариантную калибровку, а именно кулоновскую калибровку, вводимую вспомогательным условием

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = 0. \quad (12.64)$$

Как было установлено выше, всегда можно найти локальное калибровочное преобразование, такое, чтобы удовлетворить условию (12.64). Это условие обычно рассматривалось как единственным образом определяющее калибровочное преобразование  $g$ . Иными словами, если  $\operatorname{div} \mathbf{A} = 0$ , то традиционное утверждение состоит в том, что решение уравнения  $\operatorname{div}(g\mathbf{A}) = 0$  относительно  $g$  сводится к тождеству при подходящих условиях на пространственной бесконечности. Именно так происходит в абелевом случае. Если  $\operatorname{div} \mathbf{A} = 0$ ,  $\operatorname{div} \mathbf{A}' = 0$ , где  $\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla \Lambda$ , то гармоническая функция  $\Lambda$  обращается в нуль на бесконечности, а это значит, что она равна нулю всюду. Однако, как показал недавно Грибов, в неабелевом случае такое утверждение неверно. Уравнение относительно  $g$  включает  $\mathbf{A}$  и допускает решения при достаточно больших  $\mathbf{A}$ . Выберем  $\mathbf{A}$  таким, чтобы  $\operatorname{div} \mathbf{A} = 0$ , и рассмотрим не зависящее от времени инфинитезимальное калибровочное преобразование  $A'^i = A^i + [\delta\alpha, A^i] + \partial^i \delta\alpha$ , такое, что  $\operatorname{div} \mathbf{A}' = 0$ :

$$\partial_i (\partial^i \delta\alpha + [\delta\alpha, A^i]) = 0. \quad (12.65)$$

При достаточно малых  $\mathbf{A}$  (что эквивалентно случаю достаточно малой константы связи) можно записать следующее разложение:

$$\delta\alpha = \delta\alpha^{(0)} + g\delta\alpha^{(1)} + \dots,$$

$$\Delta\delta\alpha^{(0)} = 0, \quad \Delta\delta\alpha^{(1)} - \partial_i [\delta\alpha^{(0)}, A^i] = 0,$$

и т. д.

Предположение о том, что  $\alpha$  обращается в нуль на бесконечности, означает, что то же самое справедливо для всех  $\alpha^{(k)}$ . Нетривиального решения не существует. Однако соотношение (12.65) можно рассматривать как уравнение Шредингера. Можно проверить, что для достаточно большого потенциала  $\mathbf{A}$  существуют связанные состояния, т. е. решения уравнения

$$\Delta\alpha + \partial_i [\alpha, A_i] = E\alpha,$$

при  $E < 0$ . Следовательно, для промежуточных значений потенциала  $\mathbf{A}$  должны существовать решения с нулевой энергией, быстро убывающие на бесконечности.

Это возражение, по-видимому, является препятствием для осуществления нашей программы, так как сравнение квантования в различных калибровках основывается на предположении о единственности преобразования, которое их связывает. Однако, поскольку данное явление возникает при больших

значениях потенциала, оно не сказывается на структуре ряда теории возмущений, который, по существу, является разложением по слабому полю (малые флуктуации) около данной классической конфигурации. Поэтому в дальнейшем мы будем пренебрегать эффектом Грибова. Всякий раз, когда будет делаться утверждение о единственности выбора калибровки (12.64), мы будем понимать его в смысле теории возмущений.

Скобка Пуассона между вспомогательным условием (12.64) и связью является нетривиальной и записывается в виде

$$\begin{aligned} \{\operatorname{div} \mathbf{A}_a, \Gamma_b(y)\}_{x_0=y_0} &= \frac{\delta}{\delta \alpha_b(y)} \operatorname{div} \mathbf{A}'_a(x) = \\ &= [-\delta_{ab} \Delta_x + C_{abc} \nabla_x \cdot \mathbf{A}_c(x)] \delta^3(x-y). \end{aligned} \quad (12.66)$$

Введем оператор  $\mathcal{M}$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{ab}(x, y) &= [-\Delta_x \delta_{ab} + C_{abc} \nabla_x \cdot \mathbf{A}_c(x)] \delta^3(x-y) = \\ &= [-\Delta_x \delta_{ab} + C_{abc} \mathbf{A}_c(x) \cdot \nabla_x] \delta^3(x-y). \end{aligned} \quad (12.67)$$

Последнее выражение справедливо только в том случае, когда  $\mathcal{M}$  определено на многообразии, ограниченном связями. Таким образом, в кулоновской калибровке производящий функционал для функций Грина имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} e^{G_c(J)} &= \int \mathcal{D}(A) \prod_i \left[ \det \mathcal{M} \prod_x \delta(\nabla \cdot \mathbf{A}) \right] \times \\ &\times \exp \left\{ \frac{i}{g^2} \int d^4x [\mathcal{L} - 2g \operatorname{Sp}(J \cdot A)] \right\}. \end{aligned} \quad (12.68)$$

Изменяя нормировку в этом выражении,  $\det \mathcal{M}$  можно заменить на  $\det \mathcal{M} \mathcal{M}_0^{-1}$ , где

$$\mathcal{M}_0 = -\Delta \delta_{ab} \delta^3(x-y).$$

Используя соотношения  $\mathcal{M} \mathcal{M}_0^{-1} = \exp[\operatorname{Sp} \ln(\mathcal{M} \mathcal{M}_0^{-1})]$  и  $\operatorname{Sp} \ln(1+A) = \sum [(-1)^{n-1}/n] \operatorname{Sp} A^n$ , можно вывести правила Фейнмана в этой калибровке. Однако они также не будут иметь ковариантный вид.

### 12.2.2. Интегрирование по калибровочной группе

До сих пор используемые нами калибровочные преобразования не зависели от времени. Для того чтобы иметь явную лоренц-ковариантность, удобно ввести также преобразования, зависящие от времени. Мы осуществим это попутно с решением другой задачи, а именно с доказательством эквивалентности аксиальной и кулоновской калибровок.

Исключим взаимодействие с внешним источником  $J$ , заменив последний источниками, связанными с калибровочно-инвариантными величинами  $O_i(x)$ , и рассмотрим функциональный интеграл (в данный момент времени)

$$X = \int \mathcal{D}(A, E) \prod_x \delta(A^0) \mu(A, E), \quad (12.69)$$

где  $\mu$  — калибровочно-инвариантный функционал:

$$\mu(A, E) = \exp \left\{ i \int d^4x [\mathcal{L}(x) + J_i(x) O_i(x)] \right\}.$$

При калибровочном преобразовании

$$A \rightarrow (gA) = -(\nabla g) g^{-1} + gAg^{-1}, \quad E \rightarrow (gE) = gEg^{-1}, \quad (12.70)$$

где  $g$  рассматривается как произведение  $\prod_x g(x)$ ,  $\mu$  является инвариантом. Таким же свойством обладает мера  $\mathcal{D}(A, E)$ , поскольку калибровочные преобразования являются каноническими. Отсюда следует, что

$$X = \int \mathcal{D}(A, E) \prod_x \delta^3(gA^3) \mu(A, E).$$

Поскольку условия  $\nabla \cdot A = 0$  или  $A^3 = 0$  представляют собой два эквивалентных способа однозначного выделения (в рамках теории возмущений) представителя в каждом классе эквивалентности, то должно существовать калибровочное преобразование  $g_0(A)$ , такое, что

$$g_0 A^3 = 0 \Rightarrow \nabla \cdot A = 0. \quad (12.71)$$

Вычислим якобиан этого преобразования. Положим

$$\Delta^{-1}(A) \equiv \int \mathcal{D}(g) \prod_x \delta(\nabla \cdot gA), \quad (12.72)$$

где через  $\mathcal{D}(g)$  обозначено бесконечное произведение инвариантных мер на компактных группах, изоморфных группе  $G$  в каждой пространственной точке  $x$ ,  $\mathcal{D}(g) = \prod_x Dg(x)$

Инвариантность меры  $Dg' = D(gg')$  приводит к равенству

$$\Delta(gA) = \Delta(A). \quad (12.73)$$

Умножим выражение (12.69) на величину

$$1 = \Delta(A) \int \mathcal{D}(g) \prod_x \delta(\nabla \cdot gA) \quad (12.74)$$

и изменим порядок интегрирования. Тогда, используя соотношение (12.73), выражение (12.69) можно записать в виде

$$\begin{aligned} X &= \int \mathcal{D}(A, E) \mu(A, E) \prod_x \delta[A^3(x)] \int \mathcal{D}(g) \prod_y \delta[\nabla \cdot gA(y)] \Delta(A) = \\ &= \int \mathcal{D}(A, E) \mu(A, E) \Delta(A) \prod_y \delta[\nabla \cdot A(y)] \int \mathcal{D}(g) \prod_x \delta[g^{-1} A^3(x)]. \end{aligned} \quad (12.75)$$

Вследствие инвариантности меры  $\mathcal{D}(g)$  в последнем интеграле можно заменить  $g^{-1}$  на  $gg_0$ , где величина  $g_0$  такова, что

$g_0 A^3 = 0$ . Для упрощения введем обозначение  $B = g_0 A$  и запишем

$$\int \mathcal{D}(g) \prod_x \delta[g^{-1} A^3(x)] = \int \mathcal{D}(g) \prod_x \delta[g B^3(x)].$$

Поскольку  $B^3 = 0$ , достаточно (по крайней мере в рамках теории возмущений) рассмотреть лишь инфинитезимальные преобразования  $g$  и выполнить интегрирование по группе в окрестности единицы:

$$g(x) = e + \alpha(x),$$

где  $\alpha$  — бесконечно малая величина. При этом мера в каждой точке  $Dg(x)$  сводится к произведению  $\prod_i d\alpha_i(x)$ , а

$$g B^3(x) \approx -\frac{\partial \alpha(x)}{\partial x^3}.$$

Следовательно, интеграл

$$\int \mathcal{D}(g) \prod_x \delta[g B^3(x)] = \int \mathcal{D}(\alpha) \prod_x \delta\left[\frac{\partial \alpha(x)}{\partial x^3}\right]$$

не зависит от  $A$ , и его можно включить в нормировочный множитель  $N$ , не зависящий от  $\mu$ . Таким образом, мы имеем

$$X = N \int \mathcal{D}(A, E) \Delta(A) \mu(A, E) \prod_x \delta[\nabla \cdot A(x)]. \quad (12.76)$$

Чтобы перейти к (12.68), необходимо показать, что объект  $\Delta(A)$  пропорционален детерминанту оператора  $\mathcal{M}$ , определяемого выражением (12.67). Поскольку в (12.76)  $\Delta(A)$  умножается на  $\delta(\nabla \cdot A)$ , достаточно выполнить вычисления лишь для поперечных полей  $A$ . При этом в интеграл, определяющий величину  $\Delta$ , вклад дают лишь бесконечно малые  $g$ :

$$\begin{aligned} \Delta^{-1}(A) &= \int \mathcal{D}(g) \prod_x \delta[\nabla \cdot g A(x)] = \\ &= \int \mathcal{D}(\alpha) \prod_x \delta(\nabla \cdot \{-\nabla \alpha(x) + [\alpha(x), A(x)]\}) = \det^{-1} \mathcal{M}, \end{aligned} \quad (12.77)$$

причем, как и в (12.67), имеем

$$\mathcal{M}_{ab}(x, y) = \frac{\delta}{\delta \alpha_b(y)} [\nabla \cdot g A_a(x)] \Big|_{\alpha=0}.$$

Мы показали эквивалентность аксиальной и кулоновской калибровок лишь в той мере, в какой это касается вычисления калибровочно-инвариантных величин  $\mu(A, E)$ . Вопрос о том, что произойдет с источником и, следовательно, с функциями Грина, не изучался. Однако в предложенном выше выводе использовались только локальные и канонические замены полевых переменных.

На основании теоремы эквивалентности, упоминавшейся в гл. 9, можно ожидать, что такие преобразования не изменяют физического содержания теории.

Рассмотренный выше метод интересен тем, что позволяет работать с зависящими от времени калибровочными преобразованиями и налагать ковариантные дополнительные условия. Предположим, что таким условием является

$$\mathcal{F}(A) = 0. \quad (12.78)$$

Здесь  $\mathcal{F}$  — локальный функционал поля  $A$ , т. е. функция поля  $A(x)$  и его производных. Этот функционал принимает значения в соответствующей алгебре Ли и может зависеть от  $A^0$ . Используя тот же самый метод, что и выше, находим с точностью до нормировки,

$$X = \int \mathcal{D}(A) \prod_x \delta[\mathcal{F}(A)] \det \mathcal{M}_{\mathcal{F}} \mu(A).$$

Таким образом мы пришли к рассмотрению функций Грина, определяемых производящим функционалом

$$e^{G_{\mathcal{F}}(J)} = \int \mathcal{D}(A) \prod_x \delta[\mathcal{F}(A)] \det \mathcal{M}_{\mathcal{F}} \times \\ \times \exp \left\{ \frac{i}{g^2} \int d^4x [\mathcal{L} - 2g \operatorname{Sp}(J \cdot A)] \right\}, \quad (12.79)$$

причем величина

$$\Delta_{\mathcal{F}}^{-1}(A) = (\det \mathcal{M}_{\mathcal{F}})^{-1} = \int \mathcal{D}(g) \prod_x \delta[\mathcal{F}(gA)] \quad (12.80)$$

вычисляется для  $\mathcal{F}(A) = 0$ . В интеграл дают вклад лишь инфинитезимальные преобразования, поэтому

$$\mathcal{M}_{ab}(x, y) = \frac{\delta}{\delta \alpha_b(y)} \mathcal{F}_a[gA(x)] \Big|_{g=e} = \\ = \frac{\delta}{\delta \alpha_b(y)} \left[ \frac{\delta \mathcal{F}_a}{\delta A^{\mu c}(x)} D_{cd}^{\mu} \alpha_d(x) \right]_{\alpha=0} = \quad (12.81) \\ = \frac{\delta \mathcal{F}_a}{\delta A^{\mu c}(x)} D_{x,cb}^{\mu} \delta^4(x-y),$$

где

$$D_{x,cb}^{\mu} = \partial_x^{\mu} \delta_{cb} + C_{cba} A_a^{\mu}(x).$$

Если воспользоваться, например, лоренцевой калибровкой

$$\mathcal{F}(A) \equiv \partial_{\mu} A^{\mu} = 0,$$

то оператор  $\mathcal{M}$  запишется в виде

$$\mathcal{M}_{I,ab}(x, y) = \partial D^1{}_{ab} \delta^4(x-y) = \\ = [\square \delta_{ab} + C_{abc} \partial_x^{\mu} A_{\mu c}(x)] \delta^4(x-y) = \\ = [\square \delta_{ab} + C_{abc} A_{\mu c}(x) \partial_x^{\mu}] \delta^4(x-y). \quad (12.82)$$

Возвращаясь к аксиальной калибровке

$$\mathcal{F} \equiv n \cdot A = 0,$$

мы убеждаемся, что на множестве потенциалов, ограниченных этим условием, оператор  $\mathcal{M}$  не зависит от  $A$ ; следовательно,  $\det \mathcal{M}$  может быть включен в нормировку.

Вместо того чтобы применять каноническую гамильтонову схему квантования и производить затем различные операции с функционалами, мы могли бы модифицировать плохо определенный интеграл

$$X = \int \mathcal{D}(A) \mu(A),$$

вставив в него единичный множитель, записанный в виде

$$1 = \int \mathcal{D}(g) \Delta(A) \prod_x \delta[\mathcal{F}(gA)]$$

Калибровочная инвариантность величин  $\mu(A)$ ,  $\Delta(A)$  и меры  $\mathcal{D}(A)$  позволила бы тогда факторизовать бесконечный групповой объем

$$X = \left[ \int \mathcal{D}(g) \right] \int \mathcal{D}(A) \mu(A) \Delta(A) \prod_x \delta[\mathcal{F}(A)].$$

Этот грубый прием хорош тем, что он явно демонстрирует бесконечное вырождение степеней свободы, которое и приводит к данной проблеме.

Предыдущий анализ нетрудно обобщить на случай дополнительных условий вида

$$\mathcal{F}(A) = C,$$

где  $\mathcal{F}$  и заданная функция  $C(x)$  принимают значения в алгебре Ли. При этом оператор  $\mathcal{M}$ , входящий в (12.80), не претерпевает никаких изменений.

Вариации  $(\delta/\delta g)[\mathcal{F}(gA) - C]$  не зависят от  $C$ , и единственная зависимость  $\Delta_{\mathcal{F}}$  от  $C$  обусловлена наличием калибровочного преобразования  $g_0$ , такого, что  $\mathcal{F}(g_0A) = C$ :

$$\Delta_{\mathcal{F}}(A, C) = \Delta(g_0A).$$

Можно написать следующие равенства:

$$1 = \int \mathcal{D}(g) \Delta(g_0A) \delta[\mathcal{F}(gA) - C] = \int \mathcal{D}(g) \Delta(gA) \delta[\mathcal{F}(gA) - C],$$

где второе равенство обеспечивается  $\delta$ -функцией, приводящей к  $g = g_0$ . Таким образом, какой-либо след от  $C$  исчезает.

Поскольку калибровочно-инвариантные величины не должны быть чувствительными к изменениям дополнительных условий, фиксирующих калибровку, можно провести усреднение по  $C$

с гауссовым весом, т. е. заменить  $\delta[\mathcal{F}(A) - C]$  величиной

$$\int \mathcal{D}(C) \exp \left[ \frac{i\lambda}{g^2} \int d^4x \operatorname{Sp}(C^2) \right] \delta[\mathcal{F}(A) - C] = \\ = \exp \left\{ \frac{i\lambda}{g^2} \int d^4x \operatorname{Sp}[\mathcal{F}^2(A)] \right\}.$$

В своем окончательном виде производящий функционал запишется следующим образом:

$$e^{G(J)} = \int \mathcal{D}(A) \det \mathcal{M}_{\mathcal{F}} \exp \left( \frac{i}{g^2} \int d^4x \{ \mathcal{L}(x) + \right. \\ \left. + \lambda \operatorname{Sp}[\mathcal{F}^2(A)] - 2g \operatorname{Sp}(J \cdot A) \} \right). \quad (12.83)$$

Разложение  $\det \mathcal{M}$  по теории возмущений приводит к нелокальным взаимодействиям между калибровочными полями. Этот детерминант полезно подвергнуть еще одной операции, т. е. записать его как локальное взаимодействие некоторых фиктивных полей. Рассматривая интегрирование на алгебре Грассмана, мы получили формулу (9.76):

$$\det \mathcal{M} = \int \prod_k d\bar{\eta}_k d\eta_k e^{-\bar{\eta} \mathcal{M} \eta},$$

где  $\mathcal{M}$  — матрица  $n \times n$ . Заменяя  $\mathcal{M}$  на  $i\mathcal{M}$  и обобщая этот результат на бесконечную алгебру, можно переписать  $\det \mathcal{M}_{\mathcal{F}}$  в виде функционального интеграла

$$e^{G(J)} = \int \mathcal{D}(A, \eta, \bar{\eta}) \exp \left( \frac{i}{g^2} \int d^4x \{ \mathcal{L} + \lambda \operatorname{Sp}[\mathcal{F}^2(A)] - \right. \\ \left. - \bar{\eta} \mathcal{M} \eta - 2g \operatorname{Sp}(J \cdot A) \} \right). \quad (12.84)$$

Модифицированный, или эффективный, лагранжиан

$$\mathcal{L}_{\text{эфф}}(A, \eta, \bar{\eta}) = \mathcal{L}(A) + \lambda \operatorname{Sp} \mathcal{F}^2(A) - \bar{\eta} \mathcal{M} \eta \quad (12.85)$$

включает в себя калибровочное поле  $A$  и новые антикоммутирующие вспомогательные скалярные поля  $\eta$  и  $\bar{\eta}$ , так называемые «духи» Фаддеева и Попова. Подчеркнем, что эти поля нефизические и участвуют лишь в алгебраических преобразованиях. Чтобы сохранить глобальную инвариантность,  $\eta$  и  $\bar{\eta}$  должны преобразовываться по присоединенному представлению. В лагранжиане (12.85) член, представляющий собой дух, записывается в виде

$$\int d^4x \bar{\eta} \mathcal{M}_{\mathcal{F}} \eta = \iint d^4x d^4y \bar{\eta}_a(x) \frac{\delta \mathcal{F}_a[A(x)]}{\delta \alpha_b(y)} \eta_b(y) = \\ = \int d^4x \bar{\eta}_a(x) \frac{\partial \mathcal{F}_a(A)}{\partial A^{\lambda b}} D^{\mu}_{bc} \eta_c(x), \quad (12.86) \\ (D^{\lambda} \eta)_a = \partial^{\mu} \eta_a + C_{abc} \eta_b A^{\mu}_c.$$



Вообще говоря, ядро  $\mathcal{M}_{\mathcal{F}}$  не является эрмитовым, поэтому в диаграммах Фейнмана линии, соответствующие духам, должны иметь определенную ориентацию. Например, если в качестве  $\mathcal{F}$  берется лоренц-ковариантное условие  $\mathcal{F} = \partial_{\mu} A^{\mu}$ , то

$$\int d^4x \bar{\eta} \mathcal{M} \eta = \int d^4x \bar{\eta}_a \partial_{\mu} D^{\mu}_{ab} \eta_b. \quad (12.87)$$

В этом случае лагранжиан (12.85) принимает вид

$$\mathcal{L}_{\text{эфф}} = \frac{1}{2} \text{Sp} (F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}) + \lambda \text{Sp} (\partial \cdot A)^2 - \bar{\eta} \partial_{\mu} D^{\mu} \eta. \quad (12.88)$$

Наличие здесь параметра  $\lambda$  (обозначаемого также в литературе как  $\alpha^{-1}$  или  $\xi^{-1}$ ) отражает тот факт, что выбор вспомогательных условий является произвольным. Выбор  $\lambda = 1$  или  $\lambda^{-1} = 0$  принято называть соответственно калибровками Фейнмана и Ландау.

### 12.2.3. Правила Фейнмана

Выражение (12.88) дает искомое решение проблемы квантования, так как оно представляет собой локальную лоренц-ковариантную форму эффективного лагранжиана. Часть лагранжиана, квадратичная по  $A$ , оказывается невырожденной благодаря тому, что условие  $\mathcal{F} = C$  выделяет единственного представителя в каждом классе эквивалентности.

Теперь мы можем написать правила Фейнмана. Произведем мультипликативную перенормировку полей  $A$ ,  $\eta$  и  $\bar{\eta}$  с помощью константы связи  $g$ . Поскольку диаграммы Фейнмана также включают и духовые поля, полезно ввести (антикоммутирующие) источники  $\xi$ ,  $\bar{\xi}$ , связанные с  $\eta$ ,  $\bar{\eta}$ . В результате получаем

$$e^G(J, \xi, \bar{\xi}) = \int \mathcal{D}(A, \eta, \bar{\eta}) \exp \left\{ i \int d^4x [\mathcal{L}_{\text{эфф}}(A, \eta, \bar{\eta}; g, \lambda) + J^{\mu}_a A_{\mu a} + \bar{\xi}_a \eta_a + \bar{\eta}_a \xi_a] \right\}; \quad (12.89)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{эфф}}(A, \eta, \bar{\eta}; g, \lambda) = & -\frac{1}{4} F_{\mu\nu a} F^{\mu\nu}_a - \frac{\lambda}{2} (\partial_{\mu} A^{\mu}_a)^2 + \\ & + \partial_{\mu} \bar{\eta}_a (D^{\mu} \eta)_a, \\ F^{\mu\nu}_a = & \partial^{\mu} A^{\nu}_a - \partial^{\nu} A^{\mu}_a - g C_{abc} A^{\mu}_b A^{\nu}_c, \quad (12.90) \\ (D^{\mu} \eta)_a = & \partial^{\mu} \eta_a - g C_{abc} A^{\mu}_b \eta_c. \end{aligned}$$

Пропагаторы калибровочных и духовых полей соответственно равны

$$\begin{aligned} \mu \xrightarrow{k} \nu \quad \{ -i [\square - (1-\lambda) \partial \otimes \partial] \}^{-1} = \\ a \quad b \quad = -i \delta_{ab} \left[ \frac{g_{\mu\nu}}{k^2 + i\epsilon} - (1-\lambda^{-1}) \frac{k_{\mu} k_{\nu}}{(k^2 + i\epsilon)^2} \right], \quad (12.91) \\ a \xrightarrow{k} b \\ k \quad (i \square)^{-1} = \frac{i \delta_{ab}}{k^2 + i\epsilon} \end{aligned}$$

и при больших импульсах ведут себя как  $k^{-2}$ . Следовательно, при подсчете степеней расходимости в ультрафиолетовом пределе оба поля имеют размерность, равную единице. Константа связи  $g$  является безразмерной. Имеется три типа вершин. Если мы будем направлять духовые линии от  $\bar{\eta}$  к  $\eta$  (как мы поступали в случае истинных фермионов) и включим множитель  $i$  из разложения экспоненты  $\exp\left[i \int d^4z \mathcal{L}_{\text{вз}}(z)\right]$ , то получим

$$gC_{abc}(2\pi)^4 \delta^4(p+q+r) [g_{\mu\nu}(p-q)_\nu + g_\nu(q-r)_\mu + g_{\rho\mu}(r-p)_\nu],$$

$$-ig^2(2\pi)^4 \delta^4(p+q+r+s) \times$$

$$\times \{C_{eab}C_{ecd}(g_{\mu\rho}g_{\nu\sigma} - g_{\mu\sigma}g_{\nu\rho}) +$$

$$+ C_{eac}C_{edb}(g_{\mu\sigma}g_{\rho\nu} - g_{\mu\nu}g_{\rho\sigma}) +$$

$$+ C_{ead}C_{ebc}(g_{\mu\nu}g_{\sigma\rho} - g_{\mu\rho}g_{\sigma\nu})\}, \quad (12.92)$$

$$-gC_{abc}p_\mu(2\pi)^4 \delta^4(k+p-q).$$

Следует заметить, что последняя вершина (как и предполагалось) имеет асимметричный характер. По нашему соглашению выходящая духовая линия переносит импульс, возникающий при дифференцировании. При практических вычислениях установленные выше правила необходимо дополнить предписаниями, приведенными в гл. 6 (см. т. 1), а именно интегрированиями с мерой  $d^4k/(2\pi)^4$  по всем внутренним импульсам, выделением  $\delta$ -функции по полной энергии-импульсу, факторами симметрии и множителем  $(-1)$  для каждой духовой петли.

Обсуждение фейнмановских правил мы завершим рассмотрением случая, когда поля материи связаны с калибровочными полями минимальным образом. К лагранжиану (12.90) добавим члены<sup>1)</sup>

$$\mathcal{L}_f = i\bar{\psi}\underline{D}\psi - m\bar{\psi}\psi$$

и

(12.93)

$$\mathcal{L}_b = (D^\mu\phi)^\dagger(D_\mu\phi) - m^2\phi^\dagger\phi - P(\phi^\dagger\phi)$$

<sup>1)</sup> Здесь и далее буквы  $\underline{D}$  и  $\underline{B}$  (см. ниже) обозначают символы Фейнмана.—  
Прим. ред.

соответственно для фермионных и бозонных полей. Здесь  $P$  — некоторый полином, а  $\psi$  и  $\phi$  — мультиплеты полей, преобразующиеся по определенному представлению  $R$  калибровочной группы, инфинитезимальные генераторы которого являются антиэрмитовыми матрицами  $T^a$ . Напомним, что оператор  $D^\mu$  определяется следующим образом:

$$D^\nu = \partial^\nu - g A^\mu_a T^a.$$

Дополнительные фейнмановские правила записываются в виде

$$\begin{array}{l}
 \begin{array}{c} B \quad P \quad A \\ \bullet \quad \longrightarrow \quad \bullet \\ \beta \quad \quad \quad \alpha \end{array} \quad \left( \frac{i}{p-m} \right)_{\alpha\beta} \delta_{AB} \quad \text{и} \quad \frac{i}{p^2-m^2} \delta_{AB}, \\
 \\
 \begin{array}{c} k \\ \uparrow \\ \begin{array}{c} p \quad \quad \quad p' \\ \swarrow \quad \quad \searrow \\ \beta \quad B \quad A \quad \alpha \end{array} \end{array} \quad g (\gamma_\mu)_{\alpha\beta} T^a_{AB} \times \quad \quad \quad g T^a_{AB} (p_\mu + p'_\mu) \times \\
 \times (2\pi)^4 \delta^4(p-p'-k) \quad \quad \quad \text{и} \quad \times (2\pi)^4 \delta^4(p-p'-k), \\
 \\
 \begin{array}{c} k \quad \mu a \quad \nu b \quad k' \\ \swarrow \quad \quad \searrow \\ \begin{array}{c} p \quad \quad \quad p' \\ \swarrow \quad \quad \searrow \\ B \quad \quad A \end{array} \end{array} \quad \quad \quad (12.94) \\
 \quad \quad \quad - i g^2 g_{\mu\nu} \{T^a, T^b\}_{AB} \times \\
 \quad \quad \quad \times (2\pi)^4 \delta^4(p-p'-k-k').
 \end{array}$$

Выражения в первой колонке здесь относятся к фермионам, а во второй — к бозонам. В последнем случае добавочные вершины возникают за счет самодействия  $P(\phi^\dagger\phi)$ .

Для полноты изложения приведем здесь также правила Фейнмана в аксиальной калибровке. С этой целью добавим к лагранжиану член вида  $(n \cdot A)^2$ :

$$\mathcal{L}_{\text{эфф}} = \sum_a \left[ -\frac{1}{4} F_{\mu\nu a} F^{\mu\nu a} - \frac{\lambda}{2} (n_\mu A^\mu_a)^2 \right]. \quad (12.95)$$

Аксиальная калибровка получается при  $\lambda^{-1} \rightarrow 0$ . Как было показано выше, никаких духовых членов в этом пределе не требуется. Пропагатор равен

$$\begin{array}{c} \mu \quad k \quad \nu \\ \bullet \quad \quad \quad \bullet \\ \alpha \quad \quad \quad \beta \end{array} = -i \delta_{ab} \left[ \frac{g_{\mu\nu}}{k^2} + \frac{(k^2 + \lambda n^2) k_\mu k_\nu}{\lambda k^2 (k \cdot n)^2} - \frac{k_\mu n_\nu + k_\nu n_\mu}{k^2 k \cdot n} \right] \rightarrow \quad (12.96) \\
 \xrightarrow{\lambda^{-1} \rightarrow 0} -i \delta_{ab} \frac{g_{\mu\nu} - (k_\mu n_\nu + k_\nu n_\mu) (k \cdot n)^{-1} + n^2 (k \cdot n)^{-2} k_\mu k_\nu}{k^2}.$$

Проблемы, возникающие из-за нового типа сингулярности в знаменателях, здесь исследоваться не будут.

Замеим, что пропагатор ведет себя как  $k^{-2}$  только в пределе  $\lambda^{-1} \rightarrow 0$ . Наконец, вершины  $A^3$  и  $A^4$  являются такими же, как и в (12.92).

## 12.3. ЭФФЕКТИВНОЕ ДЕЙСТВИЕ В ОДНОПЕТЛЕВОМ ПРИБЛИЖЕНИИ

Установленные выше правила Фейнмана приводят к теории, перенормируемой в соответствии с подсчетом степеней. Действительно, все пропагаторы ведут себя как  $k^{-2}$ , а все вершины имеют размерность четыре. Однако задача состоит в том, чтобы показать, что при перенормировке сохраняется калибровочная инвариантность. Прежде чем приступить к довольно длинному и технически сложному доказательству этого утверждения во всех порядках теории возмущений, поучительно провести явное вычисление эффективного действия в однопетлевом приближении.

### 12.3.1. Общий вид

Чтобы справиться с многочисленными индексами, воспользуемся компактной функциональной записью. Эффективное действие получим тем же способом, что и выражения (6.73) (см. т. 1) или (9.107), т. е. с помощью преобразования Лежандра

$$i\Gamma(A, \eta, \bar{\eta}) = G(J, \xi, \bar{\xi}) - i \int d^4x (J \cdot A + \bar{\xi} \eta + \bar{\eta} \xi), \quad (12.97)$$

где 
$$A = \frac{\delta G}{i\delta J}, \quad \eta = \frac{\delta G}{i\delta \xi}, \quad \bar{\eta} = -\frac{\delta G}{i\delta \bar{\xi}}.$$

Лоренцевы и групповые индексы здесь опущены. Производные по антикоммутирующим переменным понимаются как левые производные. Иными словами, мы будем писать

$$\delta G(J, \xi, \bar{\xi}) = \int d^4x \left[ \delta \xi(x) \frac{\delta G}{\delta \xi(x)} + \delta \bar{\xi}(x) \frac{\delta G}{\delta \bar{\xi}(x)} \right] + \int d^4x d^4y \delta \xi(x) \delta \bar{\xi}(y) \frac{\delta^2 G}{\delta \bar{\xi}(y) \delta \xi(x)} + \dots$$

В выражении для  $\bar{\eta}$  знак минус [см. выражения (12.97)] появляется благодаря этому предписанию.

В низшем порядке величина  $\Gamma$  сводится к действию:

$$\Gamma^{(0)} = I(A, \eta, \bar{\eta}) = \int d^4x \mathcal{L}_{\text{эфф}}(A, \eta, \bar{\eta}; g, \lambda), \quad (12.98)$$

в то время как первая поправка  $\Gamma^{(1)}$  получается в результате гауссова интегрирования по штрихованным переменным действия, разложенного в ряд по этим переменным до второго порядка:

$$I \approx \int d^4x \mathcal{L}_{\text{эфф}}(A + A', \eta + \eta', \bar{\eta} + \bar{\eta}'; g, \lambda).$$

Напишем квадратичную форму в явном виде:

$$I_q = 2 \int d^4x \operatorname{Sp} \left\{ \frac{1}{4} ([D_\mu, A'_\nu] - [D_\nu, A'_\mu]) ([D^\mu, A'^\nu] - [D^\nu, A'^\mu]) - \right. \\ \left. - \frac{g}{2} F^{\mu\nu} [A'_\mu, A'_\nu] + \frac{\lambda}{2} (\partial^\mu A'_\mu)^2 - \partial_\mu \bar{\eta}' [D^\mu, \eta'] + \right. \\ \left. + g \partial_\mu \bar{\eta} [A'_\mu, \eta'] + g \partial_\mu \bar{\eta}' [A'^\mu, \eta] \right\}. \quad (12.99)$$

Здесь мы использовали матричные обозначения:  $\eta = \eta_a t^a$  и т. п. Эта довольно сложная форма смешивает коммутирующие и антикоммутирующие переменные. Напомним формулы

$$\int \prod_{i=1}^n \frac{dx_i}{(2\pi)^{1/2}} e^{-xQx/2 + u \cdot x} = [\det Q]^{-1/2} e^{uQ^{-1}u/2}, \quad (12.100) \\ \int \prod_{i=1}^n d\bar{\eta}_i d\eta_i e^{-i\bar{\eta}\mathcal{M}\eta + \bar{\xi}\eta + \bar{\eta}\xi} = \det \mathcal{M} e^{\bar{\xi}\mathcal{M}^{-1}\xi},$$

для гауссовых интегралов соответственно по коммутирующим и антикоммутирующим переменным. В смешанном случае получаем

$$\int \prod \frac{dx_i}{(2\pi)^{1/2}} \prod (d\bar{\eta}_i d\eta_i) \exp \left( -\frac{1}{2} xQx + \bar{\eta}\alpha x + x\bar{\beta}\eta - \bar{\eta}\mathcal{M}\eta + u \cdot x + \right. \\ \left. + \bar{\xi}\eta + \bar{\eta}\xi \right) = \det \mathcal{M} [\det \tilde{Q}]^{-1/2} \exp \left\{ \frac{1}{2} [u + \bar{\xi}\mathcal{M}^{-1}\alpha + \right. \\ \left. + (\bar{\beta}\mathcal{M}^{-1}\xi)^T] \tilde{Q}^{-1} [u + (\bar{\xi}\mathcal{M}^{-1}\alpha)^T + \bar{\beta}\mathcal{M}^{-1}\xi] + \bar{\xi}\mathcal{M}^{-1}\xi \right\}. \quad (12.101)$$

Матрицы  $Q$  и  $\mathcal{M}$  содержат коммутирующие элементы, элементы матриц  $\alpha$  и  $\bar{\beta}$  принадлежат алгебре Грассмана, а  $\tilde{Q}$  представляет собой симметричную матрицу:

$$\tilde{Q} = Q - \bar{\beta}\mathcal{M}^{-1}\alpha - (\bar{\beta}\mathcal{M}^{-1}\alpha)^T.$$

Выражение (12.101) получается путем повторного применения предшествующих формул. Другой способ его получения основан на том факте, что точное вычисление гауссовых интегралов можно выполнить методом перевала.

Эти формулы можно применить к квадратичной форме (12.99). При этом

$$(\tilde{Q}A')^\mu \equiv [D_\nu, [D^\nu, A'^\mu] - [D^\mu, A'^\nu]] - g [F^{\mu\nu}, A'^\nu] + \lambda \partial^\mu \partial \cdot A' + \\ + g \{ \partial^\mu \bar{\eta}, \eta' \} + g \{ \partial^\mu \bar{\eta}', \eta \}, \quad (12.102)$$

а  $\eta'$  и  $\bar{\eta}'$  можно найти из уравнений

$$\mathcal{M}\eta' \equiv \partial_\mu [D^\mu, \eta'] = g \partial_\mu [A'^\mu, \eta], \\ [D^\mu, \partial_\mu \bar{\eta}'] = -g [\partial_\mu \bar{\eta}, A'_\mu]. \quad (12.103)$$

Если  $g=0$ , то  $\mathcal{M}$  и  $\tilde{Q}$  сводятся к операторам

$$\mathcal{M}_0 = \square, \quad Q_0 = \square - (1-\lambda) \partial \otimes \partial.$$

Обратными по отношению к этим операторам являются свободные пропагаторы. Следовательно, эффективное действие в однопетлевом приближении, нормированное так, что  $\Gamma^{(1)}(0)=0$ , дается выражением

$$i\Gamma^{(1)}(A, \bar{\eta}, \eta) = \text{sp} \left[ \ln (\mathcal{M}_0^{-1} \mathcal{M}) - \frac{1}{2} \ln (\tilde{Q} Q_0^{-1}) \right]. \quad (12.104)$$

След здесь берется по внутренним и лоренцевым индексам и по пространственно-временным переменным.

Невозможно получить более точное выражение. Поскольку матрицы  $Q$  и  $\mathcal{M}$  действуют в присоединенном представлении, удобнее рассматривать  $A_\mu$  и  $\eta$  как матрицы в этом же представлении [ср. с соотношением (12.9в)]. В явном виде имеем

$$\begin{aligned} (A^\mu)_{bc} &= A_a^\mu T_{bc}^\alpha = C_{bac} A_a^\mu, \\ (\eta)_{bc} &= C_{bac} \eta_a. \end{aligned} \quad (12.105)$$

Таким образом, нормировка (12.26) заменяется следующей:

$$\text{Sp} (T^a T^b) = - \sum_{c,d} C_{cda} C_{cdb} = - C\delta^{ab}. \quad (12.106)$$

Для группы  $SU(N)$  имеем  $C=N$ . Используя введенные нами обозначения, запишем

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_0^{-1} \mathcal{M} (1, 2) &= \delta (1, 2) - ig \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ik \cdot (x_1 - x_2)}}{k^2} k \cdot A (x_2), \\ QQ_0^{-1} (1, 2) &= \delta (1, 2) + g \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4 (k^2)^2} \times \\ &\times \{ (-ik \cdot A + \partial A - gA^2) [k^2 g_{\mu_1 \mu_2} - (1 - \lambda^{-1}) k_{\mu_1} k_{\mu_2}] + \\ &+ [k^2 A_{\mu_2} - (1 - \lambda^{-1}) k \cdot A k_{\mu_2}] (ik_{\mu_1} + gA_{\mu_1}) - \\ &- [k^2 \partial_{\mu_2} - (1 - \lambda^{-1}) k_{\mu_2} k \cdot \partial] A_{\mu_1} + \\ &+ [k^2 F_{\mu_1 \mu_2} - (1 - \lambda^{-1}) F_{\mu_1 \rho} k^\rho k_{\mu_2}] \}_{x_1} e^{-ik \cdot (x_1 - x_2)}. \end{aligned} \quad (12.107)$$

В фигурных скобках аргументом функций  $A$  и  $F$  является  $x_1$ , а производные действуют справа на все зависящие от  $x_1$  члены. Ядро  $\tilde{Q}$  отличается от  $Q$  тем, что в него входят духи, которые не выписывались здесь в явном виде. В дальнейшем для функции и ее фурье-образа мы будем применять одно и то же обозначение:

$$A(x) = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} e^{-ik \cdot x} A(k).$$

Перейдем теперь к изучению условно расходящихся функций.

12.3.2. Двухточечная функция

Разлагая  $\text{sp ln}(\mathcal{M}_0^{-1}\mathcal{M}) - \frac{1}{2} \text{sp ln}(Q_0^{-1}\tilde{Q})$ , мы получаем три вклада в двухточечную функцию (рис. 12.1):

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int [dk] \text{Sp} [A(k) \Gamma(k) A(-k)] = \\ & = \frac{g^2}{2} \int [dk][dq] \frac{1}{q^2(q+k)^2} \text{Sp} [(q+k) \cdot A(k) q \cdot A(-k)] + \\ & + \frac{g^2}{2} \int [dk][dq] \frac{1}{(q^2)^2} \text{Sp} \{q^2(d-1) A(k) \cdot A(-k) + \\ & + (1-\lambda^{-1}) [q \cdot A(k) q \cdot A(-k) - q^2 A(k) \cdot A(-k)]\} - \\ & - \frac{g^2}{4} \int [dk][dq] \frac{1}{(q^2)^2 (q'^2)^2} \text{Sp} \{(q+q') \cdot A [q^2 - (1-\lambda^{-1}) q \otimes q] - \\ & - q \otimes [q^2 A - (1-\lambda^{-1}) q \cdot Aq] - A \otimes [q^2 q' - (1-\lambda^{-1}) q \cdot q' q] + \\ & + q^2 (k \otimes A - A \otimes k) - (1-\lambda^{-1}) (kq \cdot A - q \cdot kA) \otimes q\}_k \times \\ & \times \{(q+q') \cdot A [q'^2 - (1-\lambda^{-1}) q' \otimes q'] - q' \otimes [q'^2 A - \\ & - (1-\lambda^{-1}) q' \cdot Aq'] - A \otimes [q'^2 q - (1-\lambda^{-1}) q \cdot q' q'] - \\ & - q'^2 (k \otimes A - A \otimes k) + (1-\lambda^{-1}) \times \\ & \times [(kq' \cdot A - k \cdot q' A) \otimes q']\}_{-k}. \end{aligned} \tag{12.108}$$

В последнем следе  $q' \equiv q+k$ , в первых фигурных скобках аргументом является  $k$ , а во вторых—величина  $-k$ . С целью сокращения записи введены тензорные обозначения Временные

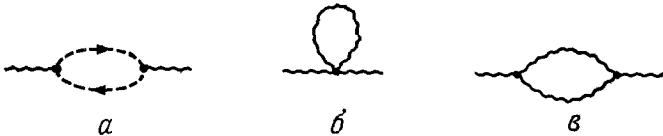


РИС. 12.1. Однопетлевые вклады в собственную энергию векторного поля. Штриховые линии соответствуют пропагаторам духов.

компоненты импульсов и векторных полей подвергнуты повороту Вика:

$$k^0 \rightarrow ik^0, \quad q^0 \rightarrow iq^0, \quad A^0(k) \rightarrow iA^0(k).$$

С целью сохранения калибровочной инвариантности мы применяем размерную регуляризацию, а меру  $d^d k / (2\pi)^d$  обозначаем  $[dk]$ . Следует заметить, что вышеприведенное выражение можно также получить непосредственно с помощью правил Фейнмана (12.91) и (12.92).

В гл 8 мы показали, что в рамках размерной регуляризации вполне разумно считать, что в правой части выражения (12.108) второй интеграл обращается в нуль тождественно. Вклад духов,

т. е. первый член в правой части выражения (12.108), нетрудно выразить через функции Эйлера:

$$\Gamma_{gh}(k) = \frac{g^2}{(4\pi)^{d/2}} B\left(\frac{d}{2}, \frac{d}{2}\right) (k^2)^{d/2-2} \left[ \frac{1}{2} k^2 \Gamma\left(1 - \frac{d}{2}\right) - k \otimes k \Gamma\left(2 - \frac{d}{2}\right) \right]. \quad (12.109)$$

После утомительных алгебраических преобразований полная двухточечная функция запишется в виде

$$\begin{aligned} \Gamma(k) = & \frac{g^2}{(4\pi)^{d/2}} (k^2)^{d/2-2} (k^2 - k \otimes k) \left\{ 2 \left[ B\left(\frac{d}{2}, \frac{d}{2}\right) - \right. \right. \\ & \left. \left. - B\left(\frac{d}{2}-1, \frac{d}{2}-1\right) \right] \Gamma\left(2 - \frac{d}{2}\right) + \right. \\ & \left. + (1 - \lambda^{-1}) \left[ 4B\left(\frac{d}{2}-1, \frac{d}{2}\right) \Gamma\left(3 - \frac{d}{2}\right) - \right. \right. \\ & \left. \left. - 2B\left(\frac{d}{2}-1, \frac{d}{2}\right) \Gamma\left(2 - \frac{d}{2}\right) \right] - (1 - \lambda^{-1})^2 \times \right. \\ & \left. \times \frac{1}{4} \Gamma\left(3 - \frac{d}{2}\right) B\left(\frac{d}{2}-1, \frac{d}{2}-1\right) \right\}. \quad (12.110) \end{aligned}$$

В этих выражениях функцию  $\Gamma(k)$  следует рассматривать как матрицу в присоединенном представлении, пропорциональную единичной матрице.

Вклад духов, определяемый выражением (12.109), играет решающую роль для достижения поперечности функции (12.110) по импульсу  $k$ , поскольку вклады по отдельности не удовлетворяют этому условию. Выражение (12.110) удобно для устранения части, расходящейся при  $d-4 = -\varepsilon \rightarrow 0$ . Следуя рецепту, предлагаемому в гл. 8, величину  $g^2$  в действительности следовало бы написать как  $g^2 \mu^\varepsilon$ , где  $\mu$  — произвольный массовый масштаб. Таким образом, мы имеем

$$\Gamma(k) \underset{\varepsilon \rightarrow 0}{\approx} \frac{g^2}{(4\pi)^2} (k^2 - k \otimes k) \left[ \frac{5}{3} + \frac{1}{2} (1 - \lambda^{-1}) \right] \left( -\frac{2}{\varepsilon} + \ln \frac{k^2}{\mu^2} + \text{const} \right), \quad (12.111)$$

где постоянные члены (т. е. не зависящие от  $k$ , но зависящие от  $\lambda$ ) не были вычислены. Это выражение можно переписать в эквивалентном виде, расписав явным образом групповые индексы и перейдя обратно в пространство Минковского. Двухточечная сильносвязная функция для  $A_a^\mu(k) A_b^\nu(-k)$  записывается в виде

$$\begin{aligned} \Gamma_{ab}^{(2)\mu\nu} = & -C \delta_{ab} \frac{g^2}{16\pi^2} (k^2 g^{\mu\nu} - k^\mu k^\nu) \left[ \frac{5}{3} + \frac{1}{2} (1 - \lambda^{-1}) \right] \times \\ & \times \left[ -\frac{2}{\varepsilon} + \ln \left( -\frac{k^2}{\mu^2} \right) \right]. \quad (12.112) \end{aligned}$$



Теперь ясно, что расходящуюся часть можно устранить, вводя контрчлен:

$$\delta \mathcal{L}_{A^2} = (Z_3 - 1) \left\{ \frac{1}{2} \text{Sp} [(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu)] \right\}, \quad (12.113)$$

где 
$$Z_3 = 1 + \frac{g^2 C}{16\pi^2} \left[ \frac{5}{3} + \frac{1}{2} (1 - \lambda^{-1}) \right] \frac{2}{\varepsilon}. \quad (12.114)$$

В этом порядке член  $2/\varepsilon$  можно считать соответствующим члену вида  $\ln(\Lambda^2/\mu^2)$  в обычной регуляризации. Константа перенормировки волновой функции  $Z_3$  зависит от калибровки. Это свойство можно объяснить тем, что неабелевы калибровочные поля играют также роль заряженных полей. Фундаментальное следствие поперечности функции (12.110) состоит в том, что теперь нет необходимости в контрчленах типа  $A^2$  или  $(\partial \cdot A)^2$ .

В выражении (12.110) расходящиеся члены определяются полюсами  $\Gamma$ -функции. Однако, если вычисления производятся каким либо иным способом, такие сингулярности могут возникать у  $B$ -функции. Это отражает тот факт, что в безмассовой теории теряется различие между ультрафиолетовой и инфракрасной расходимостями. Например, в выражении для  $\Gamma^{\mu\nu}$  член, стоящий под интегралом и пропорциональный  $(1 - \lambda^{-1}) \delta^{\mu\nu}$ , имеет вид

$$\frac{(k^2 - q^2)^2}{q^2 (q + k)^4}$$

и в рамках размерной регуляризации приводит к интегралу, конечному в ультрафиолетовом пределе, но расходящемуся в инфракрасном:

$$I = \int \frac{d^d q (k^2 - q^2)^2}{q^2 (k + q)^4} = \int \frac{d^d q (k^2)^2}{q^2 (k + q)^4} \sim B \left( \frac{d}{2} - 2, \frac{d}{2} - 1 \right) \Gamma \left( 3 - \frac{d}{2} \right),$$

Однако после замены переменных  $q \rightarrow q' = q + k$  этот интеграл выглядит расходящимся в ультрафиолетовой области и сходящимся в инфракрасной;

$$I = \int \frac{d^d q' [k^2 - (q' - k)^2]^2}{(q' - k)^2 q'^4} \sim 4B \left( \frac{d}{2} - 1, \frac{d}{2} \right) \Gamma \left( 3 - \frac{d}{2} \right) - 2B \left( \frac{d}{2}, \frac{d}{2} - 1 \right) \Gamma \left( 2 - \frac{d}{2} \right).$$

Разумеется, эти выражения совпадают, однако, когда проводится разложение вблизи  $d=4$ , необходимо выделить все сингулярные члены.

### 12.3.3. Другие функции

Для других условно расходящихся сильносвязных функций приведем лишь структуру расходящегося члена.

В трехточечную функцию (рис. 12.2) дают вклад три диаграммы. Контрчлен, который необходимо ввести, записывается в виде

$$\delta \mathcal{L}_{A^3} = (Z_1 - 1) (-g \text{Sp} \{(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) [A^\mu, A^\nu]\}), \quad (12.115)$$

$$Z_1 = 1 + \frac{g^2 C}{16\pi^2} \left[ \frac{2}{3} + \frac{3}{4} (1 - \lambda^{-1}) \right] \frac{2}{\varepsilon}.$$

Аналогичным образом диаграммы, изображенные на рис. 12.3, которые дают вклад в четырехточечную функцию, нуждаются во введении контрчлена

$$\delta \mathcal{L}_{A^4} = (Z_4 - 1) \left\{ \frac{g^2}{2} \text{Sp} ([A_\mu, A_\nu] [A^\mu, A^\nu]) \right\}, \quad (12.116)$$

$$Z_4 = 1 + \frac{g^2 C}{16\pi^2} \left[ -\frac{i}{3} + (1 - \lambda^{-1}) \right] \frac{2}{g}.$$

Контрчлены имеют тот же вид, что и исходные члены в лагранжиане. Неудивительно, что это справедливо для  $\delta \mathcal{L}_{A^4}$ , поскольку (12.115) представляет собой единственное выражение, которое

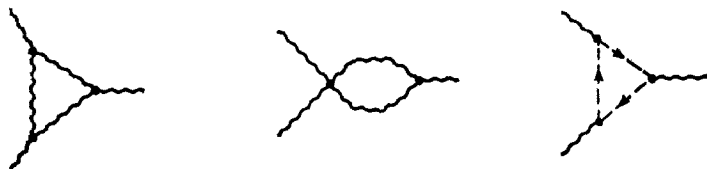


РИС. 12.2. Трехточечная функция.

является лоренц-инвариантным, кубическим по полю, имеет размерность четыре и инвариантно при (глобальных) групповых преобразованиях. Для члена четвертого порядка по полю это не так, а поэтому контрчлен вида (12.116) является сюрпризом.

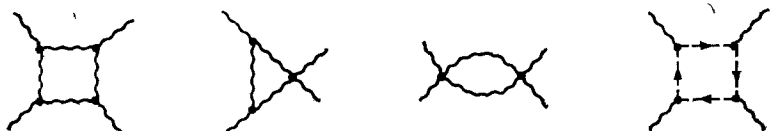


РИС 12.3. Четырехточечная функция.

Необходимо также вычислить контрчлены для функций с внешними духами. Структура оператора  $\bar{Q}$ , определяемого выражениями (12 102) и (12 103) или, эквивалентным образом, с помощью правил Фейнмана (12 92), такова, что импульс выходящей духовой линии всегда может быть факторизован. Это уменьшает эффективную

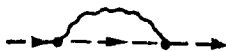


РИС 12.4. Собственная энергия духа в однопетлевом приближении.

условную степень расходимости функций, включающих в себя духовые поля, и оставляет нам лишь две расходящиеся функции: собственную энергию духа (рис. 12 4) и вершину, в которой дух поглощает или излучает векторное поле (рис. 12 5) Вследствие указанного выше свойства первая функция не нуждается в ве-

дении какого-либо массового контрчлена, и мы имеем

$$\delta \mathcal{L}_{\bar{\eta}\eta} = (\bar{Z}_3 - 1) (-\bar{\eta}_a \partial^2 \eta_a), \quad \bar{Z}_3 = 1 + \frac{g^2 C}{16\pi^2} \left( \frac{1}{2} + \frac{1-\lambda^{-1}}{4} \right) \frac{2}{\varepsilon}, \quad (12.117)$$

и

$$\delta \mathcal{L}_{\bar{\eta}_A \eta} = (\bar{Z}_1 - 1) (C_{abc} A_\mu^\nu \partial_\mu \bar{\eta}_b \eta_c), \quad \bar{Z}_1 = 1 - \frac{g^2 C}{16\pi^2} \frac{\lambda^{-1}}{2} \frac{2}{\varepsilon}. \quad (12.118)$$

В калибровке Ландау ( $\lambda^{-1} = 0$ ) величина  $\bar{Z}_1$  в действительности сводится к единице во всех порядках, что является следствием поперечности векторного пропагатора и факторизации входящего духового импульса.



РИС. 12.5. Однопетлевые вклады в вершину вектор-дух.

На практике с калибровочным полем также взаимодействуют поля материи. Приведем контрчлены, включающие спинорные поля, а также дополнительные вклады в  $\delta \mathcal{L}_{A^2}$ ,  $\delta \mathcal{L}_{A^3}$  и  $\delta \mathcal{L}_{A^4}$  от этих полей. Лагранжиан взаимодействия дается выражением (12.93). Примем следующие обозначения для квадратичных операторов Казимира в представлении, по которому преобразуются поля:

$$\begin{aligned} \text{Sp} (T^a T^b) &= -T_f \delta^{ab}, \\ \sum_a (T^a)^2 &= -C_f I. \end{aligned} \quad (12.119)$$

Если через  $r$  обозначить размерность группы [например, число генераторов алгебры Ли для  $SU(N)$  равно  $r = N^2 - 1$ ], а через



РИС. 12.6. Собственная энергия фермиона.

$n_f$  — размерность фермионного представления [для фундаментального представления  $SU(N)$  имеем  $n_f = N$ ], то можно записать следующее соотношение:

$$T_f r = C_f n_f. \quad (12.120)$$

Для присоединенного представления  $n = r$  и, следовательно,  $T = C$  [ $= N$  в случае  $SU(N)$ ], в то время как для фундаментального представления  $SU(N)$  имеем  $T_f = 1/2$  и  $C_f = (N^2 - 1)/2N$ .

Контрчлены, порождаемые диаграммами, представленными на рис. 12.6 и 12.7, записываются в виде

$$\delta \mathcal{L}_{\bar{\psi}\psi} = (Z_2 - 1) \bar{\psi} i \not{\partial} \psi - \left( Z_2 \frac{m_0}{m} - 1 \right) m \bar{\psi} \psi,$$

$$Z_2 = 1 - \frac{g^2 C_f}{16\pi^2} \lambda^{-1} \frac{2}{\varepsilon}, \quad (12.121)$$

$$Z_2 \frac{m_0}{m} = 1 - \frac{g^2 C_f}{16\pi^2} [4 - (1 - \lambda^{-1})] \frac{2}{\varepsilon}$$

и

$$\delta \mathcal{L}_{\bar{\psi} A \psi} = (Z_{1F} - 1) (-i g \bar{\psi} A_a T^a \psi), \quad (12.122)$$

$$Z_{1F} = 1 - \frac{g^2 C_f}{16\pi^2} \left\{ \left[ 1 - \frac{(1 - \lambda^{-1})}{4} \right] C + \lambda^{-1} C_f \right\} \frac{2}{\varepsilon}.$$

Эти выражения, если положить в них  $C_f = 1$ ,  $C = 0$  и  $g^2/4\pi = \alpha$ , сводятся к выражениям, которые вычислялись в гл. 7 (см. т. 1) для случая квантовой электродинамики



РИС. 12.7. Фермион-векторная вершина.

Наконец, изменения в контрчленах калибровочных полей, обусловленные наличием внутренней фермионной петли (рис. 12.8), даются выражениями

$$\delta \mathcal{L}(A) |_{\text{фермионы}} = \delta Z^{(F)} \left[ \frac{1}{2} \text{Sp} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right],$$

$$\delta Z^{(F)} = \delta Z_3^{(F)} = \delta Z_1^{(F)} = \delta Z_4^{(F)} = -\frac{T_f g^2}{16\pi^2} \frac{4}{3} \frac{2}{\varepsilon}. \quad (12.123)$$

Рассмотрение случая, когда с калибровочными векторными полями

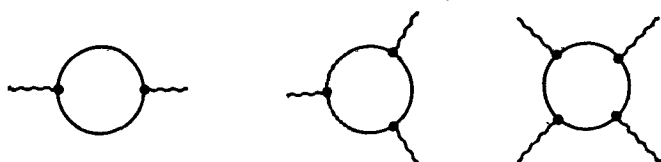


РИС 12.8. Фермионные вклады в двух-, трех- и четырехточечные функции.

связаны скалярные поля, не вызовет у читателя каких-либо затруднений.

### 12.3.4. Перенормировка однопетлевых диаграмм

Мы обнаружили, что все контрчлены обладают той же структурой, что и мономы исходного лагранжиана. Это еще не вполне гарантирует, что перенормированный и голый лагранжианы имеют одинаковые симметрии. Опуская на время поля материи, находим в явном виде

$$\begin{aligned} \mathcal{L} + \delta\mathcal{L} = \text{Sp} \left\{ \frac{1}{2} Z_3 (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) + \frac{\lambda}{2} (\partial A)^2 - \right. \\ \left. - g Z_1 (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) [A^\mu, A^\nu] + \frac{g^2}{2} Z_4 [A_\mu, A_\nu] [A^\mu, A^\nu] \right\} + \\ + \bar{Z}_3 \partial_\mu \bar{\eta} \partial^\mu \eta + g \bar{Z}_1 (\partial_\mu \bar{\eta}_b A^\mu_a \eta_c C_{abc}). \end{aligned} \quad (12.124)$$

Определим голые поля и параметры следующим образом.

$$\begin{aligned} A_0 = Z_3^{1/2} A, \quad \eta_0 = \bar{Z}_3^{1/2} \eta, \quad \bar{\eta}_0 = \bar{Z}_3^{1/2} \bar{\eta}, \\ g_0 = Z_1 Z_3^{-3/2} g, \quad \lambda_0 = \lambda Z_3^{-1} \end{aligned} \quad (12.125)$$

При этом  $\mathcal{L} + \delta\mathcal{L}$  можно рассматривать как исходный лагранжиан  $\mathcal{L}(A_0, \eta_0, \bar{\eta}_0; g_0, \lambda_0)$ , выраженный через голые величины при условии, что справедливы следующие тождества:

$$\frac{Z_4}{Z_1} = \frac{Z_1}{Z_3} = \frac{\bar{Z}_1}{\bar{Z}_3}. \quad (12.126a)$$

Простого взгляда на выражения (12.114) — (12.118) достаточно, чтобы убедиться в том, что эти тождества удовлетворяются в однопетлевом приближении. Эти выражения, которые обобщают соотношение  $Z_1 = Z_2$  квантовой электродинамики, отражают тот факт, что перенормировки констант связи в вершинах третьего и четвертого порядков по полю, а также в вершинах  $\bar{\eta}\eta A$  совпадают; иными словами, универсальность взаимодействия сохраняется перенормировкой. Присутствие полей материи, скажем фермионов, требует, кроме того, выполнения следующих тождеств:

$$\frac{Z_4}{Z_1} = \frac{Z_1}{Z_3} = \frac{\bar{Z}_1}{\bar{Z}_3} = \frac{Z_{1F}}{Z_2}. \quad (12.126b)$$

Этому соотношению также удовлетворяют выражения (12.121) — (12.123)

В заключение запишем перенормировку константы связи в присутствии фермионных полей:

$$g_0 = Z_g g, \quad Z_g = 1 - \frac{g^2}{16\pi^2} \left( \frac{11}{6} C - \frac{2}{3} T_f \right) \ln \frac{\Lambda^2}{\mu^2} \quad (12.127)$$

Следует заметить, что зависимость от калибровки исчезла. В дальнейшем величину  $2/g$  будем всюду заменять на  $\ln(\Lambda^2/\mu^2)$ .

## 12.4. ПЕРЕНОРМИРОВКА

Данный раздел посвящен изучению перенормировки неабелевых калибровочных теорий с ненарушенной симметрией. Что происходит в случае, когда локальная симметрия спонтанно нарушается, мы выясним позже. Здесь же рассмотрим вопрос о том, сохраняются ли при перенормировке замечательные свойства калибровочных теорий, в частности универсальность константы связи. На промежуточных стадиях будет вводиться регуляризация; практически наиболее удобной является размерная регуляризация. Свойства, которые мы хотим получить, будут следовать из тождеств Уорда, впервые полученных для данных целей Славновым и Тейлором. Читателю может показаться, что повторное применение таких тождеств в этой главе и в гл. 8 и 11, излишне. Однако неабелевы калибровочные теории характеризуются сложной структурой и соответственно требуют усложненных методов анализа.

### 12.4.1. Тождества Славнова — Тейлора

Будем исходить из производящего функционала

$$e^{G(J)} = \int \mathcal{D}(A) \det \mathcal{M} \exp \left[ i \int d^4x \left( \mathcal{L} - \frac{\lambda}{2} \mathcal{F}^2 + J \cdot A \right) \right],$$

где  $\mathcal{M}$  — вариация величины  $\mathcal{F}$  относительно калибровочного преобразования

$$\delta A = D\delta\alpha, \quad \delta\mathcal{F} = \mathcal{M}\delta\alpha. \quad (12.128)$$

Воспользуемся тем свойством, что при этом преобразовании мера  $\mathcal{D}(A) \det \mathcal{M}$  является инвариантной даже в том случае, когда  $\delta\alpha$  само зависит от  $A$ . Иными словами, если

$$A = A' + \delta A \text{ и } \mathcal{F}'(A') = \mathcal{F}[A(A')] = \mathcal{F}(A') + \delta\mathcal{F},$$

то

$$\mathcal{D}(A) \det \mathcal{M}_{\mathcal{F}}(A) = \mathcal{D}(A') \det \mathcal{M}_{\mathcal{F}}(A'). \quad (12.129)$$

Для того чтобы рассмотреть эти выражения более аккуратно, напомним, что  $\det \mathcal{M}_{\mathcal{F}}(A) \equiv \Delta_{\mathcal{F}}(A, \mathcal{F}(A))$ , согласно определению, в виде

$$\Delta_{\mathcal{F}}^{-1}(A, C) = \int \mathcal{D}(g) \delta(\mathcal{F}(gA) - C).$$

Для калибровочного преобразования, не зависящего от  $A$ , очевидно, имеем

$$\Delta_{\mathcal{F}}(gA, C) = \Delta_{\mathcal{F}}(A, C)$$

благодаря инвариантности меры  $\mathcal{D}(g)$ . Однако в данном случае, для которого

$$A' = g(A)A, \quad \mathcal{F}'(A) = \mathcal{F}'(A') = \mathcal{F}'(g(A)A),$$

калибровочное преобразование зависит от потенциала. Мы покажем, что якобианы в  $\mathcal{D}(A)$  и  $\Delta_{\mathcal{F}}$  стремятся скомпенсировать друг друга. Рассмотрим

$$\int \mathcal{D}(A) \Delta_{\mathcal{F}}(A, \mathcal{F}(A)) = \int \mathcal{D}(A) \Delta_{\mathcal{F}}(A, \mathcal{F}(A)) \left[ \int \mathcal{D}(A') \delta(A' - g(A)A) \right] \times \\ \times \left[ \Delta_{\mathcal{F}'}(A, \mathcal{F}(A)) \int \mathcal{D}(g) \delta(\mathcal{F}'(gA) - \mathcal{F}(A)) \right].$$

В правой части оба члена, заключенные в квадратные скобки, равны единице. В случае  $g = g(A)$  аргумент последней  $\delta$ -функции исчезает и поэтому в первую  $\delta$ -функцию вместо  $gA$  можно подставить общее  $g$ . Положив затем  $A = g^{-1}B$ , обнаружим, что  $\mathcal{D}(A) = \mathcal{D}(B)$ , и проинтегрируем по  $B$ . Таким образом, используя инвариантность  $\Delta$  относительно не зависящих от потенциала калибровочных преобразований, получаем

$$\int \mathcal{D}(A) \Delta_{\mathcal{F}}(A, \mathcal{F}(A)) = \\ = \int \mathcal{D}(A') \mathcal{D}(g) \Delta_{\mathcal{F}}(A', \mathcal{F}(g^{-1}A')) \Delta_{\mathcal{F}'}(A', \mathcal{F}(g^{-1}A')) \delta(\mathcal{F}'(A') - \\ - \mathcal{F}(g^{-1}A')) = \int \mathcal{D}(A') \mathcal{D}(g) \Delta_{\mathcal{F}}(A', \mathcal{F}'(A')) \Delta_{\mathcal{F}'}(A', \mathcal{F}'(A')) \delta(\mathcal{F}'(A') - \\ - \mathcal{F}(g^{-1}A')) = \int \mathcal{D}(A') \Delta_{\mathcal{F}'}(A', \mathcal{F}'(A')).$$

Последнее равенство возникает в результате интегрирования по  $g$  и является точной записью формулы (12.129).

Таким образом, мы можем написать

$$e^{G(J)} = \int \mathcal{D}(A) \det \mathcal{M} \exp \left[ i \int d^4x \left( \mathcal{L} - \frac{\lambda}{2} \mathcal{F}^2 + J \cdot A - \lambda \mathcal{F} \mathcal{M} \delta \alpha + \right. \right. \\ \left. \left. + J \cdot D \delta \alpha \right) \right].$$

Смысл данного тождества наиболее легко исследовать, если положить  $\delta \alpha = \mathcal{M}^{-1} \delta \omega$ , что соответствует нелокальному калибровочному преобразованию, которое сдвигает  $\mathcal{F}$  на величину  $\delta \omega$ . В низшем порядке по  $\delta \omega$  находим

$$0 = \int \mathcal{D}(A) \det \mathcal{M} \int d^4x (\lambda \mathcal{F} - J \cdot D \mathcal{M}^{-1}) \delta \omega \times \\ \times \exp \left[ i \int d^4x \left( \mathcal{L} - \frac{1}{2} \mathcal{F}^2 + J \cdot A \right) \right],$$

или, подставляя вместо  $A$  величину  $\delta/i\delta J$ ,

$$\left\{ \lambda \mathcal{F}_a \left[ \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J(x)} \right] - \int d^4y J_b(y) D_{bc} \left( \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J} \right) \mathcal{M}_{ca}^{-1} \left( y, x; \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J} \right) \right\} e^{G(J)} = 0, \quad (12.130)$$

где подразумевается, что выполнено суммирование по повторяющимся индексам. Выражение

$$G_{ca}(y, x) = \mathcal{M}_{ca}^{-1} \left( y, x; \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J} \right) e^{G(J)} \quad (12.131)$$

можно рассматривать как духовый пропагатор в присутствии источника  $J$ .

В окончательном виде тождества Славнова—Тейлора записываются следующим образом:

$$\begin{aligned} \lambda \mathcal{F}_a \left[ \frac{\delta}{i\delta J(x)} \right] e^{G(J)} &= \int d^4 y \left[ J_b D_{bc} \left( \frac{\delta}{i\delta J} \right) \right] (y) G_{ca}(y, x), \\ \mathcal{M}_{bc} \left[ \frac{\delta}{i\delta J(y)} \right] G_{ca}(y, x) &= \delta_{bc} \delta^4(x-y) e^{G(J)}. \end{aligned} \quad (12.132)$$

Записать эти тождества компактным образом через одночленно неприводимые функции довольно трудно. Такой цели позволяет достичь преобразование, обнаруженное Бекки, Рюэ и Стора. Для этого в действие снова вводятся духовые поля:

$$I = \int d^4 x \left( \mathcal{L} - \frac{\lambda}{2} \mathcal{F}^2 - \bar{\eta} \mathcal{M} \eta \right). \quad (12.133)$$

Нетрудно показать, что данное действие инвариантно при следующем комбинированном преобразовании переменных:

$$\begin{cases} \delta A^a_\mu(x) = D^a_{\mu b}(x) \eta_b(x) \delta \zeta \equiv s A \delta \zeta, \\ \delta \bar{\eta}_a(x) = \lambda \mathcal{F}_a[A(x)] \delta \zeta \equiv s \bar{\eta} \delta \zeta, \\ \delta \eta_a(x) = -(g/2) C_{abc} \eta_b(x) \eta_c(x) \delta \zeta \equiv s \eta \delta \zeta. \end{cases} \quad (12.134)$$

В противоположность преобразованию, использованному выше, данное преобразование является локальным. Оно вводит не зависящий от  $x$  антикоммутирующий параметр  $\delta \zeta$  и смешивает коммутирующие и антикоммутирующие переменные.

Инвариантность действия  $I$  легко доказать. Во-первых, лагранжиан  $\mathcal{L}$  инвариантен, поскольку  $\delta A$  представляет собой калибровочное преобразование специального вида. Во-вторых,

$$\delta \left( -\frac{\lambda}{2} \mathcal{F}^2 \right) - (\delta \bar{\eta}) \mathcal{M} \eta = 0$$

вследствие того, что  $\eta$  и  $\delta \zeta$  антикоммутируют. И наконец,

$$\begin{aligned} \delta (\mathcal{M} \eta) &= \delta \left[ \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta A^\mu_a} (D^\mu \eta)_a \right] = \\ &= \frac{-\delta^2 \mathcal{F}}{\delta A^\nu_b \delta A^\mu_a} (D^\nu \eta)_b (D^\mu \eta)_a \delta \zeta + \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta A^\mu_a} \delta (D^\mu \eta)_a. \end{aligned}$$

Первый член обращается в нуль поскольку выражение  $(D^\nu \eta)_b (D^\mu \eta)_a$  антисимметрично по отношению к перестановке индексов,  $(\mu a)$  и  $(\nu b)$ ; кроме того, с помощью (12.134) и тождества Якоби можно показать, что

$$\delta (D^\mu \eta) = 0. \quad (12.135)$$

В дальнейшем мы будем использовать также аналогичное равенство

$$\delta (C_{abc} \eta_b \eta_c) = 0. \quad (12.136)$$



Генератор преобразования Бекки—Рюэ—Стора  $s$  определяется как правая производная величин (12.134) по  $\delta\zeta$ , т. е.  $sA = D\eta$ ,  $s\eta_a = -gC_{abc}\eta_b\eta_c/2$ . Уравнения (12.135) и (12.136) означают, что  $s^2A = 0$ ,  $s^2\eta = 0$ .

Эта инвариантность приводит к соотношениям между функциями Грина. Прежде всего покажем, как воспроизводится тождество Славнова—Тейлора (12.130). Будем исходить из уравнения

$$\int \mathcal{D}(A, \eta, \bar{\eta}) \bar{\eta}_a(x) \exp \left[ i \left( I + \int d^4y J \cdot A \right) \right] = 0,$$

которое следует из того факта, что в подынтегральном выражении имеется нечетное число духовых переменных. Осуществим замену переменных в соответствии с (12.134); легко проверить, что такая замена не влияет на интеграл, а ее якобиан равен единице. Следовательно,

$$\int \mathcal{D}(A, \eta, \bar{\eta}) \left[ \lambda \mathcal{F}_a(x) + \bar{\eta}_a(x) \int d^4y iJ_b(y) (D\eta)_b(y) \right] \times \\ \times \exp \left[ i \left( I + \int d^4y J \cdot A \right) \right] = 0. \quad (12.137)$$

Интегрирование по  $\eta, \bar{\eta}$  эффективно сводится к подстановке

$$\bar{\eta}_a(x) \eta_b(y) \rightarrow i\mathcal{M}^{-1}_{ba}(y, x)$$

и приводит таким образом к тождеству (12.130).

#### 12.4.2. Тождества для сильносвязных функций

Сначала напомним тождества для связанных функций. Удобно ввести источники не только для духовых полей, но и для составных операторов, входящих в преобразования (12.134). Напишем выражения

$$e^{G(J, \xi, \bar{\xi}, K, L)} = \int \mathcal{D}(A, \eta, \bar{\eta}) \exp \left[ i \int d^4y \left( \mathcal{L} - \frac{\lambda}{2} \mathcal{F}^2 - \bar{\eta} M \eta + \right. \right. \\ \left. \left. + J \cdot A + \bar{\xi} \eta + \bar{\eta} \xi + K s A - L s \eta \right) \right], \quad (12.138)$$

$$G(J) = G(J, \xi, \bar{\xi}, K, L) \Big|_{\xi=\bar{\xi}=K=L=0}.$$

Здесь  $K^{\mu}_a(y)$  и  $L_a(y)$  — локальные источники, связанные с  $sA_{\mu a}(y) = (D_{\mu}\eta)_a(y)$  и  $-s\eta_a(y) = gC_{abc}\eta_b(y)\eta_c(y)/2$ , а потому являющиеся антикоммутирующими или коммутирующими объектами соответственно. Точнее говоря, если величине  $\eta$  сопоставить духовое число  $\gamma = -1$  (и  $\gamma = +1$  для  $\bar{\eta}$ ), то  $K$  и  $L$  будут иметь  $\gamma = 1$  и  $2$ . Подсчет степеней показывает, что  $sA$  и  $s\eta$ , а следовательно,  $K$  и  $L$  имеют размерность, равную двум. В дальнейшем мы будем предполагать, что функция  $\mathcal{F}$  линейна по  $A$ :

$$\mathcal{F}_a(y) = \phi^{\mu}_{ab} A_{\mu b}(y). \quad (12.139)$$

Например, обобщенные калибровки Фейнмана соответствуют выбору  $\phi_{ab}^\mu = \partial^\mu \delta_{ab}$ . Использование нелинейного калибровочного условия  $\mathcal{F}$  потребовало бы введения в (12.138) дополнительного источника, связанного с  $\mathcal{F}$ .

Заменяя переменные в соответствии с (12.134), получаем

$$0 = \int \mathcal{D}(A, \eta, \bar{\eta}) \int d^4x (J \cdot sA + \bar{\xi} s\eta - \lambda \mathcal{F} \xi)(x) \exp \left[ i \int d^4y (\dots) \right],$$

поскольку  $sA$  и  $s\eta$  являются также инвариантами. Последнее уравнение можно переписать следующим образом:

$$\int d^4x \left[ J \cdot \frac{\delta}{i\delta K} - \bar{\xi} \frac{\delta}{i\delta L} - \lambda \xi \mathcal{F} \left( \frac{\delta}{i\delta J} \right) \right] (x) e^{G(J, \xi, \bar{\xi}, K, L)} = 0.$$

Оператор функционального дифференцирования является линейным в соответствии с предположением (12.139). Следовательно,

$$\int d^4x \left[ J \frac{\delta}{\delta K} - \bar{\xi} \frac{\delta}{\delta L} - \lambda \xi \mathcal{F} \left( \frac{\delta}{\delta J} \right) \right] G(J, \xi, \bar{\xi}, K, L) = 0. \quad (12.140)$$

В предыдущем разделе тождество (12.130) было дополнено уравнением движения для духового пропагатора [см. (12.132)]. Аналог его в данном случае можно получить, используя то обстоятельство, что функциональный интеграл (12.138) инвариантен относительно бесконечно малого смещения  $\bar{\eta} \rightarrow \bar{\eta} + \delta\bar{\eta}$ , где  $\delta\bar{\eta}$  — произвольная величина. В результате получаем локальное соотношение

$$\int \mathcal{D}(A, \eta, \bar{\eta}) (-\mathcal{M}\eta + \xi)(x) \exp \left[ i \int d^4y (\dots) \right] = 0$$

или, поскольку  $\mathcal{M}\eta = s\mathcal{F} = \phi \cdot sA$ :

$$\left( \xi - \phi \frac{\delta}{i\delta K} \right) (x) e^{G(J, \xi, \bar{\xi}, K, L)} = 0.$$

Для связанных функций это соотношение запишется в виде

$$\phi \frac{\delta}{i\delta K}(x) G(J, \xi, \bar{\xi}, K, L) = \xi(x). \quad (12.141)$$

Уравнения (12.140) и (12.141) следует теперь переписать через сильносвязные функции. Это можно сделать, воспользовавшись преобразованием Лежандра

$$\Gamma(A, \eta, \bar{\eta}, K, L) = -iG(J, \xi, \bar{\xi}, K, L) - \int d^4y (J \cdot A + \bar{\xi}\eta + \bar{\eta}\xi), \quad (12.142)$$

где

$$A = \frac{\delta G}{i\delta J}, \quad \eta = \frac{\delta G}{i\delta \bar{\xi}}, \quad \bar{\eta} = -\frac{\delta G}{i\delta \xi},$$

или, что эквивалентно,

$$J = -\frac{\delta\Gamma}{\delta A}, \quad \bar{\xi} = \frac{\delta\Gamma}{\delta\eta}, \quad \xi = -\frac{\delta\Gamma}{\delta\bar{\eta}}.$$

При этом преобразовании источники  $K$  и  $L$  не затрагиваются:

$$\frac{\delta G}{\delta K} = \frac{\delta\Gamma}{\delta K}, \quad \frac{\delta G}{\delta L} = \frac{\delta\Gamma}{\delta L}, \quad (12.143)$$

Уравнения (12.140) и (12.141), выраженные через  $\Gamma$ , записываются следующим образом:

$$\int d^4x \left[ \frac{\delta\Gamma}{\delta A} \frac{\delta\Gamma}{\delta K} + \frac{\delta\Gamma}{\delta\eta} \frac{\delta\Gamma}{\delta L} - \lambda \frac{\delta\Gamma}{\delta\eta} \mathcal{F}(A) \right] (x) = 0, \quad (12.144)$$

$$\phi^{\mu}_{ab} \frac{\delta\Gamma}{\delta K^{\mu}_b(x)} + \frac{\delta\Gamma}{\delta\eta_a(x)} = 0. \quad (12.145)$$

Введем модифицированное эффективное действие

$$\bar{\Gamma} = \Gamma + \frac{\lambda}{2} \int d^4y \mathcal{F}^2[A(y)]. \quad (12.146)$$

Тогда уравнения (12.144) и (12.145) принимают более простой вид:

$$\int d^4x \left( \frac{\delta\bar{\Gamma}}{\delta A} \frac{\delta\bar{\Gamma}}{\delta K} + \frac{\delta\bar{\Gamma}}{\delta\eta} \frac{\delta\bar{\Gamma}}{\delta L} \right) (x) = 0, \quad (12.147)$$

$$\phi^{\mu} \frac{\delta\bar{\Gamma}}{\delta K^{\mu}} + \frac{\delta\bar{\Gamma}}{\delta\eta} = 0.$$

Тождества (12.147) записаны в универсальной форме. Они уже не содержат каких-либо параметров, изменяемых перенормировкой, таких, как константы связи, и не несут следов групповой структуры, которая теперь скрыта в определении источников. Следовательно, эти тождества в равной степени применимы к действию, а потому подходят для изучения структуры контрчленов.

Легко проверить, что тождества (12.144) и (12.145) удовлетворяются в низшем порядке. Первое тождество выражает инвариантность действия относительно преобразования Бекки—Рюэ—Стора:

$$\delta A = \frac{\delta\Gamma^{(0)}}{\delta K} \delta\zeta, \quad \delta\eta = -\frac{\delta\Gamma^{(0)}}{\delta L} \delta\zeta, \quad \delta\bar{\eta} = \lambda \mathcal{F}(A) \delta\zeta.$$

Условие того, чтобы якобиан был равен единице, записывается в виде

$$\frac{\delta^2 \Gamma^{(0)}}{\delta A \delta K} = 0, \quad \frac{\delta^2 \Gamma^{(0)}}{\delta\eta \delta L} = 0 \quad (12.148)$$

и очевидным образом удовлетворяется.

Хорошее упражнение—выполнить аналогичный анализ в абелевом случае для калибровки  $\mathcal{F} = \partial_{\mu} A^{\mu} + A^2/2$ , которая требует введения духов.

### 12.4.3. Рекурсивный метод построения контрчленов

В предыдущем рассмотрении неявно подразумевалось, что в теории проведена размерная регуляризация. Здесь мы хотим перенормировать теорию таким способом, который не нарушит полученные выше тождества. Как и при вычислении в однопетлевом приближении в разд. 12.3, удобно выполнить минимальную перенормировку, определение которой дано в разд. 8.4.4. Иными словами, мы ограничимся устранением членов, расходящихся при  $d \rightarrow 4$ . Проводя вычисление последовательно, порядок за порядком по  $\hbar$ , мы можем написать следующее равенство:

$$\tilde{\Gamma}_{\text{рег}}^{[n]} = \tilde{\Gamma}_R^{[n]} + \tilde{\Gamma}_{\text{расх}}^{[n]}, \quad (12.149)$$

где  $\tilde{\Gamma}_{\text{рег}}^{[n]}$  вычисляется с учетом всех контрчленов низших порядков. Можно сформулировать более физические условия, требуя, однако, их согласованности с тождествами (12.144) и (12.145).

Из (12.147) следует, что все функционалы зависят от  $K$  и  $\bar{\eta}$  только через комбинацию  $K - \bar{\eta}\phi$ . Воспользуемся компактным обозначением

$$\Gamma_{\bar{\eta}} * \Gamma_{\bar{\eta}} \equiv \int d^4x \left( \frac{\delta \Gamma_1}{\delta A} \frac{\delta \Gamma_2}{\delta K} + \frac{\delta \Gamma_1}{\delta \eta} \frac{\delta \Gamma_2}{\delta L} \right). \quad (12.150)$$

Тождества (12.147), которым удовлетворяет степенной ряд

$$\tilde{\Gamma} = \tilde{\Gamma}^{[0]} + \tilde{\Gamma}^{[1]} + \tilde{\Gamma}^{[2]} + \dots,$$

в  $n$ -м порядке по  $\hbar$  запишутся в виде

$$\sum_{p+q=n} \tilde{\Gamma}^{[p]} * \tilde{\Gamma}^{[q]} = 0. \quad (12.151)$$

Наша задача состоит в том, чтобы найти контрчлены, такие, что перенормированное  $\tilde{\Gamma}_R^{[p]}$  удовлетворяло бы условию

$$\sum_{p+q=n} \tilde{\Gamma}_R^{[p]} * \tilde{\Gamma}_R^{[q]} = 0. \quad (12.152)$$

Будем следовать рекурсивному методу. В низшем порядке  $\tilde{\Gamma}^{[0]} = \tilde{\Gamma}_R^{[0]}$  сводится к выражению

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma}^{[0]} = \tilde{I}(A, \eta, \bar{\eta}, K, L) &= \int d^4x [\mathcal{L}(A) - \bar{\eta} \mathcal{M} \eta + K \cdot sA - Ls\eta] = \\ &= \int d^4x [\mathcal{L} + (K - \bar{\eta}\phi) \cdot sA - Ls\eta], \end{aligned} \quad (12.153)$$

которое, конечно, удовлетворяет условию (12.152). В первом порядке имеем

$$\left\{ \begin{aligned} \tilde{I} * \tilde{\Gamma}_{\text{расх}}^{[1]} + \tilde{\Gamma}_{\text{расх}}^{[1]} * \tilde{I} &= 0, & (12.154a) \\ \tilde{I} * \tilde{\Gamma}_R^{[1]} + \tilde{\Gamma}_R^{[1]} * \tilde{I} &= 0 & (12.154b) \end{aligned} \right.$$

Уравнение (12.154б) есть не что иное, как тождество (12.152) при  $n=1$ , а (12.154а) определяет структуру контрчлена первого порядка. Для того чтобы сократить расходящийся член, предлагается модифицировать  $\tilde{I}$  следующим образом:

$$\tilde{I} \rightarrow \tilde{I}_1 = \tilde{I} - \tilde{\Gamma}_{\text{расх.}}^{[1]} \quad (12.155)$$

Однако рекурсивный метод применим только в том случае, если перенормированное действие  $\tilde{I}_1$  удовлетворяет тому же условию

$$\tilde{I}_1 * \tilde{I}_1 = 0, \quad (12.156)$$

как и само  $\tilde{I}$ . Это не так для модифицированного выражения (12.155), поскольку

$$\tilde{I}_1 * \tilde{I}_1 = \tilde{\Gamma}_{\text{расх.}}^{[1]} * \tilde{\Gamma}_{\text{расх.}}^{[1]}$$

Однако правая часть здесь имеет порядок  $\hbar^2$ . Таким образом, мы приходим к величине  $\tilde{I}_1$ , которая определяется выражением

$$\tilde{I}_1 = \tilde{I} - \tilde{\Gamma}_{\text{расх.}}^{[1]} + \Delta_1,$$

где добавка  $\Delta_1$  представляет собой интеграл от локального полинома четвертой степени по полям, имеет порядок  $\hbar^2$  и определяется таким образом, чтобы удовлетворялось условие (12.156). Эта модификация, разумеется, не затрагивает величин первого порядка и, следовательно, оставляет  $\tilde{\Gamma}_R^{[1]}$  конечным при прежнем условии нормировки.

Такая усложненность очень типична для симметрий, приводящих к нелинейным тождествам. Например, то же самое явление возникает в двумерной нелинейной  $\sigma$  модели, рассмотренной в конце главы II.

Структуру добавки  $\Delta_1$  можно получить, исходя из структуры  $\tilde{\Gamma}_{\text{расх.}}^{[1]}$ . Если мы сможем показать, что

$$(\tilde{I} - \tilde{\Gamma}_{\text{расх.}}^{[1]})(A, \eta, \bar{\eta}, K, L; g) = \tilde{I}(A_0, \eta_0, \bar{\eta}_0, K_0, L_0; g_0) + O(\hbar^2), \quad (12.157)$$

$$\begin{aligned} \text{где} \quad A_0 &= Z_3^{1/2} A, \quad \eta_0 = \tilde{Z}_3^{1/2} \eta, \quad \bar{\eta}_0 = \tilde{Z}_3^{1/2} \bar{\eta}, \\ K_0 &= \tilde{Z}_3^{1/2} K, \quad L_0 = Z_L^{1/2} L, \quad g_0 = Z_g g, \end{aligned} \quad (12.158)$$

причем  $Z_3 = 1 + z_3 \hbar$  и т. д., то естественным выбором будет

$$\tilde{I}_1(A, \eta, \bar{\eta}, K, L; g) = \tilde{I}(A_0, \eta_0, \bar{\eta}_0, K_0, L_0; g_0).$$

Это новое действие  $\tilde{I}_1$  удовлетворяет соотношению

$$\begin{aligned} \tilde{I}_1 * \tilde{I}_1 = \int d^4x \left[ \tilde{Z}_3^{1/2} Z_3^{1/2} \frac{\delta \tilde{I}(A_0, \dots; g_0)}{\delta A_0} \frac{\delta \tilde{I}(A_0, \dots)}{\delta K_0} + \right. \\ \left. + \tilde{Z}_3^{1/2} Z_L^{1/2} \frac{\delta \tilde{I}(A_0, \dots)}{\delta \eta_0} \frac{\delta \tilde{I}(A_0, \dots)}{\delta L_0} \right]. \end{aligned}$$

Кроме того, если

$$Z_L = Z_B, \quad (12.159)$$

условие (12.156) удовлетворяется и рекурсивное доказательство можно продолжить. Цель последующего обсуждения состоит в том, чтобы доказать справедливость соотношений (12.157) и (12.159).

Найдем общее решение уравнения

$$\sigma \tilde{\Gamma}_{\text{расх}}^{[n]} = \tilde{I} * \tilde{\Gamma}_{\text{расх}}^{[n]} + \tilde{\Gamma}_{\text{расх}}^{[n]} * \tilde{I} = 0, \quad (12.160)$$

которому удовлетворяет расходящаяся часть  $\tilde{\Gamma}_{\text{расх}}^{[n]}$  в данном порядке  $n$ , когда учтены все контрчлены более низкого порядка.

В (12.160) оператор  $\sigma$  который обобщает преобразование с Бекки—Рюэ—Стора, является нильпотентным

$$\sigma^2 = 0 \quad (12.161)$$

Это нетрудно показать, если записать  $\sigma$  в виде

$$\sigma = \frac{\partial \tilde{I}}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial \theta_i} + \frac{\partial \tilde{I}}{\partial \theta_i} \frac{\partial}{\partial x_i},$$

где антикоммутирующие переменные были обозначены соответственно как  $x$  и  $\theta$ ; в нашей задаче  $\{x_i\} = \{A, L\}$ ,  $\{\theta_i\} = \{\eta, K\}$ . При этом (12.161) следует из условия

$$\frac{\partial \tilde{I}}{\partial x_i} \frac{\partial \tilde{I}}{\partial \theta_i} = 0. \quad (12.162)$$

В явной записи имеем

$$\begin{aligned} \sigma^2 = & \left( \frac{\partial \tilde{I}}{\partial x_i} \frac{\partial \tilde{I}}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial \theta_i} \frac{\partial}{\partial \theta_j} + \frac{\partial \tilde{I}}{\partial \theta_i} \frac{\partial \tilde{I}}{\partial \theta_j} \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} - \frac{\partial \tilde{I}}{\partial x_i} \frac{\partial \tilde{I}}{\partial \theta_j} \frac{\partial}{\partial \theta_i} \frac{\partial}{\partial x_j} + \right. \\ & \left. + \frac{\partial \tilde{I}}{\partial \theta_i} \frac{\partial \tilde{I}}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial \theta_j} \right) + \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial \tilde{I}}{\partial x_i} \frac{\partial \tilde{I}}{\partial \theta_i} \right) \frac{\partial}{\partial \theta_j} - \frac{\partial}{\partial \theta_j} \left( \frac{\partial \tilde{I}}{\partial x_i} \frac{\partial \tilde{I}}{\partial \theta_i} \right) \frac{\partial}{\partial x_j}. \end{aligned}$$

Первая скобка обращается в нуль вследствие антикоммутативности, а два оставшихся члена — в силу соотношения (12.162). С другой стороны любой калибровочно инвариантный функционал  $R_{\text{инв}}(A)$  зависящий только от  $A$ , удовлетворяет условию

$$\sigma R_{\text{инв}}(A) = \int d^4x \frac{\delta R_{\text{инв}}}{\delta A} \frac{\delta \tilde{I}}{\delta K} = \int d^4x \frac{\delta R_{\text{инв}}}{\delta A^a} \frac{\delta R_{\text{инв}}}{\delta A^a(x)} (D^a \eta)_a(x) = 0.$$

Следовательно, решение уравнения  $\sigma R = 0$  можно записать в виде

$$R = R_{\text{инв}}(A) + \sigma R' \quad (12.163)$$

Можно показать что данное выражение является общим решением уравнения для  $\tilde{\Gamma}_{\text{расх}}^{[n]}(A)$  даже в том случае когда к исходному лагранжиану добавляются дополнительные источники связанные с составными калибровочно инвариантными операторами. Однако в данном случае это можно доказать непосредственной проверкой, используя тот факт, что подсчет степеней и сохранение числа духов приводят к следующему выражению для  $\tilde{\Gamma}_{\text{расх}}^{[n]}$

$$\tilde{\Gamma}_{\text{расх}}^{[n]} = \int d^4x \left\{ l(A) + [K^{\mu}{}_{\alpha} - (\bar{\eta} \phi^{\mu})_{\alpha}] \Delta_{\alpha\beta} \eta_{\beta} + \frac{1}{2} d_{abc} L_{\alpha} \eta_{\beta} \eta_{\gamma} \right\}.$$

В этом выражении размерность  $l(A)$  равна четырем, а размерность  $\Delta_{\mu\alpha}$  равна единице и таким образом эти величины имеют самое большое линейную зависимость от  $A$  а  $d_{abc} = -d_{acb}$  являются числами. Если предположить что глобальная симметрия не нарушается (выбором калибровки), то справедливы следующие выражения

$$\begin{aligned} \Delta_{\mu ab} &= \alpha \partial_\mu \delta_{ab} + \beta g C_{abc} A_{\mu c}, \\ d_{abc} &= \gamma g C_{abc}, \end{aligned}$$

где  $\alpha, \beta$  и  $\gamma$  — некоторые числа Подстановка этих выражений в (12 160) дает

$$\beta = \gamma, \quad D^\mu_{ab} \frac{\partial l(A)}{\partial A^\mu_b} + g(\beta - \alpha) C_{abc} A^\mu_c \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A^\mu_b} = 0.$$

Частное решение второго уравнения имеет вид

$$l(A) = (\beta - \alpha) A^\mu_a \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A^\mu_a}$$

а общее решение получается путем добавления калибровочно инвариантного функционала от  $A$  степени 4, т е кратного лагранжиану  $\mathcal{L}(A)$

$$l(A) = a \mathcal{L}(A) + (\beta - \alpha) A^\mu_a \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A^\mu_a}.$$

В итоге получаем следующее выражение для  $\tilde{\Gamma}_{\text{расх}}^{[n]}$ :

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma}_{\text{расх}}^{[n]} &= \int d^4x \left[ a \mathcal{L}(A) + (\beta - \alpha) A^\mu_a \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A^\mu_a} + \alpha (K - \bar{\eta}\phi)^\mu_a (D_\mu \eta)_a + \right. \\ &\quad \left. + (\beta - \alpha) g (K - \bar{\eta}\phi)^\mu_a C_{abc} A_{\mu c} \eta_b + \beta \frac{g}{2} L_a C_{abc} \eta_b \eta_c \right], \end{aligned} \quad (12.164)$$

где  $a, \alpha$  и  $\beta$  имеют порядок  $\hbar^n$  Простые алгебраические преобразования и использование свойства однородности  $\mathcal{L}$ ,

$$2\mathcal{L} = A^\mu_a(x) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A^\mu_a(x)} - g \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial g},$$

позволяют нам переписать  $\tilde{\Gamma}_{\text{расх}}^{[n]}$  в виде

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma}_{\text{расх}}^{[n]} &= \left( \int d^4x \left\{ \left( \beta - \alpha + \frac{a}{2} \right) \left[ A^\mu_a(x) \frac{\delta}{\delta A^\mu_a(x)} + L_a(x) \frac{\delta}{\delta L_a(x)} \right] + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{\alpha}{2} \left[ K_a(x) \frac{\delta}{\delta K_a(x)} + \eta_a(x) \frac{\delta}{\delta \eta_a(x)} + \bar{\eta}_a(x) \frac{\delta}{\delta \bar{\eta}_a(x)} \right] \right\} - \frac{a}{2} g \frac{\partial}{\partial g} \right) \times \\ &\quad \times \tilde{I}(A, \eta, \bar{\eta}, K, L; g), \end{aligned} \quad (12.165)$$

что и представляет собой искомый результат Все контрчлены возникают за счет перенормировки параметров исходного действия Более того,  $A$  и  $L$  перенормируются одинаковым образом Если, согласно гипотезе рекурсивности действие перенормированное вплоть до  $(n-1)$  го порядка записать в виде

$$\tilde{I}_{n-1} = \tilde{I}(Z_{3, n-1}^{1/2} A, \tilde{Z}_{3, n-1}^{1/2} \eta, \tilde{Z}_{3, n-1}^{1/2} \bar{\eta}, \tilde{Z}_{3, n-1}^{1/2} K, Z_{3, n-1}^{1/2} L; Z_{g, n-1} g),$$

то мы непосредственно доказываем, что

$$\begin{aligned} \tilde{I}_n &= \tilde{I}_{n-1} - \bar{\Gamma}_{\text{расх}}^{[n]} + O(\hbar^{n+1}) = \\ &= \tilde{I}(Z_{3,n}^{1/2} A, \bar{Z}_{3,n}^{1/2} \eta, \bar{Z}_{3,n}^{1/2} \bar{\eta}, \bar{Z}_{3,n}^{1/2} K, Z_{3,n}^{1/2} L; Z_{g,n} g), \end{aligned} \quad (12.166)$$

где

$$\begin{aligned} Z_{3,n}^{1/2} &= Z_{3,n-1}^{1/2} - \left( \beta - \alpha + \frac{a}{2} \right), \\ \bar{Z}_{3,n}^{1/2} &= \bar{Z}_{3,n-1}^{1/2} - \frac{\alpha}{2}, \\ Z_{g,n} &= Z_{g,n-1} + \frac{a}{2}. \end{aligned}$$

На этом завершается доказательство по индукции.

Мы показали, что неабелевы калибровочные теории можно перенормировать и сохранить калибровочную инвариантность, выражаемую тождествами Славнова — Тейлора (12.144) и (12.145). К счастью, все операции сводятся к перенормировкам волновой функции и константы связи. Мы получаем конечные функции Грина, если действие имеет вид

$$I_R(A, \eta, \bar{\eta}, K, L; g, \lambda) = I(A_0, \eta_0, \bar{\eta}_0, K_0, L_0; g_0, \lambda_0), \quad (12.167)$$

где используются те же обозначения, что и в (12.158), причем  $Z_L = Z_3$ ,  $\lambda_0 = Z_3^{-1} \lambda$ , с учетом отсутствия перенормировки калибровочного члена  $(\lambda/2) \mathcal{F}(A)^2$  (для линейной функции  $\mathcal{F}$ ). Как следует из (12.167), функции Грина перенормируются мультипликативно:

$$\Gamma_R(A, \eta, \bar{\eta}, K, L; g, \lambda) = \Gamma_{\text{рег}}(A_0, \eta_0, \bar{\eta}_0, K_0, L_0; g_0, \lambda_0) \quad (12.168)$$

и удовлетворяют тождествам (12.144) и (12.145). После того как мы завершили это доказательство, вполне можно опустить дополнительные источники  $K$  и  $L$  в обоих соотношениях (12.167) и (12.168).

Предыдущее рассмотрение обобщается на случай, когда имеются поля материи, взаимодействующие минимальным образом. Если присутствуют фермионные поля, то предположим на время, что в члены, описывающие взаимодействия, не входит матрица  $\gamma_5$  (это ограничение мы обсудим в разд. 12.4.5). Размерная регуляризация по-прежнему приводит к конечной теории, преобразование Бекки — Рюэ — Стора и тождества (12.147) можно обобщить, и, как следует из наших вычислений в однопетлевом приближении, остаются справедливыми соотношения, аналогичные (12.167) и (12.168). Решающим обстоятельством, конечно, является универсальность перенормировки константы связи.

Компактная формулировка тождеств Уорда, возможно, делает неясными простые факты. Подчеркнем, что результаты, найденные при вычислениях в однопетлевом приближении, представляют собой очевидные следствия уравнений



(12.147). Например, если переобозначить контрчлены  $Z_1$ ,  $\tilde{Z}_1$  и  $Z_4$ , как в (12.124), нетрудно заметить, что из соотношения (12.167) следует, что

$$\frac{Z_1}{Z_3} = \frac{\tilde{Z}_1}{\tilde{Z}_3} = \frac{Z_4}{Z_1}$$

во всех порядках. С помощью уравнения (12.147) можно также показать, что поправки к обратному пропагатору  $\Gamma_{\mu\nu}$  являются поперечными во всех порядках.

Другая регуляризация, исследованная Ли и Зинн-Жюстенем, основана на введении в исходный лагранжиан высших ковариантных производных<sup>1)</sup> Это улучшает поведение калибровочных полей при больших импульсах, а также приводит к тому, что любые диаграммы, имеющие более чем одну петлю, становятся конечными. Однопетлевые диаграммы должны быть независимо регуляризованы калибровочно инвариантным образом

Читатель может выполнить программу перенормировки в аксиальной калибровке; удобно написать условие  $n \cdot A = 0$  вводя в континуальный интеграл множитель Лагранжа. Хотя в этом случае духовые поля не имеют реальных связей с калибровочным полем, их введение позволяет нам применить несколько модифицированное преобразование Бекки—Рюэ—Стора и вывести ряд тождеств.

#### 12.4.4. Зависимость функций Грина от калибровки

Поскольку до самого конца наших вычислений мы собираемся проверять калибровочную независимость физических величин, важно уметь контролировать зависимость функций Грина от выбора калибровки. Мы убедились, что преобразование  $\delta A = D \mathcal{M}^{-1} \delta \omega$  сдвигает  $\mathcal{F}$  к  $\mathcal{F} + \delta \omega$  и модифицирует действие  $I_{\mathcal{F}}$ , определяемое выражением (12.133), следующим образом:

$$I_{\mathcal{F}} + \delta I = I_{\mathcal{F}} - \int d^4x \left[ \lambda \mathcal{F}_a \delta \omega_a + \bar{\eta}_a \frac{\delta(\delta \omega_a)}{\delta A^\mu_b} (D^\mu \eta)_b \right] = I_{\mathcal{F}} + \delta \omega. \quad (12.169)$$

Следовательно, бесконечно малое изменение функции  $\mathcal{F}$  может быть компенсировано калибровочным преобразованием поля  $A$ . Последнее касается лишь члена с источником, и, согласно теореме эквивалентности, рассмотренной в разд. 9.2.1, при этом не должны изменяться физические величины, такие, как элементы S-матрицы:

$$\begin{aligned} \exp[G_{\mathcal{F} + \Delta \mathcal{F}}(J)] &= \\ &= \int \mathcal{D}(A) \det \mathcal{M}_{\mathcal{F} + \Delta \mathcal{F}} \exp \left\{ i \int d^4x \left[ \mathcal{L} - \frac{\lambda}{2} (\mathcal{F} + \Delta \mathcal{F})^2 + J \cdot A \right] \right\} = \\ &= \int \mathcal{D}(A) \det \mathcal{M}_{\mathcal{F}} \exp \left\{ i \int d^4x \left[ \mathcal{L} - \frac{\lambda}{2} \mathcal{F}^2 + J \cdot (A - D \mathcal{M}^{-1} \Delta \mathcal{F}) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (12.170)$$

<sup>1)</sup> Регуляризацию с помощью высших ковариантных производных (для нелинейной  $\sigma$ -модели) впервые предложил А. А. Славнов, который применил ее затем для анализа перенормировок в теории Янга—Миллса. — *Прим. перев.*

Здесь это обсуждение имеет совершенно формальный характер, поскольку в калибровочных теориях, изучавшихся до сих пор, вследствие сильных инфракрасных расходимостей  $S$ -матрица не определена.

На языке преобразования Бекки—Рюэ—Стора указанное выше свойство находит отражение в структуре величины  $\delta I$ :

$$\delta I = - \int d^4x \left[ \lambda \mathcal{F}_a \Delta \mathcal{F}_a + \bar{\eta}_a \frac{\delta \Delta \mathcal{F}}{\delta A^\mu_b} (D^\mu \eta)_b \right] = s \int (- \bar{\eta}_a \Delta \mathcal{F}_a) d^4x.$$

Благодаря этому мы можем изучать зависимость сильносвязных функций и контрчленов от калибровки, например их зависимость от параметра  $\lambda$ . В качестве типичного результата укажем на то, что перенормировка константы связи  $Z_g$  не зависит от  $\lambda$ , по крайней мере при минимальной перенормировке. При других предписаниях такое утверждение может быть неверным. Последнее замечание наводит на мысль о том, что, возможно, физическая интерпретация и наблюдение неабелевой калибровочной константы связи окажутся трудным делом.

#### 12.4.5. Аномалии

Рассмотрим теперь представляющую физический интерес модель, о которой мы упоминали в конце разд. 12.4.3 и изучение которой мы отложили на будущее. Предположим, что фермионы связаны с калибровочным полем через аксиальный ток. В предыдущей главе мы убедились в том, что аномалии могут возникать при сохранении (или квазисохранении) этого тока вследствие невозможности регуляризовать теорию, в то время как киральная симметрия сохраняется. В рамках моделей, изучаемых в гл. 11, а именно в квантовой электродинамике или в  $\sigma$ -модели, рассмотрение аномалии оказалось физически полезным для анализа распада  $\pi^0 \rightarrow 2\gamma$ . Если с аномальным током связано калибровочное поле (абелево или неабелево), то ситуация резко меняется. Тожества Славнова—Тейлора могут перестать выполняться, и перенормируемость окажется под сомнением. В теориях, в которых калибровочное поле является безмассовым (такие поля рассматривались нами до сих пор), это означало бы, что потребовались бы все возможные контрчлены четвертой степени; тем самым нарушилась бы универсальность перенормировки константы связи. Положение становится еще более критическим, когда симметрия спонтанно нарушена. Как мы увидим в следующем разделе, калибровочное поле становится массивным и перенормируемость обусловлена исключительно калибровочной инвариантностью теории. При этом аномалии играют пагубную роль и можно построить модели, когда из-за этих аномалий теория оказывается непоренормируемой. Именно поэтому нам необходимо найти критерий их отсутствия.

Как и в предыдущей главе, можно ограничиться рассмотрением однопетлевых диаграмм. Существует калибровочно-инвари-

антная регуляризация, которая сохраняет киральную инвариантность в высших порядках (см. разд. 12.4.3). Рассмотрим калибровочную теорию, основанную на компактной группе. Иными словами, допустим присутствие абелевых факторов. Лагранжиан, включающий фермионные поля, записывается в виде

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu a} F^{\mu\nu}{}_a + \bar{\psi} (i\partial - m - igA_a \Gamma^a) \psi, \quad (12.171)$$

где  $\Gamma^a$  представляет собой некоторую комбинацию матриц  $T^a$  и  $T^a \gamma_5$ . Легко проверить, что аномалия аксиального тока

$$\bar{\psi} \gamma_\mu \gamma_5 T^a \psi,$$

определяемая выражением (11.225), пропорциональна величине

$$d_{abc} \equiv \text{Sp} (T^a \{T^b, T^c\}), \quad (12.172)$$

которая может обращаться в нуль сама по себе для каждого типа фермионов (каждого представления), связанных с калибровочным полем. В частности, это имеет место для вещественных представлений, когда матрицы  $T$  являются антисимметричными:

$$d_{abc} = \text{Sp} (T^{aT} \{T^b, T^c\}^T) = -d_{abc} = 0. \quad (12.173)$$

Однако данное условие может также возникать в результате компенсации вкладов фермионов различной природы. Эта возможность будет проиллюстрирована в разд. 12.6.4.

Вредные аномалии — это аномалии, возникающие в аксиальных токах, связанных с калибровочными полями. Например, если комбинации  $\bar{\psi} \gamma_\mu \gamma_5 \lambda^a \psi$  являются синглетами внутренней группы  $G$ , то аномалии таких токов не приводят к каким-либо нежелательным последствиям. Матрицы  $\lambda^a$  могут относиться к другим наборам квантовых чисел, скажем к ароматам, а не цвету. Соответствующие аномалии пропорциональны величине

$$d_{abc} = \text{Sp} (\lambda^a \{T^b, T^c\}) = \text{Sp} \lambda^a \text{Sp} \{T^b, T^c\},$$

которая обращается в нуль, например в случае  $SU(3)$ -симметрии, так как  $\text{Sp} \lambda^a = 0$ . Только ток  $U(1)$ , равный

$$J_{\mu 5} = \bar{\psi} \gamma_\mu \gamma_5 \psi, \quad (12.174)$$

содержит аномалии:

$$\begin{aligned} \partial^\mu J_{\mu 5} &= 2im \bar{\psi} \gamma_5 \psi + Cg^2 \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} F^{\mu\nu}{}_a F^{\rho\sigma}{}_a = \\ &= 2im \bar{\psi} \gamma_5 \psi + 2Cg^2 \partial^\mu \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} A^\nu{}_a (\partial^\rho A^\sigma{}_a - \partial^\sigma A^\rho{}_a - \frac{2}{3} gC_{abc} A^\rho{}_b A^\sigma{}_c); \end{aligned} \quad (12.174 a)$$

здесь  $C = -T_f/16\pi^2$ . С другой стороны, имеется сохраняющийся ток

$$\tilde{J}_{\mu 5} = J_{\mu 5} - 2Cg^2 \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} A^\nu_a (\partial^\rho A^\sigma_a - \partial^\sigma A^\rho_a - \frac{2}{3}gC_{abc} A^\nu_b A^\sigma_c), \quad (12.175)$$

но, к сожалению, он не является калибровочно-инвариантным.

## 12.5. МАССИВНЫЕ КАЛИБРОВОЧНЫЕ ПОЛЯ

### 12.5.1. История вопроса

Рассматриваемые до сих пор неабелевы калибровочные теории характеризовались точной локальной симметрией; поэтому калибровочное поле было безмассовым. Такие теории используются до сих пор с целью построения моделей сильных взаимодействий. Однако исторически, после того как Янг и Миллс предложили неабелевы калибровочные поля, физики в течение многих лет прилагали усилия для построения имеющей физический смысл теории массивных калибровочных полей, т. е. с явно нарушенной локальной симметрией.

Этот вопрос в сильной степени связан с изучением слабых взаимодействий. В гл. 11 мы показали, что теория Ферми, в которой лагранжиан записывается в виде произведения токов, является замечательной с феноменологической точки зрения. Лагранжиан слабого взаимодействия (или с точностью до знака гамильтониан) записывается [ср с (11.62)] в виде

$$\mathcal{L}_{\text{вз}} = -\frac{G}{\sqrt{2}} J^\mu(x) J_\mu^\dagger(x). \quad (12.176)$$

Разумеется, это взаимодействие с нулевым радиусом действия.

Несмотря на успехи, достигнутые в рассмотрении низкоэнергетических процессов, применение данной модели требует решения ряда серьезных проблем. Из размерности константы связи  $G$  следует, что теория является неперенормируемой. Альтернативно подсчет степеней дает для произведения  $J^\mu J_\mu^\dagger$  размерность, равную шести. При достаточно высокой энергии уже нельзя ограничиться борновским приближением. Для того чтобы амплитуда рассеяния удовлетворяла условию унитарности по крайней мере в рамках теории возмущений, необходимо добавить члены высших порядков. Однако эти поправки влекут за собой появление ультрафиолетовых расходимостей, устранение которых приводит к возрастанию числа произвольных параметров. Неперенормируемость теории приводит к тому, что на практике вычисления становятся невозможными.

Другой аспект той же самой проблемы возникает, когда рассматривается какое-либо сечение  $\sigma$  в борновском приближении. Из соображений размерности можно ожидать, что при высоких энергиях сечение ведет себя следующим образом:

$$\sigma \sim \text{const} \times G^2 s; \quad (12.177)$$

здесь  $s$  представляет собой квадрат полной энергии в системе центра масс, в то время как унитарный предел для каждой парциальной волны равен

$$\sigma \sim \text{const}/s. \quad (12.178)$$

Следовательно, мы ожидаем, что при энергиях порядка  $\sqrt{s} \sim \sim G^{-1/2} \sim 300$  ГэВ унитарность будет нарушаться.

Хорошим упражнением является вычисление константы, входящей в выражения (12.177) и (12.178), для лептонных процессов, таких, как  $\bar{\nu}\bar{\nu} \rightarrow \bar{\nu}\bar{\nu}$ ,  $\bar{\nu}_e e^- \rightarrow \bar{\nu}_e e^-$  и  $\nu_\mu e^- \rightarrow \nu_e \mu^-$ .

Оба аспекта — неперенормируемость теории и плохое поведение борновского приближения при высоких энергиях — происходят из одного и того же явления. Это становится очевидным, если применить дисперсионные соотношения для вычисления однопетлевого вклада в какую-либо амплитуду упругого рассеяния, используя ее скачки на разрезах, т. е. значение соответствующего борновского сечения. Поведение последних приводит к сильным расходимостям в дисперсионном интеграле.

Именно поэтому имеет смысл перейти от теории Ферми к более удобной теории, т. е. к перенормируемой полевой теории. Соблазнительный путь состоит в том, чтобы ввести заряженное векторное поле  $W_\mu$  и связать его с током  $J_\mu$ :

$$\mathcal{L}_{\text{вз}} = g J^\mu(x) W_\mu^\dagger(x) + \text{э.с.} \quad (12.179)$$

(здесь сокращенная запись э.с. означает эрмитово-сопряженный). Аналогия с электродинамикой здесь очевидна. Промежуточный бозон, представляемый полем  $W$ , мог бы быть квантом слабых взаимодействий. Чтобы объяснить справедливость теории Ферми при низкой энергии, предположим, что масса бозона  $W$  очень велика. Выводы теории с лагранжианом (12.179) будут отличаться от выводов теории с лагранжианом (12.176) только при высоких энергиях. Рассмотрим, например,  $\mu$ -распад. В теории Ферми амплитуда распада имеет вид (рис. 12.9, а)

$$-\frac{ig}{\sqrt{2}} \bar{u}(p_e) \gamma_\rho (1 - \gamma_5) v(p_{\bar{\nu}_e}) \bar{u}(p_{\nu_\mu}) \gamma^\rho (1 - \gamma_5) u(p_\mu),$$

тогда как в теории с  $W$ -бозоном она записывается следующим образом:

$$ig^2 \bar{u}(p_e) \gamma_0 (1 - \gamma_5) v(p_{\bar{\nu}_e}) \frac{g^{\sigma\sigma} - k^\rho k^\sigma / M_W^2}{k^2 - M_W^2} \bar{u}(p_{\nu_\mu}) \gamma_\sigma (1 - \gamma_5) u(p_\mu).$$

Обе амплитуды совпадают при энергиях, таких, что  $k^2 \equiv (p_e + p_{\bar{\nu}_e})^2 \ll M_W^2$ , и при условии, что

$$\frac{g^2}{M_W^2} = \frac{G}{\sqrt{2}}. \quad (12.180)$$

Аналогично при высоких энергиях амплитуда рассеяния, например в процессе  $\nu\bar{\nu} \rightarrow \nu\bar{\nu}$ , в борновском приближении уменьшалась бы по сравнению с фермиевской в  $M_W^2/s$  раз. Казалось бы,

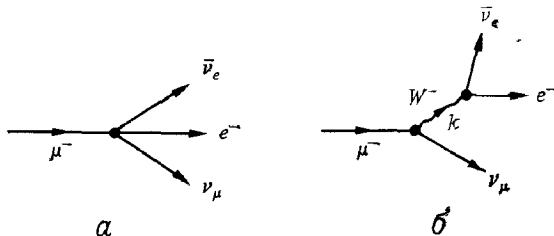


РИС. 12.9. Распад мюона  $a$  — в теории Ферми;  $b$  — через промежуточный бозон.

нарушения унитарности удалось устранить. В действительности амплитуда процесса  $\nu\bar{\nu} \rightarrow W^+W^-$  все еще имеет плохое поведение. Это указывает на то, что необходимо вводить в рассмотрение большее число полей и взаимодействий.

Приступим теперь к описанию динамики таких массивных векторных полей. Особенно трудным является вопрос о перенормируемости теории, что связано с поведением пропагатора при больших импульсах:

$$\left( g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{M_W^2} \right) (k^2 - M_W^2)^{-1} \underset{k^2 \gg M_W^2}{\sim} \text{const.}$$

Вспомним, однако, что в квантовой электродинамике введение массы фотона не нарушает перенормируемости. Если мы будем придерживаться распространенного мнения, что в теории с более высокой симметрией число расходимостей уменьшается, то логично рассматривать  $W_\mu$  как член мультиплетта калибровочных полей. Подходящей группой симметрии является  $SU(2)$ ; при этом локальная инвариантность будет явно нарушаться массовыми членами, входящими в  $W$ . Это могло бы обеспечить универсаль-

ность связи  $W$ . Поскольку калибровочные поля  $SU(2)$  должны образовывать триплет, необходимо ввести третье нейтральное векторное поле. Такая модель, уточненная соответствующим образом, является, как мы покажем, перенормируемой.

Для полноты картины упомянем другую причину, которая исторически обусловила введение массовых векторных полей. Еще в начале 60-х гг. предлагалось строить теорию сильных взаимодействий на основе калибровочного принципа. В качестве группы инвариантности выбиралась  $SU(3) \times U(1)$ , соответствующая унитарной  $SU(3)$  симметрии и сохранению барионного заряда. Векторные бозоны — массивные калибровочные поля — отождествлялись с частицами  $\rho$ ,  $K^*$ ,  $\omega$  и  $\phi$ .

Интересной особенностью такой модели является то, что между частицами с антипараллельными изоспинами в ней возникает притяжение, а при параллельных изоспинах — отталкивание, что представляет собой обобщение электромагнитного взаимодействия между противоположными зарядами. Такое свойство согласуется с экспериментальными данными при низких энергиях.

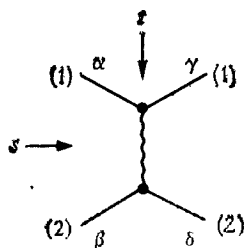


РИС. 12.10. Амплитуда рассеяния в низшем порядке

Чтобы убедиться в наличии такого свойства, вычислим амплитуду упругого рассеяния двух скалярных частиц, принадлежащих вещественным представлениям (1) и (2) простой группы Ли. Вклад низшего порядка (обмен квантом векторного поля, как показано на рис. 12.10) обусловлен следующими членами лагранжиана:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (D_\mu^{(1)} \phi^{(1)}) (D^\mu \phi^{(1)}) + \frac{1}{2} (D_\mu^{(2)} \phi^{(2)}) (D^\mu \phi^{(2)}), \quad (12.181)$$

где  $D_\mu^{(a)} = \partial_\mu - g A_\mu^a T^{(a)}$ ,  $T^{(a)}$  — антисимметричная матрица, причем  $a = 1, \dots, r$ . Этот вклад дается выражением

$$\mathcal{F} = g^2 \frac{s-u}{M^2-t} \sum_{a=1}^r T_{\alpha\gamma}^{(1)a} T_{\beta\delta}^{(2)a}. \quad (12.182)$$

Величина

$$X_{\alpha\beta\gamma\delta} = \sum_{a=1}^r T_{\alpha\gamma}^{(1)a} T_{\beta\delta}^{(2)a}$$

должна быть спроектирована на неприводимые представления. Для этой цели введем матрицы Клебша — Гордана для произведения представлений (1) и (2). Если  $n_1$  и  $n_2$  — размерности этих представлений, то  $n_1 \times n_2$ -матрицы  $M^{(t)A}$  удовлетворяют следующим соотношениям ортогональности и полноты:

$$\begin{aligned} \text{Sp} (M^{(t)A} M^{(t')B}) &= \delta^{tt'} \delta^{AB}, \quad A, B = 1, \dots, n_1 n_2, \\ \sum_{A,t} M_{\alpha\beta}^{(t)A} M_{\alpha'\beta'}^{(t)A} &= \delta_{\alpha\alpha'} \delta_{\beta\beta'}. \end{aligned} \quad (12.183)$$

и преобразуются по представлению (1):

$$T^{(1)} a M^{(t)} A - M^{(t)} A T^{(2)} a = T_{AB}^{(t)A} M^{(t)} B. \quad (12.184)$$

При этом нетрудно показать, что  $X_{\alpha\beta\gamma\delta}$  записывается через операторы Казимира для представлений (1) и (2) и (1) [см. (12.119)] в виде

$$\begin{aligned} X_{\alpha\beta\gamma\delta} &= \sum_a T_{\alpha\gamma}^{(1)A} T_{\beta\delta}^{(2)A} a = \\ &= - \sum_{a, A, t} M_{\alpha\beta}^{(t)A} T_{\gamma\alpha'}^{(1)A} M_{\alpha'\beta'}^{(t)A} T_{\beta'\delta}^{(2)A} a = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{A, t} [C(1) + C(2) - C(t)] M_{\alpha\beta}^{(t)A} M_{\gamma\delta}^{(t)A}. \end{aligned} \quad (12.185)$$

Собственные значения оператора Казимира возрастают с ростом размерности представления. Например, в случае  $SU(2)$  симметрии представлению с изоспином  $l$  соответствует  $C(l) = l(l+1)$ . Желаемое свойство следует из положительности величины  $(s-u)/(M^2-u)$  в физической области.

Это вычисление перекрестной матрицы, относящейся здесь к внутренним степеням свободы, аналогично правилам перестановки Фирца, описанным в гл. 3 (см т. 1 настоящей книги).

Из данной модели, рассмотренной Сакураи, можно получить также ширины векторных бозонов. Пренебрежем смешиванием  $\phi - \omega$  (которое улучшает результаты вычислений) и свяжем октеты  $(\pi, K, \eta)$  и  $(\rho, K^*, \phi)$  калибровочно-инвариантным образом. В борновском приближении амплитуда  $p$ -волны в упругих  $\pi\pi$ -,  $\pi K$ - и  $K\bar{K}$ -каналах записывается в виде

$$\mathcal{F}_{l=1} = \alpha \frac{g^2}{16\pi} \frac{q^2}{M^2 - s},$$

где  $q$  — 3-импульс в системе центра масс, а  $\alpha = 8/3$ , 1 и 2 для трех каналов соответственно. Унитарную амплитуду  $t_1$  можно построить следующим образом:

$$t_1 = \frac{\mathcal{F}_1}{1 - i\rho\mathcal{F}_1}, \quad \text{Im } t_1 = \rho |t_1|^2,$$

где величина  $\rho = 2|q|/\sqrt{s}$  (умноженная на 1/2 в силу тождественности частиц  $\pi\pi$ ) представляет собой фазовый фактор. Эта амплитуда имеет полюс при  $s \approx M^2 - i\rho\alpha q^2 g^2/16\pi$ , соответствующий резонансу с шириной  $\Gamma \approx \rho\alpha q^2 g^2/16\pi M|_{s=M^2}$ . Полагая  $g^2/16\pi = 0,63$ , находим  $\Gamma_\rho \approx 130$  МэВ,  $\Gamma_{K^*} \approx 38$  МэВ и  $\Gamma_\phi \approx 4,5$  МэВ. Эти значения довольно хорошо согласуются с экспериментальными значениями (соответственно 125, 50 и 3,2).

### 12.5.2. Массивная калибровочная теория

Является ли перенормируемой калибровочная теория, в которую массовые члены вводятся изначально?

В случае электродинамики мы имеем вполне благоприятную ситуацию. После разделения калибровочного поля на поперечную и продольную компоненты продольная часть  $k_\mu k_\nu/M^2$ , которая обуславливает плохое поведение пропагатора, не дает вклада



в  $S$ -матрицу. Это является результатом того, что продольная и поперечная компоненты не взаимодействуют друг с другом и, кроме того, поле связано с сохраняющимся током. В неабелевой теории ни одно из этих свойств не выполняется. Продольная и поперечная компоненты поля в ней действительно взаимодействуют, а ток, с которым связано калибровочное поле, не сохраняется<sup>1)</sup>. С другой стороны, непредвиденные сокращения расходимостей на однопетлевом уровне делают теорию похожей на перенормируемую. Этим объясняется, почему потребовался определенный период времени, чтобы достигнуть единодушия в мнении, что такая теория перенормируема. Выход из этой неприятной ситуации состоит в том, чтобы обратиться к механизму спонтанного нарушения симметрии, который мы рассмотрим в разд. 12.5.3

Наша цель состоит в том, чтобы построить перенормируемую теорию при условии, что физическими состояниями должны быть только массивные векторные поля. Если ввести вспомогательные поля, такие, как в методе Штюкельберга для электромагнитного поля, то необходимо будет удостовериться в том, что для каждого массивного векторного бозона вклад в условие унитарности дают лишь три физические степени свободы. В силу теоремы эквивалентности это требование будет выполнено в сформулированном ниже методе, в котором в целях улучшения поведения пропагатора континуальный интеграл подвергается локальным заменам переменных. Таким образом, рассмотрим производящий функционал

$$e^{G(J)} = \int \mathcal{D}(A) \exp \left\{ i \int d^4x [\mathcal{L} - 2 \text{Sp}(J \cdot A)] \right\}, \quad (12.186)$$

в котором, как и выше, применяются матричные обозначения:

$$\mathcal{L} = \text{Sp} \left( \frac{1}{2} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - M^2 A_\mu A^\mu \right). \quad (12.187)$$

Каноническое квантование может вызвать затруднение, поскольку  $\pi_{0a} = \delta \mathcal{L} / \delta \partial_0 A_a^0 \equiv 0$ . Однако присутствие массового члена гарантирует существование пропагатора и, следовательно, состоятельность приведенного выше континуального интеграла в рамках теории возмущений. Операция Фаддеева — Попова не является необходимой, тем не менее выполним ее, чтобы улучшить поведение пропагатора. Выберем, как и в разд. 12.2.2, калибровочное условие в виде

$$\mathcal{F}(A) = C$$

и вставим в (12.186) множитель

$$1 = \int \mathcal{D}(g) \prod_x \delta [\mathcal{F}(gA) - C] \det \mathcal{M}_{\mathcal{F}}(A). \quad (12.188)$$

<sup>1)</sup> Последнее утверждение неверно. Неабелевы калибровочные массивные поля при включении минимальным образом массового члена, инвариантного относительно глобальных преобразований, связаны с сохраняющимся током и обладают универсальным взаимодействием. На этом свойстве, в частности, основана феноменологическая модель векторной доминантности — *Прим. перев.*

Тогда выражение (12.186) примет вид

$$e^{G(J)} = \int \mathcal{D}(A) \mathcal{D}(g) \prod_x \delta[\mathcal{F}(\varepsilon A) - C] \det \mathcal{M}_{\mathcal{F}} \exp \left\{ i \int d^4x [\mathcal{L} - 2\text{Sp}(J \cdot A)] \right\}.$$

В противоположность случаю безмассовой теории лагранжиан  $\mathcal{L}$  не является теперь инвариантным при калибровочном преобразовании  $A \rightarrow \varepsilon A$ . Если параметризовать функцию  $g(x)$  следующим образом

$$g(x) = e^{\xi(x)},$$

то легко показать, что

$$\text{Sp}(A^\mu A_\mu) = \text{Sp} \left[ \varepsilon A^\mu \varepsilon A_\mu - \frac{2}{g} \partial_\mu \xi \varepsilon A^\mu + \frac{1}{g^2} \partial_\mu \xi P^\mu(\varepsilon A, \xi) \right],$$

где через  $P^\mu$  мы обозначили формальный ряд

$$P^\mu(A, \xi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{(n+2)!} [\dots [D^\mu \xi, \xi], \xi], \dots, \xi], \quad (12.189)$$

общий член которого имеет  $n$  скобок. Матрица  $S$  не изменится, если заменить источник  $J \cdot A$  на  $J \cdot \varepsilon A$ . Произведя замену переменных  $A \rightarrow \varepsilon^{-1} A$  и вычислив гауссов интеграл по  $C$ , новый производящий функционал можно записать в виде

$$e^{G'(J)} = \int \mathcal{D}(A, \xi, \eta, \bar{\eta}) \exp \left\{ i \int d^4x [\mathcal{L}'(A, \xi, \eta, \bar{\eta}) - 2\text{Sp}(J \cdot A)] \right\}. \quad (12.190)$$

Входящий в него лагранжиан включает в себя поле  $A_\mu$ , духи Фаддеева — Попова  $\eta, \bar{\eta}$  и новое поле  $\xi$  с обычными предписаниями относительно коммутации:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}'(A, \xi, \eta, \bar{\eta}) = & \text{Sp} \left[ \frac{1}{2} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - M^2 A_\mu A^\mu + \lambda \mathcal{F}^2(A) + 2 \frac{M^2}{g} A^\mu \partial_\mu \xi - \right. \\ & \left. - \frac{M^2}{g^2} \partial_\mu \xi P^\mu(A, \xi) \right] - \bar{\eta} \mathcal{M}_{\mathcal{F}} \eta. \end{aligned} \quad (12.191)$$

Если  $M^2 = 0$ , то поле  $\xi$  исчезает из лагранжиана, а интегрирование по  $\xi$  дает (бесконечный) фактор, который не вносит вклада в  $e^{G'(J) - G'(0)}$ .

Удобно выбрать калибровку Ландау  $\mathcal{F} = \partial_\mu A^\mu$ ,  $\lambda \rightarrow \infty$ , чтобы вычислить векторный пропагатор  $-i(g_{\mu\nu} - k_\mu k_\nu / k^2)(k^2 - M^2)^{-1}$ . Пропагаторы  $\xi$  и  $\eta$  ведут себя как  $1/k^2$ . Условная степень расходимости  $L$ -петлевой диаграммы дается выражением

$$\omega = 2L + 2 + \sum_i n_i (d_i - 2) \leq 2L + 2,$$

где  $n_i$  — число вершин типа  $(i)$ , а  $d_i$  — число производных поля в такой вершине. Отсюда для сильносвязной диаграммы с  $E$  внешними линиями (среди которых нет линии  $\xi$ ) имеем

$$\omega \leq 2L + 2 - E + \sum_{\text{Внутренние вершины}} n_i (d_i - 2) \leq 2L + 2 - E, \quad (12.192)$$

что следует сравнить с  $\omega \leq 6L + E - 2$ , получаемой в первоначальной теории с лагранжианом (12.187).

Мы видим, что в абелевой теории, в которой  $P_\mu = \partial_\mu \xi$ , поля  $\xi$  и  $\eta$  не связаны с векторным полем. Мы в точности воспроизвели результат, полученный в гл. 8, а именно что массивная электродинамика является перенормируемой по подсчету степеней.

В неабелевом случае, если мы ограничимся однопетлевым приближением, выражение (12.192) дает ту же самую условную степень расходимости, что и в перенормируемой теории, т. е.  $\omega = 4 - E$ . В этом порядке эффективный лагранжиан для диаграмм без внешних линий  $\xi$  и  $\eta$  запишется в калибровке Ландау следующим образом:

$$\mathcal{L}'_1 = \text{Sp} \left( \frac{1}{2} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - M^2 A_\mu A^\mu - \frac{M^2}{g^2} \partial_\mu \xi D^\mu \xi \right) - \bar{\eta} \partial_\mu D^\mu \eta. \quad (12.193)$$

Интегралы по  $\xi$  и  $\eta$ ,  $\bar{\eta}$  являются гауссовыми и могут быть вычислены. Первый из них дает  $\det^{-1/2} \mathcal{M}_\xi$ , в то время как второй —  $\det \mathcal{M}_\eta$ . Следовательно, в этом порядке достаточно ввести единственное вспомогательное поле при условии, что каждой замкнутой духовой петле сопоставляется множитель  $-1/2$ . Сравнивая этот множитель,  $-1/2$ , с множителем  $-1$ , присутствующим в безмассовом случае, находим, что предел  $M \rightarrow 0$  должен быть сингулярным. В разд. 12.3 мы показали, что в бесмассовом случае сохранение калиб-

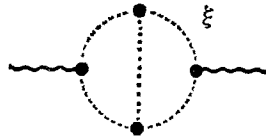


РИС. 12.11. Диаграмма с расходимостью четвертой степени в массивной калибровочной теории. Пунктирные линии соответствуют пропагаторам вспомогательного поля  $\xi$ .

ровочной инвариантности обеспечивалось духовым вкладом (с множителем  $-1$ ). Таким образом, можно ожидать, что указанное выше изменение предписаний приводит к модификации контрчленов. Например, это вызывает перенормировки массового или калибровочного члена и (что более существенно) возникновение новых четырехточечных связей. Следовательно, даже если теория выглядит перенормируемой в этом порядке, контрчлены теряют симметрию и при рассмотрении высших порядков возникают серьезные трудности. В частности, диаграмма, изображенная на рис 12.11, в соответствии с формулой (12.192) имеет расходимость четвертого порядка:  $\omega = 4$ .

Таким образом, мы приходим к заключению, что, несмотря на сокращение расходимостей, массивная калибровочная теория является перенормируемой.

### 12.5.3. Спонтанное нарушение симметрии

В гл. 11 мы уже изучали спонтанное нарушение симметрии, когда граничные условия позволяли нам выбрать одно из набора вырожденных основных состояний. Возникновение безмассовых частиц представляет собой замечательную особенность такого нарушения в случае непрерывной симметрии. Эти голдстоуновские бозоны являются возбуждениями с нулевой энергией, связывающими возможные вакуумные состояния друг с другом. Естественно вернуться к обсуждению этого явления в рамках калибровочной

теории (абелевой или неабелевой), где рассматриваются далекодействующие силы или, альтернативно, где в гильбертовом пространстве может присутствовать нефизический сектор. Оказывается, что при наличии нарушенной калибровочной симметрии далекодействующие силы экранируются. Голдстоуновские бозоны и калибровочные поля комбинируются в массивные возбуждения, а безмассовые возбуждения становятся ненаблюдаемыми

Это явление было открыто и изучено в связи со сверхпроводимостью. Пары электронов, ответственные за сверхпроводимость, могут описываться волновой функцией  $\psi = \rho e^{i\theta/\hbar}$ . Чтобы нейтрализовать фоновый заряд ионов, плотность заряда, пропорциональная  $\psi\psi^* = \rho^2$ , должна быть постоянной во всем кристалле. При наличии магнитного поля с векторным потенциалом  $\mathbf{A}$  ток  $\mathbf{J}$  записывается следующим образом:

$$\mathbf{J} = \frac{1}{2m} \psi^* \left( \frac{\hbar}{i} \overleftrightarrow{\nabla} - 2q\mathbf{A} \right) \psi = \frac{\rho^2}{m} (\nabla\theta - q\mathbf{A}),$$

где  $q = 2e$  — заряд пары. Дивергенция тока  $\mathbf{J}$  обращается в нуль, и, следовательно, в поперечной калибровке  $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$  мы имеем  $\Delta\theta = 0$ . В случае простой геометрической конфигурации величина  $\theta$  является постоянной; таким образом, уравнение Максвелла

$$\Delta\mathbf{A} = -q\mathbf{J}$$

принимает вид

$$\Delta\mathbf{A} = \frac{q^2\rho^2}{m} \mathbf{A}. \quad (12.194)$$

Векторный потенциал  $\mathbf{A}$  экранирован на характерной длине  $\lambda$ , причем  $\lambda = \sqrt{m}/|q\rho|$ . Это эффект Мейснера, согласно которому магнитное поле не может проникнуть внутрь проводника.

Возвращаясь к теории поля, рассмотрим заряженное поле  $\phi$ , связанное с абелевым калибровочным полем. Напишем лагранжиан

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & -\frac{1}{4} (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) + \\ & + (\partial_\mu - ieA_\mu) \phi^* (\partial^\mu + ieA^\mu) \phi - V(\phi). \end{aligned} \quad (12.195)$$

Потенциал  $V(\phi)$  инвариантен относительно локальных преобразований  $\phi \rightarrow e^{i\omega(x)}\phi$ , и его минимум расположен при ненулевом значении  $\phi^*\phi$  (ср. рис. 11.5). Например,

$$V(\phi) = \mu^2\phi^*\phi + \lambda(\phi^*\phi)^2, \quad (12.196)$$

причем  $\mu^2 < 0$ , а  $\lambda > 0$ . В основном состоянии  $\langle\phi\rangle = v/\sqrt{2}$ ; при этом

$$\mu^2 + \lambda|v|^2 = 0. \quad (12.197)$$

С помощью глобального поворота основное состояние  $\langle \phi \rangle$  всегда можно преобразовать к вещественному значению, поскольку эта величина не зависит от  $x$ . Следовательно, будем считать, что

$$\phi = \frac{\phi_1 + i\phi_2}{\sqrt{2}}, \quad \langle \phi_1 \rangle = v, \quad \langle \phi_2 \rangle = 0. \quad (12.198)$$

Сдвинем величину  $\phi$  следующим образом:

$$\phi_1(x) = \phi'_1(x) + v, \quad \langle \phi'_1 \rangle = 0. \quad (12.199)$$

Лагранжиан, выраженный через  $\phi'$  (штрих будет далее опущен), принимает вид

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & -\frac{1}{4} (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) + \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi_1 \partial^\mu \phi_1 + \partial_\mu \phi_2 \partial^\mu \phi_2) - \\ & - \frac{\mu^2}{2} (\phi_1^2 + \phi_2^2 + 2v\phi_1) + \frac{e^2 A^2}{2} (\phi_1^2 + \phi_2^2 + 2v\phi_1 + v^2) - \\ & - \frac{\lambda}{4} (\phi_1^2 + \phi_2^2 + 2v\phi_1 + v^2)^2 - e A_\mu \phi_2 \overset{\leftrightarrow}{\partial}_\mu \phi_1 + ev A^\mu \partial_\mu \phi_2. \end{aligned} \quad (12.200)$$

Величина  $\phi_2$  соответствует голдстоуновскому бозону, поскольку в силу соотношения (12.197) коэффициент при  $\phi_2^2$  обращается в нуль. Но не будем спешить! У поля  $A_\mu$  теперь появился массовый член  $(1/2)e^2 v^2 A^2$ , а также член смешивания  $ev A_\mu \partial^\mu \phi_2$ . Квадратичная форма по  $A$  и  $\phi_2$  диагонализуется заменой

$$B_\mu = A_\mu + \frac{\partial_\mu \phi_2}{ev}, \quad (12.201)$$

которая напоминает калибровочное преобразование. В результате квадратичную часть лагранжиана  $\mathcal{L}$  можно записать в виде

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_q = & -\frac{1}{4} (\partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu) (\partial^\mu B^\nu - \partial^\nu B^\mu) + \frac{1}{2} \partial_\mu \phi_1 \partial^\mu \phi_1 + \\ & + \frac{1}{2} e^2 v^2 B^2 - \frac{1}{2} (2\lambda v^2) \phi_1^2. \end{aligned} \quad (12.202)$$

Итог этого обсуждения состоит в следующем. Калибровочное поле приобрело массу, в то время как поле  $\phi_2$  исчезло, по крайней мере из  $\mathcal{L}_q$ . В действительности  $\phi_2$  можно устранить полностью, если воспользоваться другой параметризацией функции  $\phi(x)$ :

$$\phi(x) = e^{i\theta(x)/v} \frac{v + \rho(x)}{\sqrt{2}}, \quad (12.203)$$

где  $v$  и  $\rho$  — эрмитовы поля. После локального калибровочного преобразования

$$\begin{aligned} \phi & \rightarrow \phi' = e^{-i\theta/v} \phi = \frac{v + \rho}{\sqrt{2}}, \\ A_\mu & \rightarrow A'_\mu = A_\mu + \frac{1}{ev} \partial_\mu \theta \end{aligned} \quad (12.204)$$

лагранжиан принимает вид

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} (\partial_\mu A'_\nu - \partial_\nu A'_\mu) (\partial^\mu A'^\nu - \partial^\nu A'^\mu) + (\partial_\mu - ieA'_\mu) \phi' (\partial^\mu + ieA'^\mu) \phi' - \mu^2 \phi'^2 - \lambda \phi'^4. \quad (12.205)$$

Используя разложение  $\phi' = (\rho + i\upsilon)/\sqrt{2}$ , убеждаемся в том, что  $A$  действительно приобрело массу  $M = |e|\upsilon$  и что голдстоуновский бозон исчез. Мы начали рассмотрение с системы, описывающей заряженное скалярное поле (два состояния) и безмассовое калибровочное поле с двумя состояниями поляризации. После спонтанного нарушения симметрии мы получили вещественное скалярное поле и одно массивное векторное поле с тремя состояниями поляризации. Число степеней свободы сохранилось, а голдстоуновский бозон превратился в состояние продольной поляризации векторного поля. Это явление открыли Энглерт, Броут и Хиггс. Оставшийся массивный скалярный бозон называется хиггсовским.

Представленный здесь подход можно обобщить на случай неабелевой симметрии. Будем следовать анализу, выполненному Кибблом, Ли и Зинн-Жюстеном. Пусть  $G$  — калибровочная группа размерности  $r$ , необязательно полупростая, и пусть калибровочное поле связано с мультиплетом скалярных полей  $\phi$ , преобразующихся в соответствии с некоторым неприводимым  $n$ -мерным представлением этой группы. Лагранжиан записывается в виде

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu a} F^{\mu\nu a} + [(\partial_\mu - g_a T^a A_{\mu a}) \phi]^\dagger [(\partial_\mu - g_a T^a A_{\mu a}) \phi] - V(\phi). \quad (12.206)$$

Антиэрмитовы матрицы  $T$  являются инфинитезимальными генераторами данного представления, а константы связи могут зависеть от простой компоненты группы. Наконец, предположим, что  $V$  инвариантен относительно преобразований данной группы  $G$  и его минимум достигается при  $\langle \phi \rangle = v$ . Пусть  $H$  есть подгруппа группы  $G$  (размерности  $s$ ), которая оставляет  $v$  инвариантным. Природа  $H$  зависит от  $G$ , от представления, по которому преобразуется  $\phi$ , и от формы потенциала  $V$ .

### Примеры

1.  $G = O(n)$ ,  $\phi$  есть векторное (с размерностью, равной  $n$ ) представление,  $H = O(n-1)$ .
2.  $G = SU(3) \times SU(3)$ ,  $\phi = M$  является  $3 \times 3$ -матрицей, принадлежащей представлению  $(3, \bar{3})$ , а

$$V(M) = \alpha \text{Sp}(MM^\dagger)^2 + \beta [\text{Sp}(MM^\dagger)]^2 + \gamma (\det M + \det M^\dagger) + \delta \text{Sp}(MM^\dagger).$$

Читатель может убедиться в том, что для эрмитовой матрицы  $\langle M \rangle$  оператор  $H$  включает по крайней мере группу  $SU(2) \times U(1)$ .

Пусть инфинитезимальные генераторы подгруппы  $H$  соответствуют матрицам  $T^a$  ( $a=1, \dots, s$ ). Остальные генераторы  $T^a$  ( $a=s+1, \dots, r$ ) порождают фактор-пространство  $G/H$ . Параметризуем  $\phi(x)$  следующим образом:

$$\phi(x) = \exp \left[ \sum_{a=s+1}^r T^a \frac{\xi_a(x)}{v} \right] [\rho(x) + v] / \sqrt{2}; \quad (12.207)$$

здесь вакуумные ожидания полей  $\rho$  и  $\xi$  имеют нулевые значения<sup>1</sup>). Поле  $\rho$  имеет  $n - (r - s)$  эффективных составляющих. В отсутствие калибровочных полей величина  $\xi$  играла бы роль голдстоуновских бозонов. Однако калибровочная инвариантность позволяет их устранить. Выполним преобразование

$$\begin{aligned} \phi(x) \rightarrow \phi'(x) &= \exp \left[ - \sum_{a=s+1}^r T^a \frac{\xi_a(x)}{v} \right] \phi(x) = [\rho(x) + v] / \sqrt{2}, \\ \sum_{a=1}^r g_a T^a A_{\mu a}(x) &\rightarrow \sum_{a=1}^r g_a T^a A'_{\mu a}(x) = \exp \left[ - \sum_{s+1}^r \frac{T^a \xi_a(x)}{v} \right] \times \\ &\times \left[ - \partial_\mu + \sum_{a=1}^r g_a T^a A_{\mu a}(x) \right] \exp \left[ \sum_{s+1}^r \frac{T^a \xi_a(x)}{v} \right], \end{aligned} \quad (12.208)$$

которое заменяет лагранжиан (12.206) выражением

$$\mathcal{L}(A', \phi') = - \frac{1}{4} F'_{\mu\nu a} F'^{\mu\nu a} + [D_\mu(A') \phi']^\dagger [D^\mu(A') \phi'] - V(\phi'), \quad (12.209)$$

где

$$D_\mu = \partial_\mu - \sum_{a=1}^r g_a A'_{\mu a} T^a.$$

Всякий след от несостоявшихся голдстоуновских бозонов  $\xi$  исчез; а эрмитову неотрицательную массовую матрицу векторных полей можно записать в виде

$$(M^2)_{ab} A^\mu_a A_{\mu b} = g_a g_b (T^a v)^\dagger (T^b v) A^\mu_a A_{\mu b}. \quad (12.210)$$

Поскольку  $s$  первых генераторов  $T^a$  ( $a=1, \dots, s$ ) обращают  $v$  в нуль, эта матрица является блочно-диагональной. Только нижняя  $(r-s) \times (r-s)$ -матрица является положительно-определенной и соответствует массивным векторным бозонам. Оставшиеся  $s$  безмассовых полей соответствуют ненарушенной калибровочной группе симметрии  $H$ . Как и в абелевом случае, полное число степеней свободы здесь сохраняется.

<sup>1</sup>) Множитель  $\sqrt{2}$ , появившийся в правой части соотношения (12.207), будем опускать при обсуждении вещественных полей, аналогично тому, как мы это делали в гл. II.

Теперь мы можем пересмотреть данную в разд. 12.1.3 полуклассическую картину и найти решения уравнений движения для теории, включающей калибровочные и скалярные поля. Отдельно для калибровочных или скалярных полей нетривиальных статических решений с конечной энергией не существует. Однако теории, включающие как скалярные, так и калибровочные поля, могут приводить к интересным классическим решениям в трехмерном пространстве.

Для статических решений с конечной энергией поля должны стремиться на пространственной бесконечности к одной из конфигураций с минимальной энергией. В противном случае в бесконечной области плотность энергии отличалась бы от нуля на конечную величину. Существование набора вырожденных вакуумных состояний является возможным средством для обеспечения устойчивости нетривиального решения. Таким образом, можно считать, что поля переходят в различные вакуумные конфигурации в зависимости от направлений, по которым их аргументы стремятся к бесконечности. Решение, если оно существует, будет топологически устойчивым при условии, что оно нетривиальным образом отображает сферу  $S_2$  на пространственной бесконечности на многообразие допустимых вакуумных состояний, т. е. на факторпространство  $G/H$ . Достаточное условие этого состоит в том, чтобы симметрия была спонтанно нарушенной и чтобы гомотопическая группа  $\pi_2(G/H)$  была нетривиальной.

Для определенности рассмотрим модель Джорджи—Глэшоу, представляющую собой калибровочную теорию с группой симметрии  $G = SO(3)$ , в которой триплет скалярных полей связан с триплетом калибровочных полей. Симметрия нарушается спонтанно до подгруппы  $U(1) = SO(2)$ . Если оставшееся безмассовое калибровочное поле рассматривать как электромагнитное поле, то мы имеем модель квантовой электродинамики, основанную на группе  $SO(3)$ . Имея это в виду, будем обозначать в дальнейшем константу связи буквой  $e$ . Математики учат нас, что  $\pi_2[SO(3)/U(1)] = \mathbb{Z}$  есть группа целых чисел; это означает, что решения характеризуются целочисленным топологическим зарядом  $n$ .

Т'Хоофт и Поляков изучали решение с  $n=1$ . Оно соответствует граничному условию, такому, при котором  $\phi_a$  направлено по нормали к сфере  $S_2$  на бесконечности [тождественное отображение  $S_2$  на  $SO(3)/U(1) \sim S_2$ ]:

$$\phi_a(x) \xrightarrow{|x| \rightarrow \infty} \frac{x_a}{|x|} v; \quad (12.211)$$

здесь  $v$  — вакуумное среднее вещественного поля  $\phi$ . Если выбрать калибровку  $A_a^0 = 0$ , то в предположении, что  $D\phi$  асимптотически обращается в нуль, получаем

$$A_a^i \rightarrow \frac{1}{e} \varepsilon_{iab} \frac{x_b}{x^2}. \quad (12.212)$$

Тогда можно показать, что существуют регулярные решения  $\phi_a(x)$  и  $A_a(x)$ , удовлетворяющие этим граничным условиям.

Топологический инвариант  $n$  можно интерпретировать как магнитный заряд. Для этого не зависящего от времени решения электрическое поле отсутствует. Магнитное поле на бесконечности является радиальным:

$$B^k = -\frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} F^{ij} = \frac{x^k}{er^3},$$

поскольку оно получено с помощью калибровочного преобразования из вакуумной конфигурации  $\langle \phi \rangle = v$ .



Поток магнитного поля через поверхность равен

$$\int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{e} \int \frac{1}{r^2} r^2 d\Omega = \frac{4\pi}{e} \equiv g \quad (12.213)$$

в соответствии с определением магнитного заряда  $g$ , заключенного внутри сферы. Решения с высшим топологическим зарядом  $n$  соответствуют магнитному заряду  $4\pi n/e$ .

Как и для любой квазиклассической конфигурации этого типа, энергия данной конфигурации, или масса покоя монополя, пропорциональна обратному квадрату константы связи, т. е. пропорциональна  $1/e^2$ . Т'Хоофт показал, что она имеет порядок  $M_W/\alpha$ , где  $M_W$  — векторная масса, приобретаемая за счет спонтанного нарушения симметрии. Такой монополь был бы чрезвычайно тяжелым!

#### 12.5.4. Перенормировка спонтанно нарушенных калибровочных теорий

Ясно, что калибровка (12.209), называемая унитарной, поскольку она включает в себя только физические степени свободы, не удобна для изучения перенормировки, вследствие того, что в этой калибровке пропагатор при больших импульсах ведет себя плохо. Следует вернуться к первоначальной калибровке, в которой перенормируемость более очевидна, но тогда придется показать, что нефизические состояния не дают вклада в  $S$ -матрицу.

Здесь используется та же идея, что и в случае спонтанно нарушенной  $\sigma$ -модели (гл. 11). Перенормировка не зависит от того, является ли симметрия точной или спонтанно нарушенной. Для простоты проведем анализ для группы  $G = O(n)$  и вещественного скалярного векторного мультиплетта  $\phi$ . Полный лагранжиан, включающий в себя калибровочные и духовые члены, запишется в виде

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_S(\mu^2) = & -\frac{1}{4} F_{\mu\nu a} F^{\mu\nu a} - \frac{\lambda}{2} (\partial_\mu A^\mu_a)^2 - \bar{\eta} \partial_\mu D^\mu \eta + \\ & + \frac{1}{2} D_\mu \phi D^\mu \phi - \frac{\mu^2}{2} \phi^2 - \frac{\lambda_\phi}{4} (\phi^2)^2. \end{aligned} \quad (12.214)$$

Для того чтобы избежать путаницы с калибровочным параметром, константу связи при члене  $\phi^4$  мы обозначили через  $\lambda_\phi$ . При  $\mu^2 < 0$  поле  $\phi$  имеет вакуумное среднее  $\langle \phi \rangle = v$ . Надо показать, что контрчлены симметричной теории ( $\mu^2 > 0$ ) вполне достаточны, для того чтобы нарушенная теория ( $\mu^2 < 0$ ) с точностью до перенормировки  $\mu^2$  стала конечной. Как и в гл. 11, нельзя просто продолжить  $\mu^2$  от положительных значений к отрицательным, поскольку точка  $\mu^2 = 0$  не является точкой аналитичности. В этой точке имеет место фазовый переход. Однако можно найти спасительный выход. Для этого нужно ввести малый внешний источник  $c$ , связанный с полем  $\phi(x)$  и постоянный во всем пространстве:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_S(\mu^2) + c \cdot \phi(x). \quad (12.215)$$

Это явное нарушение приводит к вакуумному среднему  $\mathbf{v}$  для  $\phi(x)$ , параллельному  $\mathbf{c}$ . Действительно, тождество, полученное в линейной  $\sigma$ -модели [выражение (11.170)], остается справедливым и здесь. Если  $\Gamma_T^{(2)}(0) = -m^2$  обозначает обратный пропагатор для поперечной компоненты  $\phi_T$  при нулевом импульсе, то

$$\mathbf{c} = -\mathbf{v}\Gamma_T^{(2)}(0). \quad (12.216)$$

В низшем порядке это условие записывается как  $\mathbf{c} = (\mu^2 + \lambda_\phi v^2) \mathbf{v}$  и выражает тот факт, что при вакуумном среднем  $\mathbf{v} = \langle \phi \rangle$  лагранжиан (12.214) является стационарным.

Доказательство перенормируемости основано на двух наблюдениях. Во-первых, как и в линейной  $\sigma$ -модели, производящие функционалы сильносвязных функций в симметричной и нарушенной теориях связаны соотношением:

$$\Gamma(\phi, \mathbf{c}, \mathbf{v}) = \Gamma_S(\phi + \mathbf{v}) - \Gamma_S(\mathbf{v}) + \int d^4x \mathbf{c} \cdot \phi, \quad (12.217)$$

где

$$\mathbf{c} = -\delta\Gamma_S(\mathbf{v})/\delta\mathbf{v}. \quad (12.218)$$

Остальные аргументы величин  $\Gamma$  и  $\Gamma_S$ , такие, как  $A_\mu$ ,  $\eta$ ,  $\bar{\eta}$ ,  $g$ , ..., здесь опущены. Мы подчеркиваем, что  $\Gamma$  — это производящий функционал функций Грина, описывающих флуктуации относительно состояния несимметричного вакуума. Это тождество играет важную роль, поскольку нам уже известно, как следует перенормировать симметричную теорию. В разд. 12.4.3 мы получили

$$\begin{aligned} \Gamma_{S,R}(\phi, A, \eta, \dots; g, \lambda_\phi \mu^2) = \\ = \Gamma_{S, \text{рег}}(Z_2^{1/2}\phi, Z_3^{1/2}A, \bar{Z}_3^{1/2}\eta, \dots; g_0, \lambda_{\phi_0}, \mu^2 + \delta\mu^2). \end{aligned} \quad (12.219)$$

Следовательно, при введении симметричных контрчленов нарушенная теория также становится конечной:

$$\Gamma_R(\phi, \mathbf{c}, \mathbf{v}, A, \dots, \mu^2) = \Gamma_{\text{рег}}(Z_2^{1/2}\phi, \mathbf{c}_0, \mathbf{v}_0, Z_3^{1/2}A, \dots, \mu^2 + \delta\mu^2), \quad (12.220)$$

если  $\mathbf{v}$  и  $\mathbf{c}$  перенормируются таким образом, что сохраняется конечность произведения  $\mathbf{c} \cdot \phi$  и выполняется (12.218):

$$\mathbf{c}_0 = Z_2^{-1/2}\mathbf{c}, \quad \mathbf{v}_0 = Z_2^{1/2}\mathbf{v}. \quad (12.221)$$

Вторая наша забота связана с вариацией величины  $\mu^2$ . Из подсчета степеней следует, что в нарушенной теории такая вариация требует модификации одного лишь контрчлена  $\delta\mu^2$ . Тождество (12.217) показывает, что эта модификация оказывается также достаточной и для того, чтобы нарушенная теория стала конечной. В этом случае можно было бы считать, что вариация величины  $\mu^2$  также требует модификации массового члена  $M_A^2$  век-

торного поля, что нарушило бы справедливость нашего доказательства. Однако из соотношения (12.217) следует, что такая модификация члена  $M_A^2$  обусловлена лишь изменением зависимости величины  $v$  от  $\mu^2$ .

В заключение отметим, что можно достигнуть любой точки  $(m^2, v)$ -плоскости (рис. 12.12) и перенормировать соответствующую теорию с помощью контрчленов симметричной теории. Перенор-

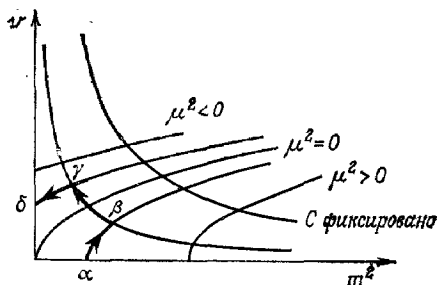


РИС. 12.12. Кривые, соответствующие постоянным  $\mu^2$  и  $c$  в плоскости  $m^2, v$ .

мируем спонтанно нарушенную теорию [ $c = 0, m^2 = 0, v$  задано (точка  $\delta$  на рис. 12.12)], модифицируя только контрчлен для  $\mu^2$ . Вспомним также изображенные на рис. 11.14 диаграммы на  $(\mu^2, m^2)$ -или  $(\mu^2, v)$ -плоскостях.

Мы не выписали явно соответствующие условия нормировки различных сильносвязных функций. Их можно вывести, исходя из тождества (12.217) и условий нормировки симметричных функций. Этой промежуточной перенормировке мы предпочитаем более физические требования, например, определение константы связи как значения трехточечной функции в некоторой точке на массовой поверхности и т. п. Нет необходимости напоминать, что эти новые условия нормировки должны согласовываться с тождествами, выведенными из (12.217) и из тождеств, которым удовлетворяет величина  $\Gamma_S$ .

Можно сказать, что метод, которому мы здесь следовали, является экономным, поскольку он позволяет свести перенормировку спонтанно нарушенной теории к перенормировке ее более простого симметричного варианта. Однако можно вообще избежать ссылок на безмассовую ненарушенную теорию. При этом задача будет состоять в том, чтобы показать, что тождества Славнова — Тейлора, которым удовлетворяет спонтанно нарушенная теория, остаются справедливыми и после перенормировки.

Предыдущее рассмотрение проводилось нами в перенормируемой калибровке, когда не представляет труда сравнение нарушенной и ненарушенной теорий. Эта калибровка не удовлетворяет нас с физической точки зрения, так как приводит к нефизическим следствиям, например к возникновению безмассовых мод  $\phi_T (m^2 \rightarrow 0 \text{ при } c \rightarrow 0)$ . Однако изучение перенормировки в унитарной калибровке, например такой, как в выражении (12.209), было бы затруднительным, поскольку теория выглядит неперенормируемой и теряется прямая связь с симметричной фазой.

### 12.5.5. Калибровочная независимость и унитарность $S$ -матрицы

Покажем, что все нефизические состояния — фиктивные голдстоуновские бозоны, добавочные поляризационные состояния векторного поля и поля Фаддеева — Попова — действительно не дают вклада в элементы  $S$ -матрицы. Всем этим нефизическим полям соответствуют пропагаторы с полюсами при  $k^2 = 0$ . Таким образом, мы должны показать, что эта сингулярность не дает вклада в промежуточные состояния.

В простом доказательстве используют калибровочную независимость  $S$ -матрицы, чтобы можно было ввести калибровку т'Хоофта

$$\mathcal{F}_a = \left[ \partial_\mu A^\mu_a - \frac{g}{\lambda} (v, T^a \phi') \right]. \quad (12.222)$$

Мы предполагаем, что группа симметрии является простой и, следовательно, характеризуется одной константой связи. Кроме того, будем считать, что скалярное поле  $\phi$  принадлежит вещественному представлению и что  $\phi'$  получается трансляцией  $\phi = \phi' + v$ , причем  $\langle \phi' \rangle = 0$ . Эта калибровка имеет некоторые преимущества и ее открытие т'Хоофтом сыграло важную роль для дальнейшего развития теории. Она явно нарушает глобальную инвариантность. Следовательно, состояния, которые могли бы быть голдстоуновскими бозонами в отсутствие локальной симметрии, приобретают массовую матрицу

$$-\frac{1}{2} (m^2)_{\alpha\beta} \phi'_\alpha \phi'_\beta = -\frac{g^2}{2\lambda} (\phi'_\alpha T^a_{\alpha\beta} v_\beta) (\phi'_\gamma T^a_{\gamma\delta} v_\delta). \quad (12.223)$$

Кроме того, приобретает массу также и дух Фаддеева — Попова. Оператор  $\mathcal{M}_{ab}$  записывается следующим образом:

$$\mathcal{M}_{ab}(x, y) = \left\{ \partial_\mu D^\mu_{ab} - \frac{g^2}{\lambda} (v, T^a T^b (\phi' + v)) \right\} \delta^4(x - y), \quad (12.224)$$

так как он возникает из инфинитезимального калибровочного преобразования в  $\mathcal{F}$ , совершаемого как над  $A$ , так и над  $\phi'$ . Поэтому массовая матрица духов дается выражением

$$(m^2)_{ab} = \frac{g^2}{\lambda} (T^a v, T^b v). \quad (12.225)$$

И наконец, этот выбор диагонализует квадратичную форму по  $A$  и  $\phi'$ . Перекрестный член в разложении величины  $-(\lambda/2) \mathcal{F}^2$  в точности сокращается с членом  $-g (\partial_\mu \phi', A^\mu_a T^a v)$ , возникающим из  $(1/2) (D_\mu \phi, D^\mu \phi)$ . Отсюда следует, что векторный пропагатор с помощью массовой матрицы (12.210) можно написать в виде

$$\Delta^{\mu\nu}(k) = \frac{-i}{k^2 - M^2 + i\epsilon} \left[ g^{\mu\nu} - (1 - \lambda^{-1}) \frac{k^\mu k^\nu}{k^2 - \lambda^{-1} M^2 + i\epsilon} \right]. \quad (12.226)$$

При  $\lambda \rightarrow \infty$  можно снова получить правила Фейнмана в поперечной калибровке Ландау, в то время как при  $\lambda \rightarrow 0$  все нефизические массы уходят на бесконечность. В последнем случае естественно ожидать, что эти состояния с огромными массами не будут давать вклада в  $S$ -матрицу. В разд. 12.4.4 мы доказали, что  $S$ -матрица не зависит от выбора калибровки. Представленные там аргументы были формальными из-за инфракрасных расходимостей, теперь же они обоснованы. Мы приходим к выводу, что в любой калибровке, в частности в калибровке Ландау, нефизические состояния не дают вклада. При тщательном рассмотрении следует уделить особое внимание перенормировке. Интересующиеся этим вопросом могут обратиться к специальной литературе.

Даже если нефизические частицы исчезнут из физического подпространства, останется некоторый след механизма спонтанного нарушения, а именно (массивные) компоненты скалярных полей. Вспомним также, что помимо этих скалярных хиггсовских полей безмассовыми могут оставаться и некоторые компоненты векторного поля.

Правомерно задать вопрос, а законно ли вводить скалярные поля и нельзя ли их получить как связанные состояния, например, фермион-антифермионных пар. Такое динамическое нарушение иллюстрируется двумерной безмассовой электродинамикой Швингера. Выражение для поляризации вакуума имеет полюс при нулевом импульсе, фермионы исчезают из теории, и единственным остающимся одночастичным состоянием является бозонное связанное состояние с массой  $e/\sqrt{\pi}$ . Несмотря на привлекательность такого механизма, пока неизвестно, как можно реализовать его в четырехмерном пространстве.

## 12.6. МОДЕЛЬ ВАЙНБЕРГА — САЛАМА

Рассмотрим здесь реалистическую единую модель слабого и электромагнитного взаимодействия, предложенную независимо Вайнбергом и Саламом и основанную на спонтанно нарушенной калибровочной теории. Из всех моделей этого типа ее можно выделить как наиболее проверенную временем, экономную по числу параметров, а также потому, что она получила определенное экспериментальное подтверждение с открытием нейтральных токов и очарованных частиц<sup>1)</sup>.

### 12.6.1. Модель лептонов

Электрон и его нейтрино  $\nu_e$  рассматривается на тех же основаниях, что мюон и его нейтрино  $\nu_\mu$ . Левоспиральная компонента заряженного лептона  $e_L = (1 - \gamma_5) e/2$  [ $\mu_L = (1 - \gamma_5) \mu/2$ ] и его нейтрино  $\nu_e$  ( $\nu_\mu$ ) группируются в матрицу-столбец:

$$L_e = \begin{pmatrix} \nu_e \\ e_L \end{pmatrix}, \quad L_\mu = \begin{pmatrix} \nu_\mu \\ \mu_L \end{pmatrix}. \quad (12.227)$$

<sup>1)</sup> В начале 1983 г. появились сообщения об экспериментальном обнаружении векторных частиц  $W^\pm$  и  $Z^0$ , что является серьезным подтверждением рассматриваемой модели. — *Прим. ред.*

Это предполагает введение группы лептонного изоспина, относительно которой  $L_e$  и  $L_\mu$  являются дублетами, в то время как правые компоненты  $e_R = (1 + \gamma_5) e / 2 \equiv R_e$  и  $\mu_R = R_\mu$  являются синглетами. Каждому из этих полей также приписывается лептонный гиперзаряд  $Y$  таким образом, что выполняется аналог правила Гелл-Манна и Нишиджимы:

$$Q = T^3 + \frac{Y}{2}. \quad (12.228)$$

Левым дублетом соответствует  $Y = -1$ , а правым синглетом  $Y = -2$ . Слабый изоспин  $T$  и гиперзаряд  $Y$  коммутируют; следовательно, мы имеем полную группу преобразований  $SU(2) \times U(1)$ .

Построим теперь калибровочную теорию с этой группой инвариантности, включающую  $SU(2)$ -триплет калибровочных полей  $A_\mu$  с зарядом  $g$  и поле  $B_\mu$  для  $U(1)$ . Константа связи, ассоциированная с  $U(1)$ , будет обозначаться через  $g'/2$ . Поскольку после спонтанного нарушения мы хотим, чтобы безмассовым оставалось лишь одно калибровочное поле (фотон), введем дублет комплексных скалярных полей с гиперзарядом  $Y = +1$ :

$$\phi = \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi_0 \end{pmatrix}. \quad (12.229)$$

Самый общий перенормируемый инвариантный потенциал для поля  $\phi$  имеет вид

$$V(\phi^\dagger \phi) = \mu^2 \phi^\dagger \phi + \lambda (\phi^\dagger \phi)^2. \quad (12.230)$$

При  $\mu^2 < 0$  поле  $\phi$  приобретает ненулевое вакуумное среднее, которое можно считать вещественным и направленным вдоль поля  $\phi^0$ :

$$\langle \phi \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix}, \quad v^2 = -\frac{\mu^2}{\lambda} + O(\hbar). \quad (12.231)$$

Симметрия относительно группы  $SU(2) \times U(1)_Y$  нарушена, а симметрия относительно  $U(1)_Q$  сохраняется. Это приводит к желаемому результату, так как безмассовым остается одно векторное поле, связанное с электрическим зарядом.

Лагранжиан записывается в виде

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & -\frac{1}{4} A_{\mu\nu} A^{\mu\nu} - \frac{1}{4} B_{\mu\nu} B^{\mu\nu} + \left[ \bar{R}_e (i\partial - g' B) R_e + \bar{L}_e \left( i\partial - \frac{g'}{2} B + \right. \right. \\ & \left. \left. + g \frac{\tau_i}{2} A_i \right) L_e - G_e (\bar{L}_e R_e \phi + \phi^\dagger \bar{R}_e L_e) + e \leftrightarrow \mu \right] + \\ & + \left( \partial_\mu \phi - i \frac{g'}{2} B_\mu \phi - \frac{ig}{2} \tau^i A_\mu \phi \right)^\dagger \left( \partial^\mu \phi - i \frac{g'}{2} B^\mu \phi - \right. \\ & \left. - \frac{ig}{2} \tau^i A^\mu \phi \right) - V(\phi^\dagger \phi), \end{aligned} \quad (12.232)$$

где  $A_{\mu\nu}$  и  $B_{\mu\nu}$  — тензоры напряженности поля:

$$A_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + g A_\mu \times A_\nu, \quad B_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu,$$

а  $\tau^i$  ( $i=1, 2, 3$ ) — матрицы Паули. Симметрия относительно группы  $SU(2)$  не позволяет ввести массовые члены для электрона и мюона, но не запрещает ввести взаимодействие со скалярным полем с константами связи  $G_e$  и  $G_\mu$ .

Чтобы уяснить физический смысл этой модели, применим унитарную калибровку. Воспользуемся параметризацией

$$\phi(x) = e^{i\xi_i(x)\tau^i/2v} \begin{bmatrix} 0 \\ v + \rho(x) \\ \sqrt{2} \end{bmatrix} \quad (12.233)$$

и выполним калибровочное  $SU(2)$ -преобразование

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi(x) \rightarrow \phi'(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ v + \rho(x) \\ \sqrt{2} \end{bmatrix}, \\ \frac{\tau^i}{2} A_{\mu i}(x) \rightarrow \frac{\tau^i}{2} A'_{\mu i}(x) = e^{-i\xi_i \tau^i/2v} \left( \frac{i}{g} \partial_\mu + \frac{\tau^i}{2} A_{\mu i} \right) e^{i\xi_i \tau^i/2v}, \\ L \rightarrow L' = e^{-i\xi_i \tau^i/2v} L, \\ B, R \text{ — инварианты.} \end{array} \right. \quad (12.234)$$

Выражение (12.232) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & -\frac{1}{4} A_{\mu\nu} A^{\mu\nu} - \frac{1}{4} B_{\mu\nu} B^{\mu\nu} + \left[ \bar{e}_R (i\partial - g'B) e_R + \right. \\ & \left. + \bar{L}_e \left( i\partial - \frac{g'}{2} B + g \frac{\tau^i}{2} A_i \right) L_e - G_e \frac{v+\rho}{\sqrt{2}} (\bar{e}_R e_L + \bar{e}_L e_R) + e \leftrightarrow \mu \right] + \\ & + \frac{1}{2} \partial_\mu \rho \partial^\mu \rho + \frac{1}{8} (v+\rho)^2 [(g'B_\mu - gA_\mu^3)^2 + g^2 (A_\mu^1 A^{1\mu} + A_\mu^2 A^{2\mu})] - \\ & - V \left[ \frac{(v+\rho)^2}{2} \right]. \end{aligned} \quad (12.235)$$

Скалярное (хиггсовское) поле  $\rho$  имеет массу  $V\sqrt{-2\mu^2}$ . Электрон и мюон приобрели массы  $m_e = G_e v/\sqrt{2}$  и  $m_\mu = G_\mu v/\sqrt{2}$ . Заряженное векторное поле

$$W_\mu^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}} (A_\mu^1 \mp iA_\mu^2) \quad (12.236)$$

является также массивным, причем

$$M_W = \frac{vg}{2}. \quad (12.237)$$

Наконец, квадратичная по  $A^3$  и  $B$  форма диагонализуется с помощью следующих подстановок:

$$\begin{aligned} Z_\mu &= (g^2 + g'^2)^{-1/2} (-gA_\mu^3 + g'B_\mu), \\ A_\mu &= (g^2 + g'^2)^{-1/2} (gB_\mu + g'A_\mu^3), \end{aligned} \quad (12.238)$$

так что

$$\begin{aligned} M_Z &= \frac{v}{2} (g^2 + g'^2)^{1/2}, \\ M_A &= 0. \end{aligned} \quad (12.239)$$

Лагранжиан взаимодействия лептонов можно тогда переписать через физические поля  $W^\pm$ ,  $Z$  и  $A$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{лепт}}^{\text{вз}} &= \frac{g}{2\sqrt{2}} [\bar{\nu}_e \gamma^\mu (1 - \gamma_5) e W_\mu^+ + \text{э.с.}] - \\ &- \frac{e}{2} [\text{tg } \theta_W (2\bar{e}_R \gamma^\mu e_R + \bar{\nu}_e \gamma^\mu \nu_e + \bar{e}_L \gamma^\mu e_L) - \\ &- \text{ctg } \theta_W (\bar{e}_L \gamma^\mu e_L - \bar{\nu}_e \gamma^\mu \nu_e)] Z_\mu - e A_\mu \bar{e} \gamma^\mu e + \{e \leftrightarrow \mu, \nu_e \leftrightarrow \nu_\mu\}. \end{aligned} \quad (12.240)$$

В этом выражении мы ввели угол Вайнберга  $\theta_W$ , определяемый следующим образом:

$$\begin{aligned} e &= \frac{gg'}{\sqrt{g^2 + g'^2}}, \quad \text{tg } \theta_W = \frac{g'}{g}, \\ \text{или} \quad e &= g' \cos \theta_W = g \sin \theta_W. \end{aligned} \quad (12.241)$$

В (12.240) последний член представляет собой обычное взаимодействие с электромагнитным полем  $A_\mu$ . Первый член записан в виде (12.176); константа связи при нем выражается через константу Ферми следующим образом:

$$\frac{G}{\sqrt{2}} = \frac{g^2}{8M_W^2} = \frac{1}{2v^2}. \quad (12.242)$$

Зная величину  $G$ , можно получить нижние границы масс полей  $W^\pm$  и  $Z$ :

$$\begin{aligned} M_W &= \frac{gv}{2} = \frac{38}{\sin \theta_W} \text{ ГэВ} \geq 38 \text{ ГэВ}, \\ M_Z &= \frac{gv}{2 \cos \theta_W} = \frac{76}{\sin 2\theta_W} \text{ ГэВ} \geq 76 \text{ ГэВ}, \\ M_W &< M_Z. \end{aligned} \quad (12.243)$$

Константы связи  $G_e$  и  $G_\mu$  определяются из масс электрона и мюона:

$$\begin{aligned} G_e &= \sqrt{2} \frac{m_e}{v} = 2^{1/2} G^{1/2} m_e \sim 2 \cdot 10^{-6}, \\ G_\mu &= \frac{m_\mu}{m_e} G_e \sim 4 \cdot 10^{-4}. \end{aligned} \quad (12.244)$$

Эта модель включает взаимодействие нового типа: связь  $Z_\mu$  с нейтральным нарушающим четность слабым током, построенным из  $e_L$ ,  $e_R$ , и  $\nu_e$  (и  $\mu_L$ ,  $\mu_R$ ,  $\nu_\mu$ ). Это общая черта большинства перенормируемых моделей слабых взаимодействий. В них возни-



кают либо нейтральные токи и связанные с ними векторные поля, либо новые лептоны, которые, как предполагается, должны быть тяжелыми, чтобы теория согласовалась с экспериментальными фактами; возможны модели, в которых возникают оба типа таких полей. В первом случае явный вид тока зависит от модели, а именно от выбора представлений, по которым преобразуются поля и т. п. Модель Вайнберга—Салама естественным образом воплощает в себе электрон-мюонную универсальность. К типу лептона оказываются чувствительными только  $G_e$  и  $G_\mu$ . С другой стороны, модель не дает никакого естественного объяснения квантованию электрического заряда.

В случае других моделей, основанных на простых группах, например в модели Джорджи—Глэшоу (см. разд. 12.5.3), мы не можем сделать такого заключения. Как модель слабого и электромагнитного взаимодействий модель Джорджи—Глэшоу опровергается экспериментальными данными, поскольку она не содержит нейтральных токов. В этой модели из трех компонент калибровочного поля две становятся массивными (аналоги полей  $W_\mu^\pm$  в модели Вайнберга—Салама), в то время как третья компонента остается безмассовой (фотон). Преимущество использования простой группы состоит в том, что в ней электрический заряд квантован.

### 12.6.2. Электрон-нейтринные сечения

Чтобы продемонстрировать некоторые замечательные следствия существования нейтральных лептонных токов, вычислим сечения упругого  $e-\nu$ -рассеяния в низшем порядке, используя модель Вайнберга—Салама. Соответствующие

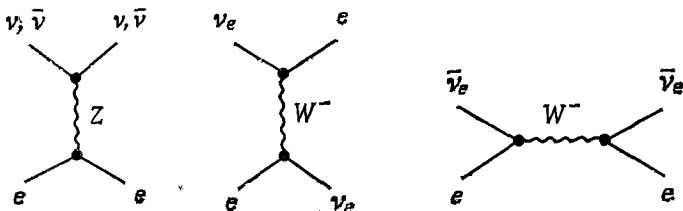


РИС. 12.13. Электрон-нейтринное рассеяние в низшем порядке.

диаграммы приведены на рис. 12.13. В пределе, когда энергия падающего нейтрино мала по сравнению с массой бозонов  $W$  и  $Z$ , можно ограничиться эффективным лагранжианом

$$\mathcal{L}_{\text{эфф. вэ}} = -\sqrt{2} G \left\{ \left[ \frac{1}{2} \bar{\nu}_e \gamma^\mu (1 - \gamma_5) e \right] \left[ \bar{e} \gamma_\mu (1 - \gamma_5) \nu_e \right] + \right. \\ \left. + (\bar{\nu}_\mu \gamma^\mu \nu_\mu + \bar{\nu}_e \gamma^\mu \nu_e) (2 \sin^2 \theta_W \bar{e} \gamma_\mu e_R - \cos 2\theta_W \bar{e} \gamma_\mu e_L) \right\}, \quad (12.245)$$

где первый и второй члены представляют соответственно вклады от бозонов  $W$  и  $Z$ . Выполнив преобразования Фирца первого члена

$$\left( \bar{\nu}_e \gamma^\mu \frac{1 - \gamma_5}{2} e \right) \left( \bar{e} \gamma_\mu \frac{1 - \gamma_5}{2} \nu_e \right) = \left( \bar{\nu}_e \gamma^\mu \frac{1 - \gamma_5}{2} \nu_e \right) \left( \bar{e} \gamma_\mu \frac{1 - \gamma_5}{2} e \right), \quad (12.246)$$

лагранжиан (12.245) можно переписать в виде

$$\mathcal{L}_{\text{эфф, вэ}} = -\sqrt{2} G \left\{ \left( \bar{\nu}_e \gamma^\mu \frac{1-\gamma_5}{2} \nu_e \right) \left[ \bar{e} \gamma_\mu \left( \frac{1-\gamma_5}{2} + 2 \sin^2 \theta_W \right) e \right] + \left( \bar{\nu}_\mu \gamma^\mu \frac{1-\gamma_5}{2} \nu_\mu \right) \left[ \bar{e} \gamma_\mu \left( -\frac{1-\gamma_5}{1} + 2 \sin^2 \theta_W \right) e \right] \right\}. \quad (12.247)$$

Используя общее выражение вида

$$\mathcal{L}_{\text{эфф}} = -\sqrt{2} G \left( \bar{\nu} \gamma^\mu \frac{1-\gamma_5}{2} \nu \right) \left[ \bar{e} \gamma_\mu \left( C_L \frac{1-\gamma_5}{2} + C_R \frac{1+\gamma_5}{2} \right) e \right], \quad (12.248)$$

где  $C_L$  и  $C_R$  — вещественные коэффициенты, мы получаем для процесса  $e(p) + \bar{\nu}(q) \rightarrow e(p') + \bar{\nu}(q')$  следующее сечение:

$$\frac{d\sigma}{dE_e'} = \frac{G^2}{2\pi m_e E_\nu^2} \left[ C_L^2 (p \cdot q)^2 + C_R^2 (p \cdot q')^2 - C_L C_R m_e^2 (q \cdot q')^2 \right]. \quad (12.249)$$

В случае процесса  $\nu e \rightarrow \nu e$  сечение можно вычислить, переставляя в (12.249) местами  $C_L$  и  $C_R$ . Если энергия падающего нейтрино много больше, чем масса электрона, то мы имеем следующие соотношения:

$$\begin{aligned} (p \cdot q)^2 &= m_e^2 E_\nu^2, \\ (p \cdot q')^2 &= m_e^2 E_\nu^2 \left( 1 - \frac{E_e'}{E_\nu} \right)^2, \\ m_e^2 q \cdot q' &\approx m_e^2 p \cdot p' = m_e^2 E_\nu^2 \frac{E_e'}{E_\nu} \frac{m_e}{E_\nu}, \end{aligned}$$

и, таким образом, в (12.249) последним членом можем пренебречь. Для различных каналов окончательно получаем

$$\begin{aligned} \sigma(\bar{\nu}_e e \rightarrow \bar{\nu}_e e) &= \frac{G^2 m_e E_\nu}{2\pi} \left[ 4 \sin^4 \theta_W + \frac{1}{3} (1 + 2 \sin^2 \theta_W)^2 \right], \\ \sigma(\nu_e e \rightarrow \nu_e e) &= \frac{G^2 m_e E_\nu}{2\pi} \left[ (1 + 2 \sin^2 \theta_W)^2 + \frac{4}{3} \sin^4 \theta_W \right], \\ \sigma(\bar{\nu}_\mu e \rightarrow \bar{\nu}_\mu e) &= \frac{G^2 m_e E_\nu}{2\pi} \left[ 4 \sin^4 \theta_W + \frac{1}{3} (1 - 2 \sin^2 \theta_W)^2 \right], \\ \sigma(\nu_\mu e \rightarrow \nu_\mu e) &= \frac{G^2 m_e E_\nu}{2\pi} \left[ (1 - 2 \sin^2 \theta_W)^2 + \frac{4}{3} \sin^4 \theta_W \right]. \end{aligned} \quad (12.250)$$

Эти выражения согласуются с несколькими наблюдаемыми событиями  $\nu_\mu e$  и  $\bar{\nu}_\mu e$  и со значением  $\theta_W$ , полученным из инклюзивных реакций рассеяния нейтрино на нуклонах:

$$\sin^2 \theta_W \approx 0,25 \pm 0,02. \quad (12.251)$$

Экспериментальные исследования структуры нейтральных токов еще активно продолжаются, в частности в атомной физике.

### 12.6.3. Поправки высших порядков

Перенормируемая теория слабых взаимодействий позволяет нам вычислять поправки высших порядков. Фактически же в представленной модели могут изучаться лишь лептонные процессы,

такие, как слабый вклад в аномальный магнитный момент мюона или радиационные поправки к распаду мюона.

На рис. 12.14 показаны диаграммы, описывающие вклады слабых взаимодействий в константу  $g_\mu - 2$ . При вычислениях

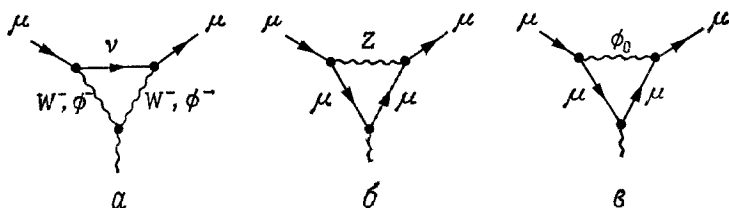


РИС. 12.14. Слабые поправки к аномальному магнитному моменту мюона.

в однопетлевом приближении безопаснее использовать перенормируемую калибровку вида (12.232). Диаграммы на рис. 12.14, а, б, в дают соответственно следующие вклады:

$$\begin{aligned}
 \text{а)} \quad & g^2 \int \frac{d^4k}{(k^2 - M^2)^2} \frac{O(km_\mu, m_\mu^2)}{(p-k)^2}, \\
 \text{б)} \quad & g^2 \int \frac{d^4k}{k^2 - M^2} \frac{O(km_\mu, m_\mu^2)}{[(p-k)^2 - m_\mu^2]^2}, \\
 \text{в)} \quad & \frac{m_\mu^2 g^2}{M_W^2} \int \frac{d^4k}{k^2 - m_{\phi_0}^2} \frac{O(km_\mu, m_\mu^2)}{[(p-k)^2 - m_\mu^2]^2}.
 \end{aligned} \tag{12.252}$$

В случаях а и б величина  $M$  обозначает массу бозонов  $W$ ,  $Z$  или одного из исходных голдстоуновских бозонов  $\phi^\pm$ . Предположим, что мы выбрали калибровку, в которой масса голдстоуновского бозона очень велика, т. е. порядка  $M_W$ , и определяется соотношением (12.223) при конечном  $\lambda$ . Масса, соответствующая комбинации  $(\phi_0 - \phi_0^\dagger)/\sqrt{2}$ , также велика, а физическая компонента  $(\phi_0 + \phi_0^\dagger)/\sqrt{2}$  имеет неизвестную массу  $m_{\phi_0}$ . Предположим, однако, что  $m_{\phi_0} \gg m_\mu$ . При вычислении вклада диаграммы на рис. 12.14, в мы учитываем только мюон-скалярную связь, определяемую выражением

$$G_\mu = \frac{\sqrt{2} m_\mu}{v} = \frac{m_\mu g}{\sqrt{2} M_W}. \tag{12.253}$$

Формфактор  $F_2$  не требует ультрафиолетовых вычитаний; поэтому можно ожидать, что приведенные выше интегралы пропорциональны отношению  $m_\mu^2/M^2$  или  $m_\mu^2/m_{\phi_0}^2$ , умноженным на возможный логарифмический фактор. Слабые поправки к аномальному магнитному моменту оказываются, таким образом, самое большее порядка

$$g^2 \frac{m_\mu^2}{M_W^2} \sim G m_\mu^2 \sim 10^{-1}. \tag{12.254}$$

Этот порядок величины в точности соответствует экспериментальной и теоретической неопределенностям (последняя возникает из-за адронных вкладов):

$$\begin{aligned} \left. \frac{g-2}{2} \right|_{\text{экс}} &= (11659,22 \pm 0,09) \cdot 10^{-7}, \\ \left. \frac{g-2}{2} \right|_{\text{теор}} &= (11659,19 \pm 0,10) \cdot 10^{-7}. \end{aligned} \quad (12.255)$$

Логарифмический множитель  $\ln(m_\mu^2/M_W^2)$  мог бы, однако, привести к значительному увеличению слабых вкладов. Заметим, что вклад хиггсовского бозона подавляется множителем  $m_\mu^2/M_W^2$  по сравнению с двумя другими и им можно пренебречь. В реальных вычислениях никаких логарифмов не появляется и поправка от слабых взаимодействий мала:

$$\left. \frac{g-2}{2} \right|_{\text{слаб}} = \frac{Gm_\mu^2}{\sqrt{2}\pi^2} \left( \frac{2}{3} \sin^4 \theta_W - \frac{1}{3} \sin^2 \theta_W + \frac{1}{4} \right) \sim 2 \cdot 10^{-9}. \quad (12.256)$$

Такое же вычисление можно выполнить для электрона. В этом случае достигнуты более высокие экспериментальная и теоретическая степени точности ( $\sim 10^{-9}$ ), но слабый вклад дополнительно подавляется множителем  $m_e^2/m_\mu^2 \sim 10^{-5}$ .

Можно также вычислить радиационные поправки к мюонному распаду. Разумеется, результат, выраженный через перенормированные величины, оказывается конечным и сводится к перенормировке константы связи Ферми  $G$ . Эту поправку, имеющую порядок  $\alpha$ , можно наблюдать, сравнивая ее с константами связи в других слабых процессах, например в  $\beta$ -распаде. К сожалению, мы не имеем каких-либо иных чисто лептонных распадов, а сравнение с адронной системой требует учета поправок на сильное взаимодействие.

#### 12.6.4. Включение адронов

Естественный путь, каким мы можем ввести адроны в предшествующую схему, — это связать кварковые мультиплеты с калибровочными полями. В разд. 11.3 мы уже изучали структуру заряженного адронного тока в терминах обычных кварков  $u$ ,  $d$ ,  $s$ . Он содержит сохраняющие странность и изменяющие странность компоненты, причем с углом смешивания Кабиббо. Возможно, что в рамках калибровочной теории слабых взаимодействий значение этого угла предсказуемо. В дополнение к этому заряженному току в теориях, аналогичных модели Вайнберга—Салама, возникает нейтральный ток, связанный с бозоном  $Z$ . Ограничение, состоящее в том, чтобы процессы с изменением странности, индуцированные этим нейтральным током, не противоречили явно

эксперименту, оказывается весьма жестким и требует введения по крайней мере одного нового кварка.

Начнем рассмотрение с трех кварков  $u$ ,  $d$ ,  $s$  и временно пренебрежем их связью с хиггсовскими скалярами. Предположим, что угол Кабиббо  $\theta_c$  задан. Обычный заряженный адронный ток производится, если принять, что кварковые компоненты

$$N_L \equiv \begin{pmatrix} u \\ d \cos \theta_c + s \sin \theta_c \end{pmatrix}_L \quad (12.257)$$

составляют дублет по слабому изоспину с гиперзарядом  $Y = 1/3$ , в то время как  $u_R$ ,  $d_R$ ,  $s_R$  и  $s_{\theta L} \equiv (s \cos \theta_c - d \sin \theta_c)_L$  являются изосинглетами соответственно с  $Y = 4/3$ ,  $-2/3$ ,  $-2/3$ ,  $-2/3$ . Лагранжиан взаимодействия

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{вз}} = & \bar{N}_L \left( gA \cdot \frac{\tau}{2} + \frac{1}{3} \frac{g'}{2} B \right) N_L + \left[ \bar{s}_{\theta L} \left( -\frac{g'}{3} B \right) s_{\theta L} + (s_{\theta L} \rightarrow d_R) + \right. \\ & \left. + (s_{\theta L} \rightarrow s_R) \right] + (2/3) \bar{u}_R g' B u_R \end{aligned} \quad (12.258)$$

можно переписать через поля  $W$ ,  $A$  и  $Z$ , определяемые выражениями (12.236) и (12.238), что дает

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{вз}} = & \frac{g}{2\sqrt{2}} (W_\mu^+ h^\mu + \text{э.с.}) + eA^\mu j_\mu^{\text{em}} - \\ & - \sqrt{g^2 + g'^2} Z^\mu \left( \bar{N}_L \frac{\tau_3}{2} \gamma_\mu N_L - \sin^2 \theta_W j_\mu^{\text{em}} \right), \end{aligned} \quad (12.259)$$

причем

$$\begin{aligned} h_\mu = & \bar{u} \gamma_\mu (1 - \gamma_5) (d \cos \theta_c + s \sin \theta_c), \\ j_\mu^{\text{em}} = & \frac{2}{3} \bar{u} \gamma_\mu u - \frac{1}{3} (\bar{d} \gamma_\mu d + \bar{s} \gamma_\mu s), \end{aligned}$$

как и ожидалось. Нейтральный бозон  $Z$  связан с электромагнитным током и с током

$$\begin{aligned} \bar{N}_L \tau_3 \gamma_\mu N_L = & \bar{u}_L \gamma_\mu u_L - \cos^2 \theta_c \bar{d}_L \gamma_\mu d_L - \sin^2 \theta_c \cos \theta_c (\bar{d}_L \gamma_\mu s_L + \bar{s}_L \gamma_\mu d_L) - \\ & - \sin^2 \theta_c \bar{s}_L \gamma_\mu s_L. \end{aligned}$$

Члены, пропорциональные  $\sin \theta_c \cos \theta_c$ , представляют собой нейтральные токи, изменяющие странность. Эти члены вызывают определенные трудности, поскольку в эксперименте процессы с правилами отбора  $\Delta S = 1$  или  $\Delta S = 2$  при  $\Delta Q = 0$  оказываются сильно подавленными. Например,

$$\frac{\Gamma(K^\pm \rightarrow \pi^\pm \bar{\nu} \nu)}{\Gamma(K^\pm \rightarrow \text{все моды})} = 6 \cdot 10^{-7}, \quad \frac{\Gamma(K^0 \rightarrow \mu^+ \mu^-)}{\Gamma(K^0 \rightarrow \text{все моды})} \approx 10^{-8}. \quad (12.260)$$

Выход из такого затруднения нашли Глэшоу, Илиопулос и Майяни (1970 г.). Они ввели четвертый кварк, обозначаемый  $c$ , кото-

рый, как и кварк  $u$ , имеет заряд  $2/3$ , но несет новое квантовое число, называемое чарм. Предполагается, что вместе с комбинацией  $s_{\theta L} = -d_L \sin \theta_c + s_L \cos \theta_c$  левая компонента  $c_L$  образует изодублет. Другими словами, теперь имеются два левых дублета

$$\begin{pmatrix} u \\ d_{\theta} \end{pmatrix}_L, \begin{pmatrix} c \\ s_{\theta} \end{pmatrix}_L \text{ с } Y = \frac{1}{3} \quad (12.261)$$

и четыре правых синглета  $u_R, d_R, s_R$  и  $c_R$  соответственно с гиперзарядом  $Y = 4/3, -2/3, -2/3$  и  $4/3$ .

Нетрудно заметить, что нейтральный бозон теперь связан с

$$(\bar{u}, \bar{d}_{\theta})_L \frac{\tau_3}{2} \gamma_{\mu} \begin{pmatrix} u \\ d_{\theta} \end{pmatrix}_L + (\bar{c}, \bar{s}_{\theta})_L \frac{\tau_3}{2} \gamma_{\mu} \begin{pmatrix} c \\ s_{\theta} \end{pmatrix}_L - \sin^2 \theta_W j_{\mu}^{\text{em}}. \quad (12.262)$$

В этом выражении в первый и второй члены входят нейтральные токи, изменяющие странность, но теперь их вклады взаимно сокращаются. Это означает, что нежелательные вклады исключены в порядке  $G$ . Однако нейтральные переходы с изменением стран-

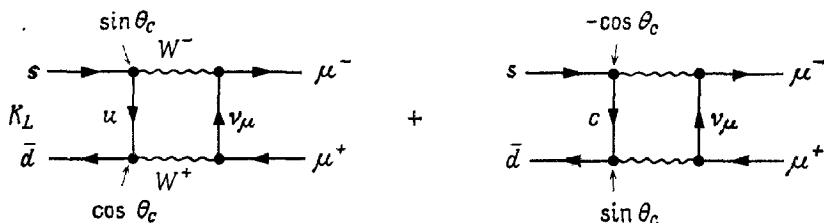


РИС. 12.15. Распад  $K^0 \rightarrow \mu^+ \mu^-$ .

ности, индуцированные обменами заряженными токами в более высоких порядках, могут еще ставить теорию под угрозу. На рис. 12.15 приведены диаграммы, соответствующие этому случаю. Можно ожидать, что они имеют порядок  $G\alpha$  и, следовательно, не согласуются со вторым очень низким экспериментальным ограничением (12.260).

Однако, после того как мы ввели кварк  $c$ , заряженный ток можно записать в виде

$$h_{\mu} = \bar{u} \gamma_{\mu} (1 - \gamma_5) d_{\theta} + \bar{c} \gamma_{\mu} (1 - \gamma_5) s_{\theta}. \quad (12.263)$$

Если учесть все вклады, то окажется, что вызывающая опасение амплитуда пропорциональна отношению  $(m_c^2 - m_u^2)/M_{W}^2$ . Для очарованных кварков, которые много легче бозона  $W$ , т. е.  $m_c \leq 1,5 - 2$  ГэВ, не возникает каких-либо противоречий с экспериментом.

Помимо этого свойства подавления нейтральных токов с  $\Delta S \neq 0$  введение очарованного кварка привлекательно с эстетической точки

зрения. Очарованный кварк восстанавливает симметрию между четырьмя лептонами и четырьмя кварками и, кроме того, что является приятным сюрпризом, сокращает аномалии в модели Вайнберга—Салама. Действительно, лептонная модель, рассматриваемая нами в разд. 12.6.3, страдала от киральных аномалий. Если повторить анализ, выполненный в разд. 12.4, применительно к теории, включающей лишь слабые изосинглеты и дублеты, то легко обнаружить, что единственная исчезающая аномалия пропорциональна

$$\sum_{\text{По фермионам}} \text{Sp}(T^a T^a Y) \sim \sum_{\text{По дублетам}} Y.$$

Как и прежде, матрица  $T^a$  описывает некоторую компоненту слабого изоспина, а  $Y$  обозначает слабый гиперзаряд. Аномалия соответствует, например, треугольным диаграммам  $A^a A^a B$ . Отсюда следует, что лептоны дают исчезающий вклад в аномалию. С учетом двух дублетов  $L_e$  и  $L_\mu$ , определяемых выражением (12.227), имеем

$$\sum_{\substack{\text{По лептонным} \\ \text{дублетам}}} Y = 2 \cdot (-1). \quad (12.264)$$

Однако если учитывать также адроны в соответствии с изложенной выше схемой, то два дублета (12.261) дадут вклад

$$\sum_{\substack{\text{По адронным} \\ \text{дублетам}}} Y = 2 \times (1/3). \quad (12.265)$$

Кроме того, если предположить, как это делалось при обсуждении  $\pi^0$ -распада в гл. 11, что кварки вырождены по трем ненаблюдаемым цветам, то в выражении (12.265) необходимо дополнительно просуммировать по цвету, т. е. умножить данное выражение на 3. При этом лептонные и адронные вклады в аномалию взаимно сократятся. Подчеркнем важность того обстоятельства, что для справедливости полученного результата мы должны иметь одинаковое число лептонных и адронных дублетов, соответствующих предписанным им выше значениям слабого изоспина и заряда, и фактор вырождения по цвету. Описанный механизм сокращений не влияет на вычисление  $\pi^0$ -распада. Действительно, вспомним, что  $\pi^0$  связан с дивергенцией третьей компоненты обычного аксиального изотопического тока, т. е. с  $(\bar{u}, \bar{d}) \gamma_\mu \gamma_5 \tau_3 / 2 \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}$ .

До сих пор мы опускали связи типа Юкавы скалярных мезонов с кварками, а также массовые члены кварков. До того как вводится спонтанное нарушение, теория инвариантна относительно группы преобразований  $SU(2) \times U(1)$ , которая запрещает массовые члены кварков. Однако после спонтанного нарушения и сдвига

хиггсовского поля кварки приобретают массу:

$$\mathcal{L}_m = -\bar{\psi} \frac{1-\gamma_5}{2} \mathcal{M} \psi - \bar{\psi} \frac{1+\gamma_5}{2} \mathcal{M}^\dagger \psi. \quad (12.266)$$

Здесь  $\mathcal{M}$  — матрица, которая априори не является ни диагональной, ни вещественной, а вид ее ограничен лишь тем, что она должна коммутировать с оператором заряда  $Q$ . Используя независимые унитарные переопределения левых и правых компонент, ее можно привести к диагональному виду:

$$\begin{aligned} \psi'_L &= U_L \psi_L, \\ \psi'_R &= U_R \psi_R, \\ U_R \mathcal{M} U_L^\dagger &= M \quad (\text{здесь } M \text{ — диагональная матрица}), \end{aligned} \quad (12.267)$$

$$\mathcal{L}_m = -\bar{\psi}' \frac{1-\gamma_5}{2} M \psi' - \bar{\psi}' \frac{1+\gamma_5}{2} M^\dagger \psi'. \quad (12.268)$$

Собственными состояниями  $\psi'$  массовой матрицы являются кварки  $u$ ,  $d$ ,  $s$ ,  $c$ . С другой стороны, заряженный ток, который записывается следующим образом:

$$h_\mu \sim \bar{\psi} \gamma_\mu (1-\gamma_5) \tau^- \psi, \quad (12.269)$$

принимает вид

$$h_\mu \sim \bar{\psi}' \gamma_\mu (1-\gamma_5) U_{1L}^\dagger U_{2L} \psi', \quad (12.270)$$

где  $U_{1L}$  и  $U_{2L}$  представляют собой ограничения  $U_L$  соответственно на верхнюю ( $u$ ,  $c$ ) и нижнюю ( $d$ ,  $s$ ) компоненты. Переопределяя далее относительные фазы кварков [разумеется, ненаблюдаемые в (12.268)], последнее выражение можно привести к виду

$$h_\mu = (\bar{u}c) \gamma_\mu (1-\gamma_5) \begin{pmatrix} \cos \theta_c & \sin \theta_c \\ -\sin \theta_c & \cos \theta_c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d \\ s \end{pmatrix}, \quad (12.271)$$

что находится в согласии с (12.263). Мы приходим к заключению, что угол Кабиббо возникает из-за несоответствия между собственными состояниями массовой матрицы и кварковыми компонентами, входящими в заряженный ток.

Рассмотрение моделей слабых взаимодействий должно было бы включать обзор их приложений, в частности рассеяние нейтрино на адронах. Читателю мы рекомендуем обратиться к обзорам, написанным более компетентными авторами.

В свете сравнительно недавних экспериментальных открытий рамки предшествующей теории могут и должны быть расширены с тем, чтобы включить в рассмотрение большее число кварков и лептонов. Мы же ограничимся здесь простым замечанием. Матрица смешивания Кабиббо, которая в случае четырех кварков имела простой вид (12.271), может зависеть от большего числа параметров, часть которых может быть комплексной, что приведет к нарушению  $CP$ -инвариантности. В последние годы наблюдался расцвет теоретических моделей, построенных с привлечением различных групп, разбиений по мультиплетам, возможных правоспиральных токов и т. д. Обсуждать их в рамках



какой-либо книги было бы опрометчивым, поскольку такой материал очень быстро устаревает.

Каким образом в эту схему могли бы войти сильные взаимодействия? В следующей главе мы покажем, что на сей день, по-видимому, неабелева калибровочная теория сильных взаимодействий наиболее подходит для такого объединения. Калибровочной группой была бы группа  $SU(3)_c$ , не связанная с октетной симметрией Гелл-Манна и Неемана. В этом случае с цветными квантовыми числами кварковых триплетов были бы связаны восемь калибровочных полей—так называемых глюонов. В противоположность спонтанно нарушенной симметрии слабого и электромагнитного взаимодействий эта локальная  $SU(3)_c$ -симметрия должна быть точной, а глюон должен оставаться безмассовым. При таком калибровочном описании слабого, электромагнитного и сильного взаимодействий кваркам приписываются два квантовых числа—цвет и аромат. С другой стороны, векторные бозоны  $W$ ,  $Z$ , ..., и фотон бесцветны, в то время как глюоны не имеют ни аромата, ни заряда.

Наконец, можно предполагать, что группа  $G_W \times SU(3)_c$  [ $G_W = SU(2) \times U(1)$  в модели Вайнберга—Салама] возникает в результате нарушения более широкой простой группы. Такое сверхобъединение можно было бы обобщить даже на гравитационные поля.

## ПРИМЕЧАНИЯ

Неабелевы калибровочные поля введены Янгом и Миллсом (Phys. Rev., 1954, vol. 96, p. 191) и за истекшее время рассматривались многими авторами. Мы приведем здесь только те ссылки, которые непосредственно связаны с излагаемым в данной главе материалом.

Квантование калибровочных полей развивали Фейнман (Acta Phys., Polonia, 1963, vol. 24, p. 697), Л. Д. Фаддеев и В. Н. Попов (Phys. Lett., 1967, vol. 25, ser. B, p. 29) и Де Витт (Phys. Rev., 1967, vol. 162, pp. 1195 и 1239). Примерно в то же время Вайнберг (Phys. Rev. Lett., 1967, vol. 19, p. 1264) и Салам (В кн.: Elementary Particle Theory/ed. N. Svartholm.—Stockholm: Almqvist and Wiksells, 1968.) предложили построение теории слабых взаимодействий на основе калибровочной модели со спонтанным нарушением симметрии. Это явление ранее рассматривалось в работах: Englert F., Brout R.—Phys. Rev. Lett., 1964, vol. 13, p. 321; Higgs P. W.—Phys. Lett., 1964, vol. 12, p. 132; Phys. Rev. Lett., 1964, vol. 13, p. 508; Phys. Rev., 1966, vol. 145, p. 1156; Guralnik G. S., Hagen C. R., Kibble T. W. B.—Phys. Rev. Lett., 1964, vol. 13, p. 585; Kibble T.—Phys. Rev., 1967, vol. 155, p. 1554. Более раннее обсуждение механизма спонтанного нарушения симметрии применительно к сверхпроводимости см. в статье: Anderson P. W.—Phys. Rev., 1958, vol. 112, p. 1900; Phys. Rev., 1963, vol. 130, p. 439.

Все эти работы привели к интенсивному изучению перенормировки. Некоторые поворотные пункты содержат статьи: 't Hooft G.—Nucl. Phys., 1971, ser. B, vol. 33, p. 173; 1971, ser. B, vol. 35, p. 167; Славнов А. А.—Теор. и мат. физика, 1972, т. 10, с. 99; Taylor J. C.—Nucl. Phys., 1971, ser. B, vol. 33, p. 436; Lee B. W., Zinn-Justin J.—Phys. Rev., 1972, ser. D, vol. 5, pp. 3121, 3137, 3155; 1972 ser. D, vol. 7, p. 1049; 't Hooft G., Veltman M. T.—Nucl. Phys., 1972, ser. B, vol. 50, p. 318; Becchi C., Rouet A., Stora R. В кн.: Renormalisation Theory/eds. G. Velo, A. S. Wightman.—Dordrecht, Holland and Boston, Mass.: D. Reidel, 1976.

Имеются следующие обзоры по этому направлению: Abers E. S., Lee B. W.—Phys. Rep., 1973, ser. C, vol. 9, p. 1; Veltman M. T. кн.: Proc. of the Sixth Intern. Symposium on Electron and Photon Interactions at High Energies/ed. H. Rollnik, W. Pfeil.—Amsterdam: North-Holland, 1974; Zinn-Justin J. В кн.: Trends in Elementary Particle Theory/eds. H. Rollnik, K. Dietz—Berlin: Springer-Verlag,

1975; Lee B. W. В кн.: *Methods in Field Theory*/eds. R. Balian, J. Zinn-Justin.—Amsterdam: North-Holland, 1976; Marciano W., Pagels H.—Phys. Rep., 1978, ser. C, vol. 36, p. 137. Общий обзор содержится в учебнике Тейлора (*Taylor J. C.—Gauge Theories of Weak Interactions.*—London, New York, Melbourne: Cambridge Univ. Press, 1976 [Имеется перевод: *Тейлор Дж.* Калибровочные теории слабых взаимодействий.—М.: Мир, 1978.])

Обобщение модели слабого взаимодействия, охватывающее адроны, было стимулировано введением квантового числа чарм (*Glashow S. L., Iliopoulos J., Maiani L.—Phys. Rev., 1970, ser. D, vol. 2, p. 1285.*)

Ву и Янг пересмотрели геометрию калибровочных полей (*Wu T. T., Yang C. N.—Phys. Rev., 1975, ser. D, vol. 12, p. 3843.*) Общее обсуждение классических решений имеется в записях лекций С. Коулмена (В кн.: *Coleman S. New Phenomena in Subnuclear Physics*/ed. A. Zichichi.—New York: Plenum Press, 1977. Калибровочные монополи были найдены независимо Г. Т'Хоофтом (*Nucl. Phys., 1974, ser. B, vol. 79, p. 276*) и А. М. Поляковым (Письма в ЖЭТФ, 1974, т. 20, с. 194). Евклидовы инстантоны ввели А. А. Белавин, А. М. Поляков, А. С. Шварц и И. С. Тюпкин (*Phys. Lett., 1975, ser. B, vol. 59, p. 85.*)

В. Н. Грибов рассмотрел неоднозначности, возникающие при выборе калибровки (*Nucl. Phys., 1978, ser. B, vol. 139, p. 1.*)

Аномальный магнитный момент мюона рассмотрен в гл. 7 (см. т. 1 настоящей книги). Слабые поправки к нему вычислены в работе: *Fujikawa K., Lee B. W., Sanda A. I.—Phys. Rev., 1972, ser. D, vol. 6, p. 2923.*

## ПРИМЕЧАНИЕ РЕДАКТОРА ПЕРЕВОДА

Более глубокому анализу вопросов, рассмотренных в настоящей главе, посвящена книга: *Славнов А. А., Фаддеев Л. Д.* Введение в квантовую теорию калибровочных полей.—М.: Наука, 1978. В этой книге имеются подробные литературные комментарии по теории калибровочных полей.

Дополнительное квантовое число у кварков, названное впоследствии «цветом», было введено при построении составных кварковых моделей для адронов с целью удовлетворить требованиям статистики в работах: *Greenberg O. W.—Phys. Rev. Lett., 1964, vol. 13, p. 598; Боголюбов Н. Н., Струминский Б. В., Тавхелидзе А. Н.—ОИЯИ, 1965, препринт Д-1968; Han M. Y., Nambu Y.—Phys. Rev., ser. B, 1965, vol. 139, p. 1006.*

Важная теоретическая схема, претендующая на роль теории сильных взаимодействий—квантовая хромодинамика—основана на гипотезе о том, что эти взаимодействия переносятся калибровочными полями (глюонами), отвечающими цветовой группе  $SU(3)$ . Данная гипотеза была высказана в работах: *Pati J., Salam A.—Phys. Rev. D, 1973, vol. 8, p. 1240; Fritzsche H., Gell-Mann M., Leutwyler H.—Phys. Lett. B, 1973, vol. 47, p. 365; Weinberg S.—Phys. Rev. Lett. 173, vol. 31, p. 494* Различные аспекты квантовой хромодинамики рассматриваются в книге: *Андреев И. В.* Хромодинамика и жесткие процессы при высоких энергиях.—М.: Наука, 1981; см также обзоры: *Marciano W., Pagels H.—Phys. Rep., 1978, vol. 36, p. 137; Efremov A. V., Radyushkin A. V.—Rivista del Nuovo Cimento, 1980, vol. 3, № 2; Вайнштейн А. Н., Захаров В. И., Новиков В. А., Шифман М. А.—ЭЧАЯ, 1982, т. 13, с. 542.*

## Глава 13

# АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ

Связь между поведением амплитуд при больших передаваемых импульсах или на малых расстояниях и свойствами перенормируемости рассматривали в начале 50-х гг. Штюкельберг и Петерман, а также Гелл-Манн и Лоу. В 70-х гг. после работ Вилсона, Симанзика и Каллана эта область исследований вступила в пору расцвета. Не следует недооценивать также потока новых идей, приведших в итоге к слиянию этих исследований с изучением критических явлений, что связано в первую очередь с именами Каданова, Фишера и Вилсона. Выяснилось, что сингулярности на малых расстояниях, причинившие немало хлопот и вынудившие теоретиков разработать целую технологию перенормировки, на самом деле позволяют уяснить свойства операторов при масштабных преобразованиях. Нетривиальные следствия бесконечно малого изменения масштаба можно записать с помощью системы дифференциальных уравнений. Интегрируя их, можно установить, что во многих случаях поведение на малых расстояниях носит универсальный характер, причем полям и составным операторам необходимо приписать аномальные размерности.

Эти идеи нашли успешное применение при изучении глубоко-неупругого рассеяния лептонов, электрон-позитронной аннигиляции и других процессов при высоких энергиях. Концепции операторного разложения на малых расстояниях, асимптотическая свобода обогащают арсенал теоретиков и пробуждают надежды на разработку фундаментальной теории сильных взаимодействий.

Поразительные успехи развивающейся параллельно статистической механики привели к выдающимся результатам, которые прекрасно согласуются с экспериментом.

Настоящая глава может служить лишь введением в эту безграничную область. Мы будем избегать сложных математических доказательств и полагаться большей частью на эвристические аргументы и примеры, следуя историческому пути развития ценой некоторых повторений.

### 13.1. ЭФФЕКТИВНЫЙ ЗАРЯД В ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ

Для того чтобы ввести читателя в круг соответствующих представлений, обсудим сначала электродинамику, изучавшуюся первоначально Гелл-Манном и Лоу.

Фундаментальной величиной здесь является электрический заряд, точнее постоянная тонкой структуры  $\alpha = 1/137$ . Это значение получено из низкоэнергетических экспериментов в атомной физике, т. е. на расстояниях, существенно превосходящих комптоновскую длину волны заряженного фермиона (скажем, электрона), которая определяет фундаментальный масштаб длины. В высокоэнергетических же экспериментах мы интересуемся, наоборот, локальными квазимгновенными свойствами взаимодействия. Можно было бы наивно полагать, что этот режим управляется затравочными параметрами, входящими в гамильтониан. К сожалению, в результате перенормировки соотношение между затравочным и перенормированным зарядами осложняется из-за бесконечностей, возникающих по крайней мере в рамках теории возмущений. Способ компенсации этих расходимостей накладывает определенные ограничения, которые отражаются на асимптотическом поведении. Смысл слова «асимптотический» будет проясняться по мере дальнейшего изучения предмета.

### 13.1.1. Функция Гелл-Манна — Лоу

Рассмотрим фотонный пропагатор и его связь с поляризацией вакуума:

$$G_{\rho\nu}(q) = -i \frac{g_{\rho\nu}}{q^2 [1 + \bar{\omega}(q^2)]} + G_{\rho\nu}^L(q). \quad (13.1)$$

Для простоты не будем вводить фиктивной массы фотона. Продольная часть  $G_{\rho\nu}^L$ , пропорциональная  $q_\rho q_\nu$ , в последующем рассмотрении не играет какой-либо роли. Нормировка заряда обеспечивается условием  $\bar{\omega}(0) = 0$  и, следовательно, определяется низкоэнергетическим взаимодействием или излучением мягких фотонов. Поляризация вакуума зависит от  $q^2$ ,  $\alpha$  и массы электрона  $m$ . Чтобы дать определение эффективного заряда  $d(\alpha, q^2, m^2)$ , соответствующего переданному импульсу  $q$ , рассмотрим комбинацию  $\alpha G_{\rho\nu}$ , связанную с фотонным пропагатором:

$$\begin{aligned} \alpha G_{\rho\nu}(q) &= -i \frac{g_{\rho\nu}}{q^2} d(\alpha, q^2, m^2) + \alpha G_{\rho\nu}^L(q), \\ d(\alpha, q^2, m^2) &= \frac{\alpha}{1 + \bar{\omega}(\alpha, q^2, m^2)}, \\ d(\alpha, 0, m^2) &= \alpha. \end{aligned} \quad (13.2)$$

Вычитания обычно выполняются при  $q^2 = 0$ . Посмотрим, что произойдет, если выбрать другую точку вычитания, а именно  $q^2 = \lambda^2 < 0$  (в евклидовой области вдали от сингулярностей). В этом случае параметром разложения по теории возмущений будет величина  $\alpha_\lambda$ , равная

$$\alpha_\lambda = d(\alpha, \lambda^2, m^2). \quad (13.3)$$

Эффективный заряд, выраженный через  $\alpha_\lambda$ , представляет собой функцию  $D$ , такую, что

$$D(\alpha_\lambda, q^2, m^2, \lambda^2) = d(\alpha, q^2, m^2) \quad (13.4)$$

и

$$\alpha_\lambda = D(\alpha_\lambda, \lambda^2, m^2, \lambda^2). \quad (13.5)$$

Уравнение (13.4) выражает бессодержательное на первый взгляд утверждение, что величины, имеющие физический смысл, не должны зависеть от того, какого из этих определений мы придерживаемся. Выбор другой точки вычитания приводит к изменению величины  $\alpha_\lambda$ , но функция  $D$  при этом остается прежней. Заметим, что в квантовой электродинамике анализ упрощается благодаря тождествам Уорда  $Z_1 = Z_2$ ,  $\alpha = Z_3 \alpha_0$ , учет которых позволяет ограничиться изучением лишь поляризации вакуума.

Поскольку  $D$  — безразмерная функция, можно написать

$$\begin{aligned} D\left(\alpha_\lambda, \frac{q^2}{\lambda^2}, -\frac{m^2}{\lambda^2}\right) &= d\left(\alpha, -\frac{q^2}{m^2}\right), \\ \alpha_\lambda = D\left(\alpha_\lambda, 1, -\frac{m^2}{\lambda^2}\right) &= d\left(\alpha, -\frac{\lambda^2}{m^2}\right) \end{aligned} \quad (13.6)$$

и воспользоваться этими соотношениями в глубоко евклидовой области, в которой отношение  $-q^2/m^2$  является большим. Нам известно в принципе разложение поляризации вакуума  $(\alpha d)^{-1} - 1$  в ряд теории возмущений. В каждом порядке мы вычисляем его асимптотическое поведение, пренебрегая членами, ведущими себя как  $(m^2/q^2) [\ln(-q^2/m^2)]^n$ . Отсюда получаем функцию  $d^{\text{ac}}(\alpha, -q^2/m^2)$ , которая следовала бы также из безмассовой квантовой электродинамики, если бы в качестве масштабного параметра использовалась величина  $m^2$ . Таким образом, мы исследуем область  $-q^2/m^2 \rightarrow \infty$ ,  $\alpha \ln(-q^2/m^2) \rightarrow 0$ , надеясь при этом, что отброшенные члены не дадут в сумме ощутимого вклада. Однако серьезный анализ этой гипотезы на данной стадии исследований невозможен.

В выражениях (13.6) правая часть становится равной  $d^{\text{ac}}(\alpha, x)$ , где  $x = -q^2/m^2$ . Если выбрать точку вычитания в интервале  $m^2 \ll -\lambda^2 \ll -q^2$ , то в левой части выражений (13.6) можно пренебречь зависимостью от  $m^2$ , поскольку из гл. 8 известно, что соответствующий безмассовый предел существует. В этом пределе  $D$  заменяется функцией  $D^{\text{ac}}$ , зависящей от масштабного параметра  $\lambda^2$ . Полагая  $y = -\lambda^2/m^2$ , находим

$$D^{\text{ac}}\left(\alpha_y, \frac{x}{y}\right) = d^{\text{ac}}(\alpha, x), \quad (13.7)$$

причем

$$\alpha_y = d^{\text{ac}}(\alpha, y) = D^{\text{ac}}(\alpha_y, 1). \quad (13.8)$$

Отсюда следует, что  $d^{\text{ac}}$  можно рассматривать как функцию одной переменной. Чтобы убедиться в этом, определим согласно Гелл-

Манну и Лоу функцию

$$\psi(z) = \frac{\partial}{\partial x} D^{\text{ac}}(z, x) \Big|_{x=1}, \quad (13.9)$$

продифференцируем выражение (13.7) по  $x$  и положим  $y=x$ . Таким образом, получим

$$\psi(\alpha_x) = x \frac{\partial}{\partial x} d^{\text{ac}}(\alpha, x). \quad (13.10)$$

С учетом условия (13.8) интегрирование этого уравнения дает

$$\ln \frac{x_2}{x_1} = \int_{d^{\text{ac}}(\alpha, x_1)}^{d^{\text{ac}}(\alpha, x_2)} \frac{dz}{\psi(z)}, \quad (13.11)$$

что эквивалентно ряду

$$d^{\text{ac}}(\alpha, x_2) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left( \ln \frac{x_2}{x_1} \right)^n \left\{ \left[ \psi(z) \frac{d}{dz} \right]^n z \right\} \Big|_{z=d^{\text{ac}}(\alpha, x_1)}. \quad (13.12)$$

Прежде чем перейти к обсуждению полученного результата, приведем найденное нами ранее выражение (8.130) для поляризации вакуума. Напомним, что показатель степени при  $\alpha$  определяется числом петель в диаграмме. С точностью до  $\alpha^2$  имеем

$$\bar{\omega}^{\text{ac}}(\alpha, x) = -\frac{\alpha}{3\pi} \left( \ln x - \frac{5}{3} \right) - \frac{\alpha^2}{4\pi^2} (\ln x - C_2) + O(\alpha^3), \quad (13.13)$$

где  $C_2$  — числовая константа. Определим величину  $\alpha_1$ :

$$\alpha_1 = d^{\text{ac}}(\alpha, 1) = \frac{\alpha}{1 + 5\alpha/9\pi + C_2(\alpha^2/4\pi^2) + \dots}. \quad (13.14)$$

Тогда мы можем записать

$$d^{\text{ac}}(\alpha, x) = \frac{\alpha_1}{1 - (\alpha_1/3\pi) \ln x - (\alpha_1^2/4\pi^2) \ln x + \dots}. \quad (13.15)$$

Чтобы отыскать функцию  $\psi(\alpha_1)$ , вычислим производную  $(\partial/\partial x) d^{\text{ac}}(\alpha, x)$  при  $x=1$ . Используем также результат трехпетлевого вычисления, полученный Бейкером и Джонсоном. Это дает

$$\psi(z) = \frac{z^2}{3\pi} + \frac{z^3}{4\pi^2} + \frac{z^4}{3\pi^3} \left[ \zeta(3) - \frac{101}{96} \right] + O(z^5), \quad (13.16)$$

причем функция Римана  $\zeta(3)$  равна

$$\zeta(3) = 1,202 \dots \quad (13.17)$$

Решение уравнения Гелл-Манна — Лоу (13.10) показывает, что главный вклад  $n$ -го порядка в поляризацию вакуума можно

найти, если известно  $d^{\text{ac}}$  (а следовательно, и  $\psi$ ) в более низких порядках. Чтобы проиллюстрировать это утверждение, вычислим главный вклад  $\alpha^3 (\ln x)^2$  в  $d$ , ограничиваясь двухпетлевым приближением для  $\psi$ :  $\psi(z) = z^2/3\pi + z^3/4\pi^2 + \dots$ . Из выражения (13.11) имеем

$$\ln x = \int_{\alpha_1}^{d^{\text{ac}}(\alpha, x)} \frac{dz}{\psi(z)} = f(d^{\text{ac}}(\alpha, x)) - f(\alpha_1), \quad (13.18)$$

$$f(z) = \text{const} - \frac{3\pi}{z} - \frac{9}{4} \ln z + O(z).$$

Обращая эти выражения, находим

$$d^{\text{ac}}(\alpha, x) = \frac{\alpha_1}{1 - (\alpha_1/3\pi) \ln x - (\alpha_1^2/4\pi^2) \ln x - (\alpha_1^3/24\pi^3) (\ln x)^2 + O(\alpha_1^3 \ln x)}, \quad (13.19)$$

$$\alpha_1 = \frac{\alpha}{1 + 5\alpha/9\pi + C_2 \alpha^2/4\pi^2} = \alpha - \frac{5}{9\pi} \alpha^2 + \dots$$

Таким образом, мы действительно получили доминирующий вклад в порядке  $\alpha^3$ . В качестве более простого примера можно было бы, удерживая лишь первый член в  $\psi$ , обнаружить в двухпетлевом приближении сокращение членов  $\alpha^2 (\ln x)^2$ , т. е. результат, получение которого в гл. 8 стоило нам значительных усилий. Заметим, однако, что в данном приближении мы не смогли бы получить коэффициент при  $\alpha^2 \ln x$ .

Если в (13.19) подставить  $\alpha_1$  как функцию от  $\alpha$ , то в данном порядке можно выделить главные вклады. В любом случае из (13.19) следует вывод, что при  $-q^2 \rightarrow \infty$  трехпетлевой вклад в  $\bar{\omega}$  ведет себя как  $(-\alpha^3/24\pi^3) [\ln(-q^2/m^2)]^3$ . Таким образом, ренормализационная группа позволяет получать новые результаты, хотя поначалу казалось, что мы занимаемся лишь формулировкой тривиальных утверждений. Ниже мы покажем, что найденные до сих пор численные выражения достаточны, чтобы можно было вычислять все вклады типа  $\alpha^n [\ln(-q^2/m^2)]^{n-1}$ .

Функция  $\psi$  известна только как степенной ряд в окрестности нуля, и нет никакой гарантии, что он сходится. Даже наоборот, мы подозреваем, что этот ряд будет в лучшем случае асимптотическим (см. разд. 9.4). Напомним, что разложение  $d$  в ряд справедливо лишь при условии, что  $\alpha \ln(-q^2/m^2) \rightarrow 0$ , когда  $-q^2/m^2 \rightarrow \infty$ . Это объясняет, почему существование полюса функции  $d$  в окрестности нефизической евклидовой точки

$$-q^2 = m^2 e^{3\pi/\alpha} \sim m^2 \cdot 10^{560}$$

довольно сомнительно. Такой полюс, называемый иногда призрачным полюсом Ландау, возникает, когда в  $\bar{\omega}$  удерживается вклад

только первого порядка. Поскольку эта сингулярность, очевидно, находится в асимптотической области, при серьезном исследовании потребуется полное выражение для  $d^{\text{ac}}$ , все члены которого сравнимы по величине. Поэтому на данном этапе рискованно делать какие-либо выводы о несогласованности квантовой электродинамики.

С другой стороны, если предположить, что функция  $\psi$  имеет смысл, то, формулируя конкретные гипотезы относительно вида этой функции, можно делать выводы о характере теории в целом. Отметим, что по самому ее определению функция  $\psi$  универсальна и не зависит от выбора того или иного способа перенормировки.

Рассмотрим несколько возможностей. Исходя из явного вида первых членов разложения функции  $\psi(z)$ , предположим, что она положительна на интервале  $0 < z < \alpha_\infty$ . Чтобы быть последовательными, предположим также, что  $\alpha_1$  принадлежит этому интервалу.

Если  $\alpha_\infty$  бесконечно, т. е. если  $\psi(z)$  обращается в нуль только при  $z=0$ , необходимо, чтобы интеграл  $\int_0^\infty dz/\psi(z)$  расходился на верхнем пределе таким образом, что  $d^{\text{ac}}(\alpha, x) \rightarrow \infty$  при  $x \rightarrow \infty$ . В противном случае  $d^{\text{ac}}(\alpha, x)$  должно обращаться в бесконечность

при нефизических значениях  $q^2 = -m^2 \exp \left[ \int_{\alpha_1}^\infty dz/\psi(z) \right]$ , и то же

самое, вероятно, справедливо относительно полной функции  $d$ . Иными словами, в соответствующей теории действительно имеется призрачный полюс Ландау. Ясно, что по первым нескольким членам разложения  $\psi$  в ряд эту гипотезу проверить надлежащим образом нельзя.

Другой возможностью является обращение в нуль  $\psi(z)$  при некотором конечном положительном значении  $z = \alpha_\infty$ . В области  $0 < \alpha_1 < \alpha_\infty$  положительность  $\psi(z)$  означает, что  $d^{\text{ac}}(x)$  представляет собой возрастающую функцию, и мы требуем, чтобы интег-

рал  $\int_{\alpha_1}^{\alpha_\infty} dz/\psi(z)$  расходился. Это будет выполнено, если  $\psi(z)$  имеет при  $z = \alpha_\infty$  простой нуль. Если эти условия выполнены, то  $d^{\text{ac}}(\alpha, x) \rightarrow \alpha_\infty$ , когда  $x \rightarrow \infty$ . Фактически, поскольку  $\psi(z)$  уменьшается в окрестности этой точки,  $d^{\text{ac}}$  стремится к  $\alpha_\infty$  независимо от того,  $\alpha_1$  меньше, чем  $\alpha_\infty$ , или больше. Это свойство характеризуют, говоря, что  $\alpha_\infty$  есть ультрафиолетовая притягивающая (или стабильная) фиксированная точка. В случае когда  $\alpha_1 = \alpha_\infty$ , функция  $d^{\text{ac}}$  принимает постоянное значение  $\alpha_\infty$ .

В окрестности точки  $z \approx \alpha_\infty$  можно записать

$$\psi(z) = v(\alpha_\infty - z) + \dots, \quad v > 0. \quad (13.20)$$



Интегрирование выражения (13.11) дает

$$d^{\text{ac}}(\alpha, -q^2/m^2) = \alpha_\infty - k(-q^2/m^2)^{-1} + \dots; \quad (13.21)$$

здесь положительная постоянная  $k$  зависит от точного вида функции  $\psi$ . Критический индекс  $\nu$  [ $\nu = -(d\psi/dz)(\alpha_\infty) > 0$ ] характеризует скорость приближения к фиксированному значению  $\alpha_\infty$ , при котором фотонный пропагатор имеет значение, соответствующее свободному полю. При этом  $\alpha_\infty$  должна представлять собой электромагнитную константу связи для малых расстояний, как если бы затравочная (голая) константа связи была конечной.

### 13.1.2. Уравнение Каллана — Симанзика

Вместо того чтобы исследовать эффекты, связанные с изменением точки перенормировки, можно сделать как бы шаг назад и вернуться к рассмотрению голых регуляризованных функций Грина, характеризуемых параметром обрезания  $\Lambda \gg m$ . При соответствующем выборе голых параметров мы имеем

$$d(\alpha, q^2, m^2) = \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} d(\alpha_0, q^2, m_0^2, \Lambda^2). \quad (13.22)$$

Известно, что это соотношение было получено лишь с помощью теории возмущений, и благодаря тождеству Уорда не содержит множителей, связанных с перенормировкой волновой функции. Кроме того, мы имеем

$$\alpha = Z_3 \left( \frac{\Lambda^2}{m^2}, \alpha \right) \alpha_0. \quad (13.23)$$

Предел  $\Lambda \rightarrow \infty$  будет здесь всегда подразумеваться, но, как правило, мы не будем его выписывать в явном виде. Для дальнейшего очень важно, что вследствие перехода к этому пределу перенормированные амплитуды зависят от меньшего (на единицу) числа размерных параметров, чем регуляризованные.

Рассмотрим неприводимую функцию  $d^{-1} = \alpha^{-1}(1 + \bar{\omega})$ . Диаграммы, дающие вклад в величину

$$m_0 = \frac{\partial}{\partial m_0} d^{-1}(\alpha_0, q^2, m_0^2, \Lambda^2),$$

являются условно сходящимися. С точностью до множителя  $g^{\mu\nu}q^2 - q^\mu q^\nu$  они соответствуют неприводимой части функции Грина (рис. 13.1)

$$\int d^4x e^{-iq \cdot x} \langle 0 | T j^\mu(x) j^\nu(0) \int d^4y im_0 : \bar{\psi}_0 \psi_0(y) : | 0 \rangle.$$

Условная сходимость предполагает сохранение тока. Вставка оператора  $im_0 \int d^4y : \bar{\psi} \psi(y) :$  увеличивает на единицу степень одного

из знаменателей в интегралах Фейнмана. Однако, как показано в гл. 8, вычитание внутренних расходимостей, обусловленных вставками  $m_0 \bar{\psi}_0 \psi_0$  в поддиаграммы собственной энергии фермиона, требует введения нового контрчлена или, что то же самое, умножения  $\bar{\psi}_0 \psi_0$  на  $Z_{\bar{\psi}\psi}$ . В конечном счете величина

$$\Delta \left( \alpha, -\frac{q^2}{m^2} \right) = Z_{\bar{\psi}\psi} m_0 \frac{\partial}{\partial m_0} d^{-1}(\alpha_0, q^2, m_0^2, \Lambda^2) \quad (13.24)$$

в пределе  $\Lambda \rightarrow \infty$  будет конечной. В низшем порядке величина  $\Delta$  определяется формулой (7.9) (см т. 1 настоящей книги). При больших  $-q^2/m^2$  она ведет себя как  $-(m^2/q^2) \ln(-q^2/m^2)$ . В  $n$ -м

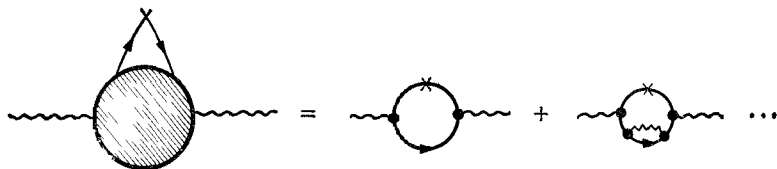


РИС. 13.1. Диаграммы для  $m_0 (\partial/\partial m_0) d^{-1}$ .

порядке  $\Delta$  есть величина  $-m^2/q^2$ , умноженная на полином от  $\ln(-q^2/m^2)$ . Поэтому в теории возмущений асимптотический предел  $\Delta_{ac}$  обращается в нуль.

Рассмотрим теперь вариацию величины  $m$  (а следовательно, и  $\alpha$ ) при фиксированных значениях  $\alpha_0$  и  $\Lambda$ . В соответствии с (13.23) имеем

$$m \frac{\partial}{\partial m} \alpha \Big|_{\alpha_0, \Lambda} = \alpha m \frac{\partial}{\partial m} \ln Z_3 \Big|_{\alpha_0, \Lambda}.$$

Если это соотношение имеет предел при  $\Lambda \rightarrow \infty$  при фиксированных  $\alpha$  и  $m$ , то единственным безразмерным параметром, от которого оно может зависеть, является  $\alpha$ . Следовательно, из соображений размерности определим величину

$$\beta(\alpha) = \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \alpha \frac{\partial}{\partial m} \ln Z_3 \Big|_{\alpha_0, \Lambda} = - \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \alpha \Lambda \frac{\partial}{\partial \Lambda} \ln Z_3 \left( \frac{\Lambda^2}{m^2}, \alpha_0 \right). \quad (13.25)$$

Убедимся в том, что в теории возмущений функция  $\beta(\alpha)$  существует. С этой целью вычислим соответствующую производную от  $d^{-1}$ :

$$\lim_{\Lambda \rightarrow \infty} m \frac{\partial}{\partial m} d^{-1} \Big|_{\alpha_0, \Lambda} = \left[ m \frac{\partial}{\partial m} + \beta(\alpha) \frac{\partial}{\partial \alpha} \right] d^{-1} \left( \alpha, -\frac{q^2}{m^2} \right).$$

С помощью (13.24) левую часть можно также записать в виде

$$\begin{aligned} \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} m \frac{\partial}{\partial m} d^{-1}(\alpha_0, q^2, m_0^2, \Lambda^2) |_{\alpha_0, \Lambda} &= \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \frac{m}{m_0} \frac{\partial m_0}{\partial m} \times \\ &\times m_0 \frac{\partial}{\partial m_0} d^{-1}(\alpha_0, q^2, m_0^2, \Lambda^2) |_{\alpha_0, \Lambda} = \\ &= \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \left( \frac{m}{m_0} \frac{\partial m_0}{\partial m} \right) Z_{\Psi\psi}^{-1} \Delta \left( \alpha, -\frac{q^2}{m^2} \right). \end{aligned}$$

Если функция  $\beta(\alpha)$  конечна, то же самое справедливо и относительно величины

$$1 + \delta(\alpha) = \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} Z_{\Psi\psi}^{-1} \frac{m}{m_0} \frac{\partial m_0}{\partial m} \Big|_{\alpha_0, \Lambda}, \quad (13.26)$$

что приведет нас к уравнению Каллана—Симанзика

$$\left[ m \frac{\partial}{\partial m} + \beta(\alpha) \frac{\partial}{\partial \alpha} \right] d^{-1} \left( \alpha, -\frac{q^2}{m^2} \right) = [1 + \delta(\alpha)] \Delta \left( \alpha, -\frac{q^2}{m^2} \right). \quad (13.27)$$

Из того факта, что  $\Delta_{ac}$  обращается в нуль, следует также уравнение

$$\left[ -2x \frac{\partial}{\partial x} + \beta(\alpha) \frac{\partial}{\partial \alpha} \right] d_{ac}^{-1}(\alpha, x) = 0. \quad (13.28)$$

Из уравнения (13.28) мы видим, что функция  $\beta(\alpha)$ , вычисленная по теории возмущений, конечна. Этого достаточно, чтобы использовать данное уравнение при некотором определенном значении  $x$ . Наоборот, изучая это уравнение и обобщая его на другие функции Грина, можно судить о перенормируемости теории.

Для квантовой электродинамики фермионов трехпетлевые вычисления де Рафаэля и Рознера дают

$$\beta(\alpha) = \frac{2\alpha^2}{3\pi} + \frac{\alpha^3}{2\pi^2} - \frac{121\alpha^4}{144\pi^3} + O(\alpha^5). \quad (13.29)$$

В отличие от функции  $\psi$  функция  $\beta$ , за исключением первых двух ее членов, зависит от того, каким образом проводится перенормировка константы связи  $\alpha$ . Из (13.29) следует, что при  $\alpha \rightarrow +0$  функция  $\beta(\alpha)$  положительна.

Как мы договорились ранее, вычислим теперь для произвольного высокого порядка теории возмущений ведущий вклад в поляризацию вакуума, используя лишь уравнение (13.28) и формулу (13.29). Для этого подставим в (13.28) следующие формальные разложения:

$$\begin{aligned} d_a^{-1} &= \alpha^{-1} \left[ 1 + \sum_1^{\infty} \alpha^n p_n(x) \right], \\ \beta(\alpha) &= \sum_1^{\infty} b_n \alpha^{n+1}, \end{aligned} \quad (13.30)$$

где  $b_1 = 2/3\pi$ ,  $b_2 = 1/2\pi^2$ .

При этом получим следующее уравнение:

$$2 \frac{d}{d \ln x} \rho_{n+1}(x) = \sum_{q=2}^n (q-1) \rho_q(x) b_{n-q+1}, \quad n \geq 2. \quad (13.31)$$

Решение его запишется в виде

$$\begin{aligned} \rho_1(x) &= -\frac{b_1}{2} \ln x + C_1, \\ \rho_n(x) &= -\left(\frac{b_1}{2}\right)^{n-2} \frac{b_2}{2} \frac{(\ln x)^{n-1}}{n-1} + O(\ln x^{n-2}), \quad n \geq 2. \end{aligned} \quad (13.32)$$

Отсюда следует, что вычисления с учетом двухпетлевых вкладов определяют  $b_1$  и  $b_2$ , которые в свою очередь позволяют найти главное приближение в  $n$ -м порядке.

Разложение величины  $d_{ac}^{-1}$  можно перегруппировать, суммируя сначала главные логарифмы, затем следующие за ними и т. д. В результате имеем

$$d_{ac}^{-1}(\alpha, x) = \alpha^{-1} \left(1 - \frac{\alpha}{3\pi} \ln x\right) + \frac{3}{4\pi} \ln \left(1 - \frac{\alpha}{3\pi} \ln x\right) + C_1 + \dots \quad (13.33)$$

К сожалению, этот метод не позволяет вычислить  $d_{ac}^{-1}(\alpha, x)$  при больших  $x$ . Например, если бы мы удержали только главные логарифмы, то опять получили бы нефизический призрачный полюс Ландау в точке, в которой  $[1 - (\alpha/3\pi) \ln x] = 0$ . Но при таком значении  $x$  второй член логарифмически обращается в бесконечность, и предположение о том, что этот член не вносит доминирующего вклада, нарушается. Иначе говоря, перегруппировка, приведшая к (13.33), полезна только тогда, когда  $|\alpha \ln x| \ll 1$ . Чтобы найти истинное поведение при больших  $x$ , требуется просуммировать все логарифмы или, что эквивалентно, вернуться к исходным уравнениям (13.27) и (13.28).

Интересно понять на языке диаграмм, почему для вычисления в любом порядке коэффициента при главном логарифме нам достаточно иметь лишь

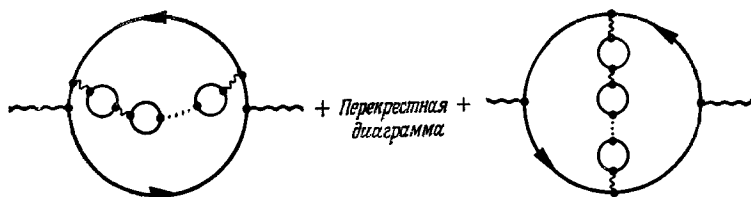


РИС. 13.2. Диаграммы с максимальным числом  $n-1$  фермионных петель, дающих вклад в поляризацию вакуума порядка  $n$ .

$b_1$  и  $b_2$ . Напомним, что в гл. 8 мы сделали заключение, согласно которому при суммировании калибровочно-инвариантных классов диаграмм главная степень величины  $\ln x$  равна числу внутренних фермионных петель. Для

читателя поучительно получить это свойство путем введения для фермионов  $N$ -кратного вырождения по некоторому квантовому числу и изучения зависимости от  $N$ . На рис. 13.2 представлены диаграммы с наибольшим числом фермионных петель в данном порядке по  $\alpha$ . Получаемая в итоге структура показывает, почему вычисление в двухпетлевом приближении дает коэффициент при доминирующем члене до  $n$ -го порядка, пропорциональный  $b_1^{n-2} b_2 (\ln x)^{n-1}$ .

Из (13.25) следует, что константа  $Z_3$  удовлетворяет уравнению

$$\left[ -2y \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\beta(\alpha)}{\alpha} \left( \alpha \frac{\partial}{\partial \alpha} - 1 \right) \right] Z_3(y, \alpha) = 0, \quad (13.34)$$

$$y = \Lambda^2/m^2.$$

Таким образом, изучение предела бесконечного параметра обрезания  $y \rightarrow \infty$  возможно при условии, что сделаны некоторые предположения о виде функции  $\beta(\alpha)$ .

Разумеется, между функцией Гелл-Манна—Лоу  $\psi$  и коэффициентом Каллана—Симанзика  $\beta(\alpha)$  существует некоторая связь. Возьмем, например, производную от выражения (13.11) по  $x_2$  и подставим результат в (13.28). Это приводит к выражению

$$\psi[d_{ac}(\alpha, x)] = \frac{1}{2} \beta(\alpha) \frac{\partial}{\partial \alpha} d_{ac}(\alpha, x), \quad (13.35)$$

которое можно проанализировать затем при некотором определенном значении  $x$ . Выберем, например, точку  $x=1$  ( $q^2 = -m^2$ ). При этом  $d_{ac}(\alpha, 1) = \alpha_1(\alpha) = \alpha - 5\alpha^2/9\pi + \dots$ , а

$$\psi(\alpha_1) = \frac{1}{2} \beta(\alpha) \frac{d\alpha_1}{d\alpha}. \quad (13.36)$$

Это показывает также, что нули двух функций связаны между собой. Если  $\alpha_c$  таково, что  $\beta(\alpha_c) = 0$ , то  $\psi$  обращается в нуль при  $\alpha_\infty = \alpha_1(\alpha_c)$ . В частности, если это значение соответствует ультрафиолетовой фиксированной точке, то  $d_{ac} \rightarrow \alpha_\infty$  при  $x \rightarrow \infty$ . Кроме того, из (13.34) вытекает, что  $Z_3$ —конечная величина;  $\alpha_\infty$  играет роль квадрата конечного голого заряда. Возможность того, что  $\alpha_c$  может равняться наблюдаемой физической постоянной тонкой структуры, подробно обсуждалась Адлером. К сожалению, в настоящее время мы не имеем определенной процедуры вычисления этих функций вне рамок теории возмущений, так что в целом вопрос остается открытым.

Читателю рекомендуется получить уравнения, аналогичные уравнениям Каллана—Симанзика, для других электродинамических функций Грина.

## 13.2. НАРУШЕННАЯ МАСШТАБНАЯ ИНВАРИАНТНОСТЬ

Как выяснилось спустя некоторое время после первых исследований Гелл-Манна и Лоу, более общий подход состоит в исследовании поведения функций Грина перенормируемой теории на

малых расстояниях, когда все относительные расстояния пространственно-подобны и одновременно стремятся к нулю. Этот вопрос может казаться чисто теоретическим, поскольку он касается сведения амплитуд в области, далекой от массовой поверхности. К счастью, оказалось, что это не так. Косвенными методами, такими, как глубоконеупругое рассеяние лептонов на адронных мишенях, удастся изучать взаимодействия на малых расстояниях. Эти эксперименты, результаты которых были предвосхищены теоретическими соображениями Бьёркена и Фейнмана, отчасти стимулировали исследования, выполненные Вилсоном, Симанзником и Калланом.

В действительности слишком наивно предполагать, что при больших импульсах, когда массами можно пренебречь, теория становится масштабно-инвариантной. Асимптотическое поведение определяется соответствующей безмассовой теорией. Как обсуждалось в гл 8, перенормировка предполагает выбор произвольного энергетического масштаба. Наличие этого масштаба не дает возможности применить анализ размерностей. Но, как оказалось, именно произвольность выбора этого масштаба позволяет фактически спасти положение в силу того, что изменение масштаба можно скомпенсировать изменением констант связи. Соответствующий процесс управляется функциями, аналогичными коэффициенту  $\beta$ , рассмотренному выше, и ренормгрупповые преобразования оказываются вполне подходящими для замены наивного анализа размерностей.

При  $\lambda \rightarrow \infty$  ультрафиолетовые фиксированные точки (если они существуют) будут аттракторами для констант связи. Это будет приводить к восстановлению масштабной инвариантности на малых расстояниях при определенных значениях констант связи, не зависящих от начальных данных при их изменении в достаточно широком диапазоне. В частности, наблюдаемые размерности полей (или каких-либо других составных операторов) будут, вообще говоря, зависеть от динамики.

Особый интерес представляет случай, когда ультрафиолетовая фиксированная точка находится в нуле. Данное явление называется асимптотической свободой. В этом случае перенормировка приводит к логарифмическим поправкам к наивной масштабной инвариантности.

### 13.2.1. Масштабная и конформная инвариантность

Если классическое действие не содержит размерных констант, то можно ожидать, что теория является масштабно-инвариантной. В массивной теории масштабная инвариантность могла бы проявляться на малых расстояниях, характеризуемых условием  $m|x| \ll 1$ ,

Если подвергнуть координаты масштабному преобразованию

$$x \rightarrow \lambda x = \lambda^{-1} x, \quad \lambda > 0, \quad (13.37)$$

то поля, обозначаемые в общем случае через  $\varphi$ , будут преобразовываться следующим образом:

$$\varphi(x) \rightarrow \lambda \varphi(x) = U(\lambda) \varphi(\lambda x), \quad (13.37a)$$

где  $U(\lambda)$  — конечномерное представление абелевой группы растяжений. Предположим, что это представление полностью приводимо. Тогда мы можем написать

$$U(\lambda) = e^{D \ln \lambda};$$

причем матрица  $D$  может быть диагонализирована. Инфинитезимальная форма при  $\ln \lambda = \delta \varepsilon$  закона преобразования запишется в виде

$$\delta \varphi = \delta \varepsilon \left( x \cdot \frac{\partial}{\partial x} + D \right) \varphi. \quad (13.38)$$

В классической безмассовой теории преобразования (13.37a) и (13.38) сводятся к инвариантному преобразованию при условии, что собственные значения матрицы  $D$  равны 1 ( $d/2 - 1$ ) для бозе-полей и  $(3/2)(d/2 - 1/2)$  для ферми-полей. Величины в скобках относятся к случаю произвольной размерности  $d$ , отличной от четырех.

Можно также рассмотреть эффект таких преобразований в массивной теории, получая при этом тождества Уорда, отражающие нарушение масштабной инвариантности. В этом смысле имеется отличие от чистого анализа размерностей, поскольку мы рассматриваем здесь следствия преобразования динамических переменных (полей), а не размерных параметров, таких, как массы. Если не учитывать этого, то можно смешать две различные физические ситуации.

Обращаясь к нашему излюбленному примеру<sup>1)</sup>, а именно к лагранжиану вида

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial \varphi)^2 - \frac{m^2}{2} \varphi^2 - g \frac{\varphi^4}{4!}, \quad (13.39)$$

найдем вариацию

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \varepsilon} = x \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} + 2(D+1) \frac{(\partial \varphi)^2}{2} - 4Dg \frac{\varphi^4}{4!} - 2D \frac{m^2}{2} \varphi^2. \quad (13.40)$$

Следовательно, если  $D = 1$ , то

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \varepsilon} = \left( x \frac{\partial}{\partial x} + 4 \right) \mathcal{L} + m^2 \varphi^2.$$

<sup>1)</sup> В настоящей главе, чтобы избежать путаницы с обозначением масштабного параметра  $\lambda$ , константу связи при  $\varphi^4$  будем обозначать через  $g$ .

Интеграл  $\int d^4x \lambda^4 \mathcal{L}(\lambda x)$  не зависит от  $\lambda$  (положительного). Дифференцируя в точке  $\lambda = 1$ , находим

$$\int d^4x \left( x \cdot \frac{\partial}{\partial x} + 4 \right) \mathcal{L}(x) = 0.$$

Это означает, что величина  $[x \cdot (\partial/\partial x) + 4] \mathcal{L}(x)$  представляет собой дивергенцию и что вариация действия  $I$  равна

$$\delta I = \delta \varepsilon \int d^4x m^3 \varphi^2(x). \quad (13.41)$$

Очевидно, когда  $m$  обращается в нуль, теория является масштабно-инвариантной в классическом смысле.

Покажем, что в этом случае конформная инвариантность есть следствие масштабной инвариантности.

Конформная группа определяется как множество преобразований, оставляющих инвариантными углы. Это переносится и на пространство Минковского, в котором мы имеем дело как с гиперболическими, так и со сферическими углами. Конформная группа получается добавлением к преобразованиям Пуанкаре инверсии по отношению к произвольной точке — началу отсчета, например:

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = ax^\mu/x^2. \quad (13.42)$$

Чтобы это определение имело смысл, обычное  $R^4$ -пространство должно быть пополнено на бесконечности конусом. Введем полезную геометрическую конструкцию. Рассмотрим шестимерное пространство с метрикой  $(2, 4)$ , т. е. такое, что

$$dz^2 = (dz_0)^2 - (dz_1)^2 - (dz_2)^2 - (dz_3)^2 - (dz_4)^2 + (dz_{-1})^2.$$

Линии, принадлежащие изотропному конусу  $z^2 = 0$ , отождествляются с  $R^4$ -пространством, пополненным конусом на бесконечности. Это можно реализовать, например, разрезав конус  $z^2 = 0$  гиперплоскостью  $z_{-1} = 1$  и построив затем стереографическую проекцию получившегося в результате однополостного гиперболоида на  $R^4$ -пространство из точки  $(0, 0, 0, 0, -1)$  в  $R^5$ -пространстве (рис. 13.3). Соответствующие этому преобразованию формулы запишутся в виде

$$\begin{aligned} y_\mu &= \frac{2x_\mu}{1-x^2}, & y_4 &= \frac{1+x^2}{1-x^2}, \\ y_\mu y^\mu - (y_4)^2 &= -1, & 0 &\leq \mu \leq 3, \\ x_\mu &= \frac{y_\mu}{1+y_4}, & x^2 &= \frac{y_4-1}{y_4+1}. \end{aligned} \quad (13.43)$$

Преобразования псевдоортогональной группы  $O(2, 4)$  в пространстве Минковского соответствует конформным преобразованиям. В частности, масштабные преобразования соответствуют гиперболическим поворотам в плоскости  $z_4, z_{-1}$ :

$$\begin{aligned} x' = e^{-\theta} x &\Leftrightarrow y'_\mu = \frac{y_\mu}{\text{ch } \theta + y_4 \text{ sh } \theta}, & y'_4 &= \frac{y_4 \text{ ch } \theta + \text{sh } \theta}{y_4 \text{ sh } \theta + \text{ch } \theta}, \\ \Leftrightarrow z'_\mu = z_\mu, & z'_4 &= z_4 \text{ ch } \theta + z_{-1} \text{ sh } \theta, & z'_{-1} &= z_{-1} \text{ ch } \theta + z_4 \text{ sh } \theta. \end{aligned} \quad (13.44)$$



В качестве упражнения найдите четыре других типа конформных преобразований, дополняющих число генераторов до 15. Напишите соответствующие преобразования в пространстве Минковского. Постройте аналогичную конструкцию для случая евклидова четырехмерного пространства. При этом

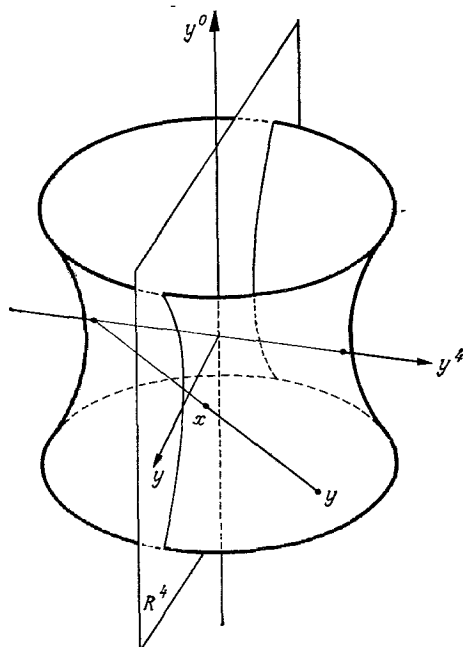


РИС. 13.3. Проекция гиперболоида (1, 4) на пространство Минковского.

конформная группа совпадает с  $O(1, 5)$ , а  $R^4$ , дополненную точкой на бесконечности, можно отождествить со стереографической проекцией единичной сферы в пятимерном пространстве.

Таким образом, для того чтобы доказать конформную инвариантность безмассовой  $\varphi^4$ -теории, достаточно изучить следствия инверсии. В пятимерном  $y$ -пространстве это преобразование соответствует симметрии  $y \leftrightarrow -y$  единичного гиперболоида. Затем нужно выбрать закон преобразования для поля. Из преобразования (13.37 а), т. е.  $\lambda\varphi(x) = \lambda\varphi(\lambda x)$  можно прийти к следующему определению:

$$\varphi(x) \rightarrow \varphi'(x) = \frac{1}{x^2} \varphi\left(\frac{x}{x^2}\right). \quad (13.45)$$

Отсюда мы имеем

$$I' = \int d^4x \left[ \frac{1}{2} (\partial\varphi')^2 - g \frac{\varphi'^4}{4!} \right] = I + \int d^4x \frac{4}{x^2} \varphi(x) \left( 1 + x \cdot \frac{\partial}{\partial x} \right) \varphi(x).$$

Добавочный член представляет собой четырехмерную дивергенцию

$$\frac{4}{x^2} \varphi \left( 1 + x \cdot \frac{\partial}{\partial x} \right) \varphi = 2\partial \left[ \frac{x^i}{x^2} \varphi^2(x) \right].$$

Таким образом, формально (т. е. без учета возможных сингулярностей) действие, а следовательно, и уравнения движения являются конформно-инвариантными.

## Упражнения

1. Сформулируйте безмассовую  $\varphi^4$ -теорию в пятимерном пространстве с динамическими переменными, определенными на единичном гиперboloиде (псевдоевклидов случай) или на единичной сфере (евклидов случай). Выпишите соответствующий лагранжиан и уравнения движения. Разложите решения уравнений для классического свободного поля по обобщенным сферическим гармоникам.
2. Покажите, что вариацию действия массивной теории при масштабном преобразовании [формула (13.41)] можно записать в виде интеграла от четырехмерной дивергенции тока, соответствующего этому преобразованию. Последний связан с модифицированным тензором энергии-импульса (таким, что его след в безмассовом случае равен нулю) следующими соотношениями:

$$\delta I = \int d^4x \partial_\mu S^\mu \delta \varepsilon, \quad S^\mu = x_\nu T^{\nu\mu},$$

$$T^{\mu\nu} = \partial^\mu \varphi \partial^\nu \varphi - g^{\mu\nu} \mathcal{L} + \frac{1}{6} (g^{\mu\nu} \square - \partial^\mu \partial^\nu) \varphi^2. \quad (13.46)$$

Обсуждение этих вопросов можно найти в работе Каллана, Коулмена и Джекива.

3. Исследуйте масштабную и конформную инвариантность при наличии ферми-полей.

## 13.2.2. Модифицированные тождества Уорда

Произведем поворот Вика и изучим теорию в евклидовой области. Для нашей задачи, касающейся исследования поведения амплитуд на малых расстояниях, это не налагает никаких ограничений. Запишем нормированный производящий функционал в виде

$$e^{G(\varphi)} = \int \mathcal{D}(\varphi) \exp \left\{ -I + \int d^4x j\varphi \right\}. \quad (13.47)$$

Действие  $I$  в евклидовой области можно записать в виде суммы двух вкладов:

$$I = I_1 + I_2, \quad I_1 = \int d^4x \left[ \frac{1}{2} (\partial\varphi)^2 + g \frac{\varphi^4}{4!} \right], \quad I_2 = \int d^4x \frac{m^2}{2} \varphi^2. \quad (13.48)$$

В этом случае масштабное преобразование  $\varphi(x) \rightarrow \lambda\varphi(x)$  можно рассматривать как простую замену переменной интегрирования, при которой

$$I_1 \rightarrow I_1, \quad I_2 \rightarrow \lambda^{-2} I_2, \quad \int d^4x j\varphi \rightarrow \lambda \int d^4x j(x) \varphi(\lambda x).$$

Изменение меры включено в нормировку, и в результате мы снова получаем наивное тождество Уорда в виде

$$\int d^4x \left\{ m^2 \left( \frac{\delta}{\delta j(x)} \right)^2 + j(x) \left( 1 + x \cdot \frac{\partial}{\partial x} \right) \frac{\delta}{\delta j(x)} \right\} e^{G(\varphi)} - (j=0) = 0. \quad (13.49)$$

Член, содержащий  $(\delta/\delta j)^2$ , можно было бы заменить производной по источнику оператора  $\varphi^2$ . Естественно ожидать, что уравнение

(13.49) изменит свой вид вследствие перенормировки. В большинстве случаев, обсуждавшихся нами выше, таких, например, как калибровочная инвариантность или глобальные симметрии, нам удавалось ввести регуляризационную и перенормировочную схемы, сохраняющие симметрию и, следовательно, тождества Уорда. Однако наличие киральных аномалий следует рассматривать как предостережение о том, что в квантовом случае возможны модификации.

Прежде чем разбирать упомянутые модификации, упростим алгебраическую структуру уравнения (13.49), переписав его в виде

$$\int d^4x \left( j(x) \left( 1 + x \cdot \frac{\partial}{\partial x} \right) \frac{\delta G}{\delta j(x)} + m^2 \left\{ \left[ \frac{\delta G}{\delta j(x)} \right]^2 + \frac{\delta^2 G}{[\delta j(x)]^2} \right\} \right) - (j=0) = 0. \quad (13.50)$$

Преобразование Лежандра к неприводимым функциям в евклидовых переменных определяется формулами (6.97) (см. т. 1 настоящей книги):

$$G(j) - \Gamma(\varphi) = \int d^4x j(x) \varphi(x), \\ \varphi(x) = \frac{\delta G(j)}{\delta j(x)}, \quad j = - \frac{\delta \Gamma(\varphi)}{\delta \varphi(x)}, \quad (13.51)$$

причем

$$\int d^4z \frac{\delta j(z)}{\delta \varphi(x)} \frac{\delta \varphi(y)}{\delta j(z)} = \delta^4(x-y),$$

где предполагается, что ядра  $-\delta^2 G(j)/\delta j(x) \delta j(y)$  и  $\delta^2 \Gamma(\varphi)/\delta \varphi(x) \delta \varphi(y)$  являются обратными по отношению друг к другу. Чтобы упростить обозначения, введем следующие величины:

$$\Gamma(x, y; \varphi) = \frac{\delta^2 \Gamma(\varphi)}{\delta \varphi(x) \delta \varphi(y)}, \quad \Gamma^{-1}(x, y; \varphi) = - \frac{\delta^2 G(j)}{\delta j(x) \delta j(y)}. \quad (13.52)$$

При этом уравнение (13.50) принимает вид

$$0 = \int d^4x \left\{ \left[ \left( 1 + x \cdot \frac{\partial}{\partial x} \right) \varphi(x) \right] \frac{\delta \Gamma}{\delta \varphi(x)} + \right. \\ \left. + m^2 \left[ -\varphi^2(x) + \Gamma^{-1}(x, x; \varphi) - \Gamma^{-1}(x, x; 0) \right] \right\}. \quad (13.53)$$

Разложите правую часть уравнения (13.53) по степеням оператора  $\varphi$  и получите соответствующее тождество для  $n$ -точечной неприводимой функции.

В нулевом порядке по  $\hbar$  уравнение (13.53) сводится к тривиальным случаям, встречающимся при обсуждении классической теории (с точностью до поворота Вика)

$$\Gamma^{(0)} = - \int d^4x \left[ \frac{1}{2} (\partial \varphi)^2 + \frac{m^2}{2} \varphi^2 + g \frac{\varphi^4}{4!} \right], \quad (13.54)$$

$$\int d^4x \left[ \left( 1 + x \cdot \frac{\partial}{\partial x} \right) \varphi(x) \right] \frac{\delta \Gamma^{(0)}}{\delta \varphi(x)} = - \int d^4x \left[ \left( 1 + x \cdot \frac{\partial}{\partial x} \right) \varphi(x) \right] \times \\ \times \left( -\square \varphi + m^2 \varphi + g \frac{\varphi^3}{3!} \right) = \int d^4x m^2 \varphi^2(x). \quad (13.55)$$

Заметим, что уравнение (13.53) действительно удовлетворяется, поскольку разность  $[\Gamma^{-1}(x, \lambda; \varphi) - \Gamma^{-1}(x, x; 0)]$  имеет порядок  $\hbar$ , в чем легко убедиться, восстанавливая факторы  $\hbar$  ( $\Gamma \rightarrow \Gamma/\hbar$ ,  $\delta/\delta\varphi \rightarrow \hbar \delta/\delta\varphi$ ). В первом порядке эту величину можно записать следующим образом:

$$-m^2 \text{sp} \left( \frac{1}{-\square + m^2 + g\varphi^2/2} - \frac{1}{-\square + m^2} \right)$$

и можно формально представить  $\Gamma^{(1)}$  в виде

$$\Gamma^{(1)} = -\frac{1}{2} \text{sp} \left\{ \ln \left[ \left( -\square + m^2 + g \frac{\varphi^2}{2} \right) \frac{1}{-\square + m^2} \right] \right\}, \quad (13.56)$$

Поскольку

$$\int d^4x \left[ \left( 1 + x \cdot \frac{\partial}{\partial x} \right) \varphi(x) \right] \frac{\delta \Gamma}{\delta \varphi(x)} = \lambda \frac{\partial}{\partial \lambda} \Gamma(\lambda \varphi) \Big|_{\lambda=1},$$

выполняется соотношение

$$\begin{aligned} \int d^4x \left[ \left( 1 + x \cdot \frac{\partial}{\partial x} \right) \varphi(x) \right] \frac{\delta \Gamma^{(1)}}{\delta \varphi(x)} &= -m \frac{\partial}{\partial m} \Gamma^{(1)} = \\ &= m^2 \text{sp} \left( \frac{1}{-\square + m^2 + g\varphi^2/2} - \frac{1}{-\square + m^2} \right) \end{aligned} \quad (13.57)$$

и уравнение (13.53) было бы удовлетворено, если бы не возникало необходимости делать ультрафиолетовые вычитания.

**Функционал**

$$\Gamma_{\Delta}(\varphi) = \frac{1}{2} \int d^4x m^2 [ -\varphi^2(x) + \Gamma^{-1}(x, x; \varphi) - \Gamma^{-1}(x, x; 0) ] \quad (13.58)$$

можно рассматривать как производящий функционал для неприводимых функций Грина, содержащих вставку оператора

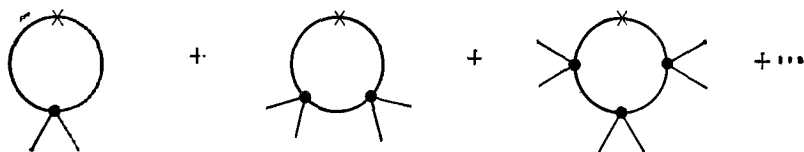


РИС. 13.4. Массовая вставка в однопетлевом приближении.

$-(m^2/2) \int d^4x \varphi^2(x)$ . Это очевидным образом следует из уравнения (13.49), в котором член  $m^2 \int d^4x [\delta/\delta j(x)]^2$  возникает из континуального интеграла по  $m^2 \int d^4x \varphi^2(x)$ . Соотношение (13.57) представляет собой проверку этого утверждения в первом порядке по  $\hbar$ . На рис. 13.4 показано соответствующее разложение в диаграммном представлении. Будем называть это массовой вставкой.

Подсчет степеней показывает, что такая вставка дает логарифмические расходимости в двухточечную функцию в первом порядке по  $\hbar$ . На языке операторов этому соответствует функция

Грина  $\int d^4x \langle 0 | T \varphi^2(x) \varphi(y) \varphi(z) | 0 \rangle$ . Уточним наши условия нормировки. До тех пор пока это не приводит к каким-либо осложнениям, удобно использовать промежуточную перенормировку при нулевом импульсе:

$$\Gamma_R^{(2)}(0) = -m^2, \quad \left. \frac{d\Gamma_R^{(2)}(p^2)}{dp^2} \right|_{p^2=0} = -1, \quad \Gamma_R^{(4)}(0) = -g; \quad (13.59)$$

здесь  $m$  пропорционально, но не равно физической массе.

Проводя регуляризацию с помощью параметра обрезания  $\Lambda$  и добавляя в лагранжиан необходимые контрчлены, мы, очевидно, модифицируем тождества Уорда, отвечающие масштабным преобразованиям. Соотношение между регуляризованными и перенормированными неприводимыми функциями Грина записывается в виде

$$\Gamma_R(\varphi, m, g) = \Gamma_b(Z^{1/2}\varphi, m_0, g_0), \quad (13.60)$$

где в правой части зависимость от параметра обрезания  $\Lambda$  входит в константу перенормировки волновой функции  $Z$ , в голую массу  $m_0$  и в голую константу связи  $g_0$ , но комбинация  $\Gamma_R$  имеет конечный предел, когда  $\Lambda \rightarrow \infty$ , а  $m$  и  $g$  фиксируются. Согласно обычному анализу размерностей величины  $Z$ ,  $g_0$  и  $m_0^2/m^2$  зависят от  $\Lambda$  только через комбинацию  $\Lambda^2/m^2$ .

Регуляризованный производящий функционал массовых вставок дается выражением

$$\Gamma_{\Delta, b}(\varphi, m_0, g_0) = (1/2) m_0 \left. \frac{\partial}{\partial m_0} \Gamma_b(\varphi, m_0, g_0) \right|_{g_0, \Lambda}. \quad (13.61)$$

На данном этапе можно заняться изучением масштабных аномалий. Вариация массы  $m_0$  при фиксированных  $g_0$  и  $\Lambda$  подразумевает, что вариации перенормированных параметров  $g$  и  $m$  удовлетворяют условию

$$0 = dg_0 = \frac{\partial g_0}{\partial m} dm + \frac{\partial g_0}{\partial g} dg. \quad (13.62)$$

Из (13.60) и (13.61) следует, что

$$2 \frac{dm_0}{m_0} \Gamma_{\Delta}(Z^{1/2}\varphi, m_0, g_0) = \left[ dm \frac{\partial}{\partial m} + dg \frac{\partial}{\partial g} - \frac{1}{Z^2} d(\ln Z) \times \right. \\ \left. \times \int d^4x \varphi(x) \frac{\delta}{\delta\varphi(x)} \right] \Gamma_R(\varphi, m, g), \quad (13.63)$$

в то время как обычный анализ размерностей подразумевает справедливость уравнения

$$\left\{ m \frac{\partial}{\partial m} + \int d^4x \left[ \left( 1 + x \cdot \frac{\partial}{\partial x} \right) \varphi(x) \right] \frac{\delta}{\delta\varphi(x)} \right\} \Gamma_R(\varphi, m, g) = 0. \quad (13.64)$$

Это позволяет нам переписать выражение (13.63) в виде

$$\begin{aligned} & \left\{ m \frac{\partial}{\partial m} g \left( \frac{\Lambda}{m}, g_0 \right) \frac{\partial}{\partial g} - \int d^4x \left[ 1 + \frac{1}{2} m \frac{\partial}{\partial m} \ln Z \left( \frac{\Lambda}{m}, g_0 \right) + \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + x \cdot \frac{\partial}{\partial x} \right] \varphi(x) \frac{\delta}{\delta \varphi(x)} \right\} \Gamma_R(\varphi, m, g) = \\ & = 2 \left[ \frac{m}{m_0} \frac{\partial m_0(\Lambda/m, g_0)}{\partial m} \right] \Gamma_{\Delta, b}(Z^{1/2} \varphi, m_0, g_0). \end{aligned} \quad (13.65)$$

Забегая вперед, предположим, что в левой части безразмерные коэффициенты имеют конечный предел при  $\Lambda \rightarrow \infty$  и фиксированных  $g$  и  $m$ . Опять-таки из соображений размерности в этом пределе они могут зависеть только от  $g$ . Введем следующие обозначения:

$$\beta(g) = m \frac{\partial}{\partial m} g \left( \frac{\Lambda}{m}, g_0 \right) = -\Lambda \frac{\partial}{\partial \Lambda} g \left( \frac{\Lambda}{m}, g_0 \right), \quad (13.66)$$

$$\gamma(g) = \frac{1}{2} m \frac{\partial}{\partial m} \ln Z \left( \frac{\Lambda}{m}, g_0 \right) = -\frac{1}{2} \Lambda \frac{\partial}{\partial \Lambda} \ln Z \left( \frac{\Lambda}{m}, g_0 \right). \quad (13.67)$$

Они указывают на то, что производные берутся при фиксированном значении  $g_0$ . Естественно, подразумевается переход  $\Lambda \rightarrow \infty$ , и это означает, что при вычислении по теории возмущений необходимо пренебрегать всеми вкладками, обращающимися в нуль при бесконечном увеличении параметра обрезания.

Из обсуждения, проведенного в гл. 8, следует, что массовые вставки перенормируются мультипликативно. Существует константа  $Z_{\varphi^2}$ , такая, что

$$Z_{\varphi^2} \Gamma_{\Delta, b}(Z^{1/2} \varphi, m_0, g_0) = \Gamma_{\Delta, R}(\varphi, m, g), \quad (13.68)$$

причем  $\Gamma_{\Delta, R}(\varphi, m, g)$  является конечной величиной. Предполагая, что предел  $\Lambda \rightarrow \infty$  существует, определим величину  $\delta(g)$  следующим образом:

$$1 + \delta(g) = Z_{\varphi^2}^{-1} \frac{m}{m_0} \frac{\partial m_0(\Lambda/m, g_0)}{\partial m} \quad (13.69)$$

при некотором хорошо определенном нормировочном условии на массовую вставку.

Опуская нижний индекс  $R$ , получаем уравнение Каллана — Симанзика в окончательном виде

$$\beta(g) \frac{\partial \Gamma}{\partial g} - \int d^4x \left\{ \left[ 1 + \gamma(g) + x \cdot \frac{\partial}{\partial x} \right] \varphi(x) \right\} \frac{\delta \Gamma}{\delta \varphi(x)} = 2 [1 + \delta(g)] \Gamma_{\Delta}. \quad (13.70)$$

Сравнивая это выражение с некорректной формулой (13.53), в которой не учтена перенормировка, мы видим, что оно отличается от последней членами, включающими коэффициенты  $\beta(g)$ ,  $\gamma(g)$

и  $\delta(g)$ . Прежде чем доказывать, что они являются конечными, объясним их физический смысл.

Сначала заметим, что они аналогичны киральным аномалиям, модифицирующим классическое тождество Уорда. Коэффициент  $\gamma(g)$  можно рассматривать как зависящую от константы связи добавку к размерности поля. Член с  $\beta(g) \partial/\partial g$  возникает из-за наличия в соотношении, связывающем  $g$  и  $g_0$ , размерного параметра обрезания  $\Lambda$ . Это означает, что инфинитезимальное масштабное преобразование должно сопровождаться небольшим изменением константы связи. Наконец, коэффициент  $\delta(g)$  можно устранить а posteriori конечной перенормировкой массовой вставки.

Чтобы доказать, что эти коэффициенты конечны, разложим (13.70) по степеням оператора  $\phi$  (в случае  $\phi^4$ -теории по четным степеням). В импульсном представлении получаем

$$\begin{aligned} - \sum_{k=1}^{n-1} p_k \cdot \frac{\partial}{\partial p_k} \Gamma^{(n)}(p) + \beta(g) \frac{\partial}{\partial g} \Gamma^{(n)}(p) + \{4 - n[1 + \gamma(g)]\} \Gamma^{(n)}(p) = \\ = 2[1 + \delta(g)] \Gamma_{\Delta}^{(n)}(0; p). \end{aligned} \quad (13.71)$$

Для определенности дополним условия нормировки (13.59) требованием

$$\Gamma_{\Delta}^{(2)}(0; 0) = -m^2, \quad (13.72)$$

которое выполняется в порядке  $\hbar^0$  и является достаточным, для того чтобы  $\Gamma_{\Delta}$  было конечным. Рассматривая уравнение (13.71) в окрестности точки  $p=0$  при  $n=2$ , находим два соотношения:

$$\begin{aligned} \gamma(g) + \delta(g) = 0, \\ \gamma(g) - [1 + \delta(g)] \left. \frac{\partial \Gamma_{\Delta}^{(2)}(0; p^2)}{\partial p^2} \right|_{p^2=0} = 0, \end{aligned} \quad (13.73)$$

из которых вытекает, что  $\gamma(g)$  и  $\delta(g)$  являются конечными. При этом из уравнения (13.71) следует, что  $\beta(g)$  есть также хорошо определенная величина. Подчеркнем, что эти коэффициенты, вообще говоря, зависят от нормировочных условий. В практических вычислениях иногда выгодно использовать условия (13.66), (13.67) и (13.69), которые связывают данные коэффициенты с расходимостями теории возмущений. Отсюда следует, что в низшем порядке ( $\hbar^1$ ) коэффициенты  $\beta$  и  $\gamma$  на самом деле ни от каких условий не зависят.

Вышеприведенные рассуждения в значительной степени основаны на использовании регуляризованной теории с устремленным к бесконечности параметром обрезания  $\Lambda$ . У скрупулезного читателя могло возникнуть подозрение, что этого окольного пути можно избежать и вывести уравнение (13.70) в рамках конечной перенормированной теории. Однако в таком подходе отсутствуют интуитивные предпосылки. С другой стороны, уравнения Каилана — Симанзика могут служить в качестве непосредственной основы для построения перенормированной теории.

Выше мы обратили внимание читателя на интерпретацию уравнений Каллана—Симанзика, связанную с модификацией тождеств Уорда, соответствующих нарушенной масштабной инвариантности. Это действительно полезный аспект уравнений Каллана—Симанзика. Однако их можно интерпретировать и как ренормгрупповые уравнения. Например, в безмассовой теории это достигается тем, что масштабному преобразованию подвергается точка вычитания  $\mu$ , а не импульсы, в результате чего уравнение (13.71) принимает вид

$$\left[ \mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \beta(g) \frac{\partial}{\partial g} - n\gamma(g) \right] \Gamma^{(n)}(p, g, \mu) = 0.$$

Ясно также, что этот вывод можно обобщить и на другие перенормируемые теории. В случае нескольких безразмерных констант связи функция  $\beta(g)$  становится векторным полем. В калибровочных теориях, как абелевых, так и неабелевых, функции Грина зависят, вообще говоря, от калибровочного параметра  $\lambda$ , и в левой части уравнения (13.71) появляется новый член  $\zeta(g, \lambda) \partial/\partial \lambda$ , в котором

$$\zeta(g, \lambda) = m \frac{\partial}{\partial m} \lambda \left( \frac{\Lambda}{m}, g_0, \lambda_0 \right) \Big|_{\Lambda, g_0, \lambda_0}. \quad (13.74)$$

Поскольку  $\lambda_0$  связано с константой перенормировки волновой функции  $Z_3$  калибровочного поля соотношением

$$\lambda = Z_3 \lambda_0,$$

имеем

$$\zeta(g, \lambda) = 2\lambda\gamma(g, \lambda),$$

где  $\gamma = (1/2) m (\partial/\partial m) \ln Z_3$  — аномальная размерность. В неабелевых теориях последняя величина так же как и аномальные размерности других полей материи, зависит от  $\lambda$ . Как отмечалось в гл. 12, такая зависимость не возникает у  $\beta(g)$ , по крайней мере при определенном выборе нормировочных условий.

Уравнение (13.71) можно сравнить с аналогичным уравнением в электродинамике (13.28). Отметим, что в электродинамике существует соотношение между  $\gamma$  и аномальной размерностью электромагнитного поля  $\gamma$ . Это есть следствие тождества Уорда.  $e^2 = e_0^2 Z_3$ .

Проведенный выше анализ можно также обобщить на функции, включающие составные операторы. Каждый набор операторов, имеющих одинаковые размерности, мультипликативно перенормируется с помощью матрицы перенормировок  $Z$  [см. (8.69)]. Сильносвязные функции (возьмем для простоты безмассовую теорию) удовлетворяют уравнению

$$\left[ \mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \beta(g) \frac{\partial}{\partial g} - n\gamma(g) \right] \Gamma_{0_i}^{(n)} + \gamma_{ij}(g) \Gamma_{0_j}^{(n)} = 0,$$

причем

$$\gamma_{ij}(g) = -\mu \frac{\partial}{\partial \mu} Z_{ik} \Big|_{g_0} (Z^{-1})_{kj}. \quad (13.75)$$

Смысл различного выбора знаков в выражениях (13.67) и (13.75) мы разъясним ниже.

### 13.2.3. Коэффициенты Каллана—Симанзика

#### в низших порядках

В случае  $\varphi^4$ -теории можно воспользоваться результатами вычислений, выполненных в гл. 9 с точностью до порядка  $\hbar^2$ . Возможно, более instructive будет вычисление  $\beta$  и  $\gamma$ , исходя из контрчленов лагранжиана. Для определенности предположим, что





В соответствии с (13.59) получаем

$$\Gamma_b^{(2)}(0) = -m^2 Z^{-1}, \quad \frac{d\Gamma_b^{(2)}}{dp^2}(0) = -Z^{-1}, \quad \Gamma_b^{(4)}(0) = -Z^{-2}g.$$

Таким образом, соотношения (13.76) определяют  $Z$ ,  $g$  и  $m$  как функции от  $m_0$ ,  $g_0$  и  $\Lambda$ . Подставим  $m^2$  вместо  $m_0^2$ , удерживая члены только порядка  $g^2$  и используя обозначения

$$\alpha = g/(4\pi)^2, \quad \alpha_0 = g_0/(4\pi)^2. \quad (13.77)$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} Z^{-1} &= 1 + \frac{\alpha_0^2}{12} \left( \ln \frac{\Lambda^2}{m^2} + \text{const} \right) + \dots, \\ \alpha &= \alpha_0 Z^2 \left\{ 1 - \frac{3}{2} \alpha_0 \left( \ln \frac{\Lambda^2}{m^2} - \gamma - 1 - \ln 2 \right) + \right. \\ &\left. + \alpha_0^2 \left[ \frac{9}{4} \left( \ln \frac{\Lambda^2}{m^2} \right)^2 - \ln \frac{\Lambda^2}{m^2} \left( \frac{9}{2} \gamma + \frac{3}{2} + \frac{9}{2} \ln 2 \right) + \text{const} \right] + \dots \right\}. \end{aligned} \quad (13.78)$$

К счастью, члены, пропорциональные  $\Lambda^2$ , исчезли; остались лишь логарифмы. Пользуясь определением (13.66), находим

$$\begin{aligned} & -\frac{\beta(g)}{2(4\pi)^2} = \frac{\partial \alpha}{\partial \ln \Lambda^2} \Big|_{m, \alpha_0} = \\ & = 2\alpha \frac{\partial \ln Z}{\partial \ln \Lambda^2} + Z^2 \alpha_0 \left[ -\frac{3\alpha_0}{2} + \alpha_0^2 \left( \frac{9}{2} \ln \frac{\Lambda^2}{m^2} - \frac{9}{2} \gamma - \frac{3}{2} - \frac{9}{2} \ln 2 \right) + \dots \right]. \end{aligned}$$

В рассматриваемом порядке множитель  $Z^2$  можно заменить единицей. Выражая  $\alpha_0$  через  $\alpha$ , получаем

$$\beta(g) = 3 \frac{g^2}{(4\pi)^2} - \frac{17}{3} \frac{g^3}{(4\pi)^4} + \dots \quad (13.79a)$$

Аналогичным образом

$$\gamma(g) = \frac{\partial}{\partial \ln \Lambda^2} \ln Z^{-1} \Big|_{m, g_0} = \frac{g^2}{12(4\pi)^4} + \dots, \quad (13.79b)$$

$$\delta(g) = -\gamma(g) = -\frac{1}{12} \frac{g^2}{(4\pi)^4} + \dots \quad (13.79b)$$

Как и ожидалось, все коэффициенты являются конечными. Кроме того, характерные для использованной схемы регуляризации постоянная Эйлера  $\gamma$  и  $\ln 2$ , которые появлялись на промежуточных стадиях вычислений, в окончательных результатах исчезли.

#### Упражнения

1. Проверьте, что  $\beta(g)$  не зависит от рецепта перенормировки вплоть до порядка  $\hbar^2$ .
2. Изучите модификации, возникающие при наличии группы внутренней симметрии  $O(n)$ .

3. Выведите из (13.70) уравнения Каллана—Симанзика, которым должны удовлетворять функции  $V_{эфф}(\varphi)$  и  $Z_{эфф}(\varphi)$ , рассмагиваемые в гл. 9 [см. выражения (9.116)], и убедитесь, что в рамках теории возмущений им подчиняются выражения, полученные в (9.132).

Можно также использовать результаты, полученные в гл. 12 для калибровочных полей, и вычислить соответствующую функцию  $\beta$ . Как мы видели, связь между перенормированной и затраточной константами связи в низшем порядке дается выражением

$$g = g_0 \left[ 1 + \frac{g_0^2}{(4\pi)^2} \left( \frac{11}{3} C - \frac{4}{3} T_f \right) \ln \frac{\Lambda}{\mu} + O(g_0^4) \right]. \quad (13.80)$$

Энергетический масштаб  $\mu$  был произвольным параметром, который позволял определить  $g$  без привлечения механизма Хиггса, приводящего к истинной физической массе. Из (13.80) получаем  $\beta(g)$  в порядке  $g^3$ . Добавим сюда также двухпетлевой вклад, вычисленный Касуэллоу, Джонсом, Белавиным и Мигдалом:

$$\begin{aligned} \beta(g) = & -\frac{g^3}{(4\pi)^2} \left( \frac{11}{3} C - \frac{4}{3} T_f \right) + \\ & + \frac{g^5}{(4\pi)^4} \left( -\frac{34}{3} C^2 + \frac{20}{3} C T_f + 4 C_f T_f \right) + O(g^7). \end{aligned} \quad (13.81)$$

Интересная особенность этого результата состоит в том, что в противоположность аналогичным выражениям квантовой электродинамики [выражение (13.29)] или  $\varphi^4$ -теории [выражение (13.79)] функция  $\beta(g)$  при  $g \rightarrow 0$  имеет знак, противоположный  $g$  (при условии, что  $T_f < (11/4)C$ ). Позже мы убедимся в важности этого замечания. Заметим также, что вычисление аномальных размерностей заведомо интересно лишь для калибровочно-инвариантных операторов. К этому вопросу мы еще вернемся.

#### Упражнения

1. Покажите, что вычисление, выполненное в квантовой электродинамике, согласуется с (13.81), если положить  $C=0$ ,  $T_f=C_f=1$  и обозначить  $\beta(\alpha) \partial/\partial\alpha \equiv \beta'(e) \partial/\partial e$ .
2. Рассмотрите модель калибровочных полей, взаимодействующих со скалярными бозонами. Получите их вклад в низшем порядке и удостоверьтесь, что он составляет 1/8 фермионного вклада при условии, что поля соответствуют вещественному представлению.

## 13.3. ВОССТАНОВЛЕННАЯ МАСШТАБНАЯ ИНВАРИАНТНОСТЬ

### 13.3.1. Эволюция константы связи

Точное уравнение Каллана—Симанзика находит себе наиболее интересные применения, когда правой частью, содержащей массовую вставку, можно пренебречь. Если бы это было не так, нам

пришлось бы иметь дело с цепочкой функционалов  $\Gamma, \Gamma_\Delta, \Gamma_{\Delta\Delta}, \dots$ , отражающих всю сложность структуры амплитуд во всей кинематической области их определения. Нам же интересуют только глубоко евклидова область, в которой любые импульсы становятся большими. Разумеется, это имеет смысл лишь тогда, когда задан некоторый массовый масштаб. Здесь нас выручает теорема Вайнберга, рассмотренная в гл. 8. Ее применение к строго перенормируемой теории показывает, что в рамках теории возмущений в соотношении (13.71) величина  $\Gamma_{ac}^{(n)}$  подавляется некоторой степенью параметра  $p^2$  (с точностью до логарифмов) по сравнению с левой частью этого соотношения. Поэтому безмассовый предел теории существует при условии, что вычитания производятся при ненулевом импульсе. Это определяет выбор энергетического масштаба. Здесь и далее  $\Gamma_{ac}^{(n)}$  будет обозначать соответствующие безмассовые функции Грина. Они удовлетворяют однородному уравнению

$$\left\{ -\sum_{k=1}^{n-1} p_k \cdot \frac{\partial}{\partial p_k} + \beta(g) \frac{\partial}{\partial g} + 4 - n [1 + \gamma(g)] \right\} \Gamma_{ac}^{(n)}(p_i; g) = 0. \quad (13.82)$$

Аналогичные уравнения можно получить и для  $\Gamma_\Delta^{(n)}$ ; справедливость наших предположений будет доказана, если решения этих уравнений пренебрежимо малы по сравнению с  $\Gamma^{(n)}$ .

Решение уравнений (13.82) по своей структуре напоминает соотношение между затравочными и перенормированными параметрами. Это, разумеется, связано со способом, с помощью которого были получены эти уравнения. Отличие состоит лишь в том, что расходимости здесь уже исключены. Изменение масштаба импульсов будет сопровождаться конечной перенормировкой. Чтобы описать соответствующие эффекты, введем функцию  $g(\lambda)$ , представляющую собой решение дифференциального уравнения

$$\lambda \frac{d}{d\lambda} g(\lambda) = \beta[g(\lambda)], \quad g(1) = g. \quad (13.83)$$

В случае нескольких констант связи обобщением (13.83) будет система дифференциальных уравнений первого порядка. Введем также функцию

$$z(\lambda) = \exp \left\{ \int_1^\lambda \frac{d\lambda'}{\lambda'} \gamma[g(\lambda')] \right\} = \exp \left[ \int_g^{g(\lambda)} \frac{dg'}{\beta(g')} \gamma(g') \right]; \quad z(1) = 1. \quad (13.84)$$

Уравнение (13.82) принимает тогда вид

$$\lambda \frac{d}{d\lambda} \{ \lambda^{4-n} z(\lambda)^{-n} \Gamma_{ac}^{(n)}[\lambda^{-1} p_i; g(\lambda)] \} = 0. \quad (13.85)$$

Отсюда следует, что

$$\Gamma_{ac}^{(m)}(\lambda p_i; g) = \lambda^{4-n} z(\lambda)^{-n} \Gamma_{ac}^{(m)}[p_i; g(\lambda)]. \quad (13.86)$$

Помимо наивного масштабного фактора  $\lambda^{4-n}$  появляется аномальная размерность  $[z(\lambda)^{-n}]$ , а константа связи меняется на  $g(\lambda)$ .

Остается найти, что происходит в пределе  $\lambda \rightarrow \infty$ . В частности, нам следует изучить асимптотическое поведение функции  $g(\lambda)$ . Из уравнения (13.83) видно, что главным является вопрос о расположении нулей функции  $\beta(g)$ . Возможен исключительный случай, когда исходная константа связи  $g(1)$  в точности совпадает с положением такого нуля; назовем его  $g_\infty$ . В этом случае  $g(\lambda) = g_\infty$  независимо от значения  $\lambda$ .

Вообще говоря, значение  $g(\lambda)$  при  $\lambda \rightarrow \infty$  будет изменяться; оно растет, если величина  $\beta$  положительна, и уменьшается, если  $\beta$  отрицательна. Такая зависимость нарушается, если функция  $\beta$  обращается в нуль. Возможна ситуация, когда  $g \rightarrow \infty$  с ростом  $\lambda$ . Это может случиться, если  $\beta$  имеет тот же знак, что и  $g$ , при любых  $g$  и обращается в нуль только при  $g=0$ . Эту ситуацию сложно анализировать, поскольку при  $\lambda \rightarrow \infty$  приходится иметь дело с режимом сильной связи.

Чтобы функция  $g(\lambda)$  стремилась к конечному пределу  $g_\infty$ , когда  $\lambda \rightarrow \infty$ , необходимо, чтобы  $\beta(g_\infty)$  обращалась в нуль и  $(g - g_\infty)\beta(g)$  было отрицательным в окрестности точки  $g_\infty$ . Такой нуль называется ультрафиолетовой фиксированной точкой (рис.

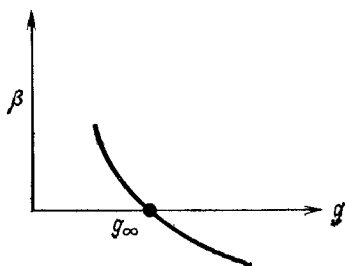


РИС. 13.5. Ультрафиолетовая фиксированная точка.

13.5). Может случиться так, что фиксированная точка является ультрафиолетовой притягивающей с одной стороны и ультрафиолетовой отталкивающей—с другой. Это имеет место в случае, когда два простых нуля совпадают. Для простого притягивающего нуля  $\ln \lambda$  будет расходящимся:

$$\ln \lambda \sim \int_{g_\infty}^{g(\lambda)} \frac{dg}{g_\infty - g},$$

а  $g(\lambda)$  будет стремиться к  $g_\infty$  как обратная степень величины  $\lambda$ . Аналогичный анализ можно выполнить в случае кратного нуля.

С другой стороны, от поведения  $\gamma(g)$  в окрестности  $g_\infty$  мы не ожидаем ничего необычного. Если  $\gamma_\infty = \gamma(g_\infty)$ , то с точностью до независимого от  $\lambda$  множителя

$$z(\lambda) \underset{\lambda \rightarrow \infty}{\sim} \lambda^{\gamma_\infty}.$$

В общем случае притягивающие и отталкивающие фиксированные точки появляются последовательно вдоль оси  $g$ . В зависимости от исходного значения  $g(1)$  эффективная константа связи  $g(\lambda)$  при  $\lambda \rightarrow \infty$  будет стремиться к ближайшей притягивающей ультрафиолетовой фиксированной точке.

Ультрафиолетовые неустойчивые точки, для которых  $(g - g_\infty) \beta(g) > 0$  являются инфракрасными точками притяжения и соответствуют предельным значениям  $g(\lambda)$  при  $\lambda \rightarrow 0$ . Они представляют интерес, если в безмассовой теории анализируется предел больших расстояний или малых по сравнению с параметром ультрафиолетового обрезания импульсов. Это как раз предмет теории критических явлений, в которой  $m=0$  соответствует критической температуре, а предметом исследования являются дальнедействующие корреляции.

Возвращаясь к нашей исходной задаче, мы заключаем, что наличие близкой ультрафиолетовой фиксированной точки приводит к тому, что при больших  $\lambda$  асимптотическое поведение амплитуд записывается в виде

$$\Gamma^{(n)}(\lambda p_i; g) \underset{\lambda \rightarrow \infty}{\rightarrow} \Gamma_{ac}^{(n)}(\lambda p_i; g) \sim \lambda^{4-n(1+\gamma_\infty)} \Gamma_{ac}^{(n)}(p_i; g_\infty). \quad (13.87)$$

Мы снова пришли к масштабной инвариантности, соответствующей в данном случае некоторому конкретному значению константы связи  $g_\infty$ . При этом поле имеет эффективную размерность

$$d_{эфф}(\varphi) = 1 + \gamma_\infty. \quad (13.88)$$

Функции Грина, содержащие массовую вставку  $\Delta$ , подчиняются уравнению

$$\left( - \sum p_k \frac{\partial}{\partial p_k} + \beta(g) \frac{\partial}{\partial g} + \{2 - n[1 + \gamma(g)] + \gamma_\Delta(g)\} \right) \Gamma_{\Delta ac}^{(n)}(0, p_i, g) = 0,$$

где  $\gamma_\Delta(g) = \partial \ln Z_{\varphi^2} / \partial \ln \Lambda$  [см уравнение (13.75)]. До тех пор пока  $\gamma_\Delta(g_\infty) < 2$ , основывающееся на теории возмущений отождествление асимптотического режима и безмассового предела законно. В противном случае массовая вставка эффективно соответствует жесткому оператору и теорию следует переформулировать. Дополнительные замечания по этому поводу см. в разд. 13.3.3.

Это блестящее рассуждение, которым мы обязаны главным образом Вилсону, показывает, каким образом ренормализационная группа позволила обнаружить существование нетривиального масштабного поведения. Вопрос теперь заключается в том, чтобы выяснить, имеет ли  $\beta(g)$  нули указанного вида. Однако, поскольку точка  $g=0$  всегда является таким нулем, вследствие того что

$\beta(g)$  равна нулю в отсутствие взаимодействия, особый интерес представляет изучение природы этой фиксированной точки в рамках теории возмущений.

#### Управления

- 1 Обсудите, как отразится наличие кратного нуля на асимптотической формулировке масштабной инвариантности, и найдите поправки к асимптотическому поведению
- 2 Покажите, что из положительности спектральной плотности в представлении Челлена—Лемана для двухточечной функции следует, что  $\gamma \geq 0$  и что  $\gamma_\infty = 0$  соответствуют свободной теории, как было отмечено Паризи, а также Калланом и Гроссом

### 13.3.2. Асимптотическая свобода

Мы привели вычисления  $\beta(g)$  при малых  $g$  в случае самодействующего скалярного поля и абелевых или неабелевых калибровочных полей. На рис. 13.6 приведены соответствующие резуль-

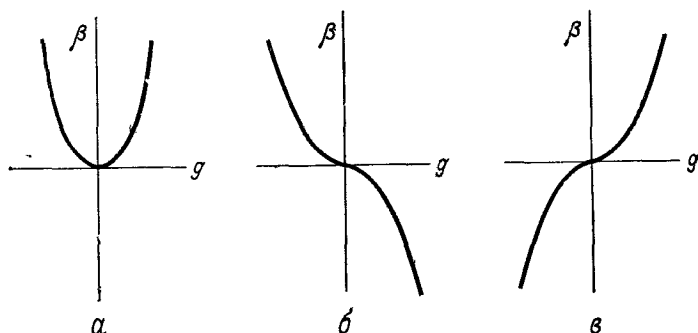


РИС. 13.6. Функция  $\beta(g)$  вблизи начала координат. а — самодействующее скалярное поле, б — неабелево калибровочное поле при  $11C > 4T_f$ ; в — неабелево калибровочное поле при  $11C < 4T_f$ , электродинамика  $C=0$ ,  $T_f=1$ , или взаимодействие Юкавы

таты. В квантовой электродинамике рассматривалась величина  $4\pi\beta(\alpha)/2e$  [причем  $\beta(\alpha)$  определялась выражением (13.29)] как функция от  $e$ .

Если  $g=0$  представляет собой ультрафиолетовую фиксированную точку, то мы говорим, что соответствующая теория асимптотически свободна. Среди приведенных здесь примеров только неабелевы калибровочные поля с малым числом фермионов обладают этим свойством. На первый взгляд такой является  $\phi^4$ -теория при  $g < 0$ . Но скорее всего при  $g < 0$  она нестабильна. Поскольку асимптотическая свобода означала бы, что по крайней мере в области больших импульсов радиационные поправки можно вычислять по теории возмущений, можно было бы найти неогра-

ниченный эффективный потенциал. Вслед за Коулменом мы приходим к заключению, что для  $g < 0$  теория нестабильна.

В исчерпывающем исследовании Коулмен и Гросс установили следующий результат. Никакая перенормируемая теория поля не является асимптотически свободной в четырех измерениях, если она не содержит неабелевы калибровочные поля.

Наметим схему вывода этого важного результата.

*а) Скалярная теория*

Взаимодействие  $\Phi^4$  обобщается на произвольный набор взаимодействующих скалярных полей, заданных в виде

$$\mathcal{L}_{\text{вз}} = -g_{ijkl} \Phi_i \Phi_j \Phi_k \Phi_l,$$

где тензор  $g_{ijkl}$  полностью симметричен. В первом порядке по  $\hbar$  имеем

$$\beta_{ijkl} = \lambda \frac{d}{d\lambda} g_{ijkl}(\lambda) = A \sum_{m,n} [g_{ilmn}(\lambda) g_{jkmn}(\lambda) + \text{Перестановки}],$$

где  $A > 0$ . Предполагая для стабильности форму 4-го порядка  $g_{ijkl} \Phi_i \Phi_j \Phi_k \Phi_l$  положительной, найдем, что  $\beta_{iiii} > 0$ .

*б) Взаимодействие Юкавы*

Лагранжиан взаимодействия имеет вид

$$\mathcal{L}_I = -g_{ijkl} \Phi_i \Phi_j \Phi_k \Phi_l + \Phi_k \bar{\Psi}^a (A_a^k + i\gamma_5 B_{ab}^k) \Psi^b.$$

Условие положительности  $\beta_{iiii}$  может нарушаться, но все константы связи  $g_{ijkl}$  не могут одновременно обращаться в нуль в асимптотической области. Действительно, если

$$g^k = A^k + i\gamma_5 B^k,$$

то

$$\lambda \frac{d}{d\lambda} \text{Sp} [g^k(\lambda) g^{k+}(\lambda)] \geq 0.$$

Поскольку абелевы калибровочные поля также не являются асимптотически свободными, остается единственная возможность — ввести неабелевы калибровочные поля.

Если поля Янга—Миллса связаны с фермионами, то для простой калибровочной группы необходимо, чтобы выполнялось условие  $11C > 4T_f$ . Если присутствуют также бозонные поля, ситуация осложняется. Прежде всего этих полей не должно быть слишком много, с тем чтобы сохранялось условие  $\beta(g) < 0$ , где  $g$  — калибровочная константа связи. Кроме того, эти поля имеют свои собственные константы, характеризующие их самодействие. Предположим, например, что существует единственное скалярное поле, принадлежащее присоединенному представлению. Соответствующая константа самодействия  $g_\Phi$  в низшем порядке будет удовлетворять уравнению вида

$$\lambda \frac{d}{d\lambda} g_\Phi(\lambda) = A g_\Phi^3(\lambda) + B' g_\Phi(\lambda) g^2(\lambda) + C g^4(\lambda),$$

где  $A > 0$ . При этом величина  $\alpha = g_\Phi/g^2$  будет определяться уравнением

$$\lambda \frac{d}{d\lambda} \alpha(\lambda) = A\alpha^3(\lambda) + B\alpha(\lambda) + C.$$



Кроме того, мы должны предположить, что  $g_{\Phi}$  имеет по крайней мере порядок  $g^2$ ; в противном случае положительный член  $A\alpha^2$  будет доминирующим и приведет к уничтожению асимптотической свободы. Правая часть последнего уравнения имеет два корня  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  порядка единицы при условии, что  $B^2 > 4AC$ . При этом необходимо тщательно соблюдать баланс между числом полей, поскольку добавление фермионов приводит к росту величины  $B$ . Если такой баланс выполняется, то при  $\lambda \rightarrow \infty$  величина  $g_{\Phi}(\lambda)$  будет вести себя как  $\alpha g^2(\lambda)$  (где  $\alpha$  — один из корней данного уравнения) и, следовательно, удовлетворять требуемому свойству. Общая ситуация при наличии нескольких бозе-полей оказывается еще более запутанной и требует в каждом конкретном случае детального рассмотрения.

Введение таких бозе-полей может быть вызвано необходимостью генерировать массовые члены с помощью механизма спонтанного нарушения симметрии. На практике, однако, трудно объединить асимптотическую свободу и нарушение симметрии. Путем введения взаимодействия Юкавы  $g_{\psi\psi\Phi}$  мы можем в лучшем случае создать зону нестабильности на линии притяжения в плоскости  $(g, g_{\psi\psi\Phi})$ . Обсуждение этого вопроса можно найти в лекциях Гросса, цитируемых в примечаниях к данной главе.

Выводы, сделанные исходя из вычислений нескольких первых членов вблизи  $g=0$ , основываются, конечно, на предположении, что ряд теории возмущений является асимптотическим. При обсуждении высших порядков (гл. 9) мы убедились, что это лучшее, на что мы можем надеяться. Полные ряды, вероятно, расходятся и имеют существенную сингулярность в точке  $g=0$ . Очевидно, что вычисление  $\beta(g)$  в точках  $g$ , удаленных от  $g=0$ , остается задачей будущего.

В асимптотически свободной теории поведение амплитуд при больших импульсах может быть вычислено, если точка  $g=0$  является ближайшей фиксированной точкой. Это одна из причин, почему данной точке уделяется такое большое внимание со стороны теоретиков. Однако название «асимптотическая свобода» несколько вводит в заблуждение, поскольку даже в этом случае имеется логарифмическое отклонение от законов масштабного преобразования, свойственных свободной теории. Если

$$\beta(g) = -bg^3 + O(g^5), \quad b > 0, \quad (13.89)$$

то для  $g(\lambda)$  получаем

$$g^2(\lambda) = \frac{1}{2b \ln \lambda} + O\left[\frac{\ln(\ln \lambda)}{(\ln \lambda)^2}\right]. \quad (13.90)$$

Для большинства интересных операторов функция  $\gamma(g)$  будет иметь порядок  $g^2$ :

$$\gamma(g) = cg^2 + O(g^4). \quad (13.91)$$

Следовательно, масштабный фактор будет содержать логарифмы

$$z(\lambda) \sim \exp\left[-\int_g^{g(\lambda)} \frac{c}{b} \frac{dg'}{g'}\right] \sim (2bg^2 \ln \lambda)^{c/2b}. \quad (13.92)$$

При этом поведение функции Грина, включающей оператор  $O_i$ , в случае  $\lambda \rightarrow \infty$  будет отличаться от канонического множителем  $(2bg^2 \ln \lambda)^{c_i/2b}$ .

Существование асимптотически свободных теорий имеет далеко идущие последствия при построении моделей сильных взаимодействий. Эти теории позволяют нам согласовать два, казалось бы, противоречивых свойства. Взаимодействия при низких и средних энергиях оказываются на самом деле сильными и обладают сложной структурой за счет многочисленных резонансов. Приближенная  $SU(3)$ - или  $SU(4)$ -симметрия дает качественное описание адронов как составных связанных состояний кварков. Однако все попытки выделить эти составляющие в свободном виде до сих пор терпели неудачу. При более высоких энергиях кварки взаимодействуют гораздо слабее вплоть до точки, в которой они, по видимому, действуют как свободные частицы. Соответствующая кинематическая область, достижимая в реальных экспериментальных условиях, представляет собой пространство светоподобных интервалов. В разд. 13.4 и 13.5 мы увидим, что обсуждавшееся до сих пор разложение на малых расстояниях можно обобщить и на данную область. При этом можно объяснить наблюдаемое парадоксальное поведение константы связи, если предположить, что взаимодействия кварков описываются асимптотически свободной теорией поля. Катастрофические инфракрасные сингулярности были бы тогда ответственны за конфайнмент кварков. Эти привлекательные рассуждения с неизбежностью требуют, чтобы такая модель включала неабелевы калибровочные поля, связанные с ненаблюдавшейся (а может быть, и ненаблюдаемой) цветной степенью свободы.

Обобщение на случай нескольких констант связи и соответствующую многомерную эволюцию открывает громадное богатство различных явлений, таких, как стабильные фиксированные точки, предельные циклы, эргодическое поведение и т. д. Однако трудности получения достоверной информации об эволюции констант связи вдали от точки, в которой они все равны нулю, несколько ограничивают ценность таких исследований.

### 13.3.3. Массовые поправки

Вернемся к вопросу о самосогласованности безмассовой асимптотической теории. Заметим, что при определении амплитуд теории возмущений в области больших импульсов мы пренебрегли неглавными вкладами. Наличие этих вкладов отражает то, что в лагранжиане имеются члены, размерность которых меньше четырех, и соответствующие им константы связи положительной размерности в единицах энергии. Как правило, эти члены являются массовыми. Мы уже упоминали, что можно определить аномальные размерности составных операторов  $O_i$ , таких, как  $\psi^2$  или

$\bar{\psi}$ , благодаря их мультипликативной перенормируемости. Предположим для простоты, что матрица перенормировок диагональна и имеет вид  $Z_i(\Lambda/m, g_0)$ . Определим функцию

$$\gamma_i(g) = \Lambda \frac{\partial}{\partial \Lambda} \ln Z_i(\Lambda/m, g_0). \quad (13.93)$$

Если  $g_\infty$  — ультрафиолетовая фиксированная точка, то эффективная размерность оператора  $O_i$  будет отличаться от канонической размерности  $d_i$  в соответствии с соотношением

$$d_i^{\text{эфф}} = d_i + \gamma_i(g_\infty), \quad (13.94)$$

где подразумевается только случай  $d_i < 4$ . Как правило, массовыми поправками можно пренебрегать до тех пор, пока удовлетворяется критерий Вилсона:

$$d_i^{\text{эфф}} < 4. \quad (13.95)$$

Это условие будет автоматически выполняться в асимптотически свободной теории, в которой  $\gamma_i(g_\infty) \rightarrow 0$ . Напомним, однако, что логарифмические поправки все же портят каноническое поведение.

Весьма близкий по духу к вышеприведенному метод анализа данного вопроса был предложен Вайнбергом. В его методе вводятся контрчлены, не зависящие от перенормированной массы, с точностью до тривиальных размерных множителей. Иными словами, последние не фиксируются явно. Такого результата можно добиться, используя размерную регуляризацию и перенормировку. При таком подходе в уравнении ренормгруппы уже нельзя пренебрегать членом, связанным с массовой вставкой. В  $\phi^4$ -теории решение соответствующего уравнения

$$\Gamma_n(\lambda \rho_i; g, m^2) = \lambda^{4-n} [z(\lambda)]^{-n} \Gamma_n[\rho_i; g(\lambda), m^2(\lambda)], \quad (13.96)$$

где

$$m^2(\lambda) = \frac{m^2}{\lambda^2} \exp \left[ \int_{\lambda}^{\Lambda} \frac{dg'}{\beta(g')} \gamma_\Delta(g') \right].$$

Покажите, что в низшем порядке вклад однопетлевой диаграммы на рис. 13.7 дает  $\gamma_\Delta = g/(4\pi)^2$ .

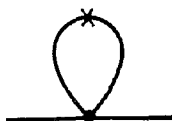


Рис. 13.7. Массовая вставка низшего порядка в теории  $\phi^4$ .

Когда  $\lambda \rightarrow \infty$ , условие  $m^2(\lambda) \rightarrow 0$  соответствует условию  $\gamma_\Delta(g_\infty) < 2$ , и, следовательно, оно эквивалентно критерию Вилсона (13.95). Только в этом случае имеет смысл рассматривать

безмассовую масштабно-инвариантную теорию, даже если данное условие не выполняется в теории возмущений. Из приведенного выше анализа нельзя было сделать вывода о том, что мягкую массовую вставку можно изучать в рамках теории возмущений. Действительно, в безмассовом пределе производные достаточно высокого порядка от функций Грина по массе являются сингулярными. Это является следствием того, что с некоторого момента увеличение числа вставок не улучшает ультрафиолетового поведения (см. обсуждение теоремы Вайнберга в гл. 8). Интуитивно это можно понять следующим образом. Вторая (третья) производная по  $m$  бозонного (фермионного) пропагатора в общем случае приводит к появлению при  $m \rightarrow 0$  логарифмической инфракрасной сингулярности в соответствующей фейнмановской диаграмме. Следовательно, можно ожидать, что при малых массах имеются сингулярности типа

$$m_B^2 (\ln m_B)^a [m_F^2 (\ln m_F)^a].$$

### 13.4. ГЛУБОКОНЕУПРУГОЕ ЛЕПТОН-АДРОННОЕ РАССЕЯНИЕ И ЭЛЕКТРОН-ПОЗИТРОННАЯ АННИГИЛЯЦИЯ В АДРОНЫ

Рассмотрим здесь более детально материал, уже рассматривавшийся в гл. 11. В данном разделе мы зададимся целью обсудить приложение теоретико-полевой модели к описанию лептон-адронных процессов с большой передачей импульса.

#### 13.4.1. Электророждение

Начнем с обсуждения электромагнитного рассеяния заряженных лептонов (электрона или мюона) на нуклоне (см. рис. 11.8 в гл. 11). Начальный и конечный импульсы лептона обозначим соответственно  $l$  и  $l'$  и при высоких энергиях будем пренебрегать массой лептона. Начальный нуклон с импульсом  $p$  (массой  $m$ ) превращается в некоторое конечное состояние  $X$ , которое не наблюдается; такие процессы называются «инклюзивными». Пренебрегая радиационными поправками, будем рассматривать электромагнитное взаимодействие в низшем порядке. В этом процессе фотон переносит пространственно-подобный импульс  $g = l - l'$  от лептона к адронной вершине.

На практике измеряемыми величинами являются начальная и конечная энергии лептона  $E$  и  $E'$ , а также угол рассеяния  $\theta$  в лабораторной системе. Мы не будем обсуждать здесь поляризационные эффекты. Кинематические инварианты записываются в

виде

$$\begin{aligned} -q^2 &= 4EE' \sin^2(\theta/2), \\ v &= p \cdot q = m(E - E'), \\ M^2 &= (p + q)^2 = m^2 + 2m(E - E') - 4EE' \sin^2(\theta/2). \end{aligned} \quad (13.97)$$

Поскольку нуклон является легчайшим состоянием с барионным числом, равным единице, из условия стабильности  $M^2 \geq m^2$  следует, что переменная Бёркена

$$x = \omega^{-1} = -q^2/2v \quad (13.98)$$

изменяется в пределах

$$0 < x \leq 1. \quad (13.99)$$

Верхний предел соответствует упругому рассеянию. В литературе встречаются оба обозначения: как  $x$ , так и  $\omega$ .

Пусть  $J_\mu$  — адронная компонента электромагнитного тока. Амплитуда рассеяния записывается в виде

$$S_{fi} = i(2\pi)^4 \delta^4(p_X + l' - p - l) \bar{u}(l') \gamma^\mu u(l) \frac{e^2}{q^2} \langle p_X | J_\mu(0) | p \rangle. \quad (13.100)$$

Таким образом, инклюзивное сечение рассеяния неполяризованных лептонов и нуклонов дается выражением

$$\begin{aligned} d\sigma &= \frac{1}{EE'} \frac{d^3l'}{(2\pi)^3} \sum_X (2\pi)^4 \delta^4(p_X + l' - p - l) \left( \frac{e^2}{q^2} \right)^2 \frac{1}{2} \text{Sp} \left( \gamma' \frac{l}{2} \gamma \frac{l'}{2} \right) \times \\ &\quad \times \frac{1}{2} \sum_{\text{Поляриз}} \langle p | J_\mu(0) | p_X \rangle \langle p_X | J_\nu(0) | p \rangle. \end{aligned}$$

Используемые обозначения подразумевают суммирование по нуклонным поляризациям. Явные вычисления дают

$$\frac{1}{8} \text{Sp}(\gamma_\mu t \gamma_\nu t') = \frac{1}{2} (t^\mu t'^\nu + t^\nu t'^\mu - g^{\mu\nu} t \cdot t'),$$

$$\begin{aligned} W_{\mu\nu} &= \frac{1}{4\pi} \sum_X (2\pi)^4 \delta^4(p_X - p - q) \sum_{\text{Поляриз}} \langle p | J_\mu(0) | p_X \rangle \langle p_X | J_\nu(0) | p \rangle = \\ &= \frac{1}{4\pi} \sum_{\text{Поляриз}} \int d^4x e^{iq \cdot x} \langle p | J_\mu(x) J_\nu(0) | p \rangle. \end{aligned}$$

В интересующей нас кинематической области тензор  $W_{\mu\nu}$  можно также представить как фурье-образ коммутатора токов:

$$W_{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi} \sum_{\text{Поляриз}} \int d^4x e^{iq \cdot x} \langle p | [J_\mu(x), J_\nu(0)] | p \rangle. \quad (13.101)$$

В электромагнитном случае релятивистская инвариантность, сохранение тока и четности позволяют выразить  $W_{\mu\nu}$  через две структурные функции  $W_1$  и  $W_2$ , которые являются обобщением упругих формфакторов [ср. с выражениями (3.203) в т. 1 настоящей книги]:

$$W_{\mu\nu} = W_1(\nu, q^2) \left( \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} - g_{\mu\nu} \right) + W_2(\nu, q^2) \frac{1}{m^2} \left( p_\mu - \frac{\nu}{q^2} q_\mu \right) \times \\ \times \left( p_\nu - \frac{\nu}{q^2} q_\nu \right). \quad (13.102)$$

Сечение рассеяния дается выражением

$$\frac{d\sigma}{d\Omega' dE'} = \frac{\alpha^2}{4E^2 \sin^4(\theta/2)} \left( \cos^2 \frac{\theta}{2} W_2 + 2 \sin^2 \frac{\theta}{2} W_1 \right). \quad (13.103)$$

Связанное с экспериментом ограничение, а именно  $\sin^2(\theta/2) \ll 1$ , делает затруднительным извлечение функции  $W_1$  из данных.

Амплитуда  $W_{\mu\nu}$  связана с сечениями рассеяния поляризованных виртуальных фотонов на нуклоне. Обозначим через  $\sigma_T$  поперечное, а через  $\sigma_S$  продольное сечения (причем  $\sigma_S = 0$  при  $q^2 = 0$ ). Покажите, что

$$W_1(\nu, q^2) = \frac{2\nu + q^2}{8\pi^2 \alpha m} \sigma_T, \\ W_2(\nu, q^2) = \frac{2\nu + q^2}{8\pi^2 \alpha m} \frac{1}{1 - \nu^2/m^2 q^2} (\sigma_S + \sigma_T); \quad (13.104)$$

здесь в  $\sigma_T$  и  $\sigma_S$  плотность потока выбирается такой, как если бы фотоны были реальными, но имели ту же самую энергию.

Найдите из этих выражений условия положительности функций  $W_1$  и  $W_2$ . В случае упругого рассеяния ( $\omega = 1$ ) выведите следующие соотношения, связывающие  $W_1$  и  $W_2$  с электрическим и магнитным формфакторами  $G_E(q^2)$  и  $G_M(q^2)$ :

$$W_1^{\text{эл}}(\nu, q^2) = -\frac{q^2}{2m} G_M^2(q^2) \delta(2\nu + q^2), \\ W_2^{\text{эл}}(\nu, q^2) = \frac{2m}{1 - q^2/4m^2} \left[ G_E^2(q^2) - \frac{q^2}{4m^2} G_M^2(q^2) \right] \delta(2\nu + q^2). \quad (13.105)$$

Напомним, что как было установлено в гл. 11, при анализе нейтринного рассеяния необходимо учитывать также третью структурную функцию  $W_3$ . Сечение рассеяния нейтрино ( $\nu$ ) или антинейтрино ( $\bar{\nu}$ ) записывается [ср. с выражением (11.101)] в виде

$$\frac{d\sigma(\nu, \bar{\nu})}{d\Omega' dE'} = \frac{EE'm}{\pi} \frac{d\sigma(\nu, \bar{\nu})}{\nu dq^2} = \\ = G^2 \frac{E'^2}{2\pi^2} \left( \cos^2 \frac{\theta}{2} W_2^{(\nu, \bar{\nu})} + 2 \sin^2 \frac{\theta}{2} W_1^{(\nu, \bar{\nu})} \mp \frac{E+E'}{m} \sin^2 \frac{\theta}{2} W_3^{(\nu, \bar{\nu})} \right), \quad (13.106a)$$

или

$$\frac{d\sigma(\nu, \bar{\nu})}{dx dy} = m \frac{G^2 E}{2\pi} \left[ (1-y) \frac{\nu W_2}{m} + xy^2 m W_1 \mp x \left( 1 - \frac{y}{2} \right) \frac{\nu W_3}{m} \right], \quad (13.106b)$$

где введена переменная  $y$ :

$$y = \frac{E - E'}{E} = \frac{\nu}{mE}. \quad (13.107)$$

Дополнительный вклад обусловлен интерференцией между векторной и аксиальной частями тока. В высокоэнергетическом пределе, когда массой конечного лептона (электрона или мюона) можно пренебречь, несохраняющаяся часть тока пропадает.

Экспериментальные данные указывают, что не только в области возбуждения резонансов, но и в глубоконеупругой области, в которой  $-q^2$  и  $\nu$  очень велики, сечение остается значительным. При фиксированных  $q^2$  значение интеграла по  $\nu$  сравнимо с сечением Мотта для рассеяния на точечном нуклоне. Измерения с высокой степенью точности под различными углами позволяют

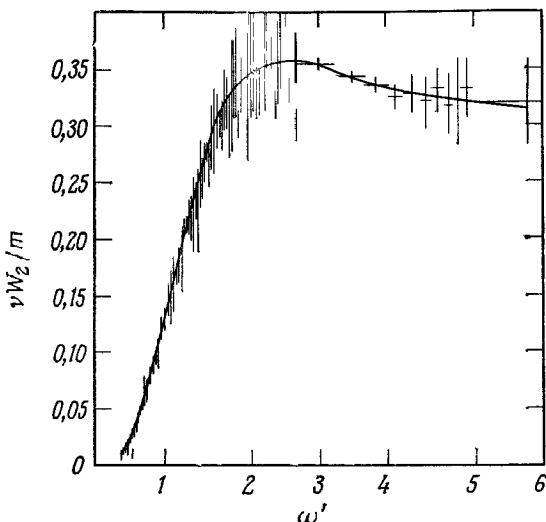


РИС. 13.8. Функция  $\nu W_2/m$ , построенная в зависимости от модифицированной масштабной переменной  $\omega' = (2\nu + m^2)/(-q^2)$ ;  $R \sim 0.18$ . Используются данные, полученные в СЛАК'е. Эти данные обсуждались в докладе Р. Тейлора на конференции в Палермо (1975 г.). При больших значениях  $-q^2/m^2$  резонансы, отвечающие малым  $\omega'$ , оказались размытыми.

отделить  $W_1$  и  $W_2$  и получить отношение  $R = \sigma_S/\sigma_T$ , где  $\sigma_S$  и  $\sigma_T$  определяются выражениями (13.104). Значение этого отношения мало:  $R \sim 0,15$ . Но наиболее впечатляющим является масштабное поведение (скейлинг), предсказанное Бьёркенем и Фейнманом<sup>1)</sup>.

<sup>1)</sup> На возможность «точечноподобного» поведения сечений глубоконеупругого взаимодействия нейтрино с нуклонами указал также М. А. Марков в 1963 г. (см. примечание редактора перевода в конце настоящей главы).—*Прим. перев.*

В глубоконеупругой области безразмерные величины  $2mW_1$  и  $vW_2/m$  переходят в нетривиальные функции масштабной переменной  $\omega = 2\nu/(-q^2)$ . Это показано на рис. 13.8, на котором функция  $vW_2/m$  представлена в виде зависимости от модифицированной переменной  $\omega' = (2\nu + m^2)/(-q^2) \sim \omega$ . Аналогичные результаты получены и для нейтринного рассеяния.

Эти явления заставляют предположить, что лептоны рассеиваются на точечноподобных почти невзаимодействующих составляющих, спин большей части которых равен  $1/2$  (что соответствует отношению  $R=0$ ). В рамках феноменологической партонной модели — это название дали ей Бьёркен и Фейнман — удастся вывести несколько правил сумм, согласующихся с экспериментальными данными. Самосогласованное обоснование партонной картины дает асимптотически свободная теоретико-полевая модель, в которой составляющими являются фундаментальные кванты: кварки и глюоны.

### 13.4.2. Динамика на световом конусе

Изучим более подробно кинематическую область, которая зондируется в экспериментах по глубоконеупругому рассеянию. При высоких энергиях мы фактически исследуем сингулярности ком-

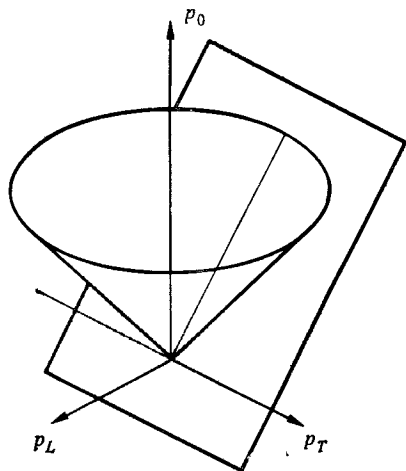


РИС. 13.9. Система координат с бесконечным импульсом.

мутатора  $[J_\mu(x), J_\nu(0)]$ . Сингулярности появляются на малых расстояниях ( $x \sim 0$ ) или при светоподобных интервалах ( $x^2 \sim 0$ ). Поскольку коммутатор обращается в нуль вне светового конуса (т. е. при  $x^2 < 0$ ), то в пространстве Минковского упомянутые малые расстояния являются времениподобными. Чтобы изучить такую область, нам придется рассмотреть импульсное простран-



ство при больших  $q$  и малых  $\omega$ . Однако физическая область ограничена условием  $\omega \geq 1$ . В экспериментально доступной области можно записать  $q$  в виде  $q = \lambda n - q_0$ , где  $n$  — светоподобный вектор, а параметр  $\lambda$  велик. При  $\lambda \rightarrow \infty$  имеем  $-q^2 \sim 2\lambda(n \cdot q_0) \rightarrow \infty$ ,  $v \sim \lambda(n \cdot p) \rightarrow \infty$  и величина  $\omega \sim p \cdot n / q_0 \cdot n$  стремится к конечному пределу. Грубо говоря, можно ожидать, что область, в которой  $(n \cdot x) \sim 1/\lambda$ , зондируется таким образом, что  $x^2 \sim O(1/\lambda) \sim O(1/q^2)$ . Следовательно, изучаемая нами структура сингулярностей коммутиров токков находится вблизи светового конуса. Поэтому полезно сформулировать гипотезы, лежащие в основе партонной модели, в так называемой системе координат бесконечного импульса (рис. 13.9).

Рассматривается динамическая эволюция с начальными условиями, заданными на гиперплоскости, содержащей некоторое светоподобное направление, что соответствует ситуации, когда энергии и продольные импульсы велики и сравнимы по величине. Не вдаваясь в детали, изложим схематически интуитивные рассуждения партонной модели. Обозначим через  $P$  величину большого продольного импульса протона, например в системе центра масс, тогда его 4-импульс приблизительно равен  $p \approx (P, 0, 0, P)$ . Мишень представим как совокупность  $N$  элементарных составляющих, которые в течение их электромагнитных взаимодействий рассматриваются как свободные частицы с продольными импульсами  $x_i P$ , и пренебрежимо малыми по сравнению с  $\sqrt{-q^2}$  поперечными импульсами. В этой системе отсчета 4-импульс виртуального фотона имеет приблизительно координаты  $q \sim (v/2P, \sqrt{-q^2}, 0, -v/2P)$ . Пра-

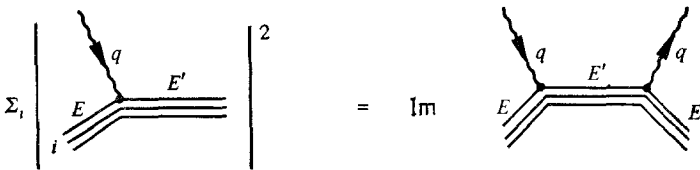


РИС. 13.10. Вклады партонов в структурную функцию.

вила Фейнмана в системе бесконечного импульса подобны правилам нерелятивистской теории возмущений. Таким образом, в сечении рассеяния  $i$ -я составляющая дает вклад, пропорциональный величине

$$Q_i^2 \frac{m}{P} \delta(E' - E - q_0),$$

где  $Q_i$  — заряд этой составляющей (рис. 13.10). Поскольку ее начальный импульс равен  $x_i P$ , мы имеем

$$E' - E - q_0 \sim \sqrt{-q^2 + \left(x_i P - \frac{v}{2P}\right)^2} - x_i P - \frac{v}{2P} \sim -\frac{q^2}{2x_i P} - \frac{v}{P}.$$

Следовательно, рассматриваемый вклад можно также записать в виде

$$x_i Q_i^2 (m/v) \delta[x_i + (q^2/2v)],$$

позволяющем интерпретировать масштабную переменную  $x = \omega^{-1}$  как долю полного импульса приходившегося на составляющую до ее рассеяния на виртуальном фотоне. Модель дополняется предположением, что вероятность такого события равна  $f(x)$ , причем

$$\int_0^1 dx f(x) = 1.$$

Для простоты рассмотрим случай, когда  $f(x)$  не зависит от типа  $i$ -й составляющей. Отсюда следует, что структурная функция, скажем  $W_2$ , дается выражением

$$\frac{v}{m} W_2(v, q^2) = F_2\left(-\frac{q^2}{2v}\right), \quad (13.108)$$

где

$$F_2(x) = \sum_i Q_i^2 x f(x),$$

и автоматически удовлетворяет масштабной инвариантности. Аналогичным образом функция  $mW_1(v, q^2)$  равна функции  $F_1(-q^2/2v)$ . Соотношение между  $F_1$  и  $F_2$  зависит от спинов составляющих, причем для спина  $1/2$  имеем равенство

$$2xF_1(x) = F_2(x), \quad (13.109)$$

которое соответствует  $R = \sigma_S/\sigma_T = 0$ . Используя закон сохранения полной энергии-импульса ( $\sum_i x_i = 1$ ), находим правила сумм

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{dv}{v} \left[ \frac{v}{m} W_2(v, q^2) \right] &= \int_0^1 \frac{dx}{x} F_2(x) = \sum_i Q_i^2, \\ -\frac{q^2}{2m} \int_0^\infty \frac{dv}{v} W_2(v, q^2) &= \int_0^1 dx F_2(x) = \sum \frac{Q_i^2}{N}. \end{aligned} \quad (13.110)$$

Главным предположением этого подхода является гипотеза о квазисвободном поведении партонов в процессе взаимодействия с внешним током и пренебрежение поперечными степенями свободы.

Можно получить эквивалентное описание, если при вычислении вклада адронного тока в окрестности светового конуса в (13.101) подставить свободные поля для адронных составляющих. Этот ток записывается в виде

$$J^\mu(x) = \bar{\psi}(x) \gamma^\mu Q \psi(x), \quad (13.111)$$

где  $\psi$  — свободное фермионное поле, а  $Q$  — зарядовая матрица. Используя антикоммутатор (3.170) (см. т. 1 в настоящей книге)

$$\{\psi(x), \bar{\psi}(y)\} = \frac{1}{2\pi} \partial_x \varepsilon(x^0 - y^0) \delta[(x - y)^2] + O[m^2(x - y)^2],$$

находим

$$\begin{aligned} [J_\mu(x), J_\nu(y)] \underset{(x-y)^2 \rightarrow 0}{\approx} & [\bar{\Psi}(x) Q^2 \gamma_\mu \gamma_\alpha \gamma_\nu \Psi(y) - \bar{\Psi}(y) Q^2 \gamma_\nu \gamma_\alpha \gamma_\mu \Psi(x)] \times \\ & \times \partial^\alpha \frac{\varepsilon(x^0 - y^0)}{2\pi} \delta[(x-y)^2]. \end{aligned}$$

Поскольку рассматривается диагональный матричный элемент и производится суммирование по поляризациям мишени, вклад в (13.101) дают лишь члены, четные относительно перестановки  $\mu \leftrightarrow \nu$ . Разложим произведение полей в ряд Тейлора

$$\bar{\Psi}(x) \Psi(-x) = \sum \frac{(-1)^n}{n!} x^{\mu_1} \dots x^{\mu_n} \bar{\Psi}(0) \overset{\leftarrow}{\partial}_{\mu_1} \dots \overset{\leftarrow}{\partial}_{\mu_n} \Psi(0)$$

и используем соотношение

$$\frac{1}{2} (\gamma_\mu \gamma_\alpha \gamma_\nu + \gamma_\nu \gamma_\alpha \gamma_\mu) = (g_{\mu\alpha} g_{\nu\beta} + g_{\mu\beta} g_{\nu\alpha} - g_{\mu\nu} g_{\alpha\beta}) \gamma^\beta.$$

В результате получим

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \{ [J_\mu(x), J_\nu(-x)] + [J_\nu(x), J_\mu(-x)] \} = \\ & = i \sum_{\substack{n \text{ нечет} \\ \mu_1 \dots \mu_n}} x_{\mu_1} \dots x_{\mu_n} \frac{1}{n!} O^{\beta\mu_1 \dots \mu_n} \mu_n (g_{\mu\alpha} g_{\nu\beta} + g_{\mu\beta} g_{\nu\alpha} - g_{\mu\nu} g_{\alpha\beta}) \frac{1}{8\pi} \partial^\alpha \varepsilon(x^0) \delta(x^2), \\ & O^{\beta\mu_1 \dots \mu_n} = i \bar{\Psi}(0) Q^2 \gamma^\beta \overset{\leftarrow}{\partial}_{\mu_1} \dots \overset{\leftarrow}{\partial}_{\mu_n} \Psi(0). \quad (13.112) \end{aligned}$$

В окрестности  $x^2 = 0$  коммутатор разложен в бесконечный ряд по регулярным локальным операторам, умноженным на соответствующие  $\varepsilon$ -числовые обобщенные функции. Чтобы в пределе Бьеркена вычислить тензор  $W_{\mu\nu}$ , нам понадобятся матричные элементы

$$\frac{1}{2} \sum_{\text{Поляриза}} \langle p | \frac{1}{2^n} O^{\beta\mu_1 \dots \mu_n} | p \rangle = a_{n+1} (p^\beta p^{\mu_1} \dots p^{\mu_n} + \text{Свертки}). \quad (13.113)$$

Члены, содержащие свертки по двум индексам, не дают вклада, когда умножаются на произведение  $x_{\mu_1} \dots x_{\mu_n}$ , как в (13.112). Таким образом, имеем

$$\begin{aligned} W_{\mu\nu} &= \frac{1}{2\pi} \int d^4 y e^{iq \cdot y} \frac{1}{2} \sum_{\text{Поляриза}} \langle p | [J_\mu\left(\frac{y}{2}\right), J_\nu\left(-\frac{y}{2}\right)] | p \rangle = \\ &= \frac{i}{2\pi} \int d^4 y e^{iq \cdot y} \sum_{\substack{n \text{ нечет} \\ \mu_1 \dots \mu_n}} \frac{1}{n!} y_{\mu_1} \dots y_{\mu_n} \frac{1}{2} \sum_{\text{Поляриза}} \langle p | \frac{1}{2^n} O^{\beta\mu_1 \dots \mu_n} | p \rangle \times \\ & \times (g_{\mu\alpha} g_{\nu\beta} + g_{\mu\beta} g_{\nu\alpha} - g_{\mu\nu} g_{\alpha\beta}) \partial^\alpha \frac{\varepsilon(y^0)}{2\pi} \delta(y^2). \end{aligned}$$

Подставим сюда выражение (13.113) и введем функцию  $f(x)$  следующим образом:

$$\sum_{n \text{ нечет}} \frac{(y \cdot p)^n}{n!} a_{n+1} = \frac{1}{2i} \int dx e^{ix(y \cdot p)} \frac{f(x)}{x}, \quad (13.114)$$

где  $x$ , как мы убедимся ниже, является масштабной переменной (не путать ее с координатой!). Это означает, что матричные элементы  $a_{n+1}$  представляют собой моменты функции распределения  $f(x)$ . Пренебрегая величиной  $p^2 = m^2$  по сравнению с  $p \cdot q$ , находим

$$W_{\mu\nu} = \frac{i}{4\pi} \int d^4 y e^{iq \cdot y} \int dx e^{ix(y \cdot p)} \frac{f(x)}{x} \times \\ \times [p_\mu (q + xp)_\nu + p_\nu (q + xp)_\mu - g_{\mu\nu} p \cdot q] \frac{e(y^0)}{\pi} \delta(y^2).$$

Выполняя интегрирование по  $y$ , приходим к выражению

$$W_{\mu\nu} = \frac{f(x)}{2x} \left( \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} - g_{\mu\nu} \right) + \frac{f(x)}{v} \left( p_\mu - \frac{v}{q^2} q_\mu \right) \left( p_\nu - \frac{v}{q^2} q_\nu \right), \quad (13.115)$$

где, очевидно,  $x = \omega^{-1} = -q^2/2v$ .

Таким образом, мы снова получили структурные функции партонной модели:

$$\begin{aligned} \frac{vW_2}{m} &= F_2(x) = mf(x), \\ mW_1 &= F_1(x) = mf(x)/2x, \\ F_2(x) &= 2xF_1(x). \end{aligned} \quad (13.116)$$

Возникают вопросы, почему такое незамысловатое приближение хорошо описывает эксперимент и какие ожидаются к нему поправки? Ответ на эти вопросы связан с существованием асимптотически свободной теории. В разд 13.5 мы проведем более детальное рассмотрение этого вопроса.

В экспериментах с поляризованными лептонами и нуклонами можно измерять антисимметричную часть коммутатора гоков. Покажите, что, если известна степень поляризации спина в направлении падающего пучка, справедливо следующее выражение:

$$\frac{d\sigma^{\uparrow\downarrow}}{d\Omega' dE'} - \frac{d\sigma^{\uparrow\uparrow}}{d\Omega' dE'} = \frac{4\alpha^2 E'}{-q^2 E} \frac{1}{4\pi m} [(E + E' \cos \theta) d(v, q^2) - \\ - (E - E' \cos \theta) (E + E') mg(v, q^2)], \quad (13.117)$$

где величины  $d(v, q^2)$  и  $g(v, q^2)$  даются выражением

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\pi} \int d^4 x e^{-iq \cdot x} \{ \langle p, S | [J_\mu(x), J_\nu(0)] | p, S \rangle - \langle p, -S | [J_\mu(x), J_\nu(0)] | p, -S \rangle \} = \\ = \frac{1}{4\pi m} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} q^\rho [-S^\sigma d(v, q^2) + p^\sigma S \cdot q g(v, q^2)] \end{aligned} \quad (13.117a)$$

и 4-вектор  $S$  поляризации нуклона удовлетворяет условию  $S \cdot p = S^2 + 1 = 0$ .

### 13.4.3. Электрон-позитронная аннигиляция

Процесс аннигиляции электрона и позитрона в адроны при очень высоких энергиях (несколько ГэВ) оказался удивительно плодотворной областью исследований. Однако из-за недостатка места мы не будем здесь обсуждать открытие узких резонансов, таких, как  $\psi$  и  $\psi'$ , а также соответствующую спектроскопию.

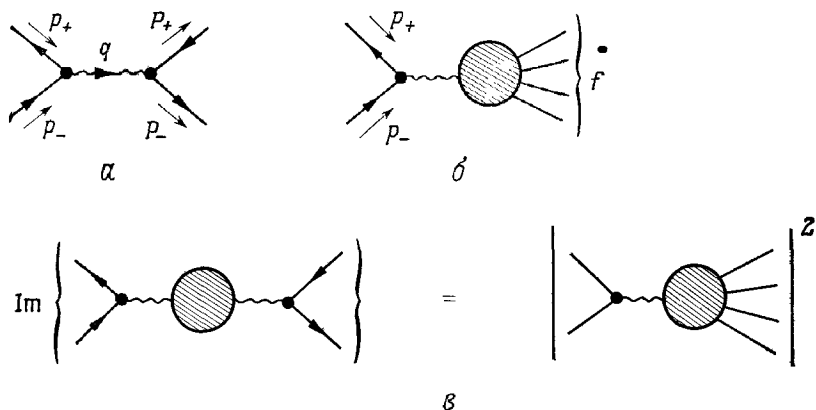


Рис. 13.11. *a*—борновская диаграмма для процесса  $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ ; *б*—процесс  $e^+e^- \rightarrow$  Адроны; *в*—сечение  $\sigma_{e^+e^- \rightarrow \text{Адроны}}$ , выраженное через адронный вклад в поляризацию вакуума

Сечения этих процессов имеют порядок нескольких десятков нанобарн ( $10^{-33}$  см<sup>2</sup>) и сравнимы по величине с вероятностью электромагнитной аннигиляции  $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ . Последний процесс схематически представлен на рис. 13.11, *a*. При очень высокой энергии, когда квадрат энергии в системе центра масс  $q^2$  много больше, чем массы, сечение процесса  $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$  дается выражением

$$\begin{aligned} \sigma_{e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-} &= \int \frac{d^3P_+ d^3P_-}{(2\pi)^6 P_+^0 P_-^0 p_+^0 p_-^0 v_{+-}} \frac{e^4}{(2q^2)^2} (2\pi)^4 \delta^4(P_+ + P_- - p_+ - p_-) \times \\ &\quad \times \sum_{\text{Поляриз}} |\bar{u}(P_-) \gamma^\mu v(P_+) \bar{v}(p_+) \gamma_\mu u(p_-)|^2 = \\ &= \frac{4\pi\alpha^2}{3q^2} = \frac{86,9}{q^2 [(\text{ГэВ})^2]} \quad [\text{нб}]. \end{aligned} \tag{13.118}$$

Аннигиляция в адроны включает матричные элементы тока  $J_\mu$ . Учитывая эрмитовость тока, сечение неполяризованных электро-

нов и позитронов можно записать в виде

$$\begin{aligned} \sigma_{e^+e^- \rightarrow \text{Адроны}} &= \frac{e^4}{2(q^2)^3} (g^{\mu\nu} p_+ p_- - p_+^\mu p_-^\nu - p_+^\nu p_-^\mu) \times \\ &\times \sum_f (2\pi)^4 \delta^4(p_f - p_+ - p_-) \langle 0 | J_\mu(0) | f \rangle \langle f | J_\nu(0) | 0 \rangle. \end{aligned} \quad (13.119)$$

Поскольку вектор  $q$  лежит во времениподобной области и  $q_0 > 0$ , справедливы равенства

$$\begin{aligned} \sum_f (2\pi)^4 \delta^4(p_f - p_+ - p_-) \langle 0 | J_\mu(0) | f \rangle \langle f | J_\nu(0) | 0 \rangle &= \\ = \int d^4x e^{iq \cdot x} \langle 0 | J_\mu(x) J_\nu(0) | 0 \rangle &= \\ = \int d^4x e^{iq \cdot x} \langle 0 | [J_\mu(x), J_\nu(0)] | 0 \rangle. \end{aligned} \quad (13.120)$$

Таким образом, аннигиляция при высокой энергии позволяет изучать вакуумный матричный элемент коммутатора токов на малых времениподобных расстояниях. Займемся снова исследованием асимптотической области. Однако следует заметить, что переход от пространственно-подобных малых расстояний к времениподобным может выйти за рамки невинных модификаций.

Фурье-образ коммутатора, входящего в выражение (13.120), связан с адронным вкладом в амплитуду рассеяния вперед соотношением (рис. 13.11, в)

$$\begin{aligned} \int d^4x e^{iq \cdot x} \langle 0 | [J_\mu(x), J_\nu(0)] | 0 \rangle &= \\ = 2\text{Im} \left[ i \int d^4x e^{iq \cdot x} \langle 0 | T J_\mu(x) J_\nu(0) | 0 \rangle \right]. \end{aligned} \quad (13.121)$$

С точностью до множителя  $e^2$  выражение в правой части соотношения (13.121) представляет собой также адронный вклад в поляризацию вакуума:

$$i \int d^4x e^{iq \cdot x} \langle 0 | T J_\mu(x) J_\nu(0) | 0 \rangle = (g_{\mu\nu} q^2 - q_\mu q_\nu) \bar{\omega}^h(q^2). \quad (13.122)$$

Таким образом,

$$\sigma_{e^+e^- \rightarrow \text{Адроны}} = \frac{16\pi^2 \alpha^2}{q^2} \text{Im} \bar{\omega}^h(q^2). \quad (13.123)$$

Следует заметить, что сечение  $\sigma_{e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-}$  имеет ту же самую структуру, причем член  $\text{Im} \bar{\omega}^h$  заменяется на вклад мюонной петли [см формулу (7.11) в т. 1 настоящей книги]

$$\text{Im} \bar{\omega}_{\mu^+\mu^-}^h(q^2) = \frac{1}{e^2} \frac{\alpha}{3} \left(1 - \frac{4m_\mu^2}{q^2}\right)^{1/2} \left(1 + \frac{2m_\mu^2}{q^2}\right) \frac{1}{m_\mu^3/q^2 \rightarrow 0} \frac{1}{12\pi}. \quad (13.124)$$

Отсюда получаем выражение

$$\sigma_{e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-} = \frac{16\pi^2\alpha^2}{q^2} \text{Im} \bar{\omega}_{\mu^+\mu^-}(q^2) = \frac{4\pi\alpha^2}{3q^2},$$

которое согласуется с (13.118)

По традиции отношение сечения  $e^+e^-$ -аннигиляции в адроны к сечению аннигиляции в пару  $\mu^+\mu^-$  также обозначают через  $R$ :

$$R(q^2) = \frac{\sigma_{e^+e^- \rightarrow \text{Адроны}}}{\sigma_{e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-}} = 12\pi \text{Im} \bar{\omega}^2(q^2). \quad (13.125)$$

Непосредственное применение партонной модели дает предельное значение этого отношения

$$\lim_{q^2 \rightarrow \infty} R(q^2) = R_\infty = \sum_i Q_i^2 \quad (13.126)$$

в виде простой суммы вкладов от взаимодействующих в низшем порядке по  $\alpha$  заряженных элементарных составляющих со спином  $1/2$ .

Используя модели внутренних симметрий адронных состояний, можно получить различные значения  $R_\infty$  в соответствии с числом,

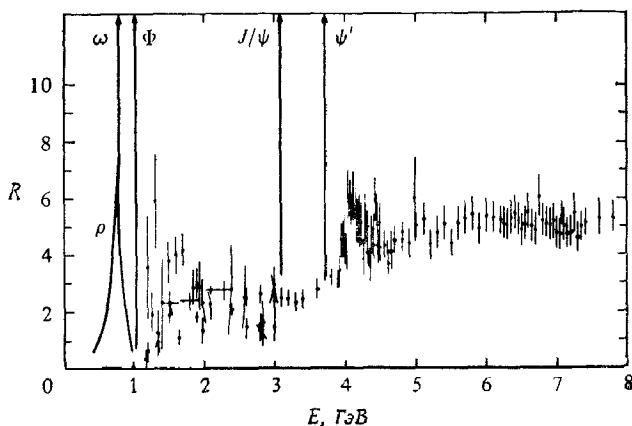


РИС 13.12 Отношение  $R = \sigma_{e^+e^- \rightarrow \text{Адроны}} / \sigma_{e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-}$  как функция полной энергии  $E = \sqrt{q^2}$  в системе центра масс, полученное при измерениях в СЛАК'е. Данные приведены в работе: Schwitters R F., Strauch K.—Ann Rev. Nucl. Sci., 1976, vol. 26, p 89.

типом и зарядами составляющих. Октетная модель кварков с зарядами  $2/3$ ,  $-1/3$  и  $-1/3$  и тремя цветными степенями свободы предсказывает отношение  $R_\infty = 2$ . Если имеются дополнительные квантовые числа, то это отношение увеличивается. Например,  $s$ -кварк с зарядом  $2/3$  должен вносить дополнитель-

ную величину  $4/3$ , что дает  $R_\infty = 10/3^1$ ). Массивный лептон в области около 2 ГэВ, рождающийся парами и неотличаемый от адронных состояний, снова увеличивает  $R_\infty$  на единицу. На рис. 13.12 представлено несколько экспериментальных результатов, полученных до 1976 г. Мы видим, что значение  $R(q^2)$ , по-видимому, установится на значении, предсказываемом рассмотренной моделью. Однако последующие эксперименты, возможно, приведут к неожиданным результатам.

Асимптотическое поведение (13.126) можно установить эквивалентным образом, предполагая, что свойства вакуумного матричного элемента в окрестности точки  $x=0$  определяются свободными полями:

$$\langle 0 | J_\mu(x) J_\nu(0) | 0 \rangle \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{R_\infty}{12\pi^4} (\partial_\mu \partial_\nu - g_{\mu\nu} \square) \frac{1}{(x^2 - i\epsilon x_0)^2}. \quad (13.127)$$

Мы можем угадать вид поправок к  $R_\infty$ , которые характерны для теоретико-полевой асимптотически свободной модели. Из того факта, что константа перенормировки для сохраняющихся токов равна единице (см. ниже), мы имеем следующее приближенное выражение для функции  $R$  при больших  $q^2$ :

$$R(\lambda^2 q^2, g) \approx R[q^2, g(\lambda)] \approx R_\infty \left[ 1 + \frac{3g^2(\lambda)}{16\pi^2} T_f + \dots \right], \quad (13.128)$$

где  $g(\lambda)$  — бегущая константа сильного взаимодействия. Выражение (13.128) получено из формулы двухпетлевого приближения для поляризации вакуума [выражение (13.13)], которое позволяет оценить вклад порядка  $g^2(\lambda)$  в  $\text{Im} \bar{w}^h$ . Множитель  $T_f$  связан с внутренними квантовыми числами фермионов, а величина  $R_\infty$  дается выражением (13.126). В соответствии с равенствами (13.81) и (13.90) величина  $g^2(\lambda)$  при больших  $\lambda$  записывается в виде

$$g^2(\lambda) \sim \frac{3(4\pi)^2}{(11C - 4T_f) \ln \lambda^2}. \quad (13.129)$$

Такая поправка предсказывает, что  $R_\infty$  медленно приближается сверху к асимптотическому значению [как  $(\ln q^2)^{-1}$ ]. В обычном разложении по теории возмущений доминирующий вклад получился бы от разложения величины (13.124) в ряд по степеням  $m^2/q^2$ . При этом мы получим

$$R(q^2) \underset{q^2 \rightarrow \infty}{\sim} R_\infty \left[ 1 - \delta \left( \frac{m^2}{q^2} \right)^2 + \dots \right], \quad (13.130)$$

т. е. отрицательную и быстро меняющуюся поправку.

<sup>1)</sup> В 1977 г. были обнаружены тяжелые  $\Upsilon$ - и  $\Upsilon'$ -мезоны с массой 9,5 и 10 ГэВ, которые интерпретируются как связанные состояния нового, пятого кварка с электрическим зарядом  $-1/3$  и соответствующего антикварка. Имеется ряд указаний на существование еще одного более тяжелого,  $t$ -кварка, который, однако, пока экспериментально не обнаружен. — *Прим. ред.*



Замечательные и многочисленные экспериментальные данные по глубоконепругим явлениям мы рассмотрели здесь очень бегло и недостаточно подробно. Наша цель состояла лишь в том, чтобы проиллюстрировать область физики частиц, в которой современные идеи позволяют делать количественные предсказания, которые можно затем подвергнуть серьезной проверке. Для теорий, не являющихся асимптотически свободными, таких, как квантовая электродинамика, мало что известно о поведении на малых расстояниях.

### 13.5. ОПЕРАТОРНЫЕ РАЗЛОЖЕНИЯ

Проведенное выше рассмотрение иллюстрирует интерес к изучению поведения матричных элементов произведений составных операторов в некоторых хорошо определенных предельных случаях. Этими случаями являются следующие:

1. Пространственно-подобный интервал стремится к нулю (евклидов случай).
2. Времениподобный интервал стремится к нулю (метрика Минковского).
3. Величина  $x^2$  стремится к нулю (светоподобный предел).

Случаи 2 и 3 характерны для физики частиц. Вообще говоря, рассматриваемые операторы являются сохраняющимися или частично сохраняющимися токами. Случай 1 можно проанализировать наиболее полно. Полученные результаты непосредственно применимы в статистической механике. Основополагающие работы в этой области были сделаны Вилсоном и Циммерманом.

#### 13.5.1. Разложение на малых расстояниях

Рассмотрим произведение двух локальных операторов. В целях упрощения будем указывать только их зависимость от конфигурационных переменных. Для этого произведения Вилсон предложил разложение на малых расстояниях в виде

$$A(x)B(y) \sim \sum_{x \rightarrow y} C_N(x-y) O_N\left(\frac{x+y}{2}\right) \quad (13.131)$$

Здесь через  $O_N$  обозначена последовательность локальных регулярных операторов, в то время как  $c$ -числовые коэффициенты  $C_N(x-y)$  в пределе  $x \rightarrow y$  сингулярны. В рамках теории возмущений их поведение с точностью до логарифмов определяется канонической размерностью соответствующих операторов:

$$\lim_{x \rightarrow 0} C_N(x) \sim x^{\gamma_N} (\text{mod } \ln|x|), \quad (13.132)$$

$$\gamma_N = d_{O_N} - d_A - d_B.$$

Чем выше размерность величины  $O_N$ , тем быстрее  $C_N$  стремится к нулю. Очевидно, что ренормгрупповые эффекты приводят к некоторой модификации этих соотношений.

Когда имеют дело с евклидовой теорией, слово «оператор» несколько дезориентирует. В действительности мы подразумеваем возможность построить обобщенные функции Грина  $G_{AB}^{(n)}(x, y; z_1, \dots, z_n)$ , в которых  $n$  аргументов  $z_1, \dots, z_n$  относятся к фундаментальным полям, а оставшиеся два — к  $A$  и  $B$ . Смысл выражения (13.131) состоит в том, что если упорядочить операторы  $O_N$  в соответствии с их размерностью, то

$$\lim_{x \rightarrow y} \left\{ \left[ G_{AB}^{(n)}(x, y; z_1, \dots, z_n) - \sum_{N_{\text{макс}}}^N C_N(x-y) \times \right. \right. \\ \left. \left. \times G_{O_N}^{(N)}\left(\frac{x+y}{2}; z_1, \dots, z_n\right) \right] C_{N_{\text{макс}}}^{-1}(x-y) \right\} = 0. \quad (13.133)$$

Разложение Вилсона обладает тем свойством, что сингулярности, возникающие в пределе  $x \rightarrow y$ , содержатся в  $c$ -числовых коэффициентах  $C_N(x-y)$  независимо от числа аргументов и типов элементарных полей, входящих в функции Грина. В пространстве Минковского равенство (13.133) понимается, как асимптотический ряд (в слабом смысле) матричных элементов между физическими состояниями. Очевидно, это является обобщением случая, рассмотренного выше, когда все разности координат одновременно устремлялись к нулю. Мы покажем, что для коэффициентов  $C_N$  можно написать ренормгрупповые уравнения

Вместо того чтобы приводить громоздкое общее доказательство, удовлетворимся рассмотрением простого примера из теории скалярного поля. Будем считать операторы  $A$  и  $B$  элементарными полями и найдем главный коэффициент

$$\Phi(x)\Phi(y) \xrightarrow{x \rightarrow y} C(x-y)\Phi^2\left(\frac{x+y}{2}\right) + O[(x-y)^2]. \quad (13.134)$$

Из (13.132) можно ожидать, что  $C(x-y)$  ведет себя в данном порядке как полином по  $\ln|x-y|$  с точностью до членов порядка  $(x-y)^2$ . Чтобы доказать это, рассмотрим два набора связанных функций Грина  $G^{(n+2)}(q_1, q_2; p_1, \dots, p_n)$  и  $G_{\varphi^2}^{(n)}(q_1+q_2; p_1, \dots, p_n)$  и изучим дополнительные вычитания, необходимые для построения  $G_{\varphi^2}^{(n)}$ , в сравнении с теми, что необходимы для построения  $G^{(n+2)}$ . На рис. 13.13 иллюстрируется пример, включающий  $G^{(4)}$  и  $G_{\varphi^2}^{(2)}$ .

Подынтегральное выражение в фейнмановском интеграле, относящемся к  $G_{\varphi^2}^{(n)}$ , можно получить, если отождествить две внешние вершины, принадлежащие  $G^{(n+2)}$  (рассматривая их далее как одну), и соответствующим образом подправить симметричный коэффициент. Но вычитания, которые необходимо произвести,

будут иными. Для анализа перенормировочной процедуры достаточно рассмотреть одночастично-неприводимые функции  $\Gamma_{\varphi^2}^{(n)}$ . Однако не следует удалять из  $G^{(n+2)}$  две внешние линии, которые должны «склеиться» при переходе к  $G_{\varphi^2}^{(n)}$ . Обозначим через

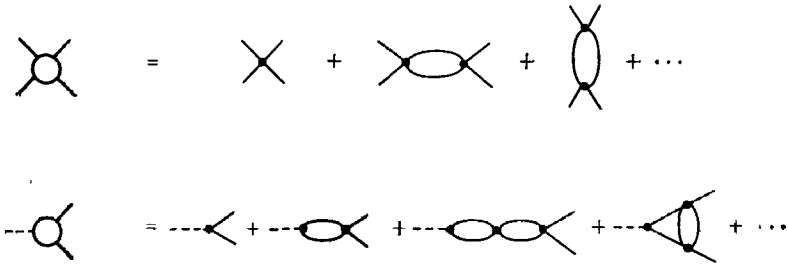


РИС. 13.13. Связные функции Грина  $G^{(4)}$  и  $G_{\varphi^2}^{(2)}$ .

$G^{(n+2)}(q_1, q_2; p_1, \dots, p_n)$  одночастично-неприводимую  $(n+2)$ -точечную функцию с полными пропагаторами на внешних линиях, по которым протекают импульсы  $q_1$  и  $q_2$ . Пусть  $\mathcal{R}_{\varphi^2}$  и  $\mathcal{R}$  — перенормированные подынтегральные выражения соответственно для  $\Gamma_{\varphi^2}^{(n)}$  и  $G^{(n+2)}$ . Они связаны соотношением

$$\mathcal{R}_{\varphi^2} = \mathcal{R} + \mathcal{S}, \tag{13.135}$$

где  $\mathcal{S}$  обусловлено вычитаниями расходимостей из подграфов, содержащих вершину  $v$ , сопоставляемую оператору  $\varphi^2$ . Эти подграфы соответствуют неприводимым функциям Грина с двумя внешними  $\varphi$ -линиями и имеют нулевую условную степень расходимости, если считать, что размерность  $\varphi^2$  равна двум. Как и в гл. 8, обозначим через  $\mathcal{F}$  множество всех лесов расходящихся подграфов, причем один из них содержит  $v$ . Если  $\tau$  является наименьшим расходящимся подграфом множества  $\mathcal{F}$ , содержащим вершину  $v$ , то можно написать

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_1 \cup \tau \cup \mathcal{F}_2, \tag{13.136}$$

где  $\mathcal{F}_2$  — множество расходящихся подграфов, принадлежащих  $\tau$ , а  $\mathcal{F}_1$  — множество расходящихся подграфов, которые либо целиком содержат  $\tau$ , либо вообще не пересекаются с  $\tau$ . Пусть  $I$  — подынтегральное выражение до вычитаний, общее для  $\Gamma_{\varphi^2}^{(n)}$  и  $G^{(n+2)}$ ; тогда явное выражение для  $\mathcal{S}$  имеет вид

$$\mathcal{S} = \sum_{\tau \in \mathcal{F}_1} \left[ \prod_{\gamma \in \mathcal{F}_1} (-T^\gamma) \right] (-T^\tau) \left[ \prod_{\gamma \in \mathcal{F}_2} (-T^\gamma) \right] I. \tag{13.137}$$

Суммирование можно выполнить следующим образом. Сначала учтем подграф  $\tau$ , содержащий  $v$ , затем просуммируем по лесам

$\mathcal{F}_2$ , принадлежащим  $\tau$  (исключая при этом само  $\tau$ ), и далее — по лесам  $\mathcal{F}_1$  редуцированной диаграммы  $G/\tau$ . Последняя представляет собой одну из диаграмм, дающих вклад в функцию  $\Gamma_{\varphi^2}^{(n)}$ . Для диаграммы, дающей вклад в функцию  $G^{(n+2)}$ , обозначим через  $\sigma$  подграф, соответствующий  $\tau$ . Если отвлечься от пропагаторов (и возможных собственно-энергетических вставок в них) двух линий, которые (для  $\tau$ ) соединяются в вершине  $v$ , то  $\sigma$  представляет собой неприводимую четырехточечную функцию. Назовем ее  $\tilde{\Gamma}^{(4)}$ .

Для любого  $\tau$  подынтегральное выражение  $I$  факторизуется следующим образом:  $I = I_{G/\tau} I_{\tau}$ . При промежуточной перенормировке операторы  $T^v$  сводятся к ряду Тейлора при нулевом импульсе. Леса  $\mathcal{F}_2$  относятся к  $\sigma$ ;  $\mathcal{F}_1$  являются лесами  $G/\tau$ , а  $T^v$  сводится к замене величины  $\mathcal{R}(\sigma)$  ее постоянным членом  $\mathcal{R}_0(\sigma)$ .

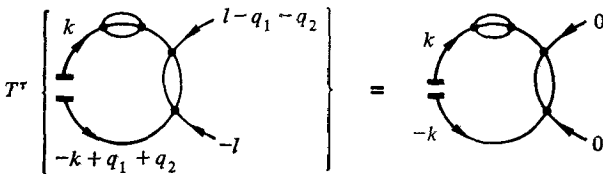


РИС. 13.14. Вычитания при нулевом импульсе в  $\tilde{\Gamma}^{(4)}$ .

Эта операция иллюстрируется на рис. 13.14, на котором показан некоторый вклад в  $\tilde{\Gamma}^{(4)}$ . Соответствующая диаграмма содержит две линии, которые можно будет затем соединить в вершине  $v$ . Под действием операции  $T^v$  все внешние импульсы полагаются равными нулю, за исключением импульса  $k$ , как бы циркулирующего по подграфу  $\tau$ . Математически это можно записать следующим образом:

$$\mathcal{S} = - \sum_{\tau} \mathcal{R}_{\varphi^2}(G/\tau) \mathcal{R}_0(\sigma), \quad (13.138)$$

откуда с учетом соотношения (13.135) имеем

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}_{\varphi^2} + \sum_{\tau} \mathcal{R}_{\varphi^2}(G/\tau) \mathcal{R}_0(\sigma). \quad (13.139)$$

Перенормированное подынтегральное выражение для  $G^{(n+2)}$  записано в таком виде, что вычитания, связанные с  $v$ , фигурируют явно, хотя они, безусловно, компенсируются вторым членом в правой части этого соотношения. В данном случае обозначение  $\mathcal{R}_{\varphi^2}$  является несколько двусмысленным, поскольку число аргументов все еще равно  $n+2$  и операция  $\mathcal{R}_{\varphi^2}$  действует на функцию Грина, которую будем обозначать как

$$\langle 0 | T [\varphi(x) \varphi(y)]_s \varphi(z_1) \dots \varphi(z_n) | 0 \rangle.$$

После интегрирования по импульсам петель и суммирования по диаграммам функцию Грина можно записать следующим образом:

$$G^{(n+2)}(x, y; z_1, \dots, z_n) = \langle 0 | T \varphi(x) \varphi(y) \varphi(z_1) \dots \varphi(z_n) | 0 \rangle = \\ = \sum_G \int \frac{d^4 q_1 d^4 q_2 \prod_a d^4 p_a}{(2\pi)^{4(n+2)}} (2\pi)^4 \delta^4(q_1 + q_2 + \sum_a p_a) \times \\ \times e^{i(q_1 \cdot x + q_2 \cdot y + \sum p_a \cdot z_a)} \int \prod_b \frac{d^4 k_b}{(2\pi)^4} \mathcal{R}(q, p, k; G). \quad (13.140a)$$

Определим величины

$$\langle 0 | T [\varphi(x) \varphi(y)]_2 \varphi(z_1) \dots \varphi(z_n) | 0 \rangle = \text{То же самое, что и в (13.140a), но с} \\ \text{заменой: } \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}_{\varphi^2}, \quad (13.140 б)$$

$$\langle 0 | T [\varphi^2(x)]_2 \varphi(z_1) \dots \varphi(z_n) | 0 \rangle = \text{То же самое, что и в (13.140a), но с} \\ \text{заменой: } \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}_{\varphi^2} \text{ и } x = y. \quad (13.140 в)$$

Обозначение  $[ ]_2$  напоминает, что оператору, заключенному в скобки, приписывается размерность, равная двум. Для упрощения обозначений мы воспользовались символами  $T$ -произведения в пространстве Минковского. Полагая

$$\tilde{\varphi}(0) = \int d^4 z \varphi(z) \quad (13.141)$$

для фурье-образа при нулевом импульсе и учитывая равенство (13.139), приходим к заключению, что

$$\langle 0 | T \varphi(x) \varphi(y) \varphi(z_1) \dots \varphi(z_n) | 0 \rangle = \langle 0 | T [\varphi(x) \varphi(y)]_2 \varphi(z_1) \dots \\ \dots \varphi(z_n) | 0 \rangle + (1/2) \langle 0 | T \varphi\left(\frac{x-y}{2}\right) \varphi\left(\frac{y-x}{2}\right) \tilde{\varphi}(0) \tilde{\varphi}(0) | 0 \rangle^P \times \\ \times \langle 0 | T \left[ \varphi^2\left(\frac{x+y}{2}\right) \right]_2 \varphi(z_1) \dots \varphi(z_n) | 0 \rangle. \quad (13.142)$$

Индекс  $P$  указывает на то, что рассматриваемая величина получена из неприводимой функции Грина  $\Gamma^{(4)}$  добавлением полных пропагаторов на двух внешних линиях. Мы рекомендуем читателю проверить описанные выше операции на каком-либо примере, чтобы убедиться в необходимости наличия симметричного фактора  $(1/2)$  в (13.142).

Эта алгебраическая конструкция хорошо приспособлена для изучения предела  $x \rightarrow y$ . Действительно, исходя из теории перенормировок, можно считать, что после вычитаний интеграл сходится. В частности, функции Грина, включающие  $[\varphi(x) \varphi(y)]_2$  в каждом порядке теории возмущений, при  $x \rightarrow y$  стремятся к функциям Грина, содержащим  $[\varphi^2(x)]_2$ , с точностью до поправок вида  $(x-y)^2 (\ln|x-y|)^\alpha$ , по крайней мере в евклидовой области.

Следовательно, равенство (13.142) позволяет выделить следующую наиболее сингулярную часть функции  $G^{(n+2)}$ :

$$\langle 0 | T \varphi(x) \varphi(y) \varphi(z_1) \dots \varphi(z_n) | 0 \rangle \xrightarrow{x \rightarrow y} C(x-y) \langle 0 | T \left[ \varphi^2 \left( \frac{x+y}{2} \right) \right]_2 \times \\ \times \varphi(z_1) \dots \varphi(z_n) | 0 \rangle, \quad (13.143)$$

$$C(x-y) = 1 + \frac{1}{2} \langle 0 | T \varphi \left( \frac{x-y}{2} \right) \varphi \left( \frac{y-x}{2} \right) \tilde{\varphi}(0) \tilde{\varphi}(0) | 0 \rangle^P.$$

В каждом порядке теории возмущений  $C(x)$  ведет себя как полином по  $\ln|x|$ . Например, в низшем порядке функция  $C(x)$  пропорциональна

$$C(x) \sim \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} e^{iq \cdot x} \frac{1}{(q^2 + m^2)^2} = \frac{1}{(2\pi)^3} K_0(m|x|) \sim \\ \sim \frac{1}{(2\pi)^3} \left[ -\ln \frac{m|x|}{2} + O(m^2 x^2) \right]. \quad (13.144)$$

Вышеприведенному выводу можно придать более рафинированную форму, с тем чтобы продемонстрировать построение последующих членов разложения Вилсона. Мы опустим обсуждение этого довольно скучного вопроса и, предполагая, что окончательный результат правилен, займемся изучением следствий, вытекающих из применения ренормализационной группы к коэффициенту  $C$ . Согласно (13.143), при этом потребуются анализировать функции Грина при исключительных импульсах.

Из примера, данного выше, ясно, что в теории возмущений функция  $C(x)$  может содержать и субдоминантные члены. Поэтому мы должны сделать выбор, следовать ли нам первоначальному методу Каллана—Симанзика, в котором вводится массовая вставка при нулевом импульсе, или подходу Вайнберга, основанному на использовании не зависящих от массы условий нормировки. Для определенности выберем первую возможность и обозначим через  $C_0(x)$  асимптотическую форму функции  $C(x)$ , получающуюся в результате отбрасывания членов, которые в рамках теории возмущений являются недоминирующими. Покажем, что  $C_0(x)$  удовлетворяет уравнению вида

$$\left[ x \cdot \frac{\partial}{\partial x} + \beta(g) \frac{\partial}{\partial y} + 2\gamma_\varphi(g) - \gamma_\Delta(g) \right] C_0(x) = 0. \quad (13.145)$$

Связные функции Грина удовлетворяют уравнению

$$\left\{ x \cdot \frac{\partial}{\partial x} + y \cdot \frac{\partial}{\partial y} + z_a \cdot \frac{\partial}{\partial z_a} + \beta(g) \frac{\partial}{\partial g} + (n+2)[1 + \gamma_\varphi(g)] \right\} G^{(n+2)}(x, y, z_a) = \\ = G_\Delta^{(n+2)}(x, y, z_a). \quad (13.146)$$

Заметим, что всегда можно определить  $\Delta$  таким образом, что множитель  $2[1 + \delta(g)]$  [см. (13.70)] будет отсутствовать.

Подставим в (13.146) разложение Вилсона при  $x \rightarrow y$  и удержим только доминирующий член. В данном пределе левую часть этого выражения можно записать в виде

$$\left\{ (x-y) \cdot \frac{\partial}{\partial(x-y)} + \beta(g) \frac{\partial}{\partial g} + 2\gamma_\varphi(g) - \gamma_\Delta(g) \right\} C_0(x-y) \times \\ \times G_{\varphi^2}^{(n)}\left(\frac{x+y}{2}, z_a\right) + C_0(x-y) \left[ x \cdot \frac{\partial}{\partial x} + y \cdot \frac{\partial}{\partial y} + z_a \cdot \frac{\partial}{\partial z_a} + \right. \\ \left. + \beta(g) \frac{\partial}{\partial g} + n + 2 + n\gamma_\varphi(g) + \gamma_\Delta(g) \right] G_{\varphi^2}^{(n)}\left(\frac{x+y}{2}, z_a\right).$$

Уравнение Каллана—Симанзика выполняется также и для  $G_{\varphi^2}^{(n)}$ :

$$\left[ x \cdot \frac{\partial}{\partial x} + z_a \cdot \frac{\partial}{\partial z_a} + \beta(g) \frac{\partial}{\partial g} + n + 2 + n\gamma_\varphi(g) + \gamma_\Delta(g) \right] G_{\varphi^2}^{(n)}(x, z_a) = \\ = G_{\Delta, \varphi^2}^{(n)}(x, z_a). \quad (13.147)$$

Отсюда уже следует желаемый результат при условии, что в пределе  $x \rightarrow y$  правую часть выражения (13.146) можно отождествить с  $C_0 G_{\Delta, \varphi^2}^{(n)}$ :

$$G_{\Delta}^{(n+2)}(x, y, z_a) \xrightarrow{x \rightarrow y} C_0(x-y) C_{\Delta, \varphi^2}^{(n)}\left(\frac{x+y}{2}, z_a\right). \quad (13.148)$$

Справедливость этого соотношения следует из рассмотрения, аналогичного тому, который мы провели кратко выше — необходимо только обобщить его на функции Грина, содержащие массовую вставку  $\Delta$ . Заметим, что последняя находится вне подграфа  $\tau$ , дающего вклад в  $C(x-y)$ , поскольку единственной расходящейся функцией с двумя  $\varphi^2$ -вставками является амплитуда вакуум-вакуумного перехода. Отсюда следует, что соотношение (13.148) выполняется, и таким образом мы доказали, что  $C_0(x)$  удовлетворяет уравнению ренормализационной группы (13.145).

Все это распространяется и на последующие члены операторного разложения. Возвращаясь к общему случаю, когда рассматривается произведение  $A(x)B(y)$ , видим, что (13.132) необходимо исправить на

$$\left[ x \cdot \frac{\partial}{\partial x} + \beta(g) \frac{\partial}{\partial g} + d_A + \gamma_A(g) + d_B + \gamma_B(g) - d_{O_N} - \right. \\ \left. - \gamma_{O_N}(g) \right] C_N(x) = 0, \quad (13.149)$$

где  $d_A, d_B, d_{O_N}$  — канонические, а  $\gamma_A, \gamma_B, \gamma_{O_N}$  — аномальные размерности соответствующих операторов. Предполагается, что последние являются мультипликативно перенормируемыми.

Строго говоря, уравнения (13.145) и (13.149) справедливы только в евклидовой области. Они выполняются и в метрике Мин-

ковского при условии, что фейнмановские добавки  $i\epsilon$  остаются конечными. Предельный переход к реальному пространству Минковского, необходимый при анализе  $e^+e^-$ -аннигиляции, требует детального рассмотрения возможных осцилляций при больших импульсах.

Разложение Вилсона установлено только в смысле слабой сходимости. К примеру, оно выполняется для любой функции  $G_{AB}^{(n)}$ , содержащей  $n$  элементарных полей  $\varphi$  и операторы  $A, B$ . Однако нет никакой гарантии, что (13.131) можно непосредственно применить к другим функциям Грина, включающим дополнительно еще какие-то составные операторы. Например, равенство

$$\lim_{x \rightarrow y} \langle 0 | T\varphi(x)\varphi(y)\varphi^2(z) | 0 \rangle = C(x-y) \langle 0 | T\varphi^2\left(\frac{x+y}{2}\right)\varphi^2(z) | 0 \rangle$$

является неверным. В этом случае, поскольку функция как целое является примитивно расходящейся, существуют дополнительные вклады в поведение на малых расстояниях, кроме тех, что обусловлены двумя полями  $\varphi$ , генерирующими коэффициент  $C(x-y)$ . В частности, необходимо учитывать вычитание для всей диаграммы как целого, которое дает новую функцию  $\bar{C}(x-y)$ , не зависящую от  $z$ :

$$\lim_{x \rightarrow y} \langle 0 | T\varphi(x)\varphi(y)\varphi^2(z) | 0 \rangle = C(x-y) \langle 0 | T\varphi^2\left(\frac{x+y}{2}\right)\varphi^2(z) | 0 \rangle + \bar{C}(x-y). \quad (13.150)$$

Характер следствий, вытекающих из операторного разложения, зависит от того, имеются ли в действительности (т. е. вне рамок теории возмущений) ультрафиолетовые фиксированные точки. Если такая точка существует, то мы получаем результаты с помощью модифицированного анализа размерностей, причем

$$C_N(x) \sim |x|^d o_{N^+} \gamma_{o_{N^+}}^{(g_\infty)} - d_A - \gamma_A^{(g_\infty)} - d_B - \gamma_B^{(g_\infty)}. \quad (13.151)$$

В асимптотически свободной теории, в которой функции  $\gamma(g)$  имеют порядок  $g^2$ , можно записать, как в разд. 13.3,

$$\begin{aligned} \beta(g) &= -bg^3 + \dots, \\ \gamma(g) &= cg^2 + \dots \end{aligned} \quad (13.152)$$

Интегрируя (13.149), получаем

$$C_N(x) \sim |x|^d o_{N^+}^{-d_A - d_N} \left( \ln \frac{1}{|x|} \right)^{(c_A + c_B - c_{o_{N^+}})/2b}. \quad (13.153)$$

Таким образом, мы видим, что отклонения от канонического масштабного поведения имеют логарифмический характер.

Чтобы применить описанные выше методы к изучению конкретных примеров, необходимо указать вид соответствующих операторов, исследовать связанные с ними законы сохранения и обобщить анализ на случай светоподобных интервалов.



**13.5.2. Доминирующие и субдоминантные операторы, смешивание операторов и законы сохранения**

В простейшем примере, а именно для произведения  $\varphi(x)\varphi(y)$ , операторы  $O_N$  разложения Вилсона представляют собой локальные мономы полей и их производных, совместимые со свойствами симметрии. Например, в теории, инвариантной относительно замены  $\varphi$  на  $-\varphi$ , первые из недоминирующих операторов имеют каноническую размерность, равную четырем:

$$\varphi\left(\frac{x}{2}\right)\varphi\left(-\frac{x}{2}\right) = C_2(x)\varphi^2(0) + C_4^{(1)}(x)(\partial\varphi)^2(0) + C_4^{(2)}(x)\varphi\Box\varphi(0) + C_4^{(3)}(x)\varphi^4(0) + \dots \tag{13.154}$$

Здесь  $C_2(x)$  обозначает используемую выше функцию  $C(x)$ . Число операторов растет по мере увеличения канонической размерности. Но даже тогда, когда рассматриваются лишь первые недоминирующие члены, возникают новые трудности. Напомним, что в результате перенормировки происходит смешивание операторов, имеющих одну и ту же каноническую размерность и одинаковые квантовые числа. Кроме того, в этом случае перенормировка не будет в точности мультипликативной, поскольку вставка оператора размерности  $d$  требует введения контрчленов размерности, меньшей или равной  $d$ . Чтобы в  $C_2(x)$  отделить  $m^2x^2$ -поправки от членов, дающих вклад в  $C_4^{(1)}(x)$ , необходимо принять специальное соглашение. В безмассовой теории, в которой подобные проблемы не возникают, необходимо рассмотреть только мультипликативную (в матричном смысле) перенормировку этих операторов. В этом случае доминирующий вклад в  $C_N^{(j)}$  определяется уравнением

$$\left\{ \left[ x \cdot \frac{\partial}{\partial x} + \beta(g) \frac{\partial}{\partial g} + d_A + \gamma_A(g) + d_B + \gamma_B(g) - d_N \right] \delta^{ij} - (\gamma_N^T)^{ij}(g) \right\} C_N^{(j)}(x) = 0, \tag{13.155}$$

где  $(\gamma_N^T)^{ij}(g) = \gamma_N^{ji}(g)$  — транспонированная матрица аномальных размерностей операторов  $O_N^{(j)}$ , смешивающихся при перенормировке [см. формулу (13.75)]. При наличии ультрафиолетовой фиксированной точки  $g_\infty$  наблюдаемые аномальные размерности получаются диагонализацией матрицы  $\gamma_N^{ji}(g_\infty)$ . В асимптотически свободной теории аналогичную диагонализацию нужно проводить для матрицы  $c^j$ , представляющей собой обобщение множителя  $c$  из (13.152).

Между операторами  $O_N$  могут существовать связи, обусловленные выбором конкретной динамической схемы. В качестве примера можно привести уравнения движения.

Неперенормированная связная функция Грина регуляризованной  $\varphi^4$ -теории удовлетворяет в евклидовом пространстве уравнениям движения

$$\left[ (-\square + m_0^2)_\Delta \frac{\delta}{\delta j(x)} + \frac{g_0}{3!} \frac{\delta^3}{\delta j(x)^3} - j(x) \right] e^{G_b(i)} = 0, \quad (13.156)$$

где оператор  $(-\square + m_0^2)_\Delta$  является обратным по отношению к регуляризованному пропагатору. Продифференцируем по  $j(y)$  и перейдем к пределу  $x \rightarrow y$ . В результате получим тождество, из которого для сильносвязных функций Грина следует, что

$$\Gamma_\varphi(-\square + m_0^2)_\Delta \varphi(x), b + \frac{g_0}{3!} \Gamma_{\varphi^3}(x), b = \varphi(x) \frac{\delta}{\delta \varphi(x)} \Gamma_b. \quad (13.157)$$

В перенормированном виде это соотношение приводит к смешиванию между операторами с размерностью два и четыре. Как следствие можно записать такие функции  $a_i(g)$  и  $b(g)$ , для которых справедливо следующее тождество:

$$a_1(g) \Gamma_\varphi^{(n)} \square \varphi(q; p_a) + a_2(g) \Gamma_{\varphi^3}^{(n)}(q; p_a) + a_3(g) \Gamma_{(\delta\varphi)^2}^{(n)}(q; p_a) + b(g) \Gamma_{m^2\varphi^2}^{(n)}(q; p_a) = \sum_{a=1}^n \Gamma^{(n)}(p_1, \dots, p_a + q, \dots, p_n). \quad (13.158)$$

В безмассовой теории член, дающий доминирующий вклад, и пропорциональный  $b(g)$ , обращается в нуль. Применяя в обеих частях равенства (13.158) уравнение Каллана—Симанзика, заключаем, что матрица  $\gamma^{ij}$  для операторов размерности четыре должна иметь нулевое собственное значение.

Аналогичное явление возникает, когда операторы  $O_N$  (или их комбинация) являются генераторами непрерывных симметрий, сохраняющимися токами, тензором энергии-импульса и т. п. Соответствующие аномальные размерности обращаются в нуль. Мы уже сталкивались с такой ситуацией при изучении электродинамики, в которой это имело своим следствием наличие одного единственного коэффициента  $\beta$  в уравнении (13.28) для инвариантного заряда. С более общей ситуацией приходится иметь дело в  $\sigma$ -модели, в которой имеет место мягкое нарушение симметрии, т. е. обусловленное членами в лагранжиане, имеющими размерность меньше четырех. Напомним полученный Симанзиком результат, гласящий, что контрчлены, имеющие размерность больше  $d$ , всегда можно сделать симметричными. Отсюда, в частности, следует, что перенормировка волновой функции не нарушает симметрии.

Пусть при таких обстоятельствах  $J_0^\mu$  — неперенормированный ток (с размерностью три), а  $D_0$  — его дивергенция. Предположим, что размерность последней меньше четырех [см. выражение (11.3)]:

$$\partial_\mu J_0^\mu = D_0, \quad \delta(x^0 - y^0) [J_0^0(x), \varphi_0(y)] = \tau \varphi_0(x) \delta^4(x - y), \quad (13.159)$$

где  $\varphi_0$  — голое поле, являющееся вектором во внутреннем пространстве, а  $\tau$  соответствует матричному представлению генератора.

Если предположить, что аномалии отсутствуют, то тождество Уорда  $\partial_\mu^x \langle 0 | T J_\mu^x(x) \varphi_0(y_1) \dots \varphi_0(y_n) | 0 \rangle = \langle 0 | T D_0(x) \varphi_0(y_1) \dots \varphi_0(y_n) | 0 \rangle +$

$$+ \sum_{a=1}^n \langle 0 | T \varphi_0(y_1) \dots \tau \varphi_0(y_a) \dots \varphi_0(y_n) | 0 \rangle \delta^4(x - y_a) \quad (13.160)$$

в перенормированной форме принимает следующий вид:

$$Z_J^{-1} Z^{n/2} \partial_\mu^x \langle 0 | T J_\mu(x) \varphi(y_1) \dots \varphi(y_n) | 0 \rangle =$$

$$= Z_D^{-1} Z^{n/2} \langle 0 | T D(x) \varphi(y_1) \dots \varphi(y_n) | 0 \rangle +$$

$$+ Z^{n/2} \sum_{a=1}^n \langle 0 | T \varphi(y_1) \dots \tau \varphi(y_a) \dots \varphi(y_n) | 0 \rangle \delta^4(x - y_a). \quad (13.161)$$

Здесь мы учли тот факт, что перенормировка волновой функции не нарушает симметрию, т. е. она является одной и той же для любой компоненты оператора  $\varphi$ . Поскольку перенормированные функции конечны, отсюда следует, что  $Z_J = Z_D$  также конечно, и при надлежащей нормировке, согласующейся с (13.159), получаем

$$Z_J = Z_D = 1. \quad (13.162)$$

Отсюда следует, что точные или мягко нарушенные симметрии соответствуют токам, для которых

$$\gamma_J = \gamma_D = 0. \quad (13.163)$$

Чтобы размерность дивергенции  $D$  была меньше четырех, она должна иметь явную зависимость от массовых параметров теории. Например, в теории с фермионами, в которой киральная инвариантность нарушается массовым членом с размерностью три, сохранение аксиального тока является мягко нарушенным. В отсутствие аномалий

$$\partial_\mu (\bar{\psi} \gamma^\mu \gamma^5 \psi) = 2m i \bar{\psi} \gamma^5 \psi. \quad (13.164)$$

Если придерживаться не зависящего от массы рецепта перенормировки, то  $m$  зависит от фактора растяжения  $\lambda$  в соответствии с (13.96). Пусть  $\gamma_m$  — аномальная размерность оператора  $\bar{\psi} \psi$ . Согласно (13.163), мы можем записать

$$\left\{ -q \cdot \frac{\partial}{\partial q} - p_a \cdot \frac{\partial}{\partial p_a} + \gamma_m(g) m \frac{\partial}{\partial m} + \beta(g) \frac{\partial}{\partial g} + 4 + \gamma_m(g) - \right.$$

$$\left. - \sum_{a=1}^n [d_a + \gamma_a(g)] \right\} \Gamma_{i\bar{\psi}\gamma^5\psi}^{(n)}(q; p_a) = 0. \quad (13.165)$$

Явная зависимость от  $m$  привела к появлению дополнительного члена  $\gamma_m$ , причем  $m$  следует интерпретировать как аномальную размерность оператора  $i\bar{\psi}\gamma^5\psi$ , равную, таким образом, аномальной

размерности оператора  $\bar{\psi}\psi$ :

$$\gamma_{i\bar{\psi}\psi} = \gamma_{\bar{\psi}\psi}.$$

Этот результат не должен вызывать удивления, поскольку обе аномальные размерности можно вычислять в киральном пределе, в котором они, очевидно, совпадают.

Применим эти идеи к адронным симметриям и их связи с эффективным лагранжианом слабых нелептонных взаимодействий.

Рассмотрим модель сильных, электромагнитных и слабых взаимодействий, основанную на калибровочной группе  $G_S \otimes G_W$ , следуя линии, намеченной в конце гл. 12. Группа  $G_S$  обычно является группой цвета [например,  $SU(3)$ ], а  $G_W$  спонтанно нарушена до группы фазовых преобразований  $U(1)_Q$ , соответствующей электрическому заряду.

В нулевом порядке по  $\alpha$  и  $G_F \sim \alpha/M_W^2$  лагранжиан сильных взаимодействий запишется в виде

$$\mathcal{L}_S = i\bar{\psi}D_S\psi - \bar{\psi}M\psi - \frac{1}{4}F_{S,\mu\nu}F_S^{\mu\nu},$$

где  $M$  — массовая матрица, наличие которой частично или целиком связано с нарушением  $G_W$ . Вайнберг показал, что соответствующее переопределение полей в любом случае позволяет привести  $M$  к диагональной вещественной форме, не содержащей членов с  $\gamma_5$ , в то время как кинетический член остается инвариантным. Иными словами, в нулевом порядке по  $\alpha$  четность и странность

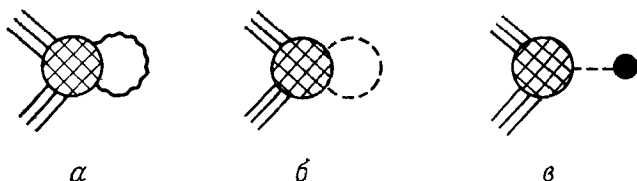


РИС 13.15. Вклады низшего порядка в эффективный нелептонный лагранжиан.  $a$  — калибровочный бозон;  $b$  — мезон Хиггса;  $c$  — вклад диаграммы типа головастик.

естественным образом сохраняются, тогда как изотопическая симметрия требует дополнительной гипотезы  $M_d = M_u$  для  $d$ - и  $u$ -кварков. Покажем, что в порядке  $\alpha$  четность и странность сохраняются, а нарушаются они лишь в порядке  $G_F \sim \alpha/M_W^2$ .

Чтобы проверить это, введем эффективный лагранжиан слабых нелептонных взаимодействий, основанный на вычислении процессов обмена в низшем порядке (рис. 13.15):

$$\mathcal{L}_{\text{эфф}} = -g_W^2 \int d^4x \Delta^{\mu\nu}(x, m^2) \langle T J_\mu(x) J_\nu^\dagger(0) \rangle + \mathcal{L}_{(b)} + \mathcal{L}_{(c)}. \quad (13.166)$$

Только первый член, соответствующий обмену калибровочным бозоном, выписан явно. Два других члена соответствуют вкладу  $\mathcal{L}_{(b)}$ , связанному с обменом хиггсовским мезоном, и вакуумному среднему хиггсовских бозонов, приводящему к перенормировке массовой матрицы  $M$ . Ожидается, что вклад хиггсовских бозонов имеет по крайней мере порядок  $\alpha(m^2/M_W^2)$ , где  $m$  — адронная масса.

Что касается первого члена, то, если отвлечься от вклада, связанного с безмассовым фотоном, оставшиеся вклады, соответствующие обмену тяжелыми  $W$ - и  $Z$ -мезонами, можно проанализировать с помощью разложения произведения двух токов на малых расстояниях. Доминирующий вклад порядка  $\alpha \sim g_W^2$  приводит к дополнительной перенормировке массовой матрицы, тогда как недоминирующие вклады содержат множители  $\alpha/M_W^2 \sim G$ . Матрицу  $M + \delta M$  снова можно привести к диагональной вещественной форме. Коротко говоря, в порядке  $\alpha$  четность и странность, очевидно, все еще сохраняются. Однако этого нельзя сказать об изотопической инвариантности. Но даже в настоящее время все попытки получить абсолютные предсказания относительно величины предполагаемой электромагнитной разницы масс не имели реального успеха.

Разложением на малых расстояниях можно воспользоваться также для объяснения динамических правил отбора, наблюдаемых в нелептонных слабых переходах, таких, как правило  $\Delta I = 1/2$ ,  $|\Delta S| = 1$ . Доминирующий вклад обусловлен операторами с размерностью шесть, содержащими по четыре фермионных поля. Действительно, операторы размерности три приводят только к переопределению массовой матрицы, а вклад операторов с размерностью четыре может быть скомпенсирован перенормировкой волновой функции. Согласно вычислениям, проведенным Гайяр и Ли, а также Альтарелли и Майани, переходы с  $\Delta I = 1/2$  усилены по отношению к переходам с  $\Delta I = 3/2$  логарифмическим фактором  $[\ln(M_W^2/m^2)]^2$ , принимающим значения порядка 5—7 в зависимости от используемой модели, тогда как наблюдаемое усиление характеризуется фактором 20. Обсуждение этих вопросов затрудняется отсутствием абсолютной нормировки матричных элементов рассматриваемых операторов.

### 13.5.3. Разложение на световом конусе

С целью анализа поправок к партонной модели глубоконеупругих процессов необходимо расширить область применимости операторных разложений. О том, какого вида обобщения потребуются для перехода к светоподобным интервалам, можно догадаться, исходя из анализа случая свободных полей [см. (13.112)]. Если отвлечься от несущественных для дальнейшего изложения индексов у токов, то асимптотическое разложение, справедливость которого нам хотелось бы показать, имеет вид

$$J\left(\frac{x}{2}\right) J\left(-\frac{x}{2}\right) \underset{x^2 \rightarrow 0}{\sim} \sum_{N, \alpha} C_{N, \alpha}(x^2) x_{\mu_1} \cdots x_{\mu_N} O_{N, \alpha}^{\mu_1 \cdots \mu_N}(0), \quad (13.167)$$

где операторы  $O_{N, \alpha}^{\mu_1 \cdots \mu_N}$  симметричны относительно лоренцевых индексов и имеют нулевой след по любой паре индексов. В рамках теории возмущений и с точностью до логарифмов мы ожидаем, что коэффициенты  $C_{N, \alpha}(x)$  пропорциональны

$$C_{N, \alpha}(x^2) \underset{x^2 \rightarrow 0}{\sim} (x^2)^{(d_{O_{N, \alpha}} - N - 2d_j)/2}, \quad (13.168)$$

где  $d_j$  — каноническая размерность тока  $J$ .

В отличие от ранее рассмотренного случая заданному поведению на световом конусе, например доминирующему, соответствуют

вклады бесконечного числа членов. Вклады можно сгруппировать в соответствии с величиной, которую Гросс и Трейман назвали «твистом». Она представляет собой разность

$$\Delta = d_{0N, \alpha} - N \quad (13.169)$$

между размерностью оператора и его спином. Строго говоря, последний характеризует соответствующее представление однородной группы Лоренца. Тот факт, что требуется бесконечное число членов, следует приветствовать, поскольку матричные элементы этого произведения токов должны давать масштабную функцию  $F(x)$ . Знание такой функции эквивалентно знанию бесконечной последовательности чисел, например ее моментов. В случае когда структурные функции лептон-адронного рассеяния представляются в виде абсорбтивной части комптоновской амплитуды, целое число  $N$  представляет собой верхнее ограничение значения спина, обменяемого в  $t$ -канале.

Ведущий вклад обусловлен операторами низшего твиста. В теории, включающей фермионы со спином  $1/2$ , скалярные и калибровочные бозоны, эта величина принимает значение 2 для диагональных матричных элементов электромагнитных токов. Эти операторы являются билинейными по полям (с точностью до ковариантных производных) и имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} & i^N \varphi^* \overleftrightarrow{D}_{\mu_1} \dots \overleftrightarrow{D}_{\mu_N} \varphi, \\ & i^{N-1} \bar{\psi} \gamma_{\mu_1} \overleftrightarrow{D}_{\mu_2} \dots \overleftrightarrow{D}_{\mu_N} \psi, \\ & i^{N-2} F_{\mu_1\nu} \overleftrightarrow{D}_{\mu_2} \dots \overleftrightarrow{D}_{\mu_{N-1}} F_{\mu_N}^{\nu}. \end{aligned} \quad (13.170)$$

Симметризация и вычитание сверток подразумеваются. В этом списке упомянуты только «физические» поля, чтобы не вдаваться пока в тонкости, специфические для калибровочных теорий. (См. ниже некоторые замечания по данному вопросу.)

Для проверки разложения (13.167) свяжем его с разложением на малых расстояниях, выделяя вклад, соответствующий обмену определенным спином в кросс-сопряженной комптоновской амплитуде. Эта величина зависит только от переменной  $q^2$ , т. е. от квадрата импульса виртуального фотона, и в пределе  $-q^2 \rightarrow \infty$  доминирующий вклад в нее дает оператор с соответствующим спином и твистом 2 в разложении Вилсона. Благодаря этому можно получить определенную информацию о моментах структурных функций.

Для краткости по-прежнему будем пренебрегать векторным характером токов и последующим тензорным анализом структурных функций. Таким образом, будем считать, что мы имеем дело

со скалярной амплитудой

$$A(q^2, \nu) = i \int d^4x e^{iq \cdot x} \langle p | T J \left( \frac{x}{2} \right) J \left( -\frac{x}{2} \right) | p \rangle. \quad (13.171)$$

При конечных  $q^2$  и  $\nu$  эту амплитуду можно разложить по ортогональным полиномам переменной  $z = iv/m\sqrt{-q^2}$ , которая играет роль косинуса угла между 4-векторами  $p$  и  $q$ . Эти полиномы ортогональны с весом  $dz \sqrt{1-z^2}$  и являются обобщением полиномов Лежандра, относящихся к группе  $O(3)$ , на случай  $O(4)$ -инвариантности. Читатель, интересующийся деталями, связанными с упомянутой проекцией и ограничениями, возникающими вследствие свойств положительности структурных функций, может обратиться к работе Нахтманна, цитируемой в примечаниях к данной главе. Здесь мы ограничимся упрощенным рассмотрением.

Подставляя (13.167) в определение амплитуды (13.171), находим

$$A(q^2, \nu) = i \int d^4x e^{iq \cdot x} \sum_{N, \alpha} C_{N, \alpha}(x^2 - i\epsilon) x_{\mu_1} \dots x_{\mu_N} \langle p | O_{N, \alpha}^{\mu_1 \dots \mu_N} | p \rangle.$$

Мы позаботились об аналитических свойствах в  $x$ -пространстве, добавив к переменной  $x^2$  бесконечно малую отрицательную мнимую величину. Определим следующие величины:

$$\begin{aligned} \langle p | O_{N, \alpha}^{\mu_1 \dots \mu_N} | p \rangle &= a_{N, \alpha} (p^{\mu_1} \dots p^{\mu_N} + \text{Свертки}), \\ \tilde{C}_{N, \alpha}(q^2) &= i \left( -iq^2 \frac{\partial}{\partial q^2} \right)^N \int d^4x e^{iq \cdot x} C_{N, \alpha}(x^2 - i\epsilon). \end{aligned} \quad (13.172)$$

Выраженный через эти величины доминирующий вклад в  $A(q^2, \nu)$  записывается следующим образом:

$$A(q^2, \nu) \approx \sum_{N, \alpha} \left( \frac{2p \cdot q}{-q^2} \right)^N a_{N, \alpha} \tilde{C}_{N, \alpha}(q^2). \quad (13.173)$$

Вклады операторов  $O_{N, \alpha}$  связаны с коэффициентами тейлоровского разложения амплитуды  $A$  по степеням масштабной переменной  $\omega = x^{-1} = 2(p \cdot q)/(-q^2)$ , тогда как в экспериментах измеряется абсорбтивная часть амплитуды  $A$  при  $\omega > 1$ . Необходимо поэтому выделить коэффициент при  $\omega^N$  с тем, чтобы можно было воспользоваться разложением на малых расстояниях для изучения поведения  $\tilde{C}_{N, \alpha}(q^2)$  при больших отрицательных  $q^2$ . В этом обсуждении использование переменной  $\omega$  более удобно, чем обратной ей величины  $x$ .

Поскольку точка  $\omega = 0$  находится вне пределов, в которых можно проводить эксперимент, нам не удастся обойтись без аналитического продолжения. Его можно выполнить с помощью дисперсионного соотношения для амплитуды  $A$  виртуального комптоновского рассеяния вперед. В качестве скачка на разрезе при этом используются структурные функции  $W(q^2, \nu)$ . В этом дисперсион-

ном соотношении переменной величиной является энергия  $v/m$ , или, что при фиксированном  $q^2$  сводится к тому же самому, величина  $\omega$ . В случае  $\omega < -1$  при определении скачка необходимо воспользоваться свойствами рассматриваемой амплитуды относительно кроссинг-преобразования. В фиктивном скалярном случае, рассматриваемом здесь,  $W(q, p) = -W(-q, p)$  или  $W(q^2, -\omega) = -W(q^2, \omega)$ . В реальном случае векторных токов  $W_{\mu\nu}(q, p) = -W_{\nu\mu}(-q, p)$ , откуда следует, что все три структурные функции  $W_1, W_2, W_3$  можно считать нечетными функциями относительно  $\omega$ .

Необходимо привлечь также дополнительную информацию о числе вычитаний  $k$ , достаточном при всех  $N$  в области больших отрицательных  $q^2$ . Если  $\text{Im} A = \pi W$ , а  $P_{k-1}$  — полином от  $\omega$  степени  $k-1$  с зависящими от  $q^2$  коэффициентами, то

$$A(q^2, \omega) = P_{k-1}(q^2, \omega) + \int_{|\omega'| > 1} \frac{d\omega'}{\omega' - \omega} \left(\frac{\omega}{\omega'}\right)^k W(q^2, \omega'). \quad (13.174)$$

Разлагая амплитуду в ряд в окрестности точки  $\omega = 0$ , получаем также

$$A(q^2, \omega) = P_{k-1}(q^2, \omega) + \sum_{N \geq k} \omega^N \int_{|\omega'| > 1} \frac{d\omega'}{\omega'^{N+1}} W(q^2, \omega'). \quad (13.175)$$

При  $N \geq k$  отсюда следует искомое соотношение, связывающее моменты  $M_N(q^2)$  структурных функций и коэффициенты Вилсона:

$$M^N(q^2) = \int_{|\omega| > 1} \frac{d\omega}{\omega^{N+1}} W(q^2, \omega) \underset{-q^2 \rightarrow \infty}{\sim} \sum_{\alpha} a_{N,\alpha} \bar{C}_{N,\alpha}(q^2). \quad (13.176)$$

При фиксированном  $N$  ведущий вклад в правой части этого выражения соответствует операторам твиста 2. Условие положительности  $W$  приводит к тому, что моменты представляют собой выпуклую функцию по переменной  $N$ . Чем меньше  $N$ , тем более чувствительны  $M^N$  к поведению в асимптотической области, поскольку при больших  $N$  мы имеем дело главным образом с областью  $\omega \sim 1$ .

В соответствии с предполагаемым характером теории возможны следующие варианты поведения  $M^N(q^2)$  при больших  $q^2$ :

$$M^N(q^2) \sim \begin{cases} \text{const} & \text{наивный скейлинг,} \\ (-q^2)^{-\gamma_0 N (g_\infty)^2} & \text{нетривиальная фиксированная точка,} \\ (\ln -q^2)^{-c_0 N^{1/2b}} & \text{асимптотическая свобода.} \end{cases} \quad (13.177)$$

В свете имеющихся экспериментальных данных последний вариант выглядит наиболее предпочтительным.



Читатель может спросить, нельзя ли объяснить наблюдаемое масштабное поведение существованием нетривиальной фиксированной точки  $g_\infty$  при условии, что все  $\gamma_{O_N}(g_\infty)$  равны нулю. Однако это означало бы обращение в нуль аномальной размерности самого фундаментального поля:

$$\gamma_{O_N}(g_\infty) = \nu N \Rightarrow \gamma(g_\infty) = 0.$$

С учетом свойства положительности отсюда мы можем заключить, что теория является свободной. Следовательно, асимптотическая свобода остается единственной возможностью.

Вернемся на короткое время к обсуждению калибровочных теорий, которые только и могут привести к асимптотической свободе, и исследуем специфические усложнения, возникающие, как обычно, в этом случае. В разложении произведения физически наблюдаемых и, следовательно, калибровочно-инвариантных операторов могут, однако, появляться нефизические операторы, в частности составленные из духовых полей. Такие операторы встречаются в контрчленах для функций Грина и, следовательно, необходимы при вычислении аномальных размерностей физических операторов. Эти дополнительные операторы можно охарактеризовать с помощью метода, основанного на тождествах Уорда и развитого в гл. 12 для функций Грина, не имеющих вставок. Результат, записанный в виде (12.163), можно обобщить следующим образом. Используя те же обозначения, что и в гл. 12, можно показать, что калибровочно-инвариантный оператор  $O$  размерности  $d$  генерирует контрчлены с размерностью, меньшей или равной  $d$ , и имеющие те же квантовые числа, что и  $O$ , причем эти контрчлены либо калибровочно-инвариантны, либо имеют вид  $\sigma O'$ . Второй класс операторов стабилен относительно перенормировок, поскольку  $\sigma^2 = 0$ . Следовательно, вычисление аномальных размерностей можно провести в базе  $\{O_{\text{inv}}^i, \sigma O'^j\}$ . В этом случае матрица аномальных размерностей является блочно-треугольной с заполненным верхним углом. Только субматрица, соответствующая подпространству  $O_{\text{inv}}^i$ , имеет прямое отношение к вычислению физических аномальных размерностей. В благоприятной ситуации, используя некоторые аргументы, можно упростить анализ, сводя его непосредственно к вычислению лишь этой субматрицы. Кроме того, матричные элементы калибровочно-инвариантных операторов между физическими состояниями, а также и их аномальные размерности не зависят от калибровочного параметра. Поэтому член  $\xi (\partial/\partial\lambda)$ , введенный в выражение (13.74), можно опустить.

В заключение дадим сводку результатов применения калибровочных теорий сильных взаимодействий к процессам глубоконеупругого лентон-адронного рассеяния. Эти результаты были получены Джорджи и Политцером, а также Гроссом и Вилчеком. Для процессов электро- (или мюонного) рождения описанный выше анализ применяется к структурным функциям  $mW_1$  и  $\nu W_2/mx$ , обозначаемым в совокупности  $f_a(q^2, x)$ , и к их моментам

$$M_a^{(N)}(q^2) = \int_0^1 dx x^{N-1} f_a(q^2, x). \quad (13.178)$$

В данном случае из списка (13.170) вклад дают операторы двух последних типов. Здесь мы сталкиваемся с проблемой смешивания операторов, относящихся (при фиксированном  $N$ ) к этим двум типам. Поскольку мы имеем дело с асимптотически свободной тео-

рий, наивный масштабный закон логарифмически нарушается:

$$M^{(N)}(q^2) \sim \sum_{\alpha} \bar{a}_{N, \alpha} (\ln -q^2)^{-A_{N, \alpha}}, \quad (13.179)$$

причем показатели степени при  $\ln(-q^2)$  вычислимы. Суммирование в (13.179) производится по собственным векторам матрицы перенормировок. Входящие сюда коэффициенты  $\bar{a}_{N, \alpha}$ , вообще говоря, остаются неизвестными.

Наиболее просто провести рассмотрение для низшего момента с  $N=2$ . В этом случае одним из операторов является тензор энергии-импульса  $T_{\mu\nu}$  с нулевой аномальной размерностью, а также рассматривается оператор, дающий другой, нелидирующий вклад. Кроме того, нам известен матричный элемент оператора  $T_{\mu\nu}$  между протонными состояниями:

$$\langle p | T_{\mu\nu} | p \rangle = 2p_{\mu}p_{\nu}.$$

В результате мы приходим к следующему правилу сумм:

$$\lim_{-q^2 \rightarrow \infty} \int_0^1 dx x [2mW_1(q^2, x)] = \lim_{-q^2 \rightarrow \infty} \int_0^1 dx \left[ \frac{vW_2(q^2, x)}{m} \right] = a, \quad (13.180)$$

где  $a$  выражается через средний квадрат заряда  $\langle Q^2 \rangle$  фермионных составляющих следующим образом:

$$a = \langle Q^2 \rangle \frac{T_f}{2C_f + T_f} = \frac{\langle Q^2 \rangle}{1 + 2(N^2 - 1)/nf}. \quad (13.181)$$

Последнее выражение относится к случаю, когда имеется  $f$  типов фермионов, принадлежащих одному и тому же представлению калибровочной группы  $SU(N)$ , имеющему размерность  $n$ . Например, в случае группы  $SU(3)$  для трех типов триплетов, имеющих заряды  $2/3$ ,  $-1/3$ ,  $-1/3$ , величина  $a$  равна  $2/25$ , а для четырех триплетов с зарядами  $2/3$ ,  $-1/3$ ,  $-1/3$ ,  $2/3$  имеем  $a = 5/42 \approx 0,12$ . В партонной модели со свободными кварками соответствующее значение в соответствии с (13.110) равно  $a = \langle Q^2 \rangle$ . Уменьшение величины  $a$  в асимптотически свободной модели связано с тем, что часть энергии-импульса переносится нейтральными глюонами.

При  $N \geq 4$  разумным приближением является учет только оператора, соответствующего меньшей аномальной размерности. При больших  $N$  показатель  $A_N$  ведет себя как  $\ln N$ .

Хотя в отсутствие дополнительной информации решение задачи о восстановлении структурных функций по их моментам является безнадежным делом, некоторые результаты можно получить, если вдобавок к (13.179) учесть еще и свойство положительности. Напри-

мер, для любого  $N$  можно записать

$$f(q^2, x) \leq \frac{1}{8} \int_x^{x+\varepsilon} dy \left(\frac{y}{x}\right)^{N-1} f(q^2, y) < \frac{1}{\varepsilon} \int_0^1 dy \left(\frac{y}{x}\right)^{N-1} f(q^2, y) \leq \\ \leq \text{const} \frac{1}{x^{N-1}} [\ln(-q^2)]^{-A} N. \quad (13.182)$$

Поскольку  $A_N \sim \ln N$  при  $N \rightarrow \infty$ , можно ожидать, что функция  $f$  при фиксированных  $x$  убывает быстрее, чем любая степень величины  $\ln(-q^2)$ . Из этого свойства с учетом правила сумм (13.180) следует, что по мере увеличения переменной  $-q^2$  структурные функции при малых  $x$  должны возрастать.

Асимптотический режим для моментов достигается очень медленно, поскольку недоминирующие вклады подавлены лишь множителем порядка  $\ln[\ln(-q^2/\mu^2)]/\ln(-q^2/\mu^2)$ . Это следует из формулы двухпетлевого приближения [см. (13.90)] для эффективного заряда. Кроме того, степень приближения зависит от неизвестного масштаба, при котором эффективный заряд становится малым. Вдобавок, при конечных  $q^2$  могут влиять также массовые члены.

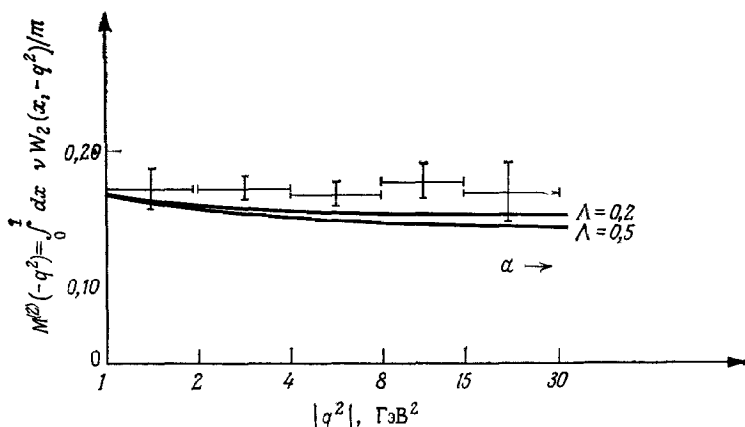


РИС. 13.16. Теоретические кривые для второго момента структурной функции, соответствующей рождению мюона, и экспериментальные значения, полученные Андерсоном и др. [см. *Anderson H. L. et al. — Phys. Rev. Lett.*, 1977, ser. B, vol. 38, p. 1450]. Этот рисунок и один из рис. 13.17 представил нам Г. Альтарелли

С другой стороны, вычисление моментов из экспериментальных данных также не является простой задачей, поскольку для этого необходимо проводить измерения при очень высоких энергиях (малых  $x$ ) и при любых конечных  $q^2$  замена переменной  $x$  на  $x' = x + O(1/q^2)$  может оказать заметное влияние на результаты.

Несмотря на эти трудности, сравнение результатов, предска-

ываемых теорий, с экспериментальными данными можно считать успешным. Удобно переписать выражение для эффективной константы связи (13.129) в терминах одного параметра  $\Lambda$ , который задает необходимый масштаб:

$$\frac{g^2(q^2)}{4\pi} = \frac{12\pi}{(33-2f) \ln(-q^2/\Lambda^2)}. \quad (13.183)$$

Это выражение относится к случаю, когда группой цвета является  $SU(3)$  ( $C=3$ ) и имеется  $f$  триплетов кварков ( $f$  ароматов). Наилучшие результаты, полученные на 1977 г. подгонкой к эксперименту

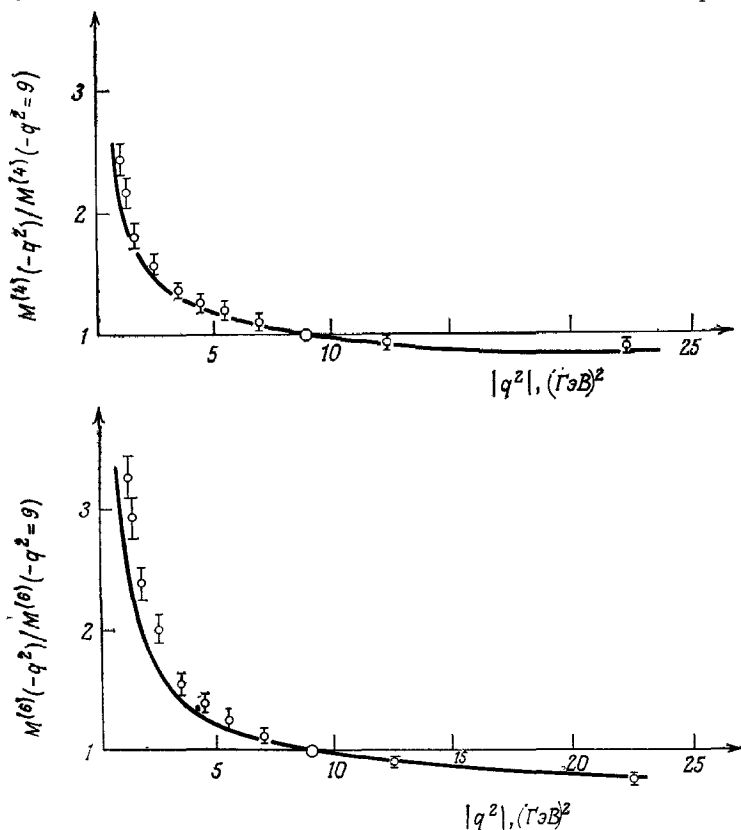


РИС. 13.17. Четвертый и шестой моменты для рождения мюона, нормированные при  $-q^2=9$   $(\text{ГэВ})^2$ . Экспериментальные данные получены Андерсоном и др. (Сообщение на конференции в Гамбурге в 1977 г.)

при  $f=4$ , соответствуют  $\Lambda \sim 400 \pm 200$  МэВ. На рис 13.16 показаны результаты сравнения экспериментальных данных для момента  $M^{(2)}$  структурных функций глубоконеупругого мюонного рассея-

ния с теоретическими предсказаниями. Стрелка указывает предел (13.180) ( $\alpha=0,12$  при  $f=4$ ). В случае более высоких моментов (рис. 13.17) можно сравнить с экспериментом только отношение  $M^{(N)}(q^2)/M^{(N)}(q_0^2)$ .

В случае глубоконеупругого нейтринного рассеяния аналогичный анализ необходимо провести для разложения на световом конусе произведения слабых токов:  $(V_\mu - A_\mu)^{1+i_2}(x) (V_\nu - A_\nu)^{1-i_2}(0)$ . В правой части разложения при этом возникают следующие операторы твиста два:

$$\begin{aligned}
 \text{а)} \quad & i^{N-1} \bar{\psi} \gamma_{\mu_1} \overleftrightarrow{D}_{\mu_2} \dots \overleftrightarrow{D}_{\mu_N} (1 \pm \gamma_5) \psi; \\
 \text{б)} \quad & i^{N-1} \bar{\psi} \gamma_{\mu_1} \overleftrightarrow{D}_{\mu_2} \dots \overleftrightarrow{D}_{\mu_N} (1 \pm \gamma_5) \frac{\lambda^a}{2} \psi; \\
 \text{в)} \quad & i^{N-2} F_{\mu_1 \nu} \overleftrightarrow{D}_{\mu_2} \dots \overleftrightarrow{D}_{\mu_{N-1}} F_{\mu_N}^\nu.
 \end{aligned} \tag{13.184}$$

Необходимо учесть также третью структурную функцию  $f_3 = \nu W_3/m$  [см. формулу (13.106)]. Комбинируя амплитуды, соответствующие рассеянию нейтрино и антинейтрино на протонах и нейтронах, можно выделить канал, имеющий данные квантовые числа. Например, в разность  $W^{(\nu)} - W^{(\bar{\nu})}$  дает вклад только октетный оператор (13.184 б).

Должны выполняться правила сумм, являющиеся следствием того, что генераторы адронных симметрий коммутируют с генераторами калибровочной группы. Так, правило сумм Адлера (11.105) должно выполняться при всех  $q^2$ :

$$\int_1^\infty \frac{d\omega}{\omega} (\nu W_2^{(\nu n)} - \nu W_2^{(\nu p)}) = 2m. \tag{13.185}$$

Другие правила сумм выполняются только в асимптотике, причем имеет место логарифмический выход на асимптотику. К таковым, например, относится правило сумм Каллана—Гросса, которое записывается в виде

$$\frac{\int_1^\infty (d\omega/\omega^{N+1}) W_L(\omega, q^2)}{\int_1^\infty (d\omega/\omega^{N+1}) \nu W_2(\omega, q^2)} \underset{-q^2 \rightarrow \infty}{\sim} O\left(\frac{1}{\ln -q^2}\right). \tag{13.186}$$

В партонной модели величина  $W_L = (2/\omega) W_1 - \nu W_2/m^2$  обращается в нуль [см. (13.109)].

## ПРИМЕЧАНИЯ

Первые работы по ренормгруппе были выполнены Штюкельбергом и Петерманом (*Stueckelberg E. C. G., Peterman A.*—*Helv. Phys. Acta*, 1953, vol. 26, p. 499) и Гелл-Манном и Лоу (*Gell-Mann M., Low F. E.*—*Phys. Rev.*, 1954 vol. 95, p. 1300).

Приложения к квантовой электродинамике обсуждали Бейкер и Джонсон (*Baker M., Johnson K.*—*Phys. Rev.*, 1969, vol. 183, p. 1292), которые вычислили вклад третьего порядка в  $\psi$ -функцию, а также Адлер (*Adler S. L.*—*Phys. Rev.*, 1972, ser. D, vol. 5, p. 3021). Ландау, Абрикосов и Халатников исследовали вопросы самосогласованности КЭД (ДАН СССР, 1954, т. 95, с. 1177). В электродинамике  $\beta$ -функция до третьего порядка заимствована из работы: *Rafaël E., de, Rosner J. L.*—*Ann. of Phys. (New York)*, 1974, vol. 82, p. 369.

Тождества Уорда для нарушенной масштабной инвариантности были введены в работах *Symanzik K.*—*Comm. Math. Phys.*, 1970, vol. 18, p. 227; *Callan C. G.*—*Phys. Rev.*, 1970, ser. D, vol. 2, p. 1541. Впервые генератор растяжений рассматривали Каллан, Коулмен и Джекив (*Callan C. G., Coleman S., Jackiw R.*—*Ann. of Phys. (New York)*, 1979, vol. 59, p. 42). Обобщение этих тождеств было дано Вайнбергом (*Weinberg S.*—*Phys. Rev.*, 1973, ser. D, vol. 8, p. 3497).

Однопетлевое вычисление  $\beta$ -функции для неабелевых калибровочных полей было выполнено Гроссом и Вилчеком (*Gross D. J., Wilczek F.*—*Phys. Rev. Lett.*, 1973, vol. 30, p. 1343), а также Политцером (*Politzer H. D.*—*Phys. Lett.*, 1973, vol. 30, p. 1346). Двухпетлевые вычисления проведены Касуэллом (*Caswell W. E.*—*Phys. Rev. Lett.*, 1974, vol. 33, p. 244), Джонсом (*Jones D. R. T.*—*Nucl. Phys.*, 1974, ser. B, vol. 75, p. 531), а также Белавиным и Мигдалом (Письма в ЖЭТФ, 1974, т. 19, с. 181).

В работах: (*Parisi G.*—*Nuovo Cimento Lett.*, 1973, vol. 7, p. 84; *Callan C. G., Gross D. J.*—*Phys. Rev.*, 1973, ser. D, vol. 8, p. 4383) обсуждаются следствия свойств положительности аномальных размерностей.

Теорема об асимптотической свободе установлена Коулменом и Гроссом (*Coleman S., Gross D. J.*—*Phys. Rev. Lett.*, 1973, vol. 31, p. 851).

Обзор глубоконеупругого рассеяния можно найти, например, в докладе Гилмана (*Gilman F.* В кн.: *Proc. of the XVII Intern. Confer. on High Energy Physics (London, 1974)*.—*Chilton, Didcot, U. K.*: The Science Research Council, Rutherford Laboratory, 1975).

Партонная динамика в системе бесконечного импульса обсуждается в работах: *Feynman R. P.*—*Phys. Rev. Lett.*, 1969, vol. 23, p. 1415; *Bjorken J. D., Paschos E. A.*—*Phys. Rev.*, 1969, vol. 185, p. 1975; *Drell S. D., Yan T. M.*—*Ann. Phys. (New York)*, 1971, vol. 66, p. 578. Связь между феноменологической моделью и разложившимися на световом конусе обсуждается в докладе: *Frishtman Y.* В кн.: *Proc. of the Sixteenth Intern. Confer. on High Energy Physics (Batavia)*, vol. 4/ed. J. D. Jackson, A. Roberts.—*Batavia, Ill.*: National Accelerator Laboratory, 1972. Детальное изложение этих вопросов дано в книге: *Feynman R. P. Photon-Hadron Interaction.*—*Reading, Mass.*: Benjamin, 1972 [Имеется перевод: *Фейнман Р.* Взаимодействие фотонов с адронами.—*М.*: Мир, 1975.]

Разложения на малых расстояниях были предложены Вилсоном (*Wilson K. G.*—*Phys. Rev.*, 1969, vol. 179, p. 1499; *Phys. Rev.*, 1971, ser. D, vol. 3, p. 1818). Детальное изучение проведено в работе: *Zimmerman W.*—*Ann. Phys. (New York)*, 1973, vol. 77, pp. 536, 570.

Приложение к правилам отбора в слабых взаимодействиях можно найти у Вайнберга (*Weinberg S.*—*Phys. Rev. Lett.*, 1973, vol. 31, p. 494; *Phys. Rev.*, 1974, ser. D, vol. 8, p. 4482; *Rev. Mod. Phys.*, 1974, vol. 46, p. 255). По правилу  $\Delta I = 1/2$  в лептонных распадах см. работы: *Gaillard M. K., Lee B. W.*—*Phys. Rev. Lett.*, 1974, vol. 33, p. 108; *Altarelli G., Maiani L.*—*Phys. Lett.*, 1974, ser. B, vol. 52, p. 351.

Обобщение разложения Вилсона на случай светового конуса (когда необходимо бесконечное суммирование) предложено в работе: *Brandt R. A., Preparata G.*—Nucl. Phys., 1971, ser. B, vol. 27, p. 541. В статье: *Nachtmann O.*—Nucl. Phys., 1973, ser. B, vol. 63, p. 273 обсуждаются теоретико-групповые аспекты и ограничения, налагаемые свойствами положительности. Проблемы калибровочной инвариантности изучались в работах: *Dixon J. A.*—Nucl. Phys., 1975, ser. B, vol. 99, p. 420; *Klubeig-Stern H., Zuber J. B.*—Phys. Rev., 1975, ser. D, vol. 12, p. 3159; *Lee B. W., Joglekar S.*—Ann. Phys. (New York), 1976, vol. 97, p. 160.

Приложения асимптотически свободных теорий к моментам структурных функций в случае глубоконеупругих процессов рассматриваются в статьях: *Georgi H., Politzer H. D.*—Phys. Rev. 1974, ser. D, vol. 9, p. 416; *Gross D. J., Wilczek F.*—Phys. Rev., 1974, ser. D, vol. 9, p. 920

К этому очень неполному списку мы добавили следующие обзоры и записи лекций, которые были наиболее полезны при подготовке данной главы: *Coleman S.* В кн.: *Properties of the Fundamental Interactions*/ed. A. Zichichi.—Bologna: Editrice Compositori, 1973; *Crewther R. J.* В кн.: *Weak and Electromagnetic Interactions at High Energies* (Cargèse, 1975)/ed. M. Lévy, J. L. Basdevant, D. Speiser. R. Gastmans.—New York: Plenum Press, 1976; *Callan C. G., Gross D. J.* В кн.: *Methods in Field Theory*/ed. R. Balian, J. Zinn-Justin.—Amsterdam: North-Holland, 1976; *Politzer H. D.*—Phys. Rev., 1974, vol. 14, p. 129.

Приложения асимптотической теории поля к критическим явлениям обсуждаются в статье: *Brézin E., Le Guillou J. C., Zinn-Justin J.* Phase Transitions and Critical Phenomena, vol. VI/ed. C Domb, M. S. Green.—New York: Academic Press, 1977, а также в учебнике: *Amit D.* Field Theory, the Renormalization Group, and Critical Phenomena.—New York: McGraw-Hill, 1978.

## ПРИМЕЧАНИЕ РЕДАКТОРА ПЕРЕВОДА

Обзор применений ренормализационной группы имеется в статьях: *Владимиров А. А., Ширков Д. В.*—УФН, 1976, т. 120, с. 439; *Efremov A. V., Ginzburg I. F.*—Forts. Physik, 1974, Band 22, s. 575. Результаты вычисления  $\beta$ -функции в трехпетлевом приближении в калибровочных теориях приведены в работе: *Vladimirov A. A., Tarasov O. V., Zharkov A. Yu.*—Phys. Lett. B, 1980, vol. 93, p. 429.

Подробный анализ операторных разложений имеется в книге: *Завьялов О. И.* Перенормированные диаграммы Фейнмана—М.: Наука, 1979. В связи с «точечноподобным» поведением см. книгу: *Марков М. А.* Нейтрино.—М.: Наука, 1964. Описание поведения глубоконеупругих процессов в рамках подхода, основанного на гипотезе автомодельности, дано в обзоре: *Матвеев В. А., Мурадян Р. М., Тавхелидзе А. Н.*—ЭЧАЯ, 1971, т. 2, вып. 5. Применения операторных разложений в физике высоких энергий рассмотрены в статье: *Brandt R.*—Acta Phys. Acad. Sci. Hungaricae, 1972, vol. 31, p. 2131.

# ПРИЛОЖЕНИЕ

## П.1. Метрика

Метрический тензор:

$$g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (\text{П.1})$$

Производные по контравариантным ( $x^\mu$ ) и ковариантным ( $x_\mu$ ) координатам иногда сокращенно обозначаются как

$$\partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu}, \quad \partial^\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x_\mu}. \quad (\text{П.2})$$

Суммирование по повторяющимся лоренцевым (обозначаются греческими буквами) или пространственным (латинские буквы) индексам подразумевается, если нет оговорок:

$$V \cdot W = V_\mu W^\mu = V^\mu W_\mu = g_{\mu\nu} V^\mu W^\nu = g^{\mu\nu} V_\mu V_\nu = V^0 W^0 - \mathbf{V} \cdot \mathbf{W} = V^0 W^0 - V^i W^i. \quad (\text{П.3})$$

3-вектор и трехмерная часть контравариантного 4-вектора обозначаются полужирными буквами:

$$\mathbf{V} = \{V^i, i = 1, 2, 3\} = \{V_x, V_y, V_z\}. \quad (\text{П.4})$$

Исключение делается только для трехмерного градиента

$$\nabla = \{\nabla_x, \nabla_y, \nabla_z\} = \left( \frac{\partial}{\partial x^i} = \partial_i \right) = \left( -\partial^i = -\frac{\partial}{\partial x_i} \right). \quad (\text{П.5})$$

Оператор Д'Аламбера

$$\square = \partial^\mu \partial_\mu = \partial_0^2 - \nabla^2. \quad (\text{П.6})$$

Оператор 4-импульса

$$p^\mu = i\partial^\mu = \{i\partial^0, -i\nabla\}. \quad (\text{П.7})$$

Полностью антисимметричный тензор Леви-Чивиты:

$$\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} = \begin{cases} +1, & \text{если оператор } \{\mu, \nu, \rho, \sigma\} \text{ получен четным числом} \\ & \text{перестановок из } \{0, 1, 2, 3\}, \\ -1, & \text{если нечетным числом перестановок,} \\ 0 & \text{в остальных случаях;} \end{cases} \quad (\text{П.8})$$

$$\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} = -\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}. \quad (\text{П.9})$$



Полезные тождества:

$$\begin{aligned}
 \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\varepsilon^{\mu'\nu'\rho'\sigma'} &= -\det(g^{\alpha\alpha'}), & \alpha &= \mu, \nu, \rho, \sigma; \\
 & & \alpha' &= \mu', \nu', \rho', \sigma'; \\
 \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\varepsilon_{\mu\nu\rho'\sigma'} &= -\det(g^{\alpha\alpha'}), & \alpha &= \nu, \rho, \sigma, \\
 & & \alpha' &= \nu', \rho', \sigma'; \\
 \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\varepsilon_{\mu\nu}{}^{\rho'\sigma'} &= -2(g^{\rho\rho'}g^{\sigma\sigma'} - g^{\rho\sigma'}g^{\rho'\sigma}); \\
 \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\varepsilon_{\mu\nu\rho}{}^{\sigma'} &= -6g^{\sigma\sigma'}; \\
 \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} &= -24.
 \end{aligned}
 \tag{П.10}$$

Трёхмерный антисимметричный тензор:

$$\varepsilon^{ijk} = \varepsilon_{ijk} = 1, \text{ если } (i, j, k) \text{ получено четным числом перестановок из } (1, 2, 3).$$

## П.2. Матрицы Дирака и спиноры

Матрицы  $\gamma$  удовлетворяют соотношениям

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = \gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}, \tag{П.11}$$

где  $\gamma^0$  — эрмитова матрица, а  $\gamma^i$  — антиэрмитовы матрицы, записываемые через  $\beta$ - и  $\alpha$ -матрицы следующим образом:

$$\gamma^0 = \beta, \quad \gamma = \beta\alpha; \tag{П.12}$$

$$\begin{aligned}
 \gamma_5 = \gamma^5 &= i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = -\frac{i}{4!}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma = \\
 &= -i\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3 = i\gamma^3\gamma^2\gamma^1\gamma^0 = \gamma_5^\dagger;
 \end{aligned}
 \tag{П.13}$$

$$\gamma_5^2 = 1, \quad \{\gamma_5, \gamma^\mu\} = 0. \tag{П.14}$$

Коммутатор  $\gamma$ -матриц

$$\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2} [\gamma^\mu, \gamma^\nu] \tag{П.15}$$

удовлетворяет соотношениям

$$\begin{aligned}
 \gamma^\mu\gamma^\nu &= g^{\mu\nu} - i\sigma^{\mu\nu}, \\
 [\gamma_5, \sigma^{\mu\nu}] &= 0, \\
 \gamma_5\sigma^{\mu\nu} &= \frac{i}{2}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\sigma_{\rho\sigma};
 \end{aligned}
 \tag{П.16}$$

$$\gamma_5\gamma^0\gamma = \Sigma, \quad \text{где } \Sigma^i = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}\sigma^{jk}. \tag{П.17}$$

Эрмитово сопряжение:

$$\begin{aligned}
 \gamma^0\gamma^\mu\gamma^0 &= \gamma^{\mu\dagger}, \\
 \gamma^0\gamma_5\gamma^0 &= -\gamma_5^\dagger = -\gamma_5, \\
 \gamma^0(\gamma_5\gamma^\mu)\gamma^0 &= (\gamma_5\gamma^\mu)^\dagger, \\
 \gamma^0\sigma^{\mu\nu}\gamma^0 &= (\sigma^{\mu\nu})^\dagger.
 \end{aligned}
 \tag{П.18}$$

Для любых спиноров  $\psi_1$  и  $\psi_2$  и любых  $4 \times 4$ -матриц  $\Gamma$  справедливо тождество

$$(\bar{\psi}_1 \Gamma \psi_2)^* = \bar{\psi}_2 (\gamma_0 \Gamma^\dagger \gamma_0) \psi_1; \quad (\text{П.19})$$

соответствующее тождество для двух антикоммутирующих полей со спинном 1/2 включает дополнительный знак минус. Матрица зарядового сопряжения:

$$\begin{aligned} C \gamma_\mu C^{-1} &= -\gamma_\mu^T, & C \gamma_5 C^{-1} &= \gamma_5^T, \\ C \sigma_{\mu\nu} C^{-1} &= -\sigma_{\mu\nu}^T, & C (\gamma_5 \gamma_\mu) C^{-1} &= (\gamma_5 \gamma_\mu)^T. \end{aligned} \quad (\text{П.20})$$

Матрицы Паули:

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (\text{П.21})$$

Представление Дирака:

$$\begin{aligned} \gamma^0 &= \beta = \sigma^3 \otimes I = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}, & \alpha &= \sigma^1 \otimes \sigma = \begin{pmatrix} 0 & \sigma \\ \sigma & 0 \end{pmatrix}, \\ \gamma &= \beta \alpha = i\sigma^2 \otimes \sigma = \begin{pmatrix} 0 & \sigma \\ -\sigma & 0 \end{pmatrix}, & \gamma_5 &= \gamma^5 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix} = \sigma^1 \otimes I, \\ \gamma^5 \gamma^0 &= -i\sigma^2 \otimes I = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{pmatrix}, & \gamma^5 \gamma &= -\sigma^3 \otimes \sigma = \begin{pmatrix} -\sigma & 0 \\ 0 & \sigma \end{pmatrix}, \\ \gamma^5 \gamma^0 \gamma &= \Sigma = I \otimes \sigma = \begin{pmatrix} \sigma & 0 \\ 0 & \sigma \end{pmatrix}; \\ \sigma^{ij} &= i\sigma^1 \otimes \sigma^i = i\alpha^j = i \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ \sigma^i & 0 \end{pmatrix}, & \sigma^{ij} &= \varepsilon_{ijk} I \otimes \sigma^k = \varepsilon_{ijk} \Sigma^k = \varepsilon_{ijk} \begin{pmatrix} \sigma^k & 0 \\ 0 & \sigma^k \end{pmatrix}; \\ C &= i\gamma^2 \gamma^0 = -i\sigma^1 \otimes \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i\sigma^2 \\ -i\sigma^2 & 0 \end{pmatrix}, \\ C^T &= C^\dagger = -C, & CC^\dagger &= C^\dagger C = I, \quad C^2 = -I. \end{aligned} \quad (\text{П.22})$$

Представление Майорана:

$$\begin{aligned} \gamma^0 &= \beta = \sigma^1 \otimes \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^2 \\ \sigma^2 & 0 \end{pmatrix}, \\ \alpha^1 &= -\sigma^1 \otimes \sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma^1 \\ -\sigma^1 & 0 \end{pmatrix}, & \alpha^2 &= \sigma^3 \otimes I = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}, \\ \alpha^3 &= -\sigma^1 \otimes \sigma^3 = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma^3 \\ -\sigma^3 & 0 \end{pmatrix}; \\ \gamma^1 &= iI \otimes \sigma^3 = \begin{pmatrix} i\sigma^3 & 0 \\ 0 & i\sigma^3 \end{pmatrix}, & \gamma^2 &= -i\sigma^2 \otimes \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma^2 \\ \sigma^2 & 0 \end{pmatrix}, \\ \gamma^3 &= -iI \otimes \sigma^1 = \begin{pmatrix} -i\sigma^1 & 0 \\ 0 & -i\sigma^1 \end{pmatrix}, & \gamma_5 &= \gamma^5 = \sigma^3 \otimes \sigma^2 = \begin{pmatrix} \sigma^2 & 0 \\ 0 & -\sigma^2 \end{pmatrix}; \\ C &= -i\sigma^1 \otimes \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i\sigma^2 \\ -i\sigma^2 & 0 \end{pmatrix} \text{ удовлетворяет также соотношениям} \end{aligned} \quad (\text{П.23})$$

Связь представления Майорана с представлением Дирака:

$$\gamma_{\text{Майоран}}^\mu = U \gamma_{\text{Дирак}}^\mu U^\dagger, \text{ причем } U = U^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} I & \sigma^2 \\ \sigma^2 & -I \end{pmatrix}.$$

Киральное представление:

$$\begin{aligned} \gamma^0 &= \beta = -\sigma^1 \otimes I = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ -I & 0 \end{pmatrix}, \\ \alpha &= \sigma^3 \otimes \sigma = \begin{pmatrix} \sigma & 0 \\ 0 & -\sigma \end{pmatrix}, \\ \gamma &= i\sigma^2 \otimes \sigma = \begin{pmatrix} 0 & \sigma \\ -\sigma & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_5 = \gamma^5 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}; \\ C &= -i\sigma^3 \otimes \sigma^2 = \begin{pmatrix} -i\sigma^2 & 0 \\ 0 & i\sigma^2 \end{pmatrix} \text{ удовлетворяет соотношениям (П.23);} \\ \sigma^{0i} &= i \begin{pmatrix} \sigma^i & 0 \\ 0 & -\sigma^i \end{pmatrix}, \quad \sigma^{ij} = \varepsilon_{ijk} \begin{pmatrix} \sigma^k & 0 \\ 0 & \sigma^k \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (\text{П.25})$$

Связь кирального представления с представлением Дирака:

$$\gamma_{\text{киральн}}^\mu = U \gamma_{\text{Дирак}}^\mu U^\dagger, \quad \text{где } U = \frac{1}{\sqrt{2}} (1 - \gamma_5 \gamma_0) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} I & -I \\ I & I \end{pmatrix}. \quad (\text{П.26})$$

Свертка по 4-индексам:

$$\begin{aligned} a \not{b} &= a \cdot b - i\sigma_{\mu\nu} a^\mu b^\nu, \\ \gamma^\lambda \gamma_\lambda &= 4, \\ \gamma^\lambda \gamma^\mu \gamma_\lambda &= -2\gamma^\mu, \\ \gamma^\lambda \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma_\lambda &= 4g^{\mu\nu}, \\ \gamma^\lambda \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma_\lambda &= -2\gamma^\rho \gamma^\nu \gamma^\mu, \\ \gamma^\lambda \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma \gamma_\lambda &= 2(\gamma^\sigma \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho + \gamma^\rho \gamma^\nu \gamma^\mu \gamma^\sigma), \\ \gamma^\lambda \sigma^{\mu\nu} \gamma_\lambda &= 0, \quad \gamma^\lambda \sigma^{\mu\nu} \gamma^\rho \gamma_\lambda = 2\gamma^\rho \sigma^{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (\text{П.27})$$

Следы:

$$\text{Sp } I = 4, \quad \text{Sp } \gamma^\mu = 0, \quad \text{Sp } \gamma^5 = 0. \quad (\text{П.28})$$

След произведения нечетного числа  $\gamma^\mu$ -матриц равен нулю:

$$\begin{aligned} \text{Sp } (\gamma^5 \gamma^\mu) &= 0, \quad \text{Sp } (\gamma^\mu \gamma^\nu) = 4g^{\mu\nu}, \quad \text{Sp } (\sigma^{\mu\nu}) = 0, \quad \text{Sp } (\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^5) = 0, \\ \text{Sp } (\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma) &= 4(g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} - g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} + g^{\mu\sigma} g^{\nu\rho}), \\ \text{Sp } (\gamma^5 \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma) &= -4i\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} = 4i\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}, \end{aligned} \quad (\text{П.29})$$

$$\text{Sp } (a_1 a_2 \dots a_{2n}) = \text{Sp } (a_{2n} \dots a_2 a_1),$$

$$\begin{aligned} \text{Sp } (a_1 \dots a_{2n}) &= a_1 \cdot a_2 \text{Sp } (a_3 \dots a_{2n}) - a_1 \cdot a_3 \text{Sp } (a_2 a_4 \dots a_{2n}) + \dots \\ &\dots + a_1 \cdot a_{2n} \text{Sp } (a_2 \dots a_{2n-1}) = \\ &= 4 \sum \varepsilon (a_{i_1} \cdot a_{j_1}) \dots (a_{i_n} \cdot a_{j_n}), \end{aligned} \quad (\text{П.30})$$

где  $\varepsilon$  — сигнатура перестановки  $i_1 j_1 \dots i_n j_n$ , а сумма берется по  $(2n)!/2^n n!$  различным парам с номерами, удовлетворяющими соотношениям  $1 = i_1 < i_2 < \dots < i_n$ ,  $i_k < j_k$ .

Спиноры Дирака  $u$  и  $v$ , т. е. решения уравнения Дирака

$$(\not{p} - m) u^{(\alpha)}(p) = 0, \quad (\not{p} + m) v^{(\alpha)}(p) = 0, \quad (\text{П.31})$$

являются функциями 4-импульса  $p$  на массовой поверхности, причем  $p^0 = E_p \equiv \sqrt{m^2 + \mathbf{p}^2}$ , и им приписывают индексы поляризации  $\alpha = 1, 2$ .

Сопряженные спиноры:

$$\bar{u} = u^\dagger \gamma^0, \quad \bar{v} = v^\dagger \gamma^0, \quad (\text{П.32})$$

$$\bar{u}^{(\alpha)}(p) (\not{p} - m) = 0, \quad \bar{v}^{(\alpha)}(p) (\not{p} + m) = 0. \quad (\text{П.33})$$

Нормировка:

$$\begin{aligned} \bar{u}^{(\alpha)}(p) u^{(\beta)}(p) &= \delta^{\alpha\beta}, & \bar{v}^{(\alpha)}(p) v^{(\beta)}(p) &= -\delta^{\alpha\beta}, \\ \bar{v}^{(\alpha)}(p) u^{(\beta)}(p) &= \bar{u}^{(\alpha)}(p) v^{(\beta)}(p) = 0. \end{aligned} \quad (\text{П.34})$$

Плотности заряда и тока:

$$\begin{aligned} \bar{u}^{(\alpha)}(p) \gamma^0 u^{(\beta)}(p) &= u^{\dagger(\alpha)}(p) u^{(\beta)}(p) = \bar{u}^{(\alpha)}(\bar{p}) u^{(\beta)}(p) = \frac{E_p}{m} \delta^{\alpha\beta}, \\ \bar{v}^{(\alpha)}(p) \gamma^0 v^{(\beta)}(p) &= v^{\dagger(\alpha)}(p) v^{(\beta)}(p) = -\bar{v}^{(\alpha)}(\bar{p}) v^{(\beta)}(p) = \frac{E_p}{m} \delta^{\alpha\beta}, \\ \bar{p} &= (p^0, -\mathbf{p}). \end{aligned} \quad (\text{П.35})$$

Операторы проектирования на состояния с положительной и отрицательной энергиями:

$$\begin{aligned} \Lambda_+(p) &= \frac{\not{p} + m}{2m} = \sum_{\alpha=1, 2} u^{(\alpha)}(p) \otimes \bar{u}^{(\alpha)}(p), \\ \Lambda_-(p) &= \frac{m - \not{p}}{2m} = -\sum_{\alpha=1, 2} v^{(\alpha)}(p) \otimes \bar{v}^{(\alpha)}(p). \end{aligned} \quad (\text{П.36})$$

Проекторы на состояния с определенной поляризацией вдоль пространственно-подобного 4-вектора  $n$ , ортогонального  $p$ ;  $n \cdot p = 0$ :

$$\begin{aligned} u(p, n) \otimes \bar{u}(p, n) &= \frac{\not{p} + m}{2m} \frac{1 + \gamma_5 \not{n}}{2}, \\ -v(p, n) \otimes \bar{v}(p, n) &= \frac{m - \not{p}}{2m} \frac{1 + \gamma_5 \not{n}}{2}. \end{aligned} \quad (\text{П.37})$$

Пояснения к выбору спиральных состояний даны в разд. 2.2.1 (см. т. 1 настоящей книги).

Тождества Гордона:

$$\begin{aligned} \bar{u}^{(\alpha)}(p) \gamma^\mu u^{(\beta)}(q) &= \frac{1}{2m} \bar{u}^{(\alpha)}(p) [(p+q)^\mu + i\sigma^{\mu\nu} (p-q)_\nu] u^{(\beta)}(q), \\ \bar{u}^{(\alpha)}(p) \gamma^\mu \gamma^5 u^{(\beta)}(q) &= \frac{1}{2m} \bar{u}^{(\alpha)}(p) [(p-q)^\mu \gamma^5 + i\sigma^{\mu\nu} (p+q)_\nu \gamma^5] u^{(\beta)}(q); \end{aligned} \quad (\text{П.38})$$

например,

$$\begin{aligned} \bar{u}^{(\alpha)}(p) \not{q} u^{(\beta)}(p) &= \delta^{\alpha\beta} \frac{p \cdot q}{m}, \\ u^{(\alpha) \dagger}(p) \alpha u^{(\beta)}(p) &= \delta^{\alpha\beta} \frac{p}{m}. \end{aligned} \quad (\text{П.39})$$

### П.3. Нормировка состояний, S-матрица, унитарность и формулы для сечений

Нормировка однобозонных состояний:

$$\langle p | p' \rangle = 2\omega_p (2\pi)^3 \delta^3(p - p'), \quad (\text{П.40})$$

где  $\omega_p \equiv \sqrt{p^2 + m^2}$  и опущены индексы поляризации.

Нормировка однофермионных состояний:

$$\langle p | p' \rangle = \frac{\omega_p}{m} (2\pi)^3 \delta^3(p - p'). \quad (\text{П.41})$$

[Для безмассовых фермионов, таких, как нейтрино, в промежуточных вычислениях надежнее использовать нормировку в виде (П.40).]

S-матрица и инвариантная амплитуда рассеяния:

$$S = I + iT, \\ \langle f | T | i \rangle = (2\pi)^4 \delta^4(P_f - P_i) \mathcal{F}_{fi}. \quad (\text{П.42})$$

Дифференциальное сечение рассеяния из начального состояния  $i = \{1, 2\}$ , не содержащего массивные фермионы, в конечном состоянии  $f = \{3, 4, \dots, n\}$ :

$$d\sigma = \frac{1}{4 \Gamma[(p_1 \cdot p_2)^2 - m_1^2 m_2^2]^{1/2}} \frac{|\mathcal{F}_{fi}|^2}{S} d\tilde{p}_3 \dots d\tilde{p}_n (2\pi)^4 \delta^4(P_i - P_f). \quad (\text{П.43})$$

Фактор S для случая, когда имеется  $k_i$  идентичных частиц сорта  $i$  в конечном состоянии:

$$S = \prod_i k_i!. \quad (\text{П.44})$$

Мера  $d\tilde{p}$  обычно обозначает величину

$$d\tilde{p} = \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{m}{2\omega_p}, \quad (\text{П.45a})$$

за исключением массивных фермионов, для которых

$$d\tilde{p} = \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{m}{\omega_p}. \quad (\text{П.45b})$$

Соответственно, если падающие частицы 1 и (или) 2 являются массивными фермионами, выражение (П.43) следует умножить на  $2m_1$  и (или)  $2m_2$ .

Формула (П.44) может быть дополнена усреднением по поляризациям начальных и суммированием по поляризации конечных состояний.

Скорость распада  $d\Gamma = d(\tau^{-1})$  частицы с массой M на частицы 3, 4, ..., n в системе покоя частицы определяется правой частью выражения (П.43), причем фактор протока  $1/4 [(p_1 \cdot p_2)^2 - m_1^2 m_2^2]^{1/2}$  заменяется на  $1/2M$ . В случае когда имеются фермионы, следует произвести изменения, указанные выше.

Дифференциальное сечение рассеяния  $1+2 \rightarrow 3+4$  двух нетождественных частиц:

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{1}{64\pi s q^2} |\mathcal{F}(s, t)|^2, \quad (\text{П.46a})$$

или

$$\frac{d\sigma}{d\Omega_{\text{ц.м}}} = \frac{|q'|}{|q|} \frac{1}{64\pi^2 s} |\mathcal{F}(s, t)|^2; \quad (\text{П.46b})$$

здесь использованы переменные Мандельштама:  $s = (p_1 + p_2)^2$ ,  $t = (p_1 - p_2)^2$  и начальный и конечный 4-импульсы в системе центра масс:

$$4q^2 = \frac{\lambda(s, m_1^2, m_2^2)}{s} = \frac{[s - (m_1 + m_2)^2][s - (m_1 - m_2)^2]}{s}, \quad (\text{П.47})$$

$$4q'^2 = \frac{\lambda(s, m_3^2, m_4^2)}{s}.$$

Оптическая теорема: полное сечение рассеяния  $i \rightarrow \dots$  выражается через мнимую часть амплитуды упругого рассеяния вперед  $\mathcal{F}_{ii}(s, t=0)$ :

$$\sigma_{\text{полн}}(i) = \frac{\text{Im} \mathcal{F}_{ii}(s, t=0)}{\lambda^{1/2}(s, m_1^2, m_2^2)}. \quad (\text{П.48})$$

Разложение на парциальные амплитуды для бесспиновых частиц

$$\mathcal{F}_{fi}(s, t) = 16\pi \sum_l (2l+1) P_l(\cos\theta) \mathcal{F}_{fi}^l(s), \quad (\text{П.49})$$

причем

$$2|q||q'| \cos\theta = t - u + \frac{(m_1^2 - m_2^2)(m_3^2 - m_4^2)}{s},$$

$$s + t + u = m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 + m_4^2.$$

Унитарность ниже упругого порога:

$$\mathcal{F}^l(s) = \frac{s^{l/2}}{2|q|} e^{i\delta_l(s)} \sin \delta_l(s). \quad (\text{П.50})$$

Обобщение этих формул на случай частиц со спинами кратко рассматривалась в гл. 5. (см. т. I настоящей книги).

## П.4. Правила Фейнмана

Приведем правила Фейнмана для вычисления конкретной функции Грина или амплитуды рассеяния.

1. Изобразить все возможные топологически различные диаграммы — связанные или несвязные (но без вакуум-вакуумных поддиаграмм), дающие вклад в исследуемый процесс в требуемом порядке.
2. Каждой диаграмме и каждой внутренней линии сопоставить пропагатор:

$$\begin{array}{c} \bullet \text{---} k \text{---} \bullet \\ \text{---} \end{array} \quad \frac{i}{k^2 - m^2 + i\epsilon} \quad \begin{array}{l} \text{для бозона} \\ \text{со спином 0,} \end{array} \quad (\text{П.51})$$

$$\begin{array}{c} \alpha \text{---} p \text{---} \beta \\ \text{---} \end{array} \quad \left( \frac{i}{p - m + i\epsilon} \right)_{\beta\alpha} \quad \begin{array}{l} \text{для фермиона} \\ \text{со спином 1/2,} \end{array} \quad (\text{П.52})$$

$$\begin{array}{c} \bullet \text{---} k \text{---} \bullet \\ \text{---} \end{array} \quad -i \left( \frac{g_{\rho\sigma} - k_\rho k_\sigma / \mu^2}{k^2 - \mu^2 + i\epsilon} + \frac{k_\rho k_\sigma / \mu^2}{k^2 - \mu^2 / \lambda + i\epsilon} \right) = \quad (\text{П.53a})$$

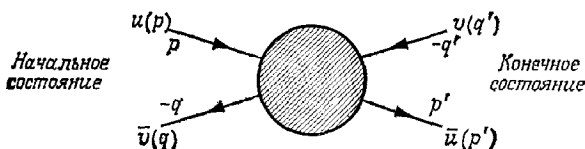
$$= -i \left[ \frac{g_{\rho\sigma}}{k^2 - \mu^2 + i\epsilon} - \frac{(1 - \lambda^{-1}) k_\rho k_\sigma}{(k^2 - \mu^2 + i\epsilon)(k^2 - \mu^2 / \lambda + i\epsilon)} \right] \quad (\text{П.53б})$$

для векторного бозона с массой  $\mu$  в калибровке Штюкельберга, т. е. описываемого лагранжианом с кинетической частью

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)^2 - \frac{\lambda}{2} (\partial \cdot A)^2 + \frac{\mu^2}{2} A^2.$$

3. Каждой вершине сопоставить вес, соответствующий мономиальному лагранжиану взаимодействия. Вес составляется из следующих величин: а) фактора, обусловленного вырождением по тождественным частицам в данной вершине; б) константы связи, входящей в  $i\mathcal{L}_{вз}$ ; в) возможных тензоров по внутренним индексам и г) дельта-функции  $(2\pi)^4 \delta^4(\Sigma p)$ , выражающей закон сохранения 4-импульса. Каждой производной поля  $\partial_\mu \phi$  сопоставляется величина  $-i p_\mu$ , где  $p$  — соответствующий входящий импульс. Ниже мы приведем вершины, встречающиеся в наиболее общепринятых теориях.
4. Выполнить интегрирование по всем внутренним импульсам с мерой  $d^4 k / (2\pi)^4$ , возможное после регуляризации.
5. Вклад от каждой диаграммы умножить:
  - а) на фактор симметрии  $1/S$ , где  $S$  — порядок группы перестановок внутренних линий и вершин, оставляющих диаграмму неизменной, когда внешние линии являются фиксированными;
  - б) на  $-1$  для каждой фермионной петли;
  - в) на общий знак от внешних фермионных линий, отвечающий их перестановке, по отношению к аргументам данной функции Грина (см. гл. 6 в т. 1 настоящей книги).

Эти правила дают усеченные функции, не содержащие факторов, соответствующих внешним линиям. Связные функции  $(2\pi)^4 \delta^4(\Sigma p) G_c(p_1, \dots, p_n)$  получаются, если оставить только связные диаграммы и приписать внешним линиям пропагаторы (П.51) — (П.53). Вклады в сильносвязные функции Грина  $i(2\pi)^4 \delta^4(\Sigma p) \Gamma(p_1, \dots, p_n)$  дают одночасгично неприводимые диаграммы. Окончательно, амплитуду рассеяния  $i\mathcal{G}(2\pi)^4 \delta^4(P_i - P_f)$  можно получать с точностью до перенормировки, согласно сформулированным выше правилам, в предположении, что внешние линии находятся на массовой поверхности, т. е. полагая  $p_i^2 = m_i^2$ , и при условии, что внешние фермионные линии снабжены спинорами  $u(p)$ ,  $v(q')$ ,  $\bar{u}(p')$ ,  $\bar{v}(q)$  в соответствии с тем, входят ли линии в диаграмму или выходят из нее и принадлежат ли они начальному или конечному состоянию ( $p = p' = m$ ,  $q = q' = -m$ ).



**Стандартные теории**

**1.  $\varphi^4$ -теория:**

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial\varphi)^2 - \frac{m^2}{2} \varphi^2 - \frac{\lambda\varphi^4}{4!}.$$

Пропагатор (П.51):


Вершина  $-i\lambda (2\pi)^4 \delta^4(\Sigma p)$ .

**2. Квантовая электродинамика:**

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)^2 - \frac{\lambda}{2} (\partial \cdot A)^2 + \bar{\psi} (i\partial - eA - m) \psi.$$

Фотонный пропагатор (П.53б) с  $\mu^2=0$ .

Фермионный пропагатор (П.52):

Вершина   $-ie(\gamma_\mu)_{\beta\alpha}(2\pi)^4\delta^4(\Sigma p)$ .


3. Скалярная электродинамика:

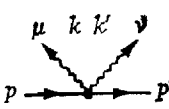
$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)^2 - \frac{\lambda}{2}(\partial \cdot A)^2 + [(\partial_\mu + ieA_\mu)\varphi]^\dagger [(\partial^\mu + ieA^\mu)\varphi] - m^2\varphi^\dagger\varphi - \frac{g}{4}(\varphi^\dagger\varphi)^2.$$


Фотонный пропагатор (П.53) с  $\mu^2=0$ .

Скалярный пропагатор (П.51), направленный вдоль погога заряда.

Вершины:

  $-ie(p_\mu + p'_\mu)(2\pi)^4\delta^4(p - p' - k),$

  $2ie^2g_{\mu\nu}(2\pi)^4\delta^4(p - p' - k - k'),$

  $-ig(2\pi)^4\delta^4(p + p' - q - q').$

4. Неабелева калибровочная теория:

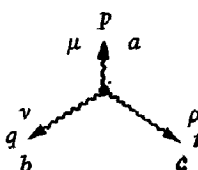
$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - gC_{abc}A_\mu b A_\nu c)(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu - gC_{abc}A^\mu b A^\nu c) - \frac{\lambda}{2}(\partial_\mu A^\mu)^2 - \bar{\eta}_a \partial_\mu (\partial^\mu \delta_{ac} - gC_{abc}A^\mu b) \eta_c + \bar{\psi} [i\gamma_\mu (\partial^\mu - gA^a_\mu T^a) - m] \psi + [(\partial^\mu - gA^a_\mu T^a) \phi]^\dagger [(\partial_\mu - gA^a_\mu T^a) \phi] - m_\phi^2 \phi^\dagger \phi.$$

Векторный пропагатор дается выражением (П. 53б) с  $\mu^2=0$ .

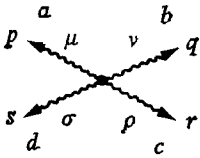
Пропагатор духа  $\eta$  дается выражением (П.51).

Знак минус для каждой духовой петли.

Вершины:

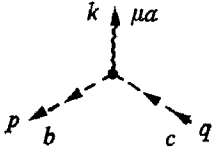
  $gC_{abc}(2\pi)^4\delta^4(p + q + r) [g_{\mu\nu}(p - q)_\rho + g_{\nu\rho}(q - r)_\mu + g_{\rho\mu}(r - p)_\nu],$





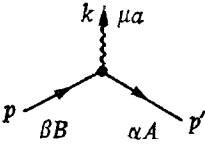
$$-ig^2(2\pi)^4\delta^4(p+q+r+s)[C_{eab}C_{ecd}(g_{\mu\rho}g_{\nu\sigma}-g_{\mu\sigma}g_{\nu\rho})+C_{eac}C_{edb}(g_{\mu\sigma}g_{\rho\nu}-g_{\mu\nu}g_{\rho\sigma})+C_{eaa}C_{ebc}(g_{\mu\nu}g_{\sigma\rho}-g_{\mu\rho}g_{\sigma\nu})].$$

Вершина вектор-духового взаимодействия:



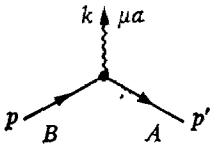
$$-gC_{abc}\rho_\mu(2\pi)^4\delta^4(k+p-q).$$

Вершина фермион-векторного взаимодействия:

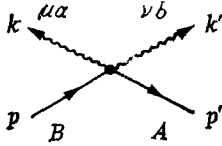


$$g(\gamma_\mu)_{\alpha\beta}T_{AB}^a(2\pi)^4\delta^4(p-p'-k).$$

Вершины скаляр-векторных взаимодействий:



$$gT_{AB}^a(p_\mu+p'_\mu)(2\pi)^4\delta^4(p-p'-k),$$



$$-ig^2g_{\mu\nu}\{T^a, T^b\}_{AB}(2\pi)^4\delta^4(p-p'-k-k'),$$

где  $T^a$ —антиэрмитов оператор.

## ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ <sup>1)</sup>

- Адлера — Вайсбергера** правило сумм 207  
**Адлера** правило сумм 199, 381  
**Адлера** условия совместимости 205  
 Аксиальная калибровка 239, 259  
 Алгебра токов 190  
 Аналитические свойства 296, 363  
 Аннигиляция пары 278, 345  
 Аномалии 218, 282, 211  
 Антикоммутации соотношения 179  
 Антилинейный, антиунитарный оператор 65  
 Аромат (квантовое число) 176, 313  
 Асимптотическая свобода 343  
 Асимптотическое (ультрафиолетовое) по-  
 ведение 47, 340
- Баба** сечение 339  
**Барманна — Мишеля — Телегди** уравне-  
 ние 31  
 Безмассовая частица Дирака 110  
 Безмассовые теории 43  
**Бекки — Рюэ — Стора** преобразование 272  
**Бендера — Ву** формула 128  
 Бета-функция ( $\beta$ -функция) 322, 334, 338  
**Бете — Гайтлера** сечение 290  
**Бете — Солитера** уравнение 135, 137  
**Боголюбова — Парасюка** теорема 37  
**Боголюбова** рекуррентная формула 29  
**Бора** радиус 94  
**Бореля** преобразование 118  
**Брейта** уравнение 156  
**Бьеркена** неравенство 199  
**Бьеркена — Феймана** скейлинг 351
- Вайнберга — Салама** модель 301  
**Вайнберга** теорема 47  
**Вайнберга** угол 304  
 Вакуум, вырождение 173, 244  
 — инвариантность 173, 182  
 Вакуумные диаграммы 322  
**Ван-дер-Ваальса** силы 173, 439  
**Вейля** уравнение 112  
**Велтона** аргументация 102  
 Вершинная функция 403  
 Весовые диаграммы 178  
**Вигнера  $\mathcal{F}$ -функция** 293  
**Вигнера** теорема 65, 185, 173  
**Вигнера — Экарта** теорема 102  
**Вика — Кутюковского** модель 143  
**Вика** поворот 361, 141  
**Вика** теорема 220, 96  
**Вика** упорядочение 138  
**Вилсона** критерии 347  
**Вилсона** разложение 361  
 Водородоподобные атомы 93  
 Вынужденное излучение и поглощение 213  
 Высокие порядки теории возмущений 115
- Гаффман** 222  
**Гелл-Манна — Лоу** функция 316  
**Гелл-Манна** матрица 179  
**Гелл-Манна — Нишиджимы** формула 179  
**Гелл-Манна — Окубо** соотношения 182  
**Гиперзаряд** 178  
**Гипотеза о сохраняющемся векторном токе**  
 (СВТ) 192  
**Гиромангнитное отношение  $g$**  29, 87  
**Гэлшоу — Илиопулоса — Майяни** механизм  
 309  
**Глубоконеупругое рассеяние** 199, 348  
**Голдстоуна** бозоны 183, 216, 291  
 Голье параметры 416  
**Гольдбергера — Греймана** соотношение 201  
**Гордона** гождество 81  
**Грассмана** алгебра антикоммутирующих пе-  
 ремен 222, 88  
**Грибова** неоднозначность 250  
**Грина** функции евклидовы 155, 360  
 — — зависимость от калибровки 281, 336  
 — — запаздывающие, опережающие 50  
 — — одночастично-неприводимые 349  
 — — производящий функционал 255, 316  
 — — связанные 256, 326  
 — — сильносвязные 349  
 — — усеченные 348  
**Гупта — Блэйлера** квантование 156
- Дайсона — Швингера** уравнение движения  
 97, 130  
**Дарвина** член 93  
**Джакоба — Вика** спиральный формализм  
 293  
**Джорджи — Гэлшоу** модель 296, 305  
**Диаграмма** головастик 327, 210  
**Динамика** на световом конусе 352  
**Дирака** матрицы 68  
**Дирака** поле (квантование) 175  
**Дирака** уравнение 68  
**Дисперсионные соотношения** 303  
**Древесная диаграмма** 346, 354  
**Дрелла — Хирна — Герасимова** правило  
 сумм 203  
**Дрожание** (zitterbewegung) 83
- Евклидов** пропагатор 155, 360
- Жесткое нарушение, жесткие вставки** 215
- Законы** сохранения 34, 46, 170  
**Зарядовое сопряжение** 108, 151, 186  
**Заряженное скалярное поле** 47, 149, 340

<sup>1)</sup> Страницы, указанные светлыми числами, относятся к т. I, а полужирными — к т. 2. — Прим. ред.

- Излучение классической заряженной частицы 54  
 Изоспиновая симметрия 305, 176  
 Изоспинная метрика 156  
 Инстантоны 245  
 Инфракрасные расходимости 59, 209, 290, 424, 44  
 Инцидентности матрица 354  
 Исключительные импульсы 44  
 Йоста — Лемана — Дайсона представление 301  
 in- и out-поля и состояния 203, 244
- Кабиббо* — *Радикатти* правило сумм 198  
*Кабиббо* угол 191, 312  
*Казимира* операторы 267  
*Казимира* эффект 170  
 Калибровочные преобразования 23, 48, 234, 236  
*Калана* — *Гросса* правило сумм 381  
*Калана* — *Симанзика* уравнения 321, 334  
*Карлуса* — *Клейна* формула 167  
 Квантование вблизи стационарной конфигурации 123  
 — каноническое 131  
 — неабелевых калибровочных теорий 248  
 — систем со связями 106  
 Кварки 180, 222, 308, 352  
*Киноситы* теорема 46  
 Киральная симметрия 200, 208  
 Киральность 110  
 Классически электромагнитный радиус 56  
 Класгеризации свойство 174  
*Клейна* — *Гордона* уравнение 49, 66, 134  
*Клейна* — *Нишины* формула 276  
*Клейна* парадокс 83  
*Клиффорда* алгебра 74  
 Ковариантная производная 48, 235  
 Когерентные состояния 146, 208, 83  
 Коллективные моды 124  
 Комптоновское рассеяние 57, 271, 344, 202  
 Константа распада пиона  $f_\pi$  200  
 Континуальные интегралы 71  
 Контролены 394, 22  
 Конфайнмент 181, 346  
 Конформная инвариантность 326  
*Коулмена* — *Вайнберга* эффективный потенциал 104  
*Коулмена* теорема 175  
 Кроссинг-перекрестная) матрица 287  
 — симметрия 275, 279, 299  
 Кулоновская калибровка 24, 250  
 Кулоновское рассеяние 118, 421  
*Кутковского* правила 379, 442
- Ландау* калибровка 165, 257  
*Ландау* прозрачный полюс 319  
*Ландау* уравнение 364  
*Лармора* формула 55  
*Лежандра* преобразование 14, 349  
*Лемана* — *Симанзика* — *Циммермана* асимптотическая теория 244  
*Лемана* эллипсы 311  
 Лептон-адронное инклюзивное рассеяние 198, 348  
 — — — в неабелевых калибровочных теориях 377  
 — — — поляризационные эффекты 356  
 Лес поддиаграмм 31  
*Ли* — *Науенберга* теорема 46  
*Лоренца* — *Дирака* уравнение 61  
*Лоренца* калибровка 26, 157, 239  
*Лоренца* преобразование 17  
*Ленара* — *Вихерта* потенциал 54  
 Лэмбовский сдвиг 102, 396, 431
- Магнитный момент 29, 87  
 — — — аномальный 418, 307  
*Майорана* представление 69  
*Максвелла* уравнения 20  
*Мандельстама* переменные 292  
*Мандельстама* представление 378  
 Масса фотона 169  
 Массивное векторное поле 166  
 Массовая вставка 332, 342  
 Масштабная инвариантность 325, 339  
 Матрица рассеяния см. *S*-матрица  
 Мера фазового пространства бозонного  
 — — — фермионного 180  
*Мермина* — *Вагнера* теорема 189  
*Меллера* сечение рассеяния 337  
 Минимальная связь 48, 84, 239  
 Монооль (*т' Ховфта* — *Полякова*) 296  
*Мютта* сечение рассеяния 122, 337  
 Мягкая вставка 215  
 Мягкие фотоны см. *Инфракрасные расходимости*
- Нарушение *CP*-инвариантности 197, 312  
 Неабелевы калибровочные теории 233  
 Нейтральный ток (слабый) 304, 308  
 Нелептонные взаимодействия 372  
 Нелинейная  $\sigma$ -модель 217  
*Нетер* теорема 39, 45  
 Низкоэнергетические теоремы 202, 216  
*Нормальные упорядочение* 138  
 — ядро 85  
 Нормировки условия 22
- Обращение времени 189, 295  
 Односторонне неприводимые диаграммы и функции *Грина* 349  
 Октетная доминантность 181  
 — модель 176  
 Операторное разложение 361  
 Операторы (составные), аномальные размерности 336  
 — жесткие, мягкие 215, 370  
 — перенормировка 40, 377  
 Оптическая теорема 291
- Параметрическое представление амплитуд *Фейнмана* 354  
 Партоновая модель 352  
*Паули* — *Любанского* вектор 43, 72, 180  
*Паули* уравнение 86  
 Перекрывающиеся расходимости 30, 58  
 Перенормировка волновой функции 245, 416  
 — заряда 416, 57  
 — квантовой электродинамики 384, 49  
 — конечная 37  
 — массы 401  
 — минимальная 61  
 — мультипликативная 416, 275  
 — неабелевых калибровочных теорий 260, 270, 297  
 — общая теория 22  
 — составных операторов 40, 377  
 —  $\sigma$  модели 211  
 Перенормируемые и неперенормируемые теории 16  
 Пион-адронного рассеяния длина 208  
 Пиона распад заряженного 192  
 — — — нейтрального 218  
 Пион-нуклонная связь 309, 201  
 Плоской волны поле, классическая частица в нем 33, 35  
 — — — частица *Дирака* в нем 89, 127

- Подсчет степени расходимости 414, 14  
 — числа диаграмм 199  
 Позитроний, распад 188, 281  
 — сверхтонкое расщепление 151  
 — спектр 151, 168  
 Поляризация вакуума 385, 58, 316  
*Померанчука* теорема 314  
*Понтрягина* индекс 243  
 Порог аномальный 371, 375  
 — нормальный 370  
 — псевдо 373  
 Предел нулевой массы 43  
 Представление взаимодействия 216, 316  
 Представления группы  $SU(2)$  293  
 — —  $SU(3)$  177  
 Производящий функционал для функций  
*Грина* связанных 256, 94  
 — — — — — сильносвязных 349  
 — — — — — элементов  $S$ -матрицы 251  
*Прока* уравнение 166  
 Пропагатор см также *Грина* функция и  
*Фейнмана* пропагатор  
 — ковариантный векторного поля 266  
 — полный 347  
 — электрона 397  
*Пуанкаре* группа 17, 47, 72, 145  
*Пуассона* скобка 19, 107  
*Пуффина* 225
- Радиационные поправки в квантовой электродинамике 417  
 Разложение на малых расстояниях 355, 361  
 — — световом конусе 373  
 — — по парциальным волнам 291  
 — — петлям 346  
 Размерности аномальные 336, 342, 368, 377  
 Размерность критическая (низшая) 190  
 Регуляризация 7  
 — *Паули* — *Вилларса* 385, 9, 54, 224  
 — размерная 9, 59, 263  
 Редукционные формулы 248, 252, 257  
*Резерфорда* формула 122  
 Реновализационная группа 40, 335  
 — часть 28  
*Ридберга* постоянная (Ryd) 94  
 Рождение пары во внешнем поле 234  
 Рождения операторы 136, 143, 180
- Сверхтонкая структура 101  
 — — позитрония 151  
 Связные части 255—257  
 Связь  $V$  —  $A$  191  
 Сечение рассеяния 243, 292, 296  
 Сильносвязные диаграммы и функции *Грина* 349  
 Симметрия в квантовой теории поля 170  
 — внутренние 44  
 — дискретные 185  
 — и законы сохранения 34  
 — спонтанно нарушенные 182, 216, 291  
 Симметрия  $SU(3)$  178  
 Сингулярности интегралов *Фейнмана* 364  
 Система бесконечного импульса 196, 352  
 Системы со связями 106, 246  
 Скалярная электродинамика 340, 187  
 Скейлинг 351  
 Скорость распада 282  
 Слабые взаимодействия 190, 284, 301, 372  
*Славянови* — *Тейлора* тождества 270  
 Собственная энергия (собственная масса) 351, 397  
 Собственного времени метод 124
- Солитоны 242, 296  
 Спин-орбитальное взаимодействие 31, 92  
 Спиральность 80, 110, 181, 293  
 Спонтанное нарушение симметрии 182, 216, 291  
 Странность 179  
 Структурные константы 45, 172  
 — функции 198, 350  
 — — моменты 378  
 Суперперенормируемые теории 17  
*СРТ*-теорема 193  
 $S$ -матрица 204, 215, 240, 248, 254, 94  
 — независимость от калибровки 300  
 — унитарность 290, 300  
 $\sigma$ -модель 207
- Твист 374  
 Тензор напряженностей 237  
 Теорема об острине клина 300  
 — о микших пионах 205  
 — — связи спина и статистики 182  
 — — сходимости амплитуд *Фейнмана* 18  
 Теория дырок 106  
*Томаса* прецессия 29  
*Томсона* рассеяние 56  
 Тонкая структура 97  
 — — постоянная ( $\alpha$ ) 56  
 Тормозное излучение 57, 287, 345, 424  
 Триальность 180  
*т' Хоффта* калибровка 300
- Угловой момент поля *Дирака* 73, 177  
 — — скалярного поля 42, 145  
*Улиана* потенциал 395  
 Ультрафиолетовые расходимости 397, 413, 5
- Умова* — *Пойнтинга* вектор 42  
 Унитарная калибровка 297, 303  
 — симметрия см *Оклетная модель*  
 Уничтожения операторы 136, 143, 180  
*Уорда* — *Такахаси* тождества 407, 50, 196, 215, 270, 330  
 Усеченные диаграммы и функции *Грина* 348  
 Условная степень расходимости 414, 15
- Фаддеева* — *Попова* духи 256  
 Фаза рассеяния 295  
 Фактор симметрии 320, 324  
*Фарри* теорема 333  
*Фейнмана* диаграммы 319, 320, 346  
 — — параметрическое представление 354  
*Фейнмана* калибровка 165, 257  
*Фейнмана* правила 320  
 — — для квантовой электродинамики 328  
 — — — — — неабелевых калибровочных теорий 257  
 — — — — — скалярной электродинамики 343  
*Фейнмана* пропагатор массивного векторного поля 168  
 — — поля *Дирака* 114, 184  
 — — — — *Клейна* — *Гордона* 52, 153  
 — — — — электромагнитного 53, 164  
 Феноменологические лагранжианы 217  
*Ферми* постоянная 191  
 Фиксированная точка (ультрафиолетовая) 321, 325, 341,  
*Фирца* теорема 197  
 Флуктуации вакуума 148, 170  
*Фока* пространство 139, 159, 179  
*Фолди* — *Вацшвайзена* преобразование 90  
 Формфакторы 195, 198  
 — в однопетлевом приближении 410  
 Фотон-фотонное рассеяние 427

- Фредгольма* детерминант 228, 100  
*Фруассара* граница 313
- Хиггса* бозон 294  
 Хронологическое произведение 151, 184, 217
- Цвет 181, 222, 211, 346  
*Циммермана* формула вычитаний 31
- Чарм (очарование) 180, 310  
 Частичное сохранение аксиального тока (ЧСАТ) 200, 225  
*Челлена — Лемана* представление 247  
 Четность 73, 85, 294
- Швингера* модель 230, 301  
*Швингера* принцип действия 75  
 Швингеровские члены 271, 195  
*Штюкельберга* лагранжиан 167
- Эйкональное приближение 81  
*Эйлера — Гейзенберга* лагранжиан 237  
 Эквивалентности теорема 97
- Электромагнитное поле 20  
 — — взаимодействие  $\alpha$  классическим источником 201  
 — — квантование 156, 113  
 — — постоянное, классическое движение в нем 28  
 — — пропагатор Дирака в нем 117, 124  
 — — частица Дирака в нем 88  
 Электрон-нейтринное рассеяние 305  
 Электрон-позитронная аннигиляция 357  
 Электрон-позитронное рассеяние 337  
 Электрон-электронное рассеяние 333  
 Электророждение 348  
 Энергии-импульса тензор квантованных полей 145, 176  
 — — классический 38, 241  
 Энергия нулевых колебаний 137, 171  
 Эффективное действие 353, 98  
 — — в неабелевых калибровочных теориях 260  
 — —  $\Phi^4$  теории 95  
 Эффективный заряд 315, 360, 379  
 — потенциал 101
- Юкавы* связь 311, 344
- Янга — Миллса* поле 233  
 — — — массивное 284

## ОГЛАВЛЕНИЕ

<b>Глава 8. Перенормировка . . . . .</b>	<b>5</b>
8.1. Регуляризация и подсчет степени расходимости . . . . .	5
8.1.1. Введение . . . . .	5
8.1.2. Регуляризация . . . . .	7
8.1.3. Подсчет степени расходимости . . . . .	14
8.1.4. Теорема о сходимости . . . . .	18
8.2. Перенормировка . . . . .	22
8.2.1. Условия нормировки и структура контрчленов . . . . .	22
8.2.2. Рекуррентная формула Боголюбова . . . . .	27
8.2.3. Явное решение Циммермана . . . . .	31
8.2.4. Перенормировка в параметрическом представлении . . . . .	33
8.2.5. Конечные перенормировки . . . . .	37
8.2.6. Составные операторы . . . . .	40
8.3. Предел нулевой массы, асимптотическое поведение и теорема Вайнберга . . . . .	43
8.3.1. Безмассовые теории . . . . .	44
8.3.2. Поведение в ультрафиолетовой области и теорема Вайнберга . . . . .	47
8.4. Случай квантовой электродинамики . . . . .	49
8.4.1. Формальный вывод тождеств Уорда—Такахаси . . . . .	50
8.4.2. Регуляризация Паули—Вилларса во всех порядках . . . . .	54
8.4.3. Перенормировка . . . . .	56
8.4.4. Поляризация вакуума в двухпетлевом приближении . . . . .	58
Примечания . . . . .	69
<b>Глава 9. Функциональные методы . . . . .</b>	<b>71</b>
9.1. Континуальные интегралы . . . . .	71
9.1.1. Роль классического действия в квантовой механике . . . . .	71
9.1.2. Траектории в пространстве Баргмана—Фока . . . . .	83
9.1.3. Фермионные системы . . . . .	88
9.2. Релятивистская формулировка . . . . .	92
9.2.1. Запись $S$ -матрицы и функций Грина через континуальные интегралы . . . . .	92
9.2.2. Эффективное действие и метод перевала . . . . .	98
9.3. Системы со связями . . . . .	106
9.3.1. Общее рассмотрение . . . . .	107
9.3.2. Электромагнитное поле как пример . . . . .	113
9.4. Высокие порядки теории возмущений . . . . .	115
9.4.1. Введение . . . . .	115
9.4.2. Ангармонический осциллятор . . . . .	120
Примечания . . . . .	128

<b>Глава 10. Интегральные уравнения и проблема связанных состояний</b> . . . . .	130
10.1. Уравнения Дайсона—Швингера . . . . .	130
10.1.1. Уравнения поля . . . . .	130
10.1.2. Перенормировка . . . . .	136
10.2. Релятивистские связанные состояния . . . . .	137
10.2.1. Однородное уравнение Бете—Солпитера . . . . .	137
10.2.2. Поворот Вика . . . . .	141
10.2.3. Обмен скалярными безмассовыми частицами в лестничном приближении . . . . .	143
10.3. Сверхтонкое расщепление в позитронии . . . . .	151
10.3.1. Общая постановка задачи . . . . .	153
10.3.2. Вычисление в порядке $\alpha^5$ . . . . .	158
Примечания . . . . .	168
<b>Глава 11. Симметрии</b> . . . . .	170
11.1. Реализация симметрий в квантовой теории . . . . .	170
11.1.1. Постановка задачи . . . . .	171
11.1.2. Основное состояние . . . . .	173
11.2. Спектр масс, мультиплеты и голдстоуновские бозоны . . . . .	176
11.2.1. Октетная модель Гелл-Манна и Неемана . . . . .	176
11.2.2. Спонтанное нарушение симметрии . . . . .	182
11.3. Алгебра токов . . . . .	190
11.3.1. Коммутаторы токов . . . . .	190
11.3.2. Частичное сохранение аксиального тока и киральная симметрия . . . . .	200
11.3.3. Низкоэнергетические теоремы и правила сумм . . . . .	202
11.4. $\sigma$ -Модель . . . . .	207
11.4.1. Описание модели . . . . .	208
11.4.2. Перенормировка . . . . .	211
11.5. Аномалии . . . . .	218
11.5.1. Распад $\pi^0 \rightarrow 2\gamma$ и алгебра токов . . . . .	218
11.5.2. Аксиальная аномалия в $\sigma$ -модели . . . . .	220
11.5.3. Общие свойства . . . . .	225
Примечания . . . . .	230
<b>Глава 12. Неабелевы калибровочные поля</b> . . . . .	233
12.1. Классическая теория . . . . .	233
12.1.1. Калибровочное поле $A_\mu$ и тензор $F_{\mu\nu}$ . . . . .	234
12.1.2. Классическая динамика . . . . .	239
12.1.3. Решения классических уравнений движения в евклидовой области . . . . .	242
12.1.4. Калибровочная инвариантность и дополнительные связи . . . . .	246
12.2. Квантование калибровочных полей . . . . .	248
12.2.1. Квантование при наличии связей . . . . .	248
12.2.2. Интегрирование по калибровочной группе . . . . .	251
12.2.3. Правила Фейнмана . . . . .	257
12.3. Эффективное действие в однопетлевом приближении . . . . .	260
12.3.1. Общий вид . . . . .	260
12.3.2. Двухточечная функция . . . . .	263
12.3.3. Другие функции . . . . .	265
12.3.4. Перенормировка однопетлевых диаграмм . . . . .	269

12.4.	Перенормировка . . . . .	270
12.4.1.	Тождества Славнова—Тейлора . . . . .	270
12.4.2.	Тождества для сильносвязных функций . . . . .	273
12.4.3.	Рекурсивный метод построения контрчленов . . . . .	276
12.4.4.	Зависимость функций Грина от калибровки . . . . .	281
12.4.5.	Аномалии . . . . .	282
12.5.	Массивные калибровочные поля . . . . .	284
12.5.1.	История вопроса . . . . .	284
12.5.2.	Массивная калибровочная теория . . . . .	288
12.5.3.	Спонтанное нарушение симметрии . . . . .	291
12.5.4.	Перенормировка спонтанно нарушенных калибровочных теорий . . . . .	297
12.5.5.	Калибровочная независимость и унитарность $S$ -матрицы . . . . .	300
12.6.	Модель Вайнберга—Салама . . . . .	301
12.6.1.	Модель лептонов . . . . .	301
12.6.2.	Электрон-нейтринные сечения . . . . .	305
12.6.3.	Поправки высших порядков . . . . .	306
12.6.4.	Включение адронов . . . . .	308
	Примечания . . . . .	313
Глава 13.	Асимптотическое поведение . . . . .	315
13.1.	Эффективный заряд в электродинамике . . . . .	315
13.1.1.	Функция Гелл-Манна—Лоу . . . . .	316
13.1.2.	Уравнение Каллана—Симанзика . . . . .	321
13.2.	Нарушенная масштабная инвариантность . . . . .	325
13.2.1.	Масштабная и конформная инвариантность . . . . .	326
13.2.2.	Модифицированные тождества Уорда . . . . .	330
13.2.3.	Коэффициенты Каллана—Симанзика в низших порядках . . . . .	336
13.3.	Восстановленная масштабная инвариантность . . . . .	339
13.3.1.	Эволюция константы связи . . . . .	339
13.3.2.	Асимптотическая свобода . . . . .	343
13.3.3.	Массовые поправки . . . . .	346
13.4.	Глубокоупругое лептон-адронное рассеяние и электрон-позитронная аннигиляция в адроны . . . . .	348
13.4.1.	Электророжение . . . . .	348
13.4.2.	Динамика на световом конусе . . . . .	352
13.4.3.	Электрон-позитронная аннигиляция . . . . .	357
13.5.	Операторные разложения . . . . .	361
13.5.1.	Разложение на малых расстояниях . . . . .	361
13.5.2.	Доминирующие и субдоминантные операторы, смешивание операторов и законы сохранения . . . . .	369
13.5.3.	Разложение на световом конусе . . . . .	373
	Примечания . . . . .	382
Приложение	. . . . .	384
П.1.	Метрика . . . . .	384
П.2.	Матрицы Дирака и спиноры . . . . .	385
П.3.	Нормировка состояний, $S$ -матрица, унитарность и формулы для сечений . . . . .	389
П.4.	Правила Фейнмана . . . . .	390
Предметный указатель	. . . . .	394