

К. ИЦИКСОН  
Ж.-Б. ЗЮБЕР

---

# КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ ПОЛЯ



CLAUDE ITZYKSON  
and  
JEAN-BERNARD ZUBER

Commissariat à l'Energie Atomique  
Centre d'Etudes Nucléaires de Saclay

# QUANTUM FIELD THEORY

McGRAW-HILL  
BOOK COMPANY

New York St.Louis SanFrancisco Auckland Bogota Hamburg  
Johannesburg London Madrid Mexico Montreal NewDelhi  
Panama Paris São Paulo Singapore Sydney Tokyo Toronto

К. ИЦИКСОН  
Ж.-Б. ЗЮБЕР

# КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ ПОЛЯ

В 2-х томах

ТОМ I

Перевод с английского  
под редакцией  
Р. М. МИР-КАСИМОВА

Москва «Мир» 1984

ББК 22.31  
И96  
УДК 530.145

Ицксон К., Зюбер Ж.-Б.

И96 Квантовая теория поля: Пер. с англ. — М.: Мир, 1984. — 448 с., ил. — Т 1.

Книга известных французских теоретиков К Ицксона и Ж.-Б Зюбера представляет собой современный курс квантовой теории поля, охватывающий как основные положения этой области физики, так и результаты, полученные в последнее время. В русском переводе книга издается в двух томах. В первом томе излагаются основы квантовой теории поля. Сюда входит теория свободных полей, квантование полей, описание основных свойств симметрии, теория S матрицы, аналитические свойства, расчет ряда электродинамических процессов и др.

Книга рассчитана на научных работников, аспирантов и студентов старших курсов, занимающихся проблемами квантовой теории поля и физикой элементарных частиц.

И  $\frac{1704020000-314}{041(01)-84}$  45—83, ч. 1

ББК 22.31  
530.1

*Редакция литературы по физике*

---

Клод Ицксон, Жан-Бернар Зюбер  
КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ ПОЛЯ  
В двух томах  
Том 1

Научный редактор А. Н. Куксенко Мл научный редактор И. А. Зинььева  
Художник Н. И. Василевский. Художественный редактор Л. Е. Безрученков  
Технический редактор Е. С. Потапенкова Корректор Т. И. Стифеева

ИБ № 3223

Сдано в набор 04.05.83 Подписано к печати 24.10.83  
Формат 60×90<sup>1/8</sup> Бумага типографская № 1. Гарнитура латинская. Печать высокая.  
Объем 14,0 бум. л. Усл. печ. л. 28,0. Усл. кр.-бтт 28,0. Уч.-изд. л. 25,70 Изд. № 2/2047  
Тираж 8000 экз. Зак. 1698 Цена 3 руб.

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР» Москва, 1-й Рижский пер., 2.

Ордена Октябрьской Революции и ордена Трудового Красного Знамени Первая Образцовая типография имени А. А. Жданова Союзполиграфпрома при Государственном комитете СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли Москва, М-54, Валовая, 28

Отпечатано с матриц в Ленинградской типографии № 6 ордена Трудового Красного Знамени Ленинградского объединения «Техническая книга» им. Евгении Соколовой Союзполиграфпрома при Государственном Комитете СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли 193144, г. Ленинград, ул. Моисеенко, 10 Зак. 26

---

Copyright © 1980 McGraw-Hill, Inc.

© Перевод на русский язык, «Мир», 1984



## ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА ПЕРЕВОДА

Настоящая монография является руководством по современной квантовой теории поля. Она охватывает большинство разделов этой теории и, несомненно, будет полезна как для молодого поколения физиков, которым она поможет ориентироваться в большом разнообразии новых направлений, так и для более опытных исследователей. На русском языке книга издается в двух томах. Первый том (гл. 1—7) содержит стандартный минимум сведений из теории поля, начиная от квантования свободных полей и свойств симметрии вплоть до описания радиационных поправок в электродинамике. Второй том (гл. 8—13) посвящен более сложным проблемам. Здесь рассматриваются такие вопросы, как теория перенормировок, функциональные методы, теория неабелевых калибровочных полей, алгебра токов, ренормализационная группа, динамика на световом конусе и др. Изложение большинства вопросов сопровождается примерами и задачами, которые помогают читателю быстро разобраться в сути дела.

Теория элементарных частиц и их взаимодействий при высоких энергиях в последние полтора десятилетия развивается чрезвычайно интенсивно. Основными достижениями данного периода являются создание единой теории слабого и электромагнитного взаимодействий и динамической схемы, претендующей на роль сильных взаимодействий, — квантовой хромодинамики. Этот прогресс основан на лагранжевом подходе и связан с осознанием глубокой роли калибровочной инвариантности, ее спонтанного нарушения и условия перенормируемости. Теория также обогатилась новыми методами, как возникшими в ее собственных рамках, так и прошедшими из других областей, — статистической физики, физики твердого тела и др.

Несомненно, что охватить в одной книге все значительные новые результаты квантовой теории поля — задача весьма трудная. Многие важные вопросы не вошли в настоящую книгу. Это касается таких направлений, как аксиоматический подход, попытки объединения электрослабого взаимодействия с сильным, а также с гравитационным взаимодействием, калибровочные теории на решетке, суперсимметрия, теоретико-полевые подходы, содержащие фундаментальную длину и др.

Несколько слов следует сказать относительно библиографии. Очевидно, что составление полной библиографии по квантовой тео-

рии поля является самостоятельной задачей, неразрешимой в рамках данной книги. Авторы и не пытались ее решить. При переводе нами были добавлены некоторые ссылки на важные работы советских и зарубежных авторов, а также на обзоры и монографии, которые могут стать полезным дополнением к книге. Читателю рекомендуется также обращаться к обзорным статьям по квантовой теории поля и физике элементарных частиц, публикуемым в журналах «Физика элементарных частиц и атомного ядра» и «Успехи физических наук». Здесь можно найти статьи о современном состоянии всех важных проблем, затронутых в книге, а также дальнейшие ссылки.

Авторы любезно прислали список опечаток, замеченных ими в английском издании книги. Эти опечатки, вместе с опечатками, обнаруженными переводчиками, исправлены в русском издании. Перевод выполнили кандидаты физ.-мат. наук Владислав Дубовик (гл. 1—4), С. В. Зенкин (гл. 5—7, 11, 12), А. В. Радюшкин (гл. 8—10, 13, приложение).

*Р. М. Мир-Касимов*

## ПРЕДИСЛОВИЕ

На протяжении многих лет квантовая теория поля является одним из наиболее важных средств исследования микромира. В последнее время мы были свидетелями расцвета, вызванного новыми идеями и приложениями, выходящими далеко за первоначальные рамки этой теории.

Наша попытка дать педагогический обзор данного предмета основывается на лекциях, прочитанных в Орсе и Саклэ. Впервые эти лекции реализовались в виде записей на французском языке. Как и любое начинание такого рода, данная книга в сильной степени носит отпечаток наших предубеждений и пристрастий, хотя мы и пытались достичь максимальной полноты изложения и соблюдать, насколько это возможно, равновесие между формализмом теории и примерами практических вычислений.

Настоящая книга адресована как студентам, так и исследователям, работающим в области теории поля, физики частиц и в смежных областях. Предполагается, что читатель знаком с основами квантовой механики, электродинамики, специальной теорией относительности, а также свободно владеет классическими разделами математики, включая теорию групп и теорию функций комплексной переменной. Чтобы избежать односторонности изложения, мы опирались на историческую перспективу и уделили одинаковое внимание операторной формулировке, подходу, основанному на функциях распространения, и более синтетическому методу континуального интегрирования. Однако наша книга никоим образом не может претендовать на полноту изложения. Не имея достаточно места и сознавая свою некомпетентность, мы отказались от описания аксиоматического подхода и критических явлений в статистической механике. Нам не удалось рассмотреть здесь такие специальные вопросы, как подробный анализ группы Пуанкаре и ее представлений, поля с высшими спинами, детальная структура инфракрасных расходимостей, гравитационные взаимодействия, двумерные модели и т. п.

Книгу можно разделить на две части. Первые восемь глав охватывают стандартные методы квантования в электродинамике. К числу наиболее важных вопросов, рассматриваемых здесь, относятся перенормировки в рамках теории возмущений. Остальные пять глав посвящены изложению функциональных методов, проблеме релятивистских связанных состояний, нарушенным симмет-

риям, неабелевым калибровочным полям, асимптотическому поведению амплитуд.

Части текста, набранные петитом, содержат упражнения, комментарии и предложения. Мы сочли неуместным составлять отдельный набор задач. Последними, как правило, завершается вывод каких-либо соотношений, обобщений или приложений, и, следовательно, их более целесообразно связать непосредственно с основным текстом. Это становится все более верным по мере того, как мы достигаем более новых и содержательных разделов теории.

Для того чтобы наметить перспективу, указать источники, которыми мы пользовались, и материал для дальнейшего изучения, каждая глава завершается разделом «Примечания», в которых даются ссылки на литературу. Нет необходимости говорить, что они ни в коей мере не претендуют на полноту. Заранее приносим наши извинения всем, кто найдет, что его работы не освещены в нашей монографии должным образом.

Мы обязаны в значительной степени многим превосходным руководствам по данному предмету. Невозможно было избежать некоторого перекрытия. Это относится также к ряду обзорных статей и лекционных записей. Надеемся, что читатель не будет слишком страдать из-за нашего недостаточного совершенного английского языка. В процессе перевода, несомненно, была утрачена четкость стиля, присущего лишь тому, кто излагает свои мысли на родном языке.

Вдохновляющая атмосфера Отдела теоретической физики в Саклэ существенным образом повлияла на развитие наших интересов в теории поля, и мы многим обязаны нашим друзьям и коллегам, с которыми работали прежде и продолжаем трудиться в настоящее время. Среди них наш учитель Р. Стора, который всегда был для нас примером. Мы благодарны М. Бандеру, А. Кэрроллу, Г. Маху, Г. Паризи, Н. Салингаросу, В. Ганпатти, которые прочли рукопись настоящей книги, а также студентам и физикам, заметившим опечатки, сделавшим замечания и предложения. Мы также весьма признательны Т. Кинosite, который любезно предоставил нам свой обзор последних достижений квантовой электродинамики.

Наш замысел по написанию этой книги невозможно было бы осуществить без помощи нашей лаборатории. Мы благодарим прежде всего Брижитт Бюнель, Даниель Лешатон и Жанин Ригу, которые вынесли всю тяжесть работы, связанной с печатанием рукописи. Выражаем благодарность Мадлен Порнеф, просмотревшей предварительный вариант книги, и администрации Комиссариата по атомной энергии за поддержку, способствовавшую выходу книги в свет.

г. Саклэ  
март, 1978

*Клод Ициксон,  
Жан-Бернар Зюбер*

## ПРЕДИСЛОВИЕ К РУССКОМУ ИЗДАНИЮ

Нам доставляет большое удовольствие представить советским читателям настоящий курс квантовой теории поля. Со своей стороны мы с успехом использовали работы советских физиков.

За несколько лет, прошедших после первого издания наших лекций, мы убедились в том, что методы теоретической физики проявляют тенденцию ко все большему единству, когда идеи физики частиц и статистической физики применяются совместно. Мы надеемся, что эти тенденции нашли отражение в данной книге, которая позволит читателю проследить за бурным развитием квантовой теории поля.

Одна из трудностей, которой мы опасались при подготовке этой книги, к сожалению, действительно оказалась практически непреодолимой. Речь идет о невозможности составить адекватную библиографию для учебника такого объема. Поэтому мы снова приносим свои извинения всем тем, чьи работы не процитированы должным образом. Увы, такие случаи многочисленны и, по-видимому, это особенно касается работ советских физиков. Однако мы воспользовались настоящим переводом, чтобы исправить некоторые опечатки и будем благодарны тем, кто обнаружит таковые и сообщит нам о них.

Как бы то ни было, мы надеемся, что наша книга окажется полезной и поможет новому поколению физиков оценить изящество и мощь квантовой теории поля.

Мы очень признательны издательству «Мир», редактору перевода Р. Мир-Касимову, переводчикам, которые предоставили нам возможность предложить вниманию читателей настоящий перевод.

*Клод Ицксон,  
Жан-Бернар Зюбер*

## ОБЩАЯ ЛИТЕРАТУРА

- Adler S., Dashen R.* Current Algebras.— New York: Benjamin, 1968 [Имеется перевод: *Адлер С., Дашен Р.* Алгебры токов и их применение в физике частиц.— М.: Мир, 1970.]
- Ахиезер А. И., Берестецкий В. Б.* Квантовая электродинамика.— М.: Наука, 1969.
- Alfaro V. de et al.* Currents in Hadron Physics.— Amsterdam: North-Holland, 1973 [Имеется перевод: *Де Альфаро и др.* Токи в физике адронов.— М.: Мир, 1976.]
- Берестецкий В. Б., Лифшиц Е. М., Питаевский Л. П.* Релятивистская квантовая теория, ч. 1.— М.: Наука, 1968.
- Безин Ф. А.* Метод вторичного квантования.— М.: Наука, 1964.
- Bethe H. A., Salpeter E. E.* Quantum Mechanics of One and Two Electron Atoms.— Berlin: Springer-Verlag, 1957 [Имеется перевод: *Бете Г., Солпитер Э.* Квантовая механика атомов с одним и двумя электронами.— М.: Физматгиз, 1960.]
- Bjorken J. D., Drell S. D.* Relativistic Quantum Mechanics and Relativistic Quantum Fields.— New York: McGraw-Hill, 1964, 1965 [Имеется перевод: *Бьеркен Дж. Д., Дрелл С. Д.* Релятивистская квантовая теория, т. 1, 2.— М.: Наука, 1978.]
- Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В.* Введение в теорию квантованных полей, 3-е изд, перераб.— М.: Наука, 1976.
- Eden R. J., Landshoff P. V., Olive D. J., Polkinghorne J. C.* The Analytic S-Matrix.— Cambridge University Press, 1966.
- Feynman R. P.* Quantum Electrodynamics.— New York: Benjamin, 1973 [Имеется перевод: *Фейнман Р.* Квантовая электродинамика.— М.: Мир, 1964.]
- Feynman R. P., Hibbs A. R.* Quantum Mechanics and Path Integrals.— New York: McGraw-Hill, 1965 [Имеется перевод: *Фейнман Р., Хиббс А.* Квантовая механика и интегралы по траекториям.— М.: Мир, 1968.]
- Gell-Mann M., Ne'eman Y.* The Eightfold Way.— New York: Benjamin, 1964.
- Hepp K.* Théorie de la Renormalisation.— Berlin: Springer-Verlag, 1969 [Имеется перевод: *Хенн К.* Теория перенормировок.— М.: Наука, 1974.]
- Jost R.* The General Theory of Quantized Fields.— Providence, R. I.: AMS, 1965 [Имеется перевод: *Йост Р.* Общая теория квантованных полей.— М.: Мир, 1967.]
- Kallen G.* Quantum Electrodynamics.— Berlin.: Springer-Verlag, 1972.
- Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теория поля.— М.: Наука, 1973.
- Nakanishi N.* Graph Theory and Feynman Integrals.— New York: Gordon and Breach, 1970.
- Quantum Electrodynamics/ed J. Schwinger.*— New York: Dover, 1958.



- Schwinger J.* Particles, Sources and Fields, vol. 1, 2.— Reading: Addison-Wesley, 1970 and 1973 [Имеется перевод: Швингер Ю. Частицы. Источники. Поля.— М.: Мир, 1973.].
- Streater R. F., Wightman A. S.* PCT, Spin and Statistics and All That.— New York: Benjamin, 1964 [Имеется перевод: Стрэттер Р., Вайтман А. PCT, спин, статистика и все такое.— М.: Наука, 1966.].
- Thirring W.* Principles of Quantum Electrodynamics.— New York: Academic Press, 1958 [Имеется перевод: Тирринг В. Принципы квантовой электродинамики.— М.: Высшая школа, 1964.].
- Taylor J. C.* Gauge Theories of Weak Interactions.— Cambridge University Press, 1976 [Имеется перевод: Тейлор Дж. Калибровочные теории слабых взаимодействий.— М.: Мир, 1978.].
- Todorov I. T.* Analytic Properties of Feynman Diagrams in Quantum Field Theory.— Oxford: Pergamon Press, 1971 [См. также: Тодоров И. Т. Аналитические свойства диаграмм Фейнмана в квантовой теории поля.— София: Изд-во Болгарской Академии Наук, 1966.].

## ЛИТЕРАТУРА, ДОБАВЛЕННАЯ ПРИ ПЕРЕВОДЕ

- Биленький С. М. Введение в диаграммную технику Фейнмана.— М.: Атомиздат, 1971.
- Боголюбов Н. Н. Избранные Труды по статистической физике.— М.: Изд-во МГУ, 1979.
- Боголюбов Н. Н., Логунов А. А., Тодоров И. Т. Основы аксиоматического подхода в квантовой теории поля.— М.: Наука, 1969.
- Боголюбов Н. Н., Медведев Б. В., Поливанов М. К. Вопросы теории дисперсионных соотношений.— М.: Физматгиз, 1958.
- Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В. Квантовые поля.— М.: Наука, 1980.
- Васильев А. Н. Функциональные методы в квантовой теории поля и статистике.— Л.: Изд-во ЛГУ, 1976.
- Владимиров В. С. Уравнения математической физики. 3-е изд.— М.: Наука, 1976.
- Дирак П. А. М. Лекции по квантовой теории поля.— М.: Мир, 1971.
- Дирак П. А. М. Принципы квантовой механики.— М.: Наука, 1979.
- Ефимов Г. В. Нелокальные взаимодействия квантованных полей.— М.: Наука, 1977.
- Завьялов О. И. Перенормированные диаграммы Фейнмана.— М.: Наука, 1979.
- Квантовая теория калибровочных полей. Сб. статей. Пер. с англ. Под ред. Коноплевой Н. П.— М.: Мир, 1977.
- Киржниц Д. А. Полевые методы теории многих частиц.— М.: Атомиздат, 1963.
- Малкин И. А., Манько В. И. Динамические симметрии и когерентные состояния квантовых систем.— М.: Наука, 1979.
- Медведев Б. В. Начала теоретической физики.— М.: Наука, 1977.
- Новожилов Ю. В. Введение в теорию элементарных частиц.— М.: Наука, 1972.
- Общие принципы квантовой теории поля и их следствия. Сб. статей: /Под ред.

- В. А. Мещерякова.— М.: Наука, 1977.
- Окунь Л. Б. Лептоны и кварки.— М.: Наука, 1981.
- Попов В. Н. Континуальные интегралы в квантовой теории поля и статистической физике.— М.: Атомиздат, 1976.
- Проблемы теоретической физики. Сборник, посвященный Н. Н. Боголюбову в связи с его шестидесятилетием.— М.: Наука, 1969.
- Проблемы теоретической физики.— Памяти И. Е. Тамма.— М.: Наука, 1972.
- Славнов А. А., Фаддеев Л. Д. Введение в квантовую теорию калибровочных полей.— М.: Наука, 1978.
- Тернов И. М., Халилов В. Р., Родионов В. Н. Взаимодействие заряженных частиц с сильным электромагнитным полем.— М.: Изд-во МГУ, 1982.
- Фок В. А. Работы по квантовой теории поля.— Л.: Изд-во ЛГУ, 1957.
- Фундаментальные проблемы теоретической и математической физики./Под ред. А. А. Логанова.— Дубна: Изд-во ОИЯИ, 1979.
- Хепп К., Эпштейн А. Аналитические свойства амплитуд рассеяния в локальной квантовой теории поля. Пер. с англ.— М.: Атомиздат, 1971.
- Ширков Д. В., Серебряков В. В., Мещеряков В. А. Дисперсионные теории сильных взаимодействий при низких и средних энергиях.— М.: Наука, 1967.

# Глава I

## КЛАССИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ

В настоящей главе мы рассмотрим лагранжев формализм в классической механике и его обобщение на системы с бесконечно большим числом степеней свободы, уделяя особое внимание симметриям и законам сохранения в их локальной форме. Используя как пример электродинамику, мы введем функции Грина и пропагаторы. Затем разберем простейшие задачи теории излучения и завершим главу анализом противоречий в проблеме самодействия. Поскольку в современных теоретических построениях методы классической теории поля играют все возрастающую роль, в последующих главах мы будем возвращаться к рассмотрению этих методов.

### 1.1. ПРИНЦИП НАИМЕНЬШЕГО ДЕЙСТВИЯ

#### 1.1.1. Классическое движение

В классической механике уравнения движения следуют из принципа наименьшего действия. Если  $q$  — конечный набор конфигурационных переменных,  $q \equiv \{q_1, q_2, \dots, q_N\}$ , а  $\dot{q}$  — соответствующие скорости в момент времени  $t$ , то действие определяется следующим образом:

$$I = \int_{t_1}^{t_2} dt L[q(t), \dot{q}(t)]. \quad (1.1)$$

Функция Лагранжа  $L$  зависит от координат, скоростей, а в некоторых случаях также явно и от времени для незамкнутых систем, т. е. для систем, подверженных действию внешних сил. Принцип наименьшего действия гласит, что среди всех траекторий  $q(t)$ , проходящих через точку  $q_1$  в момент времени  $t_1$  и точку  $q_2$  в момент времени  $t_2$ , физическая траектория дает стационарное значение действия. Это стационарное значение является единственным минимумом, если  $q_1, t_1$  и  $q_2, t_2$  достаточно близки друг к другу. Поэтому действие следует рассматривать как функционал от всех регулярных функций  $q(t)$ , удовлетворяющих граничным условиям  $q(t_1) = q_1, q(t_2) = q_2$ . Если  $Q(t)$  — истинная траектория, то близ-

кая к ней траектория запишется как  $q(t) = Q(t) + \delta q(t)$ . Разлагая действие по степеням  $\delta q$  в виде

$$I(q) = I(Q) + \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{\delta I}{\delta q(t)}(Q) \delta q(t) + \dots, \quad (1.2)$$

принцип наименьшего действия можно записать следующим образом:

$$\frac{\delta I}{\delta q(t)}(Q) = 0. \quad (1.3)$$

Чтобы сравнить это выражение с уравнениями Эйлера — Лагранжа, заметим, что, поскольку

$$\delta \dot{q}(t) = \frac{d}{dt} \delta q(t), \quad \delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0, \quad (1.4)$$

вариация действия (1.1) записывается в виде

$$\delta I = \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{\delta I}{\delta q(t)} \delta q(t) = \int_{t_1}^{t_2} dt \left[ \frac{\partial L}{\partial q(t)} \delta q(t) + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}(t)} \frac{d}{dt} \delta q(t) \right].$$

Интегрирование по частям последнего члена с учетом граничных условий приводит к известному уравнению

$$\frac{\delta I}{\delta q(t)} \equiv \frac{\partial L}{\partial q(t)} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}(t)} = 0, \quad (1.5)$$

которое в случае нескольких степеней свободы рассматривается как векторное. В простейших случаях величина  $L$  представляет собой разность между кинетической энергией, квадратичной по скоростям, и потенциальной энергией.

Уравнения не изменяются, если к величине  $L$  добавить полную производную по времени, при этом действие изменится лишь за счет вкладов, зависящих от граничных условий. Отсюда видно, что функция Лагранжа не просто характерная величина, определяющая движение, она является основой для более общего формализма, развитого, в частности, Картаном.

Гамильтонов формализм опирается на следующее определение сопряженного импульса:

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}(q, \dot{q}). \quad (1.6)$$

Допустим, что это уравнение можно обратить, т. е. выразить скорости через импульсы и координаты. Случай, когда якобиан этого преобразования равен нулю, мы рассмотрим ниже. Функцию Гамильтона вводят с помощью преобразования Лежандра:

$$H(p, q) = p_i \dot{q}_i(p, q) - L[q, \dot{q}(p, q)], \quad (1.7)$$

где подразумевается суммирование по повторяющимся индексам. Дифференцирование этого выражения дает

$$dH = \left[ \dot{q}_i + \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial p_i} \left( p_j - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) \right] dp_i + \left[ -\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial q_i} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - p_i \right) \right] dq_i.$$

Теперь, используя выражение для сопряженного импульса, находим следующие уравнения:

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}. \quad (1.8)$$

В более общем случае вариация функции, заданной в фазовом пространстве (т. е. в пространстве  $2N$  переменных  $p, q$ ), имеет вид

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial f}{\partial q_i} - \frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{\partial f}{\partial p_i} = \frac{\partial f}{\partial t} + \{H, f\}. \quad (1.9)$$

Мы ввели здесь скобки Пуассона

$$\{f, g\} = \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} - \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i}. \quad (1.10)$$

Из (1.9) следует, что функция, не зависящая явно от времени и такая, что ее скобка Пуассона с  $H$  равна нулю, является интегралом движения.

Замечательно то, что уравнения Гамильтона (1.8) также следуют из принципа стационарного действия. Действительно, подставим в (1.1) выражение

$$L(q, \dot{q}) dt = p dq - H(p, q) dt;$$

тогда действие примет вид

$$I = \int_{t_1}^{t_2} p dq - H dt, \quad (1.11)$$

и его можно рассматривать как функционал от  $2N$  независимых функций  $q(t)$  и  $p(t)$ . Предположим, как и выше, что без каких-либо ограничений на  $p(t_1)$  и  $p(t_2)$  справедливы равенства  $q(t_1) = q_1$ ,  $q(t_2) = q_2$ . Тогда будем иметь

$$\delta I = \int_{t_1}^{t_2} \left[ \delta p \left( \dot{q} - \frac{\partial H}{\partial p} \right) + \left( p \frac{d}{dt} \delta q - \frac{\partial H}{\partial q} \delta q \right) \right] dt.$$

Интегрируя по частям член  $p(d/dt)\delta q$ , получаем

$$\frac{\delta I}{\delta p(t)} = \dot{q} - \frac{\partial H}{\partial p}, \quad -\frac{\delta I}{\delta q(t)} = p + \frac{\partial H}{\partial q}.$$

Если положить  $\delta I = 0$ , мы снова получим уравнения (1.8). Следует заметить, что действие  $I$  можно также записать в виде

$$I = p_2 q_2 - p_1 q_1 - \int_{t_1}^{t_2} q dp + H dt.$$

Следовательно, в действии  $I$  величины  $p$  и  $q$  играют аналогичную роль

Вычислим теперь действие  $I$  на стационарной траектории. Предположим, что точка  $(q_2, t_2)$  достаточно близка к  $(q_1, t_1)$ , т. е. стационарная траектория между ними единственна, и будем обозначать действие через  $I(q_2, t_2; q_1, t_1)$  или в более сокращенной форме — через  $I(2, 1)$ .

Случай, когда за данный отрезок времени через две точки проходит несколько траекторий являются не столь уж редкими. Например, в случае гармонического осциллятора через начало координат проходит бесконечно много траекторий с интервалами во времени, равными полупериоду.

Нетрудно убедиться в справедливости выражения

$$\delta I(q_2, t_2; q_1, t_1) = (p_2 \delta q_2 - H_2 \delta t_2) - (p_1 \delta q_1 - H_1 \delta t_1), \quad (1.12)$$

где 
$$p_2 = \frac{\partial I(2, 1)}{\partial q_2}, \quad H_2 = -\frac{\partial I(2, 1)}{\partial t_2}.$$

Кроме того, если функция Лагранжа зависит явно от некоторого параметра  $\alpha$ , имеем

$$\frac{d}{d\alpha} I(q_2, t_2; q_1, t_1) = \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{\partial L}{\partial \alpha} [\alpha, Q(t, \alpha), \dot{Q}(t, \alpha)]; \quad (1.13)$$

здесь производная в правой части выражения отвечает явной зависимости  $L$  от  $\alpha$ . Чтобы показать, как можно применить этот результат, добавим к функции Лагранжа член  $qF(t)$ , который приведет к появлению внешней силы  $F(t)$  в уравнениях движения. Действие становится функционалом от  $F(t)$ , и из (1.13) для  $t_1 < t < t_2$  получаем

$$\frac{\delta I(2, 1)}{\delta F(t)} = Q(t), \quad (1.14)$$

где  $Q(t)$  — траектория в присутствии силы  $F$  (обе части этого равенства можно вычислить также для  $F = 0$ ). Из предыдущего не следует, что это лучший способ решения уравнений движения, но он иллюстрирует метод производящих функций, с которыми мы будем часто сталкиваться в последующем изложении.

Рассмотрим, например, частицу с массой  $m$ , движущуюся вдоль прямой под действием данной силы  $F(t)$ . В этом случае функция Лагранжа равна

$$L(q, \dot{q}) = \frac{m\dot{q}^2}{2} + qF(t). \quad (1.15)$$



Решение уравнения движения можно записать в виде

$$Q(t) = \frac{q_1(t_2 - t) + q_2(t - t_1)}{t_2 - t_1} + \int_{t_1}^{t_2} dt' G(t, t') \frac{F(t')}{m}, \quad (1.16)$$

где  $G(t, t')$  — функция Грина, симметричная по отношению к перестановке  $t$  и  $t'$  и обращающаяся в нуль при  $t = t_1$  и  $t = t_2$ . Функция Грина удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} G(t, t') = \delta(t - t'). \quad (1.17)$$

Здесь  $\delta(t - t')$  — обобщенная функция Дирака (дельта-функция), производная ступенчатой функции  $\theta(t - t')$ . Для  $G$  получаем выражение

$$G(t, t') = -\frac{1}{t_2 - t_1} [(t_2 - t)(t' - t_1)\theta(t - t') + (t_2 - t')(t - t_1)\theta(t' - t)]. \quad (1.18)$$

Действие вдоль траектории записывается в виде

$$I(q_2, t_2; q_1, t_1) = \frac{m}{2} \frac{(q_2 - q_1)^2}{t_2 - t_1} + \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{q_1(t_2 - t) + q_2(t - t_1)}{t_2 - t_1} F(t) + \frac{1}{2m} \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{t_1}^{t_2} dt' F(t) G(t, t') F(t'). \quad (1.19)$$

Мы видим, что траектория определяется функциональной производной по  $F$ . Кроме того, полагая  $F = 0$ , получаем

$$\frac{\partial I(2, 1)}{\partial q_2} = m \frac{q_2 - q_1}{t_2 - t_1} = p_2, \quad \frac{\partial I(2, 1)}{\partial t_2} = -\frac{m}{2} \left( \frac{q_2 - q_1}{t_2 - t_1} \right)^2 = -H(p_2, q_2). \quad (1.20)$$

В качестве второго примера напомним, что дает этот формализм применительно к свободной релятивистской частице. Пусть  $x$  и  $v$  — соответственно координата и скорость частицы, обозначавшиеся до сих пор через  $q$  и  $\dot{q}$ . Пространственно-временной интервал запишем в виде

$$\Delta s^2 = c^2 \Delta t^2 - \Delta x^2 = c^2 \Delta \tau^2, \quad (1.21)$$

где  $\tau$  — собственное время вдоль траектории,  $d\tau = (1 - v^2/c^2)^{1/2} dt = \gamma^{-1} dt$ , а  $c$  — скорость света. В 4-векторных обозначениях

$$x^\mu = (ct, \mathbf{x}), \quad \mu = 0, 1, 2, 3,$$

и

$$\Delta s^2 = g_{\mu\nu} \Delta x^\mu \Delta x^\nu = \Delta x_\mu \Delta x^\mu,$$

причем метрический тензор, используемый для опускания и поднимания лоренцевых индексов, имеет вид

$$g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad g_\mu^\nu = \delta_\mu^\nu.$$

Интервал  $\Delta s^2$  инвариантен относительно преобразований Пуанкаре, состоящих из трансляции ( $a$ ) и однородных преобразований Лоренца ( $\Lambda$ ):

$$x'^\mu \rightarrow x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu + a^\mu, \quad \Lambda^T g \Lambda = g. \quad (1.22)$$

Любое однородное преобразование Лоренца может быть представлено в виде произведения обычного вращения и частного преобразования Лоренца (или буста) вдоль направления  $\mathbf{n}$

$$\begin{aligned} x' &= x + \mathbf{n} [(ch \alpha - 1) \mathbf{x} \cdot \mathbf{n} - ct \operatorname{sh} \alpha], \\ ct' &= ct \operatorname{ch} \alpha - \mathbf{n} \cdot \mathbf{x} \operatorname{sh} \alpha, \end{aligned} \quad (1.23)$$

где  $\mathbf{v} = c \operatorname{th} \alpha \mathbf{n}$  — скорость движущейся системы отсчета. Четырехмерная скорость (4-скорость)

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} = \left( c \frac{dt}{d\tau}, \frac{d\mathbf{x}}{d\tau} \right) = \frac{dt}{d\tau} (c, \mathbf{v}) \quad (1.24)$$

представляет собой времениподобный вектор постоянной длины  $c$ . Его производная по собственному времени,  $d^2 x^\mu / d\tau^2 = du^\mu / d\tau$ , ортогональна 4-вектору  $u^\mu$  и, следовательно, пространственно-подобна. Для 4-импульса свободной частицы выполняются соотношения:

$$\begin{aligned} p^\mu &= m u^\mu = \left( \frac{E}{c}, \mathbf{p} \right) = \frac{m}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} (c, \mathbf{v}), \\ p^2 &= m^2 c^2 = \frac{E^2}{c^2} - \mathbf{p}^2. \end{aligned} \quad (1.25)$$

Заметим, что  $\mathbf{p} = E\mathbf{v}/c^2$ . Найдем теперь соответствующую функцию Лагранжа, предполагая 1) действие релятивистски-инвариантным и 2)  $L$ , зависящим лишь от первых производных по координатам. Разумеется, последнее требование заимствовано из нерелятивистской механики и означает, что для описания движения достаточно знать координаты и скорость. Это требование в более общих случаях может быть ослаблено, чтобы удовлетворить условию конечности скорости распространения сигналов в релятивистской теории. В случае свободной частицы независимость от выбора начала отсчета пространственных и временных координат приводит к тому, что  $L$  может зависеть только от первых производных и что в пределе  $|v| \ll c$  мы получаем  $L = (1/2) m v^2$  с точностью до полной производной по времени.

Ясно, что выражение  $L = a ds/dt$  удовлетворяет требованиям 1) и 2), причем постоянная  $a$  определяется нерелятивистским пределом. Таким образом, мы имеем

$$\begin{aligned} L &= -mc^2 \frac{d\tau}{dt} = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}, \\ I &= \int_{t_1}^{t_2} dt L = -mc \int_{s_1}^{s_2} ds. \end{aligned} \quad (1.26)$$

Формулы для импульса и энергии следуют из общих выражений

$$\mathbf{p} = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} = \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad E = \mathbf{p} \cdot \mathbf{v} - L = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

и согласуются, безусловно, с (1.25). Уравнение свободного движения записывается в виде  $d\mathbf{p}/dt = 0$ , так что обобщенная сила  $f^\mu = dp^\mu/d\tau$  в нем равна нулю. Действие на траектории

$$I(2, 1) = -mc (s_2 - s_1) = -mc^2 [c^2 (t_2 - t_1)^2 - (\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)^2]^{1/2}$$

является лоренцевым скаляром. Стандартные соотношения

$$-\frac{\partial I(2, 1)}{\partial t_2} = E_2 = E, \quad \frac{\partial I(2, 1)}{\partial \mathbf{x}_2} = \mathbf{p}_2 = \mathbf{p}$$

означают, что релятивистский импульс  $-\partial I/\partial x_\mu = p^\mu$  представляет собой 4-вектор.

Можно использовать и другую форму записи действия, а именно

$$I = - \int_1^2 d\tau \frac{m}{2} \left[ \frac{dx(\tau)}{d\tau} \right]^2, \quad (1.27)$$

где  $\tau$ —вообще говоря, произвольный параметр на траектории. Из уравнения движения  $m d^2x^\mu/d\tau^2 = 0$ , полученного из требования стационарности действия  $I$ , следует, что  $\tau$  пропорционально собственному времени и может быть выбрано таким образом, чтобы  $u^2 = (dx/d\tau)^2 = c^2$ . В последующем изложении, за исключением особо оговоренных случаев, мы будем полагать  $c=1$

Одно из достоинств формализма Лагранжа—Гамильтона состоит в том, что он допускает широкий класс преобразований, оставляющих структуру уравнений движения инвариантной. Эти преобразования выходят за рамки простой замены параметризации конфигурационного пространства, поскольку они смешивают координаты и импульсы. Преобразование  $(p, q) \leftrightarrow (p', q')$  (возможно, зависящее от времени) является каноническим, если существует функция  $H'$  от  $p', q'$  (и, возможно, от  $t$ ) такая, что в новых переменных уравнения движения имеют прежний вид:

$$\dot{q}' = \frac{\partial H'}{\partial p'}, \quad \dot{p}' = - \frac{\partial H'}{\partial q'}$$

(здесь, как и выше, индексы опущены). Достаточное условие для выполнения этого свойства следует из принципа наименьшего действия. Мы требуем, чтобы дифференциальные формы  $p' dq' - H' dt$  и  $p dq - H dt$  отличались не более, чем на полный дифференциал. В свою очередь это означает равенство внешних производных от этих форм:

$$\sum_i dp_i \wedge dq_i - dH \wedge dt = \sum_i dp'_i \wedge dq'_i - dH' \wedge dt. \quad (1.28)$$

Данное условие подразумевает, что скобки Пуассона от функций, заданных в фазовом пространстве в переменных  $(q, p)$ , равны скобкам Пуассона в новых переменных  $(q', p')$ :

$$\{f, g\} = \sum_i \left( \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} - \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} \right) = \sum_i \left( \frac{\partial f}{\partial p'_i} \frac{\partial g}{\partial q'_i} - \frac{\partial f}{\partial q'_i} \frac{\partial g}{\partial p'_i} \right). \quad (1.29)$$

Из (1.28) можно также вывести уравнения для  $H'$ , которые в силу (1.29) образуют интегрируемую систему:

$$\begin{aligned} \frac{\partial H'}{\partial p'_i} &= \sum_k \left[ \frac{\partial p_k}{\partial p'_i} \left( \frac{\partial H}{\partial p_k} - \frac{\partial q_k}{\partial t} \right) + \frac{\partial q_k}{\partial p'_i} \left( \frac{\partial H}{\partial q_k} + \frac{\partial p_k}{\partial t} \right) \right], \\ \frac{\partial H'}{\partial q'_i} &= \sum_k \left[ \frac{\partial p_k}{\partial q'_i} \left( \frac{\partial H}{\partial p_k} - \frac{\partial q_k}{\partial t} \right) + \frac{\partial q_k}{\partial q'_i} \left( \frac{\partial H}{\partial q_k} + \frac{\partial p_k}{\partial t} \right) \right]. \end{aligned} \quad (1.30)$$

Рассматривая (1.29) и (1.30), замечаем, что типичным примером канонического преобразования является решение уравнений движения, в которых  $(q', p')$  соответствуют начальным данным в момент времени  $t_0$ , а  $(q, p)$  — положению в фазовом пространстве в момент времени  $t$ . Очевидно, что в этом случае  $H' = 0$  и что скобки Пуассона остаются инвариантными.

Предположим, что  $H$  не зависит от времени  $2N$  функций  $q', p'$ , выраженные через  $q, p$  и  $t$  являются константами движения. Исключая  $t$ , получаем  $2N - 1$  (локальных) констант движения. Лишь небольшое их число можно рассматривать как функции, хорошо определенные во всем фазовом пространстве Тора Пуанкаре утверждает, что последние связаны с симметриями движения

Разумеется, канонические преобразования не ограничиваются решениями уравнений движения Их множество образует бесконечную группу В заключение заметим, что рассматривая соотношения (1.28) при фиксированном времени и беря  $N$ -ю внешнюю степень обеих частей, можно показать, что канонические преобразования сохраняют меру  $\prod_i dp_i \wedge dq_i$  фазового пространства; это есть не что иное, как теорема Лиувилля.

### 1.1.2. Электромагнитное поле как бесконечная динамическая система

Системы с бесконечно большим числом степеней свободы хорошо известны в механике жидкостей и газов, электродинамике, физике твердого тела и т. п. Мы обсудим здесь, как можно обобщить лагранжев формализм на случай электромагнитного поля.

Чтобы получить функцию Лагранжа, будем исходить из уравнений поля в присутствии фиксированных внешних источников. Мы используем систему единиц Хевисайда (в которой закон Кулона записывается в виде  $Q Q' / 4\pi r^2$ ) и полагаем  $c = 1$ . Запишем уравнения Максвелла в терминах напряженности электрического поля  $\mathbf{E}$ , магнитной индукции  $\mathbf{B}$ , плотностей заряда и тока  $\rho$  и  $\mathbf{j}$ :

$$\begin{aligned} 1) \operatorname{div} \mathbf{E} &= \rho, & 3) \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0, \\ 2) \operatorname{rot} \mathbf{B} - \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} &= \mathbf{j}, & 4) \operatorname{rot} \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= 0. \end{aligned} \quad (1.31)$$

Локальный закон сохранения заряда запишется в виде

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j} = 0. \quad (1.32)$$

Напомним физическую интерпретацию этих уравнений, записанных в интегральной форме

1)  $\int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \int_V \rho d^3x$ ; поток вектора  $\mathbf{E}$  через замкнутую поверхность

равен полному заряду, находящемуся внутри объема, ограниченного этой поверхностью (закон Гаусса)<sup>1)</sup>.

2)  $\oint_C \mathbf{B} \, dx = \int_S \left( \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) d\mathbf{S}$ ; циркуляция вектора магнитной индукции  $\mathbf{B}$  вдоль замкнутой кривой  $C$ , являющейся границей поверхности  $S$ , равна потоку через  $S$  суммы обычного тока и тока смещения Максвелла  $(\partial \mathbf{E} / \partial t)$ .

3)  $\int_S \mathbf{B} \, d\mathbf{S} = 0$ ; поток вектора  $\mathbf{B}$  через замкнутую поверхность равен нулю, что означает отсутствие магнитных зарядов (монополей)

4)  $-\oint_C \mathbf{E} \, dx = \int_S d\mathbf{S} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ ; изменяющийся магнитный поток порождает электродвижущую силу (закон индукции Фарадея).

Удобно использовать компактные обозначения, которые отражают релятивистские ковариантные свойства векторных, тензорных и т. д. полей. Считая, что греческие индексы пробегают значения от 0 до 3, можно ввести следующие обозначения<sup>2)</sup>:

$$x^\mu = (t, \mathbf{x}), \quad j^\mu = (\rho, \mathbf{j}),$$

$$F^{\mu\nu} = -F^{\nu\mu} = \begin{pmatrix} 0 & -E^1 & -E^2 & -E^3 \\ E^1 & 0 & -B^3 & B^2 \\ E^2 & B^3 & 0 & -B^1 \\ E^3 & -B^2 & B^1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.33)$$

Производные будем сокращенно записывать как  $\partial/\partial x^\mu \equiv \partial_\mu$ . Определим также антисимметричный символ Леви-Чивиты  $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ , равный 1 или  $-1$  в зависимости от того, является  $(\mu, \nu, \rho, \sigma)$  четной или нечетной перестановкой чисел  $(0, 1, 2, 3)$ , и равный нулю в остальных случаях. Заметим, что  $\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} = -\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ . Этот символ используется для преобразования антисимметричного тензора в дуальный, например:

$$\bar{F}^{\mu\nu} = -\bar{F}^{\nu\mu} = \frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\rho\sigma} = \begin{pmatrix} 0 & -B^1 & -B^2 & -B^3 \\ B^1 & 0 & E^3 & -E^2 \\ B^2 & -E^3 & 0 & E^1 \\ B^3 & E^2 & -E^1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.34)$$

<sup>1)</sup> В отечественной литературе это соотношение принято называть теоремой Остроградского—Гаусса — Прим. ред

<sup>2)</sup> Соответствующие величины с нижними индексами имеют вид

$$x_\mu = g_{\mu\nu} x^\nu = (t, -\mathbf{x}), \quad j_\mu = (\rho, -\mathbf{j}).$$

Иными словами,  $\tilde{F}$  получается из  $F$  заменой  $E \rightarrow B$ ,  $B \rightarrow -E$ ; справедливо и обратное соотношение

$$\frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \tilde{F}_{\rho\sigma} = -F^{\mu\nu}.$$

При преобразованиях Лоренца  $F$  и  $\tilde{F}$  преобразуются как антисимметричные тензоры. В частности, если выполнить однородное преобразование Лоренца по формуле (1.23), то получим ( $c=1$ )

$$\begin{aligned} \mathbf{E}' &= (\mathbf{E} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n} + \frac{\mathbf{n} \times (\mathbf{E} \times \mathbf{n}) + \mathbf{v} \times \mathbf{B}}{\sqrt{1-v^2}}, \\ \mathbf{B}' &= (\mathbf{B} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n} + \frac{\mathbf{n} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{n}) - \mathbf{v} \times \mathbf{E}}{\sqrt{1-v^2}}, \end{aligned} \quad (1.35)$$

где  $\mathbf{n} = \mathbf{v}/|\mathbf{v}|$ .

Такая явная запись не всегда удобна. Например, чтобы найти релятивистские инварианты, построенные из  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$ , проще воспользоваться тензорными обозначениями и убедиться в том, что они могут быть комбинациями лишь следующих величин:

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} &= -\tilde{F}_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu} = -2(\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2), \\ F_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu} &= -4\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}. \end{aligned} \quad (1.36)$$

Приведем также тождества:

$$\begin{aligned} \tilde{F}_{\mu\lambda} \tilde{F}^{\lambda\nu} &= F_{\mu\lambda} F^{\lambda\nu} + \frac{1}{2} g_{\mu}^{\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta}, \\ F^{\mu\nu} \tilde{F}_{\nu\rho} &= g^{\mu}_{\rho} \mathbf{E} \cdot \mathbf{B}. \end{aligned}$$

Используя эти обозначения и эйнштейновское соглашение о суммировании по немым индексам, уравнения Максвелла можно записать в компактном виде:

$$\partial_{\mu} F^{\mu\nu} = j^{\nu}, \quad \partial_{\mu} \tilde{F}^{\mu\nu} = 0. \quad (1.37a, б)$$

При этом закон сохранения тока выступает как естественное условие совместности:

$$\partial_{\mu} j^{\mu} = 0. \quad (1.38)$$

Чтобы продвинуться дальше, нам нужно отождествить пространственную координату  $x$  с индексом  $i$ , обозначающим различные степени свободы, причем это соответствие должно быть таким, чтобы  $\sum_i \rightarrow \int d^3x$ . Однако, если рассматривать  $\mathbf{E}(\mathbf{x}, t)$  и  $\mathbf{B}(\mathbf{x}, t)$  как конфигурационные переменные, мы сразу же натолкнемся на затруднение, поскольку в уравнения Максвелла входят производные только первого порядка по времени. Кроме того,



в этой формулировке не проявляется в явном виде лоренц-инвариантность.

Чтобы преодолеть эти трудности, преобразуем сначала наши уравнения в эквивалентные уравнения второго порядка. Это осуществляется с помощью 4-потенциала  $A^\mu$ , который позволяет представить  $F^{\mu\nu}$  в виде

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu, \quad (1.39)$$

тождественно удовлетворяющем системе однородных уравнений (1.37б). При этом напряженность электрического поля  $\mathbf{E}$  и магнитная индукция  $\mathbf{B}$  выражаются через  $A^\mu$  следующим образом:

$$\mathbf{E} = -\nabla A^0 - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad \mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}.$$

Это, вообще говоря, локальные соотношения для частного решения в окрестности точки, выбранной за начало координат, причем частное решение записывается в виде

$$A^\mu(x) = - \int_0^1 d\lambda \lambda F^{\mu\nu}(\lambda x) x_\nu.$$

Однако такой потенциал не определяется единственным образом соотношением (1.39). Его можно преобразовать, добавляя 4-градиент. Это преобразование называется калибровочным:

$$A^\mu(x) \rightarrow A^\mu(x) + \partial^\mu \phi. \quad (1.40)$$

В случае регулярных полей, удовлетворяющих уравнениям (1.37), потенциал  $A^\mu(x)$  можно фактически определить во всем пространстве-времени, что приводит к эквивалентной форме уравнений Максвелла:

$$\square A^\mu - \partial^\mu (\partial_\nu A^\nu) = j^\mu, \quad (1.41)$$

где  $\square$  — оператор Д'Аламбера (даламбертиан),  $\square \equiv \partial_\mu \partial^\mu \equiv (\partial/\partial t)^2 - \Delta$ . Очевидно, что при калибровочном преобразовании вид уравнения (1.41) не меняется. В электродинамике калибровочный произвол иногда оказывается досадной помехой, в иных же случаях он является глубоким и плодотворным принципом. Адекватный выбор калибровки может привести к существенным упрощениям, хотя при этом возможно нарушение явной релятивистской ковариантности.

Наша первая цель достигнута в том смысле, что мы теперь имеем уравнения второго порядка. Однако компактные обозначения могут ввести в заблуждение. Поэтому более внимательно рассмотрим эти уравнения, которые в явном виде записываются

следующим образом:

$$\begin{aligned}\rho &= \square A^0 - \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial A^0}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{A} \right) = -\Delta A^0 - \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \mathbf{A}, \\ \mathbf{j} &= \square \mathbf{A} + \nabla \left( \frac{\partial}{\partial t} A^0 + \operatorname{div} \mathbf{A} \right).\end{aligned}$$

При некоторых условиях, фиксирующих калибровку, таких, как  $\operatorname{div} \mathbf{A} = 0$  (кулоновская калибровка), производная по времени в первом из этих уравнений отсутствует (уравнение Пуассона). Это уравнение играет роль связи. При этом можно найти решение для  $A^0$ :

$$A^0(t, \mathbf{x}) = \int \frac{d^3x'}{4\pi} \frac{\rho(t, \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}.$$

Векторный потенциал теперь дается выражением

$$\square \mathbf{A} = \mathbf{j} - \nabla \int \frac{d^3x'}{4\pi} \frac{(\partial \rho / \partial t)(t, \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}.$$

Вследствие закона сохранения тока дивергенция правой части равна нулю.

Рассмотренный выбор калибровки иногда применяют для того, чтобы получить лагранжев формализм как первый шаг к квантованию. Он имеет очевидный недостаток — явное нарушение ковариантности. Тем не менее лежащая в его основе физическая картина, соответствующая исключению некоторых лишних степеней свободы, может быть привлекательной в отдельных случаях, например в задаче на связанные состояния.

Однако нам нужно написать действие, используя функцию Лагранжа, обеспечивающую локальный характер теории. Поэтому мы не будем применять эту калибровку с ее мгновенно действующим кулоновским потенциалом. Локальность — глубоко укоренившийся физический принцип, происходящий из формализма теории поля, созданного в XIX веке. Этот принцип лежит в основе большинства достижений релятивистской теории поля; его справедливость подтверждена вплоть до очень малых пространственно-временных интервалов (например, с помощью дисперсионных соотношений) и пока не вызывает сомнений.

Следовательно, функция Лагранжа должна выражаться в виде пространственного интеграла от плотности, называемой лагранжианом  $\mathcal{L}(x)$ , который в свою очередь зависит лишь от полей и их производных конечного порядка. В действительности мы не требуем, чтобы эти поля были непосредственно измеримыми величинами; это очевидным образом относится к зависящему от калибровки потенциалу  $A_\mu$ . Однако локально измеримые величины должны выражаться через локальные комбинации динамич-

ческих переменных. Напишем интеграл

$$I = \int d^4x \mathcal{L}(x). \quad (1.42)$$

В большинстве случаев будем рассматривать этот интеграл, не уточняя пределы интегрирования. Предположим, что интегрирование распространено на все пространство и что поля исчезают достаточно быстро на бесконечности, чтобы было оправдано интегрирование по частям.

Предположим также, что  $A^\mu(x)$  преобразуется как 4-векторное поле, а лагранжиан — как скалярная плотность; тогда действие будет лоренц-инвариантным. Кроме того, потребуем, чтобы величина  $\mathcal{L}$  зависела только от полей и их первых производных и при калибровочном преобразовании (1.40) к ней могла добавиться самое большее дивергенция. Это является естественным обобщением аналогичного свойства функции Лагранжа и обеспечивает калибровочную инвариантность уравнений движения.

Вообще говоря, если лагранжиан зависит от полей  $\varphi_i(x)$  и их градиентов  $\partial_\mu \varphi_i(x)$ , то при бесконечно малой вариации полей  $\delta\varphi_i(x)$  изменение действия дается выражением

$$\begin{aligned} \delta I &= \int d^4x \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}(x)}{\partial \varphi_i(x)} \delta \varphi_i(x) + \frac{\partial \mathcal{L}(x)}{\partial [\partial_\mu \varphi_i(x)]} \delta [\partial_\mu \varphi_i(x)] \right\} = \\ &= \int d^4x \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}(x)}{\partial \varphi_i(x)} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial [\partial_\mu \varphi_i(x)]} \right\} \delta \varphi_i(x). \end{aligned} \quad (1.43)$$

Требование стационарности действия приводит к обобщенным уравнениям Эйлера — Лагранжа

$$\frac{\delta I}{\delta \varphi_i(x)} \equiv \frac{\partial \mathcal{L}(x)}{\partial \varphi_i(x)} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}(x)}{\partial [\partial_\mu \varphi_i(x)]} = 0. \quad (1.44)$$

В соответствии с принятыми выше правилами мы должны выбрать коэффициенты  $a, b, c, d$  и  $e$  в лагранжиане

$$\mathcal{L}(x) = \frac{1}{2} [a \partial_\mu A^\nu \partial^\mu A_\nu + b \partial_\mu A^\nu \partial_\nu A^\mu + c (\partial_\mu A^\mu)^2 + d A_\mu A^\mu + e A_\mu j^\mu]$$

таким образом, чтобы уравнения (1.44) совпадали с (1.41). Простое вычисление дает с точностью до общего множителя

$$\mathcal{L}(x) = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - j_\mu A^\mu + \frac{c}{2} [(\partial_\mu A^\mu)^2 - \partial_\mu A^\nu \partial_\nu A^\mu].$$

Здесь  $F_{\mu\nu}$  используется как сокращенная запись связи электромагнитного тензора с потенциалом. Коэффициент  $c$  остается произвольным. Он умножается, как и ожидалось, на дивергенцию:

$$(\partial_\mu A^\mu)^2 - \partial_\mu A^\nu \partial_\nu A^\mu = \partial_\mu [A_\nu (g^{\mu\nu} \partial_\rho A^\rho - \partial^\nu A^\mu)].$$

Следовательно, этот член может быть опущен, и мы приходим к выражению для действия

$$I = - \int d^4x \left( \frac{1}{4} F^2 + j \cdot A \right) = \int d^4x \left( \frac{E^2 - B^2}{2} - \rho A^0 + j \cdot A \right). \quad (1.45)$$

В присутствии внешнего тока этот лагранжиан не является калибровочно инвариантным. При калибровочном преобразовании (1.40) к нему добавляется выражение, которое в силу закона сохранения тока является дивергенцией:

$$j_\mu \partial^\mu \phi = \partial^\mu (\phi j_\mu).$$

Это объясняет инвариантность уравнений Максвелла. Мы заключаем, что сохранение тока является необходимым и достаточным условием калибровочной инвариантности теории

Поскольку этот вопрос крайне важен в квантовом случае, интересно рассмотреть его с другой точки зрения. До сих пор мы не ограничивали произвол в выборе величин  $A^\mu$ . Структура уравнения (1.41) такова, что наиболее естественно использовать условие Лоренца

$$\partial_\mu A^\mu(x) = 0, \quad (1.46)$$

с учетом которого уравнение (1.41) принимает вид

$$\square A^\mu = j^\mu. \quad (1.47)$$

Данное уравнение совместно с (1.46). Калибровочный произвол теперь сильно ограничен, поскольку в этом случае допускаются лишь такие преобразования  $A^\mu \rightarrow \tilde{A}^\mu + \partial^\mu \phi$ , для которых

$$\square \phi = 0. \quad (1.48)$$

Условие Лоренца может быть включено в формализм с помощью множителя Лагранжа  $\lambda$ , если добавить в действие член  $\lambda \int d^4x \frac{1}{2} (\partial \cdot A)^2$ .

При этом уравнения Максвелла изменятся и запишутся в виде

$$\square A^\mu + (\lambda - 1) \partial_\mu \partial \cdot A = j^\mu. \quad (1.49)$$

Беря дивергенцию от обеих частей, видим, что при  $\lambda \neq 0$

$$\square \partial_\mu A^\mu = 0. \quad (1.50)$$

Таким образом, если  $\partial_\mu A^\mu$  обращается в нуль при больших  $|t|$ , то этот член равен нулю для всех моментов времени и, следовательно, уравнение (1.49) эквивалентно уравнениям Максвелла в калибровке Лоренца.

Просуммируем логические связи:

1.  $\mathcal{L} = -(1/4) F^2 - j \cdot A$ . Калибровочная инвариантность  $\leftrightarrow$  закон сохранения тока. Принцип наименьшего действия  $\rightarrow$  уравнения Максвелла.

2.  $\mathcal{L} = -(1/4) F^2 + (1/2) \lambda (\partial \cdot A)^2 - j \cdot A$  и  $\partial \cdot j = 0$ . Принцип наименьшего действия  $\rightarrow \square \partial_\mu A^\mu = 0$ . Граничные условия  $\rightarrow$  калибровка Лоренца  $\rightarrow$  уравнения Максвелла.

Несложный анализ позволяет запомнить знаки в (1.45). «Кинетические» члены в  $(\partial A / \partial t)^2$  входят с коэффициентом  $+1/2$ . Кроме того, поскольку  $\rho^0 A^0$  есть потенциальная энергия, она должна входить со знаком минус. Остальное следует из лоренц-инвариантности. Заметим также то, что в естественной системе единиц  $\int d^3x (E^2/2)$  представляет собой энергию и, следовательно,  $\int d^4x (E^2/2)$  действительно имеет размерность действия: энергия  $\times$  время.

### 1.1.3. Электромагнитное взаимодействие точечной частицы

Четыре-вектор тока заряженной точечной частицы локализуется на ее пространственно-временной траектории  $x^\mu(\tau)$ . Следовательно,

$$j^\mu(y, t) = e \frac{dx^\mu}{dt} \delta^3[y - x(\tau)] \Big|_{t=x^0(\tau)} = e \int d\tau \frac{dx^\mu}{d\tau} \delta^4[y - x(\tau)]; \quad (1.51)$$

здесь  $e$  — сохраняющийся заряд  $(\int d^3y j^0(t, y) = e)$ . Ток  $j^\mu$ , как следует из (1.51), удовлетворяет уравнению непрерывности  $\partial_\mu j^\mu = 0$ .

Для объединенной системы частицы и поля мы просто складываем действия:

$$\begin{aligned} I &= - \int d^4x \left( \frac{F^2}{4} + j \cdot A \right) - m \int ds = - \int d^4x \frac{F^2}{4} - \\ &\quad - e \int dx_\mu A^\mu[x(\tau)] - m \int ds = \\ &= \int d^4x \mathcal{L}_{\text{эм}}(x) + \int dt (-m \sqrt{1-v^2} + e \mathbf{A} \cdot \mathbf{v} - e A^0). \end{aligned} \quad (1.52)$$

Любая заряженная частица является источником и, следовательно, изменяет окружающее ее поле. В первом приближении мы пренебрежем этим эффектом и будем полагать, что  $A_\mu$  определяется внешними условиями. Это позволит нам опустить вклад  $\mathcal{L}_{\text{эм}}$  в (1.52). Заметим, что в данном случае мы принимаем точку зрения, противоположную той, которой следовало в начале нашего обсуждения. Реальные связанные системы, будь то в классической или в квантовой механике, очевидно, трудны для изучения. Более практично начать исследование с упрощенных моделей, а потом уже переходить к более реалистическим моделям. В разд. 1.3.2 мы кратко рассмотрим классическую связанную

систему. Таким образом, мы подошли к изучению движения частицы под действием данного внешнего поля. В этом случае функция Лагранжа имеет вид

$$L = -m\sqrt{1-v^2} + e(\mathbf{A} \cdot \mathbf{v} - A^0). \quad (1.53)$$

Отсюда следует, что сопряженный импульс  $\mathbf{p}$  отличается от импульса свободной частицы  $m\mathbf{v}/\sqrt{1-v^2}$ , поскольку

$$\mathbf{p} = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} = \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1-v^2}} + e\mathbf{A}. \quad (1.54)$$

Функция Гамильтона имеет вид

$$H \doteq \mathbf{v} \cdot \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} - L = \frac{m}{\sqrt{1-v^2}} + eA^0 = [m^2 + (\mathbf{p} - e\mathbf{A})^2]^{1/2} + eA^0, \quad (1.55)$$

при этом уравнение движения  $(d/dt)(\partial L/\partial \mathbf{v}) = \partial L/\partial \mathbf{x}$  принимает вид

$$\frac{d}{dt} \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1-v^2}} = -e \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - e\nabla A^0 + e\mathbf{v} \times \text{rot } \mathbf{A} = e(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}). \quad (1.56)$$

Правая часть этого выражения есть не что иное, как сила Лоренца. Наконец, изменение энергии  $\mathcal{E}$  со временем равно

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{m}{\sqrt{1-v^2}} \right) = \mathbf{v} \cdot \frac{d}{dt} \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1-v^2}} = e\mathbf{E} \cdot \mathbf{v}. \quad (1.57)$$

Это хорошо известный результат, выражающий тот факт, что только электрические поля совершают работу. Уравнения (1.56) и (1.57) можно записать в более компактном виде

$$m \frac{du^\mu}{d\tau} = eF^{\mu\nu}u_\nu, \quad (1.58)$$

где  $u^\mu = dx^\mu/d\tau$  — четыре-вектор скорости.

Читатель может убедиться, что применение вариационного принципа к действию  $I = - \int d\tau m(u^2/2) - \int eA dx$  приводит непосредственно к (1.58).

Рассмотрим три простых примера:

1 Движение в постоянном однородном поле

Пусть  $F_{\mu\nu}$  не зависит от  $x$ . Уравнения (1.56) и (1.57) сразу дают

$$\frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1-v^2}} - \frac{m\mathbf{v}_0}{\sqrt{1-v_0^2}} = e(\mathbf{E}t + \mathbf{x} \times \mathbf{B}), \quad \mathcal{E} - \mathcal{E}_0 = e\mathbf{E} \cdot \mathbf{x}. \quad (1.59)$$

Мы можем также непосредственно решить ковариантное уравнение (1.58) в матричной форме

$$u^\mu(\tau) = \left( \exp \frac{e\tau}{m} F \right)^\mu{}_\nu u^\nu(0).$$



Наконец, поучительно использовать спинорное представление. Сопоставим 4-вектору  $\underline{u}$  матрицу  $2 \times 2$ :

$$\underline{u} = u_0 I + \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\sigma},$$

где  $\boldsymbol{\sigma}$  — матрицы Паули. Используя тождество  $\boldsymbol{\sigma} \mathbf{a} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{b} = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) I + i\boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b})$ , перепишем (1.58) в виде

$$\frac{d}{d\tau} \underline{u} = \frac{e}{m} \left( \frac{\mathbf{E} + i\mathbf{B}}{2} \cdot \boldsymbol{\sigma} \underline{u} + \underline{u} \frac{\mathbf{E} - i\mathbf{B}}{2} \cdot \boldsymbol{\sigma} \right). \quad (1.60)$$

Отсюда следует, что

$$\underline{u}(\tau) = \exp \left( \frac{e\tau}{m} \frac{\mathbf{E} + i\mathbf{B}}{2} \cdot \boldsymbol{\sigma} \right) \underline{u}(0) \exp \left( \frac{e\tau}{m} \frac{\mathbf{E} - i\mathbf{B}}{2} \cdot \boldsymbol{\sigma} \right).$$

Если  $\mathbf{n}$  обозначает комплексный 3-вектор  $\mathbf{E} + i\mathbf{B}$  и  $a = (e/2m)(\mathbf{n}^2)^{1/2}$ , мы получим

$$\exp \left[ \frac{e\tau}{2m} (\mathbf{E} + i\mathbf{B}) \cdot \boldsymbol{\sigma} \right] = \text{ch}(a\tau) I + \text{sh}(a\tau) \frac{\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}}{(\mathbf{n}^2)^{1/2}}.$$

В системе отсчета, в которой  $\underline{u}(0) = I$ , а  $\underline{x}(0) = 0$ , и в том случае, когда  $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B} = 0$ , т. е. параметр  $a$  веществен, мы получаем следующие решения:

$$\begin{aligned} \underline{u}(\tau) &= \left[ \text{ch}^2(a\tau) + \text{sh}^2(a\tau) \frac{\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2}{\mathbf{n}^2} \right] I + \\ &+ \left[ 2 \text{sh}(a\tau) \text{ch}(a\tau) \frac{\mathbf{E}}{(\mathbf{n}^2)^{1/2}} + 2 \text{sh}^2(a\tau) \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{\mathbf{n}^2} \right] \cdot \boldsymbol{\sigma}, \\ \underline{x}(\tau) &= \left[ \tau + \left[ \frac{\text{sh}(2a\tau)}{4a} - \frac{\tau}{2} \right] \left( 1 + \frac{\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2}{\mathbf{n}^2} \right) \right] I + \\ &+ \left[ \frac{\text{ch}(2a\tau) - 1}{2a} \frac{\mathbf{E}}{(\mathbf{n}^2)^{1/2}} + \frac{\text{sh}(2a\tau) - 2a\tau}{2a} \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{\mathbf{n}^2} \right] \boldsymbol{\sigma}. \end{aligned} \quad (1.61)$$

В предельном случае, когда  $\mathbf{n}^2 = 0$ , т. е.  $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B} = 0$ ,  $\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2 = 0$ , мы находим

$$u_0(\tau) = 1 + \frac{e^2 \mathbf{E}^2}{m^2} \frac{\tau^2}{2}, \quad \mathbf{u}(\tau) = \tau \frac{e\mathbf{E}}{m} + \frac{e^2}{m^2} \frac{\tau^2}{2} \mathbf{E} \times \mathbf{B}.$$

Заметим, что скорость нарастает быстрее в направлении  $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ . Если  $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}$  равно нулю, но  $\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2 \neq 0$ , то мы фактически можем определить систему, в которой либо  $\mathbf{E}$ , либо  $\mathbf{B}$  равно нулю. Если  $\mathbf{E} = 0$ , то частица движется по винтовой линии, ось которой параллельна вектору  $\mathbf{B}$ , с постоянной угловой скоростью  $\omega = (eB/m) \sqrt{1 - v^2}$ . Если  $\mathbf{B}$  равно нулю и  $\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{E} = 0$ , то траектория представляет собой «цепную» линию в плоскости  $(\mathbf{v}_0, \mathbf{E})$  с вогнутостью в направлении  $e\mathbf{E}$  (в нерелятивистском пределе эта цепная линия сводится к параболе) (рис 1.1)

## 2 Гиромангнитное отношение. Прецессия Томаса. Уравнение Баргманна — Мишеля — Телегди

В рассматриваемой классической картине введем понятия собственного магнитного момента и гиромангнитного отношения. С точки зрения последовательной теории это противоречивые понятия. Мы будем трактовать их просто как полезный предельный случай полного квантового рассмотрения.

Напомним, что элементарная петля с током эквивалентна магнитному моменту  $d\boldsymbol{\mu} = id\boldsymbol{\Sigma}$ , где  $i$  — ток, а  $d\boldsymbol{\Sigma} = \mathbf{n} dS$  — вектор, нормальный к плоскости

петли и по величине равный ее площади. Если ток обусловлен движением нерелятивистского заряда по орбите, т. е.  $i = ev/2\pi r$ , то магнитный момент дается выражением

$$\mu = (e/2m) \mathbf{L}, \quad (1.62)$$

где  $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$  — орбитальный момент. Соответственно в случае однородной внешней магнитной индукции  $\mathbf{B}$  часть функции Лагранжа, отвечающую

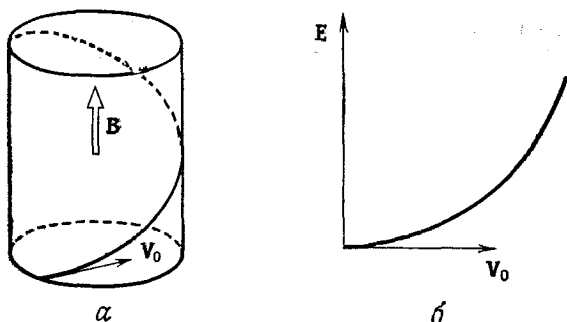


РИС. 1.1. Движение в постоянном однородном поле. а —  $E = 0$ ; б —  $\mathbf{B} = 0$ ;  $E \cdot \mathbf{v} = 0$ .

взаимодействию, можно записать в виде

$$L_{вз} = e\mathbf{A} \cdot \mathbf{v} = \frac{e}{2} (\mathbf{B} \times \mathbf{r}) \cdot \mathbf{v} = \mu \cdot \mathbf{B}. \quad (1.63)$$

Из выражения для силы Лоренца

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{r} \times (e\mathbf{v} \times \mathbf{B}) = \frac{e}{2m} \mathbf{L} \times \mathbf{B} \quad (1.64)$$

следует, что как угловой, так и магнитный моменты прецессируют вокруг направления магнитного поля с классической ларморовой частотой  $\omega = eB/2m$ .

В 1926 г. Уленбек и Гаудсмит для описания зеемановского расщепления ввели понятия спина электрона (собственного углового момента) и магнитного момента  $\mu = g(e/2m) \mathbf{S}$  ( $|\mathbf{S}| = \hbar/2$ ; в современной терминологии спин  $1/2$ ) и  $g$  (приведенное гиромангнитное отношение), равное 2. К сожалению, это значение  $g = 2$  приводило к тому, что величина спин-орбитальной связи для электрона, движущегося в поле центрального потенциала, оказывалась в два раза больше значения, которое следовало из тонкой структуры спектра атома водорода. Предположим, что в системе покоя электрона

$$\frac{d\mathbf{S}}{dt} = \mu \times \mathbf{B}_{\text{пок}}. \quad (1.65)$$

Если  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$  — поля в лабораторной системе координат, где электрон имеет скорость  $\mathbf{v}$ , то из (1.35) следует  $\mathbf{B}_{\text{пок}} = \mathbf{B} - \mathbf{v} \times \mathbf{E} + O(v^2)$ . Следовательно, в приближении малых скоростей энергию магнитного взаимодействия спина можно записать в виде

$$U' = -\mu \cdot (\mathbf{B} - \mathbf{v} \times \mathbf{E}). \quad (1.66)$$

Если принять, что электрическое поле атомного ядра определяется сферическим средним потенциалом, т. е.

$$e\mathbf{E} = -\frac{r}{r} \frac{dV}{dr}, \quad (1.67)$$

то для энергии  $U'$  получаем следующее выражение:

$$U' = -\frac{ge}{2m} \mathbf{S} \cdot \mathbf{B} + \frac{g}{2m^2} \mathbf{S} \cdot \mathbf{L} \frac{1}{r} \frac{dV}{dr}. \quad (1.68)$$

Имеющаяся здесь неточность обусловлена, как впервые было показано Томасом, некорректным применением преобразований Лоренца к вращательному движению. Иными словами, при преобразовании Лоренца мы от лабораторной инерциальной системы переходим в систему, вращающуюся с угловой скоростью  $\omega_T$ , так что правильное выражение для энергии должно иметь вид

$$U = U' - \mathbf{S} \cdot \boldsymbol{\omega}_T. \quad (1.69)$$

Это типично релятивистский эффект, который можно получить, рассматривая произведение двух однородных преобразований Лоренца, отвечающих скоростям  $-\mathbf{v}$  и  $\mathbf{v} + \delta\mathbf{v}$ . Здесь  $\delta\mathbf{v} = \dot{\mathbf{v}} \delta t$ . Как любое преобразование Лоренца, это произведение можно разложить на частное преобразование Лоренца, отвечающее скорости  $\Delta\mathbf{v}$  и задаваемое формулой

$$\Delta\mathbf{v} = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} \left[ \delta\mathbf{v} + \left( \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} - 1 \right) \mathbf{v} \frac{\mathbf{v} \cdot \delta\mathbf{v}}{v^2} \right],$$

и трехмерное вращение

$$\Delta\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_T \delta t = \left( \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} - 1 \right) \frac{\mathbf{v} \times \delta\mathbf{v}}{v^2} \approx \frac{1}{2} \mathbf{v} \times \dot{\mathbf{v}} \delta t.$$

В рассматриваемом случае

$$\dot{\mathbf{v}} \approx -\frac{r}{mr} \frac{dV}{dr}, \quad \boldsymbol{\omega}_T \approx \frac{\mathbf{L}}{2m^2} \frac{1}{r} \frac{dV}{dr} \quad (1.70)$$

и

$$U = -\frac{ge}{2m} \mathbf{S} \cdot \mathbf{B} + \left( \frac{g-1}{2m^2} \right) \mathbf{S} \cdot \mathbf{L} \frac{1}{r} \frac{dV}{dr}.$$

Если  $g=2$ , то этот эффект действительно уменьшает наполовину спин-орбитальную связь, что согласуется с наблюдениями. Теория Дирака (см. гл. 2) приводит естественным образом к этому значению  $g$  для электрона и мюона. Однако в случае других частиц со спином  $1/2$ , таких, как протон ( $g=5,59$ ) или нейтрон ( $g=-3,83$ ), в силу наличия внутренней структуры значения  $g$  существенно отличаются от 2.

Рассмотрим снова движение частицы со спином в постоянном магнитном поле при малых скоростях. Скорость прецессирует с угловой частотой  $eB/m$ , в то время как для спина соответствующая частота равна  $geB/2m$ . Следовательно, относительная фаза за период равна  $2\pi(g/2-1)eB/m$ . Баргманн, Мишель, Телегди получили релятивистское описание классического движения спина для случая медленно меняющихся внешних полей.

Будем обозначать в системе покоя частицы спиновые степени свободы 3-вектором  $\mathbf{S}$ . В ковариантных обозначениях это пространственно-подобный 4-вектор  $S^\mu$ , ортогональный скорости  $u^\mu$ . Нам нужно обобщить уравнение  $d\mathbf{S}/dt = g(e/2m) \mathbf{S} \times \mathbf{B}$ , справедливое в системе покоя, в которой  $S^\mu = (0, \mathbf{S})$ . Чтобы не нарушалось условие  $\mathbf{S} \cdot \mathbf{u} = 0$ , необходимо, чтобы выполнялось соотношение  $\mathbf{S} \cdot \dot{\mathbf{u}} + \dot{\mathbf{S}} \cdot \mathbf{u} = 0$ , где точки обозначают производные по собственному времени. В мгновенной системе покоя имеем  $\mathbf{u} = (1, 0)$ ; следовательно,  $\dot{S}^0 = \mathbf{S} \cdot \dot{\mathbf{u}}$  и  $\dot{S}^\mu = [\mathbf{S} \cdot \dot{\mathbf{u}}, (ge/2m) \mathbf{S} \times \mathbf{B}]$ .

Чтобы записать это в произвольной системе координат, заметим, что  $F^\mu{}_\nu S^\nu$  сводится к  $(\mathbf{E} \cdot \mathbf{S}, \mathbf{S} \times \mathbf{B})$  в системе покоя. Поэтому искомое уравнение имеет вид

$$\dot{S}^\mu = \frac{g}{2} \frac{e}{m} F^\mu{}_\nu S^\nu + \frac{e}{m} \left( \frac{g}{2} - 1 \right) u^\mu (S^\alpha F_{\alpha\beta} u^\beta). \quad (1.71)$$

Отсюда ясно, что если  $g=2$ , то  $S$  и  $u$  жестко связаны. В случае  $g \neq 2$  такое утверждение не справедливо. Таким образом, мы нашли метод, который позволяет измерять магнитную аномалию частицы  $g/2-1$ .

Определим в лабораторной системе с временной осью  $\hat{i}=(1, 0)$  4-вектор  $L$ , такой, что  $L$  направлен вдоль  $u$  и  $L \cdot u=0$ , т. е.  $L=(u \operatorname{ch} \varphi - \hat{i})/\operatorname{sh} \varphi$ ,  $\operatorname{ch} \varphi = u \cdot \hat{i} = u^0$ . Далее, пусть  $M$ —единичный четырех-вектор в плоскости  $(S, L)$ ,

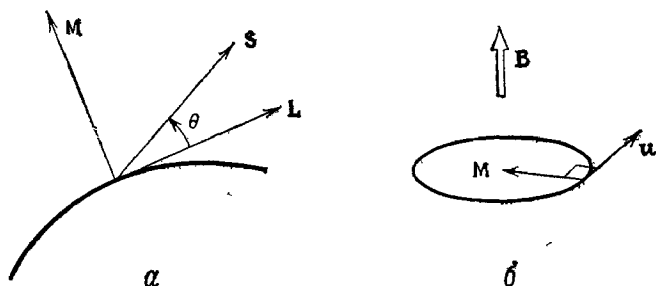


РИС. 1.2. а—система покоя частицы со спином  $S$ ; б—движение в магнитном поле.

ортогональный  $u$  и  $L$ . Положим  $S=L \cos \theta + M \sin \theta$  (рис. 1.2). Из выражения (1.71) находим уравнение движения для  $\theta$ .

$$\begin{aligned} \dot{S} &= \dot{\theta} (-L \sin \theta + M \cos \theta) + \dot{L} \cos \theta + \dot{M} \sin \theta = \\ &= \frac{g}{2} \frac{e}{m} (F \cdot L \cos \theta + F \cdot M \sin \theta) + \frac{e}{m} \left( \frac{g}{2} - 1 \right) u (L \cdot F \cdot u \cos \theta + \\ &\quad + M \cdot F \cdot u \sin \theta). \end{aligned} \quad (1.72)$$

Записывая скалярное произведение в  $M$  и используя условие  $L \cdot M = u \cdot L = u \cdot M = 0$ , получаем

$$-\dot{\theta} + M \cdot \dot{L} = \frac{g}{2} \frac{e}{m} M \cdot F \cdot L.$$

Соотношение  $M \cdot \dot{L} = \operatorname{cth} \varphi \dot{u} \cdot M = (e/m) \operatorname{cth} \varphi M \cdot F \cdot u$  приводит к

$$\dot{\theta} = \frac{e}{m} \left( \operatorname{cth} \varphi M \cdot F \cdot u - \frac{g}{2} M \cdot F \cdot L \right), \quad (1.73)$$

или в явном виде

$$\dot{\theta} = \frac{e}{m} \left[ \left( \frac{g}{2} \operatorname{sh}^2 \varphi - \operatorname{ch}^2 \varphi \right) \frac{E \cdot M}{\operatorname{sh} \varphi} + \left( \frac{g}{2} - 1 \right) \operatorname{cth} \varphi (M \times B) \cdot u \right]. \quad (1.74)$$

В случае чисто магнитного поля и частицы, вращающейся по круговой орбите с (собственной) ларморовой частотой  $\omega = eB/m$ , смешанное произведение  $(u \times M \cdot B)$  оказывается равным  $\operatorname{sh} \varphi B$ . Таким образом,

$$\begin{aligned} \dot{\theta} &= \left( \frac{g}{2} - 1 \right) \omega \operatorname{ch} \varphi, \\ \dot{\theta} - \theta_0 &= \left( \frac{g}{2} - 1 \right) \omega t \operatorname{sh} \varphi. \end{aligned}$$

За период  $\Delta\tau = 2\pi/\omega$  получаем приращение

$$\Delta\theta|_{\text{период}} = \left(\frac{g}{2} - 1\right) 2\pi \operatorname{ch} \varphi = \left(\frac{g}{2} - 1\right) 2\pi \frac{G}{mc^2}. \quad (1.75)$$

### 3. Движение в поле плоской волны

Наконец, мы изучим движение заряженной бесспиновой частицы в электромагнитном поле плоской волны, которую для простоты будем считать линейно-поляризованной. Волна характеризуется изотропным направляющим вектором  $n^\mu$  и поляризацией  $\varepsilon^\mu$ . Эти два вектора таковы, что

$$n^2 = \varepsilon \cdot n = 0, \quad \varepsilon^2 = -1. \quad (1.76)$$

Потенциал зависит от произвольной функции переменной  $\xi = n \cdot x$ :

$$A^\mu(x) = \varepsilon^\mu f(\xi). \quad (1.77)$$

Из (1.76) следует, что  $\partial \cdot A = 0$ , а тензор электромагнитного поля

$$F^{\mu\nu}(x) = (n^\mu \varepsilon^\nu - n^\nu \varepsilon^\mu) f'(\xi) \quad (1.78)$$

удовлетворяет соотношениям

$$\begin{aligned} F^\mu{}_\lambda F^{\lambda\nu} &= \tilde{F}^\mu{}_\lambda \tilde{F}^{\lambda\nu} = n^\mu n^\nu f'(\xi)^2, \\ F^\mu{}_\nu \tilde{F}^{\lambda\nu} &= 0, \quad F^2 = 0. \end{aligned}$$

Следовательно,  $|E| = |B|$  и  $E \cdot B = 0$ . Поскольку  $n_\mu F^{\mu\nu} = n_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0$ , классическое уравнение Лоренца

$$m \frac{du^\mu}{d\tau} = e F^\mu{}_\nu u^\nu \quad (1.79)$$

приводит к соотношению  $u \cdot n = \text{const}$ . Выбирая координаты таким образом, чтобы при  $\tau = 0$  мы имели  $x(0) = 0$ , можно написать

$$\xi = x \cdot n = u(0) \cdot n\tau.$$

В уравнении (1.79) вместо  $\tau$  можно использовать переменную  $\xi$ ; тогда это уравнение запишется в виде

$$\frac{du^\mu}{d\xi} = \frac{e}{m} f'(\xi) \left[ n^\mu \frac{\varepsilon \cdot u}{n \cdot u(0)} - \varepsilon^\mu \right].$$

Умножая обе части на  $\varepsilon$  и интегрируя, приходим к выражению

$$u \cdot \varepsilon = u(0) \cdot \varepsilon + \frac{e}{m} [f(\xi) - f(0)],$$

которое можно подставить в правую часть последнего уравнения. В результате получаем

$$\frac{du^\mu}{d\xi} = \frac{e}{m} f'(\xi) \left\{ n_\mu \frac{\varepsilon \cdot u(0) + (e/m)[f(\xi) - f(0)]}{n \cdot u(0)} - \varepsilon_\mu \right\}. \quad (1.80)$$

Интегрируя, имеем

$$u^\mu(\xi) = u^\mu(0) + \frac{e}{m} [f(\xi) - f(0)] \left[ n^\mu \frac{\varepsilon \cdot u(0)}{n \cdot u(0)} - \varepsilon^\mu \right] + \frac{e^2}{2m^2} [f(\xi) - f(0)]^2 \frac{n^\mu}{n \cdot u(0)}. \quad (1.81)$$

Предполагая, что волна затухает при больших  $\xi$ , находим

$$u^\mu(\infty) = u^\mu(0) + \frac{e}{m} f(0) \varepsilon^\mu - \left[ \frac{e}{m} f(0) \frac{\varepsilon \cdot u(0)}{n \cdot u(0)} - \frac{e^2}{2m^2} \frac{f^2(0)}{n \cdot u(0)} \right] n^\mu. \quad (1.82)$$

Заметим, что здесь имеют место нелинейные эффекты (члены  $f^2$ ).

В случае плоской монохроматической волны, например имеющей вид  $f(\xi) = a \sin \xi$ , можно непосредственно вычислить  $x^\mu$ :

$$x^\mu(\xi) = u^\mu(0) \tau - \frac{2e}{m} a \frac{\sin^2(\xi/2)}{n \cdot u(0)} \varepsilon^\mu + \frac{e}{m} \frac{n^\mu}{[n \cdot u(0)]^2} \left[ 2ae \cdot u(0) \sin^2 \frac{\xi}{2} + \frac{ea^2}{4m} \times \right. \\ \left. \times \left( \xi - \frac{1}{2} \sin 2\xi \right) \right]. \quad (1.83)$$

Действие записывается в виде

$$I(\xi) = - \int_0^\tau d\tau' (m + eA \cdot u) = \\ = -m\tau - \frac{e}{n \cdot u(0)} \int_0^\xi d\xi' f(\xi') \left\{ \varepsilon \cdot u(0) + \frac{e}{m} [f(\xi') - f(0)] \right\} = \\ = -m\tau(\infty) \cdot x - \int_0^\xi \frac{d\xi'}{n \cdot u} \left[ eA \cdot u(\infty) - \frac{e^2 A^2}{2m} \right]. \quad (1.84)$$

В последнем выражении мы использовали величину  $u(\infty)$ , определяемую формулой (1.82), в предположении, что  $f(\xi)$  на бесконечности обращается в нуль (напомним, что  $n \cdot u$  сохраняется). Из (1.84) можно получить сопряженный импульс в виде

$$\pi_\mu = - \frac{\partial I(\xi)}{\partial x^\mu} = m u_\mu(\infty) + \frac{n_\mu}{n \cdot u} \left[ eA \cdot u(\infty) - \frac{e^2}{2m} A^2 \right]. \quad (1.85)$$

Имеет смысл определить средние значения некоторых потенциалов таким образом, чтобы  $\bar{A} = 0$  [например, если  $f(\xi) = e^{-\eta|\xi|} g(\xi)$ , где  $g$  — периодическая функция, а  $\eta \rightarrow 0$ ]. Тогда из (1.85) получаем

$$\bar{\pi}^2 = m^2 - e^2 \bar{A}^2 = m^2 + e^2 |\bar{A}^2| = m^2_{\text{эфф}}. \quad (1.86)$$

При интерпретации полученной формулы необходимо соблюдать осторожность, поскольку мы имеем дело с анизотропным случаем вследствие того, что волна плоская. Однако из формулы (1.86) следует, что частица в сильном периодическом поле будет реагировать на внешние возмущения с большей инерцией.

Линейные ускорители дают типичные примеры такого движения электронов в распространяющейся волне.

## 1.2. СИММЕТРИИ И ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ

### 1.2.1. Фундаментальные инварианты

Рассмотрим снова системы с конечным числом степеней свободы. Главная задача, разумеется, состоит в том, чтобы решить уравнения движения с соответствующими граничными условиями. Общие

свойства движения, такие, как симметрии, являются полезными, поскольку они упрощают вычисления. Их можно использовать также для того, чтобы сузить класс динамических моделей. Примеры этого типа уже рассматривались нами в случае лоренц-инвариантности.

Симметрии могут играть двоякую роль. С одной стороны, они позволяют получать семейства решений из одного данного решения, если некоторые преобразования сохраняют динамические уравнения инвариантными. С другой стороны, они приводят к сохранению таких величин, как заряд, энергия, импульс и т. п. Глубокая связь между этими двумя аспектами и составляет предмет настоящего рассмотрения. Мы начнем с очень простого примера. Нерелятивистская точечная частица движется в силовом поле, создаваемым не зависящим от времени потенциалом. Положение частицы и ее скорость в момент времени  $t$ , отвечающие начальным условиям, заданным в нулевой момент времени, будут те же, что и в момент времени  $t + \tau$ , если такие же начальные условия мы зададим в момент времени  $\tau$ . Задача инвариантна относительно временных трансляций. Мы также знаем, что в этом случае энергия (т. е. значение функции Гамильтона) сохраняется. Посмотрим, как связаны оба этих свойства. В фазовом пространстве изменение любой функции во время движения описывается уравнением

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \{H, f\}.$$

Инвариантность по отношению к временным трансляциям эквивалентна утверждению, что  $\partial H / \partial t = 0$ . Поскольку при этом выполняется соотношение  $\{H, H\} = 0$ , мы действительно получаем

$$\frac{dH}{dt} = 0 \quad (1.87)$$

и энергия сохраняется. Этого простого замечания достаточно, например, чтобы явно описать движение, если частица вынуждена двигаться в одном измерении.

С другой стороны, рассмотрим действие, вычисляемое на стационарной траектории, проходящей от точки  $(q_1, t_1)$  к точке  $(q_2, t_2)$ . Инвариантность по отношению к временным трансляциям означает, что

$$I(q_2, t_2 + \tau; q_1, t_1 + \tau) = I(q_2, t_2; q_1, t_1),$$

или в дифференциальной форме

$$\frac{\partial I}{\partial t_2} + \frac{\partial I}{\partial t_1} = 0. \quad (1.88)$$

Принимая во внимание формулу (1.12), находим, что действительно

$$H_2 = H_1. \quad (1.89)$$

Ясно, что закон сохранения вытекает из существования непрерывной группы инвариантности. Для пространственных трансляций получаем аналогично

$$I(\{q_n + a\}_2, t_2; \{q_n + a\}_1, t_1) = I(\{q_n\}_2, t_2; \{q_n\}_1, t_1).$$

Вспоминая снова формулу (1.12) и дифференцируя по  $a$ , находим закон сохранения полного импульса

$$\left(\sum_n p_n\right)_2 = \left(\sum_n p_n\right)_1. \quad (1.90)$$

Предыдущие примеры можно рассматривать как частные случаи формулы, определяющей вариацию стационарного действия, когда изменяется внешний параметр  $\alpha$  [см. соотношение (1.13)]. Действительно,  $\alpha$  можно выбрать как параметр, характеризующий преобразование.

Если имеется также инвариантность относительно вращений, рассмотрим инфинитезимальный поворот на угол  $\delta\alpha$  вокруг оси  $\mathbf{n}$ :

$$\mathbf{q} \rightarrow \mathbf{q} + \delta\alpha \mathbf{n} \times \mathbf{q}$$

Та же самая формула  $\delta I(2, 1) = p \delta q - H \delta t|_1^2$  приводит к соотношению

$$\sum_n \mathbf{p}_n \cdot (\mathbf{n} \times \mathbf{q}_n)|_2 = \sum_n \mathbf{p}_n \cdot (\mathbf{n} \times \mathbf{q}_n)|_1.$$

Поскольку вектор  $\mathbf{n}$  произволен, мы нашли, следовательно, закон сохранения полного углового момента:

$$\sum_n \mathbf{q}_n \times \mathbf{p}_n|_2 = \sum_n \mathbf{q}_n \times \mathbf{p}_n|_1. \quad (1.91)$$

Разумеется, если имеется инвариантность относительно вращения лишь вокруг некоторой оси, то будет сохраняться только соответствующая компонента углового момента.

Таким образом, в том случае, когда динамическая задача обладает симметрией, два стационарных действия  $I(2, 1)$  и  $I(2', 1')$  равны друг другу (здесь штрихи соответствуют преобразованным граничным условиям). Всякий раз, когда преобразования образуют непрерывную группу, законы сохранения получаются путем дифференцирования по параметрам группы.

Однако в действительности симметрии не обязательно непрерывны. Примером могут служить четность, обращение времени и т. п. В частности, в последнем случае мы имеем  $I(q_2, t_2; q_1, t_1) = I(q_1, -t_1; q_2, -t_2)$ ; здесь граничные условия переставлены, время обращено и соответственно  $p_2 \leftrightarrow -p_1$ . Эта инвариантность не приводит к закону сохранения.

В заключение постараемся получить вышеупомянутые выражения в форме, удобной для дальнейших обобщений. Для конкрет-



ности рассмотрим снова инвариантность относительно вращений. При инфинитезимальном вращении вектор  $\mathbf{q}$  переходит в  $R\mathbf{q} = \mathbf{q} + \delta\alpha \mathbf{n} \times \mathbf{q}$ . Функция Лагранжа предполагается инвариантной, когда  $R$  не зависит от времени. Принцип наименьшего действия позволяет выразить малые отклонения от стационарной траектории  $Q(t)$  в виде

$$\delta\mathbf{q}(t) = \delta\alpha(t) \mathbf{n} \times \mathbf{Q}(t), \quad (1.92)$$

при условии, что  $\delta\alpha(t_2) = \delta\alpha(t_1) = 0$ . Используя инвариантность величины  $L$  при постоянном  $\delta\alpha$ , получаем

$$\frac{\delta I(Q)}{\delta\alpha(t)} = - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \delta\alpha(t)} = 0.$$

Следовательно, сохраняющаяся величина пропорциональна

$$\frac{\partial L}{\partial \delta\alpha} = \sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i} \frac{\partial \delta q_i}{\partial \delta\alpha(t)} = \sum_i p_i \frac{\partial \delta q_i}{\partial \alpha}, \quad (1.93)$$

поскольку  $\partial \dot{q}_i / \partial \delta\alpha = \partial q_i / \partial \delta\alpha$ . В данном случае — это компонента углового момента, направленная вдоль вектора  $\mathbf{n}$ .

Для временных трансляций изложенный метод следует применять с осторожностью. Если инфинитезимальный параметр  $\delta\alpha = \text{const}$ , то начальный и конечный моменты времени смещены. Мы полагаем, что  $\delta q = \delta\alpha(t) \dot{q}$  и  $\delta \dot{q} = \delta\alpha \ddot{q} + \delta\dot{\alpha} \dot{q}$ , причем  $\delta\alpha(t_1) = \delta\alpha(t_2) = 0$ . Вблизи реальной траектории

$$\begin{aligned} 0 = \delta I &= \int_1^2 dt \left[ \delta\alpha \left( \dot{q} \frac{\partial L}{\partial q} + \ddot{q} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) + \delta\dot{\alpha} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \dot{q} \right] = \\ &= \int_1^2 dt \delta\alpha \left[ \frac{d}{dt} \left( L \dot{q} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial t} \right]. \end{aligned}$$

Инвариантность обычно означает, что  $\partial L / \partial t = 0$ ; в этих случаях энергия  $H = p\dot{q} - L$  сохраняется; в более общем случае  $(d/dt)H = -\partial L / \partial t$ .

Может случиться, что уравнения движения инвариантны, а функция Лагранжа не инвариантна. При инфинитезимальном, не зависящем от времени преобразовании к функции  $L$  добавляется полная производная по времени. Иными словами, в случае  $\delta\alpha$ , зависящей от времени, имеем  $\partial L / \partial \delta\alpha = (d/dt)\phi$  и  $(d/dt)(\partial L / \partial \delta\dot{\alpha} - \phi) = 0$ . Таким образом, мы нашли сохраняющуюся величину, которая не равна  $\partial L / \partial \delta\alpha$  и явно зависит от времени.

Например, динамическое описание частицы, движущейся под действием постоянной силы, трансляционно инвариантно, но импульс частицы не сохраняется. Функция Лагранжа имеет вид  $L = (1/2) m \dot{q}^2 + \mathbf{q} \cdot \mathbf{F}(t)$ . При трансляции

да  $(t)$  имеем  $\delta L = F \cdot \delta a = (d/dt) \int_{t_0}^t dt' F(t') \cdot \delta a(t')$ . Следовательно, интеграл дви-

жения  $m\dot{q} - \int_{t_0}^t dt' F(t') = \text{const}$ , что можно было ожидать из общих соображений. Следует отметить, что даже в случае постоянной силы  $F$  эта величина явно зависит от времени. Разумеется, невозможно физически осуществить такую силу во всем пространстве, как это требуется трансляционной инвариантностью

Обобщение этих выражений на случай бесконечных систем вызывает трудности. Мы будем различать два типа симметрий. Первый тип симметрии соответствует геометрическим преобразованиям пространства и времени, при которых лагранжиан  $\mathcal{L}(x)$  переходит в  $\mathcal{L}(x')$ , где  $x'$  — преобразованная точка (см. разд. 1.2.2). Симметрии второго типа оставляют лагранжиан инвариантным и называются внутренними (см. разд. 1.2.3). Симметрии играют столь фундаментальную роль, что мы посвятим главу II их более глубокому изучению.

### 1.2.2. Тензор энергии-импульса

В случае бесконечных систем будем предполагать, что лагранжиан зависит от пространственно-временных координат  $x$  лишь через поля и их производные. Следовательно, при трансляции мы имеем

$$\mathcal{L}(x+a) \equiv \mathcal{L}[\phi_i(x+a), \partial_\mu \phi_i(x+a)]. \quad (1.94)$$

Рассмотрим инфинитезимальное преобразование, зависящее от  $x$ :

$$\begin{aligned} \delta \phi_i &= \delta a^\mu(x) \partial_\mu \phi_i(x), \\ \delta \partial_\mu \phi_i(x) &= \delta a^\nu \partial_\nu \partial_\mu \phi_i(x) + \partial_\mu [\delta a^\nu(x)] \partial_\nu \phi_i(x). \end{aligned} \quad (1.95)$$

После интегрирования по частям соответствующая вариация действия запишется в виде

$$\delta I = \int d^4x \left\{ \partial_\nu \mathcal{L} - \partial_\mu \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_i)} \partial_\nu \phi_i(x) \right] \right\} \delta a^\nu(x). \quad (1.96)$$

Таким образом, мы получили обобщение наших предыдущих рассуждений относительно энергии-импульса в полностью локальной форме. Из равенства нулю  $\delta I$  для произвольной вариации  $\delta a^\nu(x)$  можно сделать заключение, что поток энергии-импульса описывается каноническим тензором

$$\tilde{\Theta}^{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_i)} \partial^\nu \phi_i - g^{\mu\nu} \mathcal{L}, \quad (1.97)$$

удовлетворяющим закону сохранения

$$\partial_\mu \tilde{\Theta}^{\mu\nu} = 0. \quad (1.98)$$

(Из этого рассмотрения мы видим, что индексы величины  $\tilde{\Theta}^{\mu\nu}$  играют различную роль.) Отсюда следует, что четыре величины  $P^\nu$ , соответствующие полной энергии ( $\nu=0$ ) и трехмерному импульсу ( $\nu=1, 2, 3$ ), т. е.

$$P^\nu = \int d^3x \tilde{\Theta}^{0\nu}(\mathbf{x}, t), \quad (1.99)$$

не зависят от времени, поскольку

$$\dot{P}^\nu = \int d^3x \partial_0 \tilde{\Theta}^{0\nu}(\mathbf{x}, t) = - \int d^3x \sum_{i=1}^3 \partial_i \tilde{\Theta}^{i\nu}(\mathbf{x}, t) = 0$$

при условии, что при больших аргументах поля достаточно быстро обращаются в нуль, т. е. нет утечки энергии или импульса в бесконечности.

Данный результат является типичной иллюстрацией теоремы Нётер. Эта теорема гласит, что инвариантности лагранжиана относительно любого однопараметрического преобразования соответствует локальный сохраняющийся «ток». Интегрирование четвертой компоненты этого тока по трехмерному пространству дает сохраняющийся заряд. В этом геометрическом рассмотрении инвариантность лагранжиана означает, что мы также допускаем возможное преобразование пространственно-временного аргумента, как, например, в (1.94). Кроме того, интеграл по трехмерному пространству, определяющий заряд, может быть заменен на интеграл по пространственно-подобной поверхности  $\sigma$  с элементом поверхности  $d\sigma_\mu$ , что не изменяет результат; таким образом,

$$P^\nu = \int d\sigma_\mu \tilde{\Theta}^{\mu\nu}. \quad (1.100)$$

Разумеется, возможна ситуация, когда лагранжиан зависит явно также от координат  $x$ ; в этом случае тождество (1.94) не справедливо и уравнение (1.98) заменяется на

$$\partial_\mu \tilde{\Theta}^{\mu\nu} = - \partial_{\text{явно}}^\nu \mathcal{L}. \quad (1.101)$$

Это имеет место, если  $\mathcal{L}$  представляет собой сумму инвариантной части  $\mathcal{L}_0$  и взаимодействия с внешними источниками  $j_i(x)$ , имеющего вид  $\mathcal{L}_1 = \sum_i \phi_i(x) j_i(x)$ . Тензор энергии-импульса, который

определяется вкладом  $\tilde{\Theta}_0^{\mu\nu}$  от  $\mathcal{L}_0$  и добавочным вкладом от  $\mathcal{L}_1$ , записывается в виде

$$\tilde{\Theta}^{\mu\nu} = \tilde{\Theta}_0^{\mu\nu} - g^{\mu\nu} \mathcal{L}_1, \quad (1.102)$$

причем в соответствии с (1.101)

$$\partial_\mu \tilde{\Theta}^{\mu\nu} = - \sum_i \phi_i \partial^\nu j_i$$

Последнее выражение можно переписать следующим образом:

$$\partial_\mu \tilde{\Theta}^{\mu\nu} = \sum_l j_l(x) \partial^\nu \phi_l. \quad (1.103)$$

Эти два способа записи локальной вариации энергии и импульса различаются в зависимости от того, включена или нет в систему энергия взаимодействия  $-\int d^3x \mathcal{L}_I$ .

Рассмотрим в качестве примера электромагнитное поле, взаимодействующее с внешним сохраняющимся током  $j$ . В этом случае лагранжиан дается выражением

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F^2 - j \cdot A, \quad (1.104)$$

а

$$\begin{aligned} \tilde{\Theta}^{\mu\nu} &= \tilde{\Theta}_0^{\mu\nu} + g^{\mu\nu} j \cdot A, \\ \tilde{\Theta}_0^{\mu\nu} &= -F^{\mu\rho} \partial^\nu A_\rho + \frac{1}{4} g^{\mu\nu} F^2. \end{aligned} \quad (1.105)$$

Тензор  $\tilde{\Theta}$  калибровочно-неинвариантен, даже если ток  $j$  равен нулю! При преобразовании  $A \rightarrow A + \partial\zeta$  имеем

$$\tilde{\Theta}^{\mu\nu} \rightarrow \tilde{\Theta}^{\mu\nu} + \partial_\rho (g^{\mu\nu} j^\rho \phi - F^{\mu\rho} \partial^\nu \phi) - j^\mu \partial^\nu \phi. \quad (1.106)$$

В отсутствие внешних источников дополнительный член является дивергенцией и не дает вклада в величину полной энергии-импульса, если на бесконечности поля обращаются в нуль.

Плотность энергии-импульса в принципе измеримая величина, и помимо всего она связана с гравитационным полем. Поэтому очень нежелательно, чтобы выражение для нее оказалось калибровочно-неинвариантным. Кроме того, антисимметричная часть тензора  $\tilde{\Theta}^{\mu\nu}$  не равна нулю:

$$\tilde{\Theta}^{\mu\nu} - \tilde{\Theta}^{\nu\mu} = F^{\nu\rho} \partial^\mu A_\rho - F^{\mu\rho} \partial^\nu A_\rho. \quad (1.107)$$

Нам известно, что уравнения движения не определяют полностью лагранжиан. Соответственно выражение для тензора энергии-импульса допускает некоторый произвол. Обозначим через  $k^\mu(x)$  сохраняющийся ток. Тогда заряд  $K = \int d^3x k^0(x, t)$  и локальный закон сохранения не изменяется, если  $k^\mu$  преобразуется следующим образом:

$$k^\mu \rightarrow k^\mu + \Delta k^\mu \quad (1.108)$$

при условии, что

$$\partial_\mu \Delta k^\mu = 0 \quad (1.109)$$

и

$$\int d^3x \Delta k^0(x, t) = 0. \quad (1.110)$$

Решение для этих ограничений записывается в виде

$$\Delta k^\mu = \partial_\rho k^{\mu\rho}, \quad (1.111)$$

где  $k^{\mu\rho}$  антисимметричен и зависит локально от полей. В самом деле, мы видим, что справедливо как равенство (1.109), так и (1.110), поскольку

$$\int d^3x \partial_\rho k^{\rho 0} \equiv \int d^3x \sum_i^3 \partial_i k^{0i} = 0. \quad (1.112)$$

Возвращаясь к тензору энергии-импульса электромагнитного поля, мы видим, что к каноническому тензору  $\tilde{\Theta}^{\mu\nu}$  можно добавить величину

$$\Delta \tilde{\Theta}^{\mu\nu} = \partial_\rho \Theta^{\mu\rho, \nu}, \quad (1.113)$$

где  $\Theta^{\mu\rho, \nu}$  антисимметричен по  $(\mu, \rho)$  и зависит локальным образом от полей. Из рассмотрения калибровочной зависимости, в которой

$$\Delta_{\text{калибр}} \tilde{\Theta}^{\mu\nu} = -\partial_\rho (F^{\mu\rho} \partial^\nu \phi), \quad (1.114)$$

следует выражение для компенсирующего члена, а именно

$$\Delta \tilde{\Theta}^{\mu\nu} = \partial_\rho (F^{\mu\rho} A^\nu). \quad (1.115)$$

Таким образом, мы полагаем

$$\begin{aligned} \Theta^{\mu\nu} = \tilde{\Theta}^{\mu\nu} + \partial_\rho (F^{\mu\rho} A^\nu) = g^{\mu\nu} \left( \frac{1}{4} F^2 + j \cdot A \right) - \\ - F^{\mu\rho} \partial^\nu A_\rho + \partial_\rho (F^{\mu\rho} A^\nu). \end{aligned} \quad (1.116)$$

Используя уравнения Максвелла, получаем  $\partial_\rho F^{\mu\rho} = -j^\mu$ , так что другое эквивалентное выражение для  $\Theta^{\mu\nu}$  имеет вид

$$\Theta^{\mu\nu} = \frac{1}{4} g^{\mu\nu} F^2 + F^{\mu\rho} F_\rho{}^\nu + g^{\mu\nu} j \cdot A - j^\mu A^\nu. \quad (1.117)$$

В отсутствие источников эта плотность энергии-импульса характеризуется следующими свойствами: она калибровочно-инвариантна, сохраняется, симметрична и имеет след, равный нулю. При этом в соответствии с общей схемой в случае  $j \neq 0$  имеем

$$\partial_\mu \Theta^{\mu\nu} = \partial_\mu \tilde{\Theta}^{\mu\nu} = A_\rho \partial^\nu j^\rho. \quad (1.118)$$

Это можно записать также в виде

$$\partial_\mu \Theta_0^{\mu\nu} = \partial_\mu \left( \frac{1}{4} g^{\mu\nu} F^2 + F^{\mu\rho} F_\rho{}^\nu \right) = j_\rho F^{\rho\nu}. \quad (1.119)$$

Таким образом, новый тензор  $\Theta_0$  имеет чисто электромагнитное происхождение. Плотность энергии  $\Theta_0^{00} = (1/2)(\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2)$  положи-

тельна, а плотность импульса  $\Theta_0^{i0} = (\mathbf{E} \times \mathbf{B})^i$  есть не что иное, как вектор Умова — Пойнтинга. Следовательно, мы получили известное соотношение

$$-\frac{d}{dt} \int_V d^3x \Theta_0^{00} = \int_S dS \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) + \int d^3x \mathbf{E} \cdot \mathbf{j}.$$

После этих преобразований тензор  $\Theta^{\mu\nu}$  при наличии источников все еще калибровочно-инвариантен. Это не должно вызывать удивления, поскольку система не замкнута. Чтобы показать, что происходит в замкнутой системе при наличии источников, рассмотрим систему заряженных точечных частиц, связанных электромагнитным взаимодействием. При этом полное действие дается выражением

$$I = - \int d^4x \frac{1}{4} F^2 - \sum_n \int d\tau_n \left[ \frac{m_n}{2} \dot{x}_n^2(\tau_n) + e_n \dot{x}_n(\tau_n) \cdot A(x_n) \right]. \quad (1.120)$$

Это выражение инвариантно при пространственно-временной трансляции

$$A(x) \rightarrow A(x+a), \quad x_n(\tau_n) \rightarrow x_n(\tau_n) - a. \quad (1.121)$$

Если мы рассмотрим инфинитезимальные вариации вида

$$\delta A^\mu(x) = \delta a^\nu(x) \partial_\nu A^\mu(x), \quad \delta x_n^\mu = -\delta a^\mu(x_n), \quad (1.122)$$

то найдем, что

$$-\frac{\delta I}{\delta a_\nu(x)} = \partial_\mu \tilde{\Theta}^{\mu\nu} = 0; \quad (1.123)$$

здесь

$$\begin{aligned} \tilde{\Theta}^{\mu\nu}(x) = & \frac{1}{4} g^{\mu\nu} F^2 - F^{\mu\rho} \partial^\nu A_\rho + \sum_n \int d\tau_n e_n \dot{x}_n^\mu(\tau_n) \delta^4[x - x_n(\tau_n)] A^\nu[x_n(\tau_n)] + \\ & + \sum_n m_n \int d\tau_n \dot{x}_n^\mu(\tau_n) \dot{x}_n^\nu(\tau_n) \delta^4[x - x_n(\tau_n)]. \end{aligned} \quad (1.124)$$

Повторяя выкладки, ведущие к калибровочно-инвариантному тензору, т. е. добавляя величину  $\partial_\rho (F^{\mu\rho} A^\nu)$ , получаем

$$\Theta^{\mu\nu} = \frac{1}{4} g^{\mu\nu} F^2 + F^{\mu\rho} F_\rho{}^\nu + \sum_n m_n \int d\tau_n \dot{x}_n^\mu \dot{x}_n^\nu \delta^4[x - x_n(\tau_n)]. \quad (1.125)$$

Все нежелательные члены исчезли, и мы получили калибровочно-инвариантный, симметричный и сохраняющийся тензор энергии-импульса. Заметим, что, хотя динамические уравнения связывают материальные точки с полями, их вклады входят в (1.125) аддитивно

Для того чтобы обобщить закон сохранения углового момента, изучим следствия лоренц-инвариантности около фиксированной точки. В инфинитезимальной форме

$$\delta x^\mu = \delta \omega^{\mu\nu} x_\nu; \quad (1.126)$$

здесь  $\delta \omega^{\mu\nu}$  — антисимметричный тензор. Легко видеть, что лагранжиан, вообще говоря, инвариантен относительно такого преобразования одних лишь аргументов, поскольку оно должно

сопровождаться соответствующими преобразованиями полей. Иными словами, полям сопоставляются представления однородной группы Лоренца. Элементом  $\Lambda$  группы Лоренца отвечают преобразования полей по формуле

$${}^{\Lambda}\varphi(x) = S(\Lambda)\varphi(\Lambda^{-1}x). \quad (1.127)$$

Мы рассматриваем поля  $\varphi$  как вектор-столбец, а  $S(\Lambda)$  — как матрицу представления группы В случае  $\Lambda$ , близких к единичному, величина  $\Lambda^{-1}x$  будет равна  $x - \delta x$ , где  $\delta x$  определяется выражением (1.126), а  $S(\Lambda)$  имеет соответствующую форму. Оставляем читателям как упражнение изучить такие преобразования для электромагнитного поля и ограничимся здесь рассмотрением более простого случая скалярных полей [ $S(\Lambda) = 1$ ]. Чтобы применить теорему Нётер, в выражении (1.126) мы должны рассматривать  $\delta\omega^{\mu\nu}$  как функции от  $x$  и определять коэффициенты при них в вариации действия с учетом свойства антисимметрии  $\delta\omega^{\mu\nu} = -\delta\omega^{\nu\mu}$ . Если  $\Theta^{\mu\nu}$  — симметричный тензор энергии-импульса, то закон сохранения обобщенного углового момента запишется в виде

$$\begin{aligned} J^{\mu,\nu\rho} &= \Theta^{\mu\nu}x^{\rho} - \Theta^{\mu\rho}x^{\nu}, \\ \partial_{\mu}J^{\mu,\nu\rho} &= 0 \end{aligned} \quad (1.128)$$

В случае когда поля преобразуются по нетривиальным представлениям группы Лоренца, величина  $J^{\mu,\nu\rho}$  представляет собой лишь орбитальную часть. При построении сохраняющейся величины к  $J^{\mu,\nu\rho}$  добавляют члены, соответствующие внутреннему моменту вращения. В гл. 2 и 3 мы встретимся с конкретными примерами этого явления. То, что (1.128) задает сохраняющиеся величины, существенно связано с симметричностью тензора  $\Theta^{\mu\nu}$ . Соответствующие шесть зарядов

$$J^{\nu\rho} = \int d^3x J^{0,\nu\rho}(x, t) \quad (1.129)$$

не зависят от времени. Следует отметить, что  $J^{\nu\rho}$  не являются трансляционно-инвариантными. При смещении начала координат на  $a^{\mu}$  орбитальная часть изменяется на величину  $a^{\nu}P^{\rho} - a^{\rho}P^{\nu}$ . Чтобы найти величину, которую в действительности следует называть собственным угловым моментом, мы введем вектор Паули — Любанского <sup>1)</sup>

$$W_{\alpha} = -\frac{1}{2}\epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} \frac{J^{\beta\gamma}P^{\delta}}{\sqrt{P^2}}, \quad (1.130)$$

который в системе покоя ( $\mathbf{P} = 0$ ) сводится к обычному трехмерному угловому моменту

<sup>1)</sup> Этот вектор был независимо введен Ю. М. Широковым в 1951 г. на основании релятивистского обобщения понятия спина. — *Прим. перев.*

До сих пор в данном релятивистском описании мы избегали обращаться к гамильтонову формализму или скобкам Пуассона. Это объясняется тем, что нам не хотелось, чтобы время играло выделенную роль. Однако ничто не мешает нам сделать это. В данный момент времени  $t$  произвольному полю  $\varphi(\mathbf{x}, t)$  можно сопоставить сопряженное поле

$$\pi(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial L}{\partial \partial_0 \varphi(\mathbf{x}, t)} = \frac{\delta}{\delta \partial_0 \varphi(\mathbf{x}, t)} \int d^3 y \mathcal{L}(\mathbf{y}, t). \quad (1.131)$$

Аналогично определим скобки Пуассона для двух функционалов  $L_1$  и  $L_2$  полей  $\varphi$  и  $\pi$  в момент времени  $t$ :

$$\{L_1, L_2\} = -\{L_2, L_1\} = \int d^3 x \left[ \frac{\delta L_1}{\delta \pi(\mathbf{x}, t)} \frac{\delta L_2}{\delta \varphi(\mathbf{x}, t)} - \frac{\delta L_1}{\delta \varphi(\mathbf{x}, t)} \frac{\delta L_2}{\delta \pi(\mathbf{x}, t)} \right]. \quad (1.132)$$

К этим функциональным производным следует относиться осторожно. Например, если  $L$  выражается как пространственный интеграл от плотности, содержащей производные от полей, всегда подразумевается соответствующее интегрирование по частям. В частности, справедливы соотношения

$$\begin{aligned} \{\pi(\mathbf{x}, t), \varphi(\mathbf{y}, t)\} &= \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \\ \{\pi(\mathbf{x}, t), \pi(\mathbf{y}, t)\} &= \{\varphi(\mathbf{x}, t), \varphi(\mathbf{y}, t)\} = 0 \end{aligned} \quad (1.133)$$

и, например,

$$\{\pi(\mathbf{x}, t), \nabla \varphi(\mathbf{y}, t)\} = -\nabla_x \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}).$$

Легко видеть, что уравнения поля (1.44) принимают вид

$$\begin{aligned} \partial_0 \varphi(\mathbf{x}, t) &= \{H, \varphi(\mathbf{x}, t)\} = \frac{\delta}{\delta \pi(\mathbf{x}, t)} H, \\ \partial_0 \pi(\mathbf{x}, t) &= \{H, \pi(\mathbf{x}, t)\} = -\frac{\delta}{\delta \varphi(\mathbf{x}, t)} H, \end{aligned} \quad (1.134)$$

в полной аналогии с нерелятивистской динамикой, когда мы определяли функцию Гамильтона  $H$  как интеграл от плотности энергии:

$$H = \int d^3 x \Theta^{00}(\mathbf{x}, t), \quad (1.135)$$

выраженный через  $\varphi(\mathbf{x}, t)$ ,  $\nabla \varphi(\mathbf{x}, t)$  и  $\pi(\mathbf{x}, t)$ . Выражение (1.134) означает, что  $H$  генерирует временные трансляции системы. Читателю нетрудно получить обобщения на случай пространственных трансляций и инфинитезимальных преобразований Лоренца.

### 1.2.3. Внутренние симметрии

Системы, встречающиеся в физике элементарных частиц, обладают внутренними симметриями, играющими важную роль при анализе их спектров и взаимодействий. Насколько нам известно,



большинство этих симметрий являются лишь приближенными, причем нарушаются они силами более слабыми, чем те, которые мы рассматриваем. Тем не менее при первом рассмотрении полезно считать симметрии точными, а отклонения от них рассматривать как второе приближение. Приведем краткий вывод теоремы Нётер в такой классической ситуации.

Пусть  $\phi_1 \dots \phi_N$  обозначают  $N$  взаимодействующих полей. Некоторые из них могут быть действительными, другие — комплексными и иметь лоренцовы индексы. Для каждого значения  $x$  будем рассматривать этот набор полей как вектор в  $N$ -мерном пространстве, где задано представление группы  $G$ . Последняя может оставлять инвариантными некоторые подпространства (так с необходимостью будет в случае, если поля имеют неэквивалентные трансформационные свойства по отношению к группе Лоренца). Если  $G$  — компактная группа Ли, будем обозначать соответствующие антиэрмитовы генераторы  $T^s$  ( $s = 1, \dots, r$ ); они удовлетворяют следующим соотношениям коммутации:

$$[T^{s_1}, T^{s_2}] = C^{s_1 s_2} T^{s_3}. \tag{1.136}$$

Напомним, что в случае компактной группы структурные константы  $C^{s_1 s_2}$  можно выбрать полностью антисимметричными. Для краткости мы не отличаем группу от ее линейной реализации на величинах  $\phi$ .

Рассмотрим вариации полей, обладающие пространственно-временной зависимостью:

$$\delta\phi(x) = \delta\alpha_s(x) T^s \phi(x), \quad \delta\phi^\dagger(x) = -\delta\alpha_s(x) \phi^\dagger(x) T^s. \tag{1.137}$$

Мы имеем  $\mathcal{L}(\phi) \rightarrow \mathcal{L}(\phi + \delta\phi) = \mathcal{L}$ , где  $\mathcal{L}$  — функция от  $\phi$ ,  $\partial_\mu \phi$  (и их комплексно-сопряженных величин),  $\delta\alpha_s$  и  $\partial_\mu \delta\alpha_s$ . Вариация около стационарного решения дает

$$0 = \delta I = \int d^4x \delta\alpha_s(x) \left\{ \frac{\partial \hat{\mathcal{L}}}{\partial \delta\alpha_s(x)} - \partial_\mu \frac{\partial \hat{\mathcal{L}}}{\partial [\partial_\mu \delta\alpha_s(x)]} \right\}. \tag{1.138}$$

Определим соответствующие токи

$$j_s^\mu(x) = \frac{\partial \hat{\mathcal{L}}}{\partial [\partial_\mu \delta\alpha_s(x)]}. \tag{1.139}$$

В ток  $j_s^\mu$  будет давать вклад только часть лагранжиана, содержащая производные полей. Теорема Нётер следует из (1.138) и дает дивергенцию от этих токов в виде

$$\partial_\mu j_s^\mu(x) = \frac{\partial \hat{\mathcal{L}}(x)}{\partial \delta\alpha_s}. \tag{1.140}$$

Здесь мы воспользовались тем, что  $\partial \hat{\mathcal{L}}(x) / \partial \delta\alpha_s(x)$  совпадает с производной по величинам  $\delta\alpha_s$ , не зависящим от координат. Ток

$j_s^\mu$  будет сохраняться, если соответствующий член в правой части выражения (1.140) равен нулю. Это означает, что исходный лагранжиан инвариантен относительно одномерной подгруппы  $G$ , порождаемой генератором  $T_s$ . Иными словами, с каждой такой подгруппой связан сохраняющийся заряд:

$$Q_s = \int d^3x j_s^0(x, t), \quad \frac{dQ_s}{dt} = \int d^3x \partial_\mu j_s^\mu(x, t) = 0. \quad (1.141)$$

Вернемся к общему случаю, т. е. не будем предполагать, что токи сохраняются. Это не мешает нам определить заряды  $Q_s(t)$  в момент времени  $t$ . В дальнейшем будем считать  $t$  фиксированным и не будем писать его в явном виде. Пусть  $\mathcal{F}$  — функционал от полей и сопряженных импульсов в момент времени  $t$ ; вычислим скобку Пуассона

$$\{Q_s, \mathcal{F}\} = \int d^3x \sum_a \left( \frac{\delta Q_s}{\delta \pi_a} \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta \phi_a} - \frac{\delta Q_s}{\delta \phi_a} \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta \pi_a} \right). \quad (1.142)$$

Зависимость  $\hat{\mathcal{L}}$  от  $\partial_0 \delta \alpha_s(x)$  обусловлена только зависимостью  $\mathcal{L}$  от  $\partial_0 \phi_\alpha$ . Для простоты предположим, что поля вещественны (тогда  $T_s$  веществен и антисимметричен). В противном случае мы должны были бы рассмотреть по отдельности вещественную и мнимую части. Таким образом, мы можем записать

$$j_s^0(x) = \frac{\partial \hat{\mathcal{L}}}{\partial [\partial_0 \delta \alpha_s(x)]} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial [\partial_0 \phi_\alpha(x)]} T_{ab}^s \phi_b(x) = \pi(x) T^s \phi(x),$$

$$Q^s(x) = \int d^3x \pi(x) T^s \phi(x). \quad (1.143)$$

Следовательно,

$$\{Q^s, \mathcal{F}\} = \int d^3x \left( \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta \phi} T^s \phi - \pi T^s \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta \pi} \right). \quad (1.144)$$

В частности, мы получаем выражения

$$\begin{aligned} \{Q^s, \phi(x)\} &= T^s \phi(x), \\ \{Q^s, \pi(x)\} &= -\pi(x) T^s = T^s \pi(x), \end{aligned} \quad (1.145)$$

которые можно переписать в виде

$$\{\delta \alpha_s Q^s, \phi(x)\} = \delta \phi(x), \quad \{\delta \alpha_s Q^s, \pi(x)\} = \delta \pi(x),$$

где  $\delta \phi(x)$  и  $\delta \pi(x)$  — вариации полей, определяемые выражением (1.137), при инфинитезимальных преобразованиях. Иными словами, заряды  $Q^s$  порождают эти инфинитезимальные преобразования с помощью скобок Пуассона точно так же, как гамильтониан порождает временные трансляции. Аналогично получаем очевидное равенство

$$\{Q^{s_1}, Q^{s_2}\} = - \int d^3x \pi(x) [T^{s_1}, T^{s_2}] \phi(x) = -C^{s_1 s_2 s_3} Q^{s_3}. \quad (1.146)$$

Для вывода приведенных выше соотношений инвариантность лагранжиана не требуется. Действительно, если  $H$  — гамильтониан, то нетрудно получить

$$\frac{dQ^s}{dt}(t) = \{H(t), Q^s(t)\} = \int d^3x \frac{\partial \hat{\mathcal{L}}}{\partial \delta \alpha_s}(x, t). \quad (1.147)$$

Мы можем обобщить соотношение (1.146) на случай скобок Пуассона от временных компонент токов при равных временах:

$$\{j_0^{s_1}(x, t), j_0^{s_2}(y, t)\} = -C^{s_1 s_2 s_3} \delta^3(x-y) j_0^{s_3}(x, t). \quad (1.148)$$

В квантовом случае эти соотношения лежат в основе важного формализма алгебры токов (см. гл. 11).

Полезно изучить одновременные скобки Пуассона для тензора энергии-импульса:

$$\begin{aligned} \{\Theta^{00}(x, t), \Theta^{00}(y, t)\} &= [\Theta^{0k}(x, t) + \Theta^{0k}(y, t)] \partial_k^x \delta^3(x-y), \\ \{\Theta^{00}(x, t), \Theta^{0k}(y, t)\} &= [\Theta^{kl}(x, t) - g^{kl} \Theta^{00}(y, t)] \partial_l^x \delta^3(x-y), \\ \{\Theta^{0k}(x, t), \Theta^{0l}(y, t)\} &= [\Theta^{0k}(y, t) \partial_l^x + \Theta^{0l}(x, t) \partial_k^x] \delta^3(x-y). \end{aligned} \quad (1.149)$$

Отсюда мы снова получаем алгебру Ли группы Пуанкаре:

$$\begin{aligned} \{P^\mu, P^\nu\} &= 0, \quad \{J^{\mu\nu}, P^\sigma\} = P^\mu g^{\nu\sigma} - P^\nu g^{\mu\sigma}, \\ \{J^{\mu\nu}, J^{\bar{\mu}\bar{\nu}}\} &= g^{\mu\bar{\nu}} J^{\nu\bar{\mu}} + g^{\nu\bar{\mu}} J^{\mu\bar{\nu}} - g^{\mu\bar{\mu}} J^{\nu\bar{\nu}} - g^{\nu\bar{\nu}} J^{\mu\bar{\mu}}. \end{aligned} \quad (1.150)$$

В заключение этого раздела рассмотрим простой лагранжиан, зависящий от двух вещественных полей  $\phi_1$  и  $\phi_2$ , которые выразим через комплексные (независимые) величины:

$$\phi = \frac{\phi_1 + i\phi_2}{\sqrt{2}}, \quad \phi^* = \frac{\phi_1 - i\phi_2}{\sqrt{2}}. \quad (1.151)$$

Предположим, что динамика инвариантна относительно внутренних вращений в пространстве (1, 2) или, что эквивалентно, при преобразованиях

$$\phi(x) \rightarrow e^{-ie\alpha} \phi(x), \quad \phi^*(x) \rightarrow e^{ie\alpha} \phi^*(x) \quad (1.152)$$

Постоянная  $e$ , входящая в эти соотношения, будет отождествлена с элементарной константой связи с электромагнитным полем, г. е. отождествлена с электрическим зарядом. Например, предположим, что  $\mathcal{L}$  имеет вид

$$\mathcal{L}_{\text{скаляр}} = (\partial_\mu \phi)^* (\partial^\mu \phi) - m^2 \phi^* \phi - V(\phi^* \phi), \quad (1.153)$$

где  $V$  — произвольная гладкая функция, например полином. Из теоремы Нётер следует выражение для сохраняющегося тока

$$j_\mu(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial [\partial^\mu \alpha(x)]} = ie [\phi^* \partial_\mu \phi - (\partial_\mu \phi^*) \phi] \equiv ie \phi^* \overleftrightarrow{\partial}_\mu \phi. \quad (1.154)$$

Разумеется, сохранение тока можно непосредственно проверить с помощью уравнений движения

$$(\square + m^2) \phi = -\frac{\partial V}{\partial \phi^*}, \quad (\square + m^2) \phi^* = -\frac{\partial V}{\partial \phi}. \quad (1.155)$$

Следовательно, заряд

$$Q = \int d^3x j^0(x, t) = ie \int d^3x \phi^*(x, t) \overleftrightarrow{\partial}_0 \phi(x, t) \quad (1.156)$$

не зависит от времени. Свяжем теперь эту систему с электромагнитным полем. Поскольку сохраняющийся ток нам задан, можно использовать его в правой части уравнений Максвелла. Однако при этом надо быть осторожным, так как связь  $\phi$  с вектор-потенциалом  $A_\mu$  может изменить структуру самого тока. Поэтому мы ищем полный лагранжиан в виде суммы трех частей:  $-\mathcal{L}_{\text{эм}} = -\frac{1}{4}F^2$ ,  $\mathcal{L}_{\text{скаляр}}$ , определяемой выражением (1.153), и части, отвечающей взаимодействию,  $\mathcal{L}_{\text{вз}}(\phi, \phi^*, A_\mu)$ . Таким образом,

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{эм}} + \mathcal{L}_{\text{скаляр}} + \mathcal{L}_{\text{вз}}. \quad (1.157)$$

Предположим, что ток  $J_\mu$ , определяемый теоремой Нётер, примененной к полному лагранжиану (1.157), действительно является электромагнитным током. Иными словами, мы имеем

$$J^\nu = j^\nu + \frac{\partial \mathcal{L}_{\text{вз}}}{\partial [\partial_\nu \alpha(x)]} = \partial_\mu F^{\mu\nu} = -\frac{\partial \mathcal{L}_{\text{вз}}}{\partial A_\nu(x)}. \quad (1.158)$$

Нетрудно убедиться, что лагранжиан взаимодействия

$$\mathcal{L}_{\text{вз}} = -ie A_\mu \phi^* \overleftrightarrow{\partial}^\mu \phi + e^2 A^2 \phi^* \phi = -A_\mu j^\mu + e^2 A^2 \phi^* \phi \quad (1.159)$$

удовлетворяет этим условиям, причем

$$J_\mu = j_\mu - 2e^2 A_\mu \phi^* \phi. \quad (1.160)$$

Следовательно, полный лагранжиан можно записать в виде

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^2 + [(\partial_\mu + ieA_\mu)\phi]^* [(\partial^\mu + ieA^\mu)\phi] - m^2\phi^*\phi - V(\phi^*\phi); \quad (1.161)$$

Он приводит к связанным уравнениям

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = J^\nu, \quad [(\partial_\mu + ieA_\mu)(\partial^\mu + ieA^\mu) + m^2]\phi = -\frac{\partial V}{\partial \phi^*}. \quad (1.162)$$

Мы видим, что выражение (1.161) следует из принципа минимальной связи с электромагнитным полем, согласно которому производная  $\partial_\mu$ , действующая на заряженное поле (с зарядом  $e$ ), заменяется на ковариантную производную  $\partial_\mu + ieA_\mu$ . Таким образом, лагранжиан не только инвариантен при преобразованиях (1.152) с постоянной величиной  $\alpha$ , но и при более общих, зависящих от  $x$  (т. е. локальных), калибровочных преобразованиях:

$$\phi(x) \rightarrow e^{-ie\alpha(x)}\phi(x), \quad \phi^*(x) \rightarrow e^{ie\alpha(x)}\phi^*(x), \quad A_\mu(x) \rightarrow A_\mu(x) + \partial_\mu\alpha(x). \quad (1.163)$$

То, что первоначально было приемом, используемым при выводе теоремы Нётер, оказалось более глубоким свойством электромагнитных взаимодействий, которое обобщает свойство калибровочной инвариантности, рассмотренное выше для свободного электромагнитного поля. Распространяя это понятие соответствующим образом на некоммутативные группы, мы приходим к очень интересным моделям теории поля (см. гл. 12).

### 1.3. РАСПРОСТРАНЕНИЕ И ИЗЛУЧЕНИЕ

#### 1.3.1. Функции Грина

Уравнение Клейна—Гордона имеет форму, типичную для динамических уравнений теории поля:

$$(\square + m^2)\phi(x) = j(x), \quad (1.164)$$

где  $j$  может зависеть от полей  $\phi$ , а внешние индексы опущены. Примером может служить уже рассмотренный нами случай уравнений Максвелла для потенциала в калибровке Лоренца, в которых массовый член, входящий в (1.164), отсутствовал

На время предположим, что источник  $j(x)$  задан и  $m^2 \geq 0$ . Таким образом, мы имеем дело с гиперболическим дифференциальным уравнением в частных производных второго порядка, которое определяет  $\phi$  в окрестности точки  $x$  через значения этой функции и ее производной в направлении нормали к пространственно-подобной поверхности, проходящей через точку  $x$ . Характеристические элементы касательны к световому конусу. Это указывает на то, что локально выполняется условие причинности.

В теории рассеяния редко встречается такой способ решения задачи. Граничные условия для  $\phi$  задают, как правило, на пространственно-подобных поверхностях, отделенных большим времениподобным интервалом. Полезно построить стандартные решения уравнения (1.164), в котором правая часть заменена обобщенной функцией, сосредоточенной в окрестности точки  $x'$ . В общем случае будем обозначать решение уравнения

$$(\square + m^2)G(x, x') = \delta^4(x - x') \quad (1.165)$$

через  $G(x, x')$  с дополнительным значком, характеризующим граничные условия, налагаемые на  $G$ . Эти условия в большинстве случаев трансляционно-инвариантны, так что соответствующие функции Грина (или пропагаторы) зависят только от аргумента  $x - x'$ . Из принципа суперпозиции следует, что решения уравнения (1.164) записываются в виде

$$\phi(x) = \phi^{(0)}(x) + \int d^4x' G(x - x') j(x'), \quad (1.166)$$

где  $\phi^{(0)}(x)$  является решением однородного уравнения и выбирается таким образом, чтобы  $\phi$  удовлетворяло граничным условиям

Опираясь вновь на трансляционную инвариантность, решим уравнение (1.165) с помощью преобразования Фурье, благодаря которому оно становится алгебраическим уравнением. Полагая

$$G(x - x') = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4p e^{-ip(x-x')} \tilde{G}(p), \quad (1.167)$$

мы получаем

$$(-p^2 + m^2)\tilde{G}(p) = 1. \quad (1.168)$$

Чтобы разделить обе части на  $-p^2 + m^2$ , нам необходимо обойти нули этого выражения, расположенные на двуполостном гиперболоиде  $p^2 - m^2 = 0$  (или на конусе  $p^2 = 0$ , если  $m^2 = 0$ ). Это в свою очередь эквивалентно интегрированию в (1.167) по слегка деформированному контуру. Следует заметить, что при различных выборах контура функция  $\tilde{G}(p)$  изменяется самое большее на величину  $g(\mathbf{p}, p_0/|p_0|) \delta(p^2 - m^2)$ . Последнее выражение соответствует решению однородного уравнения. Разумеется, этот выбор определяется граничными условиями на бесконечности.

Определим сначала запаздывающую и опережающую функции Грина:

$$\begin{aligned} \tilde{G}_{\text{adv}}^{\text{ret}}(p) &= \frac{-1}{(p_0 \pm i\epsilon)^2 - p^2 - m^2}, \\ G_{\text{adv}}^{\text{ret}}(x) &= -\frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4p \frac{e^{-i p \cdot x}}{(p_0 \pm i\epsilon)^2 - p^2 - m^2}. \end{aligned} \quad (1.169)$$

Введение в знаменатель величины  $\epsilon$  эквивалентно незначительной деформации контура интегрирования по  $p_0$  и показывает, что  $G(x)$  следует рассматривать как обобщенную функцию. Если сначала проинтегрировать по  $p_0$ , скажем в случае  $G_{\text{ret}}(x)$ , то контур интегрирования можно замкнуть в верхней комплексной полуплоскости, если  $x_0 < 0$ , не охватывая при этом какую-либо сингулярность. Согласно теореме Коши, заключаем, что  $G_{\text{ret}}(x)$  равна нулю для  $x_0 < 0$ . По отношению к  $G_{\text{adv}}(x)$  справедливо противоположное заключение. Можно показать, что эти обобщенные функции лоренц-инвариантны. Таким образом,  $G_{\text{ret}}(x)$  равна нулю вне полы светового конуса, направленной в будущее, а  $G_{\text{adv}}(x)$  обращается в нуль вне полы светового конуса, направленной в прошлое. Эти свойства согласуются с условием причинности для распространения сигналов. Отметим также, что обе функции Грина вещественны, причем  $G_{\text{adv}}(x) = G_{\text{ret}}(-x)$ . В случае  $m^2 = 0$  имеем

$$G_{\text{adv}}^{\text{ret}}(x)|_{m^2=0} = \frac{1}{2\pi} \theta(\pm x_0) \delta(x^2), \quad (1.170)$$

в то время как в случае  $m^2 > 0$  явные выражения, включающие функции Бесселя, не являются столь прозрачными. Однако независимо от значения  $m^2$  сингулярности этих функций Грина на световом конусе по-прежнему даются выражением (1.170). Данный результат отражает тот факт, что при малых  $x^2$  поведение полностью определяется дифференциальным оператором, входящим в (1.165). Следовательно, массовый член ответствен за то, что носитель не сосредоточен на световом конусе, как в выражении (1.170), но включает также сигналы, распространяющиеся со скоростью меньшей, чем скорость света. Возвращаясь к инте-

гральному представлению (1.169), проинтегрируем по  $p_0$ , используя разложение

$$\frac{1}{(p_0 + i\varepsilon)^2 - p^2 - m^2} = \frac{1}{2\omega_p} \left( \frac{1}{p_0 - \omega_p + i\varepsilon} - \frac{1}{p_0 + \omega_p + i\varepsilon} \right),$$

где  $\omega_p = \sqrt{p^2 + m^2}$ . Мы получаем непосредственно

$$G_{\text{ret}}(x - x') = i \frac{\theta(x_0 - x'_0)}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3p}{2\omega_p} \{ e^{-i\omega_p(x_0 - x'_0) + i\mathbf{p} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}')} - e^{i\omega_p(x_0 - x'_0) + i\mathbf{p} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}')} \}.$$

Дадим физическую интерпретацию данной формулы. Для этого представим себе, что система заключена в очень большой кубический ящик с линейными размерами  $L$ . Тогда интеграл по импульсам заменится римановой суммой, а каждая компонента импульса запишется в виде  $2\pi n/L$ , где  $n$  — произвольное целое число, причем  $[1/(2\pi)^3] \int d^3p \rightarrow \sum_n / L^3$ .

Таким образом, мы можем записать

$$G_{\text{ret}}(x - x') \rightarrow i\theta(x_0 - x'_0) \left[ \sum \varphi_{+, p}(x) \varphi_{+, p}^*(x') - \sum \varphi_{-, p}(x) \varphi_{-, p}^*(x') \right]. \quad (1.171)$$

Импульс  $p$  принимает только дискретные (но очень плотно лежащие) значения, а функции

$$\varphi_{\pm, p}(x) = \frac{1}{L^{3/2} \sqrt{2\omega_p}} e^{\mp i\omega_p x_0 + i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}} \quad (1.172)$$

являются периодическими решениями однородного уравнения Клейна—Гордона. Знаки «+» или «-» соответствуют знаку частоты; в выражении (1.171) знак «-» в квадратных скобках [а также множитель  $i$  перед выражением, обеспечивающим вещественность всей величины:  $\varphi_{+, p}^*(x) = \varphi_{-, -p}(x)$ ] обусловлен тем, что решения уравнений должны быть нормированы в соответствии с индефинитной «нормой» [см. формулу (2.5) в гл. 2]. Мы увидим, что, в то время как  $\varphi_+$  имеет положительную норму,  $\varphi_-$  имеет отрицательную норму.

В любом случае выражение (1.171) приводит к интересной интерпретации распространения сигнала, соответствующей  $G_{\text{ret}}(x - x')$ . Распространение вперед во времени сигналов с положительной и отрицательной частотами определяется соответственно первым и вторым членами выражения (1.171). Для  $G_{\text{ret}}(x - x')$  справедливо аналогичное выражение, в котором  $x$  и  $x'$  переставлены местами

Разность этих функций

$$\begin{aligned} G^{(-)}(x) &= G_{\text{ret}}(x) - G_{\text{adv}}(x) = \\ &= \frac{i}{(2\pi)^3} \int d^4p e^{-i p \cdot x} \varepsilon(p_0) \delta(p^2 - m^2) = \\ &= \frac{i}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3p}{2\omega_p} (e^{-i\omega_p x_0 + i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}} - e^{i\omega_p x_0 + i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}}) \end{aligned} \quad (1.173)$$

представляет собой нечетную функцию, равную нулю вне светового конуса, так что

$$\frac{\partial}{\partial x_0} G^{(-)}(x) |_{x_0=0} = \delta^3(x). \quad (1.174)$$

Очевидно, что эта функция удовлетворяет однородному уравнению Клейна—Гордона. При  $m^2=0$  она принимает вид

$$\begin{aligned} G^{(-)}(x) |_{m^2=0} &= \frac{1}{2\pi} \varepsilon(x_0) \delta(x^2) = \\ &= \lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{1}{4\pi^2 i} \left[ \frac{1}{(x - i\eta)^2} - \frac{1}{(x^2 + i\eta)^2} \right], \end{aligned} \quad (1.175)$$

где  $\eta$  — бесконечно малый времениподобный вектор, направленный в будущее.

Наконец, полусумма

$$G^{(+)}(x) = \frac{1}{2} [G_{\text{ret}}(x) + G_{\text{adv}}(x)] = -\frac{\text{PP}}{(2\pi)^4} \int d^4p e^{-i p \cdot x} \frac{1}{p^2 - m^2} \quad (1.176)$$

представляет собой четное решение уравнения (1.165). В (1.176) символ главного значения PP относится к интегралу по  $p_0$ ; напомним, что

$$\begin{aligned} \frac{1}{p_0 - \omega_p \pm i\varepsilon} &= \text{PP} \frac{1}{p_0 - \omega_p} \mp i\pi \delta(p_0 - \omega_p), \\ \delta(p^2 - m^2) &= \frac{\delta(p_0 - \omega_p) + \delta(p_0 + \omega_p)}{2\omega_p}. \end{aligned} \quad (1.177)$$

Рассуждения, приведенные выше, справедливы для чисто классического случая. Однако в квантовом случае мы встретим другое четное решение того же самого уравнения, впервые введенное Штюкельбергом и Фейнманом. Одно из объяснений, почему это решение не может появиться в классической физике, состоит в том, что оно является комплексной обобщенной функцией, определяемой выражением

$$G_F(x) = -\frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4p e^{-i p \cdot x} \frac{1}{p^2 - m^2 + i\varepsilon}. \quad (1.178)$$

Следовательно, оно удовлетворяет уравнению

$$(\square + m^2) G_F(x) = \delta^4(x), \quad \text{причем } G_F(-x) = G_F(x).$$



Если, как и выше, мы перейдем к дискретной форме, то найдем эквивалентную запись:

$$G_F(x-x') \rightarrow i[\theta(x_0-x'_0) \sum \varphi_{+,p}(x) \varphi_{+,p}^*(x') + \theta(x'_0-x_0) \sum \varphi_{-,p}(x) \varphi_{-,p}^*(x')]. \quad (1.179)$$

В то время как найденные выше функции Грина обращались в нуль вне светового конуса, функция  $G_F$  вне светового конуса в нуль не обращается, а экспоненциально спадает при отрицательных  $x^2$ . Положим  $x_0=0$  и  $r=|x|$ . Тогда

$$G_F(0, r) = \frac{i}{(2\pi)^2 r} \int_m^\infty dp \frac{p}{\sqrt{p^2-m^2}} e^{-pr} \sim \frac{ie^{-mr}}{(2\pi)^2 r^2} \left(\frac{\pi mr}{2}\right)^{1/2}. \quad (1.180)$$

Из (1.179) заключаем, что соответствующее  $G_F$  распространение положительных (отрицательных) частот происходит вперед (назад) во времени. Это различие по отношению к частотам объясняет, почему  $G_F$  с необходимостью комплексна. Заметим также, что  $\tilde{G}_F(p)$  есть мероморфная функция комплексной переменной  $p^2$  в противоположность функциям Грина, рассмотренным выше.

Эти выражения можно обобщить на более общие случаи, например на электродинамику. В соответствии с тем обстоятельством, что одного уравнения Максвелла

$$\square A^\mu - \partial^\mu (\partial \cdot A) = j^\mu \quad (1.181)$$

недостаточно, для того чтобы определить потенциал  $A^\mu$  в терминах сохраняющегося тока  $j^\mu$ , мы находим, что матрица

$$L^\mu{}_\nu = p^2 g^\mu{}_\nu - p^\mu p_\nu \quad (1.182)$$

сингулярна в импульсном пространстве. Ее детерминант тождественно равен нулю. Фактически оператор  $L$  пропорционален проектирующему оператору, поскольку

$$L^2 = p^2 L. \quad (1.183)$$

Чтобы обойти эту трудность, можно либо добавить малую массу, либо поступить так, как в разд. 1.1.2, и ввести в лагранжиан дополнительный член  $(\lambda/2) (\partial \cdot A)^2$ . Модифицированные уравнения движения имеют вид

$$[\square g^\mu{}_\nu - (1-\lambda) \partial^\mu \partial_\nu] A^\nu = j^\mu, \quad (1.184)$$

а пропагатор записывается следующим образом:

$$G_F^{\mu\nu}(x, \lambda) = -\frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4 p e^{-ip \cdot x} \frac{g^{\mu\nu} + [(1-\lambda)/\lambda] p^\mu p^\nu / p^2}{p^2 + i\epsilon}. \quad (1.185)$$

Кажущаяся сингулярность в числителе не играет роли, когда  $G_F^{\mu\nu}$  свертывается с сохраняющимся током. В случае  $\lambda=1$  вновь получаем пропагатор Фейнмана  $g^{\mu\nu} G_F(x)$ . В гл. 3 мы обсудим этот вопрос более подробно.

### 1.3.2. Излучение

В качестве элементарного приложения функций Грина напомним, как вычисляется электромагнитное поле, создаваемое движущимся точечным зарядом. Предположим, что  $x^\mu(\tau)$  — это траектория заряда в пространстве-времени, а  $j^\mu(\mathbf{y}, t)$  — связанный с ним ток, определяемый выражением (1.51). Требование причинности обуславливает использование запаздывающей функции Грина при вычислении потенциала. Кроме того, замечания, сделанные в конце предыдущего раздела, позволяют непосредственно написать выражение для потенциала в калибровке Лоренца:

$$\begin{aligned} A^\mu(\mathbf{y}) &= \frac{1}{2\pi} \int d^4z \theta(y^0 - z^0) \delta[(\mathbf{y} - \mathbf{z})^2] j^\mu(\mathbf{z}) = \\ &= \frac{e}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \theta[y^0 - x^0(\tau)] \delta\{[\mathbf{y} - \mathbf{x}(\tau)]^2\} \dot{x}^\mu(\tau). \end{aligned} \quad (1.186)$$

Величина с точкой наверху обозначает производную по собственному времени. Пусть  $x_+ \equiv x(\tau_+)$  — единственная, зависящая от  $\mathbf{y}$  точка запаздывания на траектории, такая, что

$$(\mathbf{y} - \mathbf{x}_+)^2 = 0, \quad \dot{x}_+^0 < \mathbf{y}^0. \quad (1.187)$$

Справедливо следующее тождество:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \theta[y^0 - x^0(\tau)] \delta\{[\mathbf{y} - \mathbf{x}(\tau)]^2\} f(\tau) = \frac{f(\tau_+)}{2\dot{x}_+ \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{x}_+)}. \quad (1.188)$$

Из равенства (1.187) и того факта, что на физической траектории точка  $\dot{x}_+$  принадлежит световому конусу, направленному в будущее, следует, что  $\dot{x}_+ \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{x}_+) > 0$ . Таким образом, мы получаем запаздывающий потенциал Льенара—Вихерта в виде

$$A_{\text{ret}}^\mu(\mathbf{y}) = \frac{e}{4\pi} \frac{\dot{x}_+^\mu}{\dot{x}_+ \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{x}_+)}, \quad (1.189)$$

т. е. релятивистское обобщение кулоновского потенциала, к которому он сводится в системе, где  $\dot{x}_+ = (1, 0, 0, 0)$ . В явном виде, если  $\mathbf{r} = \mathbf{y} - \mathbf{x}_+$  и  $\mathbf{v}_+ = (d\mathbf{x}/dt)(\tau_+)$ , имеем

$$\begin{aligned} A_{\text{ret}}^0(\mathbf{y}) &= \frac{e}{4\pi (r - \mathbf{r} \cdot \mathbf{v}_+)}, \\ \mathbf{A}_{\text{ret}}(\mathbf{y}) &= \frac{e\mathbf{v}_+}{4\pi (r - \mathbf{r} \cdot \mathbf{v}_+)}. \end{aligned} \quad (1.190)$$

Опуская индекс «+», соответствующие напряженности можно записать в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \frac{e}{4\pi} \frac{(\mathbf{r} - r\mathbf{v})(1 - v^2) + \mathbf{r} \times [(\mathbf{r} - r\mathbf{v}) \times d\mathbf{v}/dt]}{(r - \mathbf{r} \cdot \mathbf{v})^3}, \\ \mathbf{B} &= \frac{\mathbf{r} \times \mathbf{E}}{r}. \end{aligned} \quad (1.191)$$

Разумеется, эти соотношения справедливы и в точке запаздывания. Оба соотношения для  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$  содержат члены, пропорциональные  $1/r^2$ , дающие основной вклад на малых расстояниях, и связанные с излучением члены, пропорциональные  $1/r$ . Поток энергии, проходящий через сферу, охватывающую заряд, выражается через вектор Умова—Пойнтинга следующим образом:

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \int_S d\mathbf{S} \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) = \int_S d\Omega (\mathbf{r} \times \mathbf{E})^2 > 0. \quad (1.192)$$

При малых скоростях вклад от членов, ведущих себя как  $1/r$ , записывается в виде

$$\mathbf{E}_{\text{изл}} = \frac{e}{4\pi r^3} \left[ \mathbf{r} \times \left( \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{v}}{dt} \right) \right], \quad \mathbf{B}_{\text{изл}} = e \frac{\mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{v}}{dt}}{r^2}, \quad (1.193)$$

т. е. соответствует обычным дипольным полям. В этом же пределе излучаемая энергия дается формулой Лармора

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \frac{e^2}{(4\pi)^2} \int \frac{d\Omega}{r^2} \left( \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{v}}{dt} \right)^2 = \frac{e^2}{8\pi} \left( \frac{d\mathbf{v}}{dt} \right)^2 \int d \cos \theta \sin^2 \theta = \frac{2}{3} \frac{e^2}{4\pi} \left( \frac{d\mathbf{v}}{dt} \right)^2. \quad (1.194)$$

Эти результаты применяются к решению многих интересных задач; на некоторых из них мы кратко остановимся здесь.

Рассмотрим, например, заряженную частицу, осциллирующую нерелятивистским образом под действием слабого электрического

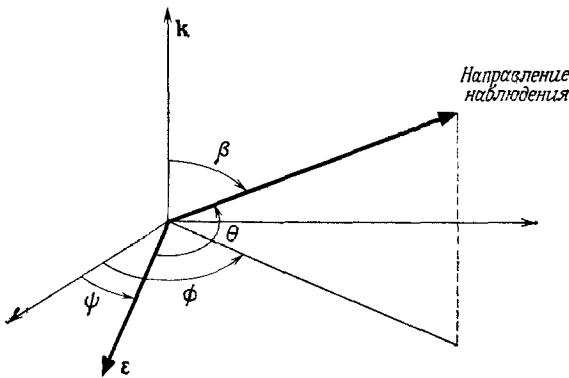


РИС. 1.3. Излучение заряженной частицы, осциллирующей в поле плоской волны с волновым вектором  $\mathbf{k}$  и поляризацией  $\boldsymbol{\varepsilon}$ .

поля падающей на нее плоской волны с малой частотой. Движение частицы описывается уравнением

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{e}{m} \mathbf{E} = \frac{e}{m} \boldsymbol{\varepsilon} E_0 e^{-i\omega t + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}, \quad (1.195)$$

где  $\boldsymbol{\varepsilon}$  — поляризация волны,  $E_0$  — ее амплитуда, а  $\mathbf{k}$  — волновой вектор. В соответствии с формулой Лармора энергия, излучаемая

в телесный угол  $d\Omega$  (углы определены на рис. 1.3), определяется выражением

$$dP = \frac{e^2}{(4\pi)^2} \left( \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{v}}{dt} \right)^2 \frac{d\Omega}{r^2} = \frac{e^2}{(4\pi)^2} \left( \frac{d\mathbf{v}}{dt} \right)^2 \sin^2 \theta d\Omega. \quad (1.196)$$

Если смещение частицы в течение периода представляет собой лишь небольшую долю длины падающей волны, то среднее значение величины  $(d\mathbf{v}/dt)^2$  равно

$$\left\langle \left( \frac{d\mathbf{v}}{dt} \right)^2 \right\rangle = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \frac{d\mathbf{v}^*}{dt} = \frac{e^2}{2m^2} |E_0|^2,$$

и, следовательно,

$$\left\langle \frac{dP}{d\Omega} \right\rangle = \frac{1}{2} \left( \frac{e^2}{4\pi m} \right)^2 |E_0|^2 \sin^2 \theta. \quad (1.197)$$

Средний поток энергии, падающей в единицу времени через единичную площадку, перпендикулярную направлению распространения волны, задается усредненным вектором Умова—Пойнтинга падающей волны, т. е. равен  $(1/2)|E_0|^2$ . Определим дифференциальное сечение рассеяния  $d\sigma/d\Omega$  как отношение энергии, излученной в единичный телесный угол, к потоку энергии, падающей на единичную площадку:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left( \frac{e^2}{4\pi m} \right)^2 \sin^2 \theta = r_e^2 \sin^2 \theta. \quad (1.198)$$

Здесь  $r_e$ —классический электромагнитный радиус (в этом выражении восстановлена скорость света  $c$ ):

$$r_e = \frac{e^2}{4\pi m c^2} = \frac{\hbar \alpha}{m c}, \quad (1.199)$$

причем классический радиус электрона равен  $2,82 \cdot 10^{-13}$  см, а  $\alpha (= e^2/4\pi\hbar c \approx 1/137)$ —постоянная тонкой структуры. Выражение (1.198) известно как формула Томсона для сечения рассеяния; оно приведено здесь для случая падающей поляризованной волны. Для углов  $\beta$ ,  $\phi$  и  $\psi$ , определенных на рис. 1.3, справедливо соотношение

$$\sin^2 \theta = 1 - \sin^2 \beta \cos^2 (\phi - \psi).$$

Чтобы получить дифференциальное сечение, достаточно выполнить усреднение по  $\psi$ :

$$\left. \frac{d\sigma}{d\Omega} \right|_{\text{неполяриз}} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\psi \frac{d\sigma}{d\Omega} = r_e^2 \frac{1 + \cos^2 \beta}{2}. \quad (1.200)$$

Рассеяние максимально в двух направлениях: вперед и назад. Формула Томсона для полного сечения представляет собой

интеграл от выражения (1.200) по телесному углу  $\Omega$ :

$$\sigma_{\text{полн}} = \frac{8\pi}{3} r_e^2. \quad (1.201)$$

Для электрона это дает  $0,66 \cdot 10^{-24}$  см<sup>2</sup>. Напомним, что выражение (1.201) справедливо для слабых полей и малых частот,  $\omega \ll mc^2/\hbar$ . В случае когда  $\hbar\omega \gtrsim mc^2$ , или  $\lambda \lesssim \hbar/mc$  ( $\lambda$  — квантовая-механическая комптоновская длина волны), начальная частота больше не сохраняется, и мы имеем дело как с квантовомеханическим, так и с релятивистским эффектами, и процесс в этом случае называется комптоновским рассеянием (см. гл. 5). При этом сечение рассеяния с хорошей точностью определяется формулой Клейна—Нишины (5.116) и (5.117). Мы приведем здесь лишь поправку низшего порядка по  $\hbar\omega/mc^2$  к томсоновскому рассеянию:

$$\sigma_{\text{полн}} = \frac{8\pi}{3} r_e^2 \left( 1 - \frac{2\hbar\omega}{mc^2} + \dots \right). \quad (1.202)$$

Аналогичным образом можно описать классическое тормозное излучение, т. е. излучение внезапно ускоренного заряда. Пусть  $u_i = p_i/m$  и  $u_f = p_f/m$  — соответственно начальная и конечная

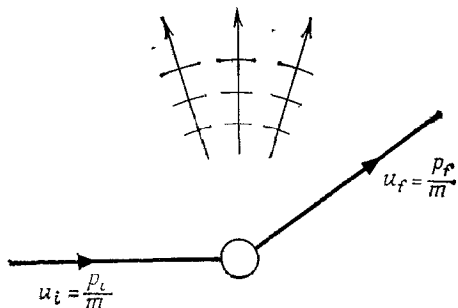


РИС. 1.4. Тормозное излучение.

4-скорости (рис. 1.4). Выберем начало координат в пространственно-временной точке ускорения, которую можно представлять себе как идеализацию акта столкновения. Пространственно-временная траектория параметризуется следующим образом:

$$x(\tau) = \begin{cases} \frac{p_i}{m} \tau, & \tau < 0, \\ \frac{p_f}{m} \tau, & \tau > 0. \end{cases} \quad (1.203)$$

При этом выражение для тока запишется в виде

$$\begin{aligned} j_{\mu}^{\dot{}}(x) &= e \int d\tau \frac{dx_{\mu}}{d\tau} \delta^4[x - x(\tau)] = \\ &= -\frac{ie}{(2\pi)^4} \int d^4k e^{-ik \cdot x} \left( \frac{p_{\mu}^i}{p^i \cdot k} - \frac{p_{\mu}^f}{p^f \cdot k} \right). \end{aligned} \quad (1.204)$$

После преобразования Фурье получаем

$$\tilde{j}_\mu(k) = -ie \left( \frac{p_\mu^i}{p^i \cdot k} - \frac{p_\mu^f}{p^f \cdot k} \right) = \tilde{j}_\mu^*(-k).$$

Потребуем, чтобы при  $t \rightarrow -\infty$  электромагнитное поле сводилось к кулоновскому полю падающей частицы, поскольку сохранение тока запрещает обращение в нуль величины  $j_\mu(x)$ , когда  $t \rightarrow -\infty$ . Используя определение (1.173), запишем в калибровке Лоренца:

$$\begin{aligned} A^\mu(x) &= \int d^4x' G_{\text{ret}}(x-x') j^\mu(x') = \\ &= \int d^4x' G^{(-)}(x-x') j^\mu(x') + \int d^4x' G_{\text{adv}}(x-x') j^\mu(x'). \end{aligned} \quad (1.205)$$

Мы представили  $A^\mu(x)$  как сумму поля излучения (решение однородного уравнения Максвелла) и кулоновского поля, связанного с частицей. Следовательно,

$$\begin{aligned} A_{\text{изл}}^\mu(x) &= \int d^4x' G^{(-)}(x-x') j^\mu(x') = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^4k e^{-ik \cdot x} \varepsilon(k_0) \delta(k^2) \tilde{j}^\mu(k). \end{aligned} \quad (1.206)$$

При этом

$$F_{\text{изл}}^{\mu\nu}(x) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^4k e^{-ik \cdot x} \varepsilon(k_0) \delta(k^2) [k^\mu \tilde{j}^\nu(k) - k^\nu \tilde{j}^\mu(k)]. \quad (1.207)$$

Плотность излученной энергии дается выражением (1.117):

$$\Theta^{00} = F^{0\mu} F_\mu^0 + \frac{1}{4} g^{00} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}.$$

Определим для изотропного вектора  $k^0 = |\mathbf{k}|$  два ортогональных пространственно-подобных вектора поляризации  $\varepsilon_\alpha$ , удовлетворяющих соотношениям

$$\varepsilon_\alpha^2 = -1, \quad \varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2 = 0, \quad \varepsilon_\alpha \cdot k = 0. \quad (1.208)$$

Нетрудно показать, что энергия  $\mathcal{E}$ , испускаемая в момент времени  $t > 0$ , равна

$$\mathcal{E} = \int d^3x \Theta^{00}(t, x) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3k}{2k_0} k_0 \sum_{\alpha=1,2} |\varepsilon_\alpha \cdot \tilde{j}(k)|^2. \quad (1.209)$$

Дадим предварительную интерпретацию этого излучения в терминах световых квантов, т. е. фотонов с импульсом  $\hbar k$ . В дальнейшем будем полагать  $\hbar = 1$ . Тогда энергия, излученная в элемент фазового пространства  $d^3k$ , запишется в виде

$$d\mathcal{E} = \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{d^3k}{2} e^2 \sum_{\alpha=1,2} \left| \frac{\varepsilon_\alpha \cdot p^i}{k \cdot p^i} - \frac{\varepsilon_\alpha \cdot p^f}{k \cdot p^f} \right|^2. \quad (1.210)$$

С помощью этого полуклассического вычисления можно найти число испущенных фотонов с поляризацией  $\varepsilon$ ; для этого энергию

отдельного кванта нужно разделить на  $k_0$ :

$$dN = \frac{d\mathcal{E}}{k^0} = e^2 \left| \frac{\varepsilon \cdot p^i}{k \cdot p^i} - \frac{\varepsilon \cdot p^j}{k \cdot p^j} \right|^2 \frac{d^3 k}{2(2\pi)^3 k^0}. \quad (1.211)$$

Этот результат фактически согласуется с полным квантовомеханическим рассмотрением (см. разделы 5.2.4 и 7.2.3). Интегрируя по  $k$  (в области малых  $k$ ), мы видим, что полная энергия конечна, а полное число фотонов бесконечно. Это явление носит название инфракрасной катастрофы, ниже мы его обсудим более подробно.

Представляет интерес угловое распределение, определяемое выражением (1.211). В системе координат, в которой  $k^\mu = |k|(1, 1, 0, 0)$ ,  $\varepsilon_1^\mu = (0, 0, 1, 0)$  и  $\varepsilon_2^\mu = (0, 0, 0, 1)$ , учитывая, что равенство  $k \cdot \tilde{j}(k) = 0$  сводится к  $j^0 = j^1$ , находим

$$\sum_{\alpha} |\varepsilon_{\alpha} \cdot \tilde{j}(k)|^2 = -\tilde{j} \cdot \tilde{j}^*. \quad (1.212)$$

Следовательно,

$$d\mathcal{E} = \frac{e^2}{2(2\pi)^3} d^3 k \left[ \frac{2p^i \cdot p^j}{(k \cdot p^i)(k \cdot p^j)} - \frac{m^2}{(k \cdot p^i)^2} - \frac{m^2}{(k \cdot p^j)^2} \right].$$

Это выражение можно переписать в терминах начальной и конечной скоростей частицы:

$$d\mathcal{E} = \frac{e^2}{2(2\pi)^3} \frac{d^3 k}{|k|^2} \left[ \frac{2(1 - \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_j)}{(1 - \hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{v}_i)(1 - \hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{v}_j)} - \frac{m^2}{E_i^2(1 - \hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{v}_i)^2} - \frac{m^2}{E_j^2(1 - \hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{v}_j)^2} \right]; \quad (1.213)$$

где  $\hat{\mathbf{k}} = \mathbf{k}/k$ . В случае испускания мягких квантов ( $|k| \rightarrow 0$ ) излучение имеет четко выраженные пики в направлениях начальной и конечной скоростей, что является типичным свойством тормозного излучения.

Чтобы вычислить полное число излученных фотонов, проинтегрируем (1.211) от нижней границы  $k_{\text{мин}}$ , вводимой из-за инфракрасной катастрофы, до некоторого максимального импульса  $k_{\text{макс}}$ , необходимость введения которого связана с нереально острым углом в траектории (1.203). Сечение  $d\sigma_{\text{столк}}$  будет описывать процесс столкновения, а в полное сечение рассеяния  $d\sigma_{\text{торм}}$  будут входить конечные испускаемые фотоны. Чтобы проинтегрировать (1.211), введем обозначение  $q^2 = (p_f - p_i)^2 \approx -4E^2 \sin^2 \theta/2$  в ультрарелятивистском пределе, когда  $E_i \sim E_f = E$  (здесь  $\theta$  — угол рассеяния); в нерелятивистском пределе мы имеем  $|\mathbf{v}_i| \sim |\mathbf{v}_f| = \mathbf{v}$ . Используя интегральное представление Фейнмана

$$\frac{1}{AB} = \int_0^1 \frac{dx}{[xA + (1-x)B]^2}, \quad (1.214)$$

вычисляем

$$\int \frac{d^2 \hat{\mathbf{k}} (1 - \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_j)}{(1 - \hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{v}_i)(1 - \hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{v}_j)} = 2\pi \int_0^1 dx \frac{2(1 - \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_j)}{1 - [x\mathbf{v}_i + (1-x)\mathbf{v}_j]^2} \approx \begin{cases} 4\pi \left( 1 + \frac{4}{3} v^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) + O(v^4), & v \ll 1 \text{ (нерелятивистский случай),} \\ 4\pi \ln \left( -\frac{q^2}{m^2} \right) + O\left(\frac{m^2}{q^2}\right), & q^2 \gg m^2 \text{ (ультрарелятивистский случай).} \end{cases}$$

Кроме того,

$$\int d^2\hat{k} \frac{m^2}{E^2 (1 - \hat{k} \cdot \mathbf{v})^2} = 4\pi.$$

Окончательное выражение для сечения излучения мягких фотонов можно записать в виде

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega_f}\right)_{\text{горн}} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega_f}\right)_{\text{столк}} \left(\ln \frac{k_{\text{макс}}}{k_{\text{мин}}}\right) \frac{2\alpha}{\pi} \begin{cases} \frac{4}{3} v^2 \sin^2(\theta/2) & \text{(нерелятивистский случай,} \\ \ln(-q^2/m^2) - 1 & \text{(ультрарелятивистский случай).} \end{cases} \quad (1.215)$$

В этом беглом обзоре задач, связанных с излучением, мы пренебрегли взаимодействием частицы с собственным полем излучения. То же самое относится и к рассмотрению движения в разд. 1.3. В принципе такой подход является неправильным, за исключением экстремальных случаев, где это вполне оправданное приближение. Действительно, из формулы Лармора (1.194) следует, что энергия излучения  $\mathcal{E}_{\text{изл}} \sim (2/3)(e^2/4\pi)(dv/dt)^2(\Delta t/c^3)$ . Поскольку  $\mathcal{E}_{\text{изл}}$  мала по сравнению с характерными значениями энергии задачи, например с энергией движущегося заряда  $\mathcal{E}_0 \sim m[(dv/dt)\Delta t]^2$ , можно пренебречь классическими радиационными поправками. Это приводит к условию

$$\Delta t \gg \tau_0 = \frac{2}{3} \frac{e^2}{4\pi mc^3} = \frac{2}{3} \frac{r_e}{c}, \quad (1.216)$$

где мы ввели характерное время излучения  $\tau_0$ . Наоборот, поправки становятся существенными, если силы заметно изменяются за время  $\tau_0$  или на расстояниях  $\sim c\tau_0$ .

Развитая Лоренцем классическая теория точечного заряда, включая радиационные поправки, была предметом многочисленных споров до открытия квантовой механики, которая значительно изменила наши представления. В большинстве случаев классическая механика не является подходящим приближением. Поучительно, однако, понять, насколько ограничена область ее применимости на примере наиболее изученного объекта, а именно точечного заряда. Приведем эвристический способ вычисления поправки  $f_\mu$  к силе Лоренца, учитывающей самодействие. Напишем уравнение движения

$$m\dot{u}^\mu = m \frac{du^\mu}{d\tau} = eF_{\text{внеш}}^{\mu\nu} u_\nu + f^\mu. \quad (1.217)$$

Дополнительный член  $f^\mu$  должен быть 4-вектором, таким, чтобы при малых скоростях из уравнения (1.217) получалось нерелятивистское соотношение Лармора для потерь энергии, а именно

$$\frac{d\mathcal{E}_{\text{изл}}}{dt} = m \frac{du^0}{dt} = -\frac{2}{3} \frac{e^2}{4\pi} \left(\frac{dv}{dt}\right)^2.$$



Кроме того, вследствие трансляционной инвариантности  $f_\mu$  должен зависеть только от  $u$  и ее производных по собственному времени. Если частица не имеет структуры, не должно быть никакой другой величины, не зависящей от  $e$  и  $m$ , с размерностью длины. В заключение нам нужно сохранить определение собственного времени, так чтобы  $u^2$  оставалось равным единице, и, следовательно,  $u \cdot f$  должно равняться нулю.

Четыре-вектор  $-(\dot{u} \cdot u)^\mu = (\dot{u}^2) u^\mu$  имеет четвертую компоненту, сводящуюся в нерелятивистском пределе к  $-(dv/dt)^2$ . Условие  $f \cdot u = 0$  приводит к комбинации  $\ddot{u}^\mu - (\ddot{u} \cdot u) u^\mu$ , ортогональной к  $u$ . Следовательно, учет сформулированных выше условий приводит нас к классическому уравнению Лоренца—Дирака в виде

$$m\ddot{u}^\mu = eF_{\text{внеш}}^{\mu\nu} u_\nu + \frac{2}{3} \frac{e^2}{4\pi} [\ddot{u}^\mu - (u \cdot \ddot{u}) u^\mu], \quad (1.218)$$

где  $F_{\text{внеш}}$  представляет собой воздействие всех внешних зарядов. Временная компонента этого уравнения дает релятивистское обобщение баланса энергии:

$$\frac{d\mathcal{E}}{d\tau} = eF_{\text{внеш}}^{0\nu} u_\nu + \frac{2}{3} \frac{e^2}{4\pi} (\dot{u}^2) u^0 + m\tau_0 \ddot{u}^0. \quad (1.219)$$

В правой части первый член, очевидно, соответствует работе внешних сил; второй—это диссипативный ( $\dot{u}^2 < 0$ ) ларморовский член. Третий член (так называемый энергетический член Шотта) является полной производной. Им можно пренебречь при усреднении по (почти) периодическим движениям или, в более общем случае, когда изменение ускорения мало в течение временных интервалов порядка  $\tau_0$ . Первоначальный вывод уравнения (1.218), данный Лоренцем, основывался на сферической модели заряда, и не был безупречен с релятивистской точки зрения. Дирак получил то же самое уравнение в последовательном релятивистском подходе, используя локальные законы сохранения энергии и импульса. Однако оба должны были учитывать бесконечный (положительный) вклад в инертную массу, равный электростатической кулоновской энергии заряда,—типичный ренормализационный эффект. Если бы наблюдаемая масса имела только электромагнитное происхождение, то мы должны были бы ввести в эту кулоновскую энергию обрезание на коротких расстояниях  $a$ , такое, чтобы  $e^2/4\pi a \sim mc^2$ , откуда  $a \sim \sigma_0 \sim r_e$ . Имеется, следовательно, ограничение на расстояния, за пределами которого классическая физика встречается с трудностями. Эта граница намного меньше расстояний порядка комптоновской длины волны  $\lambda = \hbar/mc$ , на которых становятся важными квантовые эффекты ( $r_e/\lambda \equiv \alpha \sim 10^{-2}$ ). Поэтому классические эффекты малых расстояний затухают на фоне квантовых эффектов. Мы убедимся, например, в том, что

«голая» масса электрона со спином  $1/2$  расходится только логарифмически, а не линейно (обратно пропорционально расстоянию), как здесь.

Даже если не обращать внимания на эти бесконечности, можно ожидать, что на малых расстояниях или для малых интервалов времени могут появиться осложнения. Так, рассмотрим более внимательно уравнение движения, пренебрегая даже диссипативным и релятивистским эффектами. Перепишем его в трехмерных обозначениях:

$$m(\dot{\mathbf{v}} - \tau_0 \ddot{\mathbf{v}}) = \mathbf{F}_{\text{внеш}}. \quad (1.220)$$

В отсутствие внешних сил кроме решения, соответствующего свободному движению  $\mathbf{v} = \text{const}$ , уравнение допускает быстро растущие «самоускоряющиеся» решения  $\dot{\mathbf{v}} = \dot{\mathbf{v}}_0 e^{t/\tau_0}$ . С математической точки зрения такие решения связаны с наличием высших производных в уравнениях, которые приводят к полностью нефизическим ситуациям. Чтобы получить разумные результаты, необходимо учитывать граничные условия и уравнение (1.220) заменить

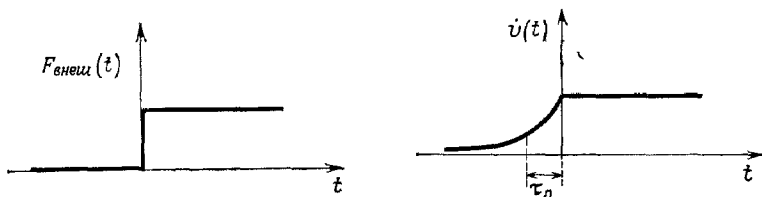


РИС. 1.5. Предускорение классического заряда.

интегродифференциальным уравнением, которое включает эти условия (в частности, условие  $\dot{\mathbf{v}} \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ , если в этом пределе  $\mathbf{F}_{\text{внеш}}$  обращается в нуль). Таким образом, можно записать следующее уравнение:

$$m\mathbf{v}(t) = \int_0^{\infty} ds e^{-s} \mathbf{F}_{\text{внеш}}(t + \tau_0 s). \quad (1.221)$$

В этом уравнении быстро растущие решения исключены, но возникает новое нежелательное свойство, а именно предускорение. Если  $\mathbf{F}_{\text{внеш}}$  равно нулю при отрицательных  $t$  (рис. 1.5), то  $\dot{\mathbf{v}}$  не равна нулю, а начинает увеличиваться в более ранние моменты времени порядка  $\tau_0$  ( $\sim 10^{-24}$  с в случае электрона); это время, за которое свет проходит расстояние, равное электромагнитному радиусу. Здесь мы снова можем убедиться в том, что благодаря учету квантовомеханических эффектов эти нежелательные явления не наблюдаются. Включение внешнего поля в течение интервала времени  $\Delta t$  означает, что энергия имеет неопределенность порядка

$\Delta E \sim \hbar/\Delta t$ . Если  $\Delta E$  соизмеримо с  $mc^2$ , то мы имеем  $\Delta t \sim \hbar/mc^2 \sim \tau_0/\alpha \sim 137\tau_0$ . Следовательно, классические эффекты, не имеющие причины, являются ненаблюдаемыми.

В своих рассуждениях мы умолчали о тех трудностях, которые связаны с радиационными поправками. Однако эти поправки можно учитывать в определенных обстоятельствах при изучении таких явлений, как уширение спектральных линий, поправки на рассеяние и т. п.

## ПРИМЕЧАНИЯ

Описание классической механики и ее приложения к теории поля можно найти в следующих монографиях: *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Механика. — М.: Наука, 1973; *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теория поля. — М.: Наука, 1973. Подробное рассмотрение механики имеется, например, в книге: *Cartan E.* Leçons sur les Invariants Intégraux. — Paris: Hermann, 1958. (Имеется перевод: *Картан Э.* Интегральные инварианты. — М.: Гостехиздат, 1940.) Классическая теория электромагнетизма и излучения исчерпывающе описывается в книге: *Jackson J. D.* Classical Electrodynamics. — New York: John Wiley, 1975. (Имеется перевод: *Джэксон Дж.* Классическая теория поля. — М.: Мир, 1965.) Проблемы внутренней непротиворечивости электродинамики обсуждаются в книге: *Rohrlich E. T.* Classical Charged Particles. — Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1965.

## ПРИМЕЧАНИЕ РЕДАКТОРА ПЕРЕВОДА

Изложение основных вопросов теории классических полей имеется в книгах: Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В., Введение в теорию квантованных полей. — М.: Наука, 1976; Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В., Квантовые поля. — М.: Наука, 1980. Мы рекомендуем читателю также следующие руководства по классической механике и электродинамике: Тамм И. Е. Основы теории электричества. — М.: Наука, 1976; Медведев Б. В. Начала теоретической физики. — М.: Наука, 1977; Матвеев А. Н. Электродинамика. — М.: Высшая школа, 1980.

## Глава 2

# УРАВНЕНИЕ ДИРАКА

Приступая к построению полностью релятивистской механики, мы будем следовать исторически сложившемуся пути и начнем с построения одночастичной теории. Мы введем уравнения Клейна—Гордона и Дирака и укажем область их применимости. В качестве приложений рассмотрим электромагнитное взаимодействие, релятивистский спектр атома водорода и кулоновское рассеяние. Дырочная интерпретация состояний с отрицательной энергией в терминах античастиц требует новой формулировки, так называемого вторичного квантования, представляющего собой теорию многих частиц.

### 2.1. РЕЛЯТИВИСТСКОЕ ВОЛНОВОЕ УРАВНЕНИЕ

#### 2.1.1. Квантовая механика и релятивизм

Наша первая цель—это попытаться совместить принципы квантовой механики и релятивистской инвариантности, а именно построить лоренц-ковариантное волновое уравнение. На этом пути мы встретим все увеличивающиеся трудности и противоречия, которые в конечном счете заставят нас полностью пересмотреть наши физические представления.

В квантовой механике состояния системы представляются нормированными векторами  $|\psi\rangle$  (или матрицами плотности  $\rho = \sum p_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i|$ ) в гильбертовом пространстве  $\mathcal{H}$ ; при этом  $|\langle \phi | \psi \rangle|^2$  (или  $\langle \phi | \rho | \psi \rangle$ ) является вероятностью нахождения системы в состоянии  $|\phi\rangle$ . Физическим наблюдаемым величинам сопоставляются самосопряженные операторы  $A = A^\dagger$  в пространстве  $\mathcal{H}$  которые в общем случае являются неограниченными. Математическое ожидание наблюдаемой  $A$ , когда система находится в состоянии  $|\psi\rangle$ , т. е. среднее значение по многим измерениям на идентично приготовленных состояниях, равно  $\langle \psi | A | \psi \rangle$ . Эволюция системы во времени вследствие самодействия или под воздействием внешних сил, заданных классическими силовыми полями, описывается уравнением Шредингера

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi(t)\rangle = H |\psi(t)\rangle, \quad (2.1)$$

или, что эквивалентно, уравнением

$$|\psi(t_2)\rangle = U(t_2, t_1)|\psi(t_1)\rangle,$$

где  $H$  — самосопряженный оператор, а  $U$  — унитарный оператор, удовлетворяющий уравнению

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t_2} U(t_2, t_1) = H(t_2) U(t_2, t_1).$$

Часто встречаются случаи, когда система инвариантна относительно определенных преобразований симметрий, например преобразований внешних сил. Теорема Вигнера гласит, что такие преобразования представляются унитарными (или антиунитарными)<sup>1)</sup> операторами, которые отображают гильбертово пространство на себя, сохраняют модуль скалярного произведения и коммутируют с  $H$ .

С другой стороны, специальная теория относительности утверждает, что законы природы не зависят от выбора системы отсчета, если только последняя принадлежит к классу «галилеевых систем», получаемых одна из другой с помощью преобразований группы Пуанкаре. Эта группа содержит пространственные и временные трансляции, обычные пространственные вращения и лоренцевы вращения (или бусты), которые связывают системы, движущиеся с постоянной относительной скоростью (см. гл. 1). Скорость света  $c$  является абсолютной верхней границей для скорости любого сигнала. Сигнал, исходящий из пространственно-временной точки  $(x_0, t_0)$ , достигает лишь точек  $(x_1, t_1)$ , расположенных внутри конуса будущего:

$$c^2(t_1 - t_0)^2 - (x_1 - x_0)^2 \geq 0, \quad t_1 - t_0 \geq 0.$$

Это — релятивистское условие причинности. Для скоростей же, много меньших скорости  $c$ , надежным приближением остается галилеева механика.

При построении релятивистского и квантового описания точечной частицы можно ожидать некоторых осложнений. Действительно, релятивизм сопоставляет частице с массой  $m$  импульсы порядка  $p = mc$ . Однако, согласно соотношению неопределенностей  $\Delta x \cdot \Delta p \sim \hbar$ , в случаях, когда масштаб длины меньше, чем комптоновская длина волны  $\lambda \equiv \hbar/mc$  (для электрона  $\lambda = 3,8 \cdot 10^{-11}$  см), понятие точечной частицы может привести к затруднениям. Чтобы фиксировать положение частицы с большей

<sup>1)</sup> Оператор  $B$  называют антилинейным, если справедливо соотношение

$$B(\lambda|\varphi\rangle + \mu|\psi\rangle) = \lambda^* B|\varphi\rangle + \mu^* B|\psi\rangle.$$

Сопряженный оператор  $B^\dagger$  определяется с помощью соотношения  $\langle B\varphi|\psi\rangle = \langle\varphi|B^\dagger\psi\rangle^* = \langle B^\dagger\psi|\varphi\rangle$ . Оператор  $B$  антиунитарен, если выполняются соотношения  $\langle B\varphi|B\psi\rangle = \langle\varphi|B^\dagger B|\psi\rangle = \langle\varphi|\psi\rangle^* = \langle\psi|\varphi\rangle$ .

точностью, потребуется энергия (импульс) того же порядка, что и масса покоя. Тем самым допускается рождение новых частиц. Мы с неизбежностью приходим к понятию античастицы. Тем не менее для некоторой промежуточной области релятивистская квантовая механика вполне правомерна, что подтверждается ее последующим развитием.

Чтобы согласовать условие релятивистской инвариантности с квантовой механикой, обратимся к принципу соответствия. В обычном конфигурационном представлении квантовой механики мы связываем операторы  $i\hbar (\partial/\partial t)$  и  $(\hbar/i) \nabla_i = (\hbar/i) (\partial/\partial x^i)$  с энергией  $E$  и импульсом  $p^i$  соответственно. Энергия свободной массивной частицы связана с импульсом соотношениями

$$E = \frac{p^2}{2m} + \text{const} \quad (\text{нерелятивистский случай}), \quad (2.2a)$$

$$E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4 \quad (\text{релятивистский случай}). \quad (2.2б)$$

Если не будет специальных оговорок, мы будем использовать систему единиц, в которой  $\hbar = c = 1$ .

Тем же способом, каким принцип соответствия преобразует соотношение (2.2a) в уравнение Шредингера для волновой функции  $\psi(x, t) = \langle x, t | \psi \rangle$ :

$$i \frac{\partial}{\partial t} \psi(x, t) = -\frac{\nabla^2}{2m} \psi(x, t),$$

в релятивистском случае этот принцип преобразует соотношение (2.2б) в уравнение Клейна—Гордона:

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 + m^2 \right) \psi(x, t) = 0. \quad (2.3)$$

Хотя это уравнение отличается от уравнения Шредингера, (2.1), его можно написать в аналогичном виде, если ввести матричные обозначения. Определим следующие величины:

$$\psi_{-1} \equiv m\psi, \quad \psi_0 \equiv \frac{\partial \psi}{\partial t}, \quad \psi_i \equiv \frac{\partial \psi}{\partial x^i}, \quad i = 1, 2, 3;$$

тогда вектор  $\underline{\psi} = \{\psi_\alpha\}$  ( $\alpha = -1, 0, \dots, 3$ ) удовлетворяет уравнению

$$i \frac{\partial \underline{\psi}}{\partial t} = (m\beta + \frac{1}{i} \alpha \cdot \nabla) \underline{\psi}$$

для соответствующего набора эрмитовых матриц размерностью  $5 \times 5$ . Читатель может непосредственно написать эту совокупность матриц и получить вспомогательное условие, с помощью которого воспроизводится система уравнений, эквивалентных уравнению (2.3).

Если интерпретировать  $\psi$  как волновую функцию, то нам нужно найти неотрицательную норму, сохраняющуюся при эволюции во времени. Действительно, существует уравнение непре-

ривности

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho + \operatorname{div} \mathbf{j} \equiv \partial_\nu j^\nu = 0, \quad (2.4)$$

в котором четыре-вектор  $j^\mu \equiv (j^0 = \rho, \mathbf{j}')$  определяется выражениями

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{i}{2m} \left( \psi^* \frac{\partial}{\partial t} \psi - \frac{\partial \psi^*}{\partial t} \psi \right), \\ \mathbf{j} &= \frac{1}{2im} [\psi^* \nabla \psi - (\nabla \psi)^* \psi]. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Интегральная форма уравнения (2.4) записывается в виде

$$-\frac{\partial}{\partial t} \int_V d^3x \rho = \int_S d\mathbf{S} \cdot \mathbf{j},$$

откуда следует, что изменение полного «заряда» внутри объема  $V$  соответствует потоку плотности  $\mathbf{j}$  через поверхность  $S$ , охватывающую объем  $V$ . Однако плотность заряда  $\rho$  не является положительно определенной величиной. Поэтому ее вполне можно рассматривать как плотность сохраняющейся величины (например, электрического заряда), но не как положительно определенную вероятность.

Еще одна проблема возникает, когда мы обнаруживаем существование решений с отрицательной энергией. Любая функция, имеющая вид плоской волны

$$\psi(\mathbf{x}, t) = N e^{-i(Et - \mathbf{p} \cdot \mathbf{x})}$$

удовлетворяет уравнению (2.3) при условии, что  $E^2 = \mathbf{p}^2 + m^2$ . Таким образом, отрицательные энергии  $E = -\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$  появляются на тех же основаниях, что и физические энергии  $E = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$ . Это серьезная трудность, поскольку спектр больше не ограничен снизу. Кажется, что из системы можно извлечь произвольно большое количество энергии. В случае частицы, находящейся первоначально в покое, это было бы возможно, если бы внешнее возмущение позволило ей перескочить через энергетическую щель шириной  $\Delta E = 2m$  между континуумами положительных и отрицательных состояний. Очевидно, что при этом понятие стабильных стационарных состояний становится несостоятельным.

Эти доводы казались в свое время такими непреодолимыми, что заставили Дирака ввести другое уравнение. Хотя новому уравнению отвечает положительная норма, мы здесь с необходимостью столкнемся с той же самой проблемой физической интерпретации состояний с отрицательной энергией. На этом этапе мы вернемся к уравнению Клейна — Гордона и переформулируем нашу

релятивистскую квантовую механику как теорию многих тел, в которой состояния с отрицательной энергией могут быть интерпретированы как античастицы.

### 2.1.2. Уравнение Дирака

Поскольку с физической точки зрения уравнение Клейна—Гордона было найдено неудовлетворительным, мы попытаемся построить волновое уравнение

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} = \left( \frac{1}{i} \alpha \cdot \nabla + \beta m \right) \psi \equiv H \psi, \quad (2.6)$$

где  $\psi$ —векторная волновая функция, а  $\alpha$  и  $\beta$ —эрмитовы матрицы, обеспечивающие эрмитовость  $H$ , вследствие чего существует положительная сохраняющаяся плотность вероятности. Теперь введем три следующих требования:

1. Компоненты волновой функции  $\psi$  должны удовлетворять уравнению Клейна—Гордона, так что решение представляет собой плоскую волну при условии  $E^2 = p^2 + m^2$ .

2. Существует сохраняющийся 4-вектор плотности тока, четвертая компонента которого—это положительно-определенная плотность.

3. Компоненты волновой функции  $\psi$  не должны удовлетворять какому-либо дополнительному условию, так что в любой данный момент времени они являются независимыми функциями переменной  $x$ . Нам нужно также проверить релятивистскую ковариантность этого формализма.

Дирак предположил, что  $\alpha_i$  и  $\beta$ —антикоммутирующие матрицы, квадраты которых равны единице, удовлетворяющие соотношениям

$$\begin{aligned} \{\alpha_i, \alpha_k\} &= 0, \quad i \neq k, \\ \{\alpha_i, \beta\} &= 0, \\ \alpha_i^2 &= \beta^2 = I. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Здесь скобка  $\{A, B\}$  обозначает симметричную комбинацию операторов  $AB + BA$ , называемую антикоммутатором.

Нетрудно проверить, что условие 1 выполняется:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial^2}{\partial t^2} \psi &= \left( \frac{1}{i} \alpha \cdot \nabla + \beta m \right)^2 \psi = \\ &= (-\nabla^2 + m^2) \psi. \end{aligned}$$

Введем обозначения  $\gamma^\mu$ :

$$\begin{aligned} \gamma^0 &= \beta, \\ \gamma^i &= i\alpha^i, \quad i = 1, 2, 3, \\ \{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} &= 2g^{\mu\nu} \end{aligned} \quad (2.8)$$



и символ Фейнмана  $\alpha \equiv a_\mu \gamma^\mu$ . Это позволяет записать уравнение Дирака в виде

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi \equiv (i\hat{\partial} - m) \psi = 0. \quad (2.9)$$

При этом уравнение Клейна—Гордона получается умножением уравнения (2.9) на оператор  $(i\hat{\partial} + m)$ . Наименьшая размерность матриц, удовлетворяющих условиям (2.8), равна четырем.

Собственные значения матриц  $\alpha^i$  и  $\beta$  равны  $\pm 1$ ; при  $i \neq j$  имеем  $\det \alpha^i \alpha^j = \det (-\alpha^j \alpha^i) = (-1)^d \det \alpha^i \alpha^j$ ; таким образом, размерность  $d$ -матриц должна быть четной. Поскольку для  $d=2$  существуют лишь три антикоммутирующие эрмитовы матрицы, а именно матрицы Паули, мы имеем  $d \geq 4$ .

Рассматриваемые нами матрицы записываются явно в виде

$$\begin{aligned} \gamma^0 &= \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}, & \gamma^i &= \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix}, \\ \beta &= \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}, & \alpha^i &= \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ \sigma^i & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (2.10)$$

где  $\sigma^i$  — матрицы Паули, а  $I$  — единичная  $2 \times 2$ -матрица. Это представление удобно при анализе нерелятивистского предела уравнения Дирака.

Среди всех возможных эквивалентных представлений<sup>1)</sup>, получаемых с помощью несингулярного преобразования  $\gamma \rightarrow U\gamma U^{-1}$ , особую роль играет представление Майорана; в этом представлении уравнение Дирака становится вещественным, что достигается перестановкой  $\alpha_2$  и  $\beta$  и изменением знака у  $\alpha_1$  и  $\alpha_3$  в предыдущем представлении:  $\hat{\alpha}_1 = -\alpha_1$ ,  $\hat{\alpha}_2 = \beta$ ,  $\hat{\alpha}_3 = -\alpha_3$ ,  $\hat{\beta} = \alpha_2$ . Таким образом, одна лишь  $\hat{\beta}$  мнимая, а уравнение Дирака

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \hat{\alpha} \cdot \nabla + i\hat{\beta}m \right) \psi = 0$$

вещественно; его решениями являются линейные комбинации вещественных решений. Легко найти матрицу  $U$ , осуществляющую переход к этому представлению, и новые  $\gamma$ -матрицы (см. приложение в т. 2 настоящей книги)

В четырехмерном представлении (2.10) волновую функцию  $\psi$  можно записать как биспинор  $\psi = \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix}$  в терминах двухкомпонентных спиноров  $\varphi$  и  $\chi$ . По причинам, которые будут скоро ясны,  $\varphi$  и  $\chi$  называют большой и малой компонентой соответ-

<sup>1)</sup> Эквивалентность различных представлений  $\gamma$ -матриц, получаемых с помощью несингулярного преобразования  $\gamma \rightarrow U\gamma U^{-1}$ , составляет содержание так называемой леммы Паули. Это позволяет выбирать представления  $\gamma$ -матриц различными способами. См. в этой связи книгу Боголюбова Н. Н., Логунова А. А., Тодорова И. Т.—Прим. перев.

венно Они удовлетворяют уравнениям

$$\begin{cases} i \frac{\partial \varphi}{\partial t} = m\varphi + \frac{1}{i} \boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla \chi, \\ i \frac{\partial \chi}{\partial t} = -m\chi + \frac{1}{i} \boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla \varphi. \end{cases} \quad (2.11)$$

Интересно отметить сходство между этими уравнениями и двумя из четырех уравнений Максвелла

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0, \quad \operatorname{rot} \mathbf{B} - \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = 0,$$

записываемых в явном виде как

$$i \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{1}{i} \mathbf{S} \cdot \nabla (i\mathbf{B}), \quad i \frac{\partial (i\mathbf{B})}{\partial t} = \frac{1}{i} \mathbf{S} \cdot \nabla (\mathbf{E}),$$

где

$$(S^i)_{jk} \equiv (1/i) \varepsilon_{ijk}.$$

Спиновые матрицы  $S^i$  для электромагнитного поля, обладающего спином 1, играют такую же роль, как матрицы Паули  $\sigma$  для спина 1/2, а комбинация  $(\mathbf{E}, i\mathbf{B})$  аналогична  $(\varphi, \chi)$ .

Уравнение Дирака было введено в теорию прежде всего потому, что необходимо иметь положительную плотность вероятности  $\rho$  и соответствующее уравнение непрерывности  $\partial_\mu j^\mu = 0$ . Поскольку  $\psi$  — комплексный спинор, то для того чтобы  $\rho$  была вещественной и положительной, она должна иметь вид  $\psi^\dagger \mathcal{R} \psi$ . Выведем сначала уравнение Дирака для  $\psi^\dagger$ . Из (2.9) следует, что

$$\psi^\dagger (i\gamma^{\mu\dagger} \overleftarrow{\partial}_\mu + m) = 0.$$

Величины  $\gamma^{\mu\dagger}$  нетрудно выразить через  $\gamma^\mu$ :

$$\gamma^{0\dagger} = \gamma^0, \quad \gamma^{i\dagger} = (\beta\alpha)^{\dagger} = \alpha\beta = \beta(\beta\alpha)\beta = \gamma^0\gamma^i.$$

Таким образом, определяя функцию  $\bar{\psi}$  с помощью соотношения

$$\bar{\psi} \equiv \psi^\dagger \gamma^0, \quad (2.12)$$

мы имеем

$$\bar{\psi} (i\overleftarrow{\partial} + m) = 0. \quad (2.9a)$$

Комбинируя уравнения (2.9) и (2.9a), приходим к равенству

$$\bar{\psi} (\overleftarrow{\partial} + \overrightarrow{\partial}) \psi \equiv \partial_\mu (\bar{\psi} \gamma^\mu \psi) = 0.$$

Следовательно, можно предположить, что ток имеет вид

$$j^\mu = \bar{\psi} \gamma^\mu \psi \begin{cases} j^0 = \rho = \bar{\psi} \gamma^0 \psi = \psi^\dagger \psi = \varphi^\dagger \varphi + \chi^\dagger \chi, \\ \mathbf{j} = \bar{\psi} \boldsymbol{\gamma} \psi = \psi^\dagger \boldsymbol{\alpha} \psi = \varphi^\dagger \boldsymbol{\sigma} \chi + \chi^\dagger \boldsymbol{\sigma} \varphi. \end{cases} \quad (2.13)$$

Плотность  $\rho$  положительна. Малая и большая компоненты входят в  $\rho$  одинаковым образом, тогда как в  $j$  входят перекрестные члены. Ниже мы убедимся в том, что при преобразованиях Лоренца  $j^\mu$  преобразуется как 4-вектор.

### 2.1.3. Релятивистская ковариантность

Проверим теперь, соответствует ли уравнение Дирака принципу относительности, т. е. сохраняет ли оно свой вид в двух системах отсчета, связанных преобразованием Пуанкаре. Иными словами, мы требуем, чтобы систему, описываемую в данной системе отсчета уравнением с определенными граничными условиями, с помощью преобразований Пуанкаре можно было связать с семейством состояний, удовлетворяющих тому же уравнению с преобразованными граничными условиями.

Обращаясь к первой точке зрения (независимость от наблюдателя), прежде всего замечаем, что трансляционная инвариантность выполняется с очевидностью. Рассмотрим преобразование Лоренца  $\Lambda$ . Пусть наша система описывается волновой функцией  $\psi$ , а в преобразованной системе — волновой функцией  $\psi'$ . Обе функции должны удовлетворять уравнению Дирака:

$$i\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} \psi(x) - m\psi(x) = 0, \quad (2.9б)$$

$$i\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x'^\mu} \psi'(x') - m\psi'(x') = 0, \quad (2.9в)$$

причем  $x' = \Lambda x$ .

Должно существовать локальное соотношение между  $\psi$  и  $\psi'$ , такое, чтобы наблюдатель в преобразованной системе отсчета мог восстановить  $\psi'$ , если задана  $\psi$ . Мы предполагаем, что это соотношение линейно:

$$\psi'(x') = S(\Lambda) \psi(x), \quad (2.14)$$

где  $S(\Lambda)$  — несингулярная  $4 \times 4$ -матрица. Уравнение (2.9в) теперь запишется в виде

$$i\gamma^\mu \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} \frac{\partial}{\partial x^\nu} S(\Lambda) \psi(x) - mS(\Lambda) \psi(x) = 0.$$

Чтобы это уравнение следовало из (2.9б) для любого  $\psi$  и поскольку  $\partial x^\nu / \partial x'^\mu = (\Lambda^{-1})^\nu_\mu$ , должно выполняться равенство

$$S(\Lambda) \gamma^\mu S^{-1}(\Lambda) = (\Lambda^{-1})^\mu_\nu \gamma^\nu. \quad (2.15)$$

Построим сначала  $S(\Lambda)$  для инфинитезимального собственного преобразования  $\Lambda$ , которое можно записать в виде

$$\Lambda^\mu_\nu = g^\mu_\nu + \omega^\mu_\nu, \quad (\Lambda^{-1})^\mu_\nu = g^\mu_\nu - \omega^\mu_\nu + \dots,$$

где инфинитезимальная матрица  $\omega_{\mu\nu}$  антисимметрична. Запишем выражения

$$\begin{aligned} S(\Lambda) &= I - \frac{i}{4} \sigma_{\mu\nu} \omega^{\mu\nu} + \dots, \\ S^{-1}(\Lambda) &= I + \frac{i}{4} \sigma_{\mu\nu} \omega^{\mu\nu} + \dots, \end{aligned} \quad (2.16)$$

где матрицы  $\sigma_{\mu\nu}$  антисимметричны по  $\mu\nu$ . В первом порядке по  $\omega$  из уравнения (2.15) получаем

$$[\gamma^\mu, \sigma_{\alpha\beta}] = 2i (g^\mu_\alpha \gamma_\beta - g^\mu_\beta \gamma_\alpha). \quad (2.17)$$

Матрицы  $\sigma_{\alpha\beta}$ , удовлетворяющие этому соотношению, даются выражением

$$\sigma_{\alpha\beta} = \frac{i}{2} [\gamma_\alpha, \gamma_\beta]. \quad (2.18)$$

Конечное преобразование записывается в виде

$$S(\Lambda) = e^{-(i/4) \sigma_{\alpha\beta} \omega^{\alpha\beta}}, \quad (2.19)$$

где  $\omega^{\alpha\beta}$  теперь конечная величина.

Для пространственных вращений  $S$  унитарно, а для лоренцевых бустов оно эрмитово.

Формулы конечных преобразований наиболее легко вывести в киральном представлении  $\gamma$ -матриц:

$$\begin{aligned} \gamma^0 &= \beta = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ -I & 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha = \begin{pmatrix} \sigma & 0 \\ 0 & -\sigma \end{pmatrix}, \quad \gamma = \begin{pmatrix} 0 & \sigma \\ -\sigma & 0 \end{pmatrix}, \\ \sigma_{0i} &= \frac{i}{2} [\gamma_0, \gamma_i] = -i\alpha_i = \frac{1}{i} \begin{pmatrix} \sigma_i & 0 \\ 0 & -\sigma_i \end{pmatrix}, \\ \sigma_{ij} &= \frac{i}{2} [\gamma_i, \gamma_j] = -\frac{i}{2} [\alpha_i, \alpha_j] = \varepsilon_{ijk} \begin{pmatrix} \sigma_k & 0 \\ 0 & \sigma_k \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2.20)$$

В этом представлении два спинора Паули в разложении биспинора  $\psi$  преобразуются независимо при вращениях и бустах. Представление группы Лоренца [а точнее, ее накрывающей группы  $SL(2, C)$ ] приводимо к сумме двух неэквивалентных представлений  $(1/2, 0) + (0, 1/2)$ . Однако мы увидим, что это представление неприводимо, если включить в него преобразование четности (пространственное отражение).

Напомним, что представления группы Пуанкаре классифицируются по собственным значениям двух операторов Казимира  $P^2$  и  $W^2$ ;  $P_\mu$  есть оператор энергии-импульса, который является генератором трансляций, тогда как  $W_\mu$  строится из оператора углового момента  $J_{\mu\nu}$  (генератора преобразований Лоренца) следующим образом:

$$W_\mu = -\frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} J^{\nu\rho} P^\sigma. \quad (2.21)$$

Если  $M^2$  обозначает собственное значение оператора  $P^2$ , то  $W^2$  принимает лишь значения вида

$$W^2 = -M^2 S(S+1),$$

где спин  $S$  является целым или полуцелым.

Для решений уравнения Дирака и, следовательно, уравнения Клейна—Гордона  $P^2 = -\partial^2$  принимает значение  $m^2$ , в то время как  $J_{\mu\nu}$  дается формулой

$$\begin{aligned} \psi'(x) &= \left( I - \frac{i}{2} J_{\mu\nu} \omega^{\mu\nu} \right) \psi(x) = \\ &= \left( I - \frac{i}{4} \sigma_{\mu\nu} \omega^{\mu\nu} \right) \psi(x^\rho - \omega^\rho_\nu x^\nu) = \\ &= \left( I - \frac{i}{4} \sigma_{\mu\nu} \omega^{\mu\nu} + x_\mu \omega^{\mu\nu} \partial_\nu \right) \psi(x), \end{aligned}$$

откуда следует

$$J_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \sigma_{\mu\nu} + i(x_\mu \partial_\nu - x_\nu \partial_\mu). \quad (2.22)$$

Вычислим теперь  $W_\mu$  по формуле (2.21):

$$W_\mu = -\frac{1}{4i} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \sigma^{\nu\rho} \partial^\sigma. \quad (2.21a)$$

Вклад орбитальной части момента исчезает, тем самым подтверждается, что  $W_\mu$  соответствует собственному угловому моменту. Используем далее тождество

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\mu\alpha\beta\gamma} \varepsilon^{\mu\alpha'\beta'\gamma'} &= -\det(g_{\tau\tau'}) = \\ &= -\sum_P (-1)^P g_{\alpha P} g_{\beta P} g_{\gamma P} g_{\gamma' P}; \end{aligned} \quad (2.23)$$

здесь в первом выражении индекс  $\tau$  (или  $\tau'$  соответственно) принимает значения  $\alpha, \beta, \gamma$  ( $\alpha', \beta', \gamma'$ ), а во втором происходит суммирование по всем перестановкам  $P$  индексов  $\alpha', \beta', \gamma'$ .

После некоторых алгебраических выкладок с использованием уравнения Дирака мы приходим к выражению

$$W^2 = -\frac{3}{4} m^2 = -\frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} + 1 \right) m^2. \quad (2.24)$$

Таким образом, уравнение Дирака описывает частицы со спином  $1/2$

В заключение найдем закон преобразования спинора  $\psi$  при пространственном отражении. Нам снова нужно найти  $S(\Lambda)$ , удовлетворяющее соотношению (2.15), где  $\Lambda$  обозначает матрицу, определяемую в виде

$$\Lambda^\mu_\nu = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}. \quad (2.25)$$

Нетрудно заметить, что

$$\psi'(x') = \eta_P \gamma^0 \psi(x) \quad (2.26)$$

и есть искомое преобразование. Здесь  $\eta_P$  является произвольным ненаблюдаемым фазовым множителем. Следует отметить важное обстоятельство, что решения с положительной и отрицательной энергиями имеют по отношению друг к другу противоположные четности, соответствующие двум противоположным собственным значениям  $\gamma^0$ . После переосмысливания решений с отрицательной энергией это будет означать, что частицы и античастицы имеют противоположную внутреннюю четность.

В дальнейшем изложении важную роль будут играть различные билинейные формы, построенные из  $\psi$  и  $\bar{\psi}$ . Остальную часть данного раздела мы посвятим изучению трансформационных свойств этих функций при преобразованиях Лоренца. Из (2.14) получаем

$$\begin{aligned} \bar{\psi}'(x') &= \bar{\psi}(x) \gamma^0 S(\Lambda)^\dagger \gamma^0 = \\ &= \bar{\psi}(x) S^{-1}(\Lambda), \end{aligned}$$

где второе выражение проверяется с помощью явных выражений (2.19) для  $S(\Lambda)$  [и выражения (2.26) для преобразования пространственного отражения]. Таким образом, билинейная форма  $\bar{\psi}(x) A \psi(x)$  преобразуется по формуле

$$\bar{\psi}'(x') A \psi'(x') = \bar{\psi}(x) S^{-1}(\Lambda) A S(\Lambda) \psi(x). \quad (2.27)$$

Например, из (2.15) мы замечаем, что  $\bar{\psi} \gamma^\mu \psi$  преобразуется как 4-вектор:

$$\bar{\psi}'(x') \gamma^\mu \psi'(x') = \Lambda^\mu_\nu \bar{\psi}(x) \gamma^\nu \psi(x), \quad (2.28)$$

тогда как  $\bar{\psi}(x) \psi(x)$  — это (не положительно-определенная) скалярная плотность.

Вообще говоря, любую матрицу  $4 \times 4$  можно разложить по базису из 16 матриц. Можно показать, что алгебра, образуемая  $\gamma$ -матрицами, алгебра Клиффорда, как ее принято называть у математиков, — это не что иное, как полная алгебра матриц  $4 \times 4$ . Введем обозначение<sup>1)</sup>

$$\gamma_5 \equiv \gamma^5 \equiv i \gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3. \quad (2.29)$$

В представлении (2.10)

$$\gamma_5 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.30)$$

<sup>1)</sup> Данное обозначение не является общепринятым. Некоторые авторы не вводят множитель  $i$  (тогда  $\gamma_5^2 = -1$ ) или используют другой знак при  $\gamma_5$ .

Матрица  $\gamma^5$  удовлетворяет условию

$$\{\gamma^5, \gamma^\mu\} = 0 \text{ и } (\gamma^5)^2 = I. \quad (2.31)$$

Рассмотрим теперь 16 матриц:

$$\begin{aligned} \Gamma^S &\equiv I, \\ \Gamma_\mu^V &\equiv \gamma_\mu, \\ \Gamma_{\mu\nu}^T &\equiv \sigma_{\mu\nu} = \frac{i}{2} [\gamma_\mu, \gamma_\nu], \\ \Gamma_\mu^A &\equiv \gamma_5 \gamma_\mu, \\ \Gamma^P &\equiv \gamma_5. \end{aligned}$$

Они имеют следующие свойства:

1.  $(\Gamma^a)^2 = \pm I$ .
2. Для любой матрицы  $\Gamma^a$  ( $\Gamma^a \neq \Gamma^S = I$ ) существует матрица  $\Gamma^b$ , такая, что  $\Gamma^a \Gamma^b = -\Gamma^b \Gamma^a$ .
3. Таким образом, след всех  $\Gamma^a$ , за исключением  $\Gamma^S$ , равен нулю:  

$$\text{Sp } \Gamma^a (\Gamma^b)^2 = -\text{Sp } \Gamma^b \Gamma^a \Gamma^b = -\text{Sp } (\Gamma^b)^2 \Gamma^a = 0.$$
4. Для любой пары  $\Gamma^a, \Gamma^b$  ( $a \neq b$ ) существует матрица  $\Gamma^c \neq \Gamma^S = I$ , такая, что  $\Gamma^a \Gamma^b = \Gamma^c$  с точностью до множителя  $\pm 1$  или  $\pm i$ .
5. Из перечисленных свойств следует вывод о линейной независимости совокупности матриц  $\{\Gamma^a\}$ . Предположим, что

$$\sum_a \lambda_a \Gamma^a = 0.$$

Умножая это соотношение последовательно на все  $\Gamma^a$  и вычисляя след, получаем  $\lambda_a = 0$  для любых  $a$ .

6. Справедливы следующие тождества:

$$\begin{aligned} \gamma^\mu \gamma_\mu &= 4, & \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma_\mu &= -2\gamma^\nu, \\ \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma_\mu &= 4g^{\nu\rho}, & \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma \gamma_\mu &= -2\gamma^\sigma \gamma^\rho \gamma^\nu. \end{aligned} \quad (2.32)$$

В Приложении приведен список этих и других полезных тождеств.

Используя данный базис, запишем теперь свойства соответствующих билинейных форм  $\bar{\psi} A \psi$  по отношению к собственным преобразованиям Лоренца и пространственным отражениям

$$\begin{aligned} S: \quad \bar{\psi}'(x') \psi'(x') &= \bar{\psi}(x) \psi(x) && \text{(скаляр)}, \\ V: \quad \bar{\psi}'(x') \gamma^\mu \psi'(x') &= \Lambda^\mu_\nu \bar{\psi}(x) \gamma^\nu \psi(x) && \text{(вектор)}, \\ T: \quad \bar{\psi}'(x') \sigma^{\mu\nu} \psi'(x') &= \Lambda^\mu_\rho \Lambda^\nu_\sigma \bar{\psi}(x) \sigma^{\rho\sigma} \psi(x) && \text{(антисимметричный тензор)}, \end{aligned} \quad (2.33)$$

$$A: \quad \bar{\psi}'(x') \gamma_5 \gamma^\mu \psi'(x') = \det(\Lambda) \Lambda^\mu_\nu \bar{\psi}(x) \gamma_5 \gamma^\nu \psi(x) \text{ (псевдовектор)},$$

$$P: \quad \bar{\psi}'(x') \gamma_5 \psi'(x') = \det(\Lambda) \bar{\psi}(x) \gamma_5 \psi(x) \text{ (псевдоскаляр)}.$$

Приставка «псевдо» относится к пространственному отражению, а  $x'$  означает, что  $x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu$ .

## 2.2. ФИЗИЧЕСКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

### 2.2.1. Решения в виде плоских волн и проекционные операторы

Будем искать решения свободного уравнения Дирака (2.9) в виде плоских волн, т. е. в виде

$$\begin{aligned} \psi^{(+)}(x) &= e^{-ik \cdot x} u(k) \text{ для положительной энергии,} \\ \psi^{(-)}(x) &= e^{ik \cdot x} v(k) \text{ для отрицательной энергии} \end{aligned} \quad (2.34)$$

при условии, что  $k^0$  положительна. Чтобы эти решения удовлетворяли уравнению Клейна—Гордона, должно также выполняться условие  $k^2 = m^2$ . Положительный времениподобный 4-вектор  $k^\mu$  — это не что иное, как энергия-импульс частицы (в системе единиц, в которой  $\hbar = 1$ ). Из уравнения Дирака следует

$$(\mathcal{K} - m) u(k) = 0, \quad (\mathcal{K} + m) v(k) = 0. \quad (2.35)$$

Предположим, что частица имеет ненулевую массу ( $m \neq 0$ ). В системе покоя частицы  $k^\mu = (m, \mathbf{0})$ , и уравнения (2.35) принимают вид

$$\begin{aligned} (\gamma^0 - 1) u(m, \mathbf{0}) &= 0, \\ (\gamma^0 + 1) v(m, \mathbf{0}) &= 0. \end{aligned}$$

Очевидно, что имеется два линейно-независимых решения  $u$  и два линейно-независимых решения  $v$ . В обычном представлении (2.10) мы будем обозначать эти решения следующим образом:

$$\begin{aligned} u^{(1)}(m, \mathbf{0}) &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u^{(2)}(m, \mathbf{0}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v^{(1)}(m, \mathbf{0}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ v^{(2)}(m, \mathbf{0}) &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2.36)$$

Преобразуем эти решения из системы покоя в систему, движущуюся со скоростью  $v = |\mathbf{k}|/k^0$ , используя собственное преобразование Лоренца (2.19). Проще же, исходя из тождества

$$(\mathcal{K} - m)(\mathcal{K} + m) = k^2 - m^2 = 0,$$

написать

$$u^{(\alpha)}(k) = \frac{\mathcal{K} + m}{\sqrt{2m(m+E)}} u^{(\alpha)}(m, \mathbf{0}) = \begin{pmatrix} \left(\frac{E+m}{2m}\right)^{1/2} \varphi^{(\alpha)}(m, \mathbf{0}) \\ \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{k}}{[2m(m+E)]^{1/2}} \varphi^{(\alpha)}(m, \mathbf{0}) \end{pmatrix}, \quad (2.37)$$

$$v^{(\alpha)}(k) = \frac{-\mathcal{K} + m}{\sqrt{2m(m+E)}} v^{(\alpha)}(m, \mathbf{0}) = \begin{pmatrix} \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{k}}{[2m(m+E)]^{1/2}} \chi^{(\alpha)}(m, \mathbf{0}) \\ \left(\frac{E+m}{2m}\right)^{1/2} \chi^{(\alpha)}(m, \mathbf{0}) \end{pmatrix}$$



Здесь  $E$  обозначает положительную величину:  $E \equiv k^0 = (\mathbf{k}^2 + m^2)^{1/2}$ ; двухкомпонентные спиноры  $\varphi$  и  $\chi$  являются ненулевыми компонентами  $u(m, \mathbf{0})$  и  $v(m, \mathbf{0})$  соответственно.

Сопряженные спиноры запишутся в виде

$$\begin{aligned}\bar{u}^{(\alpha)}(k) &= \bar{u}^{(\alpha)}(m, \mathbf{0}) \frac{\mathcal{K} + m}{\sqrt{2m(m+E)}}, \\ \bar{v}^{(\alpha)}(k) &= \bar{v}^{(\alpha)}(m, \mathbf{0}) \frac{-\mathcal{K} + m}{\sqrt{2m(m+E)}}.\end{aligned}\quad (2.38)$$

Нормировочные множители выбраны нами так, чтобы выполнялись соотношения

$$\begin{aligned}\bar{u}^{(\alpha)}(k) u^{(\beta)}(k) &= \delta_{\alpha\beta}, & \bar{u}^{(\alpha)}(k) v^{(\beta)}(k) &= 0, \\ \bar{v}^{(\alpha)}(k) v^{(\beta)}(k) &= -\delta_{\alpha\beta}, & \bar{v}^{(\alpha)}(k) u^{(\beta)}(k) &= 0\end{aligned}\quad (2.39)$$

Рассмотрим матрицу

$$\begin{aligned}\Lambda_+(k) &\equiv \sum_{\alpha=1,2} u^{(\alpha)}(k) \otimes \bar{u}^{(\alpha)}(k) = \\ &= \frac{1}{2m(m+E)} (\mathcal{K} + m) \frac{1 + \gamma^0}{2} (\mathcal{K} + m) = \\ &= \frac{\mathcal{K} + m}{2m}.\end{aligned}\quad (2.40)$$

При получении последнего выражения использовалось тождество, справедливое в случае  $k^2 = m^2$ , а именно

$$(\mathcal{K} + m) \gamma^0 (\mathcal{K} + m) = 2E (\mathcal{K} + m).$$

Аналогичным образом положим

$$\begin{aligned}\Lambda_-(k) &\equiv - \sum_{\alpha=1,2} v^{(\alpha)}(k) \otimes \bar{v}^{(\alpha)}(k) = \\ &= \frac{1}{2m(m+E)} (\mathcal{K} - m) \frac{1 - \gamma^0}{2} (\mathcal{K} - m) = \\ &= \frac{-\mathcal{K} + m}{2m}\end{aligned}\quad (2.41)$$

Операторы  $\Lambda_+$  и  $\Lambda_-$  являются проекционными операторами на состояния с положительной и отрицательной энергией соответственно. Они удовлетворяют соотношениям

$$\begin{aligned}\Lambda_{\pm}^2(k) &= \Lambda_{\pm}(k), \\ \text{Sp } \Lambda_{\pm}(k) &= 2, \\ \Lambda_+(k) + \Lambda_-(k) &= I.\end{aligned}\quad (2.42)$$

В соотношениях (2.39) нормировка лоренц-инвариантна. Положительно-определенная плотность равна  $\rho = j^0(k) = \bar{\psi}(k) \gamma^0 \psi(k)$ .

Вычислим ее в случаях, когда решения имеют вид плоских волн с положительной энергией:

$$\begin{aligned}\bar{\psi}^{(+)(\alpha)}(x) \gamma^0 \psi^{(+)(\beta)}(x) &= \bar{u}^{(\alpha)}(k) \gamma^0 u^{(\beta)}(k) = \\ &= \bar{u}^{(\alpha)}(k) \frac{\{\mathcal{K}, \gamma^0\}}{2m} u^{(\beta)}(k) = \\ &= \frac{E}{m} \delta_{\alpha\beta}\end{aligned}\quad (2.43a)$$

и с отрицательной энергией:

$$\begin{aligned}\bar{\psi}^{(-)(\alpha)}(x) \gamma^0 \psi^{(-)(\beta)}(x) &= \bar{v}^{(\alpha)}(k) \gamma^0 v^{(\beta)}(k) = \\ &= -\bar{v}^{(\alpha)}(k) \frac{\{\mathcal{K}, \gamma^0\}}{2m} v^{(\beta)}(k) = \\ &= \frac{E}{m} \delta_{\alpha\beta}.\end{aligned}\quad (2.43b)$$

Спиноры были нормированы в состоянии покоя. Поскольку плотность, умноженная на объем, должна оставаться постоянной, то при релятивистском сжатии объема в  $E/m$  раз плотность должна увеличиваться в такое же число раз.

Состояния с положительной и отрицательной энергией взаимно ортогональны, если мы рассматриваем состояния с противоположными по знаку энергиями, но с одним и тем же 3-импульсом:

$$\begin{aligned}\psi^{(+)(\alpha)}(x) &= e^{-i(k^0 x^0 - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})} u^{(\alpha)}(k), \\ \psi^{(-)(\beta)}(x) &= e^{i(k^0 x^0 + \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})} v^{(\beta)}(\tilde{k}), \quad \tilde{k} \equiv (k^0, -\mathbf{k}), \\ \bar{\psi}^{(-)(\beta)}(x) \psi^{(+)(\alpha)}(x) &= e^{-2ik^0 x^0} \bar{v}^{(\beta)}(\tilde{k}) \gamma^0 u^{(\alpha)}(k) = \\ &= \frac{1}{2} e^{-2ik^0 x^0} \bar{v}^{(\beta)}(\tilde{k}) \left( -\frac{\tilde{\mathcal{K}}}{m} \gamma^0 + \right. \\ &\quad \left. + \gamma^0 \frac{\mathcal{K}}{m} \right) u^{(\alpha)}(k) = 0.\end{aligned}\quad (2.44)$$

Физический смысл решений с отрицательной энергией еще требует объяснения. Кроме того, построенные нами состояния (описываемые плоской волной) не имеют смысла для частиц с нулевой массой. Этот вопрос мы подробно обсудим в разд. 2.4.3.

Чтобы описать остающееся вырождение решений  $u$  и  $v$ , построим операторы, проектирующие их на состояния с определенной поляризацией. Используя выражение (2.21), можно показать, что для любого пространственно-подобного нормированного 4-вектора  $n$  ( $n^2 = -1$ ), ортогонального  $k$ , справедливо соотношение

$$\begin{aligned}W \cdot n &= -\frac{1}{4} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} n^\mu k^\nu \sigma^{\rho\sigma} = \\ &= -\frac{1}{2} \gamma_5 \not{n} \not{k}.\end{aligned}\quad (2.45)$$

Следовательно, в системе покоя

$$W^0 = 0, \quad \frac{W}{m} = \frac{1}{2} \gamma^5 \gamma^0 \gamma \equiv \frac{1}{2} \Sigma.$$

В обычном базисе имеем  $\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma & 0 \\ 0 & \sigma \end{pmatrix}$ . Если мы направим  $n$  вдоль оси  $z$  [т. е.  $n = n_3 \equiv (0, 0, 0, 1)$ ], то увидим, что решения (2.36) являются собственными состояниями оператора  $-W \cdot n_{(3)}/m = W^3/m$  с собственными значениями  $+1/2$  (спин вверх) для  $u^{(1)}$  и  $v^{(1)}$  и  $-1/2$  (спин вниз) для  $u^{(2)}$  и  $v^{(2)}$ . Таким образом, оператор, проектирующий на состояния  $u^{(1)}(m, 0)$  и  $v^2(m, 0)$ , можно записать в виде

$$P(n_{(3)}) = \frac{1 + \gamma_5 n_{(3)}}{2} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + \sigma_3 & 0 \\ 0 & 1 - \sigma_3 \end{pmatrix}.$$

После преобразования Лоренца спиноры  $u^{(\alpha)}(k)$  и  $v^{(\alpha)}(k)$  становятся собственными состояниями оператора  $-W \cdot n/m$ , где вектор  $n$  получен преобразованием Лоренца вектора  $n_{(3)}$ :

$$\begin{aligned} -\frac{W \cdot n}{m} u^{(\alpha)}(k) &= \frac{1}{2} \gamma_5 \pi u^{(\alpha)}(k) = \pm \frac{1}{2} u^{(\alpha)}(k), \\ -\frac{W \cdot n}{m} v^{(\alpha)}(k) &= -\frac{1}{2} \gamma_5 \pi v^{(\alpha)}(k) = \pm \frac{1}{2} v^{(\alpha)}(k). \end{aligned} \quad (2.46)$$

Знак плюс соответствует  $\alpha = 1$ , а знак минус —  $\alpha = 2$ . Оператор, проектирующий на состояния  $u^{(1)}(k)$  и  $v^{(2)}(k)$ , записывается в виде

$$P(n) = \frac{1}{2} (1 + \gamma_5 \pi). \quad (2.47)$$

Это выражение справедливо для произвольного нормированного вектора  $n$ , ортогонального  $k$ ; оператор  $P(n)$  проектирует на состояние, которое в системе покоя имеет спин  $\sigma \cdot n/2 = 1/2$  для решения с положительной энергией и спин  $\sigma \cdot n/2 = -1/2$  для решения с отрицательной энергией. (Обратите внимание на знаки!)

Обозначим через  $u(p, n)$  и  $v(p, n)$  собственные векторы  $P(n)$  соответственно для положительной и отрицательной энергии

$$\begin{aligned} P(n) u(k, n) &= u(k, n), \\ P(n) v(k, n) &= v(k, n). \end{aligned} \quad (2.48)$$

Проектирующий оператор  $P(n)$  имеет следующие свойства:

$$\begin{aligned} [\Lambda_{\pm}(k), P(n)] &= 0, \\ \Lambda_+(k) P(n) + \Lambda_-(k) P(n) + \Lambda_+(k) P(-n) + \Lambda_-(k) P(-n) &= 1, \\ \text{Sp } \Lambda_{\pm}(k) P(\pm n) &= 1. \end{aligned}$$

Используя менее строгое условие на норму  $n$ , величину

$$\rho(n) = \frac{1 + \gamma_5 \pi}{2}, \quad -1 < n^2 < 0,$$

можно рассматривать как спиновую матрицу плотности

$$\text{Sp } \rho = 2, \quad \text{Sp } \rho^2 < 4.$$

Существует специальный выбор  $n$ , такой, что в данной системе отсчета  $n$  пропорционально  $k$ . Пусть  $n_k$  имеет вид

$$n_k = \left( \frac{|k|}{m}, \frac{k^0}{m} \frac{k}{|k|} \right). \quad (2.49)$$

Данное определение поляризации называют спиральностью. При этом справедливо соотношение

$$P(n_k) \Lambda_{\pm}(k) = \frac{1}{2} \left( 1 \pm \frac{\Sigma \cdot k}{|k|} \right) \Lambda_{\pm}(k), \quad (2.50)$$

из которого следует, что  $P(n_k)$  проектирует на состояния с положительной спиральностью и положительной энергией и на состояния с отрицательной спиральностью и отрицательной энергией.

В ультрарелятивистском пределе имеем  $m/k_0 \rightarrow 0$ ,  $|k|/k_0 \rightarrow 1$  и  $n_k^{\mu} \rightarrow k^{\mu}/m$ , поэтому

$$\begin{aligned} P(\pm n_k) \Lambda_{+}(k) &\rightarrow \frac{1 \pm \gamma_5}{2} \frac{\mathcal{K} + m}{2m}, \\ P(\pm n_k) \Lambda_{-}(k) &\rightarrow \frac{1 \mp \gamma_5}{2} \frac{-\mathcal{K} + m}{2m}. \end{aligned} \quad (2.51)$$

### 2.2.2. Волновые пакеты

Перейдем к построению нормируемых волновых пакетов. Мы потребуем, чтобы суперпозиция состояла из плоских волн только с положительными энергиями, поскольку на данном этапе лишь эти решения имеют ясный физический смысл. Однако мы столкнемся с противоречиями; поэтому нам придется отказаться от этого требования. Предположим, что  $\psi^{(+)}(x)$  имеет вид

$$\psi^{(+)}(x) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{m}{E} \sum_{\alpha=1,2} b(p, \alpha) u^{(\alpha)}(p) e^{-i p \cdot x}. \quad (2.52)$$

Коэффициент  $[1/(2\pi)^3] (m/E)$  введен для того, чтобы упростить условие нормировки:

$$\begin{aligned} \int d^3 x j^{(+)}{}^0(t, x) &= \int \frac{d^3 x}{(2\pi)^3} \iint d^3 p d^3 p' \frac{m^2}{EE'} \sum_{\alpha, \alpha'} b^*(p, \alpha) b(p', \alpha') \times \\ &\times u^{(\alpha)\dagger}(p) u^{(\alpha')}(p') e^{i(E-E')t - i(p-p') \cdot x} = \\ &= \sum_{\alpha} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{m}{E} |b(p, \alpha)|^2 = 1. \end{aligned} \quad (2.53)$$

Здесь  $d^3 p/E$  — лоренц-инвариантная мера.

Вычислим также полный ток

$$\begin{aligned} \mathbf{J}^{(+)} &= \int d^3x \mathbf{j}^{(+)}(t, \mathbf{x}) = \int \frac{d^3x}{(2\pi)^3} \iint d^3p d^3p' \frac{m^2}{EE'} \sum_{\alpha\alpha'} b^*(p, \alpha) b(p', \alpha') \times \\ &\quad \times u^{(\alpha)\dagger}(p) \alpha u^{(\alpha')}(p') e^{i(E-E')t - i(\mathbf{p}-\mathbf{p}')\cdot\mathbf{x}} = \\ &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \sum_{\alpha\alpha'} \frac{m^2}{E^2} b^*(p, \alpha) b(p, \alpha') u^{(\alpha)\dagger}(p) \alpha u^{(\alpha')}(p). \end{aligned}$$

На данном этапе нам понадобится тождество Гордона, которое устанавливает, что для любых двух решений уравнения Дирака  $u^{(\alpha)}(p)$  и  $u^{(\beta)}(q)$  с положительной энергией справедливо равенство

$$\bar{u}^{(\alpha)}(p) \gamma^\mu u^{(\beta)}(q) = \frac{1}{2m} \bar{u}^{(\alpha)}(p) [(p+q)^\mu + i\sigma^{\mu\nu}(p-q)_\nu] u^{(\beta)}(q). \quad (2.54)$$

Действительно, из уравнения Дирака следует, что

$$\begin{aligned} 0 &= \bar{u}^{(\alpha)}(p) [a(q-m) + (\not{p}-m)a] u^{(\beta)}(q) = \\ &= -2m\bar{u}^{(\alpha)}(p) a u^{(\beta)}(q) + \bar{u}^{(\alpha)}(p) \left( \left\{ \frac{\not{p}+a}{2}, a \right\} + \left[ \frac{\not{p}-a}{2}, a \right] \right) u^{(\beta)}(q); \end{aligned}$$

здесь  $a$  — произвольный 4-вектор. Равенство (2.54) получается отсюда дифференцированием по  $a_\mu$ . Используя это тождество совместно с (2.39), мы можем записать:

$$\mathbf{J}^{(+)} = \sum_{\alpha} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{m}{E} |b(p, \alpha)|^2 \frac{\mathbf{p}}{E} = \left\langle \frac{\mathbf{p}}{E} \right\rangle. \quad (2.55)$$

Следовательно, в случае суперпозиции решений с положительной энергией полный ток совпадает с групповой скоростью. Этот результат аналогичен тому, что наблюдается в теории Шредингера, и он представляется удовлетворительным. Однако суперпозиция решений только с положительной энергией приводит к противоречию.

Чтобы проиллюстрировать это, рассмотрим эволюцию во времени волнового пакета, который в момент времени  $t=0$  имеет вид гауссова распределения с полушириной  $d$ :

$$\psi(0, \mathbf{x}) = \frac{1}{(\pi d^2)^{3/4}} e^{-x^2/2d^2} \omega, \quad (2.56)$$

где  $\omega$  — некоторый фиксированный спинор, скажем  $\begin{pmatrix} \Phi \\ 0 \end{pmatrix}$ .

Соответствующее (нормируемое) решение уравнения Дирака имеет вид

$$\psi(t, \mathbf{x}) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{m}{E} \sum_{\alpha} [b(p, \alpha) u^{(\alpha)}(p) e^{-ip \cdot x} + d^*(p, \alpha) v^{(\alpha)}(p) e^{ip \cdot x}]. \quad (2.57)$$

Поскольку фурье-образ распределения Гаусса является опять-таки распределением Гаусса, т. е.

$$\int d^3x e^{-x^2/2d^2 - i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}} = (2\pi d^2)^{3/2} e^{-\mathbf{p}^2 d^2/2},$$

мы можем написать

$$(4\pi d^2)^{3/4} e^{-\mathbf{p}^2 d^2/2} \omega = \frac{m}{E} \sum_{\alpha} [b(\mathbf{p}, \alpha) u^{(\alpha)}(\mathbf{p}) + d^*(\bar{\mathbf{p}}, \alpha) v^{(\alpha)}(\bar{\mathbf{p}})];$$

здесь  $\bar{\mathbf{p}}$  означает  $(p^0, -\mathbf{p})$ .

Из соотношений ортогональности (2.43) следует, что

$$\begin{aligned} b(\mathbf{p}, \alpha) &= (4\pi d^2)^{3/4} d^{-\mathbf{p}^2 d^2/2} u^{(\alpha)\dagger}(\mathbf{p}) \omega, \\ d^*(\mathbf{p}, \alpha) &= (4\pi d^2)^{3/4} e^{-\mathbf{p}^2 d^2/2} v^{(\alpha)\dagger}(\mathbf{p}) \omega. \end{aligned} \quad (2.58)$$

Используя явные выражения (2.37), можно показать, что отношение  $d^*/b$  имеет порядок  $|\mathbf{p}|/(m+E)$  и становится существенным, когда  $|\mathbf{p}| \sim m$ . Если волновой пакет распределен по области с характерным размером  $d \gg 1/m$ , то вклад импульсов  $|\mathbf{p}| \sim m \gg 1/d$  сильно подавлен и компонентами с отрицательной энергией можно пренебречь. Таким образом, одночастичная теория не приводит к противоречиям. Однако, если мы хотим локализовать волновой пакет в области пространства с размерами порядка комптоновской длины волны, т. е.  $d \leq 1/m$ , решения с отрицательной энергией начинают играть заметную роль. Эта количественная оценка согласуется с эвристическими рассуждениями, приведенными в начале настоящей главы. Запишем, как и выше, условие нормировки в случае волнового пакета, содержащего вклады от состояний с отрицательными энергиями [см. (2.57)]:

$$\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{m}{E} \sum_{\alpha} (|b(\mathbf{p}, \alpha)|^2 + |d(\mathbf{p}, \alpha)|^2) = 1. \quad (2.59)$$

При этом выражение для полного тока имеет вид

$$\begin{aligned} J^i(t) &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{m}{E} \left\{ \frac{p^i}{E} \sum_{\alpha} [ |b(\mathbf{p}, \alpha)|^2 + |d(\mathbf{p}, \alpha)|^2 ] + \right. \\ &\quad + i \sum_{\alpha\alpha'} [ b^*(\bar{\mathbf{p}}, \alpha) d^*(\mathbf{p}, \alpha') e^{2iEt} \bar{u}^{(\alpha)}(\bar{\mathbf{p}}) \sigma^{i0} v^{(\alpha')}(\mathbf{p}) - \\ &\quad \left. - b(\bar{\mathbf{p}}, \alpha) d(\mathbf{p}, \alpha') e^{-2iEt} \bar{v}^{(\alpha')}(\mathbf{p}) \sigma^{i0} u^{(\alpha)}(\bar{\mathbf{p}}) \right\}. \end{aligned} \quad (2.60)$$

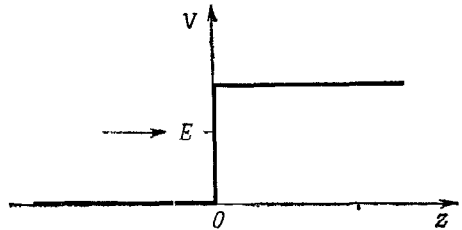
Здесь введено обозначение  $(\bar{\mathbf{p}}_0 = p^0, -\mathbf{p})$ . Ток зависит теперь от времени. Помимо члена, отвечающего групповой скорости, в него входит также вещественный осциллирующий член. Частота этих осцилляций очень высока — она больше, чем

$$2m \frac{c^2}{\hbar} \approx 2 \cdot 10^{21} \text{ с}^{-1}.$$

Это явление, по традиции называемое «дрожанием» (*zitterbewegung*), представляет собой пример тех трудностей, с которыми приходится сталкиваться в рамках одночастичной теории из-за наличия состояний с отрицательной энергией.

Более поразительное явление — это знаменитый парадокс Клейна. Представим себе идеализированную картину процесса локализации с помощью прямоугольного потенциального барьера высотой  $V$  в полупространстве  $z \equiv x^3 > 0$  (рис. 2.1).

РИС. 2.1. Парадокс Клейна в случае прямоугольного потенциала.



Рассмотрим в полупространстве  $z < 0$  падающую вдоль оси  $z$  плоскую волну с положительной энергией и импульсом  $k > 0$ :

$$\Psi_{\text{пад}}(z) = e^{ikz} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ k \\ E+m \\ 0 \end{pmatrix}.$$

При этом отраженная волна запишется в виде

$$\Psi_{\text{отр}}(z) = ae^{-ikz} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -k \\ E+m \\ 0 \end{pmatrix} + be^{-ikz} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ k \\ E+m \end{pmatrix}$$

(суперпозиция решений со спином вверх и со спином вниз и с положительной энергией). В полупространстве  $z > 0$ , т. е. в поле постоянного потенциала  $V$  прошедшая волна имеет аналогичный вид:

$$\Psi_{\text{пр}}(z) = ce^{iqz} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ q \\ E-V+m \\ 0 \end{pmatrix} + de^{-iqz} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -q \\ E-V+m \end{pmatrix},$$

где  $q$  — эффективный импульс:

$$q = [(E-V)^2 - m^2]^{1/2}.$$

Используя условие непрерывности решения при  $z=0$ , а именно

$$\Psi(z) = \theta(-z) [\Psi_{\text{пад}}(z) + \Psi_{\text{отр}}(z)] + \theta(z) \Psi_{\text{пр}}(z),$$

можно определить коэффициенты  $a, \dots, d$ :

$$\begin{aligned} b &= d = 0 && \text{(нет опрокидывания спина),} \\ 1 + a &= c, \\ 1 - a &= rc, && \text{где } r \equiv \frac{q}{k} \frac{E + m}{E - V + m}. \end{aligned}$$

До тех пор пока  $|E - V| < m$ , эффективный импульс  $q$  является мнимым и прошедшая волна спадает экспоненциально, и на расстоянии в несколько комптоновских длин ею можно пренебречь. Если мы увеличим  $V$ , чтобы ограничить эту область проникновения, то прошедшая волна станет осциллирующей при  $V \geq E + m$ .

Вычисляя отношения прошедшего и отраженного токов к падающему, получаем

$$\frac{j_{\text{пр}}}{j_{\text{пад}}} = \frac{4r}{(1+r)^2}, \quad \frac{j_{\text{отр}}}{j_{\text{пад}}} = \left( \frac{1-r}{1+r} \right)^2 = 1 - \frac{j_{\text{пр}}}{j_{\text{пад}}}.$$

На первый взгляд закон сохранения вероятностей выполняется, т. е.

$$j_{\text{пад}} = j_{\text{пр}} + j_{\text{отр}}.$$

Однако, поскольку  $r < 0$ , отраженный поток оказывается больше падающего.

Таким образом, при попытке локализовать частицу в области с размером порядка комптоновской длины волны, мы снова столкнулись с противоречием.

Несмотря на эти затруднения, уравнение Дирака и его одночастичная интерпретация очень полезны и физически разумны до тех пор, пока мы рассматриваем внешние силы, которые мало меняются на расстояниях порядка нескольких комптоновских длин волны. С его помощью мы найдем первые релятивистские поправки к шредингеровской картине. Изучением этого вопроса мы собираемся заняться в следующих разделах, прежде чем вернуться к более углубленному исследованию смысла состояний с отрицательной энергией. Теперь мы понимаем, что противоречия, которые заставили нас отказаться от уравнения Клейна—Гордона, в действительности не были разрешены. Тем не менее мы продолжим данное обсуждение в рамках теории частиц со спином  $1/2$  в силу того, что эта теория имеет важные физические применения. Можно было бы таким же образом рассмотреть теорию скалярного поля, которая применима в равной мере. Это еще один пример того, когда важная физическая теория была разработана на основании соображений, которые впоследствии оказались необоснованными.

### 2.2.3. Электромагнитное взаимодействие

Рассмотрим взаимодействие дираковской частицы с внешним (классическим) электромагнитным полем, заданным потенциалом  $A_\mu(x)$ . Соответствующее взаимодействие (т. е. минимальное взаимодействие) вводят в свободное уравнение Дирака с помощью рецепта, описанного в гл. 1:

$$\partial_\mu \rightarrow \partial_\mu + ieA_\mu. \quad (2.61)$$



Тогда уравнение Дирака принимает вид

$$(i\partial - e\mathbf{A} - m)\psi(x) = 0. \quad (2.62)$$

Этот рецепт обеспечивает инвариантность уравнения относительно калибровочных преобразований:

$$\begin{cases} \psi(x) \rightarrow e^{ie\alpha(x)}\psi(x), \\ A_\mu(x) \rightarrow A_\mu(x) - \partial_\mu\alpha(x). \end{cases} \quad (2.63)$$

Здесь  $e$  — заряд частицы; для электрона он отрицателен,  $e = -|e|$ . Лоренц-ковариантность данного уравнения очевидна. При переходе в новую систему отсчета электромагнитный потенциал преобразуется как вектор:

$$A'_\mu(x' = \Lambda x) = (\Lambda^{-1})_\mu^\nu A_\nu(x)$$

и, следовательно, к данному случаю можно применить анализ, выполненный в разд. 2.1.3.

Уравнение (2.62) можно записать в более детализированном виде

$$i\frac{d\psi}{dt} = \left[ \boldsymbol{\alpha} \cdot \left( \frac{1}{i}\nabla - e\mathbf{A} \right) + \beta m + eA^0 \right] \psi = (\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} + \beta m) \psi + (-e\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{A} + eA^0) \psi = (H_0 + H_{вз}) \psi. \quad (2.64)$$

Следует отметить сильное сходство гамильтониана взаимодействия  $H_{вз}$  и гамильтониана классической частицы во внешнем поле  $-e\mathbf{v} \cdot \mathbf{A} + eA^0$ , что согласуется с интерпретацией вектора  $\boldsymbol{\alpha}$  как оператора скорости. В представлении Гейзенберга оператор  $\mathcal{G}$  удовлетворяет уравнению движения

$$\frac{d}{dt} \mathcal{G}(t) = i[H, \mathcal{G}(t)] + \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial t}.$$

Таким образом, в этом случае оператор положения  $\mathbf{r}$  и калибровочно-инвариантный импульс  $\boldsymbol{\pi} \equiv \mathbf{p} - e\mathbf{A}$  удовлетворяют уравнениям

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{r}}{dt} &= i[H, \mathbf{r}] = \boldsymbol{\alpha}, \\ \frac{d\boldsymbol{\pi}}{dt} &= i[H, \boldsymbol{\pi}] - e\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = e(\mathbf{E} + \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{B}), \end{aligned} \quad (2.65)$$

где

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla A^0, \quad \mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}.$$

Второе уравнение представляет собой операторную версию уравнения для силы Лоренца. Однако вследствие парадоксов, с которыми мы столкнулись в предыдущем разделе, мы можем интерпретировать векторы  $\mathbf{r}$  и  $\boldsymbol{\pi}$  как координату и импульс лишь в ограниченном смысле.

Чтобы выяснить физический смысл этих уравнений, рассмотрим их нерелятивистский предел. Запишем  $\psi = \begin{pmatrix} \Phi \\ \chi \end{pmatrix}$  и используем представление матриц, в котором  $\beta = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}$ ,  $\alpha = \begin{pmatrix} 0 & \sigma \\ \sigma & 0 \end{pmatrix}$ . При этом уравнение (2.64) запишется в виде пары уравнений

$$\begin{aligned} i \frac{\partial \Phi}{\partial t} &= \sigma \cdot \pi \chi + eA^0 \Phi + m\Phi, \\ i \frac{\partial \chi}{\partial t} &= \sigma \cdot \pi \Phi + eA^0 \chi - m\chi. \end{aligned} \quad (2.66)$$

В нерелятивистском пределе большая энергия  $m$  является доминирующим членом в (2.66). Введем медленно меняющиеся функции времени  $\Phi$  и  $X$ :

$$\begin{aligned} \Phi &= e^{-imt} \Phi, \\ \chi &= e^{-imt} X. \end{aligned} \quad (2.67)$$

Эти спиноры удовлетворяют уравнениям

$$\begin{aligned} i \frac{\partial \Phi}{\partial t} &= \sigma \cdot \pi X + eA^0 \Phi, \\ i \frac{\partial X}{\partial t} &= \sigma \cdot \pi \Phi + eA^0 X - 2mX. \end{aligned} \quad (2.68)$$

Если предположить, что  $eA^0 \ll 2m$ , то решение второго уравнения записывается приближенно в виде

$$X \approx \frac{\sigma \cdot \pi}{2m} \Phi \ll \Phi,$$

а первое уравнение совпадает с уравнением Паули

$$i \frac{\partial \Phi}{\partial t} = \left[ \frac{(\sigma \cdot \pi)^2}{2m} + eA^0 \right] \Phi. \quad (2.69)$$

Это оправдывает использование терминов «большая и малая компоненты» для  $\Phi$  и  $X$  (или  $\Phi$  и  $X$  соответственно). Что касается уравнения (2.69), то оно является обобщением на случай спиноров уравнения Шредингера для электромагнитного поля. После простых алгебраических преобразований, а именно вычисляя

$$(\sigma \cdot \pi)^2 = \sigma_i \sigma_j \pi^i \pi^j = \pi^2 + (1/4) [\sigma_i, \sigma_j] [\pi^i, \pi^j] = \pi^2 - e\sigma \cdot \mathbf{B},$$

уравнение (2.69) можно переписать в виде

$$i \frac{\partial \Phi}{\partial t} = \left[ \frac{(\mathbf{p} - e\mathbf{A})^2}{2m} - \frac{e}{2m} \sigma \cdot \mathbf{B} + eA^0 \right] \Phi. \quad (2.70)$$

Заметим, что единственная зависимость от спина сохранилась в члене магнитного взаимодействия  $\sigma \cdot \mathbf{B}$ . Восстанавливая величины

$\hbar$  и  $c$ , этот член можно переписать в виде

$$H_{\text{магн}} = -\frac{e\hbar}{2mc} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B} = -\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B}, \quad (2.71)$$

где магнитный момент  $\boldsymbol{\mu}$  определяется выражением

$$\boldsymbol{\mu} \equiv \frac{e}{mc} \frac{\hbar \boldsymbol{\sigma}}{2} = 2 \left( \frac{e}{2mc} \right) \mathbf{S}. \quad (2.72)$$

Оператор спина  $\mathbf{S} = \hbar \boldsymbol{\sigma} / 2$ . В соответствии с определением, данным в разд. 1.1.3, гиромагнитное отношение  $g = 2$ . Это нетривиальный результат теории Дирака, предсказанный в рамках нерелятивистского рассмотрения, основанного на уравнении Паули.

Численное значение магнитного момента  $|\boldsymbol{\mu}|$  равно

$$|\boldsymbol{\mu}| = \frac{e\hbar}{2mc} = 5,79 \cdot 10^{-9} \text{ эВ/Гс.}$$

Экспериментально измеренное значение величины  $g$  отличается от дираковского на очень малую величину за счет радиационных поправок; этот вопрос мы изучим позже.

Уравнение Паули (2.70) можно упростить, если рассмотреть однородное магнитное поле  $\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$ , такое, что  $\mathbf{A} = \frac{1}{2} \mathbf{B} \times \mathbf{r}$ , и пренебречь квадратичным членом по  $A$  (приближение слабого поля). В результате получим уравнение

$$i \frac{\partial \Phi}{\partial t} = \left[ \frac{\mathbf{p}^2}{2m} - \frac{e}{2m} (\mathbf{L} + 2\mathbf{S}) \cdot \mathbf{B} \right] \Phi,$$

где  $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$  — оператор орбитального углового момента. Предлагаем читателю найти полную систему решений этого уравнения.

В действительности проведенное выше рассмотрение можно выполнить также для уравнения Дирака, записанного в квадратированной форме, т. е. не используя нерелятивистского приближения. Запишем сначала уравнение (2.62), умножив его на оператор  $(i\partial - eA + m)$ . Это дает

$$\begin{aligned} [(i\partial - eA)^2 - m^2] \psi &= \left\{ (i\partial - eA)^2 + \frac{1}{2i} \sigma^{\mu\nu} [i\partial_\mu - eA_\mu, i\partial_\nu - eA_\nu] - m^2 \right\} \psi = \\ &= \left[ (i\partial - eA)^2 - \frac{e}{2} \sigma^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - m^2 \right] \psi = 0. \end{aligned} \quad (2.73)$$

Следовательно, в обычном представлении зависящей от спина член имеет вид

$$-g \frac{e}{2} \frac{\sigma^{\mu\nu}}{2} F_{\mu\nu} = -g \left( \frac{e}{2} \right) (\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{E} + \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B}).$$

Он вновь отвечает значению гиромагнитного отношения  $g = 2$ . Заметим, что такое значение получено как следствие предположения о минимальном взаимодействии (2.61). Мы могли бы

написать уравнение с взаимодействием, которое не является минимальным, т. е.

$$\left[ (i\partial - eA) - m + \frac{\Delta g}{2} \frac{e}{4m} \sigma^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \right] \psi = 0. \quad (2.74)$$

Это уравнение привело бы к  $g = 2 + \Delta g$ . Такое уравнение применяется при изучении поведения в слабых полях частиц с  $g$ -факторами, сильно отличающимися от 2.

Представляет интерес задача определения энергетических уровней в постоянном магнитном поле. Предположим, что поле  $\mathbf{B}$  направлено вдоль оси  $z$ . Вектор-потенциал  $A$  можно выбрать так, что  $A^0 = A^x = A^z = 0$  и  $A^y = Bx$ .

Для стационарного решения, отвечающего энергии  $E$ ,  $\psi = e^{-iEt} \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix}$ , уравнения (2.66) записываются в виде

$$\begin{aligned} (E - m) \varphi &= \sigma \cdot (\mathbf{p} - e\mathbf{A}) \chi, \\ (E + m) \chi &= \sigma \cdot (\mathbf{p} - e\mathbf{A}) \varphi. \end{aligned}$$

Исключая  $\chi$ , мы получаем уравнение для  $\varphi$ :

$$\begin{aligned} (E^2 - m^2) \varphi &= [\sigma \cdot (\mathbf{p} - e\mathbf{A})]^2 \varphi = [(\mathbf{p} - e\mathbf{A})^2 - e\sigma \cdot \mathbf{B}] \varphi = \\ &= [p^2 + e^2 B^2 x^2 - eB (\sigma_z + 2x p_y)] \varphi. \end{aligned}$$

Это есть не что иное, как гамилтониан гармонического осциллятора. Поскольку  $p_y$ ,  $p_z$  и  $\sigma_z$  коммутируют с правой частью, мы ищем решения в виде

$$\varphi(x) = e^{i(p_y y + p_z z)} f(x),$$

где  $f(x)$  удовлетворяет уравнению

$$\left[ -\frac{d^2}{dx^2} + (eBx - p_y)^2 - eB\sigma_z \right] f(x) = (E^2 - m^2 - p_z^2) f(x). \quad (2.75)$$

Предполагая, что знак величины  $B$  таков, что  $eB > 0$ , введем вспомогательные переменные

$$\begin{aligned} \xi &= \sqrt{eB} \left( x - \frac{p_y}{eB} \right), \\ a &= \frac{E^2 - m^2 - p_z^2}{eB}. \end{aligned}$$

В этих переменных уравнение (2.75) запишется в виде

$$\left( -\frac{d^2}{d\xi^2} + \xi^2 - \sigma_z \right) f = af.$$

Если  $f$  есть собственный вектор оператора  $\sigma_z$  с собственным значением  $\alpha = \pm 1$ , причем

$$f = \begin{pmatrix} f_1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ для } \alpha = 1, \quad f = \begin{pmatrix} 0 \\ f_{-1} \end{pmatrix} \text{ для } \alpha = -1,$$

то  $f_\alpha$  удовлетворяет уравнению

$$\left( \frac{d^2}{d\xi^2} - \xi^2 \right) f_\alpha(\xi) = -(a + \alpha) f_\alpha(\xi), \quad \alpha = \pm 1.$$

Решение, убывающее на бесконечности, выражается через полином Эрмита  $H_n(\xi)$ :

$$f_\alpha = c e^{-\xi^2/2} H_n(\xi)$$

при условии, что  $a + \alpha = 2n + 1$ , где  $n = 0, 1, 2, \dots$ . Следовательно, уровни энергии определяются выражением

$$E^2 = m^2 + p_z^2 + eB(2n + 1 - \alpha). \quad (2.76)$$

Нетрудно написать и соответствующие волновые функции. Эти уровни являются вырожденными как по дискретной переменной ( $n, \alpha = -1; n + 1, \alpha = 1$ ), так и по непрерывной (по  $p_y$ ). Вырождение по  $p_y$  можно свести к дискретному, если предположить, что частица находится в потенциальном ящике конечных размеров. Выражение (2.76) является релятивистским обобщением уровней Ландау. Мы видим, что для  $g = 2$  спектр простирается до значения  $E^2 = m^2$ .

В качестве второго примера изучим поведение дираковской частицы в поле электромагнитной плоской волны. При этом мы получим обобщение классического рассмотрения, проведенного в гл 1. Предположим, что плоская волна, которая является линейно-поляризованной, характеризуется направляющим вектором  $n_\mu$  ( $n^2 = 0$ ) и вектором поляризации  $\varepsilon_\nu$  ( $\varepsilon^2 = -1, \varepsilon \cdot n = 0$ ). Запишем выражение  $A_\mu = \varepsilon_\mu f(\xi)$ , где  $\xi \equiv n \cdot x$  и  $\partial_\mu A_\nu = n_\mu A'_\nu$ , причем  $A'_\nu \equiv \varepsilon_\nu f'(\xi)$ . Тогда квадратированное уравнение (2.73) принимает вид

$$(-\square - 2ieA \cdot \partial + e^2 A^2 - m^2 - ie\kappa A') \psi = 0. \quad (2.77)$$

Запишем его решения в виде

$$\psi_p(x) = e^{-ip \cdot x} \varphi(\xi), \quad (2.78)$$

где  $\varphi$  — дираковский спинор, а  $p$  — неортогональный к  $n$  четырех-вектор. Довбавляя к  $p$  некоторую величину вида  $\lambda n$ , можно удовлетворить условию

$$p^2 = m^2.$$

Интерпретация этого 4-вектора следующая. В системе отсчета, в которой  $\varepsilon^0 = 0$  и, следовательно,  $A^0 = 0$ , а  $E$  и  $A$  направлены вдоль оси  $Ox$ ,  $B$  вдоль оси  $Oy$ , а  $n$  — вдоль оси  $Oz$ , операторы  $p_1 = i\partial_1, p_2 = i\partial_2$  и  $i(\partial_0 + \partial_3) = p_0 + p_3$  коммутируют с гамильтонианом Дирака. Подстановка решения (2.78) в уравнение (2.77) приводит к условию

$$2in \cdot p \varphi'(\xi) + (e^2 A^2 - 2eA \cdot p - ie\kappa A') \varphi(\xi) = 0,$$

которое легко проинтегрировать. Таким образом, получаем

$$\varphi(\xi) = \left(\frac{m}{p_0}\right)^{1/2} \exp \left\{ e \frac{\kappa A}{2n \cdot p} - i \int_0^\xi d\xi \left[ e \frac{A(\xi') \cdot p}{n \cdot p} - \frac{e^2 A^2(\xi')}{2n \cdot p} \right] \right\} u, \quad (2.79)$$

где  $u$  — постоянный биспинор. Поскольку  $(\kappa A)^2 = -n^2 A^2 = 0$ , мы можем написать

$$\psi_p(x) = \left(1 + \frac{e}{2n \cdot p} \kappa A\right) \left(\frac{m}{p_0}\right)^{1/2} u e^{iI},$$

где  $I$  — действие классической частицы, в поле плоской волны (затухающей на бесконечности), причем  $p = m\dot{x}(\infty) = p(\infty)$ ; ср. с выражением (1.84):

$$I = -p \cdot x - \int_0^{n \cdot x} d\xi \left[ \frac{e}{n \cdot p} A(\xi) \cdot p - \frac{e^2}{2n \cdot p} A^2(\xi) \right].$$

Для того чтобы  $\psi$  удовлетворяло исходному уравнению Дирака, а не только квадрированному уравнению (2.73), оператор  $u$  должен подчиняться некоторому вспомогательному условию. После простых алгебраических преобразований получаем

$$(i\partial - eA - m) \psi_p(x) = \left(\frac{m}{p_0}\right)^{1/2} \left(1 + \frac{e}{2p \cdot n} \kappa A\right) (p - m) u e^{iI}.$$

Следовательно,

$$(p - m) u = 0$$

и  $u = u(p)$  является решением свободного уравнения Дирака. Читатель может убедиться, что решение (2.79) имеет правильную нормировку

$$\frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3x \psi_p^\dagger(t, \mathbf{x}) \psi_p(t, \mathbf{x}) = \delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{p}')$$

и что соответствующий ток имеет вид

$$j^\mu(x) = \bar{\psi}_p(x) \gamma^\mu \psi_p(x) = \frac{1}{p^0} \left[ p^\mu - eA^\mu + n^\mu \left( e \frac{p \cdot A}{n \cdot p} - \frac{e^2 A^2}{2n \cdot p} \right) \right].$$

Если  $A(\xi)$  — квазипериодическая функция  $\xi$  (медленно затухающая на бесконечности), то среднее значение величины  $j^\mu$  равно

$$\bar{j}^\mu = \frac{1}{p^0} \left[ p^\mu - \frac{e^2}{2n \cdot p} \bar{A}^2 n^\mu \right].$$

В гл. 1 мы получили аналогичное выражение для соответствующего классического случая. Эти выражения впервые были получены Волковым в 1935 г.

#### 2.2.4. Преобразование Фолди—Ваутхайзена

В разд 2.2.3 физический смысл уравнения Дирака изучался с помощью нерелятивистского приближения. Покажем теперь, что такое изучение можно провести последовательным образом. Рассмотрим с этой целью преобразование Фолди—Ваутхайзена. Говоря точнее, мы хотим найти унитарное преобразование

$$\psi = e^{-iS} \psi',$$

которое разделяет малую и большую компоненты и в котором  $S$  может зависеть от времени.

Такие операторы, как  $\alpha$ , которые связывают большую и малую компоненты, назовем нечетными, а четными — те операторы, которые эти компоненты не связывают (например  $I$ ,  $\beta$ , ...). Поскольку  $\psi'$  удовлетворяет уравнению

$$i\partial_t \psi' = [e^{iS} (H - i\partial_t) e^{-iS}] \psi' = H' \psi', \quad (2.80)$$

наша задача состоит в определении  $S$  таким образом, чтобы в гамильтониан  $H'$  не входили нечетные операторы до заданного порядка по  $1/m$ . Практически мы будем ограничиваться членами порядка (Кинетическая энергия/ $m$ )<sup>3</sup> или (Кинетическая энергия  $\times$  Потенциальная энергия/ $m^2$ ). Это приведет нас к более глубокому пониманию роли релятивистских поправок, вытекающих из уравнения Дирака.

В свободном случае можно построить  $S$  точно. При этом оператор не зависит от времени и его можно выбрать следующим образом:

$$S = -i\beta \frac{\alpha \cdot \mathbf{p}}{|\mathbf{p}|} \theta = -i \frac{\mathbf{y} \cdot \mathbf{p}}{|\mathbf{p}|} \theta.$$

Поскольку  $(\mathbf{y} \cdot \mathbf{p}/|\mathbf{p}|)^2 = -I$ , мы можем вычислить  $e^{iS}$  и  $H'$  в замкнутой форме:

$$e^{iS} = e^{(\mathbf{y} \cdot \mathbf{p}/|\mathbf{p}|) \theta} = \cos \theta + \beta \frac{\alpha \cdot \mathbf{p}}{|\mathbf{p}|} \sin \theta,$$

$$H' = e^{iS} H e^{-iS} =$$

$$\begin{aligned} &= \left( \cos \theta + \beta \frac{\alpha \cdot \mathbf{p}}{|\mathbf{p}|} \sin \theta \right) (\alpha \cdot \mathbf{p} + \beta m) \left( \cos \theta - \beta \frac{\alpha \cdot \mathbf{p}}{|\mathbf{p}|} \sin \theta \right) = \\ &= \alpha \cdot \mathbf{p} \left( \cos 2\theta - \frac{m}{|\mathbf{p}|} \sin 2\theta \right) + \beta (m \cos 2\theta + |\mathbf{p}| \sin 2\theta). \end{aligned}$$

Определяя  $\theta$  из условия

$$\sin 2\theta = \frac{|\mathbf{p}|}{E}, \quad \cos 2\theta = \frac{m}{E},$$

мы исключаем нечетный оператор  $\alpha \cdot \mathbf{p}$ . Таким образом,  $H'$  запишется в виде

$$H' = \frac{\beta}{E} (\mathbf{p}^2 + m^2) = \beta E = \beta (m^2 + \mathbf{p}^2)^{1/2},$$

как и следовало ожидать. Другими словами, мы представили  $H$  в виде прямой суммы двух нелокальных гамильтонианов  $\pm \sqrt{m^2 + \mathbf{p}^2}$ . Очевидно, что в конфигурационном пространстве эти квадратные корни нельзя представить в виде конечного набора дифференциальных операторов.

В случае когда имеется взаимодействие, мы предполагаем, что  $S$  будет порядка  $m^{-1}$ . Разложим  $H'$  в ряд, построенный из многократных коммутаторов:

$$\begin{aligned} H' = H + i[S, H] - \frac{1}{2}[S, [S, H]] - \frac{i}{6}[S, [S, [S, H]]] + \\ + \frac{1}{24}[S, [S, [S, [S, H]]]] - \dot{S} - \frac{i}{2}[S, \dot{S}] + \frac{1}{6}[S, [S, \dot{S}]] + \dots \end{aligned}$$

При выводе последнего выражения было использовано общее тождество

$$e^A B e^{-A} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} [A, [A, [\dots [A, B] \dots ]]], \quad (2.81)$$

где в каждый  $n$ -й член суммы величина  $A$  входит  $n$  раз. Это тождество легко получить, вычисляя последовательно производные от выражения  $e^{sA} B e^{-sA}$  при  $s=0$  и используя их в (формальном) разложении в ряд Тейлора в точке  $s=1$ .

Будем исходить из гамильтониана  $H = \beta m + \mathcal{O} + \mathcal{E}$ , где  $\mathcal{O} = \alpha (\mathbf{p} - e\mathbf{A})$  — нечетный оператор, а  $\mathcal{E}$  — четный оператор  $eA^0$ . Из решения, найденного в свободном случае, следует, что в первом порядке можно положить  $S = -i\beta\mathcal{O}/2$ . Таким образом, в соответствии с полученным выше выражением для  $H'$  находим

$$H' = \beta m + \mathcal{O}' + \mathcal{E}',$$

причем

$$\mathcal{O}' = \frac{\beta}{2m} [\mathcal{O}, \mathcal{E}] - \frac{\mathcal{O}^3}{3m^2} + i \frac{\beta \dot{\mathcal{O}}}{2m}$$

и

$$\mathcal{E}' = \mathcal{E} + \beta \left( \frac{\mathcal{O}^2}{2m} - \frac{\mathcal{O}^4}{8m^3} \right) - \frac{1}{8m^2} [\mathcal{O}, [\mathcal{O}, \mathcal{E}]] - \frac{i}{8m^2} [\mathcal{O}, \dot{\mathcal{O}}],$$

где  $\mathcal{O}'$  теперь порядка  $m^{-1}$ . Мы продолжим процесс итераций. Второе преобразование  $e^{-iS'}$  с  $S' = -i(\beta\mathcal{O}'/2m)$  приводит к выражению

$$H'' = \beta m + \mathcal{E}' + \mathcal{O}'',$$

где  $\mathcal{O}'' = O(m^{-2})$ . Наконец, третий шаг, в котором полагается  $S'' = -(i\beta\mathcal{O}''/2m)$ , устраняет этот нечетный член, и мы получаем искомый гамильтониан в виде

$$H''' = \beta \left[ m + \frac{(\mathbf{p} - e\mathbf{A})^2}{2m} - \frac{(\mathbf{p})^4}{8m^3} \right] + eA^0 - \frac{e}{2m} \beta \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B} + \left( -\frac{ie}{8m^2} \boldsymbol{\sigma} \cdot \text{rot } \mathbf{E} - \frac{e}{4m^2} \boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{p}) \right) - \frac{e^2}{8m^2} \text{div } \mathbf{E}. \quad (2.82)$$

Заслуживает внимания интерпретация отдельных членов в (2.82). Член в квадратных скобках представляет собой разложение (до требуемого порядка) величины  $[(\mathbf{p} - e\mathbf{A})^2 + m^2]^{1/2}$ . Второй член  $eA^0$  — это электростатическая энергия точечного заряда, в то время как третий член — это энергия магнитного диполя в случае  $g=2$ . Член в круглых скобках соответствует спин-орбитальному (с.о.) взаимодействию. Действительно, для статического сферически-симметричного потенциала  $\text{rot } \mathbf{E} = 0$  и  $\mathbf{E} = -\nabla A^0$ . Следовательно,

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{p}) = -\frac{1}{r} \frac{dA^0}{dr} \boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{p}) = -\frac{1}{r} \frac{dA^0}{dr} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{L},$$

и член в круглых скобках запишется в виде

$$H_{\text{с.о.}} = \frac{e}{4m^2 r} \frac{dA^0}{dr} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{L}.$$



Этой дополнительной магнитной энергии соответствует магнитное поле  $\mathbf{B}' = -\mathbf{v} \times \mathbf{E}$ , действующее на частицу. Взаимодействие этого поля с магнитным моментом  $\boldsymbol{\mu}$ , определяемым выражением (2.72), приводит к выражению

$$H_{\text{с.о}} = -\frac{e}{2m} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B}' = -\frac{e}{2m^2} \boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{p}),$$

но благодаря томасовской прецессии этот результат уменьшается в два раза.

Наконец, последний член в выражении (2.82), называемый дарвиновским членом  $-(e/8m^2) \operatorname{div} \mathbf{E}$ , можно связать с явлением дрожания. Координата электрона флуктуирует в области с размером  $\delta r$ , таким, что  $\langle \delta r^2 \rangle \sim 1/m^2$ . Поэтому эффективная электростатическая энергия электрона равна среднему значению, определяемому выражением

$$\langle eA^0(\mathbf{r} + \delta \mathbf{r}) \rangle = eA^0(\mathbf{r}) + \frac{e}{2} \frac{\partial^2 A^0(\mathbf{r})}{\partial r^i \partial r^j} \langle \delta r^i \delta r^j \rangle + \dots$$

В силу сферической симметрии случайная величина, входящая в последнее выражение, равна

$$\langle \delta r^i \delta r^j \rangle = \frac{\delta^i j}{3} \langle \delta r^2 \rangle \approx \frac{\delta^i j}{3m^2},$$

и, следовательно, поправка к члену  $eA^0(r)$  запишется в виде

$$\delta(eA^0) = \frac{e}{6m^2} \Delta A^0 = -\frac{e}{6m^2} \operatorname{div} \mathbf{E},$$

что согласуется с величиной и знаком дарвиновского члена.

Читатель, по-видимому, заметил, что, поскольку преобразование Фолди—Ваутхайзена зависит от времени, средние значения величины  $H'$  в состоянии  $\psi'$ , вообще говоря, отличаются от средних значений величины  $H$  в соответствующем состоянии  $\psi$ .

### 2.3. ВОДОРОДОПОДОБНЫЕ АТОМЫ

Уравнение Дирака нашло важное применение при рассмотрении тонкой структуры атомных спектров. Хорошо известно, что для изучения этого вопроса с успехом используются квантовая механика и ее релятивистские обобщения, вплоть до учета радиационных поправок. Поскольку метод Фолди—Ваутхайзена является сложным, особенно существенно то, что в статическом кулоновском поле уравнение Дирака имеет точное решение, прекрасно согласующееся с экспериментальными данными для водородоподобных атомов. Не следует ожидать, что трудности, указанные в разд. 2.2, будут играть здесь значительную роль. В атомной

физике характерным масштабом длины является боровский радиус  $a_0 = \hbar/m_e c \alpha = 0,53 \text{ \AA}$ , который в 137 раз больше, чем длина волны электрона. В случае тяжелых атомов указанные трудности становятся существенными и приходится разрабатывать иные методы.

### 2.3.1. Сравнение нерелятивистского спектра с релятивистским

Напомним нерелятивистский результат, вытекающий из уравнения Шредингера, явившийся триумфом квантовой механики на первых порах ее развития. Волновое уравнение имеет вид

$$\left[ -\frac{\Delta}{2m} - \frac{Ze^2}{4\pi r} - \varepsilon_{n,l} \right] \psi_{n,l}(\mathbf{r}) = 0,$$

где

$$-\Delta \equiv -\frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{L^2}{r^2},$$

$$L^2 \psi_{n,l} = l(l+1) \psi_{n,l}, \quad l = 0, 1, \dots,$$

а  $m$  — приведенная масса системы электрон—атомное ядро;

$$m^{-1} = m_e^{-1} + m_N^{-1} \approx m_e^{-1}.$$

Условие квантования требует, чтобы величина  $n' = n - (l + 1)$  была целым неотрицательным числом (число нулей волновой функции). Уровни энергии определяются выражением

$$\varepsilon_{n,l} = -\frac{m(Z\alpha)^2}{2n^2}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.83)$$

Постоянная Ридберга  $m\alpha^2/2$  численно равна 13,6 эВ.

Волновая функция  $s$ -состояния ( $l = 0$ ) в начале координат равна

$$\psi(0) = \frac{1}{\pi^{1/2}} \left( \frac{mZ\alpha}{n} \right)^{3/2}. \quad (2.84)$$

Поскольку для данного значения  $n \geq 1$  число  $l$  может принимать целые значения от 0 до  $n - 1$ , каждый уровень оказывается вырожденным с кратностью  $\sum_0^{n-1} (2l + 1) = n^2$ . Это связано с дина-

мической симметрией кулоновской задачи, соответствующей группе  $O(4)$  вращений в 4-мерном пространстве. Паули и Фок использовали данную симметрию в начале развития квантовой механики для алгебраического вывода формулы спектра Бальмера (2.83). В релятивистском рассмотрении вырождение снимается, что приводит к тонкому расщеплению спектра

Пренебрегая на время эффектами, связанными со спином, рассмотрим результаты, предсказываемые теорией Клейна—Гордона, когда электромагнитное взаимодействие введено минимальным

образом. Пусть  $E$  — это полная энергия, равная сумме энергии покоя  $mc^2$  и отрицательной энергии связи  $\varepsilon$ . Тогда мы имеем

$$[(E + Z\alpha/r)^2 + \Delta - m^2] \phi = 0,$$

или

$$\left[ -\frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{L^2 - Z^2 \alpha^2}{r^2} - \frac{2Z\alpha E}{r} - (E^2 - m^2) \right] \phi = 0. \quad (2.85)$$

Последнее уравнение формально совпадает с уравнением Шредингера, если произвести следующие замены:

$$L^2 \rightarrow L^2 - Z^2 \alpha^2 \equiv \lambda(\lambda + 1),$$

$$\alpha \rightarrow \alpha \frac{E}{m},$$

$$\varepsilon \rightarrow \frac{E^2 - m^2}{2m}.$$

При этом орбитальное квантовое число сдвигается на величину  $\delta_l$ ,  $l \rightarrow \lambda = l - \delta_l$ , причем

$$\delta_l = l + \frac{1}{2} - \left[ \left( l + \frac{1}{2} \right)^2 - Z^2 \alpha^2 \right]^{1/2} \approx \frac{Z^2 \alpha^2}{2l+1} + O(\alpha^4).$$

Главное квантовое число  $n$  сдвигается на ту же величину, поскольку  $n' = n - (l + 1)$  должно быть целым. Следовательно, уровни энергии можно записать в виде

$$\frac{E_{nl}^2 - m^2}{2m} = -\frac{mZ^2 \alpha^2}{2} \frac{E_{nl}^2}{m^2} \frac{1}{(n - \delta_l)^2},$$

или 
$$E_{nl} = \frac{m}{\sqrt{1 + [Z^2 \alpha^2 / (n - \delta_l)^2]}} = m - \frac{mZ^2 \alpha^2}{2n^2} - \frac{mZ^4 \alpha^4}{n^3 (2l+1)} + \frac{3}{8} \frac{mZ^4 \alpha^4}{n^4} + O(\alpha^6). \quad (2.86)$$

В этом выражении второй член совпадает с нерелятивистской энергией связи, а третий член снимает  $O(4)$ -вырождение. Мы не будем обсуждать паталогические явления, возникающие в этом случае, а именно сингулярное поведение волновой функции в начале координат, обусловленное притягивающей частью взаимодействия  $-(Z^2 \alpha^2 / r^2)$ , или катастрофу, которая имеет место при  $Z > 137/2$  ( $\delta_l$  и, следовательно,  $E_{nl}$  становятся комплексными!). Выражение (2.86) плохо согласуется с экспериментальными данными. Это означает, что нельзя пренебрегать эффектами, связанными со спином.

### 2.3.2. Теория Дирака

Рассмотрим теперь результаты, предсказываемые уравнением Дирака. Прежде чем строить волновые функции, сначала, как и в случае уравнения Клейна—Гордона, попытаемся дать про-

стой вывод формулы спектра. С этой целью квадривируем уравнение Дирака [ср (2.73)] и подставим в него ненулевую компоненту потенциала  $A_0 = -(Ze/4lr)$  (при этом  $F_{0i} = -F_{i0} = -\partial_i A_0 = E^i$ ). Удобно работать в киральном представлении  $\gamma$ -матриц (2.20), в котором матрица  $\sigma^{0i}$  является диагональной:  $\sigma^{0i} = i \begin{pmatrix} \sigma^i & 0 \\ 0 & -\sigma^i \end{pmatrix}$ . В уравнении (2.73) спиновый член записывается в виде

$$\frac{e}{2} \sigma^{\mu\nu} F_{\mu\nu} = \pm ie\sigma \cdot \mathbf{E} = \mp iZ\alpha \frac{\sigma \cdot \hat{\mathbf{r}}}{r^2},$$

где  $\hat{\mathbf{r}}$  — единичный вектор  $\mathbf{r}/r$ . Аналогом уравнения (2.84) является уравнение для двухкомпонентных спиноров:

$$\left[ - \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) + (L^2 - Z^2\alpha^2 \mp iZ\alpha\sigma \cdot \hat{\mathbf{r}}) \frac{1}{r^2} - \frac{2Z\alpha E}{r} - (E^2 - m^2) \right] \psi_{\pm} = 0.$$

Полный угловой момент  $\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S} = \mathbf{L} + \sigma/2$  коммутирует с гамильтонианом и с  $L^2$ . В подпространстве, в котором  $J^2 = j(j+1)$ ,  $J_z = m$  ( $j = 1/2, 3/2, \dots; -j \leq m \leq j$ ), а  $L^2 = l(l+1)$ , целое число  $l$  принимает два значения:  $l = j + 1/2 \equiv l_+$  и  $l = j - 1/2 \equiv l_-$ . Оператор  $\sigma \cdot \hat{\mathbf{r}}$  не имеет диагональных матричных элементов,  $\langle l_{\pm} | \sigma \cdot \hat{\mathbf{r}} | l_{\pm} \rangle = 0$ , он является эрмитовым, а квадрат его равен единице; поэтому в рассматриваемом подпространстве оператор  $[L^2 - Z^2\alpha^2 \mp iZ\alpha\sigma \cdot \hat{\mathbf{r}}]$  имеет следующий вид:

$$L^2 - Z^2\alpha^2 \mp iZ\alpha\sigma \cdot \hat{\mathbf{r}} = \begin{pmatrix} \left(j + \frac{1}{2}\right)\left(j + \frac{3}{2}\right) - Z^2\alpha^2 & \mp iZ\alpha \\ \mp iZ\alpha & \left(j - \frac{1}{2}\right)\left(j + \frac{1}{2}\right) - Z^2\alpha^2 \end{pmatrix}.$$

Обозначим через  $\lambda(\lambda+1)$  собственные значения этого оператора, тогда  $\lambda = [(j+1/2)^2 - Z^2\alpha^2]^{1/2}$  и  $\lambda = [(j+1/2)^2 - Z^2\alpha^2]^{1/2} - 1$ . Следовательно, величину  $\lambda$  можно записать в виде

$$\lambda = (j \pm 1/2) - \delta_j,$$

где

$$\delta_j = j + 1/2 - \sqrt{(j+1/2)^2 - Z^2\alpha^2} \approx \frac{Z^2\alpha^2}{2j+1} + O(Z^4\alpha^4).$$

В этом случае  $n$  опять-таки сдвинуто на  $\delta_j$ , чтобы  $n' = (n - \delta_j) - \lambda - 1$  оставалось целым. Условие  $n' \geq 0$  ограничивает величину  $j$  следующими значениями:  $j \leq n - 3/2$  для  $\lambda = j + 1/2 - \delta_j$  и  $j \leq n - 1/2$  для  $\lambda = j - 1/2 - \delta_j$ . Следовательно, мы имеем двукратное вырождение состояний, за исключением состояния, отвечающего  $j = n - 1/2$ . Окончательный результат выглядит следующим образом:

$$E_{nj} = \frac{m}{\sqrt{1 + [Z^2\alpha^2/(n - \delta_j)]^2}} = m - \frac{mZ^2\alpha^2}{2n^2} - \frac{mZ^4\alpha^4}{n^3(2j+1)} + \frac{3}{8} \frac{mZ^4\alpha^4}{n^4} + O(\alpha^6), \quad (2.87)$$

где  $n = 1, 2, \dots$ , а  $j = 1/2, 3/2, \dots, n - 1/2$ . При  $Z = 137$  происходит катастрофа; величина  $\delta_{1/2}$  становится мнимой для зарядов, превосходящих это значение.

Вырожденные состояния могут различаться по их орбитальному угловому моменту  $l$ , который принимает значения  $j \pm 1/2$  (за иск-

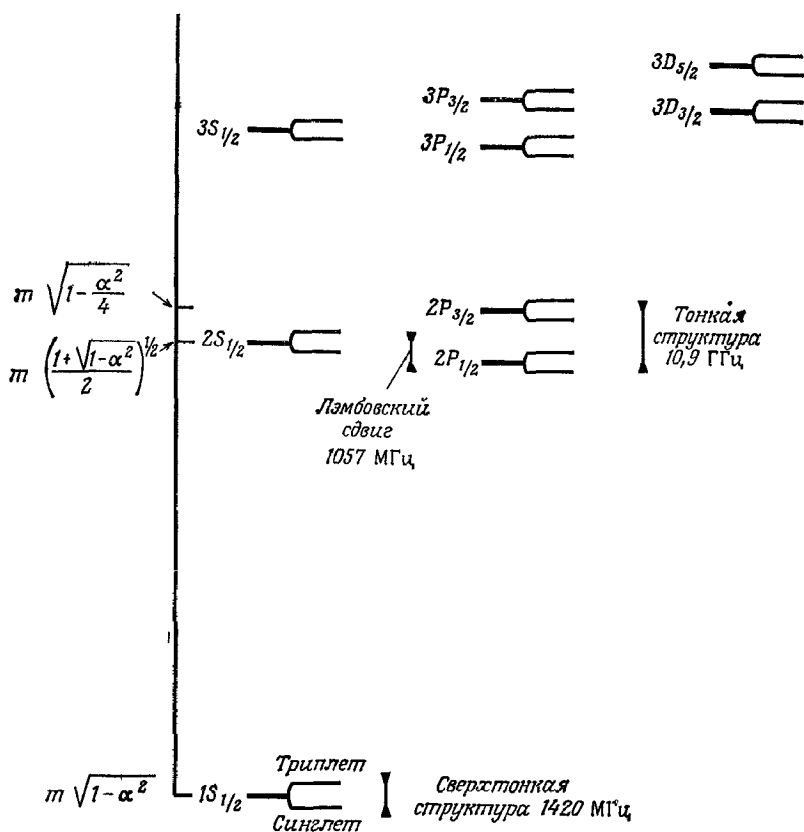


РИС. 2.2. Низколежащие уровни энергии атома водорода.

лучением  $j = n - 1/2$ , когда  $l = n - 1$ ); это в свою очередь связано с трансформационными свойствами состояния относительно пространственных отражений. На рис. 2.2 показаны энергии низколежащих состояний; здесь мы использовали традиционное нерелятивистское спектроскопическое обозначение  $nl_j$ .

Новым явлением оказывается тонкая структура спектра: различие по энергии между уровнями с разными  $j$ , но с тем же самым значением  $n$ . Например, для  $Z = 1$

$$E(2P_{3/2}) - E(2P_{1/2}) \approx \frac{m\alpha^4}{32} = 4,53 \cdot 10^{-9} \text{ эВ} = 10,9 \text{ ГГц.}$$

Можно показать, что тонкое расщепление является следствием спин-орбитальной связи (2.82):

$$\Delta E = \left\langle \frac{Z\alpha}{4m^2} \frac{\sigma \cdot \mathbf{L}}{r^3} \right\rangle.$$

Для  $s$ -волны этот член обращается в нуль, тогда как для  $p$ -волны оператор  $\mathbf{L} \cdot \boldsymbol{\sigma} = (J^2 - L^2 - \sigma^2/4)$  принимает значения 1 и  $-2$  для  $j=3/2$  и  $j=1/2$  соответственно. С другой стороны, из соображений размерности для среднего значения величины  $1/r^3$  имеем  $\langle n'l | 1/r^3 | n'l \rangle = k_{nl} (mZ\alpha)^3$ , где  $k_{nl}$  — числовой множитель. В любом учебнике по квантовой механике дается значение этого множителя:  $k_{nl} = 8/(2l+1) n^3 [(2l+1)^2 - 1]$  (в частности,  $k_{21} = 1/24$ ). Таким образом,

$$\Delta E_{с.о} (2P_{3/2} - 2P_{1/2}) = \frac{m(Z\alpha)^4}{32},$$

что согласуется с ранее сделанной оценкой. (Это справедливо также для более высоких значений  $n$  и  $l$ .)

Построим теперь спиноры, которые являются собственными состояниями энергии в этой задаче. Возвращаясь к представлению Дирака (2.10), запишем биспиноры в виде  $\psi = \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix}$  и найдем двухкомпонентные спиноры, которые являются собственными состояниями операторов  $J^2$ ,  $J_z$  и  $L^2$  с собственными значениями  $j(j+1)$ ,  $m$  и  $l(l+1)$  соответственно. Пусть  $\varphi_{j,m}^{(\pm)}$  — собственное состояние для  $j = l \pm 1/2$ .

Функции  $\varphi_{j,m}^{(\pm)}$  как собственные состояния оператора  $L^2$  должны иметь вид

$$\varphi_{j,m}^{(\pm)} = \begin{pmatrix} a_\mu Y_l^\mu \\ b_{\mu'} Y_{l'}^{\mu'} \end{pmatrix} \quad (\text{здесь не проводится суммирование по } \mu \text{ и } \mu'),$$

где  $Y_l^\mu$  — сферические гармоники. Эти функции должны быть также собственными состояниями оператора  $J_z = L_z + S_z$  с собственным значением  $m$ , а также собственными состояниями оператора  $\mathbf{L} \cdot \boldsymbol{\sigma} = J^2 - L^2 - 3/4$  с собственным значением  $l$  для  $\varphi_{j,m}^{(+)}$  и  $-(l+1)$  для  $\varphi_{j,m}^{(-)}$ . Первое условие дает  $\mu = m - 1/2$  и  $\mu' = m + 1/2$ , второе условие совместно с условием нормировки  $|a|^2 + |b|^2$  определяет величины  $a$  и  $b$ . Окончательно получаем спинорные гармоники в виде

$$\varphi_{j,m}^{(+)} = (2l+1)^{-1/2} \begin{pmatrix} (l+m+1/2)^{1/2} Y_l^{m-1/2} \\ (l-m+1/2)^{1/2} Y_l^{m+1/2} \end{pmatrix}, \quad j = l + 1/2, \quad (2.88)$$

$$\varphi_{j,m}^{(-)} = (2l+1)^{-1/2} \begin{pmatrix} (l-m+1/2)^{1/2} Y_l^{m-1/2} \\ -(l+m+1/2)^{1/2} Y_l^{m+1/2} \end{pmatrix}, \quad j = l - 1/2, \quad l > 0. \quad (2.89)$$

Фаза выбрана таким образом, чтобы выполнялось равенство

$$\varphi_{j,m}^{(+)} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{r}} \varphi_{j,m}^{(-)}. \quad (2.90)$$

Поскольку  $\sigma \cdot \hat{r}$  псевдоскалярный оператор, спиноры  $\varphi_{j,m}^{(+)}$  и  $\varphi_{j,m}^{(-)}$  характеризуются противоположными четностями (их угловые моменты  $l$  отличаются на единицу). Удобно ввести общее обозначение. Пусть  $\varphi_{j,m}^l$  обозначает  $\varphi_{j,m}^{(+)}$ , если  $j = l + 1/2$ , и  $\varphi_{j,m}^{(-)}$ , если  $j = l - 1/2$ . Убедимся непосредственно в том, что  $\varphi_{j,m}^l$  имеет четность  $(-1)^l$ .

Поскольку уравнение Дирака с кулоновским потенциалом

$$E\psi = \left( \frac{1}{i} \boldsymbol{\alpha} \cdot \nabla + \beta m - \frac{Z\alpha}{r} \right) \psi \equiv H\psi \quad (2.91)$$

инвариантно относительно пространственного отражения, можно построить нечетные и четные собственные функции, а именно

$$\beta \psi_{j,m}^{(\pm)}(\vec{x}) = \pm \psi_{j,m}^{(\pm)}(x).$$

Очевидно, что спиноры

$$\psi_{j,m}^l \equiv \begin{bmatrix} \frac{iG_{l,j}(r)}{r} \varphi_{j,m}^l \\ \frac{F_{l,j}(r)}{r} (\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{r}) \varphi_{j,m}^l \end{bmatrix} \quad (2.92)$$

имеют четность  $(-1)^l$ . В выражении (2.92) множители  $i$  и  $1/r$  мы ввели для облегчения последующих вычислений. Замечая, что входящий в уравнение (2.91) гамильтониан  $H$  можно представить в виде

$$H = \begin{pmatrix} m - \frac{Z\alpha}{r} & \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} & -m - \frac{Z\alpha}{r} \end{pmatrix},$$

выполним следующие промежуточные вычисления:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} f(r) \varphi_{j,m}^l &= \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{r} (\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{r} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}) f(r) \varphi_{j,m}^l = \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{r}}{r} (\mathbf{r} \cdot \mathbf{p} + i\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{L}) f(r) \varphi_{j,m}^l = \\ &= -i \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{r}}{r} \left\{ r \frac{df(r)}{dr} + [1 \mp (j + 1/2)] f(r) \right\} \varphi_{j,m}^l, \quad j = l \pm 1/2. \end{aligned}$$

Аналогично имеем

$$(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}) (\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{r}) f(r) \varphi_{j,m}^l = -\frac{i}{r} \left[ r \frac{\partial}{\partial r} + 1 \pm (j + 1/2) \right] f(r) \varphi_{j,m}^l.$$

Несколько затянувшаяся процедура разделения переменных приводит к паре радиальных уравнений

$$\begin{cases} \left( E - m + \frac{Z\alpha}{r} \right) G_{lj}(r) = -\frac{dF_{lj}}{dr}(r) \mp (j + 1/2) \frac{F_{lj}(r)}{r} \\ \left( E + m + \frac{Z\alpha}{r} \right) F_{lj}(r) = \frac{dG_{lj}}{dr}(r) \mp \left( j + \frac{1}{2} \right) \frac{G_{lj}(r)}{r}. \end{cases} \quad (2.93)$$

Чтобы решить эту систему уравнений, обозначим через  $\lambda = \sqrt{m^2 - E^2}$  (поскольку  $E^2 < m^2$ ), введем новую переменную  $\rho = 2\lambda r$  и для фиксированных  $l$  и  $j$  новые функции  $F_1(\rho)$  и  $F_2(\rho)$ :

$$G(r) = \left(1 + \frac{E}{m}\right)^{1/2} e^{-\rho/2} (F_1 + F_2)(\rho),$$

$$F(r) = \left(1 - \frac{E}{m}\right)^{1/2} e^{-\rho/2} (F_1 - F_2)(\rho).$$

Исключая здесь  $F_2$ , получаем дифференциальное уравнение второго порядка. Его решение для  $F_1$  записывается в виде

$$F_1 = \frac{\gamma - Z\alpha E/\lambda}{-\lambda + Z\alpha m/\lambda} \rho^\gamma F\left(\gamma + 1 - \frac{Z\alpha E}{\lambda}, 2\gamma + 1; \rho\right).$$

Соответствующее выражение для  $F_2$  имеет вид

$$F_2 = \rho^\gamma F\left(\gamma - \frac{Z\alpha E}{\lambda}, 2\gamma + 1; \rho\right),$$

причем

$$\gamma = \left[\left(j + \frac{1}{2}\right)^2 - Z^2\alpha^2\right]^{1/2} = j + \frac{1}{2} - \delta_j.$$

Здесь  $F(a, b; \rho)$  — вырожденная гипергеометрическая функция, представляющая собой решение уравнения

$$\left[\rho \frac{d^2}{d\rho^2} + (b - \rho) \frac{d}{d\rho} - a\right] F(a, b; \rho) = 0.$$

При больших  $\rho$  эта функция ведет себя как  $[\Gamma(b)/\Gamma(a)] \rho^{a-b} e^\rho$ . Требование, чтобы  $F_{lj}$  и  $G_{lj}$  были нормируемы, т. е.  $\int_0^\infty dr (F_{lj}^2 + G_{lj}^2) = 1$ , означает, что величина  $[\Gamma(\gamma - Z\alpha E/\lambda)]^{-1}$  должна обращаться в нуль. Это дает искомого условие квантования:

$$\frac{Z\alpha E}{\lambda} - \gamma = n_r = \quad (\text{неотрицательное целое})$$

$$= n - \left(j + \frac{1}{2}\right),$$

которое приводит к выражению (2.87):

$$\frac{Z\alpha E}{(m^2 - E^2)^{1/2}} = n - \delta_j.$$

Объединяя все множители, можно написать выражение для нормированных решений  $F_{lj}$  и  $G_{lj}$ , а следовательно, и для  $\psi_{jm}^l$ .

Мы приведем здесь выражения для волновых функций только основного состояния:

$$\psi_{n=1, j=1/2, m=1/2} = \frac{(2mZ\alpha)^{3/2}}{(4\pi)^{1/2}} \left(\frac{1 + \gamma}{2\Gamma(1 + 2\gamma)}\right)^{1/2} (2mZ\alpha r)^{\gamma-1} e^{-mZ\alpha r} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{i(1-\gamma)}{Z\alpha} \cos \theta \\ \frac{i(1-\gamma)}{Z\alpha} \sin \theta e^{i\varphi} \end{pmatrix}, \quad (2.94)$$



и

$$\Psi_{n=1, i=1/2, m=-1/2} = \frac{(2mZ\alpha)^{3/2}}{(4\pi)^{1/2}} \left( \frac{(1+\gamma)}{2\Gamma(1+2\gamma)} \right)^{1/2} (2mZ\alpha r)^{\gamma-1} e^{-mZ\alpha r} \times \\ \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{i(1-\gamma)}{Z\alpha} \sin \theta e^{-i\varphi} \\ -\frac{i(1-\gamma)}{Z\alpha} \cos \theta \end{pmatrix}.$$

Следует заметить, что  $\gamma = \sqrt{1 - Z^2\alpha^2} \sim 1 - (Z^2\alpha^2/2)$ . В нерелятивистском пределе  $\gamma \rightarrow 1$ , и мы снова приходим к шредингеровским волновым функциям, умноженным на спиноры Паули. Кроме того, полученные волновые функции сингулярны в начале координат, но этот эффект заметен только, когда

$$2mZ\alpha r \lesssim e^{-2/Z^2\alpha^2} \approx 10^{-16300/Z^2},$$

т. е. в очень малой области!

Чтобы сравнить эти результаты с экспериментально найденными положениями уровней, необходимо учесть ряд других эффектов

**Сверхтонкая структура.** В первом приближении мы пренебрегли магнитным полем, создаваемым магнитным моментом ядра (в дальнейшем мы будем рассматривать атом водорода  $Z=1$ ). Взаимодействие спина протона с полным угловым моментом электрона расщепляет уровни на дублеты. Чтобы оценить этот эффект, воспользуемся нерелятивистским приближением для  $s$ -состояний. Гамильтониан нового взаимодействия запишется в виде

$$H_{\text{hf}} = -\frac{e}{2m} \sigma_e \cdot \mathbf{B},$$

где  $\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$ ,  $\mathbf{A} = -\frac{1}{4\pi} \boldsymbol{\mu}_p \times \nabla \frac{1}{r}$ .

Здесь  $\sigma_e$  — спин электрона, а  $\boldsymbol{\mu}_p$  — магнитный момент протона. Напомним, что, если ток равен  $\mathbf{j}(x)$ , магнитный момент  $\boldsymbol{\mu} = \frac{1}{2} \int \mathbf{r} \times \mathbf{j}(x) d^3x$  и  $\Delta \mathbf{A} = -\mathbf{j}$ ; следовательно, ток, соответствующий магнитному моменту, локализованному в начале координат, имеет вид  $\mathbf{j} = -\boldsymbol{\mu} \times \nabla \delta^3(\mathbf{x})$ . Таким образом,

$$H_{\text{hf}} = \frac{e}{4\pi} \frac{1}{2m} \sigma_e \cdot [\nabla \times (\boldsymbol{\mu}_p \times \nabla)] \frac{1}{r} = \frac{e}{8\pi m} \sigma_e \cdot [\boldsymbol{\mu}_p \Delta - (\boldsymbol{\mu}_p \cdot \nabla) \nabla] \frac{1}{r}.$$

В случае  $s$ -состояний нам нужно иметь лишь усредненную по угловым переменным величину  $H_{\text{hf}}$ , оператор  $\nabla_i \nabla_j$  можно заменить на  $(1/3) \Delta \delta_{ij}$ . Иными словами,

$$\bar{H}_{\text{hf}} = -\frac{e}{3m} \sigma_e \cdot \boldsymbol{\mu}_p \delta^3(r). \quad (2.95)$$

Вводя гиромангнитное отношение протона  $g_p$ , имеем  $\mu_p = - (g_p e / 2m_p) (\sigma_p / 2)$ ; при этом

$$\langle \bar{H}_{\text{hf}} \rangle = \frac{e^2}{12m_e m_p} g_p \sigma_e \cdot \sigma_p |\psi(0)|^2.$$

Для основного состояния  $n=1$  [ср. (2.84)] получаем

$$|\psi(0)|^2 = \frac{(m_e \alpha)^3}{\pi}.$$

Величина  $\sigma_e \sigma_p$  принимает значения 1 в триплетном состоянии и  $-3$  в синглетном. Окончательно находим  $\Delta E_{\text{hf}}$  (триплет-синглет)  $= (4/3) m_e \alpha^4 \frac{m_e}{m_p} g_p = 5,89 \cdot 10^{-6}$  эВ  $= 1,42 \cdot 10^9$  Гц. Мы видим, что это расщепление по сравнению с тонким меньше за счет множителя  $m_e/m_p \sim \mu_p/\mu_e$ . Разумеется, выполненные нами вычисления можно обобщать на волны более высокого порядка ( $l \geq 1$ ):

**Радиационные поправки.** Имеется несколько видов таких поправок. Во-первых, возбужденные состояния являются нестабильными, они имеют ширину, и атомы могут спонтанно переходить в более низкое состояние.

В нерелятивистском дипольном приближении вероятность того, что за единицу времени произойдет радиационный переход между двумя состояниями  $\lambda$  и  $\mu$ , дается выражением

$$W_{\mu \leftarrow \lambda} = \frac{4}{3} \frac{(E_\lambda - E_\mu)^3}{2j_\lambda + 1} |\langle \mu \| D \| \lambda \rangle|^2,$$

где  $\langle \mu \| D \| \lambda \rangle$  — приведенный матричный элемент дипольного оператора  $D = er$ , который определяется по теореме Вигнера — Эккарта:

$$\langle \mu j_\mu m_\mu | D_q | \lambda j_\lambda m_\lambda \rangle = \frac{1}{(2j_\lambda + 1)^{1/2}} \langle j_\mu m_\mu; 1q | j_\lambda m_\lambda \rangle \langle \mu \| D \| \lambda \rangle.$$

В частности, для перехода  $2P \rightarrow 1S$  находим

$$W_{1S \leftarrow 2P} = 6,2 \cdot 10^8 \text{ с}^{-1} = 4,1 \cdot 10^{-7} \text{ эВ}.$$

Во-вторых, заряженные частицы взаимодействуют с флуктуациями квантованного электромагнитного поля. Последнее равно нулю лишь в среднем. Поэтому энергетические уровни оказываются несколько сдвинутыми. Полное и систематическое рассмотрение этих эффектов требует применения методов квантовой теории поля, которые будут изложены в дальнейшем. Здесь мы дадим предложенное Велтоном качественное описание главного эффекта, а именно лэмбовского сдвига. Оно опирается на те же рассуждения, что и приведенные нами при обсуждении дарвиновского члена в предыдущем разделе, но в данном случае мы будем рассматривать флуктуации координат, обусловленные электромаг-

нитным полем, а не релятивистским дрожанием. Следовательно, дополнительный вклад в гамильтониан запишется в виде

$$\Delta H_{\text{лэмб}} = \frac{1}{6} \langle (\delta \mathbf{r})^2 \rangle \Delta V,$$

где  $V = -(Z\alpha/r)$ , и, следовательно, согласно закону Пуассона,  $\Delta V = 4\pi Z\alpha \delta^3(r)$ . В этой простой картине, когда возмущение учитывается в первом порядке, вклад дают лишь  $s$ -волны и  $n$ -й уровень оказывается сдвинутым на величину

$$\begin{aligned} \Delta E_{\text{лэмб}}(n) &= \frac{2\pi Z\alpha}{3} \langle (\delta \mathbf{r})^2 \rangle |\psi_n(0)|^2 = \\ &= \frac{(2mZ\alpha)^3}{12} \frac{\alpha}{n^3} \langle (\delta \mathbf{r})^2 \rangle. \end{aligned}$$

(Для волн более высокого порядка сдвиг значительно уменьшается из-за обращения в нуль волновой функции в начале координат.) Оценка величины  $\langle (\delta \mathbf{r})^2 \rangle$  основывается на классическом описании движения электрона в флуктуирующем поле (ядро, которое намного тяжелее электрона, считается неподвижным). Будем считать, что электрон осциллирует в соответствии с законом

$$m\delta \ddot{\mathbf{r}} = e\mathbf{E}.$$

Тогда компонента Фурье электрического поля  $E_\omega$ , отвечающая частоте  $\omega$ , дает вклад

$$m\delta \mathbf{r}_\omega = -\frac{e}{\omega^2} \mathbf{E}_\omega.$$

В предположении, что между различными модами нет корреляции, получаем

$$\langle (\delta \mathbf{r})^2 \rangle = \frac{e^2}{m^2} \int_0^\infty \frac{d\omega}{\omega^4} \langle \mathbf{E}_\omega^2 \rangle.$$

Предвосхищая квантовое рассмотрение электромагнитного поля, предположим, что поле является когерентной суперпозицией плоских волн, и напомним, что энергия вакуума такого поля есть сумма энергий нулевых колебаний:

$$\frac{1}{2} \int d^3x (\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2) = \sum_{\lambda=1,2} \sum_k \frac{\omega_{k\lambda}}{2},$$

взятая по всем волновым числам  $k$  и поляризациям  $\lambda$ . В случае большого потенциального ящика размером  $L$  имеем  $k = (2\pi/L)\mathbf{n}$

(составляющие  $n_x$ ,  $n_y$  и  $n_z$  являются целыми числами). Тогда

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int d^3x (\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2) &= 2L^3 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{\omega_k}{2}, \\ \langle \mathbf{E}^2 \rangle &= \int d\omega \langle \mathbf{E}_\omega^2 \rangle = \frac{1}{L^3} \int d^3x \mathbf{E}^2 = \\ &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \omega_k = \int \frac{d\omega}{2\pi^2} \omega^3. \end{aligned}$$

Следовательно, среднеквадратичное отклонение

$$\langle (\delta r)^2 \rangle = \frac{2\alpha}{\pi m^2} \int_0^\infty \frac{d\omega}{\omega}.$$

Этот интеграл расходится как в области высоких, так и в области низких частот. Ультрафиолетовая расходимость (при  $\omega \rightarrow \infty$ ) связана с тем, что наше квантовое рассмотрение является неполным; в действительности происходит обрезание на расстояниях порядка  $\hbar/mc$ , что соответствует частотам  $\omega \sim mc^2/\hbar$ . С другой стороны, инфракрасная расходимость в области низких частот исключается при более точном рассмотрении электромагнитного поля в присутствии зарядов. Длинноволновые моды чувствительны к низколежащим состояниям электрона. Это приводит к инфракрасному обрезанию на частотах порядка  $\omega \sim c/a = mc^2\alpha/\hbar$ . Используя эти грубые оценки, получаем

$$\langle \delta r^2 \rangle \sim \frac{2\alpha}{\pi m^2} \ln \frac{1}{\alpha},$$

и, следовательно, лэмбовский сдвиг

$$\Delta E_{\text{лэмб}}(n, l) \sim \frac{4}{3} \frac{mZ^4\alpha^5}{\pi n^3} \ln \left( \frac{1}{\alpha} \right) \delta_{l0}.$$

Для уровня атома водорода с  $n=2$  сдвиг между состояниями  $2S_{1/2} - 2P_{1/2}$  численно равен

$$\Delta E_{\text{лэмб}} \approx 660 \text{ МГц},$$

что приближенно согласуется с наблюдаемым сдвигом, равным<sup>1)</sup> 1057 МГц. Сравнивая этот сдвиг с дарвиновским членом [см. последний член в (2.82)], мы видим, что он в  $\alpha \ln(1/\alpha)$  раз меньше. В дальнейшем мы существенно уточним данное приближенное рассмотрение (см. гл. 7).

<sup>1)</sup> В настоящее время эта величина измерена с точностью до четвертого знака после запятой, см. примечание на с. 439 и примечания редактора перевода в конце главы 7.— *Прим. ред.*

**Влияние ядра.** Ядро имеет конечные размеры, его заряд не сосредоточен в точке, а распределен в некотором объеме. В случае протона распределение заряда ядра описывается формфактором. Это сказывается преимущественно на  $s$ -состояниях, поскольку волновые функции с более высокими значениями  $l$  в начале координат равны нулю. Интересным следствием неточности ядер является изотопический эффект, предсказанный еще в 1932 г. Он состоит в том, что уровни, отвечающие различным изотопам, несколько сдвинуты по отношению друг к другу.

В случае легких ядер основной вклад обуславливается разностью масс различных изотопов:

$$\delta E \sim \frac{1}{2} \Delta \left( \frac{1}{m_{\text{яд}}} \right) \left\langle \sum_{\text{электроны}} p_i^2 \right\rangle,$$

поскольку приведенная масса электрона определяется выражением  $1/m = 1/m_e + 1/m_{\text{яд}}$ . Однако в случае тяжелых ядер распределение заряда в конечном объеме играет значительную роль. В нерелятивистском приближении поправку можно записать в виде

$$\delta E \approx e \int d^3x |\psi(x)|^2 \left[ V(r) + \frac{Ze}{4\pi r} \right],$$

где  $V(r)$  — истинный потенциал, а  $-(Ze/r)$  — аппроксимирующий его кулоновский потенциал. Таким образом,

$$\begin{aligned} \delta E &\approx e |\psi(0)|^2 \int d^3x \left[ V(r) + \frac{Ze}{4\pi r} \right] \approx \\ &\approx \frac{e}{6} |\psi(0)|^2 \int d^3x r^2 \Delta V \approx \\ &\approx \frac{e}{6} |\psi(0)|^2 Ze \langle r^2 \rangle_{\text{яд}}. \end{aligned}$$

Здесь мы подставили  $\Delta r^2 = 6$ , проинтегрировали по частям и использовали закон Пуассона:  $\Delta V = -\rho$ ,  $\int \rho d^3x = -Ze$ . В соответствии с (2.84) мы видим, что  $\delta E \sim Z^4$ . Этот эффект можно применить на практике для разделения изотопов. Первый луч лазера переводит атом данного изотопа в некоторое возбужденное состояние, а второй луч затем его ионизует. После этого можно произвести электростатическое разделение изотопов.

Другое следствие состоит в том, что значение критического заряда  $Z_c \approx 137$ , выше которого основное состояние становится нестабильным, оказывается более высоким, а именно  $Z \approx 175$ .

**Двухчастичные релятивистские поправки.** Последовательное рассмотрение должно также учитывать отдачу ядра. Эта задача является сложной, и ее решение нужно искать, опираясь на релятивистское двухчастичное уравнение (гл. 10). Однако с помощью эвристических рассуждений можно пролить некоторый свет на этот вопрос. Мы видим, что энергетические уровни, получаемые как из уравнения Шредингера [см. (2.83)], так и из уравнения

Клейна—Гордона [см. (2.86)], можно интерпретировать с помощью следующего условия, налагаемого на скорость  $v$ :

$$\frac{i\alpha}{|v|} = n \quad (\text{где } n \text{ — целое положительное число}).$$

Действительно, в случае уравнения Шредингера

$$E = \frac{mv^2}{2} = -\frac{m\alpha^2}{2n^2},$$

в то время как для уравнения Клейна—Гордона  $v^2 = p^2/E^2$ , откуда следует:

$$\frac{E^2 - m^2}{E^2} = -\frac{\alpha^2}{n^2}, \quad \text{или } E = \frac{m}{(1 + \alpha^2/n^2)^{1/2}},$$

и искомый результат получается заменой  $n$  на  $n - \delta_j$ , как и в выражении (2.86). В случае двухчастичной задачи соответствующей величиной является относительная скорость, т. е. скорость одной из частиц, измеренная в системе покоя другой частицы. Таким образом, получаем выражение

$$E_{\text{полн}}^2 = (p + P)^2 = m^2 + M^2 + \frac{2mM}{(1 - v^2)^{1/2}},$$

которое симметрично по отношению к замене  $m \leftrightarrow M$ . Используя снова наше эмпирическое правило

$$v^2 = -\frac{\alpha^2}{(n - \delta_j)^2},$$

находим

$$E_{\text{полн}}^2 = m^2 + M^2 + \frac{2mM}{[1 + \alpha^2/(n - \delta_j)^2]^{1/2}},$$

или

$$E_{\text{полн}} = m + M - \frac{\alpha^2}{2n^2} \frac{mM}{m+M} + \frac{\alpha^4}{8n^4} \frac{mM}{m+M} \left[ 3 - \frac{mM}{(m+M)^2} \right] - \frac{\alpha^3}{n^3} \frac{mM}{m+M} \frac{1}{2j+1} + O(\alpha^6).$$

Это выражение довольно хорошо описывает эффект отдачи, получаемый в более точной теории.

## 2.4. ТЕОРИЯ ДЫРОК И ЗАРЯДОВОЕ СОПРЯЖЕНИЕ

### 2.4.1. Интерпретация решений с отрицательными энергиями

Несмотря на успехи, достигнутые с помощью уравнения Дирака, настало время серьезно заняться интерпретацией решений с отрицательными энергиями. Как объяснялось выше, их присутствие

в теории неприемлемо, поскольку они приводят к тому, что любые состояния с положительной энергией в конечном счете оказываются нестабильными.

Решение этой проблемы было предложено Дираком еще в 1930 г. в рамках многочастичной теории. Несмотря на то что такое решение не получило окончательного признания, поскольку оно неприменимо, например, к скалярным частицам, поучительно проследить за ходом рассуждений Дирака. Это дает интуитивную физическую картину, полезную во многих конкретных случаях, и позволяет провести плодотворные аналогии с различными физическими ситуациями, например с ансамблем электронов в металле. Главное предположение Дирака состоит в том, что в состоянии вакуума все уровни с отрицательными энергиями полностью заполнены. В соответствии с принципом Паули это препятствует переходу электронов в состояния с отрицательной энергией и тем самым обеспечивает стабильность физических состояний с положительной энергией. В свою очередь электрон из «моря» состояний с отрицательной энергией может перейти в состояние с положительной энергией. При этом в море образуется дырка, которая в спектре состояний с отрицательной энергией и с отрицательным зарядом проявляется как положительно заряженная частица с положительной энергией, т. е. как позитрон. Теория помимо свойств позитрона, а именно его заряда  $|e| = -e$  и массы покоя  $m_e$ , предсказывает также следующие наблюдаемые явления:

1. Аннигиляция пары электрон—позитрон. Электрон (с положительной энергией) заполняет дырку в море отрицательных энергий с испусканием излучения. Из закона сохранения энергии-импульса следует, что испускается по крайней мере два фотона, если только не присутствует ядро, поглощающее часть энергии и импульса.
2. Наоборот, электрон-позитронная пара может быть рождена из вакуума под действием падающего пучка фотонов в присутствии мишени, необходимой для баланса энергии и импульса. Это процесс, уже упоминавшийся выше: дырка образуется, когда возбужденный электрон приобретает положительную энергию.

Таким образом, теория предсказывает существование позитронов, которые были действительно зарегистрированы в 1932 г. Поскольку позитроны и электроны могут аннигилировать, мы должны отказаться от интерпретации уравнения Дирака как волнового уравнения. Кроме того, теперь несправедливы доводы, которые привели нас к отказу от уравнения Клейна—Гордона. Как мы увидим, оно действительно описывает бесспиновые частицы, такие, как пионы. Однако в случае бозонов дырочная

интерпретация не является удовлетворительной, поскольку в рассуждениях Дирака решающую роль играет статистика Ферми.

Даже для фермионов концепция ненаблюдаемого бесконечного заряженного моря выглядит довольно странно. Вместо всего этого мы должны построить последовательную теорию многих тел, дающую согласованное описание частиц и античастиц. Такая задача может быть решена с помощью «вторичного квантования», т. е. введением квантованных полей, описывающих рождение и уничтожение частиц.

#### 2.4.2. Зарядовое сопряжение

Дырочная теория подразумевает существование удовлетворяющих одному и тому же уравнению электронов и позитронов, имеющих одинаковые массы, но противоположные заряды. Следовательно, уравнение Дирака должно отвечать новому виду симметрии, соответствующему замене частицы на античастицу. Найдем преобразование  $\psi \rightarrow \psi^c$ , меняющее знак заряда на противоположный, т. е. такое, что

$$\begin{aligned}(i\partial - eA - m)\psi &= 0, \\ (i\partial + eA - m)\psi^c &= 0.\end{aligned}\tag{2.96}$$

Потребуем, чтобы это преобразование было локальным и чтобы его двукратное применение сводилось к умножению  $\psi$  на ненаблюдаемый фазовый множитель. Чтобы построить  $\psi^c$ , рассмотрим уравнение, сопряженное и транспонированное по отношению к первому из уравнений (2.96):

$$[\gamma^{\mu T}(-i\partial_\mu - eA_\mu) - m]\bar{\psi}^T = 0,$$

где  $\bar{\psi}^T = \gamma^0 \psi^*$ . В любом представлении алгебры  $\gamma$ -матриц должна существовать матрица  $C$ , которая удовлетворяет соотношению

$$C\gamma_\mu^T C^{-1} = -\gamma_\mu.\tag{2.97}$$

Например, в представлении (2.10) матрицу  $C$  можно записать в виде

$$C = i\gamma^2\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & -i\sigma^2 \\ -i\sigma^2 & 0 \end{pmatrix},\tag{2.97a}$$

$$-C = C^{-1} = C^T = C^\dagger.\tag{2.97b}$$

Определим теперь  $\psi^c$  следующим образом:

$$\psi^c = \eta_c C \bar{\psi}^T;\tag{2.98}$$

здесь  $\eta_c$  — произвольный ненаблюдаемый фазовый множитель, который обычно выбирают равным единице. В рамках данного подхода зарядовое сопряжение является антилинейным преобразова-



нием. Это согласуется с дырочной интерпретацией, поскольку при вычислении вероятности перехода присутствие частицы в определенном состоянии будет описываться функцией  $\psi$ , а ее отсутствие — функцией  $\psi^*$ . Рассмотрим более подробно свойства зарядового сопряжения. Вычислим  $\psi^c$  в случае, когда  $\psi$  описывает покоящийся электрон в состоянии с отрицательной энергией и спином, направленным вниз. В отсутствие внешнего поля

$$\psi = e^{imt} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \psi^c = \eta_c C \bar{\psi}^T = \eta_c e^{-imt} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, состояние, получающееся при зарядовом сопряжении электрона с отрицательной энергией и спином, направленным вниз, эквивалентно электрону с положительной энергией и спином, направленным вверх.

Нам известно, что произвольное решение  $\psi$ , соответствующее энергии  $\varepsilon$  и импульсу  $p$ , поляризованному вдоль направления  $n$ , записывается в виде

$$\psi = \frac{\varepsilon p + m}{2m} \frac{1 + \gamma_5 \pi}{2} \psi, \quad p^0 > 0,$$

где  $\varepsilon = \pm 1$  обозначает знак энергии. Поскольку в представлении Дирака  $C$  коммутирует с  $\gamma_5 = \gamma_5^*$ ,

$$\begin{aligned} \psi^c &= C \bar{\psi}^T = C \gamma^0 \left( \frac{\varepsilon p + m}{2m} \right)^* \left( \frac{1 + \gamma_5 \pi}{2} \right)^* \psi^* = \\ &= \left( \frac{-\varepsilon p + m}{2m} \right) \left( \frac{1 + \gamma_5 \pi}{2} \right) \psi^c, \end{aligned} \quad (2.99)$$

т. е.  $\psi^c$  описывается теми же самыми 4-векторами  $p$  и  $n$ , но имеет обратный знак энергии. Используя обозначения (2.48), получаем

$$\begin{aligned} u(p, n) &= \eta(p, n) v^c(p, n), \\ v(p, n) &= \eta(p, n) u^c(p, n), \end{aligned} \quad (2.100)$$

где фаза  $\eta(p, n)$  может зависеть от  $p$  и  $n$ . Напомним, что оператор  $(1 + \gamma_5 \pi)/2$  проектирует на спиновые состояния  $\pm 1/2$  вдоль  $n$  в соответствии со знаком энергии. Таким образом, при зарядовом сопряжении направление спина меняется на противоположное.

Кроме того, следует заметить, что при одновременном преобразовании спинора  $\psi$  и потенциала  $A$ :

$$\begin{aligned} \psi &\rightarrow \psi^c = \eta_c C \bar{\psi}^T, \\ A_\mu &\rightarrow A_\mu^c = -A_\mu, \end{aligned} \quad (2.98a)$$

уравнение Дирака (2.96) не меняется.

При зарядовом сопряжении закон преобразования 4-вектора тока имеет вид

$$\begin{aligned} j_\mu &= \bar{\psi} \gamma_\mu \psi \longrightarrow \hat{j}_\mu = \bar{\psi}^c \gamma_\mu \psi^c = \\ &= \psi^T C \gamma_\mu \bar{\psi}^T = \psi^T \gamma_\mu^T \bar{\psi}^T. \end{aligned}$$

Мы могли бы наивно положить, что  $\hat{j}_\mu = \bar{\psi} \gamma_\mu \psi = j_\mu$ . Однако в следующей главе будет показано, что  $\psi$  и  $\bar{\psi}$  следует рассматривать как антикоммутирующие операторы (статистика Ферми—Дирака). Таким образом, зарядовое сопряжение будет изменять знак тока  $j_\mu$  и оставлять неизменной величину  $e\mathbf{j} \cdot \mathbf{A}$ .

В гл. 3, когда у нас уже будет удовлетворительная формулировка теории частиц и античастиц, мы изучим еще одну дискретную симметрию, а именно обращение времени.

### 2.4.3. Частицы с нулевой массой

В разд. 2.2.1 при построении спинорных решений уравнения Дирака мы исключили из рассмотрения случай безмассовых частиц, т. е. с  $m=0$ . Однако к безмассовым частицам относятся нейтрино, имеющие спин  $1/2$ . Кроме того, мы ожидаем, что при очень высоких энергиях частицы, обладающие массой, ведут себя как безмассовые. Учитывая это, мы подробно изучим такой случай. Будем исходить из уравнения Дирака для безмассовых частиц:

$$\not{\rho} \psi = 0, \quad \rho_\mu = i\partial_\mu. \quad (2.101)$$

Умножение этого уравнения на  $\gamma^5 \gamma^0 = -i\gamma^1 \gamma^2 \gamma^3$  дает

$$\Sigma \cdot \not{\rho} \psi = \gamma^5 \not{\rho}^0 \psi, \quad (2.102)$$

поскольку, например,  $(\gamma^5 \gamma^0) \gamma^1 = i\gamma^2 \gamma^3 = \sigma^{23} \equiv \Sigma^1$ . Оператор киральности  $\gamma^5$  антикоммутирует с  $\not{\rho}$ . Для решения с положительной энергией имеем

$$\psi(x) = e^{-ik \cdot x} \psi(k).$$

Из уравнения (2.101) следует, что  $k^2 = 0$ , а значит  $k^0 = E = |\mathbf{k}|$ , и уравнение (2.102) принимает вид

$$\Sigma \cdot \hat{\mathbf{k}} \psi = \gamma^5 \psi. \quad (2.103)$$

Следовательно, киральность равна спиральности (для решений с отрицательной энергией они имеют противоположные знаки). Будем различать независимые решения уравнения (2.101) по значениям их киральности:

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \begin{cases} e^{-ik \cdot x} u_\pm(k), \\ e^{ik \cdot x} v_\pm(k), \end{cases} \quad \text{причем } k^2 = 0, \quad k^0 = |\mathbf{k}| > 0, \\ \gamma_5 u_\pm(k) &= \pm u_\pm(k), \\ \gamma_5 v_\pm(k) &= \pm v_\pm(k). \end{aligned}$$

В обычном представлении  $\gamma_5 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}$  и, следовательно, мы можем записать соотношения

$$u_{\pm}(k) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} a_{\pm}(k) \\ \pm a_{\pm}(k) \end{pmatrix}, \quad v_{\pm}(k) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} b_{\pm}(k) \\ \pm b_{\pm}(k) \end{pmatrix},$$

$$a_+(k) = \sigma \cdot \hat{k} a_+(k) = \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} \\ \sin \frac{\theta}{2} e^{i\varphi} \end{pmatrix} = i\sigma_2 a_+^*(k),$$

$$a_-(k) = -\sigma \cdot \hat{k} a_-(k) = \begin{pmatrix} -\sin \frac{\theta}{2} e^{-i\varphi} \\ \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} = -i\sigma_2 a_-^*(k),$$

где  $\theta$  и  $\varphi$  — полярные координаты единичного вектора  $\hat{k}$ . Аналогично, для  $v_{\pm}$  имеем

$$v_+(k) = C\bar{u}_+^T(k) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} b_+(k) & -i\sigma_2 a_-^*(k) \\ & b_+(k) \end{pmatrix} = -u_+(k),$$

$$v_-(k) = C\bar{u}_-^T(k) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} b_-(k) & i\sigma_2 a_+^*(k) \\ & -b_-(k) \end{pmatrix} = -u_-(k).$$

Таким образом, при данном  $k$  существуют только два независимых решения.

Экспериментальное наблюдение показывает, что существуют нейтрино лишь с отрицательной киральностью. Спиральность нейтрино равна  $-1$ , а спиральность антинейтрино  $+1$ . Это можно объяснить более понятно, если перейти к рассмотрению двухкомпонентных спиноров. В самом деле, нет больше необходимости использовать 4-компонентные спиноры в уравнении Дирака для безмассовых частиц

$$i \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \frac{1}{i} \alpha \cdot \nabla \Psi,$$

поскольку алгебра

$$\{\alpha_i, \alpha_j\} = 2\delta_{ij}$$

может быть реализована с помощью трех двумерных матриц Паули. Если отождествить  $\alpha_i$  с  $\sigma_i$ , то мы приходим к частицам с положительной энергией и положительной спиральностью, в то время как замена  $\alpha_i \rightarrow -\sigma_i$  дает отрицательную спиральность. Такие спиноры, первоначально введенные Вейлем, были отвергнуты вследствие того, что они несовместимы с сохранением четности (которая обращает знак спиральности). В настоящее время это не является серьезным возражением, поскольку нейтрино участвуют в слабых взаимодействиях, которые не сохраняют четность.

С помощью выражений (2.20) мы уже определили соответствующие киральные представления для  $\alpha$ -матриц:

$$\alpha = \begin{pmatrix} \sigma & 0 \\ 0 & -\sigma \end{pmatrix}, \quad \gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ -I & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^5 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}.$$

Для положительной киральности  $\gamma^5 = +1$ ,  $\psi = \begin{pmatrix} \varphi \\ 0 \end{pmatrix}$ , и уравнение  $\gamma \cdot p \psi = 0$  принимает вид

$$(-p^0 + \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma}) \varphi = 0, \quad (2.104)$$

тогда как для  $\gamma^5 = -1$ ,  $\psi = \begin{pmatrix} 0 \\ \chi \end{pmatrix}$  и

$$(p^0 + \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma}) \chi = 0. \quad (2.105)$$

В обоих случаях мы имеем двухкомпонентную теорию и, уравнение Дирака эквивалентно паре уравнений Вейля. Так называемое зарядовое сопряжение  $C$  (нейтрино не имеет заряда!) связывает спиноры с противоположными киральностями и меняет знак энергии. Инвариантность относительно  $C$  отсутствует, если в природе существуют нейтрино лишь одной определенной спиральности. Действительно, поскольку операция  $P$  связывает между собой решения двух типов

$$\psi(t, \mathbf{x}) \rightarrow \gamma^0 \psi(t, -\mathbf{x})$$

( $\gamma^0$  антидиагональна), комбинирующая операция  $CP$  сохраняет уравнения Вейля инвариантными. В новом представлении матрица  $C$ , определяемая выражением (2.97), запишется в виде

$$C = \begin{pmatrix} -i\sigma_2 & \\ & i\sigma_2 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, операция  $CP$  действует в соответствии с выражениями

$$\psi^{CP}(t, \mathbf{x}) = \eta C \psi^*(t, -\mathbf{x}) = \mp i \eta \sigma_2 \psi^*(t, -\mathbf{x}) \quad (2.106)$$

для киральностей  $\gamma^5 = \pm 1$  соответственно.

Мы видим, что лоренц-инвариантные нормировки (2.43а) и (2.43б) решений, полученные для ненулевых масс, в случае безмассовых частиц должны быть изменены. Таким образом, запишем следующие уравнения:

$$\begin{aligned} \bar{u}^{(\alpha)}(k) \gamma^0 u^{(\beta)}(k) &= 2E \delta_{\alpha\beta}, \\ \bar{v}^{(\alpha)}(k) \gamma^0 v^{(\beta)}(k) &= 2E \delta_{\alpha\beta} \end{aligned}$$

и предоставим читателю самому построить соответствующие решения в виде плоских волн.

## 2.5. ПРОПАГАТОР ДИРАКА

### 2.5.1. Свободный пропагатор

В гл. 1 мы ввели понятие функции Грина для классического скалярного поля. Обобщим это понятие на частицы со спином  $1/2$ . Рассмотрим сначала движение свободной частицы.

Попытаемся выразить решение уравнения Дирака в момент времени  $t_2$  через его значение в некоторый предшествующий момент времени  $t_1$ . Это возможно, поскольку мы имеем дело с уравнением первого порядка. Таким образом, мы ищем ядро  $K(x_2, x_1)$ , такое, что

$$\psi(t_2, x_2) = \int d^3x_1 K(t_2, x_2; t_1, x_1) \gamma^0 \psi(t_1, x_1). \quad (2.107)$$

Ниже мы обоснуем появление здесь величины  $\gamma^0$ . Любое решение  $\psi$  представляет собой суперпозицию решений в виде плоских волн:

$$\psi(t, x) = \sum_{(\alpha)} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{m}{E} [a^{(\alpha)}(k) u^{(\alpha)}(k) e^{-ik \cdot x} + b^{(\alpha)*}(k) v^{(\alpha)}(k) e^{ik \cdot x}].$$

С учетом соотношений (2.43) мы можем написать

$$\begin{aligned} \int d^3x \bar{u}^{(\alpha)}(k) e^{-ik \cdot x} \gamma^0 \psi(0, x) &= a^{(\alpha)}(k), \\ \int d^3x \bar{v}^{(\alpha)}(k) e^{ik \cdot x} \gamma^0 \psi(0, x) &= b^{(\alpha)*}(k). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \psi(t_2, x_2) &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{m}{E} \sum_{\alpha} \int d^3x_1 [u^{(\alpha)}(k) \otimes \bar{u}^{(\alpha)}(k) e^{-ik \cdot (x_2 - x_1)} + \\ &+ v^{(\alpha)}(k) \otimes \bar{v}^{(\alpha)}(k) e^{ik \cdot (x_2 - x_1)}] \gamma^0 \psi(t_1, x_1). \end{aligned}$$

Изменяя порядок интегрирования, находим искомое ядро

$$\begin{aligned} K(t_2, x_2; t_1, x_1) &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{m}{E} \sum_{\alpha} [u^{(\alpha)}(k) \otimes \bar{u}^{(\alpha)}(k) e^{-ik \cdot (x_2 - x_1)} + \\ &+ v^{(\alpha)}(k) \otimes \bar{v}^{(\alpha)}(k) e^{ik \cdot (x_2 - x_1)}], \quad t_2 > t_1. \end{aligned} \quad (2.108)$$

Следует заметить, что  $K$  зависит только от разности  $(x_2 - x_1)$ , что является следствием трансляционной инвариантности свободного уравнения. Кроме того, можно использовать операторы проектирования  $\Lambda_{\pm}(k)$ , определяемые выражениями (2.40) и (2.41), и переписать  $K(x_2, x_1)$  в более компактном виде:

$$K(x_2, x_1) = \theta(t_2 - t_1) \int \frac{d^3k}{2E(2\pi)^3} [(\mathcal{K} + m) e^{-ik \cdot (x_2 - x_1)} + (\mathcal{K} - m) e^{ik \cdot (x_2 - x_1)}]. \quad (2.109)$$

Обозначим это запаздывающее ядро  $K_{\text{ret}}$ . Покажем непосредственно, что оно является функцией Грина для уравнения Дирака. Действуя на  $K_{\text{ret}}(x_2, x_1)$  оператором  $(i\partial_2 - m)$ , получаем

$$(i\partial_2 - m) K_{\text{ret}}(x_2, x_1) = i\gamma^0 \delta(t_2 - t_1) \int \frac{d^3k}{2E(2\pi)^3} [(K+m) e^{ik \cdot (x_2 - x_1)} + (K-m) e^{-ik \cdot (x_2 - x_1)}].$$

В правой части во втором члене можно заменить  $k$  на  $-k$ ; тогда коэффициент при  $(\gamma \cdot k + m)$  обращается в нуль и мы получаем

$$(i\partial_2 - m) K_{\text{ret}}(x_2, x_1) = i\delta^4(x_2 - x_1). \quad (2.110)$$

Кроме того,  $K_{\text{ret}}(x_2, x_1)$  можно записать через запаздывающую функцию Грина скалярного поля  $G_{\text{ret}}(x_2 - x_1)$  [см. выражение (1.169)]:

$$K_{\text{ret}}(x_2 - x_1) = -i(i\partial_2 + m) G_{\text{ret}}(x_2 - x_1)$$

Уравнение (2.110) следует также из тождества (1.165), которому удовлетворяет  $G_{\text{ret}}$ :

$$(\square_2 + m^2) G_{\text{ret}}(x_2 - x_1) = \delta^4(x_2 - x_1).$$

Из формулы

$$G_{\text{ret}}(x) = -\frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4k \frac{e^{-ik \cdot x}}{(k_0 + ie)^2 - k^2 - m^2}$$

следует

$$K_{\text{ret}}(x) = \frac{i}{(2\pi)^4} \int d^4k e^{-ik \cdot x} \frac{K+m}{(k_0 + ie)^2 - k^2 - m^2}.$$

Здесь мы сначала должны выполнить интегрирование по переменной  $k_0$  вдоль контура, показанного на рис. 2.3 штриховой линией.

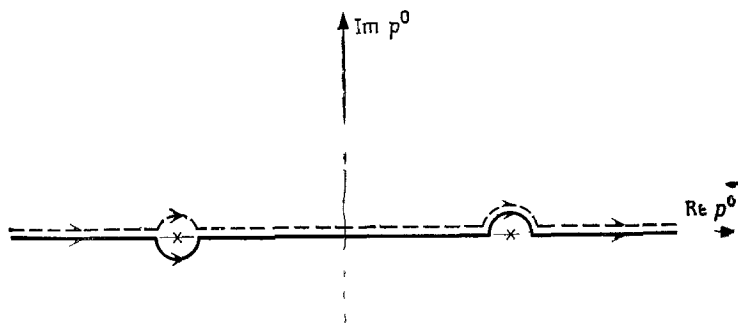


РИС. 2.3. Контур интегрирования, используемый при вычислении функций Грина. Штриховая линия соответствует запаздывающему пропагатору, а сплошная — пропагатору Фейнмана.

В теории дырок вводится другая функция Грина, а именно пропагатор Фейнмана, о котором мы уже упоминали в последнем разделе гл. 1. В теории квантованных полей этот пропагатор появляется естественным образом. Тем не менее мы рассмотрим здесь схематично те идеи, которые привели к нему Фейнмана и Штюкельберга.

Можно считать, что функция Грина описывает три последовательных этапа:

1. Появление электрона в точке  $(t_1, \mathbf{x}_1)$ .
2. Перемещение электрона из точки  $(t_1, \mathbf{x}_1)$  в точку  $(t_2, \mathbf{x}_2)$ .
3. Исчезновение электрона в точке  $(t_2, \mathbf{x}_2)$ .

Если энергия электрона положительна, то этот процесс физически допустим при  $t_2 > t_1$ . Если же энергия электрона отрицательна, то мы должны интерпретировать его исчезновение как появление позитрона, и наоборот. При этом второй этап следует рассматривать как распространение позитрона из точки  $(t_2, \mathbf{x}_2)$  в точку  $(t_1, \mathbf{x}_1)$ , что имеет смысл только при  $t_2 < t_1$ . Поэтому в теории дырок необходимо было бы построить функцию Грина, которая соответствовала бы распространению частицы с положительной энергией только при времени  $t_2 > t_1$ , а частицы с отрицательной энергией (точнее позитрона) — только при  $t_1 > t_2$ :

$$S_F(x_2, x_1) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2E} [\theta(t_2 - t_1) a(\mathcal{K} + m) e^{-ik \cdot (x_2 - x_1)} + \theta(t_1 - t_2) b(\mathcal{K} - m) e^{ik \cdot (x_2 - x_1)}].$$

Постоянные  $a$  и  $b$  определяются из условия

$$(i\partial_2 - m) S_F(x_2, x_1) = \delta^4(x_2 - x_1). \quad (2.111)$$

Заметим, что здесь изменена нормировка по сравнению с (2.110). Непосредственное вычисление дает

$$\begin{aligned} (i\partial_2 - m) S_F(x_2, x_1) &= i\delta(t_2 - t_1) \int \frac{d^3k}{2E (2\pi)^3} \gamma^0 [a(\mathcal{K} + m) e^{ik \cdot (x_2 - x_1)} - \\ &\quad - b(\mathcal{K} - m) e^{-ik \cdot (x_2 - x_1)}] = \\ &= i\delta(t_2 - t_1) \int \frac{d^3k}{2E (2\pi)^3} e^{ik \cdot (x_2 - x_1)} \times \\ &\quad \times \gamma^0 [a(E\gamma^0 - \gamma \cdot \mathbf{k} + m) - b(E\gamma^0 + \gamma \cdot \mathbf{k} - m)]. \end{aligned}$$

Условие (2.111) удовлетворяется, если  $a = -b = 1/i$ . Таким образом, мы получаем следующий результат:

$$S_F(x_2 - x_1) = \frac{1}{i} \int \frac{d^3k}{2E (2\pi)^3} [\theta(t_2 - t_1) (\mathcal{K} + m) e^{-ik \cdot (x_2 - x_1)} - \theta(t_1 - t_2) (\mathcal{K} - m) e^{ik \cdot (x_2 - x_1)}]. \quad (2.112)$$

Величины  $K_{\text{ret}}(x_2 - x_1)$  и  $iS_F(x_2 - x_1)$  могут отличаться лишь на решение однородного уравнения Дирака. Это на самом деле так, в чем можно убедиться с помощью непосредственного вычисления

$$K_{\text{ret}}(x_2 - x_1) - iS_F(x_2 - x_1) = \int \frac{d^3k}{2E (2\pi)^3} (\mathcal{K} - m) e^{ik \cdot (x_2 - x_1)}.$$

Ковариантное выражение для  $S_F(x)$  получим с помощью интегрального представления

$$\theta(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0_+} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2i\pi} \frac{e^{i\omega t}}{\omega - i\varepsilon}.$$

Смысл предела  $\varepsilon \rightarrow 0_+$  будет понятен из нижеследующих выкладок. Величины, которыми мы оперируем, являются обобщенными функциями, действующими на гладкие основные функции. После подстановки последнего выражения в (2.112) получаем

$$S_F(x) = - \int \frac{d^3k}{(2\pi)^4} \frac{1}{2E} \left[ (\mathcal{K} + m) e^{-ik \cdot x} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{\omega - i\varepsilon} e^{i\omega t} - (\mathcal{K} - m) e^{ik \cdot x} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{\omega - i\varepsilon} e^{-i\omega t} \right].$$

Положим в первом интеграле  $p^0 = E - \omega$ ,  $\mathbf{p} = \mathbf{k}$  [ $E = k^0 = (k^2 + m^2)^{1/2}$ ], а во втором  $p^0 = \omega - E$ ,  $\mathbf{p} = -\mathbf{k}$ :

$$S(x) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ip \cdot x}}{2E} \left[ \frac{E\gamma^0 + \boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{p} - m}{E + p^0 - i\varepsilon} - \frac{E\gamma^0 - \boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{p} + m}{E - p^0 - i\varepsilon} \right].$$

Если  $\varepsilon$  бесконечно малое положительное число, то можно написать следующее соотношение:

$$(E + p^0 - i\varepsilon)(E - p^0 - i\varepsilon) = -(p_0^2 - \mathbf{p}^2 - m^2 + i\varepsilon).$$

Окончательно получаем

$$S_F(x) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{-ip \cdot x} \frac{\not{p} + m}{p^2 - m^2 + i\varepsilon}. \quad (2.113)$$

Величина  $i\varepsilon$  дает рецепт интегрирования по импульсному пространству. Сначала интегрируем по  $p^0$  вдоль контура, обозначенного сплошной линией на рис. 2-3, а затем производится интегрирование по  $\mathbf{p}$ . Считая, что  $m$  — комплексное число, т. е.  $m_\varepsilon = m - i\varepsilon$ ,  $\varepsilon \rightarrow 0_+$ , мы имеем<sup>1</sup>

$$\frac{\not{p} + m}{p^2 - m^2 + i\varepsilon} = \frac{\not{p} + m_\varepsilon}{p^2 - m_\varepsilon^2} = \frac{1}{\not{p} - m_\varepsilon} = \frac{1}{\not{p} - m + i\varepsilon}.$$

Следовательно, мы можем записать преобразование Фурье величины  $S_F(x)$  в виде

$$S_F(p) = \frac{\not{p} + m}{p^2 - m^2 + i\varepsilon} = \frac{1}{\not{p} - m + i\varepsilon}. \quad (2.114)$$

Запишем соотношение, связывающее  $S_F(x)$  с пропагатором Фейнмана скалярного поля (1.178):

$$S_F(x) = -(i\partial + m) G_F(x). \quad (2.115)$$

В заключение можно сказать, что пропагатор Фейнмана описывает распространение решений с положительными частотами впе-



ред по времени и распространение решений с отрицательными частотами в обратном направлении по времени.

Пусть  $\psi^{(+)}(t_1, x_0)$  и  $\psi^{(-)}(t_2, x)$  — положительно-частотная и отрицательно-частотная части решения, заданные в моменты времени  $t_1$  и  $t_2$  соответственно, причем  $t_1 < t_2$ , а  $x$  произвольно. Пропагатор  $S_F$  позволяет нам определить функцию  $\psi(t, x)$  в промежуточный момент времени  $t$ :

$$\psi(t, x) = i \int d^3y [S_F(t-t_1, x-y) \gamma^0 \psi^{(+)}(t_1, y) - S_F(t-t_2, x-y) \gamma^0 \psi^{(-)}(t_2, y)]. \quad (2.116)$$

### 2.5.2. Распространение в произвольном внешнем электромагнитном поле

На практике мы имеем дело с распространением волн при наличии помех, таких, как процессы рассеяния, внешние поля и взаимодействия с другими частицами. Рассмотрим распространение частицы во внешнем электромагнитном поле:

$$[i\overleftrightarrow{\partial}_2 - eA(x_2) - m] S_A(x_2, x_1) = \delta^4(x_2 - x_1). \quad (2.117)$$

За очень редкими исключениями, нам не удастся найти компактное выражение для  $S_A$ . К счастью, во многих случаях член  $eA$  достаточно мал, так что его можно рассматривать как возмущение. Величину  $S_A$  можно представить в виде (асимптотического) разложения по  $eA$ . Чтобы получить это разложение, умножим обе части уравнения (2.117) на  $S_F(x_3, x_2)$  и проинтегрируем его по  $x_2$ :

$$\begin{aligned} S_F(x_3, x_1) &= \int d^4x_2 S_F(x_3, x_2) [i\overleftrightarrow{\partial}_2 - eA(x_2) - m] S_A(x_2, x_1) = \\ &= \int d^4x_2 S_F(x_3, x_2) [-i\overleftrightarrow{\partial}_2 - eA(x_2) - m] S_A(x_2, x_1). \end{aligned}$$

Из (2.111) следует:

$$S_F(x_3, x_2) (-i\overleftrightarrow{\partial}_2 - m) = \delta^4(x_3 - x_2).$$

Таким образом, интегральное уравнение, которое определяет величину  $S_A$ , запишется в виде

$$S_A(x_3, x_1) = S_F(x_3, x_1) + e \int d^4x_2 S_F(x_3, x_2) A(x_2) S_A(x_2, x_1). \quad (2.118)$$

Итерируя это уравнение, получаем следующее разложение в ряд по теории возмущений:

$$\begin{aligned} S_A(x_f, x_i) &= S_F(x_f, x_i) + \int d^4x_1 S_F(x_f, x_1) eA(x_1) S_F(x_1, x_i) + \\ &+ \iint d^4x_1 d^4x_2 S_F(x_f, x_1) eA(x_1) S_F(x_1, x_2) eA(x_2) S_F(x_2, x_i) + \dots \end{aligned} \quad (2.119)$$

Этот ряд изображен с помощью диаграмм на рис. 2.4.

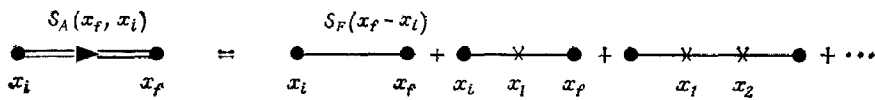


РИС. 2.4. Представление в виде диаграмм ряда теории возмущений (2.119). Сплошная линия между  $x_k$  и  $x_l$  соответствует пропагатору  $S_F(x_k - x_l)$ , а крестик — величине  $e\mathcal{A}(x)$ .

Рассмотрим фурье-образы величин  $S_A$  и  $A(x)$ :

$$S_A(x_f, x_i) = \iint \frac{d^4 p_i}{(2\pi)^4} \frac{d^4 p_f}{(2\pi)^4} e^{-i(p_f \cdot x_f - p_i \cdot x_i)} S_A(p_f, p_i),$$

$$A_i(x) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} A_i(p) e^{-i p \cdot x}$$

(ради простоты мы используем одинаковые обозначения в конфигурационном и импульсном пространствах). Для  $S_A(p_f, p_i)$  также можно написать разложение в ряд по теории возмущений. В силу условия трансляционной инвариантности  $S_F(x_f, x_i) = S_F(x_f - x_i)$  выполняется соотношение

$$S_F(p_f, p_i) = (2\pi)^4 \delta^4(p_f - p_i) S_F(p_i),$$

где  $S_F(p)$  определяется формулой (2.114). Таким образом,

$$S_A(p_f, p_i) = S_F(p_f) (2\pi)^4 \delta^4(p_f - p_i) + \int d^4 p_1 S_F(p_f) e\mathcal{A}(p_1) S_F(p_i) \times$$

$$\times (2\pi)^4 \delta^4(p_f - p_1 - p_i) +$$

$$+ \int \int d^4 p_1 d^4 p_2 S_F(p_f) e\mathcal{A}(p_1) S_F(p_2 + p_i) e\mathcal{A}(p_2) S_F(p_i) \times$$

$$\times (2\pi)^4 \delta^4(p_f - p_1 - p_2 - p_i) + \dots$$

### 2.5.3. Применение к кулоновскому рассеянию

Кулоновское рассеяние будет служить пробным камнем для проверки метода, опирающегося на функции распространения. Процесс, который мы здесь изучаем, — это рассеяние электрона с массой  $m$  на центре, имеющем заряд  $-Ze$  и бесконечную массу. Заряд рассеивающего центра (расположенного в начале координат) создает в точке  $\mathbf{r}$  потенциал  $A_0 = -Ze/4\pi r$ ,  $\mathbf{A} = 0$ .

В классической нерелятивистской механике траектории являются гиперболами. Угол рассеяния  $\theta$  и прицельный параметр  $b$  связаны друг с другом благодаря следующим соотношениям (обозначения см. на рис. 2.5):

1) геометрическим соотношениям

$$\frac{a}{b} = \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}, \quad \frac{b}{c} = \cos \frac{\theta}{2};$$

2) закону сохранения энергии

$$\varepsilon = \frac{p_i^2}{2m} = \frac{p_f^2}{2m} = \frac{p_A^2}{2m} - \frac{Z\alpha}{c-a}$$

( $p_A$  — импульс в точке  $A$ );

3) закону сохранения углового момента

$$l = p_i b = p_f b = p_A (c - a).$$

Исключая из этих соотношений  $p_i$ ,  $p_A$ ,  $c$  и  $a$ , получаем

$$b = \frac{Z\alpha}{2e \operatorname{tg}(\theta/2)}. \quad (2.120)$$

Рассмотрим однородный поток электронов с плотностью  $\rho$  и скоростью  $v = p_i/m = p_f/m$ . Число частиц, рассеянных в телесный

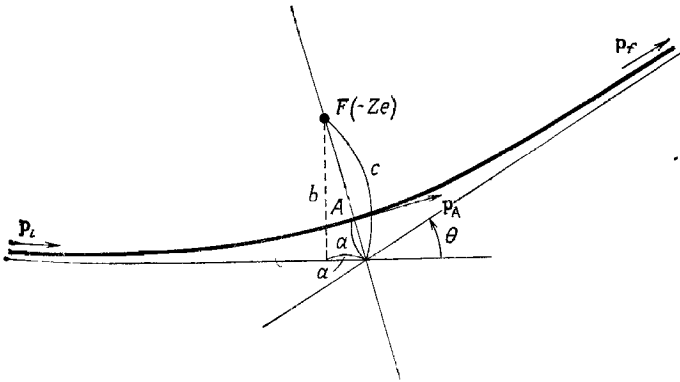


РИС. 2.5. Кулоновское рассеяние на заряде, расположенном в точке  $F$ .

угол  $d\Omega = 2\pi d \cos \theta$  за единицу времени, равно числу падающих частиц, пролетающих через кольцо радиусом  $b$  и площадью  $2\pi b db$ , а именно

$$\frac{dN}{dt} = \rho v 2\pi b db = \rho v \left( \frac{Z\alpha}{2e} \right)^2 \frac{d\Omega}{\sin^4(\theta/2)}.$$

Следовательно, дифференциальное сечение рассеяния, определяемое как отношение величины  $dN/dt d\Omega$  к падающему потоку, равно

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{4 \sin^4(\theta/2)} \left( \frac{Z\alpha}{2e} \right)^2 = \frac{4Z^2 \alpha^2 m^2}{|\mathbf{q}|^4}. \quad (2.121)$$

Здесь  $\mathbf{q} = \mathbf{p}_f - \mathbf{p}_i$  — переданный импульс, а  $|\mathbf{q}| = 2p_i \sin(\theta/2)$ . Это классическая формула Резерфорда.

Обратимся теперь к релятивистскому квантовому случаю. Используем выражение (2.116), в котором заменим  $S_F$  на  $S_A$  и зададим следующие граничные условия: при  $t_1 = -\infty$  функция  $\psi^{(+)}(t_1, \mathbf{x})$  представляет собой падающую плоскую волну, соответствующую электронам с положительной энергией, в то время

как при  $t_2 = +\infty$  волновая функция  $\psi^{(-)}(t_2, \mathbf{x})$  обращается в нуль. Поскольку функция  $S_A$  не известна, мы ограничиваемся двумя первыми членами разложения (2.119) в ряд по теории возмущений. Пусть  $\psi_{\text{пад}}(t, \mathbf{x})$  — решение свободного уравнения Дирака; это решение переходит в падающую волну при  $t \rightarrow t_1 = -\infty$ . В соответствии с (2.119) волновая функция, вычисленная по теории возмущений, запишется в виде

$$\psi(x) = \psi_{\text{пад}}(x) + \psi_{\text{расс}}(x), \quad (2.122)$$

где

$$\psi_{\text{расс}}(x) = \lim_{t_1 \rightarrow -\infty} i \int d^3y \int d^4z S_F(x-z) eA(z) S_F(z-y) \gamma^0 \psi_{\text{пад}}(t_1, y) \quad (2.123)$$

и  $y \equiv (t_1, \mathbf{y})$ .

Поскольку при  $z^0 > t_1$  выполняется соотношение

$$i \int d^3y S_F(z-y) \gamma^0 \psi_{\text{пад}}(t_1, \mathbf{y}) = \psi_{\text{пад}}(z),$$

мы имеем

$$\psi_{\text{расс}}(x) = \int d^4z S_F(x-z) eA(z) \psi_{\text{пад}}(z);$$

когда  $x^0 \rightarrow +\infty$ ,  $\psi_{\text{расс}}$  ведет себя как решение свободного уравнения Дирака, соответствующее только положительным энергиям. В самом деле, используя выражение (2.112), находим, что в этом пределе вклад дает только первый член, что приводит к следующему результату:

$$\begin{aligned} \psi_{\text{расс}}(x) &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{m}{E} \int d^4z \frac{p+m}{2m} e^{-ip \cdot (x-z)} [-ieA(z)] \psi_{\text{пад}}(z) = \\ &= \sum_{k, \alpha} \left( \frac{m}{VE_f} \right)^{1/2} e^{-ip_f x} u^{(\alpha)}(p_f) S_{fi}, \end{aligned} \quad (2.124)$$

где

$$S_{fi} = -ie \int d^4z \left( \frac{m}{VE_f} \right)^{1/2} \bar{u}^{(\alpha)}(p_f) A(z) e^{ip_f z} \psi_i(z). \quad (2.125)$$

Во втором выражении (2.124) интеграл  $\int d^3p/(2\pi)^3$  заменен на сумму по всем конечным состояниям в конечном пространственном объеме  $V: 1/V \sum_{\text{по конечным состояниям } k_f, \alpha}$ ; при этом волна  $(m/VE)^{1/2} e^{-ip \cdot x} u^{(\alpha)}(p)$  описывает частицу, имеющую в объеме  $V$  скорость  $p/E$  и поляризацию  $\alpha$ . Следовательно, амплитуда перехода между состоянием

$$\psi_i(x) = \left( \frac{m}{VE_i} \right)^{1/2} e^{-ip_i \cdot x} u^{(\beta)}(p_i)$$

и аналогичным состоянием  $\psi_f(x)$  дается выражением

$$S_{fi} = -ie \frac{m}{V (E_i E_f)^{1/2}} \int d^4z \bar{u}^{(\alpha)}(p_f) A(z) e^{i(p_f - p_i) \cdot z} u^{(\beta)}(p_i). \quad (2.125a)$$

Для кулоновской задачи  $A \equiv (A_0, \mathbf{0})$ , где  $A_0 = -Ze/4\pi r$ . Таким образом, мы имеем

$$S_{fi} = \frac{iZ\alpha}{V} \frac{m}{(E_i E_f)^{1/2}} 2\pi\delta(E_f - E_i) \int d^3r \frac{e^{-iq \cdot r}}{r} \bar{u}^{(\alpha)}(p_f) \gamma^0 u^{(\beta)}(p_i). \quad (2.126)$$

Следует заметить, что здесь выполняется закон сохранения энергии. В заключение запишем необходимое преобразование Фурье кулоновского потенциала:

$$\int d^3r \frac{e^{-iq \cdot r}}{r} = \frac{4\pi}{|\mathbf{q}|^2}, \quad \mathbf{q} \equiv \mathbf{p}_f - \mathbf{p}_i.$$

Мы используем здесь вместо волновых пакетов стационарные плоские волны; поэтому нет ничего удивительного в том, что квадрат амплитуды (2.126) не существует. Положение можно исправить, если в соответствии с золотым правилом Ферми рассматривать конечный временной интервал и заменить  $\delta$ -функцию на выражение

$$\begin{aligned} 2\pi\delta(E_f - E_i) &= \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i(E_f - E_i)t} \rightarrow \int_{-T/2}^{T/2} dt e^{i(E_f - E_i)t} = \\ &= \frac{2 \sin [T(E_f - E_i)/2]}{E_f - E_i}. \end{aligned}$$

Квадрат этого выражения ведет себя при больших  $T$  как  $T 2\pi\delta(E_f - E_i)$ .

Таким образом, вероятность перехода между состояниями  $i$  и  $f$  в единицу времени в пересчете на одну падающую частицу имеет вид

$$\frac{dP_{fi}}{dt} = \int \left| \frac{iZ\alpha}{V} \frac{m}{(E_f E_i)^{1/2}} \frac{4\pi}{|\mathbf{q}|^2} \bar{u}^{(\alpha)}(p_f) \gamma^0 u^{(\beta)}(p_i) \right|^2 2\pi\delta(E_f - E_i) V \frac{d^3 p_f}{(2\pi)^3}. \quad (2.127)$$

Суммирование здесь проводится по всем возможным конечным состояниям, число которых в элементарном объеме импульсного пространства  $d^3 p_f$  равно  $V d^3 p_f / (2\pi)^3$ . Разделив последнее выражение на величину падающего потока  $(1/V) (|\mathbf{p}_i|/E_i)$ , получим дифференциальное сечение рассеяния

$$d\sigma_{fi} = \int \frac{4Z^2 \alpha^2 m^2}{|\mathbf{p}_i| E_f |\mathbf{q}|^4} \delta(E_f - E_i) p_f^2 dp_f d\Omega_f |\bar{u}^{(\alpha)}(p_f) \gamma^0 u^{(\beta)}(p_i)|^2.$$

Чтобы выполнить тривиальное интегрирование по  $p_f$ , воспользуемся равенствами  $|\mathbf{p}_i| = |\mathbf{p}_f| = p_f$  и  $p_f dp_f = E_f dE_f$ :

$$d\sigma_{fi} = \frac{4Z^2\alpha^2 m^2}{|q|^4} |\bar{u}^{(\alpha)}(p_f) \gamma^0 u^{(\beta)}(p_i)|^2 d\Omega_f. \quad (2.128)$$

В нерелятивистском пределе величина  $\bar{u}^{(\alpha)} \gamma^0 u^{(\beta)}$  пропорциональна  $\delta^{\alpha\beta}$ . В случае когда поляризация в конечном состоянии не измеряется, нужно просуммировать по  $\alpha$ , в случае же неполяризованного падающего состояния мы усредняем по двум равновероятным поляризациям  $\beta$ :

$$\begin{aligned} \left. \frac{d\sigma_{fi}}{d\Omega} \right|_{\text{неполяриз}} &= \frac{4Z^2\alpha^2 m^2}{|q|^4} \sum_{\alpha} \frac{1}{2} \sum_{\beta} |\bar{u}^{(\alpha)}(p_f) \gamma^0 u^{(\beta)}(p_i)|^2 = \\ &= \frac{4Z^2\alpha^2 m^2}{|q|^4} \frac{1}{2} \text{Sp} \left( \gamma^0 \frac{\not{p}_i + m}{2m} \gamma^0 \frac{\not{p}_f + m}{2m} \right). \end{aligned} \quad (2.129)$$

Здесь вновь использовано выражение (2.40). Теперь нам понадобятся тождества для следов  $\gamma$ -матриц. След произведения любого нечетного числа  $\gamma$ -матриц равен нулю. Для четного числа можно доказать по индукции следующее тождество:

$$\begin{aligned} \text{Sp}(\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{2n}) &= \alpha_1 \cdot \alpha_2 \text{Sp}(\alpha_3 \dots \alpha_{2n}) - \\ &- \alpha_1 \cdot \alpha_3 \text{Sp}(\alpha_2 \alpha_4 \dots \alpha_{2n}) + \dots \end{aligned}$$

В нашем случае эти свойства приводят к равенствам

$$\text{Sp} \gamma^0 \not{p}_i \gamma^0 \not{p}_f = 4(E_i E_f - p_i \cdot p_f + E_i E_f), \quad \text{Sp} \gamma^0 \gamma^0 = 4.$$

Нам понадобятся также кинематические соотношения

$$E_i = E_f = E, \quad p_i \cdot p_f = E^2 - p^2 \cos \theta = m^2 + 2E^2 \beta^2 \sin^2(\theta/2),$$

где  $\beta \equiv v/c = |\mathbf{p}|/E$  — начальная (или конечная) скорость, а

$$|q|^4 = 16|\mathbf{p}|^4 \sin^4(\theta/2) = 16\beta^2 E^2 p^2 \sin^4(\theta/2).$$

Окончательное выражение сечения рассеяния для неполяризованных частиц (сечение Мотта) запишется в виде

$$\left. \frac{d\sigma}{d\Omega} \right|_{\text{неполяриз}} = \frac{Z^2\alpha^2}{4p^2\beta^2 \sin^4(\theta/2)} [1 - \beta^2 \sin^2(\theta/2)]. \quad (2.130)$$

При  $\beta \rightarrow 0$  это выражение переходит в формулу Резерфорда. Заметим также, что релятивистская поправка  $[1 - \beta^2 \sin^2(\theta/2)](1 - \beta^2)^{-1}$  играет существенную роль в основном для рассеяния назад.

Этот результат получен для рассеяния электронов. Рассмотрим кратко рассеяние позитронов в том же самом кулоновском поле. Кулоновская сила притяжения теперь заменяется на силу отталкивания. В классической нерелятивистской механике мы снова приходим к формуле Резерфорда (этот замечательный результат является характерной чертой кулоновского поля). В на-

шем квантовом рассмотрении нам известно, что теория инвариантна относительно зарядового сопряжения. Рассеяние электрона зарядом  $-Ze$  есть то же самое, что и рассеяние позитрона зарядом  $+Ze$ . С другой стороны, в низшем порядке сечение рассеяния является четной функцией от  $Z$ . Поэтому формула для сечения Мотта в случае позитронов также справедлива.

Можно проверить это прямым расчетом; однако мы предпочитаем использовать теорию дырок. Позитрон в конечном состоянии с 4-импульсом  $p_f$  и поляризацией  $\alpha$  описывается решениями, соответствующими «падающим» волнам с отрицательными энергиями, причем эти решения распространяются назад во времени:

$$\psi^{(-)}(x) = e^{ip_f \cdot x} v^{(-\alpha)}(p_f), \quad p_f^0 > 0.$$

Таким образом, мы вновь приходим к выражению (2.116). Граничные условия на этот раз имеют вид

$$\begin{aligned} \psi^{(+)}(t_1, \mathbf{x}) &= 0, & t_1 &= -\infty, \\ \psi^{(-)}(t_2, \mathbf{x}) &= e^{ip_f \cdot x} v^{(-\alpha)}(p_f), & x^0 &= t_2 = +\infty. \end{aligned}$$

Повторяя этапы, которые привели нас от (2.122) к (2.125a), и обращая при этом внимание на знаки, получаем

$$S_{fi} = ie \int d^4z \left( \frac{m^2}{V^2 E_i E_f} \right)^{1/2} \bar{v}^{(-\beta)}(p_i) e^{i(p_f - p_i) \cdot z} A(z) v^{(-\alpha)}(p_f).$$

Это выражение согласуется с результатом, полученным прямым вычислением. Падающий позитрон (с точностью до фазы) описывается волновой функцией

$$\psi_i^c(z) = e^{-ip_i \cdot z} u^{(\beta)}(p_i) = C e^{-ip_i \cdot z} \bar{v}^{(-\beta)T}(p_i).$$

В соответствии с (2.125) рассеяние позитронов будет описываться амплитудой

$$\begin{aligned} S_{fi} &= ie \int d^4z \bar{\psi}_i^c(z) A(z) \psi_f^c(z) = \\ &= -ie \left( \frac{m^2}{V^2 E_i E_f} \right)^{1/2} \int d^4z v^{(-\alpha)T}(p_f) C^{-1} A C \bar{v}^{(-\beta)T}(p_i) e^{i(p_f - p_i) \cdot z} = \\ &= ie \left( \frac{m^2}{V^2 E_i E_f} \right)^{1/2} \int d^4z \bar{v}^{(-\beta)}(p_i) A v^{(-\alpha)}(p_f) e^{i(p_f - p_i) \cdot z}. \end{aligned} \quad (2.131)$$

Отсюда очевидно, что это выражение приводит к сечению рассеяния (2.128).

Предоставляем читателю рассмотреть поляризационные эффекты или поправки, обусловленные отдачей ядер. Напомним голько, что можно применить полезное понятие формфактора. Предположим, что мы изучаем рассеяние не на точечном заряде, а на распределении зарядов с конечными размерами, т. е. на ядре с конечным радиусом. Будем считать, что сферически-симметричное

распределение  $-Ze\rho(r)$  нормировано согласно условию

$$\int \rho(r) d^3r = 1.$$

Как и в (2.126), сечение рассеяния в низшем порядке по  $\alpha$  пропорционально величине  $|\tilde{V}(q)|^2$ , где  $\tilde{V}(q)$  — фурье-образ потенциала  $V(r)$ . Из уравнения Пуассона  $\Delta V = -\rho$  находим, что величина  $\tilde{V}(q)$  связана с формфактором

$$\tilde{\rho}(q) = \int \rho(r) e^{-iq \cdot r} d^3r$$

соотношением  $\tilde{V}(q) = (1/q^2) \tilde{\rho}(q)$ . Следовательно, сечение рассеяния должно быть исправлено в соответствии с выражением

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{d\sigma}{d\Omega} \Big|_{\text{Мотт}} |\tilde{\rho}(q)|^2. \quad (2.132)$$

#### 2.5.4. Метод собственного времени Фока—Швингера

В качестве дополнения к предыдущему изучению пропагаторов изложим здесь красивый метод, предложенный Фоком и Швингером. Мы используем этот метод, чтобы получить точные выражения дираковского пропагатора для внешних электромагнитных полей двух типов постоянного однородного поля и поля плоской волны, с которым мы уже сталкивались в классической теории.

Предположим, что мы ищем функцию Грина  $G(x, x')$  как решение уравнения

$$H(x, i\partial_x) G(x, x') = \delta^4(x - x') \quad (2.133)$$

где  $H$  — полином по  $\partial_x$ . Будем рассматривать  $H$  как гамильтониан, который описывает эволюцию некоторой системы в собственном времени. Предыдущее уравнение есть не что иное, как определение функции Грина для  $H(x, p)$  в  $x$ -представлении:

$$\begin{aligned} \langle x | x' \rangle &= \delta^4(x - x'), \\ [x^\mu, p^\nu] &= -ig^{\mu\nu}, \quad p_\mu = i\partial_\mu. \end{aligned} \quad (2.134)$$

Введем унитарный оператор эволюции  $U(x, x'; \tau)$ :

$$i \frac{\partial}{\partial \tau} U(x, x'; \tau) = H(x, p) U(x, x'; \tau) \quad (2.135)$$

с граничными условиями

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} U(x, x'; \tau) = \delta^4(x - x'), \quad (2.136a)$$

$$\lim_{\tau \rightarrow -\infty} U(x, x'; \tau) = 0. \quad (2.136b)$$

Мы имеем

$$U(x, x'; \tau) = \langle x | e^{-iH\tau} | x' \rangle = \langle x | U(\tau) | x' \rangle, \quad (2.137)$$

$$G(x, x') = -i \int_{-\infty}^0 d\tau U(x, x'; \tau). \quad (2.138)$$

Уравнение (2.135) можно переписать в очевидных обозначениях следующим образом:

$$\begin{aligned} i\partial_\tau \langle x | U(\tau) | x' \rangle &= \langle x | H(x, p) U | x' \rangle = \langle x | U(\tau) U^\dagger(\tau) H(x, p) U(\tau) | x' \rangle, \\ \text{или, так как} \quad i\partial_\tau \langle x(\tau) | x'(0) \rangle &= \langle x(\tau) | H(x(\tau), p(\tau)) | x'(0) \rangle. \end{aligned} \quad (2.139)$$



В благоприятных случаях мы можем решить уравнение относительно  $x(\tau)$  и  $p(\tau)$ , демонстрируя связь между квантовым и классическим подходами. Запишем гамильтониан  $H(x(\tau), p(\tau))$  как функцию соответствующим образом упорядоченных операторов  $x(\tau)$  и  $x'(0)$ :

$$\langle x(\tau) | H(x(\tau), p(\tau)) | x'(0) \rangle = F(x, x'; \tau) \langle x(\tau) | x'(0) \rangle.$$

Тогда уравнение для  $U(x, x'; \tau)$  становится обыкновенным линейным дифференциальным уравнением, которое можно проинтегрировать в виде

$$U(x, x'; \tau) = \exp \left[ -i \int_0^\tau d\tau' F(x, x'; \tau') \right] C(x, x'),$$

где  $C(x, x')$  необходимо еще определить таким образом, чтобы оператор  $U(x, x'; \tau)$  удовлетворял правильным соотношениям между координатой и импульсом; например,

$$\begin{aligned} [i\partial_\mu^x - eA_\mu(x)] \langle x(\tau) | x'(0) \rangle &= \langle x(\tau) | \pi_\mu(\tau) | x(0) \rangle, \\ \pi_\mu &\equiv p_\mu - eA_\mu, \\ [-i\partial_\mu^{x'} - eA_\mu(x')] \langle x(\tau) | x'(0) \rangle &= \langle x(\tau) | \pi_\mu(0) | x(0) \rangle. \end{aligned} \quad (2.140)$$

В случае дираковской частицы, взаимодействующей с внешним электромагнитным полем, нам нужно решить уравнение

$$[i\partial - eA(x) - m] S_A(x, x') = \delta^4(x - x').$$

Величина  $G_A(x, x')$ , определяемая соотношением

$$S_A(x, x') = [i\partial - eA(x) + m] G_A(x, x'), \quad (2.141)$$

удовлетворяет уравнению

$$HG_A \equiv \left[ (i\partial - eA)^2 - m^2 - \frac{e}{2} \sigma_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right] G_A(x, x') = \delta^4(x - x'). \quad (2.142)$$

В представлении Гейзенберга операторы  $x(\tau) = U^\dagger(\tau) x U(\tau)$  и  $\pi(\tau) = U^\dagger(\tau) \pi U(\tau)$  удовлетворяют соотношениям Эренфеста

$$\begin{aligned} \frac{dx_\mu(\tau)}{d\tau} &= i[H, x_\mu] = -2\pi_\mu, \\ \frac{d\pi_\mu(\tau)}{d\tau} &= i[H, \pi_\mu] = -2eF_{\mu\rho} \pi^\rho - ie\partial^\rho F_{\mu\rho} - \frac{e}{2} \partial_\mu F_{\rho\nu} \sigma^{\rho\nu}, \end{aligned} \quad (2.143)$$

поскольку  $[\pi_\mu, \pi_\nu] = -ieF_{\mu\nu}$ .

Рассмотрим вначале постоянное поле. В этом случае предыдущие уравнения принимают вид

$$\frac{dx_\mu}{d\tau} = -2\pi_\mu, \quad \frac{d\pi_\mu}{d\tau} = -2eF_{\mu\rho} \pi^\rho. \quad (2.144)$$

Эти уравнения легко проинтегрировать, используя матричные обозначения

$$\begin{aligned} \pi(\tau) &= e^{-2eF\tau} \pi(0), \\ x(\tau) - x(0) &= \left( \frac{e^{-2eF\tau} - 1}{eF} \right) \pi(0). \end{aligned}$$

Вычислим затем  $\pi(\tau)$  как функцию от  $x(\tau)$  и  $x(0)$ :

$$\pi(\tau) = -\frac{1}{2} eF e^{-eF\tau} [\text{sh}(eF\tau)]^{-1} [x(\tau) - x(0)].$$

Используя антисимметрию величины  $F$ , получаем

$$x^2(\tau) = [x(\tau) - x(0)] K [x(\tau) - x(0)],$$

где

$$K = (1/4) e^2 F^2 [\operatorname{sh}(eF\tau)]^{-2}.$$

Перегруппируем это выражение с учетом коммутационного соотношения

$$[x_\mu(\tau), x_\nu(0)] = i \left( \frac{e^{-2eF\tau} - 1}{eF} \right)_{\mu\nu}.$$

Окончательно получаем следующее выражение для  $H$ :

$$H = x(\tau) K x(\tau) - 2x(\tau) K x(0) + x(0) K x(0) - \frac{i}{2} \operatorname{Sp} [eF \operatorname{cth}(eF\tau)] - \frac{e}{2} \sigma_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - m^2. \quad (2.145)$$

Дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет  $U(x, x'; \tau)$ , запишется в виде

$$i\partial_\tau U(x, x'; \tau) = \left\{ -\frac{e}{2} \sigma_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - m^2 + (x-x') K (x-x') - \frac{i}{2} \operatorname{Sp} [eF \operatorname{cth}(eF\tau)] \right\} \times \\ \times U(x, x'; \tau).$$

Интегрируя это уравнение, получаем

$$U(x, x'; \tau) = C(x, x') \tau^{-2} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \operatorname{Sp} \ln [(eF\tau)^{-1} \operatorname{sh}(eF\tau)] \right\} \times \\ \times \exp \left[ \frac{i}{4} (x-x') eF \operatorname{cth}(eF\tau) (x-x') + \frac{i}{2} \sigma_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \tau + im^2 \tau \right]$$

Функция  $C(x, x')$  определяется соотношениями (2.140), из которых следуют уравнения

$$\left[ i\partial_\mu^x - eA_\mu(x) - \frac{eF_{\mu\nu}}{2} (x-x')^\nu \right] C(x, x') = 0, \\ \left[ -i\partial_\mu^{x'} - eA_\mu(x') + \frac{eF_{\mu\nu}}{2} (x-x')^\nu \right] C(x, x') = 0.$$

Решение этих уравнений записывается в виде

$$C(x, x') = C(x') \exp \left\{ -ie \int_{x'}^x d\xi [A(\xi) + (1/2) F(\xi - x')] \right\}.$$

Поскольку  $\operatorname{rot} [A_\mu(\xi) + (1/2) F_{\mu\nu}(\xi - x')^\nu] = 0$ , в этом выражении интеграл не зависит от пути интегрирования. Интегрируя вдоль прямой линии от  $x'$  к  $x$ , убеждаемся, что второй член не дает вклада вследствие антисимметрии функции  $F_{\mu\nu}$ , и мы можем написать

$$C(x, x') = C \exp \left[ -ie \int_{x'}^x d\xi \cdot A(\xi) \right].$$

Постоянная  $C$  определяется с помощью граничного условия (2.136а), откуда

$$C = -\frac{i}{(4\pi)^2}.$$

В заключение запишем выражение для пропагатора в постоянном поле:

$$S_A(x, x') = [i\partial_x - eA(x) + m] (-i) \int_{-\infty}^0 d\tau U(x, x'; \tau), \quad (2.141a)$$

где

$$U(x, x'; \tau) = \frac{-i}{(4\pi)^2 \tau^2} \exp \left\{ -ie \int_{x'}^x d\xi^\mu A_\mu(\xi) - \frac{1}{2} \text{Sp} \ln [(eF\tau)^{-1} \text{sh}(eF\tau)] + \right. \\ \left. + \frac{i}{4} (x-x') eF \text{cth}(eF\tau) (x-x') + \frac{i}{2} \sigma_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \tau + i(m^2 - ie)\tau \right\}. \quad (2.146)$$

Здесь присутствие члена  $-ie$  необходимо, чтобы удовлетворить условию (2.1366) Фазовый множитель  $\exp \left[ -ie \int d\xi^\mu A_\mu \right]$  обеспечивает для  $U$  калибровочную инвариантность; при  $A_\mu(x) \rightarrow A_\mu(x) + \partial_\mu \Lambda(x)$  имеем

$$U(x, x'; \tau) \rightarrow e^{-ie\Lambda(x)} U(x, x'; \tau) e^{ie\Lambda(x')}.$$

Обратимся теперь к случаю поля плоской волны. Вычисления здесь полностью аналогичны выполненным выше, и мы наметим лишь последовательность действий. Рассмотрим линейно-поляризованную плоскую волну и воспользуемся теми же обозначениями, что и в разд. 2.2.3.  $A_\mu = \epsilon_\mu f(\xi)$ , причем  $\xi = n \cdot x$ ,  $n^2 = 0$ ,  $F_{\mu\nu} = \phi_{\mu\nu}'(\xi)$ , где  $\phi_{\mu\nu} = n_\mu \epsilon_\nu - n_\nu \epsilon_\mu$ . Следует заметить, что  $\partial^\rho F_{\mu\rho} = 0$ . Таким образом, уравнения (2.143) принимают вид

$$\frac{dx_\mu}{d\tau} = -2\pi_\mu, \\ \frac{d\pi_\mu}{d\tau} = -2e\phi_{\mu\rho} \pi^{\rho\nu}(\xi) - \frac{e}{2} n_\mu \phi_{\rho\nu} \sigma^{\rho\nu} f'(\xi). \quad (2.147)$$

Замечая, что  $(d/d\tau)(\pi \cdot n) = 0$  и  $d\xi/d\tau = -2\pi \cdot n$ , а  $[\xi, d\xi/d\tau] = 0$ , сначала находим  $\xi$ :

$$\xi(\tau) = n \cdot x(\tau) = \xi(0) - 2\pi \cdot n\tau.$$

Затем проинтегрируем уравнение относительно  $\phi^{\nu\mu} \pi_\mu$  и получим

$$\phi^{\nu\mu} \pi_\mu = e n^\nu f(\xi) + C^\nu;$$

здесь  $C^\nu$  — постоянный оператор, который коммутирует с  $\pi \cdot n$ . Подставляя это выражение в (2.147) и интегрируя, получаем

$$-\frac{1}{2} \frac{dx_\mu(\tau)}{d\tau} = \pi_\mu(\tau) = \frac{1}{2\pi \cdot n} \left[ 2eC_\mu f(\xi) + e^2 n_\mu f^2(\xi) + \frac{e}{2} n_\mu \phi_{\rho\nu} \sigma^{\rho\nu} f'(\xi) \right] + D_\mu.$$

Здесь  $D_\mu$  — новый постоянный оператор, коммутирующий с  $\pi \cdot n$ . Вычислим далее  $x(\tau) - x(0)$  и исключим  $D_\mu$ .

$$\pi_\mu(\tau) = -\frac{x_\mu(\tau) - x_\mu(0)}{2\tau} + \frac{\tau}{[\xi(\tau) - \xi(0)]^2} \int_{\xi(0)}^{\xi(\tau)} d\xi \left[ 2eC_\mu f(\xi) + e^2 n_\mu f^2(\xi) + \right. \\ \left. + \frac{e}{2} n_\mu \phi_{\rho\nu} \sigma^{\rho\nu} f'(\xi) \right] - \frac{\tau}{\xi(\tau) - \xi(0)} \left\{ 2eC_\mu f[\xi(\tau)] + e^2 n_\mu f^2[\xi(\tau)] + \right. \\ \left. + \frac{e}{2} n_\mu \phi_{\rho\nu} \sigma^{\rho\nu} f'[\xi(\tau)] \right\}.$$

Это позволяет нам записать постоянную  $C_\mu$  в виде

$$C_\mu = \frac{1}{2\tau} \phi_{\mu\rho} [x^\rho(\tau) - x^\rho(0)] - \frac{en_\mu}{\xi(\tau) - \xi(0)} \int_{\xi(0)}^{\xi(\tau)} d\xi f(\xi).$$

После вычисления коммутаторов

$$\begin{aligned} [\xi(\tau), x_\mu(0)] &= 0, \\ [\xi(0), x_\mu(\tau)] &= 2in_\mu\tau, \\ [x_\mu(\tau), x^\mu(0)] &= -8i\tau \end{aligned}$$

можно записать гамильтониан

$$\begin{aligned} H = \frac{1}{4\tau^2} [x^2(\tau) - 2x(\tau) \cdot x(0) + x^2(0)] - \frac{2i}{\tau} - (e^2 \langle \delta f^2 \rangle + m^2) - \\ - \frac{e}{2} \phi_{\rho\nu} \sigma^{\rho\nu} \frac{f[\xi(\tau)] - f[\xi(0)]}{\xi(\tau) - \xi(0)}, \end{aligned} \quad (2.148)$$

где

$$\langle \delta f^2 \rangle = \int_{\xi(0)}^{\xi(\tau)} \frac{d\xi f^2(\xi)}{\xi(\tau) - \xi(0)} - \left[ \int_{\xi(0)}^{\xi(\tau)} \frac{d\xi f(\xi)}{\xi(\tau) - \xi(0)} \right]^2.$$

Оператор эволюции имеет вид

$$\begin{aligned} U(x, x'; \tau) = \frac{C(x, x')}{\tau^2} \exp \left\{ i \left[ \frac{(x-x')^2}{4\tau} + \tau (e^2 \langle \delta f^2 \rangle + m^2) + \right. \right. \\ \left. \left. + e\tau \frac{\phi_{\rho\nu} \sigma^{\rho\nu} f(\xi) - j(\xi')}{\xi - \xi'} \right] \right\}; \end{aligned}$$

здесь функция  $C(x, x')$  снова определяется соотношениями (2.140). Мы находим

$$\begin{aligned} C(x, x') = C(x') \times \\ \times \exp \left( -ie \int_{x'}^x dy_\mu \left\{ A^\mu(y) - \frac{\phi^{\mu\rho} (y_\rho - x'_\rho)}{n \cdot y - \xi'} \left[ \int_{\xi'}^{n \cdot y} \frac{du^\mu(u)}{n \cdot y - \xi'} - f(n \cdot y) \right] \right\} \right), \end{aligned}$$

где интеграл не зависит от пути интегрирования. Для прямой линии единственный остающийся в фазовом множителе член равен  $\exp \left[ -ie \int_{x'}^x dy_\mu A^\mu(y) \right]$ , и мы приходим к окончательному выражению

$$\begin{aligned} U(x, x'; \tau) = -\frac{i}{(4\pi)^2 \tau^2} \exp \left( i \left\{ \frac{(x-x')^2}{4\tau} + [e^2 \langle \delta f^2 \rangle + m^2 + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{e}{2} \phi_{\rho\nu} \sigma^{\rho\nu} \frac{f(\xi) - f(\xi')}{\xi - \xi'} - i\xi \right] \tau - e \int_{x'}^x dy_\mu A^\mu(y) \right\} \right). \end{aligned} \quad (2.149)$$

Это выражение напоминает классический результат, полученный в разд. 1.1.3. В случае периодической функции  $f(\xi)$  вкладом члена, пропорционального  $\phi_{\rho\nu} \sigma^{\rho\nu}$ , при усреднении по нескольким периодам можно пренебречь. В результате мы получаем сдвиг массы:

$$m_{\text{эфф}}^2 = m^2 + e^2 \langle \delta f^2 \rangle = m^2 + e^2 \overline{f^2}.$$

Обнаружить такой нелинейный эффект трудно; для этого требуются пучки очень высокой интенсивности, поскольку для монохроматической плоской волны частотой  $\omega/2\pi = c/\lambda$  и плотностью энергии  $\mathcal{E} = E^2 = f^2\omega^2 = \rho\hbar\omega$  относительный эффект равен

$$\frac{\Delta m^2}{m^2} = \frac{e^2 f^2}{m^2 c^2} = 4\pi\alpha\lambda_e^2 \frac{\rho c}{\omega} = 2\alpha\lambda_e^2 \lambda \rho.$$

Здесь  $\lambda_e$  — комптоновская длина волны электрона, а  $\rho$  — число фотонов на единицу объема в падающем пучке. В настоящее время наиболее мощные лазерные пучки еще не позволяют нам достигнуть значительной величины этого отношения.

## ПРИМЕЧАНИЯ

Материал, изложенный в этой главе, является довольно стандартным, и мы вряд ли сумели преподнести его иначе по сравнению с тем, как он излагается во многих прекрасных учебниках. См., например: *Bjorken J. D., Drell S. D. Relativistic Quantum Mechanics.* — New York: McGraw-Hill, 1964 [Имеется перевод: *Бьеркен Дж., Дрелл С. Релятивистская квантовая теория.* — М. Наука, 1978.], а также *Messiah A. Quantum Mechanics, vol. 2.* — Amsterdam North-Holland, Amsterdam, 1962. Великолепное описание теории дырок дал П. А. М. Дирак в своем докладе на Сольвевском конгрессе в 1934 г.; этот доклад опубликован в книге: *Quantum Electrodynamics/ed J. Schwinger.* — New York: Dover, 1958, в которую включены многие фундаментальные статьи по релятивистской квантовой теории поля. Теория пропагаторов рассмотрена в статье: *Feynman R. P.* — *Phys. Rev.*, 1949, v 76, p. 749 [Имеется перевод в сб.: *Новейшее развитие квантовой электродинамики.* — М.: ИЛ, 1954.], а метод собственного времени — в статье *Schwinger J.* — *Phys. Rev.*, 1951, vol 82, p. 664. Решение в случае дираковского электрона в плоской волне получено Д. М. Волковым (см. *Zs. Physik*, 1935, vol. 94, p. 25). Обзор решений уравнения Клейна — Гордона можно найти в статье: *Feschbach H., Villars F.* — *Rev Mod Phys.*, 1958, vol 30, p. 24. Нерелятивистский предел уравнения Дирака изучали Фолди и Ваутхайзен (см. *Phys. Rev.*, 1950, vol. 78, p. 29). Полное рассмотрение вопроса о спектре связанного состояния дано в книге: *Bethe H. A., Salpeter E. E. Quantum Mechanics of One and Two Electron Atoms.* — Berlin: Springer-Verlag, 1957 [Имеется перевод: *Бете Г., Солтпер Э. Квантовая механика атомов с одним и двумя электронами.* — М.-Л.: Физматгиз, 1960.] См. также книгу: *Rose M. E. Relativistic Electron Theory.* — New York: John Wiley, 1961. Полуклассическая интерпретация лэмбовского сдвига дается в статье: *Welton T. A.* — *Phys. Rev.*, 1948, vol. 74, p. 1157. С теорией двухкомпонентного нейтрино можно познакомиться в статье: *Feynman R. P., Gell-Mann M.* — *Phys. Rev.*, 1958, vol. 109, p. 193.

Описание релятивистской квантовой кинематики см в книге *Moussa P., Stora R. Analysis of Scattering and Decay/ed. M. Nikolic.* — New York: Gordon and Breach, 1968. К этой работе мы отсылаем и интересующихся дополнительными деталями теории представлений группы Пуанкаре и их приложений.

## ПРИМЕЧАНИЕ РЕДАКТОРА ПЕРЕВОДА

Последовательное изложение вопросов, связанных с релятивистской инвариантностью, представлениями группы Пуанкаре, а также подробные литературные примечания по этому кругу вопросов даны в книге: *Боголюбов Н. Н., Логунов А. А., Тодоров И. Т. Основы аксиоматического подхода в квантовой теории поля.* — М.: Наука, 1969. Метод собственного времени см. в книге: *Фок В. А. Работы по квантовой теории поля.* — Л.: Изд-во ЛГУ, 1957.

## Глава 3

# КВАНТОВАНИЕ; СВОБОДНЫЕ ПОЛЯ

В настоящей главе мы изучим каноническое квантование свободных полей. Исходя из аналогии с механической системой последовательно рассматриваются нейтральные и заряженные скалярные поля. При квантовании электромагнитного поля мы применим индефинитную метрику Гупты—Блейлера, причем особое внимание будет уделено калибровочной инвариантности и проблемам, возникающим в связи с равенством нулю массы фотона. Будет дано описание эффекта Казимира, убедительно свидетельствующего о наличии вакуумных флуктуаций. В случае полей Дирака мы покажем, что стабильность вакуума и принцип Паули приводят к квантованию, основанному на правилах антикоммутации. К числу главных выводов этой главы относятся также существование связи между спином и статистикой, а также *CPT*-теорема.

### 3.1. КАНОНИЧЕСКОЕ КВАНТОВАНИЕ

В нерелятивистском случае мы получаем уравнение Шредингера, заменяя классические наблюдаемые операторами, а скобки Пуассона—коммутаторами. Как обычно, сопряженные импульсы являются производными функции Лагранжа по скоростям. В гл. 1 показано, что эту классическую процедуру можно обобщить на бесконечные системы, если дискретные индексы заменить непрерывными, а символ Кронекера— $\delta$ -функцией Дирака. Обобщим процедуру квантования непосредственно на этот случай, не слишком заботясь вначале о деталях. Единственно, что требует осторожности,— это необходимость сохранить лоренц-инвариантность. В частном случае электродинамики лагранжиан, по крайней мере классический, известен. После квантования нам пужно выяснить, какую роль играет лагранжиан в теории. Рассмотрим этого вопроса мы займемся в гл. 9 (см. т. 2 настоящей книги), в которой предложен иной плодотворный подход к квантованию с применением методов континуального интегрирования.

Очевидно, что последовательная интерпретация квантовой теории опирается на динамическое описание, которое она задает (например, это описание может приводить к возникновению связанных состояний и т. п.). К сожалению, в большинстве случаев

нам не удастся решить уравнения движения и придется рассматривать взаимодействия, используя различные приближения. Это главная трудность, которая в некоторых случаях не позволяет нам достичь четкого и последовательного описания. Благодаря перенормировкам мы можем частично преодолеть эту трудность. При этом некоторые из взаимодействий оказываются скрытыми в силу того, что наблюдаемые величины выражаются через измеряемые массы и константы взаимодействия.

Уайтман предложил более последовательный, но более трудный аксиоматический подход. В данном подходе квантовая теория поля строится на основе нескольких четко сформулированных аксиом, полученных путем идеализации физических требований<sup>1)</sup>. Для того чтобы раскрыть содержание теории, приходится привлекать сложные математические построения. Решить эту задачу можно двумя главными методами. В рамках первого из них подробно изучают функции Грина, а именно их аналитические свойства в импульсном пространстве, алгебраические свойства и скачки. В конечном счете можно прийти к теории рассеяния, после того как будут точно определены асимптотические состояния. Более претенциозная программа включает явное построение фундаментальных операторов, таких, как гамильтониан, с целью исследования их спектральных свойств. Последние позволяют получить интерпретацию в терминах частиц, связанных состояний, состояний рассеяния и т. д.

Мы ставим перед собой более скромную цель и будем следовать отчасти по исторически сложившемуся пути, объединяющему приближенные методы, физическую интуицию и математическую дедукцию. Можно надеяться, что эти разные методы когда-нибудь объединятся и теория обретет более строгую основу.

На первый взгляд может показаться, что теорию поля нельзя интерпретировать, исходя из представления о микрообъектах,

<sup>1)</sup> Причиной возникновения аксиоматического подхода явилось отсутствие убедительного и математически последовательного решения ряда проблем квантовой теории поля, в частности, упомянутого выше в тексте вопроса о роли лагранжиана. Различие между аксиоматическими подходами обусловлено, в первую очередь, выбором основных физических величин. Главная цель аксиоматического подхода — дать ответ на вопрос: существует ли нетривиальная теория поля, совместимая с общими принципами?

В середине 50-х годов в аксиоматической квантовой теории поля сложились три направления. Кроме упомянутого авторами книги подхода Уайтмана, существует подход Боголюбова, в котором особую роль играет условие причинности. Данный подход в большей степени, чем другие, связан с наблюдаемыми величинами. Именно в рамках этого подхода получено строгое доказательство дисперсионных соотношений. Третий подход связан с именами Лемана, Симанзика и Циммермана.

В последующие годы Хаагом и Араки был развит так называемый алгебраический подход, в котором основным объектом являются операторы, соответствующие наблюдаемому. (См. примечание редактора перевода, в конце настоящей главы.) — *Прим. ред.*

которые мы идентифицируем как частицы. В теории поля может возникнуть такая же путаница, как и в теории света с корпускулярно-волновым дуализмом, о чем свидетельствуют долгие споры по этому вопросу. Квантовая теория сумела существенно прояснить данный вопрос, и в этом ее огромная заслуга. Однако наивные представления, основанные на классических взглядах, имеют ограничения, связанные, в частности, с понятием тождественных частиц. Этот аспект теории находит свое отражение в структуре гильбертова пространства состояний, построенных для свободных полей, т. е. в структуре пространства Фока.

Мы рассмотрим здесь лишь локальные теории. Смысл понятия локальности будет проясняться по мере того, как мы будем продвигаться вперед. Это понятие опирается на предположение о том, что пространственно-временные измерения возможны в произвольно малых областях. Из лоренц-инвариантности и слабой формы причинности следует, что измерения, разделенные пространственно-подобным интервалом, не могут влиять друг на друга. Иными словами, 1) локальные наблюдаемые существуют и 2) локальные наблюдаемые, относящиеся к областям, разделенным пространственно-подобным интервалом, коммутируют. Экспериментально это находит лишь косвенные подтверждения, поскольку не существует установок, сравнимых с ядерными и субъядерными размерами. Нам приходится с необходимостью проводить измерения с помощью объектов той же природы, что и исследуемые объекты. Замечательно, однако, что принцип локальности не нарушается вплоть до расстояний  $\hbar c/\sqrt{s}$ , где  $s$  — квадрат энергии сталкивающихся частиц в системе центра масс в современных ускорителях (в установке ISR в ЦЕРН'е  $\sqrt{s} \leq 60$  ГэВ). Эти расстояния ( $\sim 10^{-15}$  см) малы<sup>1)</sup> по сравнению с размерами атомов ( $10^{-8}$  см).

Среди наиболее замечательных следствий, вытекающих из объединения принципа микропричинности с релятивистской инва-

<sup>1)</sup> На сегодняшний день максимальная энергия достигнута на ускорительной установке SPS в ЦЕРН'е ( $\sqrt{s} \approx 540$  ГэВ). К концу нынешнего десятилетия в различных центрах мира предполагается ввести в действие ряд ускорителей «нового поколения» с существенно большей энергией. В частности, ускорительно-накопительный комплекс в Серпухове рассчитан на энергию  $\sqrt{s} \approx 6000$  ГэВ.

Безусловно, с ростом энергии мы получаем возможность экспериментальной проверки локальных свойств теории на все меньших расстояниях. Однако проблема эта не является простой. Прежде всего следует подчеркнуть, что мерой расстояний, зондируемых в опытах на ускорителях, является не энергия в системе центра масс, а величина переданного импульса в процессах, параметры которых реально измеряются. При этом требуется высокая точность измерений. Сравнивая результаты измерений с такими предсказаниями теории, которые опираются на требование локальности, мы можем делать выводы о выполнении последнего (См. примечание редактора перевода в конце настоящей главы.) — *Прим. ред.*



риантностью, назовем связь спина со статистикой (фермионы — частицы с полуцелым спином, бозоны — частицы с целым спином) и *CPT*-инвариантность. Последняя включает произведение зарядового сопряжения *C*, четности *P* и инверсии времени *T*. Это означает, что существуют античастицы, имеющие такие же кинематические инварианты, как и соответствующие им частицы, но противоположные по знаку аддитивные квантовые числа (электрический, барионный, лептонный заряды и т. п.).

### 3.1.1. Общая формулировка

Пусть  $\varphi_\alpha(x)$  — это поля, динамику которых мы намереемся исследовать. Индекс  $\alpha$  обозначает внутренние (заряды и т. п.) или кинематические характеристики (такие, как индексы Лоренца). Предположим на время, что на рассматриваемые поля не наложены связи (которые сокращали бы число степеней свободы). Мы не будем также пока обсуждать поля с полуцелым спином, правильная трактовка которых требует специального рассмотрения (см. раздел 3.3).

Из классической функции Лагранжа для фиксированного момента времени

$$L(t) = \int d^3x \mathcal{L}(\varphi, \partial\varphi) \quad (3.1)$$

получаем сопряженные поля

$$\pi_\alpha(t, \mathbf{x}) = \frac{\delta L(t)}{\delta [\partial_0 \varphi_\alpha(t, \mathbf{x})]} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial [\partial_0 \varphi_\alpha(t, \mathbf{x})]}. \quad (3.2)$$

Чтобы построить оператор Гамильтона  $H$ , заменим  $c$ -числовые поля операторами, удовлетворяющими каноническим одновременным коммутационным соотношениям

$$[\varphi_\alpha(t, \mathbf{x}), \pi_\beta(t, \mathbf{y})] = i\delta_{\alpha\beta}\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y}), \quad (3.3)$$

причем коммутаторы  $[\varphi, \varphi]$  и  $[\pi, \pi]$  равны нулю. Выражая с помощью (3.2) величину  $\partial_0 \varphi$  через  $\pi$  и  $\varphi$ , находим гамильтониан  $H$ :

$$H = \int d^3x \left[ \sum_\alpha \pi_\alpha(t, \mathbf{x}) \partial_0 \varphi_\alpha(t, \mathbf{x}) - \mathcal{L}(\varphi, \partial\varphi) \right]. \quad (3.4)$$

Рассмотренная нами процедура имеет недостаток, связанный с упорядочением операторов. Кроме того, умножение полевых операторов, заданных в одной и той же точке, приводит к новым трудностям, в чем мы скоро убедимся. Оба этих аспекта связаны между собой.

Необходимо подчеркнуть, что при записи соотношения (3.3) мы не определили, в каком гильбертовом пространстве действуют указанные там операторы. В случае свободных полей, как мы

увидим, этот вопрос решается просто, и поэтому мы не будем на нем останавливаться при небольших отклонениях от свободных полей. Однако в общем случае ответ на этот вопрос не является тривиальным, и, чтобы получить его, требуется некоторое знание динамики. Вот почему динамика в известной степени влияет на саму структуру теории

Предположим для определенности, что имеется только одно вещественное поле  $\varphi$  в классической теории, и, следовательно, эрмитово поле  $\varphi$  в квантовой теории с лагранжианом

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial\varphi)^2 - V(\varphi), \quad (3.5)$$

где  $V$  — гладкая функция (например, полином). Классические уравнения движения записываются в виде

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} \equiv \square \varphi + \frac{dV(\varphi)}{d\varphi} = 0. \quad (3.6)$$

В случае когда  $V$  сводится к квадратичному члену  $V(\varphi) = (m^2/2)\varphi^2$ , мы имеем

$$\mathcal{L}(\varphi) = \frac{1}{2} (\partial\varphi)^2 - \frac{1}{2} m^2 \varphi^2, \quad (3.7)$$

откуда следует уравнение Клейна—Гордона

$$(\square + m^2)\varphi = 0, \quad (3.8)$$

которое будет интерпретироваться здесь как уравнение классического поля, а не как релятивистское обобщение уравнения Шредингера. Для произвольного  $V(\varphi)$ , т. е. для произвольного самодействия без производных, сопряженный импульс  $\pi$  дается выражением

$$\pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 \varphi)} = \partial_0 \varphi, \quad (3.9)$$

так что гамильтониан, выраженный через  $\varphi$  и  $\pi$ , запишется в виде

$$H = \int d^3x \left\{ \frac{1}{2} [\pi^2 + (\nabla\varphi)^2] + V(\varphi) \right\}, \quad (3.10)$$

а в простейшем случае квадратичного  $V(\varphi)$ , определяемого из (3.7), мы имеем

$$H = \int d^3x \frac{1}{2} [\pi^2 + (\nabla\varphi)^2 + m^2\varphi^2]. \quad (3.11)$$

Здесь не возникает проблема упорядочения операторов. Следовательно, единственным источником затруднений может оказаться умножение операторов, заданных в одной и той же точке. Рас-

смотрим сначала случай, когда гамильтониан определяется формулой (3.11). Мы узнаем в нем простую систему связанных гармонических осцилляторов. Для того чтобы дать физическую интерпретацию такой системы, представим себе, что пространство одномерно и что координата  $x$  принимает не непрерывные, а лишь дискретные значения, кратные некоторой элементарной длине, принимаемой за единицу. В этом случае выражение (3.11) заменяется на следующее:

$$H = \frac{1}{2} \sum_{-\infty}^{+\infty} [\pi_n^2 + (\varphi_n - \varphi_{n-1})^2 + m^2 \varphi_n^2], \quad (3.12)$$

$$[\varphi_n, \varphi_{n'}] = [\pi_n, \pi_{n'}] = 0, \quad [\varphi_n, \pi_{n'}] = i\delta_{nn'}.$$

Физическая модель, соответствующая гамильтониану (3.12), представляла бы собой колебания одномерного «кристалла», причем  $\varphi_n$  описывало бы смещение  $n$ -го атома, а  $\pi_n$  соответствовало бы сопряженной переменной. Каждый отдельный осциллятор с возвращающей силой, обусловленной слагаемым  $m^2 \varphi_n^2$ , связан со своими ближайшими соседями благодаря наличию в потенциальной энергии члена  $(\varphi_n - \varphi_{n \pm 1})^2$ . При изучении такой системы естественно перейти к нормальным колебаниям. Учитывая дискретную трансляционную инвариантность гамильтониана  $H$ , запишем следующее преобразование Фурье:

$$\begin{aligned} \varphi_n &= \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{dk}{2\pi} e^{ikn} \tilde{\varphi}(k), & \pi_n &= \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{dk}{2\pi} e^{ikn} \tilde{\pi}(k), \\ \tilde{\varphi}^\dagger(k) &= \tilde{\varphi}(-k), & \tilde{\pi}^\dagger(k) &= \tilde{\pi}(-k). \end{aligned} \quad (3.13)$$

Коммутационные соотношения принимают вид

$$\begin{aligned} [\tilde{\varphi}(k), \tilde{\varphi}(k')] &= [\tilde{\pi}(k), \tilde{\pi}(k')] = 0, \\ [\tilde{\varphi}(k), \tilde{\pi}(-k')] &= i \sum_n e^{-i(k-k')n}. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Последнюю сумму можно записать в виде  $2\pi \sum_n \delta(k - k' + 2\pi n)$ .

При этом если  $\tilde{\varphi}$  и  $\tilde{\pi}$  продолжить как периодические функции от  $k$ , то эта сумма сведется к величине  $2\pi \delta(k - k')$ . Используя (3.13), получаем следующее выражение для эрмитова гамильтониана:

$$H = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{dk}{2\pi} \{ \tilde{\pi}^\dagger(k) \tilde{\pi}(k) + \tilde{\varphi}^\dagger(k) [m^2 + 2(1 - \cos k)] \tilde{\varphi}(k) \}. \quad (3.15)$$

Чтобы отождествить его с суммой по отдельным несвязанным осцилляторам, положим

$$\begin{aligned}\omega_k &= \omega_{-k} = \sqrt{m^2 + 2(1 - \cos k)}, \\ a_k &= \frac{1}{\sqrt{4\pi\omega_k}} [\omega_k \tilde{\varphi}(k) + i\tilde{\pi}(k)], \\ a_k^\dagger &= \frac{1}{\sqrt{4\pi\omega_k}} [\omega_k \tilde{\varphi}^\dagger(k) - i\tilde{\pi}^\dagger(k)], \\ [a_k, a_{k'}^\dagger] &= \delta(k - k').\end{aligned}\quad (3.16)$$

Операторы  $a_k^\dagger$  и  $a_k$  представляют собой операторы рождения и уничтожения моды  $k$  с энергией  $\omega_k$ . Гамильтониан  $H$  принимает вид

$$H = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{+\pi} dk \omega_k (a_k^\dagger a_k + a_k a_k^\dagger) = \int_{-\pi}^{+\pi} dk H_k, \quad (3.17)$$

а поля записываются следующим образом:

$$\begin{aligned}\varphi_n &= \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{dk}{\sqrt{4\pi\omega_k}} (a_k e^{ikn} + a_k^\dagger e^{-ikn}), \\ \pi_n &= -i \int_{-\pi}^{+\pi} dk \sqrt{\frac{\omega_k}{4\pi}} (a_k e^{ikn} - a_k^\dagger e^{-ikn}) = \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \left[ \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{dk}{\sqrt{4\pi\omega_k}} (a_k e^{-i\omega_k t + ikn} + a_k^\dagger e^{i\omega_k t - ikn}) \right]_{t=0}.\end{aligned}\quad (3.18)$$

Операторы  $a_k$  и  $a_k^\dagger$  называются операторами уничтожения и рождения, поскольку если  $|E\rangle$  — собственное состояние гамильтониана  $H$ , отвечающее энергии  $E$ , то справедливы следующие соотношения:

$$\begin{aligned}H a_k |E\rangle &= E a_k |E\rangle + [H, a_k] |E\rangle = (E - \omega_k) a_k |E\rangle, \\ H a_k^\dagger |E\rangle &= E a_k^\dagger |E\rangle + [H, a_k^\dagger] |E\rangle = (E + \omega_k) a_k^\dagger |E\rangle.\end{aligned}\quad (3.19)$$

В этой механической модели моду колебаний  $k$ , отвечающую энергии  $\omega_k$ , мы интерпретируем как когерентное квантованное колебание атомов решетки, или фонон. Здесь становится ясной связь между частицами (фононами) и полями ( $\varphi_n$  — смещение  $n$ -го атома). Руководствуясь физической интуицией, можно было бы сначала рассмотреть состояния кристалла, описываемые волновой функцией, получаемой посредством диагонализации поля:

$$|y\rangle = |\{y_n\}\rangle, \quad \varphi_n |y\rangle = y_n |y\rangle.$$

Но мы поступим иначе, а именно построим набор состояний как фононные возбуждения вакуума  $|0\rangle$ . Мы сразу же наталкиваемся на трудность, поскольку энергия основного состояния, т. е. наименьшее собственное значение гамильтониана, в действительности бесконечна. К энергии нулевых колебаний каждая мода  $k$  добавляет величину  $\omega_k/2$ . Это согласуется с соотношением неопределенностей, так как каждый осциллятор обладает минимальным разбросом импульса, отвечающим его потенциальной энергии. Вследствие того, что мы имеем континуум мод, на каждый интервал  $(k, k+dk)$  приходится бесконечная энергия. Это свойство связано с бесконечными размерами системы. В самом деле, поскольку для любого  $k$

$$a_k|0\rangle=0, \quad \langle 0|a_k^\dagger=0, \quad (3.20)$$

мы имеем

$$\langle 0|H|0\rangle = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{+\pi} dk \omega_k \langle 0|a_k a_k^\dagger|0\rangle = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{+\pi} dk \omega_k \langle 0|[a_k, a_k^\dagger]|0\rangle;$$

последний интеграл не имеет смысла, так как  $[a_k, a_k^\dagger] = \delta(0)1$ . Однако, если размеры кристалла конечны ( $-N \leq n \leq N$ ), зададим, используя периодическую структуру, периодические граничные условия, отождествляя узлы  $n$  и  $n+p(2N+1)$ . При этом волновой вектор  $k$  будет принимать значения  $k = [2\pi/(2N+1)]q$ , где  $q$  — целое число, причем  $-N \leq q \leq N$ , и энергия основного состояния  $(N/2N) \sum_{q=-N}^{+N} \omega_q$  будет конечной.

Ясно, что  $(1/2N) \sum_{q=-N}^{+N} \omega_q$  имеет конечный предел при  $N \rightarrow \infty$ .

Отсюда следует, что энергия основного состояния действительно пропорциональна размерам системы.

Взяв дискретную, а не непрерывную модель, мы ввели в импульсном пространстве зону Бриллюэна  $-\pi \leq k \leq \pi$ , что эквивалентно ультрафиолетовому обрезанию в исходной модели. Напомним читателю, что выражение «ультрафиолетовая катастрофа» связано с расходящимся вкладом высокочастотных мод электромагнитного поля в тепловое излучение абсолютно черного тела. Пространственное обрезание позволяет далее однозначно определить оператор Гамильтона. Это имеют в виду, когда говорят, что система находится в ящике. Однако можно использовать следующую схему. До тех пор пока мы не разрушим кристалл, мы не можем измерить энергию основного состояния. В теории поля основное состояние интерпретируется как вакуум, который еще труднее разрушить! Обмены энергией с кристаллом не чувствительны к выбору начала отсчета. Мы примем, что основное состояние имеет нулевую энергию, и переопределим гамильтониан

следующим образом:

$$\begin{aligned}
 H &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{+\pi} dk \omega_k [(a_k^\dagger a_k + a_k a_k^\dagger) - \langle 0 | (a_k^\dagger a_k + a_k a_k^\dagger) | 0 \rangle] = \\
 &= \int_{-\pi}^{+\pi} dk \omega_k a_k^\dagger a_k.
 \end{aligned} \tag{3.21}$$

В релятивистских теориях мы обязательно должны проверить, что эта процедура не нарушает лоренц-ковариантности.

В выражении (3.21) операторы рождения и уничтожения расположены в «нормальном порядке» — последние справа от первых. Эта форма записи называется также упорядочением Вика и обозначается двоеточиями:

$$: \frac{1}{2} (a_k^\dagger a_k + a_k a_k^\dagger) : \equiv a_k^\dagger a_k.$$

Заметим, что под знаком нормального упорядочения операторы коммутируют и что в нашем определении учтено основное состояние свободного поля.

Если мы восстановим постоянную решетки  $a$ , то для значений  $|k|$ , много меньших величины  $\pi/a$ , отвечающей границе зоны Бриллюэна, частота  $\omega_k$  приближенно равна

$$\omega_k = \sqrt{m^2 + (2/a^2)(1 - \cos ak)} \rightarrow \sqrt{m^2 + k^2}. \tag{3.22}$$

Это выражение, если  $k$  интерпретировать как импульс фонона, совпадает с законом дисперсии в релятивистской механике. В физике твердого тела величина  $k$  является лишь квазиимпульсом, поскольку она определена с точностью до величин, кратных  $2\pi/a$ .

В рамках теории, в которой динамика системы описывается соотношениями (3.12), фононы являются хорошо определенными объектами, причем их число сохраняется, в том смысле, что оператор

$$N = \int_{-\pi}^{+\pi} dk a_k^\dagger a_k \tag{3.23}$$

коммутирует с гамильтонианом.

Суперпозиция нескольких колебательных мод дает состояние, в котором индивидуальность фононов ограничена, тогда как атомы в различных узлах решетки хорошо различимы (например, в одном из узлов можно поместить примесь). В действительности фононы ведут себя как бозонная система, что становится очевидным, если включить взаимодействие. Например, можно рассмотреть добавочный ангармонический член в энергии или связать кристалл с термостатом.

Симметрия Бозе проявляется, когда мы строим состояния, действуя операторами рождения на нормированный вакуум  $|0\rangle$ . К сожалению, состояние  $a_k^\dagger|0\rangle$  ненормируемо, поскольку вследствие бесконечных размеров системы  $\langle 0|a_k a_k^\dagger|0\rangle = \langle 0|[a_k, a_k^\dagger]|0\rangle = \infty$ , о чем упоминалось выше. Однако можно построить волновой пакет, образуя линейную суперпозицию

$$a_j^\dagger|0\rangle = \int_{-\pi}^{+\pi} dk f(k) a_k^\dagger|0\rangle,$$

где функцию  $f(k)$  можно выбрать таким образом, что она будет иметь ярко выраженный максимум в точке  $\bar{k}$ , но при этом будет выполняться условие

$$\begin{aligned} \langle 0|a_j a_j^\dagger|0\rangle &= \int_{-\pi}^{+\pi} dk_1 \int_{-\pi}^{+\pi} dk_2 f^*(k_1) f(k_2) \langle 0|a_{k_1} a_{k_2}^\dagger|0\rangle = \\ &= \int_{-\pi}^{+\pi} dk |f(k)|^2 < \infty. \end{aligned}$$

Иными словами,  $f(k)$  должна быть квадратично-интегрируемой. Основные операторы  $a_k$  и  $a_k^\dagger$  должны быть сглажены пробными функциями, чтобы получались разумные выражения; эти функции называются операторно-значными обобщенными функциями. Идеализированное представление о волне, имеющей определенный импульс  $k$ , следует считать упрощением, когда разброс  $\Delta k$  (или  $\Delta\omega_k$ ) пренебрежимо мал по сравнению с рассматриваемыми в задаче импульсами (или энергиями). Например, в кристалле разброс  $\Delta k$  ограничен снизу величиной  $(Na)^{-1}$ , эффект, который можно иногда наблюдать. И даже в трансляционно-инвариантном мире геометрия экспериментальной установки всегда приводит к эффекту конечного размазывания.

Состояние  $a_j^\dagger|0\rangle$  следует интерпретировать как одночастичное (фононное) состояние. Чтобы построить полное гильбертово пространство состояний, образуемое векторами, такими, как

$$|r\rangle = a_{j_1}^\dagger a_{j_2}^\dagger \dots a_{j_r}^\dagger |0\rangle, \quad (3.24)$$

мы используем обычную математическую процедуру, образуя линейные суперпозиции и их пополнение Коши. Построенное таким образом пространство называется пространством Фока. Рассмотрим действие операторов  $N$  и  $H$  на состояние  $|r\rangle$ . Предположим, что волновые функции  $f_s$  имеют ярко выраженный максимум в точке  $k_s$ . Тогда

$$N|r\rangle = r|r\rangle, \quad H|r\rangle \approx \left( \sum_1^r \omega_{k_s} \right) |r\rangle. \quad (3.25)$$

Следовательно, мы имеем фоновое состояние  $r$  с почти определенной энергией. Рассмотрим более подробно соответствующую ему волновую функцию. Используя коммутативность операторов рождения, мы можем записать

$$\begin{aligned} |r\rangle &= \int_{-\pi}^{+\pi} dk_1 \dots \int_{-\pi}^{+\pi} dk_r f_1(k_1) \dots f_r(k_r) a_{k_1}^\dagger \dots a_{k_r}^\dagger |0\rangle = \\ &= \int_{-\pi}^{+\pi} dk_1 \dots \int_{-\pi}^{+\pi} dk_r \frac{1}{r!} \sum_{\alpha} f_1(k_{\alpha_1}) \dots f_r(k_{\alpha_r}) a_{k_1}^\dagger \dots a_{k_r}^\dagger |0\rangle, \end{aligned} \quad (3.26)$$

где в последнем подынтегральном выражении сумма включает все перестановки  $\alpha$  набора целых чисел  $(1, \dots, r)$ . Можем ли мы считать, что  $F_{NS}(k_1, \dots, k_r) = f_1(k_1) \dots f_r(k_r)$  или что

$$F_S(k_1, \dots, k_r) = \frac{1}{r!} \sum_{\alpha} f_1(k_{\alpha_1}) \dots f_r(k_{\alpha_r}) \quad (3.27)$$

является волновой функцией данного состояния с точностью до нормировочного множителя? Такой вопрос имел бы смысл, если бы существовала наблюдаемая с различными средними значениями для различных волновых функций. Однако в действительности это не так. В самом деле, даже если с самого начала ввести несимметричное ядро  $F_{NS}$  в представлении состояния  $|r\rangle$ , коммутация операторов рождения симметризует его автоматически. Фононы представляют собой тождественные частицы, подчиняющиеся статистике Бозе в силу основных коммутационных соотношений (3.12).

Чтобы получить нормированное  $r$ -частичное состояние, предположим, например, что одночастичные волновые функции  $f_s(k)$  ортонормированы:

$$\int_{-\pi}^{+\pi} dk f_s^*(k) f_t(k) = \delta_{st}. \quad (3.28)$$

Если  $\langle r|r\rangle = 1$ , то

$$|r\rangle = \lambda \int_{-\pi}^{+\pi} dk_1 \dots \int_{-\pi}^{+\pi} dk_r f_1(k_1) \dots f_r(k_r) a_{k_1}^\dagger \dots a_{k_r}^\dagger |0\rangle.$$

Следовательно,

$$1 = \langle r|r\rangle = |\lambda|^2 \int_{-\pi}^{+\pi} dk_1 \dots \int_{-\pi}^{+\pi} dk_r' f_1^*(k_1) \dots f_r(k_r') \langle 0| a_{k_r} \dots a_{k_1}^\dagger |0\rangle. \quad (3.29)$$

Переноса каждый оператор  $a_k$  вправо и используя соотношение  $a_k a_k^\dagger = a_k^\dagger a_k + \delta(k-k')$  вместе с условием (3.28), сразу получаем

$$|\lambda|^2 = 1, \quad (3.30)$$



откуда следует, что величину  $\lambda$  можно считать равной фазовому множителю. Однако, если  $r_1$  одночастичных волновых функций равны  $f_1$ ,  $r_2$  одночастичных волновых функций равны  $f_2$  и т. д., причем  $f$  — по-прежнему ортонормированные функции, не трудно показать, что правильно нормированное состояние  $|r\rangle$  записывается в виде

$$|r\rangle \equiv |\{r_1, r_2, \dots\}\rangle \equiv \frac{1}{\sqrt{r_1! r_2! \dots}} \int_{-\pi}^{+\pi} dk_1 \dots \int_{-\pi}^{+\pi} dk_r f_1(k_1) \dots f_1(k_{r_1}) f_2(k_{r_1+1}) \dots \dots f_2(k_{r_1+r_2}) \dots a_{k_1}^\dagger \dots a_{k_r}^\dagger |0\rangle. \quad (3.31)$$

В более общем случае, если  $F(k_1, \dots, k_r)$  — симметричная функция, нормированное  $r$ -частичное состояние принимает вид

$$|r\rangle = \lambda \int_{-\pi}^{+\pi} dk_1 \dots \int_{-\pi}^{+\pi} dk_r F(k_1, \dots, k_r) a_{k_1}^\dagger \dots a_{k_r}^\dagger |0\rangle, \quad (3.32)$$

$$|\lambda|^{-2} = r! \int_{-\pi}^{+\pi} dk_1 \dots \int_{-\pi}^{+\pi} dk_r |F(k_1, \dots, k_r)|^2.$$

Мы предлагаем читателю в качестве интересного упражнения вычислить волновую функцию состояния с определенным числом фононов, и в частности волновую функцию основного состояния, в базисе, который диагонализует поле

Каноническое квантование выполнено для фиксированного момента времени, например при  $t = 0$ . Однако теория является инвариантной по отношению к временным трансляциям. Следовательно, можно было бы выбрать любой другой момент времени  $t$  и использовать операторы  $\varphi_n(t)$ ,  $\pi_n(t)$  так, что

$$\begin{aligned} \dot{\varphi}_n(t) &= i[H, \varphi_n(t)] = \pi_n(t), & \varphi_n(0) &\equiv \varphi_n, \\ \dot{\pi}_n(t) &= i[H, \pi_n(t)], & \pi_n(0) &\equiv \pi_n, \end{aligned} \quad (3.33)$$

причем

$$\begin{aligned} \varphi_n(t) &= e^{iHt} \varphi_n e^{-iHt} = \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{dk}{4\pi\omega_k} (a_k e^{-i\omega_k t + ikn} + a_k^\dagger e^{i\omega_k t - ikn}), \\ \pi_n(t) &= \dot{\varphi}_n(t). \end{aligned} \quad (3.34)$$

Очевидно, что  $a_k e^{-i\omega_k t}$ ,  $a_k^\dagger e^{i\omega_k t}$  удовлетворяют каноническим коммутационным соотношениям, а операторы  $H$  и  $N$  не зависят от времени. Наблюдаемые в моменты времени  $t$  и  $0$  связаны друг с другом унитарным каноническим преобразованием. Матричные элементы, соответствующие измерениям, не зависят от того, рассматриваем ли мы представление Шредингера или представление

Гейзенберга:

$$\langle a | e^{iHt} A(0) e^{-iHt} | a \rangle = \langle a | e^{iHt} \rangle A(0) \langle e^{-iHt} | a \rangle \quad (\text{представление Шредингера}),$$

$$\langle a | e^{iHt} A(0) e^{-iHt} | a \rangle = \langle a | (e^{iHt} A(0) e^{-iHt}) | a \rangle \quad (\text{представление Гейзенберга}).$$

Из структуры выражения (3.34) становится понятным, почему поле имеет как положительные, так и отрицательные частоты. Мы видим, что они соответствуют рождению и уничтожению фоновых мод. Последние всегда имеют положительные энергии ( $\hbar\omega$ ). Следовательно, мы не можем рассматривать  $\phi$  как волновую функцию. Это оператор в пространстве Фока, хотя он и выражается через решения волнового уравнения. Суперпозиция строится с помощью операторно-значных амплитуд. Эта процедура называется вторичным квантованием. Рассмотрение механической модели на примере кристалла позволяет нам перейти к квантовой теории релятивистского скалярного поля. Мы уже не можем интерпретировать колебания как колебания атомов, однако аналогия между фононами и частицами остается. Полагая энергию вакуума равной нулю, мы будем все еще испытывать некоторое сомнение.

### 3.1.2. Скалярное поле

В случае квантованного свободного скалярного поля, гамильтониан которого дается выражением (3.11), нам придется существенно изменить вышеприведенные формулы, полученные для трехмерного непрерывного пространства. Трехмерные импульсы обозначаются через  $\mathbf{k}$ , а  $k^0$  заменяет  $\omega_{\mathbf{k}} = \omega_{-\mathbf{k}} = \sqrt{k^2 + m^2} > 0$ . Здесь и далее мера фазового пространства для бозонов будет обозначаться следующим образом:

$$d\tilde{k} = \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega_{\mathbf{k}}} = \frac{d^4k}{(2\pi)^4} 2\pi \delta(k^2 - m^2) \theta(k^0). \quad (3.35)$$

Последнее выражение ясно демонстрирует лоренц-инвариантность этой меры. Инвариантность может быть проверена непосредственно для величины  $d^3k/\omega_{\mathbf{k}}$ ; она инвариантна относительно вращений. Преобразование Лоренца, отвечающее скорости  $\text{th } \theta$ , оставляет инвариантными поперечные компоненты  $\mathbf{k}_T$ , а также величину  $\omega_{\mathbf{k}}^2 - k_L^2$ . Таким образом,

$$dk'_L = \left( \text{ch } \theta + \text{sh } \theta \frac{k_L}{\omega_{\mathbf{k}}} \right) dk_L,$$

$$\omega_{\mathbf{k}'} = \left( \text{ch } \theta + \text{sh } \theta \frac{k_L}{\omega_{\mathbf{k}}} \right) \omega_{\mathbf{k}},$$

откуда следует, что  $dk'_L/\omega_{\mathbf{k}'} = dk_L/\omega_{\mathbf{k}}$ .

Используя операторы рождения и уничтожения, удовлетворяющие соотношениям

$$\begin{aligned} [a(k), a^\dagger(k')] &= (2\pi)^3 2\omega_k \delta^3(k - k'), \\ [a(k), a(k')] &= [a^\dagger(k), a^\dagger(k')] = 0, \end{aligned} \quad (3.36)$$

сопряженные друг другу поля  $\varphi(x)$ ,  $\pi(x)$  при  $t=0$ , для которых выполняются основные коммутационные соотношения (3.3), можно записать в виде

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \int d\tilde{k} [a(k) e^{ik \cdot x} + a^\dagger(k) e^{-ik \cdot x}], \\ \pi(x) &= -i \int d\tilde{k} \omega_k [a(k) e^{ik \cdot x} - a^\dagger(k) e^{-ik \cdot x}]. \end{aligned} \quad (3.37)$$

Основное состояние, или вакуум, определяется следующим образом:

$$a(k)|0\rangle = 0, \quad \langle 0|0\rangle = 1,$$

в то время как гамильтониан принимает вид

$$H = \frac{1}{2} \int d\tilde{k} \omega_k : a^\dagger(k) a(k) + a(k) a^\dagger(k) : = \int d\tilde{k} \omega_k a^\dagger(k) a(k). \quad (3.38)$$

В соответствии с рассмотрением, приведенным в гл. 1, естественно ожидать, что оператор трехмерного импульса  $P$  дается выражением

$$P^J = \int d^3x \Theta^{0j}(x) = \int d\tilde{k} k^j \frac{[a^\dagger(k) a(k) + a(k) a^\dagger(k)]}{2} = \int d\tilde{k} k^j a^\dagger(k) a(k). \quad (3.39)$$

В отличие от энергии здесь не требуется нормального упорядочения. Моды  $k$  и  $-k$  компенсируют друг друга, поэтому вакуум, т. е. собственное состояние оператора  $P$  с нулевым собственным значением, является трансляционно-инвариантным. Операторы  $H \equiv P^0$  и  $P^j$  коммутируют, и

$$[P^\mu, a^\dagger(k)] = k^\mu a^\dagger(k), \quad (3.40)$$

откуда следует, что оператор  $a^\dagger(k)$ , действуя на состояние, добавляет 4- импульс  $k^\mu$ .

С точностью до нормального упорядочения выражение для плотности тензора энергии-импульса совпадает со своим классическим аналогом

$$\Theta^{\mu\nu}(x) = \partial^\mu \varphi \partial^\nu \varphi - g^{\mu\nu} \left[ \frac{1}{2} (\partial\varphi)^2 - \frac{1}{2} m^2 \varphi^2 \right], \quad (3.41)$$

в котором  $\partial^0 \varphi(x)$  заменяется на  $\pi(x)$ .

В момент времени  $t = x^0$  поле  $\varphi$  можно записать в виде

$$\varphi(t, x) = e^{iHt} \varphi(0, x) e^{-iHt} = \int d\tilde{k} [a(k) e^{-ik \cdot x} + a^\dagger(k) e^{ik \cdot x}]. \quad (3.42)$$

Это выражение автоматически удовлетворяет уравнению Клейна—Гордона. Используя символ  $\overleftrightarrow{u}dv$  для операции

$$\overleftrightarrow{u}dv = u(\partial v) - (\partial u)v,$$

оператор  $a(k)$  можно выразить через  $\varphi(0, \mathbf{x})$  и  $\pi(0, \mathbf{x})$  следующим образом:

$$a(k) = \int d^3x e^{-ik \cdot x} [\omega_k \varphi(0, \mathbf{x}) + i\pi(0, \mathbf{x})] = i \int d^3x [e^{ik \cdot x} \overleftrightarrow{\partial}_0 \varphi(t, \mathbf{x})]_{t=0}. \quad (3.43)$$

Это выражение в действительности не зависит от времени. В самом деле, используя равенство  $k_0^2 = m^2 + \mathbf{k}^2$ , имеем

$$\partial_0 \int d^3x e^{ik \cdot x} \overleftrightarrow{\partial}_0 \varphi(x) = \int d^3x \{e^{ik \cdot x} \partial_0^2 \varphi(x) + [(m^2 - \Delta) e^{ik \cdot x}] \varphi(x)\}.$$

Во всех приложениях мы должны рассматривать нормированную суперпозицию плоских волн, для которой оправдано интегрирование по частям. Последнее выражение обращается в нуль, поскольку  $\varphi(x)$  удовлетворяет уравнению Клейна—Гордона. Следовательно,

$$\begin{aligned} a(k) &= i \int d^3x e^{ik \cdot x} \overleftrightarrow{\partial}_0 \varphi(x), \\ a^\dagger(k) &= -i \int d^3x e^{-ik \cdot x} \overleftrightarrow{\partial}_0 \varphi(x). \end{aligned} \quad (3.44)$$

В пространстве Фока базис можно построить из нормированных  $r$ -частичных соотношений:

$$\begin{aligned} |r\rangle &= (r!) \int d\tilde{k}_1 \dots d\tilde{k}_r |F(k_1, \dots, k_r)|^2^{-1/2} \times \\ &\times \int d\tilde{k}_1 \dots d\tilde{k}_r F(k_1, \dots, k_r) a^\dagger(k_1) \dots a^\dagger(k_r) |0\rangle. \end{aligned} \quad (3.45)$$

Волновая функция  $F(k_1, \dots, k_r)$  симметрична относительно перестановок 4-импульсов  $k_s$ , принадлежащих верхней полё гиперболоида  $k^2 = m^2$ , так называемой массовой поверхности. Коммутирующий с  $P^\mu$  оператор числа частиц  $N$ ,

$$N = \int d\tilde{k} a^\dagger(k) a(k), \quad (3.46)$$

действует на состояния (3.45) следующим образом:

$$N|r\rangle = r|r\rangle. \quad (3.47)$$

Необходимо убедиться, что соблюдается релятивистская инвариантность. В вышеприведенной формулировке используется определенная система отсчета, и можно задаться вопросом, придем ли мы к эквивалентной теории, проводя квантование в какой либо другой системе отсчета, связанной с данной преобразованием Пуанкаре. Отметим штрихами координаты новой системы отсчета. Мы хотим

выяснить, существует ли квантовое каноническое преобразование, которое связывает основные операторы рождения и уничтожения  $a$  и  $a^\dagger$  с соответствующими операторами  $a'$  и  $a'^\dagger$ , полученными при квантовании на гиперплоскости  $t' = \text{const}$ . Действительно, такое каноническое преобразование существует, если каждому преобразованию  $x \rightarrow x' = \Lambda x + a$  можно сопоставить унитарный оператор  $U(a, \Lambda)$  в пространстве Фока, такой, что

$$U(a, \Lambda) \varphi(x) U^\dagger(a, \Lambda) = \varphi(\Lambda x + a). \quad (3.48)$$

Предполагая дифференцируемость по параметрам  $a$  и  $\Lambda$ , достаточно рассмотреть инфинитезимальные преобразования типа

$$x'^\mu = x^\mu + \delta\omega_{\nu}^{\mu} x^\nu + \delta a^\mu,$$

где  $\delta\omega_{\mu\nu} + \delta\omega_{\nu\mu} = 0$ . Следовательно, нам нужно найти 10 эрмитовых операторов  $M^{\mu\nu}$  ( $M^{\mu\nu} + M^{\nu\mu} = 0$ ) и  $P^\mu$ , таких, что

$$U = I - \frac{i}{2} \delta\omega_{\mu\nu} M^{\mu\nu} + i \delta a_\mu P^\mu \quad (3.49)$$

и

$$i \left[ \delta a_\mu P^\mu - \frac{1}{2} \delta\omega_{\mu\nu} M^{\mu\nu}, \varphi(x) \right] = \delta a_\mu \partial^\mu \varphi + \frac{1}{2} \delta\omega_{\mu\nu} (x^\nu \partial^\mu - x^\mu \partial^\nu) \varphi. \quad (3.50)$$

10 генераторов  $P$  и  $M$  должны удовлетворять геометрическим коммутационным соотношениям:

$$\begin{aligned} [P^\mu, P^\nu] &= 0, \\ [M^{\mu\nu}, P^\lambda] &= i(g^{\mu\lambda} P^\nu - g^{\nu\lambda} P^\mu), \\ [M^{\mu\nu}, M^{\lambda\sigma}] &= i(g^{\mu\lambda} M^{\nu\sigma} - g^{\nu\lambda} M^{\mu\sigma} - g^{\mu\sigma} M^{\nu\lambda} + g^{\nu\sigma} M^{\mu\lambda}), \end{aligned} \quad (3.51)$$

в которых коммутатор заменяет (с точностью до  $i$ ) классические скобки Пуассона. Как и при выводе выражения для  $P^\mu$ , можно ожидать, что эти генераторы определяются из теоремы Нётер:

$$P^\mu = \int_t d^3x \Theta^{0\mu}, \quad M^{\mu\nu} = \int_t d^3x (x^\mu \Theta^{0\nu} - x^\nu \Theta^{0\mu}); \quad (3.52)$$

здесь  $\Theta^{\mu\nu}$  дается выражением (3.41), которое более точно можно записать в виде

$$\begin{aligned} \Theta^{00}(x) &= \frac{1}{2} : (\pi^2 + (\nabla\varphi)^2 + m^2\varphi^2) :, \\ \Theta^{0j}(x) &= : \pi \partial^j \varphi :. \end{aligned} \quad (3.53)$$

Выражения для  $P^\mu$  совпадают с (3.38) и (3.39); они действительно такие, что  $i[P^\mu, \varphi(x)] = \partial^\mu \varphi(x)$ . Для  $M^{\mu\nu}$  мы находим

$$\begin{aligned} M_{0j} &= i \int d\tilde{k} a^\dagger(\tilde{k}) \left( \omega_{\tilde{k}} \frac{\partial}{\partial k^j} \right) a(k), \\ M_{j1} &= i \int d\tilde{k} a^\dagger(k) \left( k_j \frac{\partial}{\partial \tilde{k}^l} - k_l \frac{\partial}{\partial \tilde{k}^j} \right) a(k). \end{aligned} \quad (3.54)$$

Таким образом, соотношения (3.50) и (3.51) выполняются. Поскольку в  $M^{\mu\nu}$  входит лишь орбитальный момент, частицы, рождаемые и уничтожаемые полем  $\varphi$ , не имеют спина.

Убедившись в ковариантности квантовой теории, изучим теперь вопрос о том, как связаны между собой описание, использующее представление частиц с массой  $m$  и нулевым спином, и описание, основанное на эрмитовом поле  $\phi$ , которое может принадлежать набору измеримых величин.

Хотя в определенный момент времени поля, относящиеся к разным точкам пространства, коммутируют, это не выполняется, когда мы сравниваем их в разные моменты времени. Однако из канонического квантования следует, что коммутатор двух свободных полей  $\phi(x)$  и  $\phi(y)$  имеет простую структуру и описывается  $c$ -числовой обобщенной функцией вида

$$[\phi(x), \phi(y)] = \int d\tilde{k} [e^{-ik \cdot (x-y)} - e^{ik \cdot (x-y)}] = i\Delta(x-y). \quad (3.55)$$

Вещественную обобщенную функцию  $\Delta(x)$  можно также записать с помощью знаковой функции  $\varepsilon(u) = u/|u|$ :

$$\Delta(x) = \frac{1}{i} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^3} \delta(k^2 - m^2) \varepsilon(k^0) e^{-ik \cdot x}, \quad (3.56)$$

откуда видно, что  $\Delta(x)$  является нечетным лоренц-инвариантным решением уравнения Клейна—Гордона. Из условия  $\Delta(0, \mathbf{x}) = 0$  и лоренц-инвариантности находим, что на самом деле  $\Delta(x)$  обращается в нуль вне светового конуса, т. е. в области  $x^2 < 0$ . Измерения в точках, разделенных пространственно-подобным интервалом, не влияют друг на друга, что является следствием локальности и причинности. Заметим также, что из канонического квантования следует

$$\partial_\nu \Delta(x)|_{x^0=0} = -\delta^3(\mathbf{x}). \quad (3.57)$$

Чтобы построить когерентные состояния, которые диагонализуют положительно-частотную часть квантового поля, т. е. являются аналогами минимальных волновых пакетов для гармонического осциллятора, предположим, что на массовой поверхности  $k^2 = m^2$ ,  $k^0 > 0$  задана нормируемая функция  $\eta(k)$ :

$$\int d\tilde{k} |\eta(k)|^2 < \infty.$$

Рассмотрим состояние  $|\eta\rangle$ , определяемое выражением

$$|\eta\rangle = \exp \left[ \int d\tilde{k} \eta(k) a^\dagger(k) \right] |0\rangle, \quad (3.58)$$

которое в пространстве Фока является когерентной суперпозицией состояний с 0, 1, 2, ... частицами. Считая, что  $\eta$  является произвольным выражением (3.58) можно использовать как производящую функцию для получения состояний с фиксированным числом частиц. Применяя тождество  $e^A e^B = e^{A+B+[A, B]^{1/2}}$ , справедливое для двух операторов  $A$  и  $B$ , коммутирующих с  $[A, B]$ , вычислим норму состояния  $|\eta\rangle$ :

$$\langle \eta_1 | \eta_2 \rangle = \exp \left[ \int d\tilde{k} \eta_1^*(k) \eta_2(k) \right]. \quad (3.59)$$

Следовательно, два таких состояния, вообще говоря, не ортогональны и система когерентных состояний является переполненной. Обозначим через  $|\eta\rangle$  нормированное состояние, соответствующее  $|\eta\rangle$ :

$$|\eta\rangle = \exp\left[-\frac{1}{2} \int d\tilde{k} |\eta(k)|^2\right] |\eta\rangle;$$

тогда мы можем записать

$$\langle \eta_1 | \eta_2 \rangle = \exp\left[\int d\tilde{k} (i \operatorname{Im} \eta_1^* \eta_2 - \frac{1}{2} |\eta_1 - \eta_2|^2)\right].$$

Вакуумное состояние соответствует  $\eta = 0$ , а в более общем виде  $a(k)|\eta\rangle = \eta(k)|\eta\rangle$ ; таким образом, мы диагонализировали аннигиляционную (положительно-частотную) часть поля

$$\varphi^{(+)}(x) = \int d\tilde{k} a(k) e^{-ik \cdot x}, \quad \varphi^{(+)}(x)|\eta\rangle = \int d\tilde{k} \eta(k) e^{-ik \cdot x} |\eta\rangle. \quad (3.60)$$

При эволюции во времени когерентные состояния остаются когерентными. Действительно,

$$\begin{aligned} e^{-iHt} |\eta\rangle &= \exp\left\{\int d\tilde{k} \eta(k) [e^{-iHt} a^\dagger(k) e^{iHt}]\right\} |0\rangle = \\ &= \exp\left[\int d\tilde{k} \eta(k) e^{-ik_0 t} a^\dagger(k)\right] |0\rangle = \\ &= |\eta_t\rangle, \end{aligned} \quad (3.61)$$

где  $\eta_t(k) = e^{-ik_0 t} \eta(k)$ .

Полезно также построить унитарный оператор  $D(\eta)$ , который осуществляет преобразование

$$D(\eta_2) |\eta_1\rangle = \exp\left[i \int d\tilde{k} \operatorname{Im} \eta_1^* \eta_2\right] |\eta_1 + \eta_2\rangle.$$

Читатель может убедиться сам, что таким оператором является

$$D(\eta) = \exp\left\{-\int d\tilde{k} [\eta^*(k) a(k) - \eta(k) a^\dagger(k)]\right\}.$$

Поскольку  $\varphi(x)$  — это операторно-значная обобщенная функция, ее можно сгладить пробной функцией

$$\varphi_f = \int d^4x f(x) \varphi(x). \quad (3.62)$$

Если  $f$  близка к  $\delta(t)g(x)$  или  $\delta'(t)g(x)$ , мы получаем среднее по пространству от  $\varphi(0, \mathbf{x})$  или  $\pi(0, \mathbf{x})$ . Рассмотрим распределение вероятности величины  $\varphi_f$  в состоянии, соответствующем фиксированному числу частиц  $r$ :

$$\rho_r(a) = \langle r | \delta(\varphi_f - a) | r \rangle = \int \frac{d\alpha}{2\pi} e^{-i\alpha a} \langle r | e^{i\alpha \varphi_f} | r \rangle. \quad (3.63)$$

Чтобы вычислить это распределение, можно использовать в качестве производящих функций когерентные состояния, так что задача сводится к вычислению величины

$$\langle \eta_1 | e^{i\alpha \varphi_f} | \eta_2 \rangle = \exp\left\{\int d\tilde{k} \left[\eta_1^* \eta_2 + i\alpha (\eta_1^* \tilde{f} + \tilde{f}^* \eta_2) - \frac{\alpha^2}{2} |\tilde{f}|^2\right]\right\}, \quad (3.64)$$

где  $\tilde{f}$  — фурье-образ функции  $f$ ;

$$\tilde{f}(k) = \int d^4x e^{ik \cdot x} f(x).$$

Заметим, что вклады в (3.64) дают только значения  $\tilde{f}$ , заданные на массовой поверхности. Предоставляя читателю в качестве упражнения изучить общий случай, найдем вакуумное распределение поля

$$\begin{aligned} \rho_0(a) &= \int \frac{d\alpha}{2\pi} \exp \left[ -i\alpha a - \frac{\alpha^2}{2} \int d\tilde{k} |\tilde{f}(k)|^2 \right] = \\ &= \left[ 2\pi \int d\tilde{k} |\tilde{f}(k)|^2 \right]^{-1/2} \exp \left[ -\frac{a^2}{2 \int d\tilde{k} |\tilde{f}(k)|^2} \right]. \end{aligned} \quad (3.65)$$

Нет ничего удивительного в том, что мы получили распределение Гаусса со среднеквадратичным отклонением

$$\sigma = \left[ \int d\tilde{k} |\tilde{f}(k)|^2 \right]^{1/2}$$

от нулевого среднего значения. Поле в данной точке пространства-времени, соответствующее  $\tilde{f} = 1$ , имеет бесконечную флуктуацию, и, следовательно, ненаблюдаемо. Но сглаженные операторы имеют смысл даже тогда, когда носитель функции  $f$  ограничен фиксированным значением времени. Заметим, что вакуум не является состоянием с нулевым полем, и, как мы скоро увидим, вакуумные флуктуации наблюдаемы.

Вместо того чтобы рассматривать  $\varphi^{(+)}(x)$ , можно также построить полный набор сглаженных значений  $\varphi(0, x)$ :

$$\varphi_n = \int d^3x \varphi(0, x) F_n(x), \quad (3.66)$$

соответствующих  $f_n(x) = \delta(x^0) F_n(x)$  в предыдущих обозначениях, причём величины

$$\tilde{f}_n(k) = \int d^3x e^{-ik \cdot x} F_n(x) = \tilde{F}_n(k) \quad (3.67)$$

нормируются в соответствии с формулами

$$\begin{aligned} \int d\tilde{k} \tilde{F}_n^*(k) \tilde{F}_{n'}(k) &= \delta_{n, n'}, \\ \tilde{F}_n(-k) &= \tilde{F}_n^*(k), \\ \sum_n \tilde{F}_n(k) \tilde{F}_n^*(k') &= (2\pi)^3 2\omega_k \delta^3(k - k'). \end{aligned} \quad (3.68)$$

Собственное состояние операторов  $\varphi_n$  с собственными значениями  $\varphi_{n, c}$  не совсем точно можно назвать собственным состоянием поля  $\varphi(0, x)$  с собственным значением

$$\varphi_c(x) = \sum_n \varphi_{n, c} \int d\tilde{k} e^{-ik \cdot x} \tilde{F}_n^*(k) \quad (3.69)$$

так что

$$\int d^3x \varphi_c(x) F_n(x) = \varphi_{n, c}$$

Обозначим соответствующее состояние через  $|\varphi_c\rangle$ . Для того чтобы получить его компоненты в базисе Фока, достаточно знать скалярное произведение этого состояния и когерентного состояния  $|\eta\rangle$ . Это произведение можно получить, решив уравнение

$$\langle \eta | \varphi_n | \varphi_c \rangle = \varphi_{n, c} \langle \eta | \varphi_c \rangle \quad (3.70)$$



для каждого значения  $n$ . Если нормировка такова, что

$$1 = \int |\varphi_c\rangle \prod_n \frac{d\varphi_{n,c}}{\sqrt{2\pi}} \langle \varphi_c |, \quad (3.71)$$

мы приходим к выражению

$$\langle n | \varphi_c \rangle = \exp \left\{ -\frac{1}{4} \sum_n \varphi_{n,c}^2 + \int d\vec{k} \left[ -\frac{1}{2} \eta^*(\mathbf{k}) \eta^*(-\mathbf{k}) + \right. \right. \\ \left. \left. + \eta^*(\mathbf{k}) \sum_n \varphi_{n,c} \bar{F}_n(\mathbf{k}) \right] \right\}, \quad (3.72)$$

с помощью которого можно изучать физический смысл этих состояний.

### 3.1.3. Заряженное скалярное поле

Проведенное выше рассмотрение эрмитова скалярного поля не позволяет различать частицы и античастицы. Частицы и античастицы должны иметь противоположные квантовые числа, соответствующие заряду, независимо от природы этого заряда. В классической теории минимальная связь приводит к комплексным полям. Поэтому в квантовом случае определим дублет эрмитовых полей  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ , описываемый комплексной величиной

$$\varphi = \frac{\varphi_1 + i\varphi_2}{\sqrt{2}}$$

и величиной, эрмитово сопряженной с последней. Полный лагранжиан  $\mathcal{L}_{\text{полн}}$  должен быть суммой двух идентичных лагранжианов вида (3.7), соответствующих  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ :

$$\mathcal{L}_{\text{полн}} = \mathcal{L}(\varphi_1) + \mathcal{L}(\varphi_2) = (\partial_\mu \varphi)^\dagger (\partial^\mu \varphi) - m^2 \varphi^\dagger \varphi. \quad (3.73)$$

Квадратичный лагранжиан  $\mathcal{L}$  инвариантен относительно вращений во внутреннем пространстве, характеризуемом индексами 1 и 2, или, что то же самое, когда  $\varphi$  умножается на фазовый множитель, а  $\varphi^\dagger$  — на сопряженный множитель. Группой инвариантности является  $U(1)$  или  $O(2)$ . Квантование выполняется независимо для  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ , причем состояния нумеруются числами  $n_1$  и  $n_2$  квантов типа 1 и 2, соответствующих операторам  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ ; таким образом,

$$N_i = \int d\vec{k} a_i^\dagger(\mathbf{k}) a_i(\mathbf{k}), \quad i = 1, 2. \quad (3.74)$$

Записывая гамильтониан через поля  $\varphi$ ,  $\varphi^\dagger$  и сопряженные импульсы

$$\pi = \dot{\varphi}^\dagger = \frac{\dot{\varphi}_1 - i\dot{\varphi}_2}{\sqrt{2}}, \quad \pi^\dagger = \dot{\varphi} = \frac{\dot{\varphi}_1 + i\dot{\varphi}_2}{\sqrt{2}}, \quad (3.75)$$

имеем

$$H = \int d^3x : \pi^\dagger \pi + \nabla \varphi^\dagger \nabla \varphi + m^2 \varphi^\dagger \varphi : . \quad (3.76)$$

Следует заметить, что в уравнениях (3.73) и (3.76) отсутствует коэффициент  $1/2$ , характерный для случая эрмитовых полей.

Коммутационные соотношения

$$[\varphi(x), \varphi(y)] = [\varphi^\dagger(x), \varphi^\dagger(y)] = 0, \quad [\varphi(x), \varphi^\dagger(y)] = i\Delta(x-y) \quad (3.77)$$

при совпадающих временах сводятся к соотношению

$$[\varphi(t, \mathbf{x}), \pi(t, \mathbf{y})] = [\varphi^\dagger(t, \mathbf{x}), \pi^\dagger(t, \mathbf{y})] = i\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y}).$$

Само поле можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \int d\bar{k} [a(k) e^{-ik \cdot x} + b^\dagger(k) e^{ik \cdot x}], \\ \varphi^\dagger(x) &= \int d\bar{k} [b(k) e^{-ik \cdot x} + a^\dagger(k) e^{ik \cdot x}], \end{aligned} \quad (3.78)$$

где

$$\begin{aligned} a(k) &= \frac{a_1(k) + ia_2(k)}{\sqrt{2}}, & a^\dagger(k) &= \frac{a_1^\dagger(k) - ia_2^\dagger(k)}{\sqrt{2}}, \\ b(k) &= \frac{a_1(k) - ia_2(k)}{\sqrt{2}}, & b^\dagger(k) &= \frac{a_1^\dagger(k) + ia_2^\dagger(k)}{\sqrt{2}}, \\ [a(k), a^\dagger(k')] &= [b(k), b^\dagger(k')] = (2\pi)^3 2\omega_k \delta^3(\mathbf{k}-\mathbf{k}'), \end{aligned}$$

причем все остальные коммутаторы обращаются в нуль.

Мы видим, что  $\varphi$  уничтожает кванты типа  $a$  и рождает кванты типа  $b$ , а оператор  $\varphi^\dagger$  действует обратным образом; это соответствует двум наблюдаемым

$$N_a = \int d\bar{k} a^\dagger(k) a(k) \quad \text{и} \quad N_b = \int d\bar{k} b^\dagger(k) b(k). \quad (3.79)$$

То, почему мы предпочли диагонализировать  $N_a$  и  $N_b$ , а не  $N_1$  и  $N_2$ , станет понятным позже, когда мы рассмотрим заряд. Это напоминает то, как если бы вместо линейной поляризации света мы выбрали круговую. Разумеется,  $N_a + N_b = N_1 + N_2$ . Наконец, запишем 4-вектор энергии-импульса:

$$P^\mu = \int d\bar{k} k^\mu [a^\dagger(k) a(k) + b^\dagger(k) b(k)], \quad (3.80)$$

причем вакуумное состояние уничтожается всеми операторами  $a(k)$  и  $b(k)$ .

Применяя теорему Нётер к группе инвариантности  $U(1)$ , мы предполагаем, что существует сохраняющийся ток

$$J_\mu = : \varphi^\dagger \overleftrightarrow{\partial}_\mu \varphi : \quad (3.81)$$

и соответствующий не зависящий от времени заряд

$$Q = \int d^3x : i (\dot{\phi}^\dagger \phi - \phi^\dagger \dot{\phi}) : = \\ = \int d\tilde{k} [a^\dagger(k) a(k) - b^\dagger(k) b(k)] = N_a - N_b. \quad (3.82)$$

В самом деле, можно показать, что

$$\dot{Q} = i [H, Q] = 0, \quad \partial_\mu j^\mu = 0. \quad (3.83)$$

Следовательно,  $a$ -кванты имеют заряд  $+1$ , а  $b$ -кванты — заряд  $-1$ . Оба типа квантов входят в теорию симметричным образом и, чтобы различить их физически, необходимо ввести внешнюю связь.

Стало традиционным отождествлять один тип квантов с частицами, а другой — с античастицами. Симметрия теории требует, чтобы  $m_a = m_b$ , а также равенства спинов, которые в данном случае равны нулю. Дискретная симметрия, отвечающая замене частиц на античастицы, называется зарядовым сопряжением.

Покажите, что в пространстве Фока можно найти унитарный оператор  $\mathcal{C}$ , который коммутирует с гамильтонианом и такой, что

$$\mathcal{C}\phi(x)\mathcal{C}^\dagger = \eta_c\phi^\dagger(x), \quad |\eta_c| = 1; \quad (3.84)$$

обсудите его свойства.

Примерами различающихся скалярных пар частица-античастица могут служить мезоны  $\pi^+\pi^-$ ,  $K^+K^-$  или  $K^0\bar{K}^0$ . В последнем случае «зарядом» является странность.

Объединенное описание, основанное на рассмотрении комплексного поля  $\phi$ , которое представляет собой единственную комбинацию, приводящую к взаимодействиям, инвариантным относительно зарядового сопряжения, указывает на глубокую связь между динамическим поведением частиц и античастиц, которая, как будет показано ниже, выходит за рамки простого равенства их кинематических инвариантов

### 3.1.4. Хронологическое произведение

Действуя на состояние, оператор  $\phi^\dagger(x)$  рождает частицу с зарядом  $+1$  или уничтожает античастицу с зарядом  $-1$ . В любом случае к полному заряду добавляется  $+1$ . Аналогично, действуя на состояние оператором  $\phi(x')$ , мы уничтожаем единичный заряд. Можно рассматривать совместное действие двух операторов, оставляющее полный заряд инвариантным, двумя способами в зависимости от знака  $t' - t$ . Если  $t' > t$ , то сначала в момент времени  $t$  оператор  $\phi^\dagger(x)$  рождает частицу, а в более позднее время  $t'$  оператор  $\phi(x')$  ее уничтожает. Соответствующая амплитуда определяется средним значением оператора

$$\theta(t' - t) \phi(t', x') \phi^\dagger(t, x). \quad (3.85)$$

В случае же когда  $t' < t$ , оператор  $\varphi(x')$  рождает античастицу, которая затем уничтожается оператором  $\varphi^\dagger(x)$  в момент времени  $t$  с амплитудой

$$\theta(t-t')\varphi^\dagger(t, \mathbf{x})\varphi(t', \mathbf{x}'). \quad (3.86)$$

В обоих случаях заряд увеличивается в точке  $x$  и уменьшается в точке  $x'$  независимо от причинных связей. В случае  $t > t'$ , вместо того чтобы говорить о рождении античастицы в точке  $x'$ , поглощенной впоследствии в  $x$ , можно сказать, что в  $x'$  образовалась дырка, которая будет заполнена в более позднее время  $t$ . Таким образом мы воспроизводим дырочное описание Дирака (см. главу 2).

Сумма операторов (3.85) и (3.86) представляет собой хронологическое произведение Дайсона

$$T\varphi(x')\varphi^\dagger(x) = \theta(t'-t)\varphi(x')\varphi^\dagger(x) + \theta(t-t')\varphi^\dagger(x)\varphi(x'), \quad (3.87)$$

названное так потому, что операторы под знаком  $T$ -произведения расположены справа налево в порядке возрастания временных аргументов. Бозонные операторы, очевидно, коммутируют под знаком хронологического произведения.

Поддействуем на хронологическое произведение (3.87) оператором  $\square_{x'} + m^2$ . При этом необходимо соблюдать осторожность, поскольку ступенчатые функции зависят от времени; следовательно, мы должны получить не нуль, а обобщенную функцию, сосредоточенную при совпадающих временах. Действительно,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial t'^2} T\varphi(x')\varphi^\dagger(x) &= \frac{\partial}{\partial t'} \left\{ T \frac{\partial}{\partial t'} \varphi(x')\varphi^\dagger(x) + \delta(t'-t)[\varphi(x'), \varphi^\dagger(x)] \right\} = \\ &= T \frac{\partial^2}{\partial t'^2} \varphi(x')\varphi(x) + \delta(t'-t) \left[ \frac{\partial}{\partial t'} \varphi(x'), \varphi^\dagger(x) \right]; \end{aligned}$$

здесь мы воспользовались тем фактом, что

$$\delta(t'-t)[\varphi(x'), \varphi^\dagger(x)] = i\delta(t'-t)\Delta(0, \mathbf{x}' - \mathbf{x}) = 0.$$

Из (3.77) и (3.57) следует, что

$$\begin{aligned} \delta(t'-t) \left[ \frac{\partial}{\partial t'} \varphi(x'), \varphi^\dagger(x) \right] &= i\delta(t'-t) \frac{\partial}{\partial t'} \Delta(t'-t, \mathbf{x}' - \mathbf{x}) = \\ &= -i\delta^4(x' - x). \end{aligned}$$

Используя равенство  $(\partial^2/\partial t'^2)\varphi(x') = (\Delta_{x'} - m^2)\varphi(x')$ , находим

$$(\square_{x'} + m^2)T\varphi(x')\varphi^\dagger(x) = -i\delta^4(x' - x). \quad (3.88)$$

Если бы поле  $\varphi$  удовлетворяло уравнению  $(\square + m^2)\varphi(x) = j(x)$ , а не однородному уравнению Клейна—Гордона, то уравнение (3.88) следовало бы заменить на уравнение

$$(\square_{x'} + m^2)T\varphi(x')\varphi^\dagger(x) = Tj(x')\varphi^\dagger(x) - i\delta^4(x' - x). \quad (3.89)$$

Отсюда мы получаем, что вакуумное среднее

$$G_F(x' - x) = i \langle 0 | T \varphi(x') \varphi^\dagger(x) | 0 \rangle \quad (3.90)$$

представляет собой одну из функций Грина оператора Клейна — Гордона. Простое вычисление показывает, что это действительно скалярный пропагатор Фейнмана, встречавшийся в гл. 1:

$$G_F(x - y) = - \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2 - m^2 + i\epsilon} e^{-ik \cdot (x - y)}. \quad (3.91)$$

Мы приходим к выводу, что квантование свободного релятивистского скалярного поля дает удовлетворительное описание бесспиновых не взаимодействующих частиц, подчиняющихся статистике Бозе — Эйнштейна, как обладающих зарядом, так и без заряда. В отсутствие взаимодействий число квантов поля сохраняется.

### 3.1.5. Термодинамическое равновесие

В системе покоя, в которой полный трехмерный импульс равен нулю, может оказаться, что правильное описание рассмотренной выше квантованной системы соответствует не вакуумному состоянию, а термодинамическому равновесию при температуре  $T = 1/k\beta$  ( $k$  — постоянная Больцмана) и химическом потенциале  $\mu$ . Это утверждение справедливо, пока число квантов  $N$  сохраняется. Рассмотрим вновь квантование в ограниченном объеме с дискретными импульсами:

$$\mathbf{k} = \frac{2\pi}{V^{1/3}} \mathbf{n}, \text{ причем } n_1, n_2, n_3 \text{ — целые числа.}$$

При этом интегралы заменяются на суммы:

$$\int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \rightarrow \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{k}}.$$

Переопределим операторы уничтожения и рождения таким образом,

$$a(\mathbf{k}) = \sqrt{2\omega_{\mathbf{k}} V} A_{\mathbf{k}},$$

чтобы выполнялось соотношение

$$[A_{\mathbf{k}}, A_{\mathbf{k}'}^\dagger] = \delta_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'}$$

Здесь дельта-функции заменены на символы Кронекера. Следовательно,

$$H = \int d\bar{k} \omega_{\mathbf{k}} a^\dagger(\mathbf{k}) a(\mathbf{k}) = \sum_{\mathbf{k}} \omega_{\mathbf{k}} A_{\mathbf{k}}^\dagger A_{\mathbf{k}},$$

$$N = \int d\bar{k} a^\dagger(\mathbf{k}) a(\mathbf{k}) = \sum_{\mathbf{k}} A_{\mathbf{k}}^\dagger A_{\mathbf{k}}.$$

Мы предположили для простоты, что система нейтральна. Полная статистическая сумма  $\mathcal{Z}$  записывается в виде следа в пространстве Фока:

$$\mathcal{Z} = \text{sp } e^{-\beta(H - \mu N)} = \text{sp } \exp \left[ -\beta \sum_{\mathbf{k}} (\omega_{\mathbf{k}} - \mu) A_{\mathbf{k}}^\dagger A_{\mathbf{k}} \right].$$

Каждая мода колебаний дает вклад в виде факторизованного члена, а поскольку  $\text{sp } e^{\lambda A} \dagger A = (1 - e^\lambda)^{-1}$ , мы имеем

$$\bar{z} = \exp \left[ - \sum_k \ln (1 - e^{-\beta (\omega_k - \mu)}) \right].$$

В случае большого объема термодинамический потенциал записывается в виде

$$\Omega = \ln \bar{z} = -V \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \ln (1 - e^{-\beta (\omega_k - \mu)}).$$

Из термодинамики известно, что если  $p$  — давление, то  $\Omega = \beta p V$ . Следовательно,

$$p = - \frac{1}{\beta} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \ln (1 - e^{-\beta (\omega_k - \mu)}). \quad (3.92)$$

Средние значения плотности энергии  $\bar{E}/V$  (без вклада нулевых колебаний) и плотности частиц  $\bar{N}/V$  даются хорошо известными выражениями

$$\begin{aligned} \frac{\bar{E}}{V} &= - \frac{\partial \Omega}{V \partial \beta} \Big|_{\beta \mu = \text{const}} = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{\omega_k}{e^{\beta (\omega_k - \mu)} - 1}, \\ \frac{\bar{N}}{V} &= \frac{1}{\beta V} \frac{\partial \Omega}{\partial \mu} \Big|_{\beta} = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{1}{e^{\beta (\omega_k - \mu)} - 1}, \end{aligned} \quad (3.93)$$

соответствующими статистике Бозе. В случае когда  $m=0$  и число частиц не сохраняется (т. е.  $\mu=0$ ), ситуация аналогична излучению абсолютно черного тела, если не учитывать поляризацию. При этом среднее значение плотности энергии записывается в виде

$$\frac{\bar{E}}{V} = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{|\mathbf{k}|}{e^{\beta |\mathbf{k}|} - 1} = \frac{4\pi}{(2\pi)^3} \int_0^\infty dk \frac{k^3}{\beta} \frac{d}{dk} \ln (1 - e^{-\beta k}).$$

Интегрируя по частям, получаем

$$\frac{\bar{E}}{V} = - \frac{3}{\beta} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \ln (1 - e^{-\beta |\mathbf{k}|}) = 3p; \quad (3.94)$$

это есть не что иное, как классическое соотношение, хорошо известное из теории излучения абсолютно черного тела. Из этого соотношения следует, что след усредненного тензора энергии-импульса  $\bar{\Theta}_{\mu\nu}$ , который имеет лишь диагональные элементы  $\bar{\Theta}_{00} = \bar{E}/V$ ,  $\bar{\Theta}_{ij} = p \delta_{ij}$  ( $i, j = 1, 2, 3$ ), равен нулю,

$$\bar{\Theta}_\mu^\mu = \frac{\bar{E}}{V} - 3p = 0.$$

Обозначая термодинамические средние круглыми скобками (мы полагаем здесь, что  $\mu=0$ , а масса является произвольной), т. е. записывая

$$(A) = \frac{\sum_\alpha \exp \{-\beta E_\alpha\} \langle \alpha | A | \alpha \rangle}{\sum_\alpha \exp \{-\beta E_\alpha\}},$$

рассмотрим распространение сигнала при конечной температуре. Полагая

$$f(\omega) = \frac{1}{e^{\beta\omega} - 1},$$

можно записать следующие соотношения:

$$\begin{aligned} (A_k^\dagger A_{k'}) &= \delta_{k, k'} f(\omega_k), \\ (A_k A_k^\dagger) &= \delta_{k, k'} [1 + f(\omega_k)] = -\delta_{k, k'} f(-\omega_k), \\ (A_k A_{k'}) &= (A_k^\dagger A_{k'}^\dagger) = 0. \end{aligned}$$

В пределе бесконечного объема имеем

$$(\varphi(x) \varphi(y)) = \int d\vec{k} \{ e^{-ik \cdot (x-y)} [1 + f(\omega_k)] + e^{ik \cdot (x-y)} f(\omega_k) \},$$

и хронологическое произведение принимает вид

$$\begin{aligned} (T\varphi(x) \varphi(y)) &= i \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ik \cdot (x-y)}}{k^2 - m^2 + i\epsilon} + \int d\vec{k} \frac{1}{e^{\beta\omega_k} - 1} \times \\ &\times (e^{-ik \cdot (x-y)} + e^{ik \cdot (x-y)}). \end{aligned} \quad (3.95)$$

Это выражение показывает, что пропагатор при конечной температуре является суммой пропагатора Фейнмана при нулевой температуре и зависящего от температуры решения однородного уравнения Клейна—Гордона, которое обращается в нуль по закону  $e^{-\beta m}$  при  $\beta \rightarrow \infty$  ( $T \rightarrow 0$ ). Такой пропагатор позволяет изучать динамические возмущения состояния равновесия.

Структура статистической суммы наводит на мысль, что, применяя теорию возмущений к статистическим системам, мы можем столкнуться с каким-то иным «евклидовым пропагатором». Исходя из рассмотрения основных динамических полевых переменных при фиксированном времени, определим эволюцию в мнимом времени

$$x_0 = -i\hat{\lambda}_0,$$

где величина  $\hat{\lambda}_0$  вещественна и вначале ее изменение ограничено интервалом  $[0, \beta]$  в соответствии с формулой

$$\varphi(x) = e^{iHx_0} \varphi(0, \mathbf{x}) e^{-iHx_0} = e^{H\hat{\lambda}_0} \varphi(0, \mathbf{x}) e^{-H\hat{\lambda}_0}.$$

Обозначая упорядочение операторов по  $\hat{\lambda}_0$  символом  $\hat{T}$ , можно записать следующее уравнение:

$$\left( -\frac{\partial^2}{\partial \hat{\lambda}_0^2} - \Delta_x + m^2 \right) [\hat{T}\varphi(x) \varphi(y)] = -i\delta(\hat{x}_0 - \hat{y}_0) \delta^3(x - y).$$

Величину  $\hat{T}\varphi(x) \varphi(y)$  можно продолжить как периодическую функцию от  $\hat{x}_0 - \hat{y}_0$  с периодом  $\beta$ . Действительно, предположим сначала, что величина  $\hat{y}_0$  ограничена интервалом  $[0, \beta]$ . Тогда из циклического свойства следа получаем

$$\begin{aligned} [\hat{T}\varphi(x) \varphi(y)]_{\hat{x}_0=0} &= (\text{Sp } e^{-\beta H})^{-1} \text{Sp} [e^{-\beta H} \varphi(y) \varphi(0, \mathbf{x})] = \\ &= (\text{Sp } e^{-\beta H})^{-1} \text{Sp} [e^{-\beta H} e^{\beta H} \varphi(0, \mathbf{x}) e^{-\beta H} \varphi(y)] = \\ &= [\hat{T}\varphi(x) \varphi(y)]_{\hat{x}_0=\beta}. \end{aligned}$$

Когда такое продолжение выполнено, мы должны понимать, что функция  $\delta(\hat{x}_0 - \hat{y}_0)$  применяется к периодическим функциям (функциям на окружности),

причем  $2\pi\delta(\alpha) = \sum_n e^{in\alpha}$ . Таким образом, можно написать следующие выражения:

$$\begin{aligned} [\hat{T}\Phi(x)\Phi(y)] &= \frac{1}{\beta} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \exp\left[-2i\pi \frac{n}{\beta} (\hat{x}_0 - \hat{y}_0)\right] \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{ik \cdot (x-y)} \frac{i}{k^2 - m^2} = \\ &= \frac{1}{\beta} \sum_{k^0 = 2i\pi n/\beta} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{-ik \cdot (x-y)} \frac{i}{k^2 - m^2}. \end{aligned} \quad (3.96)$$

В последнем выражении используются обозначения Минковского, причем величина  $x^0 = -i\hat{x}^0$  так же, как и  $k^0$ , является чисто мнимой. Если обозначить символом  $\int^{(\beta)} d^4k/(2\pi)^4$  комбинацию дискретной суммы и интеграла

$$\frac{1}{\beta} \sum_{k^0 = 2i\pi n/\beta} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3},$$

то выражения (3.96) формально совпадают с обычным пропагатором. Однако следует заметить, что знаменатель

$$k^2 - m^2 = - \left[ \left( \frac{2\pi n}{\beta} \right)^2 + \mathbf{k}^2 + m^2 \right]$$

никогда не обращается в нуль. Читатель должен понимать, что выражения (3.95) и (3.96) описывают абсолютно разные величины, относящиеся к не связанным между собой проблемам.

## 3.2. КВАНТОВАННОЕ ПОЛЕ ИЗЛУЧЕНИЯ

Рассмотренный выше пример из термодинамики приводит нас непосредственно к полю излучения. Действительно, спектр излучения абсолютно черного тела, полученный Планком, явился исторически первым случаем квантования поля. Единственно, что нам нужно, так это обобщить построенный выше формализм на степени свободы, описываемые потенциалом  $A_\mu(x)$ . Так как для нас важен локальный характер теории, мы не вправе использовать в качестве основной динамической переменной калибровочно-инвариантный тензор  $F_{\mu\nu}$ . Нам придется иметь дело с зависимостью  $A_\mu$  от калибровки, о чем уже упоминалось в гл. 1. Эту трудность пытались обойти различными способами. В нашу задачу не входит описание всех этих способов, мы рассмотрим лишь квантование Гупты—Блейлера, использующее индефинитную метрику.

### 3.2.1. Индефинитная метрика

Напомним, что лагранжиан

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F^2, \quad (3.97)$$



в котором  $F$  выражается через  $A$ , не подходит для канонического квантования, поскольку импульс, сопряженный  $A^0$ , обращается в нуль. Если бы нам не надо было заботиться о явной лоренц-ковариантности, мы могли бы ограничиться величиной  $A$ , фиксируя  $A^0$  и используя условие типа  $\operatorname{div} \mathbf{A} = 0$ . С физической точки зрения это, несомненно, разумный шаг, но он не соответствует нашим целям. Поэтому мы поступим иначе, а именно видоизменим уравнения движения. Поскольку при этом придется ввести фиктивные степени свободы, теорию Максвелла мы сможем применить, наложив соответствующие ограничения на физические состояния. Поначалу может показаться, что цена слишком высока не только потому, что гильбертово пространство при квантовании окажется слишком широким, но и вследствие того, что данное пространство не обладает положительной метрикой, т. е. допускает состояния с отрицательной нормой! Таким образом, обычная вероятностная интерпретация квантовой механики будет справедлива лишь тогда, когда мы ограничимся рассмотрением физических квантов, а именно фотонов только с двумя поляризациями. Напомним также, что для сохранения калибровочной инвариантности, т. е. принципа, который оправдывает указанную выше процедуру, необходимо убедиться в том, что ток продолжает сохраняться и после включения взаимодействия.

Итак, мы заменяем лагранжиан (3.97) следующим выражением:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F^2 - \frac{\lambda}{2} (\partial \cdot A)^2, \quad (3.98)$$

где  $\lambda \neq 0$  — произвольная постоянная. Уравнения Максвелла при этом заменяются на

$$\square A_\mu - (1 - \lambda) \partial_\mu (\partial \cdot A) = 0, \quad (3.99)$$

а сопряженные импульсы для четырех компонент  $A$  запишутся в виде

$$\pi^0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 A_0)} = F^{00} - \lambda g^{00} (\partial \cdot A). \quad (3.100)$$

В частности,  $\pi^0$  теперь не обращается в нуль.

Независимо от того, равна ли нулю правая часть уравнения (3.99), как в случае свободного поля, или нет, когда мы заменяем ее сохраняющимся током, выполняется следующее равенство:

$$\square (\partial \cdot A) = 0, \quad (3.101)$$

так что  $\partial \cdot A$  представляет собой свободное скалярное поле. В классическом случае мы показали, что при соответствующих граничных условиях  $\partial \cdot A$  обращается в нуль всюду благодаря (3.101), и, следовательно, теория Максвелла восстанавливается в лоренцевской калибровке  $\partial \cdot A = 0$ . В квантовом случае это невозможно.

В самом деле, мы хотим ввести канонические коммутационные соотношения

$$[A_\rho(t, \mathbf{x}), \pi^\nu(t, \mathbf{y})] = i g_{\rho\nu} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \quad (3.102)$$

В этом случае операторное уравнение  $\partial \cdot A = 0$  не может выполняться, поскольку с точностью до постоянного множителя величина  $\partial \cdot A$  равна  $\pi^0$ , а коммутатор последнего с  $A^0$  при совпадающих временах не равен нулю. Мы видим, что квантование в соответствии с (3.102) приводит в теорию нефизические свойства, которые необходимо будет устранить. Хотя все вычисления можно провести при произвольном значении  $\lambda$ , для простоты здесь и далее будем полагать  $\lambda = 1$ . В этом случае уравнение (3.99) принимает вид

$$\square A^\mu = 0 \quad (\lambda = 1). \quad (3.103)$$

В квантовом случае выбор  $\lambda$  не совсем точно называют выбором калибровки, а случай  $\lambda = 1$  называют калибровкой Фейнмана.

В результате такого упрощения мы не сможем непосредственно доказать, что наши результаты не зависят от  $\lambda$ . Мы предоставляем читателю проделать это самостоятельно в случае свободного поля. Можно также рассмотреть различные варианты выражения (3.98), когда дополнительный член выбран в виде либо  $(\lambda/2) [\partial \cdot A - \varphi(x)]^2$ , где  $\varphi(x)$  —  $c$ -числовое классическое поле, либо  $(\lambda/2) [n(x) \cdot A]^2$ , где  $n(x)$  — классическое векторное поле (возможно, постоянное).

Помимо (3.102), в полную систему коммутационных соотношений входят также соотношения

$$[A_\rho(t, \mathbf{x}), A_\nu(t, \mathbf{y})] = [\pi_\rho(t, \mathbf{x}), \pi_\nu(t, \mathbf{y})] = 0. \quad (3.104)$$

Отсюда следует, что временные производные величины  $A_\rho$  коммутируют при совпадающих временах, так что (3.102) и (3.104) можно переписать следующим образом:

$$\begin{aligned} [A_\rho(t, \mathbf{x}), A_\nu(t, \mathbf{y})] &= [\dot{A}_\rho(t, \mathbf{x}), \dot{A}_\nu(t, \mathbf{y})] = 0, \\ [\dot{A}_\rho(t, \mathbf{x}), A_\nu(t, \mathbf{y})] &= i g_{\rho\nu} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}); \end{aligned} \quad (3.105)$$

это аналогично скалярному случаю, повторенному четыре раза. Поскольку компоненты классического потенциала вещественны, предположим, что соответствующие им квантованные величины эрмитовы.

Таким образом, динамическая система описывается уравнением (3.103) и соотношениями (3.105). Отметим, однако, некоторое отличие по сравнению со скалярным случаем, где нетривиальный коммутатор был равен

$$[\varphi(t, \mathbf{x}), \dot{\varphi}(t, \mathbf{y})] = i \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \quad (3.106)$$

Только три из четырех компонент  $A_\mu(t, \mathbf{x})$  подчиняются соотношениям, аналогичным (3.106). Коммутатор, включающий  $A_0(t, \mathbf{x})$ , имеет обратный знак, как если бы поле и его сопряженная пе-

ременная поменялись местами. Это обстоятельство связано с тем, что  $A_\mu$  является 4-вектором, и как вскоре будет показано, оно приводит к совершенно другому гильбертову пространству, когда мы «решаем» (3.105) методом, рассмотренным в разд. 3.1.

Чтобы решить эту задачу, запишем разложение Фурье поля по решениям уравнения (3.103) в виде плоских волн, полагая

$$A_\mu(x) = \int d\tilde{k} \sum_{\lambda=0}^3 [a^{(\lambda)}(k) \varepsilon_\mu^{(\lambda)}(k) e^{-ik \cdot x} + a^{(\lambda)\dagger}(k) \varepsilon_\mu^{(\lambda)*}(k) e^{ik \cdot x}]; \quad (3.107)$$

здесь, как и в выражении (3.35),

$$d\tilde{k} = \frac{d^3k}{2k_0(2\pi)^3}, \quad k_0 = |\mathbf{k}|. \quad (3.108)$$

Для любого  $k$ , лежащего на верхней поле светового конуса, величины  $\varepsilon_\mu^{(\lambda)}(k)$  образуют систему четырех линейно-независимых векторов, которые можно считать вещественными. Символ  $\dagger$  означает эрмитово сопряжение по отношению к невырожденному скалярному произведению в пространстве Фока. Из (3.108) видно, что кванты поля не имеют массы.

Чтобы прояснить смысл выражения (3.107), выберем в данной системе отсчета определенные векторы поляризации  $\varepsilon^{(\lambda)}(k)$ . Пусть  $n$  обозначает ось времени  $n^2 = 1$ ,  $n^0 > 0$ . Возьмем  $\varepsilon^{(1)}$  и  $\varepsilon^{(2)}$  в плоскости, ортогональной  $k$  и  $n$ , так что

$$\varepsilon^{(\lambda)}(k) \cdot \varepsilon^{(\lambda')}(k) = -\delta_{\lambda, \lambda'}, \quad \lambda, \lambda' = 1, 2.$$

Затем выберем вектор  $\varepsilon^{(3)}$  таким образом, чтобы он был расположен в плоскости  $(k, n)$ , ортогонален  $n$  и нормирован:

$$\varepsilon^{(3)}(k) \cdot n = 0, \quad [\varepsilon^{(3)}(k)]^2 = -1.$$

Наконец, предположим, что  $\varepsilon^{(0)}$  равен  $n$ . При таком выборе  $\varepsilon^{(\lambda)}(k)$  мы будем называть  $\varepsilon^{(1)}$  и  $\varepsilon^{(2)}$  поперечной,  $\varepsilon^{(3)}$  — продольной, а  $\varepsilon^{(0)}$  — скалярной поляризацией. В системе отсчета, в которой  $n^0 = 1$ , а  $k$  направлен вдоль третьей оси, мы имеем

$$\varepsilon^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \varepsilon^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \varepsilon^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \varepsilon^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

В любом случае справедливы следующие соотношения:

$$\sum_{\lambda} \frac{\varepsilon_\mu^{(\lambda)}(k) \varepsilon_\nu^{(\lambda)*}(k)}{\varepsilon^{(\lambda)}(k) \cdot \varepsilon^{(\lambda)*}(k)} = g_{\mu\nu}, \quad \varepsilon^{(\lambda)}(k) \cdot \varepsilon^{(\lambda')*}(k) = g^{\lambda\lambda'}. \quad (3.109)$$

Наличие знаменателя в первом выражении (3.109) обусловлено индефинитностью скалярного произведения. Из выражения (3.107)

следует, что  $A_\mu$  автоматически удовлетворяет уравнениям поля. Коммутационные соотношения (3.105) выполняются при условии, что

$$[a^{(\lambda)}(k), a^{(\lambda')\dagger}(k')] = -g^{\lambda\lambda'} 2k^0 (2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}'). \quad (3.110)$$

Кроме того, для произвольного момента времени можно записать следующее коммутационное соотношение:

$$[A_\mu(x), A_\nu(y)] = -ig_{\mu\nu} \Delta(x-y), \quad (3.111)$$

где  $\Delta$  определяется выражением (3.56) при  $m=0$ . Мы ощущаем уверенность, когда видим, что такие ковариантные выражения, как (3.111), возникают естественным путем. Введем далее вакуумное состояние, которое уничтожается операторами  $a^{(\lambda)}(k)$ :

$$a^{(\lambda)}(k)|0\rangle = 0, \quad \lambda = 0, 1, 2, 3.$$

Но здесь имеется некоторая трудность, поскольку мы, очевидно, ввели вдвое больше поляризованных состояний, чем обычно приписывается фотонам. Трудность проявляется с очевидностью, когда строится одночастичное состояние со скалярной поляризацией:

$$|1\rangle = \int d\tilde{k} f(k) a^{(0)\dagger}(k) |0\rangle.$$

Вычислим величину

$$\langle 1|1\rangle = \iint d\tilde{k} d\tilde{k}' f(k)^* f(k') \langle 0|a^{(0)}(k) a^{(0)\dagger}(k')|0\rangle.$$

С учетом (3.110) получаем парадоксальный результат, а именно

$$\langle 1|1\rangle = -\langle 0|0\rangle \int d\tilde{k} |f(k)|^2,$$

т. е. пространство Фока имеет индефинитную метрику! Если выполнить аналогичные вычисления с тремя другими типами поляризации, то мы получим состояния с положительной метрикой. Как быть с вероятностной интерпретацией квантовой механики?

До тех пор пока мы ограничиваемся рассмотрением свободного поля, ситуация не столь катастрофическая, как может показаться. Однако взаимодействия могут возбуждать нежелательные состояния. Важно отметить, что до сих пор фактически мы имели дело не с теорией Максвелла, поскольку нами был существенно изменен лагранжиан. Чтобы восстановить теорию Максвелла, можно было бы считать, что  $\partial \cdot A = 0$ , но наложить это условие на операторы невозможно. Следовательно, можно по крайней мере попытаться выбрать такие состояния  $|\psi\rangle$ , чтобы условие Лоренца выполнялось в среднем:

$$\langle \psi | \partial \cdot A | \psi \rangle = 0. \quad (3.112)$$

С целью сохранения линейной структуры физического гильбертова пространства  $\mathcal{H}_1$  потребуем, чтобы аннигиляционная (положительно-частотная) часть оператора  $\partial \cdot A$  уничтожала  $\mathcal{H}_1$ :

$$\partial^\mu A_\mu^{(+)} |\psi\rangle = 0. \quad (3.113)$$

Отсюда с очевидностью следует выражение (3.112).

Теперь рассмотрим состояния, принадлежащие  $\mathcal{H}_1$ . Поскольку условие (3.113) является линейным, можно выбрать базисные состояния, которые получаются при действии на вакуум (сглаженными) произведениями операторов рождения, соответствующих различным поляризациям. Поэтому мы можем факторизовать эти состояния следующим образом:

$$|\psi\rangle = |\psi_T\rangle |\phi\rangle; \quad (3.114)$$

здесь  $|\psi_T\rangle$  соответствует поперечным фотонам, а  $|\phi\rangle$  получается действием на вакуум продольными и скалярными операторами. Это разложение зависит от того, какие мы выберем векторы поляризации. Ясно, что достаточно изучить следствие условия (3.113) для таких состояний, как  $|\phi\rangle$ , поскольку в  $\partial \cdot A^{(+)}$  входят лишь продольные и скалярные поляризации:

$$i\partial \cdot A^{(+)} = \int d\vec{k} e^{-ik \cdot x} \sum_{\lambda=0, 3} a^{(\lambda)}(k) \varepsilon^{(\lambda)}(k) \cdot k, \quad (3.115)$$

так что условие (3.113) принимает вид

$$\sum_{\lambda=0, 3} k \cdot \varepsilon^{(\lambda)}(k) a^{(\lambda)}(k) |\phi\rangle = 0. \quad (3.116)$$

Было бы слишком ожидать, что это уравнение позволит полностью определить  $|\phi\rangle$ . Кроме того, необходимо учитывать произвол в выборе вектора поперечной поляризации, к которому по желанию можно добавлять член, пропорциональный  $k$ . Этот произвол должен отражаться на  $|\phi\rangle$ , т. е. только на части состояния, поэтому мы можем лишь предположить, что данная физическая ситуация представляется классом эквивалентных векторов, принадлежащих  $\mathcal{H}_1$ . Разумеется, необходимо убедиться в том, что в этом подпространстве векторы имеют положительную квадратичную норму.

Перепишем условие (3.116) в эквивалентном виде

$$[a^{(0)}(k) - a^{(3)}(k)] |\phi\rangle = 0. \quad (3.117)$$

Состояние  $|\phi\rangle$  может быть линейной комбинацией состояний, соответствующих одному, двум и т. д. скалярным или продольным «фотонам»:

$$\begin{aligned} |\phi\rangle &= C_0 |\phi_0\rangle + C_1 |\phi_1\rangle + \dots + C_n |\phi_n\rangle + \dots, \\ |\phi_0\rangle &= |0\rangle. \end{aligned} \quad (3.118)$$

Оператор числа этих фотонов, полученный с помощью (3.110) (обратите внимание на знак минус), запишется в виде

$$N' = \int d\bar{k} [a^{(3)\dagger}(k) a^{(3)}(k) - a^{(0)\dagger}(k) a^{(0)}(k)]. \quad (3.119)$$

Состояние  $|\phi_n\rangle$ , для которого выполняется уравнение (3.117), должно подчиняться условию

$$n \langle \phi_n | \phi_n \rangle = 0.$$

Следовательно,

$$\langle \phi_n | \phi_n \rangle = \delta_{n,0}.$$

При  $n \neq 0$  такое состояние имеет нулевую норму. Общее решение записывается в виде (3.118), причем

$$\langle \phi | \phi \rangle = |C_0|^2 \geq 0.$$

Коэффициенты  $C_i$  являются произвольными, и каждое состояние  $|\phi_n\rangle$  удовлетворяет соотношению (3.117). Остается показать, что произвол в выборе  $|\phi\rangle$  не влияет на физические наблюдаемые. Рассмотрим, например, энергию. Запишем гамильтониан

$$\begin{aligned} H = \int d^3x : \pi^\mu \dot{A}_\mu - \mathcal{L} : &= \frac{1}{2} \int d^3x : \sum_{i=1}^3 [A_i^2 + (\nabla A_i)^2] - \dot{A}_0^2 - (\nabla A_0)^2 : = \\ &= \int d\bar{k} \omega_k \left[ \sum_{\lambda=1}^3 a^{(\lambda)\dagger}(k) a^{(\lambda)}(k) - a^{(0)\dagger}(k) a^{(0)}(k) \right]. \end{aligned} \quad (3.120)$$

При действии  $H$  на состояние, принадлежащее  $\mathcal{H}_1$ , мы получаем, вообще говоря, вклад от нефизической части  $|\phi\rangle$ , но он обращается в нуль, когда мы вычисляем среднее значение, так как в силу (3.117)

$$\frac{\langle \psi | H | \psi \rangle}{\langle \psi | \psi \rangle} = \frac{\langle \psi_T | \int d\bar{k} \omega_k \sum_{\lambda=1,2} a^{(\lambda)\dagger}(k) a^{(\lambda)}(k) | \psi_T \rangle}{\langle \psi_T | \psi_T \rangle}. \quad (3.121)$$

Для оператора импульса мы получаем аналогичную формулу, следует лишь заменить  $\omega_k$  на  $\mathbf{k}$ . Поскольку наблюдаются только средние значения, мы видим, что если ограничиться рассмотрением лишь  $\mathcal{H}_1$ , то исчезают не только отрицательные вероятности, но и вклады от скалярных и продольных фотонов. Вклад дают лишь два состояния с физическими поперечными поляризациями.

Полезно отдавать себе отчет в том, что произвол в выборе  $|\phi\rangle$  следует из того факта, что в этом состоянии среднее значение потенциала  $A_\mu$  является чистым градиентом. Вычислим в качестве упражнения это среднее значение. Из (3.118) нетрудно получить следующее выражение:

$$\langle \phi | A_\mu(x) | \phi \rangle = C_0^* C_1 \langle \phi_0 | \int d\bar{k} e^{-ik \cdot x} [\varepsilon_\mu^{(3)}(k) a^{(3)}(k) + \varepsilon_\mu^{(0)}(k) a^{(0)}(k)] | \phi_1 \rangle + \text{к. с.}$$

Все остальные компоненты  $|\phi_n\rangle$  не вносят вклада в силу того, что  $A_\mu$  изменяет  $n$  на единицу,  $|\phi_0\rangle$  можно принять равным  $|0\rangle$ , а  $|\phi_1\rangle$  с необходимостью имеет вид

$$|\phi_1\rangle = \int d\tilde{q} f(q) [a^{(3)} + (q) - a^{(0)} + (q)] |0\rangle.$$

Выбирая вещественные векторы поляризации, получаем

$$\langle\phi| A_\mu(x) |\phi\rangle = \int d\tilde{k} [\varepsilon_\mu^{(3)}(k) + \varepsilon_\mu^{(0)}(k)] [C_0^* C_1 e^{-ik \cdot x} f(k) + \text{к. с.}]$$

Напомним, что  $\varepsilon^{(0)}(k) = n$  и по определению

$$\varepsilon^{(3)}(k) = \frac{k - n(k \cdot n)}{(k \cdot n)}.$$

Поэтому

$$\varepsilon_\mu^{(3)}(k) + \varepsilon_\mu^{(0)}(k) = \frac{1}{(n \cdot k)} k_\mu.$$

Следовательно, при условии что интеграл имеет смысл,

$$\langle\phi| A_\mu(x) |\phi\rangle = \partial_\mu \int \frac{d\tilde{k}}{(k \cdot n)} [iC_0^* C_1 e^{-ik \cdot x} f(k) + \text{к. с.}] = \partial_\mu \Lambda(x), \quad (3.122)$$

где скалярная  $c$ -числовая функция  $\Lambda(x)$  представляет собой решение уравнения  $\square \Lambda(x) = 0$  и может быть выбрана по желанию путем соответствующего подбора вектора  $|\phi\rangle$ . Это еще раз доказывает, что произвол в выборе  $|\phi\rangle$  отражает калибровочный произвол для  $A_\mu$  и не приводит к каким-либо существенным последствиям.

В классе эквивалентности векторов состояний вида  $|\phi_T\rangle|\phi\rangle$ , налагая условие  $|\phi\rangle \equiv |0\rangle$ , можно выбрать подходящего представителя; здесь также существен выбор базисных векторов поляризации. Вместо поперечных векторов поляризации, вещественных и ортогональных, будем использовать комплексные комбинации  $(\varepsilon^{(1)} \pm i\varepsilon^{(2)})/\sqrt{2}$ , соответствующие двум значениям спиральности фотона.

Мы не станем приводить подробного доказательства лоренц-инвариантности. Очевидно, что  $\mathcal{H}_1$  является лоренц-инвариантом, равно как и класс эквивалентности, представляющий данное физическое состояние. Читатель может построить генераторы  $M^{\nu\mu}$  преобразований Лоренца, а также доказать, что фотоны не только являются безмассовыми, но обладают спиральностью  $\pm 1$ . Иногда говорят, что фотон имеет спин 1.

Хотя только векторы, принадлежащие  $\mathcal{H}_1$ , имеют физическую интерпретацию, стоит подчеркнуть, что рассмотрение полного пространства Фока с индефинитной нормой необходимо для того, чтобы сохранить локальные свойства теории. Эти состояния входят, как правило, в суммы по полным системам промежуточных состояний.

В качестве упражнения предлагается обобщить рассмотрение, проведенное в разд. 3.1.5, с целью получения спектра абсолютно черного тела в рамках данного формализма.

### 3.2.2. Пропагатор

Мы предполагаем, что пропагатор, как и в случае скалярного поля, определяется вакуумным средним хронологического произведения. До сих пор мы использовали калибровку Фейнмана. Хронологическое упорядочение строится, как и в выражении (3.87), путем умножения произведений полей на ступенчатые функции:

$$T A_{\mu}(x) A_{\nu}(y) = \theta(x^0 - y^0) A_{\mu}(x) A_{\nu}(y) + \theta(y^0 - x^0) A_{\nu}(y) A_{\mu}(x). \quad (3.123)$$

Однако в некоторых случаях такое определение может оказаться слишком упрощенным. При совпадающих временах это выражение априори является неопределенным. К счастью, в данном случае мы с этой трудностью не сталкиваемся. Подставляя в формулу (3.123) разложение (3.107) и используя коммутаторы (3.110), находим

$$\langle 0 | T A_{\mu}(x) A_{\nu}(y) | 0 \rangle = i g_{\mu\nu} G_F(x-y) |_{m=0} = -i g_{\mu\nu} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ik \cdot (x-y)}}{k^2 + i\epsilon}. \quad (3.124)$$

Компоненты поля независимы. Отметим различие в знаке для пространственной и временной компоненты в (3.124). При  $m=0$  имеем следующее явное выражение для пропагатора Фейнмана в  $x$ -пространстве

$$G_F(x) = - \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ik \cdot x}}{k^2 + i\epsilon} = \frac{1}{4i\pi^2} \frac{1}{x^2 - i\epsilon}. \quad (3.125)$$

Связь этих формул с процессом измерения электромагнитных полей рассматривается в классических работах Бора и Розенфельда.

В заключение прокомментируем вопрос о произволе в выборе параметра  $\lambda$  в выражении (3.98). Из него мы выводим уравнения поля (3.99) и соотношения коммутации при совпадающих временах, которые имеют более сложную структуру:

$$\begin{aligned} [A_{\mu}(t, \mathbf{x}), A_{\nu}(t, \mathbf{y})] &= 0, \\ [\dot{A}_{\mu}(t, \mathbf{x}), A_{\nu}(t, \mathbf{y})] &= i g_{\mu\nu} \left( 1 + \frac{1-\lambda}{\lambda} g_{\mu 0} \right) \delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y}), \\ [\dot{A}_i(t, \mathbf{x}), \dot{A}_j(t, \mathbf{y})] &= [\dot{A}_0(t, \mathbf{x}), \dot{A}_0(t, \mathbf{y})] = 0, \\ [\dot{A}_0(t, \mathbf{x}), \dot{A}_i(t, \mathbf{y})] &= i \frac{\lambda-1}{\lambda} \frac{\partial}{\partial x^i} \delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y}). \end{aligned} \quad (3.126)$$

Следовательно, существует связь между различными компонентами. Если записать классические решения уравнения (3.99) в виде

$$A_{\mu}(x) = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^3} e^{-ik \cdot x} \bar{A}_{\mu}(k),$$



то можно получить следующее однородное матричное уравнение:

$$[k^2 g^{\mu\nu} - (1-\lambda) k^\mu k^\nu] \tilde{A}^\nu(k) = 0. \quad (3.127)$$

Для существования нетривиальных решений необходимо, чтобы детерминант  $\lambda (k^2)^4$  обращался в нуль, откуда следует, что потенциал  $\tilde{A}_\mu(k)$  сосредоточен на конусе  $k^2 = 0$ . Однако его нельзя выбрать в простом виде  $a_\mu(k) \delta(k^2)$ , поскольку это означало бы, что  $A_\mu(x)$  является решением однородного уравнения Клейна—Гордона, что неверно. Выражение для  $\tilde{A}_\mu(x)$  с необходимостью включает  $\delta(k^2)$  и  $\delta'(k^2)$ . Эквивалентный подход к решению этого вопроса связан с соотношением

$$[k^2 I - (1-\lambda) k \otimes k]^{-1} = \frac{I}{k^2} + \frac{1-\lambda}{\lambda} \frac{k \otimes k}{(k^2)^2}, \quad (3.128)$$

которое выполняется для не равных нулю  $k^2$ . Представляем читателю разоб- раться в деталях построения пространства состояний с индефинитной метри- кой для данного случая. Однако мы приведем построение пропагатора. Упрощенное определение дает

$$\begin{aligned} [\square_x g^{\mu\rho} - (1-\lambda) \partial^\mu \partial^\rho] \langle 0 | T A^\rho(x) A^\nu(y) | 0 \rangle = & \langle 0 | T [\square_x g^{\mu\rho} - \\ & - (1-\lambda) \partial^\mu \partial^\rho] A^\rho(x) A^\nu(y) | 0 \rangle + \\ & + \delta(x^0 - y^0) \langle 0 | [\dot{A}^\mu(x), A^\nu(y)] | 0 \rangle - \\ & - (1-\lambda) g^{\mu 0} \delta(x^0 - y^0) \langle 0 | [\partial_\rho A^\rho(x), A^\nu(y)] | 0 \rangle. \end{aligned} \quad (3.129)$$

Используя уравнения поля и коммутаторы при совпадающих временах, мож- но показать, что нековариантные члены обращаются в нуль, и мы получаем

$$[\square_x g^{\mu\rho} - (1-\lambda) \partial^\mu \partial^\rho] \langle 0 | T A^\rho(x) A^\nu(y) | 0 \rangle = i g^{\mu\nu} \delta^4(x-y). \quad (3.130)$$

Следовательно, учитывая (3.128) и фейнмановскую добавку  $i\epsilon$ , находим

$$\langle 0 | T A^\mu(x) A^\nu(y) | 0 \rangle = -i \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} e^{-ik \cdot (x-y)} \left[ \frac{g^{\mu\nu}}{k^2 + i\epsilon} + \frac{1-\lambda}{\lambda} \frac{k^\mu k^\nu}{(k^2 + i\epsilon)^2} \right]. \quad (3.131)$$

То, что знаменатель во втором члене последнего выражения равен  $(k^2 + i\epsilon)^2$ , а, скажем, не  $(k^2)^2 + i\epsilon$ , не кажется очевидным. Это можно проверить лишь путем последовательного вычисления, но вскоре, когда мы займемся изучением массивного векторного поля, такой результат станет понятным.

При  $\lambda = 1$  вновь возникает калибровка Фейнмана. В случае  $\lambda \rightarrow 0$  появляется сингулярность определенного типа. Предель- ный случай  $\lambda \rightarrow \infty$  называется калибровкой Ландау. Физические же результаты не должны зависеть от выбора  $\lambda$ . Например, вы- числяя интеграл типа

$$\int d^4 y \langle 0 | T A^\mu(x) A^\nu(y) | 0 \rangle j_\nu(y)$$

с гладким сохраняющимся током, нетрудно убедиться в том, что он действительно не зависит от  $\lambda$ .

### 3.2.3. Массивное векторное поле

Согласно теории Максвелла, фотоны не имеют массы или, что эквивалентно, радиус действия электромагнитных сил является бесконечным. Равенство нулю массы фотона приводит к инфра-

красной катастрофе, т. е. к испусканию неограниченно большого числа мягких фотонов всякий раз, когда ускоряется заряженная частица. Посмотрим, как введение небольшой массы может повлиять на такой результат. С точки зрения кинематики при этом появляется новое (продольное) состояние поляризации. Следовательно, взаимодействия должны быть такими, чтобы в пределе, когда масса  $\mu \rightarrow 0$ , отношение констант взаимодействия продольных и поперечных мод колебаний также обращалось в нуль.

Классические массивные частицы со спином 1 можно описать уравнениями Прока для 4-векторного поля  $A_\mu(x)$ :

$$\partial_\rho F^{\rho\nu} + \mu^2 A^\nu = 0, \quad F^{\rho\nu} = \partial^\rho A^\nu - \partial^\nu A^\rho. \quad (3.132)$$

Вычисляя дивергенцию этого уравнения, находим

$$\mu^2 \partial \cdot A = 0. \quad (3.133)$$

В случае  $\mu^2 \neq 0$  дивергенция величины  $A$  равна нулю и уравнение (3.132) принимает вид

$$(\square + \mu^2) A_\rho = 0, \quad \partial \cdot A = 0. \quad (3.134)$$

Обращение величины  $\partial \cdot A$  в нуль означает, что одна из четырех степеней свободы для  $A_\mu$  оказывается исключенной ковариантным образом, так что спин квантов поля действительно равен 1. Нетрудно показать, что лагранжиан, приводящий к соотношениям (3.132), записывается в виде

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F^2 + \frac{1}{i2} \mu^2 A^2. \quad (3.135)$$

Следует заметить, что перед массовым членом стоит знак плюс, а не минус, как перед соответствующим членом  $-(m^2/2)\varphi^2$  в лагранжиане (3.7) для случая скалярного поля. Это легко объяснить, если вспомнить, что пространственно-подобные компоненты, которые вносят отрицательный вклад в инвариантный квадрат, соответствуют физическим степеням свободы.

После квантования поле  $A_\rho(x)$  можно записать в виде следующего разложения:

$$A_\rho(x) = \int d\vec{k} \sum_{\lambda=1,2,3} [a^{(\lambda)}(k) \varepsilon_\rho^{(\lambda)}(k) e^{-ik \cdot x} + a^{(\lambda)\dagger}(k) \varepsilon_\rho^{(\lambda)*}(k) e^{ik \cdot x}] \Big|_{k^0 = \sqrt{k^2 + \mu^2},} \\ [a^{(\lambda)}(k), a^{(\lambda')\dagger}(k')] = \delta_{\lambda\lambda'} 2k^0 (2\pi)^3 \delta^3(k - k'). \quad (3.136)$$

Три пространственно-подобных ортонормированных вектора  $\varepsilon_\rho^{(\lambda)}(k)$  одновременно ортогональны времениподобному вектору  $k_\rho$ , так что, если считать их вещественными, можно получить следующие соотношения

$$\varepsilon^{(\lambda)}(k) \cdot \varepsilon^{(\lambda')}(k) = -\delta_{\lambda\lambda'}, \quad \sum_\lambda \varepsilon_\rho^{(\lambda)}(k) \varepsilon_\nu^{(\lambda)}(k) = -\left(g_{\rho\nu} - \frac{k_\rho k_\nu}{\mu^2}\right).$$

Упрощенная конструкция хронологического произведения (3.123) приводит к нековариантному пропагатору

$$\langle 0 | T A_\rho(x) A_\nu(y) | 0 \rangle = -i \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \left[ e^{-ik \cdot (x-y)} \frac{g_{\rho\nu} - k_\rho k_\nu / \mu^2}{k^2 - \mu^2 + i\epsilon} - \frac{2i}{\mu^2} \delta_{\rho 0} \delta_{\nu 0} \delta^4(x-y) \right]; \quad (3.137)$$

при этом коммутатор равен

$$[A_\rho(x), A_\nu(y)] = - \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^3} \epsilon(k^0) \delta(k^2 - \mu^2) e^{-ik \cdot (x-y)} \left( g_{\rho\nu} - \frac{k_\rho k_\nu}{\mu^2} \right). \quad (3.138)$$

Однако нековариантный вклад в хронологическое произведение представляет собой обобщенную функцию, сосредоточенную в совпадающих точках. Мы уже отмечали, что при хронологическом упорядочении такая обобщенная функция остается неопределенной. Следовательно, можно определить пропагатор, не учитывая эти члены, при этом свойства пропагатора не изменятся. В гл. 5 мы более подробно рассмотрим такое явление.

Если бы нам потребовалось описывать предельный случай с нулевой массой, то вышеприведенное рассмотрение массивных частиц со спином 1 было бы вполне удовлетворительным. Оно использует пространство Фока только с физическими состояниями, обладающими положительной нормой. Но если мы пытаемся положить  $\mu^2 = 0$ , возникают сингулярности. Это отражается в том, что если не выбрана калибровка, предельный лагранжиан  $-(1/4) F^2$  оказывается неприемлемым. Мы пытаемся найти эквивалентное описание, допускающее корректный переход к случаю нулевой массы

Прием состоит в том, чтобы ввести почти так же, как и в случае электромагнитного поля, индефинитную метрику в пространстве Фока с некоторым дополнительным условием. Поэтому рассмотрим лагранжиан Штюкельберга:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F^2 + \frac{1}{2} \mu^2 A^2 - \frac{1}{2} \lambda (\partial \cdot A)^2, \quad (3.139)$$

в котором в случае  $\lambda \neq 0$  предел  $\mu^2 \rightarrow 0$  не является сингулярным. Чтобы в предельном случае была справедливой калибровочно-инвариантная теория, существенно, чтобы поле  $A_\mu$  было связано с сохраняющимся током.

Из лагранжиана (3.139) следует уравнение

$$(\square + \mu^2) A^\rho - (1 - \lambda) \partial^\rho (\partial \cdot A) = 0. \quad (3.140)$$

Взяв дивергенцию обеих частей, получим уравнение

$$\lambda \left[ \square + \frac{\mu^2}{\lambda} \right] \partial \cdot A = 0, \quad (3.141)$$

которое остается справедливым, когда в правой части (3.140) вместо нуля стоит сохраняющийся ток.

При  $\lambda \neq 0$  величина  $\partial \cdot A$  представляет собой скалярное поле, удовлетворяющее уравнению Клейна — Гордона с квадратом массы  $m^2 = \mu^2/\lambda$  ( $m^2$  может быть отрицательной величиной; чтобы избежать этого, будем предполагать, что  $\lambda$  положительна). В силу соотношения (3.141) дивергенция поля

$$A_\rho^T = A_\rho + \frac{1}{m^2} \partial_\rho \partial \cdot A = A + \frac{\lambda}{\mu^2} \partial_\rho \partial \cdot A \quad (3.142)$$

равна нулю:

$$\partial^\rho A_\rho^T = 0. \quad (3.143)$$

Соответствующее разложение  $A$  на «поперечную» (спин 1) и «скалярную» части запишется в виде

$$A_\rho = A_\rho^T - \frac{\lambda}{\mu^2} \partial_\rho (\partial \cdot A). \quad (3.144)$$

При каноническом квантовании вводятся четыре оператора рождения и уничтожения, удовлетворяющие коммутационным соотношениям:

$$[a^{(\lambda)}(k), a^{(\lambda')\dagger}(k')] = \delta_{\lambda\lambda'} (2\pi)^3 2\sqrt{k^2 + \mu^2} \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}'), \quad 1 \leq \lambda, \lambda' \leq 3, \quad (3.145)$$

$$[a^{(0)}(k), a^{(0)\dagger}(k')] = -(2\pi)^3 2\sqrt{k^2 + m^2} \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}');$$

все остальные коммутаторы обращаются в нуль. Знак минус в последнем коммутаторе [(3.145)] служит указанием на индефинитность метрики. Случаям векторного и скалярного поля соответствуют две различные массы. Компоненты самого поля располагаются на двух гиперболоидах:

$$A_\rho(x) = \int \frac{d^3k}{2(2\pi)^3 \sqrt{k^2 + \mu^2}} \sum_{\lambda=1}^3 [a^{(\lambda)}(k) \varepsilon_\rho^{(\lambda)}(k) e^{-ik \cdot x} + a^{(\lambda)\dagger}(k) \varepsilon_\rho^{(\lambda)*}(k) e^{ik \cdot x}] + \int \frac{d^3k}{2(2\pi)^3 \sqrt{k^2 + m^2}} \frac{k_\rho}{\mu} [a^{(0)}(k) e^{-ik \cdot x} + a^{(0)\dagger}(k) e^{ik \cdot x}]. \quad (3.146)$$

Как и прежде,  $\varepsilon^{(\lambda)}(k)$  (где  $\lambda = 1, 2, 3$ ) представляют собой три ортонормированных пространственно-подобных вектора, ортогональные вектору  $k$  ( $k^2 = \mu^2$ ). Можно проверить, что выражение (3.146) удовлетворяет уравнениям (3.140) и (3.143), причем соответствующий ковариантный пропагатор записывается в виде

$$\langle 0 | T A_\rho(x) A_\nu(y) | 0 \rangle = -i \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{-ik \cdot (x-y)} \left( \frac{g_{\rho\nu} - k_\rho k_\nu / \mu^2}{k^2 - \mu^2 + i\varepsilon} + \frac{k_\rho k_\nu / \mu^2}{k^2 - m^2 + i\varepsilon} \right), \quad (3.147)$$

где  $m^2 = \mu^2/\lambda$ .

Коммутационное соотношение можно записать следующим образом:

$$[A_\rho(x), A_\nu(y)] = - \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left\{ \left[ \frac{1}{2k_0} (e^{-ik \cdot (x-y)} - e^{ik \cdot (x-y)}) \times \right. \right. \\ \times \left( g_{\rho\nu} - \frac{k_\rho k_\nu}{\mu^2} \right) \Big]_{k^0 = \sqrt{k^2 + \mu^2}} + \\ \left. \left. + \left[ \frac{1}{2k_0} (e^{-ik \cdot (x-y)} - e^{ik \cdot (x-y)}) \frac{k_\rho k_\nu}{\mu^2} \right]_{k^0 = \sqrt{k^2 + \mu^2}} \right\}. \quad (3.148)$$

Читателю предлагается исследовать пределы  $\mu \rightarrow 0$  и  $\lambda \rightarrow 0$ .

а) При  $\lambda \rightarrow 0$  и  $\mu \neq 0$  покажите, что восстанавливается теория Прока.  
 б) Если  $\lambda \neq 0$  и  $\mu \rightarrow 0$ , то  $m \rightarrow 0$ . Покажите, что в этом пределе функции Грина описываются выражениями, приведенными в разд. 3.2.2.

В частности, поскольку

$$\frac{g_{\rho\nu} - k_\rho k_\nu / \mu^2}{k^2 - \mu^2 + i\epsilon} + \frac{k_\rho k_\nu / \mu^2}{k^2 - m^2 + i\epsilon} = \frac{g_{\rho\nu}}{k^2 - \mu^2 + i\epsilon} + \frac{1 - \lambda}{\lambda} \frac{k_\rho k_\nu}{(k^2 - \mu^2 / \lambda + i\epsilon)(k^2 - \mu^2 + i\epsilon)}, \quad (3.149)$$

двухполюсный член стремится к  $1/(k^2 + i\epsilon)^2$ , что мы уже предвидели в выражении (3.131). Мы будем возвращаться к этому пределу нулевой массы в дальнейшем, в частности в гл. 4. Следует также заметить, что в формализме Шюкельберга пропагаторы ведут себя в  $k$  пространстве как  $1/k^2$  при больших  $k$ , в то время как пропагаторы Прока (3.137) для массивных частиц ведут себя иначе. В качестве дополнительного упражнения можно проверить ковариантность теории и построить генераторы  $P_\mu$  и  $M_{\mu\nu}$  группы Пуанкаре. Мы не привели здесь полного описания кинематических свойств фотонов. По этому вопросу мы рекомендуем читателю обратиться к работам, указанным в примечании. Мы ставили своей целью проложить путь к последним результатам, полученным в калибровочных теориях, которые будут рассмотрены в гл. 12 (см гл. 2 настоящей книги).

В заключение этого раздела рассмотрим схематический метод, позволяющий установить верхний предел массы фотона, используя наземные измерения. Это так называемый метод постоянного поля Шредингера. В качестве первого приближения предположим, что Земля представляет собой идеальный точечный диполь  $\mathbf{M}$ . Соответствующий локализованный сохраняющийся ток является таким, что

$$\mathbf{M} = \int d^3x \mathbf{x} \times \mathbf{j}(\mathbf{x});$$

следовательно, его можно записать в виде  $\mathbf{j} = -(1/2) \mathbf{M} \times \nabla \delta^3(\mathbf{x})$ . В статическом случае из уравнений Прока выведем соответствующий векторный потенциал, подчиняющийся условию  $\text{div } \mathbf{A} = 0$ , совместимому с этими соотношениями. При этом получаем уравнение

$$(-\Delta + \mu^2) \mathbf{A} = \mathbf{j} = -(1/2) \mathbf{M} \times \nabla \delta^3(\mathbf{x}) = -\frac{i}{2} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{ik \cdot \mathbf{x}} \mathbf{M} \times \mathbf{k},$$

решение которого записывается в виде

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = -\frac{i}{2} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \mathbf{M} \times \mathbf{k} \frac{e^{ik \cdot \mathbf{x}}}{k^2 + \mu^2} = -\mathbf{M} \times \nabla \left( \frac{e^{-\mu r}}{8\pi r} \right).$$

Соответствующий вектор магнитной индукции

$$\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A} = -\nabla \times (\mathbf{M} \times \nabla) \frac{e^{-\mu r}}{8\pi r} = [(\mathbf{M} \cdot \nabla) \nabla - \mathbf{M} \Delta] \frac{e^{-\mu r}}{8\pi r}.$$

Направим ось  $z$  вдоль вектора  $M$ . Тогда  $V$  принимает вид

$$V = \frac{e^{-\mu r}}{8\pi r^3} |M| \left\{ \left[ \hat{r}(\hat{r} \cdot \hat{z}) - \frac{1}{3} \hat{z} \right] (\mu^2 r^2 + 3\mu r + 3) - (2/3) \hat{z} \mu^2 r^2 \right\},$$

где  $\hat{z}$  — единичный вектор, направленный вдоль оси  $z$ . Мы видим, что поле расщепилось на две части. В первой части выделен множитель  $[\hat{r}(\hat{r} \cdot \hat{z}) - (1/3)\hat{z}]$ , соответствующий угловому распределению магнитного поля в пределе  $\mu \rightarrow 0$ . На постоянном расстоянии  $r$  имеется однородный дополнительный член, направленный противоположно земному диполю. Детальное измерение углового распределения магнитного поля позволяет установить верхний предел массы  $\mu$  порядка  $4 \cdot 10^{-48}$  г ( $3 \cdot 10^{-15}$  эВ  $\sim 10^{-10}$  см $^{-1}$ ). В последних измерениях, использующих другой метод, эти результаты улучшены на порядок.

### 3.2.4. Вакуумные флуктуации

Прежде чем погрузиться в изучение соответствующих нелинейных задач, полезно сначала рассмотреть простые эффекты, которые возникают при квантовании поля. Особый интерес представляют те эффекты, которые на первый взгляд не являются прямым следствием концепции частиц, в данном случае — фотонов. Мы дадим схематическое описание двух таких ситуаций, которые связаны с возможностью наблюдения изменений в вакуумных флуктуациях. С такими явлениями нам уже приходилось сталкиваться при обсуждении в гл. 2 интерпретации лэмбовского сдвига, предложенной Велтоном.

Мы можем включить в рассмотрение простые макроскопические источники, изменяя граничные условия для поля, которое до сих пор рассматривалось в свободном пространстве. Эта процедура не совсем удовлетворительна, поскольку она не описывает микроскопический механизм, приводящий к этим граничным условиям. Однако она удобна для простых вычислений. Казимир впервые в 1948 г. указал, что в вакууме электромагнитное поле в действительности не исчезает, а испытывает флуктуации (см. раздел 3.1.2). Если мы вносим макроскопические тела, которые даже не имеют заряда, необходимо выполнить определенную работу, чтобы установить соответствующие новые граничные условия. Невозможно предугадать знак этого эффекта, поэтому работа здесь понимается в алгебраическом смысле, а именно как различие в энергиях нулевых колебаний двух конфигураций. Первоначально не учитывался (бесконечный) вклад  $\sum (1/2) \hbar \omega_\alpha$  в гамильтониан на том основании, что он ненаблюдаем. Однако его изменения можно измерить.

Проиллюстрируем это положение на примере простой конфигурации. Рассмотрим две большие идеально проводящие параллельные пластины — пример, который впервые изучался Казимиром. Разумеется, для этой цели можно изучать различные конфигурации и различные материалы; результаты получаются

аналогичными, за исключением, возможно, того, что эффект будет иметь другой знак. Пусть пластины представляют собой квадраты со стороной длины  $L$  и расположены на расстоянии  $a$  друг от друга (рис. 3.1), причем  $a \ll L$ . Рассмотрим энергию на единицу

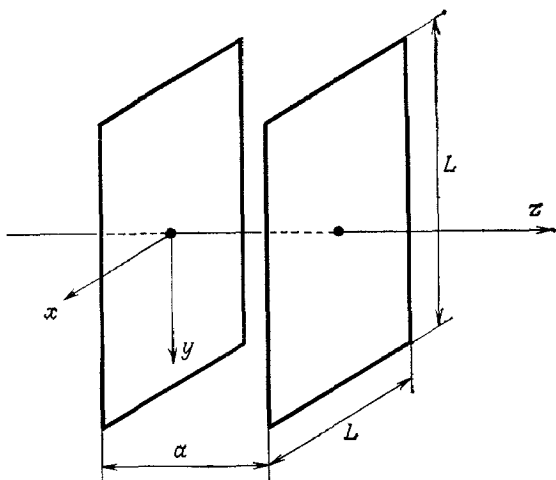


РИС. 3.1. Эффект Казимира в случае двух параллельных пластин.

поверхности проводника по отношению к вакууму. Ее производная равна силе, действующей на единицу поверхности и имеет размерность  $ML^{-1}T^{-2}$  (где  $M$  — масса,  $L$  — длина, а  $T$  — время). В задачу входят только величины  $\hbar$ ,  $c$  и расстояние между пластинами  $a$  (граничные условия, состоящие в том, что вектор  $\mathbf{E}$  перпендикулярен, а  $\mathbf{B}$  параллелен пластине на внутренней поверхности, не вводят никаких размерных величин). Несомненно, как и нулевая энергия, результат пропорционален  $\hbar$ . Следовательно, из соображений размерности мы получаем, что сила на единицу поверхности должна быть пропорциональна величине  $\hbar c/a^4$ . Ниже мы покажем, что это будет сила притяжения.

Рассмотрим моды колебаний в объеме  $L^2a$ , учитывая, что  $L \gg a$ , и пренебрегая вкладом, вносимым краями пластин. Известно, что вклад в энергию вносят лишь поперечные моды. Если компонента  $k_z$ , перпендикулярная поверхности пластин, отлична от нуля, то она может принимать лишь дискретные значения  $k_z = n\pi/a$  ( $n = 1, 2, \dots$ ), чтобы узлы располагались на пластинках, при этом имеются два состояния поляризации. Однако если  $k_z$  обращается в нуль, то остается только одна мода, и энергия нулевых колебаний данной конфигурации записывается в виде

$$E = \sum \frac{1}{2} \hbar \omega_\alpha = \frac{\hbar c}{2} \sum_\alpha |\mathbf{k}_\alpha| = \frac{\hbar c}{2} \int L^2 \frac{d^2k_\perp}{(2\pi)^2} \left[ |\mathbf{k}_\parallel| + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left( \mathbf{k}_\parallel^2 + \frac{n^2 \pi^2}{a^2} \right)^{1/2} \right].$$

Разумеется, мы видим, что это выражение не имеет смысла, поскольку оно приводит к бесконечности. Но мы должны вычесть свободную энергию, которая в тот же объем вносит следующий вклад:

$$\begin{aligned} E_0 &= \frac{\hbar c}{2} \int \frac{L^2 d^2 k_{\parallel}}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{a dk_z}{2\pi} 2 \sqrt{k_{\parallel}^2 + k_z^2} = \\ &= \frac{\hbar c}{2} \int \frac{L^2 d^2 k_{\parallel}}{(2\pi)^2} \int_0^{\infty} dn 2 \sqrt{k_{\parallel}^2 + n^2 \pi^2 / a^2}. \end{aligned}$$

Следовательно, энергия на единицу поверхности дается выражением

$$\mathcal{E} = \frac{E - E_0}{L^2} = \frac{\hbar c}{2\pi} \int_0^{\infty} k dk \left( \frac{k}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{k^2 + n^2 \pi^2 / a^2} - \int_0^{\infty} dn \sqrt{k^2 + n^2 \pi^2 / a^2} \right).$$

Очевидно, что из-за ультрафиолетовых (при больших  $k$ ) расходимостей эта величина все еще не определена. Однако для длин волн меньших, чем размеры атома, приближение идеального проводника не является реалистичным. Поэтому введем в последние подынтегральные выражения гладкую функцию обрезания  $f(k)$ , которая равна единице при  $k \leq k_m$  и обращается в нуль при  $k \gg k_m$ , где  $k_m$  имеет порядок обратной величины размера атома. Положим  $u = a^2 k^2 / \pi^2$ ; тогда

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= \hbar c \frac{\pi^2}{4a^3} \int_0^{\infty} du \left[ \frac{\sqrt{u}}{2} f\left(\frac{\pi}{a} \sqrt{u}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{u+n^2} f\left(\frac{\pi}{a} \sqrt{u+n^2}\right) - \right. \\ &\quad \left. - \int_0^{\infty} dn \sqrt{u+n^2} f\left(\frac{\pi}{a} \sqrt{u+n^2}\right) \right], \end{aligned}$$

$$\mathcal{E} = \hbar c \frac{\pi}{4a^3} \left[ \frac{1}{2} F(0) + F(1) + F(2) + \dots - \int_0^{\infty} dn F(n) \right].$$

Здесь мы определили функцию

$$F(n) = \int_0^{\infty} du \sqrt{u+n^2} f\left(\frac{\pi}{a} \sqrt{u+n^2}\right).$$

Замена суммы интегралом оправдана в силу того, что благодаря присутствию функции обрезания мы имеем абсолютную сходимость. При  $n \rightarrow \infty$  получаем  $F(n) \rightarrow 0$ . Для вычисления разности между суммой и интегралом, стоящей в квадратных скобках последнего выражения для  $\mathcal{E}$ , можно использовать формулу Эйлера —



Маклорена:

$$\frac{1}{2} F(0) + F(1) + F(2) + \dots - \int_0^{\infty} dn F(n) = -\frac{1}{2!} B_2 F'(0) - \\ - \frac{1}{4!} B_4 F'''(0) + \dots$$

Здесь числа Бернулли  $B_\nu$  определяются с помощью ряда

$$\frac{y}{e^y - 1} = \sum_{\nu=0}^{\infty} B_\nu \frac{y^\nu}{\nu!},$$

откуда находим  $B_2 = 1/6$ ,  $B_4 = -1/30$ , ... Мы имеем

$$F(n) = \int_{n^2}^{\infty} du \sqrt{u} f\left(\frac{\pi \sqrt{u}}{a}\right), \quad F'(n) = -2n^2 f\left(\frac{\pi n}{a}\right).$$

Предположим, что  $f(0) = 1$ , а все ее производные обращаются в нуль при нулевом значении аргумента, так что  $F'(0) = 0$ ,  $F'''(0) = -4$ , а все производные функции  $F$  более высокого порядка равны нулю. Таким образом, в окончательный результат параметр обрезания не входит:

$$\mathcal{E} = \frac{\hbar c \pi^2}{a^3} \frac{B_4}{4!} = -\frac{\pi^2}{720} \frac{\hbar c}{a^3}.$$

При этом сила на единицу площади  $\mathcal{F}$  дается выражением

$$\mathcal{F} = -\frac{\pi^2}{240} \frac{\hbar c}{a^4} = -\frac{0,013}{(a_{\mu m})^4} \text{ дин/см}^2. \quad (3.150)$$

Мы видим, что ее знак соответствует притяжению.

Эту крошечную силу экспериментально обнаружил в 1958 г. Спарни, который смог измерить не только ее величину, но и зависимость ее от расстояния между пластинами!

Полученные здесь результаты могут быть подвергнуты критике, поскольку мы не учитывали эффекты вне пластин. Однако в рассмотренном нами примере они полностью сокращаются. Из рассмотрений, проведенных в данном разделе, можно сделать общий вывод, что вакуумные флуктуации проявляются в условиях, сильно отличающихся от тех, при которых происходит рождение и поглощение частиц. Изучая влияние различных типов тел на конфигурацию вакуума, можно дать интересное объяснение силам, действующим на них. Этот ход рассуждений следует иметь в виду. В нем можно узнать один из истоков швингеровского подхода к явлениям теории квантованных полей, основанном на источниках.

В качестве другого примера рассмотрим кратко силы Ван-дер-Ваальса, действующие между нейтральными атомами или молекулами. Для этого исследуем

флуктуации поля в присутствии двух систем, весьма похожих на рассмотренные выше. Затем мы должны были бы получить микроскопическое описание эффекта Казимира для макроскопических тел, используя остаточные силы между составляющими. Но в действительности мы не будем так поступать, а последуем описанию, данному Файнбергом и Сачером. Более подробное исследование этого вопроса дается в гл. 7. В гл. 1 мы показали, что классическая плотность энергии электромагнитного поля равна  $(\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2)/2$ . Нейтральная система может взаимодействовать с электромагнитным полем. Обозначим через  $\alpha_E$  (или  $\alpha_B$ ) статическую электрическую (или магнитную) восприимчивость. В статическом электрическом поле в силу нейтральности заряда имеем  $\int d^3x \rho(x) = 0$ , где  $\rho$  — плотность заряда. Поляризация определяется как  $\mathbf{P} = \int d^3x \rho(x) \mathbf{x}$ , и соответствующий вклад в энергию, обусловленный изменением электрического поля  $\delta\mathbf{E} = -\nabla\delta V$ , равен  $\int d^3x \rho \delta V = -\int d^3x \rho(x) \mathbf{x} \cdot \delta\mathbf{E} = -\mathbf{P} \cdot \delta\mathbf{E}$ , если  $\delta\mathbf{E}$  практически постоянно во всей системе. По определению восприимчивости для слабых полей имеем  $\mathbf{P} = \alpha_E \mathbf{E}$ ; следовательно, при небольшом изменении поля  $\delta\mathbf{E}$  изменение энергии взаимодействия равно  $-\alpha_E \mathbf{E} \cdot \delta\mathbf{E} = \delta[-\alpha_E (\mathbf{E}^2/2)]$ . Применяя аналогичные рассуждения, можно получить вклад в энергию, даваемый магнитным полем. В конечном счете энергия взаимодействия запишется в виде

$$E_{\text{вз}} = -\frac{1}{2} (\alpha_E \mathbf{E}^2 + \alpha_B \mathbf{B}^2).$$

Попробуем дать релятивистское феноменологическое квантовое обобщение этого результата. Наша цель состоит в том, чтобы записать соответствующую взаимодействию часть лагранжиана таким образом, что после ее интегрирования по трехмерному пространству в статическом поле и в нерелятивистском пределе мы получим приведенное выше выражение с обратным знаком. Нейтральную систему можно описать некоторым эрмитовым скалярным полем  $\phi$ . Требуемыми свойствами обладает единственный лоренцев скаляр, квадратичный по  $F_{\mu\nu}$  и  $\phi$ , который записывается в виде

$$-\mathcal{L}_{\text{вз}} = g_1 \partial_\alpha \phi \partial_\beta \phi F^{\alpha\beta} F^{\beta\rho} + g_2 \phi^2 F^2,$$

где  $g_1$  и  $g_2$  связаны с  $\alpha_E$  и  $\alpha_B$  следующими соотношениями:

$$g_1 = \frac{1}{2m} (\alpha_E + \alpha_B), \quad g_2 = -\frac{m}{4} \alpha_B.$$

Наше стремление получить лагранжиан  $\mathcal{L}_{\text{вз}}$ , квадратичный по  $\phi$  (а, скажем, не линейный), объясняется тем, что, для того чтобы провести сравнение с нерелятивистским пределом, нам придется вычислять средние значения по одночастичному состоянию. В нерелятивистском пределе  $\langle 1 | \int d^3x : \phi^2(x) : | 1 \rangle \approx \approx 1/m \langle 1 | 1 \rangle$ , а  $\langle 1 | \int d^3x : (\partial_\alpha \phi)^2 : | 1 \rangle \approx m \langle 1 | 1 \rangle$ . Поскольку  $-\mathcal{L}_{\text{вз}} = \mathcal{H}_{\text{вз}}$ , выражение, записанное выше, позволяет нам получить асимптотический вид статического потенциала взаимодействия между двумя нейтральными поляризуемыми системами. Повторим вывод, который используется при получении кулоновского потенциала между заряженными системами. Энергия взаимодействия заряда 1 с полем записывается в виде  $\int d^3x j^{(1)}(x) A(x)$ , но  $A(x)$  создается зарядом 2 и дается интегралом  $\int d^4y G(x-y) j^{(2)}(y)$ . Поскольку ток  $j^{(2)}$  по предположению не зависит от времени, сначала можно проинтегриро-

вать по  $y^0$ , используя выражение

$$G_F(x-y) = \frac{1}{4i\pi^2} \frac{1}{x_0^2 - \mathbf{x}^2 - i\epsilon}.$$

Это дает

$$A = \int d^3y \frac{1}{4\pi} \frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|} j^{(2)}(\mathbf{y}),$$

откуда получается обычное кулоновское взаимодействие

$$E_{\text{вз}} = \int d^3x d^3y j^{(1)}(\mathbf{x}) \frac{1}{4\pi|\mathbf{x}-\mathbf{y}|} j^{(2)}(\mathbf{y}).$$

Вернемся теперь к нашему случаю. Нас, очевидно, интересуют функции Грина квадратичных операторов, таких, например, как  $F^2$  (входящих как коэффициенты при  $g_2$ ). Если  $G_{\rho\sigma, \alpha\beta}(x-y)$  означает величину  $\langle 0 | T F_{\rho\sigma}(x) F_{\alpha\beta}(y) | 0 \rangle$ , то функция Грина для  $F^2$  будет пропорциональна квадрату данного выражения, т. е.  $G_{\rho\sigma, \alpha\beta}(x-y) G^{\rho\sigma, \alpha\beta}(x-y)$ . Типичное выражение для этой обобщенной функции имеет вид  $1/(x^2 - i\epsilon)^2$ . Вклад от  $g_1$  описывается аналогичным выражением. Следовательно, можно ожидать, что потенциальная энергия пропорциональна величине

$$V(|\mathbf{x}-\mathbf{y}|) \sim \int dy_0 \frac{1}{[(x_0 - y_0)^2 - (\mathbf{x}-\mathbf{y})^2 - i\epsilon]^2} \sim \frac{\text{const}}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^2}.$$

Этот результат, впервые полученный Казимиром и Полдером, не согласуется с нерелятивистской теорией сил Ван-дер-Ваальса, которая дает потенциал, спадающий как  $|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^{-6}$  на больших расстояниях. В гл. 7 мы дадим вывод полного выражения, полученного Файнбергом и Сачером для потенциала на больших расстояниях;

$$V_{ab}^{\text{асимпт}}(|\mathbf{x}-\mathbf{y}|) = -\frac{1}{(4\pi)^3 |\mathbf{x}-\mathbf{y}|^7} [23(\alpha_E^a \alpha_E^b + \alpha_B^a \alpha_B^b) - 7(\alpha_E^a \alpha_B^b + \alpha_E^b \alpha_A^a)],$$

и укажем область его применимости. Там мы объясним, почему это выражение отличается от нерелятивистского закона  $|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^{-6}$ .

### 3.3. ПОЛЕ ДИРАКА И ПРИНЦИП ЗАПРЕТА

В предыдущей главе мы уже ввели частицы Дирака и представили соображения, согласно которым эти частицы следует описывать в рамках теории многих тел. Каноническое квантование проводилось до сих пор для частиц Бозе—Эйнштейна, однако эксперименты показывают, что частицы со спином  $1/2$ , такие, как электроны и нуклоны, удовлетворяют принципу Паули и подчиняются статистике Ферми—Дирака. Таким образом, при рассмотрении частиц с полуцелым спином нам придется изменить правила игры.

#### 3.3.1. Антиккоммутаторы

Уравнение Дирака следует рассматривать на тех же основаниях, что и уравнения Максвелла. И те и другие являются классическими уравнениями поля. Следовательно, нам нужно ввести лагранжиан и сопряженные импульсы для комплексных полей  $\psi$  и  $\psi^\dagger$  (или

$\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0$ ). В случае свободного поля уравнения

$$(i\gamma \cdot \vec{\partial} - m)\psi = 0, \quad \bar{\psi}(i\gamma \cdot \vec{\partial} + m) = 0 \quad (3.151)$$

получают вариацией действия, используя в качестве плотности лагранжиан, в который производные  $\psi$  и  $\bar{\psi}$  входят линейно:

$$\mathcal{L} = \frac{i}{2} [\bar{\psi} \gamma^\mu (\partial_\mu \psi) - (\partial_\mu \bar{\psi}) \gamma^\mu \psi] - m \bar{\psi} \psi. \quad (3.152)$$

Мы имеем следующее уравнение для  $\psi$ :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\psi}} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \bar{\psi})} = \frac{i}{2} \gamma^\mu \partial_\mu \psi - m \psi + \frac{i}{2} \partial_\mu (\gamma^\mu \psi) = 0.$$

Аналогичное уравнение получается, когда используется вариация по  $\bar{\psi}$ . Если  $\psi$  и  $\bar{\psi}$  удовлетворяют уравнениям поля, то лагранжиан (3.152) обращается в нуль. Поскольку каноническое квантование неприемлемо в данном случае, применим следующую процедуру. Предположим, что  $\psi$  и  $\bar{\psi}$  — квантованные операторы, действующие в некотором гильбертовом пространстве. Выясним, при каких условиях генераторы группы Пуанкаре, построенные в соответствии с теоремой Нётер, преобразуют поля согласно законам преобразования, рассмотренным в гл. 2. Так как эти генераторы, а также наблюдаемые величины выражаются через динамические переменные  $\psi$  и  $\bar{\psi}$ , это обеспечит ковариантность теории; мы затем докажем, что эти наблюдаемые коммутируют в случае пространственно-подобных интервалов.

Используя уравнения движения, из (3.152) можно получить следующее выражение для плотности тензора энергии-импульса:

$$\Theta^{\mu\nu} = \partial^\nu \bar{\psi} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \bar{\psi})} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial^\mu \psi)} \partial^\nu \psi - g^{\mu\nu} \mathcal{L} = \frac{i}{2} \bar{\psi} \overleftrightarrow{\gamma}^\mu \partial^\nu \psi. \quad (3.153)$$

Поскольку у нас нет какого-либо рецепта, мы упорядочили это выражение произвольно, помещая  $\bar{\psi}$  слева от  $\psi$ . Ясно, что мы действовали эвристически. При этом тензор  $\Theta^{\mu\nu}$  не является симметричным. Исследуем поэтому обобщенную плотность углового момента, последовательно учитывая внутренние переменные (т. е. спинорные индексы). Рассмотрим инфинитезимальное однородное преобразование Лоренца, при действии которого мы должны иметь

$$\psi(x) \rightarrow \psi'(x) = S(\Lambda) \psi(\Lambda^{-1}x) = \psi(x) + \delta\psi(x),$$

$$\Lambda = I - \frac{i}{2} \delta\omega_{\alpha\beta} M^{\alpha\beta}, \quad M^{\alpha\beta}{}_{\mu\nu} = -M^{\beta\alpha}{}_{\mu\nu} = i(g^\alpha_\mu g^\beta_\nu - g^\alpha_\nu g^\beta_\mu),$$

$$S(\Lambda) = I - \frac{i}{4} \delta\omega_{\alpha\beta} \sigma^{\alpha\beta}, \quad (3.154)$$

$$\delta\psi(x) = -\frac{i}{2} \delta\omega_{\alpha\beta} \left[ \frac{\sigma^{\alpha\beta}}{2} + i(x^\alpha \partial^\beta - x^\beta \partial^\alpha) \right] \psi(x) =$$

$$= -\frac{i}{2} \delta\omega_{\alpha\beta} L^{\alpha\beta} \psi(x).$$

Оператор  $L^{\alpha\beta} = (1/2) \sigma^{\alpha\beta} + i(x^\alpha \partial^\beta - x^\beta \partial^\alpha)$  действует как на спинорные индексы, так и на пространственные переменные. Следовательно,

$$\delta \bar{\psi}(x) = \delta \psi(x)^\dagger \gamma^0 = \frac{i}{2} \bar{\psi}(x) \bar{L}^{\alpha\beta} \delta \omega_{\alpha\beta};$$

здесь

$$\bar{L}^{\alpha\beta} = \gamma^0 L^{\alpha\beta} \gamma^0 = \frac{\sigma^{\alpha\beta}}{2} - i(x^\alpha \overleftrightarrow{\partial}^\beta - x^\beta \overleftrightarrow{\partial}^\alpha).$$

Если  $\delta \omega^{\alpha\beta}$  не зависит от  $x$ , мы убеждаемся, что действие инвариантно. Если же  $\delta \omega^{\alpha\beta}$  изменяются в зависимости от  $x$ , мы получаем следующую вариацию около стационарной точки:

$$\begin{aligned} \delta I &= \int d^4x \frac{1}{2} \bar{\psi} \left[ \left\{ \gamma^\mu, \frac{\sigma^{\alpha\beta}}{2} \right\} + i(x^\alpha \overleftrightarrow{\partial}^\beta - x^\beta \overleftrightarrow{\partial}^\alpha) \gamma^\mu \right] \psi \frac{\partial_\mu \delta \omega_{\alpha\beta}}{2} = \\ &= - \int d^4x (\partial_\mu J^{\mu, \alpha\beta}) \frac{\delta \omega_{\alpha\beta}}{2} = 0. \end{aligned}$$

Следовательно, предполагаемая обобщенная плотность тензора углового момента имеет вид

$$\begin{aligned} J^{\mu, \alpha\beta} &= \frac{1}{2} \bar{\psi} \left[ i(x^\alpha \overleftrightarrow{\partial}^\beta - x^\beta \overleftrightarrow{\partial}^\alpha) \gamma^\mu + \left\{ \gamma^\mu, \frac{\sigma^{\alpha\beta}}{2} \right\} \right] \psi = \\ &= x^\alpha \Theta^{\mu\beta} - x^\beta \Theta^{\mu\alpha} + \frac{1}{2} \bar{\psi} \left\{ \gamma^\mu, \frac{\sigma^{\alpha\beta}}{2} \right\} \psi. \end{aligned} \quad (3.155)$$

Можно проверить непосредственно, что  $\partial_\mu J^{\mu, \alpha\beta} = 0$ . Этот тензор имеет как орбитальную, так и спиновую части. В приведенном выражении  $\psi$  и  $\bar{\psi}$  играют одинаковую роль. Интегралы по пространству от величин  $\Theta^{0\mu}$  и  $J^{0, \alpha\beta}$  дадут квантовые генераторы группы, когда мы найдем коммутационные соотношения для полей. Кроме того, инвариантность относительно фазового преобразования  $\psi \rightarrow e^{i\alpha} \psi$ ,  $\bar{\psi} \rightarrow e^{-i\alpha} \bar{\psi}$  приводит к сохраняющемуся току

$$J^\mu = \bar{\psi} \gamma^\mu \psi, \quad (3.156)$$

который использовался в одночастичной теории, рассмотренной в гл. 2, для нормировки состояний при интегрировании величины  $J^0$ . В случае квантованной картины необходимо дать более общее описание

Чтобы выполнить нашу программу, разложим операторы  $\psi(x)$  и  $\bar{\psi}(x)$  по  $c$ -числовым решениям уравнения Дирака в виде плоских волн, с операторно-значными амплитудами  $b$ ,  $b^\dagger$ ,  $d$  и  $d^\dagger$ :

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{m}{k_0} \sum_{\alpha=1, 2} [b_\alpha(k) u^{(\alpha)}(k) e^{-ik \cdot x} + d_\alpha^\dagger(k) v^{(\alpha)}(k) e^{ik \cdot x}], \\ \bar{\psi}(x) &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{m}{k_0} \sum_{\alpha=1, 2} [b_\alpha^\dagger(k) \bar{u}^{(\alpha)}(k) e^{ik \cdot x} + d_\alpha(k) \bar{v}^{(\alpha)}(k) e^{-ik \cdot x}]. \end{aligned} \quad (3.157)$$

Спиноры  $u$  и  $v$  мы определили в предыдущей главе [см. формулы (2.37) и (2.38)]. Операторы  $b$  и  $d$  должны удовлетворять коммутационным соотношениям, таким, чтобы выполнялось следующее равенство:

$$\psi(x+a) = e^{iP \cdot a} \psi(x) e^{-iP \cdot a},$$

что в дифференциальной форме записывается в виде

$$\partial_\mu \psi(x) = i [P_\mu, \psi(x)], \quad \partial_\mu \bar{\psi}(x) = i [P_\mu, \bar{\psi}(x)]. \quad (3.158)$$

Используя разложения (3.157), запишем следующее выражение:

$$P_\mu = \int d^3x \Theta_\mu^0 = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{m}{k_0} k_\mu \sum_\alpha [b_\alpha^\dagger(k) b_\alpha(k) - d_\alpha(k) d_\alpha^\dagger(k)]; \quad (3.159)$$

из этого выражения необходимо вычесть вакуумный вклад. Из (3.159) следует, что если вакуум определен соотношениями  $b_\alpha(k)|0\rangle = d_\alpha(k)|0\rangle = 0$  и если бы мы квантовали, опираясь на коммутаторы, то  $b$ -частицы и  $d$ -частицы давали бы вклад в энергию с противоположными знаками. Теория не приводила бы к существованию устойчивого основного состояния.

Из (3.158) видно, что трансляционная инвариантность выполняется при следующих условиях:

$$\begin{aligned} [P_\mu, b_\alpha(k)] &= -k_\mu b_\alpha(k), & [P_\mu, d_\alpha(k)] &= -k_\mu d_\alpha(k), \\ [P_\mu, b_\alpha^\dagger(k)] &= k_\mu b_\alpha^\dagger(k), & [P_\mu, d_\alpha^\dagger(k)] &= k_\mu d_\alpha^\dagger(k). \end{aligned} \quad (3.160)$$

Подставляя сюда вместо  $P_\mu$  его разложение (3.159), получаем эквивалентное соотношение

$$\left[ \sum_\beta [b_\beta^\dagger(q) b_\beta(q) - d_\beta(q) d_\beta^\dagger(q)], b_\alpha(k) \right] = -(2\pi)^3 \frac{k_0}{m} \delta^3(\mathbf{k}-\mathbf{q}) b_\alpha(k),$$

а также три аналогичных соотношения. Если предположить, что

$$[d_\beta^\dagger(q) d_\beta(q), b_\alpha(k)] = 0,$$

это условие можно записать в виде

$$\begin{aligned} \sum_\beta [b_\beta^\dagger(q) \{b_\beta(q), b_\alpha(k)\} - \{b_\beta^\dagger(q), b_\alpha(k)\} b_\beta(q)] &= \\ = -(2\pi)^3 \frac{k_0}{m} \delta^3(\mathbf{k}-\mathbf{q}) b_\alpha(k). \end{aligned}$$

Следовательно, мы можем дать правильную интерпретацию операторам энергии и импульса, используя как альтернативу антикоммутаторы (фигурные скобки в последующем выражении) вместо коммутаторов между основными операторами рождения и уничтожения  $b^\dagger$ ,  $d^\dagger$ ,  $b$  и  $d$ . Поскольку после вычитания энергии вакуума остаются только положительные вклады в энергию, мы решили

также и проблему устойчивости, о которой шла речь выше. Следовательно, мы полагаем, что

$$\begin{aligned} \{b_\alpha(k), b_\beta^\dagger(q)\} &= (2\pi)^3 \frac{k^0}{m} \delta^3(\mathbf{k}-\mathbf{q}) \delta_{\alpha\beta}, \\ \{d_\alpha(k), d_\beta^\dagger(q)\} &= (2\pi)^3 \frac{k^0}{m} \delta^3(\mathbf{k}-\mathbf{q}) \delta_{\alpha\beta}, \end{aligned} \quad (3.161)$$

а все остальные антикоммутируют обращаются в нуль. Как следствие получаем антикоммутирует

$$\{\psi_\xi(t, \mathbf{x}), \psi_\eta^\dagger(t, \mathbf{y})\} = \delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y}) \delta_{\xi\eta}. \quad (3.162)$$

Негрудно показать, что условия (3.160) выполняются, равно как и аналогичные им условия, вытекающие из требования ковариантности относительно однородных преобразований, которые включают коммутаторы генераторов  $J^{\alpha\beta} = \int d^3x J^{0, \alpha\beta}$  с полем. Соотношения (3.160) можно истолковать следующим образом:  $b^\dagger(k)$  и  $d^\dagger(k)$  создают [а  $b(k)$  и  $d(k)$  уничтожают] 4-импульс  $k^\mu$ .

Произведения Вика можно обобщить на случай полей Ферми. При перестановке операторов рождения влево от операторов уничтожения необходимо ввести знак, соответствующий четности перестановки. Таким образом, правильное выражение для полной величины энергии-импульса имеет вид

$$\begin{aligned} P^\mu &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{m}{k^0} k^\mu \sum_{\alpha=1, 2} : b_\alpha^\dagger(k) b_\alpha(k) - d_\alpha(k) d_\alpha^\dagger(k) : = \\ &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{m}{k^0} k^\mu \sum_{\alpha=1, 2} [b_\alpha^\dagger(k) b_\alpha(k) + d_\alpha^\dagger(k) d_\alpha(k)]. \end{aligned} \quad (3.163)$$

Мы видим отсюда, что энергия квантового состояния является суммой положительных вкладов. Займемся теперь изучением структуры соответствующего пространства Фока.

### 3.3.2. Пространство Фока для фермионов

Рассмотрим сначала одночастичные состояния. Подразумевается, что в импульсном пространстве произведено необходимое сглаживание. Для каждого данного 4-импульса теперь имеется четырехкратное вырождение. Обозначим соответствующие состояния через  $|a\rangle$  ( $a=1, 2, 3, 4$ ):

$$|1\rangle = b_1^\dagger(k) |0\rangle, \quad |2\rangle = b_2^\dagger(k) |0\rangle, \quad |3\rangle = d_1^\dagger(k) |0\rangle, \quad |4\rangle = d_2^\dagger(k) |0\rangle.$$

Они удовлетворяют соотношению  $P_\mu |a\rangle = k_\mu |a\rangle$ . Для того чтобы различать эти состояния, найдем наблюдаемые, коммутирующие с  $P_\mu$ . Одной из таких наблюдаемых является заряд (нормирован-

ный на  $\pm 1$  для одночастичного состояния)

$$Q = \int d^3x j^0(x) = \int d^3x : \psi^\dagger(x) \psi(x) : = \\ = \int d\vec{k} \sum_{\alpha=1,2} [b_\alpha^\dagger(k) b_\alpha(k) - d_\alpha^\dagger(k) d_\alpha(k)]. \quad (3.164)$$

В случае дираковских частиц символом  $d\vec{k}$  будем обозначать величину  $[d^3k/(2\pi)^3](m/k^0)$ , а не  $d^3k/(2\pi)^3 2k_0$ , как в случае бозонов. Поскольку вакуум имеет нулевой заряд и

$$[Q, b_\alpha^\dagger(k)] = b_\alpha^\dagger(k), [Q, d_\alpha^\dagger(k)] = -d_\alpha^\dagger(k),$$

мы имеем

$$Q|a\rangle = \begin{cases} +|a\rangle, & a=1, 2, \\ -|a\rangle, & a=3, 4. \end{cases}$$

В противоположность «классическому» случаю, где мы попытались интерпретировать (3.164) как положительную квадратичную норму, в квантовом случае этого сделать нельзя. Использование антикоммутаторов полностью изменило ситуацию; энергия теперь положительна, а заряд является неопределенной величиной.

Таким образом, квантованная теория Дирака описывает частицы двух типов. В электродинамике  $eQ$  будет электрическим зарядом, а  $\psi$  будет уничтожать электроны и создавать позитроны. Поскольку  $[Q, P_\mu] = 0$ ,  $Q$  не зависит от времени и  $[Q, \psi(x)] = -\psi(x)$ , а  $[Q, \bar{\psi}(x)] = \bar{\psi}(x)$ .

Чтобы полностью описать одночастичные состояния, остается ввести спин. Для преобразований Лоренца по аналогии с (3.158) мы имеем

$$[J^{\mu\nu}, \psi(x)] = - \left[ i(x^\mu \partial^\nu - x^\nu \partial^\mu) + \frac{\sigma^{\mu\nu}}{2} \right] \psi(x). \quad (3.165)$$

Поскольку

$$b_\alpha(k) = \int d^3x \bar{u}^{(\alpha)}(k) e^{ik \cdot x} \gamma^0 \psi(x),$$

и

$$d_\alpha^\dagger(k) = \int d^3x \bar{v}^{(\alpha)}(k) e^{-ik \cdot x} \gamma^0 \psi(x),$$

мы находим

$$[J^{\mu\nu}, b_\alpha^\dagger(k)] = \int d^3x \bar{\psi}(x) \left[ \frac{1}{i} (x^\mu \hat{\partial}^\nu - x^\nu \hat{\partial}^\mu) + \frac{\sigma^{\mu\nu}}{2} \right] \gamma^0 u^{(\alpha)}(k) e^{-ik \cdot x}, \\ [J^{\mu\nu}, d_\alpha^\dagger(k)] = - \int d^3x \bar{v}^{(\alpha)}(k) e^{-ik \cdot x} \gamma^0 \left[ i (x^\mu \hat{\partial}^\nu - x^\nu \hat{\partial}^\mu) + \frac{\sigma^{\mu\nu}}{2} \right] \psi(x). \quad (3.166)$$

Рассмотрим теперь действие оператора Паули—Любанского  $W_\sigma = -(1/2) \epsilon_{\sigma\mu\nu\rho} J^{\mu\nu} P^\rho$  на состояние  $|a\rangle$ . Оператор  $P^\rho$  заменяется при этом его собственным значением  $k^\rho$ . Пусть  $t \equiv (1, 0, 0, 0)$ —



ось времени, а

$$n = \left( t - k \frac{k \cdot t}{m^2} \right) \frac{m}{|k|}$$

является нормированным пространственно-подобным 4-вектором, ортогональным  $k$  в двумерной плоскости  $(t, k)$ . Очевидно, что его пространственная компонента направлена вдоль вектора  $k$ . Выберем третью ось, направленную параллельно  $k$ . При этом величина  $(W \cdot n/m) |a\rangle$  принимает вид

$$\frac{W \cdot n}{m} |a\rangle = J^{12} |a\rangle.$$

Очевидно, что при действии на состояние  $|a\rangle$  вклад орбитальной части в  $J^{12}$  обращается в нуль, а поскольку  $J^{12} |0\rangle = 0$ , мы получаем

$$\frac{W \cdot n}{m} b_{\alpha}^{\dagger}(k) |0\rangle = \frac{m}{k^0} \sum_{\beta} u^{\dagger(\beta)}(k) \frac{\sigma^{12}}{2} u^{(\alpha)}(k) b_{\beta}^{\dagger}(k) |0\rangle.$$

Теперь нам необходимо выбрать спинорный базис  $u^{(\alpha)}, v^{(\alpha)}$ . Запишем выражение для  $u^{(\alpha)}$ :

$$u^{(\alpha)}(k) = \frac{k + m}{\sqrt{2m(k^0 + m)}} \begin{pmatrix} \varphi^{(\alpha)} \\ 0 \end{pmatrix},$$

где

$$\frac{\sigma k}{|k|} \varphi^{(\alpha)} = \begin{cases} \varphi^{(\alpha)}, & \alpha = 1 \\ -\varphi^{(\alpha)}, & \alpha = 2. \end{cases}$$

Соответствующие состояния называются спиральными. Так как мы выбрали третью ось параллельной  $k$ , то

$$\frac{m}{k_0} u^{\dagger(\beta)}(k) \frac{\sigma^{12}}{2} u^{(\alpha)}(k) = \frac{\varepsilon_{\alpha}}{2} \delta^{\alpha\beta}, \quad \varepsilon_1 = 1, \quad \varepsilon_2 = -1.$$

Учитывая это выражение, мы получаем

$$\frac{W \cdot n}{m} |a\rangle = \begin{cases} \frac{1}{2} |a\rangle, & a = 1, \\ -\frac{1}{2} |a\rangle, & a = 2. \end{cases} \quad (3.167)$$

Аналогично

$$\frac{W \cdot n}{m} d_{\alpha}^{\dagger}(k) |0\rangle = -\frac{m}{k^0} \sum_{\beta} v^{\dagger(\alpha)}(k) \frac{\sigma^{12}}{2} v^{(\beta)}(k) d_{\beta}^{\dagger}(k) |0\rangle.$$

Определяя далее спинор

$$v^{(\alpha)}(k) = \frac{-k + m}{\sqrt{2m(k^0 + m)}} \begin{pmatrix} 0 \\ \chi^{(\alpha)} \end{pmatrix},$$

где

$$\frac{\sigma \cdot k}{|k|} \chi^{(\alpha)} = \begin{cases} \chi^{(\alpha)}, & \alpha = 1, \\ -\chi^{(\alpha)}, & \alpha = 2, \end{cases}$$

находим

$$\frac{m}{k^0} v^{\dagger(\alpha)}(k) \frac{\delta_{1\beta}}{2} v^{(\beta)}(k) = \frac{\varepsilon_\alpha}{2} \delta^{\alpha\beta}, \quad \varepsilon_1 = 1, \quad \varepsilon_2 = -1,$$

и

$$\frac{W \cdot n}{m} |a\rangle = \begin{cases} -\frac{1}{2} |a\rangle, & a=3, \\ +\frac{1}{2} |a\rangle, & a=4. \end{cases} \quad (3.168)$$

Формулы (3.167) и (3.168) завершают характеристику состояний: состояния  $|1\rangle$  и  $|4\rangle$  имеют спиральность  $1/2$ , а спиральность состояний  $|2\rangle$  и  $|3\rangle$  равна  $-1/2$ .

Заметим, что между спинами  $u$  и  $v$  существует типичная инверсия. В соответствии с дырочной интерпретацией спинор  $v^{(4)}$  со спином  $\sigma_3 = -1$  соответствует положительной спиральности.

Рассмотрим теперь многочастичные состояния. Обозначим операторы рождения общим символом  $a^\dagger$ , опуская тем самым обозначения импульса, заряда или спина. Базис пространства Фока образуют состояния

$$a^\dagger(1) \dots a^\dagger(n) |0\rangle.$$

Вследствие антикоммутируемости операторов рождения эти состояния являются антисимметричными по аргументам волновой функции  $1, \dots, n$  и, в частности, они обращаются в нуль, если какие-либо два аргумента совпадают. В этом формализме воспроизводится принцип запрета Паули, справедливый для электронов и вообще для любых тождественных фермионов. Квантование с использованием антикоммутаторов привело естественным путем к статистике Ферми—Дирака.

Читателю будет интересно рассмотреть свободный релятивистский электронный газ в состоянии теплового равновесия. Что произойдет, если сохраняется только полный заряд, а не число электронов и позитронов в отдельности?

### 3.3.3. Связь между спином и статистикой; пропагатор

Из соотношений (3.161) получаем антикоммутатор двух свободных полей с произвольными аргументами. Очевидно, что  $\psi(x)$  и  $\psi(x')$  так же, как и  $\bar{\psi}(x)$  и  $\bar{\psi}(x')$ , антикоммутируют; в то же время

$$\begin{aligned} \{\psi_\xi(x), \bar{\psi}_{\xi'}(y)\} = \int d\tilde{k} \sum_{\alpha} [e^{-ik \cdot (x-y)} u_{\xi}^{(\alpha)}(k) \bar{u}_{\xi'}^{(\alpha)}(k) + \\ + e^{ik \cdot (x-y)} v_{\xi}^{(\alpha)}(k) \bar{v}_{\xi'}^{(\alpha)}(k)]; \end{aligned} \quad (3.169)$$

здесь  $\xi$  и  $\xi'$  — индексы Дирака. Из (2.40) и (2.41) имеем

$$\sum_{\alpha} u_{\xi}^{(\alpha)}(k) \bar{u}_{\xi'}^{(\alpha)}(k') = \left( \frac{k+m}{2m} \right)_{\xi\xi'}, \quad \sum_{\alpha} v_{\xi}^{(\alpha)}(k) \bar{v}_{\xi'}^{(\alpha)}(k) = \left( \frac{k-m}{2} \right)_{\xi\xi'}.$$

Отсюда следует, что

$$\{\psi_{\xi}(x), \bar{\psi}_{\xi'}(x')\} = (i\partial_x + m)_{\xi\xi'} i\Delta(x-x'), \quad (3.170)$$

где  $i\Delta(x-y)$  — выражение, которое мы использовали в (3.77) и (3.56) в аналогичном случае для бозонов. Из (3.170) следует, что для пространственно-подобных интервалов  $(x-y)$  антикоммутатор равен нулю. Кроме того, если  $x^0 = y^0 = t$ , имеем следующий антикоммутатор:

$$\{\psi_{\xi}(t, \mathbf{x}), \bar{\psi}_{\xi'}(t, \mathbf{y})\} = -\gamma_{\xi\xi'}^0 \cdot \partial_0 \Delta(x^0 - y^0, \mathbf{x} - \mathbf{y})|_{x^0=y^0} = \gamma_{\xi\xi'}^0 \cdot \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \quad (3.171)$$

который согласуется с (3.162). В смысле антикоммутации оператор  $i\psi^\dagger$  выступает как сопряженный к  $\psi$ , что соответствует лагранжиану (3.152), хотя мы и не следовали процедуре канонического квантования.

Интересно узнать, что мы получили бы в результате такого канонического квантования. Частицы со спином  $1/2$  вели бы себя как бозоны, а энергия не была бы ограничена снизу. Кроме того, коммутатор двух полей определялся бы выражением, аналогичным (3.169) со знаком минус между двумя членами в правой его части. Как следствие, результат записывался бы в виде

$$(i\partial_x + m) \int \frac{a^3 k}{2k^0 (2\pi)^3} (e^{-ik \cdot (x-y)} + e^{ik \cdot (x-y)}).$$

Этот интеграл является четным решением однородного уравнения Клейна — Гордона:

$$\Delta_1(x-y) = \int \frac{a^3 k}{2k^0 (2\pi)^3} (e^{-ik \cdot (x-y)} + e^{ik \cdot (x-y)}), \quad (3.172)$$

которое не обращается в нуль при  $(x-y)^2 < 0$ .

Рассмотрите поведение  $\Delta_1(x-y)$  в области больших пространственно-подобных интервалов.

Иными словами, локальные наблюдаемые не коммутировали бы при совпадающих временах, и условие локальности было бы нарушено. Подобные нарушения появились бы и в скалярной теории при квантовании в соответствии со статистикой Ферми.

Эти свойства служат примером связи между спином и статистикой, вытекающей из локальной релятивистской квантовой теории. Поля с полуцелым спином должны квантоваться в соответствии со статистикой Ферми — Дирака, т. е. на основе соотношений

антикоммутиации, а поля с целым спином — в соответствии со статистикой Бозе — Эйнштейна, т. е. с использованием коммутаторов<sup>1)</sup>. Более общее доказательство можно провести в рамках аксиоматического подхода. Тот факт, что привлечение данных понятий действительно необходимо для описания этой глубокой связи, существенной для стабильности вещества, в области, отнюдь не релятивистской, является весьма интригующим. Однако нам не известен какой-либо альтернативный подход для такого описания.

Для хронологического произведения двух полей Дирака, определяемого соотношением

$$T\psi_{\xi}(x)\bar{\psi}_{\xi}(y) = \theta(x^0 - y^0)\psi_{\xi}(x)\bar{\psi}_{\xi}(y) - \theta(y^0 - x^0)\bar{\psi}_{\xi}(y)\psi_{\xi}(x), \quad (3.173)$$

справедливы следующие соотношения:

$$\begin{aligned} T\psi_{\xi}(x)\bar{\psi}_{\xi}(y) &= \langle 0 | T\psi_{\xi}(x)\bar{\psi}_{\xi}(y) | 0 \rangle + : \psi_{\xi}(x)\bar{\psi}_{\xi}(y) : , \\ \langle 0 | T\psi_{\xi}(x)\bar{\psi}_{\xi}(y) | 0 \rangle &= iS(x-y)_{\xi\xi}, \\ S(x-y) &= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{-ik \cdot (x-y)} \frac{k+m}{k^2 - m^2 + i\epsilon}, \end{aligned} \quad (3.174)$$

которые согласуются с (2.113). Следует заметить, что

$$S(x) = -(i\hat{\partial} + m)G_F(x) = (i\hat{\partial} + m) \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ik \cdot x}}{k^2 - m^2 + i\epsilon}. \quad (3.175)$$

Поскольку функция  $G_F(x)$  является четной по  $x$ , мы имеем

$$S^T(-x) = -(-i\hat{\partial}^T + m)G_F(x).$$

Используя матрицу  $C$ , определяемую выражением (2.97) и удовлетворяющую условию  $C\gamma^{\mu T}C^{-1} = -\gamma^{\mu}$ , получаем

$$CS^T(-x)C^{-1} = S(x). \quad (3.176)$$

Это свойство симметрии является обобщением аналогичного свойства функции  $G_F(x)$ . В следующем разделе мы изучим его физический смысл.

<sup>1)</sup> Логически невозможно исключить правила квантования, отличающиеся от стандартных правил, отвечающих статистикам Бозе — Эйнштейна и Ферми — Дирака. В частности, в связи с возможностью применения их к кварковым моделям особый интерес представляют варианты квантования, основанные на тринейных коммутационных соотношениях. Такое квантование соответствует обобщенным статистикам. В случае парафермистатики возможно присутствие нескольких гождественных частиц в симметричном, а в случае парабозестатики — в антисимметричном состоянии. В определенном смысле параквантование связано с учетом дополнительных внутренних степеней свободы частиц. (См. примечание редактора перевода в конце настоящей главы.) — *Прим. ред.*

### 3.4. ДИСКРЕТНЫЕ СИММЕТРИИ

Как это ни парадоксально, но роль симметрий более понятна, когда они нарушаются внешними факторами, например измерительной аппаратурой. Здесь мы дадим краткий обзор некоторых дискретных симметрий, возникающих в теории невзаимодействующих квантованных полей. Симметрии, носящие кинематический характер, мы уже рассматривали, а к внутренним симметриям вернемся в гл. 11 (см. т. 2 настоящей книги).

При активной точке зрения под симметрией понимается однозначное соответствие между состояниями, или, точнее, матрицами плотности,  $|\phi\rangle\langle\phi| \rightarrow |\phi'\rangle\langle\phi'|$ , сохраняющее вероятности перехода

$$|\langle\phi'_j|e^{-iH(t_f-t_i)}|\phi'_i\rangle|^2 = |\langle\phi_j|e^{-iH(t_f-t_i)}|\phi_i\rangle|^2.$$

Это определение является несколько ограниченным, поскольку в нем выделяется роль времени, т. е. чистые преобразования Лоренца и обращение времени следует рассматривать независимо. Для последней симметрии это будет сделано ниже. По теореме Вигнера любое взаимно-однозначное отображение матриц плотности  $\rho \rightarrow \rho'$ , удовлетворяющее условию  $\text{Sp}(\rho_1\rho_2) = \text{Sp}(\rho'_1\rho'_2)$ , может быть расширено до унитарного или антиунитарного оператора в гильбертовом пространстве.

Исходя из симметрии, установленной для матриц плотности, можно подобрать фазы состояний таким образом чтобы построить линейный (или антилинейный) оператор, действующий в гильбертовом пространстве. Группа симметрии обычно реализуется с помощью проективного представления вида  $U(g_1)U(g_2) = e^{i\omega(g_1, g_2)}U(g_1, g_2)$ , где  $\omega(g_1, g_2)$  — фаза.

В таком ограниченном смысле каждому унитарному оператору  $U$ , коммутирующему с гамильтонианом, отвечает симметрия. Мы будем главным образом иметь дело с полем Дирака и предоставляем читателю самостоятельно рассмотреть случаи скалярного и векторного бозонных полей.

#### 3.4.1. Четность

Мы предполагаем, что при соответствующем изменении экспериментальной установки можно получить состояние с преобразованной четностью. С теоретико-полевой точки зрения мы ищем унитарный оператор  $\mathcal{P}$ , удовлетворяющий условию

$$\mathcal{P}\psi(x)\mathcal{P}^\dagger = \eta_p\gamma^0\psi(\tilde{x}), \quad \tilde{x}^\mu = x_\mu, \quad |\eta_p| = 1, \quad (3.177)$$

поскольку из предыдущей главы нам известно, что  $\gamma^0\psi(\tilde{x})$  удовлетворяет уравнению Дирака с преобразованной четностью. Таким образом, можно предположить, что  $\mathcal{P}$  коммутирует с  $H$ . Из (3.177)

следует, что

$$\begin{aligned} \mathcal{P} b_\alpha(p) \mathcal{P}^\dagger &= \eta_p b_\alpha(\tilde{p}), & \gamma^0 u^{(\alpha)}(\tilde{p}) &= u^{(\alpha)}(p), \\ \mathcal{P} d_\alpha(p) \mathcal{P}^\dagger &= -\eta_p^* d_\alpha(\tilde{p}), & \gamma^0 v^{(\alpha)}(\tilde{p}) &= -v^{(\alpha)}(p). \end{aligned} \quad (3.178)$$

Независимо от величины фазы  $\eta_p$  относительная четность системы фермион—антифермион равна  $-1$ , а оператор  $\mathcal{P}_\psi^2$  кратен единичному. Унитарный оператор, удовлетворяющий этим условиям, имеет вид

$$\begin{aligned} \mathcal{P} = \exp \left( i \int d\tilde{k} \sum_{\alpha=1,2} \left\{ b_\alpha^\dagger(k) \left[ \lambda b_\alpha(k) + \frac{\pi}{2} b_\alpha(\tilde{k}) \right] - \right. \right. \\ \left. \left. - d_\alpha^\dagger(k) \left[ (\lambda + \pi) d_\alpha(k) + \frac{\pi}{2} d_\alpha(\tilde{k}) \right] \right\} \right), \end{aligned} \quad (3.179)$$

где  $\lambda$  произвольно, а  $\eta_p = e^{-i(\lambda + \pi/2)}$ . В частности,  $\eta_p = 1$ , если  $\lambda = -\pi/2$ . Убедиться в том, что  $\mathcal{P}$  действительно является симметрией, можно проще всего, опираясь на соотношения, описывающие трансляции во времени:

$$e^{iHa} b_\alpha(k) e^{-iHa} = e^{-ik^0 a} b_\alpha(k), \quad e^{iHa} d_\alpha(k) e^{-iHa} = e^{-ik^0 a} d_\alpha(k).$$

Следовательно,

$$e^{iHa} \mathcal{P} e^{-iHa} = \mathcal{P}.$$

Кроме того, можно показать, что  $\mathcal{P} P^\mu \mathcal{P}^\dagger = P_\mu^-$ . В теории, описывающей взаимодействующие поля, полный оператор четности будет произведением операторов, относящихся к отдельным полям. В частности, мы предлагаем читателю построить оператор  $\mathcal{P}_A$  для электромагнитного поля, такой, что

$$\mathcal{P}_A A^\mu(x) \mathcal{P}_A^\dagger = A_\mu(\tilde{x}). \quad (3.180)$$

Читателю предлагается показать, что билинейный дираковский ток преобразуется аналогичным образом:

$$\mathcal{P}_\psi : \bar{\psi}(x) \gamma^\mu \psi(x) : \mathcal{P}_\psi^\dagger = : \bar{\psi}(\tilde{x}) \gamma_\mu \psi(\tilde{x}) :. \quad (3.181)$$

Отсюда, используя равенство  $d^4x = d^4\tilde{x}$ , получаем, что лагранжиан взаимодействия

$$\int d^4x : \bar{\psi}(x) \gamma^\mu \psi(x) : A_\mu(x)$$

инвариантен относительно преобразования четности.

### 3.4.2. Зарядовое сопряжение

Квантованные поля, как мы показали, могут описывать частицы, имеющие тождественные массы и спины, но противоположные заряды. В зависимости от физического содержания заряд можно интерпретировать по-разному. Это может быть заряд электрический, барионный, лептонный и т. д. Инвариантность относительно зарядового сопряжения предполагает, следовательно:

- 1) существование античастиц и
- 2) симметричные свойства квантов обоих типов.

Первый пример такого рода, который мы встретили, — это заряженное скалярное поле. Однако может быть так, что частицы и античастицы являются полностью тождественными. Такой случай имеет место для фотонов, когда соответствующий оператор  $\mathcal{E}$  меняет лишь знак поля:

$$\mathcal{E}A_{\mu}(x)\mathcal{E}^{\dagger} = -A_{\mu}(x). \quad (3.182)$$

Почему это так происходит, мы увидим ниже.

Из главы 2 известно, что действие этого оператора на поле Дирака приводит к следующему преобразованию:

$$\mathcal{E}\psi(x)\mathcal{E}^{\dagger} = \bar{\eta}_c C \bar{\psi}^T(x), \quad (3.183)$$

где транспонирование относится только к индексам Дирака. В стандартном представлении  $\gamma$ -матриц имеем

$$C = i\gamma^0\gamma^2.$$

Для определенности выберем операторы рождения и уничтожения, действующие на спиральные состояния, т. е.  $b(k, \pm)$  и  $d(k, \pm)$ . Таким образом, мы имеем спинор

$$u(k, \pm 1) = \frac{k+m}{\sqrt{2m(k^0+m)}} \begin{pmatrix} \varphi_{\pm}(\hat{k}) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (3.184a)$$

где  $\sigma \cdot \hat{k} \varphi_{\pm}(\hat{k}) = \pm \varphi_{\pm}(\hat{k})$ ,  $\varphi_e^{\dagger}(\hat{k}) \varphi_{e'}(\hat{k}) = \delta_{e, e'}$ , и по определению

$$v(k, \pm) = C \bar{u}^T(k, \pm) = \frac{-\bar{k}+m}{\sqrt{2m(m+k^0)}} \begin{pmatrix} 0 \\ \chi_{\pm}(\hat{k}) \end{pmatrix}. \quad (3.184b)$$

В обычном представлении  $\chi_{\pm}(\hat{k}) = -i\sigma_2 \varphi_{\pm}^*(\hat{k})$ , и можно показать, что  $\sigma \cdot \hat{k} \chi_{\pm}(\hat{k}) = \mp \chi_{\pm}(\hat{k})$ . Кроме того,

$$C \bar{v}^T(k, \pm) = u(k, \pm). \quad (3.185)$$

При этих условиях из (3.183) нетрудно получить следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}b(k, \pm)\mathcal{E}^{\dagger} &= \eta_c d(k, \pm), \\ \mathcal{E}d^{\dagger}(k, \pm)\mathcal{E}^{\dagger} &= \eta_c b^{\dagger}(k, \pm). \end{aligned} \quad (3.186)$$

Эти соотношения можно было бы записать с самого начала, а преобразование (3.183) получить как следствие. С точностью до фазового множителя  $\mathcal{E}$  заменяет частицы на античастицы, причем с теми же значениями импульса, энергии и спиральности. Вакуум сохраняется инвариантным. В явном виде оператор  $\mathcal{E}$  записывается

следующим образом:

$$\mathcal{E}_\psi = \mathcal{E}_1 \mathcal{E}_2, \quad (3.187)$$

$$\mathcal{E}_1 = \exp \left\{ -i \int d\vec{k} \sum_{\varepsilon=\pm 1} \lambda [b^\dagger(k, \varepsilon) b(k, \varepsilon) - d^\dagger(k, \varepsilon) d(k, \varepsilon)] \right\}, \quad (3.188)$$

$$\mathcal{E}_2 = \exp \left\{ i \frac{\pi}{2} \int d\vec{k} \sum_{\varepsilon=\pm 1} [b^\dagger(k, \varepsilon) - d^\dagger(k, \varepsilon)] [b(k, \varepsilon) - d(k, \varepsilon)] \right\},$$

где  $\eta_c = e^{i\lambda}$ . Единственный смысл величины  $\mathcal{E}_1$  состоит в том, что она определяет эту фазу; при  $\eta_c = 1$  мы имеем  $\mathcal{E}_1 = 1$ . Читатель может также проверить, что ток  $:\bar{\psi}\gamma_\mu\psi:$  является нечетным относительно зарядового сопряжения.

В качестве приложения проведем классификацию низших связанных состояний системы фермион—антифермион, прототипом которой является позитроний, по отношению к операции зарядового сопряжения.

Последний представляет собой систему ( $e^+e^-$ ), аналогичную атому водорода ( $pe^-$ ), в котором протон заменен позитроном.

Вследствие слабости электромагнитных сил связи можно использовать как первое приближение нерелятивистское описание. Основным состоянием является  $s$ -волна,  $n=1$ , но сверхтонкие эффекты расщепляют триплетное состояние ортопозитрония ( ${}^3S_1$ , если использовать обозначение  ${}^2S^{+1}L_J$ ) и синглетное ( ${}^1S_0$ ) состояния парапозитрония. Упрощенные волновые функции, которые дают правильные квантовые числа, в случае неподвижной оси квантования спина запишутся в виде

$$|J=1, M=0, \text{ орто} \rangle = \int d^3q \varphi_1(|\mathbf{q}|) [b_-^\dagger(\mathbf{q}) d_+^\dagger(-\mathbf{q}) + b_+^\dagger(\mathbf{q}) d_-^\dagger(-\mathbf{q})] |0\rangle,$$

$$|J=0, M=0, \text{ пара} \rangle = \int d^3q \varphi_0(|\mathbf{q}|) [b_-^\dagger(\mathbf{q}) d_+^\dagger(-\mathbf{q}) - b_+^\dagger(\mathbf{q}) d_-^\dagger(-\mathbf{q})] |0\rangle.$$

Волновые функции  $\varphi_1$  и  $\varphi_0$  зависят только от абсолютной величины относительного импульса  $\mathbf{q}$ , величины  $b_\pm^\dagger(\mathbf{q})$  [или  $d_\pm^\dagger(\mathbf{q})$ ] обозначают операторы рождения электрона (позитрона) с импульсом  $\mathbf{q}$  с проекцией спина  $\pm 1/2$ . Операция зарядового сопряжения имеет вид

$$\mathcal{E} b_\pm^\dagger(\mathbf{q}) \mathcal{E}^\dagger = \eta_c^* a_\pm^\dagger(\mathbf{q}), \quad \mathcal{E} d_\pm^\dagger(\mathbf{q}) \mathcal{E}^\dagger = \eta_c b_\pm^\dagger(\mathbf{q}).$$

При действии  $\mathcal{E}$  на эти состояния произвольная фаза  $\eta_c$  исчезает, и мы получаем

$$\begin{aligned} \mathcal{E} | \text{ орто} \rangle &= - | \text{ орто} \rangle, \\ \mathcal{E} | \text{ пара} \rangle &= | \text{ пара} \rangle. \end{aligned} \quad (3.189)$$

Знаки объясняются следующим образом. Зарядовое сопряжение заменяет электрон на позитрон, в результате чего относительный импульс меняет знак, что в случае  $s$ -волны дает множитель  $(-1)^L = 1$ , спиновые индексы меняются местами, что дает знак плюс (минус) для триплетного (синглетного) состояния. Наконец, имеется еще один знак минус, обусловленный антикоммутиацией операторов  $b^\dagger$  и  $d^\dagger$ . Так косвенно и неожиданно проявляется статистика Ферми—Дирака

Состояния позитрония неустойчивы и медленно распадаются с испусканием фотонов. Из выражения (3.182) следует, что электромагнитный потенциал является нечетным относительно  $\mathcal{E}$ . В действительности это есть не что иное,



как условие инвариантности электромагнитного взаимодействия относительно  $\mathcal{E}$ . Следовательно, для  $n$ -фотонного состояния мы имеем

$$\mathcal{E} |n\rangle = (-1)^n |n\rangle.$$

Таким образом, ортопозитроний должен распадаться на нечетное число фотонов, а парапозитроний — на четное. Однофотонный распад в ортосостоянии невозможен в силу закона сохранения энергии-импульса. Оно должно распадаться по крайней мере на три фотона, в то время как парапозитроний может распадаться на два фотона и, следовательно, имеет гораздо более короткое время жизни. Поскольку константа взаимодействия является постоянной тонкой структуры  $\alpha$ , можно предположить, что для времени жизни  $\tau$  выполняется соотношение  $\tau_{\text{синглет}}/\tau_{\text{триплет}} \sim O(\alpha)$ . Вычислением этих величин мы займемся в гл. 5. В низшем порядке по  $\alpha$  имеем

$$\begin{aligned} \Gamma_s = \tau_s^{-1} &= \frac{m\alpha^5}{2} = 0,53 \cdot 10^{-5} \text{ эВ}, & \tau_s &= 1,25 \cdot 10^{-10} \text{ с}, \\ \Gamma_t = \tau_t^{-1} &= 2 \frac{\pi^2 - 9}{9\pi} m\alpha^6 = 4,75 \cdot 10^{-9} \text{ эВ}, & \tau_t &= 1,410 \cdot 10^{-7} \text{ с}. \end{aligned} \quad (3.190)$$

Случайно оказалось так, что численное значение  $\tau_s$  на порядок меньше, чем  $\alpha\tau_t$ . Сверхтонкое расщепление мы рассмотрим в гл. 10 (см. т. 2 настоящей книги).

### 3.4.3. Обращение времени

В классическом смысле инвариантность относительно обращения времени нам вполне понятна. Если динамика обладает этой инвариантностью, то, изменяя скорости той конфигурации, которая рассматривалась как конечное состояние, на противоположные, мы видим, что система, развиваясь в обратном направлении, приходит к первоначальному состоянию. Следовательно, начальное и конечное состояния меняются местами, причем координаты сохраняются прежними, а скорости меняются на противоположные. В квантовой механике такая замена приводит к тому, что соответствующий оператор  $\mathcal{F}$  оказывается антиунитарным, т. е.

$$\langle \mathcal{F}\varphi | \mathcal{F}\psi \rangle = \langle \psi | \varphi \rangle, \quad \mathcal{F}^\dagger \mathcal{F} = 1.$$

Требование инвариантности относительно  $\mathcal{F}$  означает, что

$$\mathcal{F}H\mathcal{F}^\dagger = H,$$

где  $H$  — гамильтониан. Во всех рассматриваемых здесь случаях мы предполагаем трансляционную инвариантность во времени. Следовательно,

$$\mathcal{F} e^{-iH(t_2-t_1)} \mathcal{F}^\dagger = e^{-iH(t_1-t_2)}.$$

Амплитуда перехода из состояния  $|\varphi_i\rangle$  в момент времени  $t_i$  в состояние  $|\varphi_f\rangle$  в момент времени  $t_f$  равна соответствующей амплитуде перехода из состояния  $|\mathcal{F}\varphi_f\rangle$  в момент времени  $t_i$  в состояние

$\langle \mathcal{F} \varphi_i \rangle$  в момент времени  $t_f$ . Действительно,

$$\begin{aligned} \langle \varphi_f | e^{-iH(t_f - t_i)} | \varphi_i \rangle &= \langle \mathcal{F} \varphi_f | (\mathcal{F} e^{-iH(t_f - t_i)} \mathcal{F}^\dagger) | \mathcal{F} \varphi_i \rangle^* = \\ &= \langle \mathcal{F} \varphi_f | e^{-iH(t_f - t_i)} | \mathcal{F} \varphi_i \rangle^* = \\ &= \langle \mathcal{F} \varphi_i | e^{-iH(t_f - t_i)} | \mathcal{F} \varphi_f \rangle. \end{aligned} \quad (3.191)$$

Поскольку импульсы меняются на противоположные, а координаты сохраняются без изменения, то при действии оператора  $\mathcal{F}$  изменяется знак орбитальных угловых моментов; то же самое должно быть верно для спинов. В частности, спиральности остаются без изменения.

Для скалярного релятивистского квантованного поля  $\varphi$ , удовлетворяющего уравнению Клейна—Гордона, имеем  $\mathcal{F} \varphi(t, \mathbf{x}) \mathcal{F}^\dagger = \varphi(-t, \mathbf{x})$ , возможно, с точностью до знака (поскольку  $\varphi$  эрмитово). Это дает

$$\begin{aligned} \mathcal{F} a(k) \mathcal{F}^\dagger &= \eta a(\tilde{k}), \\ \eta &= \pm 1, \\ \mathcal{F} \varphi(t, \mathbf{x}) \mathcal{F}^\dagger &= \eta \varphi(-t, \mathbf{x}). \end{aligned} \quad (3.192)$$

Для электромагнитного потенциала соответствующее преобразование запишется в виде

$$\mathcal{F} A^\mu(x) \mathcal{F}^\dagger = A_\mu(-\tilde{x}). \quad (3.193)$$

Наконец, рассмотрим спинорное поле в спиральном базисе. Потребуем, чтобы выполнялись соотношения

$$\begin{aligned} \mathcal{F} b^\dagger(k, \varepsilon) \mathcal{F}^\dagger &= \eta_T^* b^\dagger(\tilde{k}, \varepsilon) e^{i\theta_b(k, \varepsilon)}, \\ \mathcal{F} d^\dagger(k, \varepsilon) \mathcal{F}^\dagger &= \eta_T d^\dagger(\tilde{k}, \varepsilon) e^{-i\theta_d(k, \varepsilon)}, \end{aligned} \quad (3.194)$$

где  $\eta_T$  — фиксированная фаза. Выберем  $\theta_b(k, \varepsilon)$  и  $\theta_d(k, \varepsilon)$  таким образом, чтобы  $\mathcal{F} \psi(x) \mathcal{F}^\dagger$  удовлетворяло обращенному во времени уравнению Дирака. Вследствие антилинейного характера оператора  $\mathcal{F}$  получаем

$$\begin{aligned} \mathcal{F} \psi(x) \mathcal{F}^\dagger &= \eta_T \int d\tilde{k} \sum_\varepsilon [b(\tilde{k}, \varepsilon) u^*(k, \varepsilon) e^{-i\theta_b(k, \varepsilon)} e^{-ik \cdot x} + \\ &+ d^\dagger(\tilde{k}, \varepsilon) v^*(k, \varepsilon) e^{-i\theta_d(k, \varepsilon)} e^{ik \cdot x}]. \end{aligned}$$

Спиноры  $u$  и  $v$  определяются выражениями (3.184). В интеграле мы заменили  $k$  на  $\tilde{k}$ . Если имеется постоянная матрица  $A$ , такая, что выполняются равенства

$$\begin{aligned} A u(k, \varepsilon) &= e^{-i\theta_b(\tilde{k}, \varepsilon)} u^*(\tilde{k}, \varepsilon), \\ A v(k, \varepsilon) &= e^{-i\theta_d(\tilde{k}, \varepsilon)} v^*(\tilde{k}, \varepsilon), \end{aligned} \quad (3.195)$$

то будет выполняться соотношение

$$\mathcal{F}\psi(t, \mathbf{x})\mathcal{F}^\dagger = \eta_T A\psi(-t, \mathbf{x}). \quad (3.196)$$

Из того факта, что матрица  $\gamma^0$  эрмитова, а матрицы  $\gamma$  антиэрмитовы, мы имеем

$$(\mathcal{K}^T - m) u^*(\vec{k}, \varepsilon) = 0, \quad (\mathcal{K}^T + m) v^*(\vec{k}, \varepsilon) = 0.$$

Умножение на  $\gamma^5 C$  дает

$$(\mathcal{K} - m) \gamma^5 C u^*(\vec{k}, \varepsilon) = 0, \quad (\mathcal{K} + m) \gamma^5 C v^*(\vec{k}, \varepsilon) = 0.$$

Следовательно, можно предположить, что с точностью до фазы  $A^{-1} = \gamma^5 C$  при условии, что двухкомпонентные спиноры  $\varphi_\pm(\hat{k})$  и  $\varphi_\pm(-\hat{k})$  связаны надлежащим образом. Покажем, что это действительно так. В стандартном представлении  $\gamma$ -матриц имеем

$$\begin{aligned} \gamma^5 C u^*(\vec{k}, \varepsilon) &= \gamma^5 C \frac{\vec{k}^* + m}{\sqrt{2m(k^0 + m)}} \begin{pmatrix} \varphi_\varepsilon^*(-\hat{k}) \\ 0 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{\mathcal{K} + m}{\sqrt{2m(k^0 + m)}} \begin{pmatrix} -i\sigma_2 & 0 \\ 0 & -i\sigma_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_\varepsilon^*(-\hat{k}) \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Из этого соотношения видно, что нам нужно, чтобы  $-i\sigma_2 \varphi_\varepsilon^*(-\hat{k})$  было равно  $\varphi_\varepsilon(\hat{k})$  с точностью до фазы. В самом деле, поскольку оператор  $-i\sigma_2$  унитарен и

$$(\sigma \cdot \hat{k}) [-i\sigma_2 \varphi_\varepsilon^*(-\hat{k})] = -i\sigma_2 [-(\sigma \cdot \hat{k})^* \varphi_\varepsilon^*(-\hat{k})] = \varepsilon [-i\sigma_2 \varphi_\varepsilon^*(-\hat{k})],$$

мы имеем

$$-i\sigma_2 \varphi_\varepsilon^*(-\hat{k}) = e^{i\theta_b(k, \varepsilon)} \varphi_\varepsilon(\hat{k}),$$

и

$$\gamma^5 C u^*(\vec{k}, \varepsilon) = e^{i\theta_b(k, \varepsilon)} u(k, \varepsilon).$$

Тогда  $(\gamma^5 C)^{-1} = -\gamma^5 C$ . Таким образом, с точностью до множителя, который может быть включен в  $\eta_T$ , мы действительно нашли матрицу  $A$ , входящую в соотношение (3.195), по крайней мере для  $u$ -спиноров. Для  $v$ -спиноров можно выполнить аналогичные вычисления. Фазу обычно выбирают следующим образом:

$$A = i\gamma^1 \gamma^3 = -i\gamma^5 C. \quad (3.197)$$

Тем самым мы полностью установили соотношение (3.196).

### 3.4.4. Заключение

Теперь мы можем суммировать различные трансформационные свойства квадратичных форм относительно дискретных симметрий в случае поля Дирака. Определим эти формы в соответствии с

их тензорным характером:

$$\begin{aligned}
 S(x) &= :\bar{\psi}(x)\psi(x):, \\
 V^\mu(x) &= :\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x):, \\
 T^{\mu\nu}(x) &= :\bar{\psi}(x)\sigma^{\mu\nu}\psi(x):, \\
 A^\mu(x) &= :\bar{\psi}(x)\gamma^5\gamma^\mu\psi(x):, \\
 P(x) &= i:\bar{\psi}(x)\gamma^5\psi(x):.
 \end{aligned}
 \tag{3.198}$$

В последнем равенстве множитель  $i$  выбран для того, чтобы обеспечить эрмитовость. Символ  $A$  для обозначения псевдовекторного (или «аксиального» векторного) тока (см. ниже) общепринят, и его не следует путать с векторным потенциалом. Используя результаты, приведенные в предыдущих разделах, и учитывая, что поле антикоммутирует, а оператор  $\mathcal{F}$  является антиунитарным, составим следующую таблицу:

	$S(x)$	$V^\mu(x)$	$T^{\mu\nu}(x)$	$A^\mu(x)$	$P(x)$
$\mathcal{P}$	$S(\tilde{x})$	$V_\mu(\tilde{x})$	$T_{\mu\nu}(\tilde{x})$	$A_\mu(\tilde{x})$	$-P(\tilde{x})$
$\mathcal{C}$	$S(x)$	$-V^\mu(x)$	$-T^{\mu\nu}(x)$	$-A^\mu(x)$	$P(x)$
$\mathcal{F}$	$S(-\tilde{x})$	$V_\mu(-\tilde{x})$	$-T_{\mu\nu}(-\tilde{x})$	$A_\mu(-\tilde{x})$	$-P(-\tilde{x})$
$\Theta$	$S(-x)$	$-V^\mu(-x)$	$T^{\mu\nu}(-x)$	$-A^\mu(-x)$	$P(-x)$

В данной таблице каждый элемент представляет собой результат действия оператора на соответствующую плотность; например,  $\mathcal{F}T^{\mu\nu}(x)\mathcal{F}^\dagger = -T_{\mu\nu}(-\tilde{x})$ . Кроме того, в ней имеется строка, в которой представлена комбинированная  $\Theta = \mathcal{P}\mathcal{C}\mathcal{F}$  антиунитарная операция. Соответствующие законы преобразования электромагнитного векторного потенциала  $A_{эм}^\mu$  записываются в виде

$$\begin{aligned}
 \mathcal{P}A_{эм}^\mu(x)\mathcal{P}^\dagger &= A_{эм,\mu}(\tilde{x}), & \mathcal{C}A_{эм}^\mu(x)\mathcal{C}^\dagger &= -A_{эм}^\mu(x), \\
 \mathcal{F}A_{эм}^\mu(x)\mathcal{F}^\dagger &= A_{эм,\mu}(-\tilde{x}), & \Theta A_{эм}^\mu(x)\Theta^\dagger &= -A_{эм}^\mu(-x).
 \end{aligned}
 \tag{3.200}$$

Мы видим, что выражение

$$:\psi(x)\gamma_\mu\psi(x):A_{эм}^\mu(x)$$

ведет себя как скалярная плотность  $S(x)$ . Наконец, свойства псевдовекторного тока  $A^\mu(x)$  и псевдоскалярной плотности  $P(x)$

относительно преобразования четности оправдывают их названия. Заметим, что в приведенной выше таблице отсутствует произвол в выборе фазы.

В этом разделе мы рассмотрели наиболее часто встречающиеся дискретные симметрии и построили соответствующие унитарные (или антиунитарные) операторы для фундаментальных свободных полей. Необходимость такой конструкции очевидна, так как только в этом случае мы можем быть уверены, что преобразованные состояния действительно существуют. Проблему инвариантности при учете взаимодействия придется решать отдельно. Для этого необходимо проверить, выполняется ли соотношение  $UHU^\dagger = H$ . При рассмотрении взаимодействующих полей мы попытаемся определить операторы симметрии, действующие на состояния и поля в соответствии с вышеприведенными правилами. Таким образом, нам надо ответить на вопрос: выполняется ли инвариантность для взаимодействующих систем?

Фундаментальное свойство локальной квантовой теории, впервые установленное Паули, Зумино и Швингером, гласит, что в любом случае теория инвариантна относительно  $\Theta$ . Это и есть знаменитая *CPT*-теорема. Мы приведем здесь схему доказательства, ограничиваясь случаем лагранжевой теории поля. Читатель, интересующийся строгим доказательством, может обратиться к работам, приведенным в примечаниях в конце главы. Пусть локальная квантовая теория поля описывается принципом минимального действия с эрмитовым лоренц-инвариантным лагранжианом. Последний является комбинацией локальных скалярных плотностей, записанных через основные поля, которые в конечном счете являются нормально упорядоченными. При квантовании учитывается связь между спином и статистикой. Далее, согласно *CPT*-теореме, если даже инвариантность относительно  $P$ ,  $C$  и  $T$  по отдельности и отсутствует, выполняется инвариантность относительно их комбинации. В частности, это означает существование античастиц в случае заряженных полей (причем с теми же массами и спинами, что и у соответствующих им частиц)<sup>1)</sup>. В случае нейтральных полей мы имеем тождественность частицы и античастицы. Иными словами, мы хотим показать, что лагранжиан

<sup>1)</sup> Инвариантность теории относительно *CPT*-преобразования означает также равенство  $g$ -факторов частицы и античастицы. Это дает возможность экспериментальной проверки данной симметрии с высокой точностью. Наиболее точное значение отношения  $g$ -факторов позитрона и электрона следующее:

$$\frac{g(e^+)}{g(e^-)} = 1 + (22 \pm 64) \cdot 10^{-23}.$$

(См. примечание редактора перевода в конце настоящей главы.) — *Прим. ред.*

$\mathcal{L}(x)$  ведет себя относительно  $\Theta$  как нейтральное скалярное поле:

$$\Theta \mathcal{L}(x) \Theta^\dagger = \mathcal{L}(-x). \quad (3.201)$$

Следует заметить, что для скалярного поля вообще справедливо соотношение

$$\Theta \varphi(x) \Theta^\dagger = \varphi^\dagger(-x). \quad (3.202)$$

Когда выполняется операция (3.201), действие остается инвариантным. Мы ограничимся здесь рассмотрением лагранжиана, зависящего лишь от скалярного ( $\varphi$ ), векторного ( $A_\mu$ ) и спинорного ( $\psi$ ) полей, имеющих, возможно, внутренние индексы. Теорема остается справедливой и для полей с более высокими значениями спина. Очевидно, что  $\mathcal{L}$  можно построить, используя величины  $A_\mu$ ,  $\psi$ ,  $\bar{\psi}$  и только эрмитовы скалярные поля, причем в случае необходимости заряженные поля следует объединить в эрмитовы комбинации  $\varphi_1 = (\varphi + \varphi^\dagger)/\sqrt{2}$  и  $\varphi_2 = (\varphi - \varphi^\dagger)/i\sqrt{2}$  ( $\Theta \varphi_i(x) \Theta^\dagger = \varphi_i(-x)$ ). Таким образом, действие оператора  $\Theta$  сводится к следующему:

- 1) оно заменяет аргументы полей  $x$  на  $-x$ ;
- 2) вследствие этого производные меняют знак, т. е.  $\partial_\mu \rightarrow -\partial_\mu$ ;
- 3) векторное поле  $A^\mu(x)$  получает дополнительный знак минус, т. е. ведет себя как градиент скалярного поля;
- 4) любая квадратичная форма ( $\bar{\psi}, \psi$ ) приобретает знак  $(-1)^P$ , где  $P$  — число лоренцевых индексов при  $\gamma$ -матрицах или производных [это следует из таблицы (3.199) и пункта 2];
- 5) заменяет константы на их комплексно-сопряженные.

Поскольку  $\mathcal{L}$  — скалярная функция, в мономиальном разложении каждый член получается сворачиванием четного числа индексов Лоренца. Знаки минус, происходящие от векторных полей, производных и квадратичных форм по ( $\bar{\psi}, \psi$ ), взаимно уничтожаются. В конечном счете вместо  $\mathcal{L}(x)$  мы получаем  $\mathcal{L}^\dagger(-x) = \mathcal{L}(-x)$ , поскольку при нормальном упорядочении порядок операторов не играет роли, так как векторные и скалярные поля коммутируют, а антикоммутативность полей  $\psi$  уже учтена в таблице (3.199). В результате получаем, что, если вакуум инвариантен относительно  $\Theta$ , инвариантной будет и динамика.

Интересно доказать инвариантность относительно  $\Theta$  коммутационных соотношений при совпадающих временах. Здесь имеется некоторая тонкость, так как взаимодействия могут изменить выражение для сопряженных переменных, например при электромагнитных взаимодействиях заряженных бозонов и в любом случае, когда в лагранжиан  $\mathcal{L}$  взаимодействия входят производные. Можно также показать, что плотность гамильтониана ведет себя как

$$\Theta \mathcal{H}(0, x) \Theta^\dagger = \mathcal{H}(0, -x),$$

и, следовательно,

$$\Theta H \Theta^\dagger = H.$$

В нашем доказательстве игнорируются трудности, связанные с построением теории взаимодействующих полей. Последняя должна придать точный смысл произведениям операторов, которые нельзя определить иначе. Тем не менее алгебраические свойства, вытекающие из *CPT*-теоремы, при этом не нарушаются.

В качестве приложения рассмотрим формфакторы, представляющие собой релятивистское обобщение распределения зарядов. Рассмотрим сначала в свободной теории Дирака матричные элементы тока  $V^\mu(x)$  между одночастичными состояниями

$$\langle p', \beta | V^\mu(x) | p, \alpha \rangle = e^{-i(p-p') \cdot x} \langle p', \beta | V^\mu(0) | p, \alpha \rangle.$$

Греческие индексы  $\alpha, \beta, \dots, \delta$  обозначают поляризации  $|p, \alpha\rangle = b_\alpha^\dagger(p) |0\rangle$ , а

$$V^\mu(0) = : \bar{\psi}(0) \gamma^\mu \psi(0) : = \iint d\vec{k}_1 d\vec{k}_2 \sum_{\gamma, \delta} \bar{u}^{(\gamma)}(k_1) \gamma^\mu u^{(\delta)}(k_2) b_\gamma^\dagger(k_1) b_\delta(k_2) + \dots$$

Мы не выписали явно члены, дающие нулевой вклад в матричный элемент. Из равенства

$$\langle p', \beta | b_\gamma^\dagger(k_1) b_\delta(k_2) | p, \alpha \rangle = (2\pi)^6 \frac{k_1^0 k_2^0}{m^2} \delta^3(k_1 - p') \delta^3(k_2 - p) \delta_{\beta\gamma} \delta_{\delta\alpha}$$

следует, что

$$\langle p', \beta | V^\mu(0) | p, \alpha \rangle = \bar{u}^{(\beta)}(p') \gamma^\mu u^{(\alpha)}(p).$$

Это согласуется с определением заряда:

$$\begin{aligned} \langle p', \beta | Q | p, \alpha \rangle &= \int d^3x \langle p', \beta | V^0(0, x) | p, \alpha \rangle = \\ &= \int d^3x e^{i(p' - p) \cdot x} \bar{u}^{(\beta)}(p') \gamma^0 u^{(\alpha)}(p) = \\ &= (2\pi)^3 \delta^3(p - p') \bar{u}^{(\beta)}(p') \gamma^0 u^{(\alpha)}(p) = \langle p', \beta | p, \alpha \rangle. \end{aligned}$$

Напомним, что  $\bar{u}_\beta(p') \gamma^0 u_\alpha(p)$  нормировано на  $\delta_{\alpha\beta} (p^0/m)$ .

Предположим теперь, что  $j^\mu(x)$  — эрмитова четырехвекторная плотность тока, имеющая те же трансформационные свойства относительно дискретных симметрий, что и  $V^\mu(x)$ , и запишем общую структуру ее одночастичного матричного элемента

$$\langle p', \beta | j^\mu(x) | p, \alpha \rangle = e^{-i(p-p') \cdot x} \bar{u}^{(\beta)}(p') O^\mu(p', p) u^{(\alpha)}(p).$$

В дальнейшем мы всегда будем подразумевать, что числовая матрица  $O^\mu(p', p)$  располагается между двумя спинорами  $\bar{u}$  и  $u$ . Вследствие лоренц-ковариантности матрица  $O^\mu(p', p)$  должна подчиняться условию

$$S(\Lambda) O^\mu(p', p) S^{-1}(\Lambda) = (\Lambda^{-1})^\mu_\nu O^\nu(\Lambda p', \Lambda p),$$

а вследствие эрмитовости мы имеем

$$\gamma^0 O^\mu(p', p)^\dagger \gamma^0 = O^\mu(p, p').$$

Из того факта, что спиноры удовлетворяют свободному уравнению Дирака, следует возможность замены любой матрицы  $O^\mu(p', p)$  на

$$O^\mu(p', p) \rightarrow \frac{\not{p}' + m}{2m} O^\mu(p', p) \frac{\not{p} + m}{2m},$$

а также тождество Гордона

$$\gamma^\mu \rightarrow \frac{1}{2m} [(p' + p)^\mu + i\sigma^{\mu\nu} (p' - p)_\nu].$$

Кроме того, потребуем, чтобы сохранялся ток  $j^\mu(x)$ :

$$0 = \langle p', \beta | \partial_\mu j^\mu(x) | p, \alpha \rangle = i(p' - p)_\mu \langle p', \beta | j^\mu(x) | p, \alpha \rangle.$$

Таким образом, получаем  $(p' - p)_\mu O^\mu(p', p) = 0$ . Обозначим через символ  $q$  пространственно-подобную разность  $p' - p$ ; поскольку  $p^2 = p'^2 = m^2$ , единственным скалярным инвариантом является  $q^2$ . Исходя из наиболее общего разложения матрицы  $O^\mu$  в базисе 16 матриц Дирака и учитывая лоренц-инвариантность, законы сохранения и эрмитовость, находим

$$\begin{aligned} \bar{u}^{(\beta)}(p') O^\mu(p', p) u^{(\alpha)}(p) = \bar{u}^{(\beta)}(p') \left[ \gamma^\mu F_1(q^2) + i \frac{\sigma^{\mu\nu} q_\nu}{2m} F_2(q^2) + \right. \\ \left. + \gamma^5 \frac{\sigma^{\mu\nu} q_\nu}{2m} F_3(q^2) \right] u^{(\alpha)}(p); \end{aligned} \quad (3.203)$$

здесь вещественные формфакторы  $F_i(q^2)$  представляют собой функции квадрата передаваемого импульса  $q^2$ . Квантуя спин вдоль некоторой фиксированной оси, из уравнений (3.178) и таблицы (3.199) получаем, что в силу симметрии относительно пространственной четности справедливо равенство

$$\langle p', \beta | j^\mu(x) | p, \alpha \rangle = \langle \tilde{p}', \beta | j_\mu(\tilde{x}) | \tilde{p}, \alpha \rangle.$$

Поскольку  $u^{(\alpha)}(\tilde{p}) = \gamma^0 u^{(\alpha)}(p)$ , из этого равенства следует, что  $O^\mu(p', p) = = \gamma^0 O_\mu(p', \tilde{p}) \gamma^0$ , откуда получаем  $F_3(q^2) = -F_3(q^2)$ . Таким образом, одно только сохранение четности даст  $F_3 = 0$ . Однако четность может нарушаться не которыми взаимодействиями (в действительности — слабыми взаимодействиями).

Долгое время считалось, что произведение четности на зарядовое сопряжение является симметрией всех взаимодействий. Из *CPT*-теоремы следует тогда, что  $T$  также представляет собой симметрию. Отсюда мы приходим к равенству  $G_1^*(q^2) = \epsilon_1 F_1(q^2)$ , в котором  $\epsilon_1 = \epsilon_2 = -\epsilon_3 = 1$ . Вследствие условия эрмитовости функции  $F$  вещественны. Таким образом, мы опять получаем  $F_3 = 0$ . Однако после того, как Фитч и Кронин обнаружили нарушение  $T$  четности в распадах нейтральных  $K$ -мезонов мы не можем утверждать, что она представляет собой симметрию всех взаимодействий.

Предположим, например, что  $j^\mu(x)$  — это электромагнитный ток в теории взаимодействующих полей. Рассматривая два нормированных состояния, близких к состоянию покоя, читатель может без труда показать, что справедливо следующее соответствие:

$$eF_1(0) = \text{Заряд } Q,$$

$$\frac{e}{2m} [F_1(0) + F_2(0)] = \text{Магнитный момент } \mu \text{ (нерелятивистское магнитное взаимодействие } -\mu \cdot \mathbf{B}),$$

$$\frac{-e}{2m} F_3(0) = \text{Электрический дипольный момент } d \text{ (нерелятивистское электрическое взаимодействие } -d \cdot \mathbf{E}).$$

Детальные измерения нуклонных формфакторов были выполнены с использованием рассеяния электронов на водородной и дейтериевой мишенях. Для этого случая  $F_1$  и  $F_2$  сейчас известны в широком диапазоне значений  $q^2$ . Формфактор  $F_3$ , однако, до сих пор не обнаружен. В частности, имеются сообщения (Рамсей) об ограничениях на величину статического электрического



дипольного момента нейтрона, а именно  $d_{\text{нейтрон}}/e \leq 10^{-23}$  см. Значение этого электрического дипольного момента является чувствительным местом механизма нарушения  $CP$ -инвариантности<sup>1)</sup>

Полное гиромагнитное отношение заряженной частицы равно  $2[F_1(0) + F_2(0)]/F_1(0)$ . Например, для протона (при условии  $e=|e|$ )  $F_1(0)=1$ ,  $F_2(0)=1,79$ , и следовательно, его гиромагнитное отношение равно 5,58. В литературе часто употребляются комбинации Закса  $G_F = F_1 + (q^2/4m^2)F_2$  и  $G_M = F_1 + F_2$ , которые более удобны для описания данных по рассеянию. Эти формфакторы можно аналитически продолжить на положительные (временнoподобные) значения  $q^2$ , где они соответствуют процессу фотон  $\rightarrow$  фермион  $+$  антифермион.

В случае скалярных (или псевдоскалярных) частиц соответствующий матричный элемент тока записывается в виде

$$\langle p' | j^\mu(x) | p \rangle = e^{iq \cdot x} \frac{(p' + p)^\mu}{2m} F(q^2). \quad (3.204)$$

Мы завершаем этот раздел алгебраическим упражнением над произведениями четырех полей Дирака, объединенных в ковариантные скалярные плотности. Эти произведения входят, например, в эффективный лагранжиан Ферми для слабых взаимодействий при низких энергиях. Наша цель — показать, к каким следствиям может привести изменение порядка, в котором эти поля объединяются в лоренцев скаляр. При этом исходные квадратичные блоки совпадают с величинами, входящими в таблицу (3.199). Результат такого анализа составляет содержание теоремы Фирца. Пусть  $\Gamma^\alpha$  обозначает какую-либо из 16 матриц Дирака

$$\begin{matrix} \Gamma_S, & \Gamma_V^\mu, & \Gamma_T^{\mu\nu}, & & \Gamma_A^\mu, & \Gamma_P, \\ I, & \gamma^\mu, & \sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2} [\gamma^\mu, \gamma^\nu], & & \gamma^5 \gamma^\mu, & i\gamma^5. \end{matrix} \quad (3.205)$$

Положим  $\Gamma_\alpha = (\Gamma^\alpha)^{-1}$  и заметим, что  $\gamma^0 (\Gamma^\alpha)^\dagger \gamma^0 = \Gamma^\alpha$ , так что формы  $\bar{\psi} \Gamma^\alpha \psi$  эрмитовы. В этих обозначениях

$$\text{Sp } \Gamma^\alpha \Gamma_\beta = 4\delta^\alpha_\beta, \quad 1 \leq \alpha, \beta \leq 16. \quad (3.206)$$

Для любой из  $4 \times 4$  матриц  $X$  справедливо разложение

$$X = x_\alpha \Gamma^\alpha = \frac{1}{4} \Gamma_\alpha \text{Sp}(X \Gamma^\alpha) = \frac{1}{4} \Gamma_\alpha \text{Sp}(X \Gamma_\alpha).$$

<sup>1)</sup> Значение статического электрического дипольного момента нейтрона в настоящее время измерено более точно, чем для других частиц. Наиболее точное значение  $d_n$  получено группой В. М. Лобашова (Ленинградский институт ядерной физики АН СССР):

$$d_n \approx (2,3 \pm 2,3) \cdot 10^{-25} \text{ e} \cdot \text{см}.$$

С появлением перенормируемых теорий слабых и электромагнитных взаимодействий (см. гл. 11 и 12 в т. 2 настоящей книги) проводятся вычисления электрического дипольного момента частиц в моделях, допускающих нарушение  $CP$ -симметрии. Последнее обусловлено введением в теорию так называемых тяжелых кварков. Кроме того, существуют предсказания о наличии электрического дипольного момента у свободных лептонов. Таким образом, точное измерение электрического дипольного момента является проверкой теорий, предсказывающих нарушение  $CP$ -симметрии (См. примечание редактора перевода в конце настоящей главы.) — *Прим. ред.*

Сопоставляя коэффициенты при  $X_{ab}$ , находим следующее тождество, в котором латинские индексы пробегает значения от 1 до 4:

$$\delta_{aa} - \delta_{bb} = \frac{1}{4} \Gamma_{\alpha, \bar{b}\bar{a}} \Gamma_{ab}^{\alpha}. \quad (3.207)$$

Применяя это к  $\Gamma^{\alpha}\Gamma_{\beta}$ , имеем

$$\Gamma^{\alpha}\Gamma_{\beta} = \rho^{\alpha}_{\beta\gamma} \Gamma^{\gamma}, \quad \rho^{\alpha}_{\beta\gamma} \equiv \frac{1}{4} \text{Sp } \Gamma^{\alpha}\Gamma_{\beta}\Gamma_{\gamma}. \quad (3.208)$$

Записывая  $\Gamma_{\alpha} = \varepsilon_{\alpha}\Gamma^{\alpha}$ , где  $\varepsilon_{\alpha} = \pm 1$ , нетрудно заметить, что величина  $\rho_{\alpha\beta\gamma} = \varepsilon_{\alpha}\rho^{\alpha}_{\beta\gamma}$  не меняется при циклической перестановке индексов и что, если заданы значения двух индексов, она не равна нулю лишь при одном значении третьего индекса. Отличные от нуля члены таковы:

$$\rho^{\alpha}_{\beta S} = \rho^{\alpha}_{S\beta} = \delta^{\alpha}_{\beta}$$

и

$$\begin{aligned} \rho_{V_{\mu} T_{\rho\sigma} V_{\nu}} &= -\rho_{V_{\mu} V_{\nu} T_{\rho\sigma}} = i (g_{\rho\mu} g_{\nu\sigma} - g_{\mu\sigma} g_{\nu\rho}), \\ \rho_{V_{\mu} T_{\rho\sigma} A_{\nu}} &= \rho_{T_{\sigma\rho} V_{\mu} A_{\nu}} = \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}, \\ \rho_{V_{\mu} A_{\nu} P} &= -\rho_{A_{\nu} V_{\mu} P} = -i g_{\mu\nu}, \\ \rho_{T_{\mu\nu} A_{\sigma} A_{\rho}} &= -\rho_{A_{\sigma} T_{\mu\nu} A_{\rho}} = i (g_{\mu\sigma} g_{\nu\rho} - g_{\mu\rho} g_{\nu\sigma}), \\ \rho_{T_{\mu\nu} P T_{\rho\sigma}} &= \rho_{P T_{\mu\nu} T_{\rho\sigma}} = \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}, \\ \rho_{T_{\mu\nu} T_{\rho\sigma} T_{\tau\varepsilon}} &= i [g_{\mu\rho} (g_{\nu\tau} g_{\sigma\varepsilon} - g_{\nu\varepsilon} g_{\tau\sigma}) + g_{\mu\sigma} (g_{\nu\varepsilon} g_{\rho\tau} - g_{\nu\tau} g_{\rho\varepsilon}) + \\ &\quad + g_{\mu\tau} (g_{\nu\sigma} g_{\rho\varepsilon} - g_{\nu\rho} g_{\sigma\varepsilon}) + g_{\mu\varepsilon} (g_{\tau\sigma} g_{\nu\rho} - g_{\nu\sigma} g_{\rho\tau})]. \end{aligned} \quad (3.209)$$

Рассмотрим пять лоренцевых скаляров:

$$\begin{aligned} s &= \bar{u}(4) u(2) \bar{u}(3) u(1), \\ v &= \bar{u}(4) \gamma^{\mu} u(2) \bar{u}(3) \gamma_{\mu} u(1), \\ t &= \frac{1}{2} \bar{u}(4) \sigma^{\mu\nu} u(2) \bar{u}(3) \sigma_{\mu\nu} u(1), \\ a &= \bar{u}(4) \gamma^5 \gamma^{\mu} u(2) \bar{u}(3) \gamma_{\mu} \gamma^5 u(1), \\ p &= \bar{u}(4) \gamma^5 u(2) \bar{u}(3) \gamma^5 u(1). \end{aligned} \quad (3.210)$$

Здесь  $u(1)$  обозначает спинор  $u(p_1, \alpha_1)$  с импульсом  $p_1$  и поляризацией  $\alpha_1$ . Мы будем применять символ  $s(4, 2; 3, 1)$  для описания того, каким образом свертываются индексы Дирака; аналогичное обозначение используется для других амплитуд. Любую из амплитуд можно записать в виде

$$b(4, 2; 3, 1) = \bar{u}_{a_3}(3) \bar{u}_{a_4}(4) \Gamma_{a_3 a_2}^{\alpha} \Gamma_{a_3 a_1} \Gamma_{a_2} \Gamma_{a_1} u_{a_1}(1) u_{a_2}(2).$$

Как связаны эти величины с соответствующими им величинами, в которых 4 свертывается с 1, а 3 с 2? Теорема гласит, что существует числовая  $5 \times 5$ -матрица  $F$ , связывающая два набора величин. Эта матрица с необходимостью равна своей обратной. Прежде чем продвинуться дальше, заметим, что можно было бы задать подобным вопросом в пространстве операторов типа  $:\bar{\psi}_4(x) \psi_2(x) \bar{\psi}_3(x) \psi_1(x):$ . Вследствие антикоммутируемости полей Ферми соответствующей матрицей была бы тогда  $-F$ . В любой из пяти величин

$b(4, 2; 3, 1)$  можно использовать уравнение (3.207) и записать

$$u_{a_2}(2) u_{a_1}(1) = \delta_{a_2 a_2}^- \delta_{a_1 a_1}^- u_{a_2}^-(2) u_{a_1}^-(1) = \frac{1}{4} \Gamma_{\beta, a_2 a_1}^- \Gamma_{a_1 a_2}^\beta u_{a_2}^-(2) u_{a_1}^-(1).$$

Таким образом, с помощью (3.208) получим

$$\begin{aligned} b(4, 2; 3, 1) &= \frac{1}{4} \bar{u}_{a_1}(4) \bar{u}_{a_3}(3) \Gamma_{a_4 a_2}^\alpha \Gamma_{\beta, a_2 a_1}^- \Gamma_{\alpha, a_3 a_1} \Gamma_{a_1 a_2}^\beta u_{a_2}^-(2) u_{a_1}^-(1) = \\ &= \frac{1}{4} \rho_{\beta\gamma}^\alpha \rho_{\alpha}^{\beta\delta} \bar{u}(4) \Gamma^\gamma u(1) \bar{u}(3) \Gamma_\delta u(2). \end{aligned}$$

Остается использовать (3.209), чтобы получить искомым результат:

$$\begin{pmatrix} s \\ v \\ t \\ a \\ p \end{pmatrix} (4, 2; 3, 1) = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & -2 & 0 & 2 & -4 \\ 6 & 0 & -2 & 0 & 6 \\ 4 & 2 & 0 & -2 & -4 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} s \\ v \\ t \\ a \\ p \end{pmatrix} (4, 1; 3, 2).$$

Читатель может проверить, что  $F^2=1$ , и диагонализировать матрицу, а также рассмотреть поведение различных амплитуд относительно дискретных симметрий.

## ПРИМЕЧАНИЯ

Физический смысл квантовых коммутационных соотношений в электродинамике анализируется в статьях: *Bohr N., Rosenfeld L.* — Kgl. Danske Videnskab. Selsk. Mat.—Fys. Medd., 1933, vol. 12, p. 8; *Phys. Rev.*, 1950, vol. 78, p. 794. Об ограничениях на массу фотона см. *Goldhaber A. S., Nieto M. M.* — *Rev. Mod. Phys.*, 1971, vol. 43, p. 277. Макроскопические следствия флуктуаций вакуума рассматриваются в работе: *Casimir H. B. G.* — *Proc. Kon. Ned. Akad. Wetenschap.*, ser. B., 1948, vol. 51, p. 793. См. также *Fierz M.* — *Helv. Phys. Acta.*, 1960, vol. 33, p. 855; *Boyer T. M.* — *Annals of Physics (New York)*, 1970, vol. 56, p. 474; *Balian R., Duplantier B.* — *Annals of Physics (New York)*, 1978, vol. 112, p. 165. Результаты экспериментов обсуждаются в работе: *Sparnaay M. J.* — *Physica*, 1958, vol. 24, p. 751. Для изучения сил Ван-дер-Ваальса см. *Feinberg G., Sucher J.* — *Phys. Rev.*, ser. A., 1970, vol. 2, p. 2395. Изложение квантовой теории поля при конечных температурах можно найти, например, в статье: *Dolan L., Jackiw R.* — *Phys. Rev.*, ser. D, 1974, vol. 9, p. 3320.

Общую аксиоматическую формулировку теории поля и вывод некоторых фундаментальных положений см. в книгах: *Streater R., Wightman A. S.* *PCT, Spin and Statistics, and All That.* — New York: Benjamin, 1964 [Имеется перевод: *Стрэттер Р., Вайтман А.* — СРТ, спин, статистика и все такое — М.: Наука, 1966]; *Jost R.* *The General Theory of Quantized Fields.* — Providence, R. I.: AMS, 1965. [Имеется перевод: *Йост Р.* *Общая теория квантованных полей.* — М.: Мир, 1967.]

## ПРИМЕЧАНИЕ РЕДАКТОРА ПЕРЕВОДА

Подробное изложение проблем аксиоматической квантовой теории поля дано в книге: *Боголюбов Н. Н., Логунов А. А., Тодоров И. Т.* *Основы аксиоматического подхода в квантовой теории поля.* — М.: Наука, 1969.

Анализ вопросов экспериментальной проверки условия локальности (и других основных положений квантовой теории поля) можно найти в книге: Общие принципы квантовой теории и их следствия/Под ред. В. А. Мещерякова.— М.: Наука, 1977. См. также обзорную статью: *Киржниц Д. А.*— УФН, 1966, т. 90, вып. 1, с. 129. Основные методы вторичного квантования для систем с переменным числом частиц (пространство Фока) рассмотрены в известной работе В. А. Фока: *Fock V.*, *Zs. Phys.*, 1932, Band 75, s. 622.

Параквантование предложено в работах: *Green N. S.*— *Phys. Rev.* 1953, vol. 90, p. 270; *Волков Д. В.*— ЖЭТФ, 1959, т. 36, с. 1560. Связь параквантования с внутренним квантовым числом частиц рассматривается в работе: *Говорков А. Б.*— ЖЭТФ, 1968, т. 54, с. 1785.

Значение электрического дипольного момента нейтрона взято из статьи: *Altarev I. S. et al.*— *Phys. Lett.*, 1981, vol. 102 B, № 1, p. 13. Значение  $g$ -фактора позитрона приведено в работе: *Schwiberg P. B.*, *Van Dyck R. S.*, *Dehmelt H. G.*— *Phys. Rev. Lett.*, 1981, vol. 47, № 24, p. 1679. Обзор методов проверки дискретных симметрий дан в статье: *Филд Дж.*, *Пикассо Э.*, *Комбли Ф.*— УФН, 1979, т. 127, вып. 4, с. 553. Существование электрического дипольного момента у свободных частиц предсказывается в работах: *Pais A.*, *Primack J. R.*— *Phys. Rev., Ser. D.*, 1973, vol. 8, p. 3036; *Lee T. D.*— *Phys. Rev., Ser. D.*, 1973, vol. 8, p. 1226; *Кадышевский В. Г.*— ЭЧАЯ, 1980, т. 11, вып. 1, с. 5.

## Глава 4

# ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ С ВНЕШНИМ ПОЛЕМ

В настоящей главе мы рассматриваем простой пример динамической системы, а именно взаимодействие квантованных полей с внешним полем. Мы вводим здесь такие важные понятия, как представление взаимодействия и тождества Вика. Развитый формализм применяется затем при анализе излучения классического источника и инфракрасной катастрофы. В фермионном случае физическим аналогом этих явлений является процесс рождения пар под действием  $c$ -числового электромагнитного поля.

### 4.1. КВАНТОВАННОЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ, ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩЕЕ С КЛАССИЧЕСКИМ ИСТОЧНИКОМ

#### 4.1.1. Вероятности излучения

Рассмотрим сначала взаимодействие квантованного электромагнитного поля с каким-либо внешним источником. Возникающая здесь физическая проблема связана с описанием испускания или поглощения фотонов классическим сохраняющимся током  $j_\mu(x)$ :

$$\partial_\mu j^\mu(x) = 0. \quad (4.1)$$

Задавая электромагнитное действие в виде

$$I = - \int d^4x \left( \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + j_\mu A^\mu \right), \quad (4.2)$$

получаем следующее уравнение движения:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \square A^\nu - \partial^\nu \partial \cdot A = j^\nu. \quad (4.3)$$

При квантовании рассматриваемого поля, как и при квантовании свободного поля, имеется трудность, которую можно преодолеть, вводя в выражение для действия дополнительный член вида

$$-\frac{1}{2} \int d^4x (\partial \cdot A)^2.$$

В этой калибровке уравнение движения принимает вид

$$\square A^\mu = j^\mu. \quad (4.4)$$

Операторы  $A_\mu(x)$  действуют в пространстве с индефинитной метрикой и удовлетворяют тем же коммутационным соотношениям, что и в случае свободного поля:

$$[A_\mu(t, \mathbf{x}), \dot{A}_\nu(t, \mathbf{y})] = -g_{\mu\nu} i \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \quad (4.5)$$

Если предположить, что решение уравнения (4.4) принадлежит тому же пространству Фока, в котором определено свободное поле, то связь между свободным и взаимодействующим полями является каноническим преобразованием. В квантовой механике в случае конечного числа степеней свободы эта связь была бы унитарным преобразованием. Однако при бесконечном числе степеней свободы ситуация может осложниться. Проиллюстрируем это на простой модели.

Пусть конечная квантовая система состоит из  $N$  частиц с полуцелыми спинами, расположенных в узлах трехмерной кубической решетки. Частицы могут обладать, например, магнитными моментами. Наблюдаемыми являются  $3N$  операторов  $\sigma_1(n)$ ,  $\sigma_2(n)$ ,  $\sigma_3(n)$ , где  $n$  — индекс узла. Состояния представляют собой линейные комбинации собственных векторов оператора  $\sigma_3$  и обозначаются следующим образом:  $|\pm \pm \dots \pm\rangle$ . Они порождаются действием оператора  $\sigma_-$  на состояние  $|0\rangle \equiv |+\dots+\rangle$ . Рассмотрим операторы, полученные путем вращения:

$$\begin{aligned} \tau_1(n) &= \sigma_1(n) \cos \theta - \sigma_3(n) \sin \theta, \\ \tau_2(n) &= \sigma_2(n), \\ \tau_3(n) &= \sigma_1(n) \sin \theta + \sigma_3(n) \cos \theta. \end{aligned}$$

Очевидно, что

$$\tau_\alpha(n) = \exp \left[ -i \frac{\theta}{2} \sum_{p=1}^N \sigma_2(p) \right] \sigma_\alpha(n) \exp \left[ i \frac{\theta}{2} \sum_{p=1}^N \sigma_2(p) \right].$$

Это означает, что операторы  $\sigma$  и  $\tau$ , которые генерируют одну и ту же алгебру, унитарно эквивалентны. Пусть  $|\theta\rangle$  обозначает новое основное состояние для операторов  $\tau$ :

$$|\theta\rangle = \exp \left[ -i \frac{\theta}{2} \sum_{p=1}^N \sigma_2(p) \right] |0\rangle.$$

Нетрудно вычислить скалярное произведение  $\langle 0 | \theta \rangle = (\cos \theta / 2)^N$ . Предположим, что в пределе  $N \rightarrow \infty$  гильбертово пространство состояний получается из основного состояния  $|0\rangle \equiv |+\dots+\rangle$  действием конечного числа операторов рождения  $\sigma_{(-)}$  и пополнением Коши. Мы можем совершить обратный поворот, преобразуя операторы  $\sigma$  в  $\tau$ , и определить состояние  $|\theta\rangle$  по аналогии с  $|0\rangle$ . Попытаемся отыскать унитарное преобразование  $U(\theta)$ , которое

осуществляло бы этот поворот:

$$|\theta\rangle = U(\theta)|0\rangle, \quad \tau_\alpha(n) = U(\theta)\sigma_\alpha(n)U^\dagger(\theta).$$

Очевидно, что, когда  $N \rightarrow \infty$ , такого унитарного оператора не существует. В этом пределе любое скалярное произведение повернутого и неповернутого состояний обращается в нуль, например  $\langle 0|\theta\rangle = (\cos \theta/2)^N \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0$ . Отсюда можно сделать следующий вывод: в случае бесконечного числа степеней свободы физически эквивалентные наблюдаемые, т. е. подчиняющиеся той же алгебре коммутационных соотношений и т. п., не являются с необходимостью унитарно эквивалентными. Это следует иметь в виду, рассматривая поля  $A_\mu$ , удовлетворяющие свободным коммутационным соотношениям (4.5).

Возвращаясь к уравнению поля (4.4), мы можем написать частное  $c$ -числовое решение

$$A_c^\mu(x) = \int d^4y G(x-y) j^\mu(y),$$

выраженное через некоторую функцию Грина  $G(x-y)$  оператора Д'Аламбера  $\square_x$ :

$$\square_x G(x-y) = \delta^4(x-y).$$

Следовательно, общее решение уравнения (4.4) запишется в виде:

$$A_\mu(x) = A_\mu^{(0)}(x) + \int d^4y G(x-y) j_\mu(y), \quad (4.6)$$

где  $A^{(0)}$  — квантованное свободное поле. Вид функции Грина определяется граничными условиями. Предположим, что ток  $j^\mu(y)$  был включен адиабатически на конечном интервале времени. Используя опережающую и запаздывающую функции Грина [(1.170)]

$$G_{\text{adv}}^{\text{ret}}(x) = -\frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4p \frac{e^{-ip \cdot x}}{(p_0 \pm i\epsilon)^2 - \mathbf{p}^2} = \frac{1}{2\pi} \theta(\pm x_0) \delta(x^2),$$

можно записать

$$\begin{aligned} A^\mu(x) &= A_{\text{in}}^\mu(x) + \int d^4y G_{\text{ret}}(x-y) j^\mu(y) = \\ &= A_{\text{out}}^\mu(x) + \int d^4y G_{\text{adv}}(x-y) j^\mu(y). \end{aligned} \quad (4.7)$$

Свободные поля  $A_{\text{in}}^\mu$  и  $A_{\text{out}}^\mu$  описывают фотонное поле до и после его взаимодействия с током  $j$ . Формально мы имеем

$$\begin{aligned} \lim_{x_0 \rightarrow -\infty} A^\mu(x) &= A_{\text{in}}^\mu(x), \\ \lim_{x_0 \rightarrow +\infty} A^\mu(x) &= A_{\text{out}}^\mu(x). \end{aligned} \quad (4.8)$$

Точный математический смысл этих выражений зависит от вида источника  $j$ . Мы можем потребовать, чтобы данным соотношениям удовлетворяли хотя бы матричные элементы некоторого локального среднего этих полей между нормированными состояниями. Этот слабый предел целиком основывается на предположении об адиабатическом выключении источника при  $|t| \rightarrow \infty$ . В действительности это часто не реализуется, и поэтому соотношение (4.8) приходится принять с некоторой долей скептицизма.

Теория строится в заданном гильбертовом пространстве, например в пространстве Фока для падающих фотонов. При этом вакуум является состоянием, которое дает нуль при действии на него оператора  $a_{in}^{(\lambda)}(k)$ . Наша задача состоит в том, чтобы найти каноническое преобразование, осуществляемое унитарным оператором  $S$ , который связывает in- и out-поля:

$$A_{out}^{\mu}(x) = S^{-1} A_{in}^{\mu}(x) S, \quad (4.9)$$

а также in- и out-состояния

$$\begin{aligned} |out\rangle &= S^{-1} |in\rangle = S^{\dagger} |in\rangle, \\ |in\rangle &= S |out\rangle. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Предположим, что при  $t \rightarrow -\infty$  система находится в определенном состоянии, например в вакуумном, т. е. не содержит (физических) фотонов. Можно вычислить вероятность того, что конечное состояние содержит нуль, один, два и т. д. испущенных фотонов. Например, амплитуду вероятности того, что система остается в основном состоянии, можно записать в виде

$$\langle 0 out | 0 in \rangle = \langle 0 in | S | in \rangle = \langle 0 out | S | 0 out \rangle.$$

Чтобы данное рассмотрение имело смысл, необходимо убедиться, что вероятность  $p_0 = |\langle 0 out | 0 in \rangle|^2$  меньше единицы. Аналогичным образом можно вычислить значения вероятностей  $p_1, p_2, \dots$ , поляризации в конечном состоянии и угловые распределения. Следовательно, оператор  $S$  содержит всю информацию о конечном состоянии.

Займемся теперь определением оператора  $S$ . Из выражения (4.7) имеем

$$\begin{aligned} A_{out}^{\mu}(x) &= A_{in}^{\mu}(x) + \int d^4y [G_{ret}(x-y) - G_{adv}(x-y)] j^{\mu}(y) = \\ &= A_{in}^{\mu}(x) + A_{кл}^{\mu}(x). \end{aligned} \quad (4.11)$$

Второй член в правой части этого выражения, несомненно, является решением однородного уравнения и представляет собой не что иное, как классическое поле  $A_{кл}^{\mu}$ , излученное током  $j$  [(см. (1.206)].



Комбинация  $G^{(-)} \equiv G_{\text{ret}} - G_{\text{adv}}$  уже встречалась в гл. 1 [см. (1.173)]:

$$\begin{aligned} G^{(-)}(x) &= G_{\text{ret}}(x) - G_{\text{adv}}(x) = \frac{i}{(2\pi)^3} \int d^4p e^{-ip \cdot x} \varepsilon(p_0) \delta(p^2) = \\ &= \frac{1}{2\pi} \varepsilon(x^0) \delta(x^2) = -\Delta(x). \end{aligned}$$

С точностью до знака эта величина совпадает с коммутатором  $\Delta$  скалярных безмассовых свободных полей (3.56). Вследствие этого выражение (4.11) можно записать в виде

$$A_{\text{out}}^\mu(x) = S^{-1} A_{\text{in}}^\mu(x) S = A_{\text{in}}^\mu(x) - i \int d^4y [A_{\text{in}}^\mu(x), A_{\text{in}}(y) \cdot j(y)]. \quad (4.12)$$

Это соотношение напоминает формулу (2.81):

$$e^A B e^{-A} = B + [A, B] + \frac{1}{2!} [A, [A, B]] + \dots$$

Действительно, в правой части этой формулы лишь два первых члена отличны от нуля, поскольку  $A$  и  $B$  представляют собой в нашем случае свободные поля, коммутатор которых является  $c$ -числом. Следовательно, можно написать

$$S = \exp \left[ -i \int d^4x A_{\text{in}}(x) \cdot j(x) \right] = \exp \left[ -i \int d^4x A_{\text{out}}(x) \cdot j(x) \right]. \quad (4.13)$$

Данное выражение удовлетворяет всем условиям, налагаемым на оператор  $S$ , включая условие унитарности в пространстве с индефинитной метрикой. Только  $c$ -числовая фаза, зависящая, возможно, от  $j$ , остается в  $S$  произвольной; однако этот произвол не оказывает влияния на физические величины.

Удобно переписать  $S$  в нормальной форме. Представим  $A_{\text{in}}^\mu$  как сумму оператора уничтожения  $A_{\text{in}}^{\mu(-)}$  и оператора рождения  $A_{\text{in}}^{\mu(+)}$ . Мы видим, что  $\partial_\mu A_{\text{in}}^{\mu(+)} = \partial_\mu A_{\text{out}}^{\mu(+)}$ , и, следовательно, физическое подпространство с положительной метрикой должно оставаться инвариантным относительно преобразования  $S$ . Коммутатор операторов  $A^{\mu(-)}$  и  $A^{\nu(+)}$  является  $c$ -числовой функцией:

$$[A_{\text{in}}^{\mu(-)}(x), A_{\text{in}}^{\nu(+)}(y)] = g^{\mu\nu} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^3} e^{-ik \cdot (x-y)} \theta(k^0) \delta(k^2). \quad (4.14)$$

Следовательно, можно воспользоваться тождеством

$$e^A e^B = e^{A+B+[A, B]/2}, \quad (4.15)$$

которое справедливо при условии, что  $[A, [A, B]] = [B, [A, B]] = 0$ . и записать  $S$  в нормальной форме:

$$\begin{aligned} S &= \exp \left[ -i \int d^4y A_{\text{in}}(y) \cdot j(y) \right] = \\ &= \exp \left[ -i \int d^4y A_{\text{in}}^{(-)}(y) \cdot j(y) \right] \exp \left[ -i \int d^4y A_{\text{in}}^{(+)}(y) \cdot j(y) \right] \times \\ &\times \exp \left\{ \frac{1}{2} \iint d^4x d^4y [A_{\text{in}}^{(-)}(x) \cdot j(x), A_{\text{in}}^{(+)}(y) \cdot j(y)] \right\}. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Введем фурье-образ тока  $j(x)$ :

$$J^\mu(k) = \int d^4x j^\mu(x) e^{-ik \cdot x}. \quad (4.17)$$

Условие вещественности тока  $j$  и закон его сохранения запишутся соответственно в виде

$$J^\mu(-k) = J^{\mu*}(k) \text{ и } k_\mu J^\mu(k) = 0. \quad (4.18)$$

В выражении (4.16) показатель последней экспоненты равен

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int \int d^4x d^4y \left[ A_{in}^{(-)}(x) \cdot j(x), A_{in}^{(+)}(y) \cdot j(y) \right] = \\ & = \frac{1}{2} \int \frac{d^3k}{2k^0 (2\pi)^3} J^*(k) \cdot J(k) |_{k^0=|\mathbf{k}|}. \end{aligned}$$

Как и предполагалось, вклад вносят только фурье-компоненты источника, соответствующие изотропным значениям аргумента:  $k^2=0$ . В случае  $k^2=0$  можно написать следующее разложение:

$$J^\mu(k) = k^\mu J_{\text{прод}}(k) + J_{\text{попер}}^\mu(k), \quad (4.19)$$

где  $J_{\text{прод}}(k)$  — число, а  $J_{\text{попер}}^\mu(k)$  — пространственно-подобный вектор, ортогональный  $k$ . Например, если  $k = (k^0, \mathbf{k})$ , мы вводим пространственно-подобные 4-векторы  $\varepsilon_1 = (0, \mathbf{e}_1)$ ,  $\varepsilon_2 = (0, \mathbf{e}_2)$ , причем  $\varepsilon_1^2 = \varepsilon_2^2 = 1$ ,  $\varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2 = \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{k} = \varepsilon_2 \cdot \mathbf{k} = 0$ . Далее можно выбрать  $J_{\text{попер}}^\mu(k) = -\sum_{i=1,2} J_i(k) \varepsilon_i^\mu(k)$ , где  $J_i(k) = \varepsilon_i \cdot J(k)$ . Используя такое разложение, нетрудно показать, что

$$J^*(k) \cdot J(k) = J_{\text{попер}}^*(k) \cdot J_{\text{попер}}(k) = -[|J_1(k)|^2 + |J_2(k)|^2].$$

Иными словами, лишь поперечные компоненты вносят вклад в последний член выражения (4.16):

$$\begin{aligned} S &= \exp \left[ -i \int d^4x A_{in}^{(-)}(x) \cdot j(x) \right] \exp \left[ -i \int d^4x A_{in}^{(+)}(x) \cdot j(x) \right] \times \\ & \times \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int d\vec{k} [ |J_1(k)|^2 + |J_2(k)|^2 ] \right\}. \end{aligned} \quad (4.20)$$

Вероятности излучения выражаются через эти поперечные компоненты. В самом деле, для  $p_0$  находим

$$\begin{aligned} p_0 &= | \langle 0 \text{ out} | 0 \text{ in} \rangle |^2 = | \langle 0 \text{ in} | S | 0 \text{ in} \rangle |^2 = \\ & = \exp \left\{ -\int d\vec{k} [ |J_1(k)|^2 + |J_2(k)|^2 ] \right\}. \end{aligned} \quad (4.21)$$

Чтобы вычислить вероятность  $p_n$ , соответствующую излучению  $n$  фотонов, ни импульсы, ни поляризации которых не измеряются, вспомним, что  $n$ -фотонное состояние определяется выражением

$$|k_1 \lambda_1, k_2 \lambda_2, \dots, k_n \lambda_n \rangle = a^{\dagger(\lambda_1)}(k_1) \dots a^{\dagger(\lambda_n)}(k_n) |0 \rangle,$$

которое нормировано следующим образом:

$$\begin{aligned} & \langle k_1, \lambda_1, \dots, k_n \lambda_n | k'_1 \lambda'_1, \dots, k'_n \lambda'_n \rangle = \\ & = \sum \delta_{\lambda_1 \lambda'_1} \delta_{\lambda_n \lambda'_n} (2\pi)^3 2k_1^0 \delta^3(k_1 - k_{p_1}) \dots (2\pi)^3 2k_n^0 \delta^3(k_n - k_{p_n}). \end{aligned}$$

Сумма берется по всем перестановкам. Согласно статистике Бозе, оператор проектирования на  $n$ -фотонные состояния имеет вид

$$P_n = \frac{1}{n!} \int d\vec{k}_1 \dots d\vec{k}_n \sum_{\lambda_i=1,2} |k_1 \lambda_1, \dots, k_n \lambda_n\rangle \langle k_1 \lambda_1, \dots, k_n \lambda_n|. \quad (4.22)$$

Следовательно, нам нужно рассмотреть матричный элемент

$$\begin{aligned} \langle k_1 \lambda_1, \dots, k_n \lambda_n, \text{out} | 0 \text{in} \rangle &= \langle k_1 \lambda_1, \dots, k_n \lambda_n, \text{in} | S | 0 \text{in} \rangle = \\ &= \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int d\vec{k} [ |J_1(k)|^2 + |J_2(k)|^2 ] \right\} \times \\ & \times \langle k_1 \lambda_1, \dots, k_n \lambda_n, \text{in} | \exp \left[ -i \int d^4x A_{\text{in}}^{(-)}(x) \cdot j(x) \right] | 0 \text{in} \rangle. \end{aligned} \quad (4.23)$$

Теперь мы имеем

$$\begin{aligned} \int d^4x A_{\text{in}}^{(-)}(x) \cdot j(x) &= \int d\vec{k} \sum_{\lambda=0}^3 a^{(\lambda)\dagger}(k) \varepsilon^{(\lambda)}(k) \cdot J(k) = \\ &= \int d\vec{k} \sum_{\lambda=1,2} a^{(\lambda)\dagger}(k) J_\lambda(k). \end{aligned}$$

Благодаря сохранению тока в сумму опять входят только поперечные степени свободы, если в оператор проектирования  $P_n$  включить «продольные» и «скалярные» фотоны, то их вклады автоматически сократятся. В выражении (4.23) член с  $n$  операторами рождения вносит единственный вклад:

$$\begin{aligned} \frac{(-i)^n}{n!} \langle k_1 \lambda_1, \dots, k_n \lambda_n | \int d\vec{q}_1 \dots d\vec{q}_n a^{(\sigma_1)\dagger}(q_1) J_{\sigma_1}(q_1) \dots a^{(\sigma_n)\dagger}(q_n) J_{\sigma_n}(q_n) | 0 \rangle = \\ = (-i)^n J_{\lambda_1}(k_1) \dots J_{\lambda_n}(k_n). \end{aligned} \quad (4.24)$$

Множитель  $1/n!$  исчез, поскольку мы имели  $n!$  одинаковых членов. Вероятность  $p_n$  равна

$$\begin{aligned} p_n &= \langle 0 \text{in} | P_n | 0 \text{in} \rangle = \\ &= \frac{1}{n!} \left\{ \int d\vec{q} [ |J_1(q)|^2 + |J_2(q)|^2 ] \right\}^n \exp \left\{ -\int d\vec{k} [ |J_1(k)|^2 + |J_2(k)|^2 ] \right\}. \end{aligned} \quad (4.25)$$

Вводя величину

$$\bar{n} \equiv \int d\vec{k} [ |J_1(k)|^2 + |J_2(k)|^2 ], \quad (4.26)$$

получаем распределение Пуассона

$$p_n = e^{-\bar{n}} \frac{\bar{n}^n}{n!}. \quad (4.27)$$

Это распределение нормировано, т. е.

$$\sum_0^{\infty} p_n = 1.$$

Тогда среднее число испущенных фотонов  $\bar{n}$  равно

$$\sum_{n=0}^{\infty} n p_n = \bar{n}.$$

Распределение Пуассона (4.27) отражает статистическую независимость последовательного испускания фотонов, которая видна также из факторизованной структуры матричного элемента (4.24). Изучим теперь свойства конечного состояния. Рассмотрим сначала вакуумное состояние  $|0 \text{ in} \rangle$  при  $t \rightarrow -\infty$ , которое является собственным вектором оператора уничтожения  $A_{\text{in}}^{\mu(+)}(x)$ :

$$A_{\text{in}}^{\mu(+)}(x) |0 \text{ in} \rangle = 0.$$

Можно вместо временной эволюции состояния рассматривать эволюцию оператора; это дает

$$A_{\text{out}}^{\mu(+)}(x) |0 \text{ in} \rangle = S^{-1} A_{\text{in}}^{\mu(+)}(x) S |0 \text{ in} \rangle = A_{\text{cl}}^{\mu(+)}(x) |0 \text{ in} \rangle. \quad (4.28)$$

Здесь  $A_{\text{cl}}^{\mu(+)}$  — положительно-частотная часть классического поля, входящая в выражение (4.11):

$$A_{\text{cl}}^{\mu(+)}(x) = \frac{i}{(2\pi)^3} \int d^3k \frac{1}{2k^0} e^{-ik \cdot x} J^{\mu}(k) |_{k^0=|k|}. \quad (4.29)$$

Следовательно,

$$\langle 0 \text{ in} | A_{\text{out}}^{\mu}(x) |0 \text{ in} \rangle = A_{\text{cl}}^{\mu}(x) = \int d^4y G^{(+)}(x-y) j^{\mu}(y). \quad (4.30)$$

Выражение (4.28) означает, что конечное состояние является когерентным (см. гл. 3). Это не противоречит распределению Пуассона для излучения. Действительно, между свойством состояния быть собственным состоянием оператора  $A^{(+)}$  и статистической независимостью последовательных испусканий существует глубокая связь. В более широком смысле можно утверждать, что, если не учитывать квантовых флуктуаций, поле в конечном состоянии равно  $A_{\text{cl}}^{\mu}(x)$ . Этот факт и выражает равенство (4.30).

### 4.1.2. Энергия излучения и инфракрасная катастрофа

Рассмотрим среднее значение энергии, излученной в данном процессе:

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{E}} &= \langle 0 \text{ in} | H(A_{\text{out}}) | 0 \text{ in} \rangle = \\ &= \langle 0 \text{ in} | S^{-1} H(A_{\text{in}}) S | 0 \text{ in} \rangle = \\ &= \langle 0 \text{ in} | S^{-1} \int d\tilde{k} k^0 \sum_{\lambda=1,2} a_{\text{in}}^{(\lambda)\dagger}(k) a_{\text{in}}^{(\lambda)}(k) S | 0 \text{ in} \rangle. \end{aligned} \quad (4.31)$$

Мы видим, что, как и ожидалось, вклады нефизических степеней свободы в сумму взаимно уничтожаются. Из выражения (4.11) мы имеем

$$a_{\text{out}}^{(\lambda)\dagger}(k) = S^{-1} a_{\text{in}}^{(\lambda)\dagger}(k) S = a_{\text{in}}^{(\lambda)\dagger}(k) - iJ_{\lambda}(k), \quad \lambda = 1, 2,$$

и, следовательно,

$$\bar{\mathcal{E}} = \int d\tilde{k} k^0 [ |J_1(k)|^2 + |J_2(k)|^2 ] = \frac{1}{2} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} [ |J_1(k)|^2 + |J_2(k)|^2 ]. \quad (4.32)$$

Этот результат согласуется с классической теорией! В самом деле, излучаемое электромагнитное поле  $F^{\mu\nu}$ , соответствующее потенциалу  $A_{\text{кл}}^{\mu}$ , дается выражением

$$F_{\text{кл}}^{\mu\nu}(x) = \partial^{\mu} A_{\text{кл}}^{\nu} - \partial^{\nu} A_{\text{кл}}^{\mu} = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^3} \varepsilon(k^0) \delta(k^2) e^{-ik \cdot x} [k^{\mu} J^{\nu}(k) - k^{\nu} J^{\mu}(k)].$$

При этом плотность энергии равна

$$\varepsilon(x) = \frac{1}{2} \left\{ \sum_{\alpha=1}^3 [F_{\text{кл}}^{0\alpha}(x)]^2 + \sum_{1 < \alpha < \beta \leq 3} [F_{\text{кл}}^{\alpha\beta}(x)]^2 \right\},$$

а ее интеграл, усредненный по большому периоду времени, запишется в виде

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{E}}_{\text{кл}} &= \int d^3x \varepsilon(x) = \int d\tilde{k} \frac{1}{2k^0} \left[ \sum_{\alpha=1}^3 |k^0 J^{\alpha}(k) - k^{\alpha} J^0(k)|^2 + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{1 < \alpha < \beta \leq 3} |k^{\alpha} J^{\beta}(k) - k^{\beta} J^{\alpha}(k)|^2 \right]. \end{aligned}$$

Продольная составляющая тока  $J$  не вносит вклада в разложение (4.19) на световом конусе, и мы получаем следующий результат:

$$\bar{\mathcal{E}}_{\text{кл}} = \int d\tilde{k} k^0 [ |J_1(k)|^2 + |J_2(k)|^2 ], \quad (4.33)$$

который согласуется с (4.32). Физический смысл этого результата и выражения (4.26) состоит в том, что число фотонов, излу-

ченных в элемент объема фазового пространства  $d\tilde{k}$ , равно

$$d\bar{n} = \hbar^{-1} d\tilde{k} [|J_1(k)|^2 + |J_2(k)|^2], \quad (4.34)$$

а их энергия

$$d\bar{\mathcal{E}} = \hbar k^0 d\bar{n}. \quad (4.35)$$

В частности, если излучается конечная энергия при низкой частоте, то резко возрастает число мягких фотонов  $d\bar{n} = d\bar{\mathcal{E}}/\hbar k^0$ .

Для некоторых токов  $J$  может оказаться, что  $\int d\bar{\mathcal{E}}$  конечен, в то время как  $\int d\bar{\mathcal{E}}/\hbar k^0$  расходится. Это и есть знаменитая инфракрасная катастрофа, о которой шла речь в гл. 1 Там мы видели, что, когда заряд внезапно ускоряется от импульса  $p_i$  до импульса  $p_f$ , он создает ток

$$J^\mu(k) = ie \left( \frac{p_f^\mu}{p_f \cdot k} - \frac{p_i^\mu}{p_i \cdot k} \right).$$

В результате он испускает поток фотонов с конечной полной энергией  $\bar{\mathcal{E}} \sim \int dk^0$ . К несчастью, общее число частиц расходится как  $\bar{n} \sim \int dk^0/\hbar k^0$ . Поэтому невозможно рассматривать заряженные частицы независимо от их поля излучения. Однако, как подчеркивалось в гл. 1, бессмысленно вычислять число испущенных мягких фотонов: единственной физически измеримой величиной является излученная энергия.

С математической точки зрения ситуация действительно «катастрофическая». В самом деле, при  $\bar{n} \rightarrow \infty$  из выражений (4.21) и (4.26) следует, что

$$|\langle 0 \text{ out} | 0 \text{ in} \rangle| = e^{-\bar{n}/2} \rightarrow 0.$$

Любой матричный элемент между in и out-состояниями обращается в нуль. Очевидно, что невозможно построить «out»-пространство Фока из «in»-пространства и невозможно найти унитарный оператор  $S$ . Ситуация здесь такая же, как и в простой модели, которая обсуждалась в начале этого раздела. При определенных обстоятельствах (здесь при  $\bar{n} = \infty$ ) для системы с бесконечным числом степеней свободы могут существовать неэквивалентные представления канонических коммутационных соотношений. Не удивительно, что при этом в рассуждениях возникают противоречия, поскольку мы хотим описать конечные состояния как суперпозицию состояний с ограниченным числом фотонов, хотя известно, что на самом деле их число бесконечно.

С физической точки зрения можно обрезать часть фазового пространства, т. е. условиться учитывать в конечном состоянии

только фотоны с энергией-импульсом, заключенными в ограниченной области. Это соответствует фактическим экспериментальным условиям. Разрешающая способность любого детектора фотонов ограничена, и, следовательно, фотоны, энергия которых ниже энергии разрешения детектора, наблюдаться не могут. Пусть  $R$  — ненаблюдаемая область фазового пространства, а  $C_R$  — ее дополнение. Полная вероятность того, что излучение происходит лишь с импульсом, принадлежащим пространству  $R$ , т. е. что фотоны не детектируются, отлична от нуля:

$$p^R = \sum_{n=0}^{\infty} p_n^R = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\bar{n}} \frac{(\bar{n}_R)^n}{n!} = e^{-(\bar{n} - \bar{n}_R)} = \exp(-\bar{n}_{C_R}),$$

поскольку величина

$$\bar{n}_{C_R} = \int_{C_R} d\vec{k} [|J_1(k)|^2 + |J_2(k)|^2]$$

конечна, в то время как при  $\bar{n} \rightarrow \infty$  каждый член суммы обращается в нуль. Наблюдаемая излученная энергия  $\bar{\mathcal{E}}(C_R) = \bar{\mathcal{E}} - \bar{\mathcal{E}}(R)$  при достаточно малом  $R$  сколь угодно близка к  $\bar{\mathcal{E}}$ , а вероятность детектирования по крайней мере одного фотона с импульсом, не принадлежащим пространству  $R$ , равна  $1 - \exp(-\bar{n}_{C_R})$  и является конечной.

Имеется другая возможность обойти скользкие места предшествующего анализа инфракрасных расходимостей, по крайней мере его математические трудности. Предположим, что фотон имеет небольшую массу  $\mu$ , и при квантовании массивного фотонного поля используем калибровку Штюкельберга, рассмотренную в гл. 3. Это приведет к обрезанию области низких энергий, поскольку теперь  $k^0 > \mu$ ; тем самым мы устраним инфракрасную расходимость. Однако необходимо проверить, что дополнительные степени свободы не дают побочного эффекта, т. е. наблюдаемые величины не изменяются в пределе  $\mu \rightarrow 0$ .

Итак, будем рассматривать поле массивных фотонов, связанное с сохраняющимся током. Напомним, что в теории с нулевой массой состояния с отрицательной нормой не играют роли, возбуждаются лишь поперечные степени свободы. В нашем случае, т. е. в калибровке Штюкельберга, имеет место аналогичная картина; в силу сохранения тока только поперечное поле

$$A_\mu^T = A_\mu + \frac{\lambda}{\mu^2} \partial_\mu (\partial \cdot A)$$

связано с током:

$$\int A_\mu^T(x) j^\mu(y) d^4x = \int A_\mu(x) j^\mu(x) d^4x.$$

Следовательно, состояния с отрицательной нормой не дают вклада. Однако остается вклад от состояний с продольной поляризацией. Величину  $\bar{n}$  можно вычислить, например, из выражений (4.16) и (3.148):

$$\begin{aligned} \bar{n} &= - \int d^4x d^4y [A_{1n}^{(-)}(x) \cdot j(x), A_{1n}^{(+)}(y) \cdot j(y)] = \\ &= - \int \frac{d^3k}{2k^0 (2\pi)^3} J(k) \cdot J^*(k) \Big|_{k^0 = (k^2 + \mu^2)^{1/2}} \end{aligned} \quad (4.36)$$

Как упоминалось выше, для ускоренного заряда  $J \cdot J^* \sim 1/k_0^2$ . Обрезая интегралы при некотором значении  $|\mathbf{k}| = k_{\text{макс}}$ , получаем для  $\bar{n}$  потенциально расходящуюся оценку:

$$\bar{n} \sim \int_0^{k_{\text{макс}}} \frac{dk k^2}{(k^2 + \mu^2)^{3/2}} \sim \ln(k_{\text{макс}}/\mu),$$

в то время как излученная энергия

$$\bar{\mathcal{E}} \sim \int_0^{k_{\text{макс}}} \frac{dk k^2}{k^2 + \mu^2} \sim k_{\text{макс}} - \mu (\pi/2)$$

при  $\mu \rightarrow 0$  ведет себя плавно. Заметим также, что вклад продольных фотонов  $\bar{n}_L$  с данным импульсом  $\mathbf{k}$  пренебрежимо мал по сравнению с вкладом поперечных фотонов  $\bar{n}_T$ :

$$\frac{\bar{n}_L}{\bar{n}_T} \sim \frac{|J_{\text{прод}}|^2 - |J_0|^2}{|J_{\text{попер}}|^2} = \frac{\mu^2}{|k|^2} \frac{|J_0|^2}{|J_{\text{попер}}|^2}, \quad (4.37)$$

где мы использовали соотношение  $|J_{\text{прод}}| = (k_0/|\mathbf{k}|) |J_0|$ , вытекающее из закона сохранения тока. Введение малой массы фотона обеспечивает устранение инфракрасной расходимости. Однако из-за наличия третьего состояния поляризации спектр излучения абсолютно черного тела может измениться в 3/2 раза. Этой трудности удастся избежать в предположении, что время релаксации третьей моды может оказаться столь большим, что этот эффект не будет вообще наблюдаться.

Из проведенного обсуждения ясно, что характерные особенности инфракрасных расходимостей в квантовой электродинамике имеют по существу классическое происхождение и определяются природой внешнего тока и разрешающей способностью экспериментальной установки. Однако существуют квантовые эффекты, например флуктуации числа испущенных фотонов, которые необходимо учитывать. Предполагая, что  $\bar{n}$  — конечное число, вычислим

$$\overline{\Delta n^2} \equiv \overline{n^2} - (\bar{n})^2 = \bar{n}.$$

Отсюда следует

$$\frac{\overline{\Delta n}}{\bar{n}} = (\bar{n})^{-1/2}. \quad (4.38)$$

Если  $\bar{n}$  велико, то эти флуктуации очень малы. Аналогично флуктуацию энергии можно записать в виде

$$\overline{\Delta \mathcal{E}^2} = \overline{\mathcal{E}^2} - (\bar{\mathcal{E}})^2 = \int d\bar{k} k_0^2 [ |J_1(\mathbf{k})|^2 + |J_2(\mathbf{k})|^2 ]. \quad (4.39)$$

Если энергия излучения фотонов имеет резкий максимум для частот вблизи значения  $\langle k^0 \rangle$ , то мы получим

$$\begin{aligned} \overline{\Delta \mathcal{E}} &\sim (\hbar \langle k^0 \rangle \bar{\mathcal{E}})^{1/2}, \\ \bar{\mathcal{E}} &\sim \bar{n} \hbar \langle k^0 \rangle; \end{aligned}$$



следовательно, как и предполагалось,

$$\frac{\Delta \bar{G}}{\bar{G}} \sim \frac{1}{\sqrt{\bar{n}}} = \frac{\Delta n}{\bar{n}}. \quad (4.40)$$

### 4.1.3. Вынужденное поглощение и излучение

Используя явные выражения (4.13) и (4.16) для  $S$ -матрицы, обсудим кратко ряд интересных случаев. В частности, вопрос о том, как наличие фотонов в начальном состоянии влияет на излучение источника  $j$ .

Как следует из соотношений (4.28), действие классического тока на вакуум дает когерентное состояние. Это когерентное состояние можно, в свою очередь, считать начальным состоянием для второго источника  $j$ . Иными словами, предположим, что первый источник  $j_{\text{инс}}$ , который создает начальное состояние

$$|j_{\text{инс}}\rangle = \exp[-i \int d^4x A_{\text{ин}}(x) \cdot j_{\text{инс}}(x)] |0 \text{ ин}\rangle, \quad (4.41)$$

отделен от второго источника  $j(x)$ . Проекция конечного состояния на out-состояние запишется в виде

$$\begin{aligned} \langle b \text{ out} | j_{\text{инс}} \rangle &= \langle b \text{ ин} | \exp\left[-i \int d^4x A_{\text{ин}}(x) \cdot j(x)\right] \times \\ &\quad \times \exp\left[-i \int d^4y A_{\text{ин}}(y) \cdot j_{\text{инс}}(y)\right] |0 \text{ ин}\rangle = \\ &= \exp\left[-\frac{i}{2} \iint d^4x d^4y j_{\mu}(x) G^{(-)}(x-y) j_{\text{инс}}^{\mu}(y)\right] \times \\ &\quad \times \langle b \text{ ин} | \exp\left\{-i \int d^4y A_{\text{ин}}(y) [j_{\text{инс}}(y) + j(y)]\right\} |0 \text{ ин}\rangle. \end{aligned} \quad (4.42)$$

В последнем выражении первый множитель — это чистая фаза, не зависящая от состояния  $b$  и, следовательно, ненаблюдаемая. Второй множитель означает, что конечное состояние создается суммой  $j_{\text{инс}} + j$ . Полное число фотонов  $\bar{n}_{\text{полн}}$  получается заменой  $J$  на  $J + J_{\text{инс}}$  в формуле (4.26), а (среднее) число излученных фотонов, определяемое как разность  $\bar{n}_{\text{полн}} - \bar{n}_{\text{инс}}$ , равно

$$\bar{n}_{\text{изл}} = \bar{n}_{\text{полн}} - \bar{n}_{\text{инс}} = \int d\vec{k} |J_{\text{попер}}(k)|^2 + 2\text{Re} \int d\vec{k} J_{\text{попер}}(k) \cdot J_{\text{инс}}^*(k). \quad (4.43)$$

В правой части этого выражения первый член представляет собой число фотонов, испущенных лишь источником  $j$ , а второй — обычный интерференционный член, который описывает вынужденное поглощение или излучение. Заметим, что этот член является линейным относительно  $j_{\text{инс}}$  (или  $F_{\text{инс}}^{\mu\nu}$ ) и что члены, соответствующие различным частотам, не связаны друг с другом. Это еще раз указывает на то, что различные моды независимы. Читатель может вычислить энергию, излученную в присутствии  $j_{\text{инс}}$ , и снова отметить это явление интерференции. С одной стороны, известно, что два классических источника интерферируют и следствием интерференции энергии должна стать интерференция числа фотонов, поскольку  $d\bar{n}(k) = d\bar{G}(k)/\hbar k^0$ . С другой стороны, в силу стохастической природы излучения явление интерференции числа испущенных фотонов не должно наблюдаться. Это указывает на явную ограниченность стохастической интерпретации. Излучение и поглощение представляют собой взаимосвязанные процессы, поскольку излучающий источник может также и поглощать фотоны. Тогда равенство  $\bar{n}_{\text{полн}} = \bar{n}_{\text{инс}} + \bar{n}_j$  означало бы невозможность поглощения!

Полезно сравнить эту ситуацию со случаем, когда в начальном состоянии имеется определенное число фотонов. Предположим для простоты, что все фотоны принадлежат одной моде:

$$|\bar{n}_{\text{inc}} \text{ in}\rangle = \frac{1}{\sqrt{\bar{n}_{\text{inc}}!}} \left[ \int d\tilde{k} \sum_{\lambda=1,2} f_{\lambda}(k) a^{(\lambda)\dagger}(k) \right]^{\bar{n}_{\text{inc}}} |0 \text{ in}\rangle. \quad (4.44)$$

Функция  $f_{\lambda}$  нормирована условием

$$\int d\tilde{k} \sum_{\lambda=1,2} |f_{\lambda}(k)|^2 = 1,$$

и ясно, что  $f(k)$  имеет максимум в области среднего значения. Вычислим среднее число фотонов в конечном состоянии:

$$\bar{n}_{\text{полн}} = \langle \bar{n}_{\text{inc}} \text{ in} | N_{\text{out}} | \bar{n}_{\text{inc}} \text{ in}\rangle,$$

где

$$\begin{aligned} N_{\text{out}} &= \int d\tilde{k} \sum_{\lambda=1,2} a_{\text{out}}^{(\lambda)\dagger}(k) a_{\text{out}}^{(\lambda)}(k) = S^{\dagger} \int d\tilde{k} \sum_{\lambda} a_{\text{in}}^{(\lambda)\dagger}(k) a_{\text{in}}^{(\lambda)}(k) S = \\ &= \int d\tilde{k} \sum_{\lambda} [a_{\text{in}}^{(\lambda)\dagger}(k) - iJ_{\lambda}(k)] [a_{\text{in}}^{(\lambda)}(k) + iJ_{\lambda}^*(k)]. \end{aligned} \quad (4.45)$$

Поскольку продольные и скалярные фотоны в начальном состоянии отсутствуют и не излучаются, мы учитываем лишь число поперечных фотонов. Таким образом,

$$\begin{aligned} \bar{n}_{\text{полн}} &= \bar{n}_{\text{inc}} + \int d\tilde{k} [|J_1(k)|^2 + |J_2(k)|^2] + \\ &+ \langle \bar{n}_{\text{inc}} | \int d\tilde{k} \left[ \sum_{\lambda} i a^{(\lambda)\dagger}(k) J_{\lambda}(k) + \text{э. с.} \right] | \bar{n}_{\text{inc}} \rangle = \\ &= \bar{n}_{\text{inc}} + \int d\tilde{k} [|J_1(k)|^2 + |J_2(k)|^2]. \end{aligned} \quad (4.46)$$

Итак, среднее число испущенных фотонов такое же, как и при отсутствии фотонов в начальном состоянии! В среднем не происходит ни вынужденного поглощения, ни вынужденного излучения. Но это не означает, что вероятности излучения не изменяются. Действительно, можно вычислить вероятность нахождения  $\bar{m}$  фотонов в конечном состоянии. Простое вычисление дает

$$\begin{aligned} p_{\bar{n}_{\text{inc}} \rightarrow \bar{m}} &= \frac{1}{\bar{n}_{\text{inc}}! \bar{m}!} \frac{\partial^{\bar{n}_{\text{inc}}}}{\partial z^{\bar{n}_{\text{inc}}}} \frac{\partial^{\bar{m}}}{\partial \bar{z}^{\bar{m}}} \times \\ &\times \left( \exp - \left\{ \bar{n}_J + \int d\tilde{k} \left[ z \sum_{\lambda=1,2} J_{\lambda}^*(k) f_{\lambda}(k) + \text{к. с.} \right] \right\} \right) \times \\ &\times \left[ \int d\tilde{k} \sum_{\lambda=1,2} |J_{\lambda}(k) + z f_{\lambda}(k)|^2 \right]^{\bar{m}} \Big|_{z=\bar{z}=0}. \end{aligned} \quad (4.47)$$

В случае слабого источника  $J$  можно сохранить низший порядок по  $J$ . Един-

ственные ненулевые вероятности перехода в этом порядке запишутся в виде

$$\begin{aligned}
 p_{\bar{n}_{\text{inc}} \rightarrow \bar{n}_{\text{inc}}+1}^- &= \int d\tilde{k} \sum_{\lambda=1,2} |J_\lambda(k)|^2 + \bar{n}_{\text{inc}} \left| \int d\tilde{k} \sum_{\lambda=1,2} f_\lambda^*(k) J_\lambda(k) \right|^2, \\
 p_{\bar{n}_{\text{inc}} \rightarrow \bar{n}_{\text{inc}}}^- &= 1 - \int d\tilde{k} \sum_{\lambda=1,2} |J_\lambda(k)|^2 - 2\bar{n}_{\text{inc}} \left| \int d\tilde{k} \sum_{\lambda=1,2} f_\lambda^*(k) J_\lambda(k) \right|^2, \\
 p_{\bar{n}_{\text{inc}} \rightarrow \bar{n}_{\text{inc}}-1}^- &= \bar{n}_{\text{inc}} \left| \int d\tilde{k} \sum_{\lambda=1,2} f_\lambda^*(k) J_\lambda(k) \right|^2 = \\
 &= 1 - p_{\bar{n}_{\text{inc}} \rightarrow \bar{n}_{\text{inc}}}^- - p_{\bar{n}_{\text{inc}} \rightarrow \bar{n}_{\text{inc}}+1}^-.
 \end{aligned}
 \tag{4.48}$$

Первое выражение можно сравнить с вероятностью перехода

$$p_{0 \rightarrow 1} = \int d\tilde{k} \sum_{\lambda=1,2} |J_\lambda(k)|^2.$$

Наличие фотонов в начальном состоянии увеличило вероятность излучения. Это главный результат теории вынужденного излучения. С помощью выражения (4.48) нетрудно также проверить, что среднее число испущенных фотонов остается равным  $\bar{n}_j$ .

#### 4.1.4. S-матрица и оператор эволюции

Выражение (4.13) для S-матрицы мы получили исходя из предположения, что источник не является независимой динамической переменной, т. е. что его эволюция во времени описывается некоторой заданной функцией. При таком подходе оставалась произвольной зависящая от источника фаза в S. Поэтому теперь следует развить общий математический формализм и сравнить его результаты с данным частным случаем. Задача состоит в том, чтобы построить оператор, который осуществляет зависящее от времени каноническое преобразование, связывающее взаимодействующее поле  $A^\mu$  со свободным полем  $A_{\text{in}}^\mu$ :

$$A^\mu(t, \mathbf{x}) = U^{-1}(t) A_{\text{in}}^\mu(t, \mathbf{x}) U(t).
 \tag{4.49}$$

Мы уже отметили, записав результат в виде формулы (4.8), что  $A_{\text{in}}^\mu$  представляет собой слабый предел величины  $A^\mu$  при  $t \rightarrow -\infty$ , и, следовательно, в этом пределе

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} U(t) = I.
 \tag{4.50}$$

При каноническом квантовании мы имеем дело с оператором  $A(t)$ , который удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial}{\partial t} A(t, \mathbf{x}) = i[H(t), A(t, \mathbf{x})],
 \tag{4.51}$$

и оператором  $\pi(t)$ , удовлетворяющим аналогичному уравнению. Здесь  $H(t) = H(A(t), \pi(t), j(t))$  обозначает гамильтониан. Поле

$A_{in}$  удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial}{\partial t} A_{in}(t, \mathbf{x}) = i[H_0^{in}, A_{in}(t, \mathbf{x})],$$

где  $H_0^{in}$  — не зависящий от времени свободный гамильтониан [ср. с выражением (3.120)], записанный через in-операторы рождения и уничтожения. Выведем уравнение эволюции во времени для оператора  $U(t)$ . Из требования унитарности получаем

$$\left[ \frac{d}{dt} U(t) \right] U^{-1}(t) + U(t) \frac{d}{dt} U^{-1}(t) = 0.$$

Кроме того, из уравнения (4.49) следует, что

$$U(t) H(A(t), \pi(t), j(t)) U^{-1}(t) = H(A_{in}(t), \pi_{in}(t), j(t)).$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} A_{in}(t, \mathbf{x}) &= \frac{\partial}{\partial t} [U(t) A(t, \mathbf{x}) U^{-1}(t)] = \\ &= \frac{dU(t)}{dt} U^{-1}(t) A_{in}(t, \mathbf{x}) + iU(t) [H(A(t), \pi(t), j(t)), A(t, \mathbf{x})] \times \\ &\times U^{-1}(t) + A_{in}(t, \mathbf{x}) U(t) \frac{d}{dt} U^{-1}(t) = \\ &= \left[ \frac{dU(t)}{dt} U^{-1}(t) + iH(A_{in}(t), \pi_{in}(t), j(t)), A_{in}(t, \mathbf{x}) \right] = \\ &= i[H_0^{in}, A_{in}(t, \mathbf{x})]; \end{aligned}$$

аналогичное уравнение можно записать для  $\pi_{in}$ . Отсюда вытекает, что оператор

$$\frac{dU(t)}{dt} U^{-1}(t) + i[H(A_{in}(t), \pi_{in}(t), j(t)) - H_0^{in}]$$

коммутирует с каждым in-оператором и, следовательно, является  $c$ -числом. В нормированные матричные элементы оператора  $U$  это число не дает вклада (что мы покажем ниже), и мы в дальнейшем не будем его учитывать. Таким образом, уравнение эволюции для  $U$  запишется в виде

$$\begin{aligned} i \frac{dU}{dt} &= [H(A_{in}(t), \pi_{in}(t), j(t)) - H_0^{in}] U \equiv \\ &\equiv H_{вз}(A_{in}(t), \pi_{in}(t), j(t)) U \equiv H_I(t) U. \end{aligned} \quad (4.52)$$

В нашем случае  $H_0^{in} = H(A_{in}(t), \pi_{in}(t), j)|_{j=0}$ , и гамильтониан взаимодействия  $H_I(t)$  обращается в нуль при  $j=0$ . Таким образом, эволюция во времени, определяемая оператором  $U(t)$ , отвечает представлению взаимодействия. Заметим, что зависимость  $H_I(t)$  от времени определяется зависимостью от времени как тока  $j(t)$ , так и операторов  $A_{in}(t)$  и  $\pi_{in}(t)$ . Уравнение (4.52) можно

решить итерацией соответствующего интегрального уравнения

$$U(t) = I - i \int_{-\infty}^t dt_1 H_I(t_1) U(t_1) \quad (4.53)$$

с учетом граничного условия (4.50). В результате находим

$$U(t) = I - i \int_{-\infty}^t dt_1 H_I(t_1) + (-i)^2 \int_{-\infty}^t dt_1 \int_{-\infty}^{t_1} dt_2 H_I(t_1) H_I(t_2) + \dots + (-i)^n \int_{-\infty}^t dt_1 \int_{-\infty}^{t_1} dt_2 \dots \int_{-\infty}^{t_{n-1}} dt_n H_I(t_1) \dots H_I(t_n) + \dots \quad (4.54)$$

В этих выражениях существенную роль играет упорядочение операторов, а именно последовательная расстановка их в зависимости от величины временных аргументов. Дадим обобщенное определение хронологического произведения  $n$  операторов (сокращенно  $T$ -произведения):

$$T [A_I(t_1) \dots A_n(t_n)] = \sum_P \theta(t_{P_1}, t_{P_2}, \dots, t_{P_n}) \varepsilon_P A_{P_1}(t_{P_1}) \dots A_{P_n}(t_{P_n}), \quad (4.55)$$

где сумма пробегает все перестановки  $P$ ,  $\theta$ -функция обеспечивает выполнение условия

$$t_{P_1} \geq t_{P_2} \geq \dots \geq t_{P_n},$$

а  $\varepsilon_P$  обозначает четность перестановки ферми-операторов, входящих в это произведение. (Последнее правило здесь пока не понадобится, но вскоре нам придется его учить.) Здесь  $T$ -произведение симметрично, и мы можем записать

$$\begin{aligned} U(t) &= \sum_0^\infty (-i)^n \int_{-\infty}^t dt_1 \int_{-\infty}^{t_1} dt_2 \dots \int_{-\infty}^{t_{n-1}} dt_n T [H_I(t_1) \dots H_I(t_n)] = \\ &= \sum_{n=0}^\infty \frac{(-i)^n}{n!} \int_{-\infty}^t dt_1 \int_{-\infty}^{t_1} dt_2 \dots \int_{-\infty}^{t_{n-1}} dt_n T [H_I(t_1) \dots H_I(t_n)] = \\ &= T \exp \left[ -i \int_{-\infty}^t dt' H_I(t') \right]. \end{aligned} \quad (4.56)$$

Последнее выражение для оператора эволюции  $U(t)$  в виде  $T$ -экспоненты является символом, смысл которого расшифровывается предыдущим явным выражением. Нетрудно показать, что  $T$ -произведение экспонент обладает важным свойством. Для  $t_1 \leq t_2 \leq t_3$  имеем

$$T \exp \int_{t_1}^{t_3} dt O(t) = T \exp \int_{t_1}^{t_2} dt T \exp(t) O \int_{t_1}^{t_2} dt O(t).$$

Если  $H_I(t) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow -\infty$ , то оператор  $U(t)$  в выражении (4.56) удовлетворяет требованию (4.50). В нашем случае это действительно так, если ток адиабатически выключается в далеком прошлом.  $S$ -матрица определяется как предел

$$S = \lim_{t \rightarrow +\infty} U(t) = T \exp \left[ -i \int_{-\infty}^{\infty} dt' H_I(t') \right]. \quad (4.57)$$

В данном случае  $H_I = \int d^3x j_\mu(x) \cdot A_{in}^\mu(x)$  и мы получаем

$$S = T \exp \left[ -i \int d^4x j_\mu(x) A_{in}^\mu(x) \right]. \quad (4.58)$$

Определение хронологического упорядочения, обозначаемого символом  $T$ , опирается на конкретные временные координаты. Поэтому последнее выражение на первый взгляд кажется нековариантным. Однако благодаря локальной коммутативности плотность  $\mathcal{H}_I(x) \equiv j^\mu(x) A_\mu(x)$  коммутирует с  $\mathcal{H}_I(y)$ , если  $(x-y)^2 < 0$ . Следовательно, изменение системы координат не меняет вида  $T$ -произведения. В любой теории с взаимодействием без производных имеем

$$H_I(t) = \int d^3x \mathcal{H}_I(x) = - \int d^3x \mathcal{L}_I(x), \quad (4.59)$$

где  $x^0$  обозначает  $t$  и предполагается, что все операторы являются in-операторами. В результате общее «ковариантное» выражение для  $S$ -матрицы записывается в виде:

$$S = T \exp \left[ i \int d^4x \mathcal{L}_I(x) \right]. \quad (4.60)$$

Кавычки напоминают, что используемое нами предположение о локальности не исключает появления заведомо нековариантных сингулярностей на малых расстояниях, когда два аргумента совпадают. Изучением этих сингулярностей занимается теория перенормировок.

Сравним общее выражение [см. (4.58) и (4.60)] с полученным выражением (4.13). Эти два выражения согласуются между собой, если они различаются на ненаблюдаемый фазовый множитель. Это можно показать, используя то свойство, что коммутатор свободных полей представляет собой  $c$ -число. Мы дадим здесь простое эвристическое доказательство данного утверждения, оставляя детальное доказательство читателю. В любом случае свойство, которое мы собираемся доказать, связано с важной теоремой Вика, подробным рассмотрением которой мы вскоре займемся. Запишем сначала  $S$ -матрицу как предел

$$S = \lim_{\substack{t_i \rightarrow -\infty \\ t_f \rightarrow +\infty}} T \exp \left[ -i \int_{t_i}^{t_f} dt H_I(t) \right].$$

Разобьем интервал  $t_f - t_i$  на  $N$  равных интервалов  $\Delta t = (t_f - t_i)/N$  и обозначим через  $t_k$  среднюю точку каждого из них:  $t_k = t_i + [(2k-1)/2]\Delta t$  ( $k=1, \dots, N$ ). При больших  $N$   $T$ -произведение можно приближенно записать в виде

$$T \exp \left[ -i \int_{t_i}^{t_f} dt H_I(t) \right] = e^{-i\Delta t H_I(t_N)} e^{-i\Delta t H_I(t_{N-1})} \dots e^{-i\Delta t H_I(t_1)}.$$

Поскольку коммутатор  $[H_I(t), H_I(t')]$  представляет собой  $c$ -число, воспользуемся тождеством (4.15) и перепишем это произведение следующим образом:

$$\exp \left\{ -i\Delta t \sum_{k=1}^N H_I(t_k) - \frac{1}{2} \Delta t^2 \sum_{1 \leq l < k \leq N} [H_I(t_k), H_I(t_l)] \right\}.$$

Считая, что  $N \rightarrow \infty$  и переходя к пределам  $t_i \rightarrow -\infty, t_f \rightarrow \infty$ , находим

$$S = \exp \left[ -i \int d^4x A_{in}(x) \cdot j(x) \right] \exp \left\{ -\frac{1}{2} \iint d^4x d^4y \theta(x^0 - y^0) \times \right. \\ \left. \times [A_{in}(x) \cdot j(x), A_{in}(y) \cdot j(y)] \right\}. \quad (4.61)$$

Операторы  $A_{in}(x) \cdot j(x)$  и  $A_{in}(y) \cdot j(y)$  — это эрмитовы свободные поля; следовательно, их коммутатор является мнимым  $c$ -числом. Действительно, у нас имеются выражения для запаздывающего коммутатора [(1.169) и (1.170)]:

$$\theta(x^0 - y^0) [A_{in}^\mu(x), A_{in}^\nu(y)] = i g^{\mu\nu} \theta(x^0 - y^0) G^{(-)}(x-y) = \\ = i g^{\mu\nu} G_{ret}(x-y),$$

где

$$G_{ret}(x-y) = - \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ik(x-y)}}{(k_0 + i\epsilon)^2 - \mathbf{k}^2} = \frac{1}{2\pi} \theta(x^0 - y^0) \delta[(x-y)^2].$$

Окончательно получаем

$$S = \exp \left[ -i \int d^4x A_{in}(x) \cdot j(x) \right] \times \\ \times \exp \left[ -\frac{i}{2} \iint d^4x d^4y j^\mu(x) G_{ret}(x-y) j_\mu(y) \right]. \quad (4.62)$$

Как и (4.16), последнее выражение можно записать в нормальной форме:

$$S = : \exp \left[ -i \int d^4x A_{in}(x) \cdot j(x) \right] : \times \\ \times \exp \left( \frac{1}{2} \int d^4x d^4y j_\mu(x) \{ [A_{in}^{(-)\mu}(x), A_{in}^{(+)\nu}(y)] - \right. \\ \left. - \theta(x^0 - y^0) [A_{in}^\mu(x), A_{in}^\nu(y)] \} j_\nu(y) \right).$$

Во второй экспоненте величина в фигурных скобках есть  $s$ -число; следовательно, оно равно своему вакуумному среднему (в состоянии  $|0 \text{ in}\rangle$ ). Для простоты мы опустим обозначение  $\text{in}$  и запишем

$$\begin{aligned} \langle 0 | [A^{(+)\mu}(x), A^{(-)\nu}(y)] - \theta(x^0 - y^0) [A^\mu(x), A^\nu(y)] | 0 \rangle &= \\ &= -\langle 0 | A^\nu(y) A^\mu(x) + \theta(x^0 - y^0) [A^\mu(x), A^\nu(y)] | 0 \rangle = \\ &= -\langle 0 | \theta(x^0 - y^0) A^\mu(x) A^\nu(y) + \theta(y^0 - x^0) A^\nu(y) A^\mu(x) | 0 \rangle = \\ &= -\langle 0 | T A^\mu(x) A^\nu(y) | 0 \rangle = i g^{\mu\nu} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ik \cdot (x-y)}}{k^2 + i\epsilon}. \end{aligned}$$

Теперь можно записать  $S$ -матрицу в нормальной форме:

$$\begin{aligned} S = &: \exp \left[ -i \int d^4 x A_{\text{in}}(x) \cdot j(x) \right] : \times \\ &\times \exp \left[ -\frac{i}{2} \int \int d^4 x d^4 y \langle 0 \text{ in} | T A_{\text{in}}(x) \cdot j(x) A_{\text{in}}(y) \cdot j(y) | 0 \text{ in} \rangle \right]. \end{aligned} \quad (4.63)$$

Заметим еще раз, что этот результат отличается от выражения (4.16) только на ненаблюдаемый фазовый множитель.

## 4.2. ТЕОРЕМА ВИКА

Данный раздел посвящен алгебраическим правилам, которые позволяют преобразовать  $T$ -произведение операторов, например операторов в представлении взаимодействия, к нормальной форме, более удобной для вычисления матричных элементов в пространстве Фока. В дальнейшем любые поля будем считать свободными.

### 4.2.1. Бозонные поля

Выше мы получили следующее тождество для свободного безмассового векторного поля:

$$\begin{aligned} T \exp \left[ -i \int d^4 x A(x) \cdot j(x) \right] &= : \exp \left[ -i \int d^4 x A(x) \cdot j(x) \right] : \times \\ &\times \exp \left[ -\frac{i}{2} \int \int d^4 x d^4 y \langle 0 | T A(x) \cdot j(x) A(y) \cdot j(y) | 0 \rangle \right]. \end{aligned} \quad (4.64)$$

Данный результат не связан ни с векторным характером поля, ни с равенством нулю его массы. Та же формула справедлива для любого бозонного поля. Следовательно, нам все равно, имеем ли мы дело со скалярным, векторным, тензорным или каким-то другим полем, поэтому мы не будем здесь и далее писать лоренцевы индексы. Выражение (4.64) можно рассматривать как производящую функцию для системы тождеств, известных как теорема Вика. Разложим экспоненты и определим коэффициент при  $j(x_1) \dots j(x_n)$ , симметризованный по  $x_1 \dots x_n$  (последнее возможно, поскольку это произведение и коэффициент перед ним стоят под



знаком интеграла по  $x_1 \dots x_n$ . Мы получаем

$$\begin{aligned}
 T[A(x_1) A(x_2)] &= :A(x_1) A(x_2): + \langle 0 | T A(x_1) A(x_2) | 0 \rangle, \\
 T[A(x_1) A(x_2) A(x_3)] &= :A(x_1) A(x_2) A(x_3): + \\
 &\quad + :A(x_1): \langle 0 | T A(x_2) A(x_3) | 0 \rangle + \\
 &\quad + :A(x_2): \langle 0 | T A(x_1) A(x_3) | 0 \rangle + \\
 &\quad + :A(x_3): \langle 0 | T A(x_1) A(x_2) | 0 \rangle, \\
 T[A(x_1) \dots A(x_n)] &= :A(x_1) \dots A(x_n): + \\
 &+ \sum_{k < l} :A(x_1) \dots \widehat{A(x_k)} \dots \widehat{A(x_l)} \dots A(x_n): \langle 0 | T A(x_k) A(x_l) | 0 \rangle + \dots + \\
 &+ \sum_{k_1 < k_2 < \dots < k_{2p}} :A(x_1) \dots \widehat{A(x_{k_1})} \dots \widehat{A(x_{k_{2p}})} \dots A(x_n): \times \\
 &\times \sum_P \langle 0 | T [A(x_{k_{P_1}}) A(x_{k_{P_2}})] | 0 \rangle \dots \\
 &\dots \langle 0 | T [A(x_{k_{P_{2p-1}}}) A(x_{k_{P_{2p}}})] | 0 \rangle + \dots \quad (4.65)
 \end{aligned}$$

В этих формулах знак  $\widehat{\phantom{x}}$  сверху указывает на то, что отмеченный им оператор должен быть изъят из произведения, а  $\sum_P$  берется

по всем перестановкам, что приводит к различным выражениям. Иными словами, в соотношении (4.65)  $T$ -произведение записано через сумму всех возможных нормальных произведений, в которых некоторые пары полей исключены и заменены их спариваниями, т. е. вакуумными средними их  $T$ -произведений.

Доказательство тождеств (4.65) представляет собой хорошее упражнение. Наиболее просто его можно провести методом индукции. Мы предоставляем читателю также убедиться в том, что тождества (4.65) можно обобщить на  $T$ -произведения полей различной природы  $T A_1(x_1) \dots A_n(x_n)$ . Их можно распространить на выражения следующего вида:

$$T : [A(x_1) \dots A(x_k)] : \dots : [A(x_l) \dots A(x_n)] :,$$

однако с тем ограничением, что спаривания здесь возникают только между различными нормальными произведениями. Тождества подобные (4.65), можно применить для записи обычного произведения  $A_1(x_1) \dots A_n(x_n)$  в виде нормальных произведений. В последнем случае единственное отличие состоит в том, что теперь спаривания представляют собой вакуумные средние обычных произведений операторов

$$\begin{aligned}
 A_1(x_1) \dots A_n(x_n) &= \sum_P :A_1(x_1) \dots \widehat{A_{k_1}(x_{k_1})} \dots \widehat{A_{k_{2p}}(x_{k_{2p}})} \dots A(x_n): \times \\
 &\times \{ \langle 0 | A_{k_1}(x_{k_1}) A_{k_2}(x_{k_2}) | 0 \rangle \dots \langle 0 | A_{k_{2p-1}}(x_{k_{2p-1}}) A_{k_{2p}}(x_{k_{2p}}) | 0 \rangle + \\
 &\quad + \text{Перестановки} \}.
 \end{aligned}$$

В заключение заметим, что аналогичные тождества связывают  $T$ -произведения с обычными произведениями. В этом случае спаривание означает запаздывающую функцию Грина; например,

$$TA(x)A(y) = A(x)A(y) + \theta(y^0 - x^0)[A(y), A(x)].$$

Из выражения (4.65) следует, что

$$\begin{aligned} \langle 0 | T[A(x_1) \dots A(x_{i_{p-1}})] | 0 \rangle &= 0, \\ \langle 0 | TA(x_1) \dots A(x_{2p}) | 0 \rangle &= \sum_P \langle 0 | TA(x_{P_1})A(x_{P_2}) | 0 \rangle \dots \times \\ &\times \langle 0 | TA(x_{P_{2p-1}})A(x_{P_{2p}}) | 0 \rangle. \end{aligned} \quad (4.66)$$

Симметричную форму правой части Кайянелло назвал «гафнианом». С помощью (4.66) выражение (4.65) можно переписать в более слабой форме

$$\begin{aligned} TA(x_1) \dots A(x_n) &= \sum_{p=0}^{[n/2]} \sum_{k_1 < \dots < k_{2p}} :A(x_1) \dots \\ &\dots \widehat{A(x_{k_1})} \dots \widehat{A(x_{k_{2p}})} \dots A(x_n) : \times \\ &\times \langle 0 | T[A(x_{k_1}) \dots A(x_{k_{2p}})] | 0 \rangle. \end{aligned} \quad (4.67)$$

#### 4.2.2. Фермионные поля

В случае когда рассматриваются ферми-поля, единственно, что нужно изменить в выражении (4.65), — это знаки. Как и для бозе-полей, выведем тождество, связывающее производящую функцию  $T$ -произведений с производящей функцией нормальных произведений. В случае бозонных полей мы использовали тождество (4.15). Чтобы при рассмотрении фермионных полей иметь дело только с коммутаторами, введем для  $\psi$  и  $\bar{\psi}$  антикоммутирующие источники  $\bar{\eta}$  и  $\eta$ . Последние величины антикоммутируют между собой, а также с  $\psi$  и  $\bar{\psi}$ . Подчеркнем, что они играют чисто математическую роль (они являются элементами алгебры Грассмана, т. е. алгебры антикоммутирующих переменных). С их помощью можно написать тождество

$$[\bar{\eta}(x)\psi(x), \bar{\psi}(y)\eta(y)] = \bar{\eta}(x)\{\psi(x), \bar{\psi}(y)\}\eta(y). \quad (4.68)$$

Все остальные коммутаторы величин  $\bar{\eta}\psi$ ,  $\bar{\psi}\eta$  обращаются в нуль. Введем теперь вспомогательный лагранжиан взаимодействия

$$\mathcal{L}_I(x) = \bar{\eta}(x)\psi(x) + \bar{\psi}(x)\eta(x) \quad (4.69)$$

и соответствующую  $S$ -матрицу:

$$S = T \exp i \int d^4x [\bar{\eta}(x)\psi(x) + \bar{\psi}(x)\eta(x)]. \quad (4.70)$$

Поскольку коммутатор  $[\mathcal{L}_I(x), \mathcal{L}_I(y)]$  коммутирует с  $\mathcal{L}_I(z)$ , мы еще раз используем тождество (4.15) и получим

$$\begin{aligned} & T \exp \left\{ i \int d^4x [\bar{\eta}(x) \psi(x) + \bar{\psi}(x) \eta(x)] \right\} = \\ & = \exp \left\{ i \int d^4x (\bar{\eta}(x) \psi(x) + \bar{\psi}(x) \eta(x)) \right\} \times \\ & \quad \times \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int \int d^4x d^4y \theta(x^0 - y^0) \times \right. \\ & \quad \left. \times [\bar{\eta}(x) \psi(x) + \bar{\psi}(x) \eta(x), \bar{\eta}(y) \psi(y) + \bar{\psi}(y) \eta(y)] \right\}. \end{aligned} \quad (4.71)$$

Таким же образом можно разложить  $\bar{\eta}\psi + \bar{\psi}\eta$  на сумму положительно-частотной части, соответствующей уничтожению (знак «+»), и части, соответствующей рождению (знак «-»), и записать

$$\begin{aligned} & \exp \left\{ i \int d^4x [\bar{\eta}(x) \psi(x) + \bar{\psi}(x) \eta(x)] \right\} = \\ & = \exp \left\{ i \int d^4x [\bar{\eta}(x) \psi^{(-)}(x) + \bar{\psi}^{(-)}(x) \eta(x)] \right\} \times \\ & \quad \times \exp \left\{ i \int d^4x [\bar{\eta}(x) \psi^{(+)}(x) + \bar{\psi}^{(+)}(x) \eta(x)] \right\} \times \\ & \quad \times \exp \left\{ \frac{1}{2} \int \int d^4x d^4y [\bar{\eta}(x) \psi^{(-)}(x) + \bar{\psi}^{(-)}(x) \eta(x), \bar{\eta}(y) \psi^{(+)}(y) + \right. \\ & \quad \left. + \bar{\psi}^{(+)}(y) \eta(y)] \right\}. \end{aligned} \quad (4.72)$$

Как и выше, заменим  $c$ -число,

$$\begin{aligned} & \int \int d^4x d^4y \{ \theta(x^0 - y^0) [\bar{\eta}(x) \psi(x) + \bar{\psi}(x) \eta(x), \bar{\eta}(y) \psi(y) + \bar{\psi}(y) \eta(y)] - \\ & \quad - [\bar{\eta}(x) \psi^{(-)}(x) + \bar{\psi}^{(-)}(x) \eta(x), \bar{\eta}(y) \psi^{(+)}(y) + \bar{\psi}^{(+)}(y) \eta(y)] \} \end{aligned}$$

его вакуумным средним, т. е. величиной

$$\begin{aligned} & \langle 0 | \int \int d^4x d^4y \{ \theta(x^0 - y^0) [\mathcal{L}_I(x), \mathcal{L}_I(y)] + \mathcal{L}_I(y) \mathcal{L}_I(x) \} | 0 \rangle = \\ & = \langle 0 | \int \int d^4x d^4y T [\mathcal{L}_I(x) \mathcal{L}_I(y)] | 0 \rangle. \end{aligned}$$

Вследствие антикоммутативности операторов  $\eta$  есть не что иное, как

$$\begin{aligned} & \int \int d^4x d^4y [\bar{\eta}_\alpha(x) \langle 0 | \theta(x^0 - y^0) \psi_\alpha(x) \bar{\psi}_\beta(y) - \\ & \quad - \theta(y^0 - x^0) \bar{\psi}_\beta(y) \psi_\alpha(x) | 0 \rangle \eta_\beta(y) + \\ & \quad + \eta_\alpha(x) \langle 0 | \theta(x^0 - y^0) \bar{\psi}_\alpha(x) \psi_\beta(y) - \theta(y^0 - x^0) \psi_\beta(y) \bar{\psi}_\alpha(x) | 0 \rangle \bar{\eta}_\beta(y)]. \end{aligned}$$

Заметим, что члены вида  $\psi\bar{\psi}$  и  $\bar{\psi}\psi$  исчезли при интегрировании. Мы видим, что это выражение совпадает с определением  $T$ -произ-

ведения фермионных полей [см. выражения (3.173) или (4.55)]:

$$\int \int d^4x d^4y [\bar{\eta}_\alpha(x) \langle 0 | T \psi_\alpha(x) \bar{\psi}_\beta(y) | 0 \rangle \eta_\beta(y) + \\ + \eta_\alpha(x) \langle 0 | T \bar{\psi}_\alpha(x) \psi_\beta(y) | 0 \rangle \bar{\eta}_\beta(y)].$$

После замены переменной  $x$  на  $y$  под знаком интеграла оба последних выражения дают один и тот же результат. Окончательно получаем

$$T \exp \left\{ i \int d^4x [\bar{\eta}(x) \psi(x) + \bar{\psi}(x) \eta(x)] \right\} = \exp \left\{ i \int d^4x [\bar{\eta}(x) \psi(x) + \right. \\ \left. + \bar{\psi}(x) \eta(x)] \right\} : \exp \left[ - \int \int d^4x d^4y \bar{\eta}(x) \langle 0 | T \psi(x) \bar{\psi}(y) | 0 \rangle \eta(y) \right]. \quad (4.73)$$

Единственное отличие этого выражения от соответствующей формулы (4.64), полученной для бозонных полей, состоит в том, что в показателе последней экспоненты отсутствует коэффициент  $1/2$ , что связано с зарядом фермиона. Если бы мы начали рассмотрение с заряженного неэрмитова бозе-поля  $A$ , то пришлось бы написать  $\mathcal{L}_I(x) = [A^*(x) J(x) + J^*(x) A(x)]$ ; при этом мы получили бы два одинаковых вклада в показателе экспоненты  $\langle 0 | \int \int d^4x d^4y T [\mathcal{L}_I(x) \mathcal{L}_I(y)] | 0 \rangle$  и, следовательно, коэффициент  $1/2$  исчез бы. Явные соотношения между хронологическим и нормальным произведениями получаются, если разложить экспоненты, входящие в (4.73) и учесть антикоммутативность величин  $\eta$  и  $\bar{\eta}$ . Например, во втором порядке по полю получим

$$\frac{1}{2} \int \int d^4x d^4y T [\bar{\eta}(x) \psi(x) + \bar{\psi}(x) \eta(x)] [\bar{\eta}(y) \psi(y) + \bar{\psi}(y) \eta(y)] = \\ = \frac{1}{2} \int \int d^4x d^4y : [\bar{\eta}(x) \psi(x) + \bar{\psi}(x) \eta(x)] [\bar{\eta}(y) \psi(y) + \bar{\psi}(y) \eta(y)] : + \\ + \int \int d^4x d^4y \bar{\eta}(x) \langle 0 | T [\psi(x) \bar{\psi}(y)] | 0 \rangle \eta(y).$$

Отождествляя соответствующие величины, имеем

$$T \psi(x) \psi(y) =: \psi(x) \psi(y):, \\ T \bar{\psi}(x) \bar{\psi}(y) =: \bar{\psi}(x) \bar{\psi}(y):, \\ T \psi(x) \bar{\psi}(y) =: \psi(x) \bar{\psi}(y): + \langle 0 | T \psi(x) \bar{\psi}(y) | 0 \rangle, \quad (4.74) \\ T \bar{\psi}(x) \psi(y) =: \bar{\psi}(x) \psi(y): + \langle 0 | T \bar{\psi}(x) \psi(y) | 0 \rangle.$$

Заметим, что два последних выражения эквивалентны, поскольку

$$T [\psi_\xi(x) \bar{\psi}_\eta(y)] = - T [\bar{\psi}_\eta(y) \psi_\xi(x)]$$

(здесь  $\xi$  и  $\eta$  — спинорные индексы). Для компактности можно включить в аргумент поля  $\psi$  пространственно-временную координату

нату, индекс Дирака и дискретный индекс, который отличает  $\psi_\alpha(x)$  от  $\bar{\psi}_\alpha(x)$ . В таких обозначениях получим следующую обобщенную запись теоремы Вика для ферми-полей:

$$T[\psi(1) \dots \psi(n)] = \sum_{\rho=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \sum_P \sigma_P : \psi(1) \dots \widehat{\psi(k_1)} \dots \widehat{\psi(k_{2\rho})} \dots \psi(n) : \times \\ \times \langle 0 | T\psi(k_{\rho_1}) \psi(k_{\rho_2}) | 0 \rangle \dots \langle 0 | T\psi(k_{\rho_{2\rho-1}}) \psi(k_{\rho_{2\rho}}) | 0 \rangle. \quad (4.75)$$

Здесь сумма берется по всем перестановкам, а  $\sigma_P = \pm 1$  является знаковой функцией перестановки, которая преобразует набор  $\{1, \dots, n\}$  в  $\{1, \dots, \widehat{k_1}, \dots, \widehat{k_{2\rho}}, \dots, n, k_{\rho_1}, \dots, k_{\rho_{2\rho}}\}$ . Проиллюстрируем это правило на примере  $T$ -произведения четырех полей:

$$T\{\psi(1)\psi(2)\psi(3)\psi(4)\} = : \psi(1)\psi(2)\psi(3)\psi(4) : + \\ + : \psi(1)\psi(2) : \langle 0 | T\psi(3)\psi(4) | 0 \rangle - \\ - : \psi(1)\psi(3) : \langle 0 | T\psi(2)\psi(4) | 0 \rangle + : \psi(1)\psi(4) : \langle 0 | T\psi(2)\psi(3) | 0 \rangle + \\ + : \psi(2)\psi(3) : \langle 0 | T\psi(1)\psi(4) | 0 \rangle - : \psi(2)\psi(4) : \langle 0 | T\psi(1)\psi(3) | 0 \rangle + \\ + : \psi(3)\psi(4) : \langle 0 | T\psi(1)\psi(2) | 0 \rangle + \\ + \langle 0 | T\psi(1)\psi(2) | 0 \rangle \langle 0 | T\psi(3)\psi(4) | 0 \rangle - \\ - \langle 0 | T\psi(1)\psi(3) | 0 \rangle \langle 0 | T\psi(2)\psi(4) | 0 \rangle + \\ + \langle 0 | T\psi(1)\psi(4) | 0 \rangle \langle 0 | T\psi(2)\psi(3) | 0 \rangle.$$

Выражение (4.75) можно свести к вакуумному среднему:

$$\langle 0 | T\psi(1) \dots \psi(2n-1) | 0 \rangle = 0, \\ \langle 0 | T\psi(1) \dots \psi(2n) | 0 \rangle = \sum_{\substack{\text{Различные} \\ \text{члены}}} \varepsilon_P \langle 0 | T\psi(P_1)\psi(P_2) | 0 \rangle \dots \times \\ \times \langle 0 | T\psi(P_{2n-1})\psi(P_{2n}) | 0 \rangle = \\ = \sum_{\text{Перестановки } P} \frac{1}{2^{nn}} \varepsilon_P \langle 0 | T\psi(P_1)\psi(P_2) | 0 \rangle \dots \times \\ \times \langle 0 | T\psi(P_{2n-1})\psi(P_{2n}) | 0 \rangle. \quad (4.76)$$

Правая часть выражения (4.76) представляет собой пфаффиан, т.е. корень квадратный из детерминанта антисимметричной  $2n \times 2n$  матрицы, элементы которой имеют вид  $\langle 0 | T\psi(i)\psi(j) | 0 \rangle$ .

### 4.2.3. Общий случай

Нетрудно сформулировать теорему Вика для общего случая, когда имеются как фермионные, так и бозонные поля. Отдельные фермионные поля антикоммутируют, а отдельные бозонные поля коммутируют; предполагается, что бозонное поле коммутирует с фермионным полем (по леднее обстоятельство является обще-

принятым соглашением). Как и выше, будем использовать компактные обозначения:  $\psi$  обозначает либо бозонное, либо фермионное поле, причем на его природу указывает дискретный индекс. Для читателя должно быть очевидным, что формула (4.75) справедлива и в этом случае, если учесть, что знак  $\sigma_p$  является сигнатурой перестановки лишь фермионных полей. Этот результат непосредственно вытекает из вида производящей функции (4.73), которая имеет одну и ту же форму независимо от типа поля.

Теорема Вика, рассматриваемая в данном разделе, тесно связана с вычислением интеграла от полинома нескольких переменных с гауссовой весовой функцией. Впоследствии, при обсуждении функциональных интегралов, мы покажем, что эта аналогия не является случайной

### 4.3. КВАНТОВАННОЕ ПОЛЕ ДИРАКА, ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩЕЕ С КЛАССИЧЕСКИМ ПОТЕНЦИАЛОМ

#### 4.3.1. Общий формализм

После того как мы обсудили «алгебраический» аспект задачи, рассмотрим еще один пример применения квадратичного лагранжиана, а именно электрон-позитронное поле в присутствии классического электромагнитного поля. В этом внешнем поле возможно рождение электрон-позитронных пар. Это физический эквивалент задачи, обсуждавшейся в разд. 4.1, а ее математическим эквивалентом является рождение и уничтожение отдельных электронов антикоммутирующим источником, который мы определили в разд. 4.2.

Помимо рассмотрения таких интересных явлений, как рождение пар, которое, очевидно, не имеет классического аналога, наше исследование должно показать, какую роль играет уравнение Дирака для квантованного поля  $\psi$ :

$$[i\partial - eA(x) - m]\psi(x) = 0. \quad (4.77)$$

Здесь  $A^\mu(x)$  — данное  $c$ -числовое внешнее поле. Это уравнение соответствует лагранжиану взаимодействия

$$\mathcal{L}_I(x) = -\mathcal{H}_I(x) = -e\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)A_\mu(x). \quad (4.78)$$

На данном этапе можно повторить все рассуждения, приведенные в разд. 4.1.4, на основании которых были получены представление взаимодействия и  $S$ -матрица. В результате получаем выражение

$$S = T \exp \left[ -ie \int d^4x \bar{\psi}_{in}(x) \gamma^\mu \psi_{in}(x) A_\mu(x) \right]. \quad (4.79)$$

Однако выражение (4.79) не так просто привести к нормальной форме. Это обусловлено тем, что лагранжиан взаимодействия является квадратичным по полю, а не линейным, и, следовательно, коммутатор двух токов  $\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$  не представляет собой  $c$ -число. Заметим также, что нам неизвестно общее решение уравнения Дирака (4.77) для произвольного поля  $A_\mu$ .

Невзирая на эти трудности, поскольку в нашем распоряжении имеется весь аппарат, следующий из теоремы Вика, мы можем найти формальное решение этой задачи. Рассмотрим подробно амплитуду вероятности процесса, в котором отсутствует рождение пар:

$$S_0(A) = \langle 0 \text{ in} | S | 0 \text{ in} \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-ie)^n}{n!} \int dx_1 \dots dx_n \langle 0 | T [\bar{\psi}(x_1) A(x_1) \psi(x_1) \dots \bar{\psi}(x_n) A(x_n) \psi(x_n)] | 0 \rangle, \quad (4.80)$$

здесь знак in опущен. В этом выражении, согласно теореме Вика, каждый член представляет собой сумму произведений спариваний следующего вида:

$$\langle 0 | T A(x_k) \psi(x_k) \bar{\psi}(x_l) | 0 \rangle.$$

Для данных  $x_k$  и  $x_l$  определим следующую матрицу  $4 \times 4$ :

$$C(\alpha_k, x_k; \alpha_l, x_l) = -ie \sum_{\alpha} \langle 0 | T [A_{\alpha_k \alpha}(x_k) \psi_{\alpha}(x_k) \bar{\psi}_{\alpha_l}(x_l)] | 0 \rangle. \quad (4.81)$$

Выразим  $S_0(A)$  через  $C$ :

$$S_0(A) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \int dx_1 \dots dx_n \sum_P \varepsilon_P \sum_{\alpha_1, \dots, \alpha_n} C(\alpha_1, x_1; \alpha_{P_1}, x_{P_1}) \dots \dots C(\alpha_n, x_n; \alpha_{P_n}, x_{P_n}). \quad (4.82)$$

Удобно рассмотреть на равных правах дискретные индексы  $\alpha_i$  и непрерывные переменные  $x_i$  и объединить их с помощью скобочного символа Дирака  $|x, \alpha\rangle$ . Пространство этих векторов  $|x, \alpha\rangle$  является не чем иным, как пространством классических спинов. Введем  $\Gamma$ -матрицу с элементом вида

$$\langle x, \alpha | \Gamma | y, \beta \rangle = C(x, \alpha; y, \beta). \quad (4.83)$$

Используя матричные обозначения, можно написать

$$S_0(A) = \text{Det}(I - \Gamma) = \exp[\text{sp} \ln(I - \Gamma)]. \quad (4.84)$$

Последние выражения в действительности справедливы для любой матрицы

конечной размерности:

$$\begin{aligned} \det(I - \Gamma) &= \exp[\text{Sp} \ln(I - \Gamma)] = \\ &= 1 - \sum_a \Gamma_{aa} + \frac{(-1)^2}{2} \sum_{a, b} (\Gamma_{aa}\Gamma_{bb} - \Gamma_{ab}\Gamma_{ba}) + \dots + \\ &+ \frac{(-1)^n}{n!} \sum_{a_1, \dots, a_n} \sum_{\substack{P \\ \text{Перестановки} \\ (1, \dots, n)}} \varepsilon_P \Gamma_{a_1 a_{P_1}} \dots \Gamma_{a_n a_{P_n}} + \dots \end{aligned} \quad (4.85)$$

как результат применения формулы Кели—Гамильтона для детерминанта. Разложение здесь заканчивается на  $d$ -м порядке для конечной  $d$ -мерной матрицы. Разумеется, член порядка  $d$  равен  $(-1)^d \det \Gamma$ . В этой формуле детерминант выражен через сумму следов антисимметризованных тензорных произведений. Существует аналогичная формула и для обратного детерминанта

$$\begin{aligned} \det^{-1}(I - \Gamma) &= \exp[-\text{Sp} \ln(I - \Gamma)] = \\ &= 1 + \sum_a \Gamma_{aa} + \frac{1}{2} \sum_{a, b} (\Gamma_{aa}\Gamma_{bb} + \Gamma_{ab}\Gamma_{ba}) + \dots + \\ &+ \frac{1}{n!} \sum_{a_1, \dots, a_n} \sum_{\substack{P \\ \text{Перестановки} \\ (1, \dots, n)}} \Gamma_{a_1 a_{P_1}} \dots \Gamma_{a_n a_{P_n}} + \dots; \end{aligned} \quad (4.86)$$

здесь обратный детерминант представлен как сумма следов симметризованных тензорных произведений. Последнее выражение целесообразно использовать в задаче квантования бозонных полей, связанных с внешним полем.

Эти выражения справедливы и для случая бесконечных матриц в рамках теории Фредгольма при соответствующих предположениях относительно свойств  $\Gamma$ -матрицы. Обозначение  $\text{Det}$  начинается с прописной, а  $\text{sp}$  со строчной буквы, поскольку такие операции предполагают интегрирование по непрерывным переменным. Использование нормальных произведений в (4.78) было бы равносильно допущению, что  $\Gamma_{aa} \equiv 0$ , а следовательно, что член  $\sum \Gamma_{aa}$  в (4.85) можно опустить.

Как и в последнем разделе гл. 2, удобно ввести операторы  $X_\mu$  и  $P_\mu$ , определенные на состояниях  $|x, \alpha\rangle$ :

$$\begin{aligned} X_\mu |x, \alpha\rangle &= x_\mu |x, \alpha\rangle, \\ \langle x, \alpha | P_\mu | \varphi \rangle &= i \frac{\partial}{\partial x^\mu} \langle x, \alpha | \varphi \rangle. \end{aligned}$$

Они подчиняются каноническому коммутационному соотношению

$$[X_\mu, P_\nu] = -i g_{\mu\nu}, \quad (4.87)$$

а собственные векторы  $P_\mu$ , обозначенные как  $|p\rangle$ , таковы, что

$$\langle p | x \rangle = \langle x | p \rangle^* = \frac{e^{i p x}}{(2\pi)^3}.$$



Используя эти матричные обозначения, наряду с выражением (3 174) для пропагатора Дирака, находим

$$\begin{aligned} \Gamma &= eA(x) \frac{1}{P-m+i\epsilon}, \\ S_0(A) &= \text{Det} \left[ I - eA(x) \frac{1}{P-m+i\epsilon} \right] = \\ &= \text{Det} \left\{ [P - eA(x) - m + i\epsilon] \frac{1}{P-m+i\epsilon} \right\} = \\ &= \exp \left\{ -\text{sp} \ln \left[ (P-m) \frac{1}{P - eA(x) - m + i\epsilon} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (4.88)$$

В последнее выражение входит пропагатор Фейнмана в присутствии внешнего поля  $A_\mu(x)$

В качестве упражнения проверим калибровочную инвариантность полученных выражений При калибровочном преобразовании

$$\begin{aligned} A_\mu(x) &\rightarrow A_\mu(x) + \partial_\mu \Phi(x), \\ P - eA(x) - m &\rightarrow P - eA(x) - e\partial\Phi(x) - m. \end{aligned}$$

Из соотношения (4.87) следует:

$$e^{-i\epsilon\Phi(x)} [P - eA(x) - m] e^{i\epsilon\Phi(x)} = P - eA(x) - e\partial\Phi(x) - m.$$

Таким образом, калибровочное преобразование равносильно унитарному преобразованию в пространстве классических спиноров Это не влияет на детерминанты и сохраняет инвариантной величину  $S_0(A)$

Рассмотрим следствия унитарности  $S$ -матрицы Удобно ввести одночастичный оператор рассеяния  $\mathcal{F}(A)$ , который определяется следующим образом:

$$\mathcal{F}(A) = eA(x) + eA(x) \frac{1}{P-m+i\epsilon} \mathcal{F}(A). \quad (4.89)$$

Предположим, что потенциал  $A_\mu(x)$  вещественный; для любого оператора  $B$  на пространстве векторов  $|x, \alpha\rangle$  положим

$$\bar{B} \equiv \gamma^0 B^\dagger \gamma^0,$$

где эрмитово сопряжение действует на индексы  $\alpha$  и  $x$ . Эта операция меняет знак величины  $i\epsilon$  в  $\mathcal{F}(A)$ .

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{F}}(A) &= eA(x) + eA(x) \frac{1}{P-m-i\epsilon} \bar{\mathcal{F}}(A) = \\ &= eA(x) + \bar{\mathcal{F}}(A) \frac{1}{P-m-i\epsilon} eA(x). \end{aligned} \quad (4.90)$$

Таким образом,

$$eA(x) = \bar{\mathcal{F}}(A) - \bar{\mathcal{F}}(A) \frac{1}{P-m-i\epsilon} eA(x).$$

Подстановка этого выражения в (4.89) дает

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(A) &= eA(x) + \left[ \overline{\mathcal{F}}(A) - \overline{\mathcal{F}}(A) \frac{1}{P-m-i\varepsilon} eA(x) \right] \frac{1}{P-m-i\varepsilon} \mathcal{F}(A) = \\ &= eA(x) + \overline{\mathcal{F}}(A) \frac{1}{P-m+i\varepsilon} \mathcal{F}(A) - \overline{\mathcal{F}}(A) \frac{1}{P-m+i\varepsilon} [\mathcal{F}(A) - eA(x)] = \\ &= \overline{\mathcal{F}}(A) \left[ \frac{1}{P-m+i\varepsilon} - \frac{1}{P-m-i\varepsilon} \right] \mathcal{F}(A) + eA(x) + \overline{\mathcal{F}}(A) \frac{1}{P-m-i\varepsilon} eA(x) = \\ &= \overline{\mathcal{F}}(A) \left[ \frac{1}{P-m+i\varepsilon} - \frac{1}{P-m-i\varepsilon} \right] \mathcal{F}(A) + \overline{\mathcal{F}}(A). \end{aligned}$$

В результате имеем

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(A) - \overline{\mathcal{F}}(A) &= \overline{\mathcal{F}}(A) \left( \frac{1}{P-m+i\varepsilon} - \frac{1}{P-m-i\varepsilon} \right) \mathcal{F}(A) = \\ &= \mathcal{F}(A) \left( \frac{1}{P-m+i\varepsilon} - \frac{1}{P-m-i\varepsilon} \right) \overline{\mathcal{F}}(A) = \\ &= \overline{\mathcal{F}}(A) \left[ \frac{2\pi}{i} (P+m) \delta(P^2-m^2) \right] \mathcal{F}(A). \quad (4.91) \end{aligned}$$

Оператор  $2\pi(P+m)\delta(P^2-m^2)$  можно разложить на сумму проекторов на состояния с положительной и отрицательной энергией:

$$\begin{aligned} 2\pi(P+m)\delta(P^2-m^2) &= \rho^{(+)} + \rho^{(-)}, \\ \rho^{(\pm)}(P) &\equiv 2\pi(P+m)\theta(\pm P^0)\delta(P^2-m^2). \quad (4.92) \end{aligned}$$

Эти операторы, проектирующие на массовую поверхность, появятся, естественно, при вычислении таких физических величин, как  $|S_0(A)|^2$ .

Если мы обратимся к первоначальному выражению (4.82) для  $S_0(A)$ , то каждый член правой части можно представить в виде произведения величин, в которых аргументы являются циклическими перестановками:

$$C(\alpha_1, x_1; \alpha_2, x_2) C(\alpha_2, x_2; \alpha_3, x_3) \dots C(\alpha_k, x_k; \alpha_1, x_1)$$

Если бы вместо фейнмановского пропагатора мы воспользовались здесь запаздывающим пропагатором, то все эти циклические множители сократились бы, поскольку запаздывающая функция Грина имеет носитель внутри конуса будущего и, следовательно, циклический член определен на пустом множестве. Как отмечалось в гл. 2, запаздывающий пропагатор имеет вид

$$\frac{P+m}{(P+i\varepsilon)^2-m^2} = \frac{1}{P-m+i\varepsilon},$$

где  $\varepsilon_\mu$  — бесконечно малый положительный времениподобный четырехмерный вектор. Отсюда следует, что

$$\text{Det} \left[ 1 - eA(x) \frac{1}{P-m+i\varepsilon} \right] = 1. \quad (4.93)$$

Но

$$\frac{1}{P-m+i\epsilon} = (P+m) \left[ PP \left( \frac{1}{P^2-m^2} \right) - i\pi\epsilon (P^0) \delta(P^2-m^2) \right],$$

где  $PP$  означает главную часть. Следовательно,

$$\frac{1}{P-m+i\epsilon} - \frac{1}{P-m+i\epsilon} = -i\rho^{(-)}$$

и

$$\begin{aligned} 1 &= \text{Det} \left[ I - eA(x) \frac{1}{P-m+i\epsilon} \right] = \\ &= \text{Det} \left[ I - eA(x) \frac{1}{P-m+i\epsilon} - i\epsilon A(x) \rho^{(-)} \right] = \\ &= \text{Det} \left\{ I - eA(x) \frac{1}{P-m+i\epsilon} - i \left[ I - eA(x) \frac{1}{P-m+i\epsilon} \right] \mathcal{F}(A) \rho^{(-)} \right\} = \\ &= \text{Det} \left\{ \left[ I - eA(x) \frac{1}{P-m+i\epsilon} \right] [I - i\mathcal{F}(A) \rho^{(-)}] \right\} = \\ &= \text{Det} \left[ I - eA(x) \frac{1}{P-m+i\epsilon} \right] \text{Det} [I - i\mathcal{F}(A) \rho^{(-)}]. \end{aligned} \quad (4.94)$$

Из этих выражений и (4.91) мы находим

$$\begin{aligned} [S_0(A)]^{-1} &= \text{Det} [I - i\mathcal{F}(A) \rho^{(-)}], \\ [S_0(A)]^{-2} &= \text{Det} \{ [I - i\mathcal{F}(A) \rho^{(-)}] [I + i\overline{\mathcal{F}}(A) \rho^{(-)}] \} = \\ &= \text{Det} \{ I + i[\overline{\mathcal{F}}(A) - \mathcal{F}(A)] \rho^{(-)} + \mathcal{F}(A) \rho^{(-)} \overline{\mathcal{F}}(A) \rho^{(-)} \} = \\ &= \text{Det} [I - \mathcal{F}(A) \rho^{(+)} \overline{\mathcal{F}}(A) \rho^{(-)}] = \\ &= \exp \{ \text{Sp} \ln [I - \mathcal{F}(A) \rho^{(+)} \overline{\mathcal{F}}(A) \rho^{(-)}] \}. \end{aligned} \quad (4.95)$$

Запишем следующее равенство:

$$|S_0(A)|^2 = \exp \left[ - \int d^4x w(x) \right], \quad (4.96)$$

в котором,

$$w(x) = \text{Sp} \langle x | \ln [I - \mathcal{F}(A) \rho^{(+)} \overline{\mathcal{F}}(A) \rho^{(-)}] | x \rangle \quad (4.97)$$

(здесь знак следа относится лишь к индексам Дирака). Функцию  $w(x)$  можно интерпретировать как плотность вероятности образования пар. Если разбить четырехмерное пространство на небольшие ячейки объемом  $\Delta x_i$  и со средней координатой  $x_i$ , то можно записать приближенное выражение

$$|S_0(A)|^2 \approx \prod_i [1 - \Delta x_i w(x_i)],$$

которое подтверждает данную выше интерпретацию величины  $W(x)$ . Каждая ячейка вносит независимый вклад  $w(x_i)$  в полную вероятность испускания пар. Это следует также из явного вычисления вероятностей испускания одной, двух и т. д. пар. Благодаря присутствию проекторов  $\rho^{(\pm)}$  вероятность  $w(x) d^4x$  выражается через

матричные элементы оператора  $\mathcal{F}$  на массовой поверхности между состояниями частицы и дырки. Это можно пояснить, если определить приведенный оператор  $t$  следующим образом. Используя нормированные решения  $u^{(a)}(p)$  и  $v^{(a)}(p)$  для положительной и отрицательной энергий, введенные в гл. 2, определим матрицу  $t$  на массовой поверхности в виде

$$\langle pa | t | p' b \rangle = 2\pi \sum_{\alpha, \beta} \frac{\gamma^{\alpha} m}{\omega_p^{1/2} \omega_{p'}^{1/2}} \bar{u}_{\alpha}^{(a)}(p) \langle p, \alpha | \bar{\mathcal{F}} | p', \beta \rangle v_{\beta}^{(b)}(-p'), \quad (4.98)$$

где  $\omega_p \equiv (\mathbf{p}^2 + m^2)^{1/2}$ . С помощью выражений для проекторов

$$\begin{aligned} & \sum_{\alpha=1,2} u^{(a)}(p) \bar{u}^{(a)}(p) = \frac{\not{p} + m}{2m}, \quad p^0 > 0, \\ & \sum_{\alpha=1,2} v^{(a)}(-p) \bar{v}^{(a)}(-p) = -\frac{\not{p} + m}{2m}, \quad p^0 < 0, \end{aligned}$$

получаем

$$W_{\text{полн}} = \int d^4x \omega(x) = \int d^3p \text{Sp} \ln(1 + tt^\dagger). \quad (4.99)$$

Отсюда с определенностью следует, что величина  $W_{\text{полн}}$  положительна. Вычислим теперь в явном виде эту вероятность для двух частных случаев

### 4.3.2. Скорость излучения в низшем порядке

Величину  $W$  можно разложить в ряд по степеням  $\alpha = e^2/4\pi$ ; для этого в выражении (4.97) нужно записать в виде ряда как логарифм, так и амплитуду  $\mathcal{F}(A)$ . В низшем порядке получаем

$$W^{(1)} = -\text{sp}(eA\rho^{(+)}eA\rho^{(-)}). \quad (4.100)$$

Положим

$$\langle p | A_{\mu}(X) | p' \rangle = \frac{1}{(2\pi)^2} a_{\mu}(p-p') = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4x A_{\mu}(x) e^{i(p-p') \cdot x}. \quad (4.101)$$

Тогда

$$\begin{aligned} W^{(1)} &= \frac{\alpha}{\pi} \int d^4q \delta^4(q-p_1-p_2) \times \\ &\times \int \frac{d^3p_1}{2\omega_1} \frac{d^3p_2}{2\omega_2} \text{Sp}[(\not{p}_1 + m) \not{\epsilon}(q) (\not{p}_2 - m) \not{\epsilon}(-q)]. \end{aligned} \quad (4.102)$$

В случае, когда  $q = p_1 + p_2$ , мы имеем

$$\begin{aligned} & (1/4) \text{Sp}[(\not{p}_1 + m) \not{\epsilon}(q) (\not{p}_2 - m) \not{\epsilon}(-q)] = \\ & = [- (q^2/2) a(q) \cdot a(-q) + p_1 \cdot a(q) p_2 \cdot a(-q) + p_1 \cdot a(-q) p_2 \cdot a(q)] \end{aligned}$$

Вычислим следующие интегралы [при условии, что  $q^2 = (p_1 + p_2)^2 \geq$

$\geq 4m^2$ ]:

$$I = \int \frac{d^3 p_1}{\omega_1} \frac{d^3 p_2}{\omega_2} \delta^4(q - p_1 - p_2) = 4\pi \int_{2m}^{\infty} p_1 \frac{d\omega_1}{\omega_1} \delta(\sqrt{q^2} - 2\omega_1) =$$

$$= 2\pi \left(1 - \frac{4m^2}{q^2}\right)^{1/2} \theta\left(1 - \frac{4m^2}{q^2}\right), \quad (4.103a)$$

$$I^{\mu\nu} = \iint \frac{d^3 p_1}{\omega_1} \frac{d^3 p_2}{\omega_2} \delta^4(q - p_1 - p_2) p_1^\mu p_2^\nu =$$

$$= \frac{I}{12} \left[ \frac{q^\mu q^\nu}{q^2} (2q^2 + 4m^2) + g^{\mu\nu} (q^2 - 4m^2) \right]. \quad (4.103b)$$

Величину  $I_{\mu\nu}$  можно записать в общем виде как  $I_{\mu\nu} = I_1 g_{\mu\nu} + I_2 q_\mu q_\nu$ , а последовательные свертки с  $q_\mu q_\nu$  и  $g_{\mu\nu}$  дают (4.103б). Все эти операции приводят к следующему выражению для  $W^{(1)}$ :

$$W^{(1)} = \frac{\alpha}{3} \int \frac{d^4 q}{q^2} \left(1 - \frac{4m^2}{q^2}\right)^{1/2} \theta(q^0) \theta\left(1 - \frac{4m^2}{q^2}\right) (2q^2 + 4m^2) \times$$

$$\times \{q \cdot a(q) q \cdot a(-q) - q^2 a(q) \cdot a(-q)\}. \quad (4.104)$$

Этот результат станет более понятным, если ввести фурье-образ тензора электромагнитного поля, определяемый выражением

$$F_{\mu\nu}(q) = -i [q_\mu a_\nu(q) - q_\nu a_\mu(q)],$$

$$\frac{1}{2} F_{\mu\nu}(q) F^{\mu\nu}(-q) = |\mathbf{B}(q)|^2 - |\mathbf{E}(q)|^2 =$$

$$= q^2 a(q) \cdot a(-q) - q \cdot a(q) q \cdot a(-q).$$

Поскольку подынтегральное выражение в (4.104) является четной функцией, можно не учитывать ограничения  $q^0 > 2m$ , и мы окончательно получаем

$$W^{(1)} = \frac{\alpha}{3} \int d^4 q \theta(q^2 - 4m^2) [|\mathbf{E}(q)|^2 - |\mathbf{B}(q)|^2] \left(1 - \frac{4m^2}{q^2}\right)^{1/2} \left(1 + \frac{2m^2}{q^2}\right). \quad (4.105)$$

Это нетривиальный результат теории поля, и его оказалось возможным получить лишь при внимательном изучении теории дырок. Заметим, что в случае  $q^2 > 0$  существует система отсчета, в которой  $\mathbf{q} = 0$ , а следовательно,  $\mathbf{B}(q) = -i\mathbf{q} \times \mathbf{a}(q)$  обращается в нуль; отсюда следует, что  $|\mathbf{E}(q)|^2 - |\mathbf{B}(q)|^2 \geq 0$ , т.е. образование пар представляет собой электрический эффект. Однако создать моды электромагнитных колебаний, соответствующие  $q^2 > 4m^2$ , при помощи современных установок нелегко!

Запишем также в низшем порядке скорости образования пар бесспиновых заряженных бозонов

$$W_{\text{бозоны}}^{(1)} = \frac{\alpha}{12} \int d^4 q \theta(q^2 - 4m^2) [|\mathbf{E}(q)|^2 - |\mathbf{B}(q)|^2] \left(1 - \frac{4m^2}{q^2}\right)^{3/2}. \quad (4.106)$$

### 4.3.3. Образование пар в постоянном однородном электрическом поле

В случае постоянного однородного поля мы можем получить точный результат, не прибегая к теории возмущений. Рассмотрим выражение (4.88) и запишем

$$\ln S_0(A) = \text{sp} \ln \left\{ [P - eA(X) - m + i\varepsilon] \frac{1}{P - m + i\varepsilon} \right\}. \quad (4.107)$$

Поскольку след оператора инвариантен при перестановках, а матрица зарядового сопряжения  $C$  удовлетворяет условию

$$C\gamma_\mu C^{-1} = -\gamma_\mu^T,$$

можно записать следующее равенство:

$$|\ln S_0(A) = \text{sp} \ln \left\{ [P - eA(X) + m - i\varepsilon] \frac{1}{P + m - i\varepsilon} \right\}. \quad (4.108)$$

Выражения (4.107) и (4.108) в сумме дают

$$2 \ln S_0(A) = \text{sp} \ln \left( \left\{ [P - eA(X)]^2 - m^2 + i\varepsilon \right\} \frac{1}{P^2 - m^2 + i\varepsilon} \right). \quad (4.109)$$

Полезное тождество

$$\ln \frac{a}{b} = \int_0^\infty \frac{ds}{s} (e^{is(b+i\varepsilon)} - e^{is(a+i\varepsilon)}) \quad (4.110)$$

позволяет нам записать искомую вероятность в виде

$$\begin{aligned} \omega(x) &= \text{Re} \int_0^\infty \frac{ds}{s} e^{-is(m^2 - i\varepsilon)} \text{Sp} (\langle x | e^{is(P - eA(x))^2} | x \rangle - \langle x | e^{isP^2} | x \rangle) = \\ &= \text{Re} \text{Sp} \int_0^\infty \frac{ds}{s} e^{-is(m^2 - i\varepsilon)} \times \\ &\quad \times \langle x | \left( \exp \left\{ is \left[ (P - eA(x))^2 + \frac{e}{2} \sigma_{\mu\nu} F^{\mu\nu}(x) \right] \right\} - e^{isP^2} \right) | x \rangle. \end{aligned} \quad (4.111)$$

В случае постоянного поля эта вероятность не должна зависеть от  $x$ . Кроме того, оператор  $\sigma_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$  коммутирует со всеми остальными операторами, и мы можем вычислить соответствующую экспоненту. Здесь и далее мы будем считать, что электромагнитное поле является чисто электрическим полем, направленным вдоль оси  $z$  (в разд. 4.3.2 мы показали, что образование пар — это электрический эффект). Выберем также калибровку, при которой

лишь компонента  $A^3(x) = -Et$  ( $t \equiv x^0$ ) не обращается в нуль. Тогда

$$\text{Sp } e^{i s e \sigma_{\mu\nu} F^{\mu\nu}/2} = 4 \text{ ch } (seE), \quad (4.112)$$

и, используя коммутационное соотношение  $[X_0, P_0] = -i$ , получаем

$$\begin{aligned} (P - eA)^2 &= P_0^2 - \mathbf{P}_T^2 - (P^3 + eEX^0)^2 = \\ &= e^{-iP_0P^3/eE} (P_0^2 - \mathbf{P}_T^2 - e^2E^2X^{02}) e^{iP_0P^3/eE}. \end{aligned} \quad (4.113)$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} &\text{Sp } \langle x | e^{is[(P - eA)^2 + \sigma_{\mu\nu} F^{\mu\nu}/2]} | x \rangle = \\ &= 4 \text{ ch } (seE) \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} d\omega d\omega' e^{i(\omega' - \omega)(t + p^3/eE) - i s p_T^2} \langle \omega | e^{is(P_0^2 - e^2E^2X_0^2)} | \omega' \rangle = \\ &= \frac{2eE}{(2\pi)^2 is} \text{ch } (eEs) \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \langle \omega | e^{is(P_0^2 - e^2E^2X_0^2)} | \omega \rangle. \end{aligned} \quad (4.114)$$

Последний интеграл можно рассматривать как след оператора эволюции гармонического осциллятора, причем с чисто мнимой частотой. Это следует из соответствия  $P_0 \rightarrow P$ ,  $-X_0 \rightarrow Q$ ,  $2ieE \rightarrow \omega_0$ ,  $\frac{1}{2} \rightarrow m_0$ ,  $P_0^2 - e^2E^2X_0^2 \rightarrow P^2/2m_0 + (1/2) m_0 \omega_0^2 Q^2$ . Энергетические уровни такой системы хорошо известны, и мы можем написать

$$\text{sp } \exp \left[ is \left( \frac{P^2}{2m_0} + \frac{m_0 \omega_0^2}{2} Q^2 \right) \right] = \sum_{n=0}^{\infty} \exp [is(n + 1/2) \omega_0] = \frac{i}{2 \sin s\omega_0/2}; \quad (4.115)$$

следовательно,

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\omega \langle \omega | e^{is(P_0^2 - e^2E^2X_0^2)} | \omega \rangle = \frac{1}{2 \text{ sh } (seE)}. \quad (4.116)$$

Собирая все члены, находим

$$\omega = -\frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{\infty} \frac{ds}{s^2} \left[ eE \text{cth } (eEs) - \frac{1}{s} \right] \text{Re } (ie^{-is(m^2 - ie)}). \quad (4.117)$$

Здесь член  $1/s$  соответствует вычитанию при  $e=0$  в (4.111). Следует заметить, что интеграл сходится на обоих пределах: инфракрасная сходимость при  $s \rightarrow \infty$  обеспечивается правилом обхода  $m^2 - ie$ , в то время как при  $s \rightarrow 0$ ,  $\text{Re } (ie^{-is(m^2 - ie)}) = \sin sm^2 \approx sm^2$ , член в скобках убывает как  $s$  и подынтегральное выражение оказывается конечным. Интеграл в (4.117) можно вычислить по теореме Коши. Сначала он преобразуется в интеграл по промежутку  $(-\infty, +\infty)$ , а затем контур интегрирования деформируется так, чтобы охватить отрицательную мнимую ось и выделить вклады от полю-

сов гиперболического котангенса. В результате получим выражение для вероятности образования пар в единице объема за единицу времени:

$$\omega = \frac{\alpha E^2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \exp\left(-\frac{n\pi m^2}{|eE|}\right). \quad (4.118)$$

Вследствие того что величина  $|eE|$  мала по сравнению с  $m^2$ , образование пар в постоянном поле никогда непосредственно не наблюдалось. Вспомним, например, что электрическое поле  $E_{ат}$

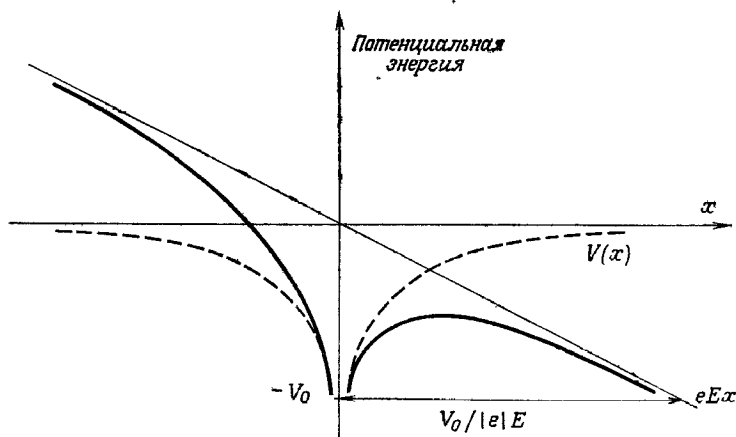


РИС. 4.1 Потенциальная энергия (сплошные кривые) электрона в поле связывающего его потенциала  $V(x)$  (штриховые кривые) и электростатического потенциала  $eEx$ .

на борвской орбите атома водорода имеет порядок  $eE_{ат} \sim m^2 \alpha^3 \sim 4 \cdot 10^{-7} m^2$ .

Аналогичное выражение для вероятности рождения бесспиновых бозонов имеет вид

$$\omega_{\text{бозоны}} = \frac{\alpha E^2}{2\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} \exp\left(-\frac{n\pi m^2}{|eE|}\right). \quad (4.119)$$

В этих формулах существенный множитель  $\exp(-n\pi m^2/|eE|)$  найден не по теории возмущений. Он напоминает квантовый туннельный эффект. Действительно, рассмотрим в атомной физике электрон, находящийся в потенциальной яме  $V(x)$  (штриховая кривая на рис. 4.1) и испытывающий действие дополнительного электрического потенциала  $eEx$ . Результирующий потенциал показан на рис. 4.1 сплошной линией. При энергии связи  $-V_0$  вероятность



ионизации пропорциональна величине

$$\exp \left[ -2 \int_0^{V_0/|eE|} dx \sqrt{2m(V_0 - |eE|x)} \right] = \exp \left( -\frac{4}{3} \sqrt{2mV_0} \frac{V_0}{|eE|} \right).$$

Если предположить, что электрон с отрицательной энергией захвачен потенциалом  $|V_0| \sim 2m$ , то мы получим множитель  $\exp(-\text{const } m^2/|eE|)$ , который качественно согласуется с рассмотренным выше точным результатом.

#### 4.3.4. Эффективный лагранжиан Эйлера — Гейзенберга

Благодаря квантовым эффектам классическое электромагнитное поле может образовывать пары. Это значит, что динамика классического электромагнитного поля содержит квантовые поправки. До сих пор мы рассматривали эффект, связанный с поглощением. Но существуют также явления, обусловленные дисперсией. Включим эти квантовые поправки в эффективный лагранжиан

$$\mathcal{L}_{\text{эфф}} = \mathcal{L}_0 + \delta\mathcal{L},$$

где

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_0 &= -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = \frac{1}{2} (\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2), \\ \delta\mathcal{L} &\equiv \delta\mathcal{L} [(\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2), (\mathbf{E} \cdot \mathbf{B})^2], \end{aligned} \quad (4.120)$$

и будем считать, что поправка  $\delta\mathcal{L}$  является локальной, по крайней мере для медленно меняющихся полей, и записывается как функция инвариантов  $\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2$  и  $(\mathbf{E} \cdot \mathbf{B})^2$ . Известно, что свойства поляризуемости среды в среднем описываются векторами электрической индукции  $\mathbf{D}$  и магнитного поля  $\mathbf{H}$ . Аналогично роль величины  $\delta\mathcal{L}$  сводится к учету поляризуемости вакуума, т. е. взаимодействия электромагнитного поля с вакуумными флуктуациями электрон-позитронного поля. В любых расчетах электромагнитных эффектов будет присутствовать амплитуда  $S_0(A)$ , поскольку она описывает динамику вакуумных флуктуаций. Следовательно, мы предполагаем, что  $\delta\mathcal{L}$  дается выражением

$$\langle 0 | S | 0 \rangle = S_0(A) = \exp \left[ i \int d^4x \delta\mathcal{L}(x) \right]. \quad (4.121)$$

Вещественная часть величины  $\delta\mathcal{L}$  описывает эффекты дисперсии, а мнимая часть — эффекты поглощения. Функционал  $\delta\mathcal{L}(A)$  имеет сложную форму, но если мы ограничимся низкими частотами, то достаточно рассмотреть медленно меняющееся поле или даже постоянное поле в низшем порядке. Тогда можно применить метод вычислений, приведенный в последнем разделе. При этом в случае

чисто электрического поля имеем

$$\delta \mathcal{L}(E) = \frac{1}{8\pi^2} \int_0^{\infty} \frac{ds}{s^2} \left[ eE \operatorname{cth}(eEs) - \frac{1}{s} \right] e^{-ism^2}, \quad (4.122)$$

а в общем случае

$$\delta \mathcal{L} = \frac{1}{8\pi^2} \int_0^{\infty} \frac{ds}{s} e^{-ism^2} \left[ e^2 ab \frac{\operatorname{ch}(eas) \cos(ebs)}{\operatorname{sh}(eas) \sin(ebs)} - \frac{1}{s^2} \right], \quad (4.123)$$

где  $a^2 - b^2 \equiv \mathbf{E}^2 - \mathbf{V}^2$ ,  $ab \equiv \mathbf{E} \cdot \mathbf{V}$ . Читатель может также вывести формулу (4.123) с помощью выражения для пропагатора Дирака, приведенного в разд. 2.5.4, используя соотношение

$$\frac{\delta}{\delta A^\mu(x)} \int d^4x \delta \mathcal{L} = e \operatorname{Sp} \langle x | \gamma_\mu \frac{i}{i\partial - e\mathbf{A} - m} | x \rangle.$$

В интеграле (4.123) в отличие от (4.117), расходящаяся часть пропорциональна  $a^2 - b^2$ , что можно исправить перенормировкой. Для этого перепишем  $\delta \mathcal{L}$  в виде

$$\delta \mathcal{L} = \frac{1}{2} C (\mathbf{E}^2 - \mathbf{V}^2) + \delta \mathcal{L}_{\text{конечн}},$$

где  $C$  бесконечно, и заменим величину  $\mathcal{L}_0$ , определяемую выражением (4.120), на  $(1-C)\mathcal{L}_0$ ; такое изменение ненаблюдаемо, поскольку по условию может наблюдаться лишь величина  $\mathcal{L}_0 + \delta \mathcal{L}$ . При этом последняя величина запишется в виде

$$\mathcal{L}_{\text{эфф}} = (1-C) \frac{\mathbf{E}^2 - \mathbf{V}^2}{2} + \delta \mathcal{L} = \frac{\mathbf{E}^2 - \mathbf{V}^2}{2} + \delta \mathcal{L}_{\text{конечн}}. \quad (4.124)$$

Поправка  $\delta \mathcal{L}_{\text{конечн}}$  получается из  $\delta \mathcal{L}$  вычитанием расходящегося члена; разумеется, такое вычитание приводит к неоднозначности. В последующих главах мы подробно рассмотрим процедуру перенормировки и связанный с ней произвол.

Абсорбтивная часть лагранжиана  $\delta \mathcal{L}$  вместе со всеми ее производными обращается в нуль при  $e=0$ . С помощью теории возмущений можно вычислить только эффекты дисперсии. Например, разлагая (4.123) по степеням  $\alpha$ , во втором порядке находим

$$\delta \mathcal{L}^{(4)} = \frac{2\alpha^2}{45m^4} [(\mathbf{E}^2 - \mathbf{V}^2)^2 + 7(\mathbf{E} \cdot \mathbf{V})^2]. \quad (4.125)$$

Выражения для эффективного лагранжиана Эйлера—Гейзенберга (4.124) и (4.125) можно применять при рассмотрении различных нелинейных эффектов, обусловленных квантовыми поправками.

## ПРИМЕЧАНИЯ

Физическая интерпретация инфракрасной катастрофы рассмотрена в статье: Bloch F., Nordsieck A., Phys. Rev., 1937, vol. 52, p. 54. Исчерпывающее исследование проблемы в рамках теории возмущений дано в работе: Yennie D. R., Frautschi S. C., Suura H.—Ann Phys. (New York), 1961, vol. 13, p. 379. В работе Glauber J. R.—Phys. Rev., 1963, vol. 131, p. 2766 впервые рассмотрены когерентные состояния с целью связать квантовую и классическую электродинамику. Дальнейшее развитие теории см., например, в книге: Quantum Optics and Electronics, ed C De Witt, A. Blandin, C. Cohen-Tannoudji, New York: Les Houches, 1964, Gordon and Breach, 1965.

Представление взаимодействия определяется в работе: Dyson F. J.—Phys. Rev., 1949, vol. 75, p. 486 [Имеется перевод в сб.: «Сдвиг уровней атомных электронов» — М.: ИЛ, 1950.]; см. также работу Вика (Wick G. C.—Phys. Rev., 1950, vol. 80, p. 268).

Эффективный лагранжиан электромагнитного поля впервые рассмотрен Гейзенбергом и Эйлером [см. Zs. Physik, 1936, vol. 98, p. 714]. Его подробно изучал Швингер (Phys. Rev., 1951, vol. 82, p. 664) [Имеется перевод в сб.: Новейшее развитие квантовой электродинамики.— М.: ИЛ, 1956] Эта работа использовалась для написания разд. 4.3; см. также: Schwinger J.—Phys. Rev., 1954, vol. 93, p. 615; 1954, vol. 94, p. 1362 [Имеются переводы в кн.: Швингер Ю. Теория квантованных полей.— М.: ИЛ, 1956.].

## ПРИМЕЧАНИЕ РЕДАКТОРА ПЕРЕВОДА

Физический смысл когерентных состояний и различные их применения в физике частиц подробно рассмотрены в книгах: Малкин И. А., Манько В. И. Динамические симметрии и когерентные состояния квантовых систем.— М.: Наука, 1979; Клаудер Дж., Сударшан Э. Основы квантовой оптики.— М.: Мир, 1970

Вывод ряда соотношений настоящей главы носит символический характер и требует обоснования. Например, формулу (4.88) в случае постоянного однородного электрического поля нельзя использовать непосредственно, поскольку не выполнены условия сходимости ряда (4.80), на котором был основан вывод этой формулы. Последовательный расчет основан на рассмотрении переменного поля и предельном переходе к нулевой частоте. Детальный анализ различных случаев взаимодействия квантовых систем с внешними полями дан в книге: Гриб А. А., Мамаев С. Г., Мостепаненко В. М. Квантовые эффекты в интенсивных внешних полях.— М.: Атомиздат, 1980.

## Глава 5

# ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ПРОЦЕССЫ

В настоящей главе будет установлена связь между измеряемыми на опыте сечениями рассеяния и динамической картиной, которую дает теория поля, опирающаяся на аппарат функций Грина и редуционный формализм Лемана, Симанзика и Циммермана. Результаты иллюстрируются простыми примерами электромагнитных процессов низшего порядка. Будут сформулированы общие требования унитарности и причинности, которые затем используются для построения разложений по парциальным волнам и установления дисперсионных соотношений.

### 5.1. S-МАТРИЦА И АСИМПТОТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ

Нам необходимо завершить изучение вопросов кинематики, прежде чем мы перейдем к вычислению амплитуд переходов на основе теории возмущений. В настоящей главе мы изложим общие правила, которые позволят связать эти вычисления с физическими процессами.

В реальных экспериментах основным средством исследования является рассеяние частиц на различных мишенях. В макроскопической шкале характерное время таких взаимодействий чрезвычайно мало. Поэтому невозможно проследить за деталями временной эволюции системы в течение элементарных актов взаимодействия. Единственное, что мы можем сделать, — это воспользоваться следующей картиной. Для времени, очень далекого от момента столкновения, будем считать, что хорошо разделенные волновые пакеты свободны и развиваются во времени независимо друг от друга. В гл. 4 на конкретных примерах было показано, что совокупность этих входящих состояний образует пространство Фока, т. е. пространство  $n$  векторов соответствующих свободных полей. Следует заметить, что эти  $n$ -состояния должны в точности соответствовать индивидуальным характеристикам изолированных частиц, таким, как масса и заряд. Иными словами, эти измеряемые параметры должны поглотить эффекты самодействия. Затем имеет место процесс столкновения, при котором может происходить рассеяние, поглощение или рождение новых частиц, этот процесс подчиняется фундаментальным законам сохранения.

энергии, импульса, углового момента, четности, зарядовой четности, внутренних симметрий и т. д. По истечении большого времени после столкновения волновые пакеты снова разделяются, становятся свободными, они описывают теперь выходящие состояния. Они снова подчиняются правилам кинематики свободных частиц и соответствуют свободным полям. Согласно постулатам квантовой механики, амплитуда

$$\langle b, \text{out} | a, \text{in} \rangle$$

позволяет нам получить вероятность того, что входящее состояние  $|a\rangle$  в результате временной эволюции перейдет в состояние  $|b\rangle$ .

Выходящие состояния могут играть роль входящих для последующего процесса. Пример тому — приготовление вторичных пучков. Следовательно, между in- и out-пространствами состояний Фока должен существовать изоморфизм. Наша цель состоит в том, чтобы связать вышеупомянутые амплитуды переходов с реальными измерениями. Иными словами, мы хотим установить релятивистскую формулировку золотого правила Ферми и дать выражение для сечений рассеяния.

### 5.1.1. Сечения рассеяния

Рассмотрим сначала простой пример рассеяния двух различных бесспиновых частиц. Выразим начальное состояние через падающие волновые пакеты в импульсном пространстве

$$|i, \text{in}\rangle = \int \frac{d^3 p_1}{2p_1^0 (2\pi)^3} \frac{d^3 p_2}{2p_2^0 (2\pi)^3} f_1(p_1) f_2(p_2) |p_1, p_2, \text{in}\rangle \quad (5.1)$$

С этими волновыми пакетами связаны решения  $\tilde{f}(x)$ , соответствующие положительным энергиям уравнения Клейна — Гордона с определенной массой

$$\tilde{f}(x) = \int \frac{d^3 p}{2p^0 (2\pi)^3} e^{-ip \cdot x} f(p). \quad (5.2)$$

Поток имеет вид

$$i \int d^3 x \tilde{f}^*(x) \overleftrightarrow{\partial}_0 \tilde{f}(x) = \int \frac{d^3 p}{2p^0 (2\pi)^3} |f(p)|^2. \quad (5.3)$$

Вероятность перехода в конечное состояние  $|f, \text{out}\rangle$  дается выражением

$$W_{f \leftarrow i} = |\langle f, \text{out} | i, \text{in} \rangle|^2 \quad (5.4)$$

В отсутствие внешних источников трансляционная инвариантность приводит к тому, что такие матричные элементы обращаются в

нуль, если энергия и импульс не сохраняются. Кроме того, как показано в гл. 4, предположение об изоморфизме между out- и in-состояниями подразумевает существование унитарного оператора  $S$ , называемого обычно  $S$ -матрицей, такого, что

$$\langle f, \text{out} | i, \text{in} \rangle = \langle f, \text{in} | S | i, \text{in} \rangle. \quad (5.5)$$

Свойство унитарности  $S$  необходимо, чтобы сохранить вероятности. Строго говоря,  $S$  преобразует out-состояния в in-состояния в соответствии с (5.5). Поэтому можно говорить, что мы берем эти матричные элементы в in-пространстве, и, если нет особой нужды, будем опускать приставку in. Тогда  $S$ -матрицу можно представить следующим образом:

$$S = I + iT, \quad (5.6)$$

где  $T$  описывает эффект взаимодействия. Если конечное состояние представляет собой плоскую волну, то можно выделить  $\delta$ -функцию, выражающую закон сохранения энергии-импульса, так что

$$\langle f | T | p_1, p_2 \rangle = (2\pi)^4 \delta^4(P_f - p_1 - p_2) \langle f | \mathcal{F} | p_1, p_2 \rangle; \quad (5.7)$$

здесь приведенный оператор  $\mathcal{F}$  действует на энергетической поверхности. Подставляя выражение (5.6) в матричный элемент (5.5), мы видим, что единичная матрица дает вклад только в рассеяние вперед и описывает часть падающего волнового пакета, которая не изменяется взаимодействием. В большинстве экспериментов нас интересует только рассеянная часть пакета. Поэтому мы рассматриваем лишь вклад  $\mathcal{F}$  в вероятность перехода

$$\begin{aligned} W_{f \leftarrow i} = & \int d\bar{p}_1 d\bar{p}_2 d\bar{p}'_1 d\bar{p}'_2 f_1^*(p_1) f_2^*(p_2) f_1(p'_1) f_2(p'_2) (2\pi)^4 \times \\ & \times \delta^4(p_1 + p_2 - p'_1 - p'_2) (2\pi)^4 \delta^4(P_f - p_1 - p_2) \langle f | \mathcal{F} | p_1, p_2 \rangle^* \langle f | \mathcal{F} | p'_1, p'_2 \rangle. \end{aligned} \quad (5.8)$$

Если конечное состояние не является определенным собственным состоянием импульса, приведенная выше формула должна быть обобщена очевидным образом. В большинстве случаев приготавливают начальные частицы с почти хорошо определенными импульсами, т. е. с пренебрежимо малыми ширинами в масштабах изменений матричных элементов  $\mathcal{F}$ . Короче говоря,  $f_i(p_i)$  имеет острый максимум вблизи среднего значения  $\bar{p}_i$  с шириной  $\Delta p_i$ , так что

$$\langle f | \mathcal{F} | p'_1, p'_2 \rangle \approx \langle f | \mathcal{F} | \bar{p}_1, \bar{p}_2 \rangle \approx \langle f | \mathcal{F} | p_1, p_2 \rangle.$$

Используя это приближение и интегральное представление

$$(2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2 - p'_1 - p'_2) = \int d^4x e^{-ix} (p'_1 + p'_2 - p_1 - p_2),$$

находим

$$W_{f \leftarrow i} = \int d^4x |\tilde{f}_1(x)|^2 |\tilde{f}_2(x)|^2 (2\pi)^4 \delta^4(P_f - \bar{p}_1 - \bar{p}_2) |\langle f | \mathcal{S} | \bar{p}_1, \bar{p}_2 \rangle|^2. \quad (5.9)$$

Эту величину можно интерпретировать как вероятность перехода в единицу времени в единичном объеме:

$$\frac{dW_{f \leftarrow i}}{dV dt} = |\tilde{f}_1(x)|^2 |\tilde{f}_2(x)|^2 (2\pi)^4 \delta^4(P_f - \bar{p}_1 - \bar{p}_2) |\langle f | \mathcal{S} | \bar{p}_1, \bar{p}_2 \rangle|^2. \quad (5.10)$$

В формулах (5.9) и (5.10)  $\tilde{f}_i(x) = e^{-i\bar{p}_i \cdot x} F_i(x)$ , причем  $F_i(x)$  — медленно меняющаяся функция переменной  $x$ , такая, что мы можем написать

$$i\tilde{f}^*(x) \overleftrightarrow{\partial}_\mu \tilde{f}(x) \approx 2\bar{p}_\mu |\tilde{f}(x)|^2. \quad (5.11)$$

Для определенности предположим, что в лабораторной системе координат частицы типа 1 падают на частицы типа 2, находящиеся в покое. Число частиц в единице мишени равно  $dn_2/dV = = 2\bar{p}_2^0 |\tilde{f}_2(x)|^2$ ,  $\bar{p}_2^0 = m_2$ . Падающий поток задается произведением скорости  $|\bar{\mathbf{p}}_1|/\bar{p}_1^0$  на плотность  $2\bar{p}_1^0 |\tilde{f}_1(x)|^2$  и равен  $2|\bar{\mathbf{p}}_1| |\tilde{f}_1(x)|^2$ .

Это приводит к следующей интерпретации соотношения (5.10):  $dW_{f \leftarrow i}/dV dt$  = Вероятность перехода из состояния  $|i\rangle$  в состояние  $|f\rangle$  за единицу времени в единице объема = Плотность мишени  $[2m_2 |\tilde{f}_2(x)|^2] \times$  Падающий поток  $[2|\bar{\mathbf{p}}_1| |\tilde{f}_1(x)|^2] \times$  Сечение  $d\sigma$ :

$$d\sigma = (2\pi)^4 \delta^4(P_f - \bar{p}_1 - \bar{p}_2) \frac{1}{4m_2 |\bar{\mathbf{p}}_1|} |\langle f | \mathcal{S} | \bar{p}_1, \bar{p}_2 \rangle|^2. \quad (5.12)$$

Сечение рассеяния представляет собой вероятность перехода на одном рассеивателе в мишени при единичном падающем потоке. Выражение (5.12) отвечает идеализированному конечному состоянию с определенным импульсом. Его следует заменить на более правильное выражение, интегрируя по энергии и импульсу в области  $\Delta$ , соответствующей точности измерения этих величин. Например, в случае, когда имеется  $n$  различных бесспиновых частиц в конечном состоянии (рис. 5.1), сечение дается выражением

$$d\sigma_{n \leftarrow 2} = \frac{1}{4[(p_1 \cdot p_2)^2 - m_1^2 m_2^2]^{1/2}} \int_{\Delta} d\tilde{p}_3 \dots d\tilde{p}_{n+2} \times |\langle p_3, \dots, p_{n+2} | \mathcal{S} | p_1, p_2 \rangle|^2 (2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2 - p_3 - \dots - p_{n+2}). \quad (5.13)$$

Здесь фактор  $m_2 |\bar{\mathbf{p}}_1|$  выражен через релятивистские инварианты

и учтено, что в лабораторной системе

$$m_2 |p_1| = m_2 [(p_1^0)^2 - m_1^2]^{1/2} = [(p_2 \cdot p_1)^2 - m_1^2 m_2^2]^{1/2}.$$

Таким образом мы определили сечение как лоренц-инвариантное понятие. Напомним читателю, что для бозонов  $d\tilde{p}$  обозначает лоренц-инвариантную меру  $d\tilde{p} = d^3p/2p^0 (2\pi)^3$ . Разумеется, в этих

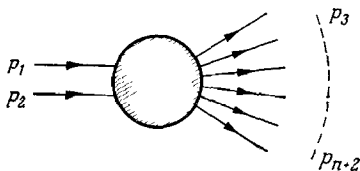


РИС. 5.1. Кинематика процесса рассеяния в общем случае

формулах предполагается, что одночастичные состояния нормированы согласно условию

$$\langle p' | p \rangle = 2p^0 (2\pi)^3 \delta^3(p' - p),$$

которое означает, что они образованы в результате действия на состояние вакуума каноническими операторами рождения. Эта нормировка позволяет записать плотности потока через волновые функции  $f$ .

При рассмотрении массивных фермионов множитель  $2p^0$  будем заменять на  $p^0/m$ . Например, если две сталкивающиеся частицы являются фермионами, в выражении (5.13) множитель  $1/4$  заменяется на  $m_1 m_2$ , а если фермионы имеются среди частиц в конечном состоянии, под элементом фазового пространства  $d\tilde{p}$  понимается величина  $(m/p^0) [d^3p/(2\pi)^3]$ . Однако, если фермионы, участвующие в процессе рассеяния, имеют нулевую массу, факторы фазового пространства совпадают по виду с бозонными.

Читателю предлагается найти модификации выражения (5.13), когда некоторые из частиц являются тождественными и (или) имеют спин. Как быть, если начальное состояние не является чистым состоянием и должно описываться с помощью поляризационной матрицы плотности? Выше мы установили связь между инвариантной амплитудой перехода  $\mathcal{S}$  и сечением рассеяния. Еще один физически важный пример — вычисление скорости распада нестабильной составной системы. В разд. 5.2.3. мы проиллюстрируем этот пример при изучении позитрония.

### 5.1.2. Асимптотическая теория

Центральной задачей при изучении столкновений является вычисление элементов  $S$ -матрицы между состояниями частиц, находящихся на массовых поверхностях. В рамках лагранжева подхода



существует алгоритм вычисления этих величин. В этом мы убедились в предыдущей главе, изучая поведение квантовых полей, взаимодействующих с внешними источниками. Локальная динамика позволит нам подробно изучить оператор  $S$  и выразить его через более элементарные величины, а именно через фундаментальные функции Грина. Для того чтобы формулировка была по возможности простой, проведем построение в рамках самодействующего скалярного поля. Обобщение на более сложные случаи, такие, как электродинамика, лишь усложняет формализм, не затрагивая логической основы. Мы рассмотрим этот вопрос ниже.

Опишем теперь кратко постановку задачи. Пространство состояний Фока строится с помощью оператора свободного поля  $\varphi_{in}(x)$ , действующего на единственное вакуумное состояние. Это арена, на которой разыгрывается весь динамический процесс. Физические наблюдаемые должны выражаться только через данное свободное поле  $\varphi(x)$ . Связь между этими двумя полями можно интуитивно представить себе следующим образом. В отдаленном прошлом  $\varphi_{in}(x)$  является соответствующим пределом оператора  $\varphi(x)$ . Разумеется, такая картина имеет смысл, если мы рассматриваем какой-то конкретный процесс, и применима лишь в случае, когда элементарные частицы, участвующие в столкновении, достаточно отдалены одна от другой. Чтобы реализовать эту идею, можно предположить, что члены, отвечающие взаимодействию, в уравнениях движения вводятся с некоторой адиабатической функцией обрезания, которая равна единице при конечных временах и плавно спадает при  $|t| \rightarrow \infty$ . Поэтому любую физическую величину следует рассматривать как предел, когда эта адиабатическая функция выключается. Адиабатическая гипотеза утверждает, что при этих условиях

$$x_0 \rightarrow -\infty, \quad \varphi(x) \rightarrow Z^{1/2} \varphi_{in}(x). \quad (5.14a)$$

Сразу возникают два вопроса. Что означает множитель  $Z^{1/2}$ ? В каком математическом смысле предполагается существование этого предела? Прежде всего заметим, что наличие множителя при  $\varphi_{in}$  в (5.14a) обусловлено тем, что поля естественно нормируются соотношениями коммутации при совпадающих временах и  $\varphi_{in}$ , действуя на вакуум, образует только одночастичные состояния, в то время как  $\varphi$  генерирует также состояния с парами (в предположении, что лагранжиан является четным по  $\varphi$ ). Амплитуды  $\langle 1 | \varphi_{in}(x) | 0 \rangle$  и  $\langle 1 | \varphi(x) | 0 \rangle$  имеют одинаковую функциональную зависимость от  $x$ , которая определяется кинематикой. Следовательно, нормировочный множитель  $Z^{1/2}$  учитывает тот факт, что состояние  $\varphi(x) | 0 \rangle$  не описывается полностью матричным элементом  $\langle 1 | \varphi(x) | 0 \rangle$ , что было бы справедливо, если бы  $\varphi$  за-

менили на  $\varphi_{in}$ . Интуитивно, таким образом, можно ожидать, что  $Z^{1/2}$  является числом, заключенным между нулем и единицей.

Кроме того, в выражении (5.14 а) предел может быть только слабым, т. е. справедливым для каждого матричного элемента в отдельности. Если бы это было не так, мы могли бы заключить, что коммутатор двух полей  $\varphi$  равен с точностью до  $Z$  соответствующему  $c$ -числовому коммутатору свободных полей. Тогда из канонического квантования следовало бы  $Z = 1$ , и мы пришли бы к заключению, что  $\varphi$  — свободное поле! Это указывает на то, что адиабатическое условие надо рассматривать с осторожностью. Следуя Леману и Челлену, константу  $Z$  можно следующим образом связать со спектральным представлением коммутатора двух взаимодействующих полей. Рассмотрим вакуумное среднее этого коммутатора. Для простоты предположим, что поле эрмитово. Используя трансляционную инвариантность, запишем равенство

$$\langle 0 | [\varphi(x), \varphi(y)] | 0 \rangle = \sum_{\alpha} [\langle 0 | \varphi(0) | \alpha \rangle e^{-i p_{\alpha} \cdot (x-y)} \langle \alpha | \varphi(0) | 0 \rangle - (x \leftrightarrow y)], \quad (5.15)$$

где сумма берется по всей совокупности состояний  $\alpha$  с положительными энергиями. Чтобы сравнить это с коммутатором двух свободных полей массы  $m$ :

$$i\Delta(x-y; m) = \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^3} \varepsilon(q^0) \delta(q^2 - m^2) e^{-i q \cdot (x-y)}, \quad (5.16)$$

подставим в (5.15) тождество

$$1 = \int d^4 q \delta^4(q - p_{\alpha}).$$

Тогда будем иметь

$$\langle 0 | [\varphi(x), \varphi(y)] | 0 \rangle = \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^3} \rho(q) (e^{-i q \cdot (x-y)} - e^{i q \cdot (x-y)}).$$

Мы ввели здесь плотность

$$\rho(q) = (2\pi)^3 \sum_{\alpha} \delta^4(q - p_{\alpha}) |\langle 0 | \varphi(0) | \alpha \rangle|^2.$$

Очевидно, эта величина положительна и обращается в нуль, когда  $q$  не лежит в световом конусе будущего; кроме того, она инвариантна относительно преобразования Лоренца, что определяется соответствующим свойством поля  $\varphi$ . Следовательно, плотность  $\rho$  можно записать в виде:

$$\rho(q) = \sigma(q^2) \theta(q^0), \quad \text{причем } \sigma(q^2) = 0, \text{ если } q^2 < 0.$$

В общем случае это положительная мера, которая может иметь сингулярности типа  $\delta$ -функций. Окончательно получаем суперпозицию свободных коммутаторов с положительными весами (пред-

ставление Челлена—Лемана):

$$\langle 0 | [\varphi(x), \varphi(y)] | 0 \rangle = i \int_0^{\infty} dm'^2 \sigma(m'^2) \Delta(x-y; m'). \quad (5.17)$$

Следуя той же схеме рассуждений, нетрудно убедиться, что для вакуумного среднего хронологического произведения операторов получается аналогичный результат с той же спектральной функцией  $\rho$ .

В выражении (5.17), используя асимптотическое условие, можно выделить вклад одночастичного состояния:

$$\langle 0 | [\varphi(x), \varphi(y)] | 0 \rangle = iZ\Delta(x-y; m) + i \int_{m_1^2}^{\infty} dm'^2 \sigma(m'^2) \Delta(x-y; m'). \quad (5.18)$$

Здесь  $m$ —масса частиц, а  $m_1 > m$ —многочастичный порог. Если лагранжиан взаимодействия не содержит производных поля, величина  $\phi$  будет сопряженной по отношению к  $\varphi$ . Дифференцируя по времени обе части выражения (5.18) и приравнивая коэффициенты при  $\delta^3(x-y)$ , находим, что из канонического квантования следует:

$$1 = Z + \int_{m_1^2}^{\infty} dm'^2 \sigma(m'^2). \quad (5.19)$$

Положительность величины  $\sigma$  действительно означает, что

$$0 \leq Z < 1. \quad (5.20)$$

Значение 1 исключается, если какой-либо матричный элемент  $\varphi$ , отличный от  $\langle 1 | \varphi(x) | 0 \rangle$  и  $\langle 0 | \varphi(x) | 1 \rangle$ , не равен нулю. Очевидно, что равенство  $Z = 1$  влечет за собой  $\varphi = \varphi_{1n}$ .

Из представления Челлена—Лемана следует, что асимптотический предел нельзя понимать как сильный. Можно также проверить, что при  $|x^0 - y^0| \rightarrow \infty$  доминирующий вклад определяется одночастичными состояниями, остальные же члены подавляются быстро осциллирующими множителями. По той же причине соотношение (5.19) накладывает ограничения на изменение плотности  $\sigma(m^2)$ . Многочастичные состояния приводят к тому, что носитель плотности  $\sigma(m^2)$  простирается до бесконечности, что может нарушить положительность величины  $Z$ .

По аналогии с асимптотическим пределом (5.14а), имеющим место в отдаленном прошлом, мы полагаем, что существует также предел

$$x_0 \rightarrow +\infty, \quad \varphi(x) \rightarrow Z^{1/2} \varphi_{\text{out}}(x). \quad (5.14б)$$

Здесь  $\varphi_{\text{out}}$ —снова свободное поле с той же самой массой  $m$ , что и у  $\varphi_{1n}$ , и мы имеем ту же самую константу  $Z^{1/2}$ . Единственность

вакуума означает, что  $|0, \text{in}\rangle = |0, \text{out}\rangle = |0\rangle$  (возможная относительная фаза, как правило, выбирается равной нулю). Кроме того, мы предполагаем, что одночастичные состояния являются устойчивыми. При этих условиях  $|1, \text{in}\rangle = |1, \text{out}\rangle$ . Поскольку зависимость  $\langle 0 | \varphi(x) | 1 \rangle$  от  $x$  такая же, как и у соответствующих матричных элементов  $\varphi_{\text{in}}$  или  $\varphi_{\text{out}}$ , нормировка которых определяется их свойствами свободного поля, с необходимостью получаем

$$\langle 0 | \varphi(x) | 1 \rangle = Z^{1/2} \langle 0 | \varphi_{\text{in}}(x) | 1 \rangle = Z^{1/2} \langle 0 | \varphi_{\text{out}}(x) | 1 \rangle. \quad (5.21)$$

С помощью  $S$ -матрицы устанавливается изоморфизм между in- и out-состояниями. Из соотношения (5.5) следует, что

$$\begin{aligned} \varphi_{\text{in}} &= S \varphi_{\text{out}}(x) S^{-1}, \\ |i, \text{in}\rangle &= S |i, \text{out}\rangle, \\ \langle f, \text{in} | S | i, \text{in} \rangle &= \langle f, \text{out} | S | i, \text{out} \rangle. \end{aligned} \quad (5.22)$$

Кроме того,

$$\begin{aligned} \langle 0 | S | 0 \rangle &= \langle 0 | 0 \rangle = 1, \\ \langle 1 | S | 1' \rangle &= \langle 1 | 1' \rangle; \end{aligned} \quad (5.23)$$

здесь опущены индексы у одночастичных состояний и отражена только стабильность этих состояний.

Чтобы была обеспечена ковариантность теории, унитарная  $S$ -матрица должна коммутировать с преобразованиями Пуанкаре:

$$U(a, \Lambda) S U^{-1}(a, \Lambda) = S. \quad (5.24)$$

Можно также проанализировать более глубокие локальные свойства  $S$ -матрицы, если, следуя Боголюбову и Ширкову, допустить пространственно-временную зависимость констант взаимодействия в лагранжиане. Для систематического изучения этого подхода мы отсылаем читателя к монографии этих авторов

### 5.1.3. Редукционные формулы

Мы используем здесь асимптотические условия (5.14а, б), чтобы связать элементы  $S$ -матрицы с полными функциями Грина взаимодействующих полей. Рассмотрим амплитуду перехода  $\langle p_1, \dots, \text{out} | q_1, \dots, \text{in} \rangle$ , где для простоты мы опустили сглаживающие функции, необходимые для нормировки. Мы будем редуцировать этот элемент, извлекая один за другим in- или out-операторы рождения, с помощью которых мы строим начальное или конечное состояние. Согласно определению, мы имеем

$$\begin{aligned} \langle p_1, \dots, \text{out} | q_1, \dots, \text{in} \rangle &= \langle p_1, \dots, \text{out} | a_{\text{in}}^\dagger(q_1) | q_2, \dots, \text{in} \rangle = \\ &= \int d^3x e^{-iq_1 \cdot x} \frac{1}{i} \overleftrightarrow{\partial}_0 \langle p_1, \dots, \text{out} | \varphi_{\text{in}}(x) | q_2, \dots, \text{in} \rangle. \end{aligned}$$

Здесь интеграл берется для произвольного момента времени  $t$ . Поэтому можно выбрать большое отрицательное значение  $t$ , что позволит нам заменить  $Z^{-1/2}\varphi$  на  $\varphi_{in}$ :

$$\begin{aligned} & \langle p_1, \dots, \text{out} | q_1, \dots, \text{in} \rangle = \\ & = \lim_{t \rightarrow -\infty} Z^{-1/2} \int d^3x e^{-iq_1 \cdot x} \frac{1}{i} \overleftrightarrow{\partial}_0 \langle p_1, \dots, \text{out} | \varphi(x) | q_2, \dots, \text{in} \rangle. \end{aligned}$$

Для произвольного интеграла справедливо следующее соотношение:

$$\left( \lim_{t \rightarrow +\infty} - \lim_{t \rightarrow -\infty} \right) \int d^3x \psi(x, t) = \lim_{t_f \rightarrow +\infty, t_i \rightarrow -\infty} \int_{t_i}^{t_f} dt \frac{\partial}{\partial t} \int d^3x \psi(x, t).$$

Используя асимптотическое условие для случая произвольно большого положительного значения времени, находим

$$\begin{aligned} \langle p_1, \dots, \text{out} | q_1, \dots, \text{in} \rangle &= \langle p_1, \dots, \text{out} | a_{\text{out}}^\dagger(q_1) | q_2, \dots, \text{in} \rangle + \\ &+ iZ^{-1/2} \int d^4x \partial_0 [e^{-iq_1 \cdot x} \overleftrightarrow{\partial}_0 \langle p_1, \dots, \text{out} | \varphi(x) | q_2, \dots, \text{in} \rangle], \end{aligned} \quad (5.25)$$

где интегрирование проводится по всему пространству-времени. В правой части этого выражения первый член представляет собой сумму несвязных членов (соответствующих случаям, когда по крайней мере одна частица не участвует в процессе столкновения):

$$\begin{aligned} & \langle p_1, \dots, \text{out} | a_{\text{out}}^\dagger(q_1) | q_2, \dots, \text{in} \rangle = \\ &= \sum_{k=1}^n 2p_k^0 (2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{p}_k - \mathbf{q}_1) \langle p_1, \dots, \hat{p}_k, \dots, \text{out} | q_2, \dots, \text{in} \rangle. \end{aligned}$$

Мы предположили, что все частицы здесь одного типа. Изменения, которые следует внести, когда это не так, очевидны. Заметим также, что несвязные члены исчезают, когда ни один из начальных импульсов не совпадает с конечным.

Изучим теперь более внимательно второй член в правой части выражения (5.25). Поскольку мы рассматриваем его как ядро, сглаженное волновыми пакетами, интегрирование по частям для пространственных переменных законно. Разумеется, это неверно в случае интегрирования по временной переменной, поскольку любые вычисления тогда привели бы к нулевым результатам. Учигывая сказанное, обозначая массу частиц  $m$  и вспоминая, что  $q_i^2 = m^2$ , получаем

$$\begin{aligned} & \int d^4x \partial_0 [e^{-iq_1 \cdot x} \overleftrightarrow{\partial}_0 \langle \beta, \text{out} | \varphi(x) | \alpha, \text{in} \rangle] = \\ &= \int d^4x \{ [(-\Delta + m^2) e^{-iq_1 \cdot x} \langle \beta, \text{out} | \varphi(x) | \alpha, \text{in} \rangle + \\ &+ e^{-iq_1 \cdot x} \partial_0^2 \langle \beta, \text{out} | \varphi(x) | \alpha, \text{in} \rangle] = \\ &= \int d^4x e^{-iq_1 \cdot x} (\square + m^2) \langle \beta, \text{out} | \varphi(x) | \alpha, \text{in} \rangle. \end{aligned}$$

Первый шаг редукции принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} & \langle p_1, \dots, p_n, \text{out} | q_1, \dots, q_l, \text{in} \rangle = \\ & = \sum_{k=1}^n 2p_k^0 (2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{p}_k - \mathbf{q}_1) \langle p_1, \dots, \hat{p}_k, \dots, p_n, \text{out} | q_2, \dots, q_l, \text{in} \rangle + \\ & + iZ^{-1/2} \int d^4x e^{-iq_1 \cdot x} (\square + m^2) \langle p_1, \dots, p_n, \text{out} | \varphi(x) | q_2, \dots, q_l, \text{in} \rangle. \end{aligned} \quad (5.26)$$

Эти шаги можно повторять. Для определенности мы совершим это для частиц в конечном состоянии. Что касается несвязных членов, они не вносят ничего нового, и мы не будем их выписывать. Для второго же члена можно написать

$$\begin{aligned} & \langle p_1, \dots, \text{out} | \varphi(x_1) | q_2, \dots, \text{in} \rangle = \\ & = \langle p_2, \dots, \text{out} | a_{\text{out}}(p_1) \varphi(x_1) | q_2, \dots, \text{in} \rangle = \\ & = \lim_{y_1^0 \rightarrow \infty} iZ^{-1/2} \int d^3y_1 e^{ip_1 \cdot y_1} \overleftrightarrow{\partial}_{y_1^0} \langle p_2, \dots, \text{out} | \varphi(y_1) \varphi(x_1) | q_2, \dots, \text{in} \rangle. \end{aligned}$$

Здесь нам хотелось бы заменить последний интеграл на четырехмерный, как мы делали выше. Ясно, что необходимо применить какой-то прием, чтобы оператор  $a_{\text{in}}(p_1)$ , связанный с нижним пределом интегрирования, действовал непосредственно на состояние  $|q_2, \dots, \text{in}\rangle$ . Хронологическое упорядочение полей

$$T\varphi(y_1)\varphi(x_1) = \begin{cases} \varphi(y_1)\varphi(x_1), & y_1^0 > x_1^0, \\ \varphi(x_1)\varphi(y_1), & x_1^0 > y_1^0 \end{cases}$$

располагает операторы подходящим образом на обоих пределах. Следовательно, не изменяя предыдущее выражение, в него можно подставить символ  $T$ -произведения и действовать далее как в первом шаге. Таким образом мы получаем

$$\begin{aligned} & \langle p_1, \dots, \text{out} | \varphi(x_1) | q_2, \dots, \text{in} \rangle = \\ & = \langle p_2, \dots, \text{out} | \varphi(x_1) a_{\text{in}}(p_1) | q_2, \dots, \text{in} \rangle + \\ & + iZ^{-1/2} \int d^4y_1 e^{ip_1 \cdot y_1} (\square_{y_1} + m^2) \langle p_2, \dots, \\ & \dots, \text{out} | T\varphi(y_1)\varphi(x_1) | q_2, \dots, \text{in} \rangle \end{aligned}$$

Здесь в правой части первое слагаемое соответствует несвязным членам.

Итак, когда редуцированы две частицы, мы имеем

$$\begin{aligned} & \langle p_1, \dots, \text{out} | q_1, \dots, \text{in} \rangle = \langle p_1, \dots, \text{in} | S | q_1, \dots, \text{in} \rangle = \\ & = \text{Несвязные члены} + \\ & + (iZ^{-1/2})^2 \int d^4x_1 d^4y_1 e^{ip_1 \cdot y_1 - iq_1 \cdot x_1} (\square_{y_1} + m^2) (\square_{x_1} + m^2) \times \\ & \times \langle p_2, \dots, \text{out} | T\varphi(y_1)\varphi(x_1) | q_2, \dots, \text{in} \rangle. \end{aligned} \quad (5.27)$$

Несвязные члены, получавшиеся до сих пор, содержали одну или две  $\delta^3$ -функции. Проводя аналогичные рассуждения до тех пор, пока не будут редуцированы все входящие и выходящие частицы, мы получим

$$\begin{aligned} & \langle p_1, \dots, p_n, \text{out} | q_1, \dots, q_l, \text{in} \rangle = \\ & = \langle p_1, \dots, p_n, \text{in} | S | q_1, \dots, q_l, \text{in} \rangle = \\ & = \text{Несвязные члены} + \\ & + (iZ^{-1/2})^{n+l} \int d^4 y_1 \dots d^4 x_l \exp \left( i \sum_{k=1}^n p_k y_k - \sum_{r=1}^l q_r x_r \right) \times \\ & \times (\square_{y_1} + m^2) \dots (\square_{x_l} + m^2) \langle 0 | T \Phi(y_1) \dots \Phi(x_l) | 0 \rangle. \quad (5.28) \end{aligned}$$

Замечательное свойство этих выражений, полученных Леманом, Симанзиком и Циммерманом,— это связь, которую они устанавливают между амплитудами переходов на массовой поверхности и полными функциями Грина теории, включающей взаимодействие. Последние представляют собой вакуумные средние хронологических произведений операторов поля. Соотношение (5.28) означает, что в импульсном пространстве функции Грина имеют полюсы по переменным  $p_i^2$ , где  $p_i$  сопряжены с  $x_i$ . С точностью до нормировочной постоянной элемент  $S$ -матрицы является вычетом в этих полюсах.

Уметим также замечательное свойство симметрии между входящими  $(q_1, \dots)$  и выходящими  $(p_1, \dots)$  импульсами. Удобно заменить совокупность выходящих импульсов  $(p_1, \dots)$  на совокупность входящих  $(-p_1, \dots)$  с отрицательными энергетическими компонентами. Поэтому, все импульсы можно рассматривать одинаковым образом.

#### 5.1.4. Производящий функционал

Совокупность соотношений (5.28) можно записать в компактной операторной форме. Чтобы упростить обозначения, включим множитель  $Z^{-1/2}$  в  $\Phi$ , т. е. выберем в этом разделе нормировку  $\Phi$  таким образом, чтобы  $\lim_{t \rightarrow \pm \infty} \Phi = \Phi_{\text{out/in}}$ . В соответствии с предыдущим замечанием будем также использовать единый символ для обозначения операторов рождения и уничтожения, полагая для произвольного 4-вектора  $k$  на массовой поверхности  $k^2 = m^2$ :

$$a_{\text{out}}^{\#} (k) = \begin{cases} a_{\text{in}}^{\text{out}} (k), & k^0 > 0, \\ a_{\text{in}}^{\text{out}} (-k), & k^0 < 0. \end{cases} \quad (5.29)$$

Таким образом,

$$a_{\text{in}}^{\#}(k) = i\varepsilon(k^0) \int d^3x e^{ik \cdot x} \overleftrightarrow{\partial}_0 \varphi_{\text{in}}^{\#}(x). \quad (5.30)$$

Пусть  $B_1, \dots, B_n$  — локальные бозонные поля. Соотношение (5.28) эквивалентно следующему операторному соотношению:

$$\begin{aligned} & [ST [B_1(x_1) \dots B_n(x_n)], a_{\text{in}}^{\#}(k)] = \\ & = -i\varepsilon(k^0) S \int d^4y e^{ik \cdot y} (\square_y + m^2) \times \\ & \times T [\varphi(y) B(x_1) \dots B_n(x_n)]. \end{aligned} \quad (5.31)$$

Это нетрудно доказать, если взять матричные элементы для  $\text{in}$ -состояний, использовать равенство  $a_{\text{in}}^{\#} S = S a_{\text{out}}^{\#}$  и с помощью (5.30) выразить  $a^{\#}$  через поле. Искомое соотношение тогда получается, как и выше, заменой граничных членов интегралами от производных по времени. С помощью итерации мы приходим к коммутатору более общего вида:

$$\begin{aligned} & [\dots [ST [B_1(x_1) \dots B_n(x_n)], a_{\text{in}}^{\#}(k_1)], \dots, a_{\text{in}}^{\#}(k_p)] = \\ & = (-i)^p \varepsilon(k_1^0) \dots \varepsilon(k_p^0) \int d^4y_1 \dots d^4y_p \exp\left(i \sum_{r=1}^p k_r \cdot y_r\right) \times \\ & \quad \times (\square_{y_1} + m^2) \dots (\square_{y_p} + m^2) \times \\ & \quad \times ST [\varphi(y_1) \dots \varphi(y_p) B_1(x_1) \dots B_n(x_n)]. \end{aligned} \quad (5.32)$$

Аналогичные формулы могут быть написаны и тогда, когда имеется несколько типов частиц и полей.

Чтобы уяснить себе роль соотношения (5.32) как средства построения самого оператора  $S$ , вспомним, что пространство Фока строится как произведение гильбертовых пространств, каждое из которых соответствует определенной моде (обозначенной здесь импульсом  $k$ ). Для данного осциллятора с основными операторами, такими, что  $[a, a^{\dagger}] = 1$ , и вакуумным состоянием  $|0\rangle$  нормированные возбужденные состояния запишутся в виде  $|n\rangle = a^{\dagger n} / (n!)^{1/2} |0\rangle$ . Проектор  $|0\rangle\langle 0|$  имеет следующее представление:

$$|0\rangle\langle 0| = :e^{-a^{\dagger}a}:. \quad (5.33)$$

Это действительно эрмитов оператор, оставляющий инвариантным вакуумное состояние и обладающий свойством

$$[:e^{-a^{\dagger}a}:, a^{\dagger}] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-a^{\dagger})^n}{n!} [a^n, a^{\dagger}] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-a^{\dagger})^n a^{n-1}}{(n-1)!} = -a^{\dagger} :e^{-a^{\dagger}a}:,$$

или  $:e^{-a^{\dagger}a}: a^{\dagger} = 0$ .

Следовательно,  $:e^{-a^{\dagger}a}: |n\rangle = \delta_{n0} |n\rangle$ , что доказывает (5.33). Пусть  $Q$  — оператор, достаточно регулярный, чтобы имели смысл последующие операции. Раз-



ложим  $Q$  в ряд по его матричным элементам:

$$\begin{aligned} Q &= \sum_{n, m=0}^{\infty} |m\rangle \langle m| Q |n\rangle \langle n| = \sum_{m, n=0}^{\infty} \frac{a^{\dagger m} |0\rangle \langle 0| a^n}{m! n!} \langle 0| a^m Q a^{\dagger n} |0\rangle = \\ &= \sum_{m, n=0}^{\infty} \frac{a^{\dagger m}}{m!} \frac{\partial^m}{\partial \alpha^m} : e^{-a^\dagger a} : \frac{a^n}{n!} \frac{\partial^n}{\partial \bar{\alpha}^n} \langle 0| e^{\alpha a} Q e^{\bar{\alpha} a^\dagger} |0\rangle \Big|_{\alpha=\bar{\alpha}=0}. \end{aligned}$$

В этом выражении  $\alpha$  и  $\bar{\alpha}$  фигурируют как независимые переменные, а операторы перед матричным элементом расставлены в нормальном порядке. Таким образом,

$$Q = : e^{a^\dagger \partial / \partial \alpha + a \partial / \partial \bar{\alpha} - a^\dagger a} : \langle 0| e^{\alpha a} Q e^{\bar{\alpha} a^\dagger} |0\rangle \Big|_{\alpha=\bar{\alpha}=0}.$$

Это еще не конечный результат. Наша цель — найти матричные элементы  $Q$  между нормированными когерентными состояниями, т. е. состояниями, которые получаются действием на вакуум унитарного оператора  $e^{\bar{\alpha} a^\dagger - \alpha a}$ . Однако, соотношение

$$e^{\bar{\alpha} a^\dagger - \alpha a} |0\rangle = e^{-\bar{\alpha} \bar{\alpha} / 2} e^{\bar{\alpha} a^\dagger} |0\rangle$$

позволяет переписать последнюю формулу в виде

$$Q = : e^{a^\dagger \partial / \partial \alpha + a \partial / \partial \bar{\alpha} - a^\dagger a} : e^{\bar{\alpha} \bar{\alpha}} \langle 0| e^{\alpha a - \bar{\alpha} a^\dagger} Q e^{\bar{\alpha} a^\dagger - \alpha a} |0\rangle \Big|_{\alpha=\bar{\alpha}=0}.$$

Кроме того, мы можем прокоммутировать  $e^{\bar{\alpha} \bar{\alpha}}$  с производными, действующими слева, чтобы в конце вычислений можно было воспользоваться условием  $\alpha = \bar{\alpha} = 0$ . Под знаком нормального произведения  $a$  и  $a^\dagger$  коммутируют, и мы видим, что оператор  $e^{a^\dagger \partial / \partial \alpha}$  сдвигает  $\alpha$  на величину  $a^\dagger$ . Эти замечания позволяют прийти к окончательному выражению

$$Q = : e^{a^\dagger \partial / \partial \alpha + a \partial / \partial \bar{\alpha}} : \langle 0| e^{\alpha a - \bar{\alpha} a^\dagger} Q e^{\bar{\alpha} a^\dagger - \alpha a} |0\rangle \Big|_{\alpha=\bar{\alpha}=0}. \quad (5.34)$$

Разумеется, мы получили бы неправильный результат, если бы из (5.34) сделали поспешное заключение, что для реконструкции самого оператора достаточно знать лишь диагональные матричные элементы оператора  $Q$  в базисе когерентных состояний. Из формулы (5.34) следует, что  $\alpha$  и  $\bar{\alpha}$  надо рассматривать как независимые переменные, чтобы получить требуемые производные.

Возвращаясь снова к физическому пространству Фока с бесконечным числом степеней свободы, мы можем написать единичный оператор в виде

$$I = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{p!} \int d\bar{k}_1 \dots d\bar{k}_p |k_1, \dots, k_p\rangle \langle k_1, \dots, k_p|, \quad (5.35)$$

где первый член в сумме надо понимать как оператор проектирования на вакуум  $|0\rangle \langle 0|$ , который определяется соотношением, обобщающим (5.33), а именно

$$|0\rangle \langle 0| = : \exp \left[ - \int d\bar{k} a_{in}^\dagger(k) a_{in}(k) \right] :, \quad (5.36)$$

так что  $S$ -матрицу можно представить в виде

$$S = : \exp \int d\tilde{k} \left[ a_{\text{in}}^\dagger(k) \frac{\delta}{\delta \alpha(k)} + a_{\text{in}}(k) \frac{\delta}{\delta \bar{\alpha}(k)} \right] : \times \\ \times \langle 0 | \exp \int d^3k [a_{\text{in}}(k) \alpha(k) - a_{\text{in}}^\dagger(k) \bar{\alpha}(k)] S \times \\ \times \exp \int d^3k [a_{\text{in}}^\dagger(k) \bar{\alpha}(k) - a_{\text{in}}(k) \alpha(k)] | 0 \rangle \Big|_{\alpha = \bar{\alpha} = 0} \quad (5.37)$$

в полной аналогии с (5.34). В соответствии с нашим условием нормировки в экспоненту когерентного состояния входит мера  $d^4k$ , а не  $d\tilde{k}$ . Объединим теперь этот результат с выражением (5.32), в котором положим  $B = 1$ . Если в правой части выражения (5.32) ввести источник, оно примет простой вид:

$$\varepsilon(k_1^0) \dots \varepsilon(k_p^0) [a_{\text{in}}^\#(k_1), \dots, [a_{\text{in}}^\#(k_p), S] \dots] = \\ = S \prod_{r=1}^p \left[ \int d^4y_r e^{ik_r \cdot y_r} (\square_{y_r} + m^2) \frac{\delta}{\delta j(y_r)} \right] T \exp \left[ i \int d^4x j(x) \varphi(x) \right] \Big|_{j=0}.$$

Поскольку вакуум стабилен, т. е.  $S|0\rangle = |0\rangle$ , получаем

$$\langle 0 | \exp \int d^3k [a_{\text{in}}(k) \alpha(k) - a_{\text{in}}^\dagger(k) \bar{\alpha}(k)] S \times \\ \times \exp \int d^3k [a_{\text{in}}^\dagger(k) \bar{\alpha}(k) - a_{\text{in}}(k) \alpha(k)] | 0 \rangle = \\ = \exp \left\{ \int d^4y \bar{\alpha}(y) (\square_y + m^2) \frac{\delta}{\delta j(y)} \right\} \langle 0 | T \exp \left[ i \int d^4x j(x) \varphi(x) \right] | 0 \rangle \Big|_{j=0}.$$

щим функционалом для функций Грина взаимодействующего поля

$$Z(j) = \langle 0 | T \exp \left[ i \int d^4x \varphi(x) j(x) \right] | 0 \rangle. \quad (5.39)$$

Последняя формула имеет некоторое внешнее сходство с выражениями, которые мы получали, рассматривая взаимодействия с внешними источниками, рассмотренными в гл. 4. Отличие состоит в том, что в данном случае мы не имеем какого-либо простого замкнутого выражения для  $Z(j)$ .

Функционал  $Z(j)$  является одной из основных величин теории поля. Заманчиво предположить, что он содержит гораздо больше информации, чем это необходимо для вычисления амплитуд на массовой поверхности. Однако в силу ряда причин извлечь эту информацию современными методами невозможно. Полные функции Грина необходимо избавить непротиворечивым образом от ультрафиолетовых расходимостей, возникающих при рассмотрении их по теории возмущений. Для изучения связанных состояний требуются уравнения для амплитуд вне массовой поверхности. Кроме того, теория поля дает прекрасную основу для анализа поведения взаимодействий на малых расстояниях. Тем не менее с  $S$ -матричным подходом, который основывается на самых общих свойствах амплитуд рассеяния, вытекающих из соотношений типа (5.38), связаны многие замечательные достижения. Краткий обзор этого подхода, выходящего за рамки нашей книги, мы дадим в разд. 5.3.

### 5.1.5. Связные части

В соотношении (5.28) не были включены некоторые несвязные части амплитуд переходов (но не все), но теперь с помощью выражения (5.38) их можно подробно изучить. Суть дела в том, что некоторые подсистемы частиц могут взаимодействовать в процессе столкновения независимо друг от друга. Поэтому естественно искать такое определение связности, чтобы элемент  $S$ -матрицы был суммой всех возможных произведений связных элементов, включающих подсистемы взаимодействующих частиц:

$$\langle p_I | S | q_J \rangle = \sum_{\alpha} \prod_{I_{\alpha}=I} \prod_{J_{\beta}=J} \langle p_{I_{\alpha}} | S^c | q_{J_{\beta}} \rangle. \quad (5.40)$$

Мы использовали сокращенное обозначение для совокупности индексов,  $|p_I\rangle = \prod_{i \in I} a^{\dagger}(p_i) |0\rangle$ ,  $\alpha(p_I) = \prod_{i \in I} \alpha(p_i)$ . Связные матричные элементы определяются рекуррентно правой частью данного выражения, где сумма берется по всем разбиениям системы начальных и конечных частиц. Если  $|I|$  обозначает число элементов матрицы  $I$ , то можно определить величину:

$$\begin{aligned} s^c(\alpha, \bar{\alpha}) &= \sum_{|I|, |J|} \frac{1}{|I|! |J|!} \int \prod_{i \in I} d^3 p_i \prod_{j \in J} d^3 q_j \alpha(p_I) \langle p_I | S^c | q_J \rangle \bar{\alpha}(q_J) = \\ &= \langle 0 | \exp \int d^3 p \alpha(p) a(p) S^c \exp \int d^3 q \bar{\alpha}(q) a^{\dagger}(q) | 0 \rangle, \end{aligned} \quad (5.41)$$

где  $s^c(0, 0) = 0$ . Аналогично

$$s(\alpha, \bar{\alpha}) = \langle 0 | \exp \int d^3 p \alpha(p) a(p) S \exp \int d^3 q \bar{\alpha}(q) a^{\dagger}(q) | 0 \rangle, \quad (5.42)$$

так что  $s(0, 0) = 1$ . Рекуррентные соотношения (5.40) можно теперь записать следующим образом:

$$s(\alpha, \bar{\alpha}) = e^{s^c(\alpha, \bar{\alpha})}. \quad (5.43)$$

Используя определение (5.39) для производящего функционала  $Z(j)$ , можно написать

$$s(\alpha, \bar{\alpha}) = \exp \left\{ \int d^3k \, 2k^0 (2\pi)^3 \alpha(k) \bar{\alpha}(k) + \int d^4y \, \tilde{\alpha}(y) (\square_y + m^2) \frac{\delta}{\delta j(y)} \right\} Z(j) \Big|_{j=0}. \quad (5.44)$$

Сравнивая (5.43) и (5.44), мы можем естественным образом определить связанные функции Грина с помощью функционала

$$Z(j) = e^{G_c(j)}. \quad (5.45)$$

Поскольку  $\exp \left[ \int d^4y \, \tilde{\alpha}(y) (\square_y + m^2) \delta / \delta j(y) \right]$  является оператором трансляции, комбинируя выражения (5.43) — (5.45), получаем соотношение

$$s^c(\alpha, \bar{\alpha}) = \int d^3k \, 2k^0 (2\pi)^3 \alpha(k) \bar{\alpha}(k) + G_c[(\square + m^2)\tilde{\alpha}]. \quad (5.46)$$

Перепишем эту формулу таким образом, чтобы был ясен ее смысл. Подобно тому как мы записываем функционал  $Z(j)$ <sup>1)</sup>:

$$\begin{aligned} Z(j) &= \langle 0 | T \exp \left[ i \int d^4x \, \varphi(x) j(x) \right] | 0 \rangle = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \int d^4x_1 \dots d^4x_n j(x_1) \dots j(x_n) G(x_1, \dots, x_n), \end{aligned} \quad (5.47)$$

где

$$G(x_1, \dots, x_n) = \langle 0 | T \varphi(x_1) \dots \varphi(x_n) | 0 \rangle,$$

определим величины  $G_c(x_1, \dots, x_n)$  с помощью разложения

$$G_c(j) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \int d^4x_1 \dots d^4x_n j(x_1) \dots j(x_n) G_c(x_1, \dots, x_n). \quad (5.48)$$

Тогда смысл выражения (5.46) ясен из следующей формулы:

$$\begin{aligned} s^c(\alpha, \bar{\alpha}) &= \int d^3k \, 2k^0 (2\pi)^3 \alpha(k) \bar{\alpha}(k) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \int d^4y_1 \dots d^4y_n \tilde{\alpha}(y_1) \dots \tilde{\alpha}(y_n) \times \\ &\times (\square_{y_1} + m^2) \dots (\square_{y_n} + m^2) G_c(y_1, \dots, y_n). \end{aligned} \quad (5.49)$$

Если подставить сюда определение величины  $\tilde{\alpha}$  и разложение (5.41), то в слу-

<sup>1)</sup> Двухточечная функция в стандартном определении содержит еще множитель  $i$  [ср., например, с выражением (3.90) для свободного поля], но в таком виде ее удобно использовать в общих рассуждениях. Надеемся, что читатель не встретит трудностей при переходе от одних обозначений к другим.

чае  $n = |I| + |J| > 2$  мы получим основную редукционную формулу:

$$\langle p | S^c | q \rangle = i^n \int d^4 y_1 \dots d^4 y_n \exp i \left( \sum_{i=1}^{|I|} p_i \cdot y_i - \sum_{j=1}^{|J|} q_j \cdot y_{|I|+j} \right) \times \\ \times \prod_1^n (\square_{y_i} + m^2) G_c(y_1, \dots, y_n), \quad (5.50)$$

выражающую связанные элементы  $S$ -матрицы через связанные функции Грина. Сравнение с выражением (5.28) показывает, что несвязные члены, записанные в явном виде, исчезли. Дополнительные несвязные члены исчезли, когда  $G$  мы заменили на  $G_c$ . Напомним, что правильная нормировка функции  $\psi$  требует деления правой части выражения (5.50) на  $Z^{n/2}$ . Мы не рассмотрели пока случай  $n=2$ . В соответствии с (5.40) мы имеем

$$\langle p | S^c | q \rangle = \langle p | S | q \rangle = 2\rho^0 (2\pi)^3 \delta^3(p - q). \quad (5.51)$$

Кроме того, мы должны положить  $G(x) = 0$ , поскольку вакуумное среднее поля равно нулю. Используя представление Челлена—Лемана (5.17), двухточечную функцию Грина можно записать в виде

$$G_c(x, y) = G(x, y) = \langle 0 | T \phi(x) \phi(y) | 0 \rangle = \\ = i \int_0^\infty d\mu^2 \sigma(\mu^2) \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2 - \mu^2 + i\epsilon} e^{-ik \cdot (x - y)},$$

откуда видно, что  $G_c(x, y)$  зависит только от разности  $x - y$  и ее фурье-образ имеет единственный полюс при  $k^2 = m^2$ . Это означает, что

$$\int d^4 y_1 \int d^4 y_2 e^{i(p \cdot y_1 - q \cdot y_2)} (\square_{y_1} + m^2) (\square_{y_2} + m^2) G_c(y_1, y_2) = 0.$$

Таким образом, вклад в  $\langle p | S^c | q \rangle$  дает лишь первый член правой части выражения (5.49), и мы можем сразу убедиться, что отсюда следует соотношение (5.51). Даже если функция  $G(x) \neq 0$ , в силу трансляционной инвариантности она не должна зависеть от  $x$ ; поэтому  $G_c(x, y)$  отличается от  $G(x, y)$  самое большее на постоянную и, следовательно, проведенное выше рассуждение остается в силе. Читателю не составит особого труда показать, что

$$G(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\cup I_\alpha = I} \prod_{\alpha} G_c(x_{I_\alpha}), \quad (5.52)$$

где  $I = (1, \dots, n)$ . Таким образом, естественное определение связанных элементов  $S$ -матрицы привело нас к определению связанных функций Грина, независимо от каких бы то ни было диаграммных разложений. В гл. 6 мы обсудим этот вопрос более подробно. Следует заметить, что иногда удобно использовать определение  $Z(I) = e^{iG_c(I)}$ . Завершим этот раздел замечанием, что в процессе упругого рассеяния двух частиц разделение на связанные части в точности соответствует разбиению  $S = I + iT$  и удержанию в амплитуде перехода, используемой для вычисления сечений рассеяния, только части  $T$ .

### 5.1.6. Фермионы

Обобщим предыдущий формализм на случай, когда в начальном или конечном состояниях имеются фермионы со спином  $1/2$ , описываемые интерполирующим спинорным полем  $\psi(x)$ . Нормировоч-

ную постоянную, относящуюся к этому полю, в электродинамике обозначают  $Z_2$ ; таким образом, в смысле слабого предела мы имеем

$$\Psi(x) \xrightarrow[t \rightarrow \pm \infty]{} Z_2^{1/2} \Psi_{in}^{out}(x). \quad (5.53)$$

Вакуумное среднее антикоммутирует имеет вид

$$i \langle 0 | \{ \Psi_\alpha(x) \bar{\Psi}_\beta(y) \} | 0 \rangle = i \sum_n [ \langle 0 | \Psi_\alpha(0) | n \rangle \langle n | \bar{\Psi}_\beta(0) | 0 \rangle e^{-i p_n \cdot (x-y)} + \langle 0 | \bar{\Psi}_\beta(0) | n \rangle \langle n | \Psi_\alpha(0) | 0 \rangle e^{i p_n \cdot (x-y)} ].$$

Матрицу спектральной плотности

$$\rho_{\alpha\beta}(q) = (2\pi)^3 \sum_n \delta^4(p_n - q) \langle 0 | \Psi_\alpha(0) | n \rangle \langle n | \bar{\Psi}_\beta(0) | 0 \rangle$$

можно представить в виде комбинации шестнадцати независимых  $4 \times 4$ -матриц. Из релятивистской инвариантности следует

$$\rho(q) = \rho_1(q^2) \not{q} + \rho_2(q^2) + \rho_3(q^2) \not{q} \gamma^5 + \rho_4(q^2) \gamma^5.$$

Если мы имеем дело с теорией, сохраняющей четность, то, как и в случае электродинамики, существует унитарный оператор  $\mathcal{P}$ , такой, что

$$\mathcal{P} | 0 \rangle = | 0 \rangle, \quad \mathcal{P} \Psi(x) \mathcal{P}^{-1} = \gamma^0 \Psi(\bar{x}).$$

Отсюда мы получаем условие

$$\rho(q) = \gamma^0 \rho(\tilde{q}) \gamma^0, \quad \tilde{q} = (q^0, -\mathbf{q})$$

и требование того, чтобы члены, содержащие  $\gamma^5$ , обращались в нуль, т. е.  $\rho_3 = \rho_4 = 0$ . Следовательно,

$$\rho(q) = \rho_1(q^2) \not{q} + \rho_2(q^2), \quad \rho_i(q^2) = 0, \text{ если } q^2 < 0.$$

Вследствие  $CPT$ -инвариантности существует антиунитарный оператор  $\Theta$ , оставляющий инвариантным вакуум и действующий на поля следующим образом:

$$\begin{aligned} \Theta \Psi_\alpha(x) \Theta^{-1} &= i \gamma_{\alpha\beta}^5 \Psi_\beta^\dagger(-x), \\ \Theta \bar{\Psi}_\alpha(x) \Theta^{-1} &= -i \bar{\Psi}_\beta(-x) (\gamma^5 \gamma^0)_{\beta\alpha}. \end{aligned}$$

Это позволяет нам связать второй член в антикоммутирующем с первым с помощью соотношения

$$\langle 0 | \bar{\Psi}_\beta(y) \Psi_\alpha(x) | 0 \rangle = -\gamma_{\alpha\tau}^5 \langle 0 | \Psi_\tau(-x) \bar{\Psi}_{\tau'}(-y) | 0 \rangle \gamma_{\tau'\beta}^5.$$

Таким образом,

$$i \langle 0 | \{ \Psi_\alpha(x) \bar{\Psi}_\beta(y) \} | 0 \rangle = i \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^3} \theta(q^0) [\rho_1(q^2) i \not{\partial}_x + \rho_2(q^2)]_{\alpha\beta} \times \times (e^{-i q \cdot (x-y)} - e^{i q \cdot (x-y)}). \quad (5.54)$$

Пользуясь тем, что носитель функции  $\rho_i(q^2)$  сосредоточен на положительной действительной оси, приходим к суперпозиции антикоммуторов свободного поля:

$$i \langle 0 | \{ \psi^{\text{in}}(x), \bar{\psi}^{\text{in}}(y) \} | 0 \rangle = - (i \partial_x + m) \Delta(x-y, m) = S(x-y, m),$$

$$\Delta(x-y, m) = i \int \frac{d^3 k}{2k^0 (2\pi)^3} (e^{-ik(x-y)} - e^{ik(x-y)}). \quad (5.55)$$

Для вакуумного среднего антикоммутора взаимодействующих фермионных полей находим

$$i \langle 0 | \{ \Psi_\alpha(x), \bar{\Psi}_\beta(y) \} | 0 \rangle = - \int_0^\infty d\mu^2 [\rho_1(\mu^2) i \partial_x + \rho_2(\mu^2)]_{\alpha\beta} \Delta(x-y, \mu) =$$

$$= \int_0^\infty d\mu^2 \{ \rho_1(\mu^2) S_{\alpha\beta}(x-y, \mu) + [\mu \rho_1(\mu^2) - \rho_2(\mu^2)] \delta_{\alpha\beta} \Delta(x-y, \mu) \}. \quad (5.56)$$

Здесь подразумевается, что  $\mu$  — положительный квадратный корень из  $\mu^2$ . Аналогичная формула с теми же спектральными плотностями  $\rho_1$  и  $\rho_2$  справедлива для пропагатора:

$$\langle 0 | T \Psi(x) \bar{\Psi}(y) | 0 \rangle = i \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} e^{-ik(x-y)} \int_0^\infty d\mu^2 \frac{\kappa \rho_1(\mu^2) + \rho_2(\mu^2)}{k^2 - \mu^2 + i\epsilon}. \quad (5.57)$$

Из соотношения  $\rho^\dagger(q) = \gamma^0 \rho(q) \gamma^0$  следует, что  $\rho_1$  и  $\rho_2$  вещественны. Кроме того, поскольку  $\text{Sp}[\gamma^0 \rho(q)]$  и  $\text{Sp}[\gamma^0 (\not{q} - \mu) \rho(q) \times (\not{q} - \mu)]$  (причем  $q^2 = \mu^2$ ) пропорциональны соответственно положительным величинам  $\sum_\alpha |\langle 0 | \psi_\alpha(0) | n \rangle|^2$  и  $\sum_\alpha |\langle 0 | [(i\partial - \mu) \psi]_\alpha | n \rangle|^2$ , мы имеем следующие условия положительности:

$$\rho_1(\mu^2) \geq 0, \quad \mu \rho_1(\mu^2) - \rho_2(\mu^2) \geq 0. \quad (5.58)$$

Наконец, можно выделить вклад одночастичных состояний. Используя инвариантность относительно преобразования четности, приходим к заключению, что носитель  $\mu \rho_1(\mu^2) - \rho_2(\mu^2)$  отличен от нуля только на континууме состояний, так что вклад в первый член в (5.56) вносит только дискретное одночастичное состояние, отвечающее  $\mu = m$ . Разумеется, это предполагает, что мы можем изолировать одночастичное состояние от континуума, и, строго говоря, не справедливо для частиц нулевой массы, таких, как фотоны. Небольшая фиктивная масса фотонов будет поэтому устраняться на последней стадии вычислений после того как мы справились с возможными инфракрасными расходимостями. Иными словами, одиночный полюс (заряженной) частицы становится ка-

либровочно-неинвариантной точкой ветвления, и рассмотрение несколько усложняется

Предполагая поэтому, что  $\rho_1$  содержит член вида  $Z_2 \delta(\mu^2 - m^2)$  и что  $m_1$  соответствует порогу континуума состояний, можно записать

$$i \langle 0 | \{ \psi(x), \bar{\psi}(y) \} | 0 \rangle = \\ = Z_2 S(x-y, m) - \int_{m_1^2}^{\infty} d\mu^2 [\rho_1(\mu^2) i \partial_x + \rho_2(\mu^2)] \Delta(x-y, \mu). \quad (5.59)$$

Если мы положим  $x^0 = y^0$ , левая часть этого равенства сведется к каноническому антикоммулятору  $i \delta^3(x-y) \gamma_{\alpha\beta}^0$ . Используя тождества

$$\Delta(x-y, \mu)|_{x^0=y^0} = 0, \quad \partial_0 \Delta(x-y, \mu)|_{x^0=y^0} = -\delta^3(x-y),$$

получаем соотношение

$$1 = Z_2 + \int_{m_1^2}^{\infty} d\mu^2 \rho_1(\mu^2),$$

которое в сочетании с условием положительности (5.58) приводит к тому же выводу, что и в скалярном случае, а именно к

$$0 \leq Z_2 < 1 \quad (5.60)$$

Установив это, можно теперь перейти к редукционным формулам, аналогичным тем, которые рассматривались в разд. 5.1.3. Операторы Клейна—Гордона заменяются операторами Дирака. Запишем разложение Фурье свободного поля  $\psi_{in}$ :

$$\psi_{in}(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{m}{k^0} \sum_{\varepsilon=\pm 1} [b_{in}(k, \varepsilon) u(k, \varepsilon) e^{-ik \cdot x} + d_{in}^\dagger(k, \varepsilon) v(k, \varepsilon) e^{ik \cdot x}],$$

где спиноры с фиксированной спиральностью удовлетворяют соотношению  $v(k, \varepsilon) = C \bar{u}^T(k, \varepsilon)$ . Операторы рождения и уничтожения записываются в виде

$$b_{in}(k, \varepsilon) = \int d^3x \bar{u}(k, \varepsilon) e^{ik \cdot x} \gamma^0 \psi_{in}(x), \\ d_{in}^\dagger(k, \varepsilon) = \int d^3x \bar{v}(k, \varepsilon) e^{-ik \cdot x} \gamma^0 \psi_{in}(x), \\ b_{in}^\dagger(k, \varepsilon) = \int d^3x \bar{\psi}_{in}(k, \varepsilon) \gamma^0 e^{-ik \cdot x} u(k, \varepsilon), \\ d_{in}(k, \varepsilon) = \int d^3x \bar{\psi}_{in}(k, \varepsilon) \gamma^0 e^{ik \cdot x} v(k, \varepsilon). \quad (5.61)$$



Для одночастичных состояний с данной спиральностью и импульсом имеется неопределенность в знаке. Пренебрегая конечными размерами волновых пакетов в случае электрона, например, в начальном состоянии можно написать [ср. с (5.26)]

$$\begin{aligned} \langle \text{out} | b_{\text{in}}^{\dagger}(k, \varepsilon) | \text{in} \rangle &= \lim_{t \rightarrow -\infty} Z_2^{-1/2} \int d^3x \langle \text{out} | \bar{\psi}(x) \gamma^0 | \text{in} \rangle e^{-ik \cdot x} u(k, \varepsilon) = \\ &= \langle \text{out} | b_{\text{out}}^{\dagger}(k, \varepsilon) | \text{in} \rangle - iZ^{-1/2} \int d^4x \left[ \langle \text{out} | \bar{\psi}(x) | \text{in} \rangle \times \right. \\ &\times \left. \frac{1}{i} \overleftrightarrow{\partial}_0 \gamma^0 u(k, \varepsilon) e^{-ik \cdot x} + \langle \text{out} | \bar{\psi}(x) | \text{in} \rangle \frac{1}{i} \overleftrightarrow{\partial}_0 \gamma^0 u(k, \varepsilon) e^{-ik \cdot x} \right]. \end{aligned}$$

Спинор  $u(k, \varepsilon) e^{-ik \cdot x}$  удовлетворяет однородному уравнению Дирака, так что его производная по времени может быть заменена пространственными производными. Интегрирование по частям дает

$$\begin{aligned} \langle \text{out} | b_{\text{in}}^{\dagger}(k, \varepsilon) | \text{in} \rangle &= \text{Несв. чл.} - iZ_2^{-1/2} \int d^4x \langle \text{out} | \bar{\psi}(x) | \text{in} \rangle \times \\ &\times (-i\overleftrightarrow{\partial}_x - m) u(k, \varepsilon) e^{-ik \cdot x}. \end{aligned} \quad (5.62a)$$

Здесь Несв. чл. обозначает несвязный член. Это выражение представляет собой результат редукции одной частицы в начальном состоянии. Соответствующие выражения имеются для редукции античастицы в начальном состоянии или для частицы и античастицы в конечном состоянии. Эти выражения соответственно имеют вид:

$$\begin{aligned} \langle \text{out} | d_{\text{in}}^{\dagger}(k, \varepsilon) | \text{in} \rangle &= \text{Несв. чл.} + iZ_2^{-1/2} \int d^4x \bar{v}(k, \varepsilon) e^{-ik \cdot x} (i\overleftrightarrow{\partial}_x - m) \times \\ &\times \langle \text{out} | \psi(x) | \text{in} \rangle, \end{aligned} \quad (5.62б)$$

$$\begin{aligned} \langle \text{out} | b_{\text{out}}(k, \varepsilon) | \text{in} \rangle &= \text{Несв. чл.} - iZ_2^{-1/2} \int d^4x \bar{u}(k, \varepsilon) e^{ik \cdot x} (i\overleftrightarrow{\partial}_x - m) \times \\ &\times \langle \text{out} | \psi(x) | \text{in} \rangle, \end{aligned} \quad (5.62в)$$

$$\begin{aligned} \langle \text{out} | d_{\text{out}}(k, \varepsilon) | \text{in} \rangle &= \text{Несв. чл.} + iZ_2^{-1/2} \int d^4x \langle \text{out} | \bar{\psi}(x) | \text{in} \rangle \times \\ &\times (-i\overleftrightarrow{\partial}_x - m) v(k, \varepsilon) e^{ik \cdot x}. \end{aligned} \quad (5.62г)$$

Сравнивая выражения (5.62а) и (5.62г), соответствующие электрону, входящему в область взаимодействия, или позитрону, выходящему из него, мы видим, что

$$u(k, \varepsilon) e^{-ik \cdot x} \rightarrow -v(k, \varepsilon) e^{ik \cdot x};$$

эта подстановка рассматривалась нами в случае дырочной теории (см. гл. 2). Позитрон в конечном состоянии эквивалентен электрону в начальном состоянии, имеющему противоположный знак энергии и импульса. Это замечание справедливо по отношению к (5.62б) и (5.62в).

Теперь легко продолжить процесс редукции, используя тот же прием, что и прежде, т. е. используя хронологические произведения операторов, но при этом мы должны учесть свойства антикоммутации фермионных полей. С целью упрощения общего выражения не будем обозначать явно зависимость спиноров и операторов от поляризации.

Предположим, что частицы с импульсами  $(k_1, \dots)$  и античастицы с импульсами  $(k'_1, \dots)$  являются входящими, а частицы  $(q_1, \dots)$  и античастицы  $(q'_1, \dots)$  — выходящими. Обозначим сопряженные пространственно-временные переменные соответственно через  $x, x', y$  и  $y'$ . Кроме того, обозначим через  $n$  и  $n'$  полное число частиц и античастиц соответственно. Амплитуда рассеяния запишется в виде

$$\begin{aligned} & \langle \text{out} | \dots d_{\text{out}}(q_1) \dots b_{\text{out}}(q_1) b_{\text{in}}^\dagger(k_1) \dots d_{\text{in}}^\dagger(k_1) \dots | \text{in} \rangle = \\ & = \text{Несв. чл.} + (-iZ_2^{-1/2})^n (iZ_2^{-1/2})^{n'} \int d^4x_1 \dots d^4y_1 \dots \times \\ & \quad \times \exp \left[ -i \sum (k \cdot x + k' \cdot x' - q \cdot y - q' \cdot y') \right] \dots \times \\ & \quad \times \bar{u}(q_1) (i\hat{\partial}_{y_1} - m) \dots \bar{v}(k'_1) (i\hat{\partial}_{x'_1} - m) \langle 0 | T [\dots \bar{\psi}(y_1) \dots \\ & \quad \dots \psi(y_1) \bar{\psi}(x_1) \dots \psi(x'_1) \dots] | 0 \rangle \times \\ & \quad \times (-i\hat{\partial}_{x_1} - m) u(k_1) \dots (-i\hat{\partial}_{y'_1} - m) v(q'_1) \dots \quad (5.63) \end{aligned}$$

Разумеется, (с учетом возможного изменения знака) поля  $\psi$  и  $\bar{\psi}$  под знаком  $T$ -произведения можно переставлять местами.

Полные функции Грина представляют собой вакуумные средние хронологических произведений полевых операторов. При этом основополагающая гипотеза состоит в том, что каждому сорту частиц соответствует не только асимптотическое свободное поле, но и взаимодействующее (или интерполирующее) поле. Некоторые из этих полей, в случае если имеются связанные состояния, могут быть составными, т. е. выражаться через элементарные лагранжевы переменные. Это не тривиальная ситуация, которая требует тщательного изучения. Такие связанные состояния проявляются в теории как полюсы некоторых функций Грина по соответствующим переменным энергии-импульса.

Мы предлагаем читателю найти связанные функции Грина для процессов, включающих фермионные поля, и рассмотреть соответствующие производящие функционалы.

### 5.1.7. Фотоны

При рассмотрении фотонов калибровочная инвариантность приводит к дополнительным трудностям. Следуя подходу Штюкельберга, введем фиктивную массу  $\mu$  и гильбертово пространство с ин-

дефинитной метрикой. Теперь физические векторные фотоны обладают массой  $\mu$ , а скалярные духовые состояния имеют массу  $m$  ( $\mu^2/m^2 = \lambda$ ). Взаимодействующее поле удовлетворяет модифицированному уравнению Максвелла

$$(\square + \mu^2) A^\rho - (1 - \lambda) \partial^\rho \partial \cdot A = j^\rho, \quad (5.64)$$

тогда как в случае свободных полей сохраняющийся ток  $j$  обращается в нуль. Поле, сопряженное  $A_\rho$ , определяется как

$$\pi^\rho = \partial^\rho A^0 - \partial^0 A^\rho - \lambda g^{\rho 0} \partial \cdot A. \quad (5.65)$$

Рассмотрим вакуумное среднее коммутатора полей. Подставляя полную систему состояний с положительными энергиями, получаем выражение общего вида

$$\begin{aligned} \langle 0 | [A_\rho(x), A_\nu(y)] | 0 \rangle &= - \int_0^\infty dM^2 \int \frac{d^3 k}{2k^0 (2\pi)^3} (e^{-ik \cdot (x-y)} - e^{ik \cdot (x-y)}) \times \\ &\times \left[ \pi_1(M^2) g_{\rho\nu} - \pi_2(M^2) \frac{k_\rho k_\nu}{M^2} \right]. \end{aligned} \quad (5.66)$$

Величина  $k^0$  означает здесь  $(\mathbf{k}^2 + M^2)^{1/2}$ , а нижний предел носителя спектральной меры больше или равен  $\inf(\mu^2, m^2)$ . Вследствие сохранения тока скалярная компонента является свободным полем:

$$(\square + m^2) \partial \cdot A = 0. \quad (5.67)$$

Таким образом, можно написать

$$\langle 0 | [(\square + m^2) \partial \cdot A(x), A_\nu(y)] | 0 \rangle = 0.$$

Отсюда следует соотношение

$$(m^2 - M^2) [\pi_1(M^2) - \pi_2(M^2)] = 0,$$

которое означает, что  $\pi_1$  и  $\pi_2$  могут отличаться лишь на величину, пропорциональную  $\delta(M^2 - m^2)$ . Для удобства положим

$$\begin{aligned} \pi_1(M^2) &= \pi(M^2), \\ \pi_2(M^2) &= \pi(M^2) - \frac{Z_3 z^2}{\lambda} \delta(M^2 - m^2). \end{aligned}$$

Тогда (5.66) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \langle 0 | [A_\rho(x), A_\nu(y)] | 0 \rangle &= - \int_0^\infty dM^2 \int \frac{d^3 k}{2k^0 (2\pi)^3} (e^{-ik \cdot (x-y)} - e^{ik \cdot (x-y)}) \times \\ &\times \left[ \pi(M^2) \left( g_{\rho\nu} - \frac{k_\rho k_\nu}{M^2} \right) + \frac{Z_3 z^2}{\lambda} \frac{k_\rho k_\nu}{M^2} \delta(M^2 - m^2) \right], \end{aligned} \quad (5.68)$$

где выделены поперечная часть с множителем  $\pi(M^2)$  и продольная часть, сосредоточенная в  $M^2 = m^2$ .

Потребуем теперь, чтобы коммутатор при совпадающих временах обращался в нуль. Соответствующий вклад в правой части выражения (5.68) пропорционален градиенту  $\delta$ -функции. Полагая коэффициент при нем равным нулю, получаем правило сумм:

$$Z_3 z = \int_0^{\infty} dM^2 \pi(M^2) \frac{\mu^2}{M^2}. \quad (5.69)$$

Вычислим теперь одновременный коммутатор потенциала  $A$  с сопряженным ему полем  $\pi$ . Простое вычисление с использованием выражения (5.65) дает

$$\langle 0 | [A_\rho(x), \pi^\nu(y)] | 0 \rangle |_{x^0=y^0} = i\delta^3(x-y) \times \\ \times \left\{ g_\rho^\nu \int_0^{\infty} dM^2 \pi(M^2) + g_\rho^0 g_0^\nu \left[ Z_3 z - \int_0^{\infty} dM^2 \pi(M^2) \right] \right\}. \quad (5.70)$$

Потребуем, чтобы этот коммутатор был каноническим, т. е. равным величине  $i g_\rho^\nu \delta^3(x-y)$ . Что касается пространственных компонент, то, чтобы удовлетворить этому требованию, достаточно положить

$$\int_0^{\infty} dM^2 \pi(M^2) = 1. \quad (5.71)$$

Чтобы этот результат был справедлив и для временных компонент, должно выполняться условие

$$Z_3 z = \int_0^{\infty} dM^2 \pi(M^2).$$

Однако это условие, вообще говоря, несовместно с соотношением (5.69). Мы собираемся показать, что  $\pi(M^2)$  есть положительная мера. Тогда, чтобы выполнялись оба условия, носитель должен сводиться к точке  $M^2 = \mu^2$ , а это выполняется лишь для свободного поля. Лучшее, что можно сделать, — это допустить разные нормировки для пространственных и временных канонических коммутационных соотношений, т. е. принять, что

$$[A_\rho(x), \pi^\nu(y)] |_{x^0=y^0} = i\delta^3(x-y) (g_\rho^\nu + a g_{\rho 0} g^{\nu 0}), \\ a = Z_3 z - 1 = \int_0^{\infty} dM^2 \pi(M^2) \frac{\mu^2 - M^2}{M^2}. \quad (5.72)$$

До сих пор каких-либо ссылок на асимптотическое условие не делалось. Поскольку различные части поля по-разному участвуют во взаимодействии, было бы неразумным предполагать, что (даже в смысле слабого предела) при  $x^0 \rightarrow -\infty$  поле  $A_\rho(x)$  с точностью

до нормировочной постоянной переходит в свободное поле. Более реалистично определить поперечную компоненту этого входящего поля следующим образом:

$$A_{\rho}^T, \text{ in}(x) = A_{\rho}^{\text{in}}(x) + \frac{1}{m^2} \partial_{\rho} \partial \cdot A^{\text{in}}(x) \quad (5.73a)$$

и положить, что

$$A_{\rho}(x) \xrightarrow{x^0 \rightarrow -\infty} Z_3^{1/2} \left[ A_{\rho}^T, \text{ in} - z^{1/2} \frac{1}{m^2} \partial_{\rho} \partial \cdot A^{\text{in}}(x) \right]. \quad (5.73b)$$

Из этого условия, в частности, следует:

$$\langle 0 | A_{\rho}(x) | 1 \rangle = Z_3^{1/2} \left[ \langle 0 | A_{\rho}^T, \text{ in}(x) | 1 \rangle - z^{1/2} \frac{1}{m^2} \partial_{\rho} \langle 0 | \partial \cdot A^{\text{in}}(x) | 1 \rangle \right]. \quad (5.74)$$

Для трех пространственных состояний поляризации дает вклад только первый член, в то время как второй играет роль, когда мы рассматриваем скалярное состояние. При этом вклад одночастичного состояния в коммутатор можно записать в виде

$$\begin{aligned} \langle 0 | [A_{\rho}(x), A_{\nu}(y)] | 0 \rangle | 1 \text{ частица} \rangle &= -Z_3 \int dM^2 \int \frac{d^3 k}{2k^0 (2\pi)^3} \times \\ &\times (e^{-ik \cdot (x-y)} - e^{ik \cdot (x-y)}) \left[ \delta(M^2 - \mu^2) \left( g_{\rho\nu} - \frac{k_{\rho} k_{\nu}}{M^2} \right) + \frac{z}{\lambda} \frac{k_{\rho} k_{\nu}}{M^2} \delta(M^2 - m^2) \right]. \end{aligned} \quad (5.75)$$

Если  $M_3^2$  — порог континуума, мы получаем

$$\begin{aligned} \langle 0 | [A_{\rho}(x), A_{\nu}(y)] | 1 \rangle &= \\ &= -Z_3 \int \frac{d^3 k}{2k^0 (2\pi)^3} (e^{-ik \cdot (x-y)} - e^{ik \cdot (x-y)}) \left( g_{\rho\nu} - \frac{k_{\rho} k_{\nu}}{\mu^2} \right) \Big|_{k^0 = (k^2 + \mu^2)^{1/2}} - \\ &- Z_3 z \int \frac{d^3 k}{2k^0 (2\pi)^3} (e^{-ik \cdot (x-y)} - e^{ik \cdot (x-y)}) \frac{k_{\rho} k_{\nu}}{\mu^2} \Big|_{k^0 = (k^2 + m^2)^{1/2}} - \\ &- \int_{M_0^2}^{\infty} dM^2 \pi(M^2) \int \frac{d^3 k}{2k^0 (2\pi)^3} (e^{-ik \cdot (x-y)} - e^{ik \cdot (x-y)}) \times \\ &\times \left( g_{\rho\nu} - \frac{k_{\rho} k_{\nu}}{M^2} \right) \Big|_{k^0 = (k^2 + M^2)^{1/2}}, \end{aligned} \quad (5.76)$$

$$1 = Z_3 + \int_{M_0^2}^{\infty} dM^2 \pi(M^2), \quad (5.77)$$

$$Z_3(z-1) = \int_{M_0^2}^{\infty} dM^2 \pi(M^2) \frac{\mu^2}{M^2}. \quad (5.78)$$

Соответственно отклонение от канонического поведения обуславливается лишь вкладом континуума и обращается в нуль в слу-

чае свободного поля, поскольку (5.72) принимает вид

$$a = \int_{M_0^2}^{\infty} dM^2 \pi(M^2) \frac{\mu^2 - M^2}{M^2}. \quad (5.79)$$

Для ковариантного пропагатора соответствующее разложение записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} i \langle 0 | T [A_\rho(x), A_\nu(y)] | 0 \rangle &= \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} e^{-ik \cdot (x-y)} \times \\ &\times \left[ Z_3 \left( \frac{g_{\rho\nu} - k_\rho k_\nu / \mu^2}{k^2 - \mu^2 + i\epsilon} + z \frac{k_\rho k_\nu / \mu^2}{k^2 - m^2 + i\epsilon} \right) + \right. \\ &\left. + \int_{M_0^2}^{\infty} dM^2 \pi(M^2) \frac{g_{\rho\nu} - k_\rho k_\nu / M^2}{k^2 - M^2 + i\epsilon} \right] \end{aligned} \quad (5.80)$$

(см. в конце этого раздела обсуждение проблемы ковариантности). Хотя продольная компонента динамически независима от остальных, ковариантные выражения, выписанные выше, дают нетривиальную константу перенормировки  $Z_3 z$ ; выражения (5.77) и (5.78) не позволяют нам положить  $z = 1$  или  $Z_3 z = 1$ .

Если мы покажем, несмотря на indefinitность метрики пространства состояний, что мера  $\pi(M^2)$  положительна, физическая интерпретация  $Z_3$  станет ясной. Роль величины  $Z_3$  будет аналогична роли  $Z$  в случае скалярного поля.

Начнем с того, что с помощью выражений (5.64) и (5.76) найдем вакуумное среднее коммутатора тока:

$$\begin{aligned} \langle 0 | [j_\rho(x), j_\nu(y)] | 0 \rangle &= - \int_{M_0^2}^{\infty} dM^2 \int \frac{d^3 k}{2k^0 (2\pi)^3} (e^{-ik \cdot (x-y)} - e^{ik \cdot (x-y)}) \times \\ &\times \pi(M^2) (\mu^2 - M^2)^2 \left( g_{\rho\nu} - \frac{k_\rho k_\nu}{M^2} \right). \end{aligned} \quad (5.81)$$

Отсюда следует, что 1) одночастичный вклад отсутствует:  $\langle 0 | j | 1 \text{ фотон} \rangle = 0$ , и 2) ток сохраняется. В случае пространства с дефинитной метрикой с помощью (5.81) нетрудно показать, что плотность  $\pi(M^2)$  положительна. Однако в нашем случае мы имеем

$$\begin{aligned} &\sum_{\alpha} \delta(\rho_\alpha^2 - M^2) (-1)^{n_\alpha} \langle 0 | j_\rho(x) | \alpha \rangle \langle \alpha | j_\nu(y) | 0 \rangle = \\ &= - \int \frac{d^3 k}{2k^0 (2\pi)^3} e^{-ik \cdot (x-y)} \pi(M^2) (\mu^2 - M^2)^2 \left( g_{\rho\nu} - \frac{k_\rho k_\nu}{M^2} \right); \end{aligned} \quad (5.82)$$

здесь  $n_\alpha$  — число скалярных фотонов в промежуточном состоянии  $|\alpha\rangle$ , а  $\langle 0 | j_\nu(0) | \alpha \rangle^* = \langle \alpha | j_\nu(0) | 0 \rangle$ . В гл. 4 мы рассматривали примеры компенсации вкладов продольных и скалярных фотонов.

Здесь мы ожидаем, что имеет место другой механизм, поскольку массы фотонов двух сортов различны. Прежде всего заметим, что состояния, содержащие одну скалярную частицу, не дают вклада в (5.81). Кроме того, из равенства (5.64) и (5.76) следует, что

$$\langle 0 | [j_\rho(x), \partial \cdot A(y)] | 0 \rangle = 0. \quad (5.83)$$

Это соотношение в действительности может быть установлено и для других матричных элементов, так что в общем случае справедливо операторное соотношение

$$[j_\rho(x), \partial \cdot A(y)] = 0, \quad (5.84)$$

которое выражает калибровочную инвариантность тока и напоминает нам, что  $\partial \cdot A$  является свободным полем:

$$\partial \cdot A = (zZ_3)^{1/2} \partial \cdot A^{\text{in}} = (zZ_3)^{1/2} \partial \cdot A^{\text{out}}. \quad (5.85)$$

Комбинируя (5.84) и (5.85), находим, что матричные элементы  $\langle 0 | j_\rho(x) | \alpha \rangle$ , в которых  $|\alpha\rangle$  включают скалярные фотоны, должны обращаться в нуль. Отсюда следует, что все члены в правой части дают вклад с положительным знаком и

$$\pi(M^2) > 0. \quad (5.86)$$

Таким образом, правило сумм (5.77) имеет тот же смысл, что и в скалярном случае. Более тщательное рассмотрение показывает, что  $Z_3$  фактически не зависит от калибровочного параметра  $\lambda$ , как и предполагалось нами выше.

Теперь можно непосредственно получить редукционные формулы для состояний, включающих поперечные фотоны. Рассмотрим, например, процесс, включающий испускание фотона с импульсом  $k$  и поляризацией  $\varepsilon$  ( $\varepsilon \cdot k = 0$ ):

$$\begin{aligned} \langle \beta, k, \varepsilon, \text{out} | \alpha, \text{in} \rangle &= \langle \beta, \text{out} | a_{\text{out}}^{(\varepsilon)}(k) | \alpha, \text{in} \rangle = \\ &= -i \int_{t_f}^{\infty} d^3x e^{ik \cdot x} \overleftrightarrow{\partial}_0 \langle \beta, \text{out} | \varepsilon \cdot A^{T, \text{out}}(x) | \alpha, \text{in} \rangle. \end{aligned}$$

Воспользуемся асимптотическим соотношением, аналогичным (5.73), в котором произведена замена  $A^{\text{in}} \rightarrow A^{\text{out}}$ , при  $t = t_f \rightarrow \infty$ . Тогда, рассматриваемый матричный элемент можно записать в виде

$$\begin{aligned} \lim_{t_f \rightarrow \infty} (-iZ_3^{-1/2}) \int_{t_f}^{\infty} d^3x e^{ik \cdot x} \overleftrightarrow{\partial}_0 \langle \beta, \text{out} | \varepsilon \cdot A(x) + \frac{1}{m^2} \varepsilon \cdot \partial \partial \cdot A(x) | \alpha, \text{in} \rangle = \\ = \text{Несв. чл.} -iZ_3^{-1/2} \int d^4x e^{ik \cdot x} (\square_x + \mu^2) \langle \beta, \text{out} | \varepsilon \cdot A(x) + \\ + \frac{1}{m^2} \varepsilon \cdot \partial \partial \cdot A(x) | \alpha, \text{in} \rangle. \end{aligned}$$

Справедливо соотношение

$$(\square_x + \mu^2) \frac{1}{m^2} \partial_\rho \partial \cdot A(x) = \frac{\mu^2 - m^2}{m^2} \partial_\rho \partial \cdot A(x) = (\lambda - 1) \partial_\rho \partial \cdot A(x).$$

Таким образом, комбинация, входящая в матричный элемент, равна  $\varepsilon j(x)$ , и окончательное выражение (с возможным несвязным членом) запишется в виде

$$\langle \beta, k, \varepsilon, \text{out} | \alpha, \text{in} \rangle = \text{Несв. чл.} -i Z_3^{-1/2} \int d^4 x e^{ik \cdot x} \times \\ \times \langle \beta, \text{out} | \varepsilon \cdot j(x) | \alpha, \text{in} \rangle \quad (5.87)$$

Эта операция может быть выполнена многократно. Приведем результат, относящийся к случаю, когда начальный фотон  $(k_i, \varepsilon_i)$  переходит в процессе рассеяния в конечное состояние  $(k_f, \varepsilon_f)$ :

$$\langle \beta, k_f, \varepsilon_f, \text{out} | \alpha, k_i, \varepsilon_i, \text{in} \rangle = \text{Несв. чл.} -Z_3^{-1} \int d^4 x d^4 y \times \\ \times e^{i(k_f x - k_i y)} (\square_y + \mu^2) \langle \beta, \text{out} | T \varepsilon_f \cdot j(x) \times \\ \times \left[ \varepsilon_i \cdot A(y) + \frac{1}{m^2} \varepsilon_i \cdot \partial \partial \cdot A(y) \right] | \alpha, \text{in} \rangle$$

После действия оператора Клейна—Гордона матричный элемент можно заменить на  $\langle \beta, \text{out} | T [\varepsilon_f \cdot j(x) \varepsilon_i \cdot j(y)] | \alpha, \text{in} \rangle$ . Разность этих двух выражений сводится к обобщенной функции, сосредоточенной на многообразии  $x = y$ , вследствие неоднозначности хронологического упорядочения. Мы приспособим наше определение символа  $T$  таким образом, чтобы выражения для матричного элемента совпадали:

$$\langle \beta, k_f, \varepsilon_f, \text{out} | \alpha, k_i, \varepsilon_i, \text{in} \rangle = \\ = \text{Несв. чл.} -Z_3^{-1} \int d^4 x d^4 y e^{i(k_f x - k_i y)} \times \\ \times \langle \beta, \text{out} | T \varepsilon_f \cdot j(x) \varepsilon_i \cdot j(y) | \alpha, \text{in} \rangle. \quad (5.88)$$

Эту формулу мы используем для рассмотрения эффекта Комптона.

Вернемся теперь снова к определению ковариантного хронологического произведения, поскольку мы не вникали в детали различий между выражением (5.76) для коммутатора и выражением (5.80) для ковариантного  $T$  произведения. Многое не так просто, когда имеешь дело с тензорными операторами, и поэтому мы должны сделать некоторые пояснения. Чтобы проиллюстрировать это, рассмотрим произведение двух сохраняющихся токов. Обозначая через  $\rho(M^2)$  спектральную функцию  $(\mu^2 - M^2)^2 \pi(M^2)$ , можно записать

$$W_{\rho\nu}(x-y) = \langle 0 | j_\rho(x) j_\nu(y) | 0 \rangle = \\ = - \int_{M^2}^{\infty} dM^2 \rho(M^2) \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \theta(k^0) \delta(k^2 - M^2) \times \\ \times e^{-ik \cdot (x-y)} \left( g_{\rho\nu} - \frac{k_\rho k_\nu}{M^2} \right). \quad (5.89)$$



Сохранение тока здесь очевидно, а знак минус перед интегралом в правой части следует из нашей лоренцевой метрики, что согласуется с положительностью  $\rho(M^2)$ . Введем функцию Вайтмана двух скалярных свободных полей массы  $M$ :

$$W_M(x-y) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^3} \delta(k^2 - M^2) \theta(k^0) e^{-ik \cdot (x-y)} = \langle 0 | \varphi(x) \varphi(y) | 0 \rangle. \quad (5.90)$$

Очевидно, что коммутатор запишется в виде

$$\langle 0 | [j_\nu(x), j_\nu(y)] | 0 \rangle = W_{\rho\nu}(x-y) - W_{\nu\rho}(y-x). \quad (5.91)$$

Попытаемся сначала определить хронологическое упорядочение (обозначим его через  $\tilde{T}$ ) просто в виде

$$\begin{aligned} \langle 0 | \tilde{T} j_\rho(x) j_\nu(y) | 0 \rangle &= \theta(x^0 - y^0) \langle 0 | j_\rho(x) j_\nu(y) | 0 \rangle + \\ &+ \theta(y^0 - x^0) \langle 0 | j_\nu(y) j_\rho(x) | 0 \rangle. \end{aligned} \quad (5.92)$$

К сожалению используя (5.89), мы скоро обнаруживаем, что  $\tilde{T}$  не приводит к ковариантной величине. Для свободного поля массы  $M$  имеем

$$\begin{aligned} i \langle 0 | T \varphi(x) \varphi(y) | 0 \rangle &= i\theta(x^0 - y^0) W_M(x-y) + i\theta(y^0 - x^0) W_M(y-x) = \\ &= - \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{-ik \cdot (x-y)} \frac{1}{k^2 - M^2 + i\epsilon} = G_F(y-x). \end{aligned} \quad (5.93)$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} i \langle 0 | \tilde{T} j_\rho(x) j_\nu(y) | 0 \rangle &= - \int_{M_0^2}^{\infty} dM^2 \rho(M^2) \times \\ &\times \left[ i\theta(x^0 - y^0) \left( g_{\rho\nu} - \frac{\partial_\rho^x \partial_\nu^y}{M^2} \right) W_M(x-y) + (x \leftrightarrow y) \right]. \end{aligned} \quad (5.94)$$

Ковариантное  $T$ -произведение определяется следующим образом:

$$i \langle 0 | T j_\rho(x) j_\nu(y) | 0 \rangle = iT_{\rho\nu}^{(1)}(x-y) + i \Delta T_{\rho\nu}(x, y), \quad (5.95)$$

причем

$$\begin{aligned} iT_{\rho\nu}^{(1)}(x-y) &= - \int_{M_0^2}^{\infty} dM^2 \rho(M^2) \left[ i \left( g_{\rho\nu} - \frac{\partial_\rho^x \partial_\nu^y}{M^2} \right) \theta(x^0 - y^0) W_M(x-y) + (x \leftrightarrow y) \right] = \\ &= - \int_{M_0^2}^{\infty} dM^2 \rho(M^2) \left( g_{\rho\nu} - \frac{\partial_\rho^x \partial_\nu^y}{M^2} \right) G_F(x-y) = \\ &= \int_{M_0^2}^{\infty} dM^2 \rho(M^2) \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{-ik \cdot (x-y)} \frac{g_{\rho\nu} - k_\rho k_\nu / M^2}{k^2 - M^2 + i\epsilon}. \end{aligned} \quad (5.96)$$

Здесь  $i \Delta T_{\rho\nu}(x, y)$  — локальная (т. е. сосредоточенная на многообразии  $x = y$ ) ковариантная величина которую мы оставим пока неопределенной. Мы увидим, что ее можно определить с помощью закона сохранения тока. Рассмотрим теперь разность между двумя хронологическими произведениями, определяемыми (5.92) и (5.95). С этой целью перепишем член в квадратных

скобках в выражении (5.96) следующим образом:

$$\begin{aligned} [ ] &= i \left( g_{\rho\nu} - \frac{\partial_\rho^x \partial_\nu^y}{M^2} \right) \theta(x^0 - y^0) W_M(x-y) + (x \leftrightarrow y) = \\ &= i \left[ \theta(x^0 - y^0) \left( g_{\rho\nu} - \frac{\partial_\rho^x \partial_\nu^y}{M^2} \right) W_M(x-y) + (x \leftrightarrow y) \right] + \\ &\quad + \frac{i}{M^2} g_{\rho 0} \delta(x^0 - y^0) \partial_\nu^x [W_M(x-y) - W_M(y-x)]. \end{aligned}$$

Из канонического квантования следует, что

$$i g_{\rho 0} \delta(x^0 - y^0) \partial_\nu^x [W_M(x-y) - W_M(y-x)] = g_{\rho 0} g_{\nu 0} \delta^4(y-x).$$

Поэтому

$$iT_{\rho\nu}^{(1)}(x-y) - i \langle 0 | \tilde{T} j_\rho(x) j_\nu(y) | 0 \rangle = -g_{\rho 0} g_{\nu 0} \delta^4(x-y) \int_{M_1^2}^{\infty} dM^2 \frac{\rho(M^2)}{M^2}. \quad (5.97)$$

Таким образом, разность между хронологическими произведениями оказывается контактным членом, осредоточенным при  $x=y$ , но не ковариантным.

Применим теперь это выражение для изучения важного свойства одновременных коммутаторов или, в данном случае, их вакуумного среднего. Из (5.96) следует, что

$$\begin{aligned} \partial^0 iT_{\rho\nu}^{(1)}(x-y) &= -i \int_{M_0^2}^{\infty} dM^2 \rho(M^2) \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} e^{-ik \cdot (x-y)} k_\nu \frac{1 - k^2/M^2}{k^2 - M^2 + i\varepsilon} = \\ &= -\partial_\nu^x \delta^4(x-y) \int_{M_1^2}^{\infty} dM^2 \frac{\rho(M^2)}{M^2}. \end{aligned}$$

В соответствии с (5.97) эта величина должна быть равна

$$-g_{\nu 0} \partial_0 \delta^4(x-y) \int_{M_0^2}^{\infty} dM^2 \frac{\rho(M^2)}{M^2} + i \partial_x^0 \langle 0 | \tilde{T} j_\rho(x) j_\nu(y) | 0 \rangle.$$

Ток сохраняется, так что дивергенция хронологического произведения токов должна совпадать с одновременным коммутатором; следовательно,

$$-(\partial_\nu - g_{\nu 0} \partial_0) \delta^4(x-y) \int_{M_0^2}^{\infty} dM^2 \frac{\rho(M^2)}{M^2} = i \delta(x^0 - y^0) \langle 0 | [j_\rho(x), j_\nu(y)] | 0 \rangle,$$

откуда получаем

$$\begin{aligned} \langle 0 | [j_\rho(x), j_\nu(y)] | 0 \rangle |_{x^0=y^0} &= 0, \\ \langle 0 | [j_\rho(x), j_\nu(y)] | 0 \rangle |_{x^0=y^0} &= i \partial_k \delta^3(x-y) \int_{M_0^2}^{\infty} dM^2 \frac{\rho(M^2)}{M^2}. \end{aligned} \quad (5.98)$$

То, что в выражении для одновременного коммутатора временной и пространственной компонент тока член, пропорциональный градиенту  $\delta$ -функции,

появляется как следствие условий ковариантности и положительности, было впервые отмечено Швингером. Само его название —  $s$ -числовой швингеровский член — напоминает, что он дает вклад даже в величину вакуумного среднего. Равенство нулю одновременного коммутатора временных компонент токов отражает тот факт, что при интегрировании по пространству они дают сохраняющийся электрический заряд. Если теория допускает более широкую группу инвариантности, чем  $U(1)$ , то гоки должны иметь внутренние индексы, соответствующие различным генераторам группы симметрии, а при рассмотрении одновременных коммутаторов мы должны включать алгебру Ли этой группы (см. гл. 11).

Рассмотрим снова в соотношении (5.95) член  $i \Delta T_{\rho\nu}(x, y)$  и выберем его таким образом, чтобы выполнялось равенство

$$i \partial_\lambda' \langle 0 | T J_\rho(x) J_\nu(y) | 0 \rangle = 0. \quad (5.99)$$

Величина

$$i \Delta T_{\rho\nu}(x, y) = g_{\rho\nu} \delta^4(x - y) \int_{M_0^2}^{\infty} dM^2 \frac{\rho(M^2)}{M^2} \quad (5.100)$$

удовлетворяет всем требованиям, так что полное выражение для ковариантного  $T$ -произведения запишется в виде

$$i \langle 0 | T J_\rho(x) J_\nu(y) | 0 \rangle = \int_{M_0^2}^{\infty} dM^2 \frac{\rho(M^2)}{M^2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} e^{-ik \cdot (x-y)} \frac{k^2 g_{\rho\nu} - k_\rho k_\nu}{k^2 - M^2 - i\epsilon}. \quad (5.101)$$

## 5.2. ПРИЛОЖЕНИЯ

Прежде чем развивать ковариантную теорию возмущений (см. гл. 6), проиллюстрируем известные уже нам методы, рассматривая в качестве примеров простые процессы с участием фотонов и заряженных фермионов

### 5.2.1. Эффект Комптона

В гл. 1 мы вычислили классическое томсоновское упругое рассеяние света на заряженном центре. В 1923 г. Комптон при изучении рентгеновских лучей открыл процесс рассеяния со сдвигом частоты, который носит его имя.

Для определенности выберем в качестве мишени свободный электрон. При вычислении амплитуды эффекта в низшем порядке по  $e$  (электронному заряду) будем опираться на выражение (5.88). В этом порядке  $Z_3 = 1$ , а ток можно отождествить с током свободных электронов:

$$j_\rho(x) = e \bar{\Psi}_{in}(x) \gamma_\rho \Psi_{in}(x). \quad (5.102)$$

В дальнейшем мы будем опускать индекс «in» и отождествлять in- и out-состояния электрона, т. е. будем вычислять амплитуды

с точностью до  $e^2$ . Сам процесс изображен на рис. 5.2, на котором волнистыми линиями представлены фотоны, а сплошными — электроны. Связные элементы  $S$ -матрицы (индекс  $s$  означает «свя-

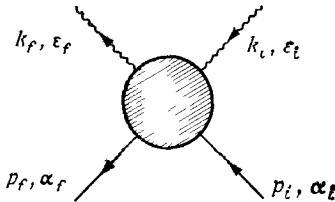


РИС. 5.2. Кинематика эффекта Комптона в общем случае.

зывать») записываются в виде

$$S_{i \leftarrow f}^s = -e^2 \iint d^4x d^4y e^{i(k_f \cdot x - k_i \cdot y)} \times \\ \times \langle p_f | T : \bar{\psi}(x) \varepsilon_f \psi(x) : \bar{\psi}(y) \varepsilon_i \psi(y) : | p_i \rangle^c. \quad (5.103)$$

Хронологическое произведение операторов, согласно теореме Вика, записывается через нормальные произведения, с коэффициентами, построенными из спариваний

$$\overline{\psi_{\xi}(x) \psi_{\xi}(y)} = -\overline{\psi_{\xi}(y) \psi_{\xi}(x)} = i S_{\xi\xi}^F(x-y) = \\ = i \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} e^{-iq(x-y)} \left( \frac{1}{q-m+i\epsilon} \right)_{\xi\xi}, \\ \overline{\psi_{\xi}(x) \psi_{\xi}(y)} = \overline{\psi_{\xi}(x) \psi_{\xi}(y)} = 0.$$

Применим теперь выражение (4.75); при этом опустим спаривания между операторами, относящимися к одной и той же точке, поскольку каждый из токов является нормально упорядоченным. Таким образом, получаем

$$T : \bar{\psi}(x) \gamma_{\rho} \psi(x) : \bar{\psi}(y) \gamma_{\nu} \psi(y) := i : \bar{\psi}(x) \gamma_{\rho} S^F(x-y) \gamma_{\nu} \psi(y) : + \\ + i : \bar{\psi}(y) \gamma_{\nu} S^F(y-x) \gamma_{\rho} \psi(x) : + \dots$$

Остальные члены не дают вкладов в связанный матричный элемент. Выразим теперь свободные поля  $\psi$  и  $\bar{\psi}$  через операторы рождения и уничтожения [выражение (3.157)]. Пусть  $\alpha_i$  и  $\alpha_f$  обозначают начальную и конечную поляризации электрона, т. е.

$$|p_i\rangle = b^{\dagger}(p_i, \alpha_i) |0\rangle, \quad |p_f\rangle = b^{\dagger}(p_f, \alpha_f) |0\rangle;$$

тогда типичная величина, которую нам надо вычислить, имеет вид:

$$\langle 0 | b(p_f, \alpha_f) : \bar{\psi}_{\xi}(x) \psi_{\eta}(y) : b^{\dagger}(p_i, \alpha_i) | 0 \rangle = \\ = \iint \frac{d^3q_1}{(2\pi)^3} \frac{d^3q_2}{(2\pi)^3} \frac{m^2}{q_1^0 q_2^0} e^{i(q_1 \cdot x - q_2 \cdot y)} \sum_{\alpha_1, \alpha_2} \bar{u}_{\xi}(q_1, \alpha_1) u_{\eta}(q_2, \alpha_2) \times \\ \times \langle 0 | b(p_f, \alpha_f) b^{\dagger}(q_1, \alpha_1) b(q_2, \alpha_2) b^{\dagger}(p_i, \alpha_i) | 0 \rangle = \\ = e^{i(p_f \cdot x - p_i \cdot y)} \bar{u}_{\xi}(p_f, \alpha_f) u_{\eta}(p_i, \alpha_i).$$

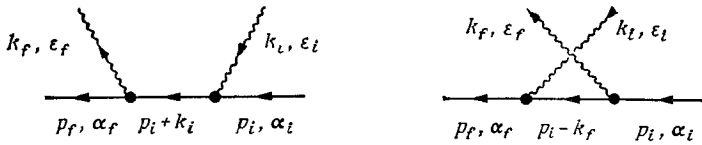


РИС. 5.3. Диаграммы Фейнмана низшего порядка для эффекта Комптона.

Это позволит нам вычислить  $S_{f \leftarrow i}^c$ :

$$S_{f \leftarrow i}^c = -ie^2 \iint d^4x d^4y e^{i(k_f x - k_i \cdot y)} \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \times \\ \times \left[ e^{i(p_f - q) \cdot x - i(p_i - q) \cdot y} \bar{u}(p_f, \alpha_f) \epsilon_f \frac{1}{q - m + i\epsilon} \epsilon_i u(p_i, \alpha_i) + \right. \\ \left. + e^{i(p_f - q) \cdot y - i(p_i - q) \cdot x} \bar{u}(p_f, \alpha_f) \epsilon_i \frac{1}{q - m + i\epsilon} \epsilon_f u(p_i, \alpha_i) \right].$$

Производя интегрирование по  $x$ ,  $y$  и  $q$ , получаем

$$S_{f \leftarrow i}^c = -ie^2 (2\pi)^4 \delta^4(k_f + p_f - k_i - p_i) \times \\ \times \left[ \bar{u}(p_f, \alpha_f) \epsilon_f \frac{1}{p_i + k_i - m} \epsilon_i u(p_i, \alpha_i) + \right. \\ \left. + \bar{u}(p_f, \alpha_f) \epsilon_i \frac{1}{p_i - k_f - m} \epsilon_f u(p_i, \alpha_i) \right]. \quad (5.104)$$

Интегралы по конфигурационному пространству дают  $\delta$ -функцию, выражающую сохранение энергии-импульса. Величину  $i\epsilon$  в фермионных пропагаторах можно опустить, поскольку, добавляя изотропный вектор ( $k$ ) к импульсу на массовой поверхности, или вычитая его, мы с необходимостью получаем импульс вне этой поверхности.

Из приведенного в разд. 5.1 рассмотрения следует, что коэффициент в квадратных скобках — это редуцированный матричный элемент перехода

$$\mathcal{F}_{f \leftarrow i} = -e^2 \bar{u}(p_f, \alpha_f) \left( \epsilon_f \frac{1}{p_i + k_i - m} \epsilon_i + \epsilon_i \frac{1}{p_i - k_f - m} \epsilon_f \right) u(p_i, \alpha_i). \quad (5.105)$$

В этом выражении оба члена можно представить диаграммами Фейнмана (рис. 5.3). Внешние линии наделены функциями поляризации  $\epsilon$ ,  $u$  или  $\bar{u}$  и соответствующими импульсами. Внутренним линиям соответствуют пропагаторы. Вершины представляют взаимодействие  $e\gamma$ , и в каждой из них энергия и импульс сохраняются. Это объясняет, почему первый пропагатор соответствует импульсу  $k_i + p_i = = k_f + p_f$ , а второй  $p_i - k_f = p_f - k_i$ . Полные энергия и импульс таким образом сохраняются всюду в диаграмме. Переход к пределу  $\mu \rightarrow 0$  в случае фотонов является тривиальным, и легко проверить, что, если одна из поляризаций — продольная (соответствует индек-

су 3), выражение (5.105) обращается в нуль. Поэтому мы ограничимся учетом только двух поперечных поляризаций.

Используя выражение (5.105), вычислим сечение рассеяния фотонов на неполяризованных электронах в случае, когда поляризация конечного электрона не измеряется. Для этого нам нужно усреднить вероятности по начальным поляризациям электрона и просуммировать по конечным. Следовательно, нам нужно вычислить с точностью до кинематических коэффициентов величину  $(1/2) \sum_{\alpha_i, \alpha_f} |\mathcal{F}_{i \leftarrow i}|^2$ .

Сечение рассеяния определяется из выражения (5.13), в котором делается соответствующее изменение, связанное с присутствием электрона в начальном [вводится множитель  $(2/m) p_i \cdot k_i$ , обусловленный потоком] и конечном состояниях [фазовый объем  $m d^3 p_f / (2\pi)^3 p_f^0$ ]. Таким образом,

$$d\sigma = \frac{1}{2} \sum_{\alpha_i, \alpha_f} (2\pi)^4 \delta^4(p_f + k_f - p_i - k_i) |\mathcal{F}_{i \leftarrow i}|^2 \frac{m}{2p_i \cdot k_i} \frac{d^3 k_f}{2k_f^0 (2\pi)^3} \frac{m d^3 p_f}{(2\pi)^3 p_f^0}.$$

Будем использовать переменные в лаб. системе отсчета, в которой

$$\int d^3 p_f d^3 k_f \delta^4(p_f + k_f - p_i - k_i) = (k_f^0)^2 \left| \frac{dk_f^0}{d(p_i^0 + k_i^0)} \right| d\Omega,$$

где  $\Omega$  — телесный угол, в который излучается фотон, измеряемый относительно направления начального импульса. Мы имеем

$$\frac{dp_f^0 + dk_f^0}{dk_f^0} = 1 + \frac{1}{2p_i^0} \frac{d(p_i^0)^2}{dk_f^0} = 1 + \frac{1}{2p_i^0} \frac{d}{dk_f^0} [m^2 + (\mathbf{k}_f - \mathbf{k}_i)^2] = \frac{p_f \cdot k_f}{p_i^0 k_f^0}.$$

Таким образом, сечение принимает вид

$$d\sigma = \frac{\alpha^2}{2} \sum_{\alpha_f, \alpha_i} |\bar{u} \dots u|^2 \frac{(k_f^0 m)^2}{p_i \cdot k_i p_f \cdot k_f} d\Omega,$$

где кинематический коэффициент вычисляется с помощью закона сохранения импульса

$$(p_i + k_i)^2 = (p_f + k_f)^2, \quad p_i \cdot k_i = p_f \cdot k_f^{lab} = mk_f^0.$$

Используя для фотонов обозначение  $k = k^0 = |\mathbf{k}|$ , сечение  $d\sigma$  можно переписать в виде

$$d\sigma = \frac{\alpha^2}{2} \sum_{\alpha_f, \alpha_i} \left| \bar{u}(p_f, \alpha_f) \varepsilon_f \frac{1}{p_i + k_i - m} \varepsilon_i u(p_i, \alpha_i) + \bar{u}(p_f, \alpha_f) \varepsilon_i \frac{1}{p_i - k_f - m} \varepsilon_f u(p_i, \alpha_i) \right|^2 \left( \frac{k_f}{k_i} \right)^2 d\Omega. \quad (5.106)$$

Освобождаясь от  $\gamma$ -матриц в знаменателе и используя уравнение Дирака, запишем матричный элемент следующим образом:

$$\begin{aligned} & \bar{u}(p_f, \alpha_f) \left( \varepsilon_f \frac{1}{p_i + k_i - m} \varepsilon_i + \varepsilon_i \frac{1}{p_i - k_f - m} \varepsilon_f \right) u(p_i, \alpha_i) = \\ & = \bar{u}(p_f, \alpha_f) \left( \varepsilon_f \frac{p_i + k_i + m}{2p_i \cdot k_i} \varepsilon_i - \varepsilon_i \frac{p_i - k_f + m}{2p_i \cdot k_f} \varepsilon_f \right) u(p_i, \alpha_i) = \\ & = \bar{u}(p_f, \alpha_f) \left[ \varepsilon_f \frac{2(p_i + k_i) \cdot \varepsilon_i - \varepsilon_i k_i}{2p_i \cdot k_i} - \varepsilon_i \frac{2(p_i - k_f) \cdot \varepsilon_f + \varepsilon_f k_f}{2p_i \cdot k_f} \right] u(p_i, \alpha_i). \end{aligned}$$

Поляризации поперечных фотонов  $\varepsilon_i, \varepsilon_f$  можно выбрать ортогональными «временной» оси  $p_i$ , а также  $k_i$  (для  $\varepsilon_i$ ) и  $k_f$  (для  $\varepsilon_f$ ). Тогда записанный выше матричный элемент принимает вид

$$-\bar{u}(p_f, \alpha_f) \left( \frac{\varepsilon_f \varepsilon_i k_i}{2p_i \cdot k_i} + \frac{\varepsilon_i \varepsilon_f k_f}{2p_i \cdot k_f} \right) u(p_i, \alpha_i).$$

Следует заметить, что общий вклад двух рассматриваемых диаграмм Фейнмана инвариантен относительно перестановки фотонных переменных начального и конечного состояний

$$(\varepsilon_i, k_i) \leftrightarrow (\varepsilon_f, -k_f), \quad (5.107)$$

причем знак импульса меняется на обратный. Это пример новой симметрии амплитуды перехода, называемой перекрестной (кроссинг) симметрией, которую мы подробно изучим в разд. 5.3.2. Используя соотношение

$$\sum_{\alpha} u_{\alpha}(p, \alpha) \bar{u}_{\alpha'}(p, \alpha) = \left( \frac{p+m}{2m} \right)_{\alpha\alpha'}, \quad (5.108)$$

можно теперь просуммировать по поляризациям электрона:

$$X \equiv \sum_{\alpha_i, \alpha_f} |\bar{u}(p_f, \alpha_f) O u(p_i, \alpha_i)|^2 = \text{Sp} \left( O \frac{p_i + m}{2m} \bar{O} \frac{p_f + m}{2m} \right), \quad (5.109)$$

где  $\bar{O} = \gamma^0 O^\dagger \gamma^0$  и след берется по дираковским индексам. В данном случае у нас получается громоздкое выражение:

$$X = \text{Sp} \left[ \left( \frac{\varepsilon_f \varepsilon_i k_i}{2p_i \cdot k_i} + \frac{\varepsilon_i \varepsilon_f k_f}{2p_i \cdot k_f} \right) \frac{p_i + m}{2m} \left( \frac{k_i \varepsilon_i \varepsilon_f}{2p_i \cdot k_i} + \frac{k_f \varepsilon_f \varepsilon_i}{2p_i \cdot k_f} \right) \frac{p_f + m}{2m} \right]. \quad (5.110)$$

След можно разбить на четыре члена. два диагональных, каждый из которых получается из другого подстановкой (5.107), и два перекрестных члена. Последние совпадают друг с другом, поскольку след нечетного числа  $\gamma$ -матриц равен нулю, а

$$\text{Sp}(\gamma_1, \gamma_2 \dots \gamma_{2n}) = \text{Sp}(\gamma_{2n} \dots \gamma_2 \gamma_1),$$

в чем можно убедиться, транспонируя и связывая  $\gamma$  с  $\gamma^T$  с помощью матрицы зарядового сопряжения  $C$ . Остается вычислить два не рав-

ных нулю следа. Попробуем наимыгоднейшим образом использовать тождества  $k_i^2 = k_f^2 = 0$ ,  $\varepsilon_i^2 = \varepsilon_f^2 = -1$ , применяя повторно тождество  $a \cdot b = -b \cdot a + 2a \cdot b$  с целью перемещения соответствующих импульсов так, чтобы они оказывались рядом друг с другом:

$$\begin{aligned} T_1 &= \text{Sp} [\varepsilon_f \varepsilon_i \mathcal{K}_i (\rho_i + m) \mathcal{K}_f \varepsilon_i \varepsilon_f (\rho_f + m)] = \text{Sp} [\varepsilon_f \varepsilon_i \mathcal{K}_f \rho_f \varepsilon_i \varepsilon_f \rho_f] = \\ &= 2\rho_i \cdot k_i \text{Sp} (\varepsilon_f \varepsilon_i \mathcal{K}_i \varepsilon_f \rho_f) = 2\rho_i \cdot k_i \text{Sp} (\varepsilon_f \mathcal{K}_i \varepsilon_f \rho_f) = \\ &= 8\rho_i \cdot k_i (2\varepsilon_f \cdot k_i \varepsilon_f \cdot \rho_f + k_i \cdot \rho_f) = 8\rho_i \cdot k_i [2(\varepsilon_f \cdot k_i)^2 + k_f \cdot \rho_i] \end{aligned}$$

Здесь на последнем этапе мы использовали условие сохранения импульса, которое дает  $k_i \cdot \rho_f = k_f \cdot \rho_i$  и  $\varepsilon_f \cdot \rho_f = \varepsilon_f \cdot (\rho_i + k_i - k_f) = \varepsilon_f \cdot k_i$ . (Мы выбрали  $\varepsilon_f \cdot \rho_i = \varepsilon_i \cdot \rho_i = 0$ .) Аналогичным образом получаем

$$\begin{aligned} T_2 &= \text{Sp} [\varepsilon_f \varepsilon_i \mathcal{K}_i (\rho_i + m) \mathcal{K}_f \varepsilon_f \varepsilon_i (\rho_f + m)] = \\ &= \text{Sp} [\varepsilon_f \varepsilon_i \mathcal{K}_i (\rho_i + m) \mathcal{K}_f \varepsilon_f \varepsilon_i (\rho_i + \mathcal{K}_i - \mathcal{K}_f + m)] = \\ &= \text{Sp} [\mathcal{K}_i (\rho_i + m) \mathcal{K}_f \varepsilon_f \varepsilon_i \varepsilon_f \varepsilon_i (\rho_i + m)] + 2k_f \cdot \varepsilon_i \text{Sp} (\varepsilon_i \mathcal{K}_i \rho_i \mathcal{K}_f) - \\ &\quad - 2k_i \cdot \varepsilon_f \text{Sp} (\mathcal{K}_i \rho_i \mathcal{K}_f \varepsilon_f) = \\ &= 2k_i \cdot \rho_i \text{Sp} (\mathcal{K}_f \varepsilon_f \varepsilon_i \varepsilon_f \varepsilon_i \rho_i) + 8(k_f \cdot \varepsilon_i)^2 k_i \cdot \rho_i - 8(k_i \cdot \varepsilon_f)^2 \rho_i \cdot k_f = \\ &= 8k_i \cdot \rho_i k_f \cdot \rho_i [2(\varepsilon_f \cdot \varepsilon_i)^2 - 1] + 8(k_f \cdot \varepsilon_i)^2 k_i \cdot \rho_i - 8(k_i \cdot \varepsilon_f)^2 k_f \cdot \rho_i. \end{aligned}$$

Второй перекрестный член  $T_3 = T_2$ ; и наконец,  $T_4$  получается из  $T_1$  с помощью подстановки (5.107). Добавляя к этим величинам соответствующие множители, входящие в выражение (5.110), и используя соотношения для кинематических величин в лабораторной системе отсчета, получаем

$$X = \frac{1}{2m^2} \left[ \frac{k_f}{k_i} + \frac{k_i}{k_f} + 4(\varepsilon_f \cdot \varepsilon_i)^2 - 2 \right]. \quad (5.111)$$

Подставляя это выражение в (5.106), приходим окончательно к формуле Клейна—Нишины<sup>1)</sup> (полученной в 1929 г) для сечения комптоновского рассеяния на свободных электронах:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{4m^2} \left( \frac{k_f}{k_i} \right)^2 \left[ \frac{k_f}{k_i} + \frac{k_i}{k_f} + 4(\varepsilon_f \cdot \varepsilon_i)^2 - 2 \right]. \quad (5.112)$$

Имеющийся здесь сдвиг частоты легко связать с углом рассеяния  $\theta$ ; для этого нужно возвести в квадрат 4-векторное равенство  $k_f - k_i = p_i - p_f$ . Мы получим  $-2k_f^0 k_i^0 (1 - \cos \theta) = 2m(k_f^0 - k_i^0)$ . Таким образом,

$$k_f = \frac{k_i}{1 + (k_i/m)(1 - \cos \theta)}.$$

<sup>1)</sup> В отечественной литературе принято называть это соотношение формулой Клейна—Нишины—Тамма.— *Прим. перев.*



В пределе низких энергий  $k_i/m \rightarrow 0$  формула (5.112) сводится к сечению Томсона (см. разд. 1.3.2):

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{m^2} (\epsilon_f \cdot \epsilon_i)^2, \quad \frac{\alpha}{m} = r_0 = 2,8 \cdot 10^{-13} \text{ см.} \quad (5.113)$$

Вблизи направления вперед, т. е. при  $\theta \rightarrow 0$ , формула Клейна—Нишины также сводится к нерелятивистскому выражению (5.113) независимо от величины энергии падающего фотона.

Если пучок падающих фотонов неполяризован, а поляризация конечного фотона не измеряется, то, как и в случае с электронами, чтобы получить сечение рассеяния неполяризованных частиц, мы должны усреднить сечение по  $\epsilon_i$  и просуммировать по  $\epsilon_f$ :

$$\overline{\frac{d\sigma}{d\Omega}} = \frac{1}{2} \sum_{\epsilon_i, \epsilon_f} \frac{d\sigma}{d\Omega}.$$

Поскольку выполняется равенство  $\sum_{\epsilon_i, \epsilon_f} (\epsilon_i \cdot \epsilon_f)^2 = 1 + \cos^2 \theta$  (ср. с гл. 1), мы приходим к выражению

$$\overline{\frac{d\sigma}{d\Omega}} = \frac{\alpha^2}{2m^2} \left( \frac{k_f}{k_i} \right)^2 \left( \frac{k_f}{k_i} + \frac{k_i}{k_f} - \sin^2 \theta \right). \quad (5.114)$$

Наконец, интегрируя по углам ( $x = \cos \theta$ ), находим полное сечение

$$\bar{\sigma} = \frac{\pi\alpha^2}{m^2} \int_{-1}^{+1} dx \left\{ \frac{1}{[1 + (k_i/m)(1-x)]^3} + \frac{1}{1 + (k_i/m)(1-x)} - \frac{1-x^2}{[1 + (k_i/m)(1-x)]^2} \right\}.$$

Обозначим полное сечение рассеяния Томсона через  $\sigma_0$ , а отношение энергии падающего фотона к энергии покоя электрона через  $\omega$ , т. е.

$$\sigma_0 = \frac{8\pi\alpha^2}{3m^2}, \quad \omega = \frac{k_i}{m}. \quad (5.115)$$

Тогда можно написать

$$\bar{\sigma} = \sigma_0 \frac{3}{4} \left\{ \frac{1+\omega}{\omega^3} \left[ \frac{2\omega(1+\omega)}{1+2\omega} - \ln(1+2\omega) \right] + \frac{\ln(1+2\omega)}{2\omega} - \frac{1+3\omega}{(1+2\omega)^2} \right\}. \quad (5.116)$$

Из этого выражения мы получаем низкоэнергетический ( $\omega \ll 1$ ) и высокоэнергетический ( $\omega \gg 1$ ) пределы

$$\frac{\bar{\sigma}}{\sigma_0} = \begin{cases} 1 - 2\omega + O(\omega^2), & \omega \ll 1, \\ \frac{3}{8\omega} \left[ \ln 2\omega + \frac{1}{2} + O\left(\frac{\ln \omega}{\omega}\right) \right], & \omega \gg 1. \end{cases} \quad (5.117)$$

На рис. 5.4 приведена зависимость отношения  $\bar{\sigma}/\sigma_0$  от  $\omega$ .

Мы проверили перекрестную симметрию амплитуды комптоновского рассеяния в низшем порядке по  $e$ . С помощью выражения (5.88) читатель может распространить это свойство на любой порядок. Как показывают редуционные формулы, приведенные в разд. 5.1.3 и 5.1.4, это свойство можно обобщить на более сложные процессы, включающие две зарядово сопряженные частицы одна из которых находится в начальном состоянии, а другая — в конечном. Амплитуда

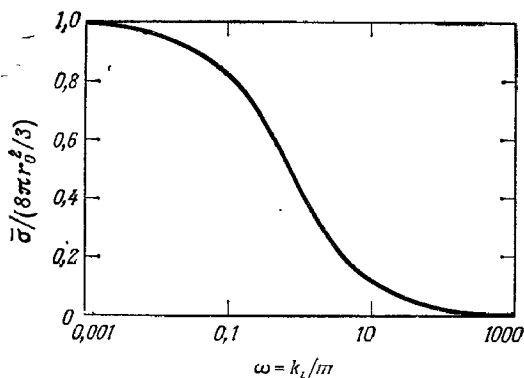


РИС. 5.4. Отношение комптоновского сечения для неполяризованных частиц к сечению Томсона как функция энергии падающего фотона  $\omega = k_i/m$ .

инвариантна по отношению к замене входящей частицы на выходящую анти-частицу с обращением знаков их 4-импульсов. Соответствующая амплитуда, разумеется, не является физической, поскольку она зависит от отрицательных энергий, однако на основе тех же редуционных формул можно построить аналитическое продолжение этих амплитуд (см. разд. 5.3.2.).

### 5.2.2. Аннигиляция пар

Полученные в разд. 5.2.1 результаты позволяют вычислить вероятность родственного процесса, а именно вероятность аннигиляции пары с образованием двух фотонов. Обратный процесс мы рассматривали в гл. 4. За исходную можно взять формулу, аналогичную (5.88), но которая соответствовала бы редукции двух фотонов в конечном состоянии. Однако, согласно статистике Бозе, если  $\Omega$  — телесный угол одного из полученных фотонов, полное сечение рассеяния получается интегрированием величины  $(1/2) d\sigma/d\Omega$  по углу  $4\pi$ , т. е. величины  $d\sigma/d\Omega$  по углу  $2\pi$ . Разумеется, наши выражения должны быть симметричными относительно перестановки двух фотонов.

Кинематика процесса воспроизводится на рис. 5.5, а, где электрон  $(p_1, \alpha_1)$  и позитрон  $(p_2, \alpha_2)$  аннигилируют, излучая фотоны  $(k_1, \varepsilon_1), (k_2, \varepsilon_2)$ . Соответствующая амплитуда имеет вид

$$S_{f \leftarrow i} = -Z_3^{-1} \iint d^4x d^4y e^{i(k_1 \cdot x + k_2 \cdot y)} \times \\ \times \langle 0 | T \{ \varepsilon_1 \cdot j(x) \varepsilon_2 \cdot j(y) \} | p_1, \alpha_1, p_2, \alpha_2, \text{in} \rangle.$$

Точно так же, как и прежде, будем проводить вычисления в низшем порядке, учитывая вклады того же типа, что и рассмотренные в разд. 5.2.1. Прямые вычисления дают

$$S_{f \leftarrow i} = -ie^2 (2\pi)^4 \delta^4(k_1 + k_2 - p_1 - p_2) \times \\ \times \bar{v}(p_2, \alpha_2) \left\{ \varepsilon_2 \frac{1}{p_1 - k_1 - m} \varepsilon_1 + \varepsilon_1 \frac{1}{p_1 - k_2 - m} \varepsilon_2 \right\} u(p_1, \alpha_1). \quad (5.118)$$

Это выражение демонстрирует замечательную аналогию с соответствующей амплитудой эффекта Комптона. Соответствующий ему

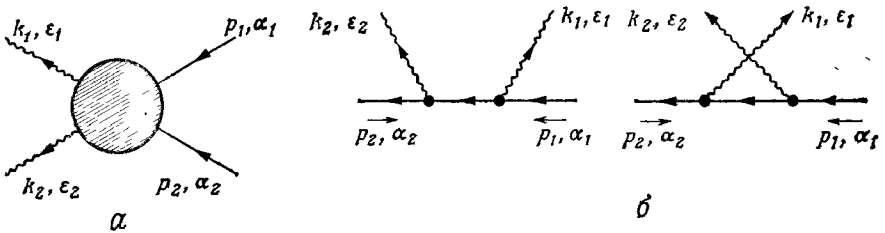


РИС. 5.5. Аннигиляция пар. *a* — общая кинематика; *б* — диаграммы Фейнмана низшего порядка.

процесс представлен на рис. 5.5, *б*, где фермионные линии ориентированы в соответствии с протеканием заряда *e*. Если протекает импульс позитрона, ориентация меняется на противоположную. Выражение (5.118) можно получить из формулы (5.104) для эффекта Комптона, производя в ней следующую простую подстановку:

$$\begin{aligned} (k_i, \varepsilon_i) &\rightarrow (-k_i, \varepsilon_i), & u(p_i, \alpha_i) &\rightarrow u(p_i, \alpha_i), & p_i &\rightarrow p_i, \\ (k_f, \varepsilon_f) &\rightarrow (k_f, \varepsilon_f), & \bar{u}(p_f, \alpha_f) &\rightarrow \bar{v}(p_f, \alpha_f), & p_f &\rightarrow -p_f. \end{aligned} \quad (5.119)$$

При этом перекрестная симметрия заменяется бозе-симметрией амплитуды аннигиляции, а подстановка (5.119) дает еще один пример перекрестных соотношений между процессами.

Матричный элемент (5.118) позволяет получить сечение в случае неполяризованных электронов и позитронов. Множитель, связанный с потоком, равен  $(1/m^2)[(p_1 \cdot p_2)^2 - m^4]^{1/2}$ , а статистическое усреднение приводит к множителю 1/4. Воспользуемся выражением, аналогичным (5.109):

$$-\sum_{\alpha} v(p, \alpha) \bar{v}(p, \alpha) = \frac{-\not{p} + m}{2m}.$$

Тогда сечение рассеяния можно записать в виде

$$d\sigma = \frac{-m^2 e^4}{\{(p_1 \cdot p_2)^2 - m^4\}^{1/2}} \int \frac{1}{4} \text{Sp} \left\{ \left( \frac{\varepsilon_2 k_1 \varepsilon_1}{2p_1 \cdot k_1} + \frac{\varepsilon_1 k_2 \varepsilon_2}{2p_1 \cdot k_2} \right) \frac{\not{p}_1 + m}{2m} \left( \frac{\varepsilon_1 k_1 \varepsilon_2}{2p_1 \cdot k_1} + \frac{\varepsilon_2 k_1 \varepsilon_1}{2p_1 k_2} \right) \frac{\not{p}_2 + m}{2m} \right\} (2\pi)^4 \delta^4(k_1 + k_2 - p_1 - p_2) \frac{d^3 k_1}{2k_1^0 (2\pi)^3} \frac{d^3 k_2}{2k_2^0 (2\pi)^3}.$$

Здесь поляризации фотонов  $\varepsilon_1$  и  $\varepsilon_2$  ортогональны  $p_1$  (и  $k_1$  или  $k_2$  соответственно). Производя в выражении (5.111) подстановку (5.119), находим след

$$\text{Sp}(\dots) = \frac{1}{2m^2} \left[ - \left( \frac{k_2}{k_1} + \frac{k_1}{k_2} \right) + 4(\varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2)^2 - 2 \right].$$

Выполняя вычисления в системе покоя электрона, находим

$$d\sigma = -\frac{1}{4} \int \text{Sp}(\dots) \frac{e^4 m}{|\mathbf{p}_2|} \frac{1}{4\pi^2} \frac{1}{4k_1^0 k_2^0} d\Omega_1 \frac{(k_1^0)^2 dk_1^0}{d(k_1^0 + k_2^0)},$$

где  $k_2^0$  определяется условием сохранения энергии-импульса. Следовательно,

$$\frac{d(k_1^0 + k_2^0)}{dk_1^0} = 1 + \frac{1}{2k_2^0} \frac{d}{dk_1^0} (\mathbf{p}_2 - \mathbf{k}_1)^2 \frac{k_1 \cdot k_2}{k_1 k_2^0},$$

$$k_1 \cdot k_2 = m(m + E_2) = k^0(m + E_2 - |\mathbf{p}_2| \cos \theta).$$

Окончательно получаем выражение

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{8|\mathbf{p}_2|} \frac{m + E_2}{(m + E_2 - |\mathbf{p}_2| \cos \theta)^2} \left[ \frac{k_2}{k_1} + \frac{k_1}{k_2} - 4(\varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2)^2 + 2 \right], \quad (5.120)$$

которое дает дифференциальное сечение испускания одного из фотонов в направлении, определяемом телесным углом  $\Omega$ , соответствующим позитрону  $(E_2, \mathbf{p}_2)$ , падающему на покоящийся электрон. В выражении (5.120)  $k_1$  и  $k_2$  — обозначают энергии фотонов, причем

$$\frac{k_2}{k_1} = \frac{E_2 - |\mathbf{p}_2| \cos \theta}{m}. \quad (5.121)$$

Чтобы получить полное сечение аннигиляции, нужно просуммировать по поляризациям фотонов:

$$\sum_{\varepsilon_1, \varepsilon_2} (\varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2)^2 = 1 + \left[ 1 - \left( \frac{m}{k_1} + \frac{m}{k_2} \right) \right]^2$$

и проинтегрировать по половине полного телесного угла  $4\pi$ . В результате получим

$$\sigma = \frac{\pi r_0^2}{1 + \gamma} \left[ \frac{\gamma^2 + 4\gamma + 1}{\gamma^2 - 1} \ln(\gamma + \sqrt{\gamma^2 - 1}) - \frac{\gamma + 3}{\sqrt{\gamma^2 - 1}} \right], \quad (5.122)$$

где

$$r_0 = \frac{\alpha}{m}, \quad \gamma = \frac{E_2}{m} \geq 1.$$

В двух предельных случаях  $\gamma \rightarrow 1$  (порог) и  $\gamma \rightarrow \infty$  (при высоких энергиях) находим

$$\sigma = \begin{cases} \frac{\pi r_0^2}{\sqrt{1-\gamma^{-2}}} = \frac{\pi r_0^2}{v_2}, & \gamma \rightarrow 1, \quad v_2 \text{ — скорость позитрона,} \\ \frac{\pi r_0^2}{\gamma} [\ln(2\gamma) - 1], & \gamma \rightarrow \infty. \end{cases} \quad (5.123)$$

Используемое нами до сих пор борновское приближение, очевидно, не является достаточным при низких энергиях, когда электрон и позитрон взаимодействуют посредством дальнедействующих кулоновских сил. Однако, рассматривая выражения (5.123) как первую грубую оценку, можно показать, что вероятность аннигиляции в единицу времени медленно движущегося позитрона, определяемая формулой

$$\omega = \sigma \times \text{Падающий поток} \times \text{Плотность мишени} \approx \sigma v_2 n Z = n Z \pi r_0^2, \quad (5.124)$$

не зависит от его скорости. Здесь  $n$  — число атомов в единице объема, а  $Z$  — атомный номер. Следовательно, время жизни низкоэнергетического позитрона в среде дается приближенно выражением

$$\tau = \omega^{-1} \approx (n Z \pi r_0^2)^{-1}. \quad (5.125)$$

Например, в свинце  $\tau \sim 10^{-10}$  с. Общую формулу (5.122) впервые получил Дирак в 1930 г.

### 5.2.3. Время жизни позитрония

В предыдущем разделе рассматривалась свободная аннигиляция электрона и позитрона в пренебрежении кулоновской силой. Последняя может проявить себя, связывая две частицы в нейтральную систему — позитроний — лептонный аналог атомных связанных состояний, которые мы уже рассматривали в гл. 2. Обобщим полученные выше результаты с тем, чтобы получить скорости распада пара- и ортопозитрония из  $s$ -волновых основных состояний. Поскольку аннигиляция представляет собой медленный процесс, ширина этих нестабильных состояний очень мала по сравнению с нерелятивистской энергией связи. Поэтому мы можем провести рассмотрение в два этапа, пренебрегая сначала аннигиляцией, чтобы вычислить энергию связи, а затем пренебрегая связью, чтобы вычислить вероятность аннигиляции. Строгое рассмотрение не допускает появления позитрония в виде стабильного асимптотического состояния, он может возникнуть лишь среди нестабильных возбуждений. В нулевом порядке электрон и позитрон опи-

сываются нерелятивистской изотропной волновой функцией

$$\psi(r) = \frac{1}{(\pi a^3)^{1/2}} e^{-r/a} = \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}} \tilde{\psi}(\mathbf{q}) = \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}} \frac{8(\pi\alpha^3)^{1/2}}{(1+a^2q^2)^2}, \quad (5.126)$$

где  $a$  — удвоенный боровский радиус атома водорода (поскольку в нашем случае приведенная масса равна половине массы электрона):

$$a = 2a_0 = 2/m\alpha. \quad (5.127)$$

По порядку величины импульс электрона или позитрона равен  $1/a = \alpha m/2 \ll m$ , и аннигиляцию можно рассматривать в первом приближении так, как если бы обе частицы покоились относительно друг друга. Поэтому второй этап состоит в том, чтобы вычислить ширину синглетного и триплетного состояний для свободных частиц, находящихся в покое

В гл. 3 было установлено, что зарядовая четность позволяет распадаться синглетному состоянию на четное число фотонов, а потому наименьшее возможное число фотонов равно двум. Мы используем наш прежний результат, умножив его на 4, поскольку вместо четырех усредненных состояний поляризации здесь имеет место распад состояния с определенным спином.

Кроме того нам придется заново пересмотреть рассуждения, приведенные в разд. 5.1.1, и дающие соотношение между сечением и вероятностью перехода в единицу времени, которую мы обозначим здесь как  $\sigma_{\text{сингл}}^{-1}$ . Для этого умножим величину  $4\sigma$  на нормирующий множитель, получаемый следующим образом. Подставим вместо фактора потока

$$m^2 [(p_1 \cdot p_2)^2 - m^4]^{-1/2} = \frac{m}{|p_2|} |p_2| \rightarrow 0 \approx v_2^{-1}$$

вс

$$\left| \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \tilde{\psi}(q) \right|^2 = |\psi(0)|^2 = \frac{1}{\pi a^3},$$

который возникает в нашем случае при повторении вычислений, приводящих от выражения (5.4) к (5.13). Таким образом, можно записать

$$\tau_{\text{сингл}}^{-1} = \frac{1}{\pi a^3} \lim_{\substack{E_2 \rightarrow m \\ v_2 \rightarrow 0}} (4v_2\sigma) = \frac{1}{\pi a^3} (4\pi r_0^2) = \frac{m\alpha^5}{2}. \quad (5.128)$$

Отсюда мы видим, что отношение  $\tau_{\text{сингл}}^{-1}/B$ , где  $B = m\alpha^2/4$  — энергия связи, имеет порядок величины  $\alpha^3 \sim 10^{-6}$ ; это подтверждает обоснованность нашего подхода.

Полученную нами величину можно интерпретировать как вероятность распада в единицу времени, выраженную через матрич-

ный элемент перехода на пороге:

$$\tau^{-1} = \sum_f (2\pi)^4 \delta(P_f^0 - 2m) \delta^3(\mathbf{P}_f) |\langle f | \mathcal{F} | e^+ e^- \rangle|^2 |\psi(0)|^2. \quad (5.129)$$

Данная формула позволяет нам рассмотреть также и распад ортопозитрония, когда минимальное число испускаемых фотонов равно трем. Из редукционной формулы в низшем порядке получаем

$$S_{f \leftarrow i} = (-ie)^3 \int d^4x_1 d^4x_2 d^4x_3 \exp\left(i \sum_{j=1}^3 k_j \cdot x_j\right) \langle 0 | T [\bar{\psi}(x_1) \times \times \varepsilon_1 \psi(x_1) : \bar{\psi}(x_2) \varepsilon_2 \psi(x_2) : \bar{\psi}(x_3) \varepsilon_3 \psi(x_3) : ] | e^+ e^-, \text{ триплет} \rangle. \quad (5.130)$$

С помощью теоремы Вика получаем следующее выражение для матричного элемента:

$$\sum_{\text{Перест.}} \langle 0 | \bar{\psi}(x_1) \varepsilon_1 iS(x_1 - x_2) \varepsilon_2 iS(x_2 - x_3) \varepsilon_3 \psi(x_3) : | e^+ e^-, \text{ триплет} \rangle.$$

Подставляя этот матричный элемент в (5.130) и интегрируя, находим

$$S_{f \leftarrow i} = i (2\pi)^4 \delta(P_f^0 - 2m) \delta^3(\mathbf{P}_f) \mathcal{F}_{fi} = -ie^3 (2\pi)^4 \delta(P_f^0 - 2m) \delta^3(\mathbf{P}_f) \times \times \sum_{\text{Перест.}} \bar{v}^{(\alpha)} \varepsilon_i \frac{1}{p - k_2 - k_3 - m} \varepsilon_2 \frac{1}{p - k_3 - m} \varepsilon_3 u^{(\beta)}. \quad (5.131)$$

Здесь  $u^{(\beta)}$  и  $\bar{v}^{(\alpha)}$  — дираковские спиноры электрона и позитрона в состоянии покоя; мы должны образовать проекцию на триплетное состояние. Полная энергия-импульс фермионов равна  $p \equiv (m, \mathbf{0})$ , в то время как величины  $(k_1, \varepsilon_1)$ ,  $(k_2, \varepsilon_2)$  и  $(k_3, \varepsilon_3)$  обозначают им-

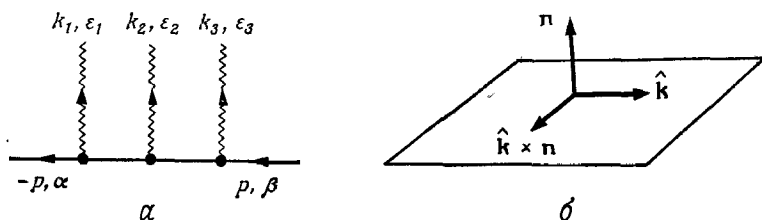


РИС. 5.6. Трехфотонный распад ортопозитрония. а — одна из шести диаграмм, описывающих процесс в низшем порядке; б — выбор осей для измерения поляризации фотона;  $n$  — нормаль к плоскости реакции.

пульсы и поляризации фотонов в конечном состоянии, причем  $P_f = \sum_{j=1}^3 k_j$ . Разумеется, величина  $\mathcal{F}$  является симметричной по фотонным переменным, как того требует статистика Бозе. Поэтому интеграл по фазовому пространству следует разделить на  $3!$ . Выражение (5.131) можно представить в виде суммы шести фейнма-

новских диаграмм, одна из которых показана на рис. 5.6, а, получаемых перестановкой фотонных переменных. Чтобы продолжить вычисления, введем обозначения

$$\mathcal{F}_{j \leftarrow i} = -e^3 \chi_+^{c\dagger} \sum a_{123} \chi_-, \quad \chi_+^{c\dagger} = \chi_+^T i\sigma_2, \quad (5.132)$$

где  $\chi_{\pm}$  — двухкомпонентные спиноры, описывающие фермионы. Применим здесь метод, отличный от того, который состоит в вычислении следов при квадрировании  $\mathcal{F}_{j \leftarrow i}$ ; а именно вычислим  $2 \times 2$ -матрицу  $a_{123}$  в явном виде. В очевидных обозначениях последняя получается из  $4 \times 4$ -матрицы следующим образом:

$$a_{123} = (0, 1) \varepsilon_1 \frac{1}{p - k_2 - k_3 - m} \varepsilon_2 \frac{1}{p - k_3 - m} \varepsilon_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Пусть  $\omega_j = k_j^0$ ,  $\hat{k}_j = \mathbf{k}_j / \omega_j$ . Кроме того, положим  $\varepsilon_j \cdot p = 0$  для  $j = 1, 2, 3$  и обозначим  $\delta_j = \hat{k}_j \times \varepsilon_j$ . Это единичный вектор, поскольку  $\hat{k}_j \cdot \varepsilon_j = 0$ . Тогда можно написать

$$\begin{aligned} (0, 1) \varepsilon_1 \frac{1}{p - k_2 - k_3 - m} &= (0, 1) \varepsilon_1 \frac{k_1 - p + m}{(k_1 - p)^2 - m^2} = - (0, 1) \frac{\varepsilon_1 k_1}{2m\omega_1} = \\ &= - \frac{1}{2m\omega_1} (\boldsymbol{\sigma} \cdot \varepsilon_1, 0) \begin{pmatrix} \omega_1 & -\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{k}_1 \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{k}_1 & -\omega_1 \end{pmatrix} = \\ &= - \frac{1}{2m} (\boldsymbol{\sigma} \cdot \varepsilon_1, i\boldsymbol{\sigma} \cdot \delta_1). \end{aligned}$$

Аналогично

$$\frac{1}{p - k_3 - m} \varepsilon_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = - \frac{1}{2m} \begin{pmatrix} i\boldsymbol{\sigma} \cdot \delta_3 \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \varepsilon_3 \end{pmatrix}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} a_{123} &= \frac{1}{4m^2} (\boldsymbol{\sigma} \cdot \varepsilon_1, i\boldsymbol{\sigma} \cdot \delta_1) \begin{pmatrix} 0 & -\boldsymbol{\sigma} \cdot \varepsilon_2 \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \varepsilon_2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i\boldsymbol{\sigma} \cdot \delta_3 \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \varepsilon_3 \end{pmatrix} = \\ &= - \frac{1}{4m^2} (\boldsymbol{\sigma} \cdot \varepsilon_1 \boldsymbol{\sigma} \cdot \varepsilon_2 \boldsymbol{\sigma} \cdot \varepsilon_3 + \boldsymbol{\sigma} \cdot \delta_1 \boldsymbol{\sigma} \cdot \varepsilon_2 \boldsymbol{\sigma} \cdot \delta_3). \end{aligned}$$

Таким образом, искомая комбинация  $\sum_{\text{Перест.}} a_{123}$  имеет вид  $\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{V}$ . Действительно, след этой матрицы равен нулю, поскольку он пропорционален величине

$$\sum_{\text{Перест}} [(\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \boldsymbol{\varepsilon}_3) + (\boldsymbol{\delta}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \boldsymbol{\delta}_3)] = 0.$$

Напомним, что  $\text{Sp } \sigma_i \sigma_j \sigma_k = 2i\varepsilon_{ijk}$ . Итак, мы имеем  $\sum_{\text{Перест}} a_{123} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{V}$ ,

где

$$\mathbf{V} = - \frac{1}{2m^2} \sum_{\text{Цикл.}} [\boldsymbol{\varepsilon}_1 (\boldsymbol{\varepsilon}_2 \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_3 - \boldsymbol{\delta}_2 \cdot \boldsymbol{\delta}_3) + \boldsymbol{\delta}_1 (\boldsymbol{\varepsilon}_3 \cdot \boldsymbol{\delta}_2 + \boldsymbol{\varepsilon}_2 \cdot \boldsymbol{\delta}_3)]. \quad (5.133)$$



Очевидно, что время жизни ортопозитрония не зависит от состояния его поляризации. Однако угловое распределение, когда мы измеряем поляризации фотонов, зависит от состояния начальной поляризации. Ограничимся здесь определением полной скорости распада, которую в случае неполяризованного ортопозитрония можно вычислить путем усреднения по трем состояниям спина. Таким образом,

$$\begin{aligned} \tau_{\text{триплет}}^{-1} = & \frac{1}{6} \int \frac{d^3 k_1 d^3 k_2 d^3 k_3}{8\omega_1 \omega_2 \omega_3 (2\pi)^9} (2\pi)^4 \delta \left( \sum \omega_j - 2m \right) \delta^3 \left( \sum \mathbf{k}_j \right) \times \\ & \times \frac{e^6}{\pi a^3} \sum_{\text{Поляризации}} \frac{1}{3} (|V_+|^2 + |V_0|^2 + |V_-|^2). \end{aligned} \quad (5.134)$$

фотона

Здесь мы учли множитель  $i\sigma_2$ , входящий явно в формулу (5.132). Например, амплитуда распада состояния  $|J = 1, J_z = 1\rangle = |1/2, 1/2\rangle$  пропорциональна матричному элементу  $\chi_{1/2}^T i\sigma_2 \sigma \cdot \mathbf{V} \chi_{1/2} = V_1 + iV_2 \equiv V_+$ , а для состояния  $|J = 1, J_z = 0\rangle = 1/\sqrt{2} |1/2, -1/2\rangle + 1/\sqrt{2} |-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle$  соответствующая амплитуда включает величину

$$\frac{1}{\sqrt{2}} (\chi_{-1/2}^T i\sigma_2 \sigma \cdot \mathbf{V} \chi_{1/2} + \chi_{1/2}^T i\sigma_2 \sigma \cdot \mathbf{V} \chi_{-1/2}) = -\sqrt{2} V_3 \equiv V_0.$$

Наконец, для состояния  $|J = 1, J_z = -1\rangle$  амплитуда содержит величину  $V_- = -V_1 + iV_2$ . Следовательно,

$$\frac{1}{3} (|V_+|^2 + |V_0|^2 + |V_-|^2) = \frac{2}{3} (V_1^2 + V_2^2 + V_3^2) = \frac{2}{3} \mathbf{V}^2.$$

Чтобы завершить вычисление, удобно воспользоваться комплексными векторами поляризации, записываемыми в виде  $\mathbf{e}^\pm = \mathbf{e} \pm i\delta$  и удовлетворяющими условиям

$$\begin{aligned} \mathbf{e}^{\pm 2} &= 0, & \mathbf{e}^+ \cdot \mathbf{e}^- &= 2, \\ \mathbf{e}_1^\pm \cdot \mathbf{e}_2^\pm &= \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 - \delta_1 \cdot \delta_2 \pm i(\mathbf{e}_1 \cdot \delta_2 + \mathbf{e}_2 \cdot \delta_1). \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \mathbf{V} &= -\frac{1}{4m^2} \sum_{\text{Цикл}} \mathbf{e}_1^+ (\mathbf{e}_2^- \cdot \mathbf{e}_3^-) + \mathbf{e}_1^- (\mathbf{e}_2^+ \cdot \mathbf{e}_3^+), \\ \frac{2}{3} \mathbf{V}^2 &= \frac{1}{12m^4} \text{Re} \sum_{\text{Цикл}} \{ 2|\mathbf{e}_2^+ \cdot \mathbf{e}_3^+|^2 + 2(\mathbf{e}_1^+ \cdot \mathbf{e}_2^+) (\mathbf{e}_2^- \cdot \mathbf{e}_3^-) (\mathbf{e}_3^- \cdot \mathbf{e}_1^-) + \\ &+ [(\mathbf{e}_1^+ \cdot \mathbf{e}_2^-) (\mathbf{e}_2^- \cdot \mathbf{e}_3^-) (\mathbf{e}_3^- \cdot \mathbf{e}_1^-) + \text{Компл. сопр.}] \} \end{aligned}$$

Просуммируем теперь по поляризациям фотонов, выбирая для каждого фотона два ортогональных базисных состояния а) и б), в которых  $\mathbf{e}$  направлено вдоль нормали к плоскости реакции и

вдоль  $\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{n}$ , (см. рис. 5.6, б):

$$\begin{aligned} \text{а) } \boldsymbol{\varepsilon} &= \mathbf{n}, & \boldsymbol{\delta} &= \hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{n}, & \boldsymbol{\varepsilon}^+ &= \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{n} + i\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{n}, & \boldsymbol{\varepsilon}^- &= \boldsymbol{\alpha}^* = \mathbf{n} - i\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{n}; \\ \text{б) } \boldsymbol{\varepsilon} &= \hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{n}, & \boldsymbol{\delta} &= -\mathbf{n}, & \boldsymbol{\varepsilon}^+ &= -i\boldsymbol{\alpha}, & \boldsymbol{\varepsilon}^- &= i\boldsymbol{\alpha}^*. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\sum_{\text{Поляризации фотонов}} \frac{2}{3} \mathbf{V}^2 = \frac{4}{3m^4} \sum_{\text{Цикл}} |\boldsymbol{\alpha}_2 \cdot \boldsymbol{\alpha}_3|^2.$$

В сумму по поляризациям фотонов дает вклад лишь первый член в выражении для  $\mathbf{V}$ :

$$\boldsymbol{\alpha}_2 \cdot \boldsymbol{\alpha}_3 = (\mathbf{n} + i\hat{\mathbf{k}}_2 \times \mathbf{n}) \cdot (\mathbf{n} + i\hat{\mathbf{k}}_3 \times \mathbf{n}) = 1 - \cos \theta_{23},$$

где  $\cos \theta_{23} = k_2 \hat{\mathbf{k}}_3$ . Подставляя в (5.134) окончательное выражение

$$\frac{1}{3} (|V_+|^2 + |V_0|^2 + |V_-|^2) = \frac{2}{3} \mathbf{V}^2 = \frac{4}{3m^4} \sum_{\text{Цикл}} (1 - \cos \theta_{23})^2, \quad (5.135)$$

получаем

$$\begin{aligned} \tau_{\text{трипл.}}^{-1} &= \frac{\alpha^3 m^3 (4\pi)^3 \alpha^3}{8\pi} \frac{4}{m^4} \frac{1}{3} \frac{1}{6} \frac{1}{(2\pi)^5} \int \frac{d^3 k_1 d^3 k_2 d^3 k_3}{8\omega_1 \omega_2 \omega_3} \delta^3 \left( \sum \mathbf{k}_j \right) \delta \left( \sum \omega_j - 2m \right) \times \\ &\quad \times \sum_{\text{Цикл}} (1 - \cos \theta_{23})^2. \end{aligned}$$

Здесь каждый член суммы по циклическим перестановкам дает одинаковые вклады. Следовательно,

$$\begin{aligned} \tau_{\text{трипле}}^{-1} &= \frac{\alpha^6}{6\pi m} \iint_D d\omega_1 d\omega_2 (1 - \cos \theta_{12})^2, \\ 1 - \cos \theta_{12} &= 2m \frac{\omega_1 + \omega_2 - m}{\omega_1 \omega_2}, \end{aligned} \quad (5.136)$$

причем областью интегрирования является треугольник Мандельштама  $D$ :  $\omega_1 + \omega_2 \geq m$ ,  $0 \leq \omega_1, \omega_2 \leq m$ .

Запишем выражения

$$\tau_{\text{трипле}}^{-1} = \frac{2\alpha^6}{3\pi} mA, \quad A = \int_0^1 dx \int_{1-x}^1 dy \frac{(x+y-1)^2}{x^2 y^2}. \quad (5.137)$$

Вычисляя интеграл  $A$ , получаем

$$A = \int_0^1 \frac{dx}{x^2} [x(1-x) + x + 2(1-x) \ln(1-x)] = -3 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Сумма  $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$  равна  $\pi^2/6$ , так что  $A = (\pi^2 - 9)/3$ , и мы получаем окончательный результат, о котором уже упоминалось в гл. 3:

$$\tau_{\text{триплет}}^{-1} = m \frac{2\alpha^6}{9\pi} (\pi^2 - 9) \quad (5.138)$$

Из приведенных выше выражений нетрудно получить энергетический спектр испущенных фотонов.

#### 5.2.4. Тормозное излучение

В гл. 1 приведено классическое выражение для интенсивности излучения фотонов, когда скорость заряженной частицы резко изменяется. Мы рассмотрим здесь этот вопрос более подробно на примере кулоновского рассеяния на фиксированных ядрах (с зарядом  $-Ze$ ), рассмотренного в гл. 2. В случае когда испускается один фотон, матричный элемент определяется формулой (5.87). В предположении, что

$$\frac{Z\alpha}{v} \ll 1, \quad (5.139)$$

где  $v$  — скорость падающего электрона, мы проведем разложение как по  $Ze$ , так и по  $e$  и удержим только вклад главного члена. В эвристическом подходе внешнее поле учитывается с помощью замены свободных спиноров на решения уравнения Дирака в присутствии внешнего поля  $A^{\text{внеш}}$ , так что

$$A_0^{\text{внеш}} = -\frac{Ze}{4\pi|x|}, \quad A^{\text{внеш}} = 0.$$

Пусть функции  $\psi^{\text{внеш}}$  являются решениями уравнения

$$(i\partial - eA^{\text{внеш}} - m)\psi^{\text{внеш}}(x) = 0$$

с соответствующими граничными условиями. Напишем амплитуду излучения

$$S_{f \leftarrow i} = -ie \int d^4x e^{ik \cdot x} \bar{\psi}_{\text{out}}^{\text{внеш}}(x) \varepsilon \psi_{\text{in}}^{\text{внеш}}(x) \quad (5.140)$$

при условии, что  $k^2 = 0$ ,  $\varepsilon^2 = -1$ ,  $\varepsilon k = 0$ . Падающий электрон характеризуется асимптотически своим импульсом  $p_i$  и поляризацией  $\alpha$ , а выходящий электрон — импульсом  $p_f$  и поляризацией  $\beta$ . В гл. 2 показано, что в низшем порядке по  $A^{\text{внеш}}$  справедливы следующие выражения:

$$\psi_{\text{in}}^{\text{внеш}}(x) = \psi_{\text{in}}(x) + \int d^4y S^F(x-y) eA^{\text{внеш}}(y) \psi_{\text{in}}(y) + \dots, \quad (5.141)$$

$$\bar{\psi}_{\text{out}}^{\text{внеш}}(x) = \bar{\psi}_{\text{out}}(x) + \int d^4y \bar{\psi}_{\text{out}}(y) eA^{\text{внеш}}(y) S^F(y-x) + \dots$$

Здесь  $\psi_{\text{in}}$ ,  $\bar{\psi}_{\text{out}}$  — соответствующие решения свободного уравнения Дирака

$$\begin{aligned}\psi_{\text{in}}(x) &= e^{-ip_i \cdot x} u(p_i, \alpha), \\ \bar{\psi}_{\text{out}}(x) &= e^{ip_f \cdot x} \bar{u}(p_f, \beta),\end{aligned}\quad (5.142)$$

где  $p_i^2 = p_f^2 = m^2$ . Подставляя (5.141) в (5.140), замечаем, что вклад, пропорциональный интегралу  $\int d^4x e^{ik \cdot x} \bar{\psi}_{\text{out}}(x) \varepsilon \psi_{\text{in}}(x)$ , обращается в нуль при  $k^2 = 0$ . Следовательно, в низшем порядке

$$\begin{aligned}S_{f \leftarrow i} &= -ie^2 \int d^4x d^4y [e^{ik \cdot x} \bar{\psi}_{\text{out}}(x) \varepsilon S^F(x-y) A^{\text{внеш}}(y) \psi_{\text{in}}(y) + \\ &+ e^{ik \cdot y} \bar{\psi}_{\text{out}}(x) A^{\text{внеш}}(x) S^F(x-y) \varepsilon \psi_{\text{in}}(y)].\end{aligned}\quad (5.143)$$

Отметим аналогию с амплитудой комптоновского рассеяния, в которую внешний потенциал  $A^{\text{внеш}}(x)$  подставлен вместо волновой функции свободного фотона  $e^{-ik \cdot x} \varepsilon(k)$ . Используя решения (5.142) и преобразование Фурье потенциала

$$A_0^{\text{внеш}}(x) = -\frac{Ze}{4\pi|x|} = -Ze \int \frac{d^4q}{(2\pi)^3} \delta(q^0) e^{-iq \cdot x} \frac{1}{|\mathbf{q}|^2}, \quad (5.144)$$

находим

$$\begin{aligned}S_{f \leftarrow i} &= \frac{iZe^3}{|\mathbf{p}_f + \mathbf{k} - \mathbf{p}_i|^2} 2\pi\delta(p_i^0 - p_f^0 - k^0) \times \\ &\times \bar{u}(p_f, \beta) \left[ \varepsilon \frac{1}{\not{p}_f + \not{k} - m} \gamma^0 + \gamma^0 \frac{1}{\not{p}_i - \not{k}_i - m} \varepsilon \right] u(p_i, \alpha).\end{aligned}\quad (5.145)$$

Это выражение удовлетворяет лишь закону сохранения энергии, поскольку инвариантность по отношению к пространственным трансляциям нарушается из-за присутствия силового центра.

После некоторых преобразований сечение можно записать в виде

$$d\sigma = \frac{mZ^2e^6}{p_i^0 |\mathbf{v}_i|} \int 2\pi\delta(p_f^0 + k^0 - p_i^0) \left| \frac{[\ ]}{|\mathbf{p}_f + \mathbf{k} - \mathbf{p}_i|^2} \right|^2 \frac{m d^3p_f d^3k}{2p_f^0 k^0 (2\pi)^6}, \quad (5.146)$$

где  $p_i^0 |\mathbf{v}_i|/m = |\mathbf{p}_i|/m$  — фактор потока, а в квадратных скобках стоит такое же выражение, как и в формуле (5.145).

Сечение излучения для неполяризованных частиц получаем, суммируя выражения (5.146) по  $\varepsilon$  и  $\beta$  и усредняя результат по  $\alpha$ . Чтобы упростить обозначения, введем переданный импульс  $\mathbf{q} = (\mathbf{p}_f + \mathbf{k} - \mathbf{p}_i)$ . Пусть далее  $\omega = k^0$ , а телесные углы  $\Omega_\gamma$  и  $\Omega_e$  отвечают выходящему фотону и электрону соответственно. Та-

ким образом,

$$d\sigma = \frac{Z^2 \alpha^3}{\pi^2} \frac{m^2 |\mathbf{p}_f|}{|\mathbf{p}_i| |\mathbf{q}|^4} F \omega d\omega d\Omega_\nu d\Omega_e, \quad (5.147)$$

$$F = \frac{1}{2} \sum_{\varepsilon} \text{Sp} \left[ \left( \varepsilon \frac{\mathbf{p}_f + \mathbf{k} + m}{2p_f \cdot k} \gamma^0 - \gamma^0 \frac{\mathbf{p}_i - \mathbf{k} + m}{2p_i \cdot k} \varepsilon \right) \left( \frac{\mathbf{p}_i + m}{2m} \right) \times \right. \\ \left. \times \left( \gamma^0 \frac{\mathbf{p}_f + \mathbf{k} + m}{2p_f \cdot k} \varepsilon - \varepsilon \frac{\mathbf{p}_i - \mathbf{k} + m}{2p_i \cdot k} \gamma^0 \right) \left( \frac{\mathbf{p}_f + m}{2m} \right) \right]. \quad (5.148)$$

Величину  $F$  можно разложить на три составляющие:

$$F = \frac{1}{2^5 m^2} (F_1 + F_2 + F_3), \\ F_1 = \frac{1}{(p_f \cdot k)^2} \sum_{\varepsilon} \text{Sp} [\varepsilon (\mathbf{p}_f + \mathbf{k} + m) \gamma^0 (\mathbf{p}_i + m) \gamma^0 (\mathbf{p}_f + \mathbf{k} + m) \varepsilon (\mathbf{p}_f + m)], \\ F_2 = F_1 (p_i \leftrightarrow -p_f), \\ F_3 = -\frac{1}{(p_f \cdot k)(p_i \cdot k)} \text{Sp} \{ [\gamma^0 (\mathbf{p}_i - \mathbf{k} + m) \varepsilon (\mathbf{p}_i + m) \gamma^0 (\mathbf{p}_f + \mathbf{k} + m) \times \\ \times \varepsilon (\mathbf{p}_f + m)] + (p_i \leftrightarrow -p_f) \}.$$

Выбирая  $\varepsilon^0 = 0$ , находим

$$F_1 = \frac{8}{(p_f \cdot k)^2} \sum_{\varepsilon} [2(\varepsilon \cdot p_f)^2 (m^2 + 2p_i^0 p_f^0 + 2p_i^0 \omega - p_i \cdot p_f - p_i \cdot k) + \\ + 2\varepsilon \cdot p_f \varepsilon \cdot p_i k \cdot p_f + 2p_i^0 \omega k \cdot p_f - p_i \cdot k p_f \cdot k], \\ F_2 = F_1 (p_i \leftrightarrow -p_f), \\ F_3 = \frac{16}{(p_f \cdot k)(p_i \cdot k)} \sum_{\varepsilon} [\varepsilon \cdot p_i \varepsilon \cdot p_f (p_i \cdot k - p_f \cdot k + 2p_i \cdot p_f - 4p_i^0 p_f^0 - 2m^2) + \\ + (\varepsilon \cdot p_f)^2 k \cdot p_i - (\varepsilon \cdot p_i)^2 k \cdot p_f + p_i \cdot k p_f \cdot k - m^2 \omega^2 + \\ + \omega (\omega p_i \cdot p_f - p_i^0 p_f \cdot k - p_f^0 p_i \cdot k)].$$

Пусть  $\theta_f$  — угол между векторами  $\mathbf{k}$  и  $\mathbf{p}_f$ ,  $\theta_i$  — угол между  $\mathbf{k}$  и  $\mathbf{p}_i$ , а  $\varphi$  — угол между плоскостями  $(\mathbf{k}, \mathbf{p}_f)$  и  $(\mathbf{k}, \mathbf{p}_i)$ , как показано на рис. 5.7.

Суммирование по поляризациям фотона можно выполнить с помощью выражений

$$\sum_{\varepsilon} (\varepsilon \cdot p_f)^2 = |\mathbf{p}_f|^2 \sin^2 \theta_f, \quad \sum_{\varepsilon} (\varepsilon \cdot p_i)^2 = |\mathbf{p}_i|^2 \sin^2 \theta_i, \\ \sum_{\varepsilon} (\varepsilon \cdot p_f) (\varepsilon \cdot p_i) = |\mathbf{p}_f| |\mathbf{p}_i| \sin \theta_f \sin \theta_i \cos \varphi.$$

В окончательной формуле используем обозначения

$$p_f^0 = E_f, \quad p_i^0 = E_i, \quad |\mathbf{p}_f| = p_f, \quad |\mathbf{p}_i| = p_i, \quad |\mathbf{q}|^2 = q^2. \quad (5.149)$$

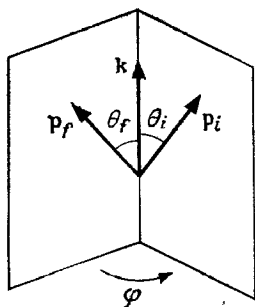


РИС. 5.7. Кинематика процесса тормозного излучения.

Теперь можно записать дифференциальное сечение, которое было найдено Бете и Гайтлером в 1934 г.:

$$\begin{aligned}
 d\sigma = & \frac{Z^2 \alpha^3}{(2\pi)^2} \frac{p_f}{p_i q^4} \frac{d\omega}{\omega} d\Omega_\gamma d\Omega_e \times \\
 & \times \left[ \frac{p_i^2 \sin^2 \theta_f}{(E_f - p_f \cos \theta_f)^2} (4E_i^2 - q^2) + \frac{p_i^2 \sin^2 \theta_i}{(E_i - p_i \cos \theta_i)^2} (4E_f^2 - q^2) + \right. \\
 & + 2\omega^2 \frac{p_i^2 \sin^2 \theta_i + p_f^2 \sin^2 \theta_f}{(E_f - p_f \cos \theta_f)(E_i - p_i \cos \theta_i)} - 2 \frac{p_f p_i \sin \theta_i \sin \theta_f \cos \varphi}{(E_f - p_f \cos \theta_f)(E_i - p_i \cos \theta_i)} \times \\
 & \left. \times (4E_i E_f - q^2 + 2\omega^2) \right]. \quad (5.150)
 \end{aligned}$$

Этот результат имеет довольно сложную структуру, проявляющую уже знакомое нам катастрофическое (!) поведение при  $\omega \rightarrow 0$ .

В пределе  $\omega \rightarrow 0$  выражения (5.147) и (5.148) можно приближенно записать в виде

$$\frac{d\sigma}{d\Omega_e} \underset{k \rightarrow 0}{\approx} \left( \frac{d\sigma}{d\Omega_e} \right)_{\text{упр}} e^2 \frac{d^3 k}{2\omega (2\pi)^3} \sum_e \left( \frac{\varepsilon \cdot p_f}{k \cdot p_f} - \frac{\varepsilon \cdot p_i}{k \cdot p_i} \right)^2. \quad (5.151)$$

Это выражение нам известно из гл. 1, в которой приведены также результаты интегрирования сечений излучения.

На этом примере видно, что при малых  $k$  нам практически не удастся отличить упругое сечение, включающее поправку порядка  $e^2$ , от неупругого сечения, рассматриваемого в том же порядке. Следовательно можно ожидать лишь, что сумма этих двух выражений имеет в этом порядке конечный предел. В гл. 7 мы вернемся к рассмотрению этого вопроса.

### 5.3. УНИТАРНОСТЬ И ПРИЧИННОСТЬ

Редукционные формулы дают соотношения между измеряемыми амплитудами рассеяния на массовой поверхности и полными функциями Грина. Большинство результатов, которые будут рассмотрены в остальной части настоящей книги, связаны с вычислением этих функций в рамках локальной релятивистской динамики, описываемой лангранжианом. Тем не менее важно подчеркнуть и ясно сформулировать основные физические требования,

такие, как унитарность и локальность, которые являются общими для различных динамических систем и, возможно, имеют более глубокий смысл, чем это представляется на сегодняшний день. Одним из основных результатов такого анализа является доказательство существования определенной аналитической структуры амплитуд, приводящей к дисперсионным соотношениям по одной или нескольким переменным, дополненным правилами, приводящими к правильным предельным значениям на различных разрезах.<sup>1)</sup> Однако мы не будем подробно излагать все эти вопросы, а лишь покажем, сколь важную роль они играют, и приведем некоторые значительные результаты. В следующей главе будет показано, как общие аналитические свойства сказываются на выражениях, получаемых в рамках теории возмущений.

### 5.3.1. Унитарность и разложение по парциальным волнам

Унитарность  $S$ -матрицы отражает фундаментальный принцип сохранения вероятности. Даже если нам приходится использовать в определенных случаях такой искусственный механизм, как индефинитная метрика в гильбертовом пространстве, физические величины всегда связаны с состояниями с положительной нормой, сохраняющейся в течение временной эволюции. Формальные построения не должны затенять это важное обстоятельство, находящее свое отражение в ряде соотношений, прототипом которых является оптическая теорема Бора, Паули и Плачека.

Рассмотрим поэтому сначала ограничения, накладываемые условием унитарности  $S$ -матрицы, которое с учетом (5.6) можно записать в виде

$$S^\dagger S = I = I + i(T - T^\dagger) + T^\dagger T. \quad (5.152)$$

Выделяя  $\delta$ -функцию, выражающую закон сохранения импульса:

$$\langle f | T | i \rangle = (2\pi)^4 \delta^4(P_f - P_i) \mathcal{F}_{fi}, \quad (5.153)$$

получаем нелинейное соотношение между амплитудами:

$$(\mathcal{F}_{fi} - \mathcal{F}_{if}^*) = i \sum_n (2\pi)^4 \delta^4(P_n - P_i) \mathcal{F}_{nf}^* \mathcal{F}_{ni}, \quad (5.154)$$

в котором сумма берется по всем возможным промежуточным состояниям  $|n\rangle$ , связанным с  $|i\rangle$  и  $|f\rangle$ . В реальных случаях процесс рассеяния начинается с взаимодействия двух частиц. Поэтому рассмотрим сначала двухчастичное упругое рассеяние. Обобщая данное определение, мы можем предположить, что частицы обмениваются спином или внутренними квантовыми числами при условии, что выполняются соответствующие законы сохранения. При

<sup>1)</sup> См. примечание редактора перевода в конце настоящей главы. — *Прим. ред.*

этом частицы должны оставаться внутри одного и того же мультиплета, отвечающего рассматриваемой симметрии (см. гл. 11). Для простоты мы не рассматриваем тождественные частицы. Исследуем сначала в соотношении (5.154) состояние  $|f\rangle = |i\rangle$ . Это соответствует рассеянию вперед, когда спины и внутренние квантовые числа в исходной и в конечной конфигурациях совпадают. Мы предполагаем также, что в системе отсутствуют дальнедействующие силы. При этом левая часть соотношения (5.154) запишется в виде  $2i \operatorname{Im} \mathcal{F}_{ii}$ , а правая его часть связана с полным сечением  $\sigma_{\text{полн}}(i)$  с точностью до фактора потока, определяемого начальным состоянием. Для конкретности обозначим через  $(m_a, S_a)$  и  $(m_b, S_b)$  массы и спины начальных частиц. В случае состояния  $i$ , характеризуемого определенным спином и квадратом полной энергии  $s$  в системе центра масс, с помощью формулы (5.13) получаем следующее выражение для полного сечения рассеяния вперед:

$$\sigma_{\text{полн}}(i) = \frac{1}{2\lambda^{1/2}(s, m_a^2, m_b^2)} \sum_n (2\pi)^4 \delta^4(P_n - P_i) \mathcal{F}_{ni}^* \mathcal{F}_{ni}, \quad (5.155)$$

где

$$\lambda(x_1, x_2, x_3) \equiv (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) - 2x_1x_2 - 2x_2x_3 - 2x_3x_1, \quad (5.155a)$$

и использована нормировка состояний на инвариантный элемент объема фазового пространства  $d^3p/2E(2\pi)^3$ . Общий трехмерный импульс  $|\mathbf{p}|$  частиц  $A$  и  $B$  в системе центра масс связан с величиной  $s$  соотношением  $4s \mathbf{p}^2 = \lambda(s, m_a^2, m_b^2)$ . Используя (5.155), приходим к оптической теореме, имеющей вид

$$\operatorname{Im} \mathcal{F}_{ii} = \lambda^{1/2}(s, m_a^2, m_b^2) \sigma_{\text{полн}}(i). \quad (5.156)$$

В выражение для сечения упругого рассеяния вперед входит амплитуда  $\mathcal{F}_{ii}$ . Предположим, что поляризации частиц таковы, что начальное состояние инвариантно относительно вращений вокруг начального импульса. Тогда сечение упругого рассеяния можно проинтегрировать по азимутальному углу и выразить через квадрат переданного импульса  $t$ , а не косинус угла рассеяния. Начальные и конечные импульсы  $(p_a, p_b)$  и  $(p'_a, p'_b)$  в процессах рассеяния  $A+B \rightarrow A+B$  удовлетворяют закону сохранения энергии-импульса  $p_a + p_b = p'_a + p'_b$ . Определим переменные Мандельштама с помощью соотношений:

$$\begin{aligned} s &= (p_a + p_b)^2 = (p'_a + p'_b)^2, \\ t &= (p_a - p'_a)^2 = (p_b - p'_b)^2, & s + t + u &= 2(m_a^2 + m_b^2), \\ u &= (p_a - p'_b)^2 = (p_b - p'_a)^2. \end{aligned} \quad (5.157)$$

Дифференциальное сечение упругого рассеяния можно теперь записать следующим образом:

$$\frac{d\sigma_{\text{упр}}}{dt}(s, t) = \frac{|\mathcal{F}(s, t)|^2}{16\pi\lambda(s, m_a^2, m_b^2)}. \quad (5.158)$$



Рассеянию вперед соответствует  $t=0$ ;  $\mathcal{F}(s, 0)$  — амплитуда, которую мы обозначили выше через  $\mathcal{F}_{ii}$ . Следовательно,

$$\frac{d\sigma_{\text{упр}}}{dt}(s, 0) = \frac{1}{16\pi} \left[ \frac{(\text{Re } \mathcal{F}_{ii})^2}{\lambda(s, m_a^2, m_b^2)} + \sigma_{\text{полн}}^2(i) \right] > \frac{\sigma_{\text{полн}}^2(i)}{16\pi}. \quad (5.159)$$

В столкновениях при очень высоких энергиях мнимая часть амплитуды рассеяния вперед преобладает над вещественной частью. В этом случае в предположении, что полное сечение известно, формулу (5.159) можно использовать для нормировки дифференциального сечения упругого рассеяния.

Из условия унитарности можно извлечь и другие следствия, если удастся хотя бы частично диагонализировать оператор  $\mathcal{F}$ . Для двухчастичного рассеяния это можно сделать, используя в качестве базиса собственные состояния полного углового момента.

Для выполнения соответствующего проектирования лучше всего подходит спиральный формализм Джакоба и Вика. Обозначим через  $\lambda_a$  и  $\lambda_b$  ( $\lambda'_a$ ,  $\lambda'_b$ ) спиральности начальных (конечных) частиц в системе центра масс, где  $\mathbf{p}_a + \mathbf{p}_b = \mathbf{p}'_a + \mathbf{p}'_b = 0$ . Предположим, что для двухчастичного состояния в этой системе  $\theta$  и  $\varphi$  являются полярными и азимутальными углами относительного трехмерного импульса  $\mathbf{p}$  по отношению к фиксированным осям координат. Рассмотрим  $R_{\theta, \varphi}$  — произведение вращения на угол  $\theta$  вокруг оси  $\hat{y}$  и вращение на угол  $\varphi$  вокруг оси  $\hat{z}$ . Это вращение переводит единичный вектор  $\hat{z}$  в вектор  $\mathbf{p}/|\mathbf{p}|$ . Состояние с полным угловым моментом  $J$  и проекцией  $M$  на ось  $\hat{z}$  имеет вид:

$$|J, M; \lambda_a, \lambda_b\rangle = \left( \frac{2J+1}{4\pi} \right)^{1/2} \int d\varphi \sin \theta d\theta \mathcal{D}_{\lambda_a - \lambda_b, M}^J(R_{\theta, \varphi}^{-1}) \times \\ \times |p_a, \lambda_a; p_b, \lambda_b\rangle. \quad (5.160)$$

Спиральность определяется как проекция спина на трехмерный импульс. Тем самым обобщается рассмотрение дираковских частиц и охватывается случай частиц нулевой массы.

Напомним, что  $\mathcal{D}$  функции Вигнера получают с помощью представлений группы  $SU(2)$  унитарных унимодулярных  $2 \times 2$ -матриц. Это осуществляется следующим образом. Любое вращение  $R$ , действующее на произвольный вектор  $\mathbf{p}$ , может быть представлено парой матриц  $U$ ,  $-U$  с помощью формулы  $U\sigma \cdot \mathbf{p}U^\dagger = \sigma(R\mathbf{p})$ . В более общем случае произвольную комплексную  $2 \times 2$ -матрицу  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  можно рассматривать как линейный оператор, действующий в пространстве однородных полиномов от двух переменных  $u_{1/2}$ ,  $u_{-1/2}$ . Чтобы получить  $\mathcal{D}_{m, m'}^j$ , распространим это представление на полиномы степени  $2j$  с базисом  $u_{jm} = [(j+m)! (j-m)!]^{-1/2} u_{1/2}^{j+m} u_{-1/2}^{j-m}$ . Если

$$\begin{aligned} u'_{1/2} &= au_{1/2} + bu_{-1/2}, \\ u'_{-1/2} &= cu_{1/2} + du_{-1/2}, \\ u'_{j, m} &= \mathcal{D}_{m, m'}^j(A) u_{j, m'} \end{aligned}$$

то можно записать

$$\mathcal{D}_{m, m'}^j(A) = [(j+m)!(j-m)!(j+m')!(j-m')!]^{-1/2} \times \\ \times \sum_{\substack{n_1+n_2=j+m, n_3+n_4=j-m \\ n_1+n_3=j+m', n_2+n_4=j-m'}} \frac{a^{n_1}}{n_1!} \frac{b^{n_2}}{n_2!} \frac{c^{n_3}}{n_3!} \frac{d^{n_4}}{n_4!}. \quad (5.161a)$$

Эти матрицы имеют следующие свойства:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^j(A_1 A_2) &= \mathcal{D}^j(A_1) \mathcal{D}^j(A_2), & \mathcal{D}^j(A^T) &= \mathcal{D}^j(A)^T, \\ \mathcal{D}^j(A^*) &= \mathcal{D}^j(A)^*, & \mathcal{D}_{mm'}^j(\lambda I) &= \lambda^{2j} \delta_{m, m'}, \\ \mathcal{D}_{m, m'}^j(e^{i\sigma_x \theta/2}) &= e^{im\theta} \delta_{m, m'}. \end{aligned} \quad (5.161.6)$$

В частности, если матрица  $A$  унитарна, то унитарно и представление  $\mathcal{D}^j(A)$ . В терминах группы  $SU(2)$  вращение  $R_{\theta, \varphi}$  в формуле (5.160) связано с его  $2 \times 2$ -представлением следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{\lambda_a - \lambda_b, M}^j(R_{\theta, \varphi}^{-1}) &= \mathcal{D}_{M, \lambda_a - \lambda_b}^{j*}(\varphi, \theta, 0) = e^{iM\varphi} d_{M, \lambda_a - \lambda_b}^j(\theta), \\ d_{m_1, m_2}^j(\theta) &= (-1)^{m_1 - m_2} d_{-m_1, -m_2}^j(\theta) = (-1)^{m_1 - m_2} d_{m_2, m_1}^j(\theta). \end{aligned} \quad (5.161, в)$$

Фазы можно выбрать так, что, если  $\eta_a$  и  $\eta_b$  обозначают внутренние четности частиц  $A$  и  $B$ , законы преобразования этих состояний при отражениях пространства  $\mathcal{P}$  и обращении времени  $\mathcal{T}$  запишутся в виде<sup>1)</sup>

$$\begin{aligned} \mathcal{P} |J, M; \lambda_a, \lambda_b\rangle &= \eta_a \eta_b (-1)^{J - S_a - S_b} |J, M; -\lambda_a, -\lambda_b\rangle, \\ \mathcal{T} |J, M; \lambda_a, \lambda_b\rangle &= (-1)^{J - M} |J, -M; \lambda_a, \lambda_b\rangle. \end{aligned} \quad (5.162)$$

Эти соотношения отражают тот факт, что спиральность является нечетной функцией при  $\mathcal{P}$ -отражении и четной — по отношению к обращению времени.

Используя теорему Вигнера—Эккарта и учитывая инвариантность относительно вращений, матричный элемент  $\mathcal{F}_{fi}$  можно записать в виде следующего разложения:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{fi} &= \langle p'_a, \lambda'_a; p'_b, \lambda'_b | \mathcal{F} | p_a, \lambda_a; p_b, \lambda_b \rangle = \\ &= 16\pi \sum_J (2J+1) \mathcal{F}_{\lambda'_a, \lambda'_b; \lambda_a, \lambda_b}^J(s) \mathcal{D}_{\lambda_a - \lambda_b, \lambda'_a - \lambda'_b}^{j*}(\varphi, \theta, 0). \end{aligned} \quad (5.163)$$

Кинематический множитель, возникающий при интегрировании по фазовому объему:

$$\int \frac{d^3 p_a d^3 p_b}{(2\pi)^3 (2E_a) (2\pi)^3 (2E_b)} (2\pi)^4 \delta^4(p_a + p_b - P) = \frac{\lambda^{1/2}(s, m_a^2, m_b^2)}{8s (2\pi)^2} d\Omega_P,$$

<sup>1)</sup> Читатель не должен путать обозначение оператора обращения времени  $\mathcal{T}$  с обозначением амплитуды рассеяния, совпадающими на протяжении этой главы.

появляется в условии унитарности, которое мы приведем ниже. В выражении (5.163) ось  $\hat{z}$  выбрана направленной вдоль начального импульса  $\mathbf{p}_a$ , а  $\theta$ ,  $\varphi$  — угловые координаты импульса  $\mathbf{p}'_a$ . Наконец, в сумме по  $J$  эта величина принимает целые или полуцелые значения, в зависимости от того, четное или нечетное число полуцелых спинов имеется в начальном или в конечном состоянии. Разложение Джакоба и Вика (5.163) легко обобщается на случай произвольного двухчастичного процесса рассеяния.

При наличии  $\mathcal{P}$ -инвариантности мы имеем

$$\mathcal{F}_{\lambda'_a, \lambda'_b; \lambda_a, \lambda_b}^J(s) = \mathcal{F}_{-\lambda'_a, -\lambda'_b; -\lambda_a, -\lambda_b}(s). \quad (5.164)$$

Аналогично, если имеется  $T$ -инвариантность, справедливо соотношение

$$\mathcal{F}_{\lambda'_a, \lambda'_b; \lambda_a, \lambda_b}^J(s) = \mathcal{F}_{\lambda_a, \lambda_b; \lambda'_a, \lambda'_b}(s), \quad (5.165)$$

выражающее симметрию матрицы рассеяния.

В случае когда полная энергия  $s^{1/2}$  ниже неупругого порога, в соотношении (5.154) вклад в сумму по промежуточным состояниям дает только начальный двухчастичный канал. В состоянии с угловым моментом  $J$  это соотношение (5.154) запишется в виде

$$\mathcal{F}^J(s) - \mathcal{F}^{J\dagger}(s) = 2i\lambda^{1/2}(s, m_a^2, m_b^2) s^{-1} \mathcal{F}^{J\dagger}(s) \mathcal{F}^J(s), \quad (5.166)$$

где  $\mathcal{F}^J(s)$  является матрицей  $(2S_a + 1)(2S_b + 1) \times (2S_a + 1)(2S_b + 1)$  в спиральном пространстве. Используя инвариантность по отношению к обращению времени, можно заменить левую часть выражения (5.166) на  $2i \operatorname{Im} \mathcal{F}^J(s)$ .

Если частицы бесспиновые, то формулы значительно упрощаются. В частности,  $\mathcal{D}_{\lambda, 0}^{J*}(\varphi, \theta, 0)$  совпадает с полиномом Лежандра  $P_J(\cos \theta)$ , а уравнение (5.166) можно решить, вводя фазы рассеяния  $\delta_J(s)$  с помощью выражения

$$\frac{2\lambda^{1/2}}{s} \mathcal{F}^J(s) = -i(e^{2i\delta_J(s)} - 1) = 2e^{i\delta_J(s)} \sin \delta_J(s). \quad (5.167)$$

Если в некотором базисе матрица  $\mathcal{F}^J(s)$  диагональна, то полученное выражение справедливо для каждого диагонального матричного элемента.

Примером такого рода является пион-нуклонное рассеяние. В этом случае две независимые амплитуды  $\mathcal{F}_{1/2, 1/2}^J$  и  $\mathcal{F}_{-1/2, 1/2}^J$  можно заменить комбинациями

$$\mathcal{F}_{\pm}^J = \mathcal{F}_{1/2, 1/2}^J \pm \mathcal{F}_{-1/2, 1/2}^J,$$

которые соответствуют рассеянию в состоянии с данной четностью, равной  $\pm (-1)^{J+1/2}$ .

Соберем вместе выражения, описывающие упругое рассеяние бесспиновых частиц. Если  $q$  — импульс в системе центра масс,  $\theta$  — угол рассеяния, а  $\delta_l$  — фаза рассеяния в  $l$ -й парциальной волне (возможно, комплексный), то справедливы следующие формулы:

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{dt} &= \frac{1}{64\pi s q^2} |\mathcal{F}|^2, \\ \mathcal{F} &= 16\pi \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \mathcal{F}_l P_l(\cos \theta), \\ \mathcal{F}_l &= \frac{s^{1/2}}{2q} e^{i\delta_l} \sin \delta_l, \\ \sigma_{\text{полн}} &= \frac{1}{2qs^{1/2}} \text{Im} \mathcal{F}(\cos \theta = 1) = \frac{8\pi}{qs^{1/2}} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \text{Im} \mathcal{F}_l, \\ |\mathcal{F}_l|^2 &\leq \frac{s^{1/2}}{2q} \text{Im} \mathcal{F}_l. \end{aligned} \tag{5.168}$$

Последнее неравенство превращается в равенство ниже неупругого порога.

### 5.3.2. Причинность и аналитичность

Общее условие, носящее макроскопический характер и состоящее в том, что события должны происходить после причин, их вызывающих, требует не только того, чтобы причины могли быть однозначно идентифицированы, но и предполагает также справедливость термодинамической концепции необратимости, т. е. свойств, не относящихся к области микроскопической физики. К счастью, конечность скорости распространения сигналов позволяет дать ослабленную формулировку этого условия, не опирающуюся на выбор привилегированной временной оси. Мы придерживаемся точки зрения, что области, разделенные пространственно-подобными интервалами, не влияют одна на другую. Иными словами, это означает, что локальные наблюдаемые, заданные в разделенных таким образом областях, коммутируют. Нам уже известно, что это можно также связать со свойствами коммутации (или антикоммутации) фундаментальных полей. Для простоты рассмотрим здесь только случай бозе-полей. В математическом смысле соответствующие свойства коммутаторов полей связаны с аналитическими свойствами их фурье-образов. Этот факт лежит в основе исследования показателя преломления света в среде, выполненного Крамерсом и Кропигом, установивших связь между дисперсией и абсорбцией. Отсюда и название «дисперсионные соотношения», применяемое для аналитических представлений амплитуд рассеяния.

Проиллюстрируем эти представления на примере. Рассмотрим упругое рассеяние частицы  $A$  с массой  $m_a$  на частице мишени  $B$  (с массой  $m_b$ ). Предполагается, что обе частицы не имеют спинов

(во избежание усложнений, связанных с техническими деталями, по существу не изменяющих выводов), но могут обладать зарядом. Следовательно, мы будем отличать частицу  $A$  от античастицы  $\bar{A}$  и используем для их совместного описания комплексное поле  $\varphi$ , рождающее  $A$  и уничтожающее  $\bar{A}$ . Пусть  $q_1$  и  $q_2$  — начальный и конечный импульсы частицы  $A$ , а  $p_1$  и  $p_2$  — начальный и конечный импульсы частицы  $B$ ; тогда связную часть амплитуды рассеяния можно записать в виде

$$S_{fi} = - \int d^4x d^4y e^{i(q_2 y - q_1 \cdot x)} (\square_y + m_a^2) (\square_x + m_a^2) \langle p_2 | T \varphi^\dagger(y) \varphi(x) | p_1 \rangle. \quad (5.169)$$

Здесь множитель  $Z^{-1/2}$  мы включили в определение поля. В случае когда  $q_1$  и  $q_2$  находятся внутри верхней половины светового конуса, в правой части выражения (5.169) хронологическое произведение операторов можно заменить запаздывающим коммутатором

$$T \varphi^\dagger(y) \varphi(x) \rightarrow \theta(y^0 - x^0) [\varphi^\dagger(y), \varphi(x)],$$

не изменяя величины  $S_{fi}$ . Справедливость этого утверждения фактически доказана при выводе редукционных формул в разд. 5.1.3. Введем источник  $j(x)$  поля  $\varphi(x)$  с помощью следующего уравнения:

$$(\square + m_a^2) \varphi(x) = j(x) \quad (5.170)$$

и для простоты предположим, что  $\varphi$  и  $j$  коммутируют при равных временах. Учитывая трансляционную инвариантность, выражение (5.169) можно записать в виде

$$S_{fi} = (2\pi)^4 \delta^4(p_2 + q_2 - p_1 - q_1) i \mathcal{F},$$

где

$$\mathcal{F} = i \int d^4z e^{iq \cdot z} \langle p_2 | \theta(z^0) \left[ j^\dagger\left(\frac{z}{2}\right), j\left(-\frac{z}{2}\right) \right] | p_1 \rangle, \quad (5.171)$$

$$q = \frac{1}{2}(q_1 + q_2).$$

Лоренц-инвариантность означает, что для частиц на массовых поверхностях  $\mathcal{F}$  зависит лишь от скалярных произведений импульсов, т. е. от двух из трех переменных Мандельштама.

Вследствие локальности запаздывающий коммутатор  $\langle p_2 | \theta(z^0) [j^\dagger(z/2), j(-z/2)] | p_1 \rangle$  обращается в нуль, если не выполняются условия  $z^2 > 0$ ,  $z_0 > 0$ . Анализ выражения (5.171) показывает, что  $\mathcal{F}$  — это аналитическая функция 4-вектора  $q$  в так называемой трубе будущего, определяемой условием, что  $\text{Im } q$  является положительным времениподобным вектором. Это следует из предположения, что матричные элементы полей являются обобщенными функциями умеренного роста (т. е. полиномиально-ограниченными). Действительно, если  $q = q_R + iq_I$ , то

экспонента в (5.171) обеспечивает обрезаящий фактор  $e^{-z \cdot q_1}$ , если как  $z$ , так и  $q_1$  — положительные времениподобные векторы.

Рассмотренный пример указывает на прямую связь между свойствами локальности релятивистских полевых теорий и аналитическими свойствами функций Грина.

Прежде чем анализировать математические следствия этого результата, напомним свойство перекрестной симметрии. Предположим, что вместо процесса  $A(q_1) + B(p_1) \rightarrow A(q_2) + B(p_2)$  мы изучали бы рассеяние античастицы  $\bar{A}$  на той же самой мишени  $B$ :  $\bar{A}(\bar{q}_1) + B(p_1) \rightarrow \bar{A}(\bar{q}_2) + B(p_2)$ . Соответствующая амплитуда  $\bar{\mathcal{F}}$  дается выражением

$$\bar{\mathcal{F}} = i \int d^4 z e^{i\bar{q} \cdot z} \langle p_2 | \theta(z^0) \left[ j\left(\frac{z}{2}\right), j^\dagger\left(-\frac{z}{2}\right) \right] | p_1 \rangle,$$

$$\bar{q} = \frac{1}{2}(\bar{q}_1 + \bar{q}_2).$$

Заменяя переменную интегрирования  $z$  на  $-z$ , это выражение можно переписать также в виде

$$\bar{\mathcal{F}} = i \int d^4 z e^{-i\bar{q} \cdot z} \langle p_2 | -\theta(-z^0) \left[ j^\dagger\left(\frac{z}{2}\right), j\left(-\frac{z}{2}\right) \right] | p_1 \rangle. \quad (5.172)$$

Эта амплитуда отличается от амплитуды  $\mathcal{F}$ , определяемой выражением (5.171), в двух отношениях. Импульс  $q = (1/2)(q_1 + q_2)$  заменен на  $-\bar{q} = (1/2)(-\bar{q}_2 - \bar{q}_1)$ , а запаздывающий коммутатор — на опережающий:

$$\langle p_2 | \theta(z^0) \left[ j^\dagger\left(\frac{z}{2}\right), j\left(-\frac{z}{2}\right) \right] | p_1 \rangle \rightarrow \langle p_2 | -\theta(-z^0) \times$$

$$\times \left[ j^\dagger\left(\frac{z}{2}\right), j\left(-\frac{z}{2}\right) \right] | p_1 \rangle.$$

Мы можем изучать амплитуды  $\mathcal{F}$  и  $\bar{\mathcal{F}}$  для произвольных значений их аргументов, вместо того чтобы рассматривать реальные физические процессы, когда  $q$  и  $\bar{q}$  принадлежат верхней полё светового конуса. Покажем, что величина

$$\mathcal{F}(q) - \bar{\mathcal{F}}(\bar{q}) \Big|_{\bar{q} = -q} = iC(q)$$

обращается в нуль в некоторой области. Эта функция является фурье-образом коммутатора:

$$C(q) = \int d^4 z e^{iz \cdot q} \langle p_2 | \left[ j^\dagger\left(\frac{z}{2}\right), j\left(-\frac{z}{2}\right) \right] | p_1 \rangle =$$

$$= (2\pi)^4 \sum_n \langle p_2 | j^\dagger(0) | n \rangle \langle n | j(0) | p_1 \rangle \delta^4\left(q + \frac{p_1 + p_2}{2} - p_n\right) -$$

$$- (2\pi)^4 \sum_n \langle p_2 | j(0) | n \rangle \langle n | j^\dagger(0) | p_1 \rangle \delta^4\left(q - \frac{p_1 + p_2}{2} + p_n\right). \quad (5.173)$$

Если вакуум представляет собой изолированную точку в спектре, что означает отсутствие безмассовых частиц, то состояния  $|n\rangle$  таковы, что в каждой из сумм выражения (5.173) существует наименьшая положительная величина  $p_n^2$  (вклад вакуума исключается гипотезой о связности). Следовательно, вне области, ограниченной двумя полами гиперboloидов, изображенными на рис. 5.8,  $C(q) = 0$ . Одна из пол соответствует массе  $M_+$ , другая — массе  $M_-$ , а их центры расположены соответственно в точках  $-(1/2)(p_1 + p_2)$  и  $(1/2)(p_1 + p_2)$ . Отсюда заключаем, что амплитуды  $\mathcal{F}(p_2, q_2; p_1, q_1)$

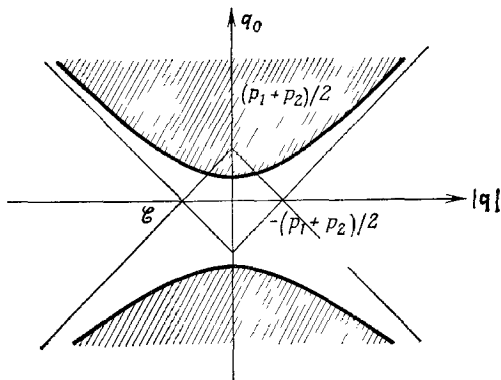


РИС. 5.8. Две полы гиперboloида, ограничивающие носитель коммутатора в импульсном пространстве. Незаштрихованная часть рисунка соответствует области совпадения, обозначаемой  $\mathcal{E}$ .

и  $\mathcal{F}(p_2, -q_1; p_1, -q_2)$  совпадают в нефизических точках, расположенных в незаштрихованной области рис. 5.8. Это и есть свойство перекрестной симметрии, которая связывает процессы, получаемые друг из друга заменой частицы в начальном (конечном) состоянии на античастицу с противоположным по знаку (а потому не физическим) 4-импульсом в конечном (начальном) состоянии. Понятие перекрестной симметрии станет содержательным, если нам удастся показать, что, отправляясь от физических значений импульсов, с помощью аналитического продолжения можно перейти в область совпадения амплитуд. Это свойство является замечательным следствием теории поля.

Пусть функция  $\overline{\mathcal{F}}(q)$  определяется выражением (5.172), в котором величина  $-\bar{q}$  заменена на  $q$ . Заметим, что  $\overline{\mathcal{F}}(q)$  аналитична в трубе прошлого, т. е. когда  $\text{Im } q$  — отрицательный времениподобный вектор.

Таким образом,  $\mathcal{F}(q)$  и  $\overline{\mathcal{F}}(q)$  заведомо имеют непересекающиеся области аналитичности и совпадают в вещественной области  $\mathcal{E}$ . Знаменитая теорема об острей клина, доказанная

Бремерманном, Оме и Тейлором<sup>1)</sup>, позволяет нам сделать вывод, что амплитуды  $\mathcal{F}(q)$  и  $\overline{\mathcal{F}}(q)$  являются аналитическими продолжениями одна другой и, кроме того, их общая область аналитичности шире, чем объединение труб будущего и прошлого и области  $\mathcal{C}$ .

Если бы мы имели дело с функциями только одной комплексной переменной, то задача решалась бы легко. Действительно, если функции  $f^\pm(z)$  аналитичны соответственно в верхней и нижней полуплоскостях комплексной плоскости  $z$  и совпадают на некотором отрезке вещественной оси, то из теоремы Коши следует, что они представляют собой ветви одной и той же аналитической функции. Точки совпадения действительно являются точками аналитичности. Однако наш случай оказывается, очевидно, более сложным. Около каждой точки совпадения имеются щели, уходящие в пространственно-подобных мнимых направлениях, где ни  $\mathcal{F}$ , ни  $\overline{\mathcal{F}}$  не определены. Отсюда и образное название — острый клин. Кроме того, анализ в случае нескольких комплексных переменных открывает новые свойства по сравнению со случаем одной комплексной переменной. В многомерном случае, например, играет важную роль понятие оболочки голоморфности. Функцию нескольких комплексных переменных, аналитическую в области  $\mathcal{D}$ , можно продолжить по меньшей мере в область  $\overline{\mathcal{D}} \supset \mathcal{D}$  с тем свойством, что для любой из ее граничных точек мы можем найти аналитическое многообразие, т. е. набор нулей аналитической функции, лежащих (за исключением граничной точки, о которой идет речь) полностью вне области  $\overline{\mathcal{D}}$ . Это свойство называется псевдотыпуклостью (по аналогии с обычной выпуклостью), причем плоскости заменяются аналитическим многообразием. В рассматриваемом случае, хотя и возможно чисто геометрическое построение области  $\overline{\mathcal{D}}$ , решить эту задачу позволяет полезное представление, обобщающее представление Челлена—Лемана для вакуумного среднего коммутатора.

Читатель может задаться вопросом, достаточно ли исходной области аналитичности, включающей трубы прошлого и будущего, чтобы можно было описать хотя бы такой простой случай, как рассеяние вперед, когда  $p_1 = p_2 = p$  и  $q_1 = q_2 = q$ . Следующее замечание рассеет наши сомнения. Пусть комплексный вектор  $q$  принадлежит массовой поверхности. Запишем его в виде  $q = q_R + iq_I$ . Тогда условие  $m_a^2 = q^2 = q_R^2 - q_I^2 - 2iq_R \cdot q_I$  означает, что  $q_R$  и  $q_I$  ортогональны, а для времениподобного  $q_I$  это невозможно. Действительно, если бы это было так, то из условия ортогональности вектор  $q_R$  должен быть пространственно-подобным, т. е.  $q_R^2 < 0$ , а значит, и разность  $q_R^2 - q_I^2$  была бы отрицательной. Таким образом, лишь  $q$  с отрицательным или комплексным квадратом массы принадлежит трубе. Для таких нефизических значений можно сразу написать дисперсионное соотношение, чтобы получить информацию о физических процессах. Нам, однако, остается еще решить задачу нахождения подходящего аналитического продолжения по  $q^2$ .

<sup>1)</sup> Теорема, получившая позднее название теоремы об «острие клина», была впервые сформулирована и доказана Н. Н. Боголюбовым в 1956 г. при обосновании им дисперсионных соотношений в квантовой теории поля. См. дополнение к примечаниям в конце настоящей главы. — *Прим. перев.*



### 5.3.3. Представление Йоста — Лемана — Дайсона

Это — представление матричного элемента коммутатора  $C(q)$ , определяемого формулой (5.173), согласующееся со спектральными свойствами в импульсном пространстве и свойствами носителя в конфигурационном пространстве. Напомним, что коммутатор свободных полей  $\Delta(x, \mu^2)$  [см формулы (3.55) и (3.56)] равен нулю вне светового конуса и имеет нечетный фурье-образ, сосредоточенный на гиперboloиде, соответствующем массе  $\mu^2$ . Представление Йоста — Лемана — Дайсона определяет  $C(q)$  как суперпозицию коммутаторов свободных полей в конфигурационном пространстве или свертки этих коммутаторов в импульсном пространстве:

$$C(q) = \int_S d^4k d\mu^2 \varepsilon(q^0 - k^0) \delta[(q - k)^2 - \mu^2] \rho(k, \mu^2). \quad (5.174)$$

Весовая функция  $\rho$  отлична от нуля только для тех значений  $k$  и  $\mu^2$ , для которых гиперboloид  $(q - k)^2 = \mu^2$  не пересекает область  $\mathcal{C}$ . Такие гиперboloиды называются допустимыми. Их центры  $k$  лежат в области, образуемой пересечением верхней и нижней полы светового конуса с центром в точке  $-(p_1 + p_2)/2$  и нижней полы светового конуса с центром в точке  $(p_1 + p_2)/2$ . При этом нижним пределом интегрирования по  $\mu$  является величина

$$\mu_{\text{inf}} = \text{Max} \left\{ 0, M_+ - \sqrt{\left(\frac{p_1 + p_2}{2} + k\right)^2}, M_- - \sqrt{\left(\frac{p_1 + p_2}{2} - k\right)^2} \right\}.$$

Очевидно, что  $C(q)$ , определяемое выражением (5.174), обладает всеми требуемыми свойствами. Дайсон показал, что справедливо также обратное, а именно что для  $C(q)$  всегда можно написать представление этого вида. Интересующихся подробностями читателей мы отсылаем к статьям, цитируемым в примечаниях в конце данной главы.

Соответствующее представление для амплитуды можно получить, если просто сравнить формулы (5.171) и (5.173). Помимо фактора  $i$  они различаются из-за наличия ступенчатой функции в (5.171), которая умножается на коммутатор, заданный в конфигурационном пространстве. При умножении этих обобщенных функций нам надо соблюдать осторожность, поскольку вклад от произведения их в точке  $z=0$  нуждается в доопределении. Пренебрегая на время этой трудностью, мы получаем в импульсном пространстве свертку

$$\mathcal{F}(q) = -\frac{1}{2\pi} \int_S \frac{d^4k d\mu^2 \rho(k, \mu^2)}{(q - k)^2 - \mu^2}. \quad (5.175)$$

Физическая амплитуда восстанавливается при переходе к пределу вещественных положительных времениподобных значений  $q$  с ис-

чезающе малой мнимой частью, лежащей в верхней поле светового конуса

Может случиться так, что интеграл по  $\mu^2$  расходится при больших значениях. Это является отражением в импульсном пространстве того факта, что запаздывающий коммутатор плохо определен. Однако можно произвести вычитание

$$\mathcal{F}(q) = -\frac{1}{2\pi} \int_S d^4k d\mu^2 \frac{\rho(k, \mu^2)}{(q-k)^2 - \mu^2} \left[ \frac{(q-k)^2 + \mu_0^2}{\mu^2 + \mu_1} \right]^n + P(q), \quad (5.176)$$

где  $n$  — целое, а  $P(q)$  — полином от  $q$ , причем без изменения аналитических свойств, вытекающих из выражения (5.175). Поэтому мы не будем далее эти вычитания записывать в явном виде.

Представление (5.175) задает  $\mathcal{F}(q)$  как аналитическую функцию для любых вещественных и комплексных точек, которые не принадлежат допустимым гиперболоидам.

Область аналитичности  $\bar{\mathcal{D}}$ , связанную с представлением Йоста—Лемана—Дайсона, трудно описать в наглядном виде. Поэтому позаимствуем из работы Броса, Фруассара, Омне и Стора следующую полезную геометрическую конструкцию. Прием состоит в том, чтобы ввести пятую координату  $z$  и отобразить исходное комплексное 4-мерное пространство  $q$  на поверхность второго

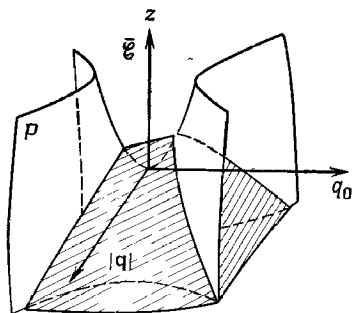


РИС. 5.9. Область  $\bar{\mathcal{D}}$  (заштрихованная часть рисунка), представляющая собой выпуклую оболочку области совпадения  $\mathcal{E}$  в пятимерном пространстве.

порядка  $P: z = q^2$ . Таким образом знаменатель в выражении (5.175) заменяется линейным выражением (по  $z$  и  $q$ ),  $z - 2q \cdot k + k^2 - \mu^2$ , и допустимые гиперболоиды — соответствующими плоскостями с параметрами  $(k, \mu^2)$ , принадлежащими  $S$ . Теперь с каждой комплексной точкой  $(z, q)$  связывается комплексная прямая линия  $L(z, q)$ , описываемая параметрически величинами  $\text{Re } z + \lambda \text{Im } z, \text{Re } q + \lambda \text{Im } q$ . Если  $(z, q)$  принадлежит  $P$ , то  $P$  принадлежит и сопряженная ей точка, а потому прямая  $L(z, q)$  пересекает  $P$  в двух точках (соответствующих  $\lambda = \pm i$ ). Из свойств поверхностей второго порядка следует, что вещественные точки прямой  $L(z, q)$  (получаемые при вещественных  $\lambda$ ) не могут принадлежать  $P$ , так что при условии вещественности прямые  $L(z, q)$  проходят полностью выше или полностью ниже поверхности  $P$ . [Возможен исключительный случай, когда  $L(z, q)$  целиком принадлежит поверхности  $P$ .]

Вещественная область совпадения отображается на поверхность  $P$  в области, ограниченной двумя плоскостями:

$$[(p_1 + p_2)/2]^2 \pm q \cdot (p_1 + p_2) + z < M_{\pm}^2,$$

и допустимые плоскости не пересекают области совпадения  $\mathcal{E}$ . Условие  $\mu^2 > 0$  приводит к тому, что они проходят выше плоскости, касательной к  $P$ . Поскольку мы имеем дело с плоскостями, это определяет исключительную область — выпуклую оболочку области  $\mathcal{E}$  (назовем ее  $\overline{\mathcal{E}}$ ), которая не может пересекаться какой-либо из допустимых плоскостей (рис. 5.9). Область аналитичности можно теперь описать следующим образом. Комплексная точка  $(z, q)$  принадлежит ей в любом из указанных ниже случаев. 1. Прямая  $L(z, q)$  проходит полностью ниже поверхности  $P$ . Этот случай соответствует исходным трубам. 2.  $L(z, q)$  пересекает оболочку  $\overline{\mathcal{E}}$ . Действительно, если бы точка  $(z, q)$  принадлежала допустимой плоскости, то это же относилось бы и к сопряженной с ней точке. При этом вследствие линейности прямая  $L(z, q)$  принадлежала бы допустимой плоскости и не пересекала бы  $\overline{\mathcal{E}}$ .

### 5.3.4. Дисперсионные соотношения для амплитуды рассеяния вперед

Теперь мы можем изучить упругое рассеяние вперед (когда  $q_1 = q_2 = q$ ,  $p_1 = p_2 = p$ ) в зависимости от начальной энергии  $v = q p / m_b = (s - m_a^2 - m_b^2) / 2m_b$ . Нам надо показать, что соответствующая функция является аналитической в плоскости с разрезами на вещественной оси. В свете замечаний, сделанных в конце разд. 5.3.2, это нетривиальный результат. Мы, естественно, будем рассматривать случай  $q^2 = m_a^2$ , что соответствует физической массовой поверхности

Чтобы решить данную задачу, пересечем поверхность  $P$ , построенную выше, плоскостью  $z = m_a^2$ , что даст в сечении гиперболоид. Нам нужно найти соответствующее пересечение с областью  $\overline{\mathcal{E}}$ . Для комплексных значений  $q$ , принадлежащих массовой поверхности, вещественная линия  $L(m_a^2, q)$  не пересекает этот гиперболоид, с которым она имеет уже две комплексные общие точки  $(m_a^2, q)$  и  $(m_a^2, q^*)$ . Мы отмечали, что при фиксированных  $p$  лоренц-инвариантность означает, что  $\overline{\mathcal{F}}$  является функцией только той компоненты  $q$ , которая направлена вдоль  $p$ . Считая, что эта компонента направлена вдоль временной оси, можно ограничиться рассмотрением векторов  $q$ , имеющих только две ненулевые компоненты, скажем  $q_0$  и  $q_1$ . Таким образом, мы имеем дело фактически с двумерной задачей, третья компонента  $z$  добавлена для удобства. Комплексной точке  $(m_a^2, q)$  на гиперболе  $q_0^2 - q_1^2 = m_a^2$  соответствует  $(Im q)^2 < 0$ , и она будет точкой аналитичности при условии, что  $L(m_a^2, q)$  пересекает выпуклую оболочку  $\overline{\mathcal{E}}$  в плоскости  $(q_0, q_1)$ . Для этого необходимо, чтобы  $\mathcal{E}$  пересекала обе ветви гиперболы, отвечающей массовой поверхности.

Далее область  $\mathcal{E}$  определяется неравенствами  $(p \pm q)^2 < M_{\pm}^2$  или, что эквивалентно,  $m_b^2 \pm 2p \cdot q + z < M_{\pm}^2$ . Условие, что  $\mathcal{E}$  пересекает верхнюю ветвь, записывается в виде  $m_b^2 + 2m_a m_b + m_a^2 \leq M_+^2$ , или  $(m_a + m_b)^2 \leq M_+^2$ . Аналогично условие того, что  $\mathcal{E}$  пересекает нижнюю ветвь, имеет вид  $(m_a + m_b)^2 \leq M_-^2$ . Следовательно, эти критерии позволяют исключить возникновение комплексных сингулярностей в комплексной плоскости  $v$ . С другой стороны, нам известно, что неравенства  $M_{\pm}^2 \leq (m_a + m_b)^2$  являются ограничениями на массы промежуточных состояний  $A+B$  или  $\overline{A}+B$  в суммах, входящих в выражения (5.173). Из этого мы делаем заключение, что рассмотренный выше метод позволяет

получить в лучшем случае дисперсионные соотношения для рассеяния вперед (без комплексных сингулярностей) лишь условно.

В некоторых случаях одна из величин  $M_+$  или  $M_-$  или обе они оказываются определенно меньше, чем значение упругого порога. Без особых трудностей можно разобрать один часто встречающийся случай, когда промежуточное изолированное состояние [с массой  $M_0^2 < (m_a + m_b)^2$ ] находится ниже порога. Такое состояние дает полюсный вклад по энергетической переменной. Умножение амплитуды на  $(p \pm q)^2 - M_0^2$  не изменяет ее аналитических свойств, но устраняет эту сингулярность. В пион-нуклонном рассеянии, например, такой полюс возникает от нуклона в промежуточном состоянии.

Предположим, что, за исключением таких полюсов, выполняется условие  $M_{\pm}^2 \geq (m_a + m_b)^2$ . Следовательно, мы приходим к заключению, что амплитуда рассеяния вперед имеет следующие свойства

1. Она представляет собой аналитическую функцию в комплексной плоскости  $\nu$ , за исключением разрезов, идущих вдоль вещественной оси от  $m_a$  до  $+\infty$  и от  $-\infty$  до  $-m_a$ , и возможных полюсов в промежутке между разрезами.
2. Амплитуда вещественна в промежутках между разрезами, так что на этих разрезах ее скачок является чисто мнимым. Это следует из выражения (5.173), примененного к случаю рассеяния вперед.
3. Амплитуда при больших  $\nu$  полиномиально ограничена. Это следует из предположения о том, что поля являются функциями умеренного роста, и, следовательно, заведомо справедливо для зависимости от комплексной переменной  $\nu$ .
4. В силу перекрестной симметрии, если  $A \equiv \bar{A}$ , мы имеем  $\mathcal{F}(-\nu^*) = \mathcal{F}(\nu)^*$ .

Используя эту информацию и формулу Коши, получим простое аналитическое представление амплитуды рассеяния. Для простоты предположим, что справедливо свойство 4, т. е.  $A \equiv \bar{A}$ , и что амплитуда  $\mathcal{F}$  обращается в нуль на бесконечности. Тогда можно написать

$$\mathcal{F}(\nu) = \text{Полюсные члены} + \frac{1}{\pi} \int_{(m_a+m_b)^2}^{\infty} d\nu' \text{Im } \mathcal{F}(\nu') \left( \frac{1}{\nu' - \nu} - \frac{1}{\nu' + \nu} \right). \quad (5.177)$$

Если бы  $\mathcal{F}(\nu)$  имела степенной рост в зависимости от  $\nu$ , то аналогичное представление было бы справедливо для функции, получаемой делением  $\mathcal{F}(\nu)$  на вещественный полином от  $\nu$ .

Следует подчеркнуть, что рассмотренное выше представление содержит лишь физические измеримые величины. Абсорбтивная часть  $\text{Im } \mathcal{F}(\nu)$  связана с полным сечением с помощью оптической теоремы [формула (5.156)], в то время как вычеты от возможных

полюсных членов являются произведениями констант взаимодействия. Действительно, используя формулы типа (5.177), можно измерять такие константы взаимодействия.

В качестве иллюстрации рассмотрим традиционный пример, а именно пион-нуклонное рассеяние. Запишем для произвольных зарядов две независимые амплитуды в виде

$$\mathcal{F} = \bar{u}(p_2) \left[ A + \frac{1}{2} (q_1 + q_2) B \right] u(p_1), \quad (5.178)$$

где  $\bar{u}(p_2)$ ,  $u(p_1)$  — дираковские спиноры, описывающие нуклоны в конечном (с импульсом  $p_2$ ) и начальном (с импульсом  $p_1$ ) состояниях на массовой поверхности. Начальный пион имеет импульс  $q_1$ , а конечный — импульс  $q_2$ . Кинематические инварианты выберем следующим образом:

$$\begin{aligned} s &= W^2 = (p_1 + q_1)^2, \\ t &= (q_1 - q_2)^2 = -2q^2(1 - \cos \theta), \\ u &= (p_1 - q_2)^2 = 2M^2 + 2\mu^2 - s - t. \end{aligned} \quad (5.179)$$

Здесь  $M$  и  $\mu$  — массы соответственно нуклона и пиона,  $\theta$  — угол рассеяния в системе центра масс,  $q$  — трехмерный импульс пиона, а  $W$  — полная энергия в этой системе; таким образом,

$$q^2 = \frac{[(W+M)^2 - \mu^2][(W-M)^2 - \mu^2]}{4W^2}. \quad (5.180)$$

В соответствии с разделом 5.1.1 дифференциальное сечение имеет вид

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left( \frac{M^2}{4\pi W} \right)^2 |\mathcal{F}|^2. \quad (5.181)$$

В выражении для  $\mathcal{F}$  (5.178) функции  $A$  и  $B$  зависят только от инвариантов. Предвосхищая обсуждение симметрий (см. гл. 11 в т. 2 настоящей книги), используем то обстоятельство, что сильные взаимодействия обладают свойством изогочической инвариантности и что изоспин нуклона равен  $1/2$ , а изоспин пиона 1. Следовательно, все каналы описываются с помощью двух матричных элементов, соответствующих полным изоспинам  $1/2$  или  $3/2$ , т. е. для любого процесса с конкретными зарядами частиц функции  $A$  и  $B$  записываются в виде комбинаций соответственно величин  $A^1, A^3$  и  $B^1, B^3$ . Это позволяет написать следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \left. \begin{array}{l} \pi^+ p \rightarrow \pi^+ p \\ \pi^- n \rightarrow \pi^- n \end{array} \right\} \mathcal{F}^3 &= \mathcal{F}^{(+)} - \mathcal{F}^{(-)}, \\ \left. \begin{array}{l} \pi^- p \rightarrow \pi^- p \\ \pi^+ n \rightarrow \pi^+ n \end{array} \right\} \frac{1}{3} (\mathcal{F}^3 + 2\mathcal{F}^1) &= \mathcal{F}^{(+)} + \mathcal{F}^{(-)}, \\ \left. \begin{array}{l} \pi^- p \rightarrow \pi^0 n \\ \pi^+ n \rightarrow \pi^0 p \end{array} \right\} \frac{\sqrt{2}}{3} (\mathcal{F}^3 - \mathcal{F}^1) &= -\sqrt{2} \mathcal{F}^{(-)}. \end{aligned} \quad (5.182)$$

Последние два процесса называют реакциями с перезарядкой. Поскольку три наблюдаемых процесса описываются лишь двумя редуцированными амплитудами, мы получаем для сечений неравенства треугольника. Удобно ввести

комбинации амплитуд

$$\mathcal{F}^{(+)} = \frac{\mathcal{F}^1 + 2\mathcal{F}^3}{3},$$

$$\mathcal{F}^{(\pm)}(q_1, q_2) = \pm \mathcal{F}^{(\pm)}(-q_2, -q_1), \quad (5.183)$$

$$\mathcal{F}^{(-)} = \frac{\mathcal{F}^1 - \mathcal{F}^3}{3},$$

соответственно четную или нечетную по отношению к перестановке  $s \leftrightarrow u$ . Учитывая явную структуру выражения (5.178) и используя переменную

$$v = (s - u)/4M, \quad (5.184)$$

нечетную по отношению к кроссинг-преобразованию (заметим, что при  $t=0$  величина  $v$  совпадает с энергией налетающего пиона в лабораторной системе), получаем соотношения

$$A^{(\pm)}(-v, t) = \pm A^{(\pm)}(v, t),$$

$$B^{(\pm)}(-v, t) = \mp B^{(\pm)}(v, t). \quad (5.185)$$

При  $t=0$  эти амплитуды являются аналитическими (по  $v$ ) в плоскости с разрезом вдоль вещественной оси от упругого порога [ $s = (M + \mu)^2$ ,  $v = \mu$ ] до  $+\infty$  ( $s$  разрез) и от  $-\infty$  до порога в  $u$ -канале [ $u = (M + \mu)^2$ ,  $v = -\mu$ ].

Кроме того, на вещественной оси встречаются изолированные полюсы, соответствующие нуклонному промежуточному состоянию в  $s$ - и  $u$ -каналах. Напишем лагранжиан эффективного псевдоскалярного пион-нуклонного взаимодействия

$$\mathcal{L}_{\pi N} = ig_{\pi NN} \bar{\Psi} \tau_\alpha \tau_\alpha \gamma_5 \Psi, \quad (5.186)$$

где  $\tau_\alpha$  — изоспиновые матрицы нуклона, а  $\pi_\alpha$  ( $\alpha = 1, 2, 3$ ) — три эрмитовы компоненты пионного поля. Тогда полюсные вклады можно записать в виде

$$\mathcal{F}_{\text{пол}} = g_{\pi NN}^2 \bar{u}(p_2) \tau_\beta \tau_\alpha \gamma_5 \frac{p_1 + q_1 + M}{\mu^2 + 2p_1 \cdot q_1} \gamma_5 u(p_1) +$$

$$+ g_{\pi NN}^2 \bar{u}(p_2) \tau_\alpha \tau_\beta \gamma_5 \frac{p_1 - q_1 + M}{\mu^2 - 2p_1 \cdot q_1} \gamma_5 u(p_1). \quad (5.187)$$

Здесь  $2p_1 \cdot q_1 = 2Mv - t/2$ . Используя уравнение Дирака для спиноров на массовой поверхности, получаем

$$\mathcal{F}_{\text{пол}} = \frac{g_{\pi NN}^2}{2M} \bar{u}(p_2) \left[ \left( \delta_{\alpha\beta} + \frac{1}{2} [\tau_\beta, \tau_\alpha] \right) \frac{(q_1 + q_2)/2}{v_p - v} - \right.$$

$$\left. - \left( \delta_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} [\tau_\beta, \tau_\alpha] \right) \frac{(q_1 + q_2)/2}{v_p + v} \right] u(p_1), \quad (5.188)$$

$$v_p = -\frac{\mu^2}{2M} + \frac{t}{4M}.$$

Мы видим, что полюсы дают вклад только в амплитуды  $B$ , причем

$$B_p^{(+)} = \frac{g_{\pi NN}^2}{2M} \left( \frac{1}{v_p - v} - \frac{1}{v_p + v} \right),$$

$$B_p^{(-)} = \frac{g_{\pi NN}^2}{2M} \left( \frac{1}{v_p - v} + \frac{1}{v_p + v} \right). \quad (5.189)$$

Заметим также, что положение полюсов зависит от переменной  $t$ .

Подставляя значение  $v_p$  при  $t=0$  и временно пренебрегая вопросом о вычитаниях, получим дисперсионные соотношения для рассеяния вперед в виде

$$\begin{aligned}
 A^{(\pm)}(v, 0) &= \frac{1}{\pi} \int_{\mu}^{\infty} dv' \operatorname{Im} A^{(\pm)}(v', 0) \left( \frac{1}{v'-v} \pm \frac{1}{v'+v} \right), \\
 B^{(\pm)}(v, 0) &= \frac{g_{\pi NN}^2}{2M} \left( \frac{1}{v_p - v} \mp \frac{1}{v_p + v} \right) + \\
 &+ \frac{1}{\pi} \int_{\mu}^{\infty} dv' \operatorname{Im} B^{(\pm)}(v', 0) \left( \frac{1}{v'-v} \mp \frac{1}{v'+v} \right). \quad (5.190)
 \end{aligned}$$

В действительности можно показать, что амплитуды являются аналитическими функциями от  $s$  при фиксированных (отрицательных) значениях  $t$ , изменяющихся в промежутке  $-t_M \leq t \leq 0$ ; поэтому соотношение (5.190) можно обобщить следующим образом:

$$\begin{aligned}
 A^{(\pm)}(v, t) &= \frac{1}{\pi} \int_{\mu+t/4M}^{\infty} dv' \operatorname{Im} A^{(\pm)}(v', t) \left( \frac{1}{v'-v} \pm \frac{1}{v'+v} \right), \\
 B^{(\pm)}(v, t) &= \frac{g_{\pi NN}^2}{2M} \left( \frac{1}{v_p - v} \mp \frac{1}{v_p + v} \right) + \\
 &+ \frac{1}{\pi} \int_{\mu+t/4M}^{\infty} dv' \operatorname{Im} B^{(\pm)}(v', t) \left( \frac{1}{v'-v} \mp \frac{1}{v'+v} \right). \quad (5.191)
 \end{aligned}$$

Эти соотношения можно использовать вместе с разложением по парциальным волнам, описанным в разд. 5.3.1. С этой целью в выражении для сечения (5.181) перепишем величину  $(M/4\pi W) \mathcal{G}$  в виде

$$\begin{aligned}
 \frac{M}{4\pi W} \bar{u}(p_2, \lambda_2) \left[ A + \frac{1}{2} (q_1 + q_2) B \right] u(p_1, \lambda_1) &= \\
 = \chi_2^\dagger(\lambda_2) \left[ f_1 + \frac{(\sigma \cdot q_2)(\sigma \cdot q_1)}{q^2} f_2 \right] \chi_1(\lambda_1), \quad (5.192)
 \end{aligned}$$

где  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  — начальная и конечная спиральности нуклона, а  $\chi$ ,  $\chi^\dagger$  — спиноры Паули, такие, что [ср. с (2.37)]

$$u(p, \lambda) = \frac{p + M}{\sqrt{2M(M+E)}} \begin{pmatrix} \chi(\lambda) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Обозначая энергию нуклона в системе центра масс через  $E$ , получаем

$$\begin{aligned}
 f_1 &= \frac{E+M}{8\pi W} [A + (W-M)B], \\
 f_2 &= \frac{E-M}{8\pi W} [-A + (W+M)B]. \quad (5.193)
 \end{aligned}$$

Матрицу  $2 \times 2$ , входящую в (5.192), можно разложить по представлениям угло-

вого момента следующим образом:

$$f_{\lambda_2, \lambda_1} = \frac{1}{q} \sum_J \left( J + \frac{1}{2} \right) f_{\lambda_2, \lambda_1}^J \mathcal{D}_{\lambda_1, \lambda_2}^{J*}(\varphi, \theta, 0), \quad (5.194)$$

где  $J$  принимает полуцелые значения.

Требование  $P$ -инвариантности накладывает на эти амплитуды условия  $f_{1/2, 1/2}^J = f_{-1/2, -1/2}^J$  и  $f_{1/2, -1/2}^J = f_{-1/2, 1/2}^J$ , а обращение времени не дает никаких новых ограничений. Используя спинор с определенными спиральностями, при  $\varphi = 0$  получаем

$$\begin{aligned} f_{1/2, 1/2}^J &= f_{-1/2, -1/2}^J = (f_1 + f_2) \chi_2^\dagger \left( \frac{1}{2} \right) \chi_1 \left( \frac{1}{2} \right) = (f_1 + f_2) \cos \frac{\theta}{2}, \\ f_{1/2, -1/2}^J &= -f_{-1/2, 1/2}^J = (f_1 - f_2) \chi_2^\dagger \left( \frac{1}{2} \right) \chi_1 \left( -\frac{1}{2} \right) = (f_1 - f_2) \sin \frac{\theta}{2}. \end{aligned} \quad (5.195)$$

Как уже упоминалось, амплитуды, соответствующие рассеянию с определенной четностью, имеют вид

$$f_{\pm}^J = f_{1/2, 1/2}^J \pm f_{-1/2, 1/2}^J = 2e^{i\delta_J} \cos \delta_{J, \pm}. \quad (5.196)$$

Сдвиги фаз  $\delta_{J, \pm}$  вещественны ниже неупругого порога и соответствуют рассеянию в канал с полным угловым моментом  $J$  и четностью  $\pm (-1)^{J+1/2}$ . В нерелятивистском рассмотрении эти состояния получались бы при определенном орбитальном моменте  $l$  для  $J = l \pm 1/2$ , поэтому соответствующие фазовые сдвиги традиционно обозначают также как  $\delta_{l, +}$  и  $\delta_{l+1, -}$  соответственно. Воспользуемся теперь точными выражениями для  $\mathcal{D}$  функций Вигнера:

$$\begin{aligned} \left( J + \frac{1}{2} \right) d_{1/2, 1/2}^J &= \cos \frac{\theta}{2} (P'_{J+1/2} - P'_{J-1/2}), \\ \left( J + \frac{1}{2} \right) d_{-1/2, 1/2}^J &= \sin \frac{\theta}{2} (P'_{J+1/2} + P'_{J-1/2}). \end{aligned} \quad (5.197)$$

В обозначениях  $\delta_{J, +} \equiv \delta_{l, +}$ ,  $\delta_{J, -} \equiv \delta_{l+1, -}$  это приводит к следующим разложениям:

$$\begin{aligned} f_1(\cos \theta) &= \sum_{l=0}^{\infty} P'_{l+1}(\cos \theta) f_{l, +} - P'_{l-1}(\cos \theta) f_{l, -}, \\ f_2(\cos \theta) &= \sum_{l=1}^{\infty} P'_l(\cos \theta) (f_{l, +} - f_{l, -}), \\ f_{l, \pm} &= \frac{e^{i\delta_{l, \pm}} \sin \delta_{l, \pm}}{q}. \end{aligned} \quad (5.198)$$

Очевидно, что при  $l=0$  дает вклад только амплитуда  $f_{0, +}$ . Теперь следовало бы изучить вопрос о вычитаниях в дисперсионных соотношениях. В разд 5.3.5 рассмотрим некоторые общие утверждения, а здесь лишь укажем на то, что в случае пион-нуклонного рассеяния единственной амплитудой требующей вычитаний, является  $A^{(+)}$ .

Классическим приложением формулы (5.190) является определение эффективной константы связи. Идея метода сводится к точной оценке на основе низкоэнергетического фазового анализа амплитуды  $B$  для упругого рассеяния  $\pi^+$  на протоне (где практически доминирует вклад от резонанса  $J=3/2$ ,  $T=3/2$ ) и к последующему сравнению ее вещественной части для рассеяния вперед со значением, определяемым дисперсионным интегралом. В последнем



также доминирует низкоэнергетический вклад, поэтому наше рассмотрение последовательно. Значение константы, полученное Гамильтоном и Вулкоком, равно

$$f^2 = \frac{1}{4\pi} \left( \frac{g_{\pi NN} \mu}{2M} \right)^2 = 0,081 \pm 0,002. \quad (5.199)$$

Дисперсионные интегралы играют основную роль при анализе различных фазовых сдвигов при промежуточных энергиях. В качестве упражнения мы предлагаем распространить данный формализм на реакцию в  $t$  канале  $\pi\pi \rightarrow N\bar{N}$ .

### 5.3.5. Аналитичность по передаваемому импульсу

Ниже мы будем пренебрегать спинами внешних частиц. Учесть спин внешних частиц можно, хотя это и не так просто. Однако это мало влияет на окончательный результат. Вместо того чтобы начать рассмотрение с редуцированной формулы, учитывающей как начальное, так и конечное состояния частицы (см разд 5.3.2.), мы предпочитаем редуцировать две начальные частицы с импульсами  $p_1$  и  $q_1$ , описываемые полями  $\psi$  и  $\varphi$ . Таким образом, связный элемент  $S$ -матрицы запишем сначала в виде

$$\langle p_2, q_2 | S | p_1, q_1 \rangle_c = - \int d^4x d^4y e^{-i(p_1 \cdot x + q_1 \cdot y)} (\square_x + m_b^2) (\square_y + m_a^2) \times \\ \times \langle p_2, q_2 | T \psi(x) \varphi(y) | 0 \rangle_c. \quad (5.200)$$

Возвращаясь к выводу этой формулы, заметим, что в физической области упругого процесса мы могли бы с таким же успехом использовать запаздывающий коммутатор вместо хронологического произведения. Таким образом, опуская несущественные контактные члены, можно использовать следующую замену (где  $i_\psi$  и  $i_\varphi$  являются источниками полей  $\psi$  и  $\varphi$ )

$$(\square_x + m_b^2) (\square_y + m_a^2) \langle p_2, q_2 | T \psi(x) \varphi(y) | 0 \rangle_c \rightarrow \langle p_2, q_2 | \theta(x^0 - y^0) \times \\ \times [i_\psi(x), i_\varphi(y)] | 0 \rangle_c. \quad (5.201)$$

Учитывая закон сохранения импульса, получаем

$$\langle p_2, q_2 | S | p_1, q_1 \rangle_c = (2\pi)^4 \delta^4(p_2 + q_2 - p_1 - q_1) i \mathcal{F} f_1,$$

$$\mathcal{F} f_1 = i \int d^4x e^{i(q_1 - p_1) \cdot x/2} \langle p_2, q_2 | \theta(x^0) \left[ i_\psi \left( \frac{x}{2} \right), i_\varphi \left( -\frac{x}{2} \right) \right] | 0 \rangle_c. \quad (5.202)$$

Отсюда мы видим, что, согласно представлению Йоста—Лемана—Дайсона, амплитуда  $\mathcal{F}$  является аналитической по переменной  $q = (q_1 - p_1)/2$ , и мы можем повторить здесь анализ, который приводился нами выше для случая рассеяния вперед. Положим, что временная ось направлена вдоль полного начального импульса  $p = p_1 + p_2$ . Иными словами, будем вести рассмотрение в системе центра масс и используем выражение (5.202), чтобы изучить аналитические свойства амплитуды по косинусу угла рассеяния. Область совпадения опережающего и запаздывающего коммутатора, который можно применить с тем же успехом, что и опережающий, ограничивается гиперболами, соответствующими наиминимум массам  $M_1$  и  $M_2$  промежуточных состояний  $|n\rangle$ , дающих вклад соответственно в магические элементы

$$\langle p_2, q_2 | i_\psi(0) | n \rangle \langle n | i_\varphi(0) | 0 \rangle, \quad \langle p_2, q_2 | i_\varphi(0) | n \rangle \langle n | i_\psi(0) | 0 \rangle, \\ \left( \frac{p}{2} + q \right)^2 < M_1^2, \quad \left( \frac{p}{2} - q \right)^2 < M_2^2. \quad (5.203)$$

Стабильность частиц  $a$  (импульс  $q_1$ ) и  $b$  (импульс  $p_1$ ) означает, что

$$M_1^2 > m_a^2, \quad M_2^2 > m_b^2. \quad (5.204)$$

В случае когда рассматривается амплитуда рассеяния на массовой поверхности, имеем

$$\left(\frac{p}{2} + q\right)^2 = q_1^2 = m_a^2, \quad \left(\frac{p}{2} - q\right)^2 = p_1^2 = m_b^2. \quad (5.205)$$

В пятимерном пространстве  $z, q$  (напомним, что мы находимся на поверхности  $P$ , т. е.  $z = q^2$ ) эти два линейных условия определяют трехмерное линей-

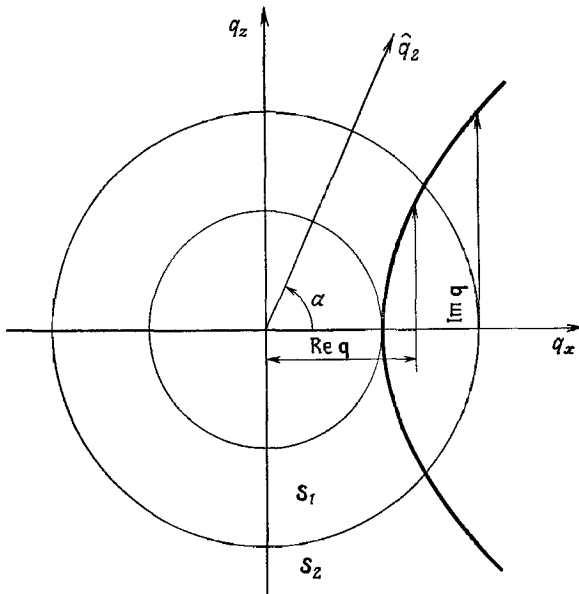


РИС. 5.10. Область аналитичности по относительному трехмерному импульсу на массовой поверхности с вещественным пересечением  $S_1$ .

ное многообразие, которое должно, очевидно, иметь вещественное пересечение с поверхностью  $P$ . Кроме того, плоскости, определяемые уравнениями

$$\frac{p^2}{4} + 2p \cdot q + z = M_1^2, \quad \frac{p^2}{4} - 2p \cdot q + z = M_2^2, \quad (5.206)$$

пересекают поверхность  $P$  по двум гиперболоидам, ограничивающим область  $\mathcal{E}$ . Обозначим ее выпуклую оболочку через  $\bar{\mathcal{E}}$ . В силу условий стабильности трехмерное линейное многообразие, описывающее массовую поверхность (5.205), пересекает поверхность  $P$  по сфере  $S_1$ , радиус которой равен постоянному относительному 3-импульсу  $q^2 = p_1^2 = q_1^2$ . Пересечение этого многообразия с  $\bar{\mathcal{E}}$  также является сферой  $S_2$ , радиус которой  $R$  больше, чем  $|p_1|$ , и зависит от масс (рис. 5.10). Таким образом, область аналитичности может быть полностью задана с помощью вектора  $q$ . Для произвольной комплексной точки на  $S_1$

имеем

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} q \operatorname{Im} q &= 0, \\ \operatorname{Re} q^2 - \operatorname{Im} q^2 &= q^2. \end{aligned} \quad (5.207)$$

Напомним, что под  $q^2$  следует понимать обычный квадрат длины всех 3-импульсов в системе центра масс для упругого рассеяния. Комплексная точка  $\operatorname{Re} q + i \operatorname{Im} q$  будет точкой аналитичности в том случае, когда вещественная прямая  $\operatorname{Re} q + \lambda \operatorname{Im} q$  пересекает сферу  $S_2$ . Поскольку  $\operatorname{Im} q$  ортогональна  $\operatorname{Re} q$ , это означает, что  $\operatorname{Re} q$  лежит внутри  $S_2$ , в то время как, согласно первому условию,  $\operatorname{Re} q^2 > |\mathbf{p}_1|^2$ . Граница соответствует величине  $(\operatorname{Re} q)^2 = R^2$ . Выразим эти результаты через угол рассеяния

$$x = \cos \theta = \frac{\mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{q}_2}{\sqrt{q_1^2 q_2^2}}.$$

Заметим, что квадрат длины  $q_1^2$  равен величине  $q^2$ . Таким образом,  $\sqrt{q^2} x = \mathbf{q} \cdot \hat{q}_2$ , где  $\hat{q}_2$  — единичный фиксированный вектор, а переменная  $x$ , как это следует из соотношения (5.207), изменяется внутри комплексной области, ограниченной эллипсом:

$$\sqrt{q_1^2} \operatorname{Re} x = R \cos a, \quad \sqrt{q_1^2} \operatorname{Im} x = \sqrt{R^2 - q_1^2} \sin a. \quad (5.208)$$

Это так называемый малый эллипс Лемана, уравнение которого имеет вид

$$\frac{(\operatorname{Re} x)^2}{R^2} + \frac{(\operatorname{Im} x)^2}{R^2 - q^2} = \frac{1}{q^2}. \quad (5.209)$$

Фокусами этого эллипса являются точки  $x = \pm 1$ , а большая полуось равна  $R/\sqrt{q^2}$ .

В более общем случае доказательство распространяется на любой матричный элемент вида  $\langle p_{\text{out}} | p_1, q_1, \text{in} \rangle$  и обнаруживает аналитические свойства, достаточные, чтобы существовало сходящееся разложение по сферическим гармоникам от относительных углов, выражающее инвариантность  $S$ -матрицы относительно вращений.

Эллиптическая область представляет собой естественную область сходимости разложения по парциальным волнам, в простейшем случае рядов по полиномам Лежандра. Однако вычислить фактическое значение  $R$  не так легко. Оказывается, что

$$\frac{R^2}{q^2} = 1 + \frac{(M_1^2 - m_a^2)(M_2^2 - m_b^2)}{q^2 [s - (M_1 - M_2)^2]}. \quad (5.210)$$

Существование эллиптической области аналитичности для амплитуды упругого рассеяния предполагает, что абсорбтивная часть амплитуды аналитична в эллипсе большего размера (в большом эллипсе Лемана). Для значений энергии ниже неупругого порога в этом можно убедиться следующим образом. Обращаясь к формуле (5.168), напомним, что

$$\begin{aligned} \mathcal{F} &= 16\pi \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \mathcal{F}_l(s) P_l(\cos \theta), \\ \operatorname{Im} \mathcal{F}_l &= \frac{2q^0}{\sqrt{s}} |\mathcal{F}_l|^2. \end{aligned} \quad (5.211)$$

Из оценки для полиномов Лежандра при больших  $l$  следует, что необходимое и достаточное условие (обобщенный критерий Абея для рядов Тейлора) сходимости разложения (5.211) в эллипсе с большой полуосью  $\cos \theta_0 > 1$  состоит

в том, чтобы наименьшая верхняя граница для  $|\mathcal{F}_l|^{1/l}$  была равна

$$\frac{1}{\cos \theta_0 + \sqrt{\cos^2 \theta_0 - 1}}.$$

Абсорбтивная (мнимая) часть амплитуды определяется с помощью аналогичного ряда, в котором  $\mathcal{F}_l$  заменено на  $\text{Im } \mathcal{F}_l$ . Из (5.211) мы видим, что это разложение сходится в эллипсе с большой полуосью  $\cos \theta_1$ , определяемой выражением

$$\begin{aligned} \frac{1}{\cos \theta + \sqrt{\cos^2 \theta_1 - 1}} &= \left( \frac{1}{\cos \theta_0 + \sqrt{\cos^2 \theta_0 - 1}} \right)^2 = \\ &= \frac{1}{2 \cos^2 \theta_0 - 1 + \sqrt{(2 \cos^2 \theta_0 - 1)^2 - 1}}, \end{aligned}$$

т. е.

$$\cos \theta_1 = \cos 2 \theta_0.$$

В работах Мандельстама, Лемана, Броса, Эшштейна и Глазера эти аналитические свойства по  $s$  и  $t$ , полученные отдельно, были обобщены как аналитические свойства от обеих переменных. Мартен с сотр. получили важные результаты, используя свойства положительности абсорбтивной части. В гл. 6 у нас будет возможность вернуться к рассмотрению данного вопроса в связи с изучением разложений теории возмущений.

В заключение данного раздела обратим внимание на два важных результата, которые накладывают ограничения на поведение амплитуд при больших энергиях и находятся в тесной связи с аналитическими свойствами.

Первый из них — это полученное Фруассаром ограничение на поведение полного сечения при больших значениях  $s$ . С интуитивной точки зрения может показаться, что при  $s \rightarrow \infty$  сечения будут ограниченными, если радиус сильных взаимодействий конечен. В действительности дело обстоит не столь просто, даже в экспериментальном аспекте. Это объясняется тем, что когда взаимодействия переносятся частицами со спином, могут также действовать силы, зависящие от скорости. Для получения этого результата необходимо сделать следующие предположения.

1. Расширение области аналитичности таково, что дисперсионные соотношения по  $s$  при фиксированных  $|t| < t_0$  могут быть записаны с не более чем  $n$  вычитаниями. Полиномиальное ограничение возникает в рамках аксиоматического подхода, а также последовательно во всех порядках теории возмущений в лагранжевой теории поля. Можно показать, например, для пион-нуклонного рассеяния, что в действительности  $t_0 = 4m_\pi^2$ .
2. Учитывая соотношение  $t = -2q^2(1 - \cos \theta)$  и то, что разложение по полиномам Лежандра для абсорбтивной части, как можно показать, сходится внутри эллипса с большой полуосью  $\cos \theta_0 = 1 + t_0/2q^2$  (расширение большого эллипса Лемана вследствие

условия положительности), мы можем записать

$$\operatorname{Im} \mathcal{F}_l < \frac{s^n}{(2l+1) P_l(1+t_0/2q^2)}. \quad (5.212)$$

При фиксированных значениях  $x > 1$  величины  $P_l(x)$  положительны и возрастают экспоненциально с ростом  $l$ .

В сущности  $P_l(x)$  ведет себя как функция  $(x + \sqrt{x^2 - 1})^l$ , так что ряд для абсорбтивной части при больших  $s$  эффективно обрезается при некотором  $l_{\max}$  порядка

$$l_{\max} = n \ln s \frac{q}{\sqrt{t_0}}. \quad (5.213)$$

Вследствие условия унитарности

$$|\mathcal{F}_l|^2 < \frac{\sqrt{s}}{2q} \operatorname{Im} \mathcal{F}_l$$

разложение амплитуды в физической области, в которой  $|P_l(\cos \theta)| \leq 1$ , ограничено величиной  $16\pi \sum_{l=0}^{l_{\max}} (2l+1) |\mathcal{F}_l|$ ,

и снова вследствие условия унитарности мы имеем  $|\mathcal{F}_l| < \sqrt{s}/2q \sim 1$ . Таким образом, получаем

$$|\mathcal{F}(s, \cos \theta)| < 16\pi l_{\max}^2 = \text{const} \cdot s (\ln s)^2. \quad (5.214)$$

Точную оценку фигурирующей здесь константы можно получить при рассмотрении максимального числа вычитаний  $n$ . Фактически это число может быть сведено к двум, если использовать ограничение, аналогичное (5.214), в  $u$ -канале и применить теорему Фрагмена — Линделефа. Последняя показывает, что граница  $s (\ln s)^2$  справедлива и для комплексных направлений; следовательно,  $n=2$ . Таким образом, граница Фруассара определяется неравенством

$$|\mathcal{F}(s, \cos \theta)| < 16\pi \frac{q^2}{t_0} (\ln s)^2, \quad (5.215)$$

а из оптической теоремы следует, что

$$\sigma_{\text{полн}} < \frac{1}{t_0} (\ln s)^2. \quad (5.216)$$

Хотя масштаб энергии под знаком логарифма не определен, удивительно, что тенденция, обнаруживаемая в экспериментальных данных, полученных на последнем поколении ускорителей, находится в качественном согласии с данным ограничением. Величину (5.213), на которой происходит обрезание углового момента, можно связать с эффективным радиусом поглощения  $r = l_{\max}/q \sim \ln s / \sqrt{t_0}$ . Исходя из аналогии с потенциальной теорией, мы

имели бы  $\rho \sim 1/\sqrt{t_0}$  ( $1/2 m_\pi$  для пион-нуклонного рассеяния). В действительности радиус поглощения отличается от этого наивного предсказания только логарифмическим ростом с энергией.

Используя свойства аналитичности, можно получить еще один результат, а именно то, что полные сечения рассеяния частицы и античастицы на данной мишени оказываются асимптотически одинаковыми.

Впервые этот результат теоретически получил Померанчук. Формулировка его теоремы нуждается в некоторых оговорках, поскольку полные сечения рассеяния могут возрастать при больших  $s$  как  $(\ln s)^2$ . Пусть  $\sigma$  — сечение рассеяния частицы, а  $\bar{\sigma}$  — то же для античастицы; тогда можно показать, что  $\sigma/\bar{\sigma} \rightarrow 1$  при  $s \rightarrow \infty$ .

Вопросу о роли свойств локальности и унитарности, которые определяют закономерности рассеяния, можно было бы и следовало бы уделить гораздо больше внимания. Более глубокое изложение этого материала имеется в обширной литературе, посвященной данному вопросу.

## ПРИМЕЧАНИЯ

Представление Челлена—Лемана описывается в книге: *Källen G. Quantum Electrodynamics.*— Berlin: Springer-Verlag, 1972. Асимптотическая теория подробно рассмотрена в работе: *Lehmann H., Symanzik K., Zimmermann W.*— *Nuovo Cimento*, 1955, vol. 1, p. 205. В статье: *Schwinger J.*— *Phys. Rev. Lett.*, 1959, vol. 3, p. 296, рассмотрен вопрос о дополнительных членах в коммутационных соотношениях токов.

В настоящее время вычисления по теории возмущений используются в качестве упражнений на учебных занятиях. Подробное изучение эффекта Комптона можно найти в книге: *Evans R. D. Handbuch der Physik*, 1958, vol. XXXIV, p. 218.

Основы теории дисперсионных соотношений изложены в следующих книгах, которыми читатель может воспользоваться в соответствии с его вкусом: *Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В.* Введение в теорию квантованных полей, изд. 3-е, перераб.— М.: Наука, 1976; *Dispersion Relations and Elementary Particles.*— Proc. of the 1960 Les Houches Summer School/ed. C. de Witt, R. Omnès.— Paris: Hermann, 1960 (см., например, *Goldberger M. L., Wightman A. S., Omnes R.*); — *Dispersion Relations*, 1960, Scottish Universities' Summer School/ed. G. R. Screation.— Edinburgh: Oliver and Boyd, 1961; *Dispersion Relations and Their Connection with Causality.*— Proc. of the International 1964 School of Physics Enrico Fermi/ed. Wigner E. P.— New York: Academic Press, 1964 (см., например, *Froissart M.*).

Пион-нуклонное рассеяние рассмотрено в книге: *Hamilton J.*— *Strong Interactions and High Energy Physics*, 1963 Scottish Universities' Summer School/ed. R. G. Moorhouse.— Edinburgh: Oliver and Boyd, 1964.

Обзор работ по аналитическим свойствам и их физическим следствиям, вытекающим из основных принципов, включая обсуждение различных высокоэнергетических границ см. в лекциях: *Martin A.* В книге: *Physique des Particules*, Les Houches 1971 Summer School/ed. C. de Witt, C. Itzykson.— New York: Gordon and Breach, 1973.

Основы теории S-матрицы обсуждаются в книге: *Jagolnitzer D. The S-Matrix*— Amsterdam: North-Holland, 1978.

## ПРИМЕЧАНИЕ РЕДАКТОРА ПЕРЕВОДА

Метод дисперсионных соотношений в квантовой теории поля был предложен Гелл-Манном, Голдбергером и Тиррингом (см. Phys. Rev. 1954, vol. 95, p. 1612 [Имеется перевод: Проблемы современной физики, 1955, № 3, с. 195] и строго обоснован исходя из общих физических требований Боголюбовым (см. Боголюбов Н. Н., Медведев Б. В., Поливанов М. К. Вопросы теории дисперсионных соотношений.— М.: Физматгиз, 1958). В последней монографии имеется доказательство теоремы об «острие клина»; см. также: Владимиров В. С. В сб. статей: Проблемы теоретической физики.— М.: Наука, 1969.

Дисперсионные соотношения сыграли важную роль в развитии теории взаимодействия частиц, в первую очередь сильных взаимодействий. В частности, на их основе получена теорема Померанчука (Померанчук И. Я.— ЖЭТФ, 1958, 34, с. 725). Теорема Померанчука была уточнена; получено ее более простое доказательство с помощью теоремы Фрагмена—Линделефа из теории аналитических функций в работах: Sugawara M., Kanazawa A.— Phys. Rev., 1961, vol. 123, 1995; Мейман Н. Н.— ЖЭТФ, 1962, т. 43, с. 2277. Далее следует указать работы, в которых теорема Померанчука была обобщена на дифференциальные сечения и было выведено соотношение

$$\frac{d\sigma/dt}{d\bar{\sigma}/dt} \xrightarrow{s \rightarrow \infty} 1$$

при фиксированном переданном импульсе (см.: Логунов А. А., Нгуен Ван Хьену, Годоров И. Т., Хрусталева О. А.— Phys. Lett., 1963, vol 7, p. 69, 71;— ЖЭТФ, 1965, т. 46, стр. 1079; Van Hove L.— Rev. Mod. Phys., 1964, vol. 36, p. 655).

Использование асимптотического поведения Редже в дисперсионных соотношениях по энергии привело к так называемым правилам сумм при конечных энергиях (см.: Логунов А. А., Соловьев Л. Д., Тавхелидзе А. Н.— Phys. Lett., 1967, vol. 24B, p. 181; Igi K., Matsuda S.— Phys. Rev. Lett., 1967, vol. 18, p. 625).

Аналитическим свойствам амплитуд и различным следствиям из них посвящены следующие монографии: Колинз П., Сквайрс Е. Полюса Редже в физике частиц.— М.: Мир, 1971; Ширков Д. В., Серебряков В. В., Мещеряков В. А. Дисперсионные теории сильных взаимодействий при низких энергиях.— М.: Наука, 1967; Хепп К., Эпштейн А. Аналитические свойства амплитуд рассеяния в локальной квантовой теории поля.— М.: Атомиздат. 1971.

# Глава 6

## ТЕОРИЯ ВОЗМУЩЕНИЙ

В настоящей главе будет развита релятивистская теория возмущений и диаграммная техника Фейнмана. Мы рассмотрим, в частности, случай, когда лагранжиан взаимодействия содержит производные, а также установим связь ряда теорий возмущений с разложением по степеням постоянной Планка и изучим некоторые простейшие топологические свойства. Будет введено параметрическое представление интегралов Фейнмана, и на его основе построено продолжение в евклидову область. В заключение обсудим аналитические свойства амплитуд и их поведение на разрезах.

### 6.1. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ И ПРАВИЛА ФЕЙНМАНА

Основной задачей теории поля является вычисление функций Грина, т. е. вакуумных средних хронологических произведений взаимодействующих полей:

$$G(x_1, \dots, x_n) = \langle 0 | T [\varphi(x_1) \dots \varphi(x_n)] | 0 \rangle. \quad (6.1)$$

Для ясности изложения рассмотрим здесь произвольное скалярное поле (или несколько таких полей)  $\varphi$ , а изложению квантовой электродинамики посвятим разд. 6.1.2. Удобно объединить все функции Грина в производящий функционал

$$\begin{aligned} Z(j) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \int d^4x_1 \dots d^4x_n j(x_1) \dots j(x_n) G(x_1, \dots, x_n) = \\ &= \langle 0 | T \exp \left[ i \int d^4x j(x) \varphi(x) \right] | 0 \rangle. \end{aligned} \quad (6.2)$$

При этом в соответствии с выражением (5.38) запишем  $S$ -матрицу в следующей компактной форме:

$$S = : \exp \left( \int d^4y \left\{ \varphi_{\text{in}}(y) \left[ (\square_y + m^2) \frac{1}{Z^{1/2}} \frac{\delta}{\delta j(y)} \right] \right\} \right) : Z(j)|_{j=0}. \quad (6.3)$$

Это соотношение представляет собой производящий функционал для редукционных формул. Поле  $\varphi(x)$  удовлетворяет динамическим уравнениям, полученным с помощью лагранжиана

$$\mathcal{L}(\varphi) = \mathcal{L}_0(\varphi) + \mathcal{L}_{\text{вз}}(\varphi), \quad (6.4)$$



где  $\mathcal{L}_0$  — квадратичный по полю  $\varphi_{\text{вз}}$  свободный лагранжиан, а  $\mathcal{L}_{\text{вз}}$  — лагранжиан взаимодействия. Ради простоты предположим сначала, что  $\mathcal{L}_{\text{вз}}$  не содержит производных полей. Поскольку, вообще говоря, для функций Грина нельзя найти точного выражения, нам приходится использовать теорию возмущений. При этом  $\mathcal{L}_{\text{вз}}$  рассматривается как малая добавка к  $\mathcal{L}_0$ . Обычно  $\mathcal{L}_{\text{вз}}$  зависит от одной или нескольких констант связи, и разложение теории возмущений оказывается степенным рядом по этой или этим константам. Однако, даже если константа связи мала, как в электродинамике, где  $\alpha = e^2/4\pi\hbar c = 1/137$ , мы не можем быть уверены в сходимости этого ряда. Как мы увидим ниже, имеются некоторые указания на то, что он является расходящимся асимптотическим рядом. Во всяком случае, разложение теории возмущений можно рассматривать как формальный математический ряд, из которого может быть извлечено много информации.

В случае когда теория содержит несколько констант связи, естественный «малый» параметр можно отождествить с  $\hbar$ . Соответствующий ряд можно также описать топологически. Это разложение по петлям, соответствующее возрастающему числу независимых петель в соответствующих диаграммах. Таким образом, разложение теории возмущений можно одновременно рассматривать как ряд по малой константе связи, как полуклассическое разложение в окрестности свободного поля и, наконец, как процедуру, определенную топологически.

Начнем рассмотрение, как и в предыдущих главах, с некоторого эвристического построения и пренебрежем сначала такими трудностями, как предел бесконечного объема, возможное появление ультрафиолетовых расходимостей или правильное определение лагранжиана. Эти вопросы мы рассмотрим позднее.

### 6.1.1. Самодействующее скалярное поле

Как уже отмечалось, мы ограничиваемся сначала рассмотрением скалярного поля  $\varphi$ . В гл. 4 было показано, что формально существует унитарный оператор  $U(t)$ , который преобразует свободное поле  $\varphi_{\text{in}}$  во взаимодействующее поле  $\varphi(t)$ :

$$\varphi(x) = U^{-1}(t) \varphi_{\text{in}}(x) U(t) \quad \text{при } t = x^0, \quad (6.5)$$

где

$$U(t) = T \exp \left[ -i \int_{-\infty}^t dt' H_{\text{вз}}(t') \right]. \quad (6.6)$$

Поскольку лагранжиан взаимодействия не содержит производных поля, мы имеем

$$H_{\text{вз}}(t) = - \int_{x^0=t} d^3x \mathcal{L}_{\text{вз}}[\varphi_{\text{in}}(x)]. \quad (6.7)$$

Введем оператор  $U(t_2, t_1)$  более общего вида:

$$U(t_2, t_1) = T \exp \left[ i \int_{t_1}^{t_2} dt' \int d^3x \mathcal{L}_{\text{вз}}(x, t') \right],$$

$$U(t, t) = I, \quad (6.8)$$

где  $\mathcal{L}_{\text{вз}}$  выражается, как и выше, через  $\varphi_{\text{in}}$ . Этот оператор обладает следующими свойствами:

$$U(t, -\infty) = U(t), \quad U(t_1, t_2) U(t_2, t_3) = U(t_1, t_3).$$

Выведем теперь фундаментальное соотношение

$$\begin{aligned} \langle 0 | T \exp \left[ i \int d^4x j(x) \varphi(x) \right] | 0 \rangle &= \\ &= \frac{\langle 0 | T \exp \left[ i \int d^4x \{ \mathcal{L}_{\text{вз}}[\varphi_{\text{in}}(x)] + j(x) \varphi_{\text{in}}(x) \} \right] | 0 \rangle}{\langle 0 | T \exp \left\{ i \int d^4x \mathcal{L}_{\text{вз}}[\varphi_{\text{in}}(x)] \right\} | 0 \rangle}. \end{aligned} \quad (6.9)$$

Эквивалентное соотношение получается, если приравнять коэффициенты при  $n$ -й степени  $j$  в разложении (6.9) по  $j$ :

$$G(x_1, \dots, x_n) = \frac{\langle 0 | T \varphi_{\text{in}}(x_1) \cdots \varphi_{\text{in}}(x_n) \exp \left\{ i \int d^4x \mathcal{L}_{\text{вз}}[\varphi_{\text{in}}(x)] \right\} | 0 \rangle}{\langle 0 | T \exp \left\{ i \int d^4x \mathcal{L}_{\text{вз}}[\varphi_{\text{in}}(x)] \right\} | 0 \rangle}. \quad (6.10)$$

В правой части соотношений (6.9) и (6.10) символ  $T$ -произведения относится ко всему выражению. Это означает, что после разложения экспоненты в степенной ряд по  $\mathcal{L}_{\text{вз}}$  все поля  $\varphi_{\text{in}}$  должны быть упорядочены по времени. При этом вакуумное состояние  $|0\rangle$  следует понимать как вакуумное  $\text{in}$ -состояние  $|0_{\text{in}}\rangle$ .

Предположим, что взаимодействие адиабатически выключается в отдаленном прошлом; отсюда следует, что  $\lim_{t \rightarrow -\infty} U(t) = I$ . Рас-

смотрим упорядоченное во времени множество точек  $x_1, \dots, x_n$ , удовлетворяющее неравенствам  $x_1^0 > x_2^0 > \dots > x_n^0$ . При этом мы имеем

$$\begin{aligned} \langle 0 | T \varphi(x_1) \cdots \varphi(x_n) | 0 \rangle &= \langle 0 | \varphi(x_1) \cdots \varphi(x_n) | 0 \rangle = \\ &= \langle 0 | U^{-1}(t_1) \varphi_{\text{in}}(x_1) U(t_1, t_2) \varphi_{\text{in}}(x_2) \cdots \times \\ &\quad \times U(t_{n-1}, t_n) \varphi_{\text{in}}(x_n) U(t_n) | 0 \rangle. \end{aligned}$$

Для отдаленного момента времени  $t$ , такого, что  $t \gg t_1$ ,  $-t \ll t_n$ , мы можем записать

$$U(t_n) = U(t_n, -t) U(-t)$$

и

$$U^{-1}(t_1) = U^{-1}(t) U(t, t_1).$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} <0|T\varphi(x_1)\cdots\varphi(x_n)|0\rangle = \\ = <0|U^{-1}(t)T\varphi_{in}(x_1)\cdots\varphi_{in}(x_n)\exp\left[-i\int_{-t}^t dt' H_{вз}(t')\right]U(-t)|0\rangle. \end{aligned} \quad (6.11)$$

Эта формула остается верной в случае произвольного упорядочения во времени  $x_1^0, \dots, x_n^0$  в пределах интервала  $(-t, t)$ . Полагая  $t \rightarrow \infty$ , получаем

$$\lim_{t \rightarrow \infty} U(-t)|0\rangle = |0\rangle. \quad (6.12)$$

В том же пределе величина  $<0|U^{-1}(t)$  с точностью до фазы должна быть равна  $<0|$ , поскольку предполагается, что вакуумное состояние стабильно. Следовательно,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} <0|U^{-1}(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} <0|U^{-1}(t)|0\rangle <0| = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{<0|U(t)|0\rangle} <0| \quad (6.13)$$

Подставляя (6.12) и (6.13) в (6.11), приходим к искомому соотношению (6.10). Наш вывод носит лишь эвристический характер, поэтому соотношения (6.9) и (6.10) можно рассматривать как определения.

Замечательно то, что соотношения (6.9) и (6.10) приводят к явно ковариантным выражениям, — это обстоятельство не казалось тривиальным в период создания релятивистской теории возмущений. Согласно теореме Вика,  $T$ -произведение сводится к определенным комбинациям нормальных произведений и ковариантных пропагаторов. «Бухгалтерию» этих комбинаций можно перевести на язык диаграмм, к рассмотрению которых мы сейчас переходим.

Разложим в числителе выражения (6.10) экспоненту в ряд и будем опускать всюду в дальнейшем индексы «in». Тогда получим

$$\begin{aligned} G(x_1, \dots, x_n) <0|T\exp\left[i\int d^4x \mathcal{L}_{вз}(x)\right]|0\rangle = \\ = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{i^p}{p!} <0|T\varphi(x_1)\cdots\varphi(x_n)\int d^4y_1\cdots d^4y_p \mathcal{L}_{вз}(y_1)\cdots\mathcal{L}_{вз}(y_p)|0\rangle. \end{aligned} \quad (6.14)$$

Для определенности рассмотрим так называемую теорию  $\varphi^4$ :

$$\mathcal{L}_{вз}[\varphi(x)] = \frac{-\lambda}{4!} \varphi^4(x). \quad (6.14a)$$

Все последующие рассуждения нетрудно обобщить на произвольное полиномиальное взаимодействие без производных. Нормирующий множитель  $1/4!$  введен для удобства, поскольку при вычислениях он приводит к устранению комбинаторных факторов.

Перед константой связи знак минус выбран таким же, как и в классической теории с полным лагранжианом  $(\partial_\mu \varphi)^2/2 - m^2 \varphi^2/2 - \lambda \varphi^4/4!$ , что обеспечивает устойчивость решения  $\varphi = 0$  уравнения движения. Подставляя в (6.14) выражение (6.14а), получаем

$$\begin{aligned} G(x_1, \dots, x_n) \langle 0 | T \exp \left[ -\frac{i\lambda}{4!} \int d^4x : \varphi^4(x) : \right] | 0 \rangle = \\ = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-i\lambda)^p}{p!} \langle 0 | T \varphi(x_1) \dots \varphi(x_n) \int d^4y_1 \dots d^4y_p \frac{:\varphi^4(y_1):}{4!} \dots \frac{:\varphi^4(y_p):}{4!} | 0 \rangle. \end{aligned} \quad (6.15)$$

Чтобы вычислить вакуумное среднее хронологического произведения свободных полей, применим теорему Вика [соотношение (4.65)] с элементарным спариванием

$$\overline{\varphi(x) \varphi(y)} = \langle 0 | T \varphi(x) \varphi(y) | 0 \rangle = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{i}{k^2 - m^2 + i\epsilon} e^{-ik \cdot (x-y)}. \quad (6.16)$$

Напомним, что спаривание двух полей, стоящих под знаком нормального произведения, отсутствует. Данное множество спариваний удобно представить с помощью диаграммы, вклад которой можно вычислить по соответствующим правилам. Сформулируем эти правила сначала в конфигурационном пространстве. Поскольку в теории  $\varphi^4$  [(6.14а)] не равны нулю лишь функции Грина с четным числом внешних полей, заменим  $n$  на  $2n$ . Сопоставим члену  $p$ -го порядка

$$(-i\lambda)^p \langle 0 | T \varphi(x_1) \dots \varphi(x_{2n}) \frac{:\varphi^4(y_1):}{4!} \dots \frac{:\varphi^4(y_p):}{4!} | 0 \rangle \quad (6.17)$$

сумму вкладов, каждому из которых соответствует диаграмма Фейнмана. На такой диаграмме  $x_1, \dots, x_{2n}$  — концы внешних линий, а  $y_1, \dots, y_p$  — вершины. Из каждой вершины выходят четыре линии, причем каждая линия соединяет две различные точки:  $x_\alpha$  и  $x_\beta$ , или  $x_\alpha$  и  $y_\alpha$ , или  $y_\alpha$  и  $y_\beta$  ( $\alpha \neq \beta$ ). Линии, соединяющей точки  $z_i$  и  $z_j$  ( $z = x_\alpha$  или  $y_\alpha$ ), соответствует пропагатор  $\overline{\varphi(z_i) \varphi(z_j)}$ . Каждой вершине сопоставляем множитель  $-i\lambda$ . Наконец, следует учесть так называемый фактор симметрии, отвечающий учету всех возможных спариваний, приводящих к данной диаграмме. Если мы свернем все четыре поля, входящих в моном  $:\varphi^4(y_\alpha):/4!$  с четырьмя полями, зависящими от других аргументов, мы получим комбинаторный множитель  $4!$ , который компенсирует множитель  $1/4!$ . С другой стороны, если две линии, выходящие из  $y_\alpha$ , оканчиваются в одной и той же точке  $y_\beta$ , множители  $1/4!$  в вершинах  $y_\alpha$  и  $y_\beta$  сокращаются только частично. В случае, изображенном на рис. 6.1, а, этот множитель равен  $1/2!$ . Он получается в результате следующей операции:  $1/4! \times 1/4!$  (начальные вершинные факторы)  $\times 4 \times 3$  (число возможных спариваний

$z_1 - y_1, z_2 - y_1) \times 4 \times 3$  (спаривания  $z_3 - y_2, z_4 - y_2) \times 2$  (спаривание между  $y_1$  и  $y_2$ ). Аналогично в случае рис. 6.1, б имеем  $1/3!$ . Вообще говоря, фактор симметрии равен  $1/S$ , где  $S$  — порядок группы симметрии диаграммы, т. е. группы перестановок линий в случае, когда вершины являются фиксированными.

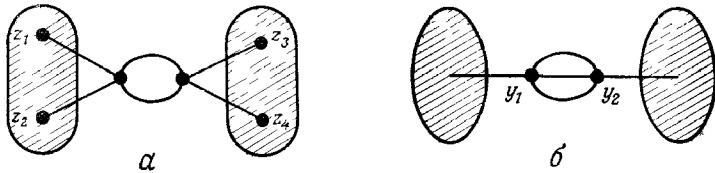


РИС. 6.1. Примеры диаграмм, имеющих фактор симметрии. а —  $S=2!$ ; б —  $S=3!$ .

Сформулируем правила Фейнмана для  $T$ -произведения (6.17).

1. Нарисовать все различные диаграммы с  $2n$  внешними точками  $x_1, \dots, x_{2n}$  и  $p$  вершинами  $y_1, \dots, y_p$  и просуммировать их вклады в соответствии со следующими правилами.
2. Каждой вершине сопоставить фактор  $-i\lambda$ .
3. Каждой линии между  $z_i$  и  $z_j$  сопоставить спаривание  $\overline{\varphi(z_i)\varphi(z_j)}$ , определяемое выражением (6.16).
4. Разделить вклад каждой диаграммы на фактор симметрии  $S$ .

В качестве примера рассмотрим двухточечную функцию  $(-i\lambda)^p \langle 0 | T \varphi(x_1) \varphi(x_2) : \varphi^4(y_1) : / 4! \dots : \varphi^4(y_p) : / 4! | 0 \rangle$  в низших порядках теории возмущений. При  $p=0$  имеем  $\overline{\varphi(x_1)\varphi(x_2)}$ , тогда

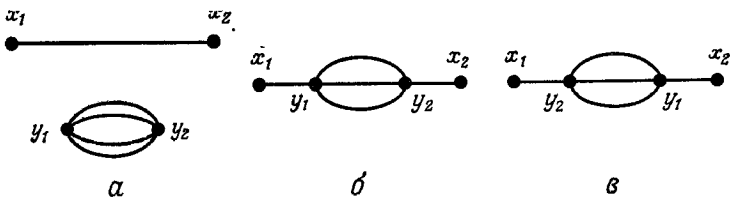


РИС. 6.2. Вклады низшего порядка в двухточечную функцию теории  $\varphi^4$ .

как при  $p=1$  вклада не существует, поскольку спаривания  $\overline{\varphi(y)\varphi(y)}$  нами запрещены. При  $p=2$  существуют следующие три вклада, представленные на рис. 6.2:

$$1) \frac{(-i\lambda)^2}{4!} \overline{\varphi(x_1)\varphi(x_2)} \left[ \overline{\varphi(y_1)\varphi(y_2)} \right]^4,$$

$$2) \frac{(-i\lambda)^2}{3!} \overline{\varphi(x_1)\varphi(y_1)} \left[ \overline{\varphi(y_1)\varphi(y_2)} \right]^3 \overline{\varphi(y_2)\varphi(x_2)},$$

3) тот же вклад, что и в предыдущем случае, но с заменой  $y_1 \leftrightarrow y_2$ .

Следует заметить, что в правиле 1 слова «различные диаграммы» имеют существенное значение. В конфигурационном пространстве диаграммы считаются различными, если они отличаются топологически, когда все точки  $x_i$  и  $y_i$  фиксированы. Например, диаграммы на рис. 6.2, б и в различны, в то время как диаграммы на рис. 6.3, а и б не являются таковыми; в последнем случае следует учитывать только одну из них.

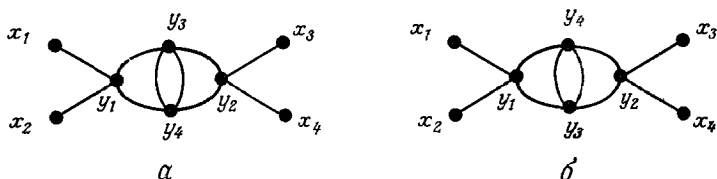


РИС. 6.3. Пример неразличимых диаграмм; следует учитывать только одну из них.

Разделим все диаграммы на два класса. Диаграммы первого класса не содержат вакуумных поддиаграмм, т. е. поддиаграмм, которые не связаны с внешними точками (см. рис. 6.2, а), диаграммы второго класса включают такие поддиаграммы. Добавляя вакуумные поддиаграммы, каждой диаграмме первого класса можно сопоставить набор диаграмм второго класса. Обозначая индексом (1) вклад диаграмм первого класса в функцию Грина, можно написать следующее соотношение:

$$\begin{aligned}
 G(x_1, \dots, x_{2n}) &< 0 | T \exp \left\{ i \int d^4x \mathcal{L}_{\text{вз}}[\varphi(x)] \right\} | 0 \rangle = \\
 &= \sum_{p=0}^{\infty} \frac{i^p}{p!} \int d^4y_1 \dots d^4y_p \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} \langle 0 | T \varphi(x_1) \dots \varphi(x_{2n}) \mathcal{L}_{\text{вз}}(y_1) \dots \\
 &\quad \dots \mathcal{L}_{\text{вз}}(y_k) | 0 \rangle^{(1)} \times \langle 0 | T \mathcal{L}_{\text{вз}}(y_{k+1}) \dots \mathcal{L}_{\text{вз}}(y_p) | 0 \rangle, \quad (6.18)
 \end{aligned}$$

поскольку вакуумные поддиаграммы  $(p-k)$ -го порядка соответствуют вакуумному среднему хронологического произведения  $p-k$  лагранжианов взаимодействия. В (6.18) комбинаторный фактор

$$\binom{p}{k} = \frac{p!}{k!(p-k)!}$$

появляется вследствие того, что при интегрировании по  $y_1, \dots, y_p$  все возможные перестановки  $y$  дают одинаковые вклады. Легко видеть, что вакуумные амплитуды  $\langle 0 | T \exp \left[ i \int d^4x \mathcal{L}_{\text{вз}}(x) \right] | 0 \rangle$

факторизуются в обеих частях соотношения (6.18) и что

$$G(x_1, \dots, x_{2n}) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{i^p}{p!} \int d^4 y_1 \dots d^4 y_p \langle 0 | T \varphi(x_1) \dots \varphi(x_{2n}) \mathcal{L}_{\text{вз}}(y_1) \dots \mathcal{L}_{\text{вз}}(y_p) | 0 \rangle^{(1)}. \quad (6.19)$$

В правую часть выражения (6.19) дают вклад только диаграммы, не имеющие вакуумных поддиаграмм.

Правила Фейнмана в импульсном пространстве выглядят более просто. Запишем фурье-образ  $\tilde{G}$  функции Грина

$$G(x_1, \dots, x_{2n}) = \int \frac{d^4 p_1}{(2\pi)^4} \dots \frac{d^4 p_{2n}}{(2\pi)^4} \exp\left(i \sum_1^{2n} p_j \cdot x_j\right) \tilde{G}(p_1, \dots, p_{2n}), \quad (6.20)$$

т. е.

$$\tilde{G}(p_1, \dots, p_{2n}) = \int d^4 x_1 \dots d^4 x_{2n} \exp\left(-i \sum_{j=1}^{2n} p_j \cdot x_j\right) G(x_1, \dots, x_{2n}).$$

В нашем рассмотрении все  $p$ -входящие импульсы. В силу трансляционной инвариантности полный импульс сохраняется, т. е.

$\sum_{j=1}^{2n} p_j = 0$ ; это означает, что  $\tilde{G}$  имеет следующий вид:

$$\tilde{G}(p_1, \dots, p_{2n}) = (2\pi)^4 \delta^4(p_1 + \dots + p_{2n}) G(p_1, \dots, p_{2n}). \quad (6.21)$$

Для простоты мы обозначим функцию Грина одним и тем же символом в  $x$ - и  $p$ -пространствах. Чтобы вычислить  $\tilde{G}$  по формулам (6.19) и (6.20), необходимо выполнить интегрирование по всем пространственно-временным точкам  $x$  и  $y$ . Используя фурье-преобразование элементарного спаривания (6.16), после интегрирования по  $x_i$  мы получаем, что каждая внешняя линия дает вклад  $i(p_i^2 - m^2 + i\epsilon)^{-1}$ . Остаются интегралы по координатам  $y_i$  и  $k_i$ , которые представляют собой импульсы, отвечающие внутренним линиям. Исследуем теперь вклады, определенные данной конфигурацией линий и вершин при фиксированных внутренних импульсах и заданных внешних конфигурационных аргументах  $x_1, \dots, x_{2n}$ . Любая перестановка координат внутренних вершин  $y_1, \dots, y_p$  приводит к одному и тому же вкладу. Однако не все  $p!$  перестановок  $y$  с необходимостью порождают в конфигурационном пространстве топологически различные диаграммы. Если бы это было так, мы получили бы множитель  $p!$ , компенсирующий множитель  $(p!)^{-1}$  в выражении (6.19). В некоторых диаграммах две вершины (или более) могут играть одинаковую роль (этот случай показан на рис. 6.3, где такими вершинами являются  $y_3$  и  $y_4$ ). Если  $p$  вершин разбить на группы из  $v_i$ ,

$v_2, \dots, v_s$  вершин, играющих одну и ту же роль ( $v_1 + \dots + v_s = p$ ), то интегрирование по  $y$  дает фактор вырождения  $p! / v_1! \dots v_s!$ . В выражении (6.19) он приводит лишь к частичной компенсации множителя  $(p!)^{-1}$  и сохраняет вершинный фактор симметрии  $1/v_1! \dots v_s!$ , который умножается на фактор симметрии линий, рассмотренный выше. Например, в импульсном пространстве диаграмма, приведенная на рис. 6.3, а, имеет общий фактор симметрии  $(1/2) \times (1/2)$ .

Наконец, каждый интеграл по  $y$  имеет вид

$$\int d^4 y_j e^{-iy_j \cdot q_j} = (2\pi)^4 \delta^4(q_j),$$

где  $q_j$  обозначает сумму всех внешних или внутренних импульсов, входящих в вершину  $y_j$ . Таким образом, сохранение полного импульса есть следствие сохранения импульса в каждой вершине.

Теперь можно сформулировать правила Фейнмана для функции Грина  $\tilde{G}(p_1, \dots, p_{2n})$  в импульсном пространстве.

1. Нарисовать все топологически различные диаграммы с  $2n$  внешними линиями, соответствующими входящим импульсам  $p_1, \dots, p_{2n}$  и не имеющими вакуумных поддиаграмм. Внутренние линии каждой диаграммы обозначаются через  $k_1, \dots, k_l$ . В скалярной теории со взаимодействием без производных выбор ориентации внутренних линий несуществен.

2. Внешней линии с номером  $j$  сопоставить множитель  $i/(p_j^2 - m^2 + i\epsilon)$ .

3. Внутренней линии с номером  $l$  сопоставить множитель  $[d^4 k_l / (2\pi)^4] [i/(k_l^2 - m^2 + i\epsilon)]$ .

4. Каждой вершине сопоставить множитель  $(-i\lambda) (2\pi)^4 \delta^4(q_j)$ , где  $q_j$  — сумма всех импульсов, входящих в  $j$ -ю вершину.

5. Произведение всех этих вкладов проинтегрировать по переменным  $k$  и полученное выражение разделить на фактор симметрии внутренних линий и вершин рассматриваемой диаграммы.

6. Вычислить сумму вкладов всех топологически различных диаграмм.

Вообще говоря, если  $V$  — число вершин (обозначенное выше через  $p$ ), а  $I$  — число внутренних линий, то после того, как мы выделили условие сохранения полного импульса  $k$  (6.21), остается  $V - 1$  условий сохранения и, следовательно, не более  $I - V + 1$  нетривиальных интегрирований.

В случае когда в диаграммах некоторые внешние линии совсем не связаны с вершинами, правила Фейнмана нужно несколько изменить. Например, отдельный пропагатор, показанный на рис. 6.4, в конфигурационном пространстве дает вклад

$$\int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon} e^{-ip \cdot (x_k - x_l)},$$



а в импульсном пространстве

$$\frac{i}{p_k^2 - m^2 + i\epsilon} (2\pi)^4 \delta^4(p_k + p_l).$$

Проиллюстрируем эти правила в низшем порядке теории возмущений для двух- и четырехточечной функций Грина. После отделения  $\delta$ -функции, отвечающей сохранению полного импульса,

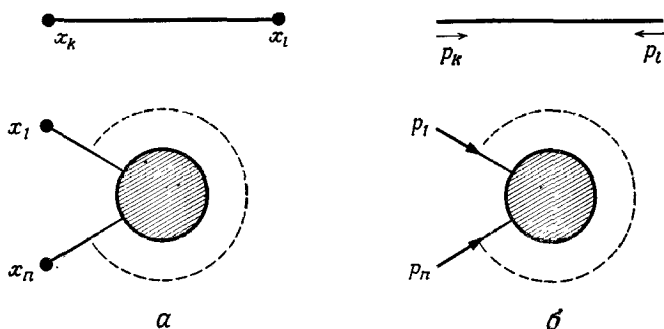


РИС. 6.4. Диаграммы с короткозамкнутым пропагатором. а — в конфигурационном пространстве; б — в импульсном пространстве.

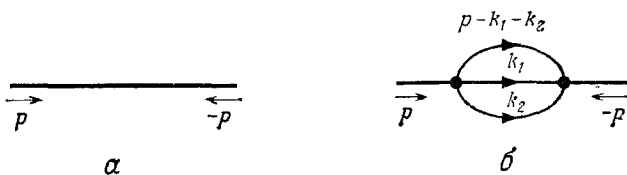


РИС. 6.5. Вклады низших порядков в двухточечную функцию в импульсном пространстве.

вклады диаграмм в двухточечную функцию  $G_2(p, -p)$ , представленные на рис. 6.5, запишутся в виде

$$\begin{aligned} & \text{а) } \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon}, \\ & \text{б) } \frac{(-i\lambda)^2}{3!} \left( \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \right)^2 \int \frac{d^4 k_1 d^4 k_2}{(2\pi)^4 (2\pi)^4} \times \\ & \quad \times \frac{i^3}{(k_1^2 - m^2 + i\epsilon) (k_2^2 - m^2 + i\epsilon) [(p - k_1 - k_2)^2 - m^2 + i\epsilon]}. \end{aligned}$$

Аналогично вклады диаграмм, представленные на рис. 6.6, в

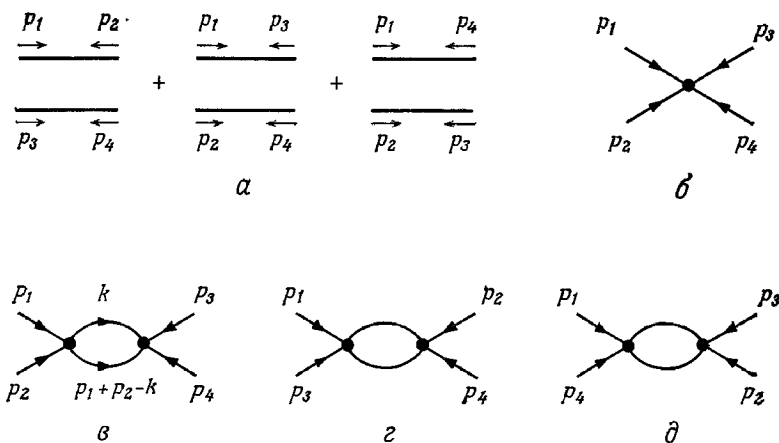


РИС. 6.6. Вклады низшего порядка в четырехточечную функцию.

$G_4(p_1, p_2, p_3, p_4)$  (причем  $p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 0$ ) равны:

$$а) i^2 (2\pi)^4 \left[ \frac{\delta^4(p_1 + p_2)}{(p_1^2 - m^2 + i\varepsilon)(p_3^2 - m^2 + i\varepsilon)} + \frac{\delta^4(p_1 + p_3)}{(p_1^2 - m^2 + i\varepsilon)(p_2^2 - m^2 + i\varepsilon)} + \frac{\delta^4(p_1 + p_4)}{(p_1^2 - m^2 + i\varepsilon)(p_2^2 - m^2 + i\varepsilon)} \right],$$

$$б) \frac{i^4 (-i\lambda)}{(p_1^2 - m^2 + i\varepsilon)(p_3^2 - m^2 + i\varepsilon)(p_3^2 - m^2 + i\varepsilon)(p_2^2 - m^2 + i\varepsilon)},$$

$$в) \frac{1}{2} \prod_{j=1}^4 \frac{i}{p_j^2 - m^2 + i\varepsilon} (-i\lambda)^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{i^2}{(k^2 - m^2 + i\varepsilon)[(p_1 + p_2 - k)^2 - m^2 + i\varepsilon]},$$

г) и д) те же вклады, что и в случае (в), но с заменой  $p_2 \leftrightarrow p_3$  и  $p_2 \leftrightarrow p_4$  соответственно.

При расчетах соответствующих элементов  $S$ -матрицы внешние пропагаторы  $i(p_i^2 - m^2 + i\varepsilon)^{-1}$  в точности компенсируются оператором  $(i(\square_{x_i} + m^2))$ , входящим в редукционные формулы (5.28). При этом последующее интегрирование по  $x_i$  отождествляет входящий импульс функции Грина, определяемой выражением (6.20), с физическим импульсом элемента  $S$ -матрицы, лежащим на массовой поверхности. Следовательно, чтобы получить вклад данной диаграммы Фейнмана в  $S$ -матрицу, необходимо опустить внешние пропагаторы и считать, что все внешние импульсы лежат на массовой поверхности. Как мы увидим позже, это правило должно быть дополнено перенормировками массы и волновой функции.

В случае несвязной диаграммы в функцию Грина  $G$  входят  $\delta$ -функции, выражающие сохранение частичных сумм внешних импульсов. В гл. 5 связные функции Грина  $G_c$  определяются

рекурсивным выражением

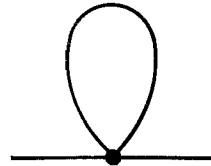
$$G(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\cup I_\alpha = I} \prod_{\alpha} G_c(x_{I_\alpha}), \quad (6.22)$$

где  $I \equiv \{1, \dots, n\}$ ,  $x_I = \{x_1, \dots, x_n\}$ , и начальным условием  $G(x_1, x_2) = G_c(x_1, x_2)$  (для теории  $\varphi^4$ ). Диаграммы, не имеющие вакуумных поддиаграмм, входящих в разложение  $G(x_1, x_2)$ , являются (топологически) связными. Покажем по индукции, что в  $G_c(x_1, \dots, x_{2n})$  дают вклад только связные диаграммы. Предположим, что это справедливо для  $(2n-2)$ -точечной функции Грина и перепишем выражение (6.22) в виде

$$G(x_1, \dots, x_{2n}) = G_c(x_1, \dots, x_{2n}) + \sum_{\substack{\cup I_\alpha = I \\ |\alpha| > 1}} \prod_{\alpha} G_c(x_{I_\alpha}). \quad (6.23)$$

Подставляя сюда диаграммные разложения функции  $G(x_1, \dots, x_{2n})$  и каждой функции  $G_c$ , входящей в сумму в правой части, мы видим, что вклад каждой несвязной диаграммы в  $G(x_1, \dots, x_{2n})$  можно отождествить с некоторым членом суммы и наоборот. Отсюда следует, что алгебраическое определение связности [вы-

РИС. 6.7. Диаграмма «головастик».



ражение (6.22)] можно отождествить с ее топологическим определением.

Вернемся к обсуждению роли нормального упорядочения в лагранжиане взаимодействия (6.14а). Если бы мы сохранили обычное произведение полей в лагранжиане  $\mathcal{L}_{вз} = -\lambda/4! \varphi^4(x)$ , то появились бы новые диаграммы, а именно диаграммы, содержащие спаривания полей, относящихся к одной и той же вершине. Например, в двухточечной функции Грина появилась бы диаграмма типа «головастик», изображенная на рис. 6.7. В некоторых случаях оказывается более удобным сохранять обычное произведение и включать в рассмотрение «головастики». Это имеет место, например, когда мы хотим произвести над полями локальные неоднородные преобразования (скажем, трансляцию), сохраняя при этом также какие-либо свойства симметрии. Для теории  $\varphi^4$  переход от одного упорядочения к другому приводит просто к изменению массового члена. Это изменение в действительности оказывается бесконечным, но, как мы скоро увидим, его можно включить в перенормировку массы.

Теперь, после того как мы сформулировали правила Фейнмана для самодействующего скалярного поля, можно решить ту же задачу для более сложных и физически более интересных теорий, а именно для спинорной и скалярной квантовой электродинамики. Остальные случаи, включая поля с внутренними симметриями, мы рассмотрим в следующих главах. В любом случае общий метод получения правил Фейнмана очевиден. Однако следует заметить, что в некоторых сомнительных ситуациях, в частности, когда неясно значение фактора симметрии, может оказаться, что целесообразно вернуться к исходной точке, т. е. к выражению (6.10) и теореме Вика.

### 6.1.2. Правила Фейнмана для спинорной электродинамики

Полный лагранжиан, описывающий взаимодействующую систему фотонов, электронов и позитронов, записывается в виде

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0^{\gamma} + \mathcal{L}_0^{e^+, e^-} + \mathcal{L}_{\text{вз}}, \quad (6.24)$$

где

$$\mathcal{L}_0^{\gamma} = -\frac{1}{4} F^2 + \frac{\mu^2}{2} A^2 - \frac{\lambda}{2} (\partial \cdot A)^2,$$

$$\mathcal{L}_0^{e^+, e^-} = \frac{i}{2} \bar{\psi} \gamma^{\mu} \overleftrightarrow{\partial}_{\mu} \psi - m \bar{\psi} \psi, \quad (6.25)$$

$$\mathcal{L}_{\text{вз}} = -e \bar{\psi} \gamma^{\mu} \psi A_{\mu}.$$

Эти выражения нам уже встречались в гл. 3 и 4. В первом из выражений (6.25) вводится массивный фотон с массой  $\mu$ , много меньшей массы электрона  $m$ , и здесь нам приходится использовать индефинитную метрику. Лагранжиан взаимодействия соответствует минимальной связи, т. е. замене  $i\partial_{\mu} \rightarrow i\partial_{\mu} - eA_{\mu}$  в электронном лагранжиане.

Для двух типов пропагаторов, входящих в спаривания, будем использовать различные обозначения. Электрон-позитронный пропагатор обозначим сплошной линией, ориентированной в направлении распространения заряда ( $e$ ):

$$\begin{array}{c} \bullet \longleftarrow \bullet \\ x, \alpha \qquad y, \beta \end{array} = \langle 0 | T \psi_{\alpha}(x) \bar{\psi}_{\beta}(y) | 0 \rangle = \overbrace{\psi_{\alpha}(x) \bar{\psi}_{\beta}(y)} = \\ = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} e^{-ik(x-y)} \left( \frac{i}{k - m + i\varepsilon} \right)_{\alpha\beta}. \quad (6.26)$$

Этот пропагатор, как известно, не является симметричной функцией от  $x$  и  $y$ , но удовлетворяет соотношению (3.176). Фотонный

пропагатор мы обозначим волнистой линией:

$$\begin{aligned}
 \text{---} \bullet \text{---} &= \langle 0 | T A_\rho(x) A_\nu(y) | 0 \rangle = \overline{A_\rho(x)} A_\nu(y) = \\
 x, \rho & \quad y, \nu \\
 &= \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} e^{-ik(x-y)} (-i) \left( \frac{g_{\nu\rho} - k_\nu k_\rho / \mu^2}{k^2 - \mu^2 + i\epsilon} + \frac{k_\nu k_\rho / \mu^2}{k^2 - M^2 + i\epsilon} \right). \quad (6.27)
 \end{aligned}$$

Для того чтобы избежать путаницы с электронной массой  $m$ , здесь введено обозначение  $M \equiv \mu^2/\lambda$ . Следует отметить, что величины  $\lambda$  и  $M^2$  не входят в физические результаты.

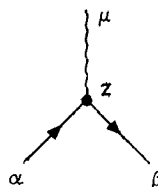
Вследствие сохранения заряда функции Грина содержат равные числа полей  $\psi$  и  $\bar{\psi}$ :

$$\begin{aligned}
 G(x_1, \dots, x_n; x_{n+1}, \dots, x_{2n}; y_1, \dots, y_p) = \\
 = \langle 0 | T \psi(x_1) \dots \psi(x_n) \bar{\psi}(x_{n+1}) \dots \bar{\psi}(x_{2n}) A_{\nu_1}(y_1) \dots A_{\nu_p}(y_p) | 0 \rangle. \quad (6.28)
 \end{aligned}$$

Чтобы не усложнять обозначения, мы опустили спинорные и векторные индексы, от которых зависит  $G$ . Как и в случае (6.14), можно получить выражение для  $G$  через  $\text{in}$ -поля:

$$\begin{aligned}
 G(x_1, \dots, x_{2n}; y_1 \dots y_p) = \\
 = \frac{\langle 0 | T \psi_{\text{in}}(x_1) \dots \bar{\psi}_{\text{in}}(x_{2n}) A_{\nu_1}^{\text{in}}(y_1) \dots A_{\nu_p}^{\text{in}}(y_p) \exp i \int d^4 z \mathcal{L}_{\text{вз}}(z) | 0 \rangle}{\langle 0 | T \exp i \int d^4 z \mathcal{L}_{\text{вз}}(z) | 0 \rangle}, \quad (6.29)
 \end{aligned}$$

где предполагается, что поля, входящие в лагранжиан  $\mathcal{L}_{\text{вз}}(z) = \mathcal{L}_{\text{вз}}[\psi_{\text{in}}(z), \bar{\psi}_{\text{in}}(z), A_{\text{in}}(z)]$ , нормально упорядочены. В дальнейшем индексы «in» будем опускать. Разлагая (6.29) в степенной ряд по  $e$  и используя теорему Вика, приходим к диаграммам Фейнмана, построенным из пропагаторов (6.26) и (6.27) и вершины



$$= -ie (\gamma_\mu)_{\beta\alpha}. \quad (6.30)$$

Эта вершина имеет один векторный и два спинорных индекса, которые сворачиваются с соответствующими индексами фотонных и фермионных пропагаторов. Как и в скалярном случае, знаменатель в (6.29) служит для исключения вакуумных поддиаграмм.

Рассмотрим знаки, появившиеся после применения теоремы Вика к фермионам. Вследствие сохранения заряда в диаграммах встречаются два вида фермионных линий. замкнутые петли и незамкнутые линии, оканчивающиеся в точках  $x_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ) и на-

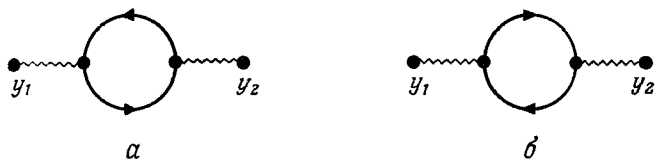


РИС. 6.8. Пример идентичных диаграмм в спинорной электродинамике; учитываться должна только одна из них.

чинающиеся в  $x_{k_i}$  ( $n+1 \leq k_i \leq 2n$ ). Замкнутые петли составлены из последовательности пропагаторов полей, входящих в лагранжиан взаимодействия:

$$\overbrace{\psi(z_1) \bar{\psi}(z_k)} \overbrace{\psi(z_k) \bar{\psi}(z_l)} \dots \overbrace{\psi(z_q) \bar{\psi}(z_1)}. \quad (6.31)$$

Так как последние коммутируют под знаком  $T$ -произведения, его можно записать в виде

$$\langle 0 | T \dots [\bar{\psi}(z_1) A(z_1) \psi(z_1)] [\bar{\psi}(z_k) A(z_k) \psi(z_k)] \dots \\ \dots [\bar{\psi}(z_q) A(z_q) \psi(z_q)] \dots | 0 \rangle,$$

не меняя знака выражения Произведение спариваний (6.31) получается после перестановки функций  $\bar{\psi}(z_i)$  с нечетным числом полей Отсюда следует, что каждой фермионной петле отвечает знак минус.

С другой стороны, незамкнутые линии определяют перестановку точек  $x_i$ :  $x_1 x_{k_1} x_2 x_{k_2} \dots x_n x_{k_n}$  (где  $x_{k_p}$  — начало линии, кончающейся в  $x_p$ ) Это приводит к появлению дополнительного знака, равного сигнатуре перестановки

$$(1, 2, \dots, 2n) \rightarrow (1, k_1, 2, k_2, \dots, n, k_n).$$

Диаграммы, различающиеся только ориентацией фермионной петли, обе дают вклад только в том случае, если они топологически различны Например, очевидно, что диаграммы на рис. 6.8 идентичны, лишь одна из них дает вклад в  $G(y_1, y_2)$  Напротив, каждая из двух диаграмм на рис. 6.9, *a* и *b* дает вклад в четырехфотонную функцию (рассеяние фотона на фотоне) Эти вклады соответствуют двум различным совокупностям спариваний:

$$\begin{array}{l} \text{a) } \overbrace{\psi(z_1) A(z_1) \psi(z_1) \bar{\psi}(z_2) A(z_2) \psi(z_2) \bar{\psi}(z_3) A(z_3) \psi(z_3) \bar{\psi}(z_4) A(z_4) \psi(z_4)} \\ \text{б) } \overbrace{\psi(z_1) A(z_1) \psi(z_1) \bar{\psi}(z_2) A(z_2) \psi(z_2) \bar{\psi}(z_3) A(z_3) \psi(z_3) \bar{\psi}(z_4) A(z_4) \psi(z_4)} \end{array}$$

причем  $A(z_i)$  сворачивается с  $A(y_i)$  и т. п. В конфигурационном пространстве в четырехточечную функцию  $G(y_1, \dots, y_4)$  дают вклады  $4! \times 3!$  различных диаграмм, которые получаются из диаграммы, приведенной на рис. 6.9, а, с помощью перестановок точек  $z_1, z_2, z_3, z_4$  и  $y_2, y_3, y_4$ ; например, диаграмма на рис. 6.9, б получается из диаграммы рис. 6.9, а перестановками  $y_2 \leftrightarrow y_4, z_2 \leftrightarrow z_4$ . После интегрирования по  $z$ ,  $4!$  перестановок переменных  $z$  дают фактор, ко-

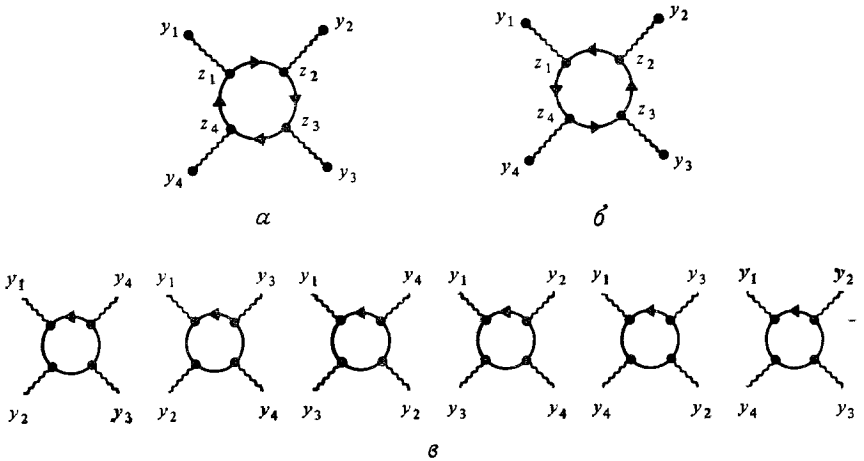


РИС. 6.9 Четырехфотонная амплитуда в низшем порядке. Диаграммы (а) и (б) не идентичны в конфигурационном пространстве. После суммирования по переменным  $z$  остается шесть различных диаграмм, изображенных на рис. в.

торый компенсирует множитель  $1/4!$ , возникающий в разложении  $\exp i \int dz \mathcal{L}_{вз}(z)$ . Таким образом, остается шесть различных диаграмм (рис. 6.9, в) (и никаких факторов).

Представление в импульсном пространстве определяется с помощью фурье-преобразования. Запишем для связной функции следующее выражение.

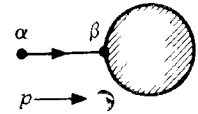
$$G_c(x_1, \dots, x_n; x_{n+1}, \dots, x_{2n}; y_1, \dots, y_p) = \int \prod_{i=1}^{2n} \frac{d^4 p_i}{(2\pi)^4} \prod_{j=1}^p \frac{d^4 q_j}{(2\pi)^4} \exp \left( i \sum_{i=1}^{2n} p_i \cdot x_i + i \sum_{j=1}^p q_j \cdot y_j \right) \times \tilde{G}_c(p_1, \dots, p_n; p_{n+1}, \dots, p_{2n}; q_1, \dots, q_p); \quad (6.32)$$

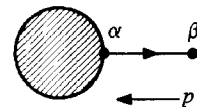
здесь все импульсы являются входящими. Правила Фейнмана для вычисления функций  $\tilde{G}_c$  состоят теперь в том, чтобы нарисовать все возможные топологически различные диаграммы и сопоставить им соответствующие факторы, перечисленные в табл. 6.1.

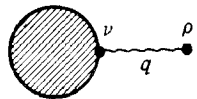
Таблица 6.1.

Правила Фейнмана для спинорной электродинамики

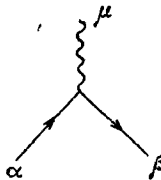
1. Внешние линии

Входящий фермион   $\left( \frac{i}{\not{p} - m + i\epsilon} \right)_{\beta\alpha}$

Выходящий фермион   $\left[ \frac{i}{(-\not{p}) - m + i\epsilon} \right]_{\beta\alpha}$

Входящий фотон   $-i \left( \frac{g_{\rho\nu} - q_\rho q_\nu / \mu^2}{q^2 - \mu^2 + i\epsilon} + \frac{q_\rho q_\nu / \mu^2}{q^2 - M^2 + i\epsilon} \right)$

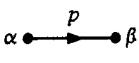
2. Вершины

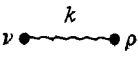


$$-ie (\gamma_\mu)_{\beta\alpha} (2\pi)^4 \delta^4(\Sigma)$$

По входящим импульсам

3. Пропагаторы

  $\frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \left( \frac{i}{\not{p} - m + i\epsilon} \right)_{\beta\alpha}$

  $\frac{d^4 k}{(2\pi)^4} (-i) \left( \frac{g_{\nu\rho} - k_\nu k_\rho / \mu^2}{k^2 - \mu^2 + i\epsilon} + \frac{k_\nu k_\rho / \mu^2}{k^2 - M^2 + i\epsilon} \right)$

4 Знак минус для каждой замкнутой фермионной петли и общий знак, зависящий от конфигурации внешних линий, определяются по правилам, указанным выше [см после формулы (6.30)]

Загем все спинорные индексы необходимо свернуть вдоль фермионных линий (для каждой замкнутой петли это сводится к вычислению следа), а все векторные индексы свернуть вдоль фотонных линий. Наконец, нужно выполнить все интегрирования по внутренним импульсам.

Для диаграммы порядка  $r$  (диаграммы с  $r$  вершинами) интегрирование по  $r$  переменным  $z$  и их перестановкам приводят к сокращению множителя  $1/r!$  в разложении  $\exp i \int d^4 z \mathcal{L}_{вз}(z)$  Сле-



довательно, в данном наборе правил, когда учитываются только топологически различные диаграммы, фермионная электродинамика не содержит факторов симметрии. Читатель может сравнить диаграммы, представленные на рис. 6.8, а и 6.10, с аналогичными диаграммами скалярной теории, приведенными на рис. 6.6, в и 6.3, а. Первые диаграммы, если выбрать одну ориентацию для

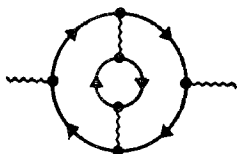


РИС. 6.10. Диаграмма спинорной электродинамики в отсутствие фактора симметрии

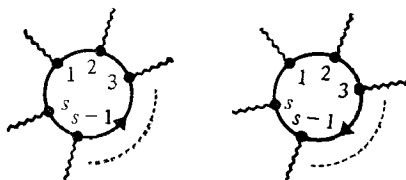


РИС. 6.11. Две диаграммы с противоположными ориентациями спинорной петли

каждой фермионной петли, не имеют факторов симметрии, в то время как последние имеют весовые множители соответственно  $1/2!$  и  $(1/2!)^2$

**Теорема Фарри** При вычислении функции Грина все диаграммы, содержащие фермионную петлю с нечетным числом вершин, можно не учитывать. Действительно, две петли с противоположными ориентациями (рис. 6.11) дают вклады с противоположными знаками. Чтобы показать это, запишем вклад, соответствующий первой ориентации, в виде

$$G_1 = \text{Sp} [\gamma_{\mu_1} S_F(z_1, z_s) \gamma_{\mu_s} S_F(z_s, z_{s-1}) \gamma_{\mu_{s-1}} \dots \gamma_{\mu_2} S_F(z_2, z_1)]$$

и вспомним, что существует матрица  $C$  [см. (3.176)], такая, что выполняются следующие равенства

$$\begin{aligned} CS_F(x, y)C^{-1} &= S_F^T(y, x), \\ C\gamma_{\mu}C^{-1} &= -\gamma_{\mu}^T. \end{aligned} \quad (6.33)$$

Вводя в выражении для  $G_1$  между пропагаторами величину  $CC^{-1}$ , получаем

$$\begin{aligned} G_1 &= (-1)^s \text{Sp} [\gamma_{\mu_1}^T S_F^T(z_s, z_1) \gamma_{\mu_s}^T S_F^T(z_{s-1}, z_s) \gamma_{\mu_{s-1}}^T \dots \gamma_{\mu_2}^T S_F^T(z_1, z_2)] = \\ &= (-1)^s \text{Sp} [\gamma_{\mu_1} S_F(z_1, z_2) \gamma_{\mu_2} \dots \gamma_{\mu_s} S_F(z_s, z_1)] \end{aligned} \quad (6.34)$$

С точностью до знака  $(-1)^s$ , это выражение совпадает с вкладом диаграммы, имеющей противоположную ориентацию. Следовательно, для нечетных  $s$  вклады обеих диаграмм сокращаются, что и требовалось доказать.

### 6.1.3. Электрон-электронное и электрон-позитронное рассеяние

В качестве иллюстрации применения диаграммной техники вычислим сечение электрон-электронного рассеяния в низшем порядке теории возмущений. Напишем сначала редукционную формулу,

выведенную в предыдущей главе:

$$S_{fi}^e = \left( \frac{-i}{Z_2^{1/2}} \right)^4 \int d^4 x_1 d^4 x_2 d^4 x'_1 d^4 x'_2 e^{i(p'_1 \cdot x'_1 + p'_2 \cdot x'_2 - p_1 \cdot x_1 - p_2 \cdot x_2)} \times \\ \times \bar{u}(p'_1, \epsilon'_1) (i\hat{\partial}_{x'_1} - m) \bar{u}(p'_2, \epsilon'_2) (i\hat{\partial}_{x'_2} - m) \times \\ \times \langle 0 | T \psi(x_1) \psi(x_2) \bar{\psi}(x_1) \bar{\psi}(x_2) | 0 \rangle^c \times \\ \times (-i\hat{\partial}_{x_1} - m) u(p_1, \epsilon_1) (-i\hat{\partial}_{x_2} - m) u(p_2, \epsilon_2). \quad (6.35)$$

Соответствующие обозначения приведены на рис. 6.12; заметим, что здесь  $p'_1, p'_2$  — импульсы выходящих электронов. В низшем

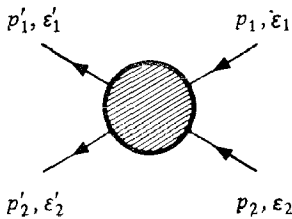


РИС. 6.12. Общая форма диаграмм, дающих вклад в электронное рассеяние.

порядке теории возмущений в функцию Грина дают вклад две диаграммы, показанные на рис. 6.13, а  $Z_2 = 1$ . В выражении (6.35) факторы, соответствующие внешним линиям, компенсируются операторами Дирака и интегрированием, причем внешние импульсы

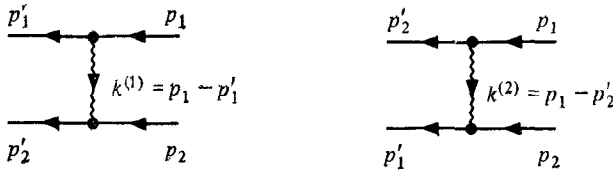


РИС. 6.13. Вклады низшего порядка в электрон-электронное рассеяние.

оказываются на массовой поверхности. В данном случае учет сохранения импульсов в каждой вершине приводит к тому, что интегралы исчезают. Диаграммы на рис. 6.13 дают вклады с противоположными знаками, и редуцированная формула запишется в виде

$$S_{fi}^e = (2\pi)^4 \delta^4(p'_1 + p'_2 - p_1 - p_2) (-ie)^2 \times \\ \times \left[ -\bar{u}(p'_1, \epsilon'_1) \gamma^\nu u(p_1, \epsilon_1) (-i) \left( \frac{g_{\nu\rho} - k_\nu^{(1)} k_\rho^{(1)} / \mu^2}{k^{(1)2} - \mu^2} + \frac{k_\nu^{(1)} k_\rho^{(1)} / \mu^2}{k^{(1)2} - M^2} \right) \times \right. \\ \times \bar{u}(p'_2, \epsilon'_2) \gamma^\rho u(p_2, \epsilon_2) + \bar{u}(p'_2, \epsilon'_2) \gamma^\nu u(p_1, \epsilon_1) (-i) \times \\ \left. \times \left( \frac{g_{\nu\rho} - k_\nu^{(2)} k_\rho^{(2)} / \mu^2}{k^{(2)2} - \mu^2} + \frac{k_\nu^{(2)} k_\rho^{(2)} / \mu^2}{k^{(2)2} - M^2} \right) \bar{u}(p'_1, \epsilon'_1) \gamma^\rho u(p_2, \epsilon_2) \right], \quad (6.36)$$

где

$$k^{(1)} \equiv p_1 - p'_1 = p'_2 - p_2,$$

$$k^{(2)} \equiv p_1 - p'_2 = p'_1 - p_2.$$

Следовательно,

$$k^{(1)}_v \bar{u}(p'_1, \varepsilon'_1) \gamma^v u(p_1, \varepsilon_1) = \bar{u}(p'_1, \varepsilon'_1) (\not{p}_1 - \not{p}'_1) u(p_1, \varepsilon_1) = 0$$

и

$$k^{(2)}_v \bar{u}(p'_2, \varepsilon'_2) \gamma^v u(p_1, \varepsilon_1) = \bar{u}(p'_2, \varepsilon'_2) (\not{p}_1 - \not{p}'_2) u(p_1, \varepsilon_1) = 0.$$

Члены в пропагаторах, пропорциональные  $k_\nu k_\rho$ , не дают вкладов в выражение (6.36), и при вычислении сечения можно перейти к пределу  $\mu = 0$ , не опасаясь инфракрасных расходимостей:

$$S_i = -ie^2 (2\pi)^4 \delta^4(p'_1 + p'_2 - p_1 - p_2) \mathcal{S},$$

где

$$\mathcal{S} = \frac{\bar{u}(p'_1, \varepsilon'_1) \gamma^v u(p_1, \varepsilon_1) \bar{u}(p'_2, \varepsilon'_2) \gamma_\nu u(p_2, \varepsilon_2)}{(p_1 - p'_1)^2} \frac{\bar{u}(p'_2, \varepsilon'_2) \gamma^v u(p_1, \varepsilon_1) \bar{u}(p'_1, \varepsilon'_1) \gamma_\nu u(p_2, \varepsilon_2)}{(p_1 - p'_2)^2}. \quad (6.37)$$

Отсюда очевидна антисимметрия начальных и конечных состояний. Множитель, связанный с тождественностью частиц, отсутствует, но, конечно, при вычислении полного сечения следует

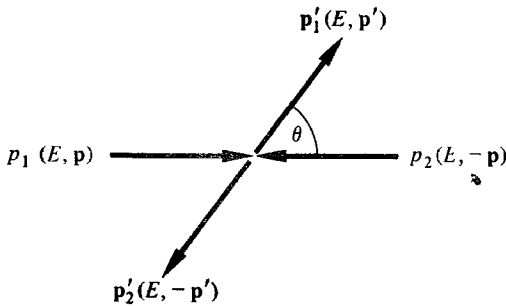


РИС. 6.14. Кинематика электрон-электронного рассеяния в системе центра масс.

интегрировать лишь по половине фазового пространства конечных состояний

Вычислим дифференциальное сечение рассеяния неполяризованных начальных пучков в случае, когда поляризации конечного состояния не измеряются. Кинематика такого процесса в системе центра масс приведена на рис. 6.14, где  $\theta$  — угол рассеяния в этой системе, учтено, что энергия  $E$  сохраняется, и используются обозначения  $|\mathbf{p}| = |\mathbf{p}'| = p = \sqrt{E^2 - m^2}$ . Применяя общую

формулу (5.13) и учитывая нормировку спиноров, получаем

$$d\sigma = \frac{m^4}{[(\rho_1 \cdot \rho_2)^2 - m^4]^{1/2}} \int \frac{d^3 p'_1}{(2\pi)^3 E'_1} \frac{d^3 p'_2}{(2\pi)^3 E'_2} (2\pi)^4 \delta^4(p'_1 + p'_2 - \rho_1 - \rho_2) e^4 |\overline{\mathcal{F}}|^2; \quad (6.38)$$

здесь  $|\overline{\mathcal{F}}|^2$  — квадрат модуля амплитуды, усредненный по начальным и просуммированный по конечным состояниям поляризации. Выполняя интегрирование с учетом  $\delta$ -функции, отвечающей закону сохранения энергии-импульса, находим

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{m^4 e^4}{4E^2 (2\pi)^2} |\overline{\mathcal{F}}|^2, \quad (6.39)$$

причем

$$\begin{aligned} |\overline{\mathcal{F}}|^2 &= \frac{1}{4} \sum_{\substack{\epsilon_1, \epsilon_2 \\ \epsilon'_1, \epsilon'_2}} |\mathcal{F}|^2 = \\ &= \frac{1}{4} \left\{ \text{Sp} \left( \gamma_\nu \frac{\not{p}_1 + m}{m} \gamma_\rho \frac{\not{p}'_1 + m}{2m} \right) \text{Sp} \left( \gamma^\nu \frac{\not{p}_2 + m}{2m} \gamma^\rho \frac{\not{p}'_2 + m}{2m} \right) \times \right. \\ &\quad \times \frac{1}{[(\rho'_1 - \rho_1)^2]^2} - \text{Sp} \left( \gamma_\nu \frac{\not{p}_1 + m}{2m} \gamma_\rho \frac{\not{p}'_2 + m}{2m} \gamma^\nu \frac{\not{p}_2 + m}{2m} \gamma^\rho \frac{\not{p}'_1 + m}{2m} \right) \times \\ &\quad \left. \times \frac{1}{(\rho'_1 - \rho_1)^2 (\rho'_2 - \rho_1)^2} + (\rho'_1 \leftrightarrow \rho'_2) \right\}. \quad (6.40) \end{aligned}$$

Вычисляя след, имеем

$$\begin{aligned} \text{Sp} [\gamma_\nu (\not{p}_1 + m) \gamma_\rho (\not{p}'_1 + m)] &= 4 (\rho_{1\nu} \rho'_{1\rho} - g_{\nu\rho} p_1 \cdot p'_1 + p_{1\rho} p'_{1\nu} + m^2 g_{\nu\rho}), \\ \text{Sp} [\gamma_\nu (\not{p}_1 + m) \gamma_\rho (\not{p}'_1 + m)] \text{Sp} [\gamma^\nu (\not{p}_2 + m) \gamma^\rho (\not{p}'_2 + m)] &= \\ &= 32 [(\rho_1 \cdot \rho_2)^2 + (\rho_1 \cdot \rho'_2)^2 + 2m^2 (\rho_1 \cdot \rho'_2 - \rho_1 \cdot \rho_2)] \end{aligned}$$

и

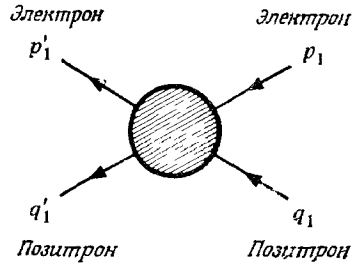
$$\begin{aligned} \gamma_\nu (\not{p}_1 + m) \gamma_\rho (\not{p}'_2 + m) \gamma^\nu &= -2\not{p}'_2 \gamma_\rho \not{p}_1 + 4m (\rho'_{2\rho} + \rho_{1\rho}) - 2m^2 \gamma_\rho, \\ \text{Sp} [\gamma_\nu (\not{p}_1 + m) \gamma_\rho (\not{p}'_2 + m) \gamma^\nu (\not{p}_2 + m) \gamma^\rho (\not{p}'_1 + m)] &= \\ &= -32 [(\rho_1 \cdot \rho_2)^2 - 2m^2 \rho_1 \cdot \rho_2]. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} |\overline{\mathcal{F}}|^2 &= \frac{1}{2m^4} \left\{ \frac{(\rho_1 \cdot \rho_2)^2 + (\rho_1 \cdot \rho'_2)^2 + 2m^2 (\rho_1 \cdot \rho'_2 - \rho_1 \cdot \rho_2)}{[(\rho'_1 - \rho_1)^2]^2} + \right. \\ &\quad + \frac{(\rho_1 \cdot \rho_2)^2 + (\rho_1 \cdot \rho'_1)^2 + 2m^2 (\rho_1 \cdot \rho'_1 - \rho_1 \cdot \rho_2)}{[(\rho'_2 - \rho_1)^2]^2} + \\ &\quad \left. + 2 \frac{(\rho_1 \cdot \rho_2)^2 - 2m^2 \rho_1 \cdot \rho_2}{(\rho'_1 - \rho_1)^2 (\rho'_2 - \rho_1)^2} \right\}. \quad (6.41) \end{aligned}$$

Все инварианты можно выразить через энергию  $E$  и угол рас-

РИС. 6.15. Общий вид диаграмм, дающих вклад в электрон-позитронное рассеяние



сеяния  $\theta$ :

$$\begin{aligned} p_1 \cdot p_2 &= 2E^2 - m^2, \\ p_1 \cdot p_1' &= E^2 (1 - \cos \theta) + m^2 \cos \theta, \\ p_1 \cdot p_2' &= E^2 (1 + \cos \theta) - m^2 \cos \theta. \end{aligned}$$

Подставляя эти соотношения в (6.41), с учетом (6.39) получаем формулу Мёллера:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2 (2E^2 - m^2)^2}{4E^2 (E^2 - m^2)^2} \left[ \frac{4}{\sin^4 \theta} - \frac{3}{\sin^2 \theta} + \frac{(E^2 - m^2)^2}{(2E^2 - m^2)^2} \left( 1 + \frac{4}{\sin^2 \theta} \right) \right]. \quad (6.42)$$

В ультрарелятивистском пределе, когда  $m/E \rightarrow 0$ , имеем

$$\left. \frac{d\sigma}{d\Omega} \right|_{\text{н. р.}} = \frac{\alpha^2}{E^2} \left( \frac{4}{\sin^4 \theta} - \frac{2}{\sin^2 \theta} + \frac{1}{4} \right) = \frac{\alpha^2}{4E^2} \left( \frac{1}{\sin^4 \theta/2} + \frac{1}{\cos^4 \theta/2} + 1 \right), \quad (6.43)$$

а в нерелятивистском пределе, когда  $E^2 \approx m^2$  и  $v^2 = (E^2 - m^2)/E^2$ ,

$$\begin{aligned} \left. \frac{d\sigma}{d\Omega} \right|_{\text{н. р.}} &= \left( \frac{\alpha}{m} \right)^2 \frac{1}{4v^4} \left( \frac{4}{\sin^4 \theta} - \frac{3}{\sin^2 \theta} \right) = \\ &= \left( \frac{\alpha}{m} \right)^2 \frac{1}{16v^4} \left( \frac{1}{\sin^4 \theta/2} + \frac{1}{\cos^4 \theta/2} - \frac{1}{\sin^2 \theta/2 \cos^2 \theta/2} \right). \quad (6.44) \end{aligned}$$

Впервые этот результат был получен Моттом в 1930 г. Мы предоставляем читателю в качестве упражнения записать эти сче-

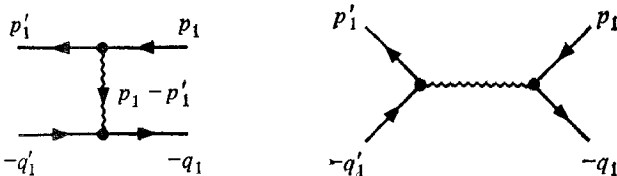


РИС. 6.16 Вклады низшего порядка в электрон-позитронное рассеяние.

ния в лабораторной системе отсчета. Поучительно также сравнить формулу (6.44) с нерелятивистским пределом формулы Резерфорда для кулоновского рассеяния с  $Z=1$  и приведенной массой  $m/2$ .

Рассмотрим теперь электрон-позитронное рассеяние. На рис. 6.15 и 6.16 представлены кинематика и диаграммы в низшем

порядке теории возмущений. Мы здесь не указываем индексов поляризации, и на рис. 6.16 4-импульсы ориентированы в соответствии с направлением протекания заряда. При этом амплитуду рассеяния можно вычислить по формуле (6.37), выполняя следующие подстановки:

$$\begin{aligned} u(p_1) &\rightarrow u(p_1), & p_1 &\rightarrow p_1, \\ u(p'_1) &\rightarrow u(p'_1), & p'_1 &\rightarrow p'_1, \\ u(p_2) &\rightarrow v(q_1), & p_2 &\rightarrow -q_1, \\ u(p'_2) &\rightarrow v(q_1), & p'_2 &\rightarrow -q_1, \end{aligned} \quad (6.45)$$

и меняя знак амплитуды. В системе центра масс нетрудно получить

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{m^4 e^4}{4E^2 (2\pi)^2} |\overline{\mathcal{G}}|^2,$$

причем

$$\begin{aligned} |\overline{\mathcal{G}}|^2 &= \frac{1}{2m^4} \left\{ \frac{(p_1 \cdot q_1)^2 + (p_1 \cdot q_1)^2 - 2m^2 (p_1 \cdot q_1 - p_1 \cdot q'_1)}{[(p'_1 - p_1)^2]^2} + \right. \\ &+ \frac{(p_1 \cdot q_1)^2 + (p_1 \cdot p'_1)^2 + 2m^2 (p_1 \cdot p'_1 + p_1 \cdot q')}{[(p_1 + q_1)^2]^2} + \\ &\left. + 2 \frac{(p_1 \cdot q_1)^2 + 2m^2 p_1 \cdot q_1}{(p_1 - p'_1)^2 (p_1 + q_1)^2} \right\}. \end{aligned} \quad (6.46)$$

Теперь мы можем записать окончательное выражение для сечения рассеяния:

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma^{e^-e^+}}{d\Omega} &= \frac{\alpha}{2E^2} \left[ \frac{5}{4} \frac{8E^4 - m^4}{E^2 (E^2 - m^2) (1 - \cos \theta)} + \frac{(2E^2 - m^2)^2}{2(E^2 - m^2)^2 (1 - \cos \theta)^2} + \right. \\ &\left. + \frac{2E^4 (-1 + 2 \cos \theta + \cos^2 \theta) + 4E^2 m^2 (1 - \cos \theta) (2 + \cos \theta) + 2m^4 \cos^2 \theta}{16E^4} \right]. \end{aligned} \quad (6.47)$$

В ультрарелятивистском и нерелятивистском пределах мы имеем, соответственно

$$\frac{d\sigma^{e^-e^+}}{d\Omega_{y.p}} = \frac{\alpha^2}{8E^2} \left[ \frac{1 + \cos^4 \theta/2}{\sin^4 \theta/2} + \frac{1}{2} (1 + \cos^2 \theta) - 2 \frac{\cos^4 \theta/2}{\sin^2 \theta/2} \right], \quad (6.48)$$

$$\frac{d\sigma^{e^-e^+}}{d\Omega_{н.п}} = \left( \frac{\alpha}{m} \right)^2 \frac{1}{16v^4 \sin^4 \theta/2}. \quad (6.49)$$

Заметим, что в последнем случае аннигиляционная диаграмма не дает вклада. Эти выражения были получены Баба в 1936 г.

Выражения (6.42) и (6.47) можно сравнить с экспериментальными данными. На рис. 6.17 приведены сечения электрон-электронного рассеяния на  $90^\circ$  при низких энергиях, полученные Ашкином, Пейджем и Вудвордом в 1954 г. Эти сечения хорошо согласуются с формулой Мёллера (6.42), но не согласуются с соответствующим выражением для бесспиновых частиц, кото-

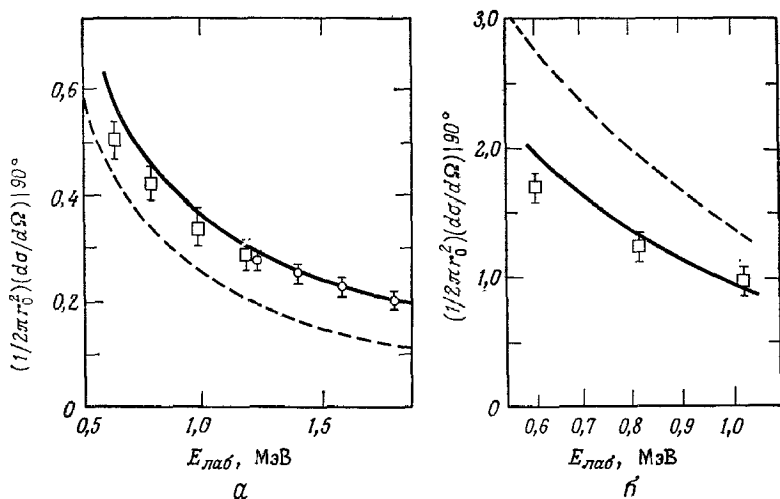


РИС. 6.17. Экспериментальные данные по электрон-электронному и электрон-позитронному рассеянию на угол  $\theta=90^\circ$  как функция энергии падающего электрона в лабораторной системе координат. *а* — электрон-электронное рассеяние, сплошная кривая отвечает формуле Мёллера, но в пренебрежении спиновыми членами; *б* — электрон-позитронное рассеяние; сплошная кривая соответствует формуле Баба, штриховая — формуле Баба в пренебрежении аннигиляционными членами. [См. Ashkin S., Page L. A., Woodward W. M., — Phys. Rev., 1974, vol. 94, p. 357.]

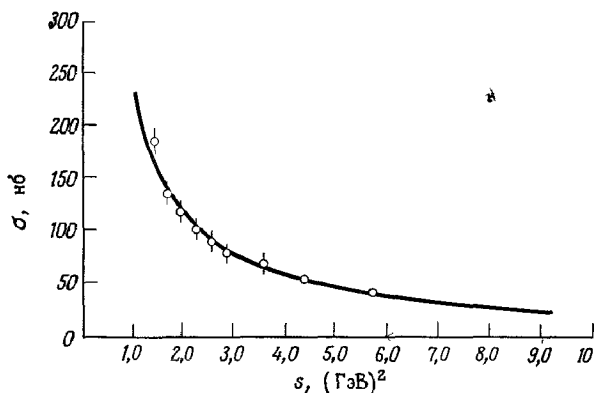


РИС. 6.18. Сечение рассеяния Баба при высоких энергиях (для значений угла рассеяния  $45^\circ < \theta < 135^\circ$ ) как функция квадрата полной энергии  $s$ . Сплошная кривая вычислена по формулам квантовой электродинамики с радиационными поправками первого порядка. [См. Strauch K., в сб. статей: Proc. 6-th Symposium on Electron and Photon Interaction at the High Energies/ ed. H. Rollnik, W. Pfeil. — Amsterdam: North-Holland, 1974.]

рое мы получим ниже [см формулу (6 65)] Результаты измерения в случае электрон позитронного рассеяния вполне удовлетворительно согласуются с выражением для сечения Баба [см формулу (6 49)] То, что мы пренебрегли аннигиляционным членом может нарушить это согласие. На рис 6 17 энергии налетающих частиц (ось абсцисс) в лабораторной системе принадлежат промежуточной области, в которой ни нерелятивистское, ни ультр. релятивистское приближение не справедливо Численные значения свидетельствуют о том, что отношение сечений рассеяния  $e^-e^-$  и  $e^-e^+$  существенно отличается от отношения 2/1, полученного из наивных рассуждений основанных на неразличимости двух электронов

Учет радиационных поправок (см гл 7) позволяет улучшить результаты, полученные из этих вычислений в низшем порядке Формулы с такими поправками можно сравнить с более современными данными, полученными при ультрарелятивистских энергиях в электрон позитронных накопительных кольцах Из рис 6.18 мы видим, что в диапазоне квадратов энергий в системе центра масс 2—9 ГэВ<sup>2</sup> согласие между теорией и экспериментом прекрасное. Эти данные получены группой, работающей на ускорителе Адона во Фраскати.

#### 6.1.4. Скалярная электродинамика

В качестве последней иллюстрации правил Фейнмана рассмотрим скалярную электродинамику, т. е. электродинамику заряженных бесспиновых частиц

Сравнение предсказаний этой теории с предсказаниями фермионной квантовой электродинамики для основных процессов дает нам возможность прояснить роль спина в последней В теоретическом плане скалярная электродинамика представляет собой интересный случай, поскольку ее лагранжиан взаимодействия содержит производные и отличается от гамильтониана взаимодействия, взятого со знаком минус

Мы начнем обсуждение с лагранжиана свободного заряженного скалярного поля

$$\mathcal{L}_0(\varphi) = \partial_\mu \varphi^\dagger \partial^\mu \varphi - m^2 \varphi^\dagger \varphi \quad (6.50)$$

(отметим, что коэффициент 1/2! здесь отсутствует) и введем в нем электромагнитное поле посредством минимальной замены  $\partial_\mu \varphi \rightarrow (\partial_\mu + ieA_\mu)\varphi$ . Добавляя из формулы (6 25) лагранжиан  $\mathcal{L}_0^Y(A)$  свободного электромагнитного поля, получаем

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0(\varphi) + \mathcal{L}_0^Y(A) + \mathcal{L}_{\text{вз}}, \quad (6.51a)$$

$$\mathcal{L}_{\text{вз}} = -ieA^\mu (\varphi^\dagger \overleftrightarrow{\partial}_\mu \varphi) + e^2 A^2 \varphi^\dagger \varphi. \quad (6.51b)$$

Поскольку в лагранжиан взаимодействия входят производные, канонические импульсы модифицируются следующим образом:

$$\begin{aligned} \pi^\dagger &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 \varphi^\dagger)} = \partial^0 \varphi + ieA^0 \varphi, \\ \pi &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 \varphi)} = \partial^0 \varphi^\dagger - ieA^0 \varphi^\dagger. \end{aligned} \quad (6.52)$$



Гамильтониан запишется в виде

$$H = H_0^y + H_0(\varphi, \pi) + H_{вз},$$

$$H_0(\varphi, \pi) + H_{вз} = \int d^3x (\pi\dot{\varphi} + \pi^\dagger\dot{\varphi}^\dagger - \mathcal{L}_0 - \mathcal{L}_{вз}). \quad (6.53)$$

Здесь  $H_0$  — свободный гамильтониан, определенный формулой (3.76)

$$H_0(\varphi, \pi) = \int d^3x (\pi^\dagger\pi + \partial_k\varphi^\dagger\partial_k\varphi + m^2\varphi^\dagger\varphi), \quad (6.54)$$

а  $H_{вз}$  дается выражением (пространственный индекс  $k$  пробегает значения 1, 2, 3)

$$H_{вз} = \int dx^3 \mathcal{H}_{вз} = \int d^3x [ieA^0(\pi^\dagger\varphi^\dagger - \pi\varphi) + ieA^k(\varphi^\dagger\overleftrightarrow{\partial}_k\varphi) - e^2A^kA_k\varphi^\dagger\varphi]. \quad (6.55)$$

Подставляя сюда выражения (6.52), находим  $\mathcal{H}_{вз}(\varphi) = -\mathcal{L}_{вз}(A, \varphi) - e^2A^{02}\varphi^\dagger\varphi$ . С другой стороны, от канонического преобразования можно перейти к представлению взаимодействия; при этом  $\varphi, \pi, A$  заменяются соответственно на  $\varphi_{in}, \pi_{in}, A_{in}$ , причем  $\pi_{in} = \partial_0\varphi_{in}^\dagger$ . Таким образом, в этом представлении получаем

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{вз} &= ieA_{in}^0(\pi_{in}^\dagger\varphi_{in}^\dagger - \pi_{in}\varphi_{in}) + ieA_{in}^k\varphi_{in}^\dagger\overleftrightarrow{\partial}_k\varphi_{in} - e^2A_{in,k}A_{in}^k\varphi_{in}^\dagger\varphi_{in} = \\ &= ieA_{in}^\mu\varphi_{in}^\dagger\overleftrightarrow{\partial}_\mu\varphi_{in} - e^2A_{in}^2\varphi_{in}^\dagger\varphi_{in} + e^2A_{in}^{02}\varphi_{in}^\dagger\varphi_{in} = \\ &= -\mathcal{L}_{вз}(A_{in}, \varphi_{in}) + e^2A_{in}^{02}\varphi_{in}^\dagger\varphi_{in}. \end{aligned} \quad (6.56)$$

Мы видим, что гамильтониан и лагранжиан, взятый с обратным знаком, отличаются на нековариантный член (отметим, что знак перед этим членом изменился), который на первый взгляд представляет опасность для ковариантности теории

Однако, рассматривая в этой теории типичную функцию Грина

$$\begin{aligned} G(x_1, \dots, x_n; x_{n+1}, \dots, x_{2n}; y_1, \dots, y_p) &= \\ = \langle 0 | T \varphi(x_1) \dots \varphi(x_n) \varphi^\dagger(x_{n+1}) \dots \varphi^\dagger(x_{2n}) A(y_1) \dots A(y_p) | 0 \rangle &= \\ = \frac{\langle 0 | T \varphi_{in}(x_1) \dots A_{in}(y_p) \exp \left[ -i \int d^4z \mathcal{H}_{вз}(z) \right] | 0 \rangle}{\langle 0 | T \exp \left[ -i \int d^4z \mathcal{H}_{вз}(z) \right] | 0 \rangle}, \end{aligned} \quad (6.57)$$

мы видим, что хронологические произведения членов с производными представляют собой второй источник нековариантных членов. Чтобы окончательные результаты были ковариантными, эти два типа нековариантных вкладов должны взаимно сокращать друг друга. Это в действительности имеет место

Поскольку проблемы, связанные с ультрафиолетовыми расходимостями в теории возмущений, нами пока не рассматриваются, приведем здесь лишь формальное доказательство этого утверждения.

Изучим более внимательно нековариантные спаривания, возникающие благодаря членам с производными. В последующих формулах мы будем опускать индексы  $\mu$ . Соответствующие пропагаторы запишутся в виде

$$\langle 0 | T \varphi(x) \varphi^\dagger(y) | 0 \rangle = \langle 0 | T \varphi(y) \varphi^\dagger(x) | 0 \rangle = i \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ik \cdot (x-y)}}{k^2 - m^2 + i\epsilon}, \quad (6.58a)$$

$$\langle 0 | T \partial_\mu \varphi(x) \varphi^\dagger(y) | 0 \rangle = \partial_\mu^x \langle 0 | T \varphi(x) \varphi^\dagger(y) | 0 \rangle, \quad (6.58b)$$

$$\langle 0 | T \partial_\mu \varphi(x) \partial_\nu \varphi^\dagger(y) | 0 \rangle = \partial_\mu^x \partial_\nu^y \langle 0 | T \varphi(x) \varphi^\dagger(y) | 0 \rangle - ig_{\mu\alpha} g_{\nu\beta} \delta^4(x-y). \quad (6.58b')$$

Нековариантные члены содержатся только в пропагаторах поля  $\varphi$ , поэтому в последующих выкладках поле  $A$  можно рассматривать как классическое и анализировать все функции Грина для  $\varphi$  и  $\varphi^\dagger$  с помощью производящего функционала

$$\begin{aligned} Z(j) &= \langle 0 | T \exp \left\{ -i \int d^4 z [\mathcal{H}_{\text{вз}}(z) + j^*(z) \varphi(z) + j(z) \varphi^\dagger(z)] \right\} | 0 \rangle = \\ &= \langle 0 | T \sum_r \frac{e^r}{r!} \int d^4 z_1 \dots d^4 z_r A^{\mu_1}(z_1) \varphi^\dagger(z_1) \overleftrightarrow{\partial}_{\mu_1} \varphi(z_1) \dots \\ &\dots A^{\mu_r}(z_r) \varphi^\dagger(z_r) \overleftrightarrow{\partial}_{\mu_r} \varphi(z_r) \times \\ &\times \exp \left[ -i \int d^4 z (-e^2 A^3 \varphi^\dagger \varphi + e^2 A^0 \varphi^\dagger \varphi + j^* \varphi + j \varphi^\dagger) \right] | 0 \rangle. \end{aligned} \quad (6.59)$$

Здесь в ряд по степеням  $e$  разложена лишь та часть гамильтониана взаимодействия, в которую входят производные, поскольку именно она приводит к появлению нековариантных спариваний в соотношении (6.58b). Обозначим далее через  $\hat{T}$  ковариантное хронологическое произведение, которое совпадает с  $T$ -произведением в (6.58), за исключением последнего члена в соотношении (6.58b'); таким образом, мы имеем

$$\langle 0 | \hat{T} \partial_\mu \varphi(x) \partial_\nu \varphi^\dagger(y) | 0 \rangle = \partial_\mu^x \partial_\nu^y \langle 0 | T \varphi(x) \varphi^\dagger(y) | 0 \rangle. \quad (6.60)$$

Рассмотрим теперь вклад  $s$  нековариантных спариваний  $-ig_{\mu\alpha} g_{\nu\beta} \delta^4(x-y)$ . Имеется  $\binom{r}{2s} = r!/(2s)!(r-2s)!$  способов выбора  $(2s)$  вершин из  $r$  и  $(2s)!/2^s s!$  способов свертывания их в  $s$  пар. Каждая нековариантная свертка двух вершин дает

$$\begin{aligned} eA^\nu(x) \varphi(x) [\langle 0 | T \partial_\mu \varphi^\dagger(x) \partial_\nu \varphi(y) | 0 \rangle - \langle 0 | \hat{T} \partial_\mu \varphi^\dagger(x) \partial_\nu \varphi(y) | 0 \rangle] \times \\ \times (-e) A^\nu(y) \varphi^\dagger(y) + (\varphi \leftrightarrow \varphi^\dagger) = 2ie^2 A_0^2 \varphi^\dagger(x) \varphi(x) \delta^4(x-y), \end{aligned}$$

где неявно предполагается упорядочение по Вику. Следовательно,

$$\begin{aligned} Z(j) &= \langle 0 | \hat{T} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{e^r}{r!} \left[ \int d^4 z' A(z') \varphi^\dagger(z') \overleftrightarrow{\partial}_{\mu} \varphi(z') \right]^r \times \\ &\times \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(ie^2)^s}{s!} \left[ \int d^4 z'' A_0^2(z'') \varphi^\dagger(z'') \varphi(z'') \right]^s \times \\ &\times \exp \left[ -i \int d^4 z (-e^2 A^3 \varphi^\dagger \varphi + e^2 A_0^3 \varphi^\dagger \varphi + j \varphi^\dagger + j^* \varphi) \right] | 0 \rangle. \end{aligned} \quad (6.61)$$

Мы видим, что нековариантные спаривания можно объединить в экспоненту, и что их вклад компенсирует нековариантную вершину  $e^2 A_0^2 \Phi^\dagger \Phi$ .

Используя определение ковариантного  $\hat{T}$ -произведения (6.60), можно окончательно записать:

$$G(x_1, \dots, y_p) = \frac{\langle 0 | \hat{T} \Phi_{in}(x_1) \dots A_{in}(y_p) \exp \left[ i \int d^4z \mathcal{L}_{вз}(z) \right] | 0 \rangle}{\langle 0 | \hat{T} \exp \left[ i \int d^4z \mathcal{L}_{вз}(z) \right] | 0 \rangle}, \quad (6.62)$$

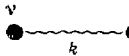
где ковариантный лагранжиан равен

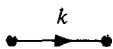
$$\mathcal{L}_{вз} = -ie A_{in}^\mu \overset{\leftrightarrow}{\partial}_\mu \Phi_{in} + e^2 A_{in}^2 \Phi_{in}^\dagger \Phi_{in}. \quad (6.63)$$

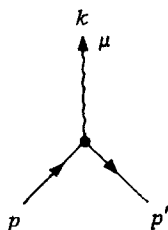
В табл. 6.2 представлены соответствующие правила Фейнмана. В вершине второго типа (диаграмма типа «чайка») наличие множителя 2 обусловлено тем, что квадратичный по  $A$  член равен  $A^2$ , а не  $A^2/2!$ . Напомним также, что в скалярной электродинамике фактор сим-

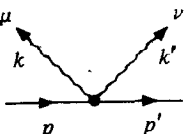
Таблица 6.2

Правила Фейнмана для скалярной электродинамики

Фотон   $-i \left( \frac{g_{\nu\rho} - k_\nu k_\rho / \mu^2}{k^2 - \mu^2 + i\epsilon} + \frac{k_\nu k_\rho / \mu^2}{k^2 - M^2 + i\epsilon} \right) \frac{d^4k}{(2\pi)^4}$

Бозон   $\frac{i}{k^2 - m^2 + i\epsilon} \frac{d^4k}{(2\pi)^4}$

Вершины   $-ie (p_\mu + p'_\mu) (2\pi)^4 \delta^4(p - p' - k)$

  $2ie^2 g_{\mu\nu} (2\pi)^4 \delta^4(p - p' - k - k')$

метрии  $1/2$  возникает всякий раз, когда сворачиваются пары фотонов, входящих в две диаграммы типа «чайка» (рис. 6.19).

И наоборот, замкнутые скалярные петли, если они ориентированы, не требуют никаких факторов симметрии, поскольку учитываются только топологически различные петли.

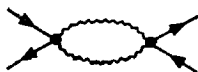


РИС. 6.19. Диаграмма скалярной электродинамики, характеризуемая фактором симметрии  $1/S = 1/2$ .

Рассмотрим теперь кратко некоторые основные процессы, уже изученные в фермионной электродинамике.

### 1. Комптоновское рассеяние

В обозначениях, принятых в разд. 5.2.1, можно записать

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{4m^2} \left( \frac{k_f}{k_i} \right)^2 |\mathcal{F}|^2.$$

В низшем порядке теории возмущений вклад дают три диаграммы, представленные на рис. 6.20, но если мы выберем векторы поляризации, удовлетворяю-

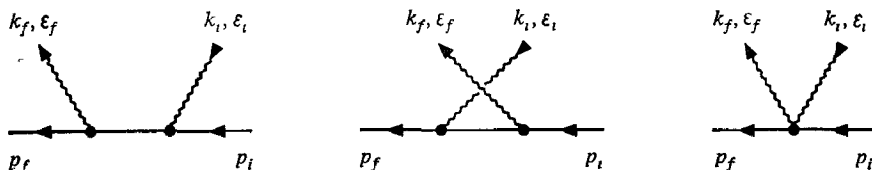


РИС. 6.20. Диаграммы низшего порядка для комптоновского рассеяния в скалярной электродинамике.

щие условию  $\varepsilon_i \cdot p_i = \varepsilon_f \cdot p_i = 0$ , то лишь третья диаграмма дает вклад, отличный от нуля, т. е.

$$|\mathcal{F}|^2 = 4 (\varepsilon_f \cdot \varepsilon_i)^2, \quad (6.64)$$

и мы получаем выражение

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{m^2} \left( \frac{k_f}{k_i} \right)^2 (\varepsilon_f \cdot \varepsilon_i)^2,$$

которое следует сравнить с формулой Клейна—Нишины (5.112).

### 2. Рассеяние двух одинаковых зарядов

Используем здесь те же обозначения и диаграммы, что и в разд. 6.1.3, а также на рис. 6.12 и 6.13. Тогда в системе центра масс имеем

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{16E^2} |\mathcal{F}|^2,$$

где

$$|\mathcal{F}|^2 = 4 \left[ \frac{p_1 \cdot p_2 + p_1 \cdot p_2'}{(p_1 - p_1')^2} + \frac{p_1 \cdot p_2 + p_1 \cdot p_1'}{(p_1 - p_2')^2} \right]^2.$$

Таким образом, мы получаем выражение

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{4E^2} \left( \frac{2E^2 - m^2}{E^2 - m^2} \right)^2 \left[ \frac{2}{\sin^2 \theta} - \frac{E^2 - m^2}{2E^2 - m^2} \right]^2, \quad (6.65)$$

которое следует сравнить с (6.42).

### 3. Аннигиляция пары в два фотона

Здесь используются обозначения, принятые в разд. 5.2.2, и диаграммы, представленные на рис. 6.20. В результате вычислений получаем

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{4} \frac{m + E_2}{(m + E_2 - p_2 \cos \theta)^2 p_2} |\mathcal{F}|^2, \quad (6.66)$$

где  $|\mathcal{F}|^2 = 4(\epsilon_f \cdot \epsilon_i)^2$ . Если в конечном состоянии поляризации не измеряются, имеем

$$\sigma_{\text{полн}} = \frac{\pi r_0^2}{1 + \gamma} \left[ \frac{2(3 + \gamma)}{\sqrt{\gamma^2 - 1}} - \frac{4\gamma}{\gamma^2 - 1} \ln(\gamma + \sqrt{\gamma^2 - 1}) \right]; \quad (6.67)$$

здесь  $\gamma = E_2/m$ , а  $r_0 = \alpha/m$ . В нерелятивистском пределе  $\gamma \rightarrow 1$  и, следовательно,  $\sigma_{\text{полн}} \sim 2\pi r_0^2/v_2$ , что в два раза больше, чем сечение процесса  $e^+e^- \rightarrow \gamma\gamma$ .

### 4. Тормозное излучение

Используем те же обозначения, что и в разд. 5.2.4; соответствующие диаграммы изображены на рис. 6.21. Выберем вектор поляризации  $\epsilon$  таким

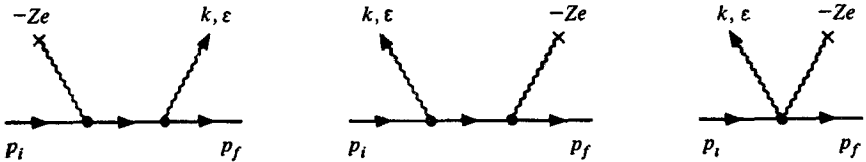


РИС. 6.21. Диаграммы низшего порядка для тормозного излучения в скалярной электродинамике.

образом, чтобы  $\epsilon \cdot k = 0$ ,  $\epsilon^0 = 0$ . При этом третья диаграмма (рис. 6.21) не дает вклада, и мы имеем

$$S_{fi} = \frac{-ie^2(-Ze)}{(p_f + k - p_i)^2} 2\pi\delta(p_i^0 + k^0 - p_f^0) \times \\ \times \left[ \frac{2p_f \cdot \epsilon (p_i^0 + p_f^0 + k^0)}{(p_f + k)^2 - m^2} + \frac{2p_i \cdot \epsilon (p_i^0 + p_f^0 - k^0)}{(p_i - k)^2 - m^2} \right], \\ d\sigma = \frac{Z^2\alpha^3}{\pi^2} \frac{p_f}{p_i} \frac{\omega}{q^4} \frac{d\omega}{q^4} \frac{d\Omega_\gamma}{q^4} \frac{d\Omega}{q^4} \left( \frac{p_f \cdot \epsilon}{p_f \cdot k} p_i^0 + \frac{p_i \cdot \epsilon}{p_i \cdot k} p_f^0 \right)^2.$$

Суммируя по поляризациям, находим

$$d\sigma_{\text{неполяриз}} = \frac{Z^2\alpha^3}{(2\pi)^2} \frac{p_f}{p_i} \frac{1}{q^4} \frac{d\omega}{\omega} d\Omega_\gamma d\Omega \times \\ \times \left[ \frac{p_f^2 \sin^2 \theta_f}{(E_f - p_f \cos \theta_f)^2} 4E_i^2 + \frac{p_i^2 \sin^2 \theta_i}{(E_i - p_i \cos \theta_i)^2} 4E_f^2 + \right. \\ \left. + \frac{2p_i p_f \sin \theta_i \sin \theta_f \cos \varphi}{(E_i - p_i \cos \theta_i)(E_f - p_f \cos \theta_f)} 4E_i E_f \right]. \quad (6.68)$$

## 6.2. ДИАГРАММАТИКА

Рассматривавшиеся до сих пор борновские диаграммы, или древесные диаграммы, имели очень простой вид, поскольку они не требовали интегрирования по внутренним импульсам. Однако в общем случае мы имеем дело с более сложными диаграммами. В этом разделе мы изучим общие свойства фейнмановских диаграмм и приведем соответствующую терминологию. Ради простоты большая часть этого материала излагается, за немногими исключениями, на примере теории одного нейтрального скалярного поля.

### 6.2.1. Разложение по петлям

Разложение теории возмущений по петлям, т. е. разложение по возрастающему числу независимых петель связанных фейнмановских диаграмм, можно рассматривать как разложение по степеням постоянной  $\hbar$ . По определению число независимых петель есть не что иное, как число независимых внутренних 4-импульсов в диаграммах, когда в каждой вершине учтены законы сохранения. Для связанных диаграмм с числом внутренних линий  $I$  и вершин  $V$  мы имеем  $V\delta^4$  функций, выражающих закон сохранения, и с учетом сохранения входящих импульсов у нас остаются  $V-1$  условий. Таким образом, число независимых импульсов, или петель, равно

$$L = I - (V - 1). \quad (6.69)$$

Следует заметить, что  $L$  не есть число граней или замкнутых контуров, создаваемых внутренними линиями диаграммы. Напри-

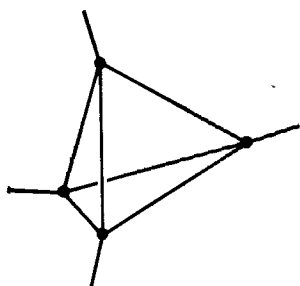


РИС. 6.22. Диаграмма «тетраэдр» имеет только три независимые петли.

мер, диаграмма в виде тетраэдра, приведенная на рис. 6.22, имеет четыре замкнутых контура, но лишь три независимые петли.

Чтобы найти связь между  $L$  и степенью величины  $\hbar$ , соберем вместе все множители  $\hbar$ . Мы не будем учитывать множитель  $\hbar$ , который дает массовый член правильной размерности. Иными словами, уравнение Клейна—Гордона будем записывать в виде  $[\partial_x^2 + (mc/\hbar)^2]\psi = 0$ , из которого следует, что массовый член имеет

как бы квантовое происхождение. В дальнейшем мы будем использовать этот факт. Таким образом, имеется два источника, приводящие к возникновению множителей  $\hbar$ . Во-первых, множитель  $\hbar$  включают в себя коммутационные (или антикоммутационные) соотношения, например  $[\varphi(x), \pi(y)] = i\hbar\delta^3(x-y)$ , вследствие чего  $\hbar$  появляется в каждом пропагаторе

$$\langle T\varphi(x)\varphi(y)\rangle = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{ik \cdot (x-y)} \frac{i\hbar}{k^2 - m^2 + i\epsilon}.$$

Во-вторых,  $\hbar$  входит явно в оператор эволюции  $e^{-iHt/\hbar}$  и, следовательно, в оператор  $\exp\left[(i/\hbar)\int \mathcal{L}_{\text{вз}}(\varphi_{\text{in}})d^4z\right]$ . Таким образом, каждый пропагатор имеет множитель  $\hbar$ , а каждая вершина — множитель  $\hbar^{-1}$ . В диаграмме с числом внешних линий  $E$  полная степень множителя  $\hbar$  равна  $\hbar^{I+E-V} = \hbar^{E-1+L}$ . Следовательно, при фиксированном числе внешних линий, т. е. для данной функции Грина, получаем результат, о котором было сказано в начале этого раздела.

В системе единиц, где  $c=1$ , имеем следующие размерности. Для скалярного поля  $\varphi$   $[\varphi] \sim (\text{энергия}/\text{длина})^{1/2}$ , для константы связи  $\lambda$  в  $\mathcal{L}_{\text{вз}} = \lambda\varphi^4$  это  $[\hbar]^{-1} \sim (\text{энергия} \times \text{длина})^{-1}$  и для спинорного поля  $[\psi] \sim (\text{энергия})^{1/2}/\text{длина}$ . Отсюда получаем правильную размерность  $[\hbar]$  для действия

$$I = \int d^4z \left[ \frac{1}{2}(\partial\varphi)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{m}{\hbar}\right)^2\varphi^2 + \lambda\varphi^4 \right]$$

или

$$I = \int d^4z \bar{\psi} \left( i\partial - \frac{M}{\hbar} \right) \psi.$$

Разумеется, диаграммы в низшем порядке по  $\hbar$  представляют собой рассмотренные в предыдущем разделе борновские диаграммы без каких-либо петель.

Читатель может спросить, почему в теории с единственной константой связи топологическое разложение по петлям совпадает с разложением по степеням константы связи? Это совпадение обусловлено тем, что в такой теории существуют дополнительные соотношения между  $V$ , числом вершин (степенью величины  $\lambda$ ) и  $L$ . Рассмотрим, например, теорию  $\varphi^4$ ; подсчитывая полное число линий, входящих в каждую вершину, можно показать, что для диаграммы с числом внешних линий  $E$  выполняется соотношение

$$4V = E + 2I.$$

Исключая отсюда  $I$  с помощью (6.69), получаем  $L - 1 + E/2 = V$  (здесь  $E$  — четное число).

### 6.2.2. Усеченные и сильносвязные диаграммы

Введем здесь терминологию, которая окажется полезной в дальнейшем.

Определим усеченные функции как функции Грина в импульсном пространстве (без учета  $\delta^4$ -функции от полной энергии-импульса), умноженные на обратные двухточечные функции, отнесенные к каждой внешней линии:

$$G_{\text{усеч}}^{(n)}(p_1, \dots, p_n) \equiv \prod_{k=1}^n [G^{(2)}(p_k, -p_k)]^{-1} G^{(n)}(p_1, \dots, p_n), \quad n > 2. \quad (6.70)$$

Двухточечная функция  $G^{(2)}$  здесь является полным пропагатором. Для  $p^2 \sim m^2$  имеем  $[G^{(2)}(p, -p)]^{-1} \sim (iZ)^{-1}(p^2 - m^2)$ , где  $Z$  — константа перенормировки волновой функции, введенная в гл. 5.

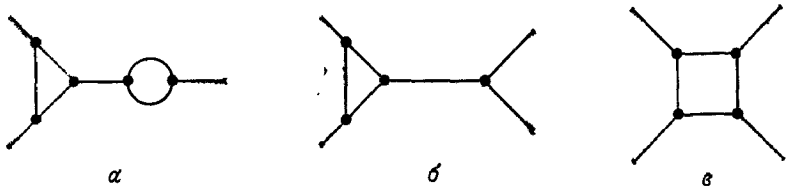


РИС. 6.23. *a* — неусеченная диаграмма; *b* — усеченная, но не сильносвязная диаграмма; *v* — сильносвязная диаграмма. В случаях *b* и *v* внешним линиям не сопоставляется какой-либо фактор.

Следовательно, с точностью до степеней величины  $Z$  эти усеченные функции на массовых поверхностях совпадают с величинами, входящими в редукционные формулы. Например, связанная часть матричного элемента в выражении (5.28) записывается в виде

$$\begin{aligned} \langle p_1, \dots, p_n \text{ out} | q_1, \dots, q_m \text{ in} \rangle_c &= Z^{(n+m)/2} \times \\ &\times G_{\text{усеч}}^{(n+m)}(-p_1, \dots, -p_n, q_1, \dots, q_m) \Big|_{p_i^2 = q_j^2 = m^2} \times \\ &\times (2\pi)^4 \delta^4 \left( \sum p_i - \sum q_j \right). \end{aligned}$$

Разложение усеченных функций по теории возмущений можно записать с помощью усеченных диаграмм, т. е. таких, которые не имеют собственно-энергетических частей на внешних линиях. Кроме того, здесь, согласно правилам Фейнмана, внешним линиям не сопоставляются какие-либо множители или пропагаторы (см. рис. 6.23). Наконец, если мы восстановим степени постоянной  $\hbar$  как в разд. 6.2.1, то окажется, что усеченным диаграммам с  $L$  петлями соответствует множитель  $\hbar^{L-1}$ .



В заключение определим сильносвязные, или одночастично неприводимые, диаграммы<sup>1)</sup>. Это усеченные связные диаграммы, которые остаются связными при удалении из них любой внутренней линии (рис. 6 23).

Сильносвязные функции, определенные на основе разложения теории возмущений по сильносвязным диаграммам, являются строительными блоками теории возмущений, поскольку интегрирование по внутренним импульсам может быть выполнено независимо в каждой сильносвязной поддиаграмме данной диаграммы. По той же причине сильносвязные функции играют центральную роль в программе перенормировок (см. главу 8 в т. 2 настоящей книги), поскольку для того, чтобы избавиться от всех ультрафиолетовых расходимостей, необходимо и достаточно сделать эти функции конечными.

Помимо этого топологического определения сильносвязным функциям можно дать и алгебраическое определение. Как показал Иона-Лазинио, производящий функционал для сильносвязных вершин представляет собой преобразование Лежандра производящего функционала для связных диаграмм. Последний, обозначаемый  $G_c(i)$ , был определен в гл. 5 как логарифм производящего функционала всех функций Грина:

$$Z(j) = \langle 0 | T \exp \left[ i \int d^4x \varphi(x) j(x) \right] | 0 \rangle = e^{G_c(i)}. \quad (6.71a)$$

В разд. 6.1 мы показали, что он действительно соответствует связным фейнмановским диаграммам, причем

$$G_c(j) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \int d^4x_1 \dots d^4x_n G_c(x_1, \dots, x_n) j(x_1) \dots j(x_n). \quad (6.71b)$$

Построим теперь преобразование Лежандра функционала  $G_c$  следующим образом. Пусть  $\varphi_c(x, j)$  представляет собой функционал  $j$ , определяемый выражением

$$\varphi_c(x, j) = \frac{\delta}{i\delta j(x)} G_c(j). \quad (6.72)$$

Предположим, что соотношение  $\varphi_c(x) = \varphi_c(x, j)$  можно обратить, т. е. записать в виде  $j(x) = j_c(x, \varphi_c)$ . Это возможно по крайней мере как формальное разложение, при условии что  $(\delta G_c / \delta j)|_{j=0} = 0$ , которое означает, что одноточечная функция равна нулю, и  $[\delta^2 G_c / \delta j(x) \delta j(y)]|_{j=0} \neq 0$ . В дальнейшем мы будем считать, что эти условия выполнены. Индекс  $c$  в  $\varphi_c$  подставлен с целью на-

<sup>1)</sup> Английский термин *proper*, используемый авторами для одночастично неприводимых диаграмм, мы переводим как «сильносвязная», в соответствии с терминологией, принятой в советской литературе. — *Прим. ред.*

поминания, что  $\varphi_c$  — обычная  $c$ -числовая функция и ее не следует путать с квантованным полем  $\varphi$

Определим функционал  $\Gamma(\varphi_c)$  выражением

$$i\Gamma(\varphi_c) = \left[ G_c(j) - i \int d^4x j(x) \varphi_c(x) \right] \Big|_{j(x)=j_c(x, \varphi_c)}. \quad (6.73)$$

Коэффициент  $i$  введен здесь для удобства последующего рассмотрения. Дифференцируя выражение (6.73) по  $\varphi_c(x)$ , получаем

$$i \frac{\delta}{\delta \varphi_c(x)} \Gamma(\varphi_c) = \int d^4y \left\{ \left[ \frac{\delta G_c(j)}{\delta j(y)} - i \varphi_c(y) \right] \Big|_{j=j_c(\varphi_c)} \frac{\delta j_c(y, \varphi_c)}{\delta \varphi_c(x)} \right\} - i j_c(x, \varphi_c)$$

В силу соотношения (6.72) первый член в правой части равен нулю и, следовательно,

$$j_c(x, \varphi_c) = - \frac{\delta \Gamma(\varphi_c)}{\delta \varphi_c(x)}. \quad (6.74)$$

Как хорошо известно из классической механики или термодинамики, в подобных случаях преобразование Лежандра является инволютивным. Следует также заметить, что  $i\Gamma(\varphi_c)$  можно рассматривать как значение функционала  $G_c(j) - i \int d^4x j(x) \varphi_c(x)$  (здесь  $j$  и  $\varphi_c$  независимы) в его стационарной точке по  $j$ .

Нам нужно показать, что  $\Gamma(\varphi_c)$  является производящим функционалом для сильносвязных функций  $\Gamma(x_1, \dots, x_n)$

$$\Gamma(\varphi_c) = \sum \frac{1}{n!} \int d^4x_1 \dots d^4x_n \Gamma^{(n)}(x_1, \dots, x_n) \varphi_c(x_1) \dots \varphi_c(x_n). \quad (6.75)$$

Дифференцируя соотношение (6.72) по  $\varphi_c(y)$ , получаем

$$\begin{aligned} \delta^4(x-y) &= \frac{\delta}{\delta \varphi_c(y)} \left[ \frac{\delta}{i \delta j(x)} G_c(j) \Big|_{j=j_c(\varphi_c)} \right] = \\ &= -i \int d^4z \frac{\delta j_c(z, \varphi_c)}{\delta \varphi_c(y)} \frac{\delta^2 G_c(j)}{\delta j(z) \delta j(x)} \Big|_{j=j_c(\varphi_c)} = \\ &= i \int d^4z \frac{\delta^2 \Gamma(\varphi_c)}{\delta \varphi_c(z) \delta \varphi_c(y)} \frac{\delta^2 G_c(j)}{\delta j(z) \delta j(x)} \Big|_{j=j_c(\varphi_c)}; \end{aligned} \quad (6.76)$$

здесь последнее выражение мы записали, используя (6.74). Следовательно, ядро  $[\delta^2 \Gamma / \delta \varphi_c(y) \delta \varphi_c(z)]$  является величиной, обратной по отношению к  $i[\delta^2 G_c / \delta j(z) \delta j(x)] \Big|_{j=j_c}$ . Положим теперь  $\varphi_c = 0$  в соответствии с предположением, что  $(\delta G_c / \delta j) \Big|_{j=0} = 0$ . Из тождества (6.76) следует, что связанная двухточечная функция  $G^{(2)}(z-x) = -[\delta^2 G_c / \delta j(z) \delta j(x)] \Big|_{j=0}$  является обратной (в смысле свертки) по отношению к функции  $-i\Gamma^{(2)}(y-z) = -i[\delta^2 \Gamma / \delta \varphi_c(y) \delta \varphi_c(z)] \Big|_{\varphi_c=0}$ . Вследствие свойства трансляционной инвариантности величина  $\Gamma^{(2)}$  зависит только от разности  $y-z$  и, следовательно,

$$\int d^4z \Gamma^{(2)}(y-z) G_c^{(2)}(z-x) = i \delta^4(x-y). \quad (6.77)$$

В импульсном пространстве это равенство записывается в виде

$$G^{(2)}(p, -p) \Gamma^{(2)}(p, -p) = i,$$

где фурье-образ величины  $\Gamma$  определяется аналогично выражениям (6.20) и (6.21). Перейдем к более экономным обозначениям двух-

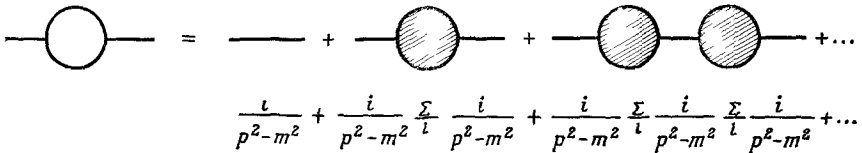


РИС. 6.24. Графическое представление соотношения (6.79) Незаштрихованный кружок отвечает полному пропагатору  $G^{(2)}(p)$ , а заштрихованные — сильно-связной собственноэнергетической части  $-i\Sigma$

точечных функций, т. е.  $G^{(2)}(p) \equiv G^{(2)}(p, -p)$ ,  $\Gamma^{(2)}(p) \equiv \Gamma^{(2)}(p, -p)$ . Если написать первую в виде

$$G^{(2)}(p) = \frac{i}{p^2 - m^2 - \Sigma(p)}, \tag{6.78}$$

где  $\Sigma(p)$  — собственная энергия, то получим

$$\Gamma^{(2)}(p) = i [G^{(2)}(p)]^{-1} = p^2 - m^2 - \Sigma(p). \tag{6.79}$$

Теперь двухточечную функцию (6.78) можно разложить (рис. 6.24) следующим образом:

$$G^{(2)}(p) = \frac{i}{p^2 - m^2} + \frac{i}{p^2 - m^2} \frac{1}{i} \Sigma(p) \frac{i}{p^2 - m^2} + \frac{i}{p^2 - m^2} \frac{1}{i} \Sigma(p) \frac{i}{p^2 - m^2} \frac{1}{i} \Sigma(p) \frac{i}{p^2 - m^2} + \dots$$

Отсюда следует, что  $-i\Sigma$  является одночастично неприводимым вкладом в двухточечную функцию, полученным по теории возмущений. Функция  $i\Gamma^{(2)}$  находится добавлением к  $-i\Sigma$  вклада нулевого порядка  $i(p^2 - m^2)$

Интерпретацию функций высших порядков  $\Gamma^{(n)}$  как одночастично неприводимых сильносвязных функций можно установить, если выполнить последовательные дифференцирования основного тождества (6.76) при  $\varphi_c = 0$ . Например, после еще одного дифференцирования (6.76) по  $\varphi_c(u)$  получаем (рис. 6.25)

$$0 = i \int d^4z \Gamma^{(3)}(z, y, u) G^{(2)}(z, x) + \int d^4z d^4v \Gamma^{(2)}(z, y) G^{(3)}(x, z, v) \times \Gamma^{(2)}(v, u),$$

и используя (6.77), находим

$$\Gamma^{(3)}(x, y, z) = \int d^4x' d^4y' d^4z' G^{(3)}(x', y', z') \Gamma^{(2)}(x', x) \Gamma^{(2)}(y', y) \times \Gamma^{(2)}(z', z) = -iG_{\text{усеч}}^3(x, y, z). \tag{6.80}$$

Таким образом,  $i\Gamma^{(3)}$  является усеченной функцией (или одночастично неприводимой функцией; в случае трехточечной функции это одно и то же). Читатель может продолжить это рассмотрение

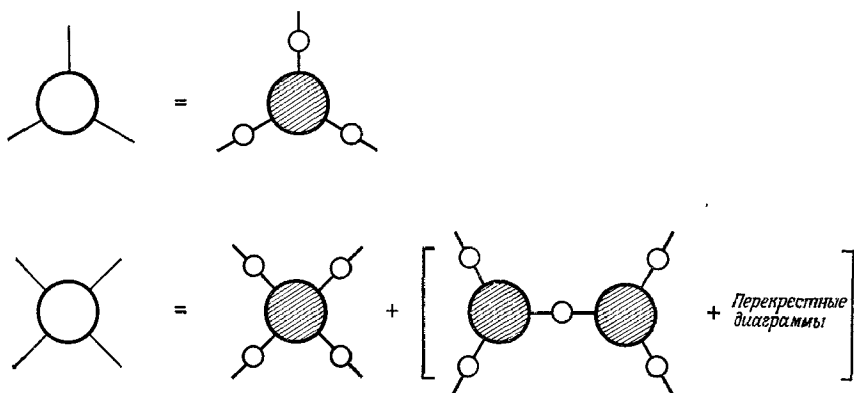


РИС. 6.25. Графическое представление выражения (6.80) и аналогичной формулы для четырехточечной функции. Как и на рис. 6.24, незаштрихованные кружки соответствуют связным функциям  $G^{(n)}$ , а заштрихованные — сильно-связным функциям  $i\Gamma^{(n)}$ .

и убедиться в том, что функции высших порядков  $i\Gamma^{(n)}$  действительно являются одночастично неприводимыми.

Функционал  $\Gamma(\varphi_c)$  можно записать еще проще, а именно как  $\Gamma(\varphi_c) = \frac{1}{2} \int d^4x d^4y \Gamma^{(2)}(x-y) \varphi_c(x) \varphi_c(y) + \hat{\Gamma}(\varphi_c)$ , и решить совместно уравнения (6.74) и (6.72):

$$-\int d^4x \Gamma^{(2)}(y-x) \frac{\delta G_c}{i\delta j(x)} = j(y) + \frac{\delta}{\delta \varphi_c(y)} \hat{\Gamma} \left( \varphi_c = \frac{\delta G_c}{i\delta j} \right).$$

Используя соотношение (6.77), получаем

$$\frac{\delta G_c(j)}{i\delta j(x)} = i \int d^4y G_c^{(2)}(x-y) \left[ j(y) + \frac{\delta \Gamma}{\delta \varphi_c(y)} \left( \frac{\delta G_c(j)}{i\delta j} \right) \right]. \quad (6.81)$$

Смысл этого тождества наиболее ясно проявляется в графическом представлении, данном на рис. 6.26. Любая связная диаграмма либо дает вклад в двухточечную функцию  $G_c^{(2)}$ , либо имеет древесную структуру, которую образуют обобщенные вершины  $\Gamma^{(n)}$  ( $n \geq 3$ ), соединяющиеся полными пропагаторами  $G_c^{(2)}$ . С другой стороны, известно, что любая связная диаграмма может быть разложена на одночастично неприводимые поддиаграммы. Чтобы отождествить последние с  $i\Gamma^{(n)}$ , необходимо убедиться в том, что все диаграммы появляются с правильным коэффициентом. Это достигается прямым подсчетом.

Мы продолжим рассмотрение этих замечательных тождеств в гл. 9 (см. т. 2 настоящей книги), где будет разработан метод континуального интегрирования. Следует также подчеркнуть, что в дальнейшем преобразования Лежандра можно будет использовать аналогичным образом для определения двухчастично неприводимых ядер и т. п.

Из этого обсуждения становится ясно, что в наименьшем порядке (т. е. для древесных диаграмм)  $\Gamma(\varphi_c)$  сводится к

$$\Gamma_{\text{древ}}(\varphi_c) = \frac{1}{\hbar} \int d^4x \mathcal{L}[\varphi_c(x)]. \quad (6.82)$$

(Множитель  $\hbar$  восстановлен здесь согласно установленному выше правилу.) Действительно, в низшем порядке сильносвязная двух-

$$\begin{aligned} \frac{\delta G_c(j)}{\delta j(x)} &= \text{diagram} = \Sigma \frac{i^{n-1}}{(n-1)!} \text{diagram} = \\ &= i \left[ \text{diagram}_1 + \text{diagram}_2 + \text{diagram}_3 + \dots \right] \end{aligned}$$

РИС. 6.26. Графическое представление тождества (6.81). Обозначения те же самые, что на рис. 6.24 и 6.25; черный кружок соответствует производящему функционалу  $\delta G_c(j)/\delta j(x)$ .

точечная функция дается выражением

$$\Gamma^{(2)}(x, y) = \frac{1}{\hbar} \int \frac{d^4p_1}{(2\pi)^4} \frac{d^4p_2}{(2\pi)^4} e^{i(p_1 x + p_2 y)} (2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2) (p_1^2 - m^2);$$

следовательно, ее вклад в  $\Gamma(\varphi_c)$  равен

$$\frac{1}{2} \int d^4x d^4y \Gamma^{(2)}(x, y) \varphi_c^*(x) \varphi_c(y) = \frac{1}{2} \int d^4x [(\partial\varphi_c)^2 - m^2\varphi_c^2],$$

в то время как последующие  $\Gamma^{(n)}$  в том же порядке  $\hbar^{-1}$  сводятся к исходным вершинам лагранжиана.

Важная роль функционала  $\Gamma(\varphi)$  состоит в том, что он обобщает понятие классического действия на случай высших порядков;  $\Gamma(\varphi)$  часто называют эффективным действием. Этот функционал играет важную роль при обсуждении стабильных конфигураций основных полей, например при изучении спонтанного нарушения симметрии, как мы увидим в гл. 11 (см. т. 2 настоящей книги).

Проведенное выше рассмотрение можно обобщить на другие типы скалярных полей, или на поля с ненулевым спином. Для полуцелых спинов нам пришлось бы воспользоваться антикоммутирующими источниками (см. разд. 4.2.2); этой алгебре антикоммутирующих соотношений должно подчиняться также «классическое» поле  $\varphi_c$ , представляющее собой аналог поля  $\varphi_c$ . Операции с такими антикоммутирующими функциями требуют осторожности, однако и в этом случае преобразование Лежандра дает производящий функционал для сильносвязных вершин.

### 6.2.3. Параметрическое представление

Рассмотрим в скалярной теории произвольную сильносвязную диаграмму  $G$  и вычислим соответствующий ей вклад  $I(G)$  согласно правилам Фейнмана. Предположим, что  $G$  не содержит никаких «головастиков», т. е. в диаграмме нет ни одной внутренней линии, начинающейся и заканчивающейся в одной и той же вершине. Пусть, как и прежде,  $I$ —число внутренних линий, а  $V$ —число вершин. Ориентацию каждой внутренней линии удобно считать произвольной. Определим матрицу инцидентности  $\{\varepsilon_{vl}\}$  с индексами, пробегающими номера вершин и внутренних линий соответственно как

$$\varepsilon_{vl} = \begin{cases} 1, & \text{если вершина } v \text{ расположена в начале линии } l, \\ -1, & \text{если вершина } v \text{ расположена в конце линии } l, \\ 0, & \text{если } l \text{ не связана с } v. \end{cases}$$

Эта  $V \times I$ -матрица характеризует топологию диаграммы. Введем следующие определения. Поддиаграмма  $G'$  диаграммы  $G$  есть подмножество вершин и линий диаграммы  $G$ , такое, что никакая вершина в нем не является изолированной; мы не предполагаем, что для двух данных вершин из  $G'$  все линии, соединяющие их в  $G$ , принадлежат  $G'$ . Деревом для  $G$  будет поддиаграмма, содержащая все вершины диаграммы  $G$ , но не содержащая петель. Диаграмму  $G$  можно восстановить по любому из ее деревьев добавлением к ним линий. Согласно соотношению (6.69), дерево имеет  $V-1$  внутренних линий. Его матрица инцидентности, а именно  $V \times (V-1)$ -матрица, имеет ранг, меньший или равный  $V-1$ . Покажем, что ее ранг действительно равен  $V-1$ . Если из дерева удалить произвольную вершину, то между линиями  $l_1, \dots, l_{V-1}$  и оставшимися вершинами  $v_1, \dots, v_{V-1}$  будет существовать взаимно-однозначное соответствие, при котором  $\varepsilon_{v_k l_k} \neq 0$ . Для любого другого соответствия по крайней мере одно из  $\varepsilon_{v_k l_k}$  обращается в нуль. Это означает, что соответствующий  $(V-1) \times (V-1)$ -минор матрицы инцидентности равен  $\pm 1$ . Последнее справедливо для любого такого минора и, следовательно, ранг матрицы инцидентности древесной диаграммы равен  $V-1$ .

Для произвольной связной диаграммы условие  $L = I + 1 - V > 0$  означает, что ранг  $V \times I$ -матрицы инцидентности равен  $\rho \leq V$ . В силу того что для любого  $l = 1, \dots, I$   $\sum_v \varepsilon_{vl} = 0$ , мы имеем  $\rho \leq V-1$ , а поскольку  $\rho$  получается добавлением новых столбцов к матрице ранга  $V-1$  древесной поддиаграммы, получаем  $\rho = V-1$ .

Рассмотрим теперь  $G$  как диаграмму Фейнмана, дающую вклад в некоторую сильносвязную функцию Грина  $\Gamma(p_1, \dots, p_n)$ . Пусть

$p$ —входящие импульсы и  $\sum_{i=1}^n p_i = 0$ . Обозначим через  $P_v = \sum p_{k_v}$

сумму импульсов, входящих в вершину  $v$ ; очевидно,  $\sum_{v=1}^V P_v = 0$ .

Вклад  $\tilde{I}_G(P)$  от  $G$  в  $i\tilde{\Gamma}(p_i) = (2\pi)^4 \delta^4(\sum p_i) i\tilde{\Gamma}(p_i)$  зависит только от  $P$ , при условии что мы рассматриваем теорию со связями без производных. Этот вклад записывается в виде

$$\begin{aligned}
 I_G(P) &= \frac{C(G)}{S(G)} (2\pi)^4 \delta^4(\sum P) I_G(P) = \\
 &= \frac{C(G)}{S(G)} \int \prod_{i=1}^l \frac{d^4 k_i}{(2\pi)^4} \left( \frac{i}{k_i^2 - m_i^2 + i\varepsilon} \right) \prod_{v=1}^V (2\pi)^4 \delta^4 \left( P_v - \sum_{i=1}^l \varepsilon_{vi} k_i \right).
 \end{aligned}
 \tag{6.83}$$

Здесь  $S(G)$ —фактор симметрии диаграммы, а  $C(G)$  объединяет все множители, относящиеся к вершинам; например,  $C(G) = (-i\lambda)^V$  в теории  $\lambda(\phi^4/4!)$ . Направление 4-импульса  $k_i$  соответствует ориентации, выбранной для  $l$ -й внутренней линии. Изучаемая теория может включать различные виды скалярных полей, поэтому массы  $m$  снабжены индексами  $l$ . Если в скалярной теории имеются связи с производными или введены поля со спинами, то в числитель подынтегрального выражения (6.83) входят полиномы по  $k$ . Это приводит лишь к небольшому усложнению, что в последующих главах будет проиллюстрировано на практических примерах. В дальнейшем мы будем использовать следующие интегральные представления свободного скалярного пропагатора и  $\delta^4$ -функции:

$$\frac{i}{p^2 - m^2 + i\varepsilon} = \int_0^\infty d\alpha e^{i\alpha(p^2 - m^2 + i\varepsilon)}, \tag{6.84a}$$

$$(2\pi)^4 \delta^4 \left( P_v - \sum_i \varepsilon_{vi} k_i \right) = \int d^4 y_v \exp \left[ -i y_v \cdot \left( P_v - \sum_i \varepsilon_{vi} k_i \right) \right]. \tag{6.84б}$$

В (6.84a) благодаря присутствию  $i\varepsilon$  интеграл сходится на верхнем пределе. В дальнейшем величину  $i\varepsilon$  будем опускать (при этом можно считать, что  $m^2$  имеет малую мнимую часть).

Подставим представление (6.84) в (6.83) и изменим порядок интегрирования. Разумеется, такая операция не законна, если интегралы не являются абсолютно сходящимися, что часто имеет место. Однако в гл. 8 (т. 2 настоящей книги) при рассмотрении регуляризаций и перенормировок мы покажем, что это оправдано. Интегрирования по каждому 4-импульсу  $k_i$  могут быть легко вы-

полнены, что приводит к результату.

$$\begin{aligned} & \int \frac{d^4 k_l}{(2\pi)^4} \exp \left[ i\alpha_l \left( k_l^2 + \frac{1}{\alpha_l} \sum_v y_v \cdot \varepsilon_{vl} k_l \right) \right] = \\ & = \int \frac{d^4 k_l}{(2\pi)^4} \exp \left\{ i\alpha_l \left[ \left( k_l + \frac{1}{2\alpha_l} \sum_v y_v \varepsilon_{vl} \right)^2 - \frac{1}{4\alpha_l^2} \left( \sum_v y_v \varepsilon_{vl} \right)^2 \right] \right\} = \\ & = A A^{*3} \exp \left[ -\frac{i}{4\alpha_l} \left( \sum_v y_v \varepsilon_{vl} \right)^2 \right], \end{aligned}$$

где  $A$  — интеграл Френеля:

$$\begin{aligned} A &= \int \frac{dk}{2\pi} e^{i\alpha k^2} = \frac{e^{i\pi/4}}{\sqrt{4\pi\alpha_l}}, \\ A A^{*3} &= \frac{-i}{(4\pi\alpha_l)^2} \end{aligned}$$

Отсюда получаем

$$\begin{aligned} & (2\pi)^4 \delta^4(\sum P) I_G(P) = \\ & = \int \prod_v d^4 y_v \int_0^\infty \prod_l \left( d\alpha_l \frac{-i \exp \left\{ -i \left[ \alpha_l m_l^2 + \left( \sum_v y_v \varepsilon_{vl} \right)^2 / 4\alpha_l \right] \right\}}{(4\pi\alpha_l)^2} \right) \times \\ & \qquad \qquad \qquad \times e^{-i \sum_v y_v P_v}. \end{aligned} \tag{6.85}$$

Произведем в этой формуле следующую замену переменных:

$$\begin{aligned} y_1 &= z_1 + z_V, \\ y_2 &= z_2 + z_V, \\ &\dots \dots \dots \\ y_{V-1} &= z_{V-1} + z_V, \\ y_V &= z_V. \end{aligned}$$

Якобиан этой замены равен единице. Поскольку  $\sum_v \varepsilon_{vl} = 1$  (линия  $l$  соединяет две и только две вершины),  $z_V$  входит лишь в последнюю экспоненту выражения (6.85). Поэтому интегрирование по  $z_V$  дает  $\delta^4$ -функцию, выражающую закон сохранения энергии-импульса, а именно

$$\begin{aligned} & I_G(P) = \\ & = \int \prod_{l=1}^{V-1} d^4 z_v \int_0^\infty \prod_l \left( d\alpha_l \frac{-i \exp \left\{ -i \left[ \alpha_l m_l^2 + \left( \sum_{v=1}^{V-1} z_v \varepsilon_{vl} \right)^2 / 4\alpha_l \right] \right\}}{(4\pi\alpha_l)^2} \right) \times \\ & \qquad \qquad \qquad \times e^{-i \sum_{v=1}^{V-1} z_v P_v}. \end{aligned}$$



Матрица  $d_G(\alpha)$  размерности  $(V-1) \times (V-1)$ , определяемая как

$$[d_G(\alpha)]_{v_1 v_2} = \sum_l \varepsilon_{v_1 l} \frac{1}{\alpha_l} \varepsilon_{v_2 l},$$

является, как можно показать, несингулярной; ее детерминант равен

$$\Delta_G(\alpha) \equiv \det [d_G(\alpha)] = \sum_{\mathcal{F}} \prod_{l \in \mathcal{F}} \frac{1}{\alpha_l},$$

где сумма пробегает по всем деревьям  $G$ . Поскольку каждое дерево диаграммы  $G$  имеет  $V-1$  линий, очевидно, что  $\Delta_G$  представляет собой однородный полином по  $\alpha_l^{-1}$ . При  $\alpha > 0$  детерминант  $\Delta$  положителен. Теперь можно проинтегрировать по остальным  $(V-1)$  четыре-векторам  $z$ , в результате получаем

$$I_G(P) = \int_0^\infty \prod_l (d\alpha_l e^{-im_l^2 \alpha_l}) \frac{\exp\left(i \left\{ \sum_{v_1, v_2=1}^{V-1} P_{v_1} \cdot [d_G^{-1}(\alpha)]_{v_1 v_2} P_{v_2} \right\}\right)}{[i(4\pi)^2]^L [\alpha_1 \dots \alpha_L \Delta_G(\alpha)]^2}.$$

Эта формула выражает  $I_G(P)$  как функцию инвариантных скалярных произведений внешних импульсов  $P_{v_1} \cdot P_{v_2}$ . Функции от  $\alpha$ , которые входят в показатель экспоненты или в знаменатель, могут быть представлены в виде, не зависящем от выбора вершины  $V$ . С одной стороны, знаменатель

$$\mathcal{P}_G(\alpha) \equiv \alpha_1 \dots \alpha_L \Delta_G(\alpha) = \sum_{\mathcal{F}} \prod_{l \notin \mathcal{F}} \alpha_l \quad (6.86)$$

является однородным полиномом степени  $L$ , не зависящим, очевидно, от  $V$ . С другой стороны, квадратичную форму

$$Q_G(P, \alpha) \equiv \sum_{v_1, v_2=1}^{V-1} P_{v_1} \cdot [d_G^{-1}(\alpha)]_{v_1 v_2} P_{v_2}$$

можно записать в виде

$$Q_G(P, \alpha) = \frac{1}{\mathcal{P}_G(\alpha)} \sum_C s_C \prod_{l \in C} \alpha_l, \quad (6.87)$$

где сумма пробегает по всем возможным  $C$  «рассечениям»  $L+1$  линий, делящим диаграмму на две и только две связные части  $G_1(C)$  и  $G_2(C)$ ; такие разбиения получаются из древесных поддиаграмм диаграммы  $G$  рассечением некоторой  $(L+1)$ -й линии. При этом  $s_C$  обозначает квадрат импульсов  $P$ , входящих в  $G_1(C)$  или  $G_2(C)$ :

$$s_C = \left( \sum_{v \in G_1(C)} P_v \right)^2 = \left( \sum_{v \in G_2(C)} P_v \right)^2. \quad (6.88)$$

Таким образом,  $Q_G$  равно отношению двух однородных полиномов степени  $L+1$  и  $L$  соответственно.

Окончательно параметрическое представление имеет вид

$$I_G(P) = \int_0^\infty \prod_{l=1}^I (d\alpha_l e^{-i\alpha_l m_l^2}) \frac{e^{iQ_G(P, \alpha)}}{[i(4\pi)^2]^L [\mathcal{P}_G(\alpha)]^2}, \quad (6.89)$$

где  $\mathcal{P}_G$  и  $Q_G$  определяются выражениями (6.86)—(6.88), а  $L = I + 1 - V$ . Мы опустим в нашем элементарном изложении доказательство формул (6.86)—(6.88) и подробное рассмотрение свойств

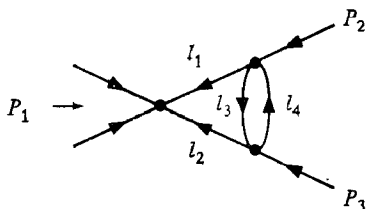


РИС. 6.27. Пример диаграммы, дающей вклад в четырехточечную функцию.

функций  $\mathcal{P}_G$  и  $Q_G$ , это можно найти в литературе, перечисленной в конце настоящей главы.

Проиллюстрируем правила (6.86)—(6.88) на конкретном примере. Диаграмма, изображенная на рис. 6.27, дает вклад в четырехточечную функцию в теории  $\phi^4$ . Напомним, что фактор симметрии  $S(G)=2$ , а  $C(G)=(-i\lambda)^3$ . Деревьями  $\mathcal{F}$  являются  $(l_1 l_2)$ ,  $(l_1 l_3)$ ,  $(l_1 l_4)$ ,  $(l_2 l_3)$  и  $(l_2 l_4)$ . Следовательно, полином  $\mathcal{P}_G$  можно записать в виде

$$\mathcal{P}_G = \alpha_3 \alpha_4 + \alpha_2 \alpha_4 + \alpha_2 \alpha_3 + \alpha_1 \alpha_4 + \alpha_1 \alpha_3.$$

Теперь перечислим рассеяния  $C$  и соответствующие им величины  $s_C$ :

$$(l_1 l_2 l_3) s_C = P_1^2 = (P_2 + P_3)^2,$$

$$(l_1 l_2 l_4) s_C = P_1^2 = (P_2 + P_3)^2,$$

$$(l_1 l_3 l_4) s_C = P_2^2 = (P_1 + P_3)^2,$$

$$(l_2 l_3 l_4) s_C = P_3^2 = (P_1 + P_2)^2.$$

Выбирая в качестве независимых переменных  $P_1$  и  $P_2$ , имеем

$$Q_G(P, \alpha) = \mathcal{F}_G^{-1} [P_1^2 \alpha_1 \alpha_2 (\alpha_3 + \alpha_4) + P_2^2 \alpha_1 \alpha_3 \alpha_4 + (P_1 + P_2)^2 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4].$$

В целях дальнейшего упрощения выражения (6.89) можно воспользоваться свойствами однородности  $\mathcal{P}_G$  и  $Q_G$ :

$$Q_G(P, \lambda\alpha) = \lambda Q_G(P, \alpha),$$

$$\mathcal{P}(\lambda\alpha) = \lambda^L \mathcal{P}_G(\alpha).$$

Подставляя в подынтегральную часть тождество

$$1 = \int_0^\infty d\lambda \delta\left(\lambda - \sum_i^I \alpha_i\right)$$

и производя замену переменной  $\alpha_l \rightarrow \lambda \alpha_l$ , получаем

$$I_G(P) = \frac{1}{[i(4\pi)^{2L}]^L} \int_0^1 \prod_{l=1}^L d\alpha_l \frac{\delta(1 - \sum \alpha_l)}{[\mathcal{P}_G(\alpha)]^2} \int_0^\infty \frac{d\lambda}{\lambda} \lambda^{l-2L} \times \\ \times \exp \left\{ i\lambda \left[ Q_G(P, \alpha) - \sum_l m_l^2 \alpha_l \right] \right\}. \quad (6.90)$$

Из-за присутствия  $\delta$ -функции интегрирование по  $\alpha$  проводится в пределах от 0 до 1. При интегрировании по  $\lambda$  сходимость на верхнем пределе обеспечена благодаря неявно входящей в  $m_l^2$  добавке  $i\varepsilon$ . Интеграл сходится также и на нижнем пределе при условии, что  $2V - l - 2 > 0$ . Результат интегрирования можно выразить с помощью гамма-функции Эйлера в виде

$$I_G(P) = \frac{i^{3(V-1)-2l}}{(4\pi)^{2L}} \Gamma(2V - l - 2) \int_0^1 \prod_{l=1}^L d\alpha_l \times \\ \times \frac{\delta\left(1 - \sum_{l=1}^L \alpha_l\right)}{[\mathcal{P}_G(\alpha)]^2 \left[ Q_G(P, \alpha) - \sum_{l=1}^L \alpha_l m_l^2 \right]^{2V-l-2}}. \quad (6.91)$$

Условие сходимости, записанное в виде  $2l - 4V + 4 < 0$ , отражает лишь тот факт, что  $I_G(P)$  имеет отрицательную размерность в единицах энергии. Это можно видеть из выражений (6.83) и (6.91), учитывая то, что  $Q_G$  имеет размерность  $[E]^2$ . Если же эта размерность неотрицательна, интеграл расходится на нижнем пределе  $\lambda \sim 0$ , что в рассматриваемом параметрическом представлении является отражением ультрафиолетовой расходимости интеграла (6.83) при больших  $k$ . Это соотношение между размерностью и наличием расходимостей предвосхищает правила подсчета степеней, которые будут нашим основным критерием при рассмотрении процедуры перенормировок.

Параметрические представления (6.89)–(6.91) полезны во многих отношениях. С их помощью различными выражениями, соответствующим диаграммам Фейнмана, можно придать простую форму, удобную при практических вычислениях. Их можно также применить для изучения аналитических свойств функций Грина и выполнения программы перенормировок. Кроме того, существует интересная аналогия между этими параметрическими представлениями и теорией электрических цепей

### 6.2.4. Функции Грина в евклидовой области

Функции Грина (скалярной) теории являются функциями инвариантных скалярных произведений их внешних импульсов, представляющих собой вещественные лоренцевы 4-векторы. Из результатов предыдущей главы (а также из раздела 6.2.5) следует, что эти функции обладают свойствами аналитичности и могут быть продолжены в нефизические области. Здесь мы остановимся на вопросе о продолжении в евклидову область, в которой теория поля по некоторым свойствам аналогична статистической механике. Формулировкой теории поля в евклидовой области мы заниматься не будем, однако разовьем соответствующую этому случаю теорию возмущений. Вновь для простоты будем применять скалярную теорию.

Рассмотрим сильновыпуклую функцию  $\Gamma^{(n)}(p_1, \dots, p_n)$  и предположим, что ее аргументы удовлетворяют условию

$$\left( \sum_{k=1}^n u_k p_k \right)^2 \leq 0 \quad (\text{евклидова область}) \quad (6.92)$$

для любых вещественных  $(u_k)$ . Многообразие, удовлетворяющее этому условию, есть линейное пространственно-подобное подпространство (гиперпространство) импульсного пространства. Рассматривая  $\Gamma^{(n)}$  как функцию инвариантов  $p_i \cdot p_j$  ( $i, j = 1, \dots, n-1$ ), вычислим размерность всего многообразия, когда отсутствует ограничение (6.92), и размерность подмножества с ограничением (6.92). Разумеется, необходимо помнить, что в четырехмерном пространстве любой набор более чем четырех векторов является линейно-зависимым. Следовательно, при  $n \geq 6$  векторы  $p$  линейно-зависимы. Поэтому в случае  $n \geq 4$  инварианты  $p_i \cdot p_j$  принадлежат многообразию размерности  $4n - 10$  (1 и 3 для  $n = 2, 3$  соответственно). Если принять во внимание условие (6.92), то в случае  $n \geq 4$  они принадлежат подмногообразию размерности  $3n - 6$  (1 и 3 для  $n = 2, 3$ ). При  $n = 4$  обе размерности совпадают и равны 6 (например,  $s, t, u, p_1^2, \dots, p_4^2$ , причём  $\sum p_i^2 = s + t + u$ ), а при  $n \geq 5$  евклидово подмногообразие (6.92) имеет размерность, меньшую размерности всего пространства.

В евклидовой области (6.92) все  $p$  ортогональны некоторому временноподобному вектору  $n$ . Используя преобразование Лоренца, можно выбрать  $n = (1, 0, 0, 0)$ , при этом  $p_i^0 = 0$  для всех  $i$ . Это позволяет сопоставить каждому  $p_i$  вектор  $\hat{p}_i$  евклидова  $R^4$ -пространства: в такой системе отсчета  $\hat{p}_i^0 = p_i^0 = 0$  и  $\hat{p}_i = p_i$ . Следовательно,

$$\hat{p}_i \cdot \hat{p}_j = \hat{p}_i^0 \hat{p}_j^0 + \hat{p}_i^1 \hat{p}_j^1 + \hat{p}_i^2 \hat{p}_j^2 + \hat{p}_i^3 \hat{p}_j^3 = -p_i \cdot p_j.$$

Если теперь выделить диаграмму, дающую вклад в  $\Gamma^{(n)}$ , и записать этот вклад в виде (6.89), то можно определить величину  $P_v$ , т. е. сумму импульсов  $p_i$ , входящих в вершину  $v$ . Напомним, что каждому «рассечению»  $C$  такой диаграммы сопоставляются величины [ср. с (6.87) и (6.88)]

$$\hat{s}_C \equiv \left( \sum_{v \in G_1(C)} \hat{P}_v \right)^2 = - \left( \sum_{v \in G_1(C)} P_v \right)^2 = -s_C.$$

$$Q_G(\hat{P}, \alpha) = \frac{1}{\mathcal{P}_G(\alpha)} \sum_C \hat{s}_C \prod_{l \in C} \alpha_l = -Q_G(P, \alpha).$$

Поэтому на многообразии (6.92) выражение (6.90) можно переписать в виде

$$I_G(P) = \int_0^1 \left( \prod_{l=1}^l d\alpha_l \right) \delta \left( 1 - \sum \alpha_l \right) \int_0^\infty \frac{d\lambda}{\lambda} \lambda^{l-2L} \frac{\exp \{ -i\lambda [Q_G(\hat{P}, \alpha) + \sum \alpha_l m_l^2] \}}{[i(4\pi)^2]^L [\mathcal{P}_G(\alpha)]^2}.$$

Напомним, что в  $m_i^2$  подразумевается наличие отрицательной мнимой части. С учетом положительности выражения, стоящего в квадратных скобках в показателе экспоненты (при  $m_i^2 \geq 0$ ), это позволяет нам повернуть контур интегрирования в комплексной плоскости  $\lambda$  (рис. 6.28) на угол  $-\pi/2$  (т. е. по часовой стрелке). Последнее, конечно, эквивалентно одновременному повороту на угол  $-\pi/2$  всех переменных  $\alpha$  в выражении (6.89). Необходимо подчеркнуть,

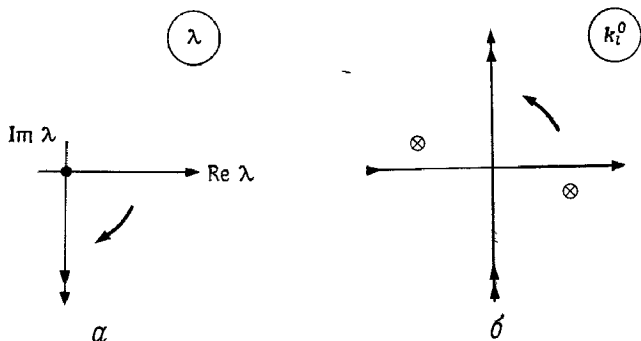


РИС. 6.28. Поворот Вика в параметрическом пространстве (а) и в импульсном пространстве (б). Исходный контур интегрирования указан одиночной стрелкой, а контур, получающийся в результате поворота, — двойной стрелкой. На рис. б крестиками обозначены положения полюсов  $k_i^0 = \pm [(k_i + \sum p)^2 + m_i^2 - i\epsilon]^{1/2}$ .

что добавка  $i\epsilon$  играет решающую роль, так как она задает направление поворота. Этот поворот, называемый обычно поворотом Вика, является незаконным, если некоторые  $m_i^2$  оказываются отрицательными. В импульсном пространстве [ср. с (6.83)] поворот Вика сводится к повороту на  $\pi/2$  (против часовой стрелки) всех  $k_i^0$  в системе отсчета, в которой все  $p_i^0 = 0$ . Это согласуется с расположением полюсов пропагатора в точках

$$k_i^0 = \pm [(k_i + \sum p)^2 + m_i^2 - i\epsilon]^{1/2}.$$

После осуществления поворота мы получим в евклидовой области

$$I_G(P) = (-i)^{V-1} \hat{I}_G(\hat{P}) = (-i)^{V-1} \int_0^\infty \prod_{i=1}^l d\alpha_i \frac{\exp\{-[Q_G(\hat{P}, \alpha) + \sum \alpha_i m_i^2]\}}{(4\pi)^{2L} [\mathcal{P}_G(\alpha)]^2}. \tag{6.93}$$

Величина  $S(G)$ , стоящая перед  $I_G(P)$  [ср. с (6.83)], содержит множитель  $i^V$ , происходящий от разложения  $\exp\left[i \int d^4z \mathcal{L}_{\text{вс}}(z)\right]$  до членов степени  $V$ . Положим  $S(G) = i^V \hat{S}(G)$  и перепишем (6.93) в виде

$$\frac{C(G)}{S(G)} I_G(P) = i \frac{\hat{C}(G)}{\hat{S}(G)} \hat{I}_G(\hat{P}).$$

Например, в теории  $\lambda\phi^4$  имеем  $\hat{C}(G) = (-\lambda)^V$ . В разд. 6.2.2 мы показали, что сильносвязные функции отождествляются с  $i\Gamma^{(n)}$ , определяемыми с помощью преобразования Лежандра (6.73) и (6.75). Поэтому благодаря наличию допол-

нительного множителя  $i$  эти функции  $\Gamma^{(n)}$  совпадают с вещественными евклидовыми функциями Грина, т. е.

$$\Gamma^{(n)}(p_1, \dots, p_n) = \hat{\Gamma}^{(n)}(\hat{p}_1, \dots, \hat{p}_n),$$

определяемыми как суммы вкладов  $[\hat{C}(G)/S(G)] \hat{I}_G(\hat{P})$  от каждой диаграммы. Повторяя те же вычисления, что и в разд. 6.2.3, нетрудно доказать справедливость соотношения

$$(2\pi)^4 \delta^4 \left( \sum \hat{p} \right) \frac{\hat{C}(G)}{S(G)} \hat{I}_G(\hat{P}) = \frac{\hat{C}(G)}{S(G)} \int \prod_l \frac{d^4 \hat{k}_l}{(2\pi)^4} \frac{1}{\hat{k}_l^2 + m_l^2} \times \\ \times \prod_v (2\pi)^4 \delta^4 \left( \hat{P}_{v1} - \sum_l \varepsilon_{vl} \hat{k}_l \right), \quad (6.94)$$

где  $\hat{k}_l$  — евклидовы 4-импульсы, а  $\hat{k}_l^2 = \sum_{i=0}^3 (\hat{k}_l^i)^2$ . Здесь, как и в формуле (6.93), подынтегральное выражение является положительным. Разумеется, соотношение (6.94) означает, что  $\hat{\Gamma}$  можно вычислить в соответствии с правилами Фейнмана в евклидовом пространстве:

вершина	$-\lambda$	вместо	$-i\lambda,$	
пропагатор	$\frac{1}{\hat{k}^2 + m^2}$	вместо	$\frac{i}{k^2 - m^2 + i\varepsilon}.$	(6.95)

Из этих правил следует, что в области совпадения (6.92) между связными функциями Грина (с внешними пропагаторами) имеет место следующее соотношение:

$$G_c^{(n)}(p_1, \dots, p_n) = i(-i)^n \hat{G}_c^{(n)}(\hat{p}_1, \dots, \hat{p}_n). \quad (6.96)$$

В конфигурационном пространстве эти функции записываются в виде

$$\hat{G}_c(x_1, \dots, x_n) = \int \prod_{\hat{k}=1}^n \frac{d^4 q_{\hat{k}}}{(2\pi)^4} e^{-i\hat{q}_{\hat{k}} \cdot x_{\hat{k}}} (2\pi)^4 \delta^4 \left( \sum q_i \right) \hat{G}_c(\hat{q}_1, \dots, \hat{q}_n),$$

где  $x \cdot \hat{q} = x^0 q^0 + x^1 q^1 + x^2 q^2 + x^3 q^3$ . Введем теперь производящий функционал

$$\hat{G}_c(j) = \sum \frac{1}{n!} \int dx_1 \dots dx_n j(x_1) \dots j(x_n) \hat{G}_c(x_1, \dots, x_n)$$

и аналогичное выражение для  $\hat{\Gamma}(\varphi_c)$ . Собирая все множители  $i$  в формулах (6.716), (6.72), (6.73) и (6.96), можно непосредственно проверить, что  $\hat{\Gamma}(\varphi_c)$  является преобразованием Лежандра от  $\hat{G}_c$ :

$$\hat{\Gamma}(\varphi_c) = \left[ \hat{G}_c(j) - \int d^4 x j(x) \varphi_c(x) \right], \quad (6.97)$$

где  $\varphi_c$  и  $j$  связаны соотношением

$$\varphi_c(x) = \frac{\delta \hat{G}_c(j)}{\delta j(x)}. \quad (6.98)$$

В низшем порядке теории возмущений евклидов функционал в теории  $\varphi^4$  можно

записать в виде

$$\hat{\Gamma}_{\text{древесн}}(\Psi_c) = - \int d^4x \mathcal{L}_E[\Psi_c(x)] \equiv - \int d^4x \left( \frac{1}{2} \sum_{k=0}^3 \partial_k \Psi_c \partial_k \Psi_c + \frac{m^2}{2} \Psi_c^2 + \frac{\lambda}{4!} \Psi_c^4 \right).$$

Следует заметить, что член  $(\partial_0 \Psi)^2$  имеет здесь противоположный знак по сравнению с (6.82).

Евклидову теорию можно рассматривать как аналог статистической механики, в которой каждая полевая конфигурация входит с весом  $\exp \left[ - \int d^4z \mathcal{L}_E(\varphi) \right]$ . Это станет, по-видимому, более понятным после введения континуальных интегралов в гл. 9 (см. т. 2 настоящей книги).

Предлагаем читателю в качестве упражнения обсудить смысл поворота Вика при наличии полей со спином 1/2; выяснить, что происходит при этом с  $\gamma$ -матрицами, а также найти соотношение между  $\psi$  и  $\bar{\psi}$ . После этого можно будет сформулировать правила Фейнмана для евклидовой квантовой электродинамики.

### 6.3. АНАЛИТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА

В последнем разделе гл. 5 мы изучали аналитические свойства амплитуд, исходя из общего принципа локальной причинности. В качестве типичного примера рассматривалась двухчастичная амплитуда упругого рассеяния вперед, которая, как было показано, является аналитической по энергии при наложении соответствующих ограничений на значения массы частиц. Область аналитичности представляет собой плоскость с двумя разрезами, начинающимися в точках ветвления  $s = M_+^2$  и  $u = 2(m_N^2 + m_\pi^2) - s = M_-^2$  (при  $t=0$ ). Эти значения переменных соответствуют наимизшим промежуточным состояниям в прямом ( $s$ ) и перекрестном ( $u$ ) каналах. Скачки амплитуды на разрезах связываются с помощью оптической теоремы с полным сечением реакции в данном канале. Следовательно, амплитуда, по-видимому, будет иметь сингулярности вдоль вещественной оси при всех значениях энергии, соответствующих новым порогам, т. е. возникновению новых возможных конечных состояний. Например, ожидается, что амплитуда рассеяния вперед в процессе  $\pi N \rightarrow \pi N$  имеет сингулярности по  $s$  (или  $u$ ) в точках  $(m_N + m_\pi)^2$ ,  $(m_N + 2m_\pi)^2$  и т. д.

В настоящем разделе мы обсудим в общих чертах аналитические свойства фейнмановских интегралов. Интерес к изучению этого предмета вызван тремя обстоятельствами. Во-первых, полезно проверить в рамках теории возмущений общие аналитические свойства, установленные строго. Всякий раз, когда с помощью общих аксиом можно доказать существование области аналитич-

ности, вклад произвольной диаграммы необходимо анализировать на всех последовательных стадиях доказательства и убедиться при этом, что он обладает соответствующими аналитическими свойствами, или, точнее, их эквивалентами в рамках теории возмущений. Однако, если массы таковы, что общее доказательство провести не удастся, практически полезным может оказаться изучение отдельных диаграмм. Во-вторых, таким образом можно исследовать комплексные сингулярности или изучать свойства аналитичности по нескольким переменным. Даже тогда, когда мы предполагаем, что ряд теории возмущений не сходится, и, следовательно, точные выражения для амплитуд могут иметь свойства, отличные от свойств отдельных диаграмм, такое изучение позволит нам получить полезные выводы. В-третьих, дисперсионные соотношения по одной или нескольким переменным могут оказаться полезным средством при вычислении фейнмановских амплитуд.

В дальнейшем мы часто будем использовать термин «физический лист амплитуды рассеяния». Под этим подразумевается область, достигаемая аналитическим продолжением в комплексную плоскость выше порога с учетом фейнмановской добавки  $i\epsilon$ . При таком рассмотрении мы пренебрегаем возможностью пересечения различных разрезов, обусловленных сингулярной природой амплитуды рассеяния.

### 6.3.1. Уравнения Ландау

Функция, определяемая интегралом

$$F(z) = \int_C dx f(x, z)$$

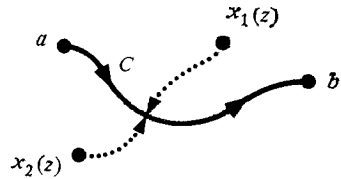
по контуру  $C$ , может иметь, например, в интервале  $(a, b)$  вещественной оси сингулярности двух типов. Предположим, что функция  $f(x, z)$  является аналитической по переменным  $x, z$  во всей области ее определения, за исключением сингулярностей, расположенных в  $x = x_R(z)$ . Очевидно,  $F(z)$  является аналитической в любой точке  $z$ , такой, что ее открытая окрестность  $C$  свободна от сингулярностей. Если некоторая сингулярность  $x_R(z)$  приближается к контуру  $C$  и этот контур можно деформировать таким образом, чтобы избежать ее, то  $F$  остается аналитической. Следовательно,  $F$  как функция от  $z$  может быть сингулярной в тех случаях, когда контур  $C$  нельзя более деформировать. Этих случаев два.

1. Одна из сингулярных точек  $x_r(z)$  находится близко от одной из конечных точек контура, т. е. при  $z \rightarrow z_0$  мы имеем  $x_r(z) \rightarrow a$  или  $b$ . В этом случае  $z_0$  называется концевой сингулярной точкой.



2. Контур  $C$  зажат между двумя сингулярностями  $x_1(z)$  и  $x_2(z)$  (рис 6.29), т. е. при  $z \rightarrow z_0$  точки  $x_1(z)$  и  $x_2(z)$  подходят к контуру с противоположных сторон (снизу и сверху) и совпадают при  $z = z_0$ . В этом случае точка  $z_0$  называется пинч-сингулярностью.

РИС. 6.29 Сингулярность, возникающая при зажимании контура интегрирования между двумя сингулярными точками  $x_1(z)$  и  $x_2(z)$  подынтегрального выражения.



Элементарными примерами являются следующие интегралы:

$$F(z) = \int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2+z} = \frac{2}{\sqrt{z}} \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{z}}, \tag{6.99a}$$

$$F(z) = \int_0^1 \frac{dx}{(x-2)(x-z)} = \frac{1}{z-2} \ln \left[ \frac{2(z-1)}{z} \right], \tag{6.99б}$$

$$F(z) = \int_0^1 \frac{dx}{1-x^2z} = \frac{1}{2\sqrt{z}} \ln \frac{1+\sqrt{z}}{1-\sqrt{z}}. \tag{6.99в}$$

В первом примере  $z=0$  мы имеем пинч-сингулярность, поскольку при  $z \rightarrow 0+$  контур зажимается между двух полюсов  $x = i\sqrt{z}$  и  $x = -i\sqrt{z}$ . Во втором случае получаем концевые сингулярные точки  $z=0$  и  $z=1$ . При  $z=2$  во всех римановых листах логарифма, за исключением первого листа (соответствующего его главному значению), мы имеем пинч-сингулярность. Действительно, на первом листе контур интегрирования не пересекает точки  $x=2$ . Однако при переходах на другие листы нам приходится деформировать контур интегрирования. При этом может возникнуть зажимание контура. Такое же явление наблюдается и в третьем случае (6.99в). Здесь при  $z=1$  имеет место концевая сингулярная точка, в то время как сингулярность при  $z=0$  на каждом листе, за исключением первого, появляется из-за зажимания контура на бесконечности. Это становится понятным, если заменить переменную интегрирования  $x$  на  $u=1/x$ .

Это рассмотрение можно обобщить на функции нескольких комплексных переменных  $x_i$  и  $z_j$ , т. е.  $F(z_j) = \int_H \left( \prod_i dx_i \right) f(x_i, z_j)$ .

Граница области интегрирования, определяемая гиперконтуром  $H$ , описывается набором аналитических соотношений  $\mathcal{F}_r(x, z) = 0$ . Сингулярности подынтегральной функции  $f(x_i, z_j)$  имеют вид аналитических многообразий  $\mathcal{S}_s(x, z) = 0$ . Сингулярности возникают тогда, когда гиперконтур  $H$  зажимается между двумя или более сингулярными поверхностями или сингулярная поверхность пересекается с ограничивающей поверхностью. Точнее говоря, можно по-

казать, что необходимым условием наличия сингулярности является существование множества комплексных параметров  $\lambda_s, \tilde{\lambda}_r$ , которые не все равны нулю и такие, что при  $x_i = x_i^0, z_j = z^0$  имеют место следующие равенства:

$$\begin{aligned} \lambda_s \mathcal{P}_s(x^0, z^0) &= 0 && \text{для всех } s, \\ \tilde{\lambda}_r \tilde{\mathcal{P}}_r(x^0, z^0) &= 0 && \text{для всех } r, \\ \frac{\partial}{\partial x_i} \left[ \sum_r \tilde{\lambda}_r \tilde{\mathcal{P}}_r(x, z) + \sum_s \lambda_s \mathcal{P}_s(x, z) \right] \Big|_{x^0, z^0} &= 0 && \text{для всех } i. \end{aligned} \quad (6.100)$$

Последнее условие отражает тот факт, что гиперповерхности касаются друг друга в точке зажимания. Но это только необходимое условие. Определение того, действительно ли гиперконтуры зажимаются, требует детального изучения

Применим эти общие результаты к изучению интегралов Фейнмана, которые мы сначала рассмотрим в импульсном пространстве Минковского. Рассмотрим интеграл

$$I_G(P) = \int \prod_{i=1}^L \frac{d^4 q_i}{(2\pi)^4} \prod_{i=1}^l \frac{i}{k_i^2 - m_i^2 + i\varepsilon}. \quad (6.101)$$

Обозначения здесь приняты те же, что и в формуле (6.83), за исключением лишь того, что теперь внутренние импульсы  $k_i$  выражены через набор петлевых переменных  $q_i$  и внешние импульсы  $P$ . Границы области интегрирования уходят здесь на бесконечность. В нашем элементарном рассмотрении мы пренебрежем возможностью появления концевых сингулярных точек на бесконечности и не будем вводить  $\tilde{\mathcal{P}}_r$ . Сингулярности подынтегральной функции определяются уравнениями  $\mathcal{P}_i \equiv k_i^2 - m_i^2 = 0$ . Уравнения Ландау выражают необходимые условия (6.100) для данного случая:

$$\begin{cases} \lambda_i (k_i^2 - m_i^2) = 0 & \text{для всех } i = 1, \dots, l, \\ \sum_i \lambda_i k_i \cdot \frac{\partial k_i}{\partial q_l} = 0, & l = 1, \dots, L. \end{cases} \quad (6.102a) \quad (6.102b)$$

Второе уравнение можно переписать в виде

$$\sum_{i \in \mathcal{L}_l} (\pm) \lambda_i k_i = 0, \quad (6.103)$$

где мы использовали обстоятельство, что те  $k$ , которые зависят линейно (и с коэффициентом  $\pm 1$ ) от петлевой переменной  $q_l$ , принадлежат единственной петле, обозначаемой  $\mathcal{L}_l$ . Уравнение (6.102a) можно интерпретировать таким образом, что сингулярности образуются, только если для каждой внутренней линии либо 4-импульс находится на своей массовой поверхности  $k_i^2 = m_i^2$ , либо равен нулю параметр  $\lambda_i$ . В последнем случае  $i$ -я линия никогда не появляется

в сингулярных уравнениях. При этом мы имеем сингулярность редуцированной диаграммы, в которой  $i$ -я линия стянута в точку.

Поучительным является вывод уравнений Ландау из других интегральных представлений. Прежде чем обсуждать параметрическое представление, рассмотренное в разд. 6.2.3, введем смешанное представление

$$\frac{1}{(I-1)!} I_G(P) = i' \int \prod_{l=1}^L \frac{d^4 q_l}{(2\pi)^4} \int_0^1 \prod_{i=1}^I d\alpha_i \frac{\delta(1 - \sum \alpha_i)}{\left[ \sum_{i=1}^I \alpha_i (k_i^2 - m_i^2) \right]^I}, \quad (6.104)$$

которое получается с помощью соотношения (6.101), если использовать тождество

$$\frac{1}{A_1 \dots A_I} = (I-1)! \int_0^1 \frac{d\alpha_1 \dots d\alpha_I \delta(1 - \sum \alpha_i)}{\left( \sum_{i=1}^I \alpha_i A_i \right)^I}. \quad (6.105)$$

Теперь сингулярности интеграла  $I_G(P)$  обусловлены нулями знаменателя  $\mathcal{S} = \sum_{i=1}^I \alpha_i (k_i^2 - m_i^2)$  при зажимании гиперконтура в  $(\alpha, q)$ -пространстве или при пересечении его с границами  $\bar{\mathcal{S}}_i = \alpha_i = 0$ . Уравнения, определяющие сингулярности, записываются следующим образом:

$$\lambda' \mathcal{S} = 0, \quad (6.106a)$$

$$\lambda'_i \alpha_i = 0, \quad i = 1, \dots, I, \quad (6.106б)$$

$$\frac{\partial}{\partial q_l} \left( \lambda' \mathcal{S} + \sum_i \lambda'_i \alpha_i \right) = 0, \quad l = 1, \dots, L, \quad (6.106в)$$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_j} \left( \lambda' \mathcal{S} + \sum_i \lambda'_i \alpha_i \right) = 0, \quad j = 1, \dots, I. \quad (6.106г)$$

Случай  $\lambda' = 0$  приводит к  $\lambda'_i = 0$  для всех  $i$ . Мы отбрасываем это тривиальное решение и полагаем  $\mathcal{S} = 0$ . При этом уравнение (6.106в) принимает вид

$$\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial q_l} = 2 \sum_i \alpha_i k_i \cdot \frac{\partial k_i}{\partial q_l} = 0,$$

а уравнения (6.106б) и (6.106г) приводят к

$$\alpha_j (k_j^2 - m_j^2) = 0, \quad j = 1, \dots, I.$$

Таким образом, мы снова получили уравнения (6.102), в которых  $\lambda$  заменены на  $\alpha$ .

Параметрическое представление (6.91), справедливое в случае, когда в диаграмме на первый взгляд отсутствуют ультрафиолетовые расходимости [т. е.  $2L - 4(V - 1) < 0$ ], получается из соотношения (6.104) интегрированием по петлевым импульсам  $q$ . Пренебрегая возможностью существования сингулярностей из-за наличия нулей у функции  $\mathcal{P}_G(\alpha)$ , будем считать, что  $\mathcal{S} =$

$= Q_G(P, \alpha) - \sum_{i=1}^I \alpha_i m_i^2$ ,  $\bar{\mathcal{S}}_i = \alpha_i$ , и запишем условия существования сингулярностей в виде

$$\begin{aligned} \lambda' \mathcal{S} &= 0, \\ \lambda'_i \alpha_i &= 0, \quad i=1, \dots, I, \\ \frac{\partial}{\partial \alpha_i} \left( \lambda' \mathcal{S} + \sum_i \lambda'_i \alpha_i \right) &= 0, \quad i=1, \dots, I. \end{aligned} \quad (6.107)$$

Снова  $\lambda' = 0$  является тривиальным решением. Эти условия можно переписать в виде  $\alpha_j \partial \mathcal{S} / \partial \alpha_j = 0$  для каждого  $j$ , откуда в силу однородности  $\mathcal{S}$  имеем  $\mathcal{S} = \sum_j \alpha_j \partial \mathcal{S} / \partial \alpha_j = 0$ . Чтобы показать эквивалентность этих условий уравнениям Ландау (6.102), нам необходимо вернуться к переменным  $k_i$  для каждой внутренней линии, определенным через внешние импульсы и параметры  $\alpha$ . Последние выбираются так, чтобы удовлетворить уравнениям типа (6.103), в которых  $\lambda_i$  заменены на  $\alpha_i$ . С этим определением условие  $\alpha_j \partial \mathcal{S} / \partial \alpha_j = 0$  соответствует уравнению (6.102а).

При отыскании решений системы уравнений (6.106) или (6.107) благодаря однородности функции  $\mathcal{S}$  мы можем опустить условие  $\sum \alpha_i = 1$ .

В любом представлении решение, соответствующее  $\lambda_i \neq 0$  (или  $\alpha_i \neq 0$ ) для всех  $i$ , называется главной сингулярностью, в то время как решение, для которого  $\lambda_i = 0$  (или  $\alpha_i = 0$ ) при  $i \in \mathcal{Y}$ , называется неглавной сингулярностью. Для соответствующей редуцированной диаграммы  $R = G/\mathcal{Y}$ , в которой все линии  $i \in \mathcal{Y}$  стягиваются в точку, данная сингулярность является главной.

Уравнения Ландау представляют интерес в связи с тем, что, решив их, можно было бы найти положение сингулярностей  $\varepsilon$  помощью алгебраических действий. Однако даже для простых диаграмм получить общее решение этих уравнений весьма трудно. Эту задачу возможно решить лишь для случая вещественной сингулярности.

### 6.3.2. Вещественные сингулярности

Вещественные сингулярности — это те сингулярности, которые имеют место для вещественных значений инвариантов  $s_{ij} = P_i \cdot P_j$  на физическом листе. Заметим, что эти вещественные значения инвариантов с необходимостью не соответствуют физически возможным кинематическим конфигурациям. Например, в случае упругого рассеяния двух частиц, находящихся на массовых поверхностях  $m_a$  и  $m_b$ , область  $s = (p_a + p_b)^2 < (m_a + m_b)^2$  является вещественной, но не физической.

Если интегрирование проводить по вещественному контуру в параметрическом пространстве, то при вещественных значениях инвариантов  $s_{ij}$  и мнимых добавках ( $-i\varepsilon$ ) к внутренним массам никакой сингулярности не возникает. Сингулярности образуются лишь в пределе  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Можно показать, что любое вещественное решение уравнений Ландау соответствует зажиманию контура интегрирования при переходе к пределу  $\varepsilon \rightarrow 0$  и, следовательно, приводит к сингулярности интеграла.

Для того чтобы это показать, рассмотрим параметрическое представление (6.91). Начнем с анализа главной сингулярности, существующей при некоторых вещественных значениях инвариантов  $s = s^{(0)}$ . Пусть уравнения Ландау  $\partial \mathcal{S} / \partial \alpha_j = 0$  имеют вещественные решения  $\alpha_j = \alpha_j^0$  ( $j = 1, \dots, l$ ). В окрестности этой точки справедливо разложение

$$\Delta \mathcal{S} = \frac{1}{2} \sum_{i, j=1}^{l-1} \left. \frac{\partial^2 \mathcal{S}}{\partial \alpha_i \partial \alpha_j} \right|_{\alpha^{(0)}, s^{(0)}} \Delta \alpha_i \Delta \alpha_j + O(\Delta \alpha^3).$$

После диагонализации этой квадратичной формы получаем уравнение

$$\Delta \mathcal{S} = \frac{1}{2} \sum \sigma_i \Delta \beta_i^2$$

с вещественными собственными значениями  $\sigma_i$  и убеждаемся, что по любой переменной  $\beta_i$  ( $i = 1, \dots, l-1$ ) решения уравнения  $\Delta \mathcal{S} - i\varepsilon = 0$  приближаются к вещественной оси с противоположных сторон за исключением, возможно, особого случая, когда  $\sigma_i = 0$ . Это означает что в каждом интегрировании по  $\beta_i$  возникает пинч-сингулярность. Теперь можно расправиться с неглавной сингулярностью. Предположим, что среди решений уравнений Ландау  $n$  параметров  $\alpha_i$  равны нулю.  $\alpha_i^{(0)} = 0, i \in \mathcal{Y}$ . После интегрирования по этим параметрам в окрестности нуля мы снова имеем предыдущий случай.

Для определения типа сингулярности, с которым мы имеем дело, можно применить тот же самый метод. Предположим, что мы находимся вблизи сингулярности  $s \approx s^{(0)}$ ; посмотрим, какой вклад в интеграл дают точки, лежащие в окрестности  $\alpha = \alpha^{(0)}$ . Напишем разложение

$$\Delta \mathcal{S} = \sum \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial s_a} \Delta s_a + \sum_{\substack{i \in \mathcal{Y} \\ i=1, \dots, n}} \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \alpha_i} \Delta \alpha_i + \frac{1}{2} \sum_{i, j \in R} \frac{\partial^2 \mathcal{S}}{\partial \alpha_i \partial \alpha_j} \Delta \alpha_i \Delta \alpha_j,$$

в котором первый член обусловлен вариацией  $\Delta s_a = s_a - s_a^{(0)}$  инвариантов, второй член — вариацией  $n$  параметров  $\alpha_i$  ( $i \in \mathcal{Y}$ ) вблизи нуля, а третий — вариацией параметров редуцированной диаграммы  $R$ . Поскольку  $\alpha_j = 0$  для  $i \in \mathcal{Y}$ , в выражении (6.91) знаменатель  $\mathcal{P}_G(\alpha)$  стремится к нулю как степень  $L(\mathcal{Y})$ , где  $L(\mathcal{Y})$  — число независимых петель поддиаграммы, соответствующей  $\mathcal{Y}$ . Из простого подсчета мы видим, что интеграл  $I_G(P)$  как функция числа петель и внутренних линий редуцированной диаграммы ведет себя следующим образом:

$$I_G(P) \sim (\Delta s)^k, \tag{6.108}$$

где

$$k = (2L - l) + [n - 2L(\mathcal{Y})] + \frac{1}{2} (l - 1 - n) = \frac{1}{2} [4L(R) - l(R) - 1].$$

В любом случае, если  $k$  — неотрицательное число, может появиться добавочная логарифмическая зависимость:

$$I_G(P)_{s \sim s^{(0)}} \sim (\Delta s)^k \ln^m |\Delta s|, \quad k = 0, 1, \dots \tag{6.109}$$

В действительности этот результат не зависит от того, вещественна сингулярность или нет. Таким образом, мы приходим к заключению, что фейнмановские интегралы как функции инвариантных скалярных произведений  $s_{ij} = = P_i \cdot P_j$  обычно имеют логарифмические и корневые (второй степени) точки ветвления.

Вещественные сингулярности обладают рядом интересных свойств. Например, в параметрическом пространстве в точке, соответствующей решению уравнений Ландау, производные по параметрическим переменным  $\partial \mathcal{S} / \partial \alpha_j$  равны нулю для всех ненулевых  $\alpha_j^{(0)}$ . Следовательно, такое решение соответствует либо локаль-

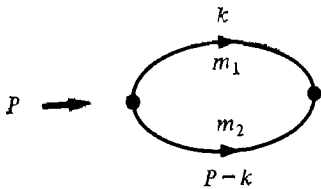


РИС. 6.30. Диаграмма «пузырь».

ному экстремуму, либо седловой точке  $\mathcal{S}$  на компактном множестве  $\Delta = \{0 \leq \alpha_i \leq 1, \sum \alpha_i = 1\}$ . С другой стороны, можно показать, что это не минимум функции  $\mathcal{S}$ . Например, диаграмма собственной энергии, приведенная на рис. 6.30, сингулярна при  $P^2 = (m_1 + m_2)^2$ . Функция  $\mathcal{S}$  для этой диаграммы имеет вид

$$\mathcal{S} = \frac{\alpha_1 \alpha_2 P^2}{\alpha_1 + \alpha_2} - \alpha_1 m_1^2 - \alpha_2 m_2^2.$$

При  $P^2 = (m_1 + m_2)^2$  она имеет максимум, равный нулю в точке  $\alpha_1 = m_2 / (m_1 + m_2)$ ,  $\alpha_2 = m_1 / (m_1 + m_2)$ , являющейся решением уравнения Ландау и принадлежащей интервалу  $\Delta$ . Конфигурации же, отвечающие седловым точкам, по-видимому, вообще не появляются в фейнмановских интегралах (хотя никаких доказательств этого утверждения авторам не известно). Таким образом, мы ограничимся рассмотрением решений, которые соответствуют локальным максимумам функции  $\mathcal{S}$ , называемым порогами. В этих точках как реальная, так и мнимая части амплитуды сингулярны. Мы покажем, что при этом мнимая часть получает новый аддитивный вклад выше порога, в то время как вещественная часть имеет бесконечные производные высших порядков.

Проведем дальнейшую классификацию порогов. Нормальные пороги — это такие сингулярности, появление которых связано с унитарностью, о чем уже упоминалось во введении к данному разделу. Начнем со следующего определения. Множество  $l$  внутренних линий диаграммы  $G$  называют промежуточным состоянием этой диаграммы, если после разрезания  $l$  — 1 из этих линий диаграмма остается связной, а еще одно сечение приводит к ее разъединению на две части  $G_1$  и  $G_2$ , причем так, что каждая из

них имеет входящие внешние импульсы. Заметим, что в отличие от случая, когда вводились сечения  $C$  [см. выражение (6.87)], здесь  $G_1$  и  $G_2$  могут все же содержать петли. Аналогично фор-

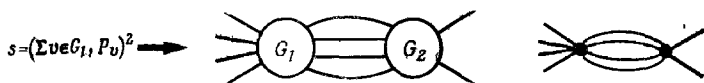


РИС. 6.31. Диаграмма с промежуточным состоянием с массами  $m_1, \dots, m_l$  и соответствующая редуцированная диаграмма

муле (6.88) определим инвариант (см. рис. 6.31):

$$s = \left( \sum_{v \in G_1} P_v \right)^2 = \left( \sum_{v \in G_2} P_v \right)^2.$$

Тогда величина

$$s = s^{(0)} = \left( \sum m_i \right)^2. \tag{6.110}$$

Промежуточное состояние

определяет нормальный порог амплитуды. С физической точки зрения  $s^{(0)}$  — это наименьшее значение инварианта  $s$ , при котором возможно рождение физических состояний с массами  $m_1, \dots, m_l$ .

Покажем, что такое промежуточное состояние действительно соответствует решению уравнений Ландау. Для этого приравняем нулю все  $\alpha$ , соответствующие линиям, не принадлежащим промежуточному состоянию, скажем  $\alpha_{l+1}, \dots, \alpha_f$ . Тогда для редуцированной диаграммы получаем

$$\mathcal{S}(\alpha_1, \dots, \alpha_l, 0, \dots, 0) = \frac{s}{\sum_{i=1}^l \alpha_i^{-1}} - \sum_{i=1}^l \alpha_i m_i^2.$$

Уравнения  $\partial \mathcal{S} / \partial \alpha_i = 0$  имеют решение при  $\sqrt{s} = \sum m_i$ ,  $\alpha_i = m_i^{-1} / (\sum m_i^{-1})$ ; нетрудно убедиться в том, что при этих значениях  $\mathcal{S}$  имеет максимум, равный нулю.

В противоположность наивным представлениям существуют и другие вещественные сингулярности, называемые аномальными порогами. Эти сингулярности приводят к некоторым трудностям, поскольку их вклад в абсорбтивную часть амплитуды нельзя непосредственно связать через условие унитарности с физическими процессами. Возникновение аномальных порогов в амплитуде рассеяния соответствует ситуации, когда аксиоматический вывод дисперсионных соотношений больше не справедлив. Именно поэтому необходимо следить за возможностью появления таких сингулярностей. Эта проблема довольно сложна, но в разд 6.3.3 мы постараемся ее проиллюстрировать на простых примерах.

В импульсном пространстве различие между нормальным и аномальным порогами можно интерпретировать при решении уравнений Ландау в терминах размерности пространства, натянутого на внутренние импульсы  $k_i$  редуцированной диаграммы. В случае нормального порога внутренние импульсы образуют одномерное пространство, что видно из анализа системы уравнений (6.102) для редуцированной диаграммы, изображенной на рис. 6.30. Из этих уравнений следует, что все импульсы  $k_i$  ( $i=1, \dots, l$ ) коллинеарны между собой,

а потому коллинеарны и с внешним импульсом  $P = \sum_{v \in G_1}^i P_v$ . В случае же аномального порога эта размерность больше единицы.

### 6.3.3. Вещественные сингулярности простых диаграмм

Проиллюстрируем общие формулировки на примере однопетлевых диаграмм. Сначала рассмотрим диаграмму типа «пузырь», изображенную на рис. 6.30. Исследуем аналитические свойства по переменной  $s=P^2$ , где  $P$  — полный 4-импульс, входящий в одну из вершин. Диаграмма может описывать собственнo-энергетический вклад в теории  $\varphi^3$  или амплитуду рассеяния в теории  $\varphi^4$  и т. п. В любом случае решение уравнений Ландау тривиально. Запишем соответствующий интеграл в импульсном пространстве

$$T_G(P^2) = \frac{-i}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4k}{(k^2 - m_1^2) [(P-k)^2 - m_2^2]}, \quad (6.111)$$

где вместо величины  $I_G(P)$ , определяемой выражениями (6.83) и (6.101), рассматривается величина  $T_G(P) = (-i)^{V+1} I_G(P)$ , которая дает аддитивный вклад в амплитуду рассеяния (5.171). Из уравнений Ландау вытекает, что существует два вещественных числа  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ , такие, что

$$\begin{cases} \lambda_1 (k^2 - m_1^2) = 0, & \dots \\ \lambda_2 [(P-k)^2 - m_2^2] = 0, \\ \lambda_1 k_\mu - \lambda_2 (P-k)_\mu = 0. \end{cases} \quad (6.112)$$

Отсюда следует, что  $P$  и  $k$  коллинеарны и что  $m_1^2 \lambda_1^2 = m_2^2 \lambda_2^2$ , а  $s = P^2 = (m_1 \pm m_2)^2$ . Величина  $(m_1 + m_2)^2$  соответствует ожидаемому нормальному порогу, в то время как другое решение  $(m_1 - m_2)^2$ , как мы ниже покажем, не появляется на физическом листе. По-видимому, мы заблуждаемся, поскольку интеграл (6.111) имеет логарифмическую ультрафиолетовую расходимость и требует перенормировки. Имеет смысл лишь значение интеграла  $T_G(P^2)$ , полученное после вычитания в некоторой точке, но это вычитание не приводит к изменению ни уравнений Ландау, ни структуры сингулярностей. В параметрическом пространстве интеграл после вычитания записывается в виде

$$\begin{aligned} & T_G(s) - T_G(s_1) = \\ & = -\frac{i}{(4\pi)^2} \int_0^1 \frac{d\alpha_1 d\alpha_2 \delta(1 - \alpha_1 - \alpha_2)}{(\alpha_1 + \alpha_2)^2} \ln \left[ \frac{\alpha_1 \alpha_2 s / (\alpha_1 + \alpha_2) - \alpha_1 m_1^2 - \alpha_2 m_2^2}{\alpha_1 \alpha_2 s_1 / (\alpha_1 + \alpha_2) - \alpha_1 m_1^2 - \alpha_2 m_2^2} \right]. \end{aligned}$$

Это выражение нетрудно получить с помощью формулы (6.90), если сначала произвести вычитание в подынтегральном выражении при произвольном значении  $s_1$ , а затем выполнить интегрирование по  $\lambda$ . Сингулярности соответствуют нулям выражения  $\mathcal{S} = \alpha_1 \alpha_2 s / (\alpha_1 + \alpha_2) - \alpha_1 m_1^2 - \alpha_2 m_2^2$ , а уравнение



$\partial \mathcal{F} / \partial \alpha_i = 0$  ( $i = 1, 2$ ) дает

$$m_1^2 = \frac{\alpha_2^2 s}{(\alpha_1 + \alpha_2)^2}, \quad m_2^2 = \frac{\alpha_1^2 s}{(\alpha_1 + \alpha_2)^2}.$$

Таким образом,  $s = (m_1 + m_2)^2$ , поскольку  $\alpha_1, \alpha_2 > 0$ . Рассматриваемый нами интеграл можно вычислить явно:

$$4\pi^2 [T_G(s_1) - T_G(s_1)] = \left[ \frac{\lambda^{1/2}}{2s} \ln \left( \frac{m_1^2 + m_2^2 - s + \lambda^{1/2}}{m_1^2 + m_2^2 - s - \lambda^{1/2}} \right) - \frac{m_1^2 - m_2^2}{2s} \ln \frac{m_1^2}{m_2^2} \right] - [s = s_1]. \quad (6.113)$$

В полученном выражении последний член напоминает нам, что в амплитуде производится вычитание при  $s = s_1$ , а функция  $\lambda$  вводится в соответствии с определением (5.155а):

$$\lambda = \lambda(s, m_1^2, m_2^2) = s^2 + m_1^4 + m_2^4 - 2(m_1^2 + m_2^2)s - 2m_1^2 m_2^2 = [s - (m_1 + m_2)^2][s - (m_1 - m_2)^2].$$

Аргумент логарифма можно переписать в виде

$$\frac{m_1^2 + m_2^2 - s + \lambda^{1/2}}{m_1^2 + m_2^2 - s - \lambda^{1/2}} = \frac{\sqrt{(m_1 + m_2)^2 - s} + \sqrt{(m_1 - m_2)^2 - s}}{\sqrt{(m_1 + m_2)^2 - s} - \sqrt{(m_1 - m_2)^2 - s}}.$$

Отсюда следует, что на физическом листе, соответствующем главному значению логарифма,  $T_G(s)$  не имеет сингулярности при  $s = (m_1 - m_2)^2$ . Сингулярности при  $s = 0$  и  $s = (m_1 - m_2)^2$  появляются на нефизических листах.

Рассмотрим теперь эти комплексные сингулярности более подробно, хотя это и не является здесь основной нашей задачей. Сингулярность при  $s = (m_1 - m_2)^2$ , называемая также «псевдопорогом», очевидно, соответствует решению уравнений Ландау в параметрическом пространстве при отрицательном значении  $\alpha_1$  или  $\alpha_2$ , т. е. вне первоначального интервала интегрирования. Это означает, что при переходе на нефизические листы нам приходится переходить от интервала  $0 \leq \alpha \leq 1$  к комплексному контуру интегрирования. Это — аналог явления, с которым мы столкнулись, рассматривая пример (6.99б). Точно так же сингулярность при  $s = 0$  представляет собой аналог примера (6.99в). Последняя сингулярность, которая не является решением первой системы уравнений Ландау (6.112), иллюстрирует так называемые сингулярности второго типа, которые мы отбрасывали, предполагая, что сингулярности на границе области интегрирования в импульсном пространстве, расположенной на бесконечности, отсутствуют. В действительности это не так, поскольку на бесконечности может происходить зажимание контура, которое ведет к сингулярности при  $s = 0$ , как это следует из исходного вида интеграла (6.111). Уравнения Ландау отражают тот факт, что гиперболоиды  $k^2 = m^2$  и  $(P - k)^2 = m^2$  касаются друг друга, когда  $P^2 = (m_1 \pm m_2)^2$ . Однако такое касание может иметь место и на бесконечности, когда центры гиперболоидов совпадают или разделены вектором нулевой длины, т. е.  $s = P^2 = 0$ .

Появление сингулярности при  $s = 0$  должно служить предостережением. Анализ комплексных сингулярностей сложен!

На физическом листе скачок интеграла  $T_G(s)$  на разрезе, идущем от  $(m_1 + m_2)^2$  до  $+\infty$ , является мнимой величиной; он записывается в виде

$$T_G(s + i\epsilon) - T_G(s - i\epsilon) = 2i \Delta T_G(s) = 2i \frac{\lambda^{1/2}(s, m_1^2, m_2^2)}{4\pi s} \theta [s - (m_1 + m_2)^2]. \quad (6.114)$$

По этой абсорбтивной части амплитуду  $T_G(s) - T_G(s_1)$  можно восстановить с помощью дисперсионного соотношения с одним вычитанием, т. е. по фор-

муле Коши с контуром интегрирования, охватывающим разрез:

$$T_G(s) - T_G(s_1) = \frac{s - s_1}{\pi} \int_{(m_1 + m_2)^2}^{\infty} \frac{ds' \operatorname{Im} T_G(s')}{(s' - s_1)(s' - s)}. \quad (6.115)$$

Рассмотрим теперь вершинную диаграмму на рис. 6.32, а, которой соответствует интеграл

$$T_G(p_1^2, p_2^2, p_3^2) = -i \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k_1^2 - m_1^2)(k_2^2 - m_2^2)(k_3^2 - m_3^2)}, \quad (6.116)$$

где  $k_1 = q - p_2$ ,  $k_2 = q + p_1$  и  $k_3 = q$ . В этом случае система уравнений Ландау имеет вид

$$\lambda_i (k_i^2 - m_i^2) = 0, \quad i = 1, 2, 3,$$

$$\sum_i \lambda_i k_i = 0.$$

В случае главной сингулярности ни одна из  $\lambda$  не равна нулю; следовательно, детерминант, составленный из скалярных произведений  $(k_i \cdot k_j)$ , должен обра-

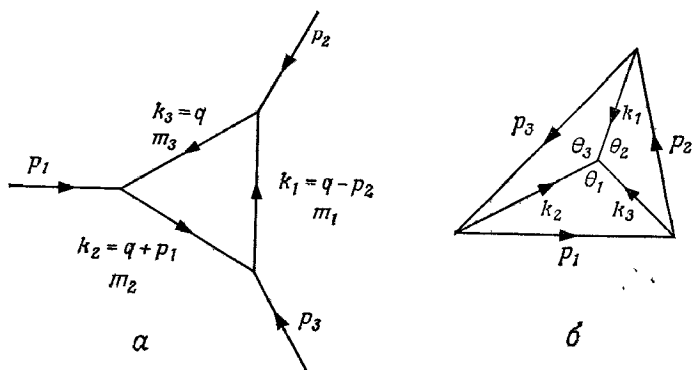


РИС. 6.32. Треугольная вершинная диаграмма и дуальная к ней диаграмма.

щаться в нуль. Это условие удобно записать в виде

$$\begin{vmatrix} 1 & y_{12} & y_{13} \\ y_{12} & 1 & y_{23} \\ y_{13} & y_{23} & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad (6.117)$$

где  $y_{ij} = k_i \cdot k_j / m_i m_j = -(p_k^2 - m_i^2 - m_j^2) / 2m_i m_j$ , а  $(i, j, k)$  — перестановки индексов (1, 2, 3).

Аналогично, если имеется неглавная сингулярность, соответствующая, скажем,  $\lambda_3 = 0$ , должно выполняться условие

$$\begin{vmatrix} 1 & y_{12} \\ y_{12} & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

т. е.

$$y_{12} = \pm 1, \quad p_3^2 = (m_1 \pm m_2)^2.$$

При  $s = p_3^2 (m_1 + m_2)^2$  мы получаем нормальный порог, а сингулярность в точке  $p_3^2 = (m_1 - m_2)^2$ , как и в случае диаграммы типа «пузырь», на физическом листе отсутствует. В этом можно убедиться, анализируя уравнения Ландау в параметрическом пространстве. Скачок на разрезе, идущий от  $(m_1 + m_2)^2$  до  $+\infty$ , определяется выражением (здесь  $s = p_3^2$ )

$$T_G(s + ie) - T_G(s - ie) = \frac{2i}{4\pi\lambda^{1/2}(m_1^2, m_2^2, s)} \ln \frac{a+b}{a-b}, \quad (6.118)$$

где

$$a = s^2 - s(p_1^2 + p_2^2 + m_1^2 + m_2^2 - 2m_3^2) - (m_1^2 - m_2^2)(p_1^2 - p_2^2),$$

$$b = \lambda^{1/2}(m_1^2, m_2^2, s) \lambda^{1/2}(p_1^2, p_2^2, s).$$

Разумеется, аналогичные нормальные пороги существуют и по переменным  $p_1^2$  и  $p_2^2$ .

Чтобы изучить аномальный порог, рассмотрим дуальную диаграмму, изображенную на рис. 6.32, б. Здесь мы имеем тетраэдр в трехмерном евклидовом пространстве с ребрами, квадраты длин которых равны  $p_i^2$  и  $k_i^2$ . Такое возможно, поскольку  $p_i^2 > 0$ , а  $k_i$  находятся на массовой поверхности  $k_i^2 = m_i^2$ . Условия стабильности для внутренних и внешних частиц приводят к тому, что углы  $\theta_i$  ( $0 \leq \theta_i \leq \pi$ ), определяемые выражением

$$\cos \theta_3 = - \frac{p_3^2 - m_1^2 - m_2^2}{2m_1 m_2},$$

должны быть вещественными. Условие (6.117) означает, что дуальная диаграмма расположена в плоскости. Наконец, из условия вещественности следует, что центральная точка на рис. 6.32, б должна располагаться внутри треугольника. Отсюда мы имеем  $\theta_1 + \theta_2 > \pi$ , или, что эквивалентно,  $\cos \theta_1 + \cos \theta_2 < 0$ . Иными словами, должно выполняться условие

$$m_1(p_1^2 - m_2^2 - m_3^2) + m_2(p_2^2 - m_1^2 - m_3^2) > 0. \quad (6.119)$$

Получим этот результат, используя параметрическое представление в частном случае, когда  $p_1^2 = p_2^2 \equiv p^2$  и  $m_1^2 = m_2^2 = m^2$ . Функция  $\mathcal{S}$  тогда записывается в виде

$$\mathcal{S} = \frac{\alpha_1 \alpha_2 p^2 + \alpha_2 \alpha_3 p_1^2 + \alpha_3 \alpha_1 p_2^2}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3} - \alpha_1 m_1^2 - \alpha_2 m_2^2 - \alpha_3 m_3^2,$$

а уравнения Ландау после исключения параметра  $\alpha_3 = 1 - \alpha_1 - \alpha_2$  при  $\alpha = \alpha_1 = \alpha_2$  ( $0 < \alpha < 1/2$ ), поскольку  $0 < \alpha_3 < 1$ , принимают вид

$$\begin{cases} \alpha^2 (4p^2 - p_3^2) = m_3^2, \\ (4p^2 - p_3^2)(\alpha^2 - \alpha) = m^2 - p^2. \end{cases}$$

При условии что

$$p^2 > m^2 + m_3^2, \quad (6.120)$$

решение  $\alpha$  заключено между 0 и  $1/2$ . В этом частном случае условие (6.120) соответствует (6.119). Аномальный порог расположен в точке

$$p_3^2 = -\frac{1}{m_3^2} \lambda(p^2, m^2, m_3^2) = 4m^2 - \frac{1}{m_3^2} (p^2 - m^2 - m_3^2)^2.$$

Рассмотрим какую-нибудь физическую величину, скажем электромагнитный формфактор нуклона. Очевидно, здесь возникнет трудность, связанная с тем, что аномальный порог может оказаться ниже нормального. Действительно, наимизшее состояние, связанное с фотоном, — это двухпионная система, для которой  $m = m_1 = m_2 \geq m_\pi$ , а наимизшее состояние для нуклона, находящегося на массовой поверхности ( $p^2 = p^2 = p_3^2 = M_N^2$ ) — это пион-нуклонное состояние; следовательно,  $m + m_3 \geq m_\pi + M_N$ . Если мы выберем  $m_3 = m = (m_\pi + M_N)/2$ , то все предыдущие условия будут выполнены; тогда неравенство (6.120) запишется следующим образом:

$$M_N^2 \geq \frac{1}{2} (M_N + m_\pi)^2, \text{ или } (\sqrt{2} - 1) M_N \geq m_\pi.$$

Очевидно, что ему удовлетворяют экспериментальные значения масс. К счастью, при наших рассуждениях мы пока не учитывали различные законы сохранения, например закон сохранения бари-

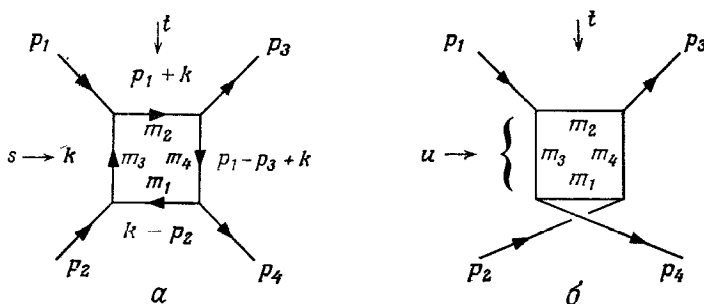


РИС. 6.33. Диаграмма «ящик» в  $s$ - $t$ -канале (а) и в перекрестном  $u$ - $t$ -канале (б).

онного заряда, который приводит к тому, что любое состояние, связанное с нуклоном, должно содержать по крайней мере один барион с массой большей, чем  $M_N$ . Таким образом, условие (6.120) не может быть выполнено, и мы избавлены от неприятностей. Аналогичным образом аномальные пороги не появляются в формфакторах пионов и каонов, но они возникают в формфакторах гиперонов и дейтронов.

С помощью рассмотренной выше схемы можно изучить аналитические свойства амплитуды рассеяния, представленной на

рис. 6.33,а в виде диаграммы типа «ящик»:

$$T_G = -i \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{[(p_1+k)^2 - m_2^2] [(p_1-p_3+k)^2 - m_4^2] [(p_2-k)^2 - m_1^2] (k^2 - m_3^2)}. \quad (6.121)$$

В  $s$ -канале мы находим нормальный порог при  $s = (m_1 + m_2)^2$  [в  $t$ -канале этот порог расположен при  $t = (m_3 + m_4)^2$ ]. Скачок на соответствующем разрезе можно вычислить по формуле

$$T_G(s + i\varepsilon, t) - T_G(s - i\varepsilon, t) = 2i\Delta_s T_G(s, t) = \\ = 2i \frac{2s\lambda^{1/2}(s, m_1^2, m_2^2)}{4\pi D^{1/2}} \ln \left[ \frac{(ac - bd \cos \theta) + D^{1/2}}{(ac - bd \cos \theta) - D^{1/2}} \right] \theta [s - (m_1 + m_2)^2], \quad (6.122)$$

где  $\theta$  — угол рассеяния в системе центра масс, т. е.

$$\cos \theta = \frac{s}{\lambda^{1/2}(s, p_1^2, p_2^2) \lambda^{1/2}(s, p_3^2, p_4^2)} \left[ t - u + \frac{(p_1^2 - p_2^2)(p_3^2 - p_4^2)}{s} \right].$$

Величины  $a$  и  $b$  определяются выражениями (6.118), а  $c$  и  $d$  получаются из  $a$  и  $b$  заменами  $p_1$  на  $p_3$ ,  $p_2$  на  $p_4$  и  $m_3$  на  $m_4$ . Для величины  $D$  находим

$$D = (ac - bd \cos \theta)^2 - (a^2 - b^2)(c^2 - d^2).$$

В случае равных масс  $m_1^2 = m_2^2 = m^2$ ,  $m^2 = m_3^2 = m'^2$ ,  $p_1^2 = p_2^2 = p_3^2 = p_4^2 = p^2$

записанные выше выражения упрощаются. Так, в правой части (6.122) мы имеем

$$\frac{2s\lambda^{1/2}(s, m_1^2, m_2^2)}{D^{1/2}} = \{st [(s - 4m^2)(t - 4m'^2) - 4(p^2 - m^2 - m'^2)^2]\}^{-1/2}. \quad (6.123)$$

Скачок  $\Delta_s T_G$ , рассматриваемый как функция  $t$ , имеет сам скачок в  $t$ -канале, называемый двойной спектральной функцией  $\rho_{st}$ :

$$\rho_{st}(s, t) = \frac{1}{2i} [\Delta_s T_G(s, t + i\varepsilon) - \Delta_s T_G(s, t - i\varepsilon)] = \\ = \frac{2s\lambda^{1/2}(s, m_1^2, m_2^2)}{4D^{1/2}} \theta [s - (m_1 + m_2)^2] \theta [t - (m_3 + m_4)^2] \theta(D). \quad (6.124)$$

Следовательно,  $T_G(s, t)$  удовлетворяет дисперсионным соотношениям при фиксированном  $s$  или фиксированном  $t$ , или даже допускает аналитическое представление сразу по двум переменным  $s$  и  $t$ :

$$T_G(s, t) = \frac{1}{\pi} \int_{(m_1+m_2)^2}^{\infty} ds' \frac{\Delta_s T_G(s', t)}{s' - s} = \frac{1}{\pi^2} \iint ds' dt' \frac{\rho_{st}(s', t')}{(s' - s)(t' - t)}. \quad (6.125a)$$

Второе выражение в (6.125а), включающее двойной скачок  $\rho_{st}$ , является частным случаем представления Манделстама. Для рассматриваемой здесь диаграммы типа «ящик» двойные спектральные функции  $\rho_{su}$  и  $\rho_{tu}$  равны нулю. В случае перекрестной диаграммы, изображенной на рис. 6.33, б. лишь  $\rho_{tu}$  отлично от нуля. Поэтому  $T_G(t, u)$  удовлетворяет следующему дисперсионному

соотношению при фиксированном  $s$

$$T_G(t, u) = \frac{1}{\pi} \int_{(m_2+m_3)^2}^{\infty} dt' \frac{\Delta_t T_G(t', u' = \sum p_i^2 - t' - s)}{t' - t} + \\ + \frac{1}{\pi} \int_{(m_1+m_2)^2}^{\infty} du' \frac{\Delta_u T_G(t' = \sum p_i^2 - s - u' - u)}{u' - u} \quad (6.125b)$$

или представлению Манделстама

$$T_G(t, u) = \frac{1}{\pi^2} \iint dt' du' \frac{\rho_{tu}(t', u')}{(t' - t)(u' - u)}. \quad (6.125b)$$

На самом деле наши результаты являются не совсем точными. В предшествующем выводе мы предполагали, что все внешние частицы стабильны по отношению к распаду, т. е.  $p_1^2 < (m_2 + m_3)^2$  и т. д., и что аномальные пороги отсутствуют. Точные условия того, чтобы это выполнялось, могут быть найдены тем же способом, что и для вершины.

Предполагалось также, что в благоприятных случаях, например в случае пион-нуклонного рассеяния физическая амплитуда рассеяния удовлетворяет представлению Манделстама общего вида

$$T_G(s, t, u) = T_G(s_1, t_1, u_1) + \frac{(s - s_1)}{\pi} \int_{M_s^2}^{\infty} \frac{\rho_1(s')}{(s' - s)(s' - s_1)} ds' + \\ + \frac{(t - t_1)}{\pi} \int_{M_t^2}^{\infty} \frac{\rho_2(t')}{(t' - t)(t' - t_1)} dt' + \frac{(u - u_1)}{\pi} \int_{M_u^2}^{\infty} \frac{\rho_3(u')}{(u' - u)(u' - u_1)} du' + \\ + \frac{(s - s_1)(u - u_1)}{\pi^2} \iint ds' du' \frac{\rho_{su}(s', u')}{(s' - s)(s' - s_1)(u' - u)(u' - u_1)} + \\ + \frac{(t - t_1)(u - u_1)}{\pi^2} \iint dt' du' \frac{\rho_{tu}(t', u')}{(t' - t)(t' - t_1)(u' - u)(u' - u_1)} + \\ + \frac{(s - s_1)(t - t_1)}{\pi^2} \iint ds' dt' \frac{\rho_{st}(s', t')}{(s' - s)(s' - s_1)(t' - t)(t' - t_1)}, \quad (6.126)$$

где двойные спектральные функции  $\rho_{st}$ ,  $\rho_{tu}$  и  $\rho_{us}$  отличны от нуля в некоторых областях (затененные области на рис. 6.34). Соотношение (6.126) написано в предположении, что требуются вычитания.

Изучение этих простых диаграмм не только полезно как иллюстрация метода, но и может служить предварительным шагом при рассмотрении более сложных случаев. Например, используя технику мажорирования, из этих «примитивных» диаграмм можно получить аналитические свойства диаграмм высших порядков. Для подробного изучения этого вопроса мы рекомендуем читателю обратиться к более специальной литературе.

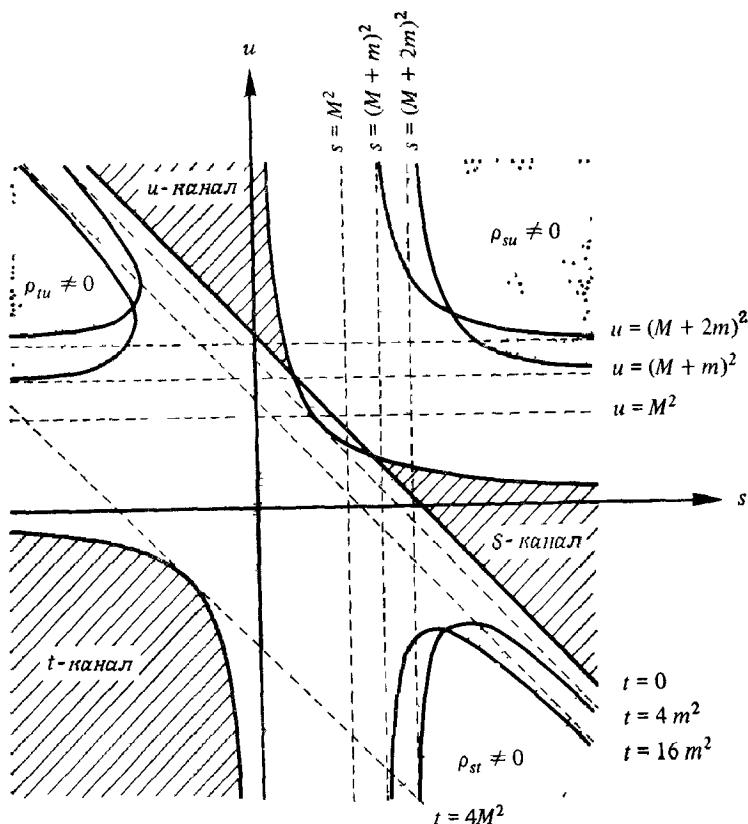


РИС 6.34 Плоскость  $stu$  для пион нуклонного рассеяния. Площади, заштрихованные косыми линиями, являются физическими областями  $s$  канала  $\pi N \rightarrow \pi N$ ,  $u$  канала  $\pi N \rightarrow \pi N$  и  $t$  канала  $\pi\pi \rightarrow N\bar{N}$ .  $m$  и  $M$  — массы пиона и нуклона соответственно. Области, где двойные спектральные функции отличны от нуля, затенены точками.

### 6.3.4. Сингулярности в физической области; правила Кутковского

В физической области сингулярности соответствуют вещественным значениям внешних 4-импульсов. Такое утверждение справедливо для нормальных порогов. Аномальные же пороги не появляются как главные сингулярности в физической области, если справедливы условия стабильности внешних частиц, т. е. если для каждой вершины квадрат входящего 4-импульса  $P_v^2$  меньше, чем наименьшее значение нормального порога в данном канале.

Коулмен и Нортон нашли следующую простую интерпретацию. В физической области главная сингулярность диаграммы  $G$  имеет место только в том случае, если вершины диаграммы  $G$  можно рассматривать как точки пространства-времени, а ее внутренние линии — как траектории реальных релятивистских частиц, находящихся на массовой поверхности

Это утверждение более удобно доказать с помощью смешанного представления (6.104). Для сингулярностей, расположенных в физической области, переменные интегрирования  $\alpha_i$  и  $q_i$  должны принимать вещественные значения на решении уравнений Ландау, которые записываются [ср. с уравнениями (6.102), (6.103) и (6.106)] в виде

$$k_i^2 = m_i^2, \quad (6.127a)$$

$$\sum_{i \in \mathcal{L}_I} (\pm) \alpha_i k_i = 0. \quad (6.127b)$$

Вещественность внешнего импульса  $P$  и переменных интегрирования  $q$  означает также вещественность величин  $k$ . В силу условия (6.127a) эти 4-импульсы находятся на своих массовых поверхностях. Что касается соотношения (6.127b), оно означает, что, если час-

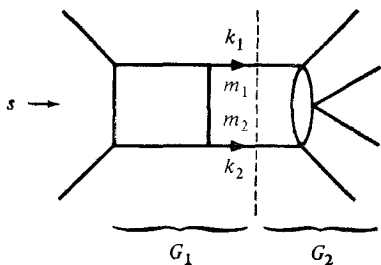


РИС. 6.35. Иллюстрация правила Кутковского; разрез, отмеченный штриховой линией, дает вклад в сингулярность при  $s = (m_1 + m_2)^2$ . Импульсы  $k_1$  и  $k_2$  принадлежат массовым поверхностям:  $k_1^2 = m_1^2$ ,  $k_2^2 = m_2^2$ .

тица  $i$  распространяется с импульсом  $\pm k_i$  в течение промежутка собственного времени  $\alpha_i m_i$  ( $\alpha_i > 0$ ), полное пространственно-временное смещение вдоль замкнутой петли равно нулю. Иными словами, диаграмму можно рассматривать как истинный физический процесс.

Правила Кутковского дают компактное выражение для скачков на разрезе, который соответствует сингулярности, находящейся в физической области. Пусть  $I_G(P)$  — фейнмановская амплитуда, определяемая выражением (6.101), а  $T_G(P) = (-i)^{V+1} I_G(P)$  — соответствующий вклад в амплитуду рассеяния. Скачок амплитуды  $2i\Delta T_G(P)$  в данном канале, связанном с определенным разрезом, получается следующим образом. Пусть  $(I - I_1 - I_2)$  внутренних импульсов находится на массовых поверхностях  $k_j^2 = m_j^2$ , а  $(I_1 + I_2)$  импульсов — вне массовой поверхности. Эти совокупности импульсов могут быть подразделены на две группы, относящиеся к двум



поддиаграммам  $G_1$  и  $G_2$ , каждая из которых имеет  $I_i$  внутренних линий и  $V_i$  вершин (рис. 6.35). Справедлива следующая формула:

$$\Delta T_G(P) = \frac{1}{2} (-i)^{V_1 - V_2} \int \prod_{l=1}^N \frac{d^4 q_l}{(2\pi)^4} \prod_{l_1=1}^{I_1} \frac{i}{k_{l_1}^2 - m_{l_1}^2 + i\epsilon} \times \\ \times \prod_{l_2=1}^{I_2} \frac{-i}{k_{l_2}^2 - m_{l_2}^2 - i\epsilon} \prod_{l=I_1+I_2+1}^I (2\pi) \theta(k_l^0) \delta(k_l^2 - m_l^2). \quad (6.128)$$

Благодаря  $\delta$ -функциям все частицы, соответствующие промежуточным состояниям, находятся на массовых поверхностях с положительной энергией. В физической области выражение (6.128) вытекает из того факта, что отдельные диаграммы удовлетворяют условию унитарности.

Нижеследующее элегантное доказательство мы заимствовали у Никаниши. Рассмотрим сначала произвольную диаграмму в рамках скалярной теории. Как известно, в любом случае можно построить эрмитов лагранжиан, такой,

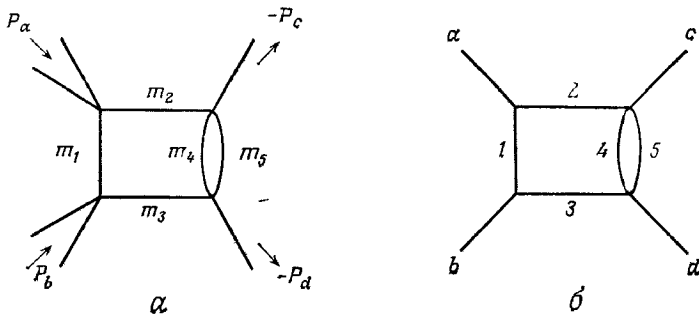


РИС. 6.36. Аналитические свойства диаграммы на рис. а такие же, как и у диаграммы на рис. б, которую можно рассматривать как вклад низшего порядка в амплитуду процесса  $a+b \rightarrow c+d$  на массовой поверхности теории,

$$\text{описываемой лагранжианом } \mathcal{L}_1 = \sum_{l=1}^5 \frac{1}{2} [(\partial\varphi_l)^2 - m_l^2\varphi_l^2] + \sum_{a, b, c, d} \frac{1}{2} [(\partial\phi_a)^2 - \\ - M_a^2\phi_a^2] + \phi_a\varphi_1\varphi_2 + \phi_b\varphi_1\varphi_3 + \phi_c\varphi_2\varphi_4\varphi_5 + \phi_d\varphi_3\varphi_4\varphi_5.$$

что амплитуда рассеяния некоторого процесса в наименьшем порядке будет описываться данной диаграммой. С этой целью поставим в соответствие каждой внутренней линии  $l$  входящей в диаграмму, поля  $\varphi_l$  различных видов с массами  $m_l$  ( $m_l$  — масса в соответствующем пропагаторе). Кроме того, если внешняя линия (или набор линий) с импульсом  $P_\nu$  входит в вершину  $\nu$ , будем связывать с этой вершиной поле  $\phi_\nu$ , квадрат массы которого  $M_\nu^2 = P_\nu^2$ . При условии что  $P_\nu^2 > 0$ , исходную диаграмму можно теперь рассматривать как вклад низшего порядка в амплитуду рассеяния частиц, описываемых полями  $\phi_1, \phi_2, \dots$  на массовой поверхности. Этот вклад определяется лагранжианом

$$\mathcal{L}_1 = \sum_{l=1}^I \frac{1}{2} [(\partial\varphi_l)^2 - m_l^2\varphi_l^2] + \sum_\nu \frac{1}{2} [(\partial\phi_\nu)^2 - M_\nu^2\phi_\nu^2] + \sum_{\nu=1}^V \phi_\nu \left( \prod_{l: \nu_l \neq 0} \varphi_l \right). \quad (6.129)$$

Если в вершину  $v$  не входит ни одна из внешних линий и произведение пробегает по всем внутренним линиям, входящим в  $v$ , то в последней сумме нужно положить  $\phi_v = 1$ . Эта конструкция иллюстрируется на рис. 6.36. Если  $i$  обозначает начальное состояние (для которого  $P_i^0 > 0$ ), а  $f$  — конечное состояние, то нетрудно проверить, что

$$\mathcal{F}_{fi} = T_G(P),$$

где  $\mathcal{F}_{fi}$  вычисляется с помощью  $\mathcal{L}_i$ , в то время как  $T_G$  — это амплитуда, соответствующая исходной диаграмме Фейнмана  $G$ . Поскольку для процессов на массовой поверхности выполняется условие унитарности [соотношение (Б.154)], имеем

$$\mathcal{F}_{fi} - \mathcal{F}_{ij}^* = i \sum_n (2\pi)^4 \delta^4(P_n - P_i) \mathcal{F}_{nj}^* \mathcal{F}_{ni} = 2i \Delta T_G(P). \quad (6.130)$$

На языке диаграмм Фейнмана сумма пробегает по всем возможным промежуточным физическим состояниям  $n$ , т. е. импульсы в промежуточных состояниях находятся на их массовых поверхностях

$$k_l^2 = m_l^2, \quad k_l^0 > 0, \quad l \in \mathcal{Y}.$$

Таким образом, условие унитарности приводит к соотношению

$$2\Delta T_G(P) = \sum T_{G_1}(P) T_{G_2}^*(P), \quad (6.131)$$

где сумма берется по всем разбиениям диаграммы  $G$  на две части  $G_1$  и  $G_2$ . При этом  $G_1$  связана с начальным состоянием, а  $G_2$  — с конечным. Диаграмма  $G$  является объединением  $G_1 \cup G_2 \cup \{\mathcal{Y}\}$ . Знак суммы подразумевает также интегрирование по фазовому пространству промежуточных состояний. Таким образом, мы снова получили правила унитарных рассеяний.

Предлагаем читателю убедиться в справедливости этого правила для однопетлевых диаграмм.

Можно также попытаться распространить правила Кутковского за пределы физической области и тем самым обобщить условие унитарности. Например, в этом имеется необходимость, если приходится вычислять двойные спектральные функции, определенные в разд. 6.3.3. Однако доказательство таких общих правил Кутковского требует нетривиальных методов. В частности, следует проявлять осторожность в связи с тем, что смысл  $\delta^{(+)}$ -распределения для комплексных  $k$  становится неопределенным.

## ПРИМЕЧАНИЯ

Ковариантная теория возмущений разработана в середине 40-х гг. в работах: Tomonaga S. — Prog. Theor. Phys., 1946, vol. 1, p. 27 [Имеется перевод в сб. статей: «Новейшее развитие квантовой электродинамики». — М.: ИЛ, 1954, с. 1.]; Schwinger J. — Phys. Rev., 1948, vol. 74, p. 1439 [Имеется перевод в сб. статей: «Новейшее развитие квантовой электродинамики». — М.: ИЛ, 1954, с. 12.]; 1949, vol. 75, p. 651 [Имеется перевод в сб. статей: «Новейшее развитие квантовой электродинамики». — М.: ИЛ, 1954, с. 40.]; 1949, vol. 76, p. 790 [Имеется перевод в сб. статей: «Новейшее развитие квантовой электродинамики». — М.: ИЛ, 1954, с. 78.]; Feynman R. P. — Phys. Rev., 1949, vol. 76, p. 769; [Имеется

перевод в сб. статей: «Новейшее развитие квантовой электродинамики». — М.: ИЛ, 1954, с. 161.] *Dyson F. J.* — *Phys. Rev.*, 1949, vol. 75, pp. 486, 1736 [Имеется перевод в сб. статей: «Сдвиг уровней атомных электронов». — М.: ИЛ, 1950, с. 94.]. Определение ковариантного пропагатора дано в статье: *Stueckelberg E. C. G., Rivier D.* — *Phys. Rev.*, 1948, vol. 74, p. 218.

Скалярная электродинамика рассмотрена в статье: *Matthews P. T.* — *Phys. Rev.* 1950, vol. 80, p. 292. В данной главе мы применили метод, рассмотренный Рорлихом: *Phys. Rev.*, 1950, vol. 80, p. 666.

Первые расчеты по электрон-электронному и электрон-позитронному рассеянию описаны в книге: *Mott N. F., Massey H. S. W.* — *Theory of Atomic Collisions.* — Oxford, 1956 [Имеется перевод 1-го изд.; *Momn H., Meccu G.* Теория атомных столкновений. — М.: ИЛ, 1951]; см., в частности, гл. XXII. Поляризационные эффекты обсуждаются в работе: *McMaster W. H.* — *Rev. Mod. Phys.*, 1961, vol. 33, p. 8.

Преобразование Лежандра ввел в теорию поля Йона-Лазинио: *Jona-Lasinio G.* — *Nuovo Cimento*, 1964, vol. 34, p. 1790. Общий обзор диаграммной техники см. в работе: *Hoofi G. 't, Veltman M.* — *Diagrammar.* — Geneva: Cern report 73-9, 1973.

Топологические свойства и параметрические представления диаграмм Фейнмана изучаются в книге: *Nakanishi N.* *Graph Theory and Feynman Integrals.* — New York: Gordon and Breach, 1970. Эту книгу можно также рассматривать как введение в изучение аналитических свойств диаграмм Фейнмана.

Среди большого числа работ, внесших вклад в эту область, перечислим следующие: *Landau L. D.* — *Nucl. Phys.*, 1959, vol. 13, p. 181. *Mandelstam S.* — *Phys. Rev.*, 1958, vol. 112, p. 1344; 1959, vol. 115, p. 1741 [Имеются переводы в сб. статей: «Новый метод в теории сильных взаимодействий» — М.: ИЛ, 1960, с. 87, 137.]; *Cutkosky R. E.* — *J. Math. Phys.*, 1960, vol. 1, p. 429. Интерпретация сингулярностей в физической области дана в статье: *Coleman S., Norton R. E.* — *Nuovo Cimento*, 1965, vol. 38, p. 438.

Многие детали и ссылки на литературу можно найти в книге: *Eden R. J., Landshoff P. V., Olive D. I., Polkinghorne J. C.* — *The Analytic S-Matrix.* — Cambr. Univ. Press, 1966, а также в монографии: *Todorov I. T.* *Analytic Properties of Feynman Diagrams in Quantum Field Theory.* — Oxford: Pergamon Press, 1971 и в учебнике: *Bjorken J. D., Drell S. D.* *Relativistic Quantum Fields.* — New York: McGraw-Hill, 1965 [Имеется перевод: *Бьеркен Дж., Дрелл С.* Релятивистская квантовая теория, т. 2. — М.: Наука, 1978.].

## Глава 7

# РАДИАЦИОННЫЕ ПОПРАВКИ

Здесь мы сформулируем программу перенормировок в квантовой теории поля. Эта программа затем проводится для электродинамики на примере однопетлевых диаграмм. Кроме того, мы рассмотрим применение перенормировок в расчетах аномального магнитного момента, радиационных поправок к кулоновскому рассеянию (включая анализ инфракрасных расходимостей), лэмбовского сдвига в атомах и амплитуды рассеяния фотона на фотоне. В заключение дается обсуждение проблемы релятивистских наведенных дальнедействующих электромагнитных сил между нейтральными частицами.

### 7.1. ПЕРЕНОРМИРОВКА ОДНОПЕТЛЕВЫХ ДИАГРАММ

В данной главе мы изучим высшие порядки теории возмущений. То, что на первый взгляд кажется простым упражнением, требующим, возможно, некоторого аналитического искусства, оказывается в действительности весьма нетривиальной проблемой. Общая теория перенормировок будет изложена в следующей главе (см. т. 2 настоящей книги). Чтобы получить некоторое представление о предмете нашего изучения, обратимся сначала к расчету радиационных поправок низшего порядка в квантовой электродинамике. Это позволит нам увидеть, как из заведомо недоопределенных выражений извлекаются разумные результаты, которые можно сравнивать с экспериментальными данными; это позволит также ввести последовательно понятие перенормировки. Серьезный недостаток данного подхода связан с тем, что квантовая электродинамика — довольно сложная теория. Мы должны учесть требование калибровочной инвариантности и отделить инфракрасные расходимости от ультрафиолетовых. Тем не менее удивительные достижения квантовой электродинамики делают наши усилия обоснованными и оправдывают инверсию логической последовательности в нашем изложении.

Параметры, входящие в лагранжиан, такие, как массы и константы связи, непосредственно не измеряются. Например, в классической теории точечной частицы нам приходится добавлять к голой массе величину электромагнитного происхождения, чтобы

получить физическую инертную массу. Последняя, разумеется, конечна, когда как первая вполне может быть бесконечной. Мы дадим поэтому операционалистское определение фундаментальных параметров (число которых конечно). Из теории перенормировок следует, что выражения для функций Грина, полученные по теории возмущений, конечны, если их записать в терминах этих физических параметров. Массы будут обычно определяться как изолированные полюсы двухточечных функций. Соответствующие вычеты, которые входят в амплитуды рассеяния как мультипликативные константы, будут включены в определение перенормированных полей. Наконец, константы связи мы зададим, фиксируя значения определенных амплитуд в наперед выбранных точках импульсного пространства.

Чтобы выполнить эту программу, лучше вначале иметь дело с хорошо определенными конечными величинами. Происхождение расходимостей связано с сингулярным характером функций Грина на малых относительных расстояниях. Эквивалентом этого в импульсном пространстве является тот факт, что соответствующие фурье-образы не убывают на бесконечности достаточно быстро. Таким образом, мы приходим к регуляризации теории на промежуточном этапе. Она состоит в замене первоначальных выражений на более гладкие, такие, что интегралы становятся конечными. Итак, мы должны пройти следующие три этапа: 1) регуляризацию, 2) перенормировку и 3) устранение параметров регуляризации. Регуляризация будет успешной, если в результате этого процесса мы придем к конечным величинам.

### 7.1.1. Поляризация вакуума

Рассмотрим вначале фотонный пропагатор в импульсном пространстве. К свободному пропагатору

$$G_{\rho\nu}^{[0]}(k) = -i \left( \frac{g_{\rho\nu} - k_\rho k_\nu / \mu^2}{k^2 - \mu^2 + i\epsilon} + \frac{k_\rho k_\nu / \mu^2}{k^2 - M^2 + i\epsilon} \right), \quad M^2 = \frac{\mu^2}{\lambda}, \quad (7.1)$$

следует добавить поправку, которая в соответствии с правилами, приведенными в гл. 6, запишется в низшем порядке (рис. 7.1) в виде

$$G_{\rho\nu}^{[1]}(k) = G_{\rho\rho}^{[0]}(k) \bar{\omega}^{o'v'}(k) G_{\nu\nu}^{[0]}(k), \\ \bar{\omega}^{o'v'}(k) = -(-i\epsilon)^2 \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \text{Sp} \left( \gamma^o \frac{i}{\not{p} - m + i\epsilon} \gamma^v \frac{i}{\not{p} - k - m + i\epsilon} \right). \quad (7.2)$$

Дополнительный знак минус возникает здесь благодаря фермионной петле. Очевидно, что при больших значениях импульса интеграл (7.2) квадратично расходится. Чтобы придать ему смысл, применим регуляризацию Паули—Вилларса. Это равносильно введению минимальной связи фотонов с дополнительными спинорными

полями, обладающими очень большой массой  $\lambda_s m$ . Такие поля можно было бы отнести к секторам гильбертова пространства с индефинитной метрикой. В случае когда мы имеем дело с тензором поляризации вакуума  $\bar{\omega}^{\rho\nu}(k)$ , это подразумевает замену

$$\bar{\omega}^{\rho\nu}(k, m) \rightarrow \bar{\omega}^{\rho\nu}(k, m) + \sum_{s=1}^S C_s \bar{\omega}^{\rho\nu}(k, \lambda_s m), \quad (7.3)$$

которую необходимо произвести под знаком интеграла в выражении (7.2). Если бы данная замена производилась для сходящегося

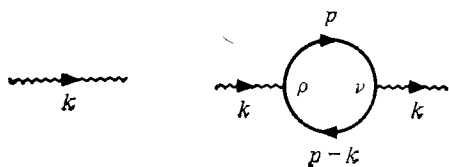


РИС. 7.1. Фотонный пропагатор в низшем порядке.

интеграла, то при  $\lambda_s \rightarrow \infty$  получилась бы исходная величина. В нашем же случае постоянные  $C_s$  вводятся, чтобы устранить эту расходимость. Минимальный характер связи с дополнительными полями означает, что при такой регуляризации калибровочная инвариантность сохраняется.

Обозначим большие массы  $\lambda_s m$  общим символом  $\Lambda$ , а  $\bar{\omega}^{\rho\nu}(k, m, \Lambda)$  пусть обозначает правую часть в (7.3). Тогда

$$\begin{aligned} \bar{\omega}^{\rho\nu}(k, m, \Lambda) &= -e^2 \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \left\{ \frac{\text{Sp } \gamma^\rho (\not{p} + m) \gamma^\nu (\not{p} - \not{k} + m)}{(p^2 - m^2 + i\epsilon) [(p-k)^2 - m^2 + i\epsilon]} + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{s=1}^S C_s (m \rightarrow \lambda_s m) \right\} = \\ &= -4e^2 \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \left\{ \frac{p^\rho (p-k)^\nu + p^\nu (p-k)^\rho - g^{\rho\nu} (p^2 - p \cdot k - m^2)}{(p^2 - m^2 + i\epsilon) [(p-k)^2 - m^2 + i\epsilon]} + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{s=1}^S C_s (m \rightarrow \lambda_s m) \right\}. \quad (7.4) \end{aligned}$$

Величина  $\bar{\omega}^{\rho\nu}(k)$  представляет собой фурье-образ функции Грина, отвечающей произведению токов. В любом порядке сохранение тока приводит к условию

$$k_\rho \bar{\omega}^{\rho\nu}(k) = 0, \quad (7.5)$$

которое формально удовлетворяется, поскольку

$$\begin{aligned} k_\rho \bar{\omega}^{\rho\nu}(k) &= -e^2 \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \text{Sp} \left( \not{k} \frac{1}{\not{p} - m + i\epsilon} \gamma^\nu \frac{1}{\not{p} - \not{k} - m + i\epsilon} \right) = \\ &= -e^2 \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \text{Sp} \left( \gamma^\nu \frac{1}{\not{p} - \not{k} - m + i\epsilon} - \not{k} \frac{1}{\not{p} - m + i\epsilon} \right). \end{aligned}$$

Здесь мы заменили  $K$  на  $(p - m + i\epsilon) - (p - K - m + i\epsilon)$  и использовали инвариантность следа относительно циклических перестановок. Если бы интеграл сходился, то, совершая замену переменных  $p \rightarrow p + k$  в первом члене, мы могли бы удостовериться, что условие (7.5) выполняется. Такой способ действия не годится для исходного выражения, но в регуляризованном тензоре указанную замену уже можно произвести. Это свидетельствует о том, что данная регуляризация подходит для наших целей.

Чтобы вычислить интегралы (7.4), воспользуемся параметрическим представлением, введенным в предыдущей главе, с дополнительным усложнением, связанным с наличием числителей в фермионных пропагаторах. Таким образом, мы имеем

$$\bar{\omega}_{\rho\nu}(k, m, \Lambda) = -4e^2 \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \left[ \left[ \frac{\partial}{\partial z_1^0} \frac{\partial}{\partial z_2^0} + \frac{\partial}{\partial z_1^y} \frac{\partial}{\partial z_2^0} - g_{\rho\nu} \left( \frac{\partial}{\partial z_1} \cdot \frac{\partial}{\partial z_2} + m^2 \right) \right] \times \right. \\ \left. \times \int_0^\infty d\alpha_1 \int_0^\infty d\alpha_2 \exp \left( i \left\{ \alpha_1 (p^2 - m^2) + \alpha_2 [(p-k)^2 - m^2] + \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + z_1 \cdot p + z_2 \cdot (p-k) \right\} + \sum_{s=1}^S C_s (m \rightarrow \lambda_s m) \right) \right]_{z_1=z_2=0},$$

где  $z_1$  и  $z_2$  — вспомогательные 4-векторы, которые позволяют воспроизвести подынтегральное выражение в (7.4) с помощью дифференцирования. Интегрируя по  $p$  и выполняя необходимые дифференцирования, получаем

$$\bar{\omega}_{\rho\nu}(k, m, \Lambda) = \frac{i\alpha}{\pi} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{d\alpha_1 d\alpha_2}{(\alpha_1 + \alpha_2)^2} \left( \left\{ \frac{2\alpha_1\alpha_2}{(\alpha_1 + \alpha_2)^2} k_\rho k_\nu - g_{\rho\nu} \left[ \frac{\alpha_1\alpha_2 k^2}{(\alpha_1 + \alpha_2)^2} - \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. - \frac{i}{\alpha_1 + \alpha_2} + m^2 \right] \right\} \exp \left\{ i \left[ -m^2 (\alpha_1 + \alpha_2) + \frac{\alpha_1\alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2} k^2 \right] \right\} + \right. \\ \left. + \sum_{s=1}^S C_s (m \rightarrow \lambda_s m) \right).$$

Фигурирующий под знаком интеграла полином от  $k$  можно перегруппировать следующим образом:

$$2(k_\rho k_\nu - g_{\rho\nu} k^2) \frac{\alpha_1\alpha_2}{(\alpha_1 + \alpha_2)^2} - g_{\rho\nu} \left[ m^2 - \frac{\alpha_1\alpha_2}{(\alpha_1 + \alpha_2)^2} k^2 - \frac{i}{\alpha_1 + \alpha_2} \right].$$

Наше вычисление остается ковариантным, однако не очевидно, что выполнено условие сохранения тока, которое требует, чтобы величина  $\bar{\omega}_{\rho\nu}$  была пропорциональна выражению  $k_\rho k_\nu - g_{\rho\nu} k^2$ . В вышеприведенной формуле второй член не обладает такой струк-

турой, и его вклад имеет вид  $g_{\rho\nu} \Delta\bar{\omega}$ , где

$$\Delta\bar{\omega} = -\frac{i\alpha}{\pi} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{d\alpha_1 d\alpha_2}{(\alpha_1 + \alpha_2)^2} \sum_{s=0}^S C_s \left[ -\frac{\alpha_1 \alpha_2 k^2}{(\alpha_1 + \alpha_2)^2} - \frac{i}{\alpha_1 + \alpha_2} + m_s^2 \right] \times \\ \times \exp \left\{ i \left[ -m_s^2 (\alpha_1 + \alpha_2) + \frac{\alpha_1 \alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2} k^2 \right] \right\}.$$

Здесь по определению мы положили  $C_0 = 1$ ,  $m_0^2 = m^2$ ,  $m_s^2 = \lambda_s^2 m^2$ . Последнее выражение можно переписать также следующим образом:

$$\Delta\bar{\omega} = -\frac{i\alpha}{\pi} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{d\alpha_1 d\alpha_2}{(\alpha_1 + \alpha_2)^3} i\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \frac{1}{\rho} \sum_{s=0}^S C_s \exp \left\{ i\rho \left[ -m_s^2 (\alpha_1 + \alpha_2) + \frac{\alpha_1 \alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2} k^2 \right] \right\} \Big|_{\rho=1}.$$

При фиксированных значениях  $m_s$  коэффициенты  $C_s$  выбираются таким образом, чтобы интегралы сходились в окрестности  $\alpha_1, \alpha_2 \rightarrow 0$ . Сходимость при больших  $\alpha$  обеспечивается добавкой к массам величины  $i\epsilon$ , присутствие которой предполагается. Мы можем затем изменить порядок интегрирования и дифференцирования по  $\rho$ . При этом интеграл

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \frac{d\alpha_1 d\alpha_2}{(\alpha_1 + \alpha_2)^3 \rho} \sum_{s=0}^S C_s \exp \left\{ i\rho \left[ -m_s^2 (\alpha_1 + \alpha_2) + \frac{\alpha_1 \alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2} k^2 \right] \right\}$$

не зависит от  $\rho$ , в чем можно убедиться, производя замену  $\alpha_i \rightarrow \rho^{-1} \alpha_i$ . Следовательно,  $\Delta\bar{\omega} = 0$ . Оставшийся член в тензоре поляризации вакуума запишется в виде

$$\bar{\omega}_{\rho\nu} = -i (g_{\rho\nu} k^2 - k_\rho k_\nu) \bar{\omega}, \\ \bar{\omega}(k^2, m, \Lambda) = \frac{2\alpha}{\pi} \int_0^\infty \int_0^\infty d\alpha_1 d\alpha_2 \frac{\alpha_1 \alpha_2}{(\alpha_1 + \alpha_2)^4} \times \\ \times \sum_{s=0}^S C_s \exp \left\{ i \left[ -m_s^2 (\alpha_1 + \alpha_2) + \frac{\alpha_1 \alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2} k^2 \right] \right\}. \quad (7.6)$$

Используя свойство однородности, введем под знаком интеграла множитель  $1 = \int_0^\infty d\rho \delta(\rho - \alpha_1 - \alpha_2)$  и произведем замену переменных:  $\alpha_i \rightarrow \rho \alpha_i$ . Тогда

$$\bar{\omega}(k^2, m, \Lambda) = \frac{2\alpha}{\pi} \int_0^1 \int_0^1 d\alpha_1 d\alpha_2 \delta(1 - \alpha_1 - \alpha_2) \alpha_1 \alpha_2 \times \\ \times \int_0^\infty \frac{d\rho}{\rho} \sum_{s=0}^S C_s e^{i\rho [-m_s^2 + \alpha_1 \alpha_2 k^2]}.$$



В точке  $\rho=0$  интеграл по  $\rho$ , по-видимому, логарифмически расходится. Отделив вторую степень импульса при переходе от  $\bar{\omega}^{\nu}$  к  $\bar{\omega}$ , мы уменьшили степень расходимости от двух до нуля. Это иллюстрирует тесную связь, существующую между степенью расходимости и размерностью интегралов.

Если выбрать коэффициенты  $C_s$  таким образом, чтобы выполнялось условие

$$\sum_{s=0}^S C_s = 1 + \sum_{s=1}^S C_s = 0, \quad (7.7)$$

то регуляризованный интеграл по  $\rho$  будет сходиться. Кроме того, выберем  $k$  таким образом, чтобы выполнялось условие  $k^2 < 4m^2$ , т. е. ниже порога рождения пары. Поскольку значения  $\alpha_1, \alpha_2$  заключены между нулем и единицей и удовлетворяют условию  $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$ , то  $\alpha_1 \alpha_2 \leq 1/4$ . Тогда разность  $m_s^2 - \alpha_1 \alpha_2 k^2$  является положительной, и контур интегрирования в комплексной плоскости  $\rho$  можно повернуть на угол  $-\pi/2$ . При этом рассматриваемый интеграл принимает вид

$$\begin{aligned} \lim_{\eta \rightarrow 0} \int_{\eta}^{\infty} \frac{d\rho}{\rho} \sum_{s=0}^S C_s e^{-\rho(m_s^2 - \alpha_1 \alpha_2 k^2)} = \\ = \lim_{\eta \rightarrow 0} \sum_{s=0}^S C_s \left( -e^{-\rho} \ln \rho \Big|_{\eta(m_s^2 - \alpha_1 \alpha_2 k^2)} + \int_0^{\infty} d\rho e^{-\rho} \ln \rho \right). \end{aligned}$$

В проинтегрированном выражении благодаря условию (7.7) мы избавились от опасного члена  $\ln \eta$ . При фиксированных значениях  $k^2 < 4m^2$  и  $m_s^2 = \lambda_s^2 m^2 \rightarrow \infty$  этот результат записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} - \left[ \ln(m^2 - \alpha_1 \alpha_2 k^2) + \sum_{s=1}^{\infty} C_s \ln m_s^2 \right] = - \left[ \ln \left( 1 - \frac{\alpha_1 \alpha_2 k^2}{m^2} \right) + \right. \\ \left. + \sum_{s=1}^{\infty} C_s \ln \lambda_s^2 \right]. \end{aligned}$$

Здесь мы пренебрегли  $k^2$  по сравнению с  $m_s^2$ . Определим  $\Lambda$  таким образом, чтобы выполнялось соотношение

$$\sum_{s=1}^{\infty} C_s \ln \lambda_s^2 = - \ln \frac{\Lambda^2}{m^2}. \quad (7.8)$$

В результате мы приходим к следующему регуляризованному выражению для тензора поляризации вакуума:

$$\bar{\omega}(k^2, m, \Lambda) = - \frac{2\alpha}{\pi} \int_0^1 d\beta \beta (1-\beta) \left\{ - \ln \frac{\Lambda^2}{m^2} + \ln \left[ 1 - \beta(1-\beta) \frac{k^2}{m^2} \right] \right\}.$$

Нетрудно взять оставшийся интеграл и получить следующее аналитическое выражение:

$$\bar{\omega}(k^2, m, \Lambda) = -\frac{\alpha}{3\pi} \left\{ -\ln \frac{\Lambda^2}{m^2} + \frac{1}{3} + 2 \left( 1 + \frac{2m^2}{k^2} \right) \left[ \left( \frac{4m^2}{k^2} - 1 \right)^{1/2} \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \operatorname{arcc} \operatorname{ctg} \left( \frac{4m^2}{k^2} - 1 \right)^{1/2} - 1 \right] \right\}. \quad (7.9)$$

Это выражение получено в предположении, что  $k^2 < 4m^2$ . Соответствующую функцию можно продолжить в комплексную плоскость  $k^2$ . При  $k^2 > 4m^2$  значения функции получаются с помощью предельного перехода  $i\epsilon \rightarrow 0$  на верх-

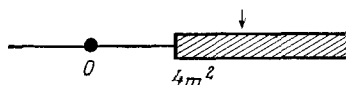


РИС. 7.2. Комплексная плоскость  $k^2$  для поляризации вакуума; стрелка указывает, как достигается физическая область на верхнем берегу разреза.

ний берег разреза, начинающегося в точке  $k^2 = 4m^2$  (рис. 7.2). Скачок на разрезе равен  $\bar{\omega}(k^2 + i\epsilon) - \bar{\omega}(k^2 - i\epsilon) = 2i \operatorname{Im} \bar{\omega}(k^2 + i\epsilon)$ . Его можно также вычислить с помощью последнего интегрального представления, в котором нужно положить  $\beta = (1-u)/2$ , проинтегрировать по частям и перейти к переменной  $u = (1 - 4m^2/k'^2)^{1/2}$ . Таким образом, получаем выражение

$$\bar{\omega}(k^2, m, \Lambda) = \frac{\alpha}{3\pi} \ln \frac{\Lambda^2}{m^2} + \frac{\alpha}{3\pi} k^2 \int_{4m^2}^{\infty} \frac{dk'^2}{k'^2} \frac{1}{k'^2 - k^2} \left( 1 - \frac{4m^2}{k'^2} \right)^{1/2} \left( 1 + \frac{2m^2}{k'^2} \right), \quad (7.10)$$

которое представляет собой дисперсионное соотношение с одним вычитанием, отвечающее описанным выше аналитическим свойствам. Абсорбтивная часть тензора  $\bar{\omega}$  запишется в виде

$$\operatorname{Im} \bar{\omega}(k^2, m) = \frac{\alpha}{3} \left( 1 - \frac{4m^2}{k^2} \right)^{1/2} \left( 1 + \frac{2m^2}{k^2} \right). \quad (7.11)$$

Мы видим, что она не зависит от параметра регуляризации  $\Lambda$  и, следовательно, перенормировка на нее не влияет. Данный вывод согласуется с нашим расчетом вероятности рождения пар внешним полем [см. выражение (4.105)].

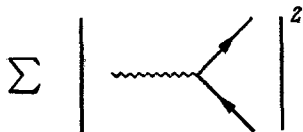


РИС. 7.3. Вероятность рождения пар во внешнем поле, определяющая скачок на разрезе для тензора поляризации вакуума.

Эта вероятность определяется как квадрат соответствующей амплитуды (рис. 7.3) и в рассматриваемом порядке дается выражением

$$W^{(1)} = \operatorname{Re} \int d^4k a_\rho(k) \bar{\omega}^{\rho\nu}(k) a_\nu(-k) = \int d^4k \operatorname{Im} \bar{\omega}(k) [|E(k)|^2 - |B(k)|^2].$$

Единственное следствие регуляризации — появление константы  $(\alpha/3\pi) \ln(\Lambda^2/m^2)$ , которая расходится, если  $\Lambda$  устремить к бесконечности.

Прежде чем произвести перенормировку, рассмотрим снова исходные формулы (7.1) и (7.2). В действительности мы вовсе не собираемся вычислять фотонный пропагатор по этим формулам! Если к  $G^{(0)}$  добавить величину  $G^{(1)}$ , то при этом помимо простого возникает также двойной полюс. Рассматривая упорядочение разложения теории возмущений по числу петель, мы имели в виду одночастично неприводимые функции Грина, что соответствует



РИС. 7.4. Фотонный пропагатор, выраженный через поляризацию вакуума.

в нашем случае обратному пропагатору. Вклад нулевого порядка (без петель) в эту величину равен  $G_{\rho\nu}^{(0)-1}$ , а однопетлевой вклад равен  $-\bar{\omega}_{\rho\nu}^{(1)}$  (здесь индекс 1 указывает, что вклад вычисляется в первом порядке теории возмущений):

$$G_{\rho\nu}^{(0)-1} - \bar{\omega}_{\rho\nu}^{(1)} = i[(k^2 - \mu^2) g_{\rho\nu} - (1 - \lambda) k_\rho k_\nu + (g_{\rho\nu} k^2 - k_\rho k_\nu) \bar{\omega}^{(1)}]. \quad (7.12)$$

Обращая это выражение, мы получаем пропагатор, представленный на диаграмме суммой, каждый член которой является цепочкой петель (рис. 7.4). Если в общем случае удастся показать, что тензор поляризации вакуума во всех порядках имеет вид скалярной функции, умноженной на выражение  $g_{\rho\nu} k^2 - k_\rho k_\nu$ , то из формулы (7.12), в которой мы отбросим индекс 1, можно получить следующее общее соотношение между пропагатором и величиной  $\bar{\omega} = \bar{\omega}^{(1)} + \bar{\omega}^{(2)} + \dots$ :

$$iG_{\rho\nu} = \frac{g_{\rho\nu} - [1 + \bar{\omega}(k^2)] k_\rho k_\nu / \mu^2}{k^2 [1 + \bar{\omega}(k^2)] - \mu^2} + \frac{k_\rho k_\nu}{\mu^2} \frac{1}{k^2 - \mu^2/\lambda}. \quad (7.13)$$

Это соотношение можно сравнить с формулой (5.80). При получении последней мы не учитывали перенормировку массы, а также расходимости. Чтобы быть более точными, предположим, что в (7.13) для знаменателя справедливо интегральное представление вида

$$\frac{1}{k^2 [1 + \bar{\omega}(k^2)] - \mu^2} = \int_0^\infty dk'^2 \frac{\rho(k'^2)}{k^2 - k'^2}. \quad (7.14)$$

Если  $\bar{\omega}$  по-прежнему удовлетворяет дисперсионному соотношению типа (7.10) (с порогом, расположенным в начале координат ( $\mu^2 \rightarrow 0$ ), а не в точке  $4m^2$ ), то справедливо соотношение

$$\rho(k^2) = \frac{k^2}{\pi} \frac{\text{Im } \bar{\omega}(k^2)}{\{k^2 [1 + \text{Re } \bar{\omega}(k^2)] - \mu^2\}^2 + [k^2 \text{Im } \bar{\omega}(k^2)]^2} + \text{Полюсные вклады.}$$

При условии что интегралы, которые мы писали, имеют смысл, получаем

$$\begin{aligned} \frac{1 + \bar{\omega}(k^2)}{k^2 [1 + \bar{\omega}(k^2)] - \mu^2} &= \frac{1}{k^2} \left\{ 1 + \frac{\mu^2}{k^2 [1 + \bar{\omega}(k^2)] - \mu^2} \right\} = \\ &= \frac{1}{k^2} + \frac{\mu^2}{k^2} \int_0^\infty dk'^2 \frac{\rho(k'^2)}{k^2 - k'^2} = \\ &= \mu^2 \int_0^\infty dk'^2 \frac{\rho(k'^2)}{k'^2 (k^2 - k'^2)} + \frac{1}{k^2} \left[ 1 - \mu^2 \int_0^\infty \frac{dk'^2}{k'^2} \rho(k'^2) \right]. \end{aligned} \quad (7.15)$$

Рассматривая интеграл (7.14) при  $k=0$ , предположим, что величина  $\bar{\omega}(0)$  конечна; тогда можно показать, что в вышеприведенной формуле последний член в квадратных скобках обращается в нуль. Следовательно, выражение (7.13) можно переписать в виде

$$iG_{\rho\nu}(k) = \int_0^\infty dk'^2 \rho(k'^2) \frac{g_{\rho\nu} - k_\rho k_\nu / k'^2}{k^2 - k'^2} + \frac{k_\rho k_\nu}{\mu^2} \frac{1}{k^2 - \mu^2/\lambda}. \quad (7.16)$$

Это выражение действительно аналогично (5.80).

Результат суммирования, отраженный в выражениях (7.12) и (7.13), привел к новому явлению. В самом деле, изолированный полюс при  $k^2 = \mu^2$ , соответствующий свободной теории, сдвинулся, причем положение его определяется теперь выражением  $k^2 [1 + \bar{\omega}(k^2)] - \mu^2 = 0$ . В случае же фотонного пропагатора изменения не столь сильны. Действительно,  $\mu^2$  введено здесь лишь для удобства, а именно чтобы обрезать в промежуточных вычислениях инфракрасные расходимости. В любом случае для извлечения физической информации нам придется вычислять комбинации типа  $j_1^\rho(k) G_{\rho\nu}(k) j_2^\nu(-k)$  где  $j_1$  и  $j_2$  — сохраняющиеся токи:  $k j(k) = 0$ . В этих выражениях устраняются члены, содержащие  $k_\rho k_\nu$ , что позволяет нам рассматривать предельный переход  $\mu^2 \rightarrow 0$ . Если вместо этого положить  $\mu^2 = 0$ , то  $G$  запишется в виде

$$iG_{\rho\nu}(k) = \frac{g_{\rho\nu}}{k^2 [1 + \bar{\omega}(k^2)]} + \frac{k_\rho k_\nu}{k^4} \frac{1 + \bar{\omega}(k^2) - \lambda}{\lambda [1 + \bar{\omega}(k^2)]}, \quad \mu^2 = 0. \quad (7.17)$$

Если  $\omega(0) \neq \infty$ , то величина  $k^2 [1 + \bar{\omega}(k^2)]$  по-прежнему обращается в нуль при  $k^2 = 0$ .

Характеризуя свойство  $k^2 [1 + \bar{\omega}(k^2)]|_{k^2=0}$ , можно менее строго утверждать, что на самом деле перенормировки массы фотона не происходит. Однако требуется перенормировка волновой функции, поскольку вычет в полюсе  $k^2 = 0$  равен теперь не 1, а  $[1 + \bar{\omega}(0)]^{-1}$ . Вычисления с помощью однопетлевых диаграмм приводят к интересному выводу, а именно: мы обнаруживаем, что единственная потенциально расходящаяся и потому неизвестная величина, вхо-

дящая в  $\bar{\omega}$ , представляет собой константу, которую можно считать значением этой величины при  $k^2=0$ . В случае, когда измерима только величина  $j G j$ , для того чтобы дать определение квадрата заряда, можно взять два разнесенных на большое расстояние идентичных источника. Определим квадрат заряда как коэффициент при кулоновском статическом потенциале  $1/4\pi r$  на больших расстояниях. Этот коэффициент здесь равен  $e^2 = e_0^2/[1 + \bar{\omega}(0)] = Z_3 e_0^2$ , где индекс 0 введен для того, чтобы показать, что речь идет о «голой» константе связи, которая применялась нами вплоть до настоящего времени в разложениях по теории возмущений. Это определение  $Z_3$  согласуется с определением, данным в гл. 5, в пределе  $\mu^2=0$ . Таким образом, мы имеем

$$e^2 = Z_3 e_0^2, \\ Z_3 = \frac{1}{1 + \bar{\omega}(0)} = 1 - \frac{\alpha}{3\pi} \ln \frac{\Lambda^2}{m^2} + \dots \quad (7.18)$$

Чтобы быть последовательными, представим все величины в виде рядов по параметру, соответствующему числу петель  $L$  в перенормированных диаграммах Фейнмана. В разд 6.2.1 было показано, что такие диаграммы содержат множитель  $\hbar^L$ . Поэтому если остановиться в разложении на членах порядка  $\hbar^1$ , то в конечный остаток  $\bar{\omega}^{(1)}(k^2) - \bar{\omega}^{(1)}(0)$  вместо  $\alpha_0$  можно подставить  $\alpha$ , поскольку этот член имеет порядок  $\hbar$ , как и  $\alpha - \alpha_0$ . Этим также объясняется, почему в правой части равенства (7.18) стоит величина  $\alpha$ .

В соответствии с данным определением заряда перенормированный пропагатор можно записать в виде

$$iG_{\rho\nu}^R(k) = \frac{g_{\rho\nu}}{k^2 [1 + \bar{\omega}(k^2) - \bar{\omega}(0)]} + \text{Члены, пропорциональные } k_\rho k_\nu. \quad (7.19)$$

Это выражение имеет равный единице вычет в фотонном полюсе  $k^2=0$  и может быть записано через физический заряд.

Мы видим, как содержание программы перенормировки становится более прозрачным; неопределенные и потенциально расходящиеся величины исчезают, когда функции Грина выражаются через физические перенормированные величины.

Полагая  $\sum_{s=1}^S C_s \ln \lambda_s^2 = -\ln(\Lambda^2/m^2)$ , мы выбрали здесь знак в соответствии с условием (7.7). Интуитивно смысл выражения (7.18) состоит в том, что голый заряд экранируется за счет множителя  $Z_3 = 1 - (\alpha/3\pi) \ln(\Lambda^2/m^2)$ , меньшего единицы и положительного, до тех пор, пока величина  $\Lambda^2/m^2$  не становится подавляюще большой. Поляризация вакуума, соответствующая рождению виртуальных электрон-позитронных пар, уменьшает заряд пробной частицы, что чувствует соседняя, удаленная от нее частица.

При выводе выражений, подобных (7.19), можно встать на другую точку зрения. Она связана с утверждением, что исходный лагранжиан есть лишь формальное средство для вычисления амплитуд с помощью теории возмущений. Такое утверждение основано на интуитивном принципе соответствия между классической и квантовой механикой. Если это так, то результаты, полученные с помощью исходного лагранжиана  $\mathcal{L}$ , могут быть уточнены с помощью квантовых поправок. Предположим поэтому, что в низшем порядке  $\mathcal{L}$  выражается через физические параметры. Тогда следует построить пертурбативные поправки вида  $\delta\mathcal{L}$ , называемые контрчленами (коэффициенты при этих членах становятся бесконечными, когда параметры обрезания устремляются к бесконечности). Контрчлены позволяют сохранить правильные значения этих физических параметров:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\text{полн}} &= \mathcal{L}(e, m, \dots) + \delta\mathcal{L}, \\ \delta\mathcal{L} &= \delta\mathcal{L}^{(1)} + \delta\mathcal{L}^{(2)} + \dots\end{aligned}\quad (7.20)$$

Различные части  $\delta\mathcal{L}$  классифицируются по степеням  $\hbar$ , отвечающим числу петель в исходных диаграммах. Тот факт, что число петель можно связать со степенью  $\hbar$ , хорошо согласуется с высказанным выше соображением.

Наш расчет можно интерпретировать как поиск вклада в  $\delta\mathcal{L}^{(1)}$  следующего вида:

$$\delta\mathcal{L}_{F^2}^{(1)} = -\frac{1}{4}(Z_3 - 1)^{(1)} F_{\rho\nu} F^{\rho\nu}. \quad (7.21)$$

Добавляя такой член к  $\mathcal{L}$ , мы вводим дополнительную диаграмму порядка  $\hbar$  (рис. 7.5) и заменяем исходный (регуляризованный)



Рис. 7.5. Две диаграммы порядка  $\hbar$ , соответствующие поляризации вакуума в подходе, использующем контрчлены.

тензор на следующий:

$$\bar{\omega}_{\rho\nu}(k) \rightarrow \bar{\omega}_{\rho\nu}(k) - (Z_3 - 1)^{(1)} i(g_{\rho\nu} k^2 - k_\rho k_\nu).$$

Таким образом, получаем

$$\bar{\omega}(k^2, \Lambda) \rightarrow \bar{\omega}(k^2, \Lambda) + (Z_3 - 1)^{(1)} = \frac{\alpha}{3\pi} \ln \frac{\Lambda^2}{m^2} + (Z_3 - 1)^{(1)} + [\bar{\omega}(k^2) - \bar{\omega}(0)].$$

Это новое правило означает, что всюду вместо  $\alpha_0$  используется  $\alpha$ . Кроме того, в уравнении (7.9) член, не зависящий от  $\ln(\Lambda^2/m^2)$ , обращается в нуль при  $k^2 = 0$ ; тем самым оправдывается введение перенормированной величины  $\bar{\omega}^R(k^2) = \bar{\omega}(k^2) - \bar{\omega}(0)$ . Из соотношений (7.18) следует, что  $(Z_3 - 1)^{(1)} + (\alpha/3\pi) \ln(\Lambda^2/m^2) = 0$  и, следо-

вательно,

$$\begin{aligned} \bar{\omega}^R(k^2) &= \frac{\alpha}{3\pi} k^2 \int_{4m^2}^{\infty} \frac{dk'^2}{k'^2} \frac{1}{k'^2 - k^2} \left(1 - \frac{4m^2}{k'^2}\right)^{1/2} \left(1 + \frac{2m^2}{k'^2}\right) = \\ &= -\frac{\alpha}{3\pi} \left\{ \frac{1}{3} + 2 \left(1 + \frac{2m^2}{k^2}\right) \left[ \left(\frac{4m^2}{k^2} - 1\right)^{1/2} \operatorname{arctg} \left(\frac{4m^2}{k^2} - 1\right)^{1/2} - 1 \right] \right\}. \end{aligned} \quad (7.22)$$

Это выражение имеет смысл при вещественных  $k^2 < 4m^2$ . В области, лежащей выше разреза  $k^2 > 4m^2$ , его приходится находить с помощью аналитического продолжения. Отметим следующие интересные предельные случаи:

$$\bar{\omega}^R(k^2) = \begin{cases} \frac{\alpha}{15\pi} \frac{k^2}{m^2} + O\left(\frac{k^4}{m^4}\right), & k^2 \rightarrow 0, \\ -\frac{\alpha}{3\pi} \ln\left(-\frac{k^2}{m^2}\right) + \frac{5\alpha}{3\pi} + O\left[\alpha \frac{m^2}{k^2} \ln\left(-\frac{k^2}{m^2}\right)\right], & k^2 \rightarrow -\infty. \end{cases}$$

Видим, что асимптотическое выражение при больших отрицательных  $k^2$  поразительно похоже (включая коэффициент) на первоначальный расходящийся член, содержащий обрезание. Разумеется, это не является случайным, что станет более ясным в ходе нашего изложения.

Экранирование заряда, происходящее за счет поляризации вакуума, имеет физические следствия. Используя перенормированные выражения и рассматривая статический случай, когда  $k^2 = -k^2$ , мы видим, что замена  $e^2 \rightarrow e^2/[1 + \bar{\omega}(-k^2)]$  приводит к изменению закона Кулона и напоминает экранировку заряда в обычной диэлектрической среде, в которой мы имели бы  $e^2 \rightarrow e^2/\varepsilon(k)$ , где  $\varepsilon$  — диэлектрическая проницаемость. В случае достаточно малых  $k^2$  (по сравнению с величиной  $m^2$ , задающей масштаб) кулоновское взаимодействие можно приближенно записать в виде

$$\frac{e^2}{k^2} \rightarrow \frac{e^2}{k^2 [1 + \bar{\omega}^R(-k^2)]} \approx \frac{e^2}{k^2} \left(1 + \frac{\alpha}{15\pi} \frac{k^2}{m^2}\right).$$

Данный результат впервые был получен Улингом.

В конфигурационном пространстве для бесконечно тяжелого ядра с зарядом  $-Ze$ , расположенного в начале координат, это выражение дает следующую поправку:

$$V(r) = -\frac{Ze^2}{4\pi r} \rightarrow \left(1 - \frac{\alpha}{15\pi} \frac{\Delta}{m^2}\right) \frac{-Ze^2}{4\pi r} = \frac{1-Ze^2}{4\pi r} - \frac{\alpha}{15\pi} \frac{Ze^2}{m^2} \delta^3(r).$$

Дополнительный член надо учитывать только в первом порядке, иначе мы поступили бы непоследовательно, поскольку в  $\bar{\omega}^R$  сохраняются члены лишь порядка  $\alpha$ . Разложение в окрестности нуля

в первом порядке ( $k^2/m^2$ ) привело к сингулярности в конфигурационном пространстве. Однако нас интересует лишь среднее значение потенциала в невозмущенных состояниях, на котором не сказывается замена реальной поправки, имеющей форму острого пика при малых  $r$ , на  $\delta$ -функцию. Следует заметить, что это усиление при малых  $r$  согласуется с представлением о том, что на малых расстояниях восстанавливается экранированное взаимодействие с «голым» зарядом.

В случае водородоподобного атома найденная выше поправка приводит к следующему смещению  $s$ -волновых уравнений:

$$\begin{aligned} \delta E_{n, l} &= -\frac{Z\alpha e^2}{15\pi m^2} \int d^3r \psi_{n, l}^*(\mathbf{r}) \delta^3(r) \psi_{n, l}(\mathbf{r}) = \\ &= -\frac{Z\alpha e^2}{15\pi m^2} \delta_{l, 0} |\psi_{n, 0}(0)|^2 = -\frac{4}{15\pi} \frac{Z^4 \alpha^5}{n^3} m \delta_{l, 0}. \end{aligned} \quad (7.23)$$

В этой формуле мы использовали кулоновскую волновую функцию в нуле:  $\psi_{n, 0}(0) = (\pi n^3 a^3)^{-1/2}$ , где  $a = (Zm\alpha)^{-1}$ . В теории Дирака два уровня, отвечающие квантовым числам  $n=2$ ,  $j=1/2$  и обла-

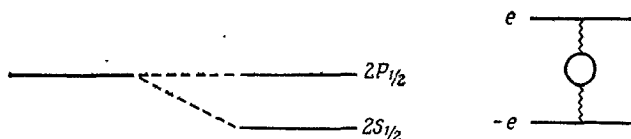


РИС. 7.6. Вклад поляризации вакуума в расщепление  $2S_{1/2} - 2P_{1/2}$  уровней атома водорода.

дающие противоположными четностями  $2S_{1/2}$  и  $2P_{1/2}$ , являются вырожденными. Поправка, связанная с поляризацией вакуума, понижает  $s$ -уровень на величину  $\Delta E/\hbar = (1/\hbar)(E_{2S_{1/2}} - E_{2P_{1/2}}) \approx -27$  МГц (рис 7.6). В 1947 г Лэмб, измеряя расщепление этого уровня, получил значение порядка  $+1000$  МГц, указывающее на то, что поляризация вакуума играет здесь несущественную роль по сравнению с другими эффектами. В разд 7.3 2 мы покажем, как полная теория согласуется с экспериментом, что является косвенным указанием на экранирование заряда.

Разумеется, мы можем избавиться от приближения малых  $k^2$ . В случае статического заряда, расположенного в начале координат, кулоновский потенциал



в первом порядке по  $\alpha$  определяется выражениями

$$\frac{e}{4\pi r} \rightarrow V(r) = \frac{e}{4\pi r} Q(r),$$

$$Q(r) = 1 + \frac{2\alpha}{3\pi} \int_1^{\infty} du e^{-2mra} \left(1 + \frac{1}{2u^2}\right) \frac{(u^2 - 1)^{1/2}}{u^2}, \quad (7.24)$$

$$Q(r) = \begin{cases} 1 + \frac{\alpha}{3\pi} \left[ \ln \frac{1}{(mr)^2} - 2\gamma - \frac{5}{3} + \dots \right], & mr \ll 1, \\ 1 + \frac{\alpha}{4\pi^{1/2} (mr)^{1/2}} e^{-2mr} + \dots, & mr \gg 1. \end{cases}$$

Здесь  $\gamma$  — постоянная Эйлера, равная  $-\int_0^{\infty} du \ln ue^{-u} = 0,5772\dots$ . Согласно

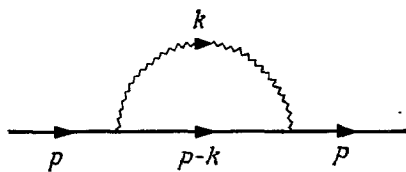
определению заряда, имеем  $Q(\infty) = 1$ . Мы снова видим, что, когда  $r$  уменьшается,  $Q(r)$  увеличивается и при  $r \rightarrow 0$  даже становится бесконечным. Приближение, используемое в выражении (7.23), справедливо лишь для средних значений

В заключение заметим, что предположения, при которых были получены наши результаты, равносильны тому, что вычет фотонного пропагатора в фотонном полюсе (при  $\mu^2 \rightarrow 0$ ) равен единице. Поэтому в амплитудах рассеяния фактор  $Z_3^{-1/2}$ , приписываемый фотонным линиям, был заменен на единицу.

### 7.1.2. Электронный пропагатор

Первый нетривиальный вклад в одночастичную неприводимую функцию Грина с двумя внешними электронными линиями (называемый также собственной энергией электрона) представлен гра-

РИС. 7.7. Собственная энергия электрона в низшем порядке.



фически на рис. 7.7 и записывается следующим образом:

$$-i\Sigma(p) = (-ie)^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{i} \left[ \frac{g_{\rho\sigma}}{k^2 - \mu^2 + i\epsilon} + \frac{(1-\lambda)k_\rho k_\sigma}{(k^2 - \mu^2 + i\epsilon)(\lambda k^2 - \mu^2 + i\epsilon)} \right] \times \\ \times \gamma^\rho \frac{i}{p - k - m + i\epsilon} \gamma^\sigma. \quad (7.25)$$

К сожалению, данное выражение, представляющее собой  $4 \times 4$ -матрицу, зависящую от  $p$ , страдает всеми возможными пороками. Оно имеет очевидную линейную ультрафиолетовую расходимость (это означает, что при больших  $k$  интеграл ведет себя как  $\int d^4k/|k|^3$ ). Мы покажем, что эту расходимость можно свести к логарифмической. При малых  $k$  и частных значениях внешнего

импульса могут иметь место также инфракрасные расходимости; чтобы избавиться от них, будем удерживать  $\mu^2 \neq 0$ . Кроме того, должна быть зависимость от выбора калибровки, как и у волновой функции заряженной частицы в нерелятивистской физике.

Чтобы иметь дело с разумными величинами, необходимо, как и прежде, провести регуляризацию свободных пропагаторов. Во избежание громоздких обозначений предположим, что введено необходимое обрезание  $\Lambda^2$ , которое не будем указывать явно. Напишем выражение

$$\Sigma(p) = \Sigma^a(p) + \frac{1-\lambda}{\lambda} \Sigma^b(p) \quad (7.26)$$

таким образом, что  $\Sigma^a(p)$  соответствует фейнмановской калибровке ( $\lambda = 1$ ), и используем параметрическое представление пропагаторов, чтобы функции  $\Sigma^a$  и  $\Sigma^b$  после интегрирования по импульсу петли  $k$  можно было записать в виде

$$\begin{aligned} \Sigma^a(p) = & \frac{\alpha}{2\pi} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{d\alpha_1 d\alpha_2}{(\alpha_1 + \alpha_2)^2} \left( 2m - \frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2} p \right) \times \\ & \times \exp \left[ i \left( \frac{\alpha_1 \alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2} p^2 - \alpha_1 \mu^2 - \alpha_2 m^2 \right) \right], \end{aligned} \quad (7.27a)$$

$$\begin{aligned} \Sigma^b(p) = & -\frac{i\alpha}{4\pi} \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{d\alpha_1 d\alpha_2 d\alpha_3}{(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)^3} \left\{ m \left( 2i + \frac{\alpha_2^2 p^2}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3} \right) + \right. \\ & \left. + p \left[ -i - \frac{3i\alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3} + \frac{\alpha_2' (\alpha_1 + \alpha_3) p^2}{(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)^2} \right] \right\} \times \\ & \times \exp \left\{ i \left[ \frac{\alpha_2 (\alpha_1 + \alpha_3)}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3} p^2 - \alpha_1 \mu^2 - \alpha_3 \frac{\mu^2}{\lambda} - \alpha_2 m^2 \right] \right\}. \end{aligned} \quad (7.27b)$$

Подразумевается, что массы включают бесконечно малые отрицательные мнимые добавки, обеспечивающие сходимость при больших  $\alpha$ .

Как и в случае фотонов, будем классифицировать собственно-энергетические части по числу петель, а сам пропагатор запишем в виде суммы ряда (рис 7.8)

$$\begin{aligned} & \frac{i}{p-m} + \frac{i}{p-m} [-i\Sigma(p)] \frac{i}{p-m} + \\ & + \frac{i}{p-m} [-i\Sigma(p)] \frac{i}{p-m} [-i\Sigma(p)] \frac{i}{p-m} + \dots = \\ & = \frac{i}{p-m-\Sigma(p)}. \end{aligned} \quad (7.28)$$

Вычислим теперь функцию  $\Sigma^a(p, \Lambda)$ , где мы должны ввести обрезание  $\Lambda$  при интегрировании по  $p$ —общему коэффициенту растя-

жения параметров  $\alpha$ :

$$\Sigma^a(p, \Lambda) = \frac{\alpha}{2\pi} \int_0^\infty \int_0^\infty d\alpha_1 d\alpha_2 \delta(1 - \alpha_1 - \alpha_2) \times \\ \times \int_0^\infty \frac{d\rho}{\rho} (2m - \alpha_1 \rho) e^{i\rho(\alpha_1 \alpha_2 p^2 - \alpha_1 \mu^2 - \alpha_2 m^2)}. \quad (7.29)$$

Благодаря выделению кинематических факторов  $m$  и  $p$  интеграл по  $\rho$  расходится только логарифмически, в противоположность линейной расходимости собственной массы в классической теории

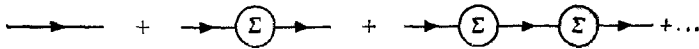


РИС. 7.8. Пропагатор электрона, представленный в виде степенного ряда по собственной энергии  $\Sigma$ .

(см. гл. 1). Если бы масса  $m$  была столь велика, что выполнялись бы условия  $|p| \ll \Lambda \ll m$ , соответствующие статическому классическому пределу, то мы снова имели бы линейную расходимость по  $\Lambda$ .

Чтобы получить релятивистски инвариантную регуляризацию, из  $\Sigma^a$  можно вычесть вклад массивного фотона, в котором  $\mu$  следует заменить на  $\Lambda$ . Таким образом, используемая здесь величина  $\Lambda$  не связана с той, которая рассматривалась в случае поляризации вакуума. Если имеется необходимость изучать зависящие от  $\Lambda$  части при больших, но конечных значениях параметра обрезания, то разумно было бы ввести единообразную процедуру регуляризации. В соответствии с этим произведем замену:

$$\int_0^\infty \frac{d\rho}{\rho} e^{i\rho(\alpha_1 \alpha_2 p^2 - \alpha_1 \mu^2 - \alpha_2 m^2)} \rightarrow \int_0^\infty \frac{d\rho}{\rho} (e^{i\rho(\alpha_1 \alpha_2 p^2 - \alpha_1 \mu^2 - \alpha_2 m^2)} - e^{-i\rho \alpha_1 \Lambda^2}),$$

где при  $\Lambda^2 \rightarrow \infty$  мы пренебрегли по сравнению с  $\Lambda^2$  всеми другими массовыми параметрами. Тождество

$$\int_0^\infty \frac{d\rho}{\rho} (e^{i\rho(z_1 + i\varepsilon)} - e^{i\rho(z_2 + i\varepsilon)}) = \ln \frac{z_2}{z_1}$$

позволяет нам написать следующее выражение:

$$\Sigma^a(p, \Lambda) = \frac{\alpha}{2\pi} \int_0^1 d\beta (2m - \beta p) \ln \left[ \frac{\beta \Lambda^2}{m^2(1-\beta) + \beta \mu^2 - \beta(1-\beta)p^2 - i\varepsilon} \right]. \quad (7.30)$$

Мы видим, что коэффициенты при линейном по  $p$  члене зависят от  $\Lambda$  таким образом, что остальная часть выражения остается конечной.

Из-за наличия инфракрасных расходимостей ситуация несколько усложняется. До тех пор пока  $\mu^2$  остается конечным, квадратичная форма, имеющаяся под знаком логарифма, положительна при  $p^2 < (m + \mu)^2$ . Действительно, для  $0 \leq \beta \leq 1$  и значений  $p^2$ , находящихся ниже порога, мы имеем  $0 \leq \beta(1 - \beta) \leq 1/4$  и, следовательно,

$$(1 - \beta) m^2 + \beta \mu^2 - \beta(1 - \beta) p^2 \geq (1 - \beta) m^2 + \beta \mu^2 - \beta(1 - \beta) (m + \mu)^2 = \\ = [(1 - \beta) m - \beta \mu]^2.$$

В этой области величина  $\Sigma^a$  является «вещественной», т. е.  $\overline{\Sigma^a} \equiv \gamma^0 \Sigma^a \gamma^0 = \Sigma^a$ . Выше порога  $\Sigma^a$  приобретает «мнимую» часть, соответствующую переходу:

$$\text{Виртуальный электрон} \rightarrow \text{Реальный электрон} + \text{Фотон}.$$

Это аналогично тому, что происходит с фотонным пропагатором выше порога образования пар. Причина для беспокойства состоит здесь в том, что при  $\mu^2 \rightarrow 0$  порог совпадает с физической массовой поверхностью  $p^2 = m^2$ . В реальном случае полюс в пропагаторе, соответствующий свободному электрону, нельзя изолировать от разреза, начинающегося в той же самой точке. Этим объясняется наше стремление сохранить  $\mu^2 > 0$ . Когда  $\mu^2 = 0$ , один из нулей квадратичной формы достигает предела интервала интегрирования  $\beta = 1$  и разложение в окрестности сингулярной точки  $p^2 = m^2$  становится невозможным.

Похожее, но отличающееся явление наблюдается также при рассмотрении фотонного пропагатора в более высоких порядках (четыре или более петель), соответствующих промежуточным состояниям с тремя, пятью и т. д. фотонами. Для фотонного пропагатора на больших расстояниях это дает степенные поправки с очень небольшими коэффициентами. Из-за его малости этот эффект еще не был измерен.

Мы можем, однако, для значений  $p^2 < m^2$  перейти к пределу  $\mu^2 \rightarrow 0$ , не столкнувшись с сингулярностями. В этом случае интеграл в выражении (7.30) сильно упрощается, и мы можем написать его в виде

$$\Sigma^a(p, \Lambda, \mu = 0) = \\ = \frac{\alpha}{2\pi} \left\{ \ln \frac{\Lambda^2}{m^2} \left( 2m - \frac{1}{2} p \right) + 2m \left[ 1 + \frac{m^2 - p^2}{p^2} \ln \left( 1 - \frac{p^2}{m^2} \right) \right] - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} p \left[ \frac{3}{2} + \frac{m^4 - (p^2)^2}{(p^2)^2} \ln \left( 1 - \frac{p^2}{m^2} \right) + \frac{m^2}{p^2} \right] \right\}. \quad (7.31)$$

При  $p^2 \rightarrow m^2$  это выражение остается конечным, но его производные становятся бесконечными.

Подстановка этого выражения для собственной энергии в формулу (7.28), очевидно, сдвигает положение полюса пропагатора и изменяет значение вычета в нем. Снова возможны два эквивалентных подхода. В первом из них  $m_0$  и  $e_0$  называют параметрами исходного лагранжиана, величина  $m$  определяется как измененное положение полюса, а функция Грина переопределяется через физическую массу и константу связи. Во втором подходе голые параметры вообще не рассматриваются, а в лагранжиан вводятся конрчлены таким образом, чтобы сохранить положение полюса и вычет в нем неизменными.

Мы можем добиться этого, разложив величину  $\Sigma$ , рассматриваемую как функцию от  $p$  ( $p^2 = p^2$ ), в окрестности  $p = m$ :

$$\Sigma(p, \Lambda) = \delta m(\Lambda) - [Z_2^{-1}(\Lambda) - 1](p - m) + Z_2^{-1}(\Lambda) \Sigma_R(p),$$

$$\delta m = \Sigma(p, \Lambda) \Big|_{p=m}, \quad (7.32)$$

$$-[Z_2^{-1}(\Lambda) - 1] = \frac{\partial \Sigma}{\partial p}(p, \Lambda) \Big|_{p=m}.$$

В первом порядке по  $\hbar$  можно пренебречь множителем  $Z_2^{-1}(\Lambda)$ , стоящим перед  $\Sigma_R(p)$ , тогда первое выражение становится разложением в ряд Тейлора, поскольку

$$\Sigma_R(p) \Big|_{p=m} = \frac{\partial}{\partial p} \Sigma_R(p) \Big|_{p=m} = 0.$$

Однако более понятной является следующая запись этого выражения:

$$p - m - \Sigma_R(p) = Z_2(\Lambda) [p - m_0 - \Sigma(p)].$$

В фейнмановской калибровке для получения величин  $\delta m$  и  $Z_2^{-1}$  мы используем выражение (7.30). В действительности, при вычислении  $\delta m$  мы можем пренебречь инфракрасными расходимостями и воспользоваться выражением (7.31), откуда следует

$$\delta m^a(\Lambda) = m \frac{3\alpha}{4\pi} \left( \ln \frac{\Lambda^2}{m^2} + \frac{1}{2} \right). \quad (7.33)$$

Для того чтобы найти  $Z_2^{-1}(\Lambda) - 1$ , нужно вернуться к (7.30) и удержать там вклады, сингулярные или конечные при  $\mu^2 \rightarrow 0$ . Это дает

$$\begin{aligned} [Z_2^{-1}(\Lambda) - 1]^a &= - \frac{\partial}{\partial p} \Sigma^a(p, \Lambda, \mu) \Big|_{p=m} = \\ &= \frac{\alpha}{2\pi} \int_0^1 d\beta \beta \left\{ \ln \left[ \frac{\beta \Lambda^2}{(1-\beta)^2 m^2} \right] - \frac{2(1-\beta)(2-\beta)}{(1-\beta)^2 + \beta \mu^2/m^2} \right\} = \\ &= \frac{\alpha}{2\pi} \left[ \frac{1}{2} \ln \frac{\Lambda^2}{m^2} + \ln \frac{\mu^2}{m^2} + \frac{9}{4} + O\left(\frac{\mu}{m}\right) \right]. \end{aligned} \quad (7.34)$$

Перенормированное значение величины  $\Sigma$  получается с помощью вычитания величины  $\delta m - (Z_2^{-1} - 1)(\not{p} - m)$ . Используя в области  $|p^2 - m^2| \gg \mu^2$  выражение (7.31), находим

$$\Sigma_R^a(p) = \frac{\alpha}{2\pi} \left\{ 2m \left[ \frac{5}{8} + \frac{m^2 - p^2}{p^2} \ln \left( 1 - \frac{p^2}{m^2} \right) \right] - \frac{\not{p}}{2} \left[ \frac{3}{2} + \frac{m^2}{p^2} + \frac{m^4 - (p^2)^2}{(p^2)^2} \ln \left( 1 - \frac{p^2}{m^2} \right) \right] + (\not{p} - m) \left( \frac{9}{4} + \ln \frac{\mu^2}{m^2} \right) \right\}. \quad (7.35)$$

В случае  $p^2 - m^2 \gg \mu^2$  при аналитическом продолжении в область, лежащую выше разреза, начинающегося при  $(m + \mu)^2$ , логарифм приобретает мнимую часть:  $\ln(1 - p^2/m^2) \rightarrow \ln(p^2/m^2 - 1) - i\pi$ . Соответствующая абсорбтивная часть функции  $\Sigma$  в пределе  $\mu^2 \rightarrow 0$  равна

$$\text{abs } \Sigma_R^a(p) = \alpha \left( 1 - \frac{m^2}{p^2} \right) \left[ m - \frac{\not{p}}{4} \left( 1 + \frac{m^2}{p^2} \right) \right] \theta(p^2 - m^2). \quad (7.36)$$

Исследовать поведение  $\Sigma_R$  в окрестности точки  $p^2 = m^2$  приходится отдельно. Если требовать, чтобы перенормировка производилась на массовой поверхности, появляются дополнительные инфракрасные особенности, первоначально отсутствовавшие в выражении (7.31).

Посмотрим, как изменятся наши результаты, справедливые в фейнмановской калибровке, при переходе к произвольной калибровке. Иными словами, нам нужно вычислить функцию  $\Sigma^b$ , которая в импульсном пространстве записывается в виде

$$\Sigma^b(p) = - \frac{ie^2}{(2\pi)^4} \int d^4k \frac{1}{(k^2 - \mu^2 + i\varepsilon)(k^2 - \mu^2/\lambda + i\varepsilon)} \times \left[ \frac{\not{K}(p^2 - m^2)}{(p-k)^2 - m^2 + i\varepsilon} - \frac{k^2(\not{p} - m)}{(p-k)^2 - m^2 + i\varepsilon} - \not{K} \right]. \quad (7.37)$$

Обозначим вклады трех последовательных членов, стоящих в подынтегральном выражении, соответственно через  $I_1, I_2, I_3$ . При условии что используется ковариантная регуляризация, вклад  $I_3$  вследствие нечетности по  $k$  обращается в нуль (он может быть лишь пропорциональным величине  $\not{p}$ , но соответствующий интеграл не зависит от  $p$ ). Мы видим, что после регуляризации  $\Sigma^b$  обращается в нуль при  $p = m$  и, следовательно, не дает вклада в  $\delta m$ . Действительно, вклад  $I_1$  не содержит ультрафиолетовой расходимости. Однако его производная в точке  $p = m$  имеет инфракрасную особенность; при этом величина  $\mu^2$  должна оставаться конечной, чтобы можно было выделить вклад  $I_1$  в перенормировку волновой функции, т. е. в  $(Z_2^{-1} - 1)^b$ . Наконец, член  $I_2$  имеет логарифмическую ультрафиолетовую расходимость, но не имеет инфракрасных рас-

ходимостей. В случае  $|\rho^2 - m^2| \gg \mu^2$  находим

$$\frac{1-\lambda}{\lambda} \Sigma^b(\rho, \Lambda) = \frac{1-\lambda}{\lambda} \frac{\alpha}{4\pi} \left\{ \rho \frac{\rho^2 - m^2}{\rho^2} \left[ 1 + \frac{m^2}{\rho^2} \ln \left( 1 - \frac{\rho^2}{m^2} \right) \right] - (\rho - m) \left[ \ln \frac{\Lambda^2}{m^2} + 1 - \frac{\rho^2 - m^2}{\rho^2} \ln \left( 1 - \frac{\rho^2}{m^2} \right) \right] \right\}. \quad (7.38)$$

Вблизи массовой поверхности  $\rho^2 = m^2$  первую квадратную скобку  $[1 + (m^2/\rho^2) \ln(1 - \rho^2/m^2)]$  следует заменить выражением

$$\frac{1}{2} \left[ 1 + \frac{\ln(\mu^2/\lambda m^2) - \lambda \ln(\mu^2/m^2)}{1-\lambda} \right].$$

Следовательно, величину  $[(1-\lambda)/\lambda] \Sigma^b$  можно представить в виде суммы перенормированной части и части, убывающей линейно по  $\rho - m$ ; при  $|\rho^2 - m^2| \gg \mu^2$  мы имеем

$$\begin{aligned} \frac{1-\lambda}{\lambda} \Sigma^b(\rho, \Lambda) = & -(\rho - m) \frac{\alpha}{4\pi} \left[ \frac{1-\lambda}{\lambda} \ln \frac{\Lambda^2}{m^2} + \ln \frac{\mu^2}{m^2} - \frac{1}{\lambda} \ln \frac{\mu^2}{\lambda m^2} \right] + \\ & + \frac{\alpha}{4\pi} \frac{1-\lambda}{\lambda} \left\{ \rho \frac{\rho^2 - m^2}{\rho^2} \left[ 1 + \frac{m^2}{\rho^2} \ln \left( 1 - \frac{\rho^2}{m^2} \right) \right] - \right. \\ & - (\rho - m) \left[ 1 - \frac{\rho^2 - m^2}{\rho^2} \ln \left( 1 - \frac{\rho^2}{m^2} \right) + \right. \\ & \left. \left. + \frac{\ln(\mu^2/\lambda m^2) - \lambda \ln(\mu^2/m^2)}{1-\lambda} \right] \right\}. \quad (7.39) \end{aligned}$$

Отсюда получаем

$$[Z_2(\Lambda)^{-1} - 1]^b = \frac{\alpha}{4\pi} \left( \frac{1-\lambda}{\lambda} \ln \frac{\Lambda^2}{m^2} + \ln \frac{\mu^2}{m^2} - \frac{1}{\lambda} \ln \frac{\mu^2}{\lambda m^2} \right). \quad (7.40)$$

В формулах (7.39) и (7.40) используется тот же параметр обрезания  $\Lambda$ , что и при вычислении  $\Sigma^a$ .

Рассматривая комбинацию  $(Z_2^{-1} - 1)^{a+b}$ , мы видим, что при инфракрасном сингулярном члене  $\ln(\mu^2/m^2)$  стоит коэффициент, пропорциональный величине  $3 - 1/\lambda$ . Выбирая  $\lambda = 1/3$  (Йенни и Фрид), можно устранить инфракрасные расходимости в рассматриваемом приближении. В пределе  $\mu^2 \rightarrow 0$  этому выбору  $\lambda$  соответствует фотонный пропагатор  $-i(g_{\alpha\beta}/k^2 - 2k_\alpha k_\beta/k^4)$ . В результате функция  $\Sigma_R^{a+b}$  также свободна от инфракрасных особенностей.

Теперь нужно скомпенсировать ультрафиолетовые расходимости, добавляя к лагранжиану контрчлены таким образом, чтобы сохранить правильные значения физических параметров. Исходный лагранжиан содержит член  $-m\bar{\psi}\psi$ . Он заменяется на величину  $-m_0\bar{\psi}\psi = -m\bar{\psi}\psi + \delta m \bar{\psi}\psi$ . Это означает, что в первом порядке мы добавляем к лагранжиану член

$$\delta \mathcal{L}_{\bar{\psi}\psi}^{(1)} = \delta m \bar{\psi}\psi, \quad (7.41)$$

где

$$\delta m = \delta m^a = \frac{3\alpha}{4\pi} m \left( \ln \frac{\Lambda^2}{m^2} + \frac{1}{2} \right). \quad (7.42)$$

Следует заметить, что  $\delta m$  не зависит от выбора калибровки (что физически вполне разумно) и расходится лишь логарифмически. Член  $i\delta m$ , добавленный к лагранжиану, будет давать вклад в сильно-связную двухточечную функцию (рис. 7.9). В соответствии с определением (7.25) это приведет к вычитанию  $\delta m$  из  $\Sigma$  и обеспечению того, чтобы  $m$  была действительно физической массой. В смысле



РИС. 7.9. Графическое представление однопетлевых контрчленов  $\delta m \bar{\psi} \psi + (Z_2 - 1) [(i/2) \bar{\psi} \not{\partial} \psi - m \bar{\psi} \psi]$  к электронной двухточечной функции.

формального степенного разложения мы имеем в первом порядке  $(Z_2 - 1)^{[1]} = -(Z_2^{-1} - 1)^{[1]}$ . Таким образом, контрчлен

$$\delta \mathcal{L}_{(i/2) \bar{\psi} \not{\partial} \psi - m \bar{\psi} \psi}^{[1]} = (Z_2 - 1) \left( \frac{i}{2} \bar{\psi} \not{\partial} \psi - m \bar{\psi} \psi \right), \quad (7.43)$$

$$\text{где } Z_2 - 1 = -\frac{\alpha}{4\pi} \left( \frac{1}{\lambda} \ln \frac{\Lambda^2}{m^2} + 3 \ln \frac{\mu^2}{m} - \frac{1}{\lambda} \ln \frac{\mu^2}{\lambda m^2} + \frac{9}{4} \right), \quad (7.44)$$

компенсирует в первом порядке расходящийся член в  $\not{p} - m$ . Оставшийся конечный пропагатор  $[\not{p} - m - \Sigma_R^{a+b}(p)]^{-1}$  будет иметь полюс при  $\not{p} = m$  с вычетом, равным единице.

*Замечания*

1. В первом порядке по  $\hbar$  мы не можем различить контрчлены  $\delta m \bar{\psi} \psi$  и  $Z_2 \delta m \bar{\psi} \psi$ , поскольку  $[Z_2 \delta m]^{[1]} = \delta m^{[1]}$ .
2. В калибровке Ландау ( $\lambda \rightarrow \infty$ ) ультрафиолетовые расходимости в  $Z_2^{-1}$  в первом порядке сокращаются. К сожалению, не существует какой-либо единый выбор калибровки, которая бы устраняла в рамках теории возмущения все ультрафиолетовые расходимости.
3. Все введенные нами до сих пор контрчлены имеют структуру, аналогичную различным членам исходного лагранжиана, а это указывает на то, что программа перенормировки находится на пути к успеху.

Первым, кто отметил, что собственная масса электрона расходится только логарифмически, был Вайскопф (1939 г.). Полный расчет впервые был выполнен Карлсусом и Кроллом в 1950 г.

### 7.1.3. Вершинная функция

После изучения двухточечных функций обратимся теперь к рассмотрению трехточечной вершинной функции ( $\bar{e}e\gamma$ ). На рис. 7.10 представлена единственная одночастично неприводимая диаграмма, относящаяся к этому процессу. Она дается выражением

$$\begin{aligned} & -ie\Gamma_\mu^{[1]}(p', p) = \\ & = (-ie)^3 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{i} \left[ \frac{g_{\rho\sigma}}{k^2 - \mu^2 + i\epsilon} + \frac{(1-\lambda)k_\rho k_\sigma}{(k^2 - \mu^2 + i\epsilon)(\lambda k^2 - \mu^2 + i\epsilon)} \right] \times \\ & \times \left( \gamma^\sigma \frac{i}{\not{p}' - \not{k} - m + i\epsilon} \gamma_\mu \frac{i}{\not{p} - \not{k} - m + i\epsilon} \gamma^\rho \right). \end{aligned} \quad (7.45)$$



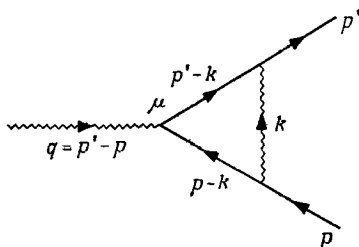
В тех же обозначениях величина нулевого порядка равна  $\gamma_\mu$ . Полную одночастично неприводимую трехточечную функцию соответственно запишем в виде

$$\Lambda_\mu(p', p) = \gamma_\mu + \Gamma_\mu(p', p), \quad (7.46)$$

причем первый ненулевой вклад в  $\Gamma_\mu$  определяется выражением (7.45)

Если вспомнить о том, что электромагнитное взаимодействие вводится с помощью минимальной подстановки  $\not{p} \rightarrow \not{p} - e\hat{A}$ , то

РИС. 7.10. Однопетлевая вершинная диаграмма.



можно предположить, что между электронным пропагатором и вершинной функцией существует тесная связь. Действительно, указанная связь выражается тождеством Уорда.

Рассмотрим все возможные вставки внешней фотонной линии, отвечающей нулевому импульсу, во внутренние пропагаторы заряженных частиц, которые входят в диаграмму собственной энергии

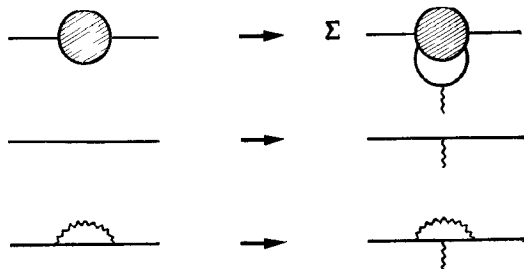


РИС. 7.11. Вставка внешней фотонной линии в диаграмму собственной энергии электрона, приводящая к тождеству Уорда.

электрона (рис. 7.11). Член нулевого порядка дает  $i(\not{p} - m) \rightarrow -ie\hat{A}$ , в то время как однопетлевой вклад, представленный на диаграммах рис. 7.11, приводит к замене:  $-ie\Sigma^{[1]}(p) \rightarrow -ieA^\mu \Gamma_\mu^{[1]}(p, p)$  и т. д. Графическое соответствие можно интерпретировать следующим образом. В каждом внутреннем пропагаторе заряженной частицы собственной-энергетической диаграммы мы заменяем протекающий импульс  $\not{p}$  разностью  $\not{p} - e\hat{A}$ , где  $A_\mu$  — некоторый постоянный 4-вектор. Затем полученное выраже-

ние разлагается в ряд по степеням  $eA$  и определяется коэффициент при линейном члене. Это есть не что иное, как  $\Gamma_\mu(p, p)$ .

Применяя этот рецепт, например, к однопетлевому вкладу в  $\Sigma(p)$ , находим

$$\Sigma(p) \rightarrow \frac{\partial}{\partial eA} (-ie)^2 i \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{i} \left[ \frac{g_{\rho\sigma}}{k^2 - \mu^2 + i\varepsilon} + \frac{(1-\lambda) k_\rho k_\sigma}{(k^2 - \mu^2 + i\varepsilon)(\lambda k^2 - \mu^2 + i\varepsilon)} \right] \times \\ \times \gamma^\rho \frac{i}{\not{p} - \not{K} - eA - m + i\varepsilon} \gamma^\sigma \Big|_{A=0}.$$

Поскольку справедливо равенство

$$\frac{1}{\not{p} - \not{K} - eA - m + i\varepsilon} = \frac{1}{\not{p} - \not{K} - m + i\varepsilon} + \frac{1}{\not{p} - \not{K} - m + i\varepsilon} eA \frac{1}{\not{p} - \not{K} - eA - m + i\varepsilon},$$

после дифференцирования его правой части и приравнивания  $A$  нулю мы получим выражение для  $\Gamma(p, p)$ , согласующееся с (7.45).

Может быть задан вопрос: все ли вершинные диаграммы учитываются в результате такой операции? Ответ очевиден: не все. Рассмотрим в собственно-энергетической диаграмме внутреннюю

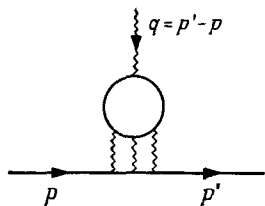


РИС. 7.12. Пример диаграммы, которая не может быть получена из  $\Sigma(p)$  с помощью процедуры, описанной в тексте.

замкнутую фермионную петлю. Согласно теореме Фарри, к такой петле присоединено только четное число фотонных линий (если мы условились рассеять каждую внутреннюю фотонную линию, начинающуюся и заканчивающуюся на этой петле). Опять-таки по теореме Фарри невозможно прийти с помощью рассмотренной выше процедуры к вкладу от вершины, в которой внутренняя фермионная петля присоединена к остальной части диаграммы нечетным числом фотонных линий, например так, как изображено на рис. 7.12. Это означает, что мы получаем только такие диаграммы, в которых внешняя фотонная линия присоединяется к фермионной, через которую протекает поток заряда, начинающийся во внешней линии. На первый взгляд это может причинить затруднения, если нам действительно нужно найти соотношение между  $\Sigma$  и  $\Gamma$ . К счастью, вклад суммы всех диаграмм, в которых внешняя линия присоединена всеми возможными способами к внутренней электронной петле, обращается в нуль, если его вычислять при нулевом переданном импульсе  $q$ . В этом можно убедиться

с помощью соответствующей регуляризации петли по Паули — Вилларсу, выделяя фактор вида

$$\sum \int d^4 p \operatorname{Sp} \left( \frac{1}{\not{p} - m + i\varepsilon} \gamma_\mu \frac{1}{\not{p} - m + i\varepsilon} \gamma_2 \frac{1}{\not{p} + q_2 - m + i\varepsilon} \times \right. \\ \left. \times \gamma_3 \frac{1}{\not{p} + q_2 + q_3 - m + i\varepsilon} \cdots \gamma_{2p} \right),$$

в котором сумма всех импульсов  $q_2 + q_3 + \dots + q_{2p}$ , входящих в петлю, равна нулю. Как и прежде, воспользуемся тождеством

$$\frac{1}{\not{p} - m + i\varepsilon} \gamma_\mu \frac{1}{\not{p} - m + i\varepsilon} = - \frac{\partial}{\partial p^\mu} \frac{1}{\not{p} - m + i\varepsilon}.$$

Суммируя по всем возможным вставкам внешнего фотона при фиксированных значениях импульсов внутренних фотонов, мы получаем в подынтегральном выражении полную производную. При этом интеграл при условии, что он регуляризован калибровочно-инвариантным образом, обращается в нуль. Отсюда можно сделать заключение, что рассмотренный выше рецепт вставок внешних фотонных линий применим лишь к выделенному набору электронных пропагаторов, несущих поток внешних зарядов. Можно показать, что тот же набор пропагаторов несет поток импульса электрона, а потому использованный нами рецепт эквивалентен взятию производной по этому импульсу. В результате мы приходим к тождеству Уорда

$$\Gamma_\mu(p, p) = - \frac{\partial}{\partial p^\mu} \Sigma(p). \quad (7.47a)$$

Если учесть вклад нулевого порядка, это тождество принимает вид

$$\Lambda_\mu(p, p) = \gamma_\mu + \Gamma_\mu(p, p) = \frac{\partial}{\partial p^\mu} [\not{p} - m - \Sigma(p)]. \quad (7.47b)$$

В следующей главе мы обобщим тождество Уорда на случай ненулевого переданного импульса в форме, предложенной Такахаши:

$$(\not{p}' - p)^\mu \Lambda_\mu(p', p) = [\not{p}' - m - \Sigma(p')] - [\not{p} - m - \Sigma(p)], \quad (7.48)$$

и обсудим его связь с законом сохранения тока. Нетрудно показать, что тождество (7.47a) следует из (7.48). Доказательство, приведенное выше в общих чертах, очевидно, требует дополнительного внимания. В частности, необходима соответствующая калибровочно-инвариантная регуляризация. Фактически одна из целей перенормировки в квантовой электродинамике состоит именно в том, чтобы преобразовать формальные тождества Уорда — Такахаши в соотношения между перенормированными конечными величинами.

Вернемся снова к однопетлевому приближению и опустим индекс 1. Из выражения (7.45) следует, что разность  $\Gamma(p', p) - \Gamma(p, p)$  конечна, а величина  $\Gamma(p, p)$  вычисляется при помощи тождества Уорда по заданной функции  $\Sigma(p)$ . Это означает, что

$$\begin{aligned} \Gamma_\mu(p', p) &= -\frac{\partial}{\partial p^\mu} \Sigma(p) + \Gamma_\mu(p', p) - \Gamma_\mu(p, p) = \\ &= \gamma_\mu (Z_2^{-1} - 1) + \Gamma_\mu(p', p) - \Gamma_\mu(p, p) - Z_2^{-1} \frac{\partial}{\partial p^\mu} \Sigma^R(p). \end{aligned} \quad (7.49a)$$

Определим (бесконечную) константу перенормировки вершинной части  $Z_1$  из выражения

$$\Gamma_\mu(p', p) = \gamma_\mu (Z_1^{-1} - 1) + Z_1^{-1} \Gamma_\mu^R(p', p). \quad (7.49b)$$

При вычислении в первом порядке множитель  $Z_1^{-1}$ , стоящий перед перенормированной поправкой  $\Gamma_\mu^R$  к вершине, можно снова заменить единицей, а  $\Gamma_\mu^R(p', p)$  нормировано требованием, чтобы на массовой поверхности ( $p'^2 = p^2 = m^2$ ) и при нулевом переданном импульсе ее матричный элемент между дираковскими спинорами обращался в нуль, т. е.

$$\bar{u}(p') \Gamma_\mu^R(p', p) u(p) \Big|_{p^2=p'^2=m^2} = 0. \quad (7.50)$$

Очевидно, что разность  $\Gamma_\mu(p', p) - \Gamma_\mu(p, p)$  обращается в нуль, когда  $p = p'$ ; равен нулю и матричный элемент оператора  $(\partial/\partial p^\mu) \Sigma^R(p)$ , поскольку этот оператор пропорционален величине  $p - m$ . Сравнивая (7.49a) и (7.49b), приходим к заключению, что

$$Z_2 = Z_1 \quad (7.51a)$$

$$\text{и} \quad \Gamma_\mu^R(p', p) = Z_1 [\Gamma_\mu(p', p) - \Gamma_\mu(p, p)] - \frac{\partial}{\partial p^\mu} \Sigma^R(p). \quad (7.51b)$$

Тождество Уорда остается справедливым и в теории с массивными фотонами. Мы предоставляем читателю убедиться самому в том, что однопетлевой контрчлен вида

$$\delta \mathcal{L} \Big|_{\psi \bar{\psi}} = -e (Z_1 - 1) \bar{\psi} \not{A} \psi \quad (7.52)$$

действительно устраняет в первом порядке логарифмическую расходимость вершинной части.

Нам осталось вычислить  $\Gamma_\mu^R(p', p)$ . Ограничимся рассмотрением случая, когда  $p$  и  $p'$  находятся на массовой поверхности, а обкладками для  $\Gamma_\rho$  являются дираковские спиноры, т. е.  $\bar{u}(p') \Gamma_\rho(p', p) u(p)$ . Однако не будем выписывать спиноры в явном виде, а воспользуемся соотношением Гордона

$$\bar{u}(p') \gamma_\rho u(p) = \frac{1}{2m} \bar{u}(p') [(p + p')_\rho + i\sigma_{\rho\nu} (p' - p)^\nu] u(p). \quad (7.53)$$

Величина, которую мы собираемся вычислить, имеет калибровочно-инвариантную конечную часть. Действительно, в формуле (7.45) член, пропорциональный  $1-\lambda$ , включает интеграл от выражения

$$\mathcal{K} \frac{1}{p'-k-m+i\epsilon} \gamma_\rho \frac{1}{p-k-m+i\epsilon} \mathcal{K}.$$

В этом выражении можно заменить  $\mathcal{K}$  справа на  $\mathcal{K}-p+m$ , а слева — на  $\mathcal{K}-p'+m$  и таким образом найти величину, не зависящую от  $p$  и  $p'$ , которая в силу условия нормировки поглотится в  $Z_1^{-1}-1$ . Относительно величины  $Z_1^{-1}$  известно, что она зависит от выбора калибровки. Положим  $\lambda=1$  и запишем

$$\Gamma_\rho(p', p) = i(-i\epsilon)^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2-\mu^2+i\epsilon} \gamma_\sigma \frac{p'-k+m}{(p'-k)^2-m^2+i\epsilon} \gamma_\rho \times \\ \times \frac{p-k+m}{(p-k)^2-m^2+i\epsilon} \gamma^\sigma.$$

Используя уравнение массовой поверхности, числитель этого выражения можно переписать в виде

$$4 \left\{ \gamma \left[ (p'-k) \cdot (p-k) - \frac{k^2}{2} \right] + (p'+p-k)_\rho \mathcal{K} - mk_\rho \right\}.$$

Рассмотрим следующий вспомогательный интеграл

$$\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{ik \cdot z} \frac{1}{(k^2-\mu^2+i\epsilon)(k^2-2p' \cdot k+i\epsilon)(k^2-2p \cdot k+i\epsilon)} = \\ = \frac{1}{(4\pi)^3} \int_0^\infty \frac{d\alpha_1 d\alpha_2 d\alpha_3}{(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)^3} \exp \left\{ -i \left[ \alpha_1 \mu^2 + \frac{(z/2 - \alpha_2 p' - \alpha_3 p)^2}{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3} \right] \right\}.$$

Вводя в подынтегральном выражении множитель  $e^{ik \cdot z}$ , мы можем путем дифференцирования получить искомое выражение в числителе величины  $\Gamma_\rho$ . После симметризации по  $\alpha_2$  и  $\alpha_3$  находим следующее представление:

$$\Gamma_\rho(p', p) = \frac{\alpha}{i\pi} \int_0^\infty \frac{d\alpha_1 d\alpha_2 d\alpha_3}{(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)} \left( \gamma_\rho \left\{ (\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3) p \cdot p' - (\alpha_2+\alpha_3) \times \right. \right. \\ \times \left. \left. \left( \frac{p'+p}{2} \right) + \frac{1}{2(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)} [m^2(\alpha_2+\alpha_3)^2 - \alpha_2\alpha_3 q^2] \right\} + \right. \\ \left. + \frac{m}{2} (p'+p)_\rho \frac{\alpha_1(\alpha_2+\alpha_3)}{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3} \right) \times \\ \times \exp \left\{ \frac{i}{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3} [\alpha_2\alpha_3 q^2 - (\alpha_2+\alpha_3)^2 m^2 - \alpha_1(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3) \mu^2] \right\},$$

где мы положили  $q = p' - p$ . При интегрировании по параметру однородности величин  $\alpha_j$  обнаруживается предполагаемая логарифмическая особенность; ее можно вычистить с учетом условия нормировки (7.50). Заметим, что  $q^2 \leq 0$ , если  $p$  и  $p'$  лежат на

массовой поверхности. Выполнив поворот Вика  $\alpha_j \rightarrow \alpha_j/i$ , мы получим

$$\Gamma_\rho^R(p', p) = -\frac{\alpha}{\pi} \int_0^\infty d\alpha_1 d\alpha_2 d\alpha_3 \delta\left(1 - \sum_1^3 \alpha_j\right) \times \\ \times \left\{ \frac{\gamma_\rho \left\{ m^2 - q^2/2 - (\alpha_2 + \alpha_3)(2m^2 - q^2/2) + \frac{1}{2} [(\alpha_2 + \alpha_3)^2 m^2 - \alpha_2 \alpha_3 q^2] \right\}}{m^2 (\alpha_2 + \alpha_3)^2 + \alpha_1 \mu^2 - \alpha_2 \alpha_3 q^2} \right\} + \\ + (m/2) \frac{(p' + p)_0 \alpha_1 (\alpha_2 + \alpha_3)}{m^2 (\alpha_2 + \alpha_3)^2 + \alpha_1 \mu^2 - \alpha_2 \alpha_3 q^2} + \\ + \frac{1}{2} \gamma_\rho \ln [m^2 (\alpha_2 + \alpha_3)^2 + \alpha_1 \mu^2 - \alpha_2 \alpha_3 q^2] \Big\} - (p' = p, q = 0),$$

поскольку в соответствии с (7.51б) ренормировка в первом порядке вершинной функции на массовой поверхности равносильна вычитанию при  $q=0$ . Выделим теперь формфакторы  $F_1(q^2)$  и  $F_2(q^2)$ , определяемые соотношением

$$\Gamma_\rho^R(p', p) = \gamma_\rho F_1(q^2) + \frac{i}{2m} \sigma_{\nu\lambda} q^\nu F_2(q^2). \quad (7.54)$$

Разумеется, вклады в эти формфакторы вычисляются лишь с точностью до  $\alpha$ . Учет нулевого порядка добавляет к  $F_1$  единицу. Таким образом,

$$F_1(q^2) = -\frac{\alpha}{\pi} \int_0^\infty d\alpha_1 d\alpha_2 d\alpha_3 \delta\left(1 - \sum_{j=1}^3 \alpha_j\right) \times \\ \times \left\{ \frac{m^2 - q^2/2 - (\alpha_2 + \alpha_3)(2m^2 - q^2/2) + m^2 \left[ (\alpha_2 + \alpha_3) - \frac{1}{2} (\alpha_2 + \alpha_3)' \right] - \alpha_2 \alpha_3 (q^2/2)}{m^2 (\alpha_2 + \alpha_3)^2 + \alpha_1 \mu^2 - \alpha_2 \alpha_3 q^2} + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \ln [m^2 (\alpha_2 + \alpha_3)^2 + \alpha_1 \mu^2 - \alpha_2 \alpha_3 q^2] - (q^2 = 0) \right\}, \quad (7.55)$$

$$F_2(q^2) = \frac{\alpha}{\pi} \int_0^\infty d\alpha_1 d\alpha_2 d\alpha_3 \delta\left(1 - \sum_{j=1}^3 \alpha_j\right) \frac{m^2 \alpha_1 (\alpha_2 + \alpha_3)}{m^2 (\alpha_2 + \alpha_3)^2 + \alpha_1 \mu^2 - \alpha_2 \alpha_3 q^2}. \quad (7.56)$$

Переданный импульс можно параметризовать с помощью гиперболического угла  $\theta$  следующим образом:

$$p \cdot p' = m^2 \operatorname{ch} \theta, \quad q^2 = -4m^2 \operatorname{sh}^2 \frac{\theta}{2}. \quad (7.57)$$

Проще всего вычислить магнитный формфактор  $F_2$ . В рассматриваемом порядке он не содержит инфракрасную расходимость, и мы можем положить  $\mu^2 = 0$ . Интегрирование по  $\alpha_1$  дает

$$F_2(q^2) = \frac{\alpha}{\pi} \int_0^1 d\alpha_2 d\alpha_3 \delta(1 - \alpha_2 - \alpha_3) \frac{\alpha_2 + \alpha_3 - (\alpha_2 + \alpha_3)^2}{\alpha_2^2 + \alpha_3^2 + 2\alpha_2 \alpha_3 \operatorname{ch} \theta}.$$

Вводя новый параметр однородности, это выражение можно переписать в виде

$$\begin{aligned}
 F_2(q^2) &= \frac{\alpha}{\pi} \int_0^1 d\alpha_2 d\alpha_3 \delta(1 - \alpha_2 - \alpha_3) \frac{1}{\alpha_2^2 + \alpha_3^2 + 2\alpha_2\alpha_3 \operatorname{ch} \theta} \int_0^1 dx (1-x) = \\
 &= \frac{\alpha}{2\pi} \int_0^1 d\beta \frac{1}{\beta^2 + (1-\beta)^2 + 2\beta(1-\beta) \operatorname{ch} \theta} = \\
 &= \frac{\alpha}{2\pi} \int_0^1 \frac{d\beta}{\beta^2 \{1 + [(1-\beta)/\beta] e^\theta\} \{1 + [(1-\beta)/\beta] e^{-\theta}\}}.
 \end{aligned}$$

Последний интеграл нетрудно вычислить, переходя к переменной интегрирования  $(1-\beta)/\beta$ . Таким образом,

$$F_2(q^2) = \frac{\alpha}{2\pi} \frac{\theta}{\operatorname{sh} \theta}. \quad (7.58)$$

В частном случае, когда  $q^2 \rightarrow 0$  и  $\theta \rightarrow 0$ ,

$$F_2(0) = \frac{\alpha}{2\pi}. \quad (7.59)$$

Займемся теперь вычислением  $F_1$ , учитывая наличие инфракрасной расходимости. После интегрирования по  $\alpha_1$  находим, что  $F_1$  можно записать как сумму четырех членов:

$$F_1(q^2) = \sum_{j=1}^4 \mathcal{F}_j + \text{const},$$

где постоянная выбирается из условия, чтобы  $F_1(0) = 0$ . Вычислим  $\mathcal{F}_j$  в пределе малых  $\mu^2$ . Запишем сначала выражение для  $\mathcal{F}_1$ :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}_1 &= -\frac{\alpha}{\pi} \int_0^1 d\alpha_2 \int_0^{1-\alpha_2} d\alpha_3 \frac{\operatorname{ch} \theta}{\alpha_2^2 + \alpha_3^2 + 2\alpha_2\alpha_3 \operatorname{ch} \theta + (\mu^2/m^2)(1-\alpha_2-\alpha_3)} = \\
 &= -\frac{\alpha}{\pi} \operatorname{ch} \theta \int_0^1 d\beta \int_0^1 dx \times \\
 &\quad \times \frac{x}{x^2 [\beta^2 + (1-\beta)^2 + 2\beta(1-\beta) \operatorname{ch} \theta] + (\mu^2/m^2)(1-x)} = \\
 &= -\frac{\alpha}{2\pi} \operatorname{ch} \theta \int_0^1 d\beta \frac{\ln [\beta^2 + (1-\beta)^2 + 2\beta(1-\beta) \operatorname{ch} \theta] - \ln (\mu^2/m^2)}{\beta^2 + (1-\beta)^2 + 2\beta(1-\beta) \operatorname{ch} \theta}.
 \end{aligned}$$

Вводя с помощью соотношения  $1 - 2\beta = \operatorname{th} \varphi / \operatorname{th} (\theta/2)$  новую пере-

менную  $\varphi$ , преобразуем интеграл к виду

$$\mathcal{F}_1 = \frac{\alpha}{\pi} \theta \operatorname{cth} \theta \ln \frac{\mu}{m} - \frac{2\alpha}{m} \operatorname{cth} \theta \int_0^{\theta/2} d\varphi \varphi \operatorname{th} \varphi.$$

Остальные  $\mathcal{F}_j$  имеют вид

$$\mathcal{F}_2 = \frac{\alpha}{\pi} \operatorname{ch} \theta \int_0^1 d\alpha_2 \int_0^{1-\alpha_2} d\alpha_3 \frac{\alpha_2 + \alpha_3}{\alpha_2^2 + \alpha_3^2 + 2\alpha_2\alpha_3 \operatorname{ch} \theta} = \frac{\alpha}{\pi} \theta \operatorname{cth} \theta,$$

$$\mathcal{F}_3 = \frac{2\alpha}{\pi} (1 - \operatorname{ch} \theta) \int_0^1 d\alpha_2 \int_0^{1-\alpha_2} d\alpha_3 \frac{\alpha_2\alpha_3}{\alpha_2^2 + \alpha_3^2 + 2\alpha_2\alpha_3 \operatorname{ch} \theta} = \frac{\alpha}{2\pi} \left( \frac{\theta}{\operatorname{sh} \theta} - 1 \right),$$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_4 &= -\frac{\alpha}{2\pi} \int_0^1 d\alpha_2 \int_0^{1-\alpha_2} d\alpha_3 \ln \left[ (\alpha_2 + \alpha_3)^2 + 4\alpha_2\alpha_3 \operatorname{sh}^2 \frac{\theta}{2} \right] = \\ &= -\frac{\alpha}{2\pi} \frac{\theta/2}{\operatorname{th}(\theta/2)} + \operatorname{const}. \end{aligned}$$

Учитывая нормировку, получаем окончательное выражение для  $F_1$ :

$$F_1(q^2) = \frac{\alpha}{\pi} \left[ \left( \ln \frac{\mu}{m} + 1 \right) (\theta \operatorname{cth} \theta - 1) - 2 \operatorname{cth} \theta \int_0^{\theta/2} d\varphi \varphi \operatorname{th} \varphi - \frac{\theta}{4} \operatorname{th} \frac{\theta}{2} \right]. \quad (7.60)$$

В окрестности точки  $q^2 = 0$  мы имеем  $q^2/m^2 \approx -\theta^2$ , так что главный член по  $q^2$  можно записать в виде

$$F_1(q^2)_{q^2 \rightarrow 0} \approx \frac{\alpha q^2}{3\pi m^2} \left( \ln \frac{m}{\mu} - \frac{3}{8} \right). \quad (7.61)$$

Это означает, что полное выражение ренормированной вершинной функции, стоящей между спинорными обкладками, имеет вид

$$\begin{aligned} \Lambda_p^R &= \gamma_p \left[ 1 + \frac{\alpha q^2}{3\pi m^2} \left( \ln \frac{m}{\mu} - \frac{3}{8} \right) \right] + \frac{i}{2m} \sigma_{\rho\nu} q^\nu \frac{\alpha}{2\pi} + \dots = \\ &= \frac{(p+p')_\rho}{2m} \left[ 1 + \frac{\alpha q^2}{3\pi m^2} \left( \ln \frac{m}{\mu} - \frac{3}{8} \right) \right] + \frac{i}{2m} \sigma_{\rho\nu} q^\nu \left( 1 + \frac{\alpha}{2\pi} \right) + \dots \end{aligned} \quad (7.62)$$

С помощью аналитического продолжения в область комплексных значений  $\theta$  получаем  $\Gamma_p^R$  для положительных значений  $q^2$ . Полагая, например,  $\theta = i\psi$ , находим выражение, справедливое для значений  $q^2$ , лежащих в области  $0 - 4m^2$ , в котором  $F_1$  и  $F_2$



остаются вещественными в рассматриваемом порядке:

$$F_1 = \frac{\alpha}{\pi} \left[ \left( \ln \frac{\mu}{m} + 1 \right) (\psi \operatorname{ctg} \psi - 1) + 2 \operatorname{ctg} \psi \int_0^{\psi/2} d\varphi \operatorname{tg} \varphi + \frac{\psi}{4} \operatorname{tg} \frac{\psi}{2} \right],$$

$$F_2 = \frac{\alpha}{2\pi} \frac{\psi}{\sin \psi}, \quad (7.63)$$

$$\text{где} \quad q^2 = 4m^2 \sin^2 \frac{\psi}{2}, \quad 0 \leq \psi \leq \pi. \quad (7.64)$$

Предлагаем читателю полезное упражнение, а именно продолжить эти выражения в область значений  $q^2$ , лежащую выше порога  $4m^2$ , и дать интерпретацию мнимой части формфакторов. Каково их поведение при больших  $|q^2|$ ?

#### 7.1.4. Выводы

Опишем здесь кратко, чего мы достигли, устранив ультрафиолетовые расходимости. Мы ввели три расходящиеся константы:

1.  $Z_1 = Z_2$  — калибровочно-неинвариантные и имеющие инфракрасную расходимость, но равные друг другу в силу тождества Уорда.
2.  $Z_3$  и  $\delta m$  — калибровочно-инвариантные и свободные от инфракрасных расходимостей. Мы вычислили  $Z_1 - 1 = Z_2 - 1$ ,  $Z_3 - 1$  и  $\delta m$  в первом порядке по  $\hbar$  таким образом, что лагранжиан

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & -\frac{1}{4} F^2 + \frac{\hat{\mu}^2}{2} A^2 - \frac{\lambda}{2} (\partial \cdot A)^2 + \frac{i}{2} \bar{\psi} \overleftrightarrow{\partial} \psi - m \bar{\psi} \psi - e \bar{\psi} A \psi - \\ & - \frac{1}{4} (Z_3 - 1) F^2 + (Z_2 - 1) \left( \frac{i}{2} \bar{\psi} \overleftrightarrow{\partial} \psi - m \bar{\psi} \psi \right) + Z_2 \delta m \bar{\psi} \psi - \\ & - e (Z_1 - 1) \bar{\psi} A \psi \end{aligned} \quad (7.65)$$

будет приводить в том же порядке к конечным перенормированным двух- и трехточечным функциям. Мы увидим, что то же самое справедливо для функций Грина более высоких порядков.

Массовый член фотона обозначался как  $(\hat{\mu}^2/2) A^2$ . Мы отмечали, что в теории массивных частиц радиационные поправки смещают истинное положение полюса на величину, связанную с константой перенормировки  $Z_3$  волновой функции, поскольку тензор поляризации вакуума имеет только одну общую расходимость. Проще определить соответствующий размерный параметр как взятый со знаком минус коэффициент при члене  $g_{\rho\sigma}$  в обратном пропагаторе при нулевом импульсе:

$$\hat{\mu}^2 = \frac{\mu_0^2}{1 + \omega(0)} = Z_3 \mu_0^2, \quad (7.66)$$

где  $\mu_0$  — (бесконечная) голая масса. Следовательно,  $\hat{\mu}^2 A^2 = Z_3 \mu_0^2 A^2$ . В теории массивных векторных бозонов реальная физическая масса  $\mu$  связана с  $\hat{\mu}$  конечным перенормировочным фактором.

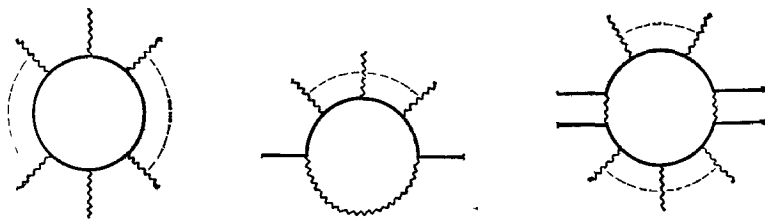


РИС. 7.13. Примеры однопетлевых диаграмм в отсутствие внешних фермионных линий, с двумя и четырьмя внешними фермионными линиями.

Сейчас необходимо убедиться в том, что функции Грина более высоких порядков являются конечными, поскольку мы уже исчерпали свободу выбора, определив измеримые величины — массу, константу связи и вычеты в полюсах. Этот анализ представляет интерес и вследствие того, что имеется еще одна величина, опасная с точки зрения расходимостей, а именно амплитуда фотон-фотонного рассеяния. Если бы мы рассматривали бесспиновые заряженные бозоны, то для осуществления перенормировки понадобилась бы новая физическая константа, отсутствующая, очевидно, в приближении борновских диаграмм. В этом случае нам пришлось бы задать нормировку амплитуды упругого рассеяния заряженных частиц.

Механизм, ответственный за ультрафиолетовые расходимости в однопетлевых интегралах, можно описать следующим образом. Пусть  $k$  — это импульс, протекающий через петлю, нас интересует поведение подынтегрального выражения в фейнмановском интеграле при больших  $k$ . Каждый фермионный пропагатор в нем дает множитель  $|k|^{-1}$ , а каждый бозонный пропагатор — множитель  $|k|^{-2}$ . Вершинные части, в которые входят  $\gamma_\mu$ , не зависят от  $k$ . Сильносвязанные функции классифицируются по числу внешних фермионных линий: нуль, два, четыре и т. д. Типичные диаграммы изображены на рис. 7.13.

Если обозначить через  $\Lambda$  параметр ультрафиолетового обрезания, то интеграл будет вести себя как

$$\Lambda^{4-I_F-2I_B}, \quad 4-I_F-2I_B > 0, \\ \ln \Lambda, \quad 4-I_F-2I_B = 0,$$

где  $I_F$  ( $I_B$ ) — число фермионных (бозонных) линий в петле. Говорят, что интеграл является условно расходящимся, если

$$\omega(G) = 4 - I_F - 2I_B \geq 0, \quad (7.67)$$

где  $\omega(G)$  называется условной степенью расходимости<sup>1)</sup>. В электро-

<sup>1)</sup> Для величины  $\omega(G)$  нет общепринятого названия. Авторы пользуются для нее термином *superficial degree of divergence*. В учебнике Н. Н. Боголюбова и Д. В. Ширкова эта величина называется индексом диаграммы Вели-

динамике кинематика несколько усложняет дело. Мы уже встречали примеры, такие, как в случае поляризации вакуума ( $I_F = 0, I_B = 2$ ), для которых рассмотренные выше правила подсчета, казалось бы, указывают на квадратичную расходимость  $\omega = 2$ ; но сохранение тока, позволяющее выделить фактор  $k^2 g^{00} - k^0 k^0$ , оставляет лишь логарифмическую расходимость. Аналогично при рассмотрении собственной энергии электрона имеем  $\omega = 1$ , но опять-таки то, что (как было найдено)  $\Sigma$  пропорциональна величинам  $m$  и  $\rho$ , привело к уменьшению степени расходимости на единицу. Правило подсчета расходимости вершинной функции является корректным, и  $\omega = 0$ . Но даже в этом случае только один формфактор оказался расходящимся. Мы можем выразить  $\omega(G)$  через (четное) число  $E_F$  внешних фермионных линий и число  $E_B$  внешних бозонных линий, используя то обстоятельство, что в каждой вершине сходятся две фермионные линии и одна бозонная. Вдоль петли число вершин  $V$  равно числу внутренних пропагаторов:

$$V = I_F + I_B,$$



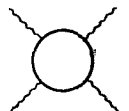

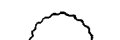
и в соответствии с предыдущим утверждением

$$2V = 2I_F + E_B, \quad V = 2I_B + E_B,$$

так как концами каждого пропагатора являются две вершины. Исключая  $V, I_F$  и  $I_B$ , находим

$$\omega = 4 - \frac{3}{2} E_F - E_B. \quad (7.68)$$

В результате получаем следующую таблицу:

$E_F$	$E_B$		Условная степень расходимости	Эффективная степень расходимости
0	2		2	0
0	3	<i>Исключается инвариантностью относительно зарядового сопряжения</i>		
0	4		0	
2	0		1	0
2	1		0	0

чина  $\omega(G)$  совпадает с условной степенью роста по импульсу (см. главу 8 в г. 2 настоящей книги). — Прим. ред.

С ростом числа внешних линий в диаграмме сходимость интеграла все более улучшается и результаты, приведенные в таблице (7.69), показывают, что мы исчерпали все возможности, за исключением амплитуды фотон-фотонного рассеяния. Однако последняя в действительности сходится опять-таки в силу калибровочной инвариантности, которая вносит определенные ограничения в кинематическую структуру амплитуды этого процесса, в результате чего мы получаем интеграл, обладающий хорошим поведением. Это следует из проведенного нами ранее рассмотрения эффективного лагранжиана Эйлера—Гейзенберга (см. разд. 4.3.4) и будет подробно обсуждаться ниже (см. разд. 7.3.1).

Таким образом, в первом порядке по  $\hbar$  мы имеем конечную теорию, которая может предсказывать определенные результаты и удовлетворяет в рамках теории возмущений общим принципам унитарности и причинности. Наличие контрчленов в такой теории эквивалентно вычитаниям в дисперсионных соотношениях, т. е. они не изменяют ни аналитических свойств, ни поведения на разрезах. Другое подтверждение этому следует из того факта, что мы используем локальный эрмитов лагранжиан.

Вернемся теперь к выражению (7.65) и перегруппируем в нем члены следующим образом:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} Z_3 F^2 + \frac{1}{2} \mu_0^2 Z_3 A^2 - \frac{\lambda}{2} (\partial \cdot A)^2 + Z_2 \left[ \frac{i}{2} \bar{\psi} \not{\partial} \psi - (m - \delta m) \bar{\psi} \psi \right] - Z_1 e \bar{\psi} A \psi. \quad (7.70)$$

Это выражение допускает естественную интерпретацию. Фигурирующие здесь поля  $\psi$ ,  $\bar{\psi}$  и  $A$  являются перенормированными полями, которым отвечают пропагаторы с вычетом, равным единице в одночастичном полюсе. Определим следующим образом перенормированные поля  $\psi_0$ ,  $\bar{\psi}_0$  и  $A_0$  и зависящие от параметра обрезания голые параметры  $\mu_0^2$ ,  $m_0$ ,  $e_0$ :

$$\begin{aligned} \psi_0 &= Z_2^{1/2}(\Lambda) \psi, & m_0 &= m - \delta m(\Lambda), \\ \bar{\psi}_0 &= Z_2^{1/2}(\Lambda) \bar{\psi}, & \mu_0^2 &= Z_3^{-1}(\Lambda) \hat{\mu}^2, \\ A_0 &= Z_3^{1/2}(\Lambda) A, & e_0 &= Z_1(\Lambda) Z_2^{-1}(\Lambda) Z_3^{-1/2}(\Lambda) e = Z_3^{-1/2}(\Lambda) e. \end{aligned} \quad (7.71)$$

Лагранжиан (7.70), записанный в терминах голых величин (7.71), имеет вид, аналогичный исходному лагранжиану:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_0^2 + \frac{\mu_0^2}{2} A_0^2 - \frac{\lambda}{2} Z_3^{-1}(\Lambda) (\partial \cdot A_0)^2 + \frac{i}{2} \bar{\psi}_0 \not{\partial} \psi_0 - m_0 \bar{\psi}_0 \psi_0 - e_0 \bar{\psi}_0 A_0 \psi_0. \quad (7.72)$$

Конечное число контрчленов различных типов обеспечивает не только сходимость каждого члена ряда теории возмущений (свой-

ство, которое будет сохраняться во всех порядках по  $\hbar$ , в чем мы убедимся далее), но и сохранение самой структуры теории при перенормировке.

Подчеркнем еще раз роль тождества Уорда, приводящего к равенству

$$e_0 A_0 = e A, \quad (7.73)$$

благодаря которому имеют смысл масштаб, вносимый в теорию электромагнитными взаимодействиями, и принцип минимальной связи.

Следует также заметить, что введение контрчленов не затрагивает величин  $A^2$  и  $(\partial \cdot A)^2$ , что является особым свойством электродинамики. Таким же способом, каким вводилась голая «масса»  $\mu_0$ , можно определить голый параметр  $\lambda_0$ , а именно

$$\lambda_0 = Z_3^{-1}(\Lambda) \lambda.$$

Лагранжиан (7.72) приводит к перенормированным функциям Грина, определяемым следующим образом:

$$G_0(p_1, \dots, p_{2n}, k_1, \dots, k_l; \mu_0, m_0, e_0, \lambda_0, \Lambda) = \\ = Z_2^n(\Lambda) Z_3^{l/2}(\Lambda) G_R(p_1, \dots, p_{2n}, k_1, \dots, k_l; \mu, m, e, \lambda). \quad (7.74)$$

Здесь  $p_1, \dots, p_{2n}(k_1, \dots, k_l)$  обозначают внешние фермионные (фотонные) импульсы. Как и выше, эта формула справедлива в рамках разложения по  $\hbar$ , однако это доказано нами пока до порядка  $\hbar^1$ . Соотношения (7.71) и (7.74) оправдывают название «мультипликативная перенормировка».

В рамках теории возмущений константы перенормировки волновой функции  $Z_2^{1/2}$  и  $Z_3^{1/2}$  оказываются бесконечными. Это показывает, что по крайней мере в данном смысле одна из рабочих гипотез настоящего подхода, а именно каноническая эквивалентность свободной теории и теории взаимодействующих полей, математически не вполне обоснована. Нам удалось, однако, преодолеть эти трудности, и позже мы обнаружим, что рассматриваемые явно бесконечные величины имеют интересный физический смысл.

В гл. 8 (см. т. 2 настоящей книги) мы обобщим этот подход на все порядки теории возмущений.

## 7.2. РАДИАЦИОННЫЕ ПОПРАВКИ

### К ВЗАИМОДЕЙСТВИЮ С ВНЕШНИМ ПОЛЕМ

Оставшаяся часть настоящей главы посвящена примерам расчета радиационных поправок. Одна из наших целей — выяснить смысл инфракрасных расходимостей, обусловленных дальнедействующими электромагнитными силами. Этот обзор имеет лишь ознакомительные цели и не претендует на полноту изложения.

### 7.2.1. Эффективное взаимодействие и аномальный магнитный момент

В гл 2 и 4 мы уже изучили различные аспекты взаимодействия заряженных частиц с  $c$ -числовыми внешними полями. Здесь мы рассмотрим квантовые поправки, возникающие, когда мы подставляем вместо квантового поля  $A_q$  сумму  $A_i + A_c$ , где  $A_c$  — классическое поле

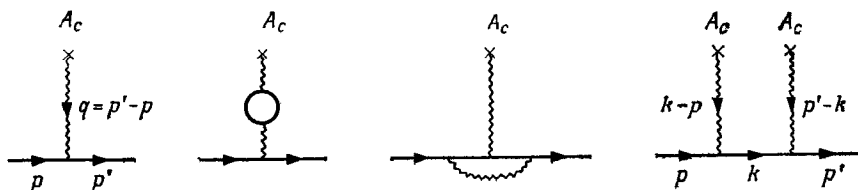


РИС. 7.14. Вклады диаграмм низшего порядка во взаимодействие с внешним полем.

В первом порядке по  $A_c$  получим эффективное взаимодействие, которое представляется первыми тремя диаграммами на рис. 7.14, включающими однопетлевые квантовые поправки. Это означает, что мы заменили элементарное взаимодействие  $eA_c^{\rho}\gamma_{\rho}$  на взаимодействие вида

$$eA_c^{\rho}\gamma_{\rho} \rightarrow eA_c^{\rho} (\gamma_{\rho} + \Gamma_{\rho} + \bar{\omega}_{\rho\nu} G^{\nu\sigma} \gamma_{\sigma}); \quad (7.75)$$

здесь  $\Gamma$  и  $\bar{\omega}$  — величины, которые вычислены в разд. 7.1, а  $G$  — пропагатор свободного фотона. Мы предположили, что электроны находятся на массовой поверхности, и, следовательно, пренебрегли собственными энергетическими вставками во внешние линии, которые по предположению включены в корректное определение массы и нормировки состояний.

В случае малых передаваемых импульсов  $q = p' - p$ , удерживая лишь главные члены, при  $\mu \rightarrow 0$  получаем

$$eA_c^{\rho} \left\{ \gamma_{\rho} \left[ 1 + \frac{\alpha q^2}{3\pi m^2} \left( \ln \frac{m}{\mu} - \frac{3}{8} - \frac{1}{5} \right) \right] + \frac{i}{2m} \frac{\alpha}{2\pi} \sigma_{\rho\nu} q^{\nu} \right\}. \quad (7.76)$$

При выводе (7.76) мы учли то обстоятельство, что калибровочно-инвариантные члены, входящие в  $G^{\nu\sigma}$ , пропорциональные  $q^{\lambda} q^{\sigma}$ , дают нулевой вклад при его свертке с тензором поляризации вакуума. Кроме того, член, содержащий  $q = p' - p$ , обращается в нуль на массовой поверхности. Следовательно, оставшееся выражение является калибровочно-инвариантным в том смысле, что если  $A_c^{\rho}$  заменить на  $A_c^{\rho} + q^{\rho} f(q)$ , то дополнительный член обращается в нуль на массовой поверхности.

Квазистатический предел  $q \rightarrow 0$  допускает простую интерпретацию. В конфигурационном пространстве переданный импульс  $q$

можно заменить дифференциальным оператором  $i\partial$ , действующим на  $A_c$ . Используя тождество Гордона, получаем два эквивалентных выражения для гамильтониана взаимодействия заряженной спиновой частицы с медленно меняющимся (в пространстве и времени) внешним полем:

$$\begin{aligned} \Delta H &\approx e \int d^3x \left\{ \bar{\psi}(x) \gamma_0 \psi(x) \left[ 1 - \frac{\alpha}{3\pi m^2} \left( \ln \frac{m}{\mu} - \frac{3}{8} - \frac{1}{5} \right) \square \right] A_c^0(x) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\alpha}{2\pi} \frac{1}{2m} \bar{\psi}(x) \sigma_{\nu\rho} \psi(x) \partial^\nu A_c^\rho(x) \right\} \approx \\ &\approx e \int d^3x \left\{ \frac{i}{2m} \bar{\psi}(x) \not{\partial} \psi(x) \left[ 1 - \frac{\alpha}{3\pi m^2} \left( \ln \frac{m}{\mu} - \frac{3}{8} - \frac{1}{5} \right) \square \right] A_c^0(x) + \right. \\ &\quad \left. + \left( 1 + \frac{\alpha}{2\pi} \right) \frac{1}{4m} \bar{\psi}(x) \sigma_{\nu\rho} \psi(x) F_c^{\nu\rho}(x) \right\}. \end{aligned} \quad (7.77)$$

Во второй формулировке этого выражения первый член соответствует току конвекции, аналогичному току скалярных частиц, и его взаимодействие с  $A_c$  сопровождается появлением инфракрасных расходимостей. Второй член имеет простую интерпретацию. В предельном случае постоянного поля  $F_c$  этот член сводится к эффективной энергии магнитного диполя. Предположим, что  $F$  является постоянным магнитным полем  $F^{12} = -B^3$ ,  $F^{23} = -B^1$ ,  $F^{31} = -B^2$ ,  $\sigma_{12} = \sigma_3$  и т. д. При этом энергия магнитного диполя запишется в виде

$$-\mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\mu} = -\mathbf{B} \cdot \left[ \frac{e}{2m} \left( 1 + \frac{\alpha}{2\pi} \right) 2 \int d^3x \bar{\psi}(x) \frac{\boldsymbol{\sigma}}{2} \psi(x) \right]. \quad (7.78)$$

При рассмотрении уравнения Дирака мы нашли гиромагнитное отношение, равное 2, что дает следующее значение магнитного дипольного момента:

$$\frac{e}{2m} \boldsymbol{\sigma} = 2 \frac{e}{2m} \frac{\boldsymbol{\sigma}}{2}.$$

Мы видим, что в первом порядке по  $\hbar$  квантовые поправки изменяют это гиромагнитное отношение так, что оно принимает вид  $g=2(1+a)$ , где  $a = \alpha/2\pi$  — аномальный магнитный момент. Этот результат был впервые получен Швингером в 1948 г. и затем подтвержден многочисленными точными экспериментами, которые позволяют проверить поправки высокого порядка.

Для электрона аномальный магнитный момент в низшем порядке не зависит от его массы. Поэтому те же самые результаты применимы столь же хорошо и к любой элементарной частице со спином  $1/2$ , например к мюону. Полная теория требует рассмотрения в более высоких порядках всех заряженных частиц, взаимодействующих с электромагнитным полем. Это приводит к различным аномальным поправкам, что обусловлено различием в массах. В настоящее время вычисления выполнены до третьего порядка (три петли). Они дают следующий

результат:

$$a_e^{\text{теор}} = \frac{1}{2} \frac{\alpha}{\pi} - 0,328\,478\,445 \left( \frac{\alpha}{\pi} \right)^2 + 1,183\,(11) \left( \frac{\alpha}{\pi} \right)^3 = \\ = 1\,159\,652\,359\,(282) \cdot 10^{-12}.$$

(Числа, заключенные в скобки, указывают погрешности.) Последние измерения выполнены с такой же точностью и, возможно, будут улучшены в близком будущем

$$a_e^{\text{эксп}} = 1\,159\,652\,410\,(200) \cdot 10^{-12}.$$

Для сравнения со столь точными экспериментальными данными мы должны теоретически вычислить член  $(\alpha/\pi)^3$  с более высокой точностью и получить оценку вклада следующего порядка [поскольку  $(\alpha/\pi)^4 \sim 29 \cdot 10^{-12}$ ], который описывается 891 диаграммой Фейнмана! Малые вклады дают поправки к виртуальному фотонному пропагатору отвечающие вставкам мюонных петель ( $\sim 2 \cdot 10^{-12}$ ) а также поправки связанные с учетом адронных ( $\sim 1,4 \cdot 10^{-12}$ ) и слабых ( $\sim 0,05 \cdot 10^{-12}$ ) взаимодействий. Измерение аномального магнитного момента электрона станет в ближайшем будущем по видимому, одним из самых прецизионных способов получения точного значения постоянной тонкой структуры  $\alpha$  благодаря уникальному соединению теоретического и экспериментального искусства

При рассмотрении аномального магнитного момента мюона неопределенность адронных поправок устанавливает ограничение на точность теоретических предсказаний. Самые современные измерения дают

$$a_\mu^{\text{эксп}} = 1\,165\,922\,(9) \cdot 10^{-9}.$$

При этом чисто электродинамический вклад равен

$$a_\mu^{\text{эл}} = \frac{1}{2} \frac{\alpha}{\pi} + 0,765\,782 \left( \frac{\alpha}{\pi} \right)^2 + 24,45(0,06) \left( \frac{\alpha}{\pi} \right)^3 + 128,3(71,4) \left( \frac{\alpha}{\pi} \right)^4 = \\ = 1\,165\,851,8(2,4) \cdot 10^{-9},$$

где член порядка  $\alpha^4$  является оценкой, учитывающей большую величину отношения  $m_\mu/m_e$ , а адронная поправка равна

$$a_\mu^{\text{адр}} = 66,7(9,4) \cdot 10^{-9}$$

Теория предсказывает следующее значение аномального магнитного момента:

$$a_\mu^{\text{теор}} = 1\,165\,919(10) \cdot 10^{-9},$$

что находится в разумном согласии с экспериментом. Ожидается, что эффекты слабого взаимодействия дают вклад порядка  $a_\mu^{\text{слаб}} \sim 2 \cdot 10^{-9}$

В эффективном гамильтониане (7.77) первый член из-за его инфракрасной расходимости вызывает беспокойство. Эта расходимость обусловлена стремлением иметь изолированный полюс в соответствующей функции Грина. Однако такое состояние нельзя отделить от состояний, включающих произвольное число мягких фотонов. Последние рождаются всегда, когда происходит изменение скорости заряженной частицы, независимо от того, сколь малым может быть такое изменение. Следовательно, если мы обсуждаем виртуальные электромагнитные эффекты, содержащиеся в гамильтониане (7.77), нам необходимо включить в рассмотрение



также процессы с реальным испусканием или поглощением мягких фотонов во внешнем поле. Фиктивная масса фотона исчезает из конечного результата при расчете, корректном с физической точки зрения; она заменяется экспериментальной погрешностью.

### 7.2.2. Радиационные поправки к кулоновскому рассеянию

В качестве примера изучим кулоновское рассеяние на ядре с таким  $Z$ , что величину  $Z\alpha$  можно считать малым параметром. Атомными поправками (эффектом экранирования в первом приближении) мы пренебрежем. Используя выражение (7.75) для эффективного взаимодействия, вычислим все поправки с точностью до  $\alpha^3$  к сечению рассеяния Мотта неполяризованных электронов [см. выражение (2.130)]. Если  $E$  — энергия,  $p$  — величина 3-импульса, а  $\beta = p/E$  — скорость электрона, то сечение рассеяния на угол  $\theta$  записывается в виде

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{Мотт}} = \frac{Z^2\alpha^2}{4p^2\beta^2 \sin^4(\theta/2)} \left(1 - \beta^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}\right). \quad (7.79)$$

Поскольку первая поправка будет иметь порядок  $Z^2\alpha^3$ , в нее необходимо включить второе борновское приближение, интерференция которого с главным членом будет давать вклад порядка  $Z^3\alpha^3$ . При условии что величина  $Z$  достаточно мала, этот вклад соизмерим с эффектом перенормировки вершины и поляризации вакуума. Одна из причин, побуждающих предпринимать столь подробные вычисления, состоит в том, что они позволяют нам изучить другие аспекты инфракрасных особенностей, связанные с дальнедействующим характером кулоновских сил. Последний приводит к бесконечным фазам рассеяния. Чтобы предотвратить это, можно ввести фактор экранирования, который в последовательной теории должен быть связан с фиктивной массой фотона  $\mu$ . Для того чтобы показать, что в сечении рассеяния такая инфракрасная расходимость сокращается, введем независимую длину экранирования  $\sigma$  и отдельно изучим предел  $\sigma \rightarrow 0$ . На рис. 7.14 приведены диаграммы, дающие вклад в амплитуду рассеяния в случае, когда внешний потенциал  $A_c$  описывает экранированное кулоновское взаимодействие:

$$A_c = 0, \quad A_c^0(x) = -\frac{Ze e^{-\sigma r}}{4\pi r} = Ze \int \frac{d^4q}{(2\pi)^3} \frac{\delta(q_0)}{q^2 - \sigma^2} e^{i q \cdot x}.$$

Первые три диаграммы (будем отмечать их индексами 1, 2 и 3)

на рис. 7.14 дают вклад

$$S_{123} = -iZe^2 (2\pi) \delta(p_0 - p'_0) \frac{1}{q^2 - \sigma^2} \bar{u}(p') \gamma^0 \left\{ 1 + \frac{\alpha}{\pi} \left[ \left( 1 + \ln \frac{\mu}{m} \right) \times \right. \right. \\ \times (2\varphi \operatorname{cth} 2\varphi - 1) - 2 \operatorname{cth} 2\varphi \int_0^\varphi d\varphi' \varphi' \operatorname{th} \varphi' - \frac{1}{2} \varphi \operatorname{th} \varphi + \\ \left. \left. + \left( 1 - \frac{\operatorname{cth}^2 \varphi}{3} \right) (\varphi \operatorname{cth} \varphi - 1) + \frac{1}{9} \right] - \frac{q}{2m} \frac{\alpha}{\pi} \frac{\varphi}{\operatorname{sh} 2\varphi} \right\} u(p), \quad (7.80)$$

причем  $p \cdot p' = m^2 \operatorname{ch} 2\varphi$ , а  $q = p' - p$ . Четвертая диаграмма на рис. 7.14 добавляет величину

$$S_4 = (-iZe)^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \bar{u}(p') \left[ \frac{2\pi\delta(p'_0 - k_0)}{(p' - k)^2 - \sigma^2} e\gamma^0 \frac{i}{k - m + i\varepsilon} e\gamma^0 \times \right. \\ \left. \times \frac{2\pi\delta(k^0 - p^0)}{(k - p)^2 - \sigma^2} \right] u(p).$$

Из-за кинематических связей имеем  $p^0 = p'^0 = E$  и  $|\mathbf{p}| = |\mathbf{p}'|$ . Положим

$$I_1 = \int d^3 k \frac{1}{[(p' - k)^2 + \sigma^2][(p - k)^2 + \sigma^2](p^2 - k^2 + i\varepsilon)}, \\ \frac{1}{2}(p + p') I_2 = \int d^3 k \frac{k}{[(p' - k)^2 + \sigma^2][(p - k)^2 + \sigma^2](p^2 - k^2 + i\varepsilon)}.$$

При этом  $S_4$  записывается в виде

$$S_4 = -2i \frac{Z^2 \alpha^2}{\pi} 2\pi\delta(p'_0 - p_0) \bar{u}(p') [m(I_1 - I_2) + \gamma^0 E(I_1 + I_2)] u(p). \quad (7.81)$$

Разумеется, нас интересуют интегралы  $I_1$  и  $I_2$  лишь в пределе малых значений  $\sigma$ . Тождество Фейнмана

$$\frac{1}{(a+\lambda)(b+\lambda)} = -\frac{\partial}{\partial \lambda} \int_0^1 d\beta \frac{1}{[\beta a + (1-\beta)b + \lambda]}$$

позволяет записать

$$I_1 = -\int_0^1 d\beta \frac{\partial}{2M \partial M} \int d^3 k \frac{1}{(p^2 - k^2 + i\varepsilon)[(k - \mathbf{P})^2 + M^2]},$$

где  $M^2 = \sigma^2 + 4\beta(1-\beta)p^2 \sin^2(\theta/2)$ , а  $\mathbf{P} = \beta\mathbf{p} + (1-\beta)\mathbf{p}'$ .

Аналогично

$$\frac{1}{2}(p + p') I_2 = \int_0^1 d\beta \left( \frac{\partial}{2\partial P_a} - \frac{P_a}{2M} \frac{\partial}{\partial M} \right) \int d^3 k \frac{1}{(p^2 - k^2 + i\varepsilon)[(k - \mathbf{P})^2 + M^2]}.$$

Промежуточное интегрирование легко выполнить, и мы получаем

$$\int d^3 k \frac{1}{(p^2 - k^2 + i\epsilon) [(k-P)^2 + M^2]} = \frac{i\pi^2}{P} \ln \frac{p-P+iM}{p+P+iM},$$

где при определении ветви логарифма выбирается соответствующий разрез. Окончательные выражения для  $I_1$  и  $I_2$  при  $\sigma \rightarrow 0$  имеют вид

$$I_1 = \frac{\pi^2}{2ip^3 \sin^2(\theta/2)} \ln \frac{2p \sin(\theta/2)}{\sigma}, \quad (7.82)$$

$$I_2 = \frac{\pi^2}{2p^3 \cos^2(\theta/2)} \left\{ \frac{\pi}{2} \left[ 1 - \frac{1}{\sin(\theta/2)} \right] - i \left[ \frac{1}{\sin^2(\theta/2)} \ln \frac{2p \sin(\theta/2)}{\sigma} + \ln \frac{\sigma}{2p} \right] \right\}. \quad (7.83)$$

Подставляя эти выражения в формулу (7.81), получаем последний из матричных элементов. Таким образом, сечение рассеяния неполяризованных частиц дается выражением

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{4Z^2\alpha^2 m^2}{|q|^4} \frac{1}{2} \sum_{\text{По поляризациям}} |\bar{u}(p') T u(p)|^2, \quad (7.84)$$

где  $T$  — коэффициент, стоящий при  $(iZe^2/|q|^2) 2\pi\delta(p^0 - p'^0)$  в сумме  $S_{123} + S_4$ , т. е.

$$T = \gamma^0(1+A) + \gamma^0 \frac{\not{q}}{2m} B + C,$$

$$A = \frac{\alpha}{\pi} \left[ \left( 1 + \ln \frac{\mu}{m} \right) (2\varphi \operatorname{cth} 2\varphi - 1) - 2 \operatorname{cth} 2\varphi \int_0^\varphi d\varphi' \varphi' \operatorname{th} \varphi' - \frac{\varphi}{2} \operatorname{th} \varphi + \left( 1 - \frac{1}{3} \operatorname{cth}^2 \varphi \right) (\varphi \operatorname{cth} \varphi - 1) + \frac{1}{9} \right] - \frac{Z\alpha}{2\pi^2} |q|^2 E (I_1 + I_2), \quad (7.85)$$

$$B = -\frac{\alpha}{\pi} \frac{\psi}{\operatorname{sh} 2\varphi},$$

$$C = -\frac{Z\alpha}{2\pi^2} m |q|^2 (I_1 - I_2).$$

Чтобы быть последовательными, в выражении (7.84) оставим лишь члены вплоть до порядка  $\alpha^3$ . Следует заметить, что комплексными величинами являются только  $I_1$  и  $I_2$ . Суммирование по поляризациям дает

$$m^2 \sum_{\text{По поляризациям}} |\bar{u}(p') T u(p)|^2 = m^2 \operatorname{Sp} \left( T \frac{\not{p} + m}{2m} \bar{T} \frac{\not{p}' + m}{2m} \right) = \\ = (1 + 2\operatorname{Re} A) (2E^2) [1 - \beta^2 \sin^2(\theta/2)] + \\ + 2B (2E^2)^2 \sin^2(\theta/2) + 2\operatorname{Re} C (2mE) + O(\alpha^2).$$

Зависимость от фактора  $\sigma$ , которую вносили мнимые части величин  $A$  и  $C$ , исчезла, как и ожидалось; в результате сечение упругого рассеяния, включающее первые нетривиальные радиационные поправки, записывается теперь следующим образом:

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{упр}} = & \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{Мотт}} \left\{ 1 + \frac{2\alpha}{\pi} \left[ \left( 1 + \ln \frac{\mu}{m} \right) (2\varphi \operatorname{cth} 2\varphi - 1) - \right. \right. \\ & - 2 \operatorname{ch} 2\varphi \int_0^{\varphi} d\varphi' \varphi' \operatorname{th} \varphi' - \frac{\varphi}{2} \operatorname{th} \varphi + \\ & + \left. \left( 1 - \frac{\operatorname{cth}^2 \varphi}{3} \right) (\varphi \operatorname{cth} \varphi - 1) + \frac{1}{9} - \frac{\varphi}{\operatorname{sh} 2\varphi} \frac{\beta^2 \sin^2 (\theta/2)}{1 - \beta^2 \sin^2 (\theta/2)} \right] + \\ & + Z\alpha\pi \frac{\beta \sin (\theta/2) [1 - \sin (\theta/2)]}{1 - \beta^2 \sin^2 (\theta/2)} \left. \right\}. \end{aligned} \quad (7.86)$$

Напомним, что здесь  $E$  и  $p$  — энергия и импульс электрона,  $\beta = p/E$  — его скорость,  $\theta$  — угол рассеяния, а  $\operatorname{ch} 2\varphi = p \cdot p' / m^2$ ,  $\operatorname{sh} \varphi = p/m \sin (\theta/2)$  и  $|\mathbf{q}|^2 = 4m^2 \operatorname{sh}^2 \varphi = 4p^2 \sin^2 (\theta/2)$

В выражении (7.86) сохранилась истинная инфракрасная расходимость. Чтобы получить разумный результат, нам необходимо добавить к найденному выше сечению сечение испускания мягких фотонов.

### 7.2.3. Мягкое тормозное излучение

В разд. 5.2.4 мы рассматривали тормозное излучение электрона в кулоновском поле. Была получена формула Бете—Гайтлера, демонстрирующая характерный спектр  $d\omega/\omega$ , где  $\omega$  — энергия фотона, или, что эквивалентно, потеря энергии электроном. Если ввести в рассмотрение среднее энергетическое разрешение  $\Delta E$ , то после интегрирования мы получили бы вероятность излучения, пропорциональную величине  $Z^2 \alpha^3 \ln (\Delta E/\mu)$ , которая могла бы компенсировать аналогичный член в сечении упругого рассеяния. Следовательно, наша цель состоит в том, чтобы проинтегрировать выражение Бете—Гайтлера по кинематическим переменным фотона в области  $\omega \leq \Delta E$ . Будем предполагать, что  $\mu \ll \Delta E \ll E$ . Может возникнуть возражение, что в гл. 5 мы практически уже полагали  $\mu \approx 0$ . В действительности же единственный опасный член в пределе  $\mu/E \ll \Delta E/E \rightarrow 0$  возникает от пропагаторов. Следовательно, можно применить формулу (5.151), определяющую сечение рассеяния в пределе бесконечно малого импульса фотона  $k$ . Обозначая этот вклад как  $[(d\sigma/d\Omega)(\Delta E)]_{\text{неупр}}$ , находим

$$\left[\frac{d\sigma}{d\Omega}(\Delta E)\right]_{\text{неупр}} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{Мотт}} \int_{\omega \leq \Delta E} \frac{d^3 k}{2\omega (2\pi)^3} e^2 \left[ \frac{2p \cdot p'}{k \cdot pk \cdot p'} - \frac{m^2}{(k \cdot p)^2} - \frac{m^2}{(k \cdot p')^2} \right]. \quad (7.87)$$

Однако энергетическое разрешение может зависеть от кинематических ограничений; при этом могут требоваться более тщательные вычисления с использованием полного выражения для сечения Бете — Гайтлера. Здесь мы хотим лишь продемонстрировать основной механизм компенсации. В формуле (7.87) в принципе  $E = E' + \omega$ , но мы интересуемся только доминирующими вкладками в  $\Delta E$ . Поэтому всякий раз, когда это допустимо, будем переходить к пределу  $E' \rightarrow E$ ,  $|\mathbf{p}'| \rightarrow |\mathbf{p}'|$ . Разумеется, при этом сохраняется связь  $\omega = (k^2 + \mu^2)^{1/2}$ . Обозначим коэффициент при  $(d\sigma/d\Omega)_{\text{Мотт}}$  через  $B$ . Используя технику Фейнмана, запишем

$$B = \frac{\alpha}{4\pi^2} \int_{-1}^{+1} dz \int_{\omega \leq \Delta E} \frac{d^3k}{2\omega} \left[ \frac{2p \cdot p'}{(k \cdot P)^2} - \frac{m^2}{(k \cdot p)^2} - \frac{m^2}{(k \cdot p')^2} \right];$$

здесь  $P = (1/2)[(p + p') + z(p' - p)]$ . Учитывая то, что  $|\mathbf{k}| < [(\Delta E)^2 - \mu^2]^{1/2} \sim \Delta E$ , находим

$$\begin{aligned} \int_{\omega \leq \Delta E} \frac{d^3k}{\omega (k \cdot P)^2} &= 4\pi \int_0^{\Delta E} \frac{d|\mathbf{k}|}{(k^2 + \mu^2)^{1/2}} \frac{|\mathbf{k}|^2}{[k^2(P_0^2 - P^2) + \mu^2 P_0^2]} = \\ &= 4\pi \int_0^{\text{arctg}(\Delta E/\mu)} d\psi \frac{\sin \psi \operatorname{tg} \psi}{P_0^2 - P^2 \sin^2 \psi} \approx \\ &\approx \frac{4\pi}{P_0^2 - P^2} \left( \ln \frac{2\Delta E}{\mu} - \frac{P_0}{2|\mathbf{P}|} \ln \frac{P_0 + |\mathbf{P}|}{P_0 - |\mathbf{P}|} \right). \end{aligned}$$

Подставляя этот результат в выражение для  $B$  с обозначениями  $p = |\mathbf{p}|$ ,  $p' = |\mathbf{p}'|$  и  $P = |\mathbf{P}|$ , которые, мы надеемся, не запутают читателя, приходим к следующему одномерному интегралу по  $z$ :

$$\begin{aligned} B = \frac{\alpha}{\pi} \left\{ 2 \ln \frac{2\Delta E}{\mu} \left[ -1 + \frac{p \cdot p'}{2} \int_{-1}^{+1} dz \frac{1}{P_0^2(z) - P^2(z)} \right] + \frac{E}{2p} \ln \frac{E+p}{E-p} + \right. \\ \left. + \frac{E'}{2p'} \ln \frac{E'+p'}{E'-p'} - \frac{p \cdot p'}{2} \int_{-1}^{+1} dz \frac{1}{P_0^2(z) - P^2(z)} - \frac{P_0(z)}{P(z)} \ln \frac{P_0(z) + P(z)}{P_0(z) - P(z)} \right\}. \end{aligned}$$

Используя наши предыдущие обозначения, мы видим, что  $P_0^2(z) - P^2(z) = m^2(\operatorname{ch}^2 \varphi - z^2 \operatorname{sh}^2 \varphi)$ . Следовательно, первый интеграл вычисляется в виде

$$\frac{p \cdot p'}{2} \int_{-1}^{+1} dz \frac{1}{P_0^2(z) - P^2(z)} = \operatorname{ch} 2\varphi \int_0^1 dz \frac{1}{\operatorname{ch}^2 \varphi - z^2 \operatorname{sh}^2 \varphi} = 2\varphi \operatorname{cth} 2\varphi.$$

Во втором интеграле введем переменную  $\xi = P(z)/\beta P_0(z)$  и вычислим его в пределе  $E' \rightarrow E$ ,  $p' \rightarrow p$  с точностью до поправок по-

рядка  $\Delta E/E$ . Мы видим, что величина  $\xi$  равна  $[\cos^2(\theta/2) + z^2 \sin^2(\theta/2)]^{1/2}$ , а потому

$$\begin{aligned} & \frac{p \cdot p'}{2} \int_{-1}^{+1} dz \frac{1}{P_0^2(z) - P^2(z)} \frac{P_0(z)}{P(z)} \ln \frac{P_0(z) + P(z)}{P_0(z) - P(z)} = \\ & = \text{ch } 2\varphi \frac{1 - \beta^2}{\beta \sin(\theta/2)} \int_{\cos(\theta/2)}^1 d\xi \frac{1}{(1 - \beta^2 \xi^2) [\xi^2 - \cos^2(\theta/2)]^{1/2}} \ln \frac{1 + \beta \xi}{1 - \beta \xi}. \end{aligned}$$

Собирая все вклады вместе, получаем выражение для сечения испускания мягких фотонов в виде

$$\begin{aligned} \left[ \frac{d\sigma}{d\Omega}(\Delta E) \right]_{\text{неупр}} &= \left( \frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{Мотт}} \frac{2\alpha}{\pi} \left\{ (2\varphi \text{cth } 2\varphi - 1) \ln \frac{2\Delta E}{\mu} + \frac{1}{2\beta} \ln \frac{1 + \beta}{1 - \beta} - \right. \\ & \left. - \frac{1}{2} \text{ch } 2\varphi \frac{1 - \beta^2}{\beta \sin(\theta/2)} \int_{\cos(\theta/2)}^1 d\xi \frac{1}{(1 - \beta^2 \xi^2) [\xi^2 - \cos^2(\theta/2)]^{1/2}} \ln \frac{1 + \beta \xi}{1 - \beta \xi} \right\}. \end{aligned} \quad (7.88)$$

#### 7.2.4. Конечное инклюзивное сечение

Измеримая величина, обозначаемая как  $(d\sigma/d\Omega)(\Delta E)$ , представляет собой сумму упругого и неупругого вкладов:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(\Delta E) = \left( \frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{упр}} + \left[ \frac{d\sigma}{d\Omega}(\Delta E) \right]_{\text{неупр}}. \quad (7.89)$$

Оба вклада вычислены нами в одном и том же порядке  $\alpha^3$  и определяются соответственно выражениями (7.86) и (7.88) Швингер, который впервые вычислил эти поправки, обозначил относительные поправки, связанные с виртуальным (или реальным) испусканием фотона и борновским приближением второго порядка, через  $\delta_R$  и  $\delta_B$ . Таким образом, мы имеем

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(\Delta E) = \left( \frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{Мотт}} (1 - \delta_R + \delta_B). \quad (7.90)$$

При сложении вкладов (7.86) и (7.88) параметр инфракрасного обрезания, как и ожидалось, выпадает вовсе. Фиктивная масса  $\mu$  нужна была только для того, чтобы придать смысл промежуточным этапам вычислений. Поэтому, если учтено экспериментальное разрешение  $\Delta E$ , переход к пределу  $\mu \rightarrow 0$  совершенно законен. Очевидно, что величина  $\Delta E$  влияет на окончательный результат.

При сложении двух вкладов можно применить следующее тождество, которое получается путем сравнения замен переменных, выполненных при интегрировании величин  $(d\sigma/d\Omega)_{\text{упр}}$  и  $[(d\sigma/d\Omega) \times$

$\times (\Delta E)]_{\text{неупр}}$ . Вспоминая, что  $\text{sh } \varphi = [\beta/(1-\beta^2)^{1/2}] \sin(\theta/2)$ , мы имеем

$$\int_0^{\varphi} d\psi \psi \text{th } \psi = -\frac{\varphi}{2} \ln(1-\beta^2) + \frac{(1-\beta^2)}{4 \sin(\theta/2)} \text{sh } 2\varphi \times \\ \times \int_{\cos(\theta/2)}^1 d\xi \frac{\xi \ln(1-\beta^2 \xi^2)}{(1-\beta^2 \xi^2) [\xi^2 - \cos^2(\theta/2)]^{1/2}}.$$

Отсюда находим

$$\delta_K = \frac{2\alpha}{\pi} \left\{ (1-2\varphi \text{cth } 2\varphi) \left( 1 + \ln \frac{2\Delta E}{m} \right) + \varphi \text{th } \varphi + (1-\varphi \text{th } \varphi) \times \right. \\ \times \left( 1 - \frac{\text{cth}^2 \varphi}{3} \right) - \frac{1}{9} + \frac{1}{2\beta} \ln \frac{1-\beta}{1+\beta} - \varphi \text{cth } 2\varphi \ln(1-\beta^2) + \\ + \frac{\beta^2 \sin^2(\theta/2)}{1-\beta^2 \sin^2(\theta/2)} \frac{\varphi}{\text{sh } 2\varphi} + \frac{1}{2} \text{ch } 2\varphi \frac{1-\beta^2}{\beta \sin(\theta/2)} \times \\ \left. \times \int_{\cos(\theta/2)}^1 d\xi \frac{1}{[\xi^2 - \cos^2(\theta/2)]^{1/2}} \left[ \frac{\ln(1+\beta\xi)}{1-\beta\xi} - \frac{\ln(1-\beta\xi)}{1+\beta\xi} \right] \right\}, \quad (7.91)$$

$$\delta_B = Z\alpha\pi \frac{\beta \sin(\theta/2) [1 - \sin(\theta/2)]}{1 - \beta^2 \sin^2(\theta/2)}. \quad (7.92)$$

Численные расчеты показывают, что этими поправками нельзя пренебрегать, поскольку с ростом энергии они возрастают. Когда  $\Delta E/m \rightarrow 0$ , приведенные выше формулы перестанут быть справедливыми. Критерий их применимости записывается в виде

$$\frac{\alpha}{\pi} \ln \frac{m}{\Delta E} < 1.$$

Чтобы выйти за рамки этого приближения, необходимо добавить вклады более высоких порядков, учитывающие испускание нескольких или даже бесконечного числа фотонов. Известно, что вклады мягких фотонов факторизуются в виде экспоненты, а это значит, что в пределе  $\Delta E/m \rightarrow 0$  процесс имеет нулевую вероятность.

## 7.3. НОВЫЕ ЭФФЕКТЫ

Учет высших порядков теории возмущений приводит к новым явлениям. Некоторые из них мы кратко обсудим ниже.

### 7.3.1. Рассеяние фотона на фотоне

Четырехфотонное взаимодействие не имеет классического аналога и возникает в результате квантовых флуктуаций виртуальных пар заряженных частиц. С теоретической точки зрения интересно показать, каким образом калибровочная инвариантность и сохране-

ние тока устраняют оставшуюся возможную расходимость амплитуды, о чем мы упоминали в разд. 7 1

Приведем сначала некоторые соображения размерности. Основная амплитуда (рис. 7.15) имеет порядок  $\alpha^2$ , так что сечение рассеяния запишется в виде

$$\sigma \sim \int \frac{d^3 k_3}{\omega_3} \frac{d^3 k_4}{\omega_4} \frac{\alpha^4 |M|^2}{k_1 \cdot k_2} \delta^4(k_1 + k_2 - k_3 - k_4); \quad (7.93)$$

здесь используются очевидные обозначения импульсов и энергий фотонов. Размерными параметрами являются, например, полная энергия  $\omega$  в системе центра масс и масса электрона  $m$ . Здесь  $M$  — без-

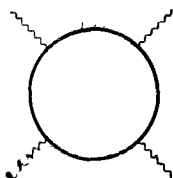


РИС. 7.15. Основная диаграмма фотон-фотонного рассеяния.

размерный матричный элемент, так что  $\sigma$  имеет естественную размерность площади.

Мы ожидаем, что калибровочная инвариантность позволит выделить четвертую степень импульса из  $M$ . Впоследствии мы в этом убедимся. Соответственно величина  $|M|^2$  должна вести себя при малых  $\omega$  по крайней мере как  $(\omega/m)^8$ . В этом пределе  $k_1 \cdot k_2$  пропорционально  $\omega^2$ . Таким образом, можно ожидать, что при низких энергиях сечение имеет вид

$$\sigma \sim a \alpha^4 \left( \frac{\omega}{m} \right)^6 \frac{1}{m^2}, \quad \frac{\omega}{m} \ll 1, \quad (7.94)$$

где  $a$  — числовой коэффициент. Поскольку  $\alpha^4/m^2 \sim 10$  мкб, это сечение чрезвычайно мало вплоть до энергий в сотни килоэлектрон-вольт. В другом предельном случае, т. е. при  $\omega/m \gg 1$ , массовые сингулярности вследствие сходимости отсутствуют, так что из простых соображений размерности мы получаем

$$\sigma \sim b \alpha^4 \frac{1}{\omega^2}, \quad \frac{\omega}{m} \gg 1, \quad (7.95)$$

где  $b$  — вторая численная константа. Иными словами, очевидно, что при характерных значениях  $\omega/m \sim 1$  величина  $\sigma$  должна иметь максимум.

Мы не будем проводить полных развернутых вычислений, а вместо этого покажем, что результаты, полученные в разд 4 3 гл. 4, позволяют найти численное значение константы  $a$  из выражения для сечения при низких энергиях. Для этого прежде всего заметим, что лагранжиан Эйлера — Гейзенберга (4.123) включает



суммирование по всем однопетлевым диаграммам. При этом каждая диаграмма интегрируется по рассматриваемому постоянному электромагнитному полю столько раз, сколько в ней имеется внешних линий. Следует заметить, что  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$  — линейные функции внешнего импульса. Кроме того, в данном порядке по  $e$  сумма всех диаграмм, полученных путем перестановок индексов внешних линий, является калибровочно-инвариантной. Если процесс происходит на массовой поверхности, то данная сумма, свернутая с вектором поляризации  $\varepsilon_\rho(k)$ , инвариантна относительно замены  $\varepsilon_\rho(k) \rightarrow \varepsilon_\rho(k) + \lambda k_\rho$ . Отсюда следует, что эта свернутая величина может зависеть от  $\varepsilon(k)$  только через комбинации  $\varepsilon_\rho(k) k_\sigma - \varepsilon_\sigma(k) k_\rho$ . С точностью до множителя  $i$  это есть не что иное, как фурье-образ  $f_{\rho\sigma}(k)$ . При этом член, пропорциональный  $e^4$ , будет включать в себя импульс по крайней мере в четвертой степени. Таким образом, в низкоэнергетическом пределе достаточно вычислить коэффициент, стоящий перед произведением  $\prod_{i=1}^4 f_{\rho_i \sigma_i}^{(i)}$ , при нулевой

частоте. Если внешние электромагнитные поля совпадают, то этот коэффициент является членом четвертого порядка в эффективном лагранжиане, вычисленном для постоянного поля, который дается выражением (4.125):

$$i\delta \mathcal{L}_4 = i \frac{2\alpha^2}{45m^4} [(\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2)^2 + 7(\mathbf{E} \cdot \mathbf{B})^2] = \frac{i2\alpha^2}{45m^4} \left[ \left( \frac{f^2}{2} \right)^2 + 7 \left( \frac{f \cdot \bar{f}}{4} \right)^2 \right] \quad (7.96)$$

Чтобы найти амплитуду рассеяния, нужно просто заменить  $f$  на сумму  $f^{(1)} + f^{(2)} + f^{(3)} + f^{(4)}$  и разделить коэффициент при  $\prod_{i=1}^4 f^{(i)}$  на 4!. Используя подстановку  $f_{\rho\sigma} = i(k_\rho \varepsilon_\sigma - k_\sigma \varepsilon_\rho)$ , получим искомую величину в пределе  $\omega/m \rightarrow 0$ .

В целях сокращения обозначений будем рассматривать величину  $f_{\rho\sigma}^0$  как матрицу, причем след получается суммированием по четырем значениям лоренцева индекса. При этом нетрудно показать, что

$$(f^2)^2 = (\text{Sp } f^2)^2, \quad (f \cdot \bar{f})^2 = 4 \text{Sp } f^4 - 2(\text{Sp } f^2)^2.$$

Согласно приведенным выше соображениям, амплитуда  $M$  записывается в виде

$$M = -\frac{i\alpha^2}{45m^4} \frac{1}{12} [5(\text{Sp } f^{(1)} f^{(2)} \text{Sp } f^{(3)} f^{(4)} + \text{Sp } f^{(1)} f^{(3)} \text{Sp } f^{(2)} f^{(4)} + \\ + \text{Sp } f^{(1)} f^{(4)} \text{Sp } f^{(2)} f^{(3)} - 7 \text{Sp } (f^{(1)} f^{(2)} f^{(3)} f^{(4)} + f^{(2)} f^{(1)} f^{(3)} f^{(4)} + \\ + f^{(3)} f^{(1)} f^{(2)} f^{(4)} + f^{(2)} f^{(3)} f^{(1)} f^{(4)} + f^{(3)} f^{(2)} f^{(1)} f^{(4)} + f^{(1)} f^{(3)} f^{(2)} f^{(4)})], \quad (7.97)$$

Сечение рассеяния неполяризованных частиц получается усреднением квадрата абсолютной величины  $M$ :

$$\overline{|M|^2} = \frac{1}{4} \sum_{\rho^{(i)}} |M|^2.$$

В системе центра масс сечение записывается в виде

$$\begin{aligned} d\sigma &= \frac{1}{4(k_1 \cdot k_2)} \int \frac{d^3 k_3}{2\omega_3 (2\pi)^3} \frac{d^3 k_4}{2\omega_4 (2\pi)^3} (2\pi)^4 \delta^4(k_3 + k_4 - k_1 - k_2) \overline{|M|^2} = \\ &= \frac{1}{64\omega^2 (2\pi)^2} \overline{|M|^2} d\Omega. \end{aligned} \quad (7.98)$$

Чтобы выполнить суммирование по поляризациям, воспользуемся правилом

$$\sum_{\rho} f_{\rho}^{*\sigma} f_{\rho}^{\sigma'} = -(g^{\rho\rho'} k^{\sigma} k^{\sigma'} + k_{\rho} k_{\rho'} g^{\sigma\sigma'} - g_{\rho}^{\sigma} k^{\sigma} k_{\rho'} - g_{\rho'}^{\sigma} k_{\rho} k^{\sigma'}).$$

Утомительные вычисления приводят к результату

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\Omega} &= \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{1}{2\omega^2} \frac{\alpha^4}{(90)^2 m^8} \times \\ &\times 139 [(k_1 \cdot k_2)^2 (k_3 \cdot k_4)^2 + (k_1 \cdot k_3)^2 (k_2 \cdot k_4)^2 + (k_1 \cdot k_4)^2 (k_2 \cdot k_3)^2]. \end{aligned} \quad (7.99)$$

Вторая инвариантная комбинация, которая могла бы войти в данное выражение, — это  $\sum_{\text{По различным перестановкам}} (k_1 \cdot k_2) (k_2 \cdot k_3) (k_3 \cdot k_4) \times (k_4 \cdot k_1)$ . Она равна половине величины, стоящей в квадратных скобках в выражении (7.99). Если  $\theta$  — угол рассеяния в системе центра масс, то

$$\begin{aligned} k_1 \cdot k_2 &= k_3 \cdot k_4 = 2\omega^2, \\ k_1 \cdot k_3 &= k_2 \cdot k_4 = \omega^2 (1 - \cos \theta), \\ k_1 \cdot k_4 &= k_2 \cdot k_3 = \omega^2 (1 + \cos \theta). \end{aligned}$$

Таким образом, дифференциальное сечение рассеяния неполяризованных фотонов имеет вид

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{139}{(90)^2} \alpha^4 \left(\frac{\omega}{m}\right)^6 \frac{1}{m^2} (3 + \cos^2 \theta)^2, \quad \omega/m \ll 1. \quad (7.100)$$

Поскольку фотоны подчинены статистике Бозе, это выражение симметрично по отношению к замене  $\theta \rightarrow \pi - \theta$ . Поэтому, чтобы получить полное сечение упругого рассеяния, мы должны проинтегрировать лишь по половине полного телесного угла; при этом получаем

$$\sigma = \frac{1}{2\pi} \frac{139}{(90)^2} \left(\frac{56}{\Pi}\right) \alpha^4 \left(\frac{\omega}{m}\right)^6 \frac{1}{m^2}, \quad \omega/m \ll 1. \quad (7.101)$$

Этот результат согласуется с нашими предыдущими оценками и, следовательно, дает значение искомого коэффициента  $a$

В качестве упражнения мы предлагаем читателю вычислить коэффициент  $b$ , входящий в выражение (7.95) для сечения при высоких энергиях. Индуцированное взаимодействие фотона с фотоном означает, что возможно когерентное рассеяние на заряженных мишенях; при этом две из линий на диаграмме рис. 7.15 относятся к кулоновскому взаимодействию с ядрами. Этот процесс можно связать с рождением пар в поле ядра, а также с комптоновским рассеянием. Альтернативный процесс, который заслуживает внимания, — это так называемое расщепление фотона, когда фотон, сталкиваясь с мишенью ( $-Ze$ ), выбивает из нее два фотона.

### 7.3.2. Лэмбовский сдвиг

Измерение в 1947 г. Лэмбом и Резерфордом сдвига уровней, соответствующих состояниям атома водорода  $2S_{1/2}$  и  $2P_{1/2}$ , которые должны быть вырожденными в соответствии с теорией Дирака, стало памятным событием, стимулировавшим развитие квантовой теории поля. Здесь мы удовлетворимся простым рассмотрением эффекта, оставляя в стороне более глубокие вопросы, связанные с формулировкой релятивистской теории связанных состояний. Фактически то, что изучали Лэмб и Резерфорд, — это поведение  $2P_{1/2} - 2S_{1/2}$ -переходов в зависимости от наложенного магнитного поля. В пределе нулевого поля наблюдаемое значение расщепления уровней оказалось на  $\sim 1000$  МГц ниже, чем то, которое можно было ожидать из тонкой структуры уровней  $m\alpha^4/32 \sim 10\,960$  МГц.

Чтобы проанализировать это расхождение, будем следовать оригинальной работе Бете, в которой теория Дирака сочетается с радиационными поправками, как это уже делалось ранее в настоящей главе. Мы показали, что поляризация вакуума, приводящая к изменению эффективного потенциала, вызвала увеличение энергии связи, соответствующей уровню  $2S_{1/2}$ , на 27 МГц по сравнению с  $2P_{1/2}$ . Следовательно, это не может быть главной причиной, поскольку, согласно экспериментальным наблюдениям, уровень  $2S_{1/2}$  должен располагаться значительно выше уровня  $2P_{1/2}$ . Разумеется, полная теория требует учета всех эффектов одного и того же порядка и включения поправок, связанных с ядром (с его магнитным моментом, отдачей, формфакторами, поляризуемостью и т. д.) Кроме того, все возбужденные уровни метастабильны, а это означает, что соответствующие линии спектра имеют естественную ширину.

В гл. 2 мы приводили рассуждения Велтона, который рассматривал взаимодействие связанного электрона с вакуумными флуктуациями электрического поля и получил правильную как по знаку, так и по порядку величины оценку сдвига:

$$\delta E_{n,l} \approx \frac{4}{3\pi} m \frac{Z^4 \alpha^2}{n^3} \ln \frac{1}{Z\alpha} \delta_{l,0}. \quad (7.102)$$

Здесь мы дадим более точную количественную оценку этой величины.

Будем исходить из выражения для эффективного гамильтониана взаимодействия электронов с внешним полем (7.77). Оно приводит к модифицированному уравнению Дирака

$$\left[ i\partial - m - \left\{ \gamma^0 \left[ 1 - \frac{\alpha}{3\pi m^2} \left( \ln \frac{m}{\mu} - \frac{3}{8} - \frac{1}{5} \right) \square \right] + \frac{\alpha}{2\pi} \frac{\delta_{\nu\rho}}{2m} \partial^\nu \right\} \times \right. \\ \left. \times eA^0(x) \right] \psi(x) = 0, \quad (7.103)$$

в котором учтены поляризация вакуума и вершинные поправки, вычисленные для случая медленно меняющегося внешнего поля. Дифференциальные операторы внутри фигурных скобок действуют только на кулоновский потенциал  $A^0(x)$ .

Величину  $\psi$  следует интерпретировать как матричный элемент оператора поля между вакуумом и одноэлектронным состоянием в присутствии внешнего поля. В соответствии с правилами теории возмущений добавочный член надо учитывать только в первом порядке. В противном случае наше вычисление будет логически непоследовательным. Невозмущенные состояния являются решениями уравнения Дирака

$$(i\partial - m - eA) \psi(x) = 0, \quad A^0(x) = -\frac{Ze}{4\pi|x|} g^{00}, \quad (7.104)$$

которое обсуждалось нами в разд. 2.3. Следовательно, сдвиг уровня дается выражением

$$\delta E = e\alpha \int d^3x \psi^\dagger(x) \left\{ \frac{1}{3\pi m^2} \left( \ln \frac{m}{\mu} - \frac{3}{8} - \frac{1}{5} \right) \Delta [A^0(x)] + \right. \\ \left. + \frac{l}{4\pi m} \gamma \cdot E(x) \right\} \psi(x), \quad (7.105)$$

где  $\psi$  обозначает решения, отвечающие набору квантовых чисел  $(n, l, j)$  уравнения (7.104).

В качестве первого приближения для (7.105) можно использовать даже нерелятивистское выражение для  $\psi$  таким образом, что

$$\Delta A^0(x) = Ze\delta^3(x), \quad |\psi_n^{\text{nr}}(0)|^2 = \frac{1}{\pi a_n^3} = \frac{(Z\alpha m)^3}{\pi n^3}.$$

Это дает

$$e \int d^3x \psi_{n,l,j}^\dagger(x) [\Delta A^0(x)] \psi_{n,l,j}(x) = \delta_{l,0} \frac{4m^3}{n^3} (Z\alpha)^4.$$

Запишем отдельно вклады двух членов (7.105):

$$\delta E = \delta E^{(1)} + \delta E^{(2)}; \quad (7.106)$$

мы имеем

$$\delta E_{n,l,j}^{(1)} = \frac{e\alpha}{3\pi m^2} \int d^3x \psi_{n,l,j}^\dagger(x) \left( \ln \frac{m}{\mu} - \frac{3}{8} - \frac{1}{5} \right) [\Delta A^0(x)] \psi_{n,l,j}(x) = \\ = \delta_{l,0} \frac{4m\alpha}{3\pi n^3} (Z\alpha)^4 \left( \ln \frac{m}{\mu} - \frac{3}{8} - \frac{1}{5} \right). \quad (7.107)$$

Релятивистские волновые функции сингулярны в начале координат. В более строгом рассмотрении мы должны были бы избегать разложения в гамильтониане эффективного взаимодействия по степеням  $q^2/m^2$ . Поскольку в выражение (7.105) входят только средние значения потенциала, полученный выше результат является верным вплоть до порядка  $\alpha (Z\alpha)^4$ .

Рассмотрим теперь второй вклад  $\delta E^{(2)}$ , который мы хотим вычислить в том же духе, что и первый. Нам придется прибегнуть к уравнению Дирака, поскольку  $\gamma$ -матрицы связывают малые и большие компоненты. Мы получаем для  $\delta E_{n, l, j}^{(2)}$  следующее выражение:

$$\delta E_{n, l, j}^{(2)} = \frac{ie\alpha}{4\pi m} \int d^3x \psi_{n, l, j}^\dagger(\mathbf{x}) \boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{x}) \psi_{n, l, j}(\mathbf{x}), \quad (7.108)$$

который описывает эффект аномального магнитного момента, индуцирующего электрический дипольный момент движущегося электрона. Если пренебречь кулоновским потенциалом, то большая ( $\varphi$ ) и малая ( $\chi$ ) компоненты  $\psi$  связаны приближенным соотношением

$$\chi(\mathbf{x}) = -i \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla}{2m} \varphi(\mathbf{x}).$$

Поскольку  $e\mathbf{E}(\mathbf{x}) = -Z\alpha(\mathbf{x}/|\mathbf{x}|^3)$  и справедливы соотношения

$$\psi^\dagger \frac{\mathbf{y} \cdot \mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^3} \psi = \varphi^\dagger \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^3} \chi - \chi^\dagger \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^3} \varphi \approx \frac{1}{2im} \left( \varphi_n^\dagger \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{x} \boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla}{|\mathbf{x}|^3} \varphi + \text{э.с.} \right),$$

после интегрирования по частям интеграл (7.108) принимает вид

$$\int d^3x \psi^\dagger(\mathbf{x}) \frac{\mathbf{y} \cdot \mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^3} \psi(\mathbf{x}) \approx \frac{i}{2m} \int d^3x \varphi^\dagger \left[ \boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla, \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^3} \right] \varphi.$$

Как и в случае сверхтонкого взаимодействия, рассмотрение такой сингулярной величины, как  $\mathbf{x}/|\mathbf{x}|^3$ , требует некоторой осторожности. Напомним, что  $\mathbf{x}/|\mathbf{x}|^3 = -\nabla 1/|\mathbf{x}|$  и  $\Delta 1/|\mathbf{x}| = -4\pi\delta^3(\mathbf{x})$ . Будем считать, что  $\varphi$  — это спинор Паули, и используем оператор нерелятивистского углового момента  $\mathbf{L} = (1/i)\mathbf{x} \times \nabla$ , а также тождество

$$[\sigma_a A_a, \sigma_b B_b] = \delta_{ab} (A_a B_b - B_b A_a) + i\epsilon_{abc} \sigma_c (A_a B_b + B_b A_a).$$

В результате получим

$$\delta E_{n, l, j}^{(2)} = \frac{Z\alpha^2}{8\pi m^2} \int d^3x \varphi_{n, l, j}^\dagger(\mathbf{x}) \left[ 4\pi\delta^3(\mathbf{x}) + 4 \frac{\mathbf{L} \cdot \mathbf{S}}{|\mathbf{x}|^3} \right] \varphi_{n, l, j}(\mathbf{x}).$$

Нам известно значение волновой функции в нуле. Матричный элемент  $\mathbf{L} \cdot \mathbf{S} = (1 - \delta_{l, 0}) \left[ j(j+1) - l(l+1) - \frac{3}{4} \right] / 2$ . Наконец, среднее значение величины  $1/|\mathbf{x}|^3$  для состояний с угловым моментом, равным или большим единицы, запишется в виде

$$\left\langle \frac{1}{|\mathbf{x}|^3} \right\rangle_{n, l, j} = \frac{2}{l(l+1)(2l+1)n^3} (Zm\alpha)^3.$$

Объединяя полученные выше результаты, находим

$$\delta E_{n, l, j}^{(2)} = \frac{\alpha (Z\alpha)^4}{2\pi n^3} m \frac{1}{2l+1} C_{j, l}, \quad (7.109)$$

где

$$C_{j, l} = \delta_{l, 0} + (1 - \delta_{l, 0}) \frac{j(j+1) - l(l+1) - 3/4}{l(l+1)} =$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{l+1}, & \text{если } j = l + 1/2, \\ -\frac{1}{l}, & \text{если } j = l - 1/2, \quad l \geq 1. \end{cases}$$

Для состояний с не равным нулю орбитальным моментом вклад  $\delta E^{(1)}$  обращается в нуль, в то время как  $\delta E^{(2)}$  дает малый вклад порядка  $\alpha (Z\alpha)^4$ , связанный с аномальным магнитным моментом электрона.

Для  $s$ -состояний величина  $\delta E$  все еще включает фиктивную массу  $\mu$  и расходится, когда  $\mu \rightarrow 0$ . Это указывает на то, что мы пренебрегли каким-то существенным вкладом. Согласно качественным рассуждениям, эффективное инфракрасное обрезание, по-видимому, должно происходить не при произвольном значении  $\mu^{-1}$ , а на расстояниях порядка боровского радиуса  $(Zm\alpha)^{-1}$ . Ошибка кроется в использовании эффективного взаимодействия (7.77) при произвольно больших длинах волн. Для длин волн, сравнимых или больших, чем боровский радиус, радиационные поправки уже должны учитывать кулоновское взаимодействие, т. е. они вычисляются для связанного, а не свободного электрона.

Чтобы учесть этот эффект, воспользуемся тем, что отношение энергии связи к массе электрона очень мало, а именно порядка  $Z^2\alpha^2/2$ . Введем обрезание  $K$  для 3-импульса виртуальных фотонов, такое, что  $mZ^2\alpha^2 \ll K \ll m$ . В случае  $k < K$  электроны можно рассматривать в нерелятивистском приближении, и мы сможем принять во внимание ядерный потенциал. В случае  $k > K$  будем пренебрегать эффектами связи и использовать предыдущие результаты, за исключением тех случаев, когда необходимо точно учитывать соотношение между  $K$  и  $\mu$ .

Чтобы выполнить намеченный план, обратимся к разд. 7.2.3, в котором мы выразили сечение мягкого тормозного излучения через интеграл от следующей величины:

$$B = \frac{\alpha}{2\pi^2} \int_{\omega \leq \Delta E} \frac{d^3k}{2\omega} \left[ \frac{2p \cdot p'}{k \cdot pk \cdot p'} - \frac{m^2}{(k \cdot p)^2} - \frac{m^2}{(k \cdot p')^2} \right].$$

Эта величина была вычислена при  $\mu \ll \Delta E$ , но не при  $\mu = 0$ . Повторим эти вычисления, полагая  $\mu = 0$ , но обрезая 3-импульсы фотона снизу величиной  $K$  ( $K \ll \Delta E$ ). Обозначим соответствующий этому интеграл через  $B_1$ . Сравнивая  $B$  и  $B_1$ , мы получим соотношение между  $K$  и  $\mu$ . Определяя гиперболический угол  $\phi$  из соот-

ношения  $p \cdot p' = m^2 \operatorname{ch} 2\varphi$ , находим

$$B_1 = \frac{2\alpha}{\pi} (2\varphi \operatorname{cth} 2\varphi - 1) \ln \frac{\Delta E}{K}.$$

Полученное нами выражение для  $B$  записывалось в виде [см. (7.88)]

$$B = \frac{2\alpha}{\pi} \left\{ (2\varphi \operatorname{cth} 2\varphi - 1) \ln \frac{2\Delta E}{\mu} + \frac{1}{2\beta} \ln \frac{1+\beta}{1-\beta} - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \operatorname{ch} 2\varphi \frac{1-\beta^2}{\beta \sin(\theta/2)} \int_{\cos(\theta/2)}^1 d\xi \frac{1}{(1-\beta^2\xi^2) [\xi^2 - \cos^2(\theta/2)]^{1/2}} \ln \frac{1+\beta\xi}{1-\beta\xi} \right\}.$$

Скорость связанных электронов мала:  $\beta \sim Z\alpha$ . Поэтому уместно сопоставить  $B_1$  и  $B$  в предельном случае, когда  $\beta \rightarrow 0$ ,  $\varphi \sim \beta \sin(\theta/2)$ . При данных обстоятельствах интеграл, определяющий  $B$ , приближенно равен

$$2\beta \sin(\theta/2) \left\{ 1 + \left(\frac{4}{9}\right) \beta^2 [1 + 2 \cos^2(\theta/2)] + \dots \right\}.$$

В этом случае можно отождествить  $B$  и  $B_1$  при условии, что

$$\ln \frac{\mu}{2K} = -\frac{5}{6}. \quad (7.110)$$

В данном расчете лэмбовского сдвига мы учитываем только одну виртуальную фотонную линию. Кроме того, большая масса ядра задает привилегированную систему отсчета, в которой такое расщепление  $k \cong K$  законно. Разложим  $\delta E^{(1)}$  соответственно на две части:  $\delta E^>$  и  $\delta E^<$ . Величина  $\delta E^>$  дается выражением (7.107) с подстановкой, вытекающей из (7.110). Оставшаяся часть  $\delta E^<$  должна быть вычислена независимо. Более правильное выражение запишется в виде

$$\delta E^{(1)} = \delta E^< + \delta E^>, \\ \delta E^> = \frac{4}{3\pi} m\alpha \frac{(Z\alpha)^4}{n^3} \left( \ln \frac{m}{2K} + \frac{5}{6} - \frac{3}{8} - \frac{1}{5} \right) \delta_{l,0}. \quad (7.111)$$

Оно приобретает смысл, если зависимость от  $K$  в  $\delta E^<$  и  $\delta E^>$  взаимно сокращается.

Чтобы получить  $\delta E^<$ , вернемся к исходной процедуре вычисления радиационных поправок с той оговоркой, что импульсы виртуального электромагнитного поля ограничены параметром обреза  $K$ . Следовательно, для вычисления  $\delta E^<$  можно воспользоваться вторым порядком нерелятивистской теории возмущений, основанной на уравнении Шредингера следующего вида:

$$(E + \delta E^<) \psi = \left[ \frac{1}{2m} \left( \frac{1}{i} \nabla - e\mathbf{A}_q \right)^2 + e(A^0 + A_q^0) \right] \psi. \quad (7.112)$$

Здесь  $\psi$  — волновая функция, описывающая как электрон, так и поле излучения ( $A_q^0, \mathbf{A}_q$ ). В случае невозмущенного состояния она соответствует связанному электрону и электромагнитному вакууму. Поле излучения эффективно описывается потенциалом

$$\mathbf{A}_q(\mathbf{x}) = \int_{|\mathbf{k}| < K} \frac{d^3k}{2|\mathbf{k}|(2\pi)^3} \left[ \sum_{\lambda=1,2} \varepsilon_\lambda(\mathbf{k}) a^{(\lambda)}(k) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} + \text{э.с.} \right], \quad (7.113)$$

$$A_q^0(\mathbf{x}) = 0.$$

Рассмотрим взаимодействие с полем излучения в низшем исчезающем порядке и вычислим оба вклада. Первый вклад возникает от диаграммы типа «чайка», определяемой членом, квадратичным по  $\mathbf{A}_q$ . Его можно включить в  $E$  как вклад в перенормировку массы, поскольку он одинаков для всех уровней. Второй вклад запишется в виде

$$\delta E_n^< = \sum_{n'} \int_{k < K} \frac{d^3k}{2k(2\pi)^3} \sum_l \frac{e^2}{(2m)^2} \times$$

$$\times \int d^3x \frac{|\Psi_n^*(\mathbf{x}) [(1/l) \nabla \cdot \varepsilon_\lambda(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} + e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \varepsilon_\lambda(\mathbf{k})(1/l) \nabla] \Psi_{n'}(\mathbf{x})|^2}{E_n - E_{n'} - k}, \quad (7.114)$$

где  $E_n$  и  $E_{n'}$  обозначают невозмущенные уровни;  $E_n \approx m - mZ^2\alpha^2/2n^2$ . Область интегрирования по  $\mathbf{x}$  эффективно ограничивается боровским радиусом. Соответственно имеем  $K|\mathbf{x}| \ll K/mZ\alpha$ . Согласно нашему предположению о характере параметра обрезания  $K$ , величину  $K/mZ\alpha$  можно считать очень малой, что оправдывает дипольное приближение, в котором  $e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}$  заменяется единицей. Определим вектор  $\mathbf{v}_{\text{ор}} = (1/im)\nabla$  и заметим, что

$$\sum_{\lambda=1,2} |\langle n | \mathbf{v}_{\text{ор}} \cdot \varepsilon_\lambda(\mathbf{k}) | n' \rangle|^2 = \left( \delta^{ab} - \frac{k^a k^b}{k^2} \right) \langle n | v_{\text{ор}}^a | n' \rangle \langle n' | v_{\text{ор}}^b | n \rangle$$

$$\text{и} \quad \int \frac{d\Omega}{4\pi} \left( \delta^{ab} - \frac{k^a k^b}{k^2} \right) = \frac{2}{3} \delta_{ab}.$$

Таким образом, получаем

$$\delta E_n^< = \frac{2\alpha}{3\pi} \sum_{n'} \int_0^K \frac{dk k}{E_n - E_{n'} - k} |\langle n | \mathbf{v}_{\text{ор}} | n' \rangle|^2. \quad (7.115)$$

Это выражение не является еще правильным, поскольку в нем не учтена перенормировка массы, в том смысле, что в определение  $\mathbf{v}_{\text{ор}}$  входит физическая масса. Из нее необходимо еще вычесть вклад очень мягких фотонов ( $k < K$ ) в собственную массу. Иными словами, в гамильтониан должен быть введен контрчлен вида  $-(\delta m/2m^2) \mathbf{p}_{\text{ор}}^2 = -(\delta m/2) \mathbf{v}_{\text{ор}}^2$ . При этом  $\delta m$  выбирается таким образом, чтобы в случае свободного электрона  $\delta E^< = 0$ . Поскольку



$\langle n | \mathbf{v}_{\text{оп}}^2 | n \rangle = \sum_{n'} |\langle n | \mathbf{v}_{\text{оп}} | n' \rangle|^2$ , а  $K \gg |E_n - E_{n'}|$ , то очевидно, что правильное выражение для  $\delta E^<$  запишется в виде

$$\begin{aligned} \delta E_n^< &= \frac{2\alpha}{3\pi} \sum_{n'} \int_0^K dk k \left( \frac{1}{E_n - E_{n'} - k} + \frac{1}{k} \right) |\langle n | \mathbf{v}_{\text{оп}} | n' \rangle|^2 = \\ &= \frac{2\alpha}{3\pi} \sum_{n'} (E_{n'} - E_n) \ln \left| \frac{K}{E_n - E_{n'}} \right| |\langle n | \mathbf{v}_{\text{оп}} | n' \rangle|^2 \quad (7.116) \end{aligned}$$

На этой стадии мы можем проводить только численные расчеты. Бете, который первым вычислил этот нерелятивистский вклад, ввел следующее логарифмическое среднее. Для состояния  $|n\rangle$  в  $s$ -волне определим  $\langle E_n \rangle$  с помощью соотношения

$$\ln \langle E_n \rangle = \frac{\sum_{n'} |\langle n | \mathbf{v}_{\text{оп}} | n' \rangle|^2 (E_{n'} - E_n) \ln |E_{n'} - E_n|}{\sum_{n'} |\langle n | \mathbf{v}_{\text{оп}} | n' \rangle|^2 (E_{n'} - E_n)}, \quad l=0. \quad (7.117)$$

Здесь используется произвольная, но фиксированная энергетическая шкала. Это определение становится бессмысленным для волн более высоких порядков ( $l \neq 0$ ), для которых, как мы вскоре убедимся, знаменатель в (7.117) обращается в нуль. Следовательно, в этом случае  $\delta E^<$  не зависит от  $K$ , что является благоприятным обстоятельством. Тем не менее для этого случая определим величину  $\langle E_n \rangle$  следующим образом:

$$\begin{aligned} \delta E_n^< &= \frac{2\alpha}{3\pi} \sum_{n'} |\langle n | \mathbf{v}_{\text{оп}} | n' \rangle|^2 (E_{n'} - E_n) \ln \frac{1}{|E_n - E_{n'}|} = \\ &= \frac{4\alpha}{3\pi} \frac{(Z\alpha)^4}{n^3} m \ln \frac{Z^2 \text{Ryd}}{\langle E_n \rangle}, \quad l \neq 0, \quad (7.118) \\ \text{Ryd} &= \frac{m\alpha^2}{2}. \end{aligned}$$

В случае  $s$ -волн, используя соотношение (7.117), имеем

$$\delta E_n^< = \frac{2\alpha}{3\pi} \sum_{n'} |\langle n | \mathbf{v}_{\text{оп}} | n' \rangle|^2 (E_{n'} - E_n) \ln \frac{K}{\langle E_n \rangle}, \quad l=0.$$

Преобразуем это выражение. Если  $H_0$  — шредингеровский гамильтониан, включающий кулоновский потенциал, то можно написать

$$\begin{aligned} \sum_{n'} (E_{n'} - E_n) |\langle n | \mathbf{v}_{\text{оп}} | n' \rangle|^2 &= \langle n | [\mathbf{v}_{\text{оп}}, H_0] \cdot \mathbf{v}_{\text{оп}} | n \rangle = \\ &= \langle n | \mathbf{v}_{\text{оп}} \cdot [H_0, \mathbf{v}_{\text{оп}}] | n \rangle = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= -\frac{1}{2m^2} \langle n | \left\{ \left[ \mathbf{p}_{\text{оп}}, \frac{Z\alpha}{|\mathbf{x}|} \right] \cdot \mathbf{p}_{\text{оп}} + \mathbf{p}_{\text{оп}} \cdot \left[ \frac{Z\alpha}{|\mathbf{x}|}, \mathbf{p}_{\text{оп}} \right] \right\} | n \rangle = \\
 &= \frac{1}{2m^2} \int d^3x \nabla \left( \frac{Z\alpha}{|\mathbf{x}|} \right) \cdot \nabla [\psi^*(\mathbf{x}) \psi(\mathbf{x})] = \frac{Z\alpha}{2m^2} 4\pi |\psi(0)|^2 = \frac{2m(Z\alpha)^4}{n^3} \delta_{l,0}.
 \end{aligned}$$

Отсюда для  $s$ -волн находим

$$\delta E_n^< = \frac{4\alpha(Z\alpha)^4}{3\pi} \frac{m}{n^3} \ln \frac{K}{\langle E_n \rangle}, \quad l=0. \quad (7.119)$$

Соберем теперь все вклады:  $\delta E^<$ , определяемый формулами (7.118) и (7.119),  $\delta E^>$ , определяемый (7.111), и  $\delta E^{(2)}$ , задаваемый формулой (7.109) (он дает вклад также и для  $l=0$ ). Произвольные величины  $\mu$  и  $K$  выпадают, и мы имеем для лэмбовского сдвига следующее выражение:

$$\delta E_{n,l} = \frac{4\alpha(Z\alpha)^4}{3\pi} \frac{m}{n^3} \begin{cases} \ln \frac{m}{2\langle E_{n,l} \rangle} + \frac{19}{30}, & l=0, \\ \ln \frac{Z^2 \text{Ryd}}{\langle E_{n,l} \rangle} + \frac{3}{8} \frac{C_{l,l}}{2l+1}, & l \neq 0, \end{cases} \quad (7.120)$$

где  $C_{l,l}$  даются формулой (7.109).

Главный вклад был вычислен Бете, в то время как члены порядка  $\alpha(Z\alpha)^4$  были получены Крэллом и Лэмбом, а также Фрэнчем и Вайскопфом.

В случае атома водорода величина расщепления уровней  $2S_{1/2} - 2P_{1/2}$ , вычисленная по формуле (7.120) с использованием численных значений

$$\langle E_{2S} \rangle = 16,640 \text{ Ryd}, \quad \langle E_{2P} \rangle = 0,9704 \text{ Ryd}, \quad (7.121)$$

равна

$$E_{2S_{1/2}} - E_{2P_{1/2}} = \frac{m\alpha^5}{6\pi} \left( \ln \frac{m \langle E_{2P} \rangle}{2 \text{Ryd} \langle E_{2S} \rangle} + \frac{91}{120} \right) = 1052,1 \text{ МГц}. \quad (7.122)$$

Это значение хорошо согласуется с измерением, выполненным в 1953 г. Трибассером, Дейхоффом и Лэмбом, а именно со значением  $1057,8 \pm 0,1$  МГц.

Чтобы улучшить вычисления, необходимо разработать более точный теоретический подход. Дальнейшие поправки должны включать уточнение электронного пропагатора в кулоновском поле (высшие степени и логарифмы  $Z\alpha$ ) и требуют рассмотрения радиационных поправок высших порядков. Следует также учесть отдачу ядер [в членах  $(m/M)(Z\alpha)^4$  и  $(m/M)(Z\alpha)^5$ ] и эффекты конечных размеров ядер  $R_\nu$  [в членах  $(R_\nu/m)^2(Z\alpha)^4$ ]. Это сделали Эрикссон (1971 г.), нашедший величину расщепления  $1057,916 \pm 0,010$  МГц, или Мор (1975 г.), получивший  $1057,864 \pm 0,014$  МГц. При вычислении этих значений основная неопределенность обусловлена высшими порядками по связи ( $Z\alpha$ ) и вторым порядком ( $\alpha^2$ ) для собственной энергии электрона. Последние экспериментальные значения составляют  $1057,893 \pm 0,020$  МГц (Лундин и Пипкин, 1975 г.) и  $1057,862 \pm 0,020$  МГц (Эндрюс и Ньютон, 1976 г.)<sup>1)</sup>.

<sup>1)</sup> В настоящее время величина лэмбовского сдвига в атоме водорода измерена с точностью до  $10^{-4}$ :  $E_{2S_{1/2}} - E_{2P_{1/2}} = 1057,8583$  МГц (см. примечание в конце настоящей главы). — Прим. ред.

### 7.3.3. Силы Ван-дер-Ваальса на больших расстояниях

Вернемся к вопросу, который мы начали рассматривать в гл. 3, о поведении на больших расстояниях потенциала взаимодействия между поляризуемыми нейтральными системами. Наше обсуждение будет основываться на работах Файнберга и Сачера

Как мы убедились ранее, исходя из плотности феноменологического гамильтониана, можно вычислить энергию взаимодействия поляризуемой нейтральной частицы, которая описывается скалярным эрмитовым полем  $\varphi$  с медленно меняющимся электромагнитным полем. Этот гамильтониан записывается в виде

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{вз} &= g_1 \partial_\alpha \varphi \partial_\beta \varphi F^{\alpha\nu} F_\nu^\beta + g_2 \varphi^2 F^2, \\ g_1 &= -\frac{\alpha_E + \alpha_B}{2m}, \quad g_2 = -\frac{m}{4} \alpha_B. \end{aligned} \quad (7.123)$$

Константы связи  $g_1$  и  $g_2$  соотносятся с электрической ( $\alpha_E$ ) и магнитной ( $\alpha_B$ ) восприимчивостью таким образом, что покоящаяся частица вносит следующую добавку в энергию взаимодействия:

$$\mathcal{E}_{вз} = -\alpha_E E^2/2 - \alpha_B \mathbf{B}^2/2. \quad (7.124)$$

Под рассматриваемой системой можно, например, подразумевать атом, внутренней структурой которого мы не интересуемся, за исключением параметров  $\alpha_E$  и  $\alpha_B$ . Отметим, что эти величины имеют размерность объема. Чтобы определить статический потенциал взаимодействия между такими системами, поступим следующим образом. Предположим, что  $\alpha_E$  и  $\alpha_B$  достаточно малы, так что можно в соответствии с золотым правилом Ферми отождествить борновский член амплитуды рассеяния в низкоэнергетической области с фурье-образом потенциала и написать

$$d\sigma_{ab}^{nr} = \frac{1}{v_{ab}} | -i\tilde{V}(\mathbf{q}) |^2 \frac{d^3 p_f}{(2\pi)^3} 2\pi\delta(E_f - E_i). \quad (7.125)$$

Здесь  $v_{ab}$  обозначает относительную скорость частиц  $a$  и  $b$ ,  $\mathbf{q}$  есть передаваемый импульс и  $\tilde{V}(\mathbf{q})$  таково, что

$$V(\mathbf{r}) = \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \tilde{V}(\mathbf{q}) e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}}. \quad (7.126)$$

Пусть  $\mathcal{F}$  — полностью релятивистская амплитуда рассеяния, соответствующая в нижшем порядке взаимодействию (7.123) (см. рис. 7.16). Рассмотрим пороговое поведение релятивистского сечения, т. е. предел  $(p_a + p_b)^2 \rightarrow (m_a + m_b)^2$ :

$$\begin{aligned} d\sigma_{ab}^R &= \frac{1}{4 [(p_a \cdot p_b)^2 - m_a^2 m_b^2]^{1/2}} |\mathcal{F}|^2 \frac{d^3 p'_a d^3 p'_b}{(2\pi)^3 (2E'_a) (2\pi)^3 (2E'_b)} \times \\ &\quad \times (2\pi)^4 \delta^4(p'_a + p'_b - p_a - p_b). \end{aligned}$$

В этом пределе  $p_a \cdot p_b \approx m_a m_b + (p^2/2) [(m_a + m_b)^2 / (m_a m_b)]$ , где  $p = |\mathbf{p}|$  равна величине полного 3-импульса частиц  $a$  и  $b$  в системе центра масс. В результате получаем

$$\begin{aligned} [(p_a \cdot p_b)^2 - m_a^2 m_b^2]^{1/2} &\approx (m_a + m_b) p = m_a m_b \left| \frac{\mathbf{p}}{m_a} - \frac{\mathbf{p}}{m_b} \right| = m_a m_b v_{ab}, \\ d\sigma^R &\rightarrow \frac{1}{v_{ab}} \left| \frac{\mathcal{F}}{4m_a m_b} \right|^2 \frac{d^3 p_f}{(2\pi)^3} 2\pi\delta(E_f - E_i). \end{aligned} \quad (7.127)$$

Это означает, что вблизи порога можно написать:

$$-i\tilde{V}(q) = \mathcal{F}/4m_a m_b, \quad (7.128)$$

где  $-q^2$  отождествляется с квадратом передаваемого релятивистского импульса  $q^2 = (p_a - p'_a)^2$ , а квадрат энергии в системе центра масс  $s = (p_a + p_b)^2$  берется равным  $(m_a + m_b)^2$ .

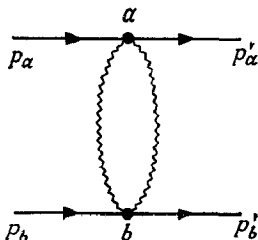


РИС. 7.16. Взаимодействие между нейтральными системами, обладающими электрической и магнитной восприимчивостью.

С помощью (7.123) можно вычислить амплитуду  $\mathcal{F}$  в приближении  $g^2$ , как представлено на диаграмме рис. 7.16. Это снова однопетлевая диаграмма с сильной ультрафиолетовой расходимостью. Размерность константы связи такова, что теория, основанная на гамильтониане (7.123), неперенормируема. Тем не менее мы решили использовать ее лишь для феноменологического описания. В любом порядке мы можем выполнить конечное число ультрафиолетовых вычитаний, не изменяя поведения потенциала  $V$  на больших расстояниях, которое мы намереваемся определить. Таким образом, мы можем достичь нашей цели. Элементарное спаривание, которое необходимо для применения теории возмущений, имеет вид

$$\langle 0 | T F_{\mu\nu}(x) F_{\rho\sigma}(y) | 0 \rangle = -i \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ik \cdot (x-y)}}{k^2 + i\epsilon} K_{\mu\nu, \rho\sigma}(k),$$

$$K_{\mu\nu, \rho\sigma}(k) = k_\mu k_\nu g_{\rho\sigma} - k_\nu k_\rho g_{\mu\sigma} - k_\mu k_\sigma g_{\nu\rho} + k_\nu k_\sigma g_{\mu\rho}. \quad (7.129)$$

До проведения каких-либо вычитаний правила Фейнмана дают амплитуду  $\mathcal{F}$  следующего вида

$$\mathcal{F} = \int \frac{a^4 k a^4 k' \delta^4(k+k'-q)}{(2\pi)^4 (k^2 + i\epsilon) (k'^2 + i\epsilon)} d(k, k'),$$

$$d(k, k') = 8g_2^a g_2^b K_{\mu\nu, \rho\sigma}(k) K^{\mu\nu, \rho\sigma}(k') + [4g_1^a g_1^b (p_\alpha^a p_\beta'^a + p_\beta^a p_\alpha'^a) K^{\alpha\nu, \rho\sigma}(k) K_{\nu, \rho\sigma}^\beta(k') + (a \leftrightarrow b)] + g_1^a g_1^b [(p_\alpha^a p_\beta'^a + p_\beta^a p_\alpha'^a) K^{\alpha\nu, \alpha'\nu'}(k) K_{\nu, \nu'}^\beta(k') \times (p_\alpha^b p_\beta'^b + p_\beta^b p_\alpha'^b) + (k \leftrightarrow k')]. \quad (7.130)$$

Удобный способ провести ультрафиолетовые вычитания, не изменяя поведения потенциала на больших расстояниях, основан на том факте, что для фиксированного значения  $s = (p_a + p_b)^2$  амплитуда  $\mathcal{F}$  — аналитическая (и чисто мнимая) функция вдоль полуоси  $q^2 < 0$ . Разрез же вдоль вещественной оси возникает из-за реальной части амплитуды, а мы интересуемся только окрестностью  $q^2 = 0$ . Поэтому можно написать следующее соотношение:

$$\mathcal{F} = \frac{1}{i\pi} \int_0^{M^2} dm^2 \frac{\mathcal{F} R(m^2)}{m^2 - q^2 - i\epsilon} + \Delta\mathcal{F}(q^2), \quad (7.131)$$

где  $\Delta \mathcal{F}$  регулярна в окрестности  $q^2=0$ , а  $M^2$ —произвольная положительная величина. Отсюда с помощью (7.126) и (7.128) получаем асимптотическое поведение потенциала в виде

$$\begin{aligned} V_{ac}(r) &= \frac{1}{16\pi^2 m_a m_b r} \int_0^{M^2} dm^2 \mathcal{F}_R(m^2) e^{-mr} = \\ &= \frac{1}{16\pi^2 m_a m_b r^3} \int_0^{M^2 r^2} dy^2 \mathcal{F}_R\left(\frac{y^2}{r^2}\right) e^{-y}. \end{aligned} \quad (7.132)$$

Скоро мы увидим, что  $\mathcal{F}_R(q^2)$  ведет себя как  $-A(q^2)^2$  для  $q^2 \rightarrow 0$ , так что доминирующий вклад в  $V$  можно получить переходом к пределу  $Mr \rightarrow \infty$  в (7.132), т. е.

$$V_{ac}(r) = \frac{-A}{16\pi^2 m_a m_b r^7} \int_0^\infty dx^2 x^4 e^{-x} = \frac{5!A}{8\pi^2 m_a m_b r^7}. \quad (7.133)$$

Остается вычислить  $A$ . Прежде всего заметим, что каждый знаменатель в (7.130) может быть расщелен на два слагаемых по формуле  $1/(k^2 + i\epsilon) = PP/k^2 - i\pi\delta(k^2)$  (здесь  $PP$  обозначает взятие интеграла в смысле главного значения) Введем сокращенное обозначение  $P - i\pi\delta$ . С точностью до полинома  $d$  подынтегральное выражение в (7.130) имеет вид

$$(P - i\pi\delta)(P' - i\pi\delta') = PP' - \pi^2\delta\delta' - i\pi(\delta P + \delta'P).$$

Это, конечно, не что иное, как фурье-образ функции  $[G_F(x-y)]^2$  в конфигурационном пространстве, где  $G_F$ —пропагатор Фейнмана. Тогда  $d$  действует на эту величину как полином, составленный из производных. Если бы вместо  $G_F^2$  мы использовали произведение  $G_{adv}(x-y)G_{ret}(x-y)$ , носитель которого самое большее сосредоточен при  $x=y$ , то получили бы с помощью фурье-преобразования плохо определенный полином по импульсам, не дающий вклада в реальную часть  $\mathcal{F}$ . Следовательно, в нашем случае замена

$$\frac{1}{k^2 + i\epsilon} \frac{1}{k'^2 + i\epsilon} \rightarrow \frac{1}{k^2 + i(k^0/k^0)\epsilon} \frac{1}{k'^2 - i(k'^0/k'^0)\epsilon}$$

дает нуль. Это означает, что мы можем вычесть из выписанного выше выражения комбинацию

$$(P - i\pi\delta)(P' + i\pi\epsilon'\delta') = PP' + \pi^2\epsilon\epsilon'\delta\delta' + i\pi(P\epsilon'\delta' - P'\epsilon\delta),$$

где  $\epsilon\delta$  обозначает  $(k^0/k^0)\delta(k^2)$ . В результате получаем

$$(P' - \pi^2\delta\delta') - (PP' + \pi^2\epsilon\epsilon'\delta\delta') = -\pi^2(1 + \epsilon\epsilon')\delta\delta'.$$

Отметим, что  $1 + \epsilon\epsilon' = 2$ , если  $k^0$  и  $k'^0$  имеют одинаковый знак, в противном случае  $1 + \epsilon\epsilon' = 0$ , и что  $\delta$ -функции проектируют фотоны на массовую поверхность. При  $q^2 > 0$ , учитывая закон сохранения энергии-импульса  $k+k'=q$ , мы можем сохранить только одну из двух возможностей:  $k^0 > 0$  или  $k'^0 > 0$ . Итак, мы имеем

$$\mathcal{F}_R = -\frac{1}{2} \int \frac{d^3k}{2k^0(2\pi)^3} \frac{d^3k'}{2k'^0(2\pi)^3} (2\pi)^4 \delta^4(k+k'-q) d(k, k')|_{k^2=k'^2=0}. \quad (7.134)$$

Эти затянувшиеся рассуждения есть не что иное, как применение правила Кутковского (гл. 6) к данному конкретному случаю. Конечно, амплитуда  $\mathcal{F}_R$ ,

выраженная через (7.134), — это сходящаяся величина, а мы просто желаем узнать поведение ее основного вклада вблизи  $q^2=0$ . Вычислим сперва величину  $d(k, k')$ , определяемую соотношением (7.130). Явная его запись несколько громоздка:

$$d(k, k') \Big|_{k^2=k'^2=0} = 64g_2^a g_2^b (k \cdot k')^2 + 16g_1^a g_2^b (p^a \cdot p'^a) (k \cdot k')^2 + 16g_1^b g_2^a (p^b \cdot p'^b) (k \cdot k')^2 + \\ + 4g_1^a g_1^b [(p^a \cdot p^b) (p'^a \cdot p'^b) (k \cdot k')^2 - (p^a \cdot p^b) (p'^a \cdot k) (p'^b \cdot k') (k \cdot k') - \\ - (p^a \cdot p^b) (p'^a \cdot k') (p'^b \cdot k) (k \cdot k') - (p'^a \cdot p'^b) (p^a \cdot k) (p^b \cdot k') (k \cdot k') - \\ - (p'^a \cdot p'^b) (p^a \cdot k') (p^b \cdot k) (k \cdot k') - (p^a \cdot p^b) (p^a \cdot k) (p^b \cdot k') (k \cdot k') - \\ - (p^a \cdot p^b) (p^a \cdot k') (p^b \cdot k) (k \cdot k') - (p'^a \cdot p'^b) (p^a \cdot k) (p^b \cdot k') (k \cdot k') - \\ - (p'^a \cdot p'^b) (p^a \cdot k') (p^b \cdot k) (k \cdot k') - (p^a \cdot p^b) (p^a \cdot k) (p^b \cdot k') (k \cdot k') + \\ + (p^a \cdot p^a) (p^b \cdot k) (p'^b \cdot k') (k \cdot k') + (p^a \cdot p^a) (p^b \cdot k') (p'^b \cdot k) (k \cdot k') + \\ + (p^b \cdot p^b) (p^a \cdot k) (p'^a \cdot k') (k \cdot k') + (p^b \cdot p^b) (p^a \cdot k') (p'^a \cdot k) (k \cdot k') + \\ + 2(p^a \cdot k') (p'^a \cdot k') (p^b \cdot k) (p'^b \cdot k) + 2(p^a \cdot k) (p'^a \cdot k) (p^b \cdot k') (p'^b \cdot k')]. \quad (7.135)$$

С учетом того что  $2k \cdot k' = q^2$ , нам надо подсчитать коэффициент при  $(q^2)^2$  после интегрирования. Поэтому скалярные произведения, на которые умножается  $(q^2)^2$ , т.е.  $p^a \cdot p^b$  или  $p^a \cdot p'^a$  ..., могут быть заменены на  $m_a m_b$ ,  $m_a^2$ , ... Положим

$$\mathcal{F} R = -\frac{1}{2} \int \frac{d^3 k}{2k^0 (2\pi)^3} \frac{d^3 k'}{2k'^0 (2\pi)^3} (2\pi)^4 \delta^4(k+k'-q) d = -\frac{\theta(q^2)}{16\pi} \langle d \rangle, \quad (7.136)$$

где  $\langle d \rangle$  является функцией только  $q^2$  вблизи порога и выражается в виде

$$\langle d \rangle = \frac{\int (d^3 k/k^0) (d^3 k'/k'^0) \delta^4(k+k'-q) d}{\int (d^3 k/k^0) (d^3 k'/k'^0) \delta^4(k+k'-q)}. \quad (7.137)$$

Нам понадобится величина

$$\langle k_\alpha k'_\nu \rangle = \frac{1}{6} q_\mu q_\nu + \frac{1}{12} g_{\mu\nu} q^2, \quad (7.138)$$

которую легко вычислить, зная, что ее след равен  $q^2/2$ , а также

$$\langle k'_\mu k'_\nu k_\alpha k_\beta \rangle = a q_\mu q_\nu q_\alpha q_\beta + b (q_\nu q_\mu g_{\alpha\beta} + q_\alpha q_\nu g_{\mu\beta} + q_\alpha q_\nu g_{\mu\alpha} + q_\nu q_\beta g_{\mu\alpha}) + \\ + c q^2 (q_\mu q_\alpha g_{\nu\beta} + q_\nu q_\alpha g_{\mu\beta} + q_\beta g_{\nu\alpha} + q_\nu q_\beta g_{\mu\alpha}) + \\ + d (q^2)^2 g_{\mu\nu} g_{\alpha\beta} + e (q^2)^2 (g_{\mu\nu} g_{\alpha\beta} + g_{\nu\alpha} g_{\mu\beta}). \quad (7.139)$$

Формула (7.139) получается в пренебрежении всеми членами, ведущими себя как высшие степени  $q^2$ , и с использованием очевидных симметрий относительно замены  $(\mu \leftrightarrow \nu)$ ,  $(\alpha \leftrightarrow \beta)$ ,  $(\mu, \nu \leftrightarrow \alpha, \beta)$ . Чтобы получить пять коэффициентов  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$  и  $e$ , используем следующие пять условий:

1. При взятии частичного следа по индексам  $(\mu, \nu)$  мы должны получить нуль (уравнение массовой поверхности), что приводит к равенствам

$$a + 4b + 4c = 0, \quad b + 4d + 2e = 0.$$

2. При взятии частичного следа по индексам  $(\nu, \alpha)$  мы получаем величину  $q^2/2 \langle k'_\mu k'_\beta \rangle$ , уже вычисленную нами ранее; отсюда следует

$$a + 2b + 6c = \frac{1}{12}, \quad c + d + 5e = \frac{1}{24}.$$

3. Наконец, свертка с  $q^\mu q^\nu q^\alpha q^\beta$  дает  $(q^2/2)^4$ , что приводит к соотношению

$$a + 2b + 4c + d + 2e = \frac{1}{16}.$$

Решая эту систему, находим коэффициенты, которые понадобятся нам в дальнейшем:

$$d = e = \frac{1}{15 \times 16}. \quad (7.140)$$

Вблизи порога справедливо выражение

$$\begin{aligned} \langle d \rangle = & 64g_2^a g_2^b \left(\frac{q^2}{2}\right)^2 + 16g_1^a g_2^b \left(\frac{q^2}{2}\right)^2 m_a^2 + 16g_1^b g_2^a \left(\frac{q^2}{2}\right)^2 m_b^2 + \\ & + 4g_1^a g_1^b \left\{ 2m_a^2 m_b^2 \left(\frac{q^2}{2}\right)^2 - \frac{q^2}{12} \{ (p^a \cdot p^b) [2(q \cdot p^a)(q \cdot p^b) + q^2(p^a \cdot p^b)] + \right. \\ & + (p^a \cdot p^b) [2(q \cdot p^a)(q \cdot p^b) + q^2(p^a \cdot p^b)] + (p^a \cdot p^b) [2(q \cdot p^a)(q \cdot p^b) + \\ & + q^2(p^a \cdot p^b)] + (p^a \cdot p^b) [2(q \cdot p^a)(q \cdot p^b) + q^2(p^a \cdot p^b)] \} + \\ & + \frac{q^2}{12} \{ (p^a \cdot p^a) [2(q \cdot p^b)(q \cdot p^b) + q^2(p^b \cdot p^b)] + (p^b \cdot p^b) [2(q \cdot p^a)(q \cdot p^a) + \\ & \left. + q^2(p^a \cdot p^a)] \} + 4 \langle (p^a \cdot k') (p^a \cdot k') (p^b \cdot k) (p^b \cdot k) \rangle \right\}. \quad (7.141) \end{aligned}$$

Однако все произведения  $q \cdot p^a$ ,  $q \cdot p^a$ ,  $q \cdot p^b$ ,  $q \cdot p^b$  пропорциональны  $q^2$ . Например,

$$q \cdot p^a = (p^a - p^a) \left( \frac{p^a + p^a}{2} + \frac{p^a - p^a}{2} \right) = -\frac{q^2}{2}.$$

Поэтому при извлечении коэффициента при  $(q^2)^2$  все члены, содержащие скалярные произведения  $q$  с внешним импульсом, можно отбросить. В частности, вклад последнего среднего значения равен величине

$$\langle (p^a \cdot k') (p^a \cdot k') (p^b \cdot k) (p^b \cdot k) \rangle \approx m_a^2 m_b^2 (q^2)^2 (d + 2e) = \frac{m_a^2 m_b^2 (q^2)^2}{80}.$$

Таким образом, коэффициент  $A$ , определяемый из разложения  $\mathcal{F}_A = -A(q^2)^2 + \dots$ , равен

$$\begin{aligned} A = & \frac{1}{16\pi} [16g_2^a g_2^b + 4(m_a^2 g_1^a g_2^b + m_b^2 g_1^b g_2^a) + \frac{23}{15} m_a^2 m_b^2 g_1^a g_1^b] = \\ = & \frac{m_a m_b}{16\pi} \left[ \alpha_B^a \alpha_B^b - \frac{1}{2} (\alpha_E^a + \alpha_B^a) \alpha_B - \frac{1}{2} (\alpha_E^b + \alpha_B^b) \alpha_B^a + \frac{23}{60} (\alpha_E^a + \alpha_B^a) (\alpha_E^b + \alpha_B^b) \right]. \quad (7.142) \end{aligned}$$

Возвращаясь к выражению (7.133), мы получаем асимптотическое поведение потенциала Ван дер-Ваальса в виде

$$V_{ac}(r) = - \frac{[23(\alpha_E^a \alpha_L^a + \alpha_B^a \alpha_B^a) - 7(\alpha_E^a \alpha_B^a + \alpha_E^b \alpha_B^a)]}{(4\pi)^3 r^7}. \quad (7.143)$$

Закончим этот раздел кратким комментарием, касающимся связи между релятивистским потенциалом  $1/r^7$  и обычным нерелятивистским потенциалом,

ведущим себя как  $1/r^6$ , в пренебрежении эффектами запаздывания. В нерелятивистском подходе учитываются только мгновенные кулоновские силы. В целях упрощения рассмотрим два атома водорода, расположенные на расстоянии  $|r_a - r_b|$  друг от друга, электроны которых имеют координаты  $r_a + r_1$  и  $r_b + r_2$ . Пренебрегая вместе со спинами принципом Паули, потенциал взаимодействия можно записать в виде

$$V = \frac{e^2}{4\pi} \left( \frac{1}{|r_a - r_b|} + \frac{1}{|r_a + r_1 - r_b - r_2|} - \frac{1}{|r_a + r_1 - r_b|} - \frac{1}{|r_b + r_2 - r_a|} \right).$$

На больших расстояниях без учета угловой зависимости это выражение качественно можно представить в виде  $(e^2/4\pi r_{ab}^3) r_1 r_2$ . Однако именно из-за угловой зависимости вклад первого порядка теории возмущений исчезает (используется адиабатическое приближение). Во втором порядке мы получим отрицательный вклад следующего вида:

$$V_{\text{пр}} \sim - \frac{1}{(r_{ab})^6} \langle e^2 r_1^2 \rangle_a \langle e^2 r_2^2 \rangle_b \frac{1}{\Delta E},$$

где  $\Delta E$  — характерная энергия возбуждения атома. Подобным же образом получается (электрическая) восприимчивость  $\alpha$  для любого атома, если рассмотреть взаимодействие  $eE \cdot r$  во втором порядке; в результате

$$\alpha \sim \frac{\langle e^2 r^2 \rangle}{\Delta E}.$$

В итоге находим

$$V_{\text{пр}} \sim - \frac{\Delta E \alpha_a \alpha_b}{(r_{ab})^6}.$$

Следовательно, мы можем ожидать, что формула, интерполирующая между зависимостями  $r^{-6}$  и  $r^{-7}$ , учитывает характерное время запаздывания  $\tau \sim \hbar/\Delta E$ . Переход от одного режима к другому должен происходить на расстояниях порядка  $ct = \hbar c/\Delta E$ , где  $\Delta E$  следует рассматривать как часть энергии ионизации. Для водорода эта величина составляет около  $10^2$  боровских радиусов. В реалистической теории жидкостей это приводит к тому, что мы всегда можем пользоваться нерелятивистским приближением.

## ПРИМЕЧАНИЯ

Радиационные поправки излагаются во всех учебниках и во многих оригинальных статьях, воспроизведенных в книге: *Schwinger J.* — *Quantum Electrodynamics.* — New York: Dover, 1958.

Здесь мы приводим краткий список литературы по соответствующим вопросам.

Калибровочно-инвариантная регуляризация рассматривается в работе: *Pauli W., Villars F.* — *Rev. Mod. Phys.*, 1949, vol. 21, p. 434 [Имеется перевод в сб. статей: «Сдвиг уровней атомных электронов». — М.: ИЛ, 1950, с. 139.]. Поляризация вакуума в пределе  $k^2 \rightarrow 0$  дается в статье: *Uehling E. A.* — *Phys. Rev.*, 1935, vol. 48, p. 55. В работе: *Schwinger J.* — *Phys. Rev.*, 1950, vol. 75, p. 651 имеется исчерпывающее рассмотрение. Тождество Уорда см. в статьях: *Ward J. C.* — *Phys. Rev.*, 1950, vol. 78, p. 182; *Takahashi Y.* — *Nuovo Cimento*, 1957, vol. 6, p. 371. Аномалия электронов порядка  $\alpha$  обсуждается в работе: *Schwinger J.* — *Phys. Rev.*, 1948, vol. 73, p. 416 [Имеется перевод в сб. статей «Новейшее развитие квантовой электродинамики». — М.: ИЛ, 1954,



с. 40.]. Об электронных формфакторах порядка  $\alpha$  см.: *Feynman R. P.*— *Phys. Rev.*, 1949, vol. 76, p. 769 [Имеется перевод в сб. статей: «Новейшее развитие квантовой электродинамики».— М.: ИЛ, 1954, с. 161.]. Обзор работ 60-х годов по поправкам высших порядков дан в работе: *Laurrup B., Peterman A., de Rafael E.*— *Phys. Rev.*, 1972, vol. 3C, p. 193. Последние теоретические результаты, приведенные в данной главе, заимствованы из работы: *Cvitanović P., Kinoshita T.*— *Phys. Rev.*, ser. D, 1974, vol. 10, p. 4007. Большое число теоретиков также внесли свой вклад в эти усилия. Изумляющей точности экспериментальная величина получена в работе: *Van Dyck R. S., Schwinger P. B., Dehmelt H. G.*— *Phys. Rev. Lett.*, 1977, vol. 38, p. 310. Экспериментальное значение аномального магнитного момента мюона взято из работы: *Bailey J., Borer K. et al.*— *Phys. Lett.*, 1977, vol. 68B, p. 191; теоретические значения этой величины мы заимствовали из обзора: *Calmet J. et al.*— *Rev. Mod. Phys.*, 1977, vol. 49, p. 21. Радиационные поправки к кулоновскому рассеянию впервые вычислил Швингер (см. *Schwinger J.*— *Phys. Rev.*, 1949, vol. 75, p. 1912). В части изложения этого вопроса мы следуем книге: *Ахиезер А. И., Берестецкий В. Б.* Квантовая электродинамика.— М.: Наука, 1969 Эта книга содержит исключительно много подробных вычислений. По инфракрасным расходимостям читатель может обратиться к работе: *D. Yennie, Frautschi S., H. Suura*, полная ссылка на которую имеется в гл. 4. Что касается лэмбовского сдвига, то общие аспекты водородоподобных атомных систем рассматриваются в книге: *Bethe H. A., Salpeter E.* *Quantum Mechanics of One and Two Electron Atoms.*— Berlin: Springer-Verlag, 1957 [Имеется перевод: *Бете Г., Соллптер Э.* Квантовая механика атомов с одним и двумя электронами.— М.: Физматгиз, 1960.]. Результаты решающего эксперимента приведены в работе: *Lamb W. E., Rutherford R. C.*— *Phys. Rev.*, 1947, vol. 72, p. 241. Более тонкое измерение было выполнено в 1950 г. (см. *Triebwasser S., Dayhoff E. S., Lamb W. E.*— *Phys. Rev.*, 1953, vol. 89, p. 98).

Современные данные, приведенные в тексте, взяты из следующих работ: *Lundeen S. R., Pipkin F. M.*— *Phys. Rev. Lett.*, 1975, vol. 34, p. 1368; *Andrews D. A., Newton G.*— *Phys. Rev. Lett.*, 1976, vol. 37, p. 1254. Более ранние теоретические расчеты представлены в статьях. *Bethe H. A.*— *Phys. Rev.*, 1947, vol. 72, p. 339 [Имеется перевод в сб. статей: «Сдвиг уровней атомных электронов».— М.: ИЛ, 1950, с. 82.] (нерелятивистское рассмотрение); *Kroll N. M., Lamb W. E.*— *Phys. Rev.*, 1949, vol. 75, p. 388, *French J. B., Weisskopf V. F.*— *Phys. Rev.*, 1949, vol. 75, p. 1240 (релятивистское рассмотрение). Обзор последовательной теории эффекта во всех порядках имеется, например, в статье: *Erickson G. W., Yennie D. R.*— *Annals of Physics*, 1965, vol. 35, pp. 271, 447. Теоретические результаты заимствованы из работ: *Erickson G. W.*— *Phys. Rev. Lett.*, 1971, vol. 27, p. 780; *Mohr P. J.*— *Phys. Rev. Lett.*, 1975, vol. 34, p. 1050.

Полученные в последнее время оценки точности, достижимые при вычислениях в высших порядках, можно найти в книге: *Kinoshita T.* *Perspective of Quantum Physics.*— Tokyo: Iwanami Shoten, 1978.

Излишне говорить, что этот короткий перечень литературы не претендует на полноту и, разумеется, хоть на какую-то справедливость по отношению к огромному множеству прекрасных экспериментальных и теоретических работ по квантовой электродинамике.

## ПРИМЕЧАНИЕ РЕДАКТОРА ПЕРЕВОДА

Величина лэмбовского сдвига взята из обзорного доклада: *Lepage G. P., Yennie D. R.* The implications of QED theory for fundamental constants. В сб. статей: *Proc. of the Second Intern. Confer. on Precision Measurement and Fundamental Constants*, National Bureau of Standards, Gaithersburg, Maddison, 1982.

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие редактора перевода . . . . .	5
Предисловие . . . . .	7
Предисловие к русскому изданию . . . . .	9
Общая литература . . . . .	10
<b>Глава 1. КЛАССИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ . . . . .</b>	<b>13</b>
1.1. Принцип наименьшего действия . . . . .	13
1.1.1. Классическое движение . . . . .	13
1.1.2. Электромагнитное поле как бесконечная динамическая система . . . . .	20
1.1.3. Электромагнитное взаимодействие точечной частицы . . . . .	27
1.2. Симметрии и законы сохранения . . . . .	34
1.2.1. Фундаментальные инварианты . . . . .	34
1.2.2. Тензор энергии-импульса . . . . .	38
1.2.3. Внутренние симметрии . . . . .	44
1.3. Распространение и излучение . . . . .	49
1.3.1. Функции Грина . . . . .	49
1.3.2. Излучение . . . . .	54
<b>Глава 2. УРАВНЕНИЕ ДИРАКА . . . . .</b>	<b>64</b>
2.1. Релятивистское волновое уравнение . . . . .	64
2.1.1. Квантовая механика и релятивизм . . . . .	64
2.1.2. Уравнение Дирака . . . . .	68
2.1.3. Релятивистская ковариантность . . . . .	71
2.2. Физическое содержание . . . . .	76
2.2.1. Решения в виде плоских волн и проекционные операторы . . . . .	76
2.2.2. Волновые пакеты . . . . .	80
2.2.3. Электромагнитное взаимодействие . . . . .	84
2.2.4. Преобразование Фолди—Ваутхайзена . . . . .	90
2.3. Водородоподобные атомы . . . . .	93
2.3.1. Сравнение нерелятивистского спектра с релятивистским . . . . .	94
2.3.2. Теория Дирака . . . . .	95
2.4. Теория дырок и зарядовое сопряжение . . . . .	106
2.4.1. Интерпретация решений с отрицательными энергиями . . . . .	106
2.4.2. Зарядовое сопряжение . . . . .	108
2.4.3. Частицы с нулевой массой . . . . .	110
2.5. Пропагатор Дирака . . . . .	113
2.5.1. Свободный пропагатор . . . . .	113
2.5.2. Распространение в произвольном внешнем электромагнитном поле . . . . .	117
2.5.3. Применение к кулоновскому рассеянию . . . . .	118
2.5.4. Метод собственного времени Фока—Швингера . . . . .	124

<b>Глава 3. КВАНТОВАНИЕ; СВОБОДНЫЕ ПОЛЯ</b> . . . . .	130
<b>3.1. Каноническое квантование</b> . . . . .	130
3.1.1. Общая формулировка . . . . .	133
3.1.2. Скалярное поле . . . . .	142
3.1.3. Заряженное скалярное поле . . . . .	149
3.1.4. Хронологическое произведение . . . . .	151
3.1.5. Термодинамическое равновесие . . . . .	153
<b>3.2. Квантованное поле излучения</b> . . . . .	156
3.2.1. Индефинитная метрика . . . . .	156
3.2.2. Пропагатор . . . . .	164
3.2.3. Массивное векторное поле . . . . .	165
3.2.4. Вакуумные флуктуации . . . . .	170
<b>3.3. Поле Дирака и принцип запрета</b> . . . . .	175
3.3.1. Антиккоммутаторы . . . . .	175
3.3.2. Пространство Фока для фермионов . . . . .	179
3.3.3. Связь между спином и статистикой; пропагатор . . . . .	182
<b>3.4. Дискретные симметрии</b> . . . . .	185
3.4.1. Четность . . . . .	185
3.4.2. Зарядовое сопряжение . . . . .	186
3.4.3. Обращение времени . . . . .	189
3.4.4. Заключение . . . . .	191
<b>Глава 4. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ С ВНЕШНИМ ПОЛЕМ</b> . . . . .	201
<b>4.1. Квантованное электромагнитное поле, взаимодействующее с классическим источником</b> . . . . .	201
4.1.1. Вероятности излучения . . . . .	201
4.1.2. Энергия излучения и инфракрасная катастрофа . . . . .	209
4.1.3. Вынужденное поглощение и излучение . . . . .	213
4.1.4. S-матрица и оператор эволюции . . . . .	215
<b>4.2. Теорема Вика</b> . . . . .	220
4.2.1. Бозонные поля . . . . .	220
4.2.2. Фермионные поля . . . . .	222
4.2.3. Общий случай . . . . .	225
<b>4.3. Квантованное поле Дирака, взаимодействующее с классическим потенциалом</b> . . . . .	226
4.3.1. Общий формализм . . . . .	226
4.3.2. Скорость излучения в низшем порядке . . . . .	232
4.3.3. Образование пар в постоянном однородном электрическом поле . . . . .	234
4.3.4. Эффективный лагранжиан Эйлера—Гейзенберга . . . . .	237
<b>Глава 5. ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ПРОЦЕССЫ</b> . . . . .	240
<b>5.1. S-матрица и асимптотическая теория</b> . . . . .	240
5.1.1. Сечения рассеяния . . . . .	241
5.1.2. Асимптотическая теория . . . . .	244
5.1.3. Редукционные формулы . . . . .	248
5.1.4. Производящий функционал . . . . .	251
5.1.5. Связные части . . . . .	255
5.1.6. Фермионы . . . . .	257
5.1.7. Фотоны . . . . .	262
<b>5.2. Приложения</b> . . . . .	271
5.2.1. Эффект Комптона . . . . .	271
5.2.2. Аннигиляция пар . . . . .	278
5.2.3. Время жизни позитрония . . . . .	281
5.2.4. Тормозное излучение . . . . .	287

5.3. Унигарность и причинность . . . . .	290
5.3.1 Унитарность и разложение по парциальным волнам . . . . .	291
5.3.2 Причинность и аналитичность . . . . .	296
5.3.3. Представление Йоста—Лемана—Дайсона . . . . .	301
5.3.4. Дисперсионные соотношения для амплитуды рассеяния вперед . . . . .	303
5.3.5. Аналитичность по передаваемому импульсу . . . . .	309
<b>Глава 6. ТЕОРИЯ ВОЗМУЩЕНИЙ . . . . .</b>	<b>316</b>
6.1. Представление взаимодействия и правила Фейнмана . . . . .	316
6.1.1. Самодействующее скалярное поле . . . . .	317
6.1.2. Правила Фейнмана для спинорной электродинамики . . . . .	328
6.1.3. Электрон-электронное и электрон-позитронное рассеяние . . . . .	333
6.1.4. Скалярная электродинамика . . . . .	340
6.2. Диаграмматика . . . . .	346
6.2.1. Разложение по петлям . . . . .	346
6.2.2. Усеченные и сильносвязанные диаграммы . . . . .	348
6.2.3. Параметрическое представление . . . . .	354
6.2.4. Функции Грина в евклидовой области . . . . .	360
6.3. Аналитические свойства . . . . .	363
6.3.1. Уравнения Ландау . . . . .	364
6.3.2. Вещественные сингулярности . . . . .	368
6.3.3. Вещественные сингулярности простых диаграмм . . . . .	372
6.3.4. Сингулярности в физической области; правила Кутковского . . . . .	379
<b>Глава 7. РАДИАЦИОННЫЕ ПОПРАВКИ . . . . .</b>	<b>384</b>
7.1. Перенормировка однопетлевых диаграмм . . . . .	384
7.1.1. Поляризация вакуума . . . . .	385
7.1.2. Электронный пропагатор . . . . .	397
7.1.3. Вершинная функция . . . . .	404
7.1.4. Выводы . . . . .	413
7.2. Радиационные поправки к взаимодействию с внешним полем . . . . .	417
7.2.1. Эффективное взаимодействие и аномальный магнитный момент . . . . .	418
7.2.2. Радиационные поправки к кулоновскому рассеянию . . . . .	421
7.2.3. Мягкое тормозное излучение . . . . .	424
7.2.4. Конечное инклюзивное сечение . . . . .	426
7.3. Новые эффекты . . . . .	427
7.3.1. Рассеяние фотона на фотоне . . . . .	427
7.3.2. Лэмбовский сдвиг . . . . .	431
7.3.3. Силы Ван-дер-Ваальса на больших расстояниях . . . . .	439
<b>Оглавление . . . . .</b>	<b>446</b>