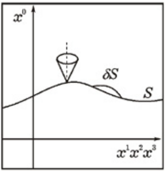
R&C Dynamics

ФИЗИКА
Лекционные курсы

П. Дирак

ЛЕКЦИИ ПО КВАНТОВОЙ МЕХАНИКЕ



6

R&C
Dynamics

УДК 530.145
ББК 22.314
Д 47

Библиотека *«Физика. Лекционные курсы»*
Том VI

Д 47 **Дирак П. А. М.**
Лекции по квантовой механике. — Ижевск: Ижевская республиканская типография, 1998. 148 с.
ISBN 5-89806-014-6

В данной книге П. А. М. Дирака разработан вопрос о квантовании систем со связями и обобщением гамильтоновой механики на случай вырожденных лагранжианов. Приведены также две работы Дирака по этому вопросу. В приложении содержится современный анализ теории Дирака и ее роли в геометрии и гамильтоновой механике.

ISBN 5-89806-014-6 **ББК 22.314**

Оригинал-макет подготовлен в редакции журнала «Регулярная и хаотическая динамика»
http://www.rcd.com.ru

Содержание

Предисловие

Предлагаемая книга одного из самых значительных физиков-теоретиков этого столетия Поля Дирака (1902–1984) содержит четыре лекции по квантовой механике, прочитанные в Иешивском университете, а также две его работы, посвященные обобщению гамильтонова формализма на случай вырожденного по скоростям лагранжиана. Вопросы, разобранные как в лекциях, так и в статьях, обычно остаются за пределами традиционных курсов квантовой механики, переживающей в последнее время новый подъем. Он обусловлен в первую очередь глубоким проникновением в математический аппарат квантовой механики методов теории динамических систем, алгебры и топологии. На этом пути в последнее время возникли новые дисциплины: квантовые группы, теория инвариантов Зейберга–Виттена и др.

Всплеск интереса к квантовой механике обусловлен также с разработкой, восходящей к Ричарду Фейнману, идеи о квантовых вычислениях и квантовом компьютере. Интенсивные теоретические и экспериментальные работы в этом направлении ведутся параллельно физиками, математиками и инженерами.

Можно рассчитывать, что предлагаемая книга Дирака будет полезна широкому кругу читателей. Многие общие теоретические вопросы в работах Дирака лишь намечены — на них мы остановились в приложении, посвященном развитию идей Дирака в геометрии и механики. Мы надеемся, что приложение способно частично восполнить непонимание, вызванное чрезвычайной сжатостью и насыщенностью оригинального текста великого физика.

А. В. Борисов

с трудностями и хотели бы расширить общие рамки подхода, что позволит рассматривать поля более общего типа. Например, мы хотели бы учесть возможность того, что уравнения Максвелла будут не всегда справедливыми. Вполне вероятно, что при переходе к областям в непосредственной близости от зарядов, создающих поля, необходимо будет модифицировать теорию Максвелла так, чтобы она стала нелинейной электродинамикой. Это только один пример обобщений, которые полезно рассмотреть в нашем теперешнем состоянии незнания основных идей, основных сил и основного характера полей атомной теории.

Чтобы можно было приступить к этой задаче, т. е. рассмотреть более общие поля, необходимо перейти к классической теории. Далее, если нам удастся придать классической теории гамильтонову форму, то мы всегда сможем, применив некоторые стандартные правила, получить первое приближение квантовой теории. Мои лекции в основном будут посвящены задаче преобразования общей классической теории к гамильтоновой форме. Сделав это, мы вступили на путь получения последовательной квантовой теории. Во всяком случае, мы будем иметь первое приближение.

Конечно, настоящую работу следует рассматривать только как предварительный этап. Окончательным результатом этого этапа должно быть построение последовательной квантовой теории, однако на пути к этой цели встречаются весьма серьезные трудности, трудности фундаментального характера, над преодолением которых люди мучаются немало лет. Трудности перехода от гамильтоновой классической механики к квантовой механике настолько подавляют некоторых, что они начинают думать: а может быть, и весь метод, основанный на классической теории Гамильтона, является неудовлетворительным? Особенно в последние несколько лет предпринимались попытки развить иные методы построения квантовых теорий поля. На этом пути был достигнут вполне ощутимый прогресс. Был получен ряд условий, которые должны удовлетворяться. Однако эти альтернативные методы, хотя и позволили значительно продвинуться в объяснении экспериментальных результатов, едва ли приведут к окончательному решению проблемы. Мне кажется, что при таких подходах всегда будет теряться нечто такое, что можно получить только при использовании гамильтониана или, возможно, некоторого обобщения понятия гамильтониана. Поэтому я придерживаюсь той точки зрения, что гамильтониан действительно очень существен для квантовой теории.

В самом деле, без использования гамильтоновых методов нельзя решить некоторые из простейших задач квантовой теории, например получить формулу Бальмера для водорода, самый первый из результатов квантовой механики. Следовательно, гамильтониан появляется в теории при самых элементарных подходах, и мне кажется, что и по существу очень важно исходить из гамильтониана; поэтому я хочу рассказать вам о том, насколько далеко можно развить гамильтоновы методы.

Мне хотелось бы начать с элементарного подхода, и в качестве отправной точки я возьму принцип действия. Именно, я полагаю, что существует интеграл действия, зависящий от вида движения системы, такой, что из условия его стационарности при изменении движения мы получаем уравнения движения. Метод, исходящий из принципа действия, обладает одним большим преимуществом: он позволяет легко согласовать теорию с принципом относительности. Необходимо, чтобы наша атомная теория была релятивистской, ибо в общем случае мы имеем дело с частицами, движущимися с большими скоростями.

Если мы хотим ввести в рассмотрение гравитационное поле, то мы должны согласовать нашу теорию с общим принципом относительности, а это означает, что нам придется работать с искривленным пространством-временем. Однако гравитационное поле не очень существенно в атомной физике, так как гравитационные силы чрезвычайно слабы по сравнению с другими силами, действующими в атомных процессах, и для практических целей можно пренебречь гравитационным полем. Вопрос о введении гравитационного поля в квантовую теорию был исследован до некоторой степени в последние годы, и я думаю, что основным стимулом этой работы была надежда, что учет его может помочь преодолеть некоторые трудности. Насколько можно судить в настоящее время, эта надежда не оправдалась, и введение гравитационного поля, по-видимому, скорее добавляет осложнения, нежели устраняет их. Таким образом, введение гравитационных полей в атомную теорию не дает особых преимуществ. Однако методы, которые я намерен описать, являются мощными математическими методами, пригодными независимо от того, учитывается гравитационное поле или нет. Начнем с интеграла действия, который я обозначу

$$I = \int L\,dt. \tag{1.1}$$

Он выражен в виде интеграла по времени, причем подынтегральное выражение L представляет собой лагранжиан. Таким образом, вместе с принципом действия мы имеем лагранжиан[1]. Теперь нужно выяснить, как перейти от лагранжиана к гамильтониану. Когда мы получим гамильтониан, мы сделаем первый шаг на пути к построению квантовой теории.

Вы могли бы задать следующий вопрос: а нельзя ли взять в качестве исходной величины гамильтониан и тем самым сократить работу, связанную с получением из интеграла действия, взятого в качестве отправного пункта, лагранжиана и с переходом от лагранжиана к гамильтониану? При попытке провести такое сокращение наталкиваются на трудность — оказывается, совсем нелегко сформулировать в терминах гамильтониана условия, при которых теория является релятивистской. С помощью интеграла действия эти условия сформулировать очень легко: нужно просто потребовать, чтобы интеграл действия был релятивистски инвариантен. Нетрудно привести сколько угодно примеров интегралов действия, релятивистски инвариантных. Все они автоматически приведут к уравнениям движения, согласующимся с требованиями теории относительности, и поэтому любой вывод, основанный на таком интеграле действия, будет также находиться в согласии с теорией относительности.

Получив гамильтониан, мы можем применить стандартный метод и найти первое приближение квантовой теории; если нам повезет, то, возможно, мы окажемся в состоянии продвинуться дальше и построить строгую квантовую теорию. Вы снова могли бы спросить: нельзя ли до некоторой степени сократить эту работу? Может быть, можно перейти прямо от лагранжиана к квантовой теории и вовсе обойтись без гамильтониана? Что ж, в некоторых простых случаях это *можно* сделать. Для некоторых простых типов полей, рассматриваемых в физике, лагранжиан квадратичен по скоростям и подобен лагранжиану, используемому в нерелятивистской динамике частиц. Применительно к таким ситуациям, когда лагранжиан квадратичен по скоростям, разработаны некоторые методы непосредственного перехода от лагранжиана к квантовой теории. Однако это ограничение случаем только квадратичных по скоростям лагранжианов является чрезвычайно жестким. Я хочу из-

[1]Английский термин «Lagrangian» на русский язык часто переводят как «функция Лагранжа». Слово «лагранжиан» означает в этом случае пространственную плотность функции Лагранжа. Поскольку в этих лекциях последняя не встречается, мы сочли возможным перевести «Lagrangian» как «лагранжиан». (Прим. ред.).

бежать этого ограничения и работать с лагранжианом, который может быть совершенно произвольной функцией скоростей. Чтобы получить общий формализм, который будет применим, например, к нелинейной электродинамике, упомянутой мною выше, по моему мнению, нельзя никоим образом сократить процедуру, связанную с получением из интеграла действия, взятого в качестве исходной величины, лагранжиана, с переходом от лагранжиана к гамильтониану и затем с переходом от гамильтониана к квантовой теории. Это и есть та процедура, которую я хочу обсудить в настоящем курсе лекций.

Чтобы выразить все наиболее простым образом, я хотел бы начать с динамической теории систем, имеющих только конечное число степеней свободы и подобных тем, с которыми вы знакомы из динамики частиц. После этого переход от системы с конечным числом степеней свободы к системе с бесконечным числом степеней свободы (что нам нужно для теории поля) есть уже чисто формальная задача.

Рассматривая систему с конечным числом степеней свободы, введем динамические координаты, которые я обозначу через q или q_n, где $n = 1, \ldots, N$ (N — число степеней свободы). Затем мы имеем скорости $dq_n/dt = \dot{q}_n$. Лагранжиан $L = L(q, \dot{q})$ является функцией координат и скоростей.

На этом этапе вас может до некоторой степени смутить то значение, которое придается временно́й переменной в этом формализме. Временна́я переменная t появляется уже, как только мы вводим лагранжиан. Она снова встречается в определении скоростей, и, таким образом, при переходе от лагранжиана к гамильтониану имеется одна выделенная временна́я переменная. С релятивистской точки зрения это означает, что мы выбираем одного определенного наблюдателя и на всех этапах нашего формализма ведем отсчет времени по часам этого наблюдателя. Это, конечно, не очень уж приятно физику–релятивисту, который предпочел бы рассматривать всех наблюдателей на равных основаниях. Однако такова характерная черта данного формализма, и я не вижу, как ее устранить, если мы хотим сохранить общность рассмотрения, допуская, что лагранжиан может быть *произвольной* функцией координат и скоростей. Мы можем быть уверены, что содержание теории является релятивистским, даже если форма уравнений не является явно релятивистской из-за наличия одного выделенного времени, играющего доминирующую роль в теории.

Давайте теперь разовьем эту лагранжеву форму динамики и перейдем затем к гамильтоновой форме, следуя возможно более близко тем идеям, с которыми мы встречаемся в динамике при использовании координат общего вида. Мы имеем лагранжевы уравнения движения, получающиеся в результате варьирования интеграла действия

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n}\right) = \frac{\partial L}{\partial q_n}. \tag{1.2}$$

Чтобы перейти к гамильтонову формализму, мы введем импульсные переменные p_n, определив их как

$$p_n = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n}. \tag{1.3}$$

В обычной динамической теории делается предположение, что импульсы являются независимыми функциями скоростей, но это предположение является слишком жестким для тех приложений теории, которые мы намерены рассмотреть. Мы хотим допустить возможность того, что эти импульсы *не* являются независимыми функциями скоростей. В таком случае существуют некоторые соотношения типа $\varphi(q, p) = 0$, связывающие импульсные переменные.

Может быть несколько независимых соотношений этого типа; в таком случае мы перенумеруем их, снабдив индексом $m = 1, \ldots, M$, так что мы будем иметь

$$\varphi_m(q, p) = 0. \tag{1.4}$$

Величины q и p являются динамическими переменными теории в гамильтоновой форме. Они связаны соотношениями (1.4), которые называются ***первичными связями*** в гамильтоновом формализме. Эта терминология введена Бергманом, и она представляется мне вполне удачной.

Рассмотрим теперь величину $p_n \dot{q}_n - L$. (Всякий раз, когда встречается повторяющийся индекс, я подразумеваю, что проводится суммирование по всем значениям этого индекса.) Возьмем вариации переменных q и $\dot{q}$ — координат и скоростей. Эти вариации приведут к появлению вариаций импульсных переменных p. В результате этого варьирования, с учетом определения (1.3), получим

$$\begin{aligned} \delta(p_n \dot{q}_n - L) &= \delta p_n \dot{q}_n + p_n \delta \dot{q}_n - \left(\frac{\partial L}{\partial q_n}\right) \delta q_n - \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n}\right) \delta \dot{q}_n = \\ &= \delta p_n \dot{q}_n - \left(\frac{\partial L}{\partial q_n}\right) \delta q_n. \end{aligned} \tag{1.5}$$

Теперь мы видим, что вариация величины $p_n\dot{q}_n - L$ содержит только вариации координат q и импульсов p. Она не содержит вариаций скоростей. Это означает, что такую величину $p_n\dot{q}_n - L$ можно выразить через q и p независимо от скоростей. Выраженная таким образом, она называется *гамильтонианом* H.

Однако гамильтониан, определенный таким способом, задан неоднозначно, ибо мы можем добавить к нему любую линейную комбинацию величин φ, равную нулю. Таким образом, мы перешли бы к другому гамильтониану

$$H^* = H + c_m\varphi_m, \tag{1.6}$$

где коэффициенты c_m могут быть произвольными функциями q и p. Гамильтониан H^* ничем не хуже H; наша теория не может провести различия между H и H^*. Гамильтониан определен неоднозначно.

Можно записать (1.5) в виде $\delta H = \dot{q}_n \delta p_n - \left(\dfrac{\partial L}{\partial q_n}\right)\delta q_n$.

Это уравнение справедливо для произвольной вариации q и p, подчиненной тому условию, что связи (1.4) сохраняются неизменными. Переменные q и p нельзя варьировать независимо ввиду того, что они ограничены условиями (1.4), но для любой вариации q и p, удовлетворяющей этим условиям, данное уравнение выполняется. Согласно общему методу вариационного исчисления, примененному к вариационному уравнению со связями данного типа, находим

$$\dot{q}_n = \frac{\partial H}{\partial p_n} + u_m\frac{\partial \varphi_m}{\partial p_n} \quad \text{и} \quad -\frac{\partial L}{\partial p_n} = \frac{\partial H}{\partial q_n} + u_m\frac{\partial \varphi_m}{\partial q_n}, \tag{1.7}$$

или, используя (1.2) и (1.3)

$$\dot{p}_n = -\frac{\partial H}{\partial q_n} - u_m\frac{\partial \varphi_m}{\partial q_n}, \tag{1.8}$$

где u_m — неизвестные коэффициенты[1]. Здесь мы имеем *гамильтоновы уравнения движения*, описывающие изменение во времени переменных q и p, но эти уравнения содержат неизвестные коэффициенты u_m.

Удобно использовать специальное обозначение, которое позволит нам кратко записать эти уравнения, а именно скобки Пуассона. Смысл

[1] В отличие от c_m, u_m — числовые коэффициенты. (Прим. ред.).

этого обозначения таков: если мы имеем две функции q и p, скажем, $f(q, p)$ и $g(q, p)$, то *скобка Пуассона* $[f, g]$ для них определяется как

$$[f, g] = \frac{\partial f}{\partial q_n}\frac{\partial g}{\partial p_n} - \frac{\partial f}{\partial p_n}\frac{\partial g}{\partial q_n}. \tag{1.9}$$

Скобки Пуассона обладают некоторыми свойствами, вытекающими из их определения, а именно: скобка $[f, g]$ антисимметрична по f и g:

$$[f, g] = -[g, f], \tag{1.10}$$

линейна по каждому члену:

$$[f_1 + f_2, g] = [f_1, g] + [f_2, g] \quad \text{и т. д.}; \tag{1.11}$$

при этом справедливо следующее правило для произведений

$$[f_1 f_2, g] = f_1[f_2, g] + [f_1, g]f_2. \tag{1.12}$$

Наконец, существует соотношение, известное как *тождество Якоби*, связывающее три величины:

$$[f, [g, h]] + [g, [h, f]] + [h, [f, g]] = 0. \tag{1.13}$$

С помощью скобок Пуассона мы можем иначе записать уравнения движения. Для произвольной функции g переменных q и p мы имеем

$$\dot{g} = \frac{\partial g}{\partial q_n}\dot{q}_n + \frac{\partial g}{\partial p_n}\dot{p}_n. \tag{1.14}$$

Если подставить вместо $\dot{q}_n$ и $\dot{p}_n$ их значения, заданные уравнениями (1.7) и (1.8), то мы найдем, что величина (1.14) равна просто

$$\dot{g} = [g, H] + u_m[g, \varphi_m]. \tag{1.15}$$

Таким образом, все уравнения движения записываются в компактном виде в формализме, использующем скобки Пуассона.

Можно записать их в еще более краткой форме, если несколько обобщить понятие скобок Пуассона. В том виде, в каком я определил скобки Пуассона, они имеют смысл только для таких величин f и g, которые можно выразить как функции переменных q и p. Величина более общей природы, например, обобщенная переменная скорости, которая не выражается через q и p, не имеет скобок Пуассона с другой величиной. Расширим понятие скобок Пуассона и будем считать, что они существуют для любых двух величин и что они удовлетворяют правилам (1.10)–(1.13), но в остальном не определены, когда входящие в них величины не являются функциями переменных q и p.

Тогда мы можем записать (1.15) как

$$\dot{g} = [g,\, H + u_m\varphi_m]. \tag{1.16}$$

Как видите, коэффициенты u появляются здесь в одном из членов скобки Пуассона. Коэффициенты u_m не являются функциями q и p, поэтому мы не можем использовать определение (1.9) для вычисления скобки Пуассона в (1.16). Однако мы можем продолжить исследование ее, используя правила (1.10)–(1.13). Согласно правилу (1.11) имеем

$$[g,\, H + u_m\varphi_m] = [g,\, H] + [g,\, u_m\varphi_m], \tag{1.17}$$

а используя правило для произведений (1.12), получаем

$$[g,\, u_m\varphi_m] = [g,\, u_m]\varphi_m + u_m[g,\, \varphi_m]. \tag{1.18}$$

Последняя скобка в (1.18) вполне определена, так как q и φ_m обе являются функциями переменных q и p. Скобка Пуассона $[g,\, u_m]$ *не* определена, но она умножается на величину φ_m, обращающуюся в нуль. Поэтому первый член в правой части (1.18) исчезает. В результате

$$[g,\, H + u_m\varphi_m] = [g,\, H] + u_m[g,\, \varphi_m], \tag{1.19}$$

так что (1.16) совпадает с (1.15).

Существует одно обстоятельство, из-за которого мы должны быть осторожны при использовании формализма скобок Пуассона. Мы имеем связи (1.4), но мы не должны пользоваться ни одним из условий связи *до* вычисления скобок Пуассона. Если мы сделаем это, то придем к неверному результату. Поэтому мы примем как правило, что все скобки Пуассона должны быть раскрыты до использования условий связи. Чтобы помнить о наличии в формализме этого правила, я запишу связи (1.4) в форме уравнений со знаком равенства в виде двух волнистых линий $\approx$, т. е. со знаком, отличающимся от обычного. Таким образом, они записываются как

$$\varphi_m \approx 0. \tag{1.20}$$

Я буду называть такие уравнения слабыми, чтобы отличать их от обычных, или сильных уравнений.

Условие (1.20) можно использовать только после того, как раскрыты все интересующие нас скобки Пуассона. При условии выполнения этого правила скобка Пуассона (1.19) вполне определена, и мы имеем возможность записать наши уравнения движения (1.16) в весьма сжатой форме:

$$\dot{g} \approx [g, H_T] \tag{1.21}$$

с гамильтонианом, который я буду называть *полным* гамильтонианом,

$$H_T = H + u_m \varphi_m. \tag{1.22}$$

Рассмотрим теперь, каковы следствия из этих уравнений движения. Прежде всего, появятся некоторые условия непротиворечивости. Мы имеем величины φ, которые должны быть равны нулю в каждый момент времени. Мы можем применить уравнение движения (1.21) или (1.15), взяв в качестве g одну из функций φ. Мы знаем, что для непротиворечивости метода величина $\dot{g}$ должна быть равна нулю, и, таким образом, получаем некоторые условия непротиворечивости. Посмотрим, как они выглядят. Полагая в (1.15) $g = \varphi_m$ и $\dot{g} = 0$, получаем

$$[\varphi_m, H] + u_{m'}[\varphi_m, \varphi_{m'}] \approx 0. \tag{1.23}$$

Мы имеем здесь несколько условий непротиворечивости, по одному для каждого значения индекса m. Мы должны исследовать эти условия и выяснить, к чему они ведут. Возможно, что эти условия непосредственно приводят к противоречию. Они могут привести к противоречию типа $1 = 0$. Если такое случается, то это означает, что наш исходный лагранжиан таков, что лагранжевы уравнения движения противоречивы. Можно легко построить пример со всего лишь одной степенью свободы. Если мы возьмем $L = q$, то лагранжево уравнение движения (1.2) немедленно даст $1 = 0$. Таким образом, как вы видите, нельзя задавать лагранжиан совершенно произвольно. Мы должны при выборе лагранжиана потребовать, чтобы лагранжевы уравнения движения не содержали внутреннего противоречия. С учетом этого требования условия, выражаемые уравнениями (1.23), можно разбить на три класса.

Условия первого класса сводятся к тождеству $0 = 0$, т. е. они удовлетворяются автоматически при учете первичных связей.

Условия второго класса сводятся к уравнениям, не зависящим от коэффициентов u, т.е. содержащим только переменные q и p. Такие условия не должны зависеть от первичных связей, иначе они относились бы к условиям первого класса. Таким образом, они имеют вид

$$\chi(q, p) = 0. \tag{1.24}$$

Наконец, существуют среди условий (1.23) такие, которые невозможно отнести ни к какому из рассмотренных классов; они представляют собой условия, налагаемые на коэффициенты u.

Условия первого класса не должны больше нас беспокоить. Каждое условие второго класса означает, что мы имеем еще одну связь между гамильтоновыми переменными. Связи, возникающие таким путем, называются *вторичными связями*. Они отличаются от первичных связей тем, что первичные связи являются просто следствиями уравнений (1.3), определяющих импульсные переменные, тогда как для получения вторичных связей нужно использовать также и лагранжевы уравнения движения.

Если в нашей теории появляется вторичная связь, то мы получаем еще одно условие непротиворечивости, потому что мы можем вычислить величину $\dot{\chi}$ с помощью уравнения движения (1.15) и потребовать, чтобы $\dot{\chi} \approx 0$. Таким образом, мы приходим еще к одному условию

$$[\chi, H] + u_m[\chi, \varphi_m] \approx 0. \tag{1.25}$$

Это условие нужно исследовать с тех же позиций, что и (1.23). Мы снова должны выяснить, к какому из трех классов оно относится. Если оно представляет собой условие второго класса, то мы должны продолжить процесс классификации еще на один этап, поскольку здесь мы имеем добавочную вторичную связь. Мы продолжаем подобным образом до тех пор, пока не исчерпаем все условия непротиворечивости, и в качестве конечного результата у нас останется ряд вторичных связей типа (1.24) вместе с набором условий типа (1.23), налагаемых на коэффициенты u.

Во многих случаях мы будем рассматривать вторичные связи на равных основаниях с первичными. Удобно использовать для них следующее обозначение:

$$\varphi_k \approx 0, \quad k = M+1, \ldots, M+K, \tag{1.26}$$

где K — полное число вторичных связей. Их следует записывать, так же как и первичные связи, в виде слабых уравнений, поскольку они также представляют собой уравнения, которыми мы не должны пользоваться до вычисления скобок Пуассона. Таким образом, всю совокупность связей можно записать так:

$$\varphi_j \approx 0, \quad j = 1, \ldots, M + K \equiv J. \tag{1.27}$$

Обратимся теперь к оставшимся условиям третьего класса. Мы должны выяснить, какие ограничения они налагают на коэффициенты u. Эти условия суть

$$[\varphi_j, H] + u_m[\varphi_j, \varphi_m] \approx 0, \tag{1.28}$$

где по индексу m суммирование проводится от 1 до M, а j принимает любое значение от 1 до J. Эти уравнения содержат условия, которым должны подчиняться коэффициенты u, коль скоро данные уравнения не сводятся просто к связям.

Посмотрим на эти уравнения с другой точки зрения. Предположим, что коэффициенты u неизвестны и (1.28) представляет собой систему неоднородных линейных уравнений относительно этих неизвестных u, коэффициентами в которых служат функции переменных q и p. Будем искать решение этой системы уравнений, которое даст нам u как функции от q и p, скажем,

$$u_m = U_m(q, p). \tag{1.29}$$

Решение такого типа должно существовать, ибо обратное означало бы, что лагранжевы уравнения движения противоречивы, и этот случай мы отбрасываем.

Решение оказывается неоднозначным. Если у нас есть одно решение, мы можем прибавить к нему произвольное решение $V_m(q, p)$ однородной системы уравнений, соответствующей (1.28):

$$V_m[\varphi_j, \varphi_m] = 0, \tag{1.30}$$

и получим таким способом другое решение неоднородной системы уравнений (1.28). Мы хотим получить общее решение уравнений (1.28), а это означает, что мы должны рассмотреть *все* независимые решения системы (1.30), которые мы можем обозначить через $V_{am}(q, p)$, $a = 1, \ldots, A$. Тогда общее решение системы (1.28) имеет вид

$$u_m = U_m + v_a V_{am}, \tag{1.31}$$

где коэффициенты v_a могут быть произвольными.

Подставим эти выражения для u в полный гамильтониан (1.22) нашей теории. Это даст нам следующее выражение для полного гамильтониана:

$$H_T = H + U_m \varphi_m + v_a V_{am} \varphi_m. \tag{1.32}$$

Мы можем записать его как

$$H_T = H' + v_a \varphi_a, \tag{1.33}$$

где

$$H' = H + U_m \varphi_m \tag{1.33a}$$

и

$$\varphi_a = V_{am} \varphi_m. \tag{1.34}$$

Используя полный гамильтониан (1.33), мы по-прежнему будем иметь уравнения движения (1.21).

Проведенный анализ показывает, что мы удовлетворили всем требованиям непротиворечивости теории и все еще имеем произвольные коэффициенты v. Их число обычно меньше числа коэффициентов u. Коэффициенты u не произвольны — они должны удовлетворять требованиям непротиворечивости, тогда как коэффициенты v являются произвольными величинами. Мы можем взять в качестве v произвольные функции времени, и тем не менее все требования нашей динамической теории будут выполняться.

В этом состоит отличие обобщенного гамильтонова формализма от того, с которым мы знакомы из элементарной динамики. Здесь мы имеем произвольные функции времени, входящие в общее решение уравнений движения с заданными начальными условиями. Наличие этих произвольных функций времени означает, что мы используем математический аппарат, содержащий произвольные характеристики, например, координатную систему, которую можно выбрать некоторым произвольным образом, или калибровку в электродинамике. В результате наличия этого произвола в математическом аппарате динамические переменные в последующие моменты времени не полностью определяются их начальными значениями, и это проявляется в наличии произвольных функций в общем решении.

Нам нужно ввести терминологию, которая отражала бы характер величин, встречающихся в формализме. Мне кажется полезной следующая терминология. Я называю, по определению, некоторую динамическую переменную R, являющуюся функцией от q и p, динамической переменной *первого рода*, если ее скобки Пуассона со всеми φ равны нулю:

$$[R, \varphi_j] \approx 0, \quad j = 1, \ldots, J. \tag{1.35}$$

Достаточно, если эти условия выполняются в смысле слабых равенств. В противном случае R относится к переменным *второго рода*. Если R является переменной *первого рода*, то величина $[R, \varphi_j]$ должна быть равна в сильном смысле некоторой линейной функции от φ, так как все, что слабо исчезает в настоящей теории, в сильном смысле равно некоторой линейной функции от величин φ. По определению φ являются единственными независимыми величинами, слабо равными нулю. Поэтому мы имеем сильные уравнения

$$[R, \varphi_j] = r_{jj'}\varphi_{j'}. \tag{1.36}$$

Прежде чем переходить к дальнейшему, я хотел бы доказать следующую теорему.

Теорема. *Скобка Пуассона двух величин первого рода также является величиной первого рода.*

Доказательство.

Пусть R и S — переменные первого рода. Тогда, согласно (1.36), мы имеем

$$[S, \varphi_j] = s_{jj'}\varphi_{j'}. \tag{1.36a}$$

Составим скобку Пуассона $[[R, S], \varphi_j]$. Мы должны раскрыть ее с помощью тождества Якоби (1.13):

$$[[R, S], \varphi_j] = [[R, \varphi_j], S] - [[S, \varphi_j], R] = [r_{jj'}\varphi_{j'}, S] - [s_{jj'}\varphi_{j'}, R] =$$

$$= r_{jj'}[\varphi_{j'}, S] + [r_{jj'}, S]\varphi_{j'} - s_{jj'}[\varphi_{j'}, R] - [s_{jj'}, R]\varphi_{j'} \approx 0.$$

Здесь мы использовали уравнения (1.36) и (1.36a), затем правило произведений (1.12) и уравнение (1.20). Вся эта величина слабо исчезает.

Таким образом, мы доказали, что $[R, S]$ является величиной первого рода. ■

Мы имеем уже четыре различных типа связей. Мы можем разделить их на связи первого и второго рода совершенно независимо от их разделения на первичные и вторичные.

Я хотел бы обратить ваше внимание на то, что величины H' и φ_a, определяемые согласно (1.33а) и (1.34), представляют собой величины первого рода. Составив скобку Пуассона φ_a с φ_j, мы получим, согласно (1.34), $V_{am}[\varphi_m, \varphi_j]$ плюс слабо исчезающие члены. Поскольку V_{am} по способу определения удовлетворяет уравнению (1.30), φ_a есть величина первого рода. Аналогично уравнение (1.28) с заменой u_m на U_m показывает, что H' — величина первого рода. Таким образом, выражение (1.33) задает полный гамильтониан в виде комбинации гамильтониана H' — величины первого рода — и некоторых функций φ — также величин первого рода.

Любая линейная комбинация φ, конечно, также является связью[1], и если мы возьмем линейную комбинацию первичных связей, то в результате получим еще одну первичную связь. Поэтому каждая из величин φ_a является первичной связью, и она относится к первому роду. Таким образом, в итоге мы выразили полный гамильтониан в виде суммы гамильтониана — величины первого рода — и линейной комбинации первичных связей первого рода.

Число независимых произвольных функций времени, входящих в общее решение уравнений движения, равно числу значений, которые принимает индекс a. Оно равно числу независимых первичных связей первого рода, потому что все независимые первичные связи первого рода входят в сумму (1.33).

Итак, мы обрисовали общую ситуацию. Мы пришли к ней, исходя именно из уравнений движения Лагранжа, переходя к гамильтониану и раскрывая вид условий непротиворечивости.

С практической точки зрения можно, исходя из свойств преобразования интеграла действия, указать, какие произвольные функции времени войдут в общее решение уравнений движения. Каждой из этих функций времени должна соответствовать некоторая первичная связь первого рода. Поэтому мы можем заранее сказать, какими будут пер-

[1] Автор, введя выше понятие связей, т. е. соотношений типа $\varphi(q, p) = 0$ (например, (1.4)), здесь и далее применяет этот термин (связи) также и для обозначения самих величин $\varphi(q, p)$. В переводе эта особенность сохранена. (Прим. перев.)

вичные связи первого рода, не проводя вовсе подробного вычисления скобок Пуассона; в практических приложениях данной теории мы, очевидно, сможем сберечь немало сил, используя этот метод.

Я хотел бы продвинуться несколько дальше и рассмотреть еще одну характерную черту теории. Попытаемся понять с физической точки зрения такую ситуацию: мы исходим из заданных начальных значений переменных и получаем решение уравнений движения, содержащее произвольные функции. Нужные нам начальные значения переменных задаются для переменных q и p. Нам не нужно задавать начальные значения коэффициентов v. Начальные значения q и p соответствуют, как говорят физики, ***начальному физическому состоянию*** системы. Физическое состояние определяется только переменными q и p, а не коэффициентами v.

Далее, начальное состояние должно определять состояния и в последующие моменты времени. Но значения переменных q и p неоднозначно определяются в последующие моменты времени по начальным значениям, поскольку у нас появляются произвольные функции v. Это означает, что состояние неоднозначно определяет набор значений переменных q и p, несмотря на то что этот набор q и p однозначно определяет состояние. Должно существовать несколько вариантов выбора q и p, соответствующих одному и тому же состоянию. Таким образом, перед нами стоит задача отыскать все наборы значений переменных q и p, которые соответствуют одному частному физическому состоянию.

Все эти значения переменных q и p в определенный момент времени, которые могут получиться в результате развития из одного начального состояния, должны соответствовать одному и тому же физическому состоянию в этот момент. Давайте возьмем некоторые частные начальные значения переменных q и p в момент времени $t = 0$ и посмотрим, какими будут значения q и p через небольшой промежуток времени δt. Значение произвольной динамической переменной g, имевшей начальное значение g_0, в момент времени δt есть

$$g(\delta t) = g_0 + \dot{g}\delta t = g_0 + [g, H_T]\delta t = g_0 + \delta t\,\{[g, H'] + v_a[g, \varphi_a]\}. \quad (1.37)$$

Коэффициенты v совершенно произвольны и находятся в нашем распоряжении. Предположим, что мы возьмем для этих коэффициентов иные значения, например v'. Это привело бы к другому значению $g(\delta t)$, отличающемуся на

$$\Delta g(\delta t) = \delta t(v_a - v'_a)[g, \varphi_a]. \quad (1.38)$$

Эту величину можно записать как

$$\Delta g(\delta t) = \varepsilon_a [g, \varphi_a], \tag{1.39}$$

где

$$\varepsilon_a = \delta t (v_a - v'_a) \tag{1.40}$$

представляет собой произвольное малое число, малое из-за наличия коэффициента δt и произвольное ввиду того, что величины v и v' могут быть какими угодно. Мы можем изменить все наши гамильтоновы переменные согласно правилу (1.39), и новые гамильтоновы переменные будут описывать то же самое состояние. Это изменение гамильтоновых переменных осуществляется путем бесконечно малого контактного преобразования с производящей функцией $\varepsilon_a \varphi_a$. Мы приходим к тому заключению, что величины φ_a, впервые появляющиеся в теории как первичные связи первого рода, имеют следующий смысл: *они в качестве производящих функций (генераторов) бесконечно малых контактных преобразований приводят к таким изменениям переменных q и p, которые не связаны с изменением физического состояния.*

Однако это еще не конец. Можно продвинуться дальше в том же направлении. Предположим, что мы применяем последовательно два таких контактных преобразования. Проведем сначала первое контактное преобразование с производящей функцией $\varepsilon_a \varphi_a$, а затем второе контактное преобразование с производящей функцией $\gamma_{a'} \varphi_{a'}$, где $\gamma_{a'}$ — некоторые новые малые коэффициенты. Мы получим окончательно

$$g' = g_0 + \varepsilon_a [g, \varphi_a] + \gamma_{a'} [g + \varepsilon_a [g, \varphi_a], \varphi_{a'}]. \tag{1.41}$$

(Я сохраняю члены второго порядка, содержащие произведения $\varepsilon\gamma$, но пренебрегаю членами второго порядка, пропорциональными ε^2 или γ^2. Это приближение является законным, и оно достаточно для наших целей. Я не хочу выписывать больше, чем мне на самом деле нужно для получения искомого результата.) Если последовательно применить два преобразования в обратном порядке, то мы получим

$$g'' = g_0 + \gamma_{a'} [g, \varphi_{a'}] + \varepsilon_a [g + \gamma_{a'} [g, \varphi_{a'}], \varphi_a]. \tag{1.42}$$

Давайте, теперь вычтем один результат из другого. Разность будет равна

$$\Delta g = \varepsilon_a \gamma_{a'} \left\{ [[g, \varphi_a], \varphi_{a'}] - [[g, \varphi_{a'}], \varphi_a] \right\}. \tag{1.43}$$

На основании тождества Якоби (1.13) это выражение сводится к

$$\Delta g = \varepsilon_a \gamma_{a'} [g, [\varphi_a, \varphi_{a'}]]. \tag{1.44}$$

Величина Δg также должна соответствовать такому изменению переменных q и p, которое не связано с изменением физического состояния, поскольку эта величина возникает в результате комбинации ряда процессов, в каждом из которых по отдельности физическое состояние остается неизменным. Таким образом, ясно, что можно использовать величину

$$[\varphi_a, \varphi_{a'}] \tag{1.45}$$

в качестве производящей функции бесконечно малого контактного преобразования, которое не связано с изменением физического состояния.

Вспомним теперь, что φ_a являются величинами первого рода, а поэтому скобки Пуассона для них слабо равны нулю и, следовательно, равны в сильном смысле некоторой линейной комбинации величин φ. Эта линейная комбинация величин φ также должна быть первого рода согласно доказанной несколько ранее теореме, по которой скобка Пуассона двух величин первого рода также есть величина первого рода.

Таким образом, мы видим, что преобразования, получаемые таким путем и не связанные с каким-либо изменением физического состояния, представляют собой преобразования, производящими функциями (генераторами) которых являются связи первого рода. Эти преобразования оказываются более общими, по сравнению с рассмотренными выше, лишь в одном отношении. Производящие функции, которые мы имели прежде, должны были быть первичными связями первого рода. Производящие функции, которые мы получаем теперь, могут быть вторичными связями первого рода. Этот расчет показывает, что мы могли бы иметь вторичную связь первого рода в качестве производящей функции бесконечно малого контактного преобразования, которое приводит к изменению переменных q и p, но не связано с изменением состояния.

Нам нужно было бы, ради полноты, провести еще одно небольшое исследование, которое показывает, что скобка Пуассона $[H', \varphi_a]$ гамильтониана H' (величины первого рода) со связью первого рода φ опять является линейной функцией связей первого рода. Снова можно показать, что эта величина оказывается возможной производящей функцией для бесконечно малых контактных преобразований, которые не связаны с изменением состояния.

Окончательный вывод состоит в том, что преобразованиями динамических переменных, которые не связаны с изменением физических состояний, являются бесконечно малые контактные преобразования, производящая функция которых представляет собой первичную связь первого рода или, возможно, вторичную связь первого рода. Значительная часть вторичных связей первого рода получается как (1.45) или как $[H', \varphi_a]$. Возможно, по моему мнению, что все вторичные связи первого рода следует отнести к классу генераторов преобразований, которые не связаны с изменением физического состояния, но мне не удалось доказать это. Мне также не удалось найти ни одного примера, в котором имелись бы вторичные связи первого рода, порождающие изменения физического состояния.

Лекция 2
Проблема квантования

Мы пришли к представлению о том, что существуют определенные преобразования переменных q и p, которые не связаны с изменением состояния и производящими функциями которых служат вторичные связи первого рода. Это наводит на мысль о том, что уравнения движения следует обобщить так, чтобы изменения со временем динамической переменной g включали не только любые изменения, описываемые уравнением (1.21), но также и любые изменения, не связанные с изменением состояния. Таким образом, мы должны рассмотреть более общее уравнение движения

$$\dot{g} = [g, H_E], \tag{2.1}$$

где H_E — обобщенный гамильтониан, являющийся суммой прежнего гамильтониана H_T и всех тех производящих функций (или генераторов) с произвольными коэффициентами, отвечающих преобразованиям, не связанным с изменением состояния:

$$H_E = H_T + v'_{a'}\varphi_{a'}. \tag{2.2}$$

Те генераторы $\varphi_{a'}$, которые не содержатся уже в H_T, будут вторичными связями первого рода. Присутствие новых членов в гамильтониане приводит к добавочным изменениям динамической переменной g, но добавочным изменениям не соответствует никакое изменение состояния, поэтому такие члены определенно должны быть включены в гамильтониан, даже если мы не получаем добавочных изменений g при работе непосредственно с лагранжианом.

Итак, мы приходим к обобщенной гамильтоновой теории. В том виде, в каком теория развита мною здесь, она применима в случае конечного числа степеней свободы, однако ее нетрудно обобщить на случай бесконечного числа степеней свободы. Индексом, нумерующим степени свободы, у нас служит $n = 1, \ldots, N$; без особого труда можно сделать N бесконечным. Дальнейшее обобщение теории мы получим, считая, что число степеней свободы континуально бесконечно. Этим я хочу сказать, что в качестве наших q и p можно взять переменные q_x, p_x, где x — индекс, который принимает непрерывные значения в некоторой области. Используя этот индекс x, мы должны заменить все наши прежние суммы по n интегралами. С таким изменением можно непосредственно использовать все предыдущее рассмотрение.

Имеется только одно уравнение, с которым мы должны поступить несколько иначе, — это уравнение (1.3), которое определяет импульсные переменные,

$$p_n = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n}.$$

Если n принимает все значения непрерывного спектра, то мы должны понимать под этим частным дифференцированием операцию частного функционального дифференцирования, которую можно точно определить следующим образом. Придадим скоростям в лагранжиане вариации $\delta\dot{q}_x$ и положим затем

$$\delta L = \int p_x\, \delta\dot{q}_x. \tag{2.3}$$

Коэффициент при $\delta\dot{q}_x$, стоящий в подынтегральном выражении для δL, есть по определению p_x.

После изложения этой общей абстрактной теории, я думаю, было бы полезно привести простой пример в качестве иллюстрации. Я возьму для этого электромагнитное поле Максвелла, заданное потенциалами A_μ. Динамические координаты теперь представляют собой значения потенциалов во всех точках пространства в определенный момент времени. Иными словами, динамическими координатами являются $A_{\mu x}$, где индекс x отвечает трем координатам x^1, x^2, x^3 точки в трехмерном пространстве в заданный момент времени x^0 (а не четырем координатам x, используемым в теории относительности). Тогда в качестве динамических скоростей мы будем иметь производные по времени от динамических координат, и я буду обозначать их индексом 0 после запятой.

Любой индекс с запятой перед ним означает дифференцирование по общему правилу:

$$\xi_{,\mu} = \frac{d\xi}{dx^\mu}. \tag{2.4}$$

Мы имеем дело со специальной теорией относительности, поэтому можно поднимать и опускать индексы согласно правилам этой теории: поднимая или опуская индексы 1, 2 или 3, мы должны менять знак, но, поднимая или опуская индекс 0, знак менять не нужно.

В качестве нашего лагранжиана для электродинамики Максвелла мы имеем (в единицах Хевисайда)

$$L = -\frac{1}{4}\int F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}d^3x. \tag{2.5}$$

Здесь d^3x означает произведение дифференциалов $dx^1dx^2dx^3$, интегрирование ведется по всему трехмерному пространству и $F_{\mu\nu}$ — тензор электромагнитного поля, определяемый через потенциалы выражением

$$F_{\mu\nu} = A_{\nu,\,\mu} - A_{\mu,\,\nu}. \tag{2.6}$$

Величина L является лагранжианом, поскольку интеграл от нее по времени есть интеграл действия максвелловского поля.

Возьмем теперь этот лагранжиан и, применяя правила нашего формализма, перейдем к гамильтониану. Прежде всего мы должны ввести импульсы. Сделаем это посредством варьирования скоростей в лагранжиане. Взяв вариации скоростей, получим

$$\delta L = -\frac{1}{2}\int F^{\mu\nu}\delta F_{\mu\nu}d^3x = \int F^{\mu 0}\delta A_{\mu,0}d^3x. \tag{2.7}$$

Далее, импульсы B^μ определяются из выражения

$$\delta L = \int B^\mu \delta A_{\mu,0}d^3x, \tag{2.8}$$

и эти импульсы будут удовлетворять основному соотношению со скобками Пуассона[1]

$$[A_{\mu,x},\, B^\nu_{x'}] = g^\nu_\mu \delta^3(x-x'); \quad \mu,\, \nu = 0,\, 1,\, 2,\, 3. \tag{2.9}$$

[1]Соотношения типа (2.9) автор называет Poisson bracket relations, что в буквальном переводе звучит очень громоздко: соотношения со скобками Пуассона. Поскольку далее в тексте они многократно используются, то при переводе было принято сокращение: СП-соотношения. Такое решение этой небольшой терминологической проблемы, возможно, не является лучшим, но оно представляется нам естественным, будучи близким по форме к своему квантовому аналогу — перестановочным соотношениям. (Прим. перев.)

Здесь A берется в точке x трехмерного пространства, B — в точке x' трехмерного пространства; g_μ^ν — просто символ Кронекера, а $\delta^3(x-x')$ представляет собой трехмерную дельта-функцию от $x-x'$.

Сравнив выражения (2.7) и (2.8) для δL, найдем

$$B^\mu = F^{\mu 0}. \tag{2.10}$$

Учтем, что тензор $F^{\mu\nu}$ антисимметричен:

$$F^{\mu\nu} = -F^{\nu\mu}. \tag{2.11}$$

Таким образом, если мы возьмем $\mu = 0$ в (2.10), то получим нуль. Итак, величина B_x^0 равна нулю. Это — первичная связь. Я запишу ее в виде слабого равенства

$$B_x^0 \approx 0. \tag{2.12}$$

Другие три импульса B^r ($r = 1, 2, 3$) равны просто компонентам электрического поля.

Я хотел бы напомнить вам, что равенство (2.12) выражает не просто одну первичную связь — оно включает в себя утроенное бесконечное число первичных связей ввиду наличия индекса x, отвечающего некоторой точке трехмерного пространства, и каждое значение x дает нам свою первичную связь.

Введем теперь гамильтониан. Мы определим его обычным образом:

$$\begin{aligned} H &= \int B^\mu A_{\mu,0} d^3x - L = \\ &= \int \left(F^{r0}A_{r,0} + \frac{1}{4}F^{rs}F_{rs} + \frac{1}{2}F^{r0}F_{r0}\right) d^3x = \\ &= \int \left(\frac{1}{4}F^{rs}F_{rs} - \frac{1}{2}F^{r0}F_{r0} + F^{r0}A_{0,r}\right) d^3x = \\ &= \int \left(\frac{1}{4}F^{rs}F_{rs} + \frac{1}{2}B^rB^r - A_0 B^r_{,r}\right) d^3x. \end{aligned} \tag{2.13}$$

Окончательный вид этого выражения получен после выполнения интегрирования по частям. Это выражение для гамильтониана вовсе не содержит скоростей. В него входят только динамические координаты и импульсы. Правда, величины F_{rs} содержат частные производные потенциалов, но эти частные производные берутся только по переменным x^1, x^2, x^3. При этом никаких скоростей не появляется. Такие частные производные являются функциями динамических координат.

Мы можем теперь вывести условия непротиворечивости с помощью первичных связей (2.12). Поскольку условия (2.12) должны выполняться всегда, величина $[B^0, H]$ обязана равняться нулю. Это ведет к уравнению

$$B^r_{,r} \approx 0. \tag{2.14}$$

Оно снова является связью, так как в него вовсе не входят скорости. Это — вторичная связь, возникающая таким путем в теории Максвелла. Продолжая проверять условия непротиворечивости, мы должны раскрыть равенство

$$[B^r_{,r}, H] = 0. \tag{2.15}$$

Мы найдем, что оно сводится к тождеству $0 = 0$. Это равенство не дает нам ничего нового и выполняется автоматически. Мы, следовательно, получили все связи в нашей задаче. Условие (2.12) дает первичную связь; (2.14) выражает вторичную связь.

Нам нужно выяснить теперь, первого или второго рода эти связи; мы найдем без труда, что все они первого рода. Действительно, величины B_0 являются импульсными переменными. Скобки Пуассона их друг с другом все равны нулю. Также и для $B^r_{,r}$ и B_0 скобки Пуассона их друг с другом обращаются в нуль. Это же справедливо и для $B^r_{,rx}$ с $B^r_{,rx'}$. Поэтому все эти величины являются связями первого рода. В электродинамике Максвелла связи второго рода отсутствуют.

Выражение (2.13) определяет H как величину первого рода, поэтому гамильтониан H можно взять в качестве H' в формуле (1.33). Посмотрим теперь, чему равен полный гамильтониан:

$$H_T = \int \left(\frac{1}{4}F^{rs}F_{rs} + \frac{1}{2}B_rB_r\right)\, d^3x - \int A_0 B^r_{,r}\, d^3x + \int v_x B^0\, d^3x. \tag{2.16}$$

Функция v_x представляет собой произвольный коэффициент в каждой точке трехмерного пространства. Мы всего лишь добавили здесь первичные связи первого рода с произвольными коэффициентами, что мы обязаны были сделать согласно правилам построения полного гамильтониана.

Зная полный гамильтониан, мы получаем уравнения движения в стандартной форме (1.21):

$$\dot{g} \approx [g, H_T].$$

Мы можем теперь вывести условия непротиворечивости с помощью первичных связей (2.12). Поскольку условия (2.12) должны выполняться всегда, величина $[B^0, H]$ обязана равняться нулю. Это ведет к уравнению

$$B^r_{,r} \approx 0. \tag{2.14}$$

Оно снова является связью, так как в него вовсе не входят скорости. Это — вторичная связь, возникающая таким путем в теории Максвелла. Продолжая проверять условия непротиворечивости, мы должны раскрыть равенство

$$[B^r_{,r}, H] = 0. \tag{2.15}$$

Мы найдем, что оно сводится к тождеству $0 = 0$. Это равенство не дает нам ничего нового и выполняется автоматически. Мы, следовательно, получили все связи в нашей задаче. Условие (2.12) дает первичную связь; (2.14) выражает вторичную связь.

Нам нужно выяснить теперь, первого или второго рода эти связи; мы найдем без труда, что все они первого рода. Действительно, величины B_0 являются импульсными переменными. Скобки Пуассона их друг с другом все равны нулю. Также и для $B^r_{,r}$ и B_0 скобки Пуассона их друг с другом обращаются в нуль. Это же справедливо и для $B^r_{,rx}$ с $B^r_{,rx'}$. Поэтому все эти величины являются связями первого рода. В электродинамике Максвелла связи второго рода отсутствуют.

Выражение (2.13) определяет H как величину первого рода, поэтому гамильтониан H можно взять в качестве H' в формуле (1.33). Посмотрим теперь, чему равен полный гамильтониан:

$$H_T = \int \left(\frac{1}{4}F^{rs}F_{rs} + \frac{1}{2}B_rB_r\right)\, d^3x - \int A_0 B^r_{,r}\, d^3x + \int v_x B^0\, d^3x. \tag{2.16}$$

Функция v_x представляет собой произвольный коэффициент в каждой точке трехмерного пространства. Мы всего лишь добавили здесь первичные связи первого рода с произвольными коэффициентами, что мы обязаны были сделать согласно правилам построения полного гамильтониана.

Зная полный гамильтониан, мы получаем уравнения движения в стандартной форме (1.21):

$$\dot{g} \approx [g, H_T].$$

по-прежнему сохранены все степени свободы, интересные с физической точки зрения.

Чтобы провести это «изгнание» переменных A_0 и B_0, опустим член $v_x B^0$ в гамильтониане. Этот член просто обеспечивал возможность произвольного изменения A_0. Член $-A_0 B^r_{,r}$ в гамильтониане H_T можно скомбинировать со слагаемым $u_x B^r_{,r}$ в обобщенном гамильтониане. В любом случае коэффициент u_x является произвольным. Скомбинировав эти два члена, мы просто заменяем коэффициент u_x на столь же произвольный коэффициент $u'_x = u_x - A_0$. Таким образом, мы получаем новый гамильтониан

$$H = \int \left(\frac{1}{4} F^{rs} F_{rs} + \frac{1}{2} B_r B_r\right) d^3x + \int u'_x B^r_{,r}\, d^3x. \tag{2.19}$$

Этот гамильтониан вполне позволяет найти уравнения движения для всех физически интересных переменных. Переменные A_0 и B_0 уже больше не входят в него. Таков гамильтониан теории Максвелла в его простейшем виде.

Обычный гамильтониан, с которым работают в квантовой электродинамике, не вполне совпадает с этим. Его форма основывается на теории, развитой первоначально Ферми. Теория Ферми содержит ограничение, налагаемое на потенциалы,

$$A^\mu_{,\mu} = 0. \tag{2.20}$$

Наложение такого ограничения на выбор калибровки вполне допустимо. Гамильтонова теория, развиваемая мною здесь, не содержит такого ограничения, так что в ней разрешен совершенно произвольный выбор калибровки. Таким образом, данная теория несколько отличается от формализма Ферми. В нашем формализме во всей полноте выявляются трансформационные свойства теории Максвелла при самых общих градиентных преобразованиях. Теория Максвелла здесь иллюстрирует общие идеи относительно первичных и вторичных связей.

Я хотел бы теперь вернуться к общей теории и рассмотреть проблему квантования гамильтоновой теории. Чтобы обсудить этот вопрос о квантовании, возьмем сначала случай, когда все связи являются связями первого рода, а связи второго рода отсутствуют. Мы считаем наши динамические переменные q и p операторами, удовлетворяющими перестановочным соотношениям, соответствующим СП-соотношениям классической теории. Это совершенно ясно. Затем мы вводим уравнение Шредингера

$$i\hbar\frac{d\psi}{dt} = H'\psi, \tag{2.21}$$

где ψ — волновая функция, на которую действуют операторы q и p. Оператор H' представляет собой гамильтониан — величину первого рода в нашей теории.

Далее мы налагаем на волновую функцию некоторые дополнительные условия, а именно:

$$\varphi_j\psi = 0. \tag{2.22}$$

Каждая из наших связей, таким образом, приводит к дополнительному условию для волновой функции. (Напомним, что все связи сейчас первого рода.)

Первое, что мы должны сделать теперь, — это проверить, согласуются ли между собой уравнения для ψ. Возьмем два из дополнительных условий и посмотрим, нет ли противоречия между ними. Рассмотрим (2.22) и

$$\varphi_{j'}\psi = 0. \tag{2.22a}$$

Умножив (2.22) на $\varphi_{j'}$, получим

$$\varphi_{j'}\varphi_j\psi = 0, \tag{2.23}$$

а умножив (2.22а) на φ_j, найдем

$$\varphi_j\varphi_{j'}\psi = 0. \tag{2.23a}$$

Вычитая одно равенство из другого, имеем

$$[\varphi_j, \varphi_{j'}]\psi = 0. \tag{2.24}$$

Это есть дополнительное условие, налагаемое на ψ, которое должно выполняться для непротиворечивости. Но мы не хотим иметь никаких новых условий для ψ. Мы хотим, чтобы все требования, которым должна подчиняться ψ, содержались в (2.22). Иначе говоря, мы хотим, чтобы (2.24) следовало из (2.22), а это означает, что мы требуем выполнения равенства

$$[\varphi_j, \varphi_{j'}] = c_{jj'j''}\varphi_{j''}. \tag{2.25}$$

Если равенство (2.25) *действительно* выполняется, то (2.24) является следствием (2.22), а не новым условием, налагаемым на волновую функцию.

Далее мы знаем, что в классической теории все связи φ первого рода, а это значит, что в этом случае скобка Пуассона любых двух связей φ равна линейной комбинации φ. Переходя к квантовой теории, мы должны получить подобное равенство, справедливое для коммутатора, но при этом совсем не обязательно должно следовать, что все коэффициенты c стоят слева. Нам нужно, чтобы все коэффициенты c находились слева, ибо в общем случае они будут функциями координат и импульсов и не будут коммутировать с φ в квантовой теории; (2.24) будет являться следствием (2.22) только при условии, что все коэффициенты c стоят слева.

При введении в квантовую теорию величин φ может появиться некоторая неоднозначность. Соответствующие классические выражения могут содержать величины, не коммутирующие в квантовом случае, и тогда мы должны решить вопрос, в каком порядке ставить множители в квантовой теории. Нужно попытаться подобрать такое расположение этих множителей, чтобы было справедливо равенство (2.25) и все коэффициенты c в правой части (2.25) стояли бы слева. Если мы сможем это сделать, то тогда все дополнительные условия будут согласованы друг с другом. Если же это сделать не удастся — тогда нам не везет и мы не в состоянии построить последовательную квантовую теорию. Во всяком случае, мы имеем первое приближение квантовой теории, ибо наши уравнения вполне удовлетворительны, если рассматривать их только с точностью до первого порядка по постоянной Планка $\hbar$ и пренебречь величинами порядка $\hbar^2$.

Я обсудил сейчас требования, предъявляемые к дополнительным условиям для согласования их друг с другом. Подобное же рассмотрение следует провести, чтобы проверить непротиворечивость дополнительных условий уравнению Шредингера. Если мы возьмем волновую функцию ψ, которая удовлетворяет дополнительным условиям (2.24), и предположим, что она изменяется со временем согласно уравнению Шредингера, то будет ли наша функция ψ по истечении небольшого промежутка времени по-прежнему удовлетворять дополнительным условиям? Мы можем установить, что это имеет место при выполнении следующего требования:

$$[\varphi_j,\, H]\psi = 0; \tag{2.26}$$

оно означает, что если мы не хотим получить новое дополнительное условие, коммутатор $[\varphi_j, H]$ должен быть некоторой линейной функцией величин φ, т. е.

$$[\varphi_j, H] = b_{jj'}\varphi_{j'} \tag{2.27}$$

Снова мы пришли к уравнению, выполняющемуся, как нам известно, в классической теории. Величины φ_j и H относятся к первому роду, поэтому скобка Пуассона для них слабо исчезает. Таким образом, скобка Пуассона в классической теории равна в сильном смысле некоторой линейной функции величин φ . Снова мы должны попытаться найти такое взаимное расположение величин, чтобы в соответствующем квантовом уравнении все наши коэффициенты стояли слева. Это необходимо для построения последовательной квантовой теории, но, вообще говоря, для того чтобы это сделать, нужна известная доля удачи.

Рассмотрим теперь задачу о квантовании гамильтоновой теории, в которой есть связи второго рода. Этот вопрос мы сначала обсудим на простом примере. В качестве последнего мы можем взять две связи второго рода

$$q_1 \approx 0 \text{ и } p_1 \approx 0. \tag{2.28}$$

Если в теории появляются эти связи, то, так как они относятся ко второму роду, их скобка Пуассона будет отлична от нуля. Что можно сделать с ними при переходе к квантовой теории? Мы не можем налагать (2.28) в качестве дополнительного условия на волновую функцию, как это мы делали со связями первого рода. Если мы попытаемся положить $q_1\psi = 0$ и $p_1\psi = 0$, то мы немедленно придем к противоречию, поскольку мы должны были бы иметь

$$(q_1p_1 - p_1q_1)\psi = i\hbar\psi = 0$$

Следовательно, так поступать нельзя. Мы должны принять какой-то другой план действий.

В данном простом случае совершенно очевидно, каким должен быть этот план. Переменные q_1 и p_1 не представляют интереса, раз они могут иметь только нулевые значения. Поэтому степень свободы с номером 1 не имеет никакого значения. Мы можем отбросить степень свободы 1 и работать с другими степенями свободы. Это сводится к другому определению скобок Пуассона. Нам нужно использовать следующее определение скобок Пуассона в классической теории:

$$[\xi, \eta] = \frac{\partial \xi}{\partial q_n}\frac{\partial \eta}{\partial p_n} - \frac{\partial \xi}{\partial p_n}\frac{\partial \eta}{\partial q_n}. \tag{2.29}$$

Здесь суммирование проводится по $n = 2, \ldots, N$. Этого будет достаточно, поскольку здесь учитываются все физически интересные переменные. После этого мы могли бы просто взять q_1 и p_1 тождественно равными нулю. В этом нет никакого противоречия, и мы можем переходить к квантовой теории, формулируя ее только для системы со степенями свободы $n = 2, \ldots, N$.

В данном простом случае совершенно ясно, что нужно сделать для построения квантовой теории. Попытаемся теперь рассмотреть более общий случай. Предположим, что мы имеем

$$p_1 \approx 0,\ q_1 \approx f(q_r, p_r), \quad r = 2, \ldots, N;$$

здесь f является произвольной функцией всех других переменных q и p. Мы можем подставить $f(q_r, p_r)$ вместо q_1 в гамильтониан и во все другие связи и таким образом устранить степень свободы с номером 1. О ней можно забыть и просто рассматривать другие степени свободы, а затем перейти к квантовой теории для системы с этими остальными степенями свободы. Нам снова придется использовать скобки Пуассона типа (2.29), в которых учитываются только остающиеся степени свободы.

Этот прием используется при квантовании теории, содержащей связи второго рода. Существование связей второго рода означает, что имеются некоторые степени свободы, несущественные с физической точки зрения. Мы должны выявить эти степени свободы и определить новые скобки Пуассона, в которых учитываются только остающиеся степени свободы, *имеющие* физическое значение. Тогда с помощью этих новых скобок Пуассона мы сможем перейти к квантовой теории. Я хотел бы обсудить общую процедуру выполнения этой задачи.

Вернемся пока к классической теории. Мы имеем ряд связей $\varphi_j \approx 0$; некоторые из них относятся к первому роду, некоторые — ко второму. Мы можем заменить эти связи независимыми линейными комбинациями их, которые будут ничем не хуже первоначальных связей. Попытаемся подобрать линейные комбинации таким образом, чтобы свести как можно больше связей к связям первого рода. Может остаться некоторое число связей второго рода, составляя линейные комбинации которых, мы уже не сможем получить связей первого рода. Эти оставшиеся связи второго рода я обозначу через χ_s, $s = 1, \ldots, S$. Таким образом, S есть число связей второго рода, никакая линейная комбинация которых не относится к первому роду.

Рассмотрим такие оставшиеся связи второго рода и составим скобки Пуассона для всех их друг с другом, а затем построим из этих скобок Пуассона детерминант Δ:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & [\chi_1, \chi_2] & [\chi_1, \chi_3] & \cdots & [\chi_1, \chi_S] \\ [\chi_2, \chi_1] & 0 & [\chi_2, \chi_3] & \cdots & [\chi_2, \chi_S] \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ [\chi_S, \chi_1] & [\chi_S, \chi_2] & [\chi_S, \chi_3] & \cdots & \cdots \end{vmatrix}.$$

Теперь я хочу доказать следующую теорему.

Теорема. *Детерминант Δ не обращается в нуль даже в слабом смысле.*

Доказательство.

Предположим, что детерминант *обращается* в нуль. Я хочу показать, что это допущение приводит к противоречию. Если детерминант исчезает, то его ранг равен $T < S$. Построим тогда другой детерминант:

$$A = \begin{vmatrix} \chi_1 & 0 & [\chi_1, \chi_2] & \cdots & [\chi_1, \chi_T] \\ \chi_2 & [\chi_2, \chi_1] & 0 & \cdots & [\chi_2, \chi_T] \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \chi_{T+1} & [\chi_{T+1}, \chi_1] & [\chi_{T+1}, \chi_2] & \cdots & [\chi_{T+1}, \chi_T] \end{vmatrix}.$$

Он имеет $T + 1$ строк и столбцов. Число $T + 1$ может равняться S или может быть меньше S. При разложении детерминанта A по элементам его первого столбца каждый из этих элементов умножается на один из миноров Δ. Мне нужно, чтобы не все эти миноры обращались в нуль. Может все же случиться так, что они исчезают все. В таком случае следует выбрать иным образом набор величин χ, входящих в A. Всегда должен существовать некоторый способ такого выбора χ, входящих в A, при котором не все миноры исчезают, ибо ранг Δ равен T. Поэтому мы выбираем χ таким образом, чтобы коэффициенты при элементах первого столбца не все обращались в нуль.

Теперь я покажу, что скобки Пуассона детерминанта A с любой из величин φ равны нулю. Если мы хотим составить скобку Пуассона φ с детерминантом, то искомый результат мы получим, взяв скобку Пуассона φ с первым столбцом детерминанта, прибавив к этому скобку Пуассона φ со вторым столбцом, и т. д. Таким образом, имеем

$$[\varphi, A] = \begin{vmatrix} [\varphi, \chi_1] & 0 & \dots \\ [\varphi, \chi_2] & [\chi_2, \chi_1] & \dots \\ \vdots & \vdots & \\ [\varphi, \chi_{T+1}] & [\chi_{T+1}, \chi_1] & \dots \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \chi_1 & 0 & \dots \\ \chi_2 & [\varphi, [\chi_2, \chi_1]] & \dots \\ \vdots & \vdots & \\ \chi_{T+1} & [\varphi, [\chi_{T+1}, \chi_1]] & \dots \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} \chi_1 & 0 & [\varphi, [\chi_1, \chi_2]] & \dots \\ \chi_2 & [\chi_2, \chi_1] & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ \chi_{T+1} & [\chi_{T+1}, \chi_1] & [\varphi, [\chi_{T+1}, \chi_2]] & \dots \end{vmatrix} + \dots$$

Результат выглядит довольно громоздко, но нетрудно заметить, что каждый из этих детерминантов обращается в нуль. Прежде всего исчезает первый детерминант в правой части. Действительно, если φ относится к первому роду, то тогда обращается в нуль первый столбец; если φ относится ко второму роду, то тогда φ представляет собой одну из величин χ, и мы имеем детерминант, являющийся частью детерминанта Δ из $T+1$ строк и столбцов. Но, по предположению, ранг Δ равен T, поэтому любая его часть с $T+1$ строками и столбцами обращается в нуль. Далее, второй детерминант в правой части слабо исчезает, ибо слабо исчезает его первый столбец. Аналогичным образом все другие детерминанты слабо обращаются в нуль. В результате вся правая часть равна нулю в слабом смысле. Таким образом, детерминант A является величиной, скобки Пуассона которой с любой из величин φ слабо равны нулю.

Кроме того, мы можем разложить детерминант A по элементам его первого столбца и получить A в виде линейной комбинации величин χ. Таким образом, мы пришли к тому результату, что скобки Пуассона некоторой линейной комбинации χ со всеми φ равны нулю. Это значит, что данная линейная комбинация φ относится к первому роду. Такой вывод противоречит нашему предположению о том, что мы выявили все, какие только есть, связи первого рода. Тем самым теорема доказана. ■

Попутно выясняется, что число остающихся связей χ, которые нельзя отнести к первому роду, должно быть четным, потому что детерминант A антисимметричен. Любой антисимметричный детерминант с нечетным числом строк и столбцов обращается в нуль. Рассматриваемый детерминант не исчезает, а потому должен иметь четное число строк и столбцов.

Ввиду того, что детерминант Δ не равен нулю, мы можем ввести матрицу $c_{ss'}$, обратную той, чей детерминант есть Δ. Определим матрицу $c_{ss'}$ с помощью уравнения

$$c_{ss'}[\chi_{s'}\chi_{s''}] = \delta_{ss''}. \tag{2.30}$$

Дадим теперь новое определение скобок Пуассона, соответствующее этому формализму: для любых двух величин ξ и η новая скобка Пуассона определяется как

$$[\xi, \eta]^* = [\xi, \eta] - [\xi, \chi_s]c_{ss'}[\chi_{s'}, \eta]. \tag{2.31}$$

Нетрудно проверить, что определенные таким образом новые скобки Пуассона подчиняются всем правилам обычных скобок Пуассона: скобка $[\xi, \eta]^*$ антисимметрична относительно ξ и η, линейна по ξ и по η, для нее имеет место правило произведений $[\xi_1\xi_2, \eta]^* = \xi_1[\xi_2, \eta]^* + [\xi_1, \eta]^*\xi_2$, и она удовлетворяет тождеству Якоби $[[\xi, \eta]^*, \zeta]^* + [[\eta, \zeta]^*, \xi]^* + [[\zeta, \xi]*, \eta]^* = 0$. Я не знаю никакого изящного способа доказательства тождества Якоби для новых скобок Пуассона. Если мы просто подставим соответствующие выражения и раскроем их путем довольно сложных выкладок, то найдем, что все члены взаимно уничтожаются и левая часть будет равна нулю. Я думаю, что должен существовать какой-то более прозрачный способ доказательства этого тождества, но мне не удалось его отыскать. Прямой метод описан мною[1]. Эту задачу также рассматривал Бергманн[2].

Посмотрим теперь, что можно сделать, имея эти новые скобки Пуассона. Прежде всего я хотел бы отметить, что уравнения движения попрежнему справедливы с новыми скобками Пуассона, коль скоро они верны при первоначальном определении скобок Пуассона. Так как все члены вида $[\chi_{s'}, H_T]$ слабо обращаются в нуль и H_T является величиной первого рода, то

$$[g, H_T]^* = [g, H_T] - [g, \chi_s]c_{ss'}[\chi_{s'}, H_T] \approx [g, H_T].$$

[1] Dirac P. A. M. —Can. Journ. of Math., 1950, v. 2, p. 147.
[2] Bergmann P. G., Goldberg I. — Phys. Rev., 1955, v. 98, p. 531.

Таким образом, мы можем написать

$$\dot{g} \approx [g,\, H_T]^*.$$

Теперь, если мы возьмем произвольную функцию ξ любых переменных q и p и составим новую скобку Пуассона ее с одной из величин χ, скажем $\chi_{s''}$, то с учетом определения (2.30) получим

$$[\xi,\, \chi_{s''}]^* = [\xi,\, \chi_{s''}] - [\xi,\, \chi_s] c_{ss'} [\chi_{s'},\, \chi_{s''}] = [\xi,\, \chi_{s''}] - [\xi,\, \chi_s] \delta_{ss''} = 0.$$

Следовательно, мы можем положить величины χ равными нулю до вычисления новых скобок Пуассона. Это означает, что равенство

$$\chi_s = 0 \tag{2.32}$$

можно рассматривать как равенство в сильном смысле.

Модифицируя таким способом нашу классическую теорию и вводя эти новые скобки Пуассона, мы подготавливаем почву для перехода к квантовой теории. Затем мы ставим перестановочные соотношения в соответствие новым СП-соотношениям и считаем сильные равенства (2.32) уравнениями для операторов квантовой теории. Тем самым осуществляется переход к квантовому случаю. Остающиеся слабые уравнения — все первого рода; они снова становятся дополнительными условиями, налагаемыми на волновые функции. Ситуация оказывается теперь аналогичной предыдущему случаю, в котором имелись только связи φ первого рода. Следовательно, мы опять развили метод квантования нашей общей классической теории в гамильтоновой форме. Конечно, снова нужно, чтобы нам повезло, и тогда мы сможем сделать так, чтобы все коэффициенты стояли слева в условиях непротиворечивости.

Этим завершается построение общего метода квантования. Отметим, что при переходе к квантовой теории различие между первичными и вторичными связями теряет всякое значение; оно в значительной мере зависит от вида исходного лагранжиана. Коль скоро мы перешли к гамильтонову формализму, мы фактически можем забыть о различии между первичными и вторичными связями. Различие же между связями первого и второго рода является очень важным. Мы должны отнести как можно больше связей к первому роду и ввести новые скобки Пуассона, которые позволят нам рассматривать остающиеся связи второго рода как сильные.

Лекция 3
Квантование на искривленных поверхностях

Мы исходили из классического принципа действия. Наш интеграл действия мы взяли лоренц-инвариантным. Из этого интеграла действия получили лагранжиан. Затем мы перешли от лагранжиана к гамильтониану и далее, следуя определенным правилам, к квантовой теории. Таким образом, мы начали с классической теории поля, в основе которой лежит принцип действия, и пришли в конце концов к квантовой теории поля. Вы могли бы подумать теперь, что на этом наша работа завершена. Имеется, однако, еще один важный вопрос, который необходимо рассмотреть, а именно: является ли наша квантовая теория поля, построенная таким способом, релятивистской теорией? При обсуждении можно ограничиться специальной теорией относительности. Итак, мы должны выяснить, согласуется ли наша квантовая теория со специальной теорией относительности.

Мы исходили из принципа действия и требовали, чтобы наш интеграл действия был лоренц-инвариантным. Этого достаточно для обеспечения релятивистского характера нашей классической теории. Уравнения движения, вытекающие из лоренц-инвариантного принципа действия, обязаны быть релятивистскими уравнениями. Правда, когда мы преобразовываем эти уравнения движения к гамильтоновой форме, то нарушаем четырехмерную симметрию. Мы представляем наши уравнения в виде (1.21)

$$\dot{g} \approx [g,\, H_T].$$

Здесь точка сверху означает операцию d/dt и относится к одному абсолютному времени, так что классические уравнения движения в гамильтоновой форме не являются релятивистскими по внешнему виду, но мы знаем, что они должны быть релятивистскими по существу, потому что они выведены на основе релятивистских допущений.

Однако при переходе к квантовой теории мы делаем новые предположения. Выражение для H_T, которое мы имеем в классической теории, не определяет квантовый гамильтониан однозначно. Мы должны решить, в каком порядке расположить некоммутирующие сомножители в квантовой теории. Выбор этого способа упорядочения находится в нашем распоряжении, и поэтому мы принимаем новые допущения. Эти новые допущения могут нарушить релятивистскую инвариантность теории, так что квантовая теория поля, полученная с помощью этого метода, не обязательно будет согласовываться с требованиями теории относительности. Теперь перед нами стоит задача выяснить, каким образом мы можем обеспечить релятивистский характер нашей квантовой теории.

С этой целью вернемся к исходным принципам. Уже недостаточно рассматривать только одну временну́ю переменную, отвечающую одному частному наблюдателю; мы обязаны включить в рассмотрение различных наблюдателей, движущихся друг относительно друга. Мы должны построить квантовую теорию, в равной мере пригодную для любого из этих наблюдателей, т. е. для произвольного выбора оси времени. Чтобы создать теорию, которая могла бы включать различные временные оси, мы должны сначала получить соответствующую *классическую* теорию и затем по стандартным правилам перейти от этой классической теории к квантовой.

Я хотел бы вернуться к начальной стадии развития нашего гамильтонова формализма и рассмотреть частный случай. Мы начинали с того, что выбирали лагранжиан L, являющийся функцией динамических координат и скоростей q и $\dot{q}$, вводили импульсы, а затем определяли гамильтониан. Возьмем теперь частный случай, когда L представляет собой однородную функцию первого порядка от скоростей $\dot{q}$. Тогда по теореме Эйлера

$$\dot{q}_n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n} = L. \tag{3.1}$$

Отсюда сразу следует, что $p_n \dot{q}_n - L = 0$. Таким образом, мы получаем здесь гамильтониан, равный нулю.

В этом случае у нас обязательно есть первичные связи. Одна первичная связь определенно существует, так как импульсы p являются однородными функциями нулевого порядка от скоростей, т. е. функциями только отношений скоростей. Число импульсов p равно N — числу степеней свободы, а число отношений скоростей есть $N-1$. N функций от $N-1$ отношений скоростей не могут быть независимыми. Должна быть по крайней мере одна функция p и q, которая равна нулю, т. е.

должна существовать по крайней мере одна первичная связь. Их вполне может быть больше, чем одна. Ясно также, что если при равном нулю гамильтониане мы имеем вообще какое-нибудь движение, то должна существовать по крайней мере и одна первичная связь первого рода.

Для полного гамильтониана мы имеем выражение (1.33)

$$H_T = H' + v_a \varphi_a.$$

Гамильтониан H' должен быть величиной первого рода, и, так как 0, несомненно, является величиной первого рода, мы можем взять $H' = 0$. В таком случае наш полный гамильтониан целиком составлен из первичных связей первого рода с произвольными коэффициентами

$$H_T = v_a \varphi_a, \tag{3.2}$$

откуда видно, что должна существовать по крайней мере одна первичная связь первого рода, если мы вообще хотим иметь какое-нибудь движение.

Уравнения движения выглядят тогда следующим образом:

$$\dot{g} \approx v_a [g, \varphi_a].$$

Очевидно, все величины $\dot{g}$ можно умножить на произвольный множитель, так как коэффициенты v произвольны, и, следовательно, в них всегда можно включить этот множитель. Умножение же всех dg/dt на некоторую величину означает, что мы переходим к другой шкале отсчета времени. Таким образом, в этом случае мы имеем гамильтоновы уравнения движения, в которых шкала отсчета времени произвольна. Мы могли бы ввести другую временную переменную τ вместо t и получить, используя τ, уравнения движения вида

$$\frac{dg}{d\tau} \approx v'_a [g, \varphi_a]. \tag{3.3}$$

Итак, мы имеем теперь гамильтонову систему уравнений движения, в которой отсутствует абсолютная временна́я переменная. Любую переменную, монотонно возрастающую с увеличением t, можно использовать в качестве времени, и уравнения движения останутся той же самой формы. Таким образом, для гамильтоновой теории, в которой гамильтониан H' равен нулю и вообще любой гамильтониан слабо равен нулю, характерной чертой является отсутствие абсолютного времени.

Мы можем подойти к рассматриваемому вопросу также с точки зрения принципа действия. Если I — интеграл действия, то

$$I = \int L(q, \dot{q})\, dt = \int L\left(q, \frac{dq}{d\tau}\right) d\tau, \tag{3.4}$$

ибо L является однородной функцией первого порядка от dq/dt. Поэтому мы можем выразить интеграл действия через τ совершенно в том же виде, как и через t. Это показывает, что уравнения движения, вытекающие из принципа действия, должны быть инвариантны относительно перехода от t к τ — уравнения движения не связаны ни с каким абсолютным временем.

Мы имеем, таким образом, специальную форму гамильтоновой теории; однако на самом деле эта форма является не такой уж специальной, ибо при любом исходном гамильтониане всегда можно взять временну́ю переменную в качестве добавочной координаты и преобразовать теорию к такой форме, в которой гамильтониан слабо равен нулю. Делается это по следующему общему правилу. Мы берем время t и считаем его новой динамической координатой, обозначаемой q_0. Строим новый лагранжиан

$$L^* = \frac{dq_0}{d\tau} L\left(q, \frac{dq/d\tau}{dq_0/d\tau}\right) = L^*\left(q_k, \frac{dq_k}{d\tau}\right), \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, N. \tag{3.5}$$

Здесь L^* содержит на одну степень свободы больше, чем исходный лагранжиан L. Лагранжиан L^* не равен L, но

$$\int L^*\, d\tau = \int L\, dt.$$

Поэтому действие оказывается тем же самым, выражается ли оно через L^* и τ или через L и t. Таким образом, для любой динамической системы мы можем рассматривать время как добавочную координату q_0 и затем перейти к новому лагранжиану L^*, содержащему на одну степень свободы больше и представляющему собой однородную функцию первого порядка от скоростей. Лагранжиан L^* дает нам гамильтониан, равный нулю в слабом смысле.

Этот специальный случай гамильтонова формализма, когда гамильтониан слабо обращается в нуль, и есть то, что нам нужно для релятивистской теории, поскольку мы не хотим в релятивистской теории иметь какое-нибудь одно выделенное время, играющее особую роль; желательно иметь возможность рассматривать различные времена τ, которые все должны быть равноправны. Посмотрим теперь более подробно, как можно воспользоваться этой идеей.

Мы хотим рассмотреть состояния в некоторых заданных системах отсчета времени, отвечающих различным наблюдателям. Теперь изобразим пространство-время так, как показано на рис. 1. Состояние в определенный момент времени задается физическими условиями на трехмерной плоской пространственноподобной поверхности S_1, ортогональной оси времени. Состояние в другие моменты времени характеризуется физическими условиями на других поверхностях S_2, S_3, ... Далее мы хотим ввести другие системы отсчета времени, отвечающие различным наблюдателям, и состояние, рассматриваемое относительно новых временны́х осей, будет характеризоваться физическими условиями на других плоских пространственноподобных поверхностях типа S_1'. Мы хотим иметь такую гамильтонову теорию, которая давала бы нам возможность переходить от состояния, скажем, S_1, к состоянию S_1'. Исходя из заданных начальных условий на поверхности S_1 и используя уравнения движения, мы должны суметь получить физические условия на поверхности S_1'. Таким образом, движению поверхности должны отвечать четыре степени свободы; одна, соответствующая перемещению поверхности параллельно самой себе, и, кроме того, три степени свободы, соответствующие произвольному изменению направления нормали к этой плоской поверхности. Это означает, что в решение уравнений движения, которые мы стремимся отыскать, будут входить четыре произвольные функции. Таким образом, нам нужна гамильтонова теория с (по крайней мере) четырьмя первичными связями первого рода.

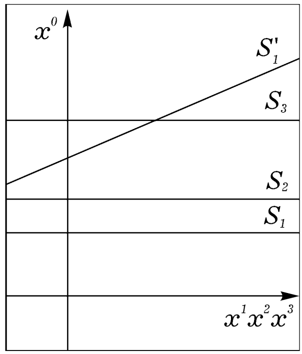


Рис. 1

Могут существовать и другие первичные связи первого рода, если имеются степени свободы движения иного типа, например, если возможны градиентные преобразования электродинамики. Чтобы упростить обсуждение, я пренебрегу этой возможностью существования других первичных связей первого рода и буду рассматривать только те связи, которые обусловлены требованиями теории относительности.

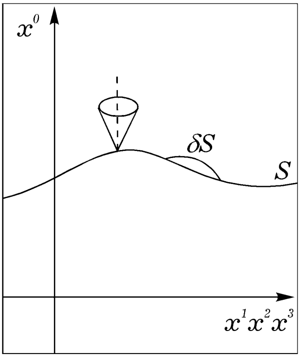


Рис. 2

Мы могли бы продолжить построение теории, относящейся к этим плоским пространственноподобным поверхностям, которые могут двигаться с четырьмя степенями свободы, но мне бы хотелось рассмотреть сначала более общую теорию, в которой мы будем интересоваться состоянием, определенным на произвольной искривленной пространственноподобной поверхности типа S на рис. 2. Она представляет собой трехмерную поверхность в пространстве-времени, обладающую тем свойством, что она везде пространственноподобна, т. е. нормаль к поверхности находится внутри светового конуса. Мы можем построить гамильтонову теорию, описывающую изменение физических условий при переходе от какой-либо одной искривленной пространственноподобной поверхности к другой, близлежащей.

Вводить в рассмотрение искривленные поверхности, однако, вовсе не обязательно с точки зрения специальной теории относительности. Если бы мы хотели включить в нашу теорию гравитационные поля и принципы общей теории относительности, то тогда использование этих искривленных поверхностей имело бы полный смысл, но в случае специальной теории относительности искривленные поверхности не обязательны. Однако я предпочитаю ввести их на данном этапе уже при обсуждении в рамках специальной теории относительности, так как я считаю, что объяснить основные идеи легче при использовании искривленных поверхностей, а не плоских. Объясняется это тем, что, работая с такими искривленными поверхностями, мы можем производить локальные деформации поверхности, подобные δS на рис. 2, и исследовать изменения уравнений движения, связанные с этими локальными деформациями поверхности.

Один из возможных путей дальнейшего развития таков: мы можем задать интеграл действия на совокупности искривленных поверхностей типа S, найти разность интегралов действия для двух соседних поверхностей, разделить эту разность на некоторый параметр $\delta\tau$, служащий мерой расстояния между двумя соседними поверхностями, взять этот результат в качестве нашего лагранжиана и затем, применив наш стандартный метод, перейти от лагранжиана к гамильтониану. Наш лагранжиан обязательно был бы однородной функцией первого порядка от скоростей, выраженных в виде производных по временному параметру τ, характеризующему переход от одной из этих пространственноподобных поверхностей к другой, соседней. В результате мы пришли бы к гамильтоновой теории с гамильтонианом, слабо равным нулю.

Однако я не хочу проделывать всю эту работу и вдаваться в подробности процедуры, в основе которой лежит принцип действия. Я хочу сократить этот путь и обсудить характер получающейся в конечном счете гамильтоновой теории. Мы можем извлечь довольно много сведений относительно характера гамильтоновой теории просто из того, что, как мы знаем, должны существовать степени свободы, отвечающие произвольному движению пространственноподобной поверхности, при условии, что она всегда остается пространственноподобной. Этим степеням свободы, отвечающим движению пространственноподобной поверхности, должны соответствовать в гамильтониане первичные связи первого рода, по одной первичной связи первого рода для каждого типа элементарных движений поверхности, которые можно ввести. Я разовью теорию с этой точки зрения.

Прежде всего мы должны ввести подходящие динамические переменные. Будем описывать точку на пространственноподобной поверхности S тремя криволинейными координатами $(x^1, x^2, x^3) = (x')$. Чтобы задать положение этой пространственноподобной поверхности в пространстве-времени, введем другой набор координат y_Λ $(\Lambda = 0, 1, 2, 3)$, в качестве которых мы можем взять прямолинейные ортогональные координаты специальной теории относительности. (Я использую заглавную букву для индекса, относящегося к y-координатной системе, и строчную букву, например r, для индекса, относящегося к x-координатной системе.) Четыре функции y_Λ переменных x^r будут характеризовать поверхность S в пространстве-времени, а также и способ ее параметризации, т. е. систему координат x^1, x^2, x^3.

Мы можем использовать эти y_Λ в качестве динамических координат q. Введем величину

$$y_{\Lambda, r} = \frac{\partial y_\Lambda}{\partial x^r} \quad (r = 1, 2, 3); \tag{3.6}$$

она будет функцией динамических координат q. Далее введем

$$\dot{y}_\Lambda = \frac{\partial y_\Lambda}{\partial \tau}, \tag{3.7}$$

где τ — параметр, изменяющийся при переходе от одной поверхности к другой, соседней; это даст нам скорость $\dot{q}$. Итак, переменные y_Λ являются динамическими координатами, необходимыми для описания поверхности, и $\dot{y}_\Lambda$ — скоростями.

Нам понадобится ввести импульсные переменные w_Λ, сопряженные с этими динамическими координатами. Импульсные переменные будут связаны с координатами СП-соотношениями

$$[y_{\Lambda x}, w_{\Gamma x'}] = g_{\Lambda\Gamma}\delta^3(x - x'). \tag{3.8}$$

Нам будут нужны другие переменные для описания любых физических полей, имеющихся в задаче. Если мы имеем дело со скалярным полем V, то функция $V(x)$ для всех значений x^1, x^2, x^3 даст нам новые динамические координаты q. Частные производные $V_{,r}$ будут функциями q. Величина $\partial V/\partial\tau$ будет скоростью. Производная от V по любому направлению выражается через $\partial V/\partial\tau$ и $V_{,r}$ т. е. выражается через динамические координаты и скорости. Лагранжиан будет содержать эти производные V по произвольным направлениям и потому будет функцией динамических координат и скоростей. Для каждого V нам потребуется сопряженный импульс U, удовлетворяющий СП-соотношениям

$$[V(x), U(x')] = \delta^3(x - x'). \tag{3.9}$$

Таким способом трактуется скалярное поле. Аналогичный метод с введением необходимых добавочных индексов пригоден для векторных, тензорных или спинорных полей. Нам нет нужды рассматривать это особо.

Исследуем теперь, каким будет гамильтониан. Гамильтониан должен быть линейной функцией первичных связей первого рода типа (3.2). Прежде всего мы должны выяснить, каков вид первичных связей первого рода. Должны существовать первичные связи первого рода, соответствующие произвольным деформациям поверхности. Чтобы обеспечить изменение динамических координат y, эти связи должны содержать переменные w, сопряженные с y, и в них будут входить другие переменные поля. Мы можем выразить такие связи в виде

$$w_\Lambda + K_\Lambda \approx 0, \tag{3.10}$$

где K_Λ — некоторая функция гамильтоновых переменных q и p, не зависящая явно от w.

Мы можем утверждать, что гамильтониан представляет собой просто произвольную линейную функцию всех величин (3.10)

$$H_T = \int c^\Lambda (w_\Lambda + K_\Lambda)\, d^3x. \tag{3.11}$$

Интегрирование здесь проводится по трем координатам x, определяющим точку на поверхности; c — произвольные функции трех x и времени.

Общее уравнение движения, конечно, выглядит как $\dot{g} \approx [g, H_T]$. Смысл коэффициента c^Λ можно выяснить, если взять это уравнение движения и положить в нем функцию g равной одной из переменных y. Для $g = y_\Lambda$ в некоторой заданной точке x^1, x^2, x^3 мы получаем

$$\dot{y}_\Lambda = \left[y_\Lambda, \int c'^\Gamma (w'_\Gamma + K'_\Gamma)\, d^3x' \right] = \int c'^\Gamma [y_\Lambda, w'_\Gamma + K'_\Gamma]\, d^3x. \tag{3.12}$$

Здесь штрих при переменных поля c^Γ, w_Γ или K_Γ означает, что берутся значения этих величин в точке $x^{1'}$, $x^{2'}$, $x^{3'}$. Скобка Пуассона y_Λ с K'_Γ равна нулю, так как K'_Γ не зависит от w, поэтому нужно взять скобку Пуассона y_Λ только с $w'_\Gamma = w_\Gamma(x')$. Это даст нам дельта-функцию, и, следовательно,

$$\dot{y}_\Lambda = c_\Lambda. \tag{3.13}$$

Таким образом, коэффициенты c_Λ оказываются величинами типа скоростей, описывающими изменение нашей поверхности с изменением параметра τ. Выбирая эти c_Λ произвольным образом, мы можем получить произвольное изменение поверхности в зависимости от τ.

Это позволит нам представить вид гамильтониана в теории поля, развитой для состояний на искривленных поверхностях.

Мы можем несколько глубже проанализировать свойства этого гамильтониана, разлагая входящие в него векторы на компоненты, нормальные и тангенциальные к поверхности. Для любого вектора ξ_Λ можно определить его *нормальную компоненту*

$$\xi_\perp = \xi_\Lambda l^\Lambda,$$

где l^Λ — единичный вектор нормали, и *тангенциальные компоненты* (отнесенные к x-координатной системе)

$$\xi_r = \xi_\Lambda y^\Lambda_{,r}.$$

Векторы l определяются величинами $y^\Lambda_{,r}$ и поэтому являются функциями динамических координат. Любой вектор можно разложить таким путем на составляющие — нормальную к поверхности и тангенциальные. Скалярное произведение определяется как

$$\xi_\Lambda \eta^\Lambda = \xi_\perp \eta_\perp + \gamma^{rs} \xi_r \eta_s, \tag{3.14}$$

где $\gamma_{rs}\, dx^r\, dx^s$ — элемент метрики поверхности, записанный в x-координатной системе. Матрица γ^{rs} является обратной по отношению к $\gamma_{rs} (r,\, s = 1,\, 2,\, 3)$.

Используя определение скалярного произведения (3.14), мы можем выразить наш полный гамильтониан через тангенциальные и нормальные компоненты w и K:

$$H_T = \int \dot{y}^\Lambda (w_\Lambda + K_\Lambda)\, d^3x = \int (\dot{y}_\perp (w_\perp + K_\perp) + \gamma^{rs} \dot{y}_r (w_s + K_s))\, d^3x. \tag{3.15}$$

Здесь $\dot{y}^\Lambda = \dot{y}^\Lambda l_\Lambda$ и $\dot{y}_r = \dot{y}^\Lambda y_{\Lambda,r}$.

Нам понадобится знать СП-соотношения между нормальными и тангенциальными членами выражения (3.15). Я выпишу сначала СП-соотношения для различных компонент w. Мы имеем, очевидно,

$$[w_\Lambda,\, w'_\Gamma] = 0 \tag{3.16}$$

эта форма записи связана с внешними координатами y; но когда мы разложим наши величины w на нормальные и тангенциальные компоненты, скобки Пуассона их друг с другом уже больше не будут равны нулю. Скобки Пуассона нетрудно раскрыть путем прямого расчета. Я не хочу вдаваться в детали этой выкладки. Упомяну только, что подробный расчет можно найти в моей работе[1]. Результаты таковы:

$$[w_r,\, w'_s] = w_s \delta_{,r}(x - x') + w'_r \delta_{,s}(x - x'), \tag{3.17}$$

$$[w_\perp,\, w'_r] = w'_\perp \delta_{,r}(x - x'), \tag{3.18}$$

$$[w_\perp,\, w'_\perp] = -2w^r \delta_{,r}(x - x') - w^r_{,r} \delta(x - x'). \tag{3.19}$$

[1] P. A. M. Dirac, Can. Journ. of Math., 1951, v. 3, p. 1.

Мы знаем также, что

$$[w_\mu + K_\mu,\, w'_\nu + K'_\nu] \approx 0 \text{ для } \mu,\, \nu = r,\, s \text{ или } \perp. \tag{3.20}$$

Отсюда можно вывести следующее:

$$[w_r + K_r,\, w'_s + K'_s] = (w_s + K_s)\delta_{,r}(x - x') + (w'_r + K'_r)\delta_{,s}(x - x'), \tag{3.21}$$

$$[w_\perp + K_\perp,\, w'_r + K'_r] = (w'_\perp + K'_\perp)\delta_{,r}(x - x'), \tag{3.22}$$

$$[w_\perp + K_\perp,\, w'_\perp + K'_\perp] = -2(w^r + K^r)\delta_{,r}(x - x') - (w^r + K^r)_{,r}\delta(x - x'). \tag{3.23}$$

Эти результаты можно было бы получить непосредственно на основе определений нормальных и тангенциальных компонент величин w, но проще их вывести с помощью следующих соображений. Так как все величины $w_r + K_r$, $w_\perp + K_\perp$ относятся к первому роду, их скобки Пуассона слабо обращаются в нуль. Поэтому

$$[w_r + K_r,\, w'_s + K'_s],\ [w_\perp + K_\perp,\, w'_r + K'_r]$$

и

$$[w_\perp + K_\perp,\, w'_\perp + K'_\perp]$$

все должны быть равны нулю в слабом смысле. Мы можем теперь выяснить, чему они равны в сильном смысле. Мы должны добавить в правые части (3.21)–(3.23) величины, слабо равные нулю и, следовательно, построенные из $w_r + K_r$ и $w_\perp + K_\perp$ с некоторыми коэффициентами. Далее, раскрывая члены в правых частях, содержащие w, мы сможем найти эти коэффициенты. Члены, содержащие w, могут появиться только из скобок Пуассона w с w (см. (3.17)–(3.19)). Составив скобку Пуассона $[w, K']$, мы не получим никаких членов с w, ибо при этом мы имеем скобку Пуассона w-импульса с некоторыми функциями динамических координат и импульсов, отличающихся от w, а это не может дать импульсных переменных w. Аналогично скобка Пуассона K с K не будет содержать никаких переменных w. Поэтому единственными величинами w, появляющимися в правой части (3.21), будут те, которые стоят справа в (3.17). Нужно ввести еще некоторые члены в правую часть (3.21), чтобы все выражение в целом слабо обращалось в нуль. Какие именно члены мы должны добавить, совершенно ясно —

это $(w_s + K_s)\delta_{,r}(x - x') + (w'_r + K'_r)\delta_{,s}(x - x')$. Аналогичным образом определяются правые части (3.22) и (3.23).

Другой вопрос, которого стоит коснуться, связан с членами w_s+K_s в полном гамильтониане (3.15). Они соответствуют такому движению, при котором изменяется система координат на искривленной поверхности, но не сама поверхность. Этому отвечает движение каждой точки поверхности по касательной к ней.

Положим $\dot{y}_\perp = 0$. Это означает, что поверхность не движется в направлении, перпендикулярном к ней, а просто происходит изменение координат поверхности. В таком случае мы имеем уравнения движения типа

$$\dot{g} = \int \gamma^{rs}\dot{y}_r[g,\, w_s + K_s]\, d^3x. \tag{3.24}$$

Такой вид должно иметь уравнение движения, описывающее изменение g при преобразовании системы координат на неподвижной поверхности. Однако такое изменение g должно быть тривиальным; его можно определить, просто используя геометрические свойства динамической переменной g. Если g — скалярная величина, то тогда нам известно, как она изменяется при изменении системы координат x^1, x^2, x^3. Если g — компонента вектора или тензора, характер ее изменения установить несколько сложнее, но все же можно; аналогично, если g — спинор. В любом случае это изменение g, по существу, тривиально. Это означает, что K_s можно определить из одних только геометрических соображений.

Я покажу это на одном или двух примерах. В случае скалярного поля V с сопряженным импульсом U в K_r имеется член

$$V_{,r}U. \tag{3.25}$$

Для векторного поля, скажем, трехмерного вектора A_s, сопряженным которому является B^s, в K_r имеется член

$$A_{s,\,r}B^s - (A_rB^s)_{,s}; \tag{3.26}$$

аналогично получаем для тензоров; выражения для спиноров несколько сложнее. Первое слагаемое в (3.26) описывает изменение A_s, возникающее из-за трансляции, связанной с изменением координатной системы, второе слагаемое описывает изменение A_s за счет вращения, также связанного с преобразованием системы координат. В случае скаляра подобный член, отвечающий вращению, в (3.25) отсутствует.

Мы можем получить полное выражение для K_r, суммируя вклады от всевозможных полей, имеющихся в задаче. В результате мы увидим, что эту тангенциальную компоненту K можно найти просто из геометрических соображений. Отсюда ясно, что тангенциальная компонента K не имеет реального физического значения, она определяется только формой математического аппарата. Величиной, существенной с физической точки зрения, является нормальная компонента K в (3.15). Эта нормальная компонента K в сумме с нормальной компонентой w даст нам связь первого рода, отвечающую движению поверхности нормально к себе самой. Это уже величина, важная с точки зрения динамики.

Проблема построения гамильтоновой теории поля для состояний на этих искривленных поверхностях включает вопрос об определении выражений для K, удовлетворяющих необходимым СП-соотношениям (3.21)–(3.23). Тангенциальную составляющую можно, как мы обсудили, найти из геометрических соображений; она, конечно, должна удовлетворять СП-соотношению (3.21). В СП-соотношение (3.22) $K_\perp$ входит линейно; этому соотношению будет удовлетворять любая величина $K_\perp$, представляющая собой скалярную плотность. Таким образом, для выполнения этого СП-соотношения вполне достаточно, чтобы величина $K_\perp$ преобразовывалась подходящим образом при изменении системы координат x^1, x^2, x^3. Соотношению (3.23), квадратичному по $K_\perp$, удовлетворить трудно. Поэтому проблема формулировки гамильтоновой теории поля в случае искривленных пространственноподобных поверхностей сводится теперь к задаче отыскания нормальной компоненты величины K, являющейся скалярной плотностью и удовлетворяющей СП-соотношению (3.23).

Один из возможных путей определения такой нормальной компоненты K основан на использовании лоренц-инвариантного принципа действия. Исходя из принципа действия, мы могли бы получить все компоненты K. Действуя таким образом, мы получили бы тангенциальную компоненту K не обязательно такой же, как прежде, составленной из членов типа (3.25) и (3.26), из-за возможного изменения, связанного с контактным преобразованием. Однако эффект такого контактного преобразования можно исключить, переписав принцип действия, добавляя в интеграл действия полный дифференциал. Это не окажет влияния на уравнения движения. С помощью такого изменения принципа действия можно добиться того, чтобы тангенциальная компонента K, полученная из принципа действия, точно совпала со значением, найденным с помощью простых геометрических соображений. Затем мы можем определить нормальную компоненту K, используя наш общий метод перехода от принципа действия к гамильтониану. Если принцип действия релятивистски инвариантен, то нормальная компонента K, полученная таким способом, должна удовлетворять условию (3.23).

Мы можем теперь обсудить переход к квантовой теории. В процессе квантования мы преобразуем величины w и переменные, входящие в K, в операторы. Теперь мы должны быть осторожны при выборе способа определения тангенциальных и нормальной компонент w, и я определяю их следующим образом:

$$w_r = y_{\Lambda,\, r} w^{\Lambda}, \tag{3.27}$$

т. е. помещаю импульсную переменную w справа. (Вы знаете, что в квантовой теории результаты будут различными в зависимости от того, справа или слева мы поставим w.) Аналогично

$$w_{\perp} = l_{\Lambda} w^{\Lambda}. \tag{3.28}$$

Тем самым эти величины полностью определены.

Далее, в квантовой теории мы имеем слабые уравнения $w_r + K_r \approx 0$ и $w_{\perp} + K_{\perp} \approx 0$, дающие нам, согласно (2.22), дополнительные условия для волновой функции:

$$(w_r + K_r)\varphi = 0 \tag{3.29}$$

$$(w_{\perp} + K_{\perp})\varphi = 0 \tag{3.30}$$

Потребуем, чтобы эти дополнительные условия были непротиворечивы. Согласно (2.25) мы должны добиться того, чтобы в перестановочных соотношениях (3.21)–(3.23) коэффициенты в правых частях стояли перед связями (слева от них).

В случае тангенциальных компонент условия (3.21) будут выполнены, если мы подберем порядок следования сомножителей в K_r так, чтобы импульсные переменные всегда находились справа. В (3.21) у нас есть ряд величин, которые линейны по импульсным переменным, причем последние находятся справа; коммутатор любых двух таких величин снова будет линеен по импульсным переменным, и они снова будут стоять справа. Поэтому импульсные переменные всегда будут оказываться справа, и все входящие сомножители всегда будут располагаться в желательном порядке.

Теперь мы должны рассмотреть задачу упорядочения в компоненте $K_\perp$, с которой столь просто разделаться не удается. Нормальная компонента $K_\perp$ обычно содержит произведение некоммутирующих сомножителей, и нужно расставить их так, чтобы условия (3.22) и (3.23) выполнялись, причем в каждом члене в правой части коэффициенты должны находиться слева. С уравнением (3.22) особых затруднений не возникает. Все, что нам нужно, это просто взять $K_\perp$ в виде скалярной плотности, так как стоящая в правой части величина $w'_\perp + K'_\perp$ не имеет при себе никаких некоммутирующих с ней коэффициентов; единственным коэффициентом служит дельта-функция, которая является c-числом, а не оператором.

Однако с соотношением (3.23) дело обстоит уже не так просто. Его правую часть при рассмотрении квантовой теории следует выписать в более развернутом виде:

$$\begin{aligned}[w_\perp + K_\perp,\, w'{}_\perp + K'_\perp] = &-2\gamma^{rs}(w_s + K_s)\delta_{,r}(x - x') - \\ &-(\gamma^{rs}(w_s + K_s))_{,r}\delta(x - x').\end{aligned} \tag{3.31}$$

Я записал это соотношение с коэффициентами γ^{rs}, стоящими слева, и именно таким образом они должны быть расположены в квантовой теории.

При построении квантовой теории поля для состояний на произвольных искривленных поверхностях необходимо определить такую величину $K_\perp$, для которой имеет место СП-соотношение (3.31) с коэффициентами γ^{rs}, стоящими слева. Если (3.31) выполняется, то дополнительные условия (3.30) непротиворечивы, а мы уже выяснили, что условия (3.29) не противоречат друг другу и что (3.30) согласуется с (3.29).

Итак, мы сформулировали условия, при выполнении которых наша квантовая теория будет релятивистской. Нужно, конечно, известное везение, чтобы нам удалось удовлетворить этим условиям. Мы не можем сделать это в общем случае. Имеется одно важное общее правило, которое состоит в том, что если нам удалось найти величину $K_\perp$, удовлетворяющую этим и некоторым другим условиям, то нетрудно построить и другие $K_\perp$, удовлетворяющие рассматриваемым условиям. Допустим, что мы имеем решение, в котором K содержит только недифференцируемые импульсные переменные вместе с динамическими переменными, которые могут находиться под знаком производной. Существует ряд простых полей, для которых $K_\perp$ удовлетворяет СП-соотношениям (3.22) и (3.23) и имеет указанный простой вид. Тогда мы можем прибавить к $K_\perp$ произвольную функцию недифференцируемых переменных q. Иначе говоря, мы берем новую величину

$$K_\perp^* = K_\perp + \varphi(q).$$

Очевидно, что добавление к $K_\perp$ этого члена φ может повлиять на правую часть (3.31) и там появится величина, пропорциональная дельта-функции. Мы не можем получить никаких производных от дельта-функции, ибо добавочные члены происходят от скобок Пуассона функции $\varphi(q)$ с недифференцируемыми импульсными переменными. Поэтому единственным изменением правой части в результате добавления к $K_\perp$ члена φ может быть появление слагаемого, кратного дельта-функции. Но правая часть должна быть антисимметричной относительно перестановки x и x', ибо левая часть, очевидно, обладает этим свойством. Это обстоятельство как раз и исключает возможность появления величины, пропорциональной дельта-функции, в правой части (3.31), так что она вовсе не изменится. Поэтому, если исходная величина $K_\perp$ удовлетворяет СП-соотношению (3.31), то тогда и новая величина $K_\perp^*$ будет обладать тем же свойством.

Чтобы завершить доказательство, нужно принять во внимание еще одно обстоятельство. Величина φ может также содержать $\Gamma = \sqrt{-\det g_{rs}}$. Прямым расчетом нетрудно проверить, что $[w_\perp, \Gamma']$ содержит недифференцируемую $\delta(x - x')$, и поэтому наше рассуждение останется в силе, если включить Γ в φ. Фактически мы должны это сделать, иначе мы нарушим справедливость соотношения (3.22), требующего, чтобы $K_\perp^*$ и $K_\perp$ были скалярными плотностями. Мы таким образом, обязаны добавить Γ в нужной степени, чтобы сделать φ скалярной плотностью.

Этот метод обычно используется на практике при введении в рассмотрение взаимодействия между полями, не нарушающего релятивистского характера теории. Для различных простых полей указанные условия оказываются выполненными. В таких случаях мы имеем необходимый нам элемент удачи, так что мы можем учесть взаимодействие между полями описанного простого вида, и условия, обеспечивающие релятивистский характер квантовой теории, не будут нарушены.

Существует несколько примеров, в которых нам *не* сопутствует необходимое везение, и нам не удается так расположить сомножители в $K_\perp$, чтобы было справедливо соотношение (3.31) с коэффициентами, стоящими слева. В таком случае мы не знаем, как провести квантование теории для состояний на искривленных поверхностях. Но на самом деле мы пытаемся достичь значительно большего, чем необходимо, когда ставим перед собой задачу построения квантовой теории для состояний на искривленных поверхностях. В целях развития теории, согласующейся со специальной теорией относительности, вполне было бы достаточно ограничиться состояниями, определенными только на плоских поверхностях. Это приведет к некоторым условиям, налагаемым на $K_\perp$, не столь жестким, как те, что я сформулировал здесь. И, по всей вероятности, мы сможем удовлетворить этим менее жестким условиям, не будучи в состоянии удовлетворить условиям, приведенным выше.

Таким примером служит электродинамика Борна–Инфельда, которая является модификацией электродинамики Максвелла и основывается на интеграле действия, совпадающем с максвелловским в случае слабых полей, но отличающемся от него для сильных полей. Электродинамика Борна–Инфельда приводит к классическому выражению для $K_\perp$, содержащему квадратные корни. Это выражение имеет такой вид, что удовлетворить условиям, необходимым для построения релятивистской квантовой теории на искривленных поверхностях, кажется невозможным. Однако представляется возможным построить теорию на плоских поверхностях, когда эти условия оказываются менее ограничивающими.

Лекция 4
Квантование на плоских поверхностях

Мы имели дело с состояниями, определенными на произвольных пространственноподобных искривленных поверхностях в пространстве-времени. Я подытожу полученные нами результаты, касающиеся тех условий, при выполнении которых квантовая теория поля, сформулированная в терминах этих состояний, будет релятивистской. Для описания поверхности мы вводим переменные, представляющие собой четыре координаты y^Λ для каждой точки $x^r = (x^1, x^2, x^3)$ на поверхности. Переменные x образуют криволинейную систему координат на поверхности. Величины y тогда рассматриваются как динамические координаты, и существуют сопряженные им импульсы $w_\Lambda(x)$, также являющиеся функциями переменных x. Далее мы получаем набор первичных связей первого рода, возникающих в гамильтоновом формализме, типа

$$w_\Lambda + K_\Lambda \approx 0, \tag{3.10}$$

Величины K не зависят от w, но могут быть функциями любых других гамильтоновых переменных. В эти K будут входить имеющиеся в наличии физические поля. Мы анализируем полученные связи, разлагая их на компоненты, тангенциальные и нормальные к поверхности. Тангенциальные компоненты суть

$$w_r + K_r \approx 0, \tag{4.1}$$

тогда как нормальная компонента —

$$w_\perp + K_\perp \approx 0. \tag{4.2}$$

В результате этого анализа мы находим, что величины K_r можно получить лишь из геометрических соображений. Эти K_r следует рассматривать как нечто довольно тривиальное, связанное с такими преобразованиями, при которых изменяются координаты поверхности, но сама поверхность не движется. Связям первого рода (4.2) отвечает движение поверхности в направлении, нормальном к ней, и они являются физически существенными.

Для непротиворечивости теории должны быть выполнены СП-соотношения (3.21)–(3.23). Некоторые из этих соотношений содержат просто K_r и автоматически удовлетворяются в том случае, когда величины K_r выбираются в соответствии с геометрическими требованиями. Некоторые из условий непротиворечивости линейны по $K_\perp$ и автоматически удовлетворяются, если мы выберем $K_\perp$ в виде скалярной плотности. Далее, наконец, мы имеем условия непротиворечивости, квадратичные по $K_\perp$, и эти последние существенны, ибо им нельзя удовлетворить с помощью тривиальных соображений.

Этим важным условиям непротиворечивости можно удовлетворить в классической теории, если исходить из лоренц-инвариантного принципа действия и вычислять $K_\perp$, следуя стандартным правилам перехода от принципа действия к гамильтониану. Проблема построения релятивистской квантовой теории сводится тогда к задаче подходящего выбора некоммутирующих сомножителей, входящих в квантовую величину $K_\perp$, т. е. такого выбора, чтобы выполнялись условия непротиворечивости, а это означает, что коммутатор двух величин вида (4.2), взятых в двух точках пространства x^1, x^2, x^3, должен быть линейной комбинацией связей с коэффициентами, стоящими слева. Таким квантовым условиям непротиворечивости обычно бывает довольно трудно удовлетворить. Это оказывается возможным в некоторых простых примерах, но в более сложных случаях удовлетворить этим условиям, по-видимому, нельзя. Мы приходим к выводу о невозможности построить квантовую теорию для таких более общего типа полей, используя состояния, определенные на произвольных искривленных поверхностях.

По-видимому, стоит упомянуть, что величины K имеют простой физический смысл: K_r можно интерпретировать как плотность импульса, $K_\perp$ — как плотность энергии. Таким образом, плотность импульса, выраженная через гамильтоновы переменные, представляет собой величину, которую всегда легко найти просто из геометрического характера проблемы, а плотность энергии является существенной величиной, которую необходимо выбрать правильно (удовлетворив определенным перестановочным соотношениям), чтобы выполнялись требования релятивистской инвариантности.

Даже если не удается построить квантовую теорию, используя состояния, определенные на произвольных искривленных поверхностях, может все же оказаться возможным построить такую теорию, используя состояния, определенные только на плоских поверхностях.

Соответствующую классическую теорию можно получить, наложив просто условия, которые сведут искривленные поверхности, рассматривавшиеся нами ранее, к плоским. Эти условия будут следующими. Поверхность характеризуется функциями $y_\Lambda(x)$; чтобы она была плоской, указанные функции должны иметь вид

$$y_\Lambda(x) = a_\Lambda + b_{\Lambda r}x^r, \tag{4.3}$$

где коэффициенты a и b не зависят от переменных x. Если функции $y_\Lambda(x)$ имеют такой вид, то поверхность будет плоской и система координат x^r станет прямолинейной. На данном этапе мы не требуем, чтобы система координат x^r была ортогональной — я введу эти условия несколько позже. Таким образом, мы рассматриваем произвольную косоугольную прямолинейную систему координат x^r.

Теперь наша поверхность задана величинами a_Λ, $b_{\Lambda r}$, и эти величины будут выступать в качестве динамических переменных, нужных для задания поверхности. Их стало значительно меньше, чем прежде. Фактически у нас здесь только $4 + 12 = 16$ переменных. Мы имеем эти 16 динамических переменных, определяющих поверхность, вместо прежних $y_\Lambda(x)$, эквивалентных совокупности $4 \cdot \infty^3$ динамических координат.

Ограничив таким способом класс поверхностей, мы можем рассматривать это ограничение как введение ряда связей в наш гамильтонов формализм — связей, которые выражают $4 \cdot \infty^3$ координат y через 16 переменных. Эти связи будут связями второго рода. Введение таких связей означает сокращение числа эффективных степеней свободы для поверхности с $4 \cdot \infty^3$ до 16 — весьма кардинальное сокращение!

В предыдущей лекции я обрисовал общий метод трактовки связей второго рода. Сокращение числа эффективных степеней свободы приводит к новому определению скобок Пуассона. Этот общий метод не обязателен в данном случае, поскольку здесь условия достаточно просты и можно воспользоваться более прямым методом. В самом деле, мы можем непосредственно установить, что эффективные импульсные переменные остаются в теории и после сокращения числа эффективных степеней свободы для поверхности.

Ограничив таким образом наши динамические переменные, мы должны, конечно, наложить ограничение и на скорости:

$$\dot{y}_\Lambda = \dot{a}_\Lambda + \dot{b}_{\Lambda r}x^r. \tag{4.4}$$

Точка сверху означает дифференцирование по некоторому параметру τ. С изменением τ изменяется рассматриваемая плоская поверхность — она перемещается параллельно самой себе и при этом изменяется направление ее нормали. Поверхность, таким образом, движется с четырьмя степенями свободы, и зависимость $a_\Lambda + b_{\Lambda r}$ от параметра τ отражает это движение.

Полный гамильтониан теперь есть

$$\begin{aligned} H_T &= \int \dot{y}^\Lambda (w_\Lambda + K_\Lambda)\, d^3x = \\ &= \dot{a}^\Lambda \int (w_\Lambda + K_\Lambda)\, d^3x + \dot{b}_r^\Lambda \int x^r (w_\Lambda + K_\Lambda)\, d^3x. \end{aligned} \tag{4.5}$$

(Я вынес величины $\dot{a}^\Lambda$ и $\dot{b}_r^\Lambda$ за знак интеграла, поскольку они не зависят от переменных x.) Выражение (4.5) содержит переменные w только в виде комбинаций

$$\int w_\Lambda\, d^3x \quad \text{и} \quad \int x^r w_\Lambda\, d^3x.$$

Здесь мы имеем 16 комбинаций переменных w, которые будут служить новыми импульсными переменными, сопряженными 16 переменным a и b, требующимся для описания поверхности в данном случае.

Мы можем снова выразить H_T через нормальные и тангенциальные компоненты этих величин:

$$\begin{aligned} H_T = \dot{a}^\Lambda l_\Lambda \int (w_\perp + K_\perp)\, d^3x + \dot{a}^\Lambda b_{\Lambda r} \int (w^r + K^r)\, d^3x + \\ + \dot{b}_r^\Lambda l_\Lambda \int x^r (w_\perp + K_\perp)\, d^3x + \dot{b}_{\Lambda x} b_s^\Lambda \int x^r (w^s + K^s)\, d^3x. \end{aligned} \tag{4.6}$$

Теперь введем условие: координатная система x^r ортогональна. Это значит, что

$$b_{\Lambda r} b_s^\Lambda = g_{rs} = -\delta_{rs}. \tag{4.7}$$

Дифференцируя (4.7) по τ, получаем

$$\dot{b}_{\Lambda r} b_s^\Lambda + \dot{b}_{\Lambda s} b_r^\Lambda = 0. \tag{4.8}$$

(Я совершенно свободно поднимаю индексы Λ, так как Λ-координатная система является просто координатной системой специальной теории относительности.) Из этого уравнения видно, что величина $\dot{b}_{\Lambda r} b_s^{\Lambda}$ антисимметрична по индексам r и s. Поэтому последний член в выражении (4.6) равен

$$\frac{1}{2}\dot{b}_{\Lambda r} b_s^{\Lambda} \int \{x^r(w^s + K^s) - x^s(w^r + K^r)\}\, d^3x.$$

Теперь вы видите, что в H_T входит не столь много, как прежде, линейных комбинаций переменных w. Единственными остающимися линейными комбинациями w являются следующие:

$$P_\perp \equiv \int w_\perp\, d^3x, \tag{4.9}$$

$$P_r \equiv \int w_r\, d^3x, \tag{4.10}$$

а также

$$M_{r\perp} \equiv \int x^r w_\perp\, d^3x \tag{4.11}$$

и

$$M_{rs} \equiv \int (x_r w_s - x_s w_r)\, d^3x. \tag{4.12}$$

(Теперь мы можем совершенно спокойно поднимать и опускать индексы r, так как они относятся к прямолинейным ортогональным осям.) Эти величины представляют собой импульсные переменные, сопряженные переменным, требующимся для задания поверхности в том случае, когда, согласно наложенному ограничению, поверхность является плоской относительно прямолинейной ортогональной системы координат.

Весь набор импульсных переменных, определяемых выражениями (4.9)–(4.12), можно записать как P_μ и $M_{\mu\nu} = -M_{\nu\mu}$ где индексы μ и ν принимают 4 значения, причем значение 0 соответствует нормальной компоненте, а значения 1, 2, 3 отвечают трем x-компонентам. Индексы μ и ν, относящиеся к x-координатной системе, обозначены строчными буквами, чтобы отличить их от индекса Λ, относящегося к фиксированной y-координатной системе.

Итак, теперь число наших импульсных переменных сокращено до 10, и соответственно этим 10 импульсным переменным мы имеем 10 первичных связей первого рода, которые можно записать как

$$P_\mu + p_\mu \approx 0, \tag{4.13}$$

$$M_{\mu\nu} + m_{\mu\nu} \approx 0, \tag{4.14}$$

где

$$p_\perp \equiv \int K_\perp \, d^3x, \tag{4.15}$$

$$p_r \equiv \int K_r \, d^3x, \tag{4.16}$$

$$m_{r\perp} \equiv \int x_r K_\perp \, d^3x \tag{4.17}$$

и

$$m_{rs} \equiv \int (x_r K_s - x_s K_r) \, d^3x. \tag{4.18}$$

Мы имеем теперь 10 первичных связей первого рода, отвечающих движению плоской поверхности. В третьей лекции я упомянул, что необходимо иметь 4 первичные связи первого рода (3.10), чтобы плоская поверхность могла произвольно двигаться. Сейчас мы видим, что ограничиться четырьмя связями неудобно. Это число нужно увеличить до 10, потому что 4 элементарных движения поверхности (нормально к самой себе и изменение направления ее нормали) не образуют группу. Чтобы получить набор элементарных движений, составляющих группу, мы должны расширить его с 4 до 10, причем 6 добавочных элементов группы включают трансляции и повороты поверхности. Эти последние движения сводятся просто к преобразованию системы координат на поверхности, но не влияют на поверхность как целое. Таким путем мы пришли к гамильтонову формализму, содержащему 10 первичных связей первого рода.

Мы должны теперь обсудить условия непротиворечивости, выраженные посредством СП-соотношений. Они должны выполняться для того, чтобы все связи были связями первого рода. Рассмотрим сначала СП-соотношения, связывающие друг с другом импульсные переменные P_μ и $M_{\mu\nu}$. Эти импульсные переменные заданы, согласно (4.9)–(4.12), через w, а нам известны СП-соотношения переменных w

друг с другом, а именно (3.17)–(3.19), следовательно, мы сможем найти СП-соотношения для переменных P и M. Однако нет необходимости продолжать здесь процедуру определения СП-соотношений для переменных P и M. Достаточно уяснить себе, что эти переменные в точности соответствуют операторам трансляций и поворотов в четырехмерном плоском пространстве-времени, и потому СП-соотношения для них должны точно соответствовать перестановочным соотношениям между операторами трансляций и поворотов. В любом случае мы получаем следующие СП-соотношения:

$$[P_\mu, P_\nu] = 0 \tag{4.19}$$

(это означает, что различные трансляции коммутируют),

$$[P_\mu, M_{\rho\sigma}] = g_{\mu\rho}P_\sigma - g_{\mu\sigma}P_\rho, \tag{4.20}$$

$$[M_{\mu\nu}, M_{\rho\sigma}] = -g_{\mu\rho}M_{\nu\sigma} + g_{\nu\rho}M_{\mu\sigma} + g_{\mu\sigma}M_{\nu\rho} - g_{\nu\sigma}M_{\mu\rho}. \tag{4.21}$$

Теперь рассмотрим условия, при выполнении которых первичные связи (4.13) и (4.14) будут первого рода. Скобка Пуассона любых двух из них должна быть величиной, которая слабо равна нулю, и, следовательно, она должна представлять собой линейную комбинацию этих связей. Таким образом, мы приходим к СП-соотношениям

$$[P_\mu + p_\mu, P_\nu + p_\nu] = 0, \tag{4.22}$$

$$[P_\mu + p_\mu, M_{\rho\sigma} + m_{\rho\sigma}] = g_{\mu\rho}(P_\sigma + p_\sigma) - g_{\mu\sigma}(P_\rho + p_\rho) \tag{4.23}$$

и

$$\begin{gathered}[M_{\mu\nu} + m_{\mu\nu}, M_{\rho\sigma} + m_{\rho\sigma}] = -g_{\mu\rho}(M_{\nu\sigma} + m_{\nu\sigma}) + \\ + g_{\nu\rho}(M_{\mu\sigma} + m_{\mu\sigma}) + g_{\mu\sigma}(M_{\nu\rho} + m_{\nu\rho}) - g_{\nu\sigma}(M_{\mu\rho} + m_{\mu\rho}).\end{gathered} \tag{4.24}$$

Для получения этих соотношений использовалось следующее соображение: в правой части каждого соотношения должна стоять величина, которая слабо равна нулю, и нам известны члены в правых частях, в которые входят переменные P, M, так как эти члены происходят только от скобок Пуассона (4.19)–(4.21). (Я уже использовал то же самое соображение в случае искривленных поверхностей при выводе соотношений (3.21)–(3.23), так что нет необходимости подробно рассматривать это здесь. В качестве примера разберем, как выводится (4.23). Члены, содержащие P, являются как раз теми же самыми, что и в (4.20). Они получаются из скобки Пуассона P и M. Остальные члены добавлены для того, чтобы полное выражение слабо равнялось нулю.) Соотношения (4.22)–(4.24) представляют собой условия непротиворечивости.

Мы можем провести дальнейшее упрощение, невозможное в случае криволинейных координат, следующим образом. Предположим, что наши основные характеристики поля выбраны таким образом, что они связаны только с x-координатной системой. Они являются характеристиками поля в некоторых частных точках x на поверхности, и мы можем выбрать их так, чтобы они вовсе не зависели от y-координатной системы. Тогда величины $K_\perp$, K_r совершенно не будут зависеть от y-координатной системы, а это означает, что скобки Пуассона $K_\perp$, K_r с переменными P, M будут равны нулю. В таком случае скобки Пуассона каждой из переменных p, m и каждой из P, M равны нулю.

Это свойство вытекает из естественного выбора динамических переменных для описания имеющихся физических полей. Мы не можем провести соответствующего упрощения при использовании искривленных поверхностей, потому что в величины $K_\perp$, K_r войдут переменные g_{rs}, с помощью которых задается метрика. Из-за этого мы не можем представить $K_\perp$, K_r в такой форме, которая совсем не была бы связана с y-координатной системой, поскольку координаты y входят в переменные g_{rs}. Однако для плоских поверхностей это упрощение осуществимо и приводит к тому, что соотношения (4.22)–(4.24) принимают более простой вид:

$$[p_\mu, p_\nu] = 0, \tag{4.25}$$

$$[p_\mu, m_{\rho\sigma}] = g_{\mu\rho}p_\sigma - g_{\mu\sigma}p_\rho \tag{4.26}$$

и

$$[m_{\mu\nu}, m_{\rho\sigma}] = -g_{\mu\rho}m_{\nu\sigma} + g_{\nu\rho}m_{\mu\sigma} + g_{\mu\sigma}m_{\nu\rho} - g_{\nu\sigma}m_{\mu\rho}. \tag{4.27}$$

Величины P и M выпали из этих соотношений, так что условия непротиворечивости содержат теперь только характеристики поля, но не содержат переменных, вводимых для описания поверхности. Фактически эти условия просто означают, что переменные p и m удовлетворяют СП-соотношениям, соответствующим операторам трансляций и поворотов в плоском пространстве-времени. Проблема построения релятивистской теории поля сводится теперь к отысканию величин p, m, удовлетворяющих СП-соотношениям (4.25)–(4.27).

Вспомним, что эти величины определены с помощью $K_\perp$ и K_r — плотности энергии и плотности импульса. Выражение для плотности импульса точно такое же, как и в случае криволинейных координат. Эта величина определяется только из геометрических соображений. Наша задача сводится к нахождению плотности энергии $K_\perp$, приводящей к таким p и m, при которых соотношения (4.25)–(4.27) выполняются.

Если мы исходим из лоренц-инвариантного интеграла действия и выводим из него $K_\perp$ с помощью стандартных гамильтоновых методов, то плотность энергии $K_\perp$ автоматически будет удовлетворять указанным условиям в классической теории. Проблема построения релятивистской квантовой теории сводится тогда к задаче правильного выбора порядка сомножителей, входящих в $K_\perp$, а именно такого, чтобы соотношения (4.25)–(4.27) удовлетворялись также и в квантовой теории, когда скобки Пуассона переходят в коммутаторы, а p и m содержат некоммутирующие величины.

Рассмотрим соотношения (4.25)–(4.27) и выразим в них p и m через величины K. Тогда мы увидим, что некоторые из этих соотношений окажутся независимыми от $K_\perp$. Они автоматически удовлетворяются при должном выборе K_r, согласующемся с геометрическими требованиями. Некоторые из соотношений линейны по $K_\perp$. Им можно удовлетворить, взяв $K_\perp$ в виде трехмерной скалярной плотности в пространстве переменных x. Итак, будем считать, что задача о выполнении соотношений, линейных по $K_\perp$, решена. Трудно удовлетворить условиям, квадратичным по $K_\perp$. Они имеют следующий вид:

$$\left[\int x_r K_\perp\, d^3x,\ \int K'_\perp\, d^3x'\right] = \int K_r\, d^3x, \tag{4.28}$$

$$\left[\int x_r K_\perp\, d^3x,\ \int x'_s K'_\perp\, d^3x'\right] = -\int (x_r K_s - x_s K_r)\, d^3x, \tag{4.29}$$

Уравнение (4.28) получено из (4.26), где мы положили $\mu =\perp$, $\rho = r$ и $\sigma =\perp$, а уравнение (4.29) получено из (4.27), где мы взяли $\nu =\perp$ и $\sigma =\perp$. Таким образом, проблема получения релятивистской квантовой теории поля сводится теперь к задаче нахождения такой плотности энергии $K_\perp$, которая удовлетворяет условиям (4.28) и (4.29) с учетом некоммутативности сомножителей.

Мы можем проанализировать эти условия еще несколько детальнее, приняв во внимание, что скобка Пуассона, связывающая $K_\perp$ в одной точке и $K'_\perp$ в другой, будет представлять собой сумму членов, содержащих дельта-функции и производные от дельта-функций:

$$[K_\perp,\, K'_\perp] = a\delta + 2b_r\delta_{,r} + c_{rs}\delta_{,rs} + \ldots \tag{4.30}$$

(Символ δ означает трехмерную дельта-функцию, содержащую три координаты x и три координаты x' первой и второй точек соответственно.) Здесь $a = a(x)$, $b = b(x)$, $c = c(x)$, ... Можно было бы написать коэффициенты, зависящие также от x', но в таком случае их можно заменить коэффициентами, зависящими только от x, ценой некоторых изменений указанных коэффициентов ряда. Нет никакой глубокой асимметрии между переменными x и x', асимметрия имеется только в отношении способа записи уравнения.

Уравнение (4.30) является общим соотношением, связывающим значения плотности энергии в двух точках. Далее, во многих случаях, включающих все наиболее известные поля, производные от дельта-функции порядка выше второго не появляются. Исследуем этот случай подробнее.

Примем, что производных порядка выше второго нет. Это означает, что ряд (4.30) обрывается на третьем члене.

В этом частном случае мы можем получить довольно много сведений относительно коэффициентов a, b и c, используя свойство антисимметрии скобки Пуассона (4.30) по отношению к перестановке точек x и x'. Переставляя местами x и x' в (4.30) и учитывая, что $\dfrac{\partial b_r(x')}{\partial x^r} = 0$ и т. д., получаем

$$\begin{aligned}[K'_\perp,\, K_\perp] &= a'\delta - 2b'_r\delta_{,r} + c'_{rs}\delta_{,rs} = a'\delta - 2(b'_r\delta)_{,r} + (c'_{rs}\delta)_{,rs} = \\ &= a\delta - 2(b_r\delta)_{,r} + (c_{rs}\delta)_{,rs} = (a - 2b_{r,r} + c_{rs,rs})\delta + \\ &\quad + (-2b_r + 2c_{rs,s})\delta_{,r} + c_{rs}\delta_{,rs}\,.\end{aligned} \tag{4.31}$$

Выражение (4.31) должно тождественно равняться выражению (4.30) с обратным знаком. Чтобы коэффициенты при $\delta_{,rs}$ отвечали такому требованию, мы должны иметь

$$c_{rs} = 0. \tag{4.32}$$

При этом оказываются согласованными и коэффициенты при $\delta_{,r}$. Наконец, чтобы коэффициенты при δ отвечали этому требованию, мы должны иметь

$$a = b_{r,r}. \tag{4.33}$$

Это дает

$$[K_\perp, K'_\perp] = 2b_r\delta_{,r} + b_{r,r}\delta. \tag{4.34}$$

Подставим теперь этот результат в соотношения (4.28) и (4.29). Они примут следующий вид:

$$\int K_r\,d^3x = \iint x_r(2b_s\delta_{,s} + b_{s,s}\delta)\,d^3x\,d^3x' = \int x_r b_{s,s} d^3x = \int b_r d^3x, \tag{4.35}$$

$$\begin{gathered} -\int (x_rK_s - x_sK_r)\,d^3x = \iint x_r {x'}_s(2b_t\delta_{,t} + b_{t,t}\delta)\,d^3x\,d^3x' = \\ = \int(-2x_rb_s + x_rx_sb_{t,t})\,d^3x = \int(-x_rb_s + x_sb_r)\,d^3x. \end{gathered} \tag{4.36}$$

(Заметим, что $x_{r,s} = \dfrac{\partial x_r}{\partial x^s} = -\delta_{rs}$.) Таким образом, наши условия непротиворечивости сводятся к (4.35) и (4.36), и мы видим, что они удовлетворяются, если взять $b_r = K_r$. Это не самое общее решение; в более общем случае мы могли бы иметь

$$b_r = K_r + \theta_{rs,s}, \tag{4.37}$$

где $\theta_{rs,s}$ — произвольная величина, удовлетворяющая условию

$$\int(\theta_{rs} - \theta_{sr})\,d^3x = 0. \tag{4.38}$$

Таким образом, θ может обладать произвольной симметричной частью, а ее антисимметричная часть должна представлять собой дивергенцию некоторой величины.

В этом заключается общее требование, обеспечивающее релятивистский характер теории поля. Мы должны найти плотность энергии $K_\perp$, удовлетворяющую СП-соотношению (4.34), где величины b_r связаны с плотностью импульса согласно (4.37). Если мы находим плотность энергии из лоренц-инвариантного действия, то это условие определенно будет выполнено в классической теории. Оно может не выполняться в квантовой теории из-за неверного расположения сомножителей. Релятивистски инвариантную квантовую теорию мы получим только в том случае, если нам удастся выбрать порядок сомножителей в выражении для плотности энергии таким образом, чтобы точно удовлетворить условиям (4.34) и (4.37). Условия, которые обеспечивают здесь релятивистский характер квантовой теории, не столь строги, как те, что мы получили, рассматривая состояния, определенные на произвольных искривленных поверхностях.

Я хотел бы проиллюстрировать это на примере электродинамики Борна–Инфельда. Эта электродинамика согласуется с электродинамикой Максвелла в случае слабых полей, но отличается от нее в случае сильных полей. (Мы относим здесь величины, описывающие электромагнитное поле, к некоторым абсолютным единицам, определенным через заряд электрона и его классический радиус, так что можно говорить о сильных и слабых полях.) Общие уравнения электродинамики Борна–Инфельда вытекают из принципа действия, причем интеграл действия равен

$$I = \int \sqrt{-\det(g_{\mu\nu} + F_{\mu\nu})\, d^4x}. \tag{4.39}$$

На этом этапе мы можем использовать криволинейные координаты. Тензор $g_{\mu\nu}$ задает метрику в криволинейных координатах, а тензор $F_{\mu\nu}$ определяет электромагнитное поле, измеряемое в абсолютных единицах.

С помощью общей процедуры мы можем перейти от этого интеграла действия к гамильтониану. В результате получим гамильтониан, в который входят, помимо переменных, нужных для описания поверхности, динамические координаты A_r, $r = 1,\, 2,\, 3$. Компонента A_0 оказывается несущественной, точно так же, как и в случае поля Максвелла. Сопряженные A_r импульсы D^r представляют собой компоненты электрической индукции, и они удовлетворяют СП-соотношениям

$$[A_r,\, D'^s] = g_r^s \delta(x - x'). \tag{4.40}$$

Оказывается, что величина A входит в гамильтониан только под знаком ротора, а именно, через переменные поля:

$$B^r = \frac{1}{2}\varepsilon^{rst} F_{st} = \varepsilon^{rst} A_{t,s}. \tag{4.41}$$

Символ $\varepsilon^{rst} = 1$ при $(rst) = (1,\, 2,\, 3)$ и антисимметричен по всем индексам. Перестановочные соотношения между B и D таковы:

$$[B^r,\, D'^s] = \varepsilon^{rst} \delta_{,t}(x - x'). \tag{4.42}$$

Плотность импульса в этом случае равна

$$K_r = F_{rs}D^s. \tag{4.43}$$

Она точно такая же, как в теории Максвелла. Это согласуется с тем общим принципом, что плотность импульса определяется только из геометрических соображений, т. е. задается геометрией полей, которые мы используем, и не зависит от принципа действия.

Плотность энергии теперь равна

$$K_\perp = \{\Gamma^2 - \gamma_{rs}(D^r D^s + B^r B^s) - \gamma^{rs} F_{rt} F_{su} D^t D^u\}^{1/2}. \tag{4.44}$$

Здесь γ_{rs} — метрический тензор трехмерной поверхности, и

$$-\Gamma^2 = \det \gamma_{rs}. \tag{4.45}$$

Работая с искривленными поверхностями, мы требуем, чтобы $K_\perp$ удовлетворяла СП-соотношению (3.31). В классической теории это требование обязано выполняться, поскольку величина $K_\perp$ получается из лоренц-инвариантного интеграла действия. Но нам не удастся добиться того, чтобы она удовлетворяла необходимому перестановочному соотношению в квантовой теории. В выражении для $K_\perp$ имеется квадратный корень, из-за чего с ним очень неудобно обращаться. Кажется совершенно безнадежным пытаться точно удовлетворить перестановочным соотношениям с коэффициентами γ^{rs}, стоящими слева. Поэтому, по-видимому, невозможно построить квантовую электродинамику Борна–Инфельда для состояния, определенного на искривленной поверхности.

Перейдем, однако, к плоским поверхностям. В этом случае нам нужно рассмотреть СП-соотношение (4.34). Мы знаем, что в классической теории с этим условием все обстоит благополучно. Следовательно, в классическом случае должно выполняться СП-соотношение

$$[K_\perp,\, K'_\perp] = 2K_r\delta_{,r} + K_{r,r}\delta. \tag{4.46}$$

И без подробного расчета ясно, что это соотношение должно остаться в силе и в квантовой теории, так как K_r построена целиком из D^s и B^t. Действительно, переходя к квантовой теории, мы получаем величины D и B, расположенные некоторым образом, но все D и B, взятые в одной и той же точке, коммутируют друг с другом. Это видно из формулы (4.42). Если положить в ней $x' = x$, то мы найдем

$$[B^r, D^s] = \varepsilon^{rst}\delta_{,t}(0) = 0 \tag{4.47}$$

(производная от дельта-функции при значении аргумента, равном нулю, считается равной нулю). Таким образом, нас не должен беспокоить вопрос о некоммутативности D и B, входящих в K_r. Поэтому мы должны получить классическое выражение, так что условия непротиворечивости *выполняются.*

Таким образом, в случае электродинамики Борна–Инфельда условия непротиворечивости в квантовой теории на плоских поверхностях выполняются, хотя они не выполняются на искривленных поверхностях. Физически это означает, что мы можем сформулировать основные уравнения квантовой электродинамики Борна–Инфельда в согласии со специальной теорией относительности, но мы столкнемся с затруднениями, если захотим согласовать эту теорию с общей теорией относительности.

Этим завершается обсуждение условий непротиворечивости, обеспечивающих релятивистский характер квантовой теории. Однако, даже удовлетворив этим условиям, мы еще не избавимся от всех затруднений. На нашем пути имеется еще ряд вполне внушительных препятствий. Если бы мы имели дело с системой только с конечным числом степеней свободы, то все препятствия были бы преодолены и перед нами стояла бы задача непосредственно решить дифференциальные уравнения для ψ. Но в теории поля имеется бесконечное число степеней свободы, и эта бесконечность может привести к неприятности. Как правило, так оно и бывает.

Мы должны решить уравнения, в которых искомая величина — волновая функция ψ — зависит от бесконечного числа переменных. Обычным методом решения уравнений такого типа является применение теории возмущений, в которой волновая функция разлагается в ряд по степеням некоторого малого параметра, и решение ищется методом последовательных приближений. Но мы сталкиваемся с тем осложнением, что на некотором этапе уравнения приводят к расходящимся интегралам.

На разрешение этой проблемы затрачены огромные усилия. Развиты методы обращения с этими расходящимися интегралами, которые, по-видимому, удовлетворительны с точки зрения физика, даже если их невозможно обосновать математически[1]. Создана техника перенормировок, позволяющая устранить расходимости в некоторых случаях теории поля.

Поэтому, даже удовлетворив формально требованиям непротиворечивости, мы можем столкнуться еще с тем затруднением, что не будем знать, как найти решения волнового уравнения, удовлетворяющие необходимым дополнительным условиям. Если мы сможем получить такие решения, то останется еще дальнейшая проблема введения скалярных произведений для них, т. е. мы должны будем рассмотреть эти решения как векторы в гильбертовом пространстве. Ввести эти скалярные произведения необходимо, так как это позволит дать физическую интерпретацию нашей волновой функции по обычным правилам физической интерпретации квантовой механики. Скалярные произведения необходимо задать для волновых функций, удовлетворяющих дополнительным условиям, но мы не обязаны беспокоиться об определении скалярных произведений для волновых функций общего вида, не удовлетворяющих дополнительным условиям. Может оказаться, что для этих общих волновых функций нет никакого способа ввести скалярные произведения, но это не имеет никакого значения. Для физической интерпретации в квантовом случае требуется только, чтобы эти скалярные произведения существовали для волновых функций, удовлетворяющих всем дополнительным условиям.

Вы видите, что в задаче построения гамильтоновой теории в квантовом аспекте имеются весьма внушительные трудности. Что касается классической формулировки, развитый метод, по-видимому, в значительной мере завершен, и мы ясно представляем себе положение вещей; в случае же квантовой механики мы фактически только приступили к исследованию проблемы. Имеются трудности в нахождении решений, даже когда дополнительные условия формально непротиворечивы, и затруднения возможны также при введении скалярных произведений для решений.

Затруднения весьма серьезны, и это привело к тому, что ряд физиков подвергает сомнению ценность всего метода Гамильтона. Довольно много физиков работают сейчас над проблемой построения квантовой теории поля без использования какого бы то ни было гамильтониана. Их общий метод состоит в следующем. В рассмотрение вводят величины,

[1]Процедура перенормировок в квантовой теории поля строго обоснована математически в работах Н. Н. Боголюбова и его последователей. (Прим. ред.)

имеющие физический смысл; далее используют общие принципы для того, чтобы наложить условия на рассматриваемые величины, и надеются, в конце концов, что условий, налагаемых на физически важные величины, окажется достаточно для вычисления их. Сторонники этого метода все еще очень далеки от цели, и, по моему мнению, обойтись вовсе без метода Гамильтона невозможно. Метод Гамильтона доминирует в механике при классическом подходе. Возможно, что наш метод перехода от классической механики к квантовой механике еще не является корректным. Тем не менее я думаю, что любая будущая квантовая теория должна содержать элемент соответствия гамильтоновой теории, может быть, даже и не в такой именно форме, как это представлено здесь.

Я довел изложение метода Гамильтона до той стадии, до которой он разработан к настоящему времени. Это очень общий и мощный метод; его можно использовать в самых разных задачах. Он может быть приспособлен к задачам, в которых поле имеет сингулярности (в точке или на поверхности). При таком развитии гамильтоновой теории мы должны руководствоваться следующей общей идеей. Нужно найти такое действие I, зависящее от некоторых параметров q, что при варьировании q мы будем иметь вариацию δI, линейную по δq. Линейность δI по δq необходима для того, чтобы можно было применить рассмотрение, описанное в настоящих лекциях.

Способ, с помощью которого можно ввести свойство линейности при наличии сингулярностей, состоит в следующем. Нужно использовать криволинейные координаты и не варьировать никаких уравнений, определяющих положение сингулярной точки или сингулярной поверхности. Например, если мы имеем дело с сингулярной поверхностью, заданной уравнением $f(x) = 0$, то мы должны иметь вариационный принцип, в котором $f(x)$ не варьируется. Если мы позволим функции $f(x)$ изменяться и будем считать, что f сама определяет некоторые из параметров q, то в этом случае вариация δI не будет линейной по δq. Но мы можем фиксировать $f(x)$ относительно некоторой криволинейной системы координат x и затем варьировать поверхность путем варьирования криволинейной системы координат при равной нулю вариации функции f. В таком случае общий метод, который я здесь обсудил, оказывается вполне удовлетворительным в рамках классической теории. При переходе к квантовой теории возникают затруднения, о которых я говорил.

Обобщенная гамильтонова динамика*

§ 1. Введение

Уравнениям динамики придал общий вид Лагранж, записавший их в терминах набора обобщенных координат и скоростей. Альтернативный общий вид в терминах координат и импульсов позднее был дан Гамильтоном. Рассмотрим сравнительные достоинства этих двух форм.

В лагранжевой форме очень легко удовлетворить требованиям специальной теории относительности, просто взяв лоренц-инвариантным действие, т. е. интеграл лагранжиана по времени. Так просто сделать релятивистской гамильтонову форму нельзя.

При построении квантовой теории следует исходить из гамильтоновой формы. Имеются прочно укоренившиеся правила перехода от гамильтоновой динамики к квантовой динамике путем превращения координат и импульсов в линейные операторы. В простых случаях эти правила приводят к однозначным результатам, и хотя в сложных примерах без неоднозначностей не обходится, практическая пригодность правил установлена.

Таким образом, в настоящее время каждая из *форм* имеет собственную ценность, и пользоваться следует обеими. Обе формы тесно связаны. Исходя из любого лагранжиана можно ввести импульсы, и в случае, когда импульсы суть независимые функции скоростей, можно получить гамильтониан. Настоящая статья посвящена построению более общей теории, применимой и в ситуации, когда импульсы не являются независимыми функциями скоростей. Получена более общая форма гамильтоновой динамики, которую по-прежнему можно использовать для квантования и которая оказывается специально приспособленной для релятивистского описания динамических процессов.

---

*Can. J. Math., V. 2, №. 2 (1950), P. 129–148. Перевод с английского В. П. Павлова.
Эта работа основана на первой половине курса лекций, прочитанного на Канадском математическом семинаре в Ванкувере в августе 1949 г.

§ 2. Сильные и слабые уравнения

Рассмотрим динамическую систему с N степенями свободы, описываемую обобщенными координатами q_n $(n = 1, 2, \ldots, N)$ и скоростями dq_n/dt или $\dot{q}_n$. Возьмем лагранжиан L, который пока может быть произвольной функцией координат и скоростей

$$L \equiv L(q, \dot{q}). \tag{2.1}$$

Определим импульсы соотношением

$$p_n = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n}. \tag{2.2}$$

Для развития теории введем вариационную процедуру, варьируя каждую из величин $q_n, \dot{q}_n, p_n$ независимо на малую величину δq_n, $\delta \dot{q}_n$, δp_n порядка ε и работая с точностью до $\dot{\varepsilon}$. В результате такой вариации уравнение (2.2) нарушится, так как его левая часть будет отлична от правой на величину порядка ε. Теперь нам придется различать два сорта уравнений: уравнения типа (2.2), которые оказываются нарушенными на величину порядка ε после применения вариации, и уравнения, остающиеся справедливыми с точностью до ε под действием вариации. Уравнение (2.1) будет этого второго сорта, поскольку вариация L будет по определению равна вариации функции $L(q, \dot{q})$. Уравнения первого сорта мы будем называть *слабыми уравнениями* и писать их с обычным знаком равенства «=», а уравнения второго будем называть *сильными уравнениями* и писать их со знаком «≡».

Мы имеем следующие правила, регулирующие алгебраические действия со слабыми и сильными уравнениями:

$$\begin{aligned} &\text{если } A \equiv 0, \quad \text{то} \quad \delta A = 0; \\ &\text{если } X = 0, \quad \text{то} \quad \delta X \neq 0. \end{aligned}$$

Из слабого уравнения $X = 0$ мы можем заключить, что

$$\delta X^2 = 2X\delta X = 0,$$

так что получится сильное уравнение

$$X^2 \equiv 0.$$

Аналогично из двух слабых уравнений $X_1 = 0$ и $X_2 = 0$ мы можем вывести сильное уравнение

$$X_1 X_2 \equiv 0.$$

Может оказаться, что все N величин $\partial L/\partial \dot{q}_n$ в правой части (2.2) являются независимыми функциями N скоростей $\dot{q}_n$. В этом случае уравнения (2.2) определяют каждую $\dot{q}$ как функцию аргументов q и p. Об этом случае будем говорить как о *стандартном*, и именно его обычно рассматривают в динамической теории.

Если $\partial L/\partial \dot{q}_n$ не являются независимыми функциями скоростей, можно исключить $\dot{q}$ из уравнений (2.2) и получить одно или более уравнений

$$\varphi(q, p) = 0, \tag{2.3}$$

содержащих только переменные q и p. Мы можем считать уравнение (2.3) записанным так, что вариация меняет φ на величину порядка ε, так как если она меняет φ на величину порядка ε^k, то следует лишь заменить в (2.3) φ на $\varphi^{1/k}$, и желаемое условие окажется выполненным. Теперь вариация нарушает уравнение (2.3) на величину порядка ε, так что оно правильно пишется как слабое уравнение. Нам потребуется использовать полный набор независимых уравнений типа (2.3), например:

$$\varphi_m(q, p) = 0, \quad m = 1, 2, \ldots, M. \tag{2.4}$$

Условие независимости означает, что ни одну из φ нельзя представить в виде линейной комбинации остальных с коэффициентами, зависящими от q и p. Условие полноты означает, что любая функция аргументов q и p, обращающаяся в нуль вследствие уравнений (2.2) и меняющаяся при вариации на величину порядка ε, может быть представлена как линейная комбинация функций φ_m с коэффициентами, зависящими от q и p.

Мы можем следующим образом описать соотношение между сильными и слабыми уравнениями. Возьмем $3N$-мерное пространство с координатами q, $\dot{q}$ и p. В этом пространстве найдется $2N$-мерная область, в которой уравнения (2.2) удовлетворяются. Назовем ее областью R. Уравнения (2.4) также удовлетворяются в этой области, поскольку они следуют из (2.2). Рассмотрим теперь все точки $3N$-мерного пространства, которые удалены от R не далее чем на расстояния порядка ε. Они образуют $3N$-мерную область подобную оболочке с толщиной порядка ε. Назовем ее областью R_ε. *Слабое уравнение выполняется в области R, сильное уравнение выполняется в области R_ε.*

§ 3. Гамильтониан

Гамильтониан H определяется соотношением

$$H \equiv p_n\dot{q}_n - L, \tag{3.1}$$

где подразумевается суммирование по всем значениям повторяющегося в одном члене индекса. Имеем

$$\begin{gathered}\delta H = \delta(p_n\dot{q}_n - L) = p_n\delta\dot{q}_n + \dot{q}_n\delta p_n - \frac{\partial L}{\partial q_n}\delta q_n - \\ -\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n}\delta\dot{q}_n = \dot{q}_n\delta p_n - \frac{\partial L}{\partial q_n}\delta p_n.\end{gathered} \tag{3.2}$$

Мы обнаружили, что δH не зависит от $\delta\dot{q}_n$. Этот важный результат справедлив вне зависимости от того, стандартный у нас случай или нет.

Уравнение (3.1) дает определение H как функции q, $\dot{q}$ и p, справедливое во всем $3N$-мерном пространстве q, $\dot{q}$ и p. Мы будем пользоваться этим определением только в области R_ε, а в ней справедлив, с точностью до первого порядка, результат (3.2). Это означает, что если мы оставим постоянными q и p и возьмем вариацию первого порядка у $\dot{q}$, вариация H будет второго порядка. Таким образом, если мы сохраним постоянными q и p и возьмем конечную вариацию $\dot{q}$, оставаясь все время в области R_ε (что возможно, когда случай не стандартный), вариация H будет первого порядка. Если же мы остаемся в области R, вариация H будет равна нулю. Следовательно, в области R гамильтониан H является функцией только q и p. Обозначив эту функцию $\mathscr{H}(q, p)$, мы имеем слабое уравнение

$$H = \mathscr{H}(q, p), \tag{3.3}$$

справедливое в области R. В стандартном случае функция $\mathscr{H}$ — это обычный гамильтониан.

Отправляясь от точки в R и совершая общую вариацию, из (3.2) мы имеем

$$\delta(H - \mathscr{H}) = \left(\dot{q}_n - \frac{\partial\mathscr{H}}{\partial p_n}\right)\delta p_n - \left(\frac{\partial L}{\partial q_n} - \frac{\partial\mathscr{H}}{\partial q_n}\right)\delta q_n.$$

Таким образом, $\delta(H-\mathscr{H})$ зависит только от δq и δp. Если вариация такова, что мы остаемся в области R, то, конечно, $\delta(H-\mathscr{H})=0$. Таким образом, $\delta(H-\mathscr{H})$ обращается в нуль для любой вариации q и p такой, что можно выбрать $\delta\dot{q}$ сохраняющими уравнения (2.2). Это налагает на δq и δp единственное ограничение —чтобы они сохраняли уравнения (2.4), т. е. приводили к $\delta\varphi_m=0$ для всех m. Таким образом, $\delta(H-\mathscr{H})$ равна нулю для любых величин δq, δp, которые дают $\delta\varphi_m=0$, а, следовательно, для произвольных δq, δp

$$\delta(H-\mathscr{H})=v_m\delta\varphi_m \tag{3.4}$$

с подходящими коэффициентами v_m. Эти коэффициенты будут функциями q, $\dot{q}$ и p, а с помощью (2.2) их можно представить функциями только q и $\dot{q}$. Теперь из (3.4) и (2.4) мы получаем

$$\delta(H-\mathscr{H}-v_m\varphi_m)=\delta(H-\mathscr{H})-v_m\delta\varphi_m-\varphi_m\delta v_m=0$$

и, следовательно,

$$H\equiv\mathscr{H}+v_m\varphi_m. \tag{3.5}$$

Мы имеем здесь сильное уравнение, справедливое с точностью до первого порядка в области R_ε, в противоположность слабому уравнению (3.3), справедливому только в R.

Уравнение (3.4) дает

$$\begin{aligned}\delta H&=\delta\mathscr{H}+v_m\delta\varphi_m=\\&=\frac{\partial\mathscr{H}}{\partial p_n}\delta p_n+\frac{\partial\mathscr{H}}{\partial q_n}\delta q_n+v_m\left(\frac{\partial\varphi_m}{\partial p_n}\delta p_n+\frac{\partial\varphi_m}{\partial q_n}\delta q_n\right).\end{aligned}$$

Сравнивая это с (3.2), мы получаем

$$\dot{q}_n=\frac{\partial\mathscr{H}}{\partial p_n}+v_m\frac{\partial\varphi_m}{\partial p_n}, \tag{3.6}$$

$$-\frac{\partial L}{\partial q_n}=\frac{\partial\mathscr{H}}{\partial q_n}+v_m\frac{\partial\varphi_m}{\partial q_n}. \tag{3.7}$$

Уравнения (3.6) выражают $\dot{q}$ через q, p и v, (3.6) и (3.7) показывают, что $2N$ переменных q_n, $\dot{q}_n$ можно выразить через $2N+M$ переменных q_n, p_n, v_m. Между этими $2N+M$ переменными имеется M соотношений (2.4). Любых других соотношений между этими переменными быть не может, иначе $2N$ переменных q_n, $\dot{q}_n$ не были бы независимыми. Таким образом, каждая из v не должна зависеть от q, p и остальных v. Сами v можно считать переменными типа скорости, служащими для фиксации тех $\dot{q}$, которые нельзя выразить через q и p.

Работая с гамильтоновой формой динамики, мы используем в качестве основных переменные q, p и v, которые предполагаются связанными некоторыми соотношениями (2.4), а в остальном — независимыми. Мы будем называть их *гамильтоновыми переменными.*

§ 4. Уравнения движения

Обычные лагранжевы уравнения движения мы считаем слабыми уравнениями

$$\dot{p}_n = \frac{\partial L}{\partial q_n}. \tag{4.1}$$

Подставляя в (4.1) значения p из (2.2), мы получаем уравнения, содержащие ускорения $\ddot{q}_n$. В стандартном случае эти уравнения определят все $\ddot{q}$ как функции q и $\dot{q}$. В случае с M уравнениями (2.4) уравнения движения дадут нам только $(N - M)$ уравнений для $\ddot{q}$. Остающиеся M уравнений движения покажут нам, как меняются со временем φ_m. Для самосогласованности φ_m должны остаться нулями. Эти условия самосогласованности будут исследованы позднее.

С помощью (3.7) уравнения движения (4.1) принимают вид

$$\dot{p}_n = -\frac{\partial \mathscr{H}}{\partial q_n} - v_m \frac{\partial \varphi_m}{\partial q_n}. \tag{4.2}$$

Уравнения (4.2) вместе с (3.6) образуют гамильтоновы уравнения движения. Их задают функция $\mathscr{H}$ и уравнения $\varphi_m = 0$. Гамильтоновы уравнения движения выражают $\dot{q}$ и $\dot{p}$ через гамильтоновы переменные q, p, v. Они не дают прямой информации о $\dot{v}$, но исследование условий самосогласованности даст нам некоторую косвенную информацию.

Гамильтоновы уравнения движения выглядят проще, если воспользоваться понятием скобки Пуассона (СП). Для любых двух функций ξ и η аргументов q и p СП $[\xi, \eta]$ определяется соотношением

$$[\xi, \eta] = \frac{\partial \xi}{\partial q_n}\frac{\partial \eta}{\partial p_n} - \frac{\partial \xi}{\partial p_n}\frac{\partial \eta}{\partial q_n}. \tag{4.3}$$

Легко проверить, что СП остается инвариантной относительно такого преобразования к новым q и p, при котором новые q — любые независимые функции первоначальных q, а новые p определяются новыми уравнениями (2.2) с L, выраженным через новые q и их производные по времени. СП приобретает свое значение благодаря этому свойству инвариантности. СП обладает следующими свойствами, легко проверяемыми из определения:

$$[\xi,\, \eta] \equiv -[\eta,\, \xi],$$
$$[\xi,\, f(\eta_1,\, \eta_2,\, \ldots)] \equiv \frac{\partial f}{\partial \eta_1}[\xi,\, \eta_1] + \frac{\partial f}{\partial \eta_2}[\xi,\, \eta_2] + \ldots\,, \tag{4.4}$$
$$[\xi,\, [\eta,\, \zeta]] + [\eta,\, [\zeta,\, \xi]] + [\zeta,\, [\xi,\, \eta]] = 0.$$

Во втором из этих свойств f — любая функция набора величин $\eta_1,\, \eta_2,\, \ldots$), каждая из которых зависит от q и p. Третье свойство, называемое тождеством Пуассона[1], справедливо для любых трех функции ξ, η, ζ, зависящих от q и p.

Желательно расширить понятие СП на функции, зависящие от скоростей $\dot{q}$, которые нельзя выразить только через q и p. Мы примем, что эти более общие СП обладают свойствами (4.4), а в остальном произвольны. Напротив, мы можем предположить, что $\dot{q}$ произвольным образом зависят от q и p, а свойства (4.4) тогда можно вывести для ξ, η и ζ, зависящих и от $\dot{q}$.

Из сильного уравнения $A \equiv 0$ мы можем вывести слабые уравнения

$$\frac{\partial A}{\partial q_n} = 0, \quad \frac{\partial A}{\partial \dot{q}_n} = 0, \quad \frac{\partial A}{\partial p_n} = 0$$

и, следовательно, с использованием второго из свойств (4.4)

$$[\xi,\, A] = 0$$

для любой ξ. Может оказаться, что $[\xi,\, A] \equiv 0$ (например, когда $A \equiv 0$ по определению), но в общем случае это не так. Из слабого уравнения $X = 0$ не следует общего заключения, что $[\xi,\, X] = 0$.

[1] В нашей литературе это тождество обычно называют тождеством Якоби. (Прим. пер.)

Если g — любая функция q и p, из (3.6) и (4.2) мы имеем

$$\dot{g} = \frac{\partial g}{\partial q_n}\left(\frac{\partial \mathscr{H}}{\partial p_n} + v_m \frac{\partial \varphi_m}{\partial p_n}\right) - \frac{\partial g}{\partial p_n}\left(\frac{\partial \mathscr{H}}{\partial q_n} + v_m \frac{\partial \varphi_m}{\partial q_n}\right) = \\ = [g, \mathscr{H}] + v_m[g, \varphi_m]. \tag{4.5}$$

Это — общее гамильтоново уравнение движения. С помощью (2.4) его можно переписать и виде

$$\dot{g} = [g, \mathscr{H}] + v_m[g, \varphi_m] + [g, v_m]\varphi_m = [g, H], \tag{4.6}$$

в точности совпадающем с обычным гамильтоновым уравнением движения, записанным через СП.

§ 5. Однородность по скоростям

Теория принимает особенно простой вид в случае, когда лагранжиан однороден первой степени по скоростям. Тогда определяемые соотношением (2.2) импульсы однородны нулевой степени по $\dot{q}$ и зависят поэтому только от отношений $\dot{q}$. Поскольку имеется N импульсов p и только $N-1$ независимых отношений $\dot{q}$, теперь p не могут быть независимыми функциями $\dot{q}$, и должно существовать хотя бы одно соотношение (2.4), связывающее q и p. Случай, когда имеется только одно соотношение между q и p, можно считать теперь стандартным.

Из теоремы Эйлера мы имеем

$$L \equiv \dot{q}_n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n} \tag{5.1}$$

и, следовательно,

$$L = \dot{q}_n p_n,$$

так что

$$H = 0. \tag{5.2}$$

Это слабое уравнение, справедливое в области R, позволяет нам взять $\mathscr{H} \equiv 0$, так что (3.5) переходит в

$$H \equiv v_m \varphi_m. \tag{5.3}$$

Общее уравнение движения (4.5) теперь имеет вид

$$\dot{g} = v_m[g, \varphi_m] \tag{5.4}$$

Гамильтоновы уравнения движения полностью фиксированы теперь уравнениями $\varphi_m = 0$.

Правая часть уравнения (5.4) однородна по v. Взяв любое решение уравнений движения, можно получить из него другое решение, домножив все v на множитель γ, произвольно меняющийся со временем. Скорость изменения всех динамических переменных в новом решении будет домножена на γ. Новое решение получится из предыдущего, если время t заменить новой независимой переменной τ такой, что $dt/d\tau = \gamma$. Новая независимая переменная совершенно произвольна: она может быть любой функцией t, а также q и $\dot{q}$. Итак, взяв любое решение уравнений движения, мы можем получить из него другое решение, заменив t произвольной τ, так что ***уравнения движения не дают нам никакой информации о независимой переменной.*** В этом состоит важная черта динамической теории с однородностью по скоростям, предоставляющая особые удобства для релятивистской формулировки.

Лагранжиану любой динамической системы можно придать однородность по скоростям, взяв время t дополнительной координатой q_0 и воспользовавшись уравнением $\dot{q}_0 = 1$, чтобы добиться однородности первой степени по всем скоростям, включая $\dot{q}_0$. Как было показано автором [1], после этого можно вывести новые лагранжевы уравнения движения для всех q. Так мы можем получить новую формулировку в «однородных скоростях» для общей динамической системы. Новая формулировка даст все уравнения старой, за исключением уравнения $\dot{q}_0 = 1$. Если в новой формулировке желательно его иметь, мы можем считать его дополнительным условием, не выводимым из уравнений движения, но согласованным с ними. Однако мы вполне можем обойтись и без него, так как его роль сводится лишь к фиксации независимой переменной, которая без этого в «однородной» формулировке была бы произвольной.

Таким образом, мы можем без потери общности ограничиться теорией с однородностью по скоростям. Поскольку она приводит к несколько более простым уравнениям, в дальнейшем мы и сделаем это. Точка будет обозначать дифференцирование по произвольной независимой переменной τ.

§ 6. Условия самосогласованности

Для самосогласованности уравнения движения должны сохранять нулем каждую из φ_m. Таким образом, подставив $\varphi_{m'}$ вместо g в (5.4), мы получаем

$$v_m[\varphi_{m'}, \varphi_m] = 0 \tag{6.1}$$

Предположим, что уравнения (6.1) приведены к наиболее простому виду с помощью набора уравнений (2.4). При этом допускается сокращение множителей, когда их можно считать не обращающимися в нуль. Получившиеся уравнения должны быть одного из четырех типов.

Тип 1. Уравнение содержит некоторые из переменных v.

Тип 2. Уравнение не зависит от v, но содержит некоторые из переменных q и p. Таким образом, оно имеет вид

$$\chi(q, p) = 0 \tag{6.2}$$

и не зависит от уравнений (2.4).

Тип 3. Уравнение сводится к $0 = 0$.

Тип 4. Уравнение сводится к $1 = 0$.

Уравнение типа 2 приводит к новому условию самосогласованности, так как χ должна сохранять нулевое значение. Подставив в (5.4) χ вместо g, мы получаем

$$v_m[\chi, \varphi_m] = 0. \tag{6.3}$$

Это уравнение, приведенное к наиболее простому виду с помощью уравнений (2.4) и уже имеющегося уравнения (6.2), снова будет одним из четырех типов. Будучи уравнением типа 2, оно приведет еще к одному новому условию самосогласованности. Эта процедура продолжается для каждого уравнения типа 2, пока она не приведет к уравнению другого типа.

Если одно из полученных таким образом уравнений — типа 4, то уравнения движения противоречивы. Этот случай не представляет никакого интереса и в дальнейшем не рассматривается. Уравнения типа 3 удовлетворяются автоматически. В итоге в нашей теории остаются уравнения типов 1 и 2.

Обозначим полный набор уравнений типа 2:

$$\chi_k(q, p) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, K. \tag{6.4}$$

Мы можем полагать, что функции χ_k, подобно φ_m, в (2.4) выбраны так, что их вариации порядка ε. Тогда уравнения (6.4) корректно записываются как слабые уравнения. Эти новые слабые уравнения сужают область R, в которой слабые уравнения справедливы, понижая ее размерность до $2N - K$. Окажется суженной и область R_ε, так как теперь она будет состоять из точек, удаленных не более чем на расстояния порядка ε от новой области R.

Для изучения уравнений типа 1 удобно ввести некоторые новые понятия. Назовем одну из величин φ_m величиной *первого рода* (*first class* φ), если ее СП со всеми φ и χ обращаются в нуль. Таким образом, $\varphi_{m'}$ — первого рода, если

$$\begin{aligned} [\varphi_{m'}, \varphi_m] &= 0, \quad m = 1, 2, \ldots, M, \\ [\varphi_{m'}, \chi_k] &= 0, \quad k = 1, 2, \ldots, K. \end{aligned} \tag{6.5}$$

Эти уравнения обязаны удовлетворяться только в слабом смысле, т. е. только как следствия уравнений $\varphi_m = 0$ и $\chi_k = 0$. Таким образом, каждая из левых частей (6.5) должна равняться в сильном смысле некоторой линейной комбинации φ_m и χ_k. Величину φ, не удовлетворяющую всем этим условиям, мы называем величиной *второго рода* (*second class* φ).

Мы можем подвергнуть величины φ линейному преобразованию вида

$$\varphi_m^* = \gamma_{mm'}\varphi_{m'}, \tag{6.6}$$

где γ — любые функции q и p такие, что их детерминант не обращается в нуль в слабом смысле. Тогда для всех целей теории величины φ и φ^* эквивалентны.

Проделаем преобразование такого типа с тем, чтобы обратить в величины первого рода как можно больше φ. Получившиеся тогда φ первого рода обозначим φ_α, а φ второго рода — φ_β, где $\beta = 1, 2, \ldots, B$, и $\alpha = B + 1, B + 2, \ldots, M$.

Если $\varphi_{m'}$ — первого рода, то уравнение (6.1) удовлетворяется автоматически. Далее, в уравнениях (6.1) и (6.3) мы можем оставить только φ_m второго рода, поскольку φ_m первого рода дают нулевой вклад. Таким образом, в уравнениях (6.1) и (6.3) выживают только члены

$$\begin{aligned} v_\beta[\varphi_\beta, \varphi_{\beta'}] &= 0, \qquad \beta, \beta' = 1, 2, \ldots, B, \\ v_\beta[\varphi_\beta, \chi_k] &= 0, \qquad k = 1, 2, \ldots, K. \end{aligned} \tag{6.7}$$

Это и есть все уравнения типа 1. Они показывают, что либо все v_β обращаются в нуль, либо матрица

$$\left\|\begin{matrix} 0 & [\varphi_1, \varphi_2] & \dots & [\varphi_1, \varphi_B] & [\varphi_1, \chi_1] & \dots & [\varphi_1, \chi_K] \\ [\varphi_2, \varphi_1] & 0 & \dots & [\varphi_2, \varphi_B] & [\varphi_2, \chi_1] & \dots & [\varphi_2, \chi_K] \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ [\varphi_B, \varphi_1] & [\varphi_B, \varphi_2] & \dots & 0 & [\varphi_B, \chi_1] & \dots & [\varphi_B, \chi_K] \end{matrix}\right\| \qquad (6.8)$$

имеет ранг, меньший B (в слабом смысле).

Сейчас будет показано, что реализуется первая из альтернативных возможностей. Предположим, что матрица (6.8) имеет ранг $U < B$. Образуем детерминант

$$D = \begin{vmatrix} \varphi_1 & 0 & [\varphi_1, \varphi_2] & \dots & [\varphi_1, \varphi_U] \\ \varphi_2 & [\varphi_2, \varphi_1] & 0 & \dots & [\varphi_2, \varphi_U] \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \varphi_{U+1} & [\varphi_{U+1}, \varphi_1] & [\varphi_{U+1}, \varphi_2] & \dots & [\varphi_{U+1}, \varphi_U] \end{vmatrix}. \qquad (6.9)$$

Он — линейная комбинция φ_β и поэтому обращается в нуль в слабом смысле. СП любой величины f с D равна сумме детерминантов, образованных взятием СП каждого из столбцов (6.9) с f. За исключением детерминанта с СП первого столбца с f, все они обращаются в нуль в слабом смысле, поскольку все элементы их первого столбца — нули в слабом смысле. Таким образом,

$$[D, f] = \begin{vmatrix} [\varphi_1, f] & 0 & [\varphi_1, \varphi_2] & \dots & [\varphi_1, \varphi_U] \\ [\varphi_2, f] & [\varphi_2, \varphi_1] & 0 & \dots & [\varphi_2, \varphi_U] \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ [\varphi_{U+1}, f] & [\varphi_{U+1}, \varphi_1] & [\varphi_{U+1}, \varphi_2] & \dots & [\varphi_{U+1}, \varphi_U] \end{vmatrix}. \qquad (6.10)$$

Если взять в качестве f любую из φ_α, первый столбец в (6.10) обращается в нуль, и поэтому $[D, \varphi_\alpha] = 0$. Если взять в качестве f любую из φ_β или χ, то либо детерминант (6.10) имеет два одинаковых столбца и поэтому обращается в нуль, либо он есть минор матрицы (6.8) с $U+1$ строками и столбцами и обращается в нуль, поскольку ранг этой матрицы по предположению равен U. Таким образом, D имеет нулевую СП со всеми φ и χ.

Может оказаться, что D обращается в нуль в сильном смысле — из-за того, что обращаются в нуль в слабом смысле алгебраические дополнения всех элементов его первого столбца. В этом случае мы возьмем другой детерминант D, со столбцами помимо первого, отвечающими любым U столбцам (6.8), и строками, отвечающими любым $U+1$ строкам (6.8). Благодаря предположению, что (6.8) имеет ранг U, мы всегда можем выбрать такой детерминант D, что не все алгебраические дополнения элементов его первого столбца обращаются в нуль. Таким образом, мы получаем D, являющийся величиной первого рода и одновременно линейной комбинацией φ_β. Это противоречит предположению, что ранее мы сделали величинами первого рода максимально возможное число φ.

Мы можем заключить, что *если мы сделали величинами первого рода максимально возможное количество φ, то обращаются в нуль все v, ассоциированные с φ второго рода.* Тогда гамильтониан (5.3) сводится к

$$H \equiv v_\alpha \varphi_\alpha, \tag{6.11}$$

а общее уравнение движения (5.4) приобретает вид

$$\dot{g} = v_\alpha [g, \varphi_\alpha]. \tag{6.12}$$

Обращение в нуль v_β и уравнения (6.4) гарантируют, что все условия согласованности удовлетворяются; v_α остаются полностью неопределенными. Каждый из них дает начало свободе в движении — произвольной функции в общем решении уравнений движения. В стандартном случае имеется в точности одна φ, которая с необходимостью — первого рода, и поэтому имеется одна произвольная функция в общем решении уравнений движения. Это связано с произволом в независимой переменной τ.

§ 7. Дополнительные условия

Имея дело с конкретной динамической системой, мы можем пожелать, чтобы координаты и скорости подчинялись уравнениям, добавочным к уравнениям движения, которые следуют из лагранжиана. Такие дополнительные условия должны вводиться в теорию как еще одни слабые уравнения.

С помощью уравнений (3.6) (с $\mathscr{H} \equiv 0$) дополнительные условия можно записать как соотношения между q, p и v. Они могут привести к уравнениям только между q и p. Такие уравнения следует трактовать как новые χ-уравнения и присоединить к набору (6.4). Они приведут к новым условиям согласованности, с которыми следует обращаться так же, как и с предыдущими, и это может дать следующие новые χ-уравнения. φ первого рода следует теперь определять как имеющие нулевые СП и с этими новыми χ, так что дополнительные условия могут понизить число связей φ первого рода. Тогда это вызовет снижение числа степеней свободы.

Те из дополнительных условий, которые не дают χ-уравнений, дадут условия на переменные v. Как правило, эти последние условия будут более сложного вида, чем просто требования обращения в нуль некоторых v, как это всегда было с условиями на v, следовавшими из условий согласованности. Они приведут к дальнейшему снижению числа степеней свободы, понизив его до величины, меньшей числа φ первого рода.

§ 8. Преобразования гамильтоновой формы

Возьмем набор зависящих от q и p функций θ_s $(s = 1, 2, \ldots, S)$ таких, что детерминант

$$\Delta \equiv \begin{vmatrix} 0 & [\theta_1, \theta_2] & [\theta_1, \theta_3] & \ldots & [\theta_1, \theta_S] \\ [\theta_2, \theta_1] & 0 & [\theta_2, \theta_3] & \ldots & [\theta_2, \theta_S] \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ [\theta_S, \theta_1] & [\theta_S, \theta_2] & [\theta_S, \theta_3] & \cdots & 0 \end{vmatrix}. \tag{8.1}$$

не обращается в нуль в слабом смысле. Это значит, что S должно быть четным. Пусть $c_{ss'}$ обозначает алгебраическое дополнение $[\theta_s, \theta_{s'}]$, деленное на Δ, так что

$$c_{ss'} \equiv -c_{s's}$$

и

$$c_{s's}[\theta_{s'}, \theta_{s''}] = \delta_{ss''} \tag{8.2}$$

Тогда для любых двух величин ξ и η мы можем определить новую СП $[\xi, \eta]^*$ формулой

$$[\xi, \eta]^* \equiv [\xi, \eta] + [\xi, \theta_s]c_{ss'}[\theta_{s'}, \eta]. \tag{8.3}$$

Легко видеть, что новая СП обладает первыми двумя из свойств (4.4), а в справедливости третьего, тождества Пуассона, убеждает прямая выкладка (см. приложение, § 12). Новая СП дает для любой ξ:

$$[\xi,\,\theta_s]^* \equiv [\xi,\,\theta_s] + [\xi,\,\theta_{s'}]c_{s's''}[\theta_{s''},\,\theta_s] \equiv [\xi,\,\theta_s] - [\xi,\,\theta_{s'}]\delta_{s's} \equiv 0. \quad (8.4)$$

Чтобы понять значение новых СП, возьмем случай, когда набор θ состоит из $S/2$ координат q и сопряженных им импульсов p. Тогда мы видим, что новая СП получается вычеркиванием из суммы по n в определении (4.3) всех членов, содержащих производные по этим q и p. Таким образом, новая СП относится к системе с $N - {}^1\!/_2 S$ степенями свободы. Взяв в качестве θ не в точности некоторые q и p, а любые независимые функции этих q и p, мы получаем ту же самую новую СП. Для таких общих θ новые СП по-прежнему будут относиться к системе с $N - {}^1\!/_2 S$ степенями свободы, но редукция числа степеней свободы более сложна и не сводится к простому вычеркиванию некоторых q и p.

Предположим, что в качестве θ выступают все φ или χ (φ должны быть второго рода, так как иначе $\Delta = 0$). Тогда мы имеем $[\theta_s,\,H] = 0$ для всех s, и, следовательно,

$$[g,\,H]^* = [g,\,H] = \dot{g}, \quad (8.5)$$

где g — любая функция q и p. Таким образом, с помощью новой СП можно записывать гамильтоновы уравнения движения. Таким путем мы получаем новую форму уравнений движения, более простую, поскольку эффективное число степеней свободы понизилось.

Теперь каждая из θ обращается в нуль в слабом смысле. Работая только с новыми СП, мы без риска вступить в противоречие можем полагать, что каждая из θ обращается в нуль в сильном смысле, потому что согласно (8.4) обращается в нуль новая СП θ с чем угодно. Тогда мы можем использовать сильные уравнения $\theta_s \equiv 0$, чтобы упростить гамильтониан.

Назовем χ величиной первого рода, если она имеет нулевую СП со всеми φ и χ, и величиной второго рода в противном случае. Мы можем проделать над χ линейное преобразование вида

$$\chi_k^* = \gamma_{kk'}\chi_{k'} + \gamma'_{km}\varphi_m, \quad (8.6)$$

где γ и γ' — любые функции q и p такие, что детерминант γ не обращается в нуль в слабом смысле; тогда новые χ^* эквивалентны старым для всех целей теории. Проделаем преобразование такого типа с тем, чтобы обратить в величины первого рода как можно больше χ, и получившиеся тогда χ первого рода обозначим χ_α, а второго рода — χ_β.

Мы можем взять в качестве θ все φ_β и χ_β. Тогда детерминант Δ не обращается в нуль. Доказательство этого факта аналогично доказательству того, что ранг матрицы (6.8) равен B: предположив, что Δ имеет ранг $T < S$, и построив детерминант вида

$$\begin{vmatrix} \theta_1 & 0 & [\theta_1, \theta_2] & \cdots & [\theta_1, \theta_T] \\ \theta_2 & [\theta_2, \theta_1] & 0 & \cdots & [\theta_2, \theta_T] \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \theta_{T+1} & [\theta_{T+1}, \theta_1] & [\theta_{T+1}, \theta_2] & \cdots & [\theta_{T+1}, \theta_T] \end{vmatrix}, \tag{8.7}$$

следует убедиться, что Δ является величиной первого рода по отношению к φ и χ и одновременно — линейной комбинацией φ_β и χ_β, так что это противоречит предположению, что величинами первого рода сделано максимальное число φ и χ.

Такой выбор θ дает максимальное в описанном методе упрощение гамильтоновых уравнений движения. Мы получаем новую схему, в которой все уравнения для φ_β и χ_β сильные. Мы можем использовать эти уравнения для полного исключения из теории некоторых q и p.

Вид новой схемы неоднозначен, поскольку неоднозначны φ_β и χ_β. Просто заменив φ_β и χ_β линейными комбинациями их самих, мы не изменим окончательного вида. Однако мы можем добавить к φ_β любые линейные комбинации φ_α, а к χ_β — любые линейные комбинации φ_α и χ_α. Это не изменит Δ или $c_{ss'}$, но, вообще говоря, изменит $[\xi, \eta]^*$, так что вид гамильтоновой схемы внешне изменится. Конечно, внешне отличающиеся схемы должны быть эквивалентны, поскольку все они дают одни и те же уравнения движения.

В качестве применения описанного метода рассмотрим случай, когда лагранжиан не содержит некоторых скоростей. Предположим, что L не содержит $\dot{q}_j$ $(j = 1, 2, \ldots J < N)$. Тогда каждый p_j в слабом смысле равен нулю, а в сильном — φ. Предположим, что ни одна линейная комбинация p_j не является величиной первого рода. Тогда мы можем считать, что p_j суть φ_β. Возьмем теперь в качестве половины набора θ эти p_j, а в качестве другой половины — подходящие φ или χ второго рода, так чтобы Λ не обращался в нуль. Эти другие θ назовем θ_j. Легко видеть, что при таком выборе θ именно новые СП и получились бы применением определения (4.3) к тем степеням свободы, для которых из числа q исключены q_j, причем каждый p_j считается сильно равным нулю, а каждая q_j — сильно равной функции остальных q и p, заданной уравнениями $\theta_j \equiv 0$. Таким путем мы получаем новую гамильтонову схему (не обязательно максимально упрощенную, поскольку могут существовать другие φ_β и χ_β, не включенные в число θ), в которой q_j, и p_j не появляются как независимые динамические переменные.

Новую схему можно было бы получить и более прямым путем, с самого начала не считая q_j координатами и вообще не вводя сопряженных им импульсов. Посмотрим, какие модификации внесло бы это в развитие теории.

Обозначим через n те и только те значения индексов, для которых q не есть q_j, т. е. значения $J+1$, $J+2$, ... , N. Тогда уравнения (2.2) и (3.1) остаются в силе, а уравнение (3.2) следует заменить на

$$\delta H = \dot{q}_n \delta p_n - \frac{\partial L}{\partial q_n}\delta q_n - \frac{\partial L}{\partial q_j}\delta q_j, \tag{8.8}$$

поскольку мы допускаем варьирование q_j. Уравнения

$$\frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \tag{8.9}$$

мы можем считать при этом дополнительными условиями. Тогда уравнение (8.8) сводится просто к (3.2). Мы можем заключить, что H имеет вид (5.3), где φ_m зависят от q_n и p_n, не зависят от q_j и обращаются в нуль как следствие уравнений (2.2). В дальнейшем теорию можно развивать, как и ранее, в терминах φ и χ, не зависящих от q_j. Те же из уравнений для φ и χ, которые содержат q_j, можно считать определяющими q_j через другие переменные, и в дальнейшем они не играют в теории никакой роли.

В такой форме теории мы имеем лагранжиан, содержащий зависящие от импульсов переменные q_j. Появление импульсных переменных в лагранжиане аналогично появлению скоростей v_α в гамильтониане.

§ 9. Гамильтониан как исходное понятие

Вместо того, чтобы начинать с лагранжиана и получать из него гамильтониан, можно начинать с гамильтониана. Мы полагаем, что имеются некоторые динамические переменные q_n и p_n ($n = 1, 2, \ldots, N$) и, возможно, другие динамические переменные, между которыми определены СП, обладающие свойствами (4.4), и что их связывают некоторые слабые уравнения в качестве φ-уравнений. На таком пути нет оснований различать φ и χ. По крайней мере, одна из φ должна быть первого рода, т. е. иметь нулевые СП со всеми φ, иначе не будет непротиворечивого движения. Предположим затем, что гамильтониан есть линейная комбинация φ_α (φ первого рода) с новыми переменными v_α в качестве коэффициентов, а гамильтоновы уравнения движения имеют вид (4.6) или (6.12). Сами v могут быть произвольными функциями независимой переменной τ.

Прежнюю схему уравнений движения, выведенных из лагранжиана и включающих как φ, так, возможно, и χ, следует считать примером настоящей схемы, в котором некоторые из v обращены в нуль дополнительными условиями. Тогда φ_α, отвечающие этим v_α, суть χ первого рода в прежней схеме. Такие дополнительные условия, да и любые дополнительные условия, содержащие v, ничего не дают в применениях теории к релятивистской динамике, рассматриваемых в следующем разделе, и не могут быть перенесены в квантовую теорию, так что в дальнейшем они исключаются. Дополнительные же условия, по содержанию v, суть в точности φ-уравнения.

СП двух φ первого рода есть φ первого рода, в чем можно убедиться следующим образом. СП $[\varphi_\alpha, \varphi_{\alpha'}]$ слабо обращается в нуль и поэтому в сильном смысле равна линейной комбинации φ — единственных величин, слабо равных нулю в настоящей схеме. Мы должны показать, что ее СП с любой φ слабо равна нулю. Из тождества Пуассона:

$$[\varphi, [\varphi_\alpha, \varphi_{\alpha'}]] \equiv [[\varphi, \varphi_\alpha], \varphi_{\alpha'}] - [[\varphi, \varphi_{\alpha'}], \varphi_\alpha]. \tag{9.1}$$

Поскольку φ_α — первого рода, $[\varphi, \varphi_\alpha]$ слабо равна нулю и потому в сильном смысле есть линейная комбинация φ, откуда ее СП с $\varphi_{\alpha'}$ первого рода слабо обращается в нуль. Аналогично слабо обращается в нуль второй член в правой части (9.1), и необходимый результат доказан.

Предположим, что имеется A независимых φ первого рода и M всех независимых φ. В фазовом пространстве ($2N$-мерном пространстве переменных q_n и p_n) имеется $(2N - M)$-мерное подпространство, в котором выполнены все φ-уравнения. Назовем его $(2N - M)$-пространством. Состояние динамической системы при данном значении τ фиксируется заданием переменных q и p, удовлетворяющих всем φ-уравнениям, т. е. представляется точкой P в $(2N - M)$-пространстве. Движение системы, исходным для которого является это состояние, представляется в $(2N-M)$-пространстве кривой с началом в P. Благодаря произвольности A переменных v_α эта кривая может уходить в любом направлении в малом пространстве A измерений, охватывающем P. Для каждой точки $(2N-M)$-пространства имеется такое малое A-мерное охватывающее пространство. Покажем теперь, что эти малые пространства интегрируемы.

Предположим, что в интервале времени $\delta\tau = \varepsilon_1$ обращаются в нуль все v, за исключением $v_{\alpha'}$, равной 1, в следующем интервале $\delta\tau = \varepsilon_2$ — все v, за исключением $v_{\alpha''}$, также равной 1. Тогда любая функция g, зависящая от q и p, в конце первого интервала переходит в

$$g + \varepsilon_1[g, \varphi_{\alpha'}].$$

В конце второго интервала, с учетом членов порядка $\varepsilon_1\varepsilon_2$, но в пренебрежении членами порядка ε_1^2 и ε_2^2, она переходит в

$$g + \varepsilon_1[g, \varphi_{\alpha'}] + \varepsilon_2[g + \varepsilon_1[g, \varphi_{\alpha'}], \varphi_{\alpha''}]. \tag{9.2}$$

Если эти два движения совершаются в обратной последовательности, g переходит в

$$g + \varepsilon_2[g, \varphi_{\alpha''}] + \varepsilon_1[g + \varepsilon_2[g, \varphi_{\alpha''}], \varphi_{\alpha'}]. \tag{9.3}$$

Разность между (9.2) и (9.3) благодаря тождеству Пуассона равна

$$\varepsilon_1\varepsilon_2[g, [\varphi_{\alpha'}, \varphi_{\alpha''}]]. \tag{9.4}$$

Выше было показано, что $[\varphi_{\alpha'}, \varphi_{\alpha''}]$ есть φ первого рода, так что (9.4) есть возможное изменение g, описываемое уравнениями движения при подходящем выборе v и поэтому отвечающее повороту в малом A-мерном пространстве вокруг начальной точки. Это и есть условие интегрируемости. Если в дополнительные условия войдут v, эта интегрируемость может подпортиться. Таким образом, для выведенных из лагранжиана уравнений движения интегрируемость не обязательно имеет место.

Объединение малых пространств образует набор лежащих в $(2N-M)$-пространстве A-мерных пространств таких, что движение всегда происходит только в одном из них. Назовем эти пространства

A-пространствами. Каждая кривая в A-пространстве представляет возможное решение уравнений движения. Каждая точка $(2N - M)$-пространства лежит в некотором A-пространстве, содержащем все начинающиеся в этой точке траектории. Полным решением уравнений движения допустимо считать само A-пространство, а не кривую общего положения в нем.

Точку данного A-пространства можно фиксировать A координатами, каждая из которых есть некоторая функция q и p. Обозначим эти координаты t_a $(a = 1, 2, \ldots, A)$. Они будут играть роль временных переменных. Само A-пространство можно описать, задав зависимость всех q и p от t_a. Если g есть любая из q и p или их функция, мы имеем

$$\dot{g} = \dot{t}_a \frac{\partial g}{\partial t_a}, \tag{9.5}$$

поскольку зависимость g от τ можно считать порожденной зависимостью t_a от τ. Используя гамильтоновы уравнения движения (6.12) для $\dot{g}$ и $\dot{t}$, мы получаем

$$v_\alpha[g, \varphi_\alpha] = v_\alpha[t_a, \varphi_\alpha] \frac{\partial g}{\partial t_a}.$$

Это уравнение выполняется для произвольных v_α, так что

$$[g, \varphi_\alpha] = [t_a, \varphi_\alpha] \frac{\partial g}{\partial t_a}. \tag{9.6}$$

Уравнения (9.6) можно считать общими уравнениями движения, фиксирующими A-пространство. В теории с однородностью по скоростям именно они наиболее похожи на обычные гамильтоновы уравнения движения. Если $A = 1$, то мы можем взять в качестве времени единственную переменную t_a и (9.6) сведется в точности к обычным гамильтоновым уравнениям движения.

Чтобы перейти от гамильтониана к лагранжиану, мы введем скорости $\dot{q}_n$ уравнениями

$$\dot{q}_n = v_\alpha \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial p_n}, \tag{9.7}$$

а затем определим L:

$$L \equiv p_n \dot{q}_n - H \equiv p_n \dot{q}_n - v_\alpha \varphi_\alpha. \tag{9.8}$$

Это задает L как функцию q, $\dot{q}$, p и v, причем линейную по $\dot{q}$ и v. Взяв независимые вариации δq, $\delta\dot{q}$, δp, δv, мы получаем

$$\begin{aligned} \delta L = \dot{q}_n\delta p_n + p_n\delta\dot{q}_n - \varphi_\alpha\delta v_\alpha - v_\alpha\left(\frac{\partial\varphi_\alpha}{\partial q_n}\delta q_n + \frac{\partial\varphi_\alpha}{\partial p_n}\delta p_n\right) = \\ = p_n\delta\dot{q}_n - v_\alpha\frac{\partial\varphi_\alpha}{\partial q_n}\delta q_n. \end{aligned} \tag{9.9}$$

Таким образом, δL не зависит от δp_n и δv_n. Этот результат следует сопоставить с (3.2).

Если уравнения (9.7) вместе с φ-уравнениями выражают $\dot{q}$ как независимые функции p и v, позволяя тем самым считать p и v функциями q и $\dot{q}$, то (9.9) показывает, что L есть функция только q и $\dot{q}$ в сильном смысле. Эта функция должна быть однородной первой степени по $\dot{q}$. Ее частные производные по q и $\dot{q}$ дают

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial\dot{q}_n} &= p_n, \\ \frac{\partial L}{\partial q_n} = -v_\alpha\frac{\partial\varphi_\alpha}{\partial q_n} &= p_n. \end{aligned} \tag{9.10}$$

Это обычные лагранжевы уравнения.

Если уравнения (9.7) вместе с φ-уравнениями не выражают $\dot{q}$ как независимые функции p и v, то они приводят к некоторым соотношениям, связывающим только q и $\dot{q}$, скажем,

$$R_j(q,\,\dot{q}) = 0, \quad j = 1,\,2,\,\ldots\,,\,J. \tag{9.11}$$

R_j однородны по $\dot{q}$, и мы выбираем их так, чтобы однородность была первой степени. Дальнейшие действия аналогичны методу § 3, но с взаимной переменой ролей у p и $\dot{q}$. Мы получаем аналогичный (3.5) результат

$$L \equiv \mathscr{L} + \lambda_j R_j, \tag{9.12}$$

где $\mathscr{L}$ зависит только от q и $\dot{q}$ и должен быть однородным первой степени по $\dot{q}$, а коэффициенты λ_j зависят от q, p и v.

Если λ считать независимыми переменными при частном дифференцировании L, а L тогда однороден первой степени по $\dot{q}$, мы возвращаемся к уравнениям (9.10). Таким образом, мы имеем лагранжиан, содержащий импульсные переменные; нечто подобное обсуждалось в конце предыдущего раздела, причем тогдашние $\dot{q}_j$ отвечают теперешним λ_j, а дополнительные условия (8.9) — уравнениям (9.11).

§ 10. Приложение к релятивистской динамике

В обычной нерелятивистской динамике работают с состояниями динамической системы в данный момент времени, причем это состояние характеризуется заданием значений q и p. Имеются уравнения движения, позволяющие по состоянию в один момент времени вычислить состояние в другой момент. Гамильтонова форма этих уравнений движения в случае однородности по скоростям требует только одной φ первого рода.

Чтобы получить динамическую теорию, удовлетворяющую частному принципу относительности, мы должны построить схему уравнений, равно применимых для наблюдателей со всеми скоростями. Если мы работаем с мгновеньями[1], мы должны охватить мгновенья относительно всех наблюдателей. Тогда мгновенье — это любая плоская трехмерная поверхность в пространстве-времени, нормаль к которой лежит внутри светового конуса. Чтобы описать общее мгновенье, нужны четыре параметра — три для фиксации направления нормали (скорости наблюдателя) и четвертый, чтобы различить разные мгновенья для одного наблюдателя.

Включая понятие мгновений, релятивистская динамика должна позволять по заданному состоянию в любое из этих мгновений вычислять состояние в любое другое. Мы должны располагать уравнениями движения, показывающими, как меняются динамические переменные с изменением этих мгновений. Мы должны допустить произвольные изменения мгновений — как трансляции в пространстве-времени, так и изменения в направлении нормали, и все это должны суметь описать уравнения движения. Таким образом, нам нужны четыре φ первого рода, чтобы породить четыре степени свободы в изменении мгновенья. Четыре параметра, описывающих мгновенье, следует понимать как q, подчиняющиеся наряду с другими q и p уравнениям движения (4.6) или (6.12). Их отличие от других q и p состоит в том, что именно их удобно взять в качестве переменных t в уравнениях движения (9.6). Тогда эти уравнения явно показывают, как меняются любые q и p при данном изменении мгновенья.

Есть другие формы релятивистской динамики, не использующие мгновений, как то обсуждалось автором [2]. Есть точечная форма, в которой состояние определяется относительно точки в пространстве-

[1] *With instant* — см. [2].

времени. Для этой формы также нужны четыре φ первого рода, соответственно четырем степеням свободы движения точки. Далее, есть фронтальная форма, для которой нужны три φ первого рода, соответственно трем степеням свободы движения фронта. Наконец, мы можем задавать состояние на произвольной трехмерной пространственноподобной поверхности в пространстве-времени. Тогда число φ первого рода должно быть бесконечным, соответственно всем деформациям, которые можно сделать с этой поверхностью. В каждой из этих форм переменные, описывающие точку, волновой фронт или произвольную пространственноподобную поверхность, следует понимать как q, подчиняющиеся уравнениям движения (4.6) или (6.12) и предпочтительно удобные для выбора в качестве переменных t в уравнении (9.6).

Обсуждавшиеся выше φ первого рода минимально необходимы для построения релятивистской динамики в соответственных формах. Могут быть и другие. Например, электродинамика, допускающая калибровочные преобразования даже после фиксации начальных значений всех q и p, должна обладать добавочными степенями свободы, для порождения которых будут нужны добавочные φ первого рода.

§ 11. Квантование

Чтобы проквантовать динамическую систему, получившую классическое описание, нужно построить систему линейных операторов, соответствующих классическим динамическим переменным q и p и их функциям. Ни классическим переменным v, ни переменным типа скорости вообще, ни комбинациям, явно содержащим τ, — нет соответствий среди операторов. Все операторы действуют на векторы ψ гильбертова пространства, представителями которых в любом представлении являются волновые функции, характеризующие состояния в квантовой теории. Вещественным классическим переменным соответствуют самосопряженные операторы.

Аналогия между линейными операторами и их классическими двойниками должна удовлетворять двум общим принципам. С обозначением одинаковыми символами обоих партнеров-двойников, эти принципы суть:

(i) СП-соотношения между классическими переменными соответствуют перестановочным соотношениям между операторами согласно формуле

$$[\xi, \eta] \quad \text{соответствует} \quad 2\pi(\xi\eta - \eta\xi)/ih;$$

(ii) слабые уравнения между классическими переменными соответствуют линейным условиям на векторы ψ согласно формуле

$$X(q, p) = 0 \quad \text{соответствует} \quad X\psi = 0.$$

Процедура перехода от классической к квантовой теории не вполне определена математически, поскольку всякий раз, когда классическое выражение содержит произведение двух множителей, СП которых не обращается в нуль, есть произвол в порядке, в котором должны появиться эти два множителя в соответствующем квантовом выражении. В простых реальных примерах этот вопрос решается без труда. В сложных примерах может оказаться невозможным так выбрать порядок в каждом месте, чтобы сделать непротиворечивыми все квантовые уравнения, а тогда и неизвестно, как проквантовать теорию. Все современные методы квантования являются по сути практическими приемами, основанием для применения которых служат соображения простоты.

Имеются некоторые общие соображения, которые следует иметь в виду при переходе к квантовой теории, чтобы сразу не столкнуться с тривиальной противоречивостью квантовых уравнений. В классической теории мы имеем некоторое число φ-уравнений (включая в него на равных правах χ-уравнения), которые в квантовой теории следует трактовать в соответствии с принципом (ii). Для классических φ мы можем провести линейное преобразование (6.6), и новые φ будут ничем не хуже старых. Проводя соответствующее преобразование в квантовой теории, мы должны озаботиться тем, чтобы все коэффициенты γ стояли слева от φ. Общая φ в квантовой теории есть линейная комбинация исходных φ с коэффициентами слева.

Из двух квантовых уравнений, полученных по φ-уравнениям согласно принципу (ii),

$$\varphi_1\psi = 0, \quad \varphi_2\psi = 0,$$

мы можем заключить, что

$$\varphi_2\varphi_1\psi = 0, \quad \varphi_1\varphi_2\psi = 0,$$

а отсюда согласно принципу (i)

$$[\varphi_1, \varphi_2]\psi = 0.$$

Это соответствует классическому слабому уравнению

$$[\varphi_1, \varphi_2] = 0.$$

Мы можем заключить, что если переход к квантовой теории возможен, то все φ должны быть первого рода.

Квантовую теорию можно построить и по классической теории с φ второго рода — предварительно превратив все φ_β-уравнения в сильные уравнения с помощью преобразования, описанного в § 8. Квантовым эквивалентом сильных уравнений будут уравнения между операторами, по которым одни из них можно определить через другие.

Квантовые уравнения $\varphi\psi = 0$, полученные из классических φ-уравнений применением принципа (ii) к φ первого рода, представляют собой волновые уравнения Шредингера. Обычная классическая динамика с единственной φ первого рода приводит к единственному уравнению Шредингера. В общей теории каждой классической степени свободы, характеризующей произвол в движении, отвечает свое уравнение Шредингера. В этих уравнениях все операторы соответствуют динамическим переменным при одном и том же значении τ. Операторы, относящиеся к различным значениям τ, принадлежат разным алгебраическим системам, и, по-видимому, в квантовой теории нет ничего похожего на τ-зависимость классических переменных.

Однако описываемая уравнением (9.6) зависимость классических величин от параметров t имеет квантовый аналог, если только t выбраны так, что их взаимные СП равны нулю, и поэтому в квантовой теории им можно одновременно придать числовые значения. Предпочтительные t различных форм релятивистской динамики, обсуждавшихся в предыдущем параграфе, удовлетворяют этому условию. Непосредственно перенести в квантовую теорию уравнения (9.6) мы не можем, поскольку, как легко проверить, получившиеся уравнения не были бы инвариантны при общих линейных преобразованиях φ (6.6). Сначала мы должны привести уравнения (9.6) к стандартному виду. Преобразованием (6.6) мы образуем новый набор φ, скажем φ_a, находящихся в таком взаимно однозначном соответствии с t_a, что

$$[t_a, \varphi_{a'}] = \delta_{aa'}. \tag{11.1}$$

Для таких φ уравнения (9.6) сводятся к

$$[g, \varphi_a] = \frac{\partial g}{\partial t_a}.$$

Эти уравнения уже можно перенести в квантовую теорию, и тогда они станут гейзенберговыми квантовыми уравнениями движения в нашей обобщенной динамике.

§ 12. Приложение

Доказательство тождества Пуассона для новых СП, определенных уравнением (8.3). Воспользуемся индексами r, s, t, ... для идентификации различных θ. Мы имеем но определению

$$\begin{gathered}
[[\xi,\,\eta]^*,\,\zeta]^* = [[\xi,\,\eta] + [\xi,\,\theta_r]c_{rs}[\theta_s,\,\eta],\,\zeta]+ \\
+[[\xi,\,\eta] + [\xi,\,\theta_r]c_{rs}[\theta_s,\,\eta],\,\theta_t]c_{tu}[\theta_u,\,\zeta] = \\
= [[\xi,\,\eta],\,\zeta] + [[\xi,\,\theta_r],\,\zeta]c_{rs}[\theta_s,\,\eta] + [\xi,\,\theta_r][c_{rs},\,\zeta][\theta_s,\,\eta]+ \\
+[\xi,\,\theta_r]c_{rs}[[\theta_s,\,\eta],\,\zeta] + [[\xi,\,\eta],\,\theta_t]c_{tu}[\theta_u,\,\zeta]+ \\
+[[\xi,\,\theta_r],\,\theta_t]c_{rs}[\theta_s,\,\eta]c_{tu}[\theta_u,\,\zeta] + [\xi,\,\theta_r][c_{rs},\,\theta_t][\theta_s,\,\eta]c_{tu}[\theta_u,\,\zeta]+ \\
+[\xi,\,\theta_r]c_{rs}[[\theta_s,\,\eta],\,\theta_t]c_{tu}[\theta_u,\,\zeta].
\end{gathered} \tag{12.1}$$

Пусть оператор Σ означает суммирование по трем циклическим перестановкам величин ξ, η, ζ. Тогда мы должны доказать, что

$$\Sigma[[\xi,\,\eta]^*,\,\zeta]^* = 0.$$

В применении к первому члену (12.1) Σ дает нуль благодаря обычному тождеству Пуассона. Применение Σ ко второму, четвертому и пятому членам дает

$$\Sigma c_{rs}[\theta_s,\,\eta]\{[[\xi,\,\theta_r],\,\zeta] + [[\theta_r,\,\zeta],\,\xi] + [[\zeta,\,\xi],\,\theta_r]\} = 0$$

снова благодаря обычному тождеству Пуассона. Применение к шестому и восьмому членам (12.1) дает после циклической перестановки r, u, s, t в восьмом:

$$\begin{gathered}
c_{rs}c_{tu}\Sigma[\theta_s,\,\eta][\theta_u,\,\zeta]\{[[\xi,\,\theta_r],\,\theta_t] + [[\theta_t,\,\xi],\,\theta_r]\} = \\
= -c_{rs}c_{tu}\Sigma[\theta_s,\,\eta][\theta_u,\,\zeta][[\theta_r,\,\theta_t],\,\xi].
\end{gathered} \tag{12.2}$$

Из (8.2) можем заключить, что

$$[c_{tu}[\theta_r,\,\theta_t],\,\xi] = 0,$$

или

$$[c_{tu},\,\xi][\theta_r,\,\theta_t] + c_{tu}[[\theta_r,\,\theta_t],\,\xi] = 0. \tag{12.3}$$

Таким образом, (12.2) сводится к

$$c_{rs}[\theta_r,\,\theta_t]\Sigma[\theta_s,\,\eta][\theta_u,\,\zeta][c_{tu},\,\xi] = \Sigma[\theta_t,\,\eta][\theta_u,\,\zeta][c_{tu},\xi]$$

после еще одного использования (8.2). Это выражение сокращается с результатом применения Σ к третьему члену (12.1). Применение Σ к остающемуся, седьмому члену (12.1) дает

$$[\xi,\,\theta_r][\eta,\,\theta_s][\zeta,\,\theta_u]\{c_{tu}[c_{rs},\,\theta_t]+c_{tr}[c_{su},\,\theta_t]+c_{ts}[c_{ur},\,\theta_t]\}. \tag{12.4}$$

Обозначив Σ_{rsu} результат суммирования по циклическим перестановкам индексов r, s, u и одновременно индексов r', s', u', мы имеем благодаря обычному тождеству Пуассона

$$\Sigma_{rsu}c_{rr'}c_{ss'}c_{uu'}[[\theta_{r'},\,\theta_{s'}],\,\theta_{u'}]=0. \tag{12.5}$$

Замена ξ на $\theta_{u'}$ в (12.3) дает

$$[c_{rr'},\,\theta_{u'}][\theta_{r'},\,\theta_{s'}]+c_{rr'}[[\theta_{r'},\,\theta_{s'}],\,\theta_{u'}]=0,$$

так что из (12.5) следует

$$\Sigma_{rsu}c_{ss'}c_{uu'}[\theta_{r'},\,\theta_{s'}][c_{rr'},\,\theta_{u'}]=0.$$

С помощью (8.2) это сводится к

$$\Sigma_{rsu}c_{uu'}[c_{rs},\,\theta_{u'}]=0,$$

что свидетельствует об обращении (12.4) в нуль. На этом доказательство завершается. Все выписанные выше уравнения можно понимать как сильные, поскольку слабых уравнений в доказательстве не использовалось.

Литература

[1] Dirac P. A. M. *Homogeneous variables in classical dynamics*, Proc. Camb. Phil. Soc., 1993, V. 29, P. 389.

[2] Dirac P. A. M. *Forms of relativistic dynamics*, Rev. Mod. Phys., 1949, V. 21, P. 392.

Обобщенная гамильтонова динамика*

Предложенная автором процедура перехода от лагранжиана к гамильтониану в ситуации, когда импульсы не являются независимыми функциями скоростей, приведена к более простой и практичной форме, причем основные результаты получены прямым решением уравнений, вытекающих из требований самосогласованности. Показано, как (при некоторых условиях) можно исключить часть степеней свободы и тем самым добиться существенного упрощения гамильтонова формализма.

Обычная процедура перехода от лагранжевой формы уравнений движения к гамильтоновой форме требует, чтобы импульсы были независимыми функциями скоростей. На практике имеется ряд важных случаев, когда это условие не выполнено — например, в релятивистской теории поля, — и возникает необходимость обобщить процедуру. Один из способов сделать это был предложен автором [1]. В настоящей статье он приводится к более простому и практичному виду.

Альтернативный подход к проблеме дан Андерсоном и Бергманом [2]. Будучи приложим только к квадратичным по скоростям лагранжианам, их метод менее общий, чем настоящий. В настоящем методе лагранжиан может быть любой функцией скоростей и координат, при единственном ограничении, чтобы лагранжевы уравнения движения не приводили к несовместности.

§ 1. φ-уравнения

Рассмотрим динамическую систему, описываемую в терминах координат q_n ($n = 1, 2, \dots, N$) и скоростей $\dot{q}_n$ с лагранжианом $L = L(q, \dot{q})$. Как обычно, определим импульсы

$$p_n = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n}. \tag{1.1}$$

Может оказаться, что p не являются независимыми функциями $\dot{q}$. Если

*Proc. Royal Soc., V. 246, 1958, P. 326–332. Перевод с английского В. П. Павлова.

среди p имеется только $N-M$ независимых функций $\dot{q}$, возникнет M независимых соотношений

$$\varphi_m(p,\, q) = 0, \quad m = 1,\, 2,\, \ldots\, ,\, M, \tag{1.2}$$

M может быть любым — от 0 до N.

Лагранжевы уравнения движения

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n} = \frac{\partial L}{\partial q_n}. \tag{1.3}$$

задают теперь $N-M$ функций, зависящих от ускорений $\ddot{q}_n$, и дают M уравнений, связывающих только координаты и скорости. Может оказаться, что дифференцированием по времени (однократным или, возможно, многократным) мы можем получить некоторые новые независимые уравнения, содержащие ускорения. Если таких уравнений недостаточно, чтобы задать все ускорения, то общее решение уравнений движения с данными начальными значениями q и $\dot{q}$ будет содержать несколько произвольных функций времени.

Сделаем произвольные малые вариации δq_n, $\delta \dot{q}_n$ координат и скоростей. Они приведут к вариациям δp_n, сохраняющим уравнения (1.1). Эти вариации должны сохранять и уравнения (1.2), являющиеся следствием (1.1), так что

$$\frac{\partial \varphi_m}{\partial q_n}\delta q_n + \frac{\partial \varphi_m}{\partial p_n}\delta p_n = 0. \tag{1.4}$$

Уравнения (1.4) будут единственными ограничениями на вариации δp_n, учитывающими уравнения (1.2) в том смысле, что независимые вариации первого порядка у p и q дают вариации первого порядка у φ.

Мы имеем

$$\begin{aligned} \delta(p_n \dot{q}_n - L) &= p_n \delta \dot{q}_n + \dot{q}_n \delta p_n - \frac{\partial L}{\partial q_n}\delta q_n - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n}\delta \dot{q}_n = \\ &= \dot{q}_n \delta p_n - \frac{\partial L}{\partial q_n}\delta q_n. \end{aligned} \tag{1.5}$$

Поскольку члены с $\delta \dot{q}$ сокращаются, вариация по $\dot{q}$, сохраняющая уравнения (1.1) в отсутствие вариаций по q и p, оставляет неизменной $p_n \dot{q}_n - L$. Это означает, что $p_n \dot{q}_n - L$ является функцией только q и p, так что мы можем положить

$$p_n \dot{q}_n - L = H(q,\, p). \tag{1.6}$$

Конечно, функция $H(q, p)$ определена неоднозначно. Мы можем сделать замену

$$H \to H + c_m\varphi_m, \tag{1.7}$$

где c_m — любые функции q и p. В случае, когда L однороден первой степени по $\dot{q}$, мы можем взять $H = 0$.

Теперь уравнение (1.5) дает

$$\frac{\partial H}{\partial p_n}\delta p_n + \frac{\partial H}{\partial q_n}\delta q_n = \dot{q}_n\,\delta p_n - \frac{\partial L}{\partial q_n}\delta q_n,$$

где вариации δq_n, δp_n ограничены уравнением (1.4), а в остальном произвольны. Поэтому

$$\dot{q}_n = \frac{\partial H}{\partial p_n} + u_m\frac{\partial \varphi_m}{\partial p_n}, \tag{1.8}$$

$$-\frac{\partial L}{\partial q_n} = \frac{\partial H}{\partial q_n} + u_m\frac{\partial \varphi_m}{\partial q_n}, \tag{1.9}$$

где u_m — некоторые коэффициенты. При преобразовании (1.7) к u_m добавляются функции, зависящие только от q и p, а именно минус c_m.

Уравнения (1.8) показывают, что $\dot{q}$ заданы через q, $N - M$ независимых переменных p и M новых переменных u. Таким образом, вместо q и $\dot{q}$ мы можем взять в качестве основных динамических переменных q, p и u. Это и есть гамильтоновы переменные.

С помощью (1.9) уравнения движения (1.3) принимают вид

$$\dot{p}_n = -\frac{\partial H}{\partial q_n} - u_m\frac{\partial \varphi_m}{\partial q_n}. \tag{1.10}$$

Если обычным образом определить скобку Пуассона (СП)

$$[A, B] = \frac{\partial A}{\partial q_n}\frac{\partial B}{\partial p_n} - \frac{\partial A}{\partial p_n}\frac{\partial B}{\partial q_n}, \tag{1.11}$$

то для любой g, зависящей от q и p, имеем

$$\dot{g} = [g, H] + u_m[g, \varphi_m]. \tag{1.12}$$

Одно это уравнение охватывает все уравнения (1.8) и (1.10). Оно есть общее гамильтоново уравнение движения.

Определение СП (1.11) требует, чтобы q и p считались независимыми переменными. Любые соотношения, ограничивающие, подобно уравнениям (1.2), независимость q и p, не должны использоваться до взятия СП, иначе СП потеряют однозначную определенность. Чтобы помнить об этом при работе с некоторыми из наших уравнений, удобно назвать такие ограничивающие уравнения *слабыми уравнениями* и записать их в виде

$$\varphi_m \approx 0.$$

§ 2. χ-уравнения

Дифференцируя по времени (1.2) и используя (1.12), мы получаем

$$[\varphi_{m'}, H] + u_m[\varphi_{m'}, \varphi_m] = 0. \tag{2.1}$$

Если не все эти уравнения сводятся к $0 = 0$, они уменьшат число гамильтоновых переменных q, p, u, выявив некоторые соотношения между ними.

Может оказаться, что уравнения (2.1) приводят к некоторым соотношениям только между q и p, независимым по отношению к φ-уравнениям. Они должны быть слабыми уравнениями, поэтому запишем их в виде

$$\chi_k(q, p) \approx 0 \quad (k = 1, 2, \ldots). \tag{2.2}$$

Дифференцируя по времени каждое из уравнений (2.2), получаем

$$[\chi_k, H] + u_m[\chi_k, \varphi_m] = 0. \tag{2.3}$$

Эти уравнения могут приводить к новым соотношениям только между q и p, т. е. к новым уравнениям (2.2), которые, в свою очередь, могут привести к новым уравнениям (2.3). Продолжим эту процедуру до тех пор, пока она идет, получив таким образом все уравнения (2.2) и (2.3), являющиеся следствиями (1.2) и общего уравнения движения (1.12). Пусть полный набор описывается индексами $k = 1, 2, \ldots, K$. Таким образом, число независимых p и q мы свели до $2N - M - K$, а u ограничили уравнениями (2.1) и (2.3), если только эти уравнения не сводятся к $0 = 0$ или к χ-уравнениям.

Рассмотрим эти уравнения (2.1) и (2.3) как уравнения для неизвестных u_m с коэффициентами, заданными как функции q и p. Они должны иметь решение

$$u_m = U_m(q,\, p), \tag{2.4}$$

поскольку из отсутствия его следовала бы противоречивость лагранжевых уравнений движения (1.3). По смыслу решения (2.4), уравнения

$$\begin{gathered}[\varphi_{m'},\, H] + U_m[\varphi_{m'}, \varphi_m] \approx 0,\\ [\chi_k,\, H] + U_m[\chi_k,\, \varphi_m] \approx 0\end{gathered} \tag{2.5}$$

выполняются вследствие (1.2) и (2.2).

Вообще говоря, решение (2.4) неоднозначно. Мы можем добавить к U_m любое решение $V_m = V_m(q,\, p)$ уравнений

$$V_m[\varphi_{m'}, \varphi_m] \approx 0, \quad V_m[\chi_k,\, \varphi_m] \approx 0. \tag{2.6}$$

Пусть V_{am} ($a = 1, 2, \ldots, A$) — все независимые решения уравнений (2.6). Тогда общее решение уравнений (2.1) и (2.3) есть

$$u_m = U_m + v_a V_{am}, \tag{2.7}$$

где v_a — произвольные коэффициенты.

С помощью уравнений (2.7) можно исключить переменные u_m, так что в качестве основных гамильтоновых переменных мы имеем $2N - M - K$ оставшихся независимыми после учета уравнений (1.2) и (2.2) переменных q и p и A переменных v_a. Полное число этих переменных может быть значительно меньше первоначального числа $2N$ независимых переменных, поскольку уравнения движения могут сократить его.

Андерсон и Бергман называют φ-уравнения первичными связями, а χ-уравнения — вторичными связями. Во многих аспектах φ и χ выступают на равной ноге, и поэтому удобно их все обозначать как χ_j ($j = 1, 2, \ldots, M + K$). С гамильтоновой точки зрения, существенно то различие между ними, что φ фигурируют в общем уравнении движения (1.12), а χ нет.

§ 3. Условие принадлежности первому роду

По определению, зависящая от q и p функция есть величина *первого рода*, если все ее СП с H и χ_j обращаются в нуль. Достаточно, чтобы это обращение было слабым, т. е. с использованием уравнений (1.2) и (2.2). Зависящая от q и p функция, не удовлетворяющая этим условиям, называется величиной *второго рода.*

Теорема. *СП двух величин первого рода есть величина первого рода.*

Доказательство.

Пусть X и Y — первого рода, так что

$$[X, \chi_j] \approx 0, \quad [Y, \chi_j] \approx 0.$$

Эти слабые уравнения означают, что

$$[X, \chi_j] = x_{jj'}\chi_{j'}, \quad [Y, \chi_j] = y_{jj'}\chi_{j'}.$$

с некоторыми коэффициентами $x_{jj'}$ и $y_{jj'}$. Следовательно,

$$[[X, Y], \chi_j] = [[X, \chi_j], Y] - [[Y, \chi_j], X] \approx x_{jj'}[\chi_{j'}, Y] - y_{jj'}[\chi_{j'}, X] \approx 0.$$

Аргументация сохраняет силу, если заменить χ_j на H, откуда $[[X, Y], H] \approx 0$. Следовательно, $[X, Y]$ — первого рода. ■

Положим,

$$H + U_m\varphi_m = H' \tag{3.1}$$

Уравнения (2.5) показывают, что СП H' с любой χ_j слабо обращается в нуль. Далее,

$$[H, H'] \approx U_{m'}[\varphi_{m'}, H] \approx 0$$

из первого из уравнений (2.5), умноженного на $U_{m'}$. Таким образом, H' — первого рода. Заметим, что гамильтониан H' может быть получен из H преобразованием (1.7).

Любая линейная комбинация φ с коэффициентами, зависящими от q и p, может рассматриваться как другая φ. Положим,

$$V_{am}\varphi_m = \varphi_a. \tag{3.2}$$

Уравнения (2.6) показывают, что СП φ_a с любой χ_j слабо обращается в нуль. Мы только что видели, что СП φ_a с H' обращается в нуль, так что СП ее с H также должна обращаться в нуль. Следовательно, φ_a — первого рода.

Благодаря (2.7) общее уравнение движения (1.12) принимает вид

$$\dot{g} = [g, H'] + v_a[g, \varphi_a]. \tag{3.3}$$

Теперь оно содержит гамильтониан первого рода H' и φ первого рода φ_a. Коэффициенты v_a, отвечающие этим φ первого рода, никак не ограничиваются уравнениями движения. Таким образом, в общем решении уравнений движения с данными начальными условиями каждый из них приводит к произвольной функции времени.

Каждая φ первого рода имеет вид $U_m\varphi_m$, где U_m удовлетворяют (2.5). Поэтому каждая независимая φ первого рода должна появиться в (3.3). Следовательно, число независимых функций времени в общем решении уравнений движения равно числу независимых φ первого рода. Следует считать, что все решения уравнений движения, различие которых при данных начальных условиях вызвано разным выбором произвольных функций времени, отвечают одному и тому же физическому состоянию движения, по-разному описываемому в зависимости от выбора некоторых не имеющих физического значения математических переменных (например, от выбора калибровки в электродинамике или координатной системы в релятивистской теории).

На практике инвариантные свойства интеграла действия обычно позволяют узнать, какие произвольные функции времени имеются в общем решении уравнений движения. Это знание помогает выделить φ первого рода из набора всех φ, не прибегая к трудоемкому вычислению всех СП. Любая переменная скорости, отбрасывание которой не сказывается на физическом состоянии, должна появиться как коэффициент v_a, связанный с φ первого рода, в гамильтоновом уравнении движения (3.3).

§ 4. Редукция числа степеней свободы

Предположим, что некоторые φ первого рода содержат импульсные переменные лишь линейно с числовым коэффициентом. Хотя математически это — очень специальный случай, на практике он появляется часто и поэтому важен.

Тривиальной заменой переменных мы можем привести эти φ первого рода к виду

$$p_r - f_r \approx 0, \quad r = 1, 2, \ldots, R, \tag{4.1}$$

где f_r зависят только от q. Условие принадлежности первому роду требует, чтобы СП величин $p_r - f_r$ слабо обращались в нуль. Эти СП могут зависеть только от q. В предположении, что нет χ_j, зависящих только от q, эти СП должны обращаться в нуль сильно. Следовательно,

$$f_r = \frac{\partial F}{\partial q_r},$$

где F — некоторая функция, зависящая от q. Добавим теперь к лагранжиану член

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial q_n}\dot{q}_n, \tag{4.2}$$

это не изменит уравнений движения. К p_r добавится $\partial F/\partial q_r$, так что φ-уравнения (4.1) примут вид

$$p_r \approx 0. \tag{4.3}$$

Продолжим работу с новым лагранжианом. Любую из χ_j, не попадающую в (4.3), назовем χ_i $(i = 1, 2, \ldots, M + K - R)$; χ_i могут быть как первого, так и второго рода. Не теряя общности, можно предположить, что χ_i не зависят от переменных p_r. Можно предположить, что и H' не зависит от p_r, поскольку преобразованием (1.7) к другому H' первого рода всегда можно добиться этого.

Поскольку p_r — первого рода, мы имеем

$$[\chi_i, p_r] \approx 0, \quad [[\chi_i, p_r], p_{r'}] \approx 0 \tag{4.4}$$

и т. д. Следовательно, если у χ_i вообще есть зависимость от q_r, она может быть лишь в виде

$$\chi_i = \beta_{ii'}\chi^*_{i'} \tag{4.5}$$

где χ^* слабо обращаются в нуль и не зависят от q_r, так что q_r появляются только в коэффициентах $\beta_{ii'}$. Это означает, что условия $\chi_i \approx 0$ эквивалентны условиям $\chi^* \approx 0$, не затрагивающим переменных q_r. Число χ^* должно быть равно числу χ_i (χ^* по количеству не могут превышать χ_i, поскольку все условия $\chi^*_i \approx 0$ суть следствия условий $\chi_i \approx 0$ плюс условий (4.4), которые сами являются следствиями $\chi_i \approx 0$).

Если χ_i — первого рода, применение теоремы предыдущего раздела к χ_i и p_r показывает, что χ_i выражается через χ^* только первого рода, т. е. что коэффициенты $\beta_{ii'}$ в (4.5) можно сделать ненулевыми лишь для $\chi^*_{i'}$ первого рода.

Проделав над H' такую же работу, как над χ_i мы находим, что

$$H' = H'' + \gamma_i \chi^*_i, \tag{4.6}$$

где H'', как и χ^*, не зависит от q_r. Поскольку H' — первого рода, мы можем заключить, что H'' первого рода и что любые из фигурирующих в (4.6) χ^* — первого рода.

Посмотрим теперь, какой вид примет уравнение движения (3.3). Для g, совпадающей с одной из q_r мы обнаруживаем, что $\dot{q}_r$ произвольна, так что q_r меняется произвольно. Для g, зависящей от переменных q_s, p_s $(s = R+1, \ldots, N)$, мы получаем уравнение движения вида

$$\dot{g} = [g, H''] + w_\alpha [g, \chi^*_\alpha], \tag{4.7}$$

где χ^*_α суть χ^* первого рода. (В их число не обязательно попадают все χ^* первого рода.) Переменные p_r в этом уравнении не появляются, а от q_r могут зависеть лишь коэффициенты w_α.

Предположим, что произвольные вариации w_α можно получить, варьируя q_r и те из коэффициентов v_a в (3.3), которые связаны с иными, чем p_r, φ первого рода. На практике это предположение обычно оправдывается. Тогда мы можем считать w_α в (4.7) произвольными коэффициентами, которые вместе с q_s и p_s образуют основные гамильтоновы переменные. В общем уравнении движения (4.7) q_r и p_r больше не появляются. По своему характеру это уравнение столь же фундаментально, что и (3.3), но относится только к степеням свободы q_s, p_s. Таким образом, степени свободы q_r, p_r выпали из теории.

Может оказаться, что некоторые из χ^*_α, фигурирующих в (4.7), содержат импульсные переменные лишь линейно с численными коэффициентами. Тогда мы можем повторить всю процедуру и добиться дальнейшей редукции числа эффективных степеней свободы.

Литература

[1] Dirac P. A. M., Can. J. Math., 1950, V. 2, P. 129.

[2] Anderson J. L., Bergmann P. G., Phys. Rev., 1951, V. 83, P. 1018.

Скобки Дирака в геометрии и механике

А. В. Борисов, И. С. Мамаев.

В этой книге приведены все работы Поля Дирака по обобщению гамильтоновой механики на случай вырожденных лагранжианов. Это обобщение было им использовано в дальнейшем для квантования различных полевых систем. Однако возникшая при этом классическая теория имеет собственный интерес и может быть использована при анализе различных задач динамики и геометрии.

Изложение Дирака во многом носит интуитивный физический характер, а его конструкции с современной точки зрения требуют дополнительного обоснования. В этом приложении мы постараемся остановиться на некоторых основных дифференциально-геометрических идеях, заложенных в рассуждениях Дирака, а также поясним их на ряде примеров, возникающих в классической механике. Отметим также, что несколько узкая задача о переходе от лагранжева к гамильтонову формализму в вырожденном случае заставила переосмыслить основную аксиоматическую базу гамильтоновой механики и выделить скобки Пуассона в качестве основного объекта. Это фактически привело к созданию теории пуассоновых структур, способствовало развитию таких математических дисциплин, как теория конечномерных и бесконечномерных алгебр Ли, топологии и др. Мы по возможности попытались сделать изложение замкнутым — поэтому сочли разумным напомнить сначала читателю основы гамильтоновой механики, теории пуассоновых многообразий и симплектической геометрии. Более подробные сведения можно найти в нашей книге [10], а также в [28, 30, 25].

1. Скобки Пуассона и их свойства. Многие задачи динамики допускают запись в гамильтоновой форме

$$\dot{\boldsymbol{q}} = \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{p}}, \qquad \dot{\boldsymbol{p}} = -\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{q}}, \qquad H = H(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}), \tag{8}$$

где канонические координаты $(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p})$ определены на некотором четномерном многообразии $(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}) \in M^{2n}$ — фазовом пространстве. Функция H называется гамильтонианом. Если ввести скобку Пуассона двух функций F и G по формуле

$$\{F, G\} = \sum_i \left(\frac{\partial F}{\partial q_i} \frac{\partial G}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial G}{\partial q_i} \right), \tag{9}$$

то уравнения (8) можно переписать в виде

$$\dot{q}_i = \{q_i, H\}, \qquad \dot{p}_i = \{p_i, H\}. \tag{10}$$

Любая дифференцируемая функция $F = F(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p})$ также эволюционирует по гамильтонову закону:

$$\dot{F} = \{F, H\}. \tag{11}$$

Классическое изложение гамильтоновой механики, основанное на теории *производящих функций и канонических преобразований координат* $(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p})$, не является инвариантным относительно произвольных координатных преобразований. Поэтому при инвариантном построении гамильтонова формализма (следуя П. Дираку) исходят из уравнений (10) и постулируют свойства скобок Пуассона, определенных для функций, заданных на некотором многообразии M с координатами $\boldsymbol{x} = (x^1, \ldots, x^n)$. Требуется, чтобы эти скобки удовлетворяли следующим условиям:

1°. $\{\lambda F_1 + \mu F_2, G\} = \lambda\{F_1, G\} + \mu\{F_2, G\}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ — билинейность,

2°. $\{F, G\} = -\{G, F\}$ — кососимметричность,

3°. $\{F_1 F_2, G\} = F_1\{F_2, G\} + F_2\{F_1, G\}$ — правило Лейбница,

4°. $\{\{H, F\}, G\} + \{\{G, H\}, F\} + \{\{F, G\}, H\} = 0$ — тождество Якоби.

Скобку Пуассона $\{\cdot, \cdot\}$ мы будем называть также *пуассоновой структурой*, а многообразие M, на котором она задана — *пуассоновым.*

В приведенном определении мы отказались от свойства невырожденности, (т. е. $\forall F(\boldsymbol{x}) \neq \mathrm{const}$, $\exists G \neq \mathrm{const}$, $\{F, G\} \neq 0$), которое заложено в выражении (9), что позволяет, например, ввести скобку Пуассона для нечетномерных систем. При этом пуассонова структура может оказаться вырожденной и обладать *функциями Казимира* $F_k(\boldsymbol{x})$, коммутирующими со всеми переменными x_i и, стало быть, с любыми функциями — $\forall G(\boldsymbol{x})$, $\{F_k, G\} = 0$ (в литературе для функций Казимира употребляют также термины: аннуляторы, центральные функции, отмеченные функции и просто казимиры).

Свойства $1^\circ - 4^\circ$ позволяют записать скобку Пуассона функций F и G в явном виде

$$\{F, G\} = \sum_{i,j} \{x^i, x^j\} \frac{\partial F}{\partial x^i} \frac{\partial G}{\partial x^j}. \tag{12}$$

Базисные скобки $J^{ij} = \{x^i, x^j\}$ называются структурными функциями пуассонова многообразия M относительно данной, вообще говоря, локальной системы координат $\boldsymbol{x}$ [25]. Они образуют структурную матрицу (тензор) $J = \|J^{ij}\|$ размером $n \times n$. Если

$$J = \begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{pmatrix}, \qquad E = \|\delta_i^j\|, \tag{13}$$

то получаем каноническую скобку Пуассона, определяемую формулой (9).

Структурная матрица $J^{ij}(\boldsymbol{x})$ обладает следующими свойствами:

а) кососимметричность:

$$J^{ij}(\boldsymbol{x}) = -J^{ji}(\boldsymbol{x}), \tag{14}$$

б) тождество Якоби:

$$\sum_{l=1}^{n} \left(J^{il} \frac{\partial J^{jk}}{\partial x^l} + J^{kl} \frac{\partial J^{ij}}{\partial x^l} + J^{jl} \frac{\partial J^{ki}}{\partial x^l} \right) = 0. \tag{15}$$

Легко видеть, что всякая постоянная кососимметрическая матрица J^{ij} задает пуассонову структуру.

Инвариантный объект, определяемый тензором J^{ij}, является бивектором (бивекторным полем):

$$J(dF, dG) = \sum J^{ij}(\boldsymbol{x}) \frac{\partial F}{\partial x^i} \wedge \frac{\partial G}{\partial x^j},$$

где dF — ковектор с компонентами $\dfrac{\partial F}{\partial x^i}$.

Векторное поле $X_H = \{\boldsymbol{x}, H\}$ определяет на многообразии гамильтонову систему, которая в компонентной записи имеет вид

$$\dot{x}^i = (X_H)^i = \{x^i, H\} = \sum_j J^{ij}(x) \frac{\partial H}{\partial x^j}. \qquad (16)$$

Функция $H = H(x)$ при этом называется гамильтонианом (функцией Гамильтона).

Коммутатор векторных полей и скобки Пуассона связаны соотношением

$$[X_H, X_F] = -X_{\{H,F\}}.$$

Несложно также проверить, что любое гамильтоново поле порождает преобразование, сохраняющее скобки Пуассона.

Определение 1. Функция $F(x)$ называется *первым интегралом системы, если ее производная вдоль системы равна нулю* $\dot{F} = X_H(F) = 0$ $([X_H, X_F] = 0)$, *это условие эквивалентно тому, что* $\{F, H\} = 0$.

2. Невырожденная скобка. Симплектическая структура. Если скобка Пуассона является невырожденной, то ей однозначно сопоставляется замкнутая невырожденная 2-форма. Действительно, для любой гладкой функции F операция $X_F = \{F, \cdot\}$ является дифференцированием и задает некоторый касательный вектор на M. Все касательные векторы можно представить в таком виде. Определим 2-форму ω^2 по формуле

$$\omega^2(X_G, X_F) = \{F, G\}.$$

Из аксиом $1° - 4°$ следует, что она билинейна, кососимметрична, невырождена и замкнута. Эта 2-форма называется *симплектической структурой*, а многообразие M — *симплектическим многообразием*. В общем случае форма ω^2 имеет вид $\sum \omega_{ij} dx_i \wedge dx_j$, где $\|\omega_{ij}\| = \|J^{ij}\|^{-1}$, в каноническом случае (13) $\omega^2 = \sum dp_j \wedge dq_i$. К такому виду по теореме Дарбу [3] приводится локально всякая симплектическая структура.

Обратно, невырожденная форма ω^2 позволяет установить изоморфизм касательного T_xM и кокасательного пространств: вектору $\xi \in T_xM$ ставится в соответствие 1-форма $\omega^1_\xi(\eta) = \omega^2(\eta, \xi) \in T^*_xM$, где $\eta \in T_xM$. Пусть $I\colon T^*_xM \to T_xM$ — обратное отображение. Легко проверить, что скобка Пуассона двух функций F, G, заданная формулой $\{F, G\} = \omega^2(IdG, IdF)$ удовлетворяет условиям $1° - 4°$ и условию невырожденности.

3. Симплектическое слоение. Обобщение теоремы Дарбу. Если скобка Пуассона является вырожденной, то пуассоново многообразие (фазовое пространство) расслаивается на симплектические слои (листы), ограничение пуассоновой структуры на которые уже невырождено. Эти слои представляют собой общий уровень всех центральных функций и для них справедлива теорема Дарбу. Таким образом, на симплектическом слое мы вновь возвращаемся к ситуации стандартной канонической (симплектической) гамильтоновой механики. Однако, для приложений сведение к такой системе не всегда бывает необходимым, так как ведет к потере, например, алгебраичности дифференциальных уравнений и ограниченности применения геометрических методов исследования.

Рангом пуассоновой структуры в точке $\boldsymbol{x} \in M$ называется ранг структурного тензора в этой точке (очевидно, что он четен). Как правило, под рангом пуассоновой структуры понимают максимальный ранг, который она имеет в некоторой точке $\boldsymbol{x} \in M$. Для симплектических многообразий ранг пуассоновой структуры в любой точке постоянен и максимален.

Сформулируем общую теорему Дарбу для произвольных (возможно вырожденных) пуассоновых многообразий. Доказательство этой теоремы восходит к Ли [38] и Дарбу, с более формальными рассуждениями можно ознакомиться по работе [45] (см. также [25]).

Теорема. *Пусть* $(M, \{\cdot,\cdot\})$ — *пуассоново многообразие размерности* n *и в точке* $x \in M$ *ранг скобки* $\{\cdot,\cdot\}$ *локально постоянен и равен* $2r$. *Тогда существует локальная система* (*канонических*) *координат* $x_1, \dots, x_r, y_1, \dots, y_r, z_1, \dots, z_{n-2r}$, *в которой скобки Пуассона имеют вид*

$$\{x_i, x_j\} = \{y_i, y_j\} = \{x_i, z_k\} = \{y_i, z_k\} = \{z_k, z_l\} = 0,$$
$$\{x_i, y_j\} = \delta_{ij},$$

где $1 \leqslant i, j \leqslant r, \quad 1 \leqslant k, l \leqslant n - 2r.$

В указанных координатах симплектический лист задается уравнениями $z_i = c_i$, $(c_i = \mathrm{const})$, а симплектическая структура на нем задается формой $\omega = dx_i \wedge dy_i$. Если в любой окрестности точки x ранг не является локально постоянным, то теорема Дарбу уже не является справедливой. Одно из обобщений теоремы Дарбу для произвольной точки получено А. Вейнстейном [45]. Нормальные формы пуассоновых структур вблизи такой особой точки $x \in M$ обсуждаются в [2, 45].

4. Пуассоновы подмногообразия. Ограничение скобки.

Определение 2. Пусть $(M, \{\cdot,\cdot\}_M)$, $(N, \{\cdot,\cdot\}_N)$ — пуассоновы многообразия. Отображение $f\colon M \to N$ называется *пуассоновым*, если

$$\{F(f(x)), G(f(x))\}_M = \{F, G\}_N(f(x)) \tag{17}$$

для любых функций $F, G\colon N \to \mathbb{R}$ (т. е. отображение сохраняет скобку Пуассона).

Пусть $N \subset M$ — подмногообразие в пуассоновом многообразии. На N можно определить скобку $\{\cdot,\cdot\}_N$ функций $F, G\colon N \to \mathbb{R}$ по формуле

$$\{F, G\}_N = \{\widetilde{F}, \widetilde{G}\}\Big|_N, \tag{18}$$

где в правой части стоит ограничение скобки Пуассона двух функций $\widetilde{F}$, $\widetilde{G}$, являющихся гладкими продолжениями функций F, G на объемлющее многообразие M.

Определение 3. Подмногообразие N называется *пуассоновым*, если скобка $\{\cdot,\cdot\}_N$ не зависит от способа продолжения функций F и G.

При этом отображение вложения $r\colon N \to M$ является пуассоновым.

Определение 4. Пуассонова структура $\{\cdot,\cdot\}_N$ на многообразии N, в общем случае содержащая константы, фиксирующие это подмногообразие в M, называется *ограничением* на N скобки $\{\cdot,\cdot\}$.

Пуассоновость подмногообразия N гарантирует для $\{\cdot,\cdot\}_N$ выполнение тождества Якоби. В случае, если скобка $\{\cdot,\cdot\}_N$ — невырождена, соответствующее подмногообразие называется невырожденным (симплектическим).

Несложно проверить, что поверхности уровня функций Казимира задают пуассоново подмногообразие, которое является невырожденным, если рассмотреть их общий регулярный уровень. Чтобы лучше понять устройство других пуассоновых подмногообразий, сформулируем простые утверждения, доказанные, например, в [25].

Предложение 1. *Если N — пуассоново подмногообразие, то для всякой функции $F\colon M \to \mathbb{R}$, векторное поле $X_F = \{\cdot, F\}|_N$ касается N.*

Предложение 2. *Если N задано в виде $N = \{x \in M, f_i(x) = 0\}$, то для всякой функции $F\colon M \to \mathbb{R}$ выполнено $\{f_i, F\}|_N = 0$ (в частности, для координатных функций $\{f_i, x_j\}|_N = 0$).*

С точки зрения динамики, функции Казимира представляют собой первые интегралы, существующие у гамильтоновой системы (16) при любых функциях Гамильтона H. В общем случае пуассоновы подмногообразия представляют собой систему *инвариантных соотношений* динамической системы (16), также не зависящую от выбора гамильтониана. Симметрии, соответствующие этим функциям, содержатся полностью в пуассоновой структуре.

Само обобщение классической гамильтоновой системы (8) на случай вырожденного структурного тензора, с динамической точки зрения эквивалентно рассмотрению систем, представление которых в каноническом виде не очевидно заранее, но возможно (локально —это следствие теоремы Дарбу) на общем уровне функций Казимира или существующих у данной системы инвариантных соотношений, определяющих невырожденное пуассоново подмногообразие.

5. Примеры неканонических скобок Пуассона. Системы с гироскопическими силами. Пусть на касательном расслоении $TM = (\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})$ задана лагранжева динамическая система с лагранжианом L, содержащим члены, линейные по скоростям

$$L = T + (f(\boldsymbol{q}), \dot{\boldsymbol{q}}) + V(\boldsymbol{q}), \tag{19}$$

$T(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})$ — положительно определенная квадратичная по $\dot{\boldsymbol{q}}$ форма кинетической энергии, $V(\boldsymbol{q})$ — потенциал. Линейные члены в (19) могут возникать либо при наличии в системе гироскопических сил типа силы Лоренца, действующей на заряд в магнитном поле, либо в процессе понижения порядка по Раусу в системах, содержащих циклические координаты [24].

Два-форма $\Gamma = \sum\limits_{i<j} \left(\dfrac{\partial f_j}{\partial q_i} - \dfrac{\partial f_i}{\partial q_j}\right) dq_i \wedge dq_j = \sum g_{ij} dq_i \wedge dq_j$ называется формой гироскопических сил. Она определена на конфигурационном пространстве $M = \{\boldsymbol{q}\}$ и является замкнутой. По лемме Пуанкаре, локально эта форма является точной, что может быть не выполнено глобально. В этом случае лагранжиан (19) не является глобально определенным на касательном расслоении (точнее, один-форма $\sum\limits_i f_i(q)\, dq_i$ в лагранжиане (19) не определена глобально). Если перейти с помощью преобразования Лежандра от лагранжева формализма к гамильтонову, то полученный таким образом гамильтониан также не будет

определен глобально на кокасательном расслоении (кроме случая, когда форма Γ точна $\Gamma = dA$). Чтобы сохранить однозначность гамильтониана, можно выполнить преобразование Лежандра без учета в (19) линейных по $\dot{\boldsymbol{q}}$ членов. Это приведет к гамильтоновой системе с глобально определенным гамильтонианом (который полезно иметь для топологических исследований в «целом» [24]), однако к симплектической структуре $\omega^2 = \sum dq_i \wedge dq_j$ добавится дополнительный (гироскопический) член $\Gamma = \sum g_{ij} dq_i \wedge dq_j$. В скобке Пуассона также появятся дополнительные слагаемые $\{q_i, q_i\} = 0$, $\{q_i, p_j\} = \delta_i^j$, $\{p_i, p_j\} = g_{ij}(q)$. Включение гироскопических членов в скобку Пуассона было предложено Сурьо [44]. В работе [24] изложенные соображения применены к уравнениям Кирхгофа, что позволило явно выделить глобальные эффекты (типа «монополя Дирака») при приведении по Раусу уравнений движения на сферу Пуассона.

6. Скобка Ли–Пуассона. Другой важный пример пуассоновой структуры связан с алгебрами Ли. Пусть c_{ij}^k — структурные константы алгебры $\mathfrak{G}$ в базисе $\{v_1, \ldots, v_n\}$. *Скобка Ли–Пуассона* ([38], т. 3, гл. 25, §115, формула (75)) пары функций F, H, заданных на некотором (другом) линейном пространстве V с координатами $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ и базисом $\{\omega^1, \ldots, \omega^n\}$ определяется формулой

$$\{F, H\} = \sum_{i,j=1}^{n} J_{ij}(\boldsymbol{x}) \frac{\partial F}{\partial x_i} \frac{\partial H}{\partial x_j}, \tag{20}$$

где $J_{ij}(\boldsymbol{x}) = \sum\limits_k c_{ij}^k x_k$ — линейный по x_k структурный тензор. Все необходимые тождества для структурного тензора можно получить из свойств структурных констант алгебры Ли:

1. $c_{ij}^k = -c_{ji}^k$,
2. $\sum\limits_m (c_{im}^l c_{jk}^m + c_{km}^l c_{ij}^m + c_{jm}^l c_{ki}^m) = 0$.

Более инвариантное описание структуры Ли–Пуассона делается следующим образом. Для любого векторного пространства V и гладкой функции $F\colon V \to \mathbb{R}$, дифференциал $dF(\boldsymbol{x})$ в любой точке $\boldsymbol{x} \in V$ является элементом двойственного векторного пространства V^*, состоящего из линейных функционалов на V. По определению

$$\langle dF(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{y}\rangle = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{F(\boldsymbol{x}+\varepsilon \boldsymbol{y}) - F(\boldsymbol{x})}{\varepsilon},$$

для любого $\boldsymbol{y} \in V$, а операция $\langle\cdot,\cdot\rangle$ есть естественное спаривание пространства V и двойственного к нему пространства V^*. Учитывая это, можно отождествить линейное пространство V, участвующее в исходной конструкции скобок Ли–Пуассона с двойственным пространством $\mathfrak{g}^*$ к алгебре Ли $\mathfrak{g}$, причем $\{\omega^1, \dots, \omega^n\}$ — двойственный базис к $\{v_1, \dots, v_n\}$. Дифференциал $dF(\boldsymbol{x})$ любой функции $F\colon \mathfrak{g}^* \to \mathbb{R}$ (определенной на дуальном пространстве) является элементом пространства $(\mathfrak{g}^*)^* \approx \mathfrak{g}$. Скобка Ли–Пуассона в инвариантной форме имеет вид

$$\{F, H\}(\boldsymbol{x}) = \langle \boldsymbol{x}, [dF(\boldsymbol{x}), dH(\boldsymbol{x})]\rangle, \qquad \boldsymbol{x} \in \mathfrak{g}^*, \tag{21}$$

где $[\cdot,\cdot]$ — скобка Ли на самой алгебре $\mathfrak{g}$.

Симплектическое слоение для скобки Ли–Пуассона на двойственном пространстве $\mathfrak{g}^*$ к алгебре Ли имеет особенно замечательную интерпретацию в терминах представления, двойственного к присоединенному представлению группы Ли $\mathfrak{g}$ на алгебре Ли $\mathfrak{g}$ (см. [2, 25]).

Пусть $\mathfrak{G}$ — группа Ли с алгеброй Ли $\mathfrak{g}$. По определению коприсоединенным действием элемента группы $l \in \mathfrak{G}$ называется линейное отображение $\mathrm{Ad}_l^*\colon \mathfrak{g}^* \to \mathfrak{g}^*$ двойственного пространства, удовлетворяющее условию

$$\langle \mathrm{Ad}_l^*\, \boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{w}\rangle = \langle \boldsymbol{\omega}, \mathrm{Ad}_{l^{-1}}\, \boldsymbol{w}\rangle \tag{22}$$

для всех $\boldsymbol{\omega} \in \mathfrak{g}^*, \boldsymbol{w} \in \mathfrak{g}$, а Ad_l — присоединенное действие элемента l на $\mathfrak{g}$.

Если отождествить касательное пространство $T\mathfrak{g}^*|_{\boldsymbol{\omega}}$, $\boldsymbol{\omega} \in \mathfrak{g}^*$ с самим пространством $\mathfrak{g}^*$ (аналогично сделать и для $\mathfrak{g}$,) то можно получить инфинитезимальные образующие коприсоединенного действия дифференцированием равенства (22)

$$\langle \mathrm{ad}_{\boldsymbol{v}}^*\, \boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{w}\rangle = -\langle \boldsymbol{\omega}, \mathrm{ad}_{\boldsymbol{v}}\, \boldsymbol{w}\rangle = \langle \boldsymbol{\omega}, [\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}]\rangle,$$

где $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in \mathfrak{g}$, $\boldsymbol{\omega} \in \mathfrak{g}^*$. Для присоединенного представления $\mathrm{ad}_{\boldsymbol{w}}\, \boldsymbol{v} = [\boldsymbol{w}, \boldsymbol{v}]$.

Коприсоединенное действие и скобка Ли–Пуассона связаны следующим замечательным утверждением, доказательство которого можно найти в [2, 25, 28].

Теорема 1. *Пусть $\mathfrak{G}$ — связная группа Ли с коприсоединенным представлением $\mathrm{Ad}^*_{\mathfrak{G}}$ на $\mathfrak{g}^*$. Тогда орбиты представления $\mathrm{Ad}^*_{\mathfrak{G}}$ в точности совпадают со слоями симплектического слоения, индуцированного скобкой Ли–Пуассона на $\mathfrak{g}^*$.*

В частности, орбиты коприсоединенного представления группы $\mathfrak{G}$ являются четномерными подмногообразиями в $\mathfrak{g}^*$. Кроме того, для каждого элемента $g \in \mathfrak{G}$ коприсоединенное отображение $\mathrm{Ad}^*\, g$ является пуассоновым (сохраняет скобку Пуассона) и оставляет на месте слои этого слоения. В случае, если размерность орбиты коприсоединенного представления не является максимальной, то она называется сингулярной. Можно показать, что такие орбиты являются пуассоновыми многообразиями — сингулярными симплектическими листами.

Замечание 1. При редукции на орбиту коприсоединенного представления возникает невырожденная скобка, порождающая соответствующую замкнутую невырожденную 2-форму. Эта форма была (независимо от С. Ли) открыта Березиным и использовалась Кирилловым, Костантом и Сурьо в связи с теорией представлений и геометрическим квантованием. Термин «скобка Ли–Пуассона» введен А. Вейнстейном (который ввел также термин «функция Казимира», вообще говоря, исторически мало оправданный. Казимир (H. B. G. Casimir), выполнявший диссертацию под руководством П. Эренфеста (P. Ehrenfest), использовал это понятие при квантовании уравнений Эйлера свободного волчка [34]. С. Ли называл эти функции отмеченными (ausgezeichnete Funktionen) [38].

Уравнения Гамильтона для структуры Ли–Пуассона

$$\dot{x}_i = \{x_i, H\} \tag{23}$$

в покомпонентной записи имеют вид

$$\dot{x}_i = \sum_{k,j} c^k_{ij} x_k \frac{\partial H}{\partial x^j}. \tag{24}$$

Уравнения (24) можно записать в более инвариантном виде

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \mathrm{ad}^*_{dH}(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} \in \mathfrak{g}^*, \tag{25}$$

где ad^*_ξ, $(\xi \in \mathfrak{g})$ — оператор коприсоединенного представления алгебры Ли $\mathfrak{g}$: $\mathrm{ad}^*_\xi \colon \mathfrak{g}^* \to \mathfrak{g}^*$.

7. Приложения к механике. Оказывается, что ряд задач механики, например, уравнения, изучаемые в классической динамике твердого тела, динамике вихрей, могут быть записаны в виде уравнений

Гамильтона на пуассоновом многообразии со скобкой Ли–Пуассона (20). Отличием этих уравнений от канонической формы записи, как правило, является их простота и алгебраичность.

Остановимся более подробно на скобках Пуассона, возникающих в динамике твердого тела.

При выборе переменных для описания движения твердого тела вокруг неподвижной точки, в которых уравнения движения имеют наиболее простой вид, еще Л. Эйлер (1758 г.) предложил использовать проекции кинетического момента твердого тела на оси, связанной с телом системы координат. Уравнения Эйлера, описывающие вращение твердого тела по инерции ($\boldsymbol{I}$ — тензор инерции)

$$\begin{gathered}\dot{\boldsymbol{M}} = \boldsymbol{M} \times \boldsymbol{A}\boldsymbol{M},\\ \boldsymbol{A} = \boldsymbol{I}^{-1} = \operatorname{diag}(a_1, a_2, a_3), \quad \boldsymbol{M} = (M_1,\, M_2,\, M_3),\end{gathered} \tag{26}$$

могут быть записаны как уравнения Гамильтона со скобкой Ли–Пуассона, порожденной структурными константами алгебры $so(3)$:

$$\{M_i, M_j\} = -\varepsilon_{ijk} M_k \tag{27}$$

и функцией Гамильтона $H = (\boldsymbol{A}\boldsymbol{M}, \boldsymbol{M})/2$.

Скобка (27) является вырожденной и обладает функцией Казимира — интегралом момента:

$$M^2 = M_1^2 + M_2^2 + M_3^2.$$

Ненулевой уровень этой функции задает симплектический лист — двумерную сферу, при редукции на него скобка (27) становится невырожденной — ее ранг равен двум (центр сферы является сингулярной нульмерной орбитой). Координатами Дарбу в этом случае является система цилиндрических координат [25].

Задание гамильтониана H в виде

$$H = \frac{1}{2}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{M}, \boldsymbol{M}) = \frac{1}{2}(\boldsymbol{I}\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega}),$$

определяет левоинвариантную риманову метрику на группе Ли $SO(3)$. Операторы $\boldsymbol{A}\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}^*$, и обратный ему $\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{I}\colon \mathfrak{g}^* \to \mathfrak{g}$ являются положительно определенными и задают переход от угловых скоростей $\boldsymbol{\omega}$ к компонентам кинетического момента $\boldsymbol{M}$. Уравнения (25) представляют собой уравнения геодезических на группе Ли, снабженной левоинвариантной римановой метрикой. Связь между уравнениями геодезических и уравнениями Эйлера динамики твердого тела обсуждается в [3], где также дается определение угловой скорости (кинетического момента) в теле и пространстве, как элементов алгебр Ли, полученных перенесением из касательного пространства в некоторой точке группы $\mathfrak{G}$ при помощи, соответственно, левых и правых сдвигов. Левоинвариантность формы кинетической энергии твердого тела при этом обусловлена тем, что она определяется вектором угловой скорости в теле и не зависит от расположения тела в пространстве.

Развивая идею Эйлера, С. Пуассон (1810 г.) вывел более общие уравнения, описывающие движение тяжелого твердого тела в однородном поле тяжести вокруг неподвижной точки, используя, наряду с компонентами вектора кинетического момента, проекции единичного орта вертикали $\boldsymbol{\gamma} = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ на те же оси.

Оказывается, что уравнения Эйлера–Пуассона (а также уравнения Кирхгофа, описывающие движение однородного твердого тела в идеальной безвихревой жидкости по инерции) в переменных $(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{\gamma})$ могут быть представлены как гамильтоновы уравнения со скобкой Ли–Пуассона, определяемой коммутационными соотношениями:

$$\{M_i, M_j\} = -\varepsilon_{ijk} M_k, \quad \{M_i, \gamma_j\} = -\varepsilon_{ijk}\gamma_k, \quad \{\gamma_i, \gamma_j\} = 0 \tag{28}$$

и гамильтонианом $H = \frac{1}{2}(\boldsymbol{AM}, \boldsymbol{M}) + P(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{\gamma})$, где $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{I}^{-1}$, $\boldsymbol{I}$ — тензор инерции, P — вес тела, $\boldsymbol{r}$ — радиус-вектор центра масс в системе, связанной с телом.

Эти коммутационные соотношения отвечают алгебре $e(3)$, являющейся полупрямой суммой алгебры вращений $so(3)$ и трехмерной алгебры трансляций $\mathbb{R}^3$. Эта алгебра не является полупростой и обладает абелевым идеалом, определяемым переменными γ_i. Переменные типа $(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{\gamma})$ в механике называют иногда квазикоординатами.

Движения тела с полостями, имеющими жидкое вихревое наполнение, можно также описать как гамильтонову систему на алгебре $so(4)$, являющейся прямой суммой двух алгебр вращений: $so(4) = so(3) \oplus so(3)$. При этом, один экземпляр $so(3)$ отвечает кинетическому моменту тела, а второй — вектору завихренности (см. [8, 30]). Уравнения движения в этом случае были получены А. Пуанкаре [42], который почти в современной форме отметил их связь с алгеброй $so(4)$.

Другие примеры гамильтоновых уравнений, некоторые из которых имеют физическое обоснование, приведены в книгах [8, 30].

Замечание 2. Оказывается, что в виде (25) могут быть также записаны гидродинамические уравнения Эйлера идеальной (несжимаемой и невязкой) жидкости. В этом случае в качестве фазового пространства выступает группа диффеоморфизмов области течения, сохраняющих элемент объема [1, 3].

Замечание 3. В гидродинамике канонические координаты на симплектическом листе называются переменными Клебша [39]. Если их введение локально возможно по теореме Дарбу, то глобальное определение сделать не так просто, а иногда и невозможно. Это обусловлено топологией симплектического листа.

В последнее время кроме линейных обсуждаются также квадратичные скобки Пуассона. Содержательный пример существования квадратичных коммутационных соотношений, возникший из анализа уравнений Янга–Бакстера, был указан Е. К. Склyниным. Он рассмотрел алгебру скобок Пуассона, порожденную следующими соотношениями между образующими $S_0, S_\alpha, S_\beta, S_\gamma$ [26]:

$$\hookrightarrow \{S_\alpha, S_0\} = 2J_{\beta\gamma}S_\beta S_\gamma, \qquad \hookrightarrow \{S_\alpha, S_\beta\} = -2S_0 S_\gamma, \tag{29}$$

где

$$\hookrightarrow J_{\alpha\beta} = J_\alpha - J_\beta, \qquad J_\alpha, J_\beta, J_\gamma \in \mathbb{R}.$$

(здесь и далее $\hookrightarrow$ обозначает циклические перестановки индексов.)

Скобка, задаваемая соотношениями (29), является вырожденной. Она обладает функциями Казимира

$$F_1 = S_\alpha^2 + S_\beta^2 + S_\gamma^2, \qquad F_2 = S_0^2 + J_\alpha S_\alpha^2 + J_\beta S_\beta^2 + J_\gamma S_\gamma^2. \tag{30}$$

Более сложный пример квадратичной алгебры скобок Пуассона был указан в работе [11]. При этом между образующими A, B, C, D имеются следующие коммутационные соотношения

$$\begin{array}{lll} \{A, B\} = -AB, & \{B, C\} = 0, & \{A, C\} = -AC, \\ \{B, D\} = -BD, & \{A, D\} = -2BC, & \{C, D\} = -CD. \end{array} \tag{31}$$

Скобка (31) также является вырожденной. Ее центральными функциями являются

$$F_1 = AD - BC, \qquad F_2 = B/C. \tag{32}$$

Квадратичные скобки Пуассона возникают также в многомерных интегрируемых цепочках Тоды и Вольтерра и рассмотрены в книге [10].

8. Процедуры ограничения и скобка Дирака. В п. 1 была рассмотрена возможность ограничения пуассоновой структуры (M, J) на некоторое подмногообразие $N_c \subset M$ заданной, например, совместным уровнем функций $f_i(\boldsymbol{x}) = c_i$, $c_i = \mathrm{const}$, $i = 1, \dots, s$. Оказалось, что для этого оно должно быть пуассоновым, то есть для любой функции $F(\boldsymbol{x})$ должно быть выполнено

$$\left\{f_i(\boldsymbol{x}), F(\boldsymbol{x})\right\}\Big|_{N_c} = 0, \quad i = 1, \dots, s. \tag{33}$$

Геометрический смысл условия (33) состоит в том, что все гамильтоновы векторные поля касаются N_c и поэтому корректно на него ограничиваются.

Рассмотрим в некотором смысле противоположную ситуацию, когда для функций f_i, определяющих подмногообразие N_c, матрица $\|f_{ij}\| = \big\|\{f_i, f_j\}\big\|$ невырождена

$$\det \|f_{ij}\| \neq 0. \tag{34}$$

Если многообразие M является симплектическим, то условие (34), выполненное на всем N_c является необходимым и достаточным условием его симплектичности. Замкнутая форма, задающая на нем симплектическую структуру, получается из исходной ω (заданной на всем M при помощи обычной операции ограничения $\omega\big|_{N_c}$ [2, 28]. Приведенная далее процедура может рассматриваться как обобщение операции ограничения симплектической формы. При этом функции f_i, задающие подмногообразия, в смысле условия (34) максимально некоммутируют.

В этом случае произвольное гамильтоново векторное поле на M допускает единственную проекцию на касательное пространство к подмногообразию N_c. Возникающее при этом векторное поле также является гамильтоновым относительно новой пуассоновой структуры — $\dot{x}_i = \{x_i, H\}_D$, определяемой по формуле

$$\{g, h\}_D = \{g, h\} + \sum_{ij} \{g, f_i\} c_{ij} \{h, f_j\}, \tag{35}$$

где $\|c_{ij}\| = \|\{f_i, f_j\}\|^{-1}$.

Скобка (35) называется *скобкой Дирака* [13, 36] и может рассматриваться во всем фазовом пространстве M (в сильном смысле по Дираку), так как замечательным образом удовлетворяет на нем тождеству Якоби (а не только на N_c). Она корректно определена также при условии вырожденности первоначальной пуассоновой структуры на M. Функции $f_i(\boldsymbol{x})$ являются центральными для скобки (35). В вырожденном случае они пополняют уже существующий набор центральных функций. В структуре Дирака эти функции находятся в инволюции $\{f_i, f_j\}_D = 0$.

Пусть $L(f)$ — линейная оболочка векторных полей $X_{f_i} = \{\boldsymbol{x}, f_i\}$ через $L(f)$, а HM — пространство гамильтоновых полей. Условие (34) означает, что все поля X_{f_i} трансверсальны к касательному расслоению TN_c и независимы. Таким образом, определено расслоение $HM = TN_c \oplus L(f)$, позволяющее проектировать векторное поле X_H на TN_c вдоль $L(f)$. В симплектическом случае поля X_H и $X_H - X_H^D$, где $X_H^D = \{\boldsymbol{x}, H\}_D$ ортогональны относительно симплектической формы: $\omega(X_H,\, X_H - X_H^D) = 0$, т. е. X_H^D представляет собой кософртогональную проекцию поля X_H на TN_c. Гамильтоново поле X_H совпадает с X_H^D на N_c тогда и только тогда, когда X_H касается подмногообразия. В этом случае функции f_i, определяющие N_c, задают *систему инвариантных соотношений* гамильтонова потока X_H.

Замечание 4. Поле X_H^D может быть также получено без явного вычисления скобки (35), методом неопределенных множителей Лагранжа [13]. Для этого рассмотрим гамильтониан

$$H^* = H(x) + \sum_i \lambda_i (f_i - c_i), \tag{36}$$

совпадающий с $H(x)$ на N_c. Условия касания поля X_{H^*} подмногообразия N_c принимают вид

$$\{f_i, H\} + \sum_k \lambda_k \{f_i, f_k\} = 0, \quad i = 1, \ldots, s. \tag{37}$$

В силу (34) система (37) допускает единственное решение относительно $\lambda_i(x)$.

Несложно проверить также, что поля X_{H^*} X_H^D совпадают на N_c.

Замечание 5. Метод неопределенных множителей, указанный в предыдущем замечании, позволяет конструктивно получить систему инвариантных соотношений в динамических проблемах. Для этого необходимо задать первоначальную форму одного из предполагаемых инвариантных состояний с неопределенными коэффициентами, а затем проделать несколько шагов (36), (37) до тех пор, пока система инвариантных соотношений не будет однозначно разрешима относительно неопределенных коэффициентов и множителей λ_I. Такой последовательный метод, не учитывающий, однако, гамильтоновой формы уравнений движения, был, по существу, использован классиками (Чаплыгин, Стеклов, Ляпунов) при поиске инвариантных соотношений и частных решений в динамике твердого тела [5].

9. Редукция Дирака. Так как для поля X_H^D ранг пуассоновой структуры (35) упал на $\frac{s}{2}$ единиц, то будем говорить, что произведена *редукция* первоначальной гамильтоновой системы X_H. С алгебраической точки зрения, редуцированная структура, возможно, приобретает дополнительные дробно-рациональные слагаемые, определяемые формулой (35).

В курсах гамильтоновой механики обычно рассматривают редукцию гамильтоновой системы, обладающей дополнительными первыми интегралами. Если эти интегралы линейны по импульсам, то процесс редукции сводится к исключению циклической координаты и восходит к Э. Раусу. Соответствующие интегралы носят название циклических или нетеровских. Их существование, как правило, связано с явными симметриями динамической системы. Алгебраический аналог редукции Рауса, связанный с понижением ранга пуассоновой структуры изложен в [10]. Для нелинейных по импульсам интегралов (соответствующие симметрии называются «скрытыми») процесс понижения порядка обычно конструктивно не выполним.

Метод Дирака и соответствующая редукция относятся к динамическим системам, обладающими инвариантными соотношениями — как правило, нелинейными. Они могут изначально существовать у заданной гамильтоновой системы, а также получаться в результате выполнения некоторых предельных переходов.

Рассмотрим процедуру редукции Дирака в более общей форме.

Пусть $\det\|f_{ij}\| = 0$. Тогда $HM \neq TN_c \oplus L(f)$, то есть касательное пространство к N_c и поля X_{f_i} не порождают базис в пространстве векторных полей и $L(f) \cap TN_c \neq \varnothing$, т. е. часть векторных полей касается N_c.

Подходящим выбором функций $f_i(x)$ в каждой точке N_c матрица $\|f_{ij}\|$ может быть приведена к виду

$$\|f_{ij}\| = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} l & 2k \end{array} \\ \begin{array}{c} l \\ 2k \end{array} & \left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 0 & * \end{array}\right) \end{array}. \tag{38}$$

Допустим, что ранг $\|f_{ij}\|$, $i,j = l+1,\dots,l+2k$ равен $2k$. Тогда возможно корректно определить проекцию гамильтонова поля X_H на подмногообразие $N_c^* = \{\boldsymbol{x}\colon f_i(\boldsymbol{x} = c_i,\ i = l+1,\dots,l+2k\}$. При этом $HM = L^*(f) \oplus TN_c^*$, где $L^*(f)$ — линейная оболочка полей X_{f_i} $i = l+1,\dots,l+2k$ на N_c^*. Полученное в результате проекции векторное поле X_H^*, являющееся гамильтоновым относительно скобки (35) на N_c^*, имеет инволютивный набор интегралов движения $F_i(\boldsymbol{x}) = f_i(\boldsymbol{x})\Big|_{N_c^*}$ $i = 1,\dots,l$. С использованием этого метода возможна редукция по симметриям (редукция Рауса), описанная в [10].

Описанная общая конструкция для вырожденной матрицы $\|f_{ij}\|$ была также известна Дираку [36]. Игнорируя традиционный математический формализм (например, не используя теорему Фробениуса), он доказал интегрируемость полей X_{f_i} $i = 1,\dots,l$ на N_c^*. Функции $f_I(\boldsymbol{x})$, $i = 1,\dots,l$ Дирак называл величинами первого рода, а $f_i(\boldsymbol{x})$ $i = l+1,\dots,l+2k$ — величинами второго рода, придавая им различный физический смысл.

Замечание 6. Приведенная схема редукции может быть использована в теории некоммутативного интегрирования. Предположим, что гамильтонова система на симплектическом многообразии (M^{2n}, ω) допускает инвариантное подмногообразие, задаваемое $n+k$ функциями $N_c = \{x \mid f_i(x) = c_i,$ $i = 1, \dots, n+k\}$ $\{f_i(x), H\}\big|_{N_c} = 0$, такими, что $\operatorname{rank}\|\{f_i, f_j\}\| = 2k$. Разбивая функции на два соответствующих класса и ограничивая по Дираку систему на $2n-2k$-мерное симплектическое многобразие N_c^*, получим гамильтонову систему, обладающую $n-k$ инволютивными первыми интегралами. Она уже является интегрируемой по Лиувиллю в обычном смысле, а траектории являются квазипериодическими обмотками $n-k$-мерных торов.

Замечание 7. В общем случае для гамильтоновой системы на M^n, обладающей инволютивным набором интегралов

$$\{f_i(x), H\} = 0, \quad i = 1, \dots, s,$$

ограничение поля X_H на поверхность уровня этих интегралов N_c определяет векторное поле, не являющееся гамильтоновым по отношению какой-либо пуассоновой структуры на N_c (в частности, относительно структуры Дирака). Примером может служить невырожденная вполне интегрируемая гамильтонова система в шестимерном фазовом пространстве. Ее поток на трехмерном инвариантном многобразии не является гамильтоновым относительно любой пуассоновой структуры на нем.

10. Трансверсальная структура и сингулярные орбиты. Согласно обобщению теоремы Дарбу [45] пуассоново многообразие вблизи любой точки $x_0 \in M$ допускает разложение $M \approx S \times N$ — на симплектический лист S и трансверсальное к нему дополнение N, которое задается как многообразие уровня функций $f_i(\boldsymbol{x}) = c_i$ с невырожденной матрицей $\|\{f_i, f_j\}\|$. Оба многообразия S и N пуассоновы; на S пуассонова (симплектическая) структура получается обычным ограничением исходной скобки, а на N — может быть получена по формуле Дирака (35). Говорят, что на N определена *трансверсальная* пуассонова структура [2, 45].

Вблизи регулярной точки $x_0 \in M$ через x_0 проходит симплектический лист S максимальной размерности, а скобка Пуассона на N тождественно равна нулю. Нетривиальная пуассонова структура на N возникает вблизи сингулярной точки $x_0 \in M$, через которую проходит симплектический лист меньшей размерности. В этом случае точка x_0 является также особой точкой пуассоновой структуры на N, где ее ранг падает до нуля.

Трансверсальная пуассонова структура использована в работе [41] для изучения согласованной скобки в цепочках Тоды на полупростых алгебрах B_n. Возникающая в этом случае скобка, полученная из квадратичной, оказалась дробно-рациональной.

Вопрос о возможности приведения трансверсальной пуассоновой структуры к наиболее простому виду вблизи особой точки (в частности линеаризация) рассматривался в работах [46, 35]. В [46] приведены примеры нелинеаризуемых пуассоновых структур вблизи сингулярных орбит алгебры Ли. В [41] указаны условия на алгебру Ли и ее сингулярные орбиты, при которых трансверсальная пуассонова структура может быть приведена к неоднородному квадратичному виду.

11. Вырожденные лагранжианы и гамильтонов формализм со связями. Введение рассмотренных дифференциально-геометрических конструкций в динамику может быть мотивировано проблемой перехода от лагранжева формализма к гамильтонову в случае вырожденности лагранжиана по скоростям. Именно, из этой постановки исходил П. Дирак, развивая обобщенную гамильтонову механику для целей последующего квантования [13, 44].

Пусть задана лагранжева система

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \quad i = 1, \dots, n, \tag{39}$$

с вырожденной по скоростям функцией Лагранжа, т. е.

$$\det \left\| \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j} \right\| = 0. \tag{40}$$

В этом случае уравнения (39) не могут быть разрешены относительно старших производных, а стало быть, вопрос о нахождении решений при произвольных начальных условиях не является вполне корректным. Оказывается, что более естественным является рассмотрение системы (39) в канонических переменных. Рецепт их введения, обобщающий преобразование Лежандра в невырожденном случае, также был предложен Дираком.

Если обычным образом ввести канонические импульсы

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}, \quad i = 1, \dots, n, \tag{41}$$

то вследствие (40) при обращении (41) можно выразить лишь часть скоростей

$$\dot{q}_i = v_i(p, q, p_1, \dots, q_s), \quad i = s + 1, \dots, n. \tag{42}$$

Оставшиеся уравнения задают соотношения между p, q, определяющие подмногообразие

$$N = \{p, q \colon \varphi_j(p,\, q) = 0, \quad j = 1,\, \dots,\, s, \} \tag{43}$$

(первичные связи по Дираку).

Функция Гамильтона

$$H = p\dot{q} - L \tag{44}$$

при учете (42) и (43) зависит только от координат и импульсов [44]. С учетом того, что вариации δp и δq подчиняются условию (43) и пользуясь вариационным принципом Гамильтона, уравнения движения можно представить в виде

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} - \sum_j \lambda_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial q_i} \quad \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} + \sum_j \lambda_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial p_i}, \qquad (45)$$
$$i = 1, \ldots, n, \quad j = 1, \ldots, s.$$

Неопределенные множители λ_i находятся из условия сохранения связей (43) потоком системы (45):

$$\dot{\varphi}_j = \{\varphi_j, H\} + \sum_j \lambda_j \{\varphi_j, \varphi_j\} = 0, \quad j = 1, \ldots, s. \qquad (46)$$

Правые части (45) могут быть более просто записаны с использованием скобки Дирака

$$\dot{p}_i = \{p_i, H\}_D, \quad \dot{q}_i = \{q_i, H\}. \qquad (47)$$

В зависимости от заданного лагранжиана L при решении уравнений (46) могут встретиться различные ситуации.

1) Система (45), (46) несовместна в любой точке фазового пространства (p, q). В этом случае уравнения (45) не допускают решения при произвольных начальных условиях. В качестве примера можно рассмотреть систему с лагранжианом $L = q$.

2) Система (46) имеет единственное решение $(\det \|\{\varphi_i, \varphi_j\}\| \neq 0)$ (достаточно единственности на подмногообразии N). При этом подмногообразия N является пуассоновым относительно скобки Дирака, а система (45) гамильтонова $\dot{x} = \{x, H\}_D$ с функцией Гамильтона (44). Для всякой начальной точки на N система (47) допускает решение $p(t)$, $q(t)$, причем $q(t)$ удовлетворяет также уравнениям Лагранжа (39).

3) Система (46) допускает бесконечно много решений $\lambda_k(p, q)$. Это возможно лишь при условии $\det \|\{\varphi_i, \varphi_j\}\| = 0$. В данном случае, гамильтоново описание векторного поля, определяемое системой (39) на совместной поверхности уровня (43) невозможно. Среди связей необходимо выбрать $\varphi_i(x)$, $i = 1, \ldots, 2k$, для которых матрица скобок Пуассона невырождена, а коэффициенты $\lambda_i(p, q)$ $i = 1, \ldots, 2k$, определяются однозначно. Остальные

связи $\varphi_j(x)$ $j = 2k, \ldots, s$ будут являться интегралами движения получившегося поля, значения которых однозначно находятся из системы (41). Решения полученной системы $p(t)$, $q(t)$, при подстановке $q(t)$ также удовлетворяют исходной лагранжевой системе (39).

4) Система (46) непротиворечива на некотором подмногообразии меньшей размерности, чем на многообразии (43). В этом случае появляются дополнительные связи (вторичные связи по Дираку). Рассматривая уже полный набор связей, приходим к одной из ситуаций 2) или 3). В связи с тем, что вторичные связи появляются как условия разрешимости системы (46), они не приведут к дополнительным неопределенным множителям λ_i и не сказываются на уравнениях движения (45).

12. Голономные связи. Сравнение с классическим описанием. Описанная выше процедура отличается от классического гамильтонова формализма для системы с голономными связями в избыточных переменных [4]. Покажем, что обе эти конструкции приводят к одним и тем же уравнениям движения для позиционных переменных. Выбор того или иного описания различных задач определяется, как правило, дополнительными соображениями.

Рассмотрим лагранжеву систему в $\mathbb{R}^3$

$$L = \frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{q}}^2 - U(\boldsymbol{q}) \tag{48}$$

со связью $f(\boldsymbol{q}) = 0$ (все результаты могут быть перенесены на случай $\mathbb{R}^n$ и нескольких связей).

Уравнения движения (48) можно представить в форме

$$\ddot{\boldsymbol{q}} = -\frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{q}} - \lambda\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{q}}. \tag{49}$$

В классической схеме избыточного гамильтонова формализма [4] система (49) описывается уравнениями Гамильтона

$$\dot{\boldsymbol{p}} = -\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{q}}, \quad \dot{\boldsymbol{q}} = \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{p}} \tag{50}$$

с гамильтонианом $H = \dfrac{1}{2}(\boldsymbol{p} \times \boldsymbol{n})^2 + U(\boldsymbol{q})$, где $\boldsymbol{n} = \dfrac{f'_{\boldsymbol{q}}}{|f'_{\boldsymbol{q}}|}$ — единичный вектор нормали к поверхности $f(\boldsymbol{q}) = 0$. Функция $f(\boldsymbol{q})$ является первым интегралом уравнений $\{f, H\} = 0$. Канонические импульсы $\boldsymbol{p}$ не касаются поверхности $f(\boldsymbol{q})$, тем не менее скорости, определяемые соотношениями (50) $\dot{\boldsymbol{q}} = \boldsymbol{p} - (\boldsymbol{p}, \boldsymbol{n})\boldsymbol{n}$, направлены по касательной. Дифференцированием $\dot{\boldsymbol{q}}$ уравнения (50) могут быть приведены к виду (49).

Выполним теперь преобразование Лежандра к каноническим переменным $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{q}$ без учета связи

$$H = \frac{1}{2}\boldsymbol{p}^2 + U(\boldsymbol{q}). \tag{51}$$

Действуя по методу Дирака, дополним связь $f(\boldsymbol{q}) = 0$, условием ее сохранения

$$\dot{f} = \{f, H\} = g(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}) = \left(\boldsymbol{p}, \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{q}}\right) = 0.$$

Для функций f, g всегда выполнено

$$\{f, g\} = \left(\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{q}}, \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{q}}\right) \neq 0.$$

Чтобы избежать вычисления скобки Дирака, векторное поле на поверхности $f = 0$, $g = 0$ найдем с помощью неопределенных множителей μ, ν

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{q}} &= +\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{p}} + \mu\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{p}} + \nu\frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{p}} = \boldsymbol{p} + \nu\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{q}}, \\ \dot{\boldsymbol{p}} &= -\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{q}} - \mu\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{q}} - \nu\frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{q}} = -\frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{q}} - \mu\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{q}} - \nu B\boldsymbol{p}, \end{aligned} \tag{52}$$

где $B = \left\| \dfrac{\partial f}{\partial q_i \partial q_j} \right\|$.

Из условий равенства нулю производных $\dot{f}, \dot{g}$ вдоль решений (52) находим $\nu = 0$. Полагая $\mu = \lambda$, находим, что система (52) также эквивалентна (49).

Таким образом, в классическом варианте гамильтонова формализма скобка остается канонической и меняется функция Гамильтона. В подходе Дирака, наоборот, меняется скобка, так что связи становятся функциями Казимира, а гамильтониан остается прежним (без учета связи).

13. Динамика малых масс. В предыдущем разделе была показана возможность применения процедуры Дирака для описания лагранжевых (или гамильтоновых) динамических систем с голономными связями. С физической точки зрения системы со связями могут рассматриваться как предельные задачи для свободных систем. Различные способы задания предельных переходов связаны с различными способами *реализации связей* [4].

Так голономная механика получается при надлежащем переходе в потенциальной функции, неголономная механика — в силах вязкого трения (функция Релея). Механика Дирака на физическом уровне может быть интерпретирована как механика малых масс, когда предельный переход происходит в кинетической энергии — некоторые из инерционных характеристик стремятся к нулю. При этом он не затрагивает потенциала и в этом смысле механика Дирака является механикой малых масс. Более подробное обсуждение содержится в п. 16, 17, здесь мы ограничимся одним примером.

Рассмотрим систему двух частиц в трехмерном пространстве с функцией Лагранжа

$$L = \frac{1}{2}\big(\dot{q}_1^2 + \varepsilon\dot{q}_2^2\big) + \big(A(q_2),\, \dot{q}_2\big) - U(q_1,\, q_2). \tag{53}$$

Уравнения движения имеют вид

$$\begin{aligned} \ddot{q}_1 &= -\frac{\partial U}{\partial q_1}, \\ \varepsilon\ddot{q}_2 &= B(q_2)\times\dot{q}_2 - \frac{\partial U}{\partial q_2}, \quad B = \operatorname{rot} A. \end{aligned} \tag{54}$$

Если масса второй частицы стремится к нулю ($\varepsilon \to 0$), то функция Лагранжа оказывается вырожденной по $\dot{q}_2$, а в уравнениях движения пропадает ускорение $\ddot{q}_2$. Уравнения (54) при $\varepsilon = 0$ разрешимы лишь при условии

$$\varphi_0(q) = \left(B(q_2),\, \frac{\partial U}{\partial q_2}\right) = 0. \tag{55}$$

Определяя канонические импульсы $\boldsymbol{p} = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{q}}}$

$$p_1 = \dot{q}_1, \quad p_2 = A(q_2), \tag{56}$$

получим, что условия разрешимости относительно $\dot{q}_2$ эквивалентны связям:

$$\varphi(\boldsymbol{p},\, \boldsymbol{q}) = p_{2i} - A_i(q_2), \quad i = 1, 2, 3. \tag{57}$$

Функция Гамильтона не зависит от p_2:

$$H = \frac{1}{2}p_1^2 + U(q_1,\, q_2), \tag{58}$$

а уравнения движения с неопределенными множителями примут вид

$$\begin{aligned} \dot{q}_1 &= p_1, \quad & \dot{p}_1 &= -\frac{\partial U}{\partial q_2}, \\ \dot{q}_2 &= \lambda, \quad & \dot{p}_2 &= -\frac{\partial U}{\partial q_2} + \lambda_j \frac{\partial A_j}{\partial q_2}. \end{aligned} \tag{59}$$

Условие сохранения связи может быть представлено в виде

$$B(q_2) \times \lambda - \frac{\partial U}{\partial q_2} = 0. \tag{60}$$

Условие его разрешимости (вторичная связь) совпадает с (55). В общем случае матрица $\|\{\varphi_i,\, \varphi_j\}\|$ невырождена, поэтому с помощью скобки Дирака (54) на поверхности уровня $\varphi_i = 0$ $i = 0, \ldots, 3$ получим непротиворечивые уравнения движения, допускающие единственное решение $p(t)$, $q(t)$. ($q(t)$ удовлетворяет также уравнению (54) при $\varepsilon = 0$).

Замечание 8. Уравнения (60) допускают произвол в определении λ: $\lambda' = \lambda + f(\boldsymbol{p},\, \boldsymbol{q})B(q_2)$, который тем не менее не сказывается на векторном поле (59), определенном на поверхности уровня связей $\varphi_i(\boldsymbol{p},\, \boldsymbol{q}) = 0$, $i = 0, \ldots, 3$.

Если магнитное поле постоянно

$$\boldsymbol{B} = \operatorname{rot} \boldsymbol{A} = \text{const},$$

и энергия взаимодействия зависит лишь от взаимного расстояния $r = |q_1 - q_2|$, то уравнения (54) при $\varepsilon = 0$ допускают гамильтоново описание с невырожденной скобкой.

Выберем ось OZ вдоль поля, из (54) находим $z_1(t) = z_2(t) = at + b$, $a, b = \text{const}$. Проекция движения частиц на плоскость XY описывается уравнениями

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 = \dfrac{\partial U(s)}{\partial x_1} & \ddot{y}_1 = -\dfrac{\partial U(s)}{\partial y_1} \\ \dot{x}_2 = -\dfrac{\partial U(s)}{\partial y_2} & \dot{y}_2 = \dfrac{1}{B}\dfrac{\partial U(s)}{\partial x_2} \end{cases}, \quad s = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}. \tag{61}$$

Уравнения (61) гамильтоновы относительно скобки Пуассона

$$\{x_1, p_x\} = \{y_1, p_y\} = 1,$$
$$\{y_2, x_2\} = \frac{1}{B},$$

с функцией Гамильтона

$$H = \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2) + U(s), \quad p_x = \dot{x}_1, \quad p_y = \dot{y}_1.$$

Замечание 9. Переход от гамильтоновой системы со связями к эквивалентной (вырожденной) лагранжевой системе возможен в случае разрешимости системы

$$\begin{gathered} \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} + \sum_j \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial p_i}, \\ f_i(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}) = 0, \qquad i = 1, \ldots, n,\ j = 1, \ldots, s, \end{gathered} \tag{62}$$

относительно неизвестных p, λ. При этом функция Лагранжа находится обычным преобразованием Лежандра — $L = \boldsymbol{p}\dot{\boldsymbol{q}} - H$. Несложно проверить, что для указанного примера двух частиц это преобразование приводит к исходному лагранжиану (53). В общем случае система (62) не допускает решения (аналогично случаю неголономных систем, не допускающих гамильтонова представления).

14. Дополнительные возможности.

1. Приведем специальный случай редукции Дирака, использованный Мозером [22, 40] для получения новых интегрируемых случаев из уже известных. Скобка Дирака (35) возникает у Мозера самостоятельно и ссылки на Дирака у него нет.

Допустим, что связи (62) могут быть разбиты на две группы $f_1(x), \ldots, f_k(x), g_1(x), \ldots, g_k(x)$, так что $f_1(x), \ldots, f_k(x)$ и гамильтониан $H(x)$ входят в инволютивный набор функций на многообразии G. Несложно проверить, что любая функция из G также является интегралом движения для векторного поля, полученного из исходного с помощью редукции Дирака. Эти интегралы находятся в инволюции также и относительно скобки Дирака (35).

Таким образом было получено n-мерное обобщение (на S^n) классической интегрируемой задачи Неймана из интегрируемого потока в евклидовом пространстве E^n [22, 40].

2. Редукция по симметриям также может быть интерпретирована в терминах редукции Дирака. Действительно, пусть нам удалось проинтегрировать векторные поля, соответствующие первым интегралам системы

$$X_i = \{x, F_i\}, \quad i = 1, \ldots, k,$$

которые для простоты будем считать инволютивными $\{F_i, F_j\} = 0$. Координаты вдоль соответствующих потоков обозначим τ_i. Выбирая в качестве связей функции $F_1(x), \ldots, F_k(x), \tau_1(x), \ldots, \tau_k(x)$, с помощью скобки Дирака получим редуцированную систему (ранг которой упал на $2k$) в точности эквивалентную приведенной системе при стандартной редукции по симметриям (редукции по моменту см. [10]).

15. Предельные переходы в общем случае. Рассмотрим голономную систему с функцией Лагранжа

$$L_\varepsilon = L_0(\dot{\boldsymbol{q}}, \boldsymbol{q}, Q) + \frac{\varepsilon \dot{Q}^2}{2} + \varepsilon L_1(\dot{\boldsymbol{q}}, \boldsymbol{q}, Q, \varepsilon), \tag{63}$$

где ε — малый параметр. При $\varepsilon = 0$ получается вырожденная по $\dot{Q}$ система. Следуя § 9 гл. 1 получим связи и гамильтоновы уравнения движения. Первичной связью будет служить

$$P = \frac{\partial L}{\partial \dot{Q}}\bigg|_{\varepsilon=0} = 0.$$

Вторичная связь получается из условия совместности

$$\{P, H_0\} = -\frac{\partial H_0}{\partial Q} = 0, \tag{64}$$

где $H_0(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}, Q) = \boldsymbol{p}\dot{\boldsymbol{q}} - L_0 \,|_{\dot{\boldsymbol{q}} \to \boldsymbol{p}}$.

Пусть $Q = f(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q})$ — решение уравнения (64). Это дает возможность вторичную связь представить в виде уравнения $\Psi = Q - f(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}) = 0$, причем $\{P, \Psi\} = -1 \neq 0$.

Используем форму уравнений с неопределенным множителем. Гамильтониан H является суммой $H_0 + \lambda P + \mu(Q - f)$, а коэффициенты λ, μ однозначно находятся из условий совместности

$$\{P, H\} = \{P, H_0\} - \mu = 0,$$
$$\{Q - f, H\} = -\{f, H_0\} - \lambda = 0.$$

Таким образом,

$$\mu = -\frac{\partial H_0}{\partial Q}, \quad \lambda = \{H_0, f\}.$$

Уравнения Гамильтона со связями примут вид

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{p}} &= -\frac{\partial \hat{H}_0}{\partial \boldsymbol{q}}, & \dot{\boldsymbol{q}} &= \frac{\partial \hat{H}_0}{\partial \boldsymbol{p}}, \\ P &= 0, & Q &= f, \end{aligned} \tag{65}$$

где $\hat{H}_0(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}) = H_0(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}, Q)\,|_{Q=f}$.

Обоснованность механики Дирака вытекает из следующих рассуждений. Если функцию Гамильтона полной системы ($\varepsilon \neq 0$) обозначить через H, то

$$H = H_0(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}) + \frac{P^2}{2\varepsilon} + \varepsilon H_1(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}, Q, \varepsilon).$$

Соответствующие канонические уравнения будут

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{p}} &= -\frac{\partial H_0}{\partial \boldsymbol{q}} - \varepsilon\frac{\partial H_1}{\partial \boldsymbol{q}}, & \dot{\boldsymbol{q}} &= \frac{\partial H_0}{\partial \boldsymbol{p}} + \varepsilon\frac{\partial H_1}{\partial \boldsymbol{p}}, \\ \dot{P} &= -\frac{\partial H_0}{\partial Q} - \varepsilon\frac{\partial H_1}{\partial Q}, & \dot{Q} &= \frac{P}{\varepsilon}. \end{aligned} \tag{66}$$

Решением (66) служат формальные ряды

$$\begin{aligned} \boldsymbol{p} &= \boldsymbol{p}_0(t) + \varepsilon \boldsymbol{p}_1(t) + \cdots, & \boldsymbol{q} &= \boldsymbol{q}_0(t) + \varepsilon \boldsymbol{q}_1(t) + \cdots, \\ P &= \varepsilon P_1(t) + \cdots, & Q &= f(\boldsymbol{p}_0(t), \boldsymbol{q}_0(t)) + \varepsilon Q_1(t) + \cdots, \end{aligned} \tag{67}$$

где $\boldsymbol{p}_0(t), \boldsymbol{q}_0(t)$ удовлетворяют уравнениям (65). Эти ряды не всегда сходятся. Но в случае, если для начальных данных выполнено условие $\partial H_0/\partial Q = 0$, определяющее вторичную связь, уравнения (66) перестают быть сингулярными, ряды будут сходиться, а вместо импульса P следует взять новую переменную P/ε. Случай, когда условие $\dfrac{\partial H_0}{\partial Q} = 0$ выполнено тождественно, является особым. (При этом P является интегралом системы при $\varepsilon = 0$). Уравнения (67) описывают в этом случае решение для P/ε и Q, которые не удовлетворяют (65), и вообще какимлибо гамильтоновым уравнениям (при этом, как правило $\left.\dfrac{\partial H_1}{\partial Q} = 0\right)$. Эта ситуация соответствует так называемым ограниченным задачам типа ограниченной задачи трех тел в небесной механике.

Рассмотрим две задачи динамики твердого тела, в которых производится предельный переход в инерционных характеристиках твердого тела двумя различными способами. В одном случае он эквивалентен наложению связей в фазовом пространстве и дает возможность использовать процедуру Дирака. При этом как первоначальная скобка, так и скобка Дирака, являются вырожденными. В другом — получающаяся предельная система не может быть получена при помощи процедуры Дирака и априори является негамильтоновой. Она носит название ограниченной задачи динамики твердого тела (по аналогии с небесной механикой) и была введена в [20].

16. Предельные переходы в уравнениях Эйлера–Пуассона. Уравнения движения твердого тела с неподвижной точкой в лагранжевом виде можно записать в виде уравнений Пуанкаре на группе $SO(3)$ (см. [10])

$$\begin{gathered} \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{\omega}} = \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{\omega}} \times \boldsymbol{\omega} + \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{\gamma}} \times \boldsymbol{\gamma}, \\ \dot{\boldsymbol{\gamma}} = \boldsymbol{\gamma} \times \boldsymbol{\omega}, \end{gathered} \tag{68}$$

лагранжиан задачи в случае осесимметричного твердого тела можно представить в форме

$$L = \frac{1}{2}(\omega_1^2 + \omega_2^2 + \varepsilon\omega_3^2) - x\gamma_1 - z\gamma_3, \tag{69}$$

где ε характеризует отношение моментов инерции осесимметричного тензора инерции, $(x, 0, z)$ — координаты центра масс. При $\varepsilon \to 0$ (обоснование возможности придать механический смысл этому предельному переходу см. в [21]) обычный переход от уравнений Пуанкаре (68) к уравнениям Пуанкаре–Четаева с помощью преобразования Лежандра теряет смысл и получается «первичная» связь

$$M_3 = \frac{\partial L}{\partial \omega_3}\bigg|_{\varepsilon=0} = 0.$$

Введем функцию Гамильтона, выраженную через $M_1 = \dfrac{\partial L}{\partial \omega_1}$, $M_2 = \dfrac{\partial L}{\partial \omega_2}$

$$H = \omega_1 \frac{\partial L}{\partial \omega_1} + \omega_2 \frac{\partial L}{\partial \omega_2} - L = \frac{1}{2}(M_1^2 + M_2^2) + z\gamma_3 + x\gamma_1.$$

При этом скобка Пуассона определяется алгеброй $e(3)$. Полагая $H^* = H + \lambda M_3$, получим условие совместности

$$\dot{M}_3 = \{M_3, H^*\} = -x\gamma_2 = 0 \tag{70}$$

и вторичную связь $\gamma_2 = 0$.

Определим новый гамильтониан $H^* = H + \lambda M_3 + \mu\gamma_2$. Из условия совместности связей

$$\dot{M}_3 = \{M_3, H\} = 0, \quad \dot{\gamma}_2 = \{\gamma_2, H\} = 0,$$

получим $\lambda = M_1\gamma_3/\gamma_1$, $\mu = 0$ (как отмечалось в § 9 гл. 1, вторичная связь не сказывается на уравнениях движения). Можно составить уравнения движения, пользуясь скобкой Дирака, вычисленной по формуле (35) и гамильтонианом H

$$\begin{array}{lll}
\{M_1, M_2\}_D = M_1 \dfrac{\gamma_3}{\gamma_1}, & \{M_1, M_3\}_D = -2M_2, & \{M_2, M_3\}_D = 2M_1, \\
\{M_1, \gamma_1\}_D = 0, & \{M_1, \gamma_2\}_D = 2\gamma_3, & \{M_1, \gamma_3\}_D = 0, \\
\{M_2, \gamma_1\}_D = -\gamma_3, & \{M_2, \gamma_2\}_D = 0, & \{M_2, \gamma_3\}_D = \gamma_1, \\
\{M_3, \gamma_1\}_D = 0, & \{M_3, \gamma_2\}_D = -2\gamma_1, & \{M_3, \gamma_3\}_D = 0,
\end{array}$$

$$\{\gamma_i, \gamma_j\}_D = 0, \tag{71}$$

или, записывая уравнения движения на алгебре $e(3)$ с функцией Гамильтона H. В обоих случаях получим систему

$$\begin{aligned} &\dot{M}_1 = \frac{M_1 M_2 \gamma_3}{\gamma_1}, \quad \dot{M}_2 = -M_1^2 \frac{\gamma_3}{\gamma_1} + \gamma_3 x - \gamma_1 z, \\ &\dot{\gamma}_1 = -\gamma_3 M_2, \qquad \dot{\gamma}_3 = -\gamma_1 M_2, \end{aligned} \tag{72}$$

имеющей, кроме интеграла энергии и связей, геометрический интеграл и интеграл площадей

$$\gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1, \quad M_1 \gamma_1 = C. \tag{73}$$

Из (73) вытекает, что $\gamma_1 = \sin\theta$, $\gamma_3 = \cos\theta$ и поэтому $\dot{\theta} = -M_2$. Выражая $M_1 = C/\gamma_1$, получим уравнение для θ:

$$\ddot{\theta} = \frac{C^2}{\sin^3\theta}\cos\theta + x\cos\theta - z\sin\theta, \tag{74}$$

которое можно записать в лагранжевой (гамильтоновой) форме с одной степенью свободы:

$$\ddot{\theta} = -\frac{\partial V}{\partial \theta}, \quad V = \frac{C^2}{2\sin^2\theta} - x\sin\theta - z\cos\theta. \tag{75}$$

Система (75) эквивалентна приведенной системе для сферического маятника в осесимметричном поле $U = -x\sin\theta - z\cos\theta$. Качественный анализ решения (74) содержится в [21], где разобранная задача и редукция Дирака рассматриваются в канонических переменных.

При $x = 0$ в (70) задача Дирака имеет бесконечное множество решений (λ произвольно). В этом случае M_3 — первый интеграл, поэтому редукция Дирака должна быть заменена редукцией по симметриям. Однако, если произвести предельный переход непосредственно в лагранжевой форме (68), предположив, что

$$L = \frac{1}{2}(\omega_1^2 + \omega_2^2 + \varepsilon\omega_3^2) - \varepsilon\gamma_1 - z\gamma_3, \tag{76}$$

и $\varepsilon \to 0$, получим уравнения «*ограниченной задачи динамики твердого тела*». Физический смысл предельного перехода и геометрическая интерпретация движения в этой задаче обсуждаются в [14, 20].

$$\begin{aligned} \dot{\omega}_1 &= \omega_2\omega_3 + z\gamma_2, \\ \dot{\omega}_2 &= -\omega_1\omega_3 - z\gamma_1, \\ \dot{\omega}_3 &= -\gamma_2, \\ \dot{\boldsymbol{\gamma}} &= \boldsymbol{\gamma} \times \boldsymbol{\omega}. \end{aligned} \tag{77}$$

Уравнения (77) при $z = 0$ исследованы в [20], где методом расщепления сепаратрис показана их неинтегрируемость, в [9] приведены картинки стохастического поведения.

17. Случай вырожденного гамильтониана. Уже неоднократно отмечалось, что механику Дирака можно использовать для гамильтонова описания вырожденных лагранжевых систем. Рассмотрим, в некотором смысле, взаимную задачу о лагранжевом описания вырожденной гамильтоновой системы.

Пусть для гамильтоновой системы на кокасательном расслоении T^*M,

$$\dot{\boldsymbol{q}} = \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{p}}, \quad \dot{\boldsymbol{p}} = -\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{q}} \tag{78}$$

функция Гамильтона вырождена по импульсам, т. е.

$$\det \left\| \frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial p_j} \right\|. \tag{79}$$

При каких условиях система (78) допускает лагранжево описание, а закон движения $\boldsymbol{q}(t)$ может быть получен при помощи вариационного принципа?

Ответ на этот вопрос содержится в работах [17]. Изложим основные результаты, следуя [4].

Для перехода к обобщенным координатам и скоростям необходимо разрешить первое из уравнений (78) относительно импульсов. В силу уравнения (79) это возможно лишь при дополнительных условиях (связях)

$$f_1(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) = \ldots = f_k(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) = 0, \quad k \leqslant n. \tag{80}$$

Замечание 10. Уравнения (80) являются следствием того, что функции $f_i\Big(\boldsymbol{q}, \dfrac{\partial H}{\partial \boldsymbol{q}}\Big)$ при заданном гамильтониане H обращаются тождественно в нуль.

Выполняя преобразования Лежандра

$$L = \boldsymbol{p}\dot{\boldsymbol{q}} - H(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q})\Big|_{\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}\mapsto\dot{\boldsymbol{q}},\boldsymbol{q}} \tag{81}$$

получим функцию Лагранжа, определенную на подмногообразии в TM, высекаемом уравнениями связей (80).

Теорема ([4]). *Функции* $(\boldsymbol{q}(t), \boldsymbol{p}(t))\colon [t_1, t_2] \mapsto T^*M$ *являются решением гамильтоновой системы* (78) *тогда и только тогда, когда путь* $\boldsymbol{q}(t)\colon [t_1, t_2] \mapsto M$ *является экстремалью функционала*

$$S = \int\limits_{t_1}^{t_2} L(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})\, dt$$

в классе кривых с закрепленными концами, удовлетворяющих уравнениям (80).

Уравнения движения могут быть получены методом множителей Лагранжа. Варьируя функцию $\mathscr{L} = L - \sum\limits_{i=1}^{k} \lambda_i f_i$ по $\boldsymbol{q}$ и λ, находим

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\Big(\dfrac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{\boldsymbol{q}}}\Big) - \dfrac{\partial \mathscr{L}}{\partial \boldsymbol{q}} = \dfrac{d}{dt}\Big(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{q}}}\Big) - \dfrac{\partial L}{\partial \boldsymbol{q}} - \sum\limits_{i=1}^{k}\Big[\lambda_i\Big(\dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial f_i}{\partial \dot{\boldsymbol{q}}}\Big) - \dot{\lambda}_i \dfrac{\partial f_i}{\partial \dot{\boldsymbol{q}}}\Big] = 0. \\ \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{\lambda}_i}\right) - \dfrac{\partial \mathscr{L}}{\partial \lambda_i} = f_i(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) = 0. \end{cases} \tag{82}$$

Для интегрируемых (голономных) связей $g_i(\boldsymbol{q}) = 0$, $i = 1, , \ldots, k$, уравнения которых также можно представить в форме $f_i(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) = \dot{g}_i(\boldsymbol{q}) = \dfrac{\partial f_i}{\partial \boldsymbol{q}}\dot{\boldsymbol{q}} = 0$, система (82) приводится к виду

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{q}}} - \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{q}} = \sum_{i=1}^{k} \mu_i \frac{\partial f_i}{\partial \dot{\boldsymbol{q}}}; \quad f_i(\boldsymbol{q}, \dot{q}) = 0, \tag{83}$$

где $\mu_i = \dot{\lambda}_i$.

Уравнения (83) в случае неинтегрируемых связей $f_i(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) = 0$ совпадает с классическим уравнением Рауса неголономной механики. Они могут быть получены из условия идеальности связей и принципа Даламбера–Лагранжа. Однако для неинтегрируемых связей их нельзя вывести из вариационного принципа Лагранжа. Этот факт давно известен в неголономной механике [27]. Обсуждение связанных с этой проблемой вопросов содержится, например, в [18, 10]. С точки зрения реализации связей уравнения (83) могут быть получены из свободной системы, находящейся под действием линейных по скоростям диссипативных сил (вязкое трение) с помощью предельного перехода, при котором коэффициенты вязкости в диссипативной функции Релея устремляются к бесконечности некоторым согласованным (анизотропным) образом. Этот факт был отмечен еще Каратеодори [33], и в некотором смысле дает обоснование корректности описания при помощи уравнений (83) динамических систем, в которых присутствуют качения без проскальзывания (именно такие системы и рассматриваются в неголономной механике).

Физический смысл уравнений (82) был прояснен в работах [17] и привел к вакономной модели механики с неинтегрируемыми связями. Движения, описываемые (82), являются предельными для лагранжевых систем, инерционные (массовые) характеристики которых (в форме кинетической энергии) устремляются к бесконечности также согласованным анизотропным образом. Такая реализация возможна при рассмотрении систем, движущихся в идеальной жидкости. Например, если в уравнениях Кирхгофа, описывающих движение тяжелого твердого тела в безграничном объеме идеальной несжимаемой жидкости [31], присоединенные массы и моменты (обусловленные инерционностью жидкости) устремить к бесконечности некоторым определенным образом, то можно получить уравнения плоского движения пластинки, для которой выполняется неинтегрируемая связь, состоящая в том, что проекции скорости центра масс на ось, перпендикулярную к пластинке, равняется нулю. В неголономной постановке аналогичная задача носит название конька Чаплыгина [32]. При одинаковой связи решения вакономных (82) и неголономных уравнений отличаются друг от друга. Если в неголономном случае средняя высота постоянна, а движение происходит по циклоиде, то в вакономном случае получается более реалистическое описание падения пластинки в жидкости. Для него почти все движения стремятся к равномерному падению пластинки широкой стороной вперед. При этом частота малых колебаний пластинки относительно этого устойчивого положения равновесия возрастает [19].

В некоторых учебниках, например, в [23] не делается различия между вакономными и неголономными уравнениями и задачи о падении тел в жидкости изучаются в неголономной постановке (например, падение круглого диска). Эти результаты вряд ли имеют значение для механики.

В книге [12] вообще классические задачи неголономной механики о качении разбираются с использованием вакономных уравнений, которые автор наивно постулирует, исходя из вариационного принципа Лагранжа. Естественно, что эти результаты также не имеют механического содержания. Следует однако отметить, что по сравнению с неголономной механикой, количество содержательных примеров из вакономной механики очень мало́. Отметим некоторые проблемы, которые ограничивают применимость уравнений (82).

Для уравнений (82) в случае неголономных связей наличие дополнительных слагаемых $\sum\limits_{i=1}^{k}\lambda_i\left(\dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial f_i}{\partial\dot{\boldsymbol{q}}}-\dfrac{\partial f_i}{\partial\boldsymbol{q}}\right)$ приводит к тому, что для их решения помимо начальных положений и скоростей $\boldsymbol{q}(0)$ и $\dot{\boldsymbol{q}}(0)$ (удовлетворяющих условиям связи) необходимо также задавать начальные значения множителей Лагранжа. Физический смысл этих начальных данных, связанный с различными способами реализации связей обсуждается в [17]. В общем случае это приводит к тому, что решения уравнений (82) не удовлетворяют принципу детерминированности, а сам подход содержит скрытые (ненаблюдаемые) параметры.

Для натуральной вырожденной гамильтоновой системы рассмотрим более подробно связь решений с принципом детерминированности, согласно которому движение $\boldsymbol{q}(t)$ во все моменты времени $t\in(-\infty,+\infty)$ полностью определяется начальными положениями $\boldsymbol{q}(0)$ и скоростями $\dot{\boldsymbol{q}}(0)$.

Пусть
$$H=\frac{1}{2}(\boldsymbol{p},A(\boldsymbol{q})\boldsymbol{p})+U(\boldsymbol{q}),\tag{84}$$
где A — $n\times n$ матрица, для которой $\det A=0$. Условия разрешимости (80) в этом случае линейны по скоростям
$$f_i(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})=(a_i(\boldsymbol{q}),\dot{\boldsymbol{q}})=0,\quad i=1\ldots k\tag{85}$$
здесь $a_i(\boldsymbol{q})$ — собственные векторы $A(\boldsymbol{q})$, соответствующие нулевым собственным значениям. Пространство T^*M_q при этом расслаивается на гиперплоскости $\Gamma_q(\dot{\boldsymbol{q}})$, для каждой точки которых $\boldsymbol{p}\in\Gamma_q(\dot{\boldsymbol{q}})$ отображение
$$\dot{\boldsymbol{q}}=\frac{\partial H}{\partial\boldsymbol{p}}=A(\boldsymbol{q})\boldsymbol{p}\tag{86}$$
приводит к одной и той же скорости $\dot{\boldsymbol{q}}$.

Предложение ([4]). *Для всех начальных условий* $\boldsymbol{q}_0 = \boldsymbol{q}(0)$, $\dot{\boldsymbol{q}}_0 = \dot{\boldsymbol{q}}(0) = A\boldsymbol{p}_0$, *удовлетворяющих уравнениям* (85), *движение* $\boldsymbol{q}(t, \boldsymbol{q}_0, \boldsymbol{p}_0)$ *не зависит от выбора импульса* $\boldsymbol{p}_0 \in \Gamma_{q_0}(\dot{\boldsymbol{q}}_0)$ *тогда и только тогда, когда связи* (83) *интегрируемы.*

Следовательно гамильтонова система (84), для которой уравнения (85) неинтегрируемы, не подчиняется принципу детерминированности. Обобщение принципа детерминированности для вакономных систем содержится в [17].

Рассмотрим ряд простых примеров систем с вырожденным гамильтонианом.

18. Примеры.

a. *Гамильтонов формализм со связями.* Рассмотрим задачу о движении частицы в $\mathbb{R}^{n+1}$ по поверхности сферы S^n, заданной уравнением

$$f(\boldsymbol{q}) = {q_0}^2 + {q_1}^2 + \dots + {q_n}^2 - R^2 = 0 \tag{87}$$

Функция Лагранжа в избыточных переменных может быть представлена в форме

$$L = \frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{q}}^2 - U(\boldsymbol{q}) \tag{88}$$

Перейдем к гамильтонову формализму в избыточных переменных. Введем канонические импульсы по формуле

$$\boldsymbol{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{q}}} - \lambda\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{q}} = \dot{\boldsymbol{q}} - \lambda\boldsymbol{q}. \tag{89}$$

Неопределенный множитель Лагранжа λ найдем из условия связи (87): $\lambda = \dfrac{(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q})}{\boldsymbol{q}^2}$. Функция Гамильтона имеет вид

$$H = \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{p}^2 - \frac{(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q})^2}{\boldsymbol{q}^2}\right) + U(\boldsymbol{q}). \tag{90}$$

Легко видеть, что вектор нормальный к поверхности (87), является собственным вектором $\left\|\dfrac{\partial H}{\partial p_i \partial p_i}\right\|$ с нулевым собственным значением, поэтому функция Гамильтона вырождена.

Для канонических уравнений движения

$$\dot{\boldsymbol{q}} = \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{p}}; \quad \dot{\boldsymbol{p}} = -\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{q}} \tag{91}$$

с функцией (90) справедливо тождество

$$(\boldsymbol{q},\ \dot{\boldsymbol{q}}) = 0. \tag{92}$$

В силу интегрируемости связи (92) для решения уравнений движения (91) подчиняются принципу детерминированности (см. предложение), и не зависят от величины проекции начального импульса на нормаль к поверхности (87). Этот пример легко обобщается на произвольное число голономных связей.

b. Системы, получающиеся при гамильтонизации произвольной системы дифференциальных уравнений по методу Лиувилля (которую также часто использует Дирак — некоторые авторы даже приписывают ее Дираку) также оказываются вырожденными.

Действительно, произвольная система

$$\dot{x} = v(x) \tag{93}$$

эквивалентна гамильтоновой системе удвоенной размерности

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial y}, \quad \dot{y} = -\frac{\partial H}{\partial x}, \tag{94}$$

где

$$H = (v(x),\ y). \tag{95}$$

В этом случае $\left\| \dfrac{\partial^2 H}{\partial y_i \partial y_j} \right\| \equiv 0$, следовательно, система (95) оказывается примером гамильтоновой системы, не допускающей лагранжево описание.

Авторы выражают благодарность В. В. Козлову и В. П. Павлову за полезные консультации при написании работы.

Литература

[1] Арнольд В. И. *Гамильтоновость уравнений Эйлера динамики твердого тела и идеальной жидкости.* Усп. мат. наук., т. 24, 1969, № 3, с. 225–226.

[2] Арнольд В. И. *Математические методы классической механики.* М.: Наука, 1991.

[3] Арнольд В. И., Гивенталь А. Б. *Симплектическая геометрия. Итоги науки и техники. Совр. проблемы математики. Фундаментальные направления*, т. 4, с. 5–140. М.: ВИНИТИ, 1985.

[4] Арнольд В. И., Козлов В. В., Нейштадт А. И. *Математические аспекты классической и небесной механики. Итоги науки и техники. Совр. проблемы математики. Фундаментальные направления*, том 3, М.: ВИНИТИ, 1985.

[5] Архангельский Ю. А. *Аналитическая динамика твердого тела.* М.: Наука, 1977.

[6] Барут А., Рончка Р. *Теория представлений групп и ее приложения.* том 1,2. М.: Мир, 1980. Пер. с англ. Barut A. Raczka R. *Theory of Group Representations and Applications.* PWN. Polish Scientific Publishers, 1977.

[7] Богоявленский О. И. *Методы качественной теории динамических систем в астрофизике и газовой динамике.* М.: Наука, 1980.

[8] Богоявленский О. И. *Опрокидывающиеся солитоны. Нелинейные интегрируемые уравнения.* М.: Наука, 1991.

[9] Борисов А. В., Емельянов К. В. *Неинтегрируемость и стохастичность в динамике твердого тела.* Ижевск, Изд-во Удм. ун-та, 1995.

[10] Борисов А. В., Мамаев И. С. *Пуассоновы структуры и алгебры Ли в гамильтоновой механике.* Ижевск, Изд-во Удм. ун-та, 1999.

[11] Ваксман Л. Л., Сойбельман Я. С. *Алгебра функций на квантовой группе* $sl(2)$. Функ. ан. и его прил., т. 22, 1988, № 3, с. 1–14.

[12] Гриффитс П. А. *Внешние дифференциальные системы и вариационное исчисление*, М.: Мир, 1986.

[13] Дирак П. А. М. *Обобщенная гамильтонова динамика.* (См. с. 72–98 наст. сб.)

[14] Довбыш С. А. *Геометрическая интерпретация ограниченной постановки задачи о движении динамически симметричного тяжелого твердого тела с неподвижной точкой.* Сб. научн. метод. статей по теор. механике, М.: МГТУ, 1996, с. 130–135.

[15] Дубровин Б. А., Новиков С. П.,, Фоменко А. Т. *Современная геометрия. Методы и приложения.* том 1,2. М.: Эдиториал УРСС, 1998.

[16] Козлов В. В. *Методы качественного анализа в динамике твердого тела.* М.: МГУ, 1980.

[17] Козлов В. В. *Динамика систем с неголономными связями*, Вестн. МГУ, сер. мат. мех. 1982, № 3, с. 92–100; 1982, № 4, с. 70–76; 1983, № 3, с. 102–114.

[18] Козлов В. В. *К теории интегрирования уравнений неголономной механики.* Успехи механики, т. 8, 1985, № 3, с. 85–101.

[19] Козлов В. В. *О падении тяжелого твердого тела в идеальной жидкости.* Изв. АН СССР, Мех. тв. тела, 1989, № 5, с. 10–17.

[20] Козлов В. В., Трещев Д. В. *Неинтегрируемость общей задачи о вращении динамически симметричного тяжелого твердого тела с неподвижной точкой.II.* Вестник МГУ, сер. мат. мех., 1986, № 1, с. 39–44.

[21] Козлова З. П. *Об одной предельной задаче динамики твердого тела с неподвижной точкой.* Под ред. В. В. Козлова и А. Т. Фоменко. *Геометрия, дифференциальные уравнения и механика*, М.: МГУ, 1986, с. 78–84.

[22] Мозер Ю. *Некоторые аспекты интегрируемых гамильтоновых систем.* Усп. мат. наук, т. 36, 1981, № 5, с. 109–144.

[23] Неймарк Ю. И., Фуфаев Н. А. *Динамика неголономных систем*, М.: Наука, 1967.

[24] Новиков С. П. *Гамильтонов формализм и многозначный аналог теории Морса.* Усп. мат. наук, т. 37, 1982, № 5(227), с. 3–49.

[25] Олвер П. *Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям.* М.: Мир, 1989. Пер. с англ. Olver P. *Applications of Lie groups to differential equations.* Springer, 1986.

[26] Склянин Е. К. *О некоторых алгебраических структурах, связанных с уравнениями Янга–Бакстера.* Функ. ан. и его прил., т. 16, 1982, № 4, с. 27–34.

[27] Суслов Г. К. *Теоретическая механика*, М.-Л., 1946.

[28] Трофимов В. В., Фоменко А. Т. *Алгебра и геометрия интегрируемых гамильтоновых дифференциальных уравнений.* Изд-во «Факториал», Удм. ун-т, 1995.

[29] Фоменко А. Т. *Дифференциальная геометрия и топология. Дополнительные главы.* М.: МГУ, 1983.

[30] Фоменко А. Т. *Симплектическая геометрия.* М.: МГУ, 1988.

[31] Чаплыгин С. А. *О движении тяжелых тел в несжимаемой жидкости.* Собр. сочинен., т. 1, ОГИЗ, М.-Л., 1948, с. 312–336.

[32] Чаплыгин С. А. *О принципе последнего множителя.* Собр. сочинен., т. 1, ОГИЗ, М.-Л., 1948, с. 5–14.

[33] Caratheodory C. *Der Schlitten*, ZAMM, 1933, v. 13, S. 71–76.

[34] Casimir H. B. G. *Rotation of a Rigid Body in Quantum Mechanics.* PhD thesis, J.B. Wolters' Uitgevers-Maatschappij, M.V.Groningen, den Haag, Batavia, 1931. Thesis.

[35] Conn J. *Linearization of analitic Poisson structures.* Anuals of Math., 1984, v. 119, p. 577–601.

[36] Dirac P. A. M. *Generalisated Hamiltonian Dinamics.* Canadian Journal of Math., v. 2, № 2, 1950, p. 129–148. (Русский пер. с. 72–98 наст. сб.)

[37] Dufour J.-P., Haraki A. *Rotationnels et structures de Poisson quadratiques.* C.R.Acad. Sci. Paris, v. 312, Ser. 1, 1991p. 137–140.

[38] Lie S. *Theorie der Transformationgruppen.* V. Bd 1. Teubner, Leipzig, 1888.

[39] Marsden J. E., Weinstein A. *Coadjoint orbits, vortices, and Clebsch variables for incompressible fluids.* Physica D, v. 7, 1983, p. 305–332.

[40] Moser J. *Three integrable Hamiltonial systems connected with isospectral deformations.* Advan. Math., v. 16, 1975, p. 197–220.

[41] Oh Y.-G. *Some Remarks on the Transverse Poisson Structures of Coadjoint Orbits.* Lett. in Math. Phys., 1986, № 12, p. 87–91.

[42] Poincaré H. *Sur la precession des corps deformables.* Bull. Astr., v. 27, 1910, p. 321–356.

[43] Sattinger D. H., Weaver O. L. *Lie Groups and Algebras with Applications to Physics, Geometry and Mechanics.* Springer-Verlag, 1986.

[44] Souriau J. M. *Structure des systèmes dynamiques.* Dunod, Paris, 1970.

[45] Weinstein A. *The local structure of Poisson manifolds.* J. Diff. Geom., v. 18, 1983, p. 523–557.

[46] Weinstein A. *Poisson structures and Lie algebras.* Proc. Conf. Math. Haritage of E. Cartan. Asterisque, hors série, 1985.

[47] Yoshida H. *Necessary condition for the existence of algebraic first integrals, I-II.* Cel. Mech., v. 31, 1983, № 4, p. 363–399.

Дирак Поль Андриен Морис

Лекции по квантовой механике

Дизайнер М. В. Ботя
Компьютерная подготовка А. В. Широбоков
М. А. Килин
Компьютерная графика А. В. Широбоков
Корректор Л. В. Степанова

Лицензия ЛУ № 056 от 06.01.98, выданная
Ижевской республиканской типографии.
Подписано к печати 09.09.98. Формат $60 \times 84^1/_{16}$.
Усл. печ. л. 8,60. Уч. изд. л. 8,34.
Гарнитура Computer Modern Roman. Бумага офсетная № 1.
Заказ № 1354. Тираж 1000 экз.

Типография Удмуртского госуниверситета,
426034, ул. Университетская, 1, корп. 4.