

SUPERSTRING THEORY

Volume 2

Loop amplitudes, anomalies and phenomenology

Michael B. Green

Queen Mary College, University of London

John H. Schwarz

California Institute of Technology

Edward Witten

Princeton University

Cambridge University Press

Cambridge

New York New Rochelle Melbourne Sydney

1988

М. Грин, Дж. Шварц, Э. Виттен

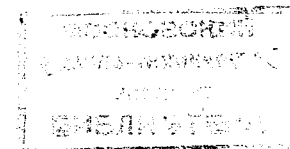
Теория суперструн

В двух томах

Том 2

**Петлевые амплитуды, аномалии
и феноменология**

Перевод с английского
М. О. Катанаева и А. А. Рослого
под редакцией И. В. Воловича



676880



Москва «Мир» 1990

Оглавление

Предисловие	5
Глава 8. Однопетлевые диаграммы в теории бозонных струн	7
8.1. Однопетлевые амплитуды для открытых струн	9
8.1.1. Планарные диаграммы	14
8.1.2. Неориентируемые диаграммы	34
8.1.3. Непланарные петлевые диаграммы	39
8.2. Однопетлевые амплитуды для замкнутых струн	45
8.2.1. Тор	46
8.2.2. Модулярная инвариантность	53
8.2.3. Область интегрирования	57
8.2.4. Анализ расходимостей	59
8.2.5. Космологическая постоянная	63
8.2.6. Амплитуды с безмассовыми состояниями замкнутой струны	66
8.3. Другие типы диаграмм для неориентированных струн	67
8.3.1. Древесные диаграммы более высокого порядка	67
8.3.2. Вещественная проективная плоскость	72
8.3.3. Другие петлевые диаграммы	75
8.4. Резюме	77
Приложение 8.A. θ -функции Якоби	78
Глава 9. Однопетлевые диаграммы в теории суперструн	84
9.1. Амплитуды для открытых суперструн	85
9.1.1. Амплитуды с $M < 4$ безмассовыми внешними состояниями	87
9.1.2. Планарные диаграммы	89
9.1.3. Неориентируемые диаграммы	95
9.1.4. Ориентируемые непланарные диаграммы	97
9.2. Теории типа II	99
9.2.1. Конечность тороидальной амплитуды	101
9.2.2. Компактификация на тор	105
9.2.3. Низкоэнергетический предел однопетлевых амплитуд	109
9.3. Теория гетеротических струн	114
9.3.1. Тор с четырьмя внешними частицами	115
9.3.2. Модулярная инвариантность $E_8 \times E_8$ - и $SO(32)$ -теорий	120
9.4. Вычисления в RNS-формализме	124
9.4.1. Модулярная инвариантность и GSO-проекция	125
9.4.2. Петлевые вычисления	130
9.5. Орбифорды и струны с твистами	132
9.5.1. Обобщение GSO-проекции	132
9.5.2. Струны на орбифордах	134

9.5.3. Струны с твистами в десяти измерениях	140
9.5.4. Альтернативный взгляд на $SO(16) + SO(16)$ -теорию	145
9.6. Резюме	148
Приложение 9.A. Следы по фермионным модам	149
Приложение 9.B. Модулярная инвариантность функций F_2 и \mathcal{L}	152
Глава 10. Калибровочная аномалия в теории суперструн типа I	155
10.1. Введение в аномалии	158
10.1.1. Аномалии в полевой теории точечных частиц	158
10.1.2. Калибровочная аномалия в $D = 10$ -суперсимметричной теории Янга — Миллса	161
10.1.3. Аномалии в теории суперструн	165
10.2. Анализ шестиугольных диаграмм	167
10.2.1. Аномалия планарной диаграммы	170
10.2.2. Аномалия неориентируемой диаграммы	180
10.2.3. Отсутствие аномалий в непланарных диаграммах	182
10.3. Другие однопетлевые аномалии в теории суперструн	184
10.4. Сокращение расходимостей для групп $SO(32)$	185
10.4.1. Дилатонные головастики и петлевые расходимости	185
10.4.2. Сокращение расходимостей	188
10.5. Резюме	190
Приложение 10.A. Альтернативная регуляризация	190
Глава 11. Функциональные методы в калибровке светового конуса	196
11.1. Струнный интеграл по мировым поверхностям	197
11.1.1. Аналоговая модель	197
11.1.2. Пропагатор свободной струны	199
11.1.3. Решеточное обрезание	202
11.1.4. Континуальный предел	206
11.2. Вычисление амплитуд	209
11.2.1. Вершины взаимодействия	209
11.2.2. Параметризация процессов рассеяния	213
11.2.3. Вычисление функционального интеграла	215
11.2.4. Амплитуды с внешними основными состояниями	220
11.3. Древесные амплитуды для открытых струн	222
11.3.1. Конформное отображение	223
11.3.2. Вычисление амплитуд	228
11.4. Древесные диаграммы открытых струн с возбужденными внешними состояниями	232
11.4.1. Функция Грина на бесконечной полосе	233
11.4.2. Функции Грина для произвольных древесных амплитуд	234
11.4.3. Амплитуда в осцилляторных переменных	236
11.4.4. Общий вид коэффициентов Неймана	238
11.4.5. Коэффициенты Неймана для кубической вершины открытых струн	239
11.5. Однопетлевые амплитуды открытых струн	242
11.5.1. Конформное отображение планарной петлевой диаграммы	242
11.5.2. Функция Грина	245
11.5.3. Планарная однопетлевая амплитуда	246
11.5.4. Другие однопетлевые амплитуды	247
11.6. Амплитуды замкнутых струн	249
11.6.1. Древесные амплитуды	249
11.6.2. Однопетлевые амплитуды замкнутых струн	251
11.7. Суперструны	255
11.7.1. $SU(4) \times U(1)$ -формализм	255

11.7.2. Суперпуанкаре-генераторы	259
11.7.3. Алгебра суперсимметрии в теории с взаимодействием	264
11.7.4. Дельта-функционал непрерывности	267
11.7.5. Сингулярные операторы вблизи точки взаимодействия	268
11.7.6. Члены взаимодействия	271
11.7.7. Древесные амплитуды открытых суперструн	274
11.8. Резюме	276
Приложение 11.А. Детерминант лапласиана	277
Приложение 11.В. Якобиан конформного отображения	286
Приложение 11.В. Свойства функций f_m	288
Приложение 11.Г. Свойства $SU(4)$ -коэффициентов Клебша — Гордана	289
Глава 12. Некоторые сведения по дифференциальной геометрии	291
12.1. Спиноры в общей теории относительности	291
12.2. Спинорные структуры на мировой поверхности	298
12.3. Топологически нетривиальные калибровочные поля	302
12.3.1. Касательное расслоение	302
12.3.2. Калибровочные поля и векторные расслоения	304
12.4. Дифференциальные формы	309
12.5. Характеристические классы	322
12.5.1. Неабелев случай	324
12.5.2. Характеристические классы многообразий	327
12.5.3. Эйлерова характеристика римановой поверхности	328
Глава 13. Низкоэнергетическое эффективное действие	331
13.1. Минимальная супергравитация плюс суперсимметричная теория Янга—Миллса	333
13.1.1. $N = 1$ -супергравитация в десяти и одиннадцати измерениях	335
13.1.2. Супергравитация типа IIB	339
13.1.3. Взаимодействующая система супергравитации и суперсимметричной теории Янга — Миллса	347
13.2. Масштабная инвариантность классической теории	352
13.3. Анализ аномалий	357
13.3.1. Структура аномалий в теории поля	360
13.3.2. Гравитационные аномалии	362
13.3.3. Смешанные аномалии	365
13.3.4. Аномальные диаграммы Фейнмана	367
13.3.5. Математическое описание аномалий	370
13.3.6. Аномалии других типов	374
13.4. Явные формулы для аномалий	375
13.5. Сокращение аномалий	380
13.5.1. Супергравитация типа I без материи	380
13.5.2. Супергравитация типа IIB	381
13.5.3. Разрешенные калибровочные группы для $N = 1$ -теорий суперструн	381
13.5.4. $SO(16) \times SO(16)$ -теория	387
Глава 14. Компактификация высших измерений	391
14.1. Волновые операторы в десяти измерениях	391
14.1.1. Безмассовые поля в десяти измерениях	392
14.1.2. Нулевые моды волновых операторов	394
14.2. Безмассовые фермионы	396
14.2.1. Индекс оператора Дирака	398
14.2.2. Учет калибровочных полей	401

14.2.3. Киральная асимметрия	403
14.2.4. Оператор Рариты — Швингера	405
14.2.5. Дальнейшие замечания	405
14.3. Нулевые моды антисимметричных тензорных полей	406
14.3.1. Антисимметричные тензорные поля	407
14.3.2. Применение к аксионам в $N = 1$ -теории суперструн	410
14.3.3. «Нулевые моды»	416
14.3.4. Внешняя производная и оператор Дирака	418
14.4. Теоремы об индексе на мировом листе струны	423
14.4.1. Индекс Дирака	424
14.4.2. Эйлерова характеристика	426
14.4.3. Нулевые моды конформных духов	427
14.4.4. Нулевые моды суперконформных духов	428
14.5. Нулевые моды нелинейных полей	429
14.6. Модели квантовых чисел фермионов	438
14.7. Сокращение аномалий в четырех измерениях	443
Глава 15. Некоторые сведения по алгебраической геометрии	447
15.1. Низкоэнергетическая суперсимметрия	448
15.1.1. Мотивировка	448
15.1.2. Условия ненарушенной суперсимметрии	450
15.1.3. Многообразия с группой голономии $SU(3)$	453
15.2. Комплексные многообразия	455
15.2.1. Почти комплексные структуры	456
15.2.2. Тензор Нёйенхёйса	457
15.2.3. Примеры комплексных многообразий	461
15.3. Кэлеровы многообразия	467
15.3.1. Кэлерова метрика	468
15.3.2. Внешние производные	469
15.3.3. Аффинная связность и тензор Римана	470
15.3.4. Примеры кэлеровых многообразий	473
15.4. Риччи-плоские кэлеровы многообразия с группой голономии $SU(N)$	476
15.4.1. Метрика Калаби — Яу	477
15.4.2. Ковариантно постоянные формы	480
15.4.3. Некоторые многообразия с $SU(N)$ -голономией	481
15.5. Волновые операторы на кэлеровых многообразиях	484
15.5.1. Оператор Дирака	484
15.5.2. Когомологии Дольбо	487
15.5.3. Разложение Ходжа	489
15.5.4. Числа Ходжа	492
15.6. Уравнения Янга — Миллса и голоморфные векторные расслоения	494
15.6.1. Голоморфные векторные расслоения	495
15.6.2. Уравнение Дональдсона — Уленбек — Яу	497
15.6.3. Примеры	499
15.7. Когомологии Дольбо и некоторые приложения	507
15.7.1. Нулевые моды оператора Дирака	509
15.7.2. Деформации комплексных многообразий	511
15.7.3. Деформации голоморфных векторных расслоений	513
15.8. Разветвленные накрытия комплексных многообразий	515
Глава 16. Модели с низкоэнергетической суперсимметрией	518
16.1. Один простой анзац	518
16.2. Спектр безмассовых частиц	524
16.2.1. Нулевые моды заряженных полей	525

16.2.2. Флуктуации гравитационного поля	528
16.2.3. Другие бозонные поля	531
16.3. Нарушение симметрии с помощью петель Вильсона	531
16.3.1. Варианты нарушения симметрии	533
16.3.2. Модель с четырьмя поколениями	537
16.4. Связь с обычными моделями великого объединения	542
16.4.1. Альтернативное описание нарушения симметрии	542
16.4.2. E_6 -соотношения между константами взаимодействия	543
16.4.3. Подсчет безмассовых частиц	547
16.4.4. Дробные электрические заряды	554
16.4.5. Обсуждение	558
16.5. Глобальные симметрии	559
16.5.1. Сохранение CP -инвариантности в суперструнных моделях	560
16.5.2. R -преобразования в суперструнных моделях	561
16.5.3. Глобальные симметрии упрощенной модели	562
16.5.4. Законы преобразований полей материи	568
16.6. Топологические формулы для юкавских констант связи	570
16.6.1. Топологическая формула для суперпотенциала	572
16.6.2. Кинетические члены	578
16.6.3. Теорема о неперенормировке и ее следствия	579
16.6.4. Приложения к упрощенной модели	584
16.7. Другой подход к нарушению симметрии	586
16.8. Обсуждение	594
16.9. Перенормировка констант связи	598
16.10. Орбифолды и алгебраическая геометрия	602
16.11. Дальнейшие замечания	605
Библиография	607
Литература	617
Полевая теория струн	639
Литература	640
Предметный указатель	648

Научное издание

Майкл Грин, Джон Шварц, Эдвард Виттен

ТЕОРИЯ СУПЕРСТРУН. Том 2.

Петлевые амплитуды, аномалии и феноменология

Заведующий редакцией проф. А. Н. Матвеев. Зам. зав. редакцией С. М. Жебровский. Ст. научн. редактор Н. Л. Телеснин. Мл. научн. редакторы Г. Г. Сорокина, В. Н. Цлаф, Р. Х. Зацепина. Художник В. А. Медников. Художественные редакторы К. В. Радченко, О. Н. Адашкина. Технический редактор Е. В. Алёхина. Корректор В. И. Киселева.

ИБ № 7249

Сдано в набор 14.12.89. Подписано к печати 23.07.90. Формат 60×90^{1/16}. Бумага книжно-журн. имп. Печать высокая. Гарнитура литературная. Объем 20,50 бум. л. Усл. печ. л. 41. Усл. кр.-отт. 41. Уч. изд. л. 39,72. Изд. № 2/7037. Тираж 5500 экз. Зак. 368. Цена 4 р. 40 к. Издательство «Мир» В/О «Совэкспорткнига» Государственного комитета СССР по печати. 129820, ГСП, Москва, 1-й Рижский пер. 2.

Набрано в Ленинградской типографии № 2 головного предприятия ордена Трудового Красного Знамени Ленинградского объединения «Техническая книга» им. Евгении Соколовой Государственного комитета СССР по печати. 198052, г. Ленинград, Л-52, Измайловский проспект, 29. Отпечатано в Ленинградской типографии № 8 ордена Трудового Красного Знамени Ленинградского объединения «Техническая книга» им. Евгении Соколовой Государственного комитета СССР по печати. 190000, Ленинград, Прачечный пер., 6.

ББК 22.31
Г85
УДК 53 + 51

Грин М., Шварц Дж., Виттен Э.

Г85 Теория суперструн: В двух томах. Том 2. Петлевые амплитуды, аномалии и феноменология: Пер. с англ.— М.: Мир, 1990. — 656 с., ил.

ISBN 5-03-001566-3

Второй том двухтомной монографии известных специалистов (Англия, США), посвященной наиболее передовой области современной математической физики. Теория суперструн — это синтез глубоких идей теоретической физики и ряда разделов современной математики. В ней частью решены, частью намечены пути решения фундаментальных задач единой теории элементарных частиц и гравитации. Материал тщательно отобран и включает наряду с теоретическими результатами обсуждение экспериментальных данных.

Для математиков и физиков разных специальностей, аспирантов и студентов университетов; может служить введением в теорию суперструн для неспециалистов.

Г $\frac{1602080000-346}{041(01)-90}$ 16-90

ББК 22.31

Редакция литературы по физике и астрономии

ISBN 5-03-001566-3 (русск.)
ISBN 5-03-001567-1
ISBN 0-521-32999-X (англ.)

© Cambridge University Press 1987.
This book was originally published in the English language by Cambridge University Press of Cambridge, England

© перевод на русский язык, Катанаев М. О. и Рослый А. А., 1990

Предисловие

В последние годы произошло возрождение интереса к теории струн, которая являлась источником вдохновения с момента своего появления около двадцати лет назад. По-видимому, существует большая потребность в систематическом изложении современного состояния теории струн учебного характера. Мы надеемся, что настоящая монография поможет удовлетворить эту потребность. Дать исчерпывающий обзор такой широкой области, как теория струн, едва ли возможно даже в двух томах, до которых выросла наша монография. Мы вынуждены были опустить много важных вопросов, в то время как часть материала изложена очень кратко. Например, полностью опущена полевая теория струн (хотя содержание гл. 11 имеет непосредственное отношение к полевой теории струн в калибровке светового конуса). Не развита систематически конформная полевая теория, хотя много подготовительного материала, необходимого для чтения современных статей на эту тему, представлено в гл. 3 и других местах. Обсуждение распространения струн в фоновых полях ограничено бозонными струнами, а многопетлевые диаграммы обсуждаются только в очень общем и элементарном виде. Имеющиеся пробелы в изложении являются проявлением человеческой слабости и желания не выходить значительно в общем объеме двух томов за 1000 страниц.

Мы надеемся, что эти два тома будут полезны широкому кругу читателей — от тех, кем движет в основном любопытство, до тех, кто в действительности хочет вести исследования по теории струн. Предполагалось, что первый том будет самостоятельным. В нем дано исчерпывающее введение в основные идеи теории струн, предполагающее предварительное знакомство с физикой частиц и квантовой теорией поля. Во втором томе рассматриваются более глубокие вопросы, включая изучение однопетлевых амплитуд, эффективную полевую теорию при низких энергиях и аномалии. Здесь же приведены необходимые математические сведения из дифференциальной и алгебраической

геометрии, а также возможное приложение теории к феноменологии частиц.

Мы считаем, что два тома настоящей монографии должны удовлетворить требованиям, предъявляемым к углубленным учебникам для аспирантов. Объем материала, возможно, несколько превышает одногодичный курс. При этом лектору предоставляется приятная возможность осветить те вопросы, которые он сочтет наиболее важными, и опустить остальной материал. Несмотря на все наши усилия, в тексте неизбежно содержится большое число опечаток, неудачных обозначений и других ошибок. Мы будем благодарны за все сообщения о допущенных ошибках и исправим их в будущих изданиях.

Несколько человек оказали нам большую помощь, и мы рады выразить им свою признательность. Кайл Гэри искусно и старательно набрала значительную часть текста, а также помогла оформить текст в соответствии с требованиями издательства Кембридж Университи Пресс с помощью издательского пакета программ TEX, который мы использовали. Марк Горофф использовал все свое знание вычислительной техники для решения массы проблем, возникших в процессе работы. В работе с компьютерами нам оказали также помощь Пол Киберд и Вадим Каплуновски. Патриция Мойл Шварц составила предметный указатель и сделала ряд полезных замечаний по тексту рукописи. Харви Ньюман установил компьютерную связь между Пасаденой, Принстоном и Лондоном, позволившую нам обмениваться файлами с текстом. Джудит Уолрич помогла составить библиографию. Чедомир, Крнкович, Чиара Наппи, Райен Ром и Ларри Ромэнс высказали критические замечания и предложения, позволившие улучшить текст.

Посвящаем монографию нашим родителям.

1986

*Майкл В. Грин
Джон Г. Шварц
Эдвард Виттен*

8. Однопетлевые диаграммы в теории бозонных струн

Обсуждения струнных амплитуд рассеяния в первом томе настоящей монографии были ограничены древесными диаграммами. Они представляют собой приближения низшего порядка к струнным амплитудам рассеяния. В принципе квантовые поправки к древесным диаграммам или классическим результатам должны быть получены из полевой теории струн при разложении в ряд по теории возмущений. Но современный уровень наших знаний не позволяет это сделать¹⁾. Исторически петлевые диаграммы были построены из древесных посредством использования условия унитарности. Эта унитаризация привела со временем к топологическому разложению, что кратко описано в гл. 1.

Как было объяснено в гл. 1 и 7 (т. 1), древесные амплитуды для струнных состояний на массовой оболочке можно представить с помощью функциональных интегралов по римановым поверхностям, которые топологически эквивалентны диску (для открытых струн) или сфере (для замкнутых струн). Поправки более высокого порядка отождествляются с функциональными интегралами по поверхностям более высокого рода. Важным элементом при вычислении амплитуд рассеяния является корреляционная функция вершинных операторов, соответствующая внешним частицам, испущенным с поверхности. Возможные топологии мировой поверхности включают поверхности с вырезанными дырами, или «окнами» (для теорий типа I, где поверхности имеют границы), или с присоединенными «ручками». Для теорий с ориентированными струнами поверхности должны быть ориентируемыми. Подобным образом для теорий, содержащих только замкнутые струны, поверхности должны быть замкнуты.

По мере возрастания рода поверхности степень соответствующей константы связи также возрастает. Например, добавление ручки к поверхности эквивалентно добавлению петли замкнутых струн (как показано на рис. 8.1) и увеличивает порядок диаграммы на множитель κ^2 , где κ — гравитационная константа

¹⁾ В последние годы достигнут существенный прогресс в полевой теории струн, см. литературу, добавленную при переводе. — *Прим. ред.*

связи. Вырезание окна в поверхности (что возможно только в теориях, которые содержат открытые струны) добавляет границу и, следовательно, увеличивает число внутренних открытых струн (рис. 8.2, *а*). Порядок диаграммы увеличивается на $g^2 \sim \kappa$ для каждого окна, где g — янг-миллсовская константа связи.

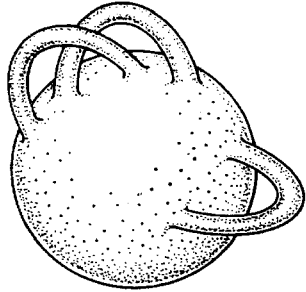


Рис. 8.1. Ручка, присоединенная к мировой поверхности произвольной топологии.

Но присутствие окна не всегда соответствует добавлению петли открытых струн. Например, вырезание окна в сфере является модификацией древесной амплитуды для замкнутой струны (типа I), что приводит к мировой поверхности, топологически эквивалентной диску с внешними частицами из спектра замкнутой струны, которые присоединены к внутренним точкам поверхности (рис. 8.2, *б*). Теория суперструн типа I основана на неориентированных открытых и замкнутых струнах и поэтому включает также неориентируемые поверхности.

Несомненно, эта топологическая классификация диаграмм в теориях струн разительно отличается от классификации диа-

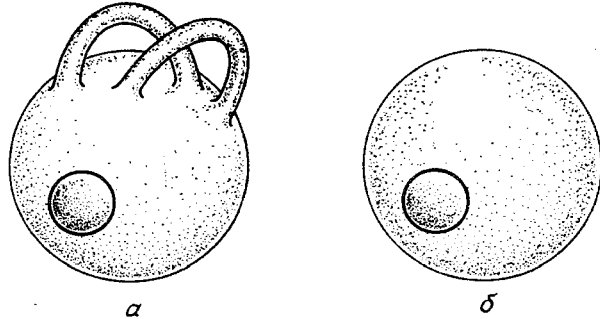


Рис. 8.2. *а* — вырезание окна в мировой поверхности добавляет границу, что увеличивает число внутренних пропагаторов открытых струн; *б* — вырезание окна в сферической мировой поверхности приводит к диаграмме, которая топологически эквивалентна диску.

грамм Фейнмана в теории поля точечных частиц. В теориях струн присутствует гораздо меньше диаграмм, которые необходимо учитывать в каждом порядке теории возмущений, и не существует содержательного разделения диаграмм на «головастики», массовые вставки, вершинные поправки и т. д. На одно-

петлевым уровне анализ интегралов по мировым поверхностям легко проводится. Действительно, однопетлевые диаграммы можно получить теми же операторными методами, которые мы использовали для древесных диаграмм в гл. 7. За однопетлевым уровнем анализ интегралов по мировым поверхностям включает до некоторой степени изощренную математику, которую мы не будем использовать в этой книге¹⁾.

В бозонной теории вычисления, основанные на ковариантном операторном формализме, требуют тех же математических приемов, что и вычисления, возникающие в калибровке светового конуса, по крайней мере в том случае, когда берутся такие внешние состояния на массовой оболочке, которые обладают исчезающими p^+ -компонентами импульса. При учете лоренц-инвариантности амплитуды для внешних частиц, импульсы которых ограничены таким образом, полностью определяют обр-суждаемые амплитуды, если внешних состояний не очень много. Несмотря на то что в большей части данной главы мы используем ковариантный метод, очень похожая техника вычислений применяется в задачах этого типа при использовании калибровки светового конуса.

8.1. Однопетлевые амплитуды для открытых струн

В теориях точечных частиц однопетлевые диаграммы можно выразить через древесные диаграммы с помощью условия унитарности без использования аппарата вторично квантованной теории поля. Унитарность требует, чтобы амплитуды рассеяния обладали подходящими линиями разреза как функции от лоренц-инвариантных величин, построенных из внешних импульсов. Эти разрезы возникают от тех областей импульсного пространства, в которых промежуточные состояния находятся на массовых оболочках. Например, на рис. 8.3, *а* представлено уравнение унитарности для амплитуды с M входящими и N выходящими частицами. Заданный набор P промежуточных физических состояний на массовой оболочке дает вклад в скачок на линии разреза, величина которого пропорциональна произведению амплитуды перехода частиц $M \rightarrow P$ на амплитуду перехода $P \rightarrow N$, проинтегрированному по разрешенной области фазового пространства промежуточных частиц.

При разложении в степенные ряды по константе связи это нелинейное уравнение связывает скачок однопетлевой амплитуды с произведением двух древесных амплитуд. В этом случае, изображенном на рис. 8.3, *б*, число промежуточных состояний P

¹⁾ См. литературу, добавленную при переводе. — Прим. ред.

равно двум. В частности, форма однопетлевой амплитуды, включая ее нормировку, определяется через древесные диаграммы с точностью до произвольной целой функции от этих инвариантов. В случае обычной теории поля эта произвольная целая функция соответствует произволу, связанному с процедурой перенормировки. В калибровочно-инвариантных теориях поля необходимо также избежать включения в петлевые диаграммы вкладов от времениподобных или продольно-поляризованных калибровочных бозонов. Эти вклады можно устранить посредством перехода к калибровке светового конуса или к унитарной калибровке или же их можно компенсировать введением духов Фаддеева — Попова.

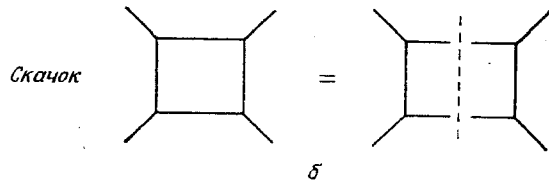
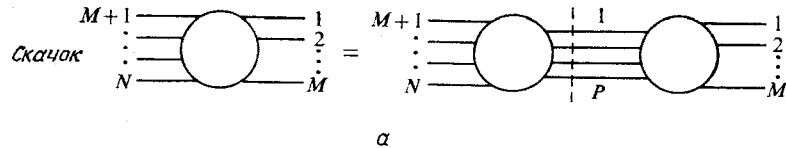


Рис. 8.3. *а* — унитарность приравнивает скачок амплитуды рассеяния (с M входящими и N выходящими частицами) на пороговом разрезе (благодаря P промежуточным состояниям) произведению амплитуд рассеяния $M \rightarrow P$ и $P \rightarrow N$, проинтегрированному по фазовому пространству промежуточных состояний; *б* — в одной петле унитарность связывает скачок петлевой диаграммы с интегралом от произведения двух древесных диаграмм по фазовому пространству промежуточных двухчастичных состояний на массовой оболочке.

Аналогичные соображения применимы к построению однопетлевых амплитуд из древесных диаграмм в струнных теориях. В этом случае требование реджевского поведения при больших энергиях устраняет неопределенность, существующую в полевой теории. Реджевское поведение требует исчезновения амплитуды в определенных асимптотических режимах, причем добавление целой функции от импульсов к однопетлевым диаграммам неизбежно нарушает это свойство.

Например, древесная диаграмма на рис. 8.4 иллюстрирует

взаимодействие $P + M + Q$ состояний открытой струны на массовой оболочке. Как показано на этом рисунке, ее можно факторизовать таким образом, чтобы она имела вид амплитуды, связывающей произвольную пару «возбужденных» состояний с M состояниями на массовой оболочке. Не учитывая пока присутствие нефизических состояний, однопетлевую амплитуду можно получить путем *сшивания* возбужденных состояний, т. е. посредством вставки пропагатора между начальным и конечным возбужденными состояниями и суммирования по всем возможным состояниям вместе с интегрированием по их импульсам. В полной амплитуде необходимо просуммировать по петлевым диаграммам с твистами, вставленными всеми возможными способами во внутренние пропагаторы петли.

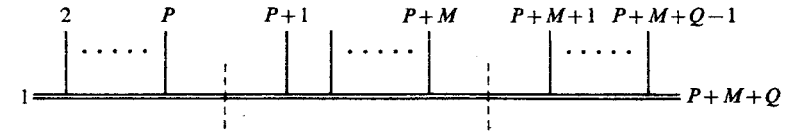


Рис. 8.4. Общая древесная диаграмма с $P + M + Q$ частицами в основном состоянии, в которой выделена древесная диаграмма с двумя произвольными возбужденными состояниями и M основными состояниями.

Точно так же, как в обычной теории поля, ковариантные формулы струнной теории описывают состояния с нефизической поляризацией, циркулирующие по петле. Необходимо принять меры, чтобы каким-то образом подавить их вклад. В ранних вычислениях струнных петлевых диаграмм распространение нефизических состояний устраняли путем вставки в пропагаторы довольно сложного проекционного оператора на физические состояния. Это гарантировало выполнение условия, что циркулирующие частицы соответствуют только физическим состояниям; при этом использовалась процедура, аналогичная некоторым ранним подходам в теории Янга — Миллса. В более современном подходе вместо этого в вычислениях используют духовые моды Фаддеева — Попова. Такой подход гораздо проще, и именно его мы будем использовать при проведении ковариантных вычислений.

Включение духовых мод в бозонной теории производится совсем просто. Вершинные операторы, такие как тахионный вершинный оператор $e^{ik \cdot X}$, строятся только из X^μ без духов, где $X^\mu(\sigma, \tau)$ — координаты струны, определенные в гл. 2. Если формализм содержит духи, то подразумевается, что эти вершинные операторы включают единичный оператор в духовом секторе фоковского пространства. В таком случае духи, циркулирующие по петлям, могут компенсировать вклады от нефизических состояний. Причем это — их единственная роль.

Каким образом можно удостовериться, что духи действительно уничтожают вклады от нефизических состояний? Очень важно обсудить этот вопрос, поскольку даже полностью удовлетворительный процесс вывода петлевых амплитуд из логически обоснованного исходного положения содержит элемент догадки при формулировании правил Фейнмана, включающих духи. Чтобы достичь определенного понимания в этом важном вопросе, можно проделать вычисления в калибровке светового конуса. В этом случае нет нефизических состояний, распространяющихся в петле, нет состояний, которые нарушают условие Вирасоро, нет нулевых состояний и духов. Все состояния фоковского пространства в калибровке светового конуса соответствуют физическим распространяющимся степеням свободы. Поэтому амплитуды в калибровке светового конуса явно унитарны или во всяком случае появляющиеся сингулярности обусловлены физическими промежуточными состояниями. Из нашего обсуждения будет достаточно ясно, что — по крайней мере для процессов, которые просто рассматриваются в обоих формализмах, — подход с использованием калибровки светового конуса дает те же ответы, которые получаются при ковариантном рассмотрении с духами. В конечном счете правила, включающие моды Фаддеева — Попова, должны быть получены из логически безупречного исходного предположения, возможно из калибровочно-инвариантной нелинейной полевой теории струн.

Любопытной особенностью струнных теорий является то, что могут возникать новые сингулярности из-за расходимостей сумм по промежуточным состояниям. Эта особенность уже появлялась в древесных амплитудах, где, как мы видели в гл. 1 и 7, полюсы в t -канале возникали благодаря расходимостям в сумме по полюсам s -канала. В случае петлевых диаграмм могут происходить даже более удивительные вещи. Например, петля открытой струны с подходящими твистами может привести к возникновению полюсов, соответствующих замкнутой струне. Именно при попытке согласовать эти сингулярности с унитарностью впервые обнаружилось значение критической размерности — в критической размерности эти сингулярности соответствуют полюсам гравитона, и поэтому (как обсуждалось в разд. 1.5.6) на квантовом уровне последовательная струнная теория без гравитации представляется невозможной.

Простейшая однопетлевая диаграмма в теории открытых струн соответствует процессу, для которого мировая поверхность топологически эквивалентна кольцу или цилиндру с M внешними состояниями, присоединенными к одной границе, как показано на рис. 8.5. (Мировую поверхность с такой топологией

называют *планарной* диаграммой.) Точный смысл параметров, описывающих кольцо и расположение присоединенных частиц на

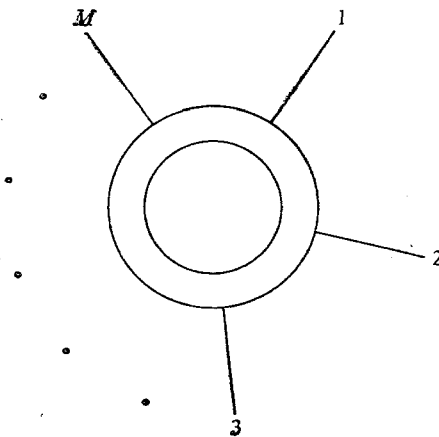


Рис. 8.5. Планарная петлевая диаграмма с M частицами в основном состоянии.

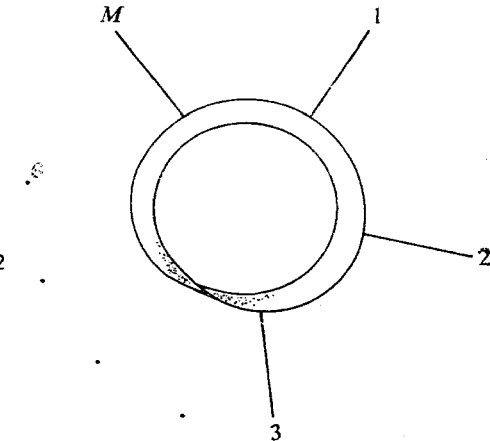


Рис. 8.6. Неориентируемая однопетлевая диаграмма с M внешними частицами имеет мировую поверхность в виде листа Мёбиуса.

этом рисунке, объясняется ниже в данной главе. Путем добавления к мировой поверхности нечетного числа твистов можно построить другие однопетлевые диаграммы, связанные с *неориентируемыми* мировыми поверхностями, т. е. с листами Мёбиуса, имеющими только одну границу (как на рис. 8.6). Используя четное число твистов, можно описать ориентируемые поверхности с частицами, присоединенными к обеим границам кольца, как на рис. 8.7. Они называются *непланарными* диаграммами. Различные вклады в полную однопетлевую амплитуду для открытой струны должны быть вычислены в отдельности, несмотря на то что большая часть вычислений похожа для каждой из диаграмм. (В этом отношении теории ориентированных

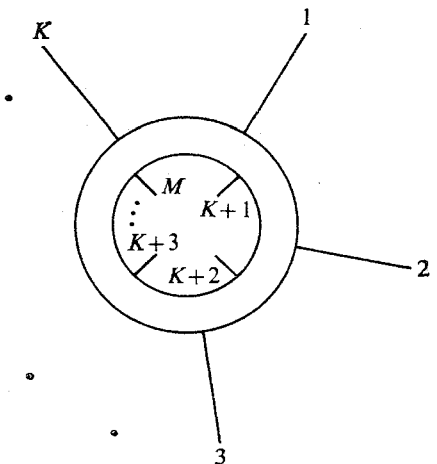


Рис. 8.7. Непланарная однопетлевая диаграмма, в которой K частиц присоединены к одной границе и $M - K$ частиц — к другой.

замкнутых струн, которые содержат только одну диаграмму в каждом порядке теории возмущений, гораздо проще.)

8.1.1. Планарные диаграммы

Рассмотрим открытые бозонные струны с групповыми квантовыми числами, описанными в разд. 6.1. Пусть n — размерность фундаментального представления калибровочной группы — представления для зарядов, которые находятся на концах открытой струны. Тогда теоретико-групповой множитель, соответствующий планарной диаграмме (рис. 8.5), имеет вид

$$G_P = n \operatorname{tr} (\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_M), \quad (8.1.1)$$

где множитель n возникает из-за следа единичной матрицы размера $n \times n$, соответствующей свободной границе кольца. Как и в случае древесных диаграмм, матрицы λ_r должны иметь размер $n \times n$ и принадлежать фундаментальному представлению алгебры любой из возможных групп (т. е. классических групп $SO(n)$, $USp(n)$ и $U(n)$), если состояния соответствуют четным массовым уровням. Эрмитовы матрицы для нечетных уровней будут обозначаться буквой μ , как в разд. 6.1.

Для простоты и ясности в большинстве случаев мы рассматриваем процессы, в которых внешними состояниями являются или тахионы (нечетный уровень), или безмассовые векторные частицы (четный уровень), хотя по существу эту же технику вычислений можно использовать для произвольных возбужденных состояний. В любом случае вершина для испускания частицы на массовой оболочке с импульсом k_r в момент «времени» τ обозначается $V(k_r, \tau)$, где

$$V(k_r, \tau) = e^{i\tau L_0} V(k_r, 0) e^{-i\tau L_0}. \quad (8.1.2)$$

Как и в гл. 7, мы будем часто использовать обозначение $x = e^{i\tau}$, считая x вещественным, что соответствует вихову повороту временной координаты. В этом случае вершина записывается в виде

$$V(k_r, x) = x^{L_0} V(k_r, 1) x^{-L_0}. \quad (8.1.3)$$

Напомним, что помимо вершины (8.1.3) основным элементом для построения древесных диаграмм в гл. 7 был пропагатор, который для открытых бозонных струн имеет вид

$$\Delta = (L_0 - 1)^{-1}. \quad (8.1.4)$$

Чтобы сопоставить амплитуду диаграмме, изображенной на рис. 8.5, припишем вершину (8.1.2) каждой внешней линии и пропагатор (8.1.4) — каждой внутренней линии. Замкнутая петля

представляется следом в фокковском пространстве для внутренних линий. Сбрав все таким образом, получаем определенную нами амплитуду

$$A_P(1, 2, \dots, M) = \\ = g^M G_P \int d^D p \operatorname{Tr} (\Delta V(k_1, 1) \Delta V(k_2, 1) \dots \Delta V(k_M, 1)). \quad (8.1.5)$$

В ковариантном формализме, который здесь используется, след берется по бесконечному числу бозонных осцилляторов α_n^μ , $\mu = 0, \dots, 25$, а также по осцилляторам b_n и c_n , соответствующим дугам. В калибровке светового конуса единственными модами,

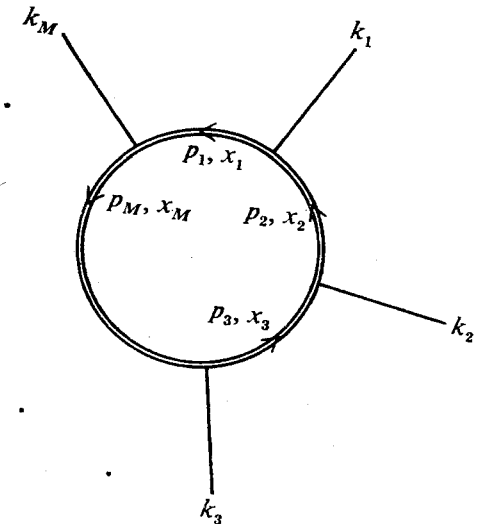


Рис. 8.8. Обозначение кинематических переменных для вычисления планарной петлевой диаграммы.

по которым проводится суммирование в следе, были бы поперечные осцилляторы α_n^i , $i = 1, \dots, 24$. Как и в обычной теории поля, полюсы пропагаторов приводят к разрезам, связанным с промежуточными состояниями на массовой оболочке.

Последовательность испускания частиц $(1, 2, \dots, M)$ соответствует порядку, в котором они присоединены к границе кольца на рис. 8.5. Цикличность следа обеспечивает зависимость амплитуды только от циклического порядка частиц. Полная однопетлевая планарная амплитуда включает сумму по всем циклически неэквивалентным перестановкам внешних частиц, каждая из которых снабжена своим собственным

теоретико-групповым множителем. Кинематика этого процесса иллюстрируется на рис. 8.8.

Как и в гл. 7, удобно использовать интегральное представление

$$\Delta = (L_0 - 1)^{-1} = \int_0^1 x^{L_0-2} dx \quad (8.1.6)$$

для пропагатора открытой струны. Вершинный оператор испускания тахиона на массовой оболочке с импульсом k^μ ($k^2 = 2$) задается следующим выражением:

$$V_0(k, 1) = :e^{ik \cdot X(1)}: \quad (8.1.7)$$

Если испущенная частица является безмассовым векторным бозоном, то вершинный оператор задается формулой

$$V(\zeta, k, 1) = \zeta \cdot \dot{X}(1) e^{ik \cdot X(1)}, \quad (8.1.8)$$

где ζ^μ — вектор поляризации, удовлетворяющий следующим соотношениям $\zeta \cdot k = k^2 = 0$. Как объяснялось в гл. 7, удобный способ вычисления амплитуд с внешними векторными частицами состоит в использовании вершинного оператора

$$V(k, \zeta, 1) = \exp[\zeta \cdot \dot{X}(1) + ik \cdot X(1)] \quad (8.1.9)$$

с последующим удержанием только тех членов, которые линейны по ζ . Эта вершина факторизуется на произведение множителей для каждого осциллятора, что облегчает вычисление следов. (Это представление вершинного оператора будет также использовано при обсуждении гетеротических струн в следующей главе.) Вершина (8.1.9) не нуждается в нормальном упорядочении, поскольку единственный множитель, зависящий от порядка операторов, представляет собой экспоненту от ζ^2 , не дающую членов, линейных по ζ^μ .

Давайте рассмотрим однопетлевую планарную диаграмму с M внешними тахионами. Используя интегральное представление пропагаторов (8.1.5) и равенство $x^{L_0} V(k_r, 1) = V(k_r, x) x^{L_0}$, выражение для амплитуды можно записать в виде

$$\begin{aligned} A_P(1, 2, \dots, M) &= g^M G_P \int_0^1 \prod_{i=1}^M dx_i \int d^D p \operatorname{Tr} [V_0(k_1, x_1) \times \\ &\times V_0(k_2, x_1 x_2) \dots V_0(k_M, x_1 \dots x_M) \omega^{L_0-2}] = \\ &= g^M G_P \int_0^1 \frac{d\omega}{\omega^2} \int_0^1 \prod_{r=1}^{M-1} \frac{d\rho_r}{\rho_r} \Theta(\rho_r - \rho_{r+1}) I(1, \dots, M), \quad (8.1.10) \end{aligned}$$

где

$$I(1, \dots, M) = \int d^D p \operatorname{Tr} (V_0^{\epsilon}(k_1, \rho_1) \dots V_0(k_M, \rho_M)) \omega^{L_0} \quad (8.1.11)$$

и

$$\rho_r = x_1 \dots x_r, \quad (8.1.12)$$

$$\omega \equiv \rho_M = x_1 \dots x_M. \quad (8.1.13)$$

В формуле (8.1.10) использовано следующее выражение для якобиана перехода от переменных x_r , параметризующих отдельные пропагаторы, к переменным ρ_r :

$$\prod_{r=1}^M dx_r = d\omega \prod_{r=1}^{M-1} \frac{d\rho_r}{\rho_r}. \quad (8.1.14)$$

Интегрирование по переменным ρ_r проводится по интервалу $(\omega, 1)$ вещественной оси комплексной плоскости ρ .

Выражения (8.1.10) и (8.1.11) можно также получить с помощью функциональных интегралов, описанных в гл. 1. При таком выводе уравнений множитель $I(1, \dots, M)$ отождествляется с корреляционной функцией вершинных операторов на границе мировой поверхности. Для описания цилиндра можно использовать координату $\ln \rho$, как показано на рис. 8.9, а. Внешние частицы присоединяются к границе цилиндра $\operatorname{Im}(\ln \rho_r) = 0$ в точках $-\operatorname{Re}(\ln \rho_r)$, по координатам которых проводится последовательное интегрирование вдоль образующей окружности от 0 до $-\ln \omega$. Другая граница цилиндра, к которой частицы не присоединены, определяется уравнением $\operatorname{Im}(\ln \rho) = \pi$ (т. е. отрицательными значениями ρ). Используя циклическое свойство следа, оператор ω^{L_0} можно циклически переставить в (8.1.11), откуда, очевидно, следует, что подынтегральное выражение I инвариантно относительно одновременного преобразования всех переменных $\rho \rightarrow \omega^n \rho$. Это преобразование отождествляет точку ρ с точками $\omega^n \rho$, где n — произвольное целое число, равное числу обходов вокруг цилиндра. Следовательно, в этой параметризации область комплексной плоскости ρ , соответствующая мировой поверхности струны, имеет вид, изображенный на рис. 8.9, б. Область расположена вокруг начала координат и имеет вид полукольца с внутренним и наружным радиусами соответственно ω и 1. Точки внутренней дуги отождествляются вдоль радиуса с точками наружной дуги, образуя таким образом цилиндр.

Интеграл по импульсу в петле можно рассматривать как ту часть следа в выражении для I , которая соответствует нулевой моде. Каждый внутренний пропагатор в петле содержит

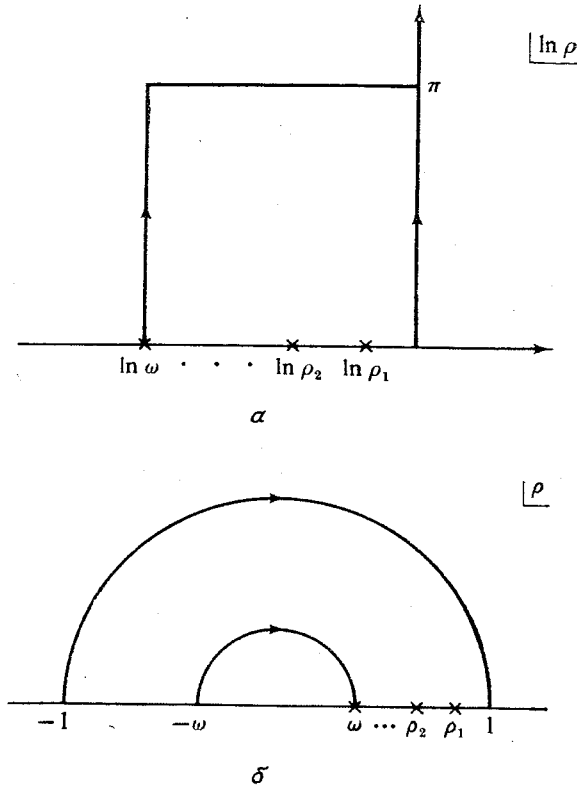


Рис. 8.9. *a* — мировая поверхность планарной диаграммы, изображенная в виде цилиндра в комплексной плоскости $\ln \rho$. Линии, отмеченные стрелками, необходимо отождествить. Цилиндр характеризуется длиной образующей окружности $\ln w$ и высотой π , а интегрирование по переменным частиц проводится вдоль границы цилиндра $\text{Im}(\ln \rho) = 0$ при фиксированной последовательности частиц, соответствующей заданному множителю Чана — Патона. *b* — диаграмма, изображающая мировую поверхность, которая соответствует интегрированию по переменным ρ_r . Внутреннюю и внешнюю дуги необходимо отождествить, как показано стрелками, поскольку точки, отличающиеся на множитель w , эквивалентны. В этом случае отрезки на положительной и отрицательной частях действительной оси становятся границами цилиндра или кольца.

множитель $x_r^{L_0}$, зависящий от импульса пропатора p_r , где

$$p_r = p - k_1 - k_2 - \dots - k_{r-1} = p + k_r + \dots + k_M, \quad (8.1.15)$$

а p — импульс в петле. Это означает, что вся зависимость подынтегрального выражения в (8.1.11) от импульса в петле

имеет вид $\prod_r x_r^{p_r^2/2}$. Интеграл от этого выражения представляет собой D -мерный гауссов интеграл, который сходится после вика поворота, заменяющего временную компоненту p^0 на ip^0 . (Это обычный шаг при вычислении диаграмм Фейнмана.) Вычисление интеграла по импульсу проводится путем выделения полного квадрата с использованием тождества

$$\sum_{r=1}^M p_r^2 \ln x_r = \ln w \left(p + \sum_{r=1}^M k_r \frac{\ln \rho_r}{\ln w} \right)^2 - \sum_{r < s} k_r \cdot k_s \left\{ \ln \frac{\rho_s}{\rho_r} - \frac{\ln^2(\rho_s/\rho_r)}{\ln w} \right\}. \quad (8.1.16)$$

После этого гауссов интеграл вычисляется с помощью сдвига импульса в петле $p' = p - \sum_r k_r \ln \rho_r / \ln w$. В результате получаем

$$\int d^D p \prod_{r=1}^M x_r^{p_r^2/2} = \left(\frac{-2\pi}{\ln w} \right)^{D/2} \prod_{1 \leq r < s \leq M} \left\{ c_{sr}^{-1/2} \exp \left(\frac{\ln^2 c_{sr}}{2 \ln w} \right) \right\}^{k_r \cdot k_s}. \quad (8.1.17)$$

В этом выражении

$$c_{sr} \equiv \rho_s / \rho_r = x_{r+1} \dots x_s. \quad (8.1.18)$$

Для того чтобы вычислить следы по ненулевым бозонным модам α_n^μ в (8.1.11), удобно использовать метод когерентных состояний для гармонических осцилляторов, описанный в приложении 7.А. Напомним, что когерентное состояние определяется следующим образом: $|z\rangle = \exp(za^\dagger)|0\rangle$, где z — произвольное комплексное число. Единичный оператор можно представить с помощью когерентных состояний следующей формулой:

$$I = \frac{1}{\pi} \int d^2 z |z\rangle e^{-|z|^2} \langle z|. \quad (8.1.19)$$

Для доказательства достаточно заметить, что проекция когерентного состояния на базисные векторы в пространстве чисел заполнения равна $\langle m|z\rangle = z^m / \sqrt{m!}$. Поэтому вычисление интеграла по z приводит к равенству $\langle m|I|n\rangle = \delta_{m,n}$, что и требовалось доказать. Отсюда вытекает, что след произвольного оператора K задается формулой

$$\text{Tr}(K) = \frac{1}{\pi} \int d^2 z e^{-|z|^2} \langle z|K|z\rangle. \quad (8.1.20)$$

После подстановки тахионных вершинных операторов в (8.1.11) след сводится к произведению следов по каждому

гармоническому осциллятору

$$\text{Tr} \left(V'_0(k_1, \rho_1) \dots V'_0(k_M, \rho_M) \omega^{L'_0} \right) = \prod_{n=1}^{\infty} \prod_{\mu=0}^{D-1} T_n^{\mu}, \quad (8.1.21)$$

где штрих означает, что множитель от нулевой моды в вершинном операторе опущен. Духовые моды будут рассмотрены отдельно. Используя (8.1.20) и правило $x^{a+a}|z\rangle = |xz\rangle$, получаем

$$\begin{aligned} T_n^{\mu} &= \int \frac{d^2z}{\pi} e^{-|z|^2} \langle z | \prod_{r=1}^M \exp \left[\frac{k_{r\mu} \alpha_r^{\mu-n}}{n} \rho_r^n \right] \exp \left[-\frac{k_{r\mu} \alpha_r^{\mu}}{n} \rho_r^{-n} \right] | \omega^n z \rangle = \\ &= \int \frac{d^2z}{\pi} e^{-(1-\omega^n)|z|^2} \exp \left[-\sum_{r < s} k_{r\mu} k_s^{\mu} \frac{1}{n} (\rho_s / \rho_r)^n \right] \times \\ &\quad \times \exp \left[\sum_{r=1}^M k_{r\mu} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \rho_r^n \bar{z} - \frac{1}{\sqrt{n}} (\omega / \rho_r)^n z \right) \right], \quad (8.1.22) \end{aligned}$$

где второе выражение получено путем вычисления матричного элемента, переставляя все операторы уничтожения вправо, а операторы рождения влево и используя формулы для когерентных состояний, приведенные в приложении 7.А.

Гауссов интеграл (8.1.22) по комплексной плоскости можно вычислить, используя следующую формулу:

$$\frac{1}{\pi} \int d^2z e^{-c|z|^2} e^{(az+b\bar{z})} = \frac{1}{c} e^{ab/c}, \quad (8.1.23)$$

где a , b и c — действительные числа. В результате произведение по всем ненулевым модам имеет вид

$$\prod_{n=1}^{\infty} \prod_{\mu=0}^{D-1} T_n^{\mu} = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - \omega^n)^{-D} \exp \left(-\sum_{r < s} k_r \cdot k_s \frac{c_{sr}^n + (\omega/c_{sr})^n - 2\omega^n}{n(1 - \omega^n)} \right), \quad (8.1.24)$$

где закон сохранения импульса $\sum k_r^{\mu} = 0$ использован в следующем виде:

$$\sum_{r < s} k_r \cdot k_s = -\frac{1}{2} \sum_{r=1}^M k_r^2 = -M. \quad (8.1.25)$$

Существует также дополнительный вклад в множитель I , возникающий от следа по духовым и антидуховым модам. Они не появляются в формуле для тахионного вершинного оператора (который обладает правильной конформной размерностью $J = 1$ без вклада духов), но дают вклад в пропагатор. В действитель-

ности мы интерпретируем « L_0 » в пропагаторе как полную величину L_0 материи и духов $L_0 = L_0^{(a)} + L_0^{gh}$, где

$$L_0^{gh} = \sum_{n=1}^{\infty} n (c_{-n} b_n + b_{-n} c_n). \quad (8.1.26)$$

Напомним, что в гл. 7 не учитывался вклад духов в L_0 при определении пропагатора. Учет вклада духов в L_0 в гл. 7 вряд ли был бы оправдан, поскольку мы рассматривали начальные и конечные состояния без духов и антидухов (это в точности те состояния, которые уничтожаются L_0^{gh}) и вершинные операторы, не содержащие духов. Тот факт, что при обсуждении древесных диаграмм учет духов является необязательным, не должен казаться удивительным, поскольку и в обычной теории Янга — Миллса также необязательно включение духов Фаддеева — Попова при определении древесных амплитуд. На однопетлевом уровне, даже если внешние вершинные операторы являются тривиальными единичными операторами в духовом секторе пространства Фока, духи могут циркулировать в петле и давать существенный вклад.

Учет вклада L_0^{gh} в L_0 при определении пропагатора $\Delta = (L_0 - 1)^{-1}$ приводит к возникновению духового множителя $\text{Tr} \omega^{L_0^{gh}}$. При этом необходимо немного подумать для определения того, что понимать под «следом». Сначала рассмотрим вклад осцилляторов c_1 и b_1 и их сопряженных c_{-1} и b_{-1} . Единичный оператор в этом пространстве имеет вид

$$I_1 = |0, 0\rangle \langle 0, 0| + |1, 0\rangle \langle 1, 0| + |0, 1\rangle \langle 0, 1| + |1, 1\rangle \langle 1, 1|, \quad (8.1.27)$$

где состояния определяются собственными значениями операторов $c_{-1} b_1$ и $b_{-1} c_1$ соответственно. Это подсказывает следующее определение:

$$\text{tr} (\omega^{c_{-1} b_1 + b_{-1} c_1}) = 1 - \omega - \omega + \omega^2 = (1 - \omega)^2. \quad (8.1.28)$$

Отрицательные знаки в правой части (8.1.28) требуют пояснения. Их появление естественно, потому что состояния $|1, 0\rangle$ и $|0, 1\rangle$ являются фермионами. Так, например, $\text{tr} (|1, 0\rangle \langle 0, 1|) = -\langle 1, 0 | 1, 0 \rangle = -1$. Аналогичным образом моды c_n и b_n при $n = 1, 2, \dots$ дают вклад $(1 - \omega^n)^2$. Таким образом, суммарный вклад духовых мод c_n и b_n с $n \neq 0$ имеет вид

$$\text{Tr} \omega^{L_0^{gh}} = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - \omega^n)^2 = [f(\omega)]^2. \quad (8.1.29)$$

Функция распределения $f(\omega)$ была введена в разд. 2.3.5. На языке интегралов по мировым поверхностям отрицательные знаки в (8.1.28) соответствуют интегрированию по цилиндру с периодическими граничными условиями по времени для дұхов и антидұхов.

Что можно сказать относительно дұховых нулевых мод? В разд. 3.2.1 было показано, что дұховые нулевые моды c_0 и b_0 реализуются в гильбертовом пространстве, двух состояний $|\uparrow\rangle$ и $|\downarrow\rangle$, соответствующих дұховому числу $\pm 1/2$. Одно из этих состояний является бозонным, а другое — фермионным, причем учет их вклада тем же способом, что и раньше, привел бы к множителю $1 - 1 = 0$. Этот результат не может быть правильным, поэтому предположим, что при корректном определении петлевых диаграмм дұховые нулевые моды не учитываются¹⁾. Ясно, что пренебрежение вкладом дұховых и антидұховых нулевых мод совместимо с лоренц-инвариантностью, и в дальнейшем мы увидим, что этот способ вычислений приводит к тому же ответу, что и вычисления в явно унитарной калибровке светового конуса.

Объединение вкладов от нулевых и ненулевых мод (8.1.17) и (8.1.24), а также вклада дұхов (8.1.27) приводит к результату

$$I(1, \dots, M) = [f(\omega)]^{2-D} \left(\frac{-2\pi}{\ln \omega} \right)^{D/2} \exp \left\{ \sum_{r < s} k_r \cdot k_s \ln \psi_{rs} \right\}. \quad (8.1.30)$$

Отметим, что учет дұхов приводит к замене $-D$ в (8.1.24) на $-(D-2)$, т. е. они сокращают вклады двух из D координат. Функции ψ_{rs} , появившиеся в (8.1.30), задаются соотношением $\psi_{rs} \equiv \psi(c_{sr}, \omega)$, где

$$\ln \psi(c, \omega) = -\frac{1}{2} \ln c + \frac{\ln^2 c}{2 \ln \omega} - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{c^m + (\omega/c)^m - 2\omega^m}{m(1-\omega^m)}. \quad (8.1.31)$$

Используя тождество

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \frac{x^m}{1-y^m} = -\sum_{n=0}^{\infty} \ln(1-xy^n), \quad (8.1.32)$$

функцию $\psi(c, \omega)$ можно записать в виде

$$\psi(c, \omega) = \frac{1-c}{\sqrt{c}} \exp \left(\frac{\ln^2 c}{2 \ln \omega} \right) \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(1-\omega^n c)(1-\omega^n/c)}{(1-\omega^n)^2}. \quad (8.1.33)$$

¹⁾ Это предположение недавно подтвердилось по крайней мере для открытых струн при рассмотрении калибровочно-инвариантной полевой теории струн в фиксированной калибровке, но эти аспекты теории в настоящей монографии не рассматриваются.

Различные свойства функции ψ , включая ее связь с θ -функциями Якоби, обсуждаются в приложении 8.А.

Величина $\ln \psi_{rs}$ пропорциональна корреляционной функции $\langle X^\mu(\rho_r) X^\nu(\rho_s) \rangle$ для X , которая также является функцией Грина уравнения Лапласа, зависящей от точек ρ_r и ρ_s в комплексной плоскости. Именно в таком виде она появляется в подходе, основанном на функциональных интегралах по мировым поверхностям, который описан в гл. 1.

Функция $\ln \psi_{rs}$ имеет логарифмическую особенность при $c_{sr} \rightarrow 1$, что соответствует пределу $\rho_r \rightarrow \rho_s$. Эта сингулярность представляет собой просто логарифмическую сингулярность двумерного пропагатора свободных бозонов на малых расстояниях. Функция Грина удовлетворяет граничным условиям, соответствующим периодичности петлевой диаграммы

$$\psi(c\omega, \omega) = -\psi(c, \omega), \quad (8.1.34)$$

при которой каждая точка ρ отождествляется с точкой $\omega\rho$. Инвариантность ψ относительно этого преобразования доказана в приложении 8.А. Это свойство устанавливает связь с формой амплитуд рассеяния, возникающих в функциональных подходах к теории струн.

Теперь можно выписать следующее выражение для однопетлевой планарной амплитуды, используя (8.1.10) и (8.1.30),

$$A_P(1, 2, \dots, M) = g^M G_P \int_0^1 \frac{d\omega}{\omega^2} \int_0^1 \left(\prod_{r=1}^{M-1} \frac{d\rho_r}{\rho_r} \Theta(\rho_r - \rho_{r+1}) \right) \times \\ \times [f(\omega)]^{2-D} \left(\frac{-2\pi}{\ln \omega} \right)^{D/2} \prod_{r < s} (\psi_{rs})^{k_r \cdot k_s}. \quad (8.1.35)$$

Перед обсуждением полученного результата кратко опишем, как этот же ответ получается в калибровке светового конуса, по крайней мере в том случае, когда все внешние частицы имеют нулевые k^+ -компоненты импульса и тахионные вершинные операторы $\exp\{ik \cdot X\}$ имеют простой вид. (Напомним, что оператор X^- в калибровке светового конуса имеет сложный вид.) В калибровке светового конуса дұховые моды отсутствуют, а $X^\mu(\sigma)$ имеет только $D-2$ независимых компонент вместо D компонент (для ненулевых мод), и, таким образом, степень $f(\omega)$ в (8.1.24) равна $-(D-2)$. Это в точности воспроизводит вклад дұхов. Схожесть вычислений в двух упомянутых подходах присуща всем диаграммам, рассмотренным в данной главе.

Амплитуда (8.1.35) содержит все сингулярности по переменным

$$s_{IJ} = - \left(\sum_{r=I}^J k_r \right)^2, \quad (8.1.36)$$

которые вытекают из условия унитарности в рамках теории возмущений. Они возникают в различных углах границы области интегрирования. Например, полюсы по переменным s_{IJ} возникают в пределе, когда точки, соответствующие частицам с индексами I, \dots, J , сливаются на мировой поверхности, т. е. $\rho_I \sim \rho_{I+1} \sim \dots \sim \rho_J$, что соответствует пределу $x_r \rightarrow 1$ для $r = I+1, \dots, J$. В этом пределе функции ψ_{rs} стремятся к нулю как $1 - c_{sr}$ для $I \leq r, s \leq J$. Для выявления характера сингулярности полезно определить новые переменные $\eta_r (r = I+1, \dots, J)$ следующим соотношением: $\eta_r = \rho_I - \rho_r$ и затем сделать растяжку переменных η_r с помощью общего множителя ε , тогда сингулярность будет соответствовать той области интегрирования, где $\varepsilon \rightarrow 0$. Наиболее сингулярный член в интеграле по ε имеет следующий вид:

$$\int_0^1 d\varepsilon \varepsilon^{J-I-1} \prod_{I \leq r < s \leq J} \varepsilon^{k_r \cdot k_s} = \int_0^1 d\varepsilon \varepsilon^{-\frac{1}{2} s_{IJ} - 2}, \quad (8.1.37)$$

где использовано равенство

$$\sum_{I \leq r < s \leq J} k_r \cdot k_s = -\frac{1}{2} s_{IJ} - (J+1-I), \quad (8.1.38)$$

вытекающее из (8.1.36) и определения массовой оболочки для тахионов $k_r^2 = 2$. Главная расходимость возникает для тахиона при $s_{IJ} = -2$. Разложение по степеням ε остальной части подынтегрального выражения приводит к полюсам, соответствующим более высоким массовым уровням.

Амплитуда (8.1.35) содержит также обычные точки ветвления по инвариантным энергетическим переменным s_{IJ} , которые соответствуют порогу рождения пар промежуточных физических состояний на массовой оболочке. Эти *нормальные пороговые* сингулярности возникают в пределе $x_I \rightarrow 0$ и $x_{J+1} \rightarrow 0$ ($J > I$). Новые сингулярности включают в себя сингулярности, которые в обычной теории поля точечных частиц соответствовали бы вершинным поправкам, массовым поправкам и головастикам. В теориях струн все эти виды диаграмм Фейнмана соответствуют различным углам области интегрирования для единственной струнной диаграммы.

Собственноэнергетическая поправка к пропагатору, например, возникает от угла области интегрирования, который соответствует близости параметров частиц, находящихся по разные стороны оператора собственной энергии. Случай одной испущенной частицы с одной стороны оператора собственной энергии является особым. Эта диаграмма дает вклад в радиационную поправку к массе внешней частицы. Если рассматривать внешние частицы только на массовой оболочке (а мы пока умеем работать только с такими диаграммами), то рассматриваемая диаграмма, изображенная на рис. 8.10, приводит к бесконечному выражению. Эти относительно тривиальные расходимости в действительности не имеют отношения к конечности

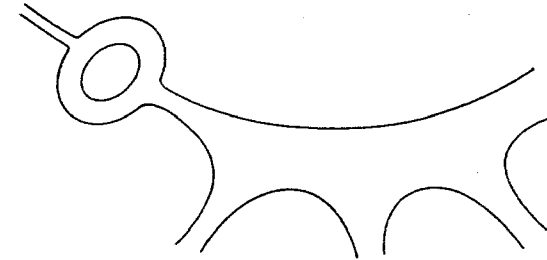


Рис. 8.10. Вставка петли открытой струны во внешнюю тахионную линию приводит к расходимости, возникающей из-за внутреннего пропагатора на массовой поверхности. Эта расходимость устраняется путем конечного сдвига массы тахиона.

теории. Они отражают тот факт, что массы частиц сдвигаются за счет радиационных поправок. Несмотря на это, изучение способа вычитания этих расходимостей и получения правильного конечного ответа является важным шагом при формулировании подходящих правил Фейнмана; этот вопрос был изучен только недавно и не рассматривается в данной монографии. Для внешних безмассовых векторных состояний расходимости этого типа отсутствуют, поскольку калибровочная инвариантность запрещает появление масс у безмассовых векторных частиц. Это означает, что диаграмма собственной энергии обращается в нуль на массовой оболочке, который сокращает полюс пропагатора, изображенного на рис. 8.10.

Из внешнего вида выражения для $f(\omega)$ следует, что подынтегральное выражение в (8.1.35) может иметь особенность в углу области интегрирования, где $\omega \rightarrow 1$, поэтому такая область интегрирования требует специального рассмотрения.

В этой области функция ω^{L_0} не обращается в нуль при больших L_0 . Поскольку величина $L_0 = \frac{1}{2}p^2 + N$ велика для состояний с большой массой или с большим евклидовым импульсом, то рассматриваемую область интегрирования можно считать струнным аналогом ультрафиолетовой области. Однако существует другая более тонкая интерпретация.

Возвращаясь к формулам (8.1.5) и (8.1.35), нетрудно видеть, что выражение для амплитуды помимо множителей, зависящих от вершинных операторов, содержит также множитель

$$A_0 = \int_0^1 d\omega \operatorname{Tr} \omega^{L_0-2}. \quad (8.1.39)$$

Как будет показано ниже, остальные множители в (8.1.35) не меняют существо вопроса. Множитель $\omega^{L_0} = \exp\{L_0 \ln \omega\}$ является оператором, соответствующим распространению струны в собственном времени $-\ln \omega$ (которое положительно, поскольку $\omega \leq 1$). Распространение открытой струны в собственном времени $-\ln \omega$ можно представить в виде функционального интеграла по полосам шириной π и длиной $-\ln \omega$. Необходимо также учесть след в формуле (8.1.39), что приводит к отождествлению начального и конечного состояний струны (до и после распространения в мнимом времени $-\ln \omega$). Это отождествление превращает полосу в цилиндр. Вот почему множитель (8.1.39) можно представить с помощью функционального интеграла по цилиндрам длины π с длиной образующей окружности $-\ln \omega$ в комплексной плоскости $\ln \rho$, как показано на рис. 8.9, а также на рис. 8.11, а.

Переменная интегрирования ω играет очень естественную роль — она является единственным инвариантом, ассоциированным с конформной структурой на цилиндре. (См. разд. 3.3, где обсуждаются эти понятия, хотя там в основном рассматриваются замкнутые струны.) Однопетлевая диаграмма естественно включает интегрирование по этому параметру, и именно этот интеграл выделен в (8.1.39). Для $\omega \sim 1$ радиус цилиндра на рис. 8.9, а очень мал, так что открытая струна распространяется в течение очень короткого промежутка действительного времени. Вот почему этот режим можно рассматривать как предел малых расстояний.

Другой взгляд на описанную выше расходимость может возникнуть при использовании конформной инвариантности (которая имеет место только в критической размерности!) для изменения размеров цилиндра на рис. 8.11, а в любое желаемое число раз. В частности, мы можем считать, что цилиндр имеет

фиксированную длину образующей окружности. 2π и соответствующую длину $-2\pi^2/\ln \omega$ (именно эти значения будут использованы в дальнейшем для более детального анализа). Такой цилиндр изображен на рис. 8.11, б. С другой стороны, рис. 8.11, а можно рассматривать как диаграмму для замкнутой струны, распространяющейся вбок в течение собственного времени $-2\pi^2/\ln \omega$. В последнем случае естественнее интегрировать по длине цилиндра, а не по длине образующей окружности. Тогда

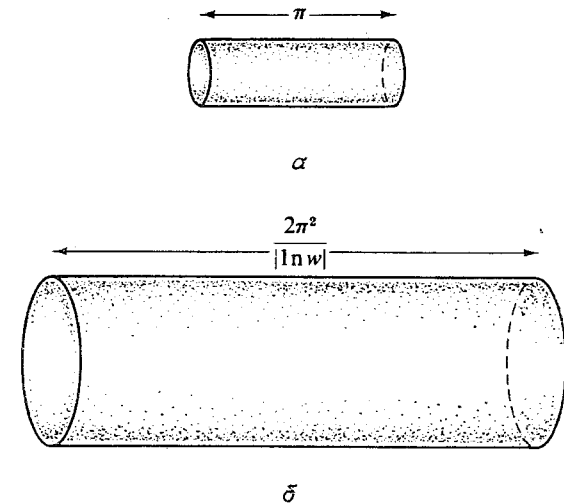


Рис. 8.11. а — цилиндр длины π с длиной образующей окружности $-\ln \omega$; б — цилиндр длины $-2\pi^2/\ln \omega$ с длиной образующей окружности 2π . Оба цилиндра конформно эквивалентны.

предел $\omega \rightarrow 1$ больше не соответствует ультрафиолетовому пределу и становится «инфракрасным» пределом для долгоживущих струн. Конечно, такая возможность рассматривать пределы с разных точек зрения и интерпретировать ультрафиолетовый эффект как инфракрасный не имеет аналога в обычной теории поля, и это является одной из возможных интерпретаций отсутствия ультрафиолетовых трудностей в теории струн. Причина, по которой область $\omega \rightarrow 1$ гораздо предпочтительнее трактуется как инфракрасная, а не как ультрафиолетовая, заключается в том, что присутствие инфракрасных расходимостей имеет физическое объяснение, такое как вклад безмассовых частиц (или тахионов), который не был учтен надлежащим образом; при этом инфракрасные расходимости свидетельствуют не о непоследовательности теории, а наоборот, часто являются признаком

интересных физических явлений, таких как нарушение симметрии или удержание кварков. В противоположность этому наличие неперенормируемых ультрафиолетовых расходимостей свидетельствует о непоследовательности теории. Кроме того, тот факт, что «ультрафиолетовую» расходимость при $\omega \sim 1$ можно интерпретировать как инфракрасную расходимость, имеет следующее фундаментальное следствие: ультрафиолетовые расходимости должны отсутствовать в теории, в которой физические принципы, такие как суперсимметрия, позволяют предсказать отсутствие инфракрасных расходимостей. Это будет основой для понимания сокращения расходимостей в разд. 10.

Продолжим эвристическое исследование области вблизи $\omega = 1$ и рассмотрим замкнутую струну, распространяющуюся в течение собственного времени $-\ln q \sim -2\pi^2/\ln \omega$ между начальным и конечным состояниями $|i\rangle$ и $|f\rangle$, которые по определению обладают нулевым пространственно-временным импульсом. Амплитуда этого процесса задается интегралом по собственному времени

$$A_0 \sim \int_0^1 \frac{dq}{q} U, \quad (8.1.40)$$

где U — оператор эволюции между начальным и конечным состояниями. Этот оператор имеет вид

$$U = \langle f | e^{(L_0 + \tilde{L}_0 - 2)(2\pi^2/\ln \omega)} | i \rangle, \quad (8.1.41)$$

где $L_0 + \tilde{L}_0 - 2$ — оператор, обратный пропагатору замкнутой струны (для физических внешних состояний $L_0 = \tilde{L}_0$). В нашей задаче роль состояний $|f\rangle$ и $|i\rangle$ играют границы цилиндра, изображенного на рис. 8.11, к одной из которых добавлены вершинные операторы. Состояния $|f\rangle$ и $|i\rangle$ довольно сложны для точного описания (за исключением тех свойств, которые были только что приведены); в частности, их трудно (хотя и возможно) описать в фоковском пространстве. Все, что необходимо знать в дальнейшем об этих состояниях, сводится к тому, что $|i\rangle$ и $|f\rangle$ являются состояниями с нулевым импульсом, которые неортогональны вакууму пространства Фока $|0\rangle$. Если это так, то после подстановки $\tilde{L}_0 = L_0$ выражение (8.1.41) при $\omega \sim 1$ (что означает очень большое собственное время) имеет следующую асимптотику:

$$U \sim \langle f | 0 \rangle \langle 0 | e^{4(L_0 - 1)\pi^2/\ln \omega} | 0 \rangle \langle 0 | i \rangle, \quad (8.1.42)$$

поскольку все другие состояния имеют большие значения L_0 и поэтому дают вклады, экспоненциально затухающие по сравнению с вкладом тахиона. Так как для тахиона с нулевым им-

пульсом $L_0 = 0$, при $\omega \rightarrow 1$ выражение (8.1.42) ведет себя экспоненциально как $\exp\{-4\pi^2/\ln \omega\}$, а интеграл (8.1.40) расходится:

$$A_0 \sim \int_0^1 \frac{dq}{q} e^{-4\pi^2/\ln \omega} \sim \int_0^1 \frac{dq}{q^3}. \quad (8.1.43)$$

Следующим наиболее сингулярным вкладом в (8.1.41) после вклада тахиона (8.1.43) является вклад дилатона. Поскольку для дилатона $L_0 = 1$, его вклад в (8.1.41) пропорционален выражению

$$A'_0 \sim \int_0^1 \frac{dq}{q}. \quad (8.1.44)$$

Покажем теперь, как получить эти результаты с помощью строгого математического анализа выражения (8.1.35). Для исследования области вблизи $\omega = 1$ удобно перейти от координат ρ_r к координатам z_r , определенным следующей формулой:

$$\ln z_r = 2i\pi v_r, \quad (8.1.45)$$

где

$$v_r = \frac{\ln \rho_r}{\ln \omega} \quad (8.1.46)$$

(при этом $v_M = 1$). Тогда интервал $(\omega, 1)$ действительной оси ρ отображается на внешнюю границу кольца в z -плоскости с единичным радиусом, а интервал $(-\omega, -1)$ отображается на внутреннюю границу радиуса

$$q \equiv \exp i\pi\tau = \exp(2\pi^2/\ln \omega), \quad (8.1.47)$$

который интегрируется от 0 до 1. Эта ситуация изображена на рис. 8.5. Цилиндр на рис. 8.11, б представляет собой мировую поверхность в плоскости $\ln z$. Длина образующей окружности цилиндра равна 2π , что соответствует изменению угла при обходе границы кольца. Длина цилиндра равна

$$-i\pi\tau = -\frac{2\pi^2}{\ln \omega} = -\ln q. \quad (8.1.48)$$

Поскольку точка $\omega = 1$ отображается в точку $q = 0$, возможная расходимость, которая нас интересует, в q -параметризации связана с дырой в центре кольца, стягивающейся в точку¹⁾. Интегрирование по переменным z_r , кроме $z_M = 1$,

¹⁾ Из рассмотренной ранее конформной эквивалентности кольца и цилиндра ясно, что конфигурация мировой поверхности в пространстве-времени не обязательно имеет исчезающе малую дыру в пределе малого отверстия в кольце.

проводится независимо от q вдоль внешней границы кольца. При этом требуется сохранять их циклический порядок на границе. Замена переменных в выражении для $A_P(1, 2, \dots, M)$ в выражении (8.1.35) требует введения якобиана

$$\frac{d\omega}{\omega} \prod_{r=1}^{M-1} \frac{d\rho_r}{\rho_r} \Theta(\rho_r - \rho_{r+1}) = \frac{1}{2\pi^2} (-\ln \omega)^{M+1} \frac{dq}{q} \prod_{r=1}^{M-1} \Theta(v_{r+1} - v_r) dv_r. \quad (8.1.49)$$

При такой замене переменных функция ψ_{rs} преобразуется просто. Это можно видеть, переписав ее через θ -функцию Якоби $\theta_1(v|\tau)$ (θ -функции Якоби описаны в приложении 8.A). Используя свойства θ -функций, перечисленные в приложении 8.A, получаем

$$\psi(\rho, \omega) = -2\pi i \exp(i\pi v'^2/\tau') \frac{\theta_1(v'|\tau')}{\theta_1'(0|\tau')}, \quad (8.1.50)$$

где

$$v' = \frac{\ln \rho}{2\pi i} = -\frac{v}{\tau}, \quad (8.1.51)$$

$$\tau' = \frac{\ln \omega}{2\pi i} = -\frac{1}{\tau}. \quad (8.1.52)$$

Поведение функций ψ_{rs} при переходе к новым переменным, определенным в (8.1.46) и (8.1.48), можно вывести, исходя из трансформационных свойств функции θ_1 при модулярных преобразованиях (см. приложение 8.A). Результат имеет вид

$$\begin{aligned} \psi(\rho, \omega) &= \frac{2\pi i}{\tau} \frac{\theta_1(v|\tau)}{\theta_1'(0|\tau)} = -\frac{1}{\tau} \exp(-i\pi v^2/\tau) \psi(z, q^2) = \\ &= -\frac{2\pi}{\ln q} \sin \pi v \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1 - 2q^{2n} \cos 2\pi v + q^{4n}}{(1 - q^{2n})^2}. \end{aligned} \quad (8.1.53)$$

Функция $f(\omega) = (\theta_1'(0|\tau')/2\pi\omega^{1/8})^{1/3}$ также просто преобразуется при замене переменных (8.1.47), что следует из (8.A.25). В выражение для струнных амплитуд входит следующая комбинация:

$$\frac{1}{\omega} [f(\omega)]^{-24} = \left(\frac{-\pi}{\ln q}\right)^{12} \frac{1}{q^2} [f(q^2)]^{-24}. \quad (8.1.54)$$

Подстановка преобразованных выражений в (8.1.35) приводит к альтернативной форме амплитуды, в которой поведение вблизи значения $\omega = 1$ или $q = 0$ легко проанализировать, поскольку функции $\ln \psi(z, q^2)$ и $f(q^2)$ имеют хорошо определен-

ные степенные разложения по q^2 вблизи $q = 0$. После подстановки (8.1.49), (8.1.53) и (8.1.54) в формулу (8.1.35) амплитуда рассеяния M тахионов принимает вид (в D измерениях)

$$\begin{aligned} A_P(1, 2, \dots, M) &= G_P g^M \pi^{M-1} \int_0^1 \prod_{r=1}^{M-1} \Theta(v_{r+1} - v_r) dv_r \times \\ &\times \int_0^1 \frac{dq}{q} \omega^{(D-26)/24} q^{(2-D)/12} [f(q^2)]^{2-D} \times \\ &\times \prod_{r<s} \left[\sin \pi v_{rs} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1 - 2q^{2n} \cos 2\pi v_{rs} + q^{4n}}{(1 - q^{2n})^2} \right]^{k_r \cdot k_s}, \end{aligned} \quad (8.1.55)$$

где $v_{rs} = v_s - v_r$. Необходимо сразу отметить, что при $D = 26$ и только при этом значении, подынтегральное выражение имеет степенное разложение вида $\int_0^1 dq (f_0 q^{-3} + f_1 q^{-2} + \dots)$, где f_0, f_1, \dots — функции внешних импульсов и v_r . Оно представляет собой степенной ряд по q , так как степени ω и $\ln q$ сокращаются в подынтегральном выражении (8.1.55). Степени ω сокращаются только при $D = 26$. Степени $\ln q$, которые сокращаются при любых D , возникают следующим образом: преобразование $f(\omega)$ в (8.1.54) дает степень $1 - D/2$, функции ψ_{rs} в (8.1.53) дают степень M , якобиан перехода (8.1.49) — степень $-M - 1$, а интегрирование (8.1.17) по импульсу в петле — степень $D/2$. Сингулярности амплитуды при $q = 0$ связаны с нулевым внутренним радиусом кольца, изображенного на рис. 8.5.

К этой же расходимости $\int_0^1 f_0 dq/q^3$ привело нас предварительное рассмотрение амплитуды с учетом обмена тахионом в канале, который можно назвать (с некоторой натяжкой) «кросс-каналом». Неосновная сингулярность $\int_0^1 f_1 dq/q$ подобным же образом связана с испусканием безмассового скалярного состояния замкнутой струны (*дилатона*) с нулевым импульсом. Для того чтобы понять, как процесс развивается в пространстве-времени, необходимо помнить не только то, что мировая поверхность имеет вид вытянутого цилиндра, изображенного на рис. 8.11, б, но и то, что тахион или дилатон, так же как и другие массивные состояния, являются квазиточечными частицами с размерами порядка \hbar^1). Следовательно, в пространстве-

¹⁾ Этот вопрос обсуждался в разд. 2.2.3.

времени расходимости возникают тогда, когда мировые поверхности в виде вытянутого цилиндра стягиваются в узкую трубу. Таким образом, соответствующая мировая поверхность имеет вид, изображенный на рис. 8.12. В суперсимметричных теориях, которые не содержат тахионов, расходимости, обусловленные безмассовыми дилатонами, вычисляются и анализируются в следующих двух главах.

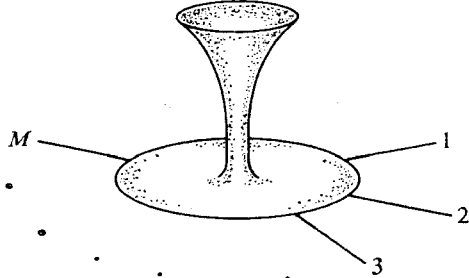


Рис. 8.12. Расходимость однопетлевой диаграммы для открытой струны можно проиллюстрировать такой конфигурацией мировой поверхности, когда из диска вытягивается длинная и тонкая мировая поверхность замкнутой струны, исчезающая в виде диска в вакууме.

Интегрирование по импульсам приводит к формуле, обобщающей (8.1.17):

$$\int d^D p \prod_{r=1}^M x_r^{p_r^2/2} \xi_r \cdot p_r = \left(\frac{-2\pi}{\ln w} \right)^{D/2} \prod_{1 \leq r < s \leq M} \left\{ c_{sr}^{-1/2} \exp \left(\frac{\ln^2 c_{sr}}{2 \ln w} \right) \right\}^{k_r \cdot k_s} \times \\ \times \exp \sum_{1 \leq r < s \leq M} \left\{ (k_r \cdot \xi_s - k_s \cdot \xi_r) \left(\frac{\ln c_{sr}}{\ln w} - \frac{1}{2} \right) - \xi_r \cdot \xi_s \frac{1}{\ln w} \right\}, \quad (8.1.56)$$

а произведение матричных элементов, через которое выражается след по ненулевым модам, обобщает формулу (8.1.24):

$$\prod_{n=1}^{\infty} \prod_{\mu=1}^{D-1} T_n^\mu = \prod_{n=1}^{\infty} (1-w^n)^{-D} \exp \left(- \sum_{r < s} k_r \cdot k_s \frac{c_{sr}^n + (w/c_{sr})^n - 2w^n}{n(1-w^n)} \right) \times \\ \times \exp \left(\sum_{r < s} (\xi_r \cdot k_s - \xi_s \cdot k_r) \frac{c_{sr}^n - (w/c_{sr})^n}{(1-w^n)} \right) \times \\ \times \exp \left(\sum_{r < s} \xi_r \cdot \xi_s n \frac{c_{sr}^n + (w/c_{sr})^n}{(1-w^n)} \right). \quad (8.1.57)$$

Объединение вкладов от нулевых и ненулевых мод дает выражение для I в случае внешних безмассовых векторных состояний

$$I(1, \dots, M) = [f(w)]^{2-D} \left(\frac{-2\pi}{\ln w} \right)^{D/2} \times \\ \times \exp \left[\sum_{r < s} (k_r \cdot k_s \ln \psi_{rs} + (k_r \cdot \xi_s - k_s \cdot \xi_r) \eta_{rs} + \xi_r \cdot \xi_s \Omega_{rs}) \right], \quad (8.1.58)$$

где в экспоненте опущены члены, включающие ξ_r^2 , поскольку в амплитуду дают вклад только члены, линейные по компонентам ξ_r . Функция ψ_{rs} в последнем выражении определена так же, как и раньше, а другие функции определены соотношениями $\eta_{rs} \equiv \eta(c_{sr}, w)$, где

$$\eta(c, w) = -\frac{1}{2} + \left(\frac{\ln c}{\ln w} \right) - \frac{c}{1-c} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{w^n/c}{1-w^n/c} - \frac{cw^n}{1-cw^n} \right), \quad (8.1.59)$$

и $\Omega_{rs} \equiv \Omega(c_{sr}, w)$, где

$$\Omega(c, w) = -\frac{1}{\ln w} + \frac{c}{(1-c)^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{w^n/c}{(1-w^n/c)^2} + \frac{cw^n}{(1-cw^n)^2} \right). \quad (8.1.60)$$

Функции η_{rs} и Ω_{rs} пропорциональны $\langle \dot{X}^i(\rho_r) \dot{X}^j(\rho_s) \rangle$ и $\langle \dot{X}^i(\rho_r) \dot{X}^j(\rho_s) \rangle$ соответственно. Эти корреляционные функции связаны с функцией ψ , определенной формулой (8.1.33), следующими соотношениями:

$$\eta(c, w) = c \frac{\partial}{\partial c} \ln \psi(c, w), \quad (8.1.61)$$

$$\Omega(c, w) = -c \frac{\partial}{\partial c} \eta(c, w). \quad (8.1.62)$$

Окончательное выражение для амплитуды имеет вид

$$A_P(1, 2, \dots, M) = g^M G_P \int_0^1 \frac{dw}{w^2} \int_0^1 \left(\prod_{r=1}^{M-1} \frac{d\rho_r}{\rho_r} \Theta(\rho_r - \rho_{r+1}) \right) [f(w)]^{-24} \times \\ \times \left(\frac{-2\pi}{\ln w} \right)^{D/2} \prod_{r < s} (\psi_{rs})^{k_r \cdot k_s} \exp \{ (k_r \cdot \xi_s - k_s \cdot \xi_r) \eta_{rs} + \xi_r \cdot \xi_s \Omega_{rs} \}, \quad (8.1.63)$$

где подразумевается, что необходимо оставлять только линейные по ξ_r члены.

Трансформационные свойства функций η_{rs} и Ω_{rs} при преобразовании переменных v_r и τ (или z_r и q , что эквивалентно) приведены в приложении 8.A. Прямые вычисления с использованием этих свойств позволяют выразить амплитуду через координаты кольца и проверить, что она имеет ту же расходимость в граничной точке $q=0$, которая была найдена для амплитуды с внешними тахионами. Это неудивительно, поскольку такое же выражение для рассеяния M безмассовых векторных состояний можно получить факторизацией амплитуды для $2M$ тахионов по полюсам безмассовых векторных частиц в каналах, образованных парами тахионов. Конечно, из предыдущего эвристического рассмотрения также следует, что расходимость не зависит от конкретного выбора внешних состояний.

8.1.2. Неориентируемые диаграммы

На рис. 8.6 изображен пример диаграммы в виде листа Мёбиуса, которая соответствует неориентируемой мировой поверхности. Соответствующая амплитуда содержит теоретико-групповой множитель

$$G_N = \eta \operatorname{tr} (\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_M). \quad (8.1.64)$$

Множитель η , представляющий собой зависящую от группы часть оператора твиста (см. описание этого оператора в разд. 7.1.6), равен: $\eta = +1$ для группы $USp(2n)$, $\eta = -1$ для группы $SO(n)$ и $\eta = 0$ для группы $U(n)$. Теоретико-групповой множитель для планарной амплитуды (8.1.1) содержит множитель $\operatorname{tr}(1) = n$, который в случае листа Мёбиуса отсутствует. Он был связан с внутренней границей кольца, изображенного на рис. 8.5, которая не имеет аналога в рассматриваемом случае, поскольку лист Мёбиуса имеет только одну границу.

Диаграмма в виде листа Мёбиуса может быть получена сшивкой древесных диаграмм, так же как и раньше, однако в соответствующем месте необходимо вставить оператор твиста Ω . Чтобы получить полное выражение для амплитуды с заданным порядком частиц вдоль границы мировой поверхности, т. е. когда λ -матрицы в теоретико-групповом множителе имеют фиксированный порядок, необходимо сложить вклады от диаграмм с различным распределением твистов во внутренних пропагаторах. При этом необходимо учесть любое нечетное число твистов, поскольку все они приводят к диаграммам в виде листа Мёбиуса. Случай отсутствия твистов соответствует планарной диаграмме, рассмотренной в предыдущем разделе, а любое четное положительное число твистов дает одну из ориентируемых

непланарных диаграмм, которые рассмотрены в следующем разделе.

Вклад в амплитуду от конкретной диаграммы, содержащей оператор твиста в пропагаторе между частицами 1 и M , имеет вид

$$A_N(1, 2, \dots, M) = g^M G_N \int d^D p \operatorname{Tr} (\Omega \Delta V_0(k_1, 1) \Delta V_0(k_2, 1) \dots \Delta V_0(k_M, 1)), \quad (8.1.65)$$

где, как описано в разд. 7.1.6, оператор твиста равен $\Omega = (-1)^{N-1}$, N — оператор числа частиц, построенный из бозонных (и духовых) мод. Выражение (8.1.65) отличается от формулы (8.1.5) только вставкой оператора твиста и заменой G_P на G_N . Вычисляя, как и раньше, следы по осцилляторным модам, получим, что одно из следствий наличия оператора твиста сводится к изменению знака переменной $\omega = x_1 x_2 \dots x_M$ в (8.1.24), но не в интеграле по импульсам нулевых мод, для которого остается применимой формула (8.1.17). В результате функция $\psi(c_{sr}, \omega)$ в (8.1.33) заменяется на функцию $\psi^N(c_{sr}, \omega)$, которая определена следующим выражением:

$$\psi^N(c, \omega) = \frac{1-c}{\sqrt{c}} \exp\left(\frac{\ln^2 c}{2 \ln \omega}\right) \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(1 - (-\omega)^n c) (1 - (-\omega)^n / c)}{(1 - (-\omega)^n)^2}. \quad (8.1.66)$$

Полученное выражение можно переписать в виде, аналогичном (8.1.50):

$$\psi^N(\rho, \omega) = -2\pi i \exp\left(\frac{i\pi v'^2}{\tau'}\right) \frac{\theta_1(v' | \tau' + 1/2)}{\theta_1'(0 | \tau' + 1/2)}, \quad (8.1.67)$$

где переменные v' и τ' определены в (8.1.51) и (8.1.52). Множитель $\Omega = (-1)^N$ в (8.1.65) также приводит к замене $f(\omega) \rightarrow f(-\omega)$ как для α -осцилляторов, так и для духовых осцилляторов, поскольку N включает все моды.

Другие вклады в неориентируемую однопетлевую амплитуду с тем же теоретико-групповым множителем возникают от петель с нечетным числом операторов Ω , но с той же последовательностью частиц вдоль границы листа Мёбиуса. Эти диаграммы нетривиальным образом расширяют область интегрирования по переменным ρ_r , добавляя новые области. Например, диаграммы, дающие вклад в амплитуду с четырьмя внешними состояниями, показаны на рис. 8.13. Четыре из них содержат по одному пропагатору с твистом (включая диаграмму, рассмотренную ранее), а четыре остальные диаграммы содержат по три пропагатора с твистами.

Мировая поверхность в виде листа Мёбиуса отображается на полукольцо в верхней полуплоскости ρ , как показано на

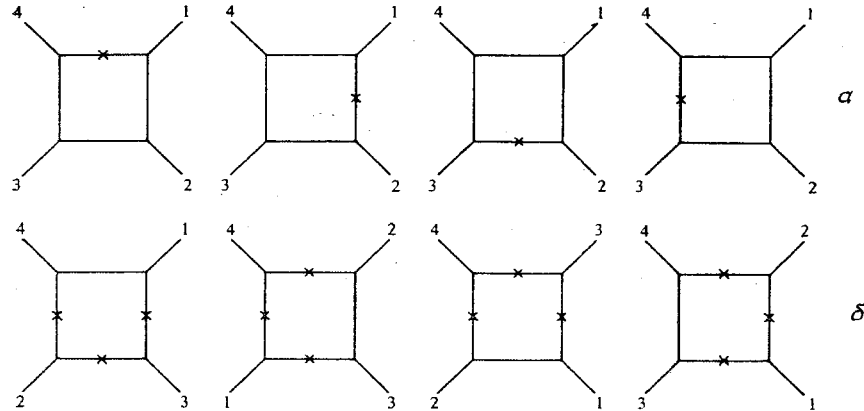


Рис. 8.13. Вклады в однопетлевую неориентируемую диаграмму, показанную на рис. 8.6, с четырьмя внешними частицами изображаются диаграммами с мировыми поверхностями в виде листа Мёбиуса, причем порядок частиц соответствует теоретико-групповому множителю $ig(\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4)$. *a* — четыре диаграммы, содержащие по одному пропэгатору с твистом; *b* — четыре диаграммы, содержащие по три пропэгатора с твистами.

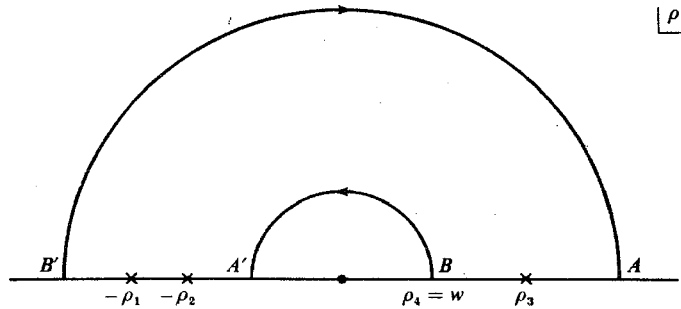


Рис. 8.14. Представление листа Мёбиуса в виде полукольца в комплексной плоскости ρ . Точку ρ необходимо отождествить с точкой $-\omega\rho$ и таким образом отождествить между собой дуги кольца с измененной ориентацией, как показано стрелками. При этом точка *A* отождествляется с *A'*, а *B* — с *B'*. Граница листа Мёбиуса изображается отрезками действительной оси от *A* к *B* и от *B'* к *A'*.

рис. 8.14. В этом случае каждая точка ρ отождествляется с точкой $-\omega\rho$, и таким образом внутренняя и внешняя границы кольца отождествляются между собой после изменения ориентации, как показано стрелками. Единственная граница листа

Мёбиуса отображается на отрезки (A, B) и (A', B') действительной оси. Различные диаграммы, изображенные на рис. 8.13, дают вклады в полную амплитуду, причем все подынтегральные выражения имеют одинаковый вид, но области интегрирования по переменным ρ_r различны. Для первой из этих диаграмм интегрирование по переменным ρ_r проводится по интервалу $(\omega, 1)$ (между *A* и *B*) с фиксированной последовательностью частиц (1, 2, 3, 4). Для других диаграмм по крайней мере одна из переменных ρ_r умножается на -1 . В результате вклады отдельных диаграмм объединяются таким образом, что в сумме интегрирование проводится по всей границе $(1, \omega)$ и $(-1, -\omega)$ ((A, B) и (B', A')) при фиксированной последовательности переменных.

Для изучения расходимости этого вклада в амплитуду в пределе $\omega = 1$ снова удобно перейти к переменным ν_r и τ ((8.1.46) и (8.1.48)). С использованием свойств функции ψ^N , приведенных в приложении 8.А, ее можно записать в виде ¹⁾

$$\begin{aligned} \psi^N(c, \omega) &= \frac{4\pi^2}{\ln q} \frac{\theta_1(-\nu/2 | \tau/2 - 1/2)}{\theta_1'(0 | \tau/2 - 1/2)} = \\ &= -\frac{4\pi}{\ln q} \sin \frac{\pi\nu}{2} \prod_1^\infty \frac{1 - 2(-\sqrt{q})^n \cos \pi\nu + q^n}{(1 - (-\sqrt{q})^n)^2}. \end{aligned} \quad (8.1.68)$$

Функцию распределения также можно преобразовать, используя формулу

$$\frac{1}{\omega} [f(-\omega)]^{-24} = \left(\frac{-2\pi}{\ln q}\right)^{12} q^{-1/2} [f(-\sqrt{q})]^{-24}, \quad (8.1.69)$$

которая является аналогом формулы (8.1.54) в случае неориентируемых струн.

Выражение для суммы всех диаграмм, дающих вклады в амплитуду с заданной циклической последовательностью частиц, имеет вид (при $D = 26$)

$$\begin{aligned} A_N(1, 2, \dots, M) &= G_N g^M \pi^{M-1} 2^{12-M} \times \\ &\times \int_0^2 \prod_1^{M-1} \Theta(\nu_{r+1} - \nu_r) d\nu_r \int_0^1 \frac{dq}{q^{3/2}} [f(-\sqrt{q})]^{-24} \times \\ &\times \prod_{r < s} \left(\sin \frac{\pi\nu_{sr}}{2} \prod_1^\infty \frac{1 - 2(-\sqrt{q})^n \cos \pi\nu_{sr} + q^n}{(1 - (-\sqrt{q})^n)^2} \right)^{k_r \cdot k_s}. \end{aligned} \quad (8.1.70)$$

¹⁾ Здесь $q = e^{i\pi\tau}$ (см. (8.1.48)). — Прим. ред.

где $v_{sr} = v_s - v_r$. Снова в подынтегральном выражении степени $\ln q$ сокращаются при $D = 26$. Угловые переменные $2\pi\nu_r$ теперь изменяются от 0 до 4π , поскольку, для того чтобы обойти границу листа Мёбиуса, необходимо сделать два оборота.

Выражение для неориентируемой однопетлевой диаграммы расходится также в граничной точке $q = 0$. Объяснение этой расходимости требует знания нескольких простых свойств листа

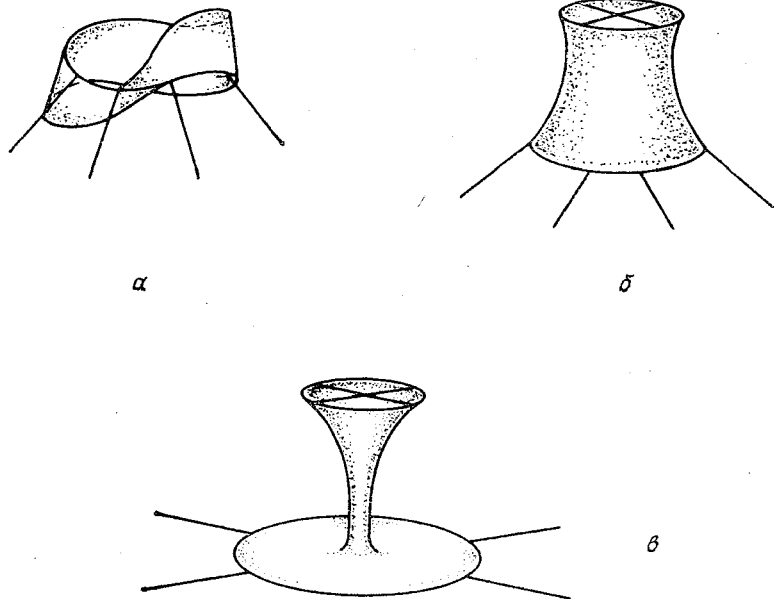


Рис. 8.15. *a* — простейшее изображение листа Мёбиуса, когда не вся граница является видимой; *b* — поскольку граница представляет собой окружность, вблизи границы лист Мёбиуса можно изобразить в виде обыкновенного цилиндра, заканчивающегося «кросс-кэпом», который символически изображен на рисунке; *в* — между границей и «кросс-кэпом» цилиндр может быть сильно вытянутым.

Мёбиуса. Лист Мёбиуса нетрудно нарисовать и представить в виде, показанном на рис. 8.15, *a*; при этом граница выглядит немного спутанно и видна не полностью. При таком изображении тот факт, что граница листа Мёбиуса в действительности является обыкновенной окружностью, ускользает от внимания. Как легко видеть, вблизи границы лист Мёбиуса представляет собой цилиндр. Этот цилиндр, конечно, не может заканчиваться второй границей — он замыкается сам на себя, и возникает такая конфигурация, которую довольно трудно нарисовать или

представить и которую иногда называют «кросс-кэп». Она условно изображена на рис. 8.15, *b*. Что произойдет, если стянуть границу на рис. 8.15, *b* в точку и склеить? Тогда получится замкнутая, но не ориентируемая мировая поверхность — проективная плоскость RP^2 . Эта поверхность является мировой поверхностью неориентированных замкнутых струн; она будет рассмотрена в разд. 8.3.1.

Поведение неориентируемой диаграммы для открытой струны при $\omega \rightarrow 1$, как показано на рис. 8.15, *в*, соответствует такой конфигурации, когда замкнутая струна распространяется в течение длительного собственного времени от открытой границы к «кросс-кэпу». Тахионная расходимость не зависит от деталей «начального» и «конечного» состояний «в кросс-канале», а зависит только от массы тахиона (и дилатона), вот почему неориентируемые диаграммы имеют ту же расходимость, что и ориентируемые.

Формы подынтегральных выражений для неориентируемой и планарной петель похожи между собой. В частности, функция ψ^N связана с ψ соотношением

$$\psi^N(z, q^2) = 2\psi(z^{1/2}, -q^{1/2}). \quad (8.1.71)$$

Поэтому после замены переменных

$$q' = q^{1/4}, \quad z' = z^{1/2} \quad (8.1.72)$$

в (8.1.70) формулы для планарной и неориентируемой петель становятся очень похожими. (Из (8.1.45) следует, что замена $z \rightarrow z^{1/2}$ соответствует замене $\nu \rightarrow \nu/2$.) Тогда расходимости ориентируемых диаграмм принимают ту же форму, что и расходимости планарных диаграмм. Этот факт важен при рассмотрении возможности сокращения расходимостей в сумме планарных и неориентируемых диаграмм. Мы не будем обсуждать этот вопрос для бозонной теории, где наряду с расходимостью $1/q'$, связанной с испусканием дилатона с нулевым импульсом, существо дела усложнено наличием ведущей расходимости $1/q'^3$, связанной с тахионом замкнутой струны. При рассмотрении суперструн типа I в следующих двух главах мы покажем, что расходимости $1/q^3$ не возникают, поэтому важнее сконцентрировать внимание на сокращении расходимостей $1/q$.

8.1.3. Непланарные петлевые диаграммы

Третий и последний класс однопетлевых диаграмм для открытых струн, который необходимо рассмотреть, включает в себя мировые поверхности, топологически представляющие собой кольца с внешними частицами, присоединенными к внутренней

и внешней границам (см. рис. 8.7). Если допустить, что K внешних частиц присоединены к внешней границе кольца, а $(M-K)$ — к внутренней, тогда диаграмма включает следующий теоретико-групповой множитель:

$$G_T = \text{tr}(\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_K) \text{tr}(\lambda_{K+1} \lambda_{K+2} \dots \lambda_M), \quad (8.1.73)$$

где каждой границе соответствует по одному следу. Планарная диаграмма, которая исследовалась в разд. 8.1.1, соответствует вырожденному случаю $K=0$.

При сшивании деревьев с целью получения петлевой амплитуды возникает ряд членов с четным числом твистов, которые дают вклад в амплитуды с одинаковым циклическим порядком частиц вдоль каждой из двух границ. Например, вклады в четырехчастичную амплитуду с теоретико-групповым множителем

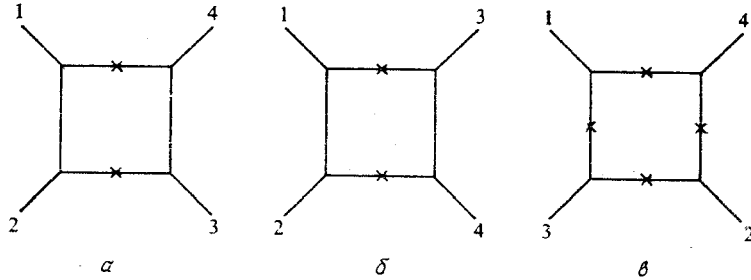


Рис. 8.16. Вклады в непланарную четырехчастичную амплитуду с теоретико-групповым множителем $\text{tr}(\lambda_1 \lambda_2) \text{tr}(\lambda_3 \lambda_4)$. α, β — две диаграммы, содержащие по два твиста; γ — диаграмма с четырьмя твистами.

$\text{tr}(\lambda_1 \lambda_2) \text{tr}(\lambda_3 \lambda_4)$ показаны на рис. 8.16. Эти вклады отличаются только относительным порядком внутри пар частиц на разных границах. Так же как и в случае неориентируемых диаграмм, различные конфигурации дают амплитуды, представляющие собой интегралы по различным областям от одного и того же выражения. Поэтому достаточно вычислить один из интегралов, а затем соответствующим образом расширить область интегрирования. В этом случае мировая поверхность амплитуды снова отображается на полукольцо, описывающее цилиндрическую мировую поверхность и изображенное на рис. 8.9. Два интервала вещественной оси между ω и 1 и между $-\omega$ и -1 представляют собой две границы цилиндра, к каждой из которых присоединены по две линии внешних частиц. Тщательный анализ показывает, что диаграммы на рис. 8.16 в сумме покрывают область $\omega \leq \rho_1, \rho_2 \leq 1, -1 \leq \rho_3, \rho_4 \leq -\omega$ в точности один раз.

Мы рассмотрим типичный пример, который дает диаграмма с двумя твистами, изображенная на рис. 8.7. Она задается выражением (для внешних тахионных состояний на массовой оболочке)

$$A_T(1, 2, \dots, K; K+1, \dots, M) = \\ = g^M G_T \int d^D p \text{Tr}(\Omega \Delta V_0(k_1, 1) \dots \Delta V_0(k_K, 1) \times \\ \times \Omega \Delta V_0(k_{K+1}, 1) \dots \Delta V_0(k_M, 1)). \quad (8.1.74)$$

Отметим, что частицы с номерами $1, \dots, K$ присоединены к одной границе, а частицы $K+1, \dots, M$ — к другой. При вычислении следа в этом выражении множители Ω можно исключить путем коммутирования одного из множителей Ω с вершинами и пропагаторами, соответствующими одной границе, скажем $1, \dots, K$, до тех пор, пока он не дойдет до другого множителя и не сократится, благодаря равенству $\Omega^2 = 1$. Единственным следствием этого коммутирования является замена переменных ρ_r в (8.1.11) на $-\rho_r$, т. е. замена $-\nu_r/\tau$ на $-\nu_r/\tau + 1/2$ при $r = 1, \dots, K$. Если r и s принадлежат разным границам, то у переменных c_{sr} в (8.1.18) меняются также знаки. В результате множители $\psi(c_{sr}, \omega)$ остаются без изменений, если r и s принадлежат одной границе, в то время как при свертке частиц на разных границах функции ψ_{rs} заменяются на функции ψ_{rs}^T , определяемые выражением

$$\psi_{sr}^T(c, \omega) = \frac{1+c}{\sqrt{c}} \exp\left(\frac{\ln^2 c}{2 \ln \omega}\right) \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(1+\omega^n c)(1+\omega^n/c)}{(1-\omega^n)^2} = \\ = 2\pi \exp\left(\frac{\ln^2 c}{2 \ln \omega}\right) \frac{\theta_2(\nu'|\tau')}{\theta_1'(0|\tau')}. \quad (8.1.75)$$

Отметим, что замена c на $-c$ производится только в множителях, возникающих от следов по осцилляторным модам. Дифференциал импульсов в интеграле (8.1.17) не меняется и остается таким же, как в случае планарной диаграммы.

Для всех вкладов в примере четырехчастичной амплитуды переменные ρ_1 и ρ_2 соответствуют внешним частицам, присоединенным к граничному отрезку между точками -1 и $-\omega$, и умножаются на -1 . Для первой диаграммы на рис. 8.16 выполнены неравенства $\rho_4 = \omega \leq \rho_3 \leq \rho_2 \leq \rho_1 \leq 1$. Сумма других диаграмм, приведенных на этом рисунке, заполняет оставшуюся область интегрирования $-1 \leq -\rho_1, -\rho_2 \leq -\omega, \omega = \rho_4 \leq \rho_3 \leq 1$, которая соответствует случаю, когда частицы 1 и 2 присоединены к одной из границ, а частицы 3 и 4 — к другой.

Общий результат для M частиц сводится к тому, что по двум наборам переменных ρ_r , связанных с каждой границей, интегрирование проводится независимо один раз вдоль границы, сохраняя порядок частиц на каждой границе неизменным и фиксируя значение одной из переменных, например ρ_M , в точке ω .

Как и раньше, геометрическое значение переменных интегрирования становится ясным после перехода к переменным ν_r и τ . Чтобы продемонстрировать это, воспользуемся прежде всего трансформационными свойствами функции ψ^T , приведенными в приложении 8.A, где доказана справедливость формулы

$$\begin{aligned} \psi^T &= - \left(\frac{2\pi^2}{\ln \omega} \right) \frac{\theta_4(\nu | \tau)}{\theta_1'(0 | \tau)} = \\ &= - \left(\frac{\pi}{\ln q} \right) q^{-1/4} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1 - 2q^{2n-1} \cos 2\pi\nu + q^{4n-2}}{(1 - q^{2n})^2}. \end{aligned} \quad (8.1.76)$$

Вклады в непланарную амплитуду, возникающие при различном расположении четного числа твистов во внутренних пропагаторах, интегрируются по области переменных ν_r , которая определяется областью изменения переменных ρ_r . Когда эти вклады складываются вместе для получения полного вклада, связанного с теоретико-групповым множителем (8.1.73), то в результате интегрирование по переменным ν_r проводится один раз вдоль внешней и внутренней границ кольца независимо, сохраняя циклический порядок частиц неизменным для каждой границы в отдельности (при этом значение ν_M фиксируется равным 1). Обозначив область интегрирования через R , получаем, что полный вклад непланарной диаграммы в амплитуду, который умножается на (8.1.73), при $D = 26$ имеет вид

$$\begin{aligned} A_T &= G_T \frac{1}{\pi} \int_R \prod_{r=1}^{M-1} d\nu_r \int_0^1 \frac{dq}{q^3} \left(\frac{-2\pi^2}{\ln q} \right)^M [f(q^2)]^{-24} \times \\ &\times \prod_{1 \leq r < s \leq K} (\psi_{rs})^{k_r \cdot k_s} \prod_{K+1 \leq r < s \leq M} (\psi_{rs})^{k_r \cdot k_s} \prod_{\substack{1 \leq r \leq K \\ K+1 \leq s \leq M}} (\psi^T_{rs})^{k_r \cdot k_s}. \end{aligned} \quad (8.1.77)$$

Поскольку каждая из формул для ψ и ψ^T содержит множитель $(\ln q)^{-1}$, полная степень $\ln q$ от этих множителей равна

$$\prod_{r < s} (-\ln q)^{-k_r \cdot k_s} = (-\ln q)^M; \quad (8.1.78)$$

таким образом, множители $\ln q$ сокращаются, так же как и в предыдущих вычислениях. (Этот результат не справедлив при

$D \neq 26$.) В рассматриваемом случае возникает отличие из-за множителя $q^{-1/4}$ в формуле (8.1.76) для ψ^T . Он приводит к появлению множителя

$$\prod_{\substack{1 \leq r \leq K \\ K+1 \leq s \leq M}} q^{-k_r \cdot k_s / 4} = q^{-s/4}, \quad (8.1.79)$$

где

$$s = - \left(\sum_{r=1}^K k_r \right)^2, \quad (8.1.80)$$

а также использован закон сохранения импульса $\sum_{r=1}^M k_r = 0$. С физической точки зрения s представляет собой квадрат инвариантной энергии, связанной с каналом $1, \dots, K \rightarrow K+1, \dots, M$, в котором все входящие частицы принадлежат одной границе, а все выходящие частицы — другой.

Поскольку подынтегральное выражение в (8.1.77) содержит множитель $q^{-s/4-3}$, а остальная часть является аналитической функцией q^2 , вблизи точки $q = 0$ интеграл сходится при $s < -8$. Если интеграл продолжить аналитически по s до значений -8 и далее, то наличие расходимостей при интегрировании по q приводит к тому, что по s возникают сингулярности в точках $s/4 = -2, 0, 2, \dots$. При $D \neq 26$ подынтегральное выражение содержит неисчезающую степень $\ln q$, которая превращает сингулярности в точки ветвления. Это приводит к нарушению унитарности, так как дает нетривиальные вклады в мнимую часть петлевой амплитуды, которые возникают из-за скачков амплитуды на соответствующих линиях разреза и не равны интегралам от древесных диаграмм по фазовому пространству.

В предыдущих разделах приведено много причин, по которым в теории бозонных струн размерность $D = 26$ предпочтительнее, чем $D < 26$. Только при $D = 26$ различные способы квантования (например, ковариантное квантование и квантование в калибровке светового конуса) приводят к одному и тому же ответу. Именно в 26 измерениях сокращается конформная аномалия, квантование в калибровке светового конуса дает ковариантный ответ, а оператор BRST является нильпотентным. Тем не менее скептически настроенный читатель может настаивать на том, что старая схема ковариантного квантования приводит к лоренц-инвариантному спектру без дубов в любой размерности, меньшей 26. Почему этого недостаточно для построения удовлетворительной теории с взаимодействием? То, что было продемонстрировано выше, возможно, дает окончательный ответ на этот вопрос. При $D < 26$ действительно удается построить теорию свободных частиц и даже ввести взаимодействие на

древесном уровне, однако на однопетлевом уровне нарушается унитарность¹⁾.

При $D = 26$ степени $\ln q$ сокращаются, а сингулярности в точках $s/4 = -2, 0, 2, \dots$ являются простыми полюсами. В этом случае все вклады в мнимую часть амплитуды имеют вид δ -функций от положений полюсов. Их можно согласовать с унитарностью, если эти полюсы соответствуют физическим состояниям теории. (Именно таким образом Лавлейс впервые обнаружил необходимость условия $D = 26$.) Тот факт, что выражение для G_T содержит следы по начальному и конечному состояниям в s -канале в виде отдельных множителей, означает, что этот канал является синглетом по калибровочной группе. Поэтому любые полюсы в s -канале, соответствующие частицам, с групповой точки зрения представляют собой синглеты. Как и ожидалось, при изучении деформаций мировой поверхности струны, изображенной на рис. 8.7, эти состояния являются просто состояниями замкнутой струны. К тому же положения полюсов согласуются с вычисленным ранее спектром масс замкнутых бозонных струн.

Зависимость подынтегрального выражения от s такая же, как зависимость, которая предполагалась при обсуждении возможной интерпретации расходимости планарной петли. В рассмотренном ранее случае были приведены аргументы в пользу того, что расходимости можно интерпретировать как возникающие от состояний замкнутой струны, имеющих нулевой импульс и исчезающих в вакууме; они похожи на расходимости, возникающие при рассмотрении непланарных диаграмм в случае $K = 0$. Путем изучения факторизационных свойств вычетов в полюсах амплитуды A_T , соответствующих замкнутой струне, можно проверить, что спектр промежуточных состояний замкнутой струны в точности совпадает со спектром масс в теории замкнутых струн. (Детали вычислений не приводятся из-за сложности.)

Помимо полюсов, соответствующих замкнутым струнам, в s -канале присутствуют полюсы с синглетными квантовыми числами, которые соответствуют открытым струнам. Эти полюсы возникают в интеграле тогда, когда переменные в одном из двух наборов v_r (например, $r = 1, \dots, K$), связанные со

¹⁾ Несмотря на это, добавление «лиувиллевских мод», которые возникают при квантовании с помощью функциональных интегралов и не сокращаются при $D < 26$, возможно, позволит построить унитарную теорию. Большинство подходов к этой проблеме показывает, что унитарная теория, если она существует, не содержит безмассовых частиц, которые представляют основной интерес при рассмотрении дуальных моделей как моделей, включающих гравитацию и другие фундаментальные взаимодействия.

всеми частицами на одной из границ, принимают одинаковое значение, не зависящее от величины q . Амплитуда в s -канале имеет также двойные полюсы, соответствующие открытым струнам, которые возникают в пределе, когда координаты v_r остальных частиц в s -канале ($r = K + 1, \dots, M$) также принимают одинаковое значение.

Существует связь между полюсами, соответствующими открытым и замкнутым струнам, которая возникает в пределе, когда переменные v_r на границе принимают одинаковое значение для всех частиц, а $q \rightarrow 0$. Эта связь приводит к перемешиванию частиц из сектора замкнутых струн с синглетными состояниями в секторе открытых струн. В частности, для калибровочной группы $U(n) = SU(n) \times U(1)$ существует безмассовое векторное состояние открытой струны, связанное с множителем $U(1)$, которое с помощью описанного механизма может перемешиваться с безмассовым антисимметричным тензорным состоянием замкнутой струны. Если это происходит, то они объединяются таким образом, что за счет разновидности динамического механизма Хиггса возникает массивное антисимметричное тензорное состояние. Однако, как уже было отмечено, группа $U(n)$ не согласуется с суперсимметрией в теории суперструн. Для допустимых калибровочных групп $SO(n)$ и $USp(n)$ четные массовые уровни не содержат синглетов (они преобразуются по присоединенному представлению). Нечетные уровни содержат синглеты, но ни один из синглетов не имеет той же массы, что и состояния из спектра замкнутой струны. Таким образом, сильного перемешивания уровней не существует (по крайней мере в рамках теории возмущений).

8.2. Однопетлевые амплитуды для замкнутых струн

Рассмотрим теперь однопетлевые амплитуды рассеяния с внешними замкнутыми струнами. Если по петле распространяется открытая струна, как на рис. 8.17, а, то амплитуду можно построить таким же образом, как в предыдущем разделе при анализе амплитуд для открытых струн; нужно просто заменить вершинные операторы открытой струны для внешних линий на вершинные операторы замкнутой струны. Поэтому мы ограничимся случаем, изображенным на рис. 8.17, б, когда внешние и внутренние линии соответствуют замкнутым струнам. Этот случай выявляет новые очень важные свойства.

В теории ориентированных замкнутых бозонных струн диаграмма Фейнмана представляется мировой поверхностью, которая является замкнутой ориентируемой поверхностью рода l (т. е. которая имеет l ручек), где l — число петель. Поскольку

для каждого значения l топология мировой поверхности единственна, в каждом порядке теории возмущений необходимо рассматривать только одну струнную амплитуду. В теории неориентированных замкнутых струн унитарность требует включения также и неориентируемых поверхностей (таких, как бутылка Клейна). В обоих случаях теоретико-групповой множитель отсутствует. В настоящем разделе рассмотрена только одна диаграмма, которая представляет собой ориентируемую поверхность рода $l=1$, т. е. тор. Соответствующие

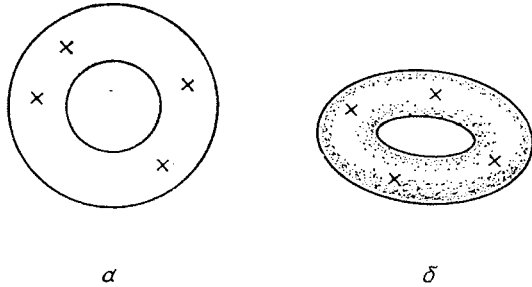


Рис. 8.17. Однопетлевые диаграммы для рассеяния замкнутых струн. *a* — распространение открытой струны в петле; *b* — распространение замкнутой струны в петле.

амплитуды, так же как для петель открытых струн, можно построить путем сшивания древесных диаграмм. Несмотря на то что в рассматриваемом случае топология единственна, для получения всей области интегрирования в операторном формализме необходимо учесть все возможные расположения внешних частиц. Это обстоятельство уже возникало при анализе древесных амплитуд для замкнутых струн в разд. 7.2.1. Оно отражает тот факт, что естественного упорядочения внешних замкнутых струн на мировой поверхности не существует.

8.2.1. Тор

Остановимся на амплитуде рассеяния M состояний замкнутой струны на массовых поверхностях, которая представляет собой тор. Те же аргументы, которые были приведены в случае открытых струн, дают для амплитуды следующее выражение:

$$A_C(1, 2, \dots, M) = \kappa^M \int d^D p \operatorname{Tr} (\Delta V(k_1, 1) \Delta V(k_2, 1) \dots V(k_M, 1)) \quad (8.2.1)$$

при заданном циклическом порядке частиц. В этом выражении Δ — пропагатор замкнутой струны, а V — вершинный оператор

замкнутой струны, который описан в разд. 7.2.1. В отличие от открытых струн выражение (8.2.1) необходимо модифицировать. Прежде всего необходимо просуммировать по упорядочениям внешних состояний. Во-вторых, выражение (8.2.1) отличается от правильного результата на бесконечный множитель, наличие которого при первом рассмотрении может показаться удивительным.

Используя функциональные интегралы по мировым поверхностям, которые обсуждались в разд. 1.4, амплитуду рассеяния для тора можно выразить через интегралы по мировой поверхности тороидальной топологии, включая интеграл по всем возможным конформным структурам тора. В разд. 3.3 показано, что конформные структуры на торе задаются одним комплексным параметром, для которого введены довольно тонкие дискретные отношения эквивалентности, соответствующие действию модулярной группы $SL(2, Z)$. Как будет ясно из дальнейшего, этот параметр в действительности совпадает с параметром τ , введенным в разд. 8.1. Ниже будет показано, что выражение (8.2.1) содержит интегрирование по τ без учета дискретного $SL(2, Z)$ -отношения эквивалентности. В рассматриваемом формализме нам необходимо руками явно выделить действие группы $SL(2, Z)$. В гл. 11 развит формализм, в котором отношение эквивалентности относительно действия группы $SL(2, Z)$ возникает автоматически, но этому формализму присущи другие недостатки, в частности отсутствие явной лоренц-ковариантности. Формализм, удовлетворительный со всех точек зрения, который надлежащим образом включал бы все физические принципы, до сих пор не разработан; он, безусловно, представлял бы собой существенное развитие теории. В дальнейшем мы неоднократно будем обсуждать роль модулярной группы, но сначала необходимо провести математический анализ выражения (8.2.1).

Вершинные операторы в выражении (8.2.1) соответствуют произвольным физическим состояниям замкнутой струны. Простейшими примерами являются тахионные и безмассовые состояния, обсуждавшиеся в разд. 7.2.1. Чтобы не усложнять вычислений, мы обсудим только амплитуды с внешними тахионами. Такие амплитуды иллюстрируют большинство существенных свойств теории. В случае внешних тахионов амплитуду можно записать в виде

$$A_C(1, 2, \dots, M) = \left(\frac{\kappa}{4\pi}\right)^M \int \frac{d^2 w}{|w^4|} \times \times \int \prod_{r=1}^{M-1} \frac{d^2 \rho_r}{|\rho_r|^2} \Theta(|\rho_r| - |\rho_{r+1}|) I_C(1, 2, \dots, M), \quad (8.2.2)$$

где

$$I_C(1, 2, \dots, M) = \int d^D p \operatorname{Tr} (V(k_1, \rho_1) \dots V(k_M, \rho_M) \omega^{L_0} \bar{\omega}^{\tilde{L}_0}). \quad (8.2.3)$$

В этом выражении вершины для замкнутых струн определены так же, как в (7.2.11):

$$V(k_r, \rho_r) \equiv V(k_r, \rho_r, \bar{\rho}_r) = V_R\left(\frac{1}{2} k_r, \rho_r\right) V_L\left(\frac{1}{2} k_r, \bar{\rho}_r\right). \quad (8.2.4)$$

Здесь комплексные параметры ρ_r и ω выражаются через переменные z_r , параметризующие пропагаторы, с помощью уравнений, аналогичных (8.1.12) и (8.1.13):

$$\rho_r = z_1 \dots z_r, \quad (8.2.5)$$

$$\rho_M = \omega = z_1 \dots z_M. \quad (8.2.6)$$

Основную структуру тора как мировой поверхности можно прояснить простыми преобразованиями (8.2.3). Пусть H и P — «гамильтониан» и «импульс» замкнутой струны, рассматриваемой с точки зрения $(1+1)$ -мерной квантовой теории поля. Они связаны с L_0 и \tilde{L}_0 следующими соотношениями:

$$L_0 = \frac{1}{2}(H + P), \quad \tilde{L}_0 = \frac{1}{2}(H - P). \quad (8.2.7)$$

Таким образом, множитель $\omega^{L_0} \bar{\omega}^{\tilde{L}_0}$ в (8.2.3) принимает вид

$$(\omega \bar{\omega})^{H/2} (\omega/\bar{\omega})^{P/2}. \quad (8.2.8)$$

Если положить

$$\omega \bar{\omega} = e^{-2y}, \quad \omega/\bar{\omega} = e^{2ix}, \quad (8.2.9)$$

то без учета сложных вставок вершинных операторов выражение (8.2.3) будет содержать множитель

$$\operatorname{Tr} (e^{-yH} e^{ixP}). \quad (8.2.10)$$

Теперь видно, что $\exp\{-yH\}$ представляет собой оператор, который описывает распространение замкнутой струны в мнимом времени y . Матричный элемент $\langle f | \exp\{-yH\} | i \rangle$ можно представить в виде функционального интеграла по цилиндру длины y с длиной образующей окружности π ; граничные условия на концах цилиндра определены состояниями $|i\rangle$ и $|f\rangle$, как показано на рис. 8.18, а. След $\operatorname{Tr} \exp\{-yH\} = \sum_i \langle i | \exp\{-yH\} | i \rangle$ можно представить в виде функционального интеграла по тору, полученному при склейке концов цилиндра, как показано на рис. 8.18, б. В выражении (8.2.10) под знаком следа стоит дополнительный множитель $\exp\{ixP\}$. Этот оператор поворачивает

замкнутую струну на угол $x = 2\sigma$, таким образом, след в выражении (8.2.10) относится к тору, полученному в результате склеивания открытого цилиндра, изображенного на рис. 8.18, а, концы которого повернуты относительно друг друга на угол x . Эта ситуация изображена на рис. 8.18, в. Именно таким способом операторный формализм воспроизводит интегрирование по мировым поверхностям струн. Комплексный параметр $\tau = (x + iy)/2\pi$ представляет собой единственный инвариант, опреде-

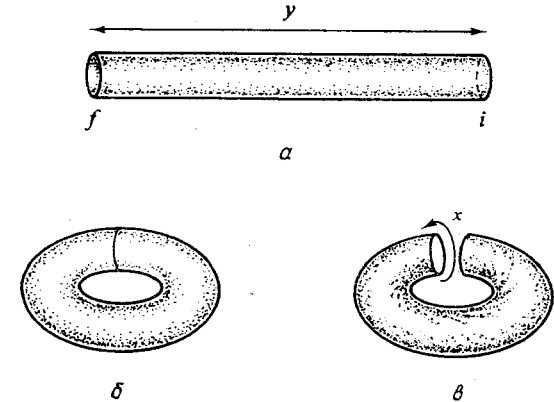


Рис. 8.18. а — струна, распространяющаяся в мнимом времени между начальным и конечным состояниями $|i\rangle$ и $|f\rangle$; б — склейка концов цилиндра дает тор, что соответствует взятию следа $\operatorname{Tr} e^{-yH}$; в — перед склейкой основание цилиндра повернули (добавили твист) на угол x .

ляющий конформную структуру тора; этот параметр уже появлялся в разд. 3.3. На самом деле τ не является точным инвариантом, характеризующим комплексную структуру, и на него необходимо наложить определенные дискретные соотношения эквивалентности, как объяснено в разд. 3.3. Эти соотношения необходимо наложить «руками», что приведет к изменению формулы (8.2.2) и обсуждается в разд. 8.2.2.

В предыдущем рассмотрении мы пренебрегли вершинными множителями в (8.2.3). Конечно, они являются существенными, поскольку позволяют вставлять операторы в точки на мировой поверхности, которые определяются переменными интегрирования ρ_r . Таким путем устанавливается связь между операторным формализмом и функциональными интегралами по всем возможным мировым поверхностям и всем возможным расположениям операторных вставок.

Теперь ясно, что импульс нулевой моды появляется таким же образом, как в случае петель открытых струн (основное

отличие сводится к добавочным множителям $1/4$ в коэффициентах при p^2 в L_0 и \bar{L}_0 . Интегрирование по импульсу нулевой моды в петле дает множитель, очень напоминающий множитель в выражении (8.1.17):

$$\int d^D p \prod_{r=1}^M |z_r|^{p^2/4} = \left(\frac{-4\pi}{\ln|\omega|} \right)^{D/2} \prod_{1 \leq r < s \leq M} \left\{ |c_{sr}|^{-1/2} \exp \left(\frac{\ln^2 |c_{sr}|}{2 \ln|\omega|} \right) \right\}^{k_r \cdot k_s / 2}, \quad (8.2.11)$$

где переменные $c_{sr} = \rho_s / \rho_r$ определены через комплексные переменные ρ_r так же, как в формуле (8.1.18).

Вычисление следов по осцилляторам включает алгебраические выкладки, похожие на выкладки для открытых струн. В рассматриваемом случае возникает множитель T_n^μ , заданный выражением (8.1.24) для каждой ненулевой моды, движущейся влево, который умножается на комплексно-сопряженную величину, соответствующую модам, движущимся вправо. Объединение этих множителей с множителем от нулевой моды в (8.2.11) приводит к следующему выражению (при $D = 26$):

$$I_C(1, \dots, M) = |f(\omega)|^{-48} \left(\frac{-4\pi}{\ln|\omega|} \right)^{13} \exp \left\{ \sum_{r < s} \frac{1}{2} k_r \cdot k_s \ln \chi_{rs} \right\}, \quad (8.2.12)$$

где функции $\chi_{rs} \equiv \chi(c_{rs}, \omega)$ по аналогии с ψ_{rs} задаются соотношением

$$\chi(c, \omega) = \exp \left(\frac{\ln^2 |c|}{2 \ln|\omega|} \right) \left| \frac{(1-c)}{c^{1/2}} \prod_{m=1}^{\infty} \frac{(1-\omega^m c)(1-\omega^m/c)}{(1-\omega^m)^2} \right|, \quad (8.2.13)$$

а $\ln \chi_{rs}$ пропорционален корреляционной функции $\langle \dot{X}^i(\rho_r) X^j(\rho_s) \rangle$ на торе.

Для изучения полученного выражения в переменных, определяющих структуру тора, полезно выразить χ через θ -функцию Якоби θ_1 . С этой целью определим переменные

$$\nu_r = \frac{\ln \rho_r}{2\pi i}, \quad \tau = \nu_M = \frac{\ln \omega}{2\pi i} \quad (8.2.14)$$

по аналогии с ν' и ρ' в формулах (8.1.51) и (8.1.52) (таким образом, $\text{Im } \nu_r = -\ln|\rho_r|/2\pi$, а $\text{Im } \tau = -\ln|\omega|/2\pi$). В этих переменных $\chi_{rs} = \chi(\nu_{sr}, \tau)$, где

$$\chi(\nu, \tau) = 2\pi \exp \left\{ \frac{-\pi(\text{Im } \nu)^2}{\text{Im } \tau} \right\} \left| \frac{\theta_1(\nu|\tau)}{\theta_1'(0|\tau)} \right|, \quad (8.2.15)$$

и $\nu_{sr} = \nu_s - \nu_r$. Замена переменных интегрирования дает якобиан преобразования

$$\frac{d^2 w}{|w|^2} \prod_{r=1}^{M-1} \frac{d^2 \rho_r}{|\rho_r|^2} = (4\pi^2)^M d^2 \tau \prod_{r=1}^{M-1} d^2 \nu_r. \quad (8.2.16)$$

Подстановка выражения (8.2.12) в (8.2.2) и замена переменных интегрирования приводит к формуле

$$A_C(1, 2, \dots, M) = \left(\frac{\kappa}{4\pi} \right)^M \int \frac{d^2 w}{|w|^4} \int \prod_{r=1}^{M-1} \frac{d^2 \rho_r}{|\rho_r|^2} |f(\omega)|^{-48} \left(\frac{-4\pi}{\ln|\omega|} \right)^{13} \times \\ \times \prod_{r < s} (\chi_{rs})^{k_r \cdot k_s / 2} = (\pi \kappa)^M \int d^2 \tau \int \prod_{r=1}^{M-1} d^2 \nu_r \left(\frac{2}{\text{Im } \tau} \right)^{13} \times \\ \times e^{4\pi \text{Im } \tau} |f(\omega)|^{-48} \prod_{r < s} (\chi_{rs})^{k_r \cdot k_s / 2}, \quad (8.2.17)$$

где область изменения переменных ρ_r задается неравенствами $0 < |\omega| = |\rho_M| \leq |\rho_{M-1}| \leq \dots$

$\dots \leq |\rho_1| \leq 1$. Полная амплитуда получается после суммирования выражений такого типа по всем возможным перестановкам внешних частиц. Результат представляет собой то же выражение, но интегрирование по переменным ρ_r проводится в области $|\omega| \leq |\rho_r| \leq 1$ без каких-либо ограничений. Эта область является кольцом, изображенным на рис. 8.19.

Переменные интегрирования для амплитуды с одной петлей замкнутой струны имеют простую геометрическую интерпретацию на торе. Если в ней разобраться, то становится ясным правильный выбор области интегрирования. Основная картина, которая при этом появится, представляет собой комплексную плоскость, в которой параметр τ характеризует конформно неэквивалентные геометрии на торе, а параметры ν_r описывают

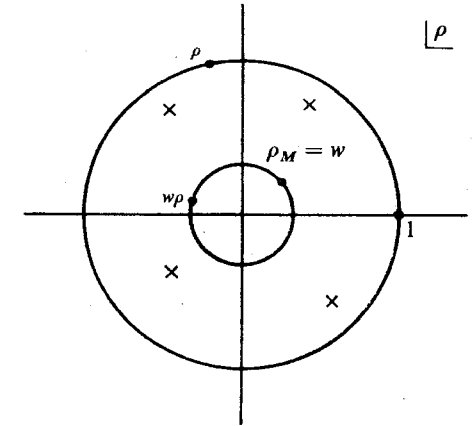


Рис. 8.19. Отображение петли замкнутой струны на поверхность тора представлено областью в виде кольца. Внешние частицы, отмеченные крестами, интегрируются по внутренней области кольца с граничными условиями, которые отождествляют произвольную точку ρ внешней границы с точкой $\bar{\omega} \rho$ на внутренней границе.

положение r -й частицы на поверхности. Мы уже качественно объяснили, как это происходит. Для того чтобы пояснить этот вопрос на формальном уровне, заметим прежде всего, что

$$\chi(v+1, \tau) = \chi(v+\tau, \tau) = \chi(v, \tau), \quad (8.2.18)$$

как показано в приложении 8.A. Таким образом, при заданном τ функция $\chi(v, \tau)$ является дважды периодической функцией по v с периодами 1 и τ . Это означает, что комплексную плоскость можно разделить на параллелограммы, которые смещены относительно друг друга на расстояния, кратные 1 и τ , причем

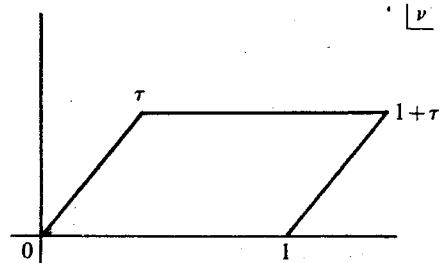


Рис. 8.20. Представление области интегрирования по переменным v_r на торе. Если переменная τ определена соотношением $\tau = (x + iy)/2\pi$, то тор получается при склейке противоположных сторон параллелограмма высоты y и с длиной горизонтальной стороны x .

В случае поверхности нулевого рода необходимо учитывать $SL(2, C)$ -симметрию бесконечной плоскости. Поэтому возникает естественный вопрос о существовании аналогичной симметрии в рассматриваемом случае. Из рис. 8.20 сразу следует, что ответ утвердительный. Положение центра параллелограмма произвольно, а его форма и ориентация важны для описания конкретного тора. В переменных v_r указанный произвол означает, что все v_r можно сдвинуть на общую комплексную константу. В частности, значение одной из переменных v_r можно фиксировать, поэтому интегрировать по ней не нужно. В операторном формализме удобно положить $v_M = \tau$. Фактически влияние симметрии $[U(1)]^2$ учесть легче, чем симметрию $SL(2, C)$ древесной амплитуды. В действительности для поверхностей рода 1 не имеет значения, проводится ли интегрирование по координате v_M на торе или ее значение фиксируется, используя свойство симметрии; это происходит потому, что рассматриваемая

мая группа имеет конечный объем, равный площади параллелограмма $(\text{Im } \tau)$, который можно компенсировать дополнительным множителем $(\text{Im } \tau)^{-1}$.

8.2.2. Модулярная инвариантность

Полученное выражение для тороидального вклада в амплитуду рассеяния содержит интеграл по комплексному параметру τ , определяющему конформную структуру тора. В разд. 3.3 показано, что, хотя выбор τ однозначно определяет конформную структуру тора, обратное утверждение неверно. Если

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad (8.2.19)$$

обозначает 2×2 -матрицу целых чисел с единичным детерминантом, то τ и

$$\tau' = \frac{a\tau + b}{c\tau + d} \quad (8.2.20)$$

определяют торы с одинаковой комплексной структурой. Область интегрирования по τ необходимо ограничить «фундаментальной областью», которая включает каждую конформную структуру только один раз. В формализме, используемом здесь для петлевых диаграмм, такое ограничение автоматически не появляется, поэтому его необходимо ввести искусственно.

Хотя в разд. 3.3 содержится самосогласованный способ учета симметрии $SL(2, Z)$, ниже мы рассмотрим альтернативный и содержательный путь рассуждений. Действие Намбу—Гото инвариантно относительно репараметризации мировой поверхности струны. Очевидными репараметризациями являются инфинитезимальные преобразования

$$\sigma^a \rightarrow \sigma^a + \xi^a(\sigma^b), \quad (8.2.21)$$

а также репараметризации, возникающие при экспоненциальном отображении этих преобразований. Конечно, инфинитезимальные репараметризации (8.2.21) генерируют связную группу, как и любые другие инфинитезимальные преобразования. При фиксировании калибровки в действии Намбу—Гото мы рассматривали только инфинитезимальные репараметризации. Этого на самом деле было достаточно на древесном уровне. В соответствии с классификационными теоремами группы диффеоморфизмов мировых поверхностей на древесном уровне (диск и сфера для открытой и замкнутой струн соответственно) являются связными и генерируются своими инфинитезимальными преобразованиями.

Если род поверхности равен или больше единицы, то ситуация меняется коренным образом: группа диффеоморфизмов в этом случае является несвязной, и появляются такие диффеоморфизмы мировой поверхности струны, которые не учитываются фиксированием калибровки по методу Фаддеева—Попова. Как будет показано ниже, такими диффеоморфизмами являются модулярные преобразования.

Отметим, что утверждение о несвязности группы диффеоморфизмов тора основано только на топологических свойствах, а вид метрики или конформной структуры на торе является при этом несущественным. Наша задача состоит в том, чтобы выбрать стандартный тор и описать группу его диффеоморфизмов. Рассмотрим тор, возникающий из отношения эквивалентности в плоскости (σ_1, σ_2) (в данном разделе координаты мировой поверхности обозначаются σ_1, σ_2 , так как обозначение σ, τ привело бы к путанице с традиционным обозначением модулярного параметра τ). В предыдущем разделе мы параметризовали тор комплексной переменной v с периодами 1 и τ . Вместо комплексного параметра v можно использовать пару действительных параметров σ_1 и σ_2

$$v = \sigma_1 + \sigma_2 \tau, \quad (8.2.22)$$

каждый из которых имеет период, равный единице. Тогда отношение эквивалентности, входящее в определение тора, можно записать в следующем виде:

$$(\sigma_1, \sigma_2) \approx (\sigma_1 + n, \sigma_2 + m), \quad (8.2.23)$$

где n и m — произвольные целые числа.

Наше утверждение заключается в том, что описанный выше тор допускает диффеоморфизмы, которые невозможно непрерывным образом трансформировать в тождественное преобразование. Таковыми являются преобразования

$$(\sigma_1, \sigma_2) \rightarrow (a\sigma_1 + b\sigma_2, c\sigma_1 + d\sigma_2), \quad (8.2.24)$$

где a, b, c и d определяют элемент группы $SL(2, Z)$. Действительно, преобразование (8.2.24) совместимо с отношением эквивалентности (8.2.23) (эквивалентные, согласно отношению (8.2.23), точки отображаются в эквивалентные точки) только при целых a, b, c и d . Кроме того, преобразование (8.2.24) является обратимым взаимно однозначным отображением тора на себя тогда и только тогда, когда $ad - bc = 1$; при этом обратное преобразование имеет вид

$$(\sigma_1, \sigma_2) \rightarrow (d\sigma_1 - b\sigma_2, -c\sigma_1 + a\sigma_2). \quad (8.2.25)$$

Таким образом, группу $SL(2, Z)$ можно рассматривать как группу репараметризаций тора. Преобразование (8.2.24) можно получить непрерывным образом из единицы путем экспоненциального отображения инфинитезимальных репараметризаций только при $a = d = 1, b = c = 0$. Произвольный диффеоморфизм тора можно записать в виде (8.2.24) (для каких-то a, b, c и d) путем умножения его на диффеоморфизм, получаемый из тождественного отображения непрерывным образом. Таким образом, модулярная группа $SL(2, Z)$ (и ее многопетлевые аналоги) представляет собой ту часть репараметризационной инвариантности действия Намбу—Гото, которая не учитывается при фиксировании калибровки по методу Фаддеева—Попова.

Особенно просто выглядят некоторые выделенные примеры модулярных преобразований. Преобразование

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (8.2.26)$$

меняет местами координаты σ_1 и σ_2 с изменением знака. При этом модуль τ конформной структуры поверхности преобразуется по правилу

$$\tau \rightarrow -1/\tau. \quad (8.2.27)$$

Преобразование

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (8.2.28)$$

приводит к сдвигу σ_1 на величину, зависящую от σ_2 . Его действие на модулярный параметр имеет вид

$$\tau \rightarrow \tau + 1. \quad (8.2.29)$$

Довольно сложным способом можно доказать, что (8.2.27) и (8.2.29) генерируют всю модулярную группу; таким образом, при обсуждении модулярной инвариантности в ряде случаев достаточно проверить соответствующее поведение только при этих преобразованиях.

Хотя действие Намбу—Гото с формальной точки зрения инвариантно относительно инфинитезимальных преобразований, эта инвариантность на квантовом уровне имеет место только в 26 измерениях, где аномалия сокращается. Несмотря на то что $SL(2, Z)$ -инвариантность тороидальной мировой поверхности с формальной точки зрения является следствием репараметризационной инвариантности, необходимо задать вопрос, имеет ли место эта инвариантность на квантовом уровне или она нарушается за счет «глобальной аномалии», т. е. происходит

квантовомеханическое нарушение модулярной инвариантности. В дальнейшем будет показано, что $SL(2, Z)$ -инвариантность играет решающую роль для отсутствия ультрафиолетовых расходимостей в теории, поэтому аномалия, нарушающая $SL(2, Z)$ -инвариантность, была бы катастрофической. Более того, поскольку с геометрической точки зрения $SL(2, Z)$ -инвариантность является глобальным свойством мировой поверхности распространяющейся струны, аномалия была бы серьезной трудностью для геометрической интерпретации теории струн.

Покажем, что (в 26 измерениях!) подынтегральное выражение для тороидальной диаграммы действительно инвариантно относительно модулярных преобразований, поэтому аномалия для группы $SL(2, Z)$ в одной петле отсутствует. Амплитуду (8.2.17) можно записать в виде

$$A_C(1, 2, \dots, M) = \int \frac{d^2\tau}{(\text{Im } \tau)^2} C(\tau) F(\tau), \quad (8.2.30)$$

где мера $(\text{Im } \tau)^{-2} d^2\tau$ и каждый из множителей C и F в отдельности оказываются инвариантными относительно модулярных преобразований. Инвариантность меры следует из того, что при преобразовании $\tau \rightarrow (a\tau + b)/(c\tau + d)$ справедливы следующие соотношения:

$$d^2\tau \rightarrow |c\tau + d|^{-4} d^2\tau, \quad (8.2.31)$$

$$\text{Im } \tau \rightarrow |c\tau + d|^{-2} \text{Im } \tau. \quad (8.2.32)$$

Справедливость этих соотношений устанавливается просто. Инвариантность функции

$$F(\tau) = 4(\pi\tau)^M \text{Im } \tau \int \left(\prod_1^{M-1} d^2\nu_r \right) \prod_{r < s} (\chi_{rs})^{k_r \cdot k_s / 2} \quad (8.2.33)$$

при $SL(2, Z)$ -преобразованиях следует из того факта, что χ является модулярной функцией единичного веса (как показано в приложении 8.A), и из кинематического соотношения для тахионных состояний замкнутой струны на массовой оболочке

$$\sum_{1 \leq r < s \leq M} k_r \cdot k_s = -4M. \quad (8.2.34)$$

Чтобы проверить инвариантность $F(\tau)$, необходимо преобразовать переменные ν_r в $\nu'_r = \nu_r/(c\tau + d)$ одновременно с преобразованием τ в $(a\tau + b)/(c\tau + d)$. Интегрирование по комплексной переменной ν'_r проводится по параллелограмму с вершинами в точках 0 , $(d\tau' - b)$, $(a - b + d\tau' - c\tau')$ и $(a - c\tau')$, который имеет площадь, равную $\text{Im } \tau'$. Инвариантность преоб-

зованных функций при преобразованиях $\nu' \rightarrow \nu' + 1$ и $\nu' \rightarrow \nu' + \tau'$ позволяет переменные интегрирования ν' сдвинуть таким образом, что областью интегрирования станет фундаментальный параллелограмм, ограниченный прямыми $(0, 1)$ и $(0, \tau')$; таким образом, преобразованное подынтегральное выражение интегрируется по той же области в терминах τ' , по которой в терминах τ брался интеграл до преобразования.

Инвариантность функции $C(\tau)$, определенной выражением

$$C(\tau) = \left(\frac{1}{2} \text{Im } \tau \right)^{-12} e^{4\pi \text{Im } \tau} |f(\omega)|^{-48}, \quad (8.2.35)$$

проверяется путем использования трансформационных свойств $|f(\omega)|$, полученных из (8.1.54) (используя определения $\text{Im } \omega = 2i\pi\tau$ и $\text{Im } \omega' = 2i\pi\tau'$), которые приводят к соотношению

$$e^{4\pi \text{Im } \tau} |f(\omega)|^{-48} = |\tau'|^{-24} e^{4\pi \text{Im } \tau'} |f(\omega')|^{-48}. \quad (8.2.36)$$

8.2.3. Область интегрирования

В предыдущих разделах мы описали конформную структуру однопетлевой диаграммы в терминах комплексной переменной τ с положительной мнимой частью. Верхняя полуплоскость τ отображается на себя при действии группы $SL(2, Z)$ довольно сложным образом. Область R верхней полуплоскости, обладающая тем свойством, что любую точку верхней полуплоскости можно отобразить единственным образом в R с помощью модулярного преобразования, называется фундаментальной областью модулярной группы. Существует много способов разделить верхнюю полуплоскость на фундаментальные области. Обычный и удобный способ показан на рис. 8.21. Одной из фундаментальных областей, которую мы будем рассматривать как «стандартную», является область $-1/2 \leq \text{Re } \tau \leq 1/2$, $\text{Im } \tau > 0$, $|\tau|^2 > 1$, обозначенная буквой F на рис. 8.21.

Выражение (8.2.17) для петлевой амплитуды, полученное при склеивании древесных диаграмм, включает интегрирование по τ по полосе $\text{Im } \tau > 0$ и $-1/2 \leq \text{Re } \tau \leq 1/2$ в верхней полуплоскости. Однако это соответствует включению бесконечного числа фундаментальных областей, которые отображаются друг на друга при действии модулярной группы. Определенно интегрирование по τ по всей полосе дало бы бесконечную и неунитарную амплитуду (см. рис. 8.3, б), поскольку весь интеграл, включая его скачок, учитывался бы бесконечное число раз. Это означает, что выражение (8.2.17) не верно. Для того чтобы не учитывать лишние вклады, интегрирование по τ необходимо

ограничить только одной фундаментальной областью модулярной группы, например областью F на рис. 8.21.

С очень большой натяжкой можно считать, что $\text{Im } \tau$ представляет собой мнимое время, в течение которого струна распространяется по петле. В этом смысле область малых $\text{Im } \tau$ можно было бы рассматривать как «ультрафиолетовую» область малых времен распространения, в то время как область больших $\text{Im } \tau$ — как «инфракрасную» область. При таком описании ограничение области интегрирования фундаментальной областью устраняет возможность существования «ультрафиолетовых» расходимостей, но в то же время существование «инфракрасных» расходимостей, связанных с безмассовыми частицами и тахионами, возможно.

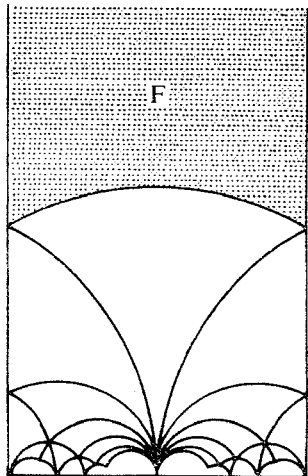


Рис. 8.21. Плоскость комплексной переменной τ . Кривые отделяют фундаментальные области модулярной группы. Область F , которая не касается действительной оси $\text{Im } \tau = 0$, принимается в качестве «стандартной» области.

В рассматриваемом подходе описанное выше ограничение области интегрирования должно быть наложено искусственно, но в любой последовательной теории, основанной на полевой теории струн (такой как полевая теория в калибровке светового конуса), это ограничение должно возникать естественным образом, поскольку в полевых теориях унитарность гарантирована.

Ограничение области интегрирования по τ не имеет простой интерпретации на уровне исходных пропагаторов, из которых составляется петлевая амплитуда. Для каждого отдельного вклада в амплитуду интегрирование по параметрам z_r интегрального представления внутренних пропагаторов проводится в пределах, которые связаны между собой, когда параметр τ ограничен областью F , а это означает, что петлевая амплитуда не равна сумме петель отдельных частиц, составляющих спектр струны.

Можно показать, что обычные пороговые сингулярности однопетлевой амплитуды рассеяния, которые необходимы для унитарности, возникают от концевых точек интервалов интегрирования таким же образом, как и в случае открытых струн.

В каждом канале возникают полюсы от той области интегрирования, в которой переменные, соответствующие частицам в заданном канале, близки между собой на поверхности тора, т. е. в пределе, когда часть переменных $v_{sr} \rightarrow 0$. При $v_{sr} \sim 0$ функция χ_{rs} принимает особенно простой вид

$$\chi_{rs} \sim 2\pi |v_{rs}|. \quad (8.2.37)$$

Область пространства параметров, в которой группа частиц сближается, соответствует таким вложениям мировой поверхности в пространство-время, при котором эта группа частиц отделена от других частиц тонкой длинной трубой. Обычные пороговые сингулярности возникают, когда параметр w близок к нулю (или $\text{Im } \tau \rightarrow \infty$) благодаря обращению в нуль переменных z_r , соответствующих внутренним пропагаторам. Этому соответствует такая пространственно-временная картина, когда от мировой поверхности отходит пара длинных тонких труб, разделяющих группы внешних частиц.

8.2.4. Анализ расходимостей

Существует несколько пределов, в которых могут появиться расходимости. Одна из расходимостей связана с пределом, когда все переменные v_r , за исключением одной, близки друг к другу. Это соответствует расположению петли на внешней тахионной линии, причем сингулярность возникает от тахионного пропагатора на массовой оболочке (рис. 8.10). Как и в случае петель открытых струн, такие расходимости можно интерпретировать как перенормировку массы тахиона. Хотя при получении перенормированной теории вне массовой оболочки возникают технические трудности, эти трудности носят такой же характер, как в аналогичной проблеме в теории поля точечных частиц.

Действительно существенная расходимость возникает в области, где все частицы сходятся на торе, т. е. когда $v_{rs} \rightarrow 0$ для всех r и s . Сначала обсудим эту область с эвристической точки зрения, как это было сделано для открытых струн. Рассмотрим мировую поверхность струны, изображенную на рис. 8.22, а, в виде сферы (древесная диаграмма) с внешними вершинными операторами, которая связана длинной трубой с тором без вставок вершинных операторов. Интегрирование по длине горловины дает точно такую же расходимость $\int_0^1 dq/q^3$, как в случае диаграмм для открытых струн. Коэффициент при расходимости факторизуется, как показано на рис. 8.22, б. С другой стороны, с точностью до конформного преобразования метрики мировая поверхность, изображенная на рис. 8.22, а,

эквивалентна мировой поверхности с близко расположенными частицами, когда $v_{rs} \rightarrow 0$ для всех r и s (как на рис. 8.22, в).

В самом деле, рассмотрим двумерную метрику

$$ds^2 = dr^2 + a(r) d\phi^2, \quad (8.2.38)$$

где $a(r)$ — гладкая функция, ведущая себя как r^2 при малых r . Выбор

$$a(r) = \sin^2 r, \quad 0 \leq r \leq \pi, \quad (8.2.39)$$

соответствует метрике на сфере. С другой стороны, выбор

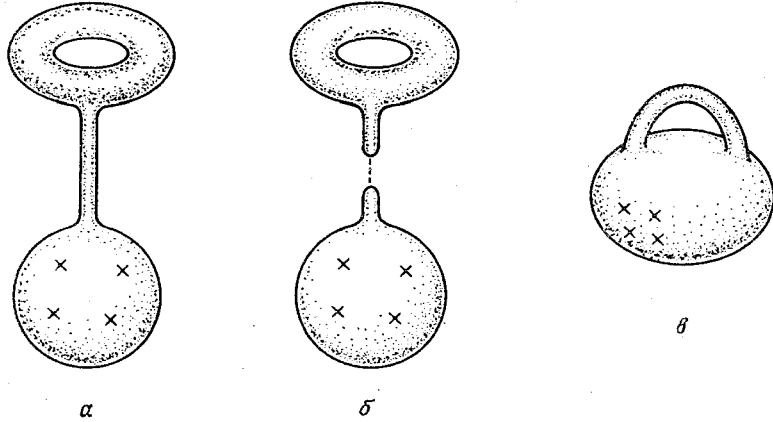


Рис. 8.22. *a* — мировая поверхность струны с длинной горловиной, связывающей древесную диаграмму с тором; *b* — представление коэффициента при расходимости, возникающей при интегрировании вдоль горловины из-за распространения тахиона; *v* — мировая поверхность, конформно эквивалентная мировой поверхности, изображенной на рис. 8.22, *a*, у которой отсутствует тонкая горловина, а внешние состояния очень близки между собой.

$a = \text{const}$ соответствует цилиндру. Комбинируя приведенные выше метрики,

$$\begin{aligned} a(r) &= \sin^2 r, \quad 0 \leq r \leq \pi - \delta; \\ a(r) &= \sin^2(\pi - \delta), \quad \pi - \delta \leq r \leq R, \end{aligned} \quad (8.2.40)$$

получаем (при малом δ и большом R) сферу с тонкой и длинной выходящей трубой. Рассмотрим теперь конформное преобразование метрики, которое отображает метрику (8.2.38) в плоскую метрику на плоскости. Попытаемся записать метрику в виде

$$dr^2 + a(r) d\phi^2 = b(r) (dr'(r)^2 + r'(r)^2 d\phi^2), \quad (8.2.41)$$

где $b(r)$ и $r'(r)$ — неизвестные функции, подлежащие определению. Тогда, избавившись от множителя $b(r)$ в правой части

(8.2.41) с помощью конформного преобразования метрики, мы получили бы стандартную плоскую метрику на плоскости $ds^2 = dr'^2 + r'^2 d\phi^2$. Из (8.2.41) сразу следует, что для этого необходимо выполнение равенства $a(dr'/dr)^2 = (r')^2$, которое после интегрирования дает

$$r' = \exp = \left(\int_{r_0}^r dy / \sqrt{a(y)} \right), \quad (8.2.42)$$

где r_0 — произвольная константа интегрирования. Эту общую формулу мы применим к метрике (8.2.40). В (8.2.40) нас интересует предел больших R , соответствующий очень длинной горловине на рис. 8.22, *a*. Для сравнения с формулами для петлевой амплитуды удобнее всего провести преобразование таким образом, чтобы часть мировой поверхности, описываемая метрикой (8.2.40), отображалась на область, размер которой не зависит от R . Для этого необходимо, чтобы в выражении (8.2.42) $r_0 \sim R$, а это в свою очередь означает, что область $r \leq \pi - \delta$ в (8.2.40) в терминах r' отображается в область $r' \leq \exp(-R/\sin(\pi - \delta))$. Таким образом, мы показали, что область мировой поверхности с близко расположенными вершинными операторами, где $v_{rs} \rightarrow 0$ для всех r и s , конформно эквивалентна области с инфракрасной расходимостью, изображенной на рис. 8.22, *a*.

Для более строгого математического исследования этой области удобно определить переменные η_r следующими соотношениями:

$$\varepsilon \eta_r = v_r - v_M \quad (8.2.43)$$

при $r = 1, 2, \dots, M-2$, где действительная переменная ε равна $|\eta_{M-1}|$, т. е.

$$\eta_{M-1} \equiv \varepsilon e^{i\phi} = v_{M-1} - v_M. \quad (8.2.44)$$

Якобиан замены переменных имеет вид

$$\prod_{r=1}^{M-1} d^2 v_r = i \varepsilon^{2M-3} d\varepsilon d\phi \prod_{r=1}^{M-2} d^2 \eta_r. \quad (8.2.45)$$

Используя (8.2.37), подынтегральное выражение в амплитуде (8.2.34) можно разложить по степеням ε и получить главный расходящийся вклад, который имеет вид

$$\int_0^1 \frac{d\varepsilon}{\varepsilon^3} d\phi \left(\prod_{r=1}^{M-2} d^2 \eta_r \right) \prod_{1 \leq r < s \leq M-1} |\eta_r - \eta_s|^{k_r \cdot k_s / 2} \int_F \frac{d^2 \tau}{(\text{Im } \tau)} C(\tau). \quad (8.2.46)$$

Как и для открытых струн в этом выражении присутствует ожидавшаяся расходимость $d\epsilon/\epsilon^3$. Интегрирование по η_r дает M -точечную функцию на сфере, в то время как интегрирование по τ дает амплитуду перехода вакуум — вакуум на торе (интеграл по фундаментальной области модулярной группы без вставок вершинных операторов на торе).

Следующий член разложения подынтегрального выражения дает расходимость вида $\int d\epsilon/\epsilon$, соответствующую распространению вдоль длинной горловины на рис. 8.22, *a* безмассового дилатона, а не тахиона. Коэффициент при этой расходимости

$$\int_F d^2\tau (\text{Im } \tau)^{-14} e^{4\pi \text{Im } \tau} |f(e^{2\pi i\tau})|^{-48} \quad (8.2.47)$$

должен быть пропорционален связи дилатона с тороидальной мировой поверхностью, т. е. однопетлевому вакуумному среднему для дилатона. Это можно увидеть явно, сравнивая приведенное выражение с формулой, полученной непосредственно из однопетлевой амплитуды для замкнутой струны с одним внешним дилатоном на массовой оболочке. Вершина испускания дилатона на массовой оболочке с нулевым импульсом имеет вид

$$V_D = \dot{X}_R^\mu(1) \dot{X}_{L\mu}(1); \quad (8.2.48)$$

таким образом, однопетлевое вакуумное среднее для дилатона (с $k=0$) можно записать в виде

$$\frac{\kappa}{4\pi} \int d^{26}p \int \frac{dz d\bar{z}}{(z\bar{z})^2} \text{Tr}(z^{L_0} \bar{z}^{\bar{L}_0} \dot{X}_R^\mu(z) \dot{X}_{L\mu}(\bar{z})). \quad (8.2.49)$$

Вводя обозначение $z = \exp\{2i\pi\tau\}$, легко видеть, что приведенное выражение пропорционально (8.2.47) с конечной константой пропорциональности, если предполагается, что интегрирование по z ограничено одной фундаментальной областью.

Ограничение интегрирования по τ одной фундаментальной областью необходимо для согласия с формулой (8.2.47), хотя оно и не содержится в определении амплитуды для дилатона, поскольку ее нормировка не определяется непосредственно из условия унитарности. Так как зависимость подынтегрального выражения в (8.2.49) от импульса в петле имеет гауссов вид $|z|^{p^2/4} \sim \exp\{-\pi \text{Im } \tau p^2/2\}$, вклад от области больших петлевых импульсов подавлен за счет ограничения области интегрирования по τ фундаментальной областью, которая не содержит область $\text{Im } \tau \sim 0$ (т. е. $|z| \sim 1$). Рассмотренная расходимость дает явный пример того, как ультрафиолетовые расходимости, обычно связанные в полевой теории с петлевыми интегралами,

устраняются за счет модулярной инвариантности теории замкнутых струн.

В разд. 3.4.6 было показано, что из инвариантности теории струн относительно преобразований Вейля следует равенство нулю вакуумного среднего для дилатона на уровне древесных диаграмм. Однако на однопетлевом уровне, очевидно, это не верно. На самом деле вакуумное среднее не просто отлично от нуля, а является бесконечным, поскольку интеграл (8.2.47) расходится в граничной точке $\text{Im } \tau \rightarrow \infty$. Расходимость возникает от главного члена в разложении подынтегрального выражения в (8.2.49) по степеням $z\bar{z}$. Этот член связан с тахионным состоянием, циркулирующим по петле, и не имеет ничего общего с ультрафиолетовыми свойствами амплитуды. В пространстве времени расходимости можно поставить в соответствие конфигурации мировой поверхности в виде тора с очень большой длиной образующей окружности.

8.2.5. Космологическая постоянная

В общей теории относительности к тензору энергии-импульса материи можно добавить член $\Lambda g^{\mu\nu}$, где Λ — космологическая постоянная, а $g^{\mu\nu}$ — метрический тензор пространства-времени. Это слагаемое соответствует добавлению к действию Гильберта — Эйнштейна (в D измерениях) следующего члена:

$$-\int d^Dx \sqrt{g} \Lambda, \quad (8.2.50)$$

где $g = \det g_{\mu\nu}$. В классической теории нулевое значение космологической постоянной эквивалентно наличию дополнительной плотности энергии, которая не генерируется существующей материей во Вселенной. Астрономические данные свидетельствуют о том, что четырехмерная космологическая постоянная фантастически мала, менее 10^{-120} в единицах (масса Планка)⁴. К сожалению, даже если положить значение космологической постоянной равным нулю в классической теории, изменение энергии вакуума из-за квантовых флуктуаций в общем случае приводит к огромному значению космологической постоянной в обычных полевых теориях. В суперсимметричных теориях эти вакуумные флуктуации исчезают и никаких квантовых поправок к космологической постоянной не возникает. Но в природе суперсимметрия определенно нарушена, по крайней мере в масштабе энергий, связанном с нарушением симметрии слабых взаимодействий, поэтому наблюдаемая малость космологической постоянной является важным свойством, которое требует объяснения. Обычно физики, занимающиеся теорией элементарных

частиц, игнорировали эту проблему из-за отсутствия последовательной квантовой теории гравитации, но в теории суперструн эта важная проблема, очевидно, должна возникнуть.

В теории струн на древесном уровне космологическая постоянная исчезает. Это доказывается тем обстоятельством, что при попытке квантования свободной струны, распространяющейся в плоском пространстве Минковского, не возникает никаких препятствий. В противоположность этому если попытаться рассмотреть распространение свободной струны в пространстве с ненулевой космологической постоянной (например, в пространстве Де Ситтера или анти-Де Ситтера), то возникает трудность с нарушением конформной инвариантности по причинам, обсуждавшимся в разд. 3.4. Допустим, что космологическая постоянная в теории струн исчезает на древесном уровне, и рассмотрим, что происходит на уровне одной петли.

Напомним сначала вычисление квантовых поправок к Λ в обычной полевой теории с точечными частицами. Выражение для космологической постоянной задается суммой вакуумных средних для энергии каждого сорта частиц. Эти квантовые поправки к Λ могут быть вычислены, исходя из добавки к квантовому эффективному действию (т. е. к свободной энергии), которая имеет вид (8.2.50). В низшем порядке теории возмущений эта добавка зависит только от кинетических членов в действии полевой теории. Интегрирование по полевым степеням свободы в производящем функционале приводит к следующему выражению для Λ , возникающему для одного сорта частиц с массой m :

$$\Lambda = \pm \frac{1}{2} \ln \det (p^2 + m^2) = \pm \frac{1}{2} \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \ln (p^2 + m^2), \quad (8.2.51)$$

где знак «+» соответствует бозонам, а знак «-» — фермионам. Это выражение является самым простым видом петлевой амплитуды, когда вершины взаимодействия отсутствуют, и совершенно очевидно, что оно расходится в отсутствие регуляризации. Для того чтобы обсудить аналогичные вычисления в теории струн, полезно переписать выражение для Λ , используя следующую формулу:

$$\ln a = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{dt}{t} e^{-at} - \ln \varepsilon \right]. \quad (8.2.52)$$

Если не учитывать расходящуюся константу $\ln \varepsilon$, выражение для Λ можно записать в виде

$$\Lambda = \mp \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{dt}{t} \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} e^{-t(p^2 + m^2)} \quad (8.2.53)$$

(знак «-» соответствует бозонам, а знак «+» фермионам). Тот факт, что интеграл расходится в пределе $t = 0$, является признаком наличия ультрафиолетовых расходимостей, которые в обычных полевых теориях необходимо регуляризовать. Однако в теории струн, как будет показано ниже, эта проблема не возникает.

Правдоподобным выражением для космологической постоянной в теории струн является сумма вакуумных энергий для каждого состояния струны. Эту сумму легко вычислить, поскольку след пропагатора струны представляет собой сумму пропагаторов для отдельных состояний. Пропагатор замкнутой струны, введенный в разд. 7.2.1, можно записать в следующем виде:

$$\Delta = \frac{\alpha'}{2\pi} \int_{|z| \leq 1} \frac{d^2 z}{|z|^2} z^{L_0 - 1} \bar{z}^{\tilde{L}_0 - 1}. \quad (8.2.54)$$

Для сравнения этого выражения с пропагатором точечной частицы запишем

$$z = e^{2i\pi\tau} \equiv e^{2i\pi(\text{Re } \tau + i \text{Im } \tau)}, \quad (8.2.55)$$

при этом $d^2 z / |z|^2 = 4\pi^2 d^2 \tau$. Интеграл по $\text{Re } \tau$ проецирует на физический сектор состояний, удовлетворяющих равенству $L_0 = \tilde{L}_0$, в то время как интегрирование по $\text{Im } \tau$ соответствует интегрированию по собственному времени в (8.2.53), причем связь между τ и t имеет вид $t = \pi\alpha' \text{Im } \tau$. Поэтому сумму вкладов в космологическую постоянную, возникающих для каждого состояния струны, можно представить в следующем виде:

$$\begin{aligned} \Lambda &= -\frac{1}{2} \int \frac{d^{26} p}{(2\pi)^{26}} \int d^2 \tau \frac{1}{\text{Im } \tau} e^{\pi(4 - \alpha' p^2) \text{Im } \tau} \text{tr} (z^N \bar{z}^{\tilde{N}}) = \\ &= -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{4\pi^2 \alpha'} \right)^{13} \int d^2 \tau (\text{Im } \tau)^{-14} e^{4\pi \text{Im } \tau} |f(e^{2i\pi\tau})|^{-48}. \end{aligned} \quad (8.2.56)$$

Если бы мы выбрали область интегрирования в (8.2.56) в виде полубесконечной ленты $0 < \text{Im } \tau < \infty$, $-1/2 \leq \text{Re } \tau \leq 1/2$, то выражение (8.2.56) было бы очень похоже на (8.2.53). Однако такой выбор неверен. Легко видеть, что подынтегральное выражение в (8.2.56) модулярно инвариантно, так же как и выражение для вакуумного среднего дилатона. Поэтому интегрирование по τ должно проводиться только по одной фундаментальной области модулярной группы, изображенной на рис. 8.21. Такое ограничение интегрирования одной фундаментальной областью не имеет простой аналогии в полевой теории. Грубо говоря, исключение области вблизи $\text{Im } \tau = 0$ ($|z| \sim 1$) равносильно ультрафиолетовому обрезанию вкладов состояний струны в энергию вакуума. В теории бозонной

струны космологическая постоянная имеет инфракрасные расходимости из-за наличия тахиона, но ультрафиолетовое обрезание является важным отличием от случая точечных частиц.

Выражение (8.2.56) пропорционально вакуумному среднему дилатона (8.2.47). Эта связь между космологической постоянной и вакуумным средним дилатона представляет собой простейший пример, иллюстрирующий общее явление. Добавление дилатона с нулевым импульсом к произвольному процессу приводит к выражению, которое пропорционально производной амплитуды без тахиона по натяжению струны. Это свойство тесно связано с поведением при масштабных преобразованиях, которое обсуждается в разд. 13.2.

8.2.6. Амплитуды с безмассовыми состояниями замкнутой струны

Ниже мы обсудим кратко однопетлевые диаграммы с безмассовыми внешними состояниями замкнутой струны. Безмассовые состояния с тензором поляризации $\zeta_r^{\mu\nu}$ имеют вершинный оператор $V_{\mu\nu}$, который равен произведению левых и правых сомножителей $V_{\mu R} \tilde{V}_{\nu L}$, где $V_{\mu R}$ и $\tilde{V}_{\nu L}$ соответствуют вершинам испускания безмассовых состояний открытой струны, распространяющихся влево и вправо. Тензоры поляризации удобно выбрать в виде произведений $\zeta_r^{\mu\nu} \bar{\zeta}_r^{\mu\nu}$. При этом не происходит потери общности, поскольку произвольный тензор можно записать в виде суммы произведений векторов $\zeta_r^{\mu\nu} = \sum_n \zeta_{rn}^{\mu} \bar{\zeta}_{rn}^{\nu}$. Поэтому полную амплитуду можно представить в виде суммы членов, включающих факторизованные тензоры поляризации. Физические требования к внешним состояниям имеют вид $\zeta_r \cdot k_r = 0 = \bar{\zeta}_r \cdot k_r$ и $k_r^2 = 0$. Как показано в разд. 7.1.4, вершины, которые факторизуются на произведение вкладов ненулевых мод, распространяющихся влево и вправо, могут быть записаны в виде $V_R(\zeta, \frac{1}{2}k, z) V_L(\bar{\zeta}, \frac{1}{2}k, \bar{z})$, где

$$V_R(\zeta, \frac{1}{2}k, z) = \exp(ik \cdot X_R(z) + \zeta \cdot \dot{X}_R(z)/z) \quad (8.2.57)$$

и V_L имеет аналогичный вид. Как и раньше, при вычислении амплитуды будем удерживать только члены, линейные по ζ и $\bar{\zeta}$. Как в случае петель открытых струн, выражение для амплитуды может быть получено либо ковариантным образом (с учетом вклада соответствующих духовых мод в пропагаторы), либо в калибровке светового конуса (когда внешние импульсы имеют

нулевые p^+ -компоненты и $\zeta_r^+ = \bar{\zeta}_r^+ = 0$). Поскольку в интегрировании по z и \bar{z} левые и правые моды входят независимо, следы по ненулевым модам в выражении (8.2.1) представляются в виде произведения следов для каждого типа мод. Каждый из этих сомножителей имеет вид следа для петель открытых струн. Интеграл по нулевым модам связывает левые и правые степени свободы, поэтому возникают множители, содержащие произведение ζ и $\bar{\zeta}$.

8.3. Другие типы диаграмм для неориентированных струн

В теориях с неориентированными открытыми или замкнутыми струнами существуют дополнительные диаграммы, которые дают вклад в том же порядке теории возмущений, что и диаграммы, рассмотренные до сих пор. Эти диаграммы делятся на два вида: древесные диаграммы «более высокого порядка» и дополнительные петлевые диаграммы. Под древесными диаграммами мы понимаем диаграммы, у которых все сингулярности имеют вид одночастичных полюсов. Под древесными диаграммами более высокого порядка мы понимаем древесные диаграммы, которые в теории возмущений имеют более высокий порядок, чем обычные древесные диаграммы. Наличие древесных диаграмм более высокого порядка является специфической чертой теорий, содержащих неориентированные открытые или замкнутые струны.

8.3.1. Древесные диаграммы более высокого порядка

В гл. 7 изучались струнные диаграммы, соответствующие мировым поверхностям, которые топологически эквивалентны диску. Если внешние состояния соответствуют открытым струнам, то такая диаграмма дает основной вклад в амплитуду рассеяния и представляет собой обычную древесную диаграмму, которая просто описывается в операторном формализме. В случае, когда внешними состояниями являются два или более состояний открытой струны и произвольное число состояний замкнутой струны, амплитуду можно изучать так же, как это сделано в гл. 7. С этой целью выбирают два произвольных внешних состояния открытой струны, называют их «начальным» и «конечным» состояниями $|i\rangle$ и $\langle f|$ и записывают древесную амплитуду в виде

$$A = \langle f| V \Delta V \Delta V \dots V |i\rangle, \quad (8.3.1)$$

где Δ — пропагатор открытой струны, а V — соответствующий вершинный оператор открытой или замкнутой струны.

Что произойдет, если рассмотреть диск с внешними состояниями, соответствующими *только замкнутым* струнам, как изображено на рис. 8.23, *а*? (Аналогичные вопросы возникают для диаграммы с одним внешним состоянием открытой струны и произвольным числом внешних состояний замкнутой струны.) Ясно, что такая диаграмма является древесной, поскольку если ее разрезать для выявления промежуточных состояний, то обна-

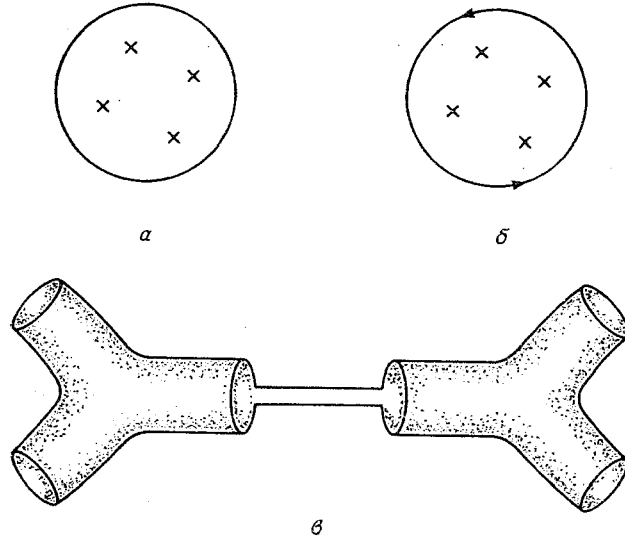


Рис. 8.23. *а* — мировая поверхность, топологически эквивалентная диску, с внешними состояниями, соответствующими только замкнутым струнам; *б* — представление диаграммы, изображенной на рис. 8.23, *а*, в виде древесной диаграммы для замкнутых струн с промежуточными состояниями, соответствующими открытой струне; *в* — если изменить граничные условия, отождествив диаметрально противоположные точки окружности (как показано стрелками), то диаграмма превращается в проективную плоскость. Эта диаграмма дает вклад только в секторе неориентированных замкнутых струн и приводит к изменению древесного вклада.

ружатся только одночастичные состояния. В зависимости от способа разрезания мировой поверхности промежуточные состояния могут соответствовать либо открытым, либо замкнутым струнам, как показано на рис. 8.23, *б*. При рассмотрении рассеяния замкнутых струн диск представляет собой древесную диаграмму *более высокого порядка* по сравнению с римановой сферой, которая также дает вклад в рассеяние замкнутых струн,

поскольку он содержит дополнительный множитель $\chi \sim g^2$. Как и другие диаграммы, рассматриваемые в настоящей главе, диск имеет потенциальную расходимость, обусловленную испусканием тахиона в вакуум. В пространстве параметров эта расходимость связана с областью в виде диска бесконечного радиуса, который конформно эквивалентен диску конечного радиуса с близко расположенными внешними частицами, как показано на рис. 8.24, *а*. Соответствующая пространственно-временная конфигурация мировой поверхности в опасной области изображена на рис. 8.24, *б*. Коэффициент при бесконечности должен иметь вид сферической древесной диаграммы для замкнутой струны, умноженной на константу, зависящую от константы связи замкнутой струны с диском.

Использование операторного формализма для вычисления этой диаграммы представляло бы значительные трудности. Единственным достаточно простым способом вычислений в этом случае является подход, использующий функциональные интегралы по мировым поверхностям, который развит во введении (разд. 1.4.4).

Рассматриваемую мировую поверхность различными конформными преобразованиями можно отобразить в множество удобных конфигураций. Например, отображение

$$z = -i \frac{\rho + r}{\rho - r} \quad (8.3.2)$$

отображает диск радиуса r в плоскости ρ в верхнюю полуплоскость переменной z . Более удобным оказывается отображение диска $\rho \rightarrow 1/\rho$, когда мировая поверхность представляет собой плоскость с вырезанным диском радиуса $q = 1/r$.

Проблема вычисления амплитуды для замкнутых струн, связанных с такой мировой поверхностью, лишь немного отличается от задачи, рассмотренной в разд. 1.4.4, когда мировая поверхность имеет вид сферы. Как и в том случае, амплитуду

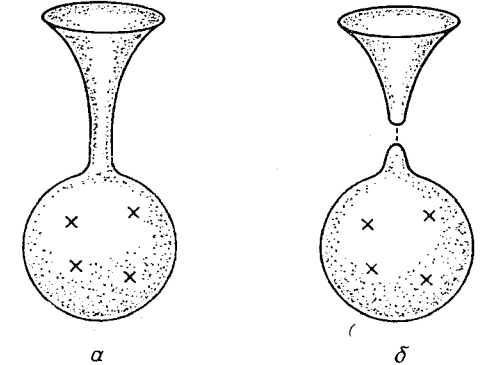


Рис. 8.24. *а* — опасная с точки зрения расходимостей конфигурация диаграммы в виде диска с внешними замкнутыми струнами; *б* — факторизация возможной инфракрасной расходимости.

можно записать в виде

$$A(1, 2, \dots, M) \sim n\kappa^{M-1} \int_{|\rho_r| \geq q} \prod_{r=1}^M d^2\rho_r \times \times \prod_{r,s}' \exp \left\{ \frac{1}{4} k_r \cdot k_s N(\rho_r; \rho_s, q^2) \right\}, \quad (8.3.3)$$

где N — пропагатор, а множитель n возникает из-за теоретико-группового следа, связанного с границей диска. В рассматриваемом случае пропагатор $N(\rho_r; \rho_s, q^2)$ представляет собой функцию Грина двумерного уравнения Лапласа на плоскости с вырезанным диском, которая удовлетворяет уравнению

$$\partial_\rho^2 N(\rho; \rho', q^2) = 2\pi\delta^2(\rho - \rho') \quad (8.3.4)$$

с граничными условиями Неймана на крае диска, т. е. нормальная производная на границе должна обращаться в нуль: $\partial N(\rho; \rho', q^2)/\partial|\rho| = 0$ при $|\rho| = q$. Выражение для пропагатора, удовлетворяющего этим условиям, легко получается с помощью метода конформных отображений, который дает

$$N(\rho; \rho', q^2) = \ln|\rho - \rho'| + \ln \left| \frac{q^2}{\rho\bar{\rho}'} - 1 \right|. \quad (8.3.5)$$

Символ $\prod_{r,s}'$ показывает, что бесконечные члены в выражении (8.3.3), связанные с нормальным упорядочением, опущены. Это значит, что расходящаяся часть в $N(\rho_r; \rho_r, q^2)$ (определяемая первым членом в (8.3.5)), содержащаяся в множителе с $r = s$, опущена, так что

$$N(\rho_r; \rho_r, q^2) = \ln \left| \frac{q^2}{\rho_r\bar{\rho}_r} - 1 \right|. \quad (8.3.6)$$

(На самом деле расходящаяся константа сокращается с бесконечной инфракрасной константой, которая опущена в (8.3.5), точно таким же образом, как и в случае древесных диаграмм, обсуждавшихся в разд. 1.4.4.)

Подынтегральное выражение в (8.3.3) инвариантно относительно группы преобразований, отображающей плоскость с вырезанным диском на себя. Эти преобразования образуют группу $SU(1, 1)$ и имеют вид

$$\rho_r \rightarrow \frac{\alpha\rho_r + \beta}{\bar{\beta}\rho_r/q + \bar{\alpha}}, \quad (8.3.7)$$

где α и β — комплексные числа, удовлетворяющие соотношению $\alpha\bar{\alpha} - \beta\bar{\beta} = 1$, которое сводит число действительных параметров

к трем. Для того чтобы проверить инвариантность относительно указанных преобразований, полезно выписать преобразования для различных множителей в подынтегральном выражении

$$d^2\rho \rightarrow \frac{d^2\rho}{|\bar{\alpha} + \beta\rho/q|^4}, \quad (8.3.8)$$

$$\rho_r - \rho_s \rightarrow \frac{\rho_r - \rho_s}{(\bar{\beta}\rho_r/q + \bar{\alpha})(\bar{\beta}\rho_s/q + \bar{\alpha})}, \quad (8.3.9)$$

$$(q^2/\rho_r) - \bar{\rho}_s \rightarrow \frac{(q^2/\rho_r) - \bar{\rho}_s}{(\alpha + \beta q/\rho_r)(\alpha + \beta\bar{\rho}_s/q)}. \quad (8.3.10)$$

Чтобы избежать бесконечного нефизического вклада в амплитуду, три переменные интегрирования можно фиксировать произвольным образом аналогично тому, как инвариантность верхней полуплоскости относительно $SL(2, R)$ -преобразований использовалась в разд. 1.5.2 при обсуждении древесных амплитуд для открытых струн.

Подынтегральное выражение для амплитуды инвариантно также относительно масштабных преобразований

$$\rho_r \rightarrow e^{\phi}\rho_r, \quad (8.3.11)$$

если при этом радиус вырезанного круга преобразуется следующим образом:

$$q \rightarrow e^{\phi}q. \quad (8.3.12)$$

Это утверждение очевидно, поскольку круг произвольного радиуса конформно эквивалентен верхней полуплоскости. Поэтому амплитуду (8.3.3) можно записать в виде

$$A(1, 2, \dots, M) \sim n\kappa^{M-1} \int_0^1 \frac{dq}{q} \int_{|\rho_r| \geq q} \left(\prod_{r=1}^M d^2\rho_r |q^2 - \bar{\rho}_r\rho_r|^2 \right) \frac{1}{V_4} \times \times \delta^2(\rho_A - z_1) \delta^2(\rho_B - z_2) \prod_{1 \leq r < s \leq M} (|\rho_r - \rho_s||q^2 - \rho_r\bar{\rho}_s|)^{k_r \cdot k_s/2}. \quad (8.3.13)$$

При такой записи мы явно восстановили масштабную инвариантность амплитуды путем введения интегрирования по радиусу q , которое компенсируется делением на суммарный объем группы $SU(1, 1)$ и масштабных преобразований. Дельта-функции фиксируют «калибровку», приравнивая две комплексные переменные ρ , отмеченные буквами A и B , двум произвольным значениям z_1 и z_2 (это фиксирует четыре произвольных

калибровочных параметра). Объем V_4 задается выражением

$$V_4 = \frac{q^2}{|\rho_A - \rho_B|^2 |q^2 - \rho_A \bar{\rho}_B|^2}, \quad (8.3.14)$$

поэтому множитель

$$\frac{\delta^2(\rho_A - z_1) \delta^2(\rho_B - z_2)}{V_4} \quad (8.3.15)$$

инвариантен относительно действия группы $SU(1, 1)$ и масштабных преобразований при любом выборе A и B , а также z_1 и z_2 . В частном случае, когда $\rho_A = \rho_1 = \infty$, а $\rho_B = \rho_2 = 1$, амплитуда имеет вид

$$\begin{aligned} A(1, 2, \dots, M) &\sim n \kappa^{M-1} \int_0^1 \frac{dq}{q^3} |1 - q^2|^2 \times \\ &\times \int_{|\rho_r| \geq q} \left(\prod_{r=3}^M d^2 \rho_r |q^2 - \bar{\rho}_r \rho_r|^2 |\rho_r|^{k_1 \cdot k_r / 2} \times \right. \\ &\times \left. \prod_{2 \leq r < s \leq M} (|\rho_r - \rho_s| |q^2 - \rho_r \bar{\rho}_s|)^{k_r \cdot k_s / 2} \right). \quad (8.3.16) \end{aligned}$$

В этой амплитуде двойные полюсы, соответствующие замкнутым струнам, возникают от граничных точек, когда переменные ρ_r расположены близко на мировой поверхности. Имеются также полюсы, соответствующие состояниям открытой струны, которые возникают при приближении ρ_r к границе диска. Константу пропорциональности можно найти в принципе из условия унитарности, которое состоит в том, что диаграмма должна разбиваться на множители в соответствии с рис. 8.23, б с правильными значениями вычетов в полюсах. Как и ожидалось, интеграл по радиусу расходится как $\int_0^1 dq q^{-3} f(q^2)$, т. е. имеет ту же особенность, что и в случае планарной петли в разд. 8.1.1. Главную расходимость можно приписать тахионному состоянию в пропагаторе замкнутой струны, взаимодействующему с вакуумом, как в случае петли открытой струны. Как и раньше, следующая расходимость, имеющая вид $\int dq q^{-1} f'(0)$, является инфракрасным эффектом и связана с дилатонным состоянием в пропагаторе замкнутой струны.

8.3.2. Вещественная проективная плоскость

В дополнение к диаграммам в виде диска из предыдущего раздела в том же порядке по константе связи существует другой вклад в амплитуду для замкнутой струны. Это вещественная

проективная плоскость RP^2 , которая представляет собой неориентируемую поверхность. Сначала опишем это многообразие. (Оно уже кратко обсуждалось в разд. 8.1.2.) Для обычной двумерной сферы S^2 существует естественное вложение в трехмерное вещественное евклидово пространство — это множество всех x_k , $k = 1, 2, 3$, удовлетворяющее равенству

$$\sum x_k^2 = 1. \quad (8.3.17)$$

Чтобы получить плоскость RP^2 , наложим дискретное отношение эквивалентности

$$x_k \approx -x_k. \quad (8.3.18)$$

В то время как сфера S^2 односвязна, фундаментальной группой проективной плоскости RP^2 является группа Z_2 (дискретная группа с элементами ± 1), причем из-за инверсии (8.3.18) многообразие RP^2 является неориентируемым. Так же как S^2 , RP^2 является древесной диаграммой в том смысле, что при ее «разрезании» возникают только одночастичные промежуточные состояния. Однако, как и в случае амплитуды взаимодействия замкнутых струн с диском, амплитуда взаимодействия замкнутых струн с RP^2 имеет двойные полюсы. Поэтому она имеет более высокий порядок, чем обычные древесные амплитуды, определенные на S^2 .

Существует много способов построения амплитуды рассеяния, соответствующей мировой поверхности в виде RP^2 . Ее можно представить в виде древесной диаграммы для замкнутой струны со вставкой пропагатора. Необходимую вставку пропагатора можно описать, например, в калибровке светового конуса как самодействие одной замкнутой струны (в гл. 11 дано соответствующее разъяснение). Проще, однако, построить связанные с RP^2 амплитуды методом функционального интеграла по мировым поверхностям, использованным в разд. 8.3.1 при обсуждении диска с внешними замкнутыми струнами.

Из определения проективной плоскости следует, что RP^2 является, грубо говоря, «половиной» S^2 . Сферу S^2 после удаления «точки на бесконечности», можно стереографически отобразить на всю комплексную плоскость z . Как показано в гл. 1 и 7, пропагатор для свободного бозонного поля $X^\mu(z)$ в комплексной плоскости имеет вид

$$\langle X^\mu(z) X^\nu(z') \rangle = -\frac{1}{2} \eta^{\mu\nu} \ln |z - z'|. \quad (8.3.19)$$

В то время как комплексная плоскость (плюс точка на бесконечности) представляет собой S^2 , для получения RP^2 необходимо наложить дискретное отношение эквивалентности (8.3.18).

Допуская произвольную растяжку переменной z , отношение эквивалентности можно записать в виде

$$\bar{z} \approx -q^2/z. \quad (8.3.20)$$

До тех пор пока нас не интересует «точка на бесконечности», одной «фундаментальной областью» этого преобразования является верхняя полуплоскость. С тем же успехом в качестве «фундаментальной» области можно выбрать комплексную полуплоскость с вырезанным кругом радиуса q (как показано на рис. 8.25). Это ясно из того, что верхний полукруг отображает-

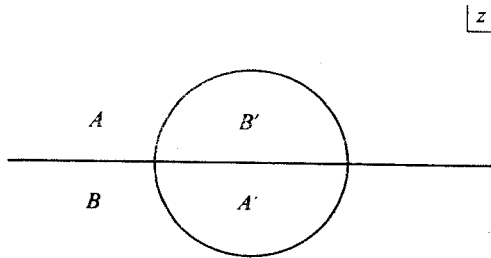


Рис. 8.25. В качестве фундаментальной области преобразования $z \rightarrow -q^2/\bar{z}$ можно выбрать верхнюю полуплоскость (области A и B') или внутренность единичного круга (области A' и B'). При этом преобразовании области A и A' отображаются друг в друга, так же как области B и B' .

ся на нижнюю полуплоскость с вырезанным нижним полукругом; таким образом, плоскость с вырезанным кругом эквивалентна всей верхней полуплоскости. Хотя рисунок плоскости с вырезанным кругом выглядит так же, как дисковая диаграмма, рассмотренная в разд. 8.3.1, для границы круга в случае RP^2 возникает отличие, так как диаметрально противоположные точки отождествлены посредством соотношения (8.3.20). Диск имеет границу (или является некомпактным, если граничные точки удалены), а RP^2 является компактным многообразием без границы. Используя функцию Грина (8.3.19) в верхней полуплоскости и отношение эквивалентности (8.3.20), получаем функцию Грина для X^μ на RP^2

$$G(z; z', q^2) = -2 \langle X^\mu(z) X^\nu(z') \rangle = \\ = \eta^{\mu\nu} \left(\ln |z - z'| + \ln \left| \frac{q^2}{z\bar{z}'} + 1 \right| \right). \quad (8.3.21)$$

По существу второй член в этом выражении представляет собой вклад воображаемого заряда, который необходим для инвариантности функции Грина (8.3.19) при преобразовании (8.3.20). Это выражение применимо как в случае фундамен-

тальной области в виде верхней полуплоскости, так и в случае фундаментальной области в виде плоскости с вырезанным кругом радиуса q .

Вклад этой диаграммы в амплитуду получается тем же способом, что и вклад дисковой диаграммы из разд. 8.3.1. При этом функция Грина $N(\rho; \rho', q^2)$ (заданная (8.3.5)) заменяется на функцию Грина

$$G(\rho; \rho', q^2) = N(\rho; \rho', -q^2) \quad (8.3.22)$$

(заданную (8.3.21)), которая удовлетворяет соотношению $G(\rho; \rho', q^2) = G(-\rho; \rho', q^2)$ при $|\rho| = q$, тем самым отождествляя диаметрально противоположные точки на окружности. Со-

отношение между N и G напоминает способ получения функции Грина для диаграммы в виде листа Мёбиуса ψ^N из функции Грина планарной петлевой диаграммы ψ путем замены q^2 на $-q'^2$ (8.1.71). Поэтому выражение для вклада в амплитуду от проективной плоскости имеет вид (8.3.16) с заменой q^2 на $-q^2$ и без общего множителя n , поскольку проективная плоскость не имеет границы. В частности, амплитуда для проективной плоскости имеет хорошо известную расходимость $\int dq/q^3$, ко-

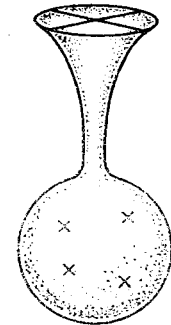


Рис. 8.26. Амплитуда в виде проективной плоскости имеет хорошо известную расходимость, когда тахион распространяется между сферой с присоединенными внешними линиями и проективной плоскостью без внешних линий.

торая в этом случае соответствует конфигурации, изображенной на рис. 8.26. Одинаковый вид рассматриваемой расходимости с расходящимся вкладом от вставок замкнутых струн в диск наводит на мысль, что при подходящих условиях эти вклады могут сокращаться. К этому вопросу мы вернемся в гл. 10.

8.3.3. Другие петлевые диаграммы

Для теории замкнутых ориентированных струн тор является единственной возможной диаграммой порядка κ^M . Но в любой теории с неориентированными струнами необходимо рассматривать диаграммы для замкнутых струн, имеющие замкнутые неориентируемые мировые поверхности. В одной петле им соответствует мировая поверхность, известная под названием «бутылка

Клейна». Это следует из построения петлевой диаграммы для замкнутых струн типа I путем сшивания древесных диаграмм и вставок проекционного оператора $1/2(1+T)$ во внутренние пропагаторы петли, где T — оператор перестановок пространств осцилляторов, движущихся влево и вправо. Этот проекционный оператор обеспечивает циркуляцию по петле тех состояний, которые симметричны относительно перестановки осцилляторов α_n^μ и $\bar{\alpha}_n^\mu$, поэтому струна является неориентированной. Действие проекционного оператора аналогично действию оператора твиста в случае открытых струн. В результате петлевая диаграмма равна сумме членов со всеми возможными вставками оператора перестановок T . В тех членах, которые содержат

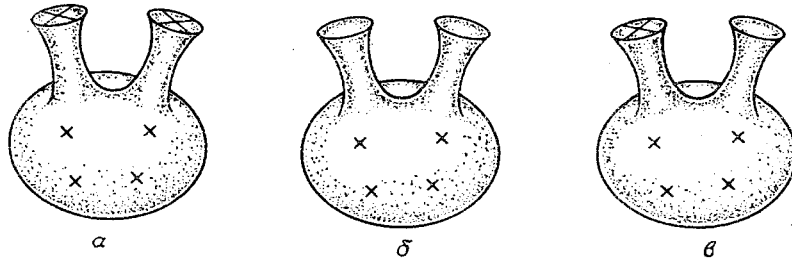


Рис. 8.27. Представление петлевых диаграмм с внешними замкнутыми струнами. *a* — бутылка Клейна; *b* — кольцо; *v* — лист Мёбиуса.

четное число операторов T , след в подынтегральном выражении для амплитуды для каждого номера осцилляторов разбивается на произведение двух множителей аналогично тому, что происходит в теории ориентированных струн. Эффект нечетного числа операторов T внутри следа сводится к такой связи между левыми и правыми модами, что след по осцилляторам данной компоненты берется по петле дважды во многом аналогично теоретико-групповому следу в случае листа Мёбиуса. Рассматриваемые члены описывают мировую поверхность, которая топологически является бутылкой Клейна. Амплитуды в виде бутылки Клейна в литературе еще не исследованы, поэтому об их поведении известно немного. До их исследования эти амплитуды будут оставаться потенциальным источником беспокойства в теории суперструн типа I.

По терминологии, которая будет введена в гл. 11, бутылку Клейна можно представить в виде древесной диаграммы, содержащей два последовательных мгновенных взаимодействия, уже упоминавшиеся в разд. 8.3.2 (см. рис. 8.27, *a*). Другая очевидная диаграмма, которую необходимо рассмотреть в этом же порядке теории возмущений, нарисована на рис. 8.27, *b* и содер-

жит две последовательные вставки открытых струн в пропагатор замкнутой струны. Мировая поверхность этого процесса топологически эквивалентна кольцу, к внутренней области которого присоединены замкнутые струны. Наконец, существует диаграмма, у которой вставка пропагатора открытой струны в пропагатор замкнутой струны сопровождается мгновенным взаимодействием, как показано на рис. 8.27, *v*. Эта диаграмма соответствует мировой поверхности в виде листа Мёбиуса и также имеет порядок \hbar^M . Вместе с тором описанные диаграммы исчерпывают все виды однопетлевых диаграмм с внешними замкнутыми струнами.

Три диаграммы, изображенные на рис. 8.27, образованы последовательным вырезанием отверстий и вклеиванием кросс-кэпов в мировую поверхность. Такой взгляд важен для исследования возможности сокращения расходимостей различных диаграмм.

8.4. Резюме

В настоящей главе мы рассмотрели однопетлевые амплитуды в теории бозонных струн, которые представляют собой квантовые поправки низшего порядка к классической полевой теории струн. При этом внимание акцентировалось на операторных методах построения амплитуд, но их можно также получить с помощью функциональных методов. (Последние описаны в гл. 11 в калибровке светового конуса.)

Существуют три типа однопетлевых диаграмм для открытых струн. Планарные диаграммы соответствуют мировым поверхностям, которые в пространстве параметров имеют вид кольца, к одной из границ которого присоединены частицы. Они расходятся в граничной точке интегрирования по переменной ω или q , которые параметризуют конформную структуру кольца. Эта расходимость соответствует такой пространственно-временной конфигурации мировой поверхности, когда диск с присоединенными к его границе частицами соединен с диском без частиц длинной тонкой трубой, описывающей дилатонное состояние замкнутой струны с нулевым импульсом. Неориентируемые диаграммы, связанные с мировыми поверхностями в виде листов Мёбиуса, расходятся по тем же причинам, при этом вместо диска связь трубы с вакуумом осуществляется посредством кросс-кэпа. Непланарные ориентируемые диаграммы расходимостей не содержат. Описанные диаграммы содержат связанные состояния замкнутой струны, которые возникают как сингулярности в канале с вакуумными квантовыми числами. Только в критической размерности (в данном случае $D=26$) эти

сингулярности имеют вид полюсов в соответствии с унитарностью.

В теории ориентированных замкнутых струн ситуация значительно проще. Единственная однопетлевая диаграмма соответствует мировой поверхности, топологически эквивалентной тору. Эту диаграмму можно определить непротиворечивым образом только в критической размерности, поскольку только в этом случае подынтегральное выражение в петлевом интеграле является модулярно инвариантным. Однако и здесь амплитуда расходится из-за сингулярностей, возникающих в граничной точке, где все внешние частицы на торе расположены близко друг к другу. Как и раньше, особенность можно интерпретировать как инфракрасную расходимость, связанную с наличием в теории тахионов или безмассовых скаляров.

В теориях с неориентированными струнами существует ряд других квантовых поправок к амплитудам с внешними замкнутыми струнами, которые соответствуют добавлению ручек или вырезанию окон в мировой поверхности. Вырезание окна в ориентируемой мировой поверхности древесной диаграммы для замкнутой струны дает квантовую поправку, которая соответствует перемешиванию состояний открытой и замкнутой струн и не является петлевой диаграммой. Существует похожий вклад от древесной диаграммы для замкнутой струны с неориентируемой мировой поверхностью, которая представляет собой проективную плоскость. В дополнение к тору однопетлевые диаграммы с внешними замкнутыми струнами в теории неориентированных струн можно классифицировать по топологии их мировых поверхностей: бутылка Клейна, кольцо и лист Мёбиуса.

Приложение 8.A. θ -функции Якоби

Четыре θ -функции Якоби θ_k ($k = 1, \dots, 4$) удовлетворяют уравнению теплопроводности

$$\frac{i}{\pi} \frac{\partial^2 \theta_k(v|\tau)}{\partial v^2} + 4 \frac{\partial \theta_k(v|\tau)}{\partial \tau} = 0. \quad (8.A.1)$$

Они определяются в виде сумм или произведений

$$\begin{aligned} \theta_1(v|\tau) &= i \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{(n-1/2)^2} e^{i\pi(2n-1)v} = \\ &= 2f(q^2) q^{1/4} \sin \pi v \prod_{n=1}^{\infty} (1 - 2q^{2n} \cos 2\pi v + q^{4n}), \end{aligned} \quad (8.A.2)$$

$$\begin{aligned} \theta_2(v|\tau) &= \theta_1\left(v + \frac{1}{2} \middle| \tau\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{(n-1/2)^2} e^{i\pi(2n-1)v} = \\ &= 2f(q^2) q^{1/4} \cos \pi v \prod_{n=1}^{\infty} (1 + 2q^{2n} \cos 2\pi v + q^{4n}), \end{aligned} \quad (8.A.3)$$

$$\begin{aligned} \theta_3(v|\tau) &= e^{i\pi(v+\tau/4)} \theta_1\left(v + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \tau \middle| \tau\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{n^2} e^{i\pi 2nv} = \\ &= f(q^2) \prod_{n=1}^{\infty} (1 + 2q^{2n-1} \cos 2\pi v + q^{4n-2}), \end{aligned} \quad (8.A.4)$$

$$\begin{aligned} \theta_4(v|\tau) &= -ie^{i\pi(v+\tau/4)} \theta_1\left(v + \frac{1}{2} \tau \middle| \tau\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{n^2} e^{i\pi 2nv} = \\ &= f(q^2) \prod_{n=1}^{\infty} (1 - 2q^{2n-1} \cos 2\pi v + q^{4n-2}), \end{aligned} \quad (8.A.5)$$

где

$$q = e^{i\pi\tau}, \quad (8.A.6)$$

$$f(q^2) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^{2n}) = (\theta'_1(0|\tau)/2\pi q^{1/4})^{1/3}. \quad (8.A.7)$$

Символом $\theta'(0|\tau)$ обычно обозначают производную по первому аргументу (v):

$$\theta'_1(0|\tau) \equiv \left. \frac{\partial \theta_1(v|\tau)}{\partial v} \right|_{v=0}. \quad (8.A.8)$$

Равенство бесконечных рядов и бесконечных произведений (8.A.2) — (8.A.5) составляет содержание формулы тройного произведения Якоби, которая приведена в разд. 3.2.4.

Функция θ_1 удовлетворяет важному условию периодичности

$$\begin{aligned} \theta_1(v+1|\tau) &= -\theta_1(v|\tau), \\ \theta_1(v+\tau|\tau) &= -e^{-i\pi\tau - 2i\pi v} \theta_1(v|\tau). \end{aligned} \quad (8.A.9)$$

Другие функции θ_r удовлетворяют похожим соотношениям, которые вытекают из их определения.

Функцию ψ , возникающую в планарных петлевых амплитудах, удобно выразить через функцию θ_1 с помощью следующей

формулы:

$$\begin{aligned} \psi(\rho, \omega) &= \frac{1-\rho}{\sqrt{\rho}} \exp\left(\frac{\ln^2 \rho}{2 \ln \omega}\right) \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(1-\omega^n \rho)(1-\omega^n/\rho)}{(1-\omega^n)^2} = \\ &= -2\pi i e^{-i\pi v^2/\tau} \frac{\theta_1(-v/\tau | -1/\tau)}{\theta_1'(0 | -1/\tau)}, \end{aligned} \quad (8.A.10)$$

где

$$v \equiv \frac{\ln z}{2i\pi} = \frac{\ln \rho}{\ln \omega}, \quad \tau \equiv \frac{\ln q}{i\pi} = -\frac{2\pi i}{\ln \omega}, \quad (8.A.11)$$

откуда следует

$$\frac{\ln \rho}{2i\pi} = -\frac{v}{\tau}, \quad \frac{\ln \omega}{2i\pi} = -\frac{1}{\tau}. \quad (8.A.12)$$

При преобразовании $\rho \rightarrow \omega\rho$ ($v \rightarrow v + \tau$) функция $\psi(\rho, \omega)$ преобразуется следующим образом:

$$\psi(\omega\rho, \omega) = \psi(\rho, \omega), \quad (8.A.13)$$

как вытекает из (8.A.9).

Аналогично функция ψ^T задается следующей формулой:

$$\begin{aligned} \psi^T(\rho, \omega) &= \frac{1+\rho}{\sqrt{\rho}} \exp\left(\frac{\ln^2 \rho}{2 \ln \omega}\right) \prod_{n=1+i\pi}^{\infty} \frac{(1+\omega^n \rho)(1+\omega^n/\rho)}{(1-\omega^n)^2} = \\ &= 2\pi e^{-i\pi v^2/\tau} \frac{\theta_1(1/2 - v/\tau | -1/\tau)}{\theta_1'(0 | -1/\tau)} \end{aligned} \quad (8.A.14)$$

и удовлетворяет соотношению

$$\psi^T(\omega\rho, \omega) = \psi^T(\rho, \omega). \quad (8.A.15)$$

Подобным же образом

$$\begin{aligned} \psi^N(\rho, \omega) &= \frac{1-\rho}{\sqrt{\rho}} \left(\frac{\ln^2 \rho}{2 \ln \omega}\right) \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(1-(-\omega)^n \rho)(1-(-\omega)^n/\rho)}{(1-(-\omega)^n)^2} = \\ &= -2\pi i e^{-i\pi v^2/\tau} \frac{\theta_1(-v/\tau | 1/2 - 1/\tau)}{\theta_1'(0 | 1/2 - 1/\tau)} \end{aligned} \quad (8.A.16)$$

и удовлетворяет равенству

$$\psi^N(\omega\rho, \omega) = \psi^N(\rho, \omega). \quad (8.A.17)$$

Функции θ_k имеют простые трансформационные свойства при модулярных преобразованиях. Например, преобразование $\tau \rightarrow -1/\tau$ легко анализируется с использованием формулы сум-

мирования Пуассона. Формула Пуассона имеет вид

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\pi n^2 A + 2\pi n A s} = \frac{1}{\sqrt{A}} e^{\pi A s^2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{-\pi A^{-1} m^2 - 2i\pi m s}. \quad (8.A.18)$$

Ее можно доказать, используя равенство $\sum_m e^{2\pi i r m} = \sum_n \delta(r - n)$:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\pi n^2 A + 2\pi n A s} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dr e^{2i\pi r m} e^{-\pi r^2 A + 2\pi r A s}. \quad (8.A.19)$$

После взятия (гауссова) интеграла по r в правой части (8.A.19) получаем (8.A.18). Обобщение формулы (8.A.18) приведено в приложении 9.Б. Трансформационные свойства θ_1 , определенной соотношением (8.A.2), при модулярных преобразованиях можно получить из (8.A.18) путем отождествления $A = i\tau$ и $s = -1/2 + 1/2\tau + v/\tau$. Таким образом, получаем

$$\theta_1\left(-\frac{v}{\tau} \middle| -\frac{1}{\tau}\right) = \eta(\tau)^{1/2} \exp\left(\frac{i\pi v^2}{\tau}\right) \theta_1(v|\tau), \quad (8.A.20)$$

где

$$\eta = e^{i\pi/4}. \quad (8.A.21)$$

Нетрудно показать, что при модулярном преобразовании $\tau \rightarrow \tau + 1$ функция θ_1 преобразуется следующим образом:

$$\theta_1(v|\tau + 1) = \eta \theta_1(v|\tau). \quad (8.A.22)$$

Закон преобразования функции θ_1 при произвольном модулярном преобразовании

$$\tau \rightarrow \frac{a\tau + b}{c\tau + d} \quad (8.A.23)$$

можно получить, комбинируя в различных соотношениях частные преобразования (8.A.20) и (8.A.22), что приводит к формуле

$$\theta_1\left(\frac{v}{c\tau + d} \middle| \frac{a\tau + b}{c\tau + d}\right) = \eta'(c\tau + d)^{1/2} \exp\left(\frac{i\pi c v^2}{c\tau + d}\right) \theta_1(v|\tau). \quad (8.A.24)$$

Коэффициент η' является корнем восьмой степени из единицы, причем определение того, какой именно корень необходимо выбрать при заданных a, b, c, d , представляет собой тонкую геометрико-числовую проблему. Из (8.A.24) следует закон преобразования

$$\theta_1'(0 \mid \frac{a\tau + b}{c\tau + d}) = \eta(c\tau + d)^{3/2} \theta_1'(0|\tau). \quad (8.A.25)$$

Другие функции θ_r удовлетворяют аналогичным соотношениям, которые можно получить, подставляя в их выражение через θ_1 формулу (8.A.24).

Полагая $b = -c = 1$ и $a = d = 0$, получаем трансформационные свойства $f(q^2)$, которые вытекают из (8.A.7) и (8.A.25):

$$f(\omega) = \left[\frac{\theta'_1(0| -1/\tau)}{2\pi\omega^{1/8}} \right]^{1/3} = \left(\frac{-\ln q}{\pi} \right)^{1/2} \omega^{-1/24} q^{1/12} f(q^2). \quad (8.A.26)$$

Аналогично функция распределения, возникающая при проведении однопетлевых вычислений в теории неориентированных струн, преобразуется в соответствии с формулой

$$f(-\omega) = \left(\frac{-\ln q}{2\pi} \right)^{1/2} \omega^{-1/24} q^{1/48} f(-\sqrt{q}). \quad (8.A.27)$$

Как следствие (8.A.24) можно получить трансформационные свойства различных функций ψ . Полагая $a = 0$, $b = 1$, $c = -1$ и $d = 0$, получаем

$$\frac{\theta_1(-v/\tau | -1/\tau)}{\theta'_1(0 | -1/\tau)} = -1/\tau e^{i\pi v^2/\tau} \theta_1(v|\tau)/\theta'_1(0|\tau). \quad (8.A.28)$$

При тех же значениях параметров использование связи (8.A.3) между θ_1 и θ_2 дает

$$\frac{\theta_2(-v/\tau | -1/\tau)}{\theta'_1(0 | -1/\tau)} = \frac{i}{\tau} e^{i\pi v^2/\tau} \theta_4(v|\tau)/\theta'_1(0|\tau). \quad (8.A.29)$$

Наконец, использование (8.A.24) при $a = 1$, $b = 0$, $c = -2$ и $d = 1$ приводит к соотношению

$$\frac{\theta_1(-v/\tau | 1/2 - 1/\tau)}{\theta'_1(0 | 1/2 - 1/\tau)} = \frac{2}{\tau} e^{i\pi v^2/\tau} \frac{\theta_1(-v/2 | \tau/4 - 1/2)}{\theta'_1(0 | \tau/4 - 1/2)}. \quad (8.A.30)$$

С помощью полученных выше формул выражение для функций ψ можно записать в простом виде, используя переменные q и $z = \exp\{2i\pi v\}$:

$$\begin{aligned} \psi(\rho, \omega) &= -\frac{2\pi}{\ln q} \sin \pi v \prod_1^\infty \frac{1 - 2q^{2n} \cos 2\pi v + q^{4n}}{(1 - q^{2n})^2} = \\ &= -\frac{1}{\tau} e^{-i\pi v^2/\tau} \psi(z, q^2). \end{aligned} \quad (8.A.31)$$

Аналогично функции ψ^T и ψ^N можно записать в виде

$$\psi^T(\rho, \omega) = -\frac{\pi}{\ln q} q^{-1/4} \prod_1^\infty \frac{1 - 2q^{2n-1} \cos 2\pi v + q^{4n-2}}{(1 - q^{2n})^2}, \quad (8.A.32)$$

$$\psi^N(\rho, \omega) = -\frac{4\pi}{\ln q} \sin \frac{\pi v}{2} \prod_1^\infty \frac{1 - 2(-\sqrt{q})^n \cos \pi v + q^n}{(1 - (-\sqrt{q})^n)^2}. \quad (8.A.33)$$

При вычислении петлевых амплитуд с внешними безмассовыми векторными состояниями встречаются также функции $\eta(\omega, \rho)$ и $\Omega(\omega, \rho)$, определенные выражениями (8.1.59) и (8.1.60). Их вид при переходе от переменных ρ, ω к переменным z, q^2 (который соответствует замене $-v/\tau \rightarrow v$ и $-1/\tau \rightarrow \tau$) можно получить, используя (8.1.61) и (8.1.62):

$$\eta(\rho, \omega) = -\tau \eta'(z, q^2), \quad (8.A.34)$$

$$\Omega(\rho, \omega) = \tau^2 \Omega'(z, q^2). \quad (8.A.35)$$

Штрихи в этих уравнениях означают, что нулевые моды в правых частях опущены, например

$$\eta'(\rho, \omega) = \eta(\rho, \omega) - \frac{\ln \rho}{\ln \omega}, \quad (8.A.36)$$

$$\Omega'(\rho, \omega) = \Omega(\rho, \omega) + \frac{1}{\ln \omega}. \quad (8.A.37)$$

Функцию χ в (8.2.13), которая появляется в вычислениях для замкнутых струн, можно представить в виде

$$\chi(z, \omega) \equiv \chi(v|\tau) = 2\pi e^{-\pi(\operatorname{Im} v)^2/\operatorname{Im} \tau} \left| \frac{\theta_1(v|\tau)}{\theta'_1(0|\tau)} \right|. \quad (8.A.38)$$

Инвариантность χ (8.2.18) при сдвиге переменной $v \rightarrow v + 1$ следует из того, что при этом преобразовании θ_1 просто меняет знак (что вытекает из (8.A.9)). Инвариантность χ (8.2.18) при преобразовании $v \rightarrow v + \tau$ также имеет место, поскольку изменение $|\theta_1|$ в (8.A.9) компенсируется изменением экспоненциального множителя в (8.A.38).

Из (8.A.24) следует, что функция χ при преобразовании (8.A.23) преобразуется с весом 1, откуда получаем

$$\chi\left(\frac{v}{c\tau + d} \middle| \frac{a\tau + b}{c\tau + d}\right) = \frac{\chi(v|\tau)}{|c\tau + d|}. \quad (8.A.39)$$

Это выражение завершает обсуждение формул, использованных в однопетлевых вычислениях.

9. Однопетлевые диаграммы в теории суперструн

В этой главе мы обсудим однопетлевые амплитуды в теории суперструн. Для вычисления однопетлевых амплитуд в теории суперструн с внешними состояниями на массовой оболочке применяются операторные методы, использованные для вычисления соответствующих диаграмм в гл. 8. Конечные выражения для амплитуд имеют вид интегралов по мировым поверхностям, которые ориентируемы и замкнуты для суперструн типа II или гетеротических струн. Теории суперструн типа I основаны на неориентированных открытых и замкнутых струнах, поэтому их мировые поверхности не должны быть ориентируемыми и могут иметь границы. Как и в случае бозонных струн, операторный подход с помощью элементарных алгебраических преобразований дает правильную меру. В других подходах, в которых явно вычисляется сумма по геометриям, необходимо постоянно следить за правильным определением и вычислением бесконечных детерминантов, определяющих меру. Несмотря на это, последние подходы обладают рядом преимуществ и определенно являются предпочтительными при изучении многопетлевых амплитуд.

Вычисления в калибровке светового конуса, основанные на пространственно-временной суперсимметрии (гл. 5), и ковариантные вычисления, основанные на суперсимметрии мировой поверхности (гл. 4), так же как для древесных диаграмм, существенно отличаются в случае однопетлевых амплитуд в теориях суперструн. Для многих целей формализм светового конуса с явной пространственно-временной суперсимметрией более экономичен, так как содержит меньше диаграмм, которые необходимо вычислять для заданного процесса рассеяния. Например, теории с ориентированными замкнутыми струнами (типа II и гетеротическими) содержат только одну однопетлевую диаграмму, которая соответствует мировой поверхности в виде тора. В ковариантном формализме с суперсимметрией мировой поверхности существует несколько вкладов, которые необходимо

вычислить отдельно, а затем сложить. Эти вклады соответствуют различным граничным условиям для фермионов на мировой поверхности, соответствующей однопетлевому уровню. Способ сшивания «спиновых структур» в этом примере и соответствующее обобщение на поверхности более высокого рода представляют собой ключевой вопрос для самосогласованности теории суперструн. Этот вопрос рассматривается в настоящей главе и более детально в гл. 14.

9.1. Амплитуды для открытых суперструн

Начнем наше рассмотрение с изучения петлевых амплитуд для открытых суперструн. В этом случае вычисления относятся непосредственно только к теории суперструн типа I, так как это единственная теория, содержащая открытые струны. Однако соответствующий анализ важен также для изучения петлевых диаграмм в теориях суперструн типа II и гетеротических струн. В теориях типа II моды, распространяющиеся влево и вправо, математически описываются так же, как для открытых суперструн. Аналогично формулы для открытых суперструн применимы к правым модам в теориях гетеротических струн.

Для более глубокого понимания рассматриваемых теорий очень поучительно не только выводить абстрактные формулы, описывающие общие случаи, но также проводить вычисления в конкретных примерах и использовать их характерные свойства. На практике это означает, что удобно сосредоточить внимание на амплитудах, внешние состояния которых являются в теории основными, т. е. безмассовыми состояниями суперструн. Вычисления в случае массивных внешних состояний также не содержат принципиальных трудностей, но необходимые вершинные операторы являются более сложными.

В настоящей главе мы ограничимся примерами, содержащими четыре или меньше число внешних частиц. Такое ограничение является существенным. Когда рассматриваются, например, M внешних состояний векторных частиц, каждая частица характеризуется вектором поляризации ζ_i^μ и импульсом k_i^μ . При этом только $M-1$ импульсов k_i^μ линейно независимы. В общем случае амплитуды зависят от лоренцевых инвариантов, образованных из векторов поляризации и импульсов внешних частиц. При $M \geq 6$ инвариантный множитель может включать антисимметричный тензор ε (с десятью индексами, поскольку $D=10$), свернутый с импульсами и векторами поляризации. Если $M < 6$, то такие члены невозможны, потому что антисимметричный тензор может дать ненулевую свертку только с линейно независимыми векторами.

Упомянутые члены, содержащие ϵ , представляют особый интерес, так как они могут приводить к аномалиям в квантовой теории. Отсутствие таких аномалий является важным условием самосогласованности квантовой теории, приемлемой с физической точки зрения. В гл. 10 явно вычислены аномалии, связанные с определенными шестиугольными струнными диаграммами, а в настоящей главе мы рассмотрим только случай $M \leq 4$. При $M \leq 4$ без ограничения общности можно использовать калибровку светового конуса, описанную в гл. 5. Поскольку существует не более четырех линейно независимых векторов поляризации и три независимых импульса для четырехточечной функции, всегда можно выбрать такую лоренцеву систему отсчета, в которой в калибровке светового конуса все k^+ -компоненты векторов обращаются в нуль. Тогда амплитуды, вычисленные в этой системе отсчета, однозначно определяют общее выражение для амплитуды в произвольной системе отсчета, как в разд. 7.4. Для этого, записывая явно ковариантную формулу для амплитуды, которая совпадает с результатом, вычисленным в фиксированной системе координат, получаем обобщение амплитуды на случай произвольной системы отсчета.

В разд. 7.4.1 получены вершинные операторы, которые описывают рождение безмассовых суперструнных состояний в системе отсчета с $k^+ = 0$. В калибровке светового конуса векторы поляризации удовлетворяют условию $\zeta^+ = 0$; и, кроме того, так же как в разд. 7.4, мы положим $\zeta^- = 0$. Конечные выражения для вершинных операторов испускания безмассового бозона и фермиона имеют вид

$$V_B(\zeta, k) = \zeta^i B^i e^{ik \cdot X}, \quad (9.1.1)$$

$$V_F(u, k) = (u^a F^a + u^{\dot{a}} F^{\dot{a}}) e^{ik \cdot X}, \quad (9.1.2)$$

где

$$B^i = \dot{X}^i - \frac{1}{4} S \gamma^{ij} S k^j, \quad (9.1.3)$$

$$F^a = (p^+ / 2)^{1/2} S^a, \quad (9.1.4)$$

$$F^{\dot{a}} = (2p^+)^{-1/2} \left[(\gamma \cdot \dot{X} S)^{\dot{a}} + \frac{1}{3} : (\gamma^i S)^{\dot{a}} S \gamma^{ij} S : k^j \right]. \quad (9.1.5)$$

Можно записать петлевые амплитуды для открытых суперструн в том же общем виде, что и в гл. 8, а именно

$$A = g^M \int d^{10} p \operatorname{Tr} (\Delta V(1) \Delta V(2) \dots \Delta V(M)), \quad (9.1.6)$$

где вершинные операторы $V(r)$ обозначают либо $V_B(\zeta, k)$, либо $V_F(u, k)$, а пропагатор, как и раньше, задается формулами

$$\Delta^{-1} = L_0 = \frac{1}{2} p^2 + N, \quad (9.1.7)$$

$$N = \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_{-n}^i \alpha_n^i + n S_{-n}^a S_n^a). \quad (9.1.8)$$

С каждым пропагатором можно связать также оператор твиста

$$\Omega = -(-1)^N \quad (9.1.9)$$

в зависимости от топологии диаграммы, которую мы хотим описать.

В ковариантных вычислениях гл. 8 в следе было необходимо учитывать вклад духов Фаддеева — Попова. Несмотря на то что духи входили в вершины тривиально, их вклад тем не менее приводил к появлению в следе важного множителя $[f(\omega)]^{-2}$. В физической калибровке светового конуса, которая сейчас используется, духовые координаты отсутствуют, а следы берутся только по модам $X^i(\sigma, \tau)$ и $S^a(\sigma, \tau)$.

9.1.1. Амплитуды с $M < 4$ безмассовыми внешними состояниями

Используя определенные выше выражения для пропагаторов и вершин рождения основных состояний, петлевые амплитуды суперструн можно выразить через корреляционные функции аналогично тому, как в гл. 8 были выражены бозонные петлевые амплитуды, но теперь они будут содержать следы по антикоммутирующим модам. Сюда входит след по фермионным нулевым модам S_0^a . Как показано в приложении 9.A, если этот след не содержит по крайней мере восемь мод S_0^a , то он исчезает из-за тождества для суперсимметричного следа. Поскольку вершина рождения бозонов в основном состоянии содержит не более двух мод S_0^a , для получения ненулевого следа по нулевым модам необходимо присутствие по крайней мере четырех внешних бозонов. Это означает, что амплитуды, содержащие один, два или три внешних бозона в основном состоянии или без таких частиц, исчезают. Этот результат не зависит от того, сколько внутренних пропагаторов содержат твисты, поэтому, так же как для планарных диаграмм, он имеет место в случае непланарных и неориентируемых петель. Это также относится к различным теориям замкнутых суперструн, где следы по модам, распространяющимся влево и вправо, вычисляются отдельно.

Аналогичные аргументы применимы к процессам с внешними фермионами в основном состоянии, как, очевидно, и должно быть, поскольку эти процессы связаны с бозонными амплитудами преобразованием суперсимметрии. Но причины тривиальности амплитуд немного тоньше, поскольку вершины испускания фермионов V_F содержат наряду с линейным по S_0 членом также член, кубический по S_0 . Казалось бы, простой подсчет степеней S_0 говорит о том, что амплитуда с двумя внешними фермионами и одним внешним бозоном может быть нетривиальной. Однако в действительности эта петля равна нулю по другим причинам, которые объясняются ниже в этой главе.

Исчезновение однопетлевых диаграмм без внешних частиц тесно связано с исчезновением энергии вакуума в одной петле и, следовательно, космологической постоянной Λ . Связь между энергией вакуума и космологической постоянной объяснена в гл. 8. Исчезновение квантовых поправок к космологической постоянной присуще всем теориям с ненарушенной суперсимметрией. Если суперсимметрия остается ненарушенной во всех порядках теории возмущений, то амплитуда без внешних частиц должна исчезать также во всех порядках. Если в теории возмущений суперсимметрия нарушается, то результирующая космологическая постоянная почти неизбежно должна быть порядка (масса Планка)⁴, превышая экспериментальную границу в 10^{120} раз!

Исчезновение петлевой амплитуды открытых струн с одним основным состоянием открытой струны тривиально, поскольку безмассовых состояний открытой струны с вакуумными квантовыми числами не существует. Исчезновение петлевой амплитуды с двумя безмассовыми внешними состояниями подразумевает исчезновение собственных энергий безмассовых частиц. Для бозонов это свойство представляет собой естественное следствие калибровочной инвариантности, в то время как для фермионов это следствие киральной симметрии. В каждом случае просто не хватает степеней свободы для описания массивного состояния¹⁾. Наконец, исчезновение трехчастичных амплитуд очень напоминает теоремы неперенормируемости констант связи, которые появляются в суперсимметричных полевых теориях.

¹⁾ Безмассовый вектор имеет восемь состояний поляризации, в то время как массивный требует девять. Безмассовый спинор Майораны—Вейля имеет восемь поляризаций. Массивные спиноры не могут быть вейлевскими, поскольку минимальное число их компонент равно 16. В каждом случае по крайней мере в любом конечном порядке теории возмущений не существует источника дополнительных мод, необходимых для придания масс этим частицам.

9.1.2. Планарные диаграммы

Амплитуды с четырьмя внешними основными состояниями (любая комбинация фермионов и бозонов) являются первыми примерами, дающими нетривиальные результаты. Конечно, для унитарности это необходимо, поскольку амплитуды должны иметь мнимые части, соответствующие произведению древесных амплитуд $2 \rightarrow 2$, проинтегрированным по фазовому пространству промежуточных состояний. Таким образом, нетривиальность древесных амплитуд подразумевает, что петлевые амплитуды также должны быть ненулевыми. Соответствующие вычисления оказываются относительно простыми, потому что для наличия восьми степеней свободы S_0^a , обеспечивающих нетривиальность следа по нулевым модам, используются все S -осцилляторы в вершинных операторах. В этом случае вычисления различных диаграмм с открытыми струнами являются простым обобщением соответствующих вычислений в теории бозонных струн.

Рассмотрим сначала четырехчастичную однопетлевую диаграмму только с внешними бозонами; тогда каждая вершина имеет вид (9.1.1). Поскольку след по модам S_0 равен нулю, если нет по крайней мере восьми степеней S_0 внутри следа, и каждый вершинный оператор может дать не более двух степеней, должен иметь место максимальный случай. Единственный член в (9.1.3) с двумя степенями S_0 имеет вид $-R_0^{ij} k^j$, где

$$R_0^{ij} = \frac{1}{4} S_0^a \gamma_{ab}^i S_0^b. \quad (9.1.10)$$

Поэтому после взятия следа по S_0 вершинные операторы не дают больше членов, содержащих другие S -осцилляторы. След по S_0 приводит к появлению следующего множителя в амплитуде:

$$K = t_{i_1 i_2 i_3 i_4} \zeta_1^{i_1} \zeta_2^{i_2} \zeta_3^{i_3} \zeta_4^{i_4} k_1^{j_1} k_2^{j_2} k_3^{j_3} k_4^{j_4}. \quad (9.1.11)$$

где тензор t определен соотношением

$$t_{i_1 i_2 i_3 i_4} = \text{Tr} (R_0^{i_1 j_1} R_0^{i_2 j_2} R_0^{i_3 j_3} R_0^{i_4 j_4}). \quad (9.1.12)$$

Вычисление этого тензора описано в приложении 9.A. Примечательно, что множитель K имеет в точности тот же вид, который был найден в разд. 7.4.2 для четырехчастичных древесных амплитуд. В одной петле выражение для тензора t возникает как след по восьми модам S_0 , в то время как в древесном приближении вычисления имеют совершенно другой характер. Проведя вычисления для бозонов, находим правдоподобным, что суперсимметрия обеспечивает для четырехчастичных однопетлевых

амплитуд, содержащих фермионы, такой же кинематический множитель, как и для древесных амплитуд. На самом деле это должно иметь место, поскольку все множители K , найденные в разд. 7.4.2, могут быть связаны друг с другом преобразованиями суперсимметрии.

Рассмотрим теперь вычисление следа, связанного ненулевыми модами S_n^a . Поскольку они выпадают из вершинных операторов после взятия следа по S_0 , пропагатор

$$\Delta = \int_0^1 x^{L_0-1} dx, \quad (9.1.13)$$

определенный (9.1.7) и (9.1.8), является единственным источником этих мод при вычислении однопетлевых диаграмм с четырьмя безмассовыми векторными частицами. Поэтому вклад в подынтегральное выражение петлевой амплитуды от следа по ненулевым S_n^a имеет вид

$$\text{Tr} \left(\prod_{a=1}^8 \prod_{n=1}^{\infty} w^{n S_n^a} \right) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - w^n)^8 = [f(w)]^8, \quad (9.1.14)$$

где $w = \prod_r x_r$. Этот след вычисляется очень просто, так как каждый фермионный уровень имеет числа заполнения 0 или 1, приводя к множителю $1 - w^n$ для n -го уровня. Дополнительный знак минус возникает благодаря тому, что занятый уровень содержит нечетное число фермионных мод. (Причина та же, что и для духовых мод в разд. 8.1.1.)

После использования множителей B_i в каждой вершине (тех множителей, которые умножаются на $\exp\{ik \cdot X\}$) при вычислении следа по фермионным нулевым модам след по бозонным модам имеет тот же вид, что и в разд. 8.1.1, но с D , равным 10, поэтому результат можно сразу выписать. В калибровке светового конуса след по поперечным осцилляторным модам дает вклад

$$\text{Tr} \left(\prod_{i=1}^8 \prod_{n=1}^{\infty} w^{\alpha_i - n \alpha_n^i} \right) = [f(w)]^{-8}. \quad (9.1.15)$$

Множители $f(w)$ от бозонных и фермионных следов сокращаются. Конечный результат для планарной петлевой амплитуды с заданным циклическим порядком внешних безмассовых частиц имеет вид

$$A_P(1, 2, 3, 4) = g^4 G_P K \int \frac{dw}{w} \int \left(\prod_{r=1}^3 \frac{d\rho_r}{\rho_r} \right) \left(\frac{-2\pi}{\ln w} \right)^5 \prod_{r < s} (\psi_{rs})^{k_r \cdot k_s}. \quad (9.1.16)$$

Здесь область интегрирования задается неравенствами $w = \rho_4 \leq \rho_3 \leq \rho_2 \leq \rho_1 \leq 1$. Функция $\ln \psi_{rs}$ представляет собой функцию Грина двумерного оператора Лапласа в ρ -плоскости (с граничными условиями Неймана), зависящую от точек ρ_r и ρ_s на границе и введенную в разд. 8.1.1. Множитель K , определенный формулой (9.1.11), является кинематическим, а множитель G_P обозначает теоретико-групповой множитель $\text{tr}(\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4)$, введенный в гл. 6. Полная планарная петлевая амплитуда задается суммой по всем нециклическим перестановкам внешних состояний.

Тот факт, что множители $f(w)$ в (9.1.16) сократились, является следствием взаимно однозначного соответствия между модами α и S , что в свою очередь является следствием пространственно-временной суперсимметрии. Ниже в этой главе будет объяснено, как этот результат возникает в ковариантном RNS-подходе.

Планарная петлевая амплитуда (9.1.16) расходится из-за сингулярного поведения подынтегрального выражения вблизи $w = 1$. Анализ почти идентичен анализу в разд. 8.1.1. Для выделения расходимости удобно перейти к переменным, выражающим амплитуду в виде интеграла по параметрам кольца. Такие переменные введены в разд. 8.1.1:

$$z_r = e^{2i\pi v_r}, \quad q = \exp\left(-\frac{2\pi^2}{\ln w}\right), \quad (9.1.17)$$

где

$$v_r = \frac{\ln \rho_r}{\ln w}. \quad (9.1.18)$$

Результат представляет собой интеграл по координатам частиц z_r вдоль внешней границы кольца и по радиусу отверстия q и имеет вид

$$A_P(1, 2, 3, 4) = g^4 G_P K \int_0^1 \frac{dq}{q} \int \left(\prod_{r=1}^3 dv_r \right) \prod_{1 \leq r < s \leq 4} (\psi_{rs})^{k_r \cdot k_s} = g^4 G_P K \int_0^1 \frac{dq}{q} F_P(q^2), \quad (9.1.19)$$

где (как следует из вида ψ_{rs} , приведенного в приложении 8.A)

$$F_P(q^2) = \int \left(\prod_{r=1}^3 dv_r \right) \prod_{1 \leq r < s \leq 4} \left[\sin \pi (v_s - v_r) \times \right. \\ \left. \times \prod_{n=1}^{\infty} (1 - 2q^{2n} \cos 2\pi (v_s - v_r) + q^{4n}) \right]^{k_r \cdot k_s} \quad (9.1.20)$$

и $0 \leq v_1 \leq v_2 \leq v_3 \leq v_4 = 1$. (Другие множители выпадают, благодаря равенству $\sum_{r < s} k_r \cdot k_s = 0$, справедливому для безмассовых состояний.) Здесь $F_p(q^2)$ — аналитическая функция от q^2 в окрестности точки $q^2 = 0$, поэтому она разлагается в ряд по q^2 , который начинается с константы. В суперсимметричной теории расходимость в точке $q = 0$ слабее, чем в бозонной теории (где интеграл по q имеет вид $\int_0^1 dq f(q^2)/q^3$). В гл. 8 показано, что расходимость планарной диаграммы при $q = 0$ можно интерпретировать как результат испускания тахиона или безмассовой частицы в вакуум, т. е. обмена любой из этих частиц в «кросс-канале». Суперсимметричная теория с GSO-проекцией не содержит тахиона, поэтому самый сингулярный член связан с безмассовым дилатоном, распространяющимся в кросс-канале, и имеет вид $\int dq/q$, как было показано в гл. 8.

В ковариантном подходе планарная петлевая амплитуда представляется суммой петли фермионов и петли бозонов. Каждая из петель имеет расходимость вида $\int_0^1 dq f(q)/q^2$. Эта расходимость слабее, чем в теории бозонных струн, так как тахиону замкнутой струны (до GSO-проекции) соответствует условие $k^2 = 4$ вместо $k^2 = 8$. После сложения петель получается приведенный выше результат. Таким образом, условия GSO приводят к более впечатляющему сокращению расходимостей, чем аналогичные сокращения в суперсимметричных теориях точечных частиц.

При вычислении петель с внешними фермионами используется фермионная вершина V_F , заданная выражениями (9.1.2), (9.1.4) и (9.1.5). В этом случае при интегрировании по внутренним импульсам петли возникают новые множители, содержащие p^+ (которые входят в целых степенях, так как число фермионных вершин всегда четно). В амплитуду дают вклад только те члены, для которых степень p^+ в подынтегральном выражении равна нулю. Это является следствием интегрирования по импульсам, которое при интегрировании члена с множителем $(p^+)^n$ имеет вид

$$\int dp^+ dp^- d^8 \underline{p} (p^3 + ip^0)^n f(p^2) = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\infty dr r^{n+1} e^{in\phi} \int d^8 \underline{p} f(p^2 + r^2), \quad (9.1.21)$$

где проведена замена p^0 на ip^0 (поворот Вика) и введены полярные координаты $p^3 + ip^0 = r \exp\{i\phi\}$. Во всех рассмотренных

примерах функция $f(p^2)$ имеет вид w^{p^2} . Интеграл (9.1.21) равен нулю из-за интегрирования по ϕ , кроме случая $n = 0$. Теперь очевидно, что петлевые диаграммы с двумя фермионами в основном состоянии имеют те же свойства, что и диаграммы с бозонами. Для сокращения степеней p^+ в подынтегральном выражении необходимо включить четное число множителей F^a и $F^{\dot{a}}$. Поскольку F^a может дать не более одной моды S_0 , а $F^{\dot{a}}$ — не более трех, то вместе они могут дать не более четырех мод S_0 . Вот почему однопетлевая трехточечная функция с одним бозоном и двумя фермионами может дать только шесть S_0 и равна нулю, как и в случае одних бозонов.

Четырехточечные однопетлевые амплитуды с двумя или четырьмя внешними фермионами могут, конечно, дать нетривиальные результаты. В этом случае снова S -вклады разделяются за счет нулевых мод, оставляя тривиальные следы по ненулевым S_n^a . Диаграммы с двумя бозонами и двумя фермионами бывают двух видов: диаграмма с двумя соседними фермионами и диаграмма с двумя фермионами, между которыми вставлен бозон. В каждом случае присутствуют по два слагаемых, не содержащих степеней p^+ , которые дают вклад в подынтегральное выражение. А именно, существуют члены, в которых по две степени S_0 возникают от каждой вершины V_B (без сопутствующих степеней p^+), три степени S_0 — от одной из вершин V_F (с множителем $(p^+)^{-1/2}$) и последняя степень S_0 — от другой вершины V_F (с множителем $(p^+)^{1/2}$). Комбинация этих членов приводит к выражению для полной амплитуды, которое имеет тот же вид, что и бозонная амплитуда (9.1.16), но с заменой бозонного кинематического множителя K на множитель, который входит в выражение для соответствующей древесной диаграммы с двумя фермионами и двумя бозонами из разд. 7.4.2. Подобным образом диаграмма с четырьмя внешними фермионами дает тот же результат (9.1.16), но с заменой кинематического множителя на соответствующий этому случаю множитель из разд. 7.4.2. В целом можно сказать, что амплитуда (9.1.16) описывает все однопетлевые планарные диаграммы, если в каждом случае выбран соответствующий кинематический множитель K .

В гл. 8 было отмечено удивительное свойство, состоящее в том, что расходимость планарных петель имеет и ультрафиолетовую, и инфракрасную интерпретацию. С одной стороны, соответствующее вычисление включает суммирование вкладов в петле от бесконечного числа струнных состояний с произвольно большой массой и спином, а также интегрирование по десятимерным импульсам. Специалист по квантовой теории поля ожидал бы, что при этом появится ужасная ультрафиолетовая

расходимость. Поскольку петлевой интеграл содержит ω^{L_0} , $L_0 = \frac{1}{2}p^2 + N$, эти вклады соответствуют пределу $L_0 \rightarrow \infty$, поэтому все они имеют сингулярное поведение при $\omega \rightarrow 1$. В теории бозонных струн они на самом деле приводили к сильной расходимости $\sim dq/q^3$. В терминах переменной ω эта расходимость экспоненциальна, так как $q^{-1} \sim \exp[2\pi^2/(1-\omega)]$ при $\omega \rightarrow 1$. Для суперструн более низкая размерность пространства-времени и сокращение бозонных вкладов с фермионными (благодаря суперсимметрии) ослабляют эту расходимость до dq/q , что в кросс-канале соответствует испусканию дилатона в вакуум, как изображено на рис. 8.24, а и 8.26.

Путем замены ω на q и изучения поведения интеграла вблизи $q \rightarrow 0$ мы приходим к совершенно другой точке зрения на происхождение особенности. В этом случае вместо ультрафиолетовой особенности расходимость возникает как следствие испускания безмассового скаляра (дилатона) из суперсимметричного мультиплетта, который затем поглощается вакуумом при нулевом импульсе. Это важно для стабильности вакуума, поскольку такая интерпретация расходимости зависит от одного скалярного состояния с нулевым импульсом, другими словами, это инфракрасный эффект.

Добавление испускания дилатона с небольшим импульсом к произвольному процессу эквивалентно взятию производной по натяжению струны. Это очень фундаментальное свойство теории струн легко увидеть в подходе, основанном на интегралах по мировым поверхностям. Вершина испускания дилатона с нулевым импульсом имеет вид¹⁾

$$V_D(k=0) = \partial_\alpha X^i \partial^\alpha X^i. \quad (9.1.22)$$

Приведенное выражение пропорционально бозонной части действия для суперструны, которое умножается на натяжение струны. На самом деле зависимость интеграла по мировым поверхностям от натяжения струны возникает благодаря очень простому множителю

$$e^{-S} \sim \exp \left\{ -\frac{T}{2} \int d^2\sigma \partial_\alpha X^i \partial^\alpha X^i \right\}. \quad (9.1.23)$$

Из (9.1.22) и (9.1.23) следует, очевидно, что производная от интеграла по мировым поверхностям приведет к вставке дилатона с нулевым импульсом. Поэтому тот факт, что расходящаяся часть петлевой амплитуды пропорциональна производной древесной амплитуды по натяжению струны, можно интер-

¹⁾ Это выражение следует из общей структуры вершин для безмассовой замкнутой струны, приведенной в разд. 7.4.3, так как дилатон соответствует следу тензора поляризации ζ^{ii} .

претировать как явное подтверждение того, что расходимость возникает из-за испускания мягкого дилатона, переходящего в вакуум. В этом случае в отличие от бозонной теории отсутствует тахионное состояние замкнутой струны, поэтому причиной главной расходимости является дилатон.

9.1.3. Неориентируемые диаграммы

В теории суперструн типа I струны являются неориентируемыми, поэтому на однопетлевом уровне необходимо рассмотреть также диаграммы с нечетным числом пропагаторов, содержащих твисты (для которых мировые поверхности имеют вид листа Мёбиуса). Так же как в бозонной теории, основное отличие от планарной петли сводится к замене ω на $-\omega$ в множителе, возникающих при взятии следов по осцилляторам ненулевых мод. Вдобавок возникает множитель $\eta = +1, -1$ или 0 в зависимости соответственно от того, какая из групп $USp(2n)$, $SO(n)$ или $U(n)$ выбрана. Как обсуждалось в разд. 8.1.2, полная неориентируемая однопетлевая амплитуда состоит из вкладов, в которых нечетное число твистов распределено по внутренним пропагаторам всеми возможными способами. Полный вклад, соответствующий конкретному теоретико-групповому множителю (такому как $\text{tr}(\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4)$), получается из диаграмм в виде листа Мёбиуса, к границам которого присоединены частицы в заданном циклическом порядке. Только после сложения всех диаграмм, включая сумму по всем нециклическим перестановкам внешних состояний, получается полная неориентируемая амплитуда.

След по фермионным модам S_n^a в случае не более четырех внешних частиц в основном состоянии вычисляется, как и раньше, очень просто, поскольку след по нулевым модам устраняет зависимость вершин от ненулевых мод. Одно-, двух- и трехточечные амплитуды равны нулю по тем же причинам, что и в планарном случае. При четырех внешних состояниях след по фермионным нулевым модам дает тот же кинематический множитель K , что и для планарных амплитуд, поскольку операторы твиста не меняют зависимость от нулевых мод. Так как этот множитель сам по себе подчиняется бозе- или ферми-симметрии, он не зависит от порядка внешних частиц. Введение оператора твиста в след подынтегрального выражения амплитуды сводится просто к замене ω на $-\omega$ в следе по ненулевым модам так же, как в разд. 8.1.2. В результате след по ненулевым модам дает множитель $[f(-\omega)]^8$, который сокращается с таким же множителем в знаменателе от следов по бозонным модам α_n^i . Суммарный вклад в четырехчастичную однопетлевую амплитуду с

данным циклическим порядком внешних состояний имеет вид

$$A_N(1, 2, 3, 4) = g^4 G_N K \int_0^1 \frac{dw}{w} \left(\frac{-2\pi}{\ln w} \right)^5 \times \\ \times \int \left(\prod_{r=1}^3 \frac{d\rho_r}{\rho_r} \right) \prod_{1 \leq r < s \leq 4} (\psi_{rs}^N)^{k_r \cdot k_s} \quad (9.1.24)$$

при соответствующем выборе области интегрирования по ρ , которую проще всего описать после еще одной замены переменных. Функция ψ^N определена и рассмотрена в приложении 8.A. Ее логарифм $\ln \psi_{rs}^N$ пропорционален корреляционной функции $\langle X^i(\rho_r) X^j(\rho_s) \rangle$ для точек ρ_r и ρ_s , расположенных на границе листа Мёбиуса. Теоретико-групповой множитель G_N определен в разд. 8.1.2.

Переход к переменным v_r и q приводит к выражению

$$A_N(1, 2, 3, 4) = 16\pi^3 g^4 G_N K \int_0^1 \frac{dq}{q} \int_R \left(\prod_{r=1}^3 dv_r \right) \prod_{r < s} (\psi_{rs}^N)^{k_r \cdot k_s} = \\ = 16\pi^3 g^4 G_N K \int_0^1 \frac{dq}{q} F_N(-q^{1/2}), \quad (9.1.25)$$

где

$$F_N(-q^{1/2}) = \int_R \left(\prod_{r=1}^3 dv_r \right) \prod_{1 \leq r < s \leq 4} \left[\sin \frac{\pi}{2} (v_s - v_r) \times \right. \\ \left. \times \prod_{n=1}^{\infty} (1 - 2(-q^{1/2})^n \cos \pi (v_s - v_r) + q^n) \right]^{k_r \cdot k_s}. \quad (9.1.26)$$

Область R , как и в бозонной теории, определена неравенствами $0 \leq v_1 \leq v_2 \leq v_3 \leq v_4 = 2$. Поскольку функция F_N очень похожа на функцию F_P (9.1.20), то, как и в разд. 8.1.2, естественно перейти к переменным $v'_r = v_r/2$ и $q' = q^{1/2}$. Это позволяет объединить выражения для планарной и неориентируемой амплитуд. Так как якобиан замены переменных тривиален, имеем

$$F_N(-q^{1/2}) = F_N(-q'^2) = 8F_P(q'^2), \quad (9.1.27)$$

поэтому

$$\int_0^1 \frac{dq}{q} F_N(-q^{1/2}) = 32 \int_0^1 \frac{dq}{q} F_P(q^2). \quad (9.1.28)$$

Полученная связь между планарной и неориентируемой петле-

выми амплитудами означает, что их расходимости также связаны. Этот вопрос обсуждается в разд. 10.4.2.

9.1.4. Ориентируемые непланарные диаграммы

Однопетлевые диаграммы с четным положительным числом пропагаторов с твистами описывают мировые поверхности, которые с топологической точки зрения представляют собой кольцо с внешними состояниями, присоединенными к обоим границам. Снова, как в разд. 8.1.3, полная амплитуда равна сумме вкладов всех возможных распределений твистов по внутренним пропагаторам с нециклическими перестановками внешних частиц по соответствующим границам. В случае четырех внешних состояний алгебра вычислений (касающихся следов по S -осцилляторам) сильно упрощается, как в случае только что рассмотренных планарных и неориентируемых диаграмм. Поскольку операторы твиста не меняют следа по нулевым модам, то возникают те же кинематические множители K , что и раньше.

Рассмотрим рассеяние четырех частиц с вакуумными квантовыми числами в s -канале, которому соответствует теоретико-групповой множитель $\text{tr}(\lambda_1 \lambda_2) \text{tr}(\lambda_3 \lambda_4)$ (как обычно $s = -(k_1 + k_2)^2 = -2k_1 \cdot k_2$). В этом случае амплитуда состоит из вкладов двух видов. Один вид содержит два пропагатора с твистами, как изображено на рис. 8.16, а, в то время как другой вид (с другим циклическим порядком внешних состояний) содержит четыре пропагатора с твистами, как изображено на рис. 8.16, б. Каждая из таких диаграмм вычисляется путем сшивания древесных диаграмм таким же способом, который привел в разд. 8.1.3 к выражению для непланарной петлевой амплитуды в бозонной теории через след от произведения вершин. После использования в каждой вершине по две нулевые моды S -осцилляторов для образования кинематического множителя K остающаяся часть каждой из вершин снова принимает вид $\exp\{ik_r \cdot X(0)\}$. След включает также суммирование по остающимся модам S -осцилляторов. Как и в случае планарных и неориентируемых диаграмм, множители в функции распределения, возникающие от следа по нулевым бозонным модам, сокращаются с множителями от следа по фермионным нулевым модам. Тогда выражение для амплитуды принимает вид

$$A_T(1, 2, 3, 4) = g^4 G_T K \int \prod_0^3 \frac{d\rho_r}{\rho_r} \frac{dw}{w} \left(\frac{-2\pi}{\ln w} \right)^5 \times \\ \times \prod_{r < s} (\psi_{rs}^T \text{ или } \psi_{rs}^T)^{k_r \cdot k_s}. \quad (9.1.29)$$

Корреляционная функция между двумя точками ρ_r и ρ_s на разных границах мировой поверхности имеет вид $\ln \psi_{rs}^T$, поэтому необходимо использовать функцию ψ_{rs}^T (определенную в разд. 8.1.3), когда точки лежат на разных границах мировой поверхности, и функцию ψ_{rs} , когда точки лежат на одной границе (что имело место для соответствующего процесса в разд. 8.1.3). Границы мировой поверхности отображаются в области $(\omega, 1)$ и $(-1, -\omega)$ ρ -плоскости, причем частицы 1 и 2 присоединены к точкам соответственно $-\rho_1$ и $-\rho_2$ отрицательной действительной полуоси, а частицы 3 и 4 присоединены к точкам ρ_3 и $\rho_4 = \omega$ положительной действительной полуоси. Полная область интегрирования получается при сложении различных вкладов, как обсуждалось в разд. 8.1.3.

Переходя к переменным (9.1.17) и (9.1.18), удобным для интегрирования по кольцу, получаем полное выражение для амплитуды в виде

$$A_T(1, 2, 3, 4) = 16\pi^3 g^4 G_T K \int_0^1 \frac{dq}{q} \int_0^1 dv_1 dv_2 dv_3 \times \\ \times (\psi_{12} \psi_{34})^{k_1 \cdot k_2} (\psi_{14}^T \psi_{23}^T)^{k_1 \cdot k_4} (\psi_{13}^T \psi_{24}^T)^{k_2 \cdot k_4}. \quad (9.1.30)$$

Интегрирование по переменным v_r проводится независимо вдоль внутренней и внешней границ кольца с внутренним радиусом q , причем положение четвертой частицы фиксируется в точке $v_4 = 1$. Как и для бозонной теории, этот вклад является конечным. В разд. 8.1.3 было показано, что поведение подынтегрального выражения вблизи $q = 0$ приводит к появлению ряда полюсов, соответствующих замкнутой струне в s -канале. В рассматриваемом случае полюсы расположены в точках $s/2 = -k_1 \cdot k_2 = 0, 4, 8, \dots$, которые соответствуют состояниям замкнутой струны для суперструн типа I. В согласии с выводами гл. 5 в спектре замкнутой струны отсутствует тахион.

В пространственно-временной картине основные вклады в сингулярности s -канала дают такие конфигурации мировой поверхности, которые имеют вид двух дисков, соединенных между собой длинной узкой трубой, с внешними состояниями, присоединенными к границам дисков (так же как в случае непланарной петли в разд. 8.1.3). Точно такие же конфигурации приводят к инфракрасной расходимости, когда внешние вершинные операторы расположены только на одной границе (т. е. в случае планарной диаграммы). Когда вершинные операторы расположены на обеих границах, импульс, передаваемый от одной границы к другой, приводит к обрезанию потенциальной

инфракрасной расходимости. Инфракрасная расходимость возникает при $s \rightarrow 0$, и это приводит к полюсу, соответствующему замкнутой струне.

Вычет в полюсе $s = 0$, который соответствует основному состоянию замкнутой струны, пропорционален $g^4 G_T K$. Из формулы (9.1.11), определяющей K , следует, что вычет, очевидно, имеет четвертую степень по внешним импульсам. Это соответствует ожидаемому результату, поскольку вычет должен быть пропорционален суммам квадратов операторов взаимодействия между частицами в супергравитационном мультиплете и парой основных состояний открытой струны (частиц из янг-миллсовского супермультиплета). Вычет включает оператор взаимодействия гравитона с янг-миллсовским сектором, который имеет тот же вид, что и в эйнштейновской теории. Учитывается также взаимодействие антисимметричного поля $B^{\mu\nu}$ с мультиплетом Янга — Миллса. Соответствующие операторы взаимодействия содержат члены Черна — Саймонса, которые рассматриваются в гл. 13. Там показано, что эти члены играют важную роль, обеспечивая отсутствие аномалий в низкоэнергетическом пределе.

Так же как в бозонной теории, амплитуда в s -канале содержит полюсы с синглетными квантовыми числами, соответствующие открытой струне. Но для групп симметрии, которые допустимы в суперструнных теориях, безмассовые векторные состояния с синглетными квантовыми числами отсутствуют. Поэтому в теории нет механизма, который мог бы придать массу антисимметричному тензорному полю аналогично механизму бозонной теории с $U(n)$ -симметрией Чана — Патона, рассмотренному в разд. 8.1.3. На самом деле такой механизм привел бы к нарушению суперсимметрии.

9.2. Теории типа II

Каждый порядок теории возмущений для ориентированных замкнутых струн содержит по одной диаграмме Фейнмана. В одной петле нетривиальные вклады дают только мировые поверхности, топологически эквивалентные тору. В этом отношении теории типа II гораздо проще теорий типа I, которые в одной петле содержат несколько других диаграмм замкнутых струн, как обсуждалось в разд. 8.3.3. След в подынтегральном выражении тороидальной диаграммы для замкнутой струны разбирается на произведение следов от мод, распространяющихся влево и вправо (если пренебречь интегрированием по импульсу нулевых мод в петле, которое связывает оба сектора). Как обсуждалось в разд. 7.2.2, вершины замкнутых струн равны

произведениям вершин открытых струн для левых и правых мод, причем каждый из множителей несет половину импульса испускаемой частицы. В частности, испускание безмассовых частиц, соответствующих замкнутой струне (мультиплет супергравитации), дается произведением вершин для безмассовых состояний открытой струны. В случае тороидальной диаграммы след по осцилляторным модам двух секторов берется отдельно, поэтому, за исключением множителей, возникающих от интегрирования по импульсу, подынтегральное выражение равно квадрату модуля подынтегрального выражения однопетлевой амплитуды для открытых струн. В результате тороидальная диаграмма с числом безмассовых внешних частиц $M < 4$ равна нулю по тем же причинам, что и в случае петель открытых струн. Для ненулевого следа необходимо наличие восьми фермионных нулевых мод в каждом секторе, описывающем правые и левые частицы. Каждая бозонная вершина может дать не более двух таких мод. Аналогично вершинный оператор испускания фермионов может дать одну или три моды, при этом оба типа вершин должны входить одинаковое число раз.

Как обсуждалось в разд. 8.3.3, ситуация в случае однопетлевой диаграммы для неориентированных струн (типа I) в виде бутылки Клейна сложнее, так как след не разбивается на произведение следов для левых и правых мод. В результате, поскольку оба множителя в вершинах содержатся внутри одного следа, диаграмма не обязательно равна нулю при наличии двух или более вершин.

В дополнение к исчезновению космологической постоянной ($M=0$), массовых поправок ($M=2$) и поправок к константе связи ($M=3$) самой удивительной чертой теории является равенство нулю диаграммы с одним дилатоном, обладающим нулевым импульсом ($M=1$), которая представляет собой однопетлевую поправку к вакуумному среднему дилатона. Как обсуждалось в разд. 3.4.2, в древесном приближении вакуумное среднее дилатона исчезает из-за инвариантности действия струны относительно двумерных преобразований Вейля. Но петлевые поправки к одноточечной функции дилатона в общем случае не равны нулю. Действительно, в теории бозонных струн было показано, что расходимость однопетлевых амплитуд можно интерпретировать как испускание дилатона с нулевым импульсом, переходящего в вакуум. Благодаря исчезновению однопетлевого вакуумного среднего дилатона в теориях суперструн появляется соблазн предположить, что петлевая расходимость также должна исчезать. Для проверки этого предположения мы явно вычислим вклад тора в четырехчастичную амплитуду.

9.2.1. Конечность тороидальной амплитуды

Поскольку тороидальные диаграммы с $M < 4$ безмассовыми внешними частицами равны нулю, первой нетривиальной проверкой конечности теории будет вычисление диаграммы с $M=4$ безмассовыми частицами. (Из унитарности следует, что эта диаграмма отлична от нуля.) При однопетлевых вычислениях для открытых струн в разд. 9.1 было показано, что в след по нулевым S -модам в случае четырех безмассовых внешних состояний входят только множители из вершинных операторов. След по остальным ненулевым модам легко вычисляется:

$$\text{Tr } g^{\Sigma_1^\infty n S_n^a} = [f(\omega)]^8. \quad (9.2.1)$$

Соответствующее вычисление для замкнутой струны приводит к той же зависимости. Если выбрать тензоры поляризации внешних частиц в факторизованном виде (т. е. $\zeta^{AB} = \zeta^A \bar{\zeta}^B$, где A, B, \dots — векторные или спинорные индексы, соответствующие испускаемым частицам), то след по нулевым S -модам, распространяющимся вправо, приводит к кинематическому множителю того типа, который описан в разд. 9.1, в то время как след по остальным S -модам дает множитель (9.2.1). Аналогично след по модам \tilde{S}_0^a , распространяющимся влево, приводит к кинематическому множителю \tilde{K} , а остальные левые моды \tilde{S}_n^a дают множитель $[f(\bar{\omega})]^8$. В сумме следы по S -модам дают для замкнутой струны кинематический множитель

$$K_{cl} = K\tilde{K} \quad (9.2.2)$$

и вклад в меру $|f(\omega)|^{16}$.

Поскольку было показано, что четырехчастичные однопетлевые диаграммы для открытых струн имеют те же кинематические множители, что и соответствующие древесные амплитуды, это верно и в случае четырехчастичных амплитуд для замкнутых струн. Поэтому кинематический множитель K_{cl} совпадает с кинематическим множителем для древесной четырехчастичной амплитуды для замкнутых струн, построенной в разд. 7.4.3. Там он выписан в виде

$$\zeta_1^{AA'} \zeta_2^{BB'} \zeta_3^{CC'} \zeta_4^{DD'} K_{ABCD}(k/2) K_{A'B'C'D'}(k/2). \quad (9.2.3)$$

Амплитуды для теорий типа IIA и IIB различаются одинаковой и противоположной киральностью спиноров, связанных с двумя множителями в (9.2.3).

Множитель $|f(\omega)|^{16}$, возникший от следов по S -модам, полностью сокращается с функциями распределения для бозонных мод. Функция распределения для мод α_n^i , распространяющихся

вправо, имеет вид $[f(\omega)]^{-8}$ (как и в случае открытых струн), в то время как моды \bar{a}_n^i , распространяющиеся влево, дают комплексно-сопряженный множитель $[f(\bar{\omega})]^{-8}$.

Остальные вычисления совпадают с вычислениями, проведенными в разд. 8.2.1 для тороидальной диаграммы с внешними тахионами в теории бозонных струн. Имеется только несколько небольших отличий. В рассматриваемом случае $D = 10$ вместо 26, что было учтено при обсуждении степеней $f(\omega)$. Другой явной зависимости от D в формулах нет. Еще одно отличие, конечно, состоит в том, что теперь внешние состояния удовлетворяют условию $k^2 = 0$ вместо $k^2 = 2$, что изменяет некоторые множители. Например, множители в χ_{rs} , не зависящие от r и s , теперь сокращаются (см. ниже), поскольку $\sum_{r < s} k_r \cdot k_s = 0$.

Тем же способом, который описан в этой и предыдущей главах, можно получить выражение для четырехточечной амплитуды в произвольной теории суперструн типа II:

$$A_C(1, 2, 3, 4) = \left(\frac{\kappa}{4\pi}\right)^4 \int \frac{d^2\omega}{|\omega|^2} \int \left(\prod_{r=1}^3 \frac{d^2\rho_r}{|\rho_r|^2} \right) I(1, 2, 3, 4), \quad (9.2.4)$$

где

$$\begin{aligned} I(1, 2, 3, 4) &= \int d^{10}p |\omega|^{p^2/4} \text{Tr} [w^N \bar{w}^{\bar{N}} V(1, \rho_1) \times \\ &\quad \times V(2, \rho_2) V(3, \rho_3) V(4, \rho_4)] = \\ &= K_{cl} \left(\frac{-4\pi}{\ln|\omega|} \right)^5 \prod_{r < s} (\chi_{rs})^{k_r \cdot k_s/2}. \end{aligned} \quad (9.2.5)$$

Полная область интегрирования получается после объединения областей, соответствующих различным упорядочениям испущенных состояний, так же как в разд. 8.2.1 в случае бозонных замкнутых струн. Для каждого упорядочения переменные $|\rho_r|$ имеют определенную последовательность. Но в полном выражении для амплитуды интегрирование по переменным ρ_r проводится по кольцу $|\omega| \leq |\rho_r| \leq 1$ независимо. Как и в разд. 8.2.3, будет показано, что область интегрирования по ω необходимо ограничить, чтобы не учитывать бесконечное число раз эквивалентные конфигурации мировых поверхностей. Как и в гл. 8, удобно провести замену переменных

$$v_r = \ln \rho_r / 2i\pi, \quad \tau = \ln \omega / 2i\pi \quad (9.2.6)$$

(при этом $v_4 = \tau$). Тогда амплитуду можно записать в виде

$$A_C(1, 2, 3, 4) = (\pi\kappa)^4 K_{cl} \int \frac{d^2\tau}{(\text{Im } \tau)^2} F_C(\tau), \quad (9.2.7)$$

где

$$F_C(\tau) = \frac{1}{(\text{Im } \tau)^3} \int \prod_{r=1}^3 d^2v_r \prod_{r < s} (\chi_{rs})^{k_r \cdot k_s/2}. \quad (9.2.8)$$

Интегрирование по переменным v_r можно проводить по тору только один раз, поскольку подынтегральное выражение, как и в разд. 8.2.1, инвариантно относительно преобразований $v \rightarrow v + 1$ и $v \rightarrow v + \tau$.

Для того чтобы интегрирование по τ включало каждую конформно неэквивалентную геометрию на торе только один раз, его необходимо ограничить одной фундаментальной областью, скажем фундаментальной областью F , описанной в разд. 8.2.3. Но это имеет смысл лишь в том случае, когда любой выбор области приводит к одинаковому ответу, т. е. когда подынтегральное выражение инвариантно относительно модулярных преобразований. Модулярная инвариантность тороидальной диаграммы для бозонных струн доказана в разд. 8.2.2, и ее необходимо проверить для случая суперструн типа II. Нарушение модулярной инвариантности означало бы непоследовательность теории с физической точки зрения.

Теперь мы покажем, что интеграл (9.2.7) инвариантен относительно модулярных преобразований $\tau \rightarrow (a\tau + b)/(c\tau + d)$, где a, b, c, d — целые числа, удовлетворяющие уравнению $ad - bc = 1$. Поскольку мера $d^2\tau/(\text{Im } \tau)^2$ модулярно инвариантна, достаточно доказать инвариантность функции $F_C(\tau)$. Как показано в гл. 8, пределы интегрирования по v зависят от τ . Поэтому для сохранения области интегрирования в виде фиксированного параллелограмма необходимо дополнить модулярное преобразование τ преобразованием $v \rightarrow v/(c\tau + d)$ для всех v_r . Тогда можно использовать формулу преобразования (см. приложение 8.A)

$$\chi \left(\frac{v}{c\tau + d} \middle| \frac{a\tau + b}{c\tau + d} \right) = \frac{\chi(v|\tau)}{|c\tau + d|} \quad (9.2.9)$$

для доказательства следующего закона преобразования:

$$\prod_{r < s} (\chi_{rs})^{k_r \cdot k_s/2} \rightarrow |c\tau + d|^{-\sum_{r < s} k_r \cdot k_s/2} \prod_{r < s} (\chi_{rs})^{k_r \cdot k_s/2}. \quad (9.2.10)$$

Но этот множитель инвариантен, поскольку $\sum_{r < s} k_r \cdot k_s = 0$ из-за отсутствия масс у внешних частиц. Остальная часть выражения для $F_C(\tau)$ также инвариантна, так как преобразование меры $\prod_{r=1}^3 d^2v_r$ приводит к множителю $|c\tau + d|^{-6}$, который сокращается с множителем, возникающим при преобразовании

$(\text{Im } \tau)^{-3}$. Это означает, что, так же как для теории замкнутых бозонных струн, интегрирование по τ можно ограничить одной фундаментальной областью. При выборе области F на рис. 8.21 в качестве такой области все возможные расходимости при $\tau = 0$ исключаются.

Выражение для амплитуды имеет ожидаемые полюсы и нормальные пороги, которые диктуются унитарностью в различных каналах. Как объяснялось в разд. 8.2.4, полюсы в каналах, связанные с кластерами внешних частиц, возникают в пределе, когда частицы сходятся вместе на поверхности тора. В пространственно-временной картине этому соответствуют такие конфигурации мировой поверхности, когда группы частиц отделены длинной узкой трубкой. В примере, который мы рассматривали, а именно в случае тороидальной диаграммы для суперструн с четырьмя безмассовыми частицами полюсы с нулевой массой отсутствуют во всех каналах. Это согласуется с исчезновением вершинных и собственноренергетических диаграмм для безмассовых состояний, поскольку эти диаграммы пропорциональны вычетам в таких полюсах. Самым важным является тот факт, что расходимость, связанная с интегрированием по ν_r , отсутствует. В теории бозонных струн область, где все ν_r сходятся, приводит к расходимости, поэтому очень важно проверить именно эту область. Она исследуется так же, как в разд. 8.2.4, путем перехода к переменным η_r , ε и ϕ , определенным следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} \varepsilon \eta_r &= \nu_r - \nu_M, \quad r = 1, 2, \dots, M-2, \\ \varepsilon e^{i\phi} &= \nu_{M-1} - \nu_M. \end{aligned} \quad (9.2.11)$$

Используя старые оценки для множителей χ_{rs} (и $(\varepsilon) \sum^{k_r \cdot k_s} = 1$), для полной зависимости от ε вблизи $\varepsilon = 0$ получаем выражение

$$\int_0^1 d\varepsilon \varepsilon^5 f(\varepsilon^2) \int_F \frac{d^2\tau}{(\text{Im } \tau)^5}, \quad (9.2.12)$$

которое сходится. Поскольку область в пространстве параметров вблизи $\varepsilon \rightarrow 0$ соответствует вставке дилатонного головастика, этого результата и следовало ожидать — нулевое значение амплитуды в виде головастика нарушало бы суперсимметрию.

Таким образом, мы показали, что тороидальная диаграмма с четырьмя безмассовыми внешними частицами для суперструн типа II конечна. Ясно, что этот результат распространяется на M -точечные тороидальные амплитуды. Действительно, если бы одна из них расходилась, то в ней можно было бы выделить

безмассовый полюс в трехчастичном канале, вычет в котором разбивался бы на произведение древесной диаграммы с $M-2$ выходящими линиями и петли с четырьмя выходящими линиями. Поскольку древесная диаграмма конечна, петля должна была бы расходиться, что противоречит только что полученному результату.

Вероятно также, что конечность результата распространяется на многопетлевые амплитуды, хотя аргументация в этом случае не такая строгая. Однопетлевые вычисления показали, что расходимость, возникающая при сближении координат (ν_r) к общему значению на мировой поверхности, отсутствует. Этот факт связан с нулевым вакуумным средним для дилатона на поверхности рода 1, так как область, в которой все ν_r приближаются к общему значению, связана конформным преобразованием с мировой поверхностью рода 1, к которой присоединяется дилатон. С точки зрения пространственно-временной суперсимметрии очень вероятно, что вакуумное среднее дилатона равно нулю во всех порядках; уже предпринимались попытки доказать это утверждение, используя ковариантный фермионный вершинный оператор, описанный в разд. 7.3.5. Предположив, что это утверждение каким-то образом доказано, зададимся вопросом, какие еще потенциальные трудности могут появиться в петлевых диаграммах? Можно было бы ожидать неприятностей от сингулярных пределов в геометрии, соответствующих углам в пространстве параметров Тейхмюллера, которые представляют собой многопетлевой аналог параметра t . Эти трудности снова были бы связаны со взаимодействием с дилатоном и должны были бы отсутствовать благодаря пространственно-временной суперсимметрии, хотя полное доказательство в настоящее время еще не проведено.

9.2.2. Компактификация на тор

Приступим к исследованию петлевых диаграмм, возникающих в простейшем примере компактификации струны, а именно компактификации на тор. Целью этого исследования частично является демонстрация того, как модулярная инвариантность сохраняется при компактификации, частично — подготовка к последующему обсуждению низкоэнергетического предела теории в четырех измерениях (при этой простой компактификации) и частично — подготовка основы для последующего обсуждения более реалистичных схем компактификации, основанных на орбифолдах. Таким образом, рассмотрим ситуацию, когда $(10-D)$ пространственных измерений в теории суперструн являются окружностями с периодическими граничными условиями

$(X' \approx X' + 2\pi R')$; при этом решетка, образованная сопряженными импульсами, является тривиальной кубической решеткой, задаваемой соотношением $p' = m'/R'$.

Компактификация на окружность описана в разд. 6.4.1. Для прямого произведения $10 - D$ окружностей, которое дает тор T^{10-D} , обобщение проводится непосредственно. Поскольку кривизна тора равна нулю, в этом случае компактификация затрагивает только нулевые моды разложения координат $X'(\sigma, \tau)$, где I нумерует компактифицированные измерения ($I = 1, \dots, 10 - D$). Поэтому вычисление петлевых диаграмм проводится так же, как и раньше, не считая изменений, связанных с импульсом в петле. В частности, компонента импульса в направлении I принимает только дискретные значения $p' = m'/R'$, где R' — радиус, а m' — произвольное целое число. Таким образом, в определении интеграла по петле интегрирование по импульсам в этих направлениях необходимо заменить суммированием. Анализ, проведенный в разд. 6.4.1, показал, что замкнутая струна характеризуется также степенями отображений, которые равны числу оборотов струны вокруг каждой из циклических координат. Поэтому в определении петлевой амплитуды необходимо включить также суммирование по всем возможным степеням отображений.

Начнем изучение эффектов, связанных с нетривиальной топологией пространства-времени, с рассмотрения однопетлевых диаграмм открытых струн. Гауссов интеграл по каждой из компонент импульса в петле, соответствующих компактифицированным измерениям, раньше давал множитель

$$\int_{-\infty}^{\infty} \omega^{\alpha' p^2} dp = (-\pi/\alpha' \ln \omega)^{1/2}. \quad (9.2.13)$$

В компактифицированной теории этот множитель необходимо заменить на сумму

$$\frac{1}{R} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \omega^{\alpha' m^2/R^2}. \quad (9.2.14)$$

Коэффициент $1/R$ является аналогом дифференциала dp в интеграле, поскольку он представляет собой разность импульсов $p = m/R$ при переходе от одного значения m к следующему. Для удобства радиус R выбран одинаковым для всех компактифицированных измерений. (В более общем случае компактное $(10 - D)$ -мерное пространство может являться тором, связанным с менее тривиальной решеткой Λ ; тогда $\int d^{10-D} p$ заменя-

ется на $\sum_{p \in \Lambda}$.) Отношение множителей (9.2.14) и (9.2.13), обозначенное через F_1 , можно записать в виде

$$F_1 = a \left(\frac{-\ln \omega}{\pi} \right)^{1/2} \theta_3 \left(0 \left| \frac{a^2 \ln \omega}{i\pi} \right. \right), \quad (9.2.15)$$

где

$$\theta_3(0 | \tau) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{i\pi m^2 \tau}, \quad (9.2.16)$$

а

$$a^2 = \alpha'/R^2 \quad (9.2.17)$$

является безразмерным параметром. Единственное изменение заданной петлевой амплитуды для некомпактифицированной теории, возникающее при тороидальной компактификации $(10 - D)$ измерений, состоит в появлении множителя $(F_1)^{10-D}$ в подынтегральном выражении.

Поведение θ_3 при замене переменных $\ln \omega \rightarrow \ln q = 2\pi^2/\ln \omega$ вытекает из формулы преобразования для θ_1 , приведенной в приложении 8.A (или может быть доказано непосредственно, используя формулу суммирования Пуассона из приложения 8.A). Это дает

$$F_1(a, q) = \theta_3 \left(0 \left| \frac{\ln q}{2\pi i a^2} \right. \right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{n^2/2a^2}. \quad (9.2.18)$$

К счастью, множитель F_1 не приводит к появлению степеней $\ln q$ в выражении для петлевой амплитуды. Введение множителя $(F_1)^{10-D}$ в планарную и неориентируемую петлевые амплитуды не изменяет их общие свойства. В области расходимости ($q \rightarrow 0$) появившийся множитель $F_1(a, 0)$ равен единице, поэтому характер расходимости не меняется. Но формула (9.1.27), связывающая подынтегральные выражения для планарной петлевой амплитуды и неориентируемой амплитуды, больше не справедлива, поскольку $F_1(a, -q^{1/4}) \neq F_1(a, q)$.

Так как теперь теория содержит состояния замкнутой струны, характеризующиеся ненулевыми степенями отображения, должны произойти изменения в спектре состояний замкнутой струны. Это должно отражаться в структуре планарной диаграммы. Поскольку положения полюсов замкнутых струн в s -канале задаются разложением подынтегрального выражения по степеням q^2 , наличие изменений в спектре легко проверить. В данном случае ряд содержит дополнительные члены, возникающие

от $(F_1)^{10-D}$, поэтому положения новых полюсов задаются формулой

$$\alpha' s = N + \frac{1}{2a^2} \sum_{l=1}^{10-D} (n^l)^2, \quad (9.2.19)$$

где n^l — целые числа, возникающие при разложении (9.2.18). Это тот же спектр, что и в теории замкнутых струн, компактифицированных на тор (см. разд. 6.4.1), причем n^l отождествляются со степенями отображения. (Все промежуточные состояния в рассматриваемом примере имеют нулевые заряды Калуцы — Клейна, так как $p^l = 0$ для внешних импульсов.)

Рассмотрим теперь тороидальную диаграмму рассеяния замкнутых струн при тороидальной компактификации. В этом случае струны характеризуются произвольными степенями отображений, а разложение $X^I(\sigma, \tau)$ по модам имеет вид (см. разд. 6.4.1)

$$X^I(\tau, \sigma) = X_R^I(\tau - \sigma) + X_L^I(\tau + \sigma),$$

$$X_R^I(\tau - \sigma) = x_R^I + \left(\frac{m^I}{2R} - n^I R \right) (\tau - \sigma) + \frac{i}{2} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \alpha_n^I e^{-2in(\tau - \sigma)}, \quad (9.2.20)$$

$$X_L^I(\tau + \sigma) = x_L^I + \left(\frac{m^I}{2R} + n^I R \right) (\tau + \sigma) + \frac{i}{2} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \tilde{\alpha}_n^I e^{-2in(\tau + \sigma)}.$$

До компактификации интеграл по импульсу в каждом направлении давал множитель

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\omega|^{\alpha' p^2/2} dp = (\alpha' \text{Im } \tau)^{-1/2}, \quad (9.2.21)$$

где $\omega = \exp(2\pi i \tau)$. Теперь этот интеграл необходимо заменить на двойную сумму по степеням отображений n и зарядам m

$$\frac{1}{R} \sum_{m, n = -\infty}^{\infty} \omega^{(am - n/a)^2/4} \bar{\omega}^{(am + n/a)^2/4}, \quad (9.2.22)$$

что приводит к появлению в подынтегральном выражении множителя $(F_2)^{10-D}$, где F_2 — отношение (9.2.22) и (9.2.21). В этом выражении экспоненты представляют собой части L_0 и \tilde{L}_0 , которые могут быть получены из (9.2.20) так же, как в разд. 6.4.1. Отношение (9.2.22) и (9.2.21) можно записать в виде

$$F_2(a, \tau) = a (\text{Im } \tau)^{1/2} \sum_{mn} \exp[-2i\pi mn \text{Re } \tau - \pi(a^2 m^2 + n^2/a^2) \text{Im } \tau]. \quad (9.2.23)$$

Важно, чтобы множитель $(F_2)^{10-D}$ не нарушал модулярную инвариантность подынтегрального выражения для петлевой амплитуды. Поскольку полная группа модулярных преобразований генерируется двумя преобразованиями $\tau \rightarrow \tau + 1$ и $\tau \rightarrow -1/\tau$, достаточно проверить эти два случая. Инвариантность F_2 при первом преобразовании тривиальна. В доказательстве инвариантности относительно второго преобразования используется обобщение формулы суммирования Пуассона на двойную сумму. Это доказательство, приведенное в приложении 9.В, дает требуемую формулу

$$F_2(a, \tau) = F_2(a, -1/\tau). \quad (9.2.24)$$

Таким образом, даже после компактификации тороидальная диаграмма все еще обладает модулярной инвариантностью, необходимой для последовательной интерпретации струнной теории. Отметим, что учет всех степеней отображений был решающим для получения этого результата.

В только что описанном примере модулярная инвариантность не ограничивает допустимые радиусы R^I компактного пространства. В дальнейшем при обсуждении гетеротической струны мы увидим, что в общем случае модулярная инвариантность накладывает жесткие ограничения.

9.2.3. Низкоэнергетический предел однопетлевых амплитуд

Тот факт, что в низкоэнергетическом пределе теория суперструн сводится к супергравитации, взаимодействующей с суперсимметричной теорией Янга — Миллса, является одним из важнейших достоинств теории. Явные признаки этого были продемонстрированы в разд. 7.4 на уровне древесных диаграмм теории возмущений вблизи плоского десятимерного пространства-времени (т. е. для классической струнной полевой теории). Как было показано, приведенные там трехчастичные вершины в точности совпадают с вершинами низкоэнергетической полевой теории для открытых струн типа I. В случае гетеротических струн, как мы знаем, существуют также поправки, имеющие порядок α' , которые исчезают при низких энергиях. Для четырехчастичных амплитуд мы нашли, что результаты низкоэнергетической полевой теории умножаются на отношение Γ -функций, которое приближается к единице при низких энергиях.

Теперь можно рассмотреть соответствующий предел для однопетлевых квантовых поправок, который должен сводиться к однопетлевым поправкам подходящей суперсимметричной полевой теории точечных частиц. Ясно, что если просто перейти к низкоэнергетическому пределу в выражениях для петель

в плоском десятимерном пространстве (что эквивалентно пределу $\alpha' \rightarrow 0$ в рассматриваемом порядке), то результат будет иметь обычные расходимости полевой теории в высших размерностях. Бесконечный результат получается также при устранении дополнительных измерений путем компактификации на тор и стремления радиусов тора к нулю ($a \rightarrow \infty$) до перехода к низкоэнергетическому пределу. Если бы такая компактификация была возможна, то она дала бы последовательную струнную теорию в числе измерений, меньшем десяти. Этому препятствует то обстоятельство, что массы бесконечного числа состояний замкнутой струны с ненулевыми индексами отображения пропорциональны радиусу дополнительных измерений, поэтому при обращении радиуса в нуль происходит конденсация этих состояний на состояние с нулевой массой.

Нам хотелось бы рассмотреть совместный предел, в котором $10-D$ измерений становятся бесконечно малыми и одновременно состояния с ненулевой степенью отображения приобретают бесконечно большую массу и отщепляются. Это происходит в пределе

$$R \rightarrow 0 \quad \text{и} \quad \alpha' a^2 = \alpha'^2 / R^2 \rightarrow 0. \quad (9.2.25)$$

Хотя считается, что компактификация на тор общего вида не является физически реалистичной, этот метод иллюстрирует соответствие между низкоэнергетическим пределом квантовых поправок к полевой теории и петлевыми поправками в теории точечных частиц в тех размерностях пространства-времени, в которых они не расходятся. Одно выражение для струнной петлевой амплитуды в низкоэнергетическом пределе дает сумму всех диаграмм Фейнмана с одинаковой топологией. Это значит, что если происходит сокращение расходимостей между различными диаграммами Фейнмана, то эти сокращения автоматически происходят в теории струн.

Низкоэнергетический предел сектора открытых струн теорий типа I дает $N=4$ -теорию Янга—Миллса¹⁾. Когда число внешних основных состояний меньше трех, однопетлевая амплитуда равна нулю, что соответствует отсутствию перенормировки константы связи и массы низкоэнергетической теории в произвольной размерности. Амплитуда для открытых струн с четырьмя безмассовыми внешними состояниями имеет одинаковый общий кинематический множитель K для древесной

¹⁾ Здесь используется терминология, согласно которой $N=4$ -теория Янга—Миллса обозначает теорию в произвольной размерности D , хотя она имеет четыре спинорных суперзаряда только в четырехмерном пространстве-времени. Аналогичная терминология применяется также в случае $N=8$ -супергравитации.

и однопетлевой амплитуд (а также, вероятно, для многопетлевых амплитуд). Тот факт, что теоретико-групповые множители древесных амплитуд и планарных петлевых поправок также пропорциональны, означает, что их сумму можно записать в виде

$$A(1, 2, 3, 4) = g_{10}^2 K \left\{ \frac{1}{st} \frac{\Gamma(1-\alpha's)\Gamma(1-\alpha't)}{\Gamma(1-\alpha's-\alpha't)} + c_1 f^{(1)} + \dots \right\}, \quad (9.2.26)$$

где теоретико-групповой множитель $\text{tr}(\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4)$ опущен, c_1 — общая безразмерная константа, определяемая из условия унитарности, а $f^{(1)}$ задана выражением

$$f^{(1)} = \frac{g_{10}^2}{\alpha'} \int_0^1 \frac{dq}{q} [F_1(a, q)]^{10-D} \int_0^1 \prod_{r=1}^3 (dv_r \theta(v_{r+1} - v_r)) \times \\ \times \left[\frac{\psi_{12}\psi_{34}}{\psi_{13}\psi_{24}} \right]^{-\alpha's} \left[\frac{\psi_{23}\psi_{14}}{\psi_{13}\psi_{24}} \right]^{-\alpha't}. \quad (9.2.27)$$

Точки в (9.2.26) отмечают наличие других квантовых поправок, включая поправки от неориентируемых и многопетлевых диаграмм. Оказывается, что в низкоэнергетическом пределе неориентируемые петли дают вклад того же вида, что и планарная петля. Для непланарной петли древесная диаграмма с тем же теоретико-групповым множителем, что и у петлевой амплитуды, отсутствует, но остальная часть выражения в низкоэнергетическом пределе имеет такой же вид, как в случае планарной петли. В обоих случаях анализ очень похож на вычисления для планарной петли и здесь не приводится.

Десятимерная константа связи Янга—Миллса g_{10} имеет размерность (длина)³, а константа связи g_D после компактификации $10-D$ измерений определяется следующим соотношением:

$$g_D = g_{10} R^{(10-D)/2}. \quad (9.2.28)$$

Для того чтобы в D измерениях определить предел, в котором g_D конечна, а гравитационные эффекты отсутствуют, что соответствует однопетлевому результату теории Янга—Миллса, необходимо, чтобы D -мерная гравитационная константа

$$\kappa_D = \kappa_{10} R^{(10-D)/2} \sim \frac{g_D^2}{\alpha'} R^{(D-10)/2} \quad (9.2.29)$$

обращалась в нуль. Этому соответствует предел $R^{(D-10)/2}/\alpha' \rightarrow 0$. Удобно рассмотреть специальный предел (9.2.25), когда $\alpha' \rightarrow 0$, а a фиксировано (в этом случае для обращения κ_D

в нуль необходимо выполнение неравенства $D < 6$), но полученный ниже результат справедлив и в общем случае. В приведенных ниже формулах число некомпактных измерений D рассматривается как непрерывный параметр.

В пределе $\alpha' \rightarrow 0$ с фиксированным a степени ψ_{rs} в (9.2.27) приближаются к нулю и поведение определяется в основном сингулярной граничной точкой $q \sim 1$ (т. е. $\omega = 2\pi^2/\ln q \sim \infty$) при $D < 6$. При этом можно использовать следующую асимптотическую формулу:

$$F_1(a, q) \sim a \left(-\frac{2\pi}{\ln q} \right)^{1/2}, \quad (9.2.30)$$

а также асимптотику

$$\psi_{rs}(c, \omega) \sim (1-x)(1-\omega/x) \exp\left(\frac{-\ln x \ln z(\omega/x)}{2 \ln \omega}\right). \quad (9.2.31)$$

Подставляя эти асимптотические разложения в выражение для $f^{(1)}$ и проводя алгебраические вычисления, получаем главный член в (9.2.27) в виде

$$f^{(1)} \sim g_D^2 \pi^{\nu-1} \Gamma(-\nu) \int_0^1 \left(\prod_{i=1}^4 d\eta_i \right) \delta\left(1 - \sum_i \eta_i\right) (\eta_1 \eta_3 s + \eta_2 \eta_4 t)^\nu, \quad (9.2.32)$$

где переменные η_i определены соотношениями

$$\eta_i = \nu_i - \nu_{i-1}, \quad (9.2.33)$$

$$\nu = \frac{1}{2} D - 4. \quad (9.2.34)$$

Этот анализ можно использовать при получении выражения для однопетлевой $N=4$ -суперянг-миллсовой амплитуды в произвольной размерности D . Выражение (9.2.32) расходится в четных размерностях при $D \geq 8$, что согласуется с вычислениями ультрафиолетовых расходимостей в $N=4$ -теории Янга — Миллса. При $D=6$ предел конечен, а при $D=4$ выражение расходится из-за инфракрасных эффектов. Функция $f^{(1)}$ расходится как $(D-4)^{-2}$ вблизи $D=4$, и такое поведение типично для инфракрасной особенности в рассеянии на массовой оболочке четырех янг-миллсовых бозонов при размерной регуляризации.

Аналогичным образом можно получить однопетлевые амплитуды для $N=8$ -супергравитации из низкоэнергетических пределов для амплитуд в теории струн типа II. Только в $D=10$ измерениях существует отличие между киральными и некиральными теориями, поэтому обсуждаемая здесь достаточно три-

виальная компактификация не различает теории типа IIA и IIB.

Однопетлевые диаграммы с меньшим чем четыре числом внешних основных состояний в этом случае снова равны нулю, и первая нетривиальная петлевая амплитуда имеет четыре внешних безмассовых состояния. Для этой амплитуды сумму древесных диаграмм и квантовых поправок можно записать в виде

$$A(1, 2, 3, 4) = \kappa_{10}^2 K_{cl} \left\{ -\frac{4}{stu} \frac{\Gamma(1-\alpha's/4) \Gamma(1-\alpha't/4) \Gamma(1-\alpha'u/4)}{\Gamma(1+\alpha's/4) \Gamma(1+\alpha't/4) \Gamma(1+\alpha'u/4)} + d_1 g^{(1)} + \dots \right\}, \quad (9.2.35)$$

где d_1 — новая безразмерная константа, определяемая условием унитарности,

$$g^{(1)} = \frac{\kappa_{10}^2}{\alpha'} \int_F \frac{d^2\tau}{(\text{Im } \tau)^2} [F_2(a, \tau)]^{10-D} F_C(\tau), \quad (9.2.36)$$

а $F_C(\tau)$ определена в (9.2.8). Точки опять означают наличие квантовых поправок более высокого порядка.

Низкоэнергетический предел снова можно рассматривать при $\alpha' \rightarrow 0$, сохраняя a и κ_D фиксированными. Как и в случае амплитуды для открытых струн, петля расходится при $D \geq 8$; при $D < 8$ область интегрирования, дающая основной вклад в (9.2.36), лежит вблизи $\text{Im } \tau \rightarrow \infty$, поскольку в этом пределе

$$F_2(a, \tau) \sim a (\text{Im } \tau)^{1/2}. \quad (9.2.37)$$

Подстановка этой асимптотической формулы в (9.2.36) дает (после небольших алгебраических выкладок) асимптотическую форму $g^{(1)}$ при $\alpha' \rightarrow 0$:

$$g^{(1)} \sim \kappa_D^2 \Gamma(-\nu) \int_0^1 d\rho_3 \int_0^{\rho_3} d\rho_2 \int_0^{\rho_2} d\rho_1 [s\rho_1\rho_2 + t\rho_2\rho_3 + u\rho_3\rho_1 + t(\rho_1 - \rho_2)]^\nu + \text{члены, симметризирующие } s, t \text{ и } u, \quad (9.2.38)$$

где $\nu = D/2 - 4$, как и раньше.

Можно показать, что это асимптотическое выражение для $g^{(1)}$ пропорционально асимптотическому выражению для $f^{(1)}$, симметризованному по s, t и u , т. е.

$$g^{(1)} \sim f^{(1)}(s, t) + f^{(1)}(t, u) + f^{(1)}(u, s). \quad (9.2.39)$$

Это значит, что $g^{(1)}$ также конечна при $D=6$. При $D \rightarrow 4$ она имеет более мягкую инфракрасную особенность, чем $f^{(1)}$,

благодаря сокращениям, возникающим при симметризации. Точнее $g^{(1)} \sim (D-4)^{-1}$, что является характерной инфракрасной особенностью в гравитации при размерной регуляризации. В заключение отметим, что и $N=4$ -теория Янга — Миллса, и $N=8$ -супергравитация конечны в ультрафиолетовой области при $D < 8$ и конечны в инфракрасной области при $D > 4$. Эти результаты получены выше гораздо более простым способом, рассматривая пределы струнных амплитуд, чем их можно получить непосредственно из полевых теорий.

9.3. Теория гетеротических струн

В гл. 6 показано, что степени свободы теорий гетеротических струн, соответствующие внутренней калибровочной симметрии, могут быть описаны либо бозонными, либо фермионными переменными. Вычисления древесной амплитуды в разд. 7.4.4 основывались на бозонной формулировке, и эту формулировку мы будем использовать в настоящем разделе при изучении однопетлевых амплитуд. Напомним, что в этом подходе внутренняя калибровочная симметрия описывается шестнадцатью бозонными координатами, распространяющимися влево, которые параметризуют максимальный тор групп $E_8 \times E_8$ или $\text{spin}(32)/Z_2$.

Генераторы групп $E_8 \times E_8$ или $SO(32)$ можно разделить на 16 «нейтральных» генераторов, принадлежащих картановой подалгебре, и 480 «заряженных» генераторов с зарядами, описываемыми 16-компонентным вектором K^I , который можно рассматривать как импульс Калуцы — Клейна, связанный с 16-мерным тором. Структура вершинных операторов для состояний из янг-милсова супермультиплетта несколько отличается для нейтральных и заряженных состояний. Соответствующая конструкция описана детально в разд. 6.4.3 и использовалась при вычислении нескольких древесных амплитуд в разд. 7.4.4. Для нейтральных состояний, принадлежащих присоединенному представлению картановой подалгебры или состояниям из супергравитационного мультиплетта (которые являются синглетами по отношению к калибровочной группе), внутренний импульс K^I равен нулю. Для 480 заряженных состояний вектор K^I соответствует корню калибровочной группы, $K \cdot K = 2$. Вершинные операторы, связанные с заряженными состояниями, содержат коциклические множители, которые обсуждались в разд. 6.4.4 и 6.4.5.

Если для описания правых мод, как и в предыдущих разделах, используется формализм калибровки светового конуса с пространственно-временной суперсимметрией, то в случае гетеротических суперструн достигается такое же упрощение, что

и для суперструн типа II. Как и для других суперструнных теорий, амплитуды с меньшим чем 4 числом внешних основных состояний исчезают из-за следа по правым модам S_0^a . Так же как в других теориях, четырехчастичные амплитуды особенно просты, поскольку вершинные операторы, связанные с правыми модами, после взятия следа по S_0^a фактически сводятся к вершинам модели Венециано без каких-либо дополнительных множителей.

9.3.1. Тор с четырьмя внешними частицами

Так как простейший нетривиальный пример петлевой амплитуды для гетеротической струны имеет четыре безмассовые внешние частицы, мы рассмотрим именно этот случай. На однопетлевом уровне существует только одна диаграмма — тороидальная. Как и для суперструн типа II, мировая поверхность должна быть замкнутой и ориентируемой, и тор представляет собой единственную возможность на однопетлевом уровне.

Кинематика рассеяния такая же, как в гл. 8 (см. рис. 8.8). Пространственно-временные импульсы испущенных состояний обозначим K_r^I ($I=1, 2, \dots, 16$), а заряд r -го пропагатора P_r^I имеет вид

$$P_r^I = P^I - \sum_{s=1}^{r-1} K_s^I. \quad (9.3.1)$$

Импульс в петле P^I суммируется по всем углам соответствующей решетки Λ .

Однопетлевые амплитуды снова получаются путем «сшивки» древесных диаграмм, что в случае четырех внешних частиц, как и в (9.2.4), дает

$$A_H(1, 2, 3, 4) = \left(\frac{\kappa}{4\pi}\right)^4 \int \frac{d^2w}{|w|^2} \int \prod_{r=1}^3 \frac{d^2\rho_r}{|\rho_r|^2} I(1, 2, 3, 4). \quad (9.3.2)$$

Корреляционная функция $I(1, 2, 3, 4)$ задается выражением

$$I(1, 2, 3, 4) = \int d^{10}p |\omega|^{p^2/4} \sum_{P \in \Lambda} \bar{w}^{P^2/2} \text{Tr} [\omega^N \bar{w}^{\tilde{N}-1} V(1, \rho_1) \times \\ \times V(2, \rho_2) V(3, \rho_3) V(4, \rho_4)]. \quad (9.3.3)$$

Заметим, что в эту формулу включен множитель

$$\omega^{L_0} \bar{\omega}^{\tilde{L}_0 - 1} = |\omega|^{p^2/4} \omega^N \bar{\omega}^{\tilde{N} - 1 + P^2/2}, \quad (9.3.4)$$

так как суперструнный сектор не содержит константы, возникающей при нормальном упорядочении, в то время как бозонный сектор содержит константу -1 . Вершинный оператор $V(k_r, p_r)$ описывает испускание произвольной частицы в основном состоянии из спектра гетеротической струны. Поскольку след по правым модам S_0^a исчерпывает всю зависимость от S -мод в вершинах, вклад в след правых мод S_n^a имеет вид $[f(\omega)]^8$, как и для правых мод в теориях типа II.

Поляризационные тензоры второго ранга (включая спиноры) для супергравитационного мультиплетта удобно представить в виде суммы произведений поляризационных векторов янг-миллсова супермультиплетта (т. е. записать $\zeta_r^{\mu\nu} = \sum_n \zeta_{rn}^\mu \bar{\zeta}_{rn}^\nu$, $\zeta_r^{a\mu} = \sum_n u_{rn}^a \bar{\zeta}_{rn}^\mu, \dots$). Таким путем получаем, что общий кинематический множитель, возникающий от следа по фермионным нулевым модам, равен сумме множителей того же вида, что и множитель K для случая открытых струн (мы будем рассматривать только один из этих членов, поэтому индекс n опустим).

С множителями $\bar{\zeta}_{r\mu} \dot{X}_L^\mu(\bar{z}_r)$ ($\mu = 0, \dots, 9$), которые связаны с вершинами испускания гравитонов, можно поступить так же, как в случае вершин испускания векторных частиц для бозонной теории открытых струн, т. е. использовать представление $\exp[\bar{\zeta}_r \cdot \dot{X}_L(\bar{z}_r)]$ и в конце вычислений удерживать только члены, линейные по $\bar{\zeta}_r$. Вершины испускания шестнадцати нейтральных калибровочных частиц содержат множители типа $\bar{\xi}_r^I \dot{X}_L^I(\bar{z}_r)$, которые также можно представить в экспоненциальном виде $\exp[\bar{\xi}_r^I \dot{X}_L^I(\bar{z}_r)]$ и в конце вычислений оставить только члены, линейные по $\bar{\xi}_r$. Множитель $\bar{\xi}_r^I$ можно рассматривать как вектор «поляризации» в дополнительных шестнадцати измерениях, который характеризует нейтральные калибровочные частицы. Учитывая одновременно оба типа множителей, получаем удобные формулы для описания произвольной комбинации гравитонов и нейтральных калибровочных частиц. Поскольку правые моды описываются суперсимметричным образом, их суперсимметричные партнеры также могут быть описаны путем соответствующего изменения множителей K .

Интегрирование по десятимерному импульсу в петле p^μ проводится так же, как в бозонной теории в разд. 8.2.1. Но здесь появляется дополнительная зависимость подынтеграль-

ного выражения от p из-за нулевой моды \dot{X}_L^μ

$$\int d^{10}p \prod_{r=1}^M |z_r|^{p^2/4} e^{\bar{\xi}_r \cdot p_{r/2}} = \left(\frac{-4\pi}{\ln|\omega|} \right)^5 \prod_{r<s} \left\{ |c_{sr}|^{-1/2} \exp \frac{\ln^2 |c_{sr}|}{2 \ln|\omega|} \right\}^{k_r \cdot k_s/2} \times \exp \sum_{1 \leq r < s \leq M} \left\{ (k_r \cdot \bar{\xi}_s - k_s \cdot \bar{\xi}_r) \left(\frac{\ln |c_{sr}|}{2 \ln|\omega|} - \frac{1}{4} \right) - \bar{\xi}_r \cdot \bar{\xi}_s \frac{1}{2 \ln|\omega|} \right\}. \quad (9.3.5)$$

Это та же формула, что и в разд. 8.1.1, но с заменой x_r на $\sqrt{z_r}$ и ξ_r на $\bar{\xi}_r/2$.

Сумма по дискретным значениям петлевых импульсов p^μ вычисляется так же, как для непрерывных импульсов, а именно путем выделения полного квадрата. Алгебраические вычисления, совпадающие с вычислениями в разд. 8.1.1, приводят к формуле

$$\sum_{P \in \Lambda} \prod_{r=1}^M \bar{z}_r^{p^2/2} e^{\bar{\xi}_r \cdot p_r} = \mathcal{L} \prod_{r<s} \left\{ \bar{c}_{sr}^{-1/2} \exp \left(\frac{\ln^2 \bar{c}_{sr}}{2 \ln \bar{\omega}} \right) \right\}^{K_r \cdot K_s} \times \exp \left\{ \sum_{1 \leq r < s \leq M} (K_r \cdot \bar{\xi}_s - K_s \cdot \bar{\xi}_r) \left(\frac{\ln \bar{c}_{sr}}{\ln \bar{\omega}} - \frac{1}{2} \right) - \bar{\xi}_r \cdot \bar{\xi}_s \frac{1}{\ln \bar{\omega}} \right\} = \mathcal{L} \prod_{r<s} \exp \left\{ K_r \cdot K_s \left(i\pi \bar{v}_{sr} - \frac{i\pi \bar{v}_{sr}^2}{\bar{\tau}} \right) + (K_r \cdot \bar{\xi}_s - K_s \cdot \bar{\xi}_r) \left(\frac{\bar{v}_{sr}}{\bar{\tau}} - \frac{1}{2} \right) - i \frac{\bar{\xi}_r \cdot \bar{\xi}_s}{2\pi \bar{\tau}} \right\}, \quad (9.3.6)$$

где использованы обозначения, возникающие при комплексном сопряжении (9.2.6):

$$\bar{v}_{sr} = \bar{v}_s - \bar{v}_r, \quad \bar{v}_r = -\ln \bar{\rho}_r / 2\pi i \quad (r = 1, \dots, M-1), \quad (9.3.7)$$

$$\bar{v}_M \equiv \bar{\tau} = -\ln \bar{\omega} / 2\pi i. \quad (9.3.8)$$

Суммирование по решетке содержится в функции \mathcal{L} , определенной формулой

$$\mathcal{L} = \sum_{P \in \Lambda} e^{-i\pi \bar{\tau} (P+S)^2}, \quad (9.3.9)$$

где

$$S^I = \sum_{r=1}^4 \left(\frac{\ln \bar{\rho}_r}{\ln \bar{\omega}} K_r^I + \frac{\bar{\xi}_r^I}{\ln \bar{\omega}} \right) = \sum_{r=1}^4 \left(\frac{\bar{v}_r}{\bar{\tau}} K_r^I + \frac{i \bar{\xi}_r^I}{2\pi \bar{\tau}} \right) \quad (9.3.10)$$

(члены, содержащие $\bar{\xi}_r \cdot \bar{\xi}_r$, опущены, поскольку вклад в амплитуду дают только члены, линейные по $\bar{\xi}_r$).

Множители в следе от ненулевых мод, содержащиеся в функции I , вычисляются таким же способом, как и в предыдущих примерах. Функцию I можно разбить на два множителя

$$I = I_1 \times I_2, \quad (9.3.11)$$

где множитель I_1 возникает от (распространяющихся влево и вправо) пространственно-временных мод α_n^i и $\bar{\alpha}_n^i$ вместе со следом по фермионным модам S_n^a , в то время как множитель I_2 возникает от шестнадцати дополнительных координат $\bar{\alpha}_n^I$, распространяющихся влево.

Фермионный след дает множитель $K[f(\omega)]^8$ в I_1 . Множитель (9.3.5), соответствующий импульсу нулевых мод, вместе с множителями, возникающими от ненулевых мод в I_1 , которые возникают в функции

$$\text{Tr} \left\{ \exp \sum_1^M (ik_r \cdot X(\bar{z}_r) + \bar{\xi}_r \cdot P_L(\bar{z}_r)) \right\}, \quad (9.3.12)$$

входящей в подынтегральное выражение петлевой диаграммы, дает множитель, похожий на бозонный множитель для теорий типа II. Результат имеет вид, напоминающий выражение для открытой струны из разд. 8.1.1:

$$I_1 = K [f(\bar{\omega})]^{-8} \left(\frac{-4\pi}{\ln|\bar{\omega}|} \right)^5 \prod_{r < s} (\chi_{rs})^{k_r \cdot k_s / 2} \times \\ \times \exp \left\{ \frac{1}{2} (k_r \cdot \bar{\xi}_s - k_s \cdot \bar{\xi}_r) \hat{\eta}_{rs} + \bar{\xi}_r \cdot \bar{\xi}_s \hat{\Omega}_{rs} \right\}, \quad (9.3.13)$$

где $\chi_{rs} = \chi(\bar{c}_{sr}, \bar{\omega})$ аналогично определены функции $\hat{\eta}_{rs}$ и $\hat{\Omega}_{rs}$. Функции $\hat{\eta}_{rs}$ и $\hat{\Omega}_{rs}$ на самом деле пропорциональны корреляционным функциям $\langle X^\mu(\bar{z}_r) X_\mu(\bar{z}_s) \rangle$ и $\langle \bar{X}^\mu(\bar{z}_r) \bar{X}_\mu(\bar{z}_s) \rangle$ соответственно. Они отличаются от функций η и Ω , определенных в гл. 8, только своими нулевыми модами (поскольку нулевые моды взаимодействуют с координатами, распространяющимися влево и вправо):

$$\hat{\eta}_{rs} \equiv \hat{\eta}(\bar{c}_{sr}, \bar{\omega}) = \eta(\bar{c}_{sr}, \bar{\omega}) - \frac{\ln \bar{c}_{sr}}{\ln \bar{\omega}} + \frac{\ln |c_{sr}|}{\ln |\omega|} = \\ = \eta_{rs} - \frac{\bar{v}_{sr}}{\bar{\tau}} + \frac{\text{Im } \bar{v}_{sr}}{\text{Im } \bar{\tau}}, \quad (9.3.14)$$

$$\hat{\Omega}_{rs} \equiv \hat{\Omega}(\bar{c}_{sr}, \bar{\omega}) = \Omega(\bar{c}_{sr}, \bar{\omega}) + \frac{1}{\ln \bar{\omega}} - \frac{1}{2 \ln |\omega|} = \\ = \Omega_{rs} - \frac{1}{2i\pi\bar{\tau}} - \frac{1}{4\pi \text{Im } \bar{\tau}}. \quad (9.3.15)$$

Множитель I_2 , соответствующий дополнительным шестнадцати измерениям, получается объединением (9.3.6) с множителями, которые возникают от нулевых мод. Прежде всего имеется множитель $\bar{e}(K_1, K_2, K_3, K_4)$, который возникает от коциклических множителей в вершинах испускания заряженных янг-милловских частиц. За исключением того, что импульс P^I принимает дискретные значения, вычисления, по существу такие же, как для открытых струн, приводят к выражению

$$I_2 = \bar{e} [f(\bar{\omega})]^{-16} \mathcal{L} \prod_{r < s} (\psi_{rs})^{K_r \cdot K_s} \times \\ \times \exp [(K_r \cdot \bar{\xi}_s - K_s \cdot \bar{\xi}_r) \eta_{rs} + \bar{\xi}_r \cdot \bar{\xi}_s \Omega_{rs}]. \quad (9.3.16)$$

Записав меру через переменные ν_r и τ ,

$$\frac{1}{\bar{\omega}} \frac{d^2 \bar{\omega}}{|\bar{\omega}|^2} \prod_{r=1}^M \frac{d^2 \rho_r}{|\rho_r|^2} = \frac{(2\pi)^8}{\bar{\omega}} d^2 \tau \prod_{r=1}^{M-1} d^2 \nu_r, \quad (9.3.17)$$

получим, что все четырехчастичные однопетлевые амплитуды для безмассовых частиц содержатся в выражении

$$A_H(1, 2, 3, 4) = (\pi\kappa)^4 \bar{e} K \int d^2 \tau \int_R \prod_r d^2 \nu_r \left(\frac{-4\pi}{\ln |\bar{\omega}|} \right)^5 \frac{1}{\bar{\omega}} [f(\bar{\omega})]^{-24} \times \\ \times \mathcal{L} \exp \sum_{r < s} \left(\frac{1}{2} (k_r \cdot \bar{\xi}_s - k_s \cdot \bar{\xi}_r) \hat{\eta}_{rs} + (K_r \cdot \bar{\xi}_s - K_s \cdot \bar{\xi}_r) \eta_{rs} + \right. \\ \left. + \bar{\xi}_r \cdot \bar{\xi}_s \hat{\Omega}_{rs} + \bar{\xi}_r \cdot \bar{\xi}_s \Omega_{rs} \right) \prod_{r < s} (\chi_{rs})^{k_r \cdot k_s / 2} (\psi_{rs})^{K_r \cdot K_s}. \quad (9.3.18)$$

Из этой формулы можно получить описание любого процесса с внешними основными состояниями путем приписывания r -му состоянию ненулевого вектора $\bar{\xi}_r^\mu$ для гравитона, ненулевого $\bar{\xi}_r^I$ для нейтральной частицы янг-миллова мультиплета или $K_r \neq 0$ для заряженной янг-милловской частицы и удерживая только линейные по $\bar{\xi}_r$ и $\bar{\xi}_r$ члены, как было показано раньше.

Область интегрирования в (9.3.18) совпадает с областью интегрирования для тороидальных диаграмм уже обсуждавшихся теорий. Ключевой вопрос состоит в том, является ли функция F_H , определенная формулой

$$A_H(1, 2, 3, 4) = (\pi\kappa)^4 \bar{e} K \int \frac{d^2 \tau}{(\text{Im } \tau)^2} F_H(\tau), \quad (9.3.19)$$

модулярно инвариантной. Перейдем к обсуждению этого вопроса.

9.3.2. Модулярная инвариантность $E_8 \times E_8$ - и $SO(32)$ -теорий

Хотя доказательство модулярной инвариантности во многом следует по тому же пути, что и в случае теорий типа II, теория гетеротической струны существенно отличается тем, что внутренняя симметрия включается посредством решетки Λ . Это отражается в появлении множителя \mathcal{L} в выражении для амплитуды. Модулярная инвариантность накладывает важные ограничения на вид решеток.

Начнем обсуждение с доказательства того факта, что область интегрирования по переменным v_r можно ограничить фундаментальным параллелограммом с периодами 1 и τ в комплексной плоскости v . Для доказательства необходимо проверить инвариантность подинтегрального выражения относительно преобразований

$$v_r \rightarrow v_r + 1, \quad (9.3.20)$$

$$v_r \rightarrow v_r + \tau, \quad (9.3.21)$$

которые соответствуют преобразованиям $z_r \rightarrow z_r \exp\{2\pi i\}$ и $z_r \rightarrow \omega z_r$. Инвариантность всех множителей в амплитуде относительно первого из этих преобразований очевидна, за исключением множителей в правой части (9.3.6), так как они являются либо функциями $|p_r|$, либо представляются в виде ряда по p_r . Но левая часть (9.3.6), очевидно, инвариантна относительно преобразований $z_r \rightarrow z_r \exp\{2\pi i\}$, поскольку P_r — вектор корневой решетки, причем $P_r^2/2$ является целым числом. Второе из преобразований переменных v_r (9.3.21) является преобразованием симметрии для всех функций, входящих в подинтегральное выражение для амплитуды. Для функций ψ_{rs} и χ_{rs} это следует из их свойств, перечисленных в приложении 8.A, в то время как для других функций инвариантность является следствием их определений через производные от ψ_{rs} . Инвариантность \mathcal{L} при преобразовании (9.3.21) вытекает из его определения путем сдвига $\ln \bar{p}_r$ на $\ln \omega$ в экспоненте (9.3.9), что эквивалентно сдвигу P в экспоненте на вектор решетки K_r , оставляющему сумму неизменной. Это означает, что область интегрирования по v_r действительно может быть ограничена фундаментальной областью в плоскости v таким образом, что она покрывает тор в точности один раз.

Обратимся теперь к вопросу о модулярной инвариантности, который в рассматриваемом случае содержит новые черты. Для изучения поведения амплитуды при глобальных диффеоморфизмах, генерируемых модулярными преобразованиями, до-

статочно рассмотреть два преобразования

$$\tau \rightarrow \tau' = \tau + 1, \quad (9.3.22)$$

$$\tau \rightarrow \tau' = -1/\tau, \quad (9.3.23)$$

поскольку они генерируют всю модулярную группу, как было описано в разд. 8.2.2. Первое из этих преобразований соответствует переходу от ω к $\omega \exp\{2\pi i\}$, что является частным случаем (9.3.20), соответствующим $r = M$. Для изучения поведения амплитуды при втором преобразовании необходимо одновременно преобразовать переменные

$$v \rightarrow v' = -v/\tau \quad (9.3.24)$$

так, чтобы интегрирование по v' происходило по той же области, заданной с помощью преобразованной переменной τ , что и первоначальная область переменных v , заданная переменной τ .

Различные функции, входящие в выражение для амплитуды, имеют простые трансформационные свойства при такой замене переменных. Преобразование $\psi(\bar{v}, \bar{\tau})$, приведенное в приложении 8.A, можно записать в виде

$$\psi(\bar{v}, \bar{\tau}) = \frac{1}{\bar{\tau}'} \exp\left(\frac{i\pi \bar{v}'^2}{\bar{\tau}'}\right) \psi(\bar{v}', \bar{\tau}'). \quad (9.3.25)$$

Аналогично из уравнений этого приложения следует

$$\eta(\bar{v}, \bar{\tau}) = \bar{\tau}' \left(\eta(\bar{v}', \bar{\tau}') - \frac{\bar{v}'}{\bar{\tau}'} \right), \quad (9.3.26)$$

$$\Omega(\bar{v}, \bar{\tau}) = \bar{\tau}'^2 \left(\Omega(\bar{v}', \bar{\tau}') + \frac{i}{2\pi \bar{\tau}'} \right). \quad (9.3.27)$$

Используя (9.3.14) и (9.3.15), легко проверить, что функции $\hat{\eta}$ и $\hat{\Omega}$ имеют простые трансформационные свойства

$$\hat{\eta}(\bar{v}, \bar{\tau}) = \bar{\tau}' \hat{\eta}(\bar{v}', \bar{\tau}'), \quad (9.3.28)$$

$$\hat{\Omega}(\bar{v}, \bar{\tau}) = \bar{\tau}'^2 \hat{\Omega}(\bar{v}', \bar{\tau}'). \quad (9.3.29)$$

Все рассмотренные до сих пор множители аналогичны множителям, которые возникали в теориях типа II. Обратимся к множителю \mathcal{L} , определенному соотношением (9.3.9), который не имеет аналога в моделях, рассмотренных раньше. Для модулярной инвариантности амплитуды важно, что \mathcal{L} преобразуется просто. В приложении 9.B показано, что это происходит только в том случае, если решетка Λ самодуальна. Тогда \mathcal{L}

преобразуется следующим образом:

$$\mathcal{L} \equiv \mathcal{L}(\bar{\nu}_r, \bar{\tau}, \bar{\xi}_r) = (\bar{\tau}')^3 \mathcal{L}(\bar{\nu}'_r, \bar{\tau}', \bar{\tau}'\bar{\xi}_r) e^{-i\pi\bar{\tau}S^2}, \quad (9.3.30)$$

где использовано равенство $\bar{\tau}S^l(\bar{\nu}_r, \bar{\tau}, \bar{\xi}_r) = S^l(\bar{\nu}'_r, \bar{\tau}', \bar{\tau}'\bar{\xi}'_r)$, которое следует из определения S^l в (9.3.10). Явное выражение для $i\pi\bar{\tau}S^2$ имеет вид

$$\begin{aligned} -i\pi\bar{\tau}S^2 = & \sum_{1 \leq r < s \leq 4} \left(iK_r \cdot K_s \frac{\pi\bar{\nu}'_{sr}}{\bar{\tau}} + i\bar{\xi}_r \cdot \bar{\xi}_s \frac{1}{2\pi\bar{\tau}} - \right. \\ & \left. - (K_r \cdot \bar{\xi}_s - K_s \cdot \bar{\xi}_r) \frac{\bar{\nu}'_{sr}}{\bar{\tau}} \right) = - \sum_{1 \leq r < s \leq 4} \left(iK_r \cdot K_s \frac{\pi\bar{\nu}'_{sr}}{\bar{\tau}} + \right. \\ & \left. + i\bar{\tau}'^2 \bar{\xi}_r \cdot \bar{\xi}_s \frac{1}{2\pi\bar{\tau}'} - \bar{\tau}' (K_r \cdot \bar{\xi}_s - K_s \cdot \bar{\xi}_r) \frac{\bar{\nu}'_{sr}}{\bar{\tau}'} \right). \quad (9.3.31) \end{aligned}$$

Это выражение содержит вклады нулевых мод преобразованных функций $\ln \psi(\bar{\nu}'_{sr}, \bar{\tau}')$, $\bar{\tau}'\eta(\bar{\nu}'_{sr}, \bar{\tau}')$ и $\bar{\tau}'^2\Omega(\bar{\nu}'_{sr}, \bar{\tau}')$, которые убираются преобразованиями (9.3.25)–(9.3.27). Таким образом, \mathcal{L} в комбинации с другими множителями преобразуется по простому правилу. То обстоятельство, что преобразование \mathcal{L} выглядит просто только для самодуальных решеток, имеет решающее значение для теории. Уже было показано, что допустимыми решетками являются те, которые соответствуют группам с «четными» корнями (т. е. с корнями, квадрат которых равен 2). Мы покажем, что самосогласованность однопетлевых амплитуд накладывает дальнейшие ограничения на самодуальность. Как обсуждалось в разд. 6.4.7, единственными самодуальными решетками 16-го ранга являются решетки Γ_{16} и $\Gamma_8 + \Gamma_8$, связанные с группами $\text{spin}(32)$ и $E_8 \times E_8$. Требование модулярной инвариантности представляет собой первый действительно убедительный аргумент, приведенный нами в пользу условия самодуальности. Рассуждения, основанные на сокращении аномалий, приведенные в разд. 13.5.3, выделяют эти же калибровочные группы для $D = 10$ -теорий с $N = 1$ -суперсимметрией.

Теперь можно объединить трансформационные свойства множителей в подынтегральном выражении для амплитуды. Прежде всего существуют множители, содержащие ψ_{rs} и соответствующие M_C внешним безмассовым состояниям, которые имеют ненулевые K_r :

$$\prod_{1 \leq r < s \leq 4} (\psi(\bar{\nu}_{sr}, \bar{\tau}))^{K_r \cdot K_s} = (\bar{\tau}')^{M_C} \prod_{1 \leq r < s \leq 4} (\psi(\bar{\nu}'_{sr}, \bar{\tau}'))^{K_r \cdot K_s}, \quad (9.3.32)$$

где использовано равенство $\sum_{1 \leq r < s \leq 4} K_r \cdot K_s = -\frac{1}{2} \sum_{r=1}^4 (K_r)^2 = -M_C$. Каждый множитель η_{rs} дает $\bar{\tau}'$, а каждый множитель Ω_{rs} дает $(\bar{\tau}')^2$, поэтому M_U внешних незаряженных янг-миллсовых состояний (т. е. состояний с $K_r = 0$ и ненулевыми $\bar{\xi}_r$) дают общий множитель $(\bar{\tau}')^{M_U}$. Аналогично M_G внешних гравитонов (с $K_r = 0$ и $\xi_r \neq 0$) дают множитель $(\bar{\tau}')^{M_G}$, что следует из трансформационных свойств $\hat{\eta}_{rs}$ и $\hat{\Omega}_{rs}$. Таким образом, в сумме каждый вид частиц дает множитель $\bar{\tau}'$, что в четырехчастичном случае приводит к множителю $(\bar{\tau}')^4$.

Преобразование функции $f(\bar{\omega})$ можно записать в виде

$$\frac{1}{\bar{\omega}} [f(\bar{\omega})]^{-24} = (\bar{\tau}')^{-12} \frac{1}{\bar{\omega}'} [f(\bar{\omega}')]^{-24} \quad (9.3.33)$$

(где $\omega' = \exp\{4\pi^2/\ln \omega\}$). Остальные члены в подынтегральном выражении (9.3.18) имеют вид

$$\frac{d^2\tau}{(\text{Im } \tau)^2} \prod_{r=1}^3 \frac{d^2\nu_r}{(\text{Im } \tau)^3} \prod_{r < s} (\chi_{rs})^{k_r \cdot k_s/2}. \quad (9.3.34)$$

Аргументы, следующие за формулой (9.2.5), показывают, что в точности эта комбинация инвариантна относительно модулярных преобразований.

Множитель $(\bar{\tau}')^{-12}$ в (9.3.33) полностью сокращается восемью степенями $\bar{\tau}'$ из преобразования \mathcal{L} (9.3.30) и $M_C + M_U + M_G = 4$ степенями $\bar{\tau}'$ от других функций, поэтому подынтегральное выражение $F_H(\tau)$ инвариантно относительно преобразования $\tau \rightarrow -1/\tau$.

Модулярная инвариантность подынтегрального выражения снова позволяет интеграл по τ ограничить фундаментальной областью в плоскости τ , в качестве которой удобно выбрать область F на рис. 8.21. В этой области потенциальные расходимости при $\tau = 0$ не возникают, что приводит к хорошо определенному выражению для петлевой амплитуды. Однако необходимо проверить на сходимость граничные точки, которые приводили к расходимостям в бозонной теории.

Опасной граничной точкой, очевидно, является точка, в которой частицы собираются вместе на поверхности тора, т. е. предел, в котором $\nu_r \sim \nu_s$. Анализ этого предела похож на анализ, проведенный для теорий типа II в разд. 9.2.1, и включает замену переменных (9.2.11) в амплитуде (9.3.18). Для простоты предположим, что внешние состояния имеют ненулевой вектор K_r , поэтому члены с $\bar{\xi}_r$ или $\bar{\xi}_r$ отсутствуют. Выражение для S^l (9.3.10) равно нулю при совпадающих ρ_r , таким образом,

\mathcal{L} не зависит от ν_r . Единственные изменения в анализе по сравнению с анализом, проведенным для теорий типа II, состоят в появлении множителей $(\psi_{rs})^{K_r \cdot K_s}$ в (9.3.18). Поскольку $\psi_{rs} \sim \nu_{rs}$, они дают вклад $(\epsilon)^{\sum_{r < s} K_r \cdot K_s} = \epsilon^{-4}$ (где использовано равенство $K_r^2 = 2$). Результат состоит в том, что вблизи граничной точки $\epsilon = 0$ петлевая амплитуда ведет себя следующим образом:

$$\int_0 \epsilon d\epsilon \int_F \frac{d^2\tau}{(\text{Im } \tau)^5} \frac{1}{\bar{\omega}} [f(\bar{\omega})]^{-24} \mathcal{L}, \quad (9.3.35)$$

где \mathcal{L} задается формулой (9.3.9) при $S^i = 0$. На первый взгляд интеграл по τ расходится в пределе $\text{Im } \tau \rightarrow \infty$ ($\bar{\omega} \rightarrow 0$), где $\mathcal{L} \sim 1$ (вклад члена с $P = 0$ в (9.3.9)). Но интеграл по угловым переменным сокращает явно сингулярное поведение $1/\bar{\omega}$, в результате выражение для петлевой амплитуды оказывается конечным. Этот результат непосредственно обобщается на случаи, когда внешние частицы описываются ξ_r или ζ_r .

Тот факт, что петлевые амплитуды для гетеротической струны имеют модулярно инвариантное подынтегральное выражение только для самодуальных решеток, имеет большое значение, так как ограничивает возможный выбор калибровочной группы только двумя группами $\text{spin}(32)/Z_2$ и $E_8 \times E_8$, как объяснялось в гл. 6. В разд. 9.5.3 и 9.5.4 мы покажем, что отказ от пространственно-временной суперсимметрии предоставляет также возможность сформулировать модулярно инвариантную теорию гетеротических струн без тахионов, основанную на калибровочной группе $SO(16) \times SO(16)$.

9.4. Вычисления в RNS-формализме

До сих пор вычисления в этой главе полностью проводились в калибровке светового конуса, описанной в гл. 5. Существует несколько причин, по которым полезно провести вычисления также в RNS-формализме, описанном в гл. 4, который использует фермионные координаты, являющиеся пространственно-временными векторами, а не спинорами. С одной стороны, только в этом подходе мы знаем, как проводить явно ковариантные вычисления (хотя в RNS-формализме можно использовать и калибровку светового конуса). С другой стороны, благодаря отсутствию ограничения, возникающего при специальном выборе импульсов, возможно, существуют более прямые обобщения на диаграммы с большим числом испущенных состояний или на многопетлевые диаграммы, хотя соответствующие амплитуды в настоящей монографии не рассматри-

ваются. Наконец, изучение амплитуд рассеяния в RNS-формализме позволяет критически взглянуть на степень необходимости использования GSO-проекции. Именно с этого вопроса мы начнем следующий раздел, прежде чем непосредственно приступить к петлевым вычислениям.

9.4.1. Модулярная инвариантность и GSO-проекция

Модель RNS замкнутых струн содержит безмассовую частицу со спином $3/2$. В последовательной теории безмассовая частица со спином $3/2$ должна взаимодействовать с сохраняющимся суперсимметричным током (или отщепляться при низких энергиях). Однако без GSO-проекции модель RNS не обладает пространственно-временной суперсимметрией (и частица со спином $3/2$ не отщепляется при низких энергиях). Поэтому возникает естественное предположение, что модель RNS с учетом взаимодействия непоследовательна, если не использовать GSO-проекцию для получения пространственно-временной суперсимметрии или не ввести какие-либо другие изменения в модель с тем, чтобы устранить безмассовую частицу со спином $3/2$. Теперь можно проследить, как это происходит: модель RNS без проекции GSO или без проекции, которая устраняет безмассовую частицу со спином $3/2$, не является модулярно инвариантной на однопетлевом уровне.

Рассмотрим сначала фермионы в модели RNS, распространяющиеся вправо. Напомним, что для замкнутой струны, $0 \leq \sigma \leq \pi$, фермионы могут подчиняться либо антипериодическим граничным условиям, либо периодическим граничным условиям. Будем называть эти граничные условия четными и нечетными граничными условиями соответственно и обозначать «+» и «-». Четные и нечетные граничные условия приводят соответственно к фермионам и бозонам. Если функциональный интеграл вычисляется на торе, то граничные условия необходимо задавать более детально, как на рис. 9.1. Как и в разд. 8.2.2, предположим, что тор параметризуется условием $\nu = \sigma_1 + \sigma_2\tau$, поэтому фундаментальные периоды определяются преобразованиями $\sigma_1 \rightarrow \sigma_1 + 1$ и $\sigma_2 \rightarrow \sigma_2 + 1$. В направлениях σ_1 и σ_2 граничные условия могут

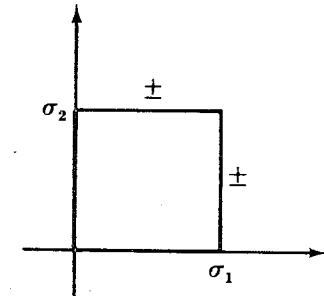


Рис. 9.1. Функциональный интеграл на торе; фермионы могут подчиняться граничным условиям «+» или «-» в направлениях σ_1 и σ_2 .

быть периодическими или антипериодическими. Поэтому существуют четыре возможности, которые мы обозначим $(++)$, $(+-)$, $(-+)$ и $(--)$, причем первый знак \pm соответствует поведению в направлении σ_1 , а второй — в направлении σ_2 . Четыре возможных вида граничных условий часто называют «спиновыми структурами», что является специальным случаем более общего понятия, которое исследуется в гл. 14.

При отсутствии какой-либо проекции петлевые амплитуды содержат множитель

$$\text{Tr} e^{-yH} \quad (9.4.1)$$

(где y определяется выражением $\tau = (x + iy)/2\pi$, как и в разд. 8.2.1), который соответствует распространению в мнимом времени y . Сейчас важно вспомнить, что в формулировке квантовой статистической механики с помощью интегралов по траекториям статистическая сумма фермионов вычисляется с использованием *антипериодических* граничных условий в направлении σ_2 . Поэтому след (9.4.1) естественно представляется в виде интеграла по траекториям с антипериодическими граничными условиями в направлении σ_2 . С другой стороны, если мы хотим вычислить величину

$$\text{Tr} (-1)^F e^{-yH}, \quad (9.4.2)$$

где $(-1)^F$ — оператор, используемый в GSO-проекции для подсчета числа фермионов на мировой поверхности по модулю 2, то в этом случае необходимо использовать граничные условия «+» в направлении σ_2 .

Поэтому при отсутствии GSO-проекции вклад сектора NS в петлевую амплитуду соответствует граничным условиям $(--)$, в то время как вклад сектора R соответствует граничным условиям $(+-)$. Комбинация статистических сумм с граничными условиями $(--)$ и $(+-)$ не является модулярно-инвариантной. Модулярное преобразование $(\sigma_1, \sigma_2) \rightarrow (\sigma_2, -\sigma_1)$ меняет ролями σ_1 и σ_2 , поэтому оно превращает граничные условия $(+-)$ в $(-+)$. Чтобы получить модулярно-инвариантную теорию, вклады $(--)$ и $(-+)$ в модели RNS необходимо дополнить граничными условиями $(-+)$. Но граничные условия $(-+)$ соответствуют статистической сумме для NS-состояний (граничные условия «—» в направлении σ_1) со вставкой оператора $(-1)^F$ (граничные условия «+» в направлении σ_2). Таким образом, одновременный учет граничных условий $(--)$ и $(-+)$ в секторе NS на тороидальной мировой поверхности приводит к замене (9.4.2) на

$$\text{Tr} (1 + (-1)^F) e^{-yH}. \quad (9.4.3)$$

Это и есть GSO-проекция — проекция на состояния, четные относительно действия оператора $(-1)^F$). Таким образом, на однопетлевом уровне показано, что для сохранения унитарности или по крайней мере для модулярной инвариантности в секторе NS необходимо использовать GSO-проекцию. В то же время в секторе R на однопетлевом уровне эти же аргументы не заставляют нас использовать GSO-проекцию, поскольку комбинация $(+-)$, $(-+)$ и $(--)$ обладает модулярной инвариантностью.

Причина, по которой рассматриваемая комбинация является модулярно-инвариантной, следующая. Модулярные преобразования $(\sigma_1, \sigma_2) \rightarrow (a\sigma_1 + b\sigma_2, c\sigma_1 + d\sigma_2)$ меняют граничные условия и поэтому перемешивают условия $(++)$, $(+-)$, $(-+)$ и $(--)$. Но граничное условие $(++)$ модулярно-инвариантно само по себе, так как граничные условия, соответствующие периодичности по обоим направлениям σ_1 и σ_2 , остаются такими же и для линейной комбинации σ_1 и σ_2 . Модулярные преобразования не могут перемешивать граничные условия $(+-)$, $(-+)$ и $(--)$ с условием $(++)$ (так как последнее является модулярно-инвариантным), поэтому они должны перемешивать $(+-)$, $(-+)$ и $(--)$ между собой. Таким образом, можно попытаться построить модулярно-инвариантную теорию только с использованием граничных условий $(+-)$, $(-+)$ и $(--)$. В такой теории GSO-проекция применяется только к бозонам. Включение условия $(++)$ означало бы использование GSO-проекции также для фермионов, но, поскольку условие $(++)$ само является модулярно-инвариантным, модулярная инвариантность на однопетлевом уровне не заставляет нас использовать GSO-проекцию для фермионов. На самом деле более тонкие аргументы показывают, что аналог модулярной инвариантности на двухпетлевом уровне требует использования GSO-проекции в секторе R, так же как в секторе NS. Мы не будем обсуждать этот вопрос и довольствуемся приведенным объяснением того, что GSO-проекция необходима в секторе NS²⁾.

¹⁾ В разд. 4.3.3, где была введена GSO-проекция, мы отмечали, что *a priori* общий знак оператора $(-1)^F$ определен плохо. Сейчас у нас имеется однозначный способ его определения, а именно модулярная инвариантность. При заданном выборе нормировки вклада $(--)$ в однопетлевую диаграмму, модулярное преобразование дает однозначный ответ для вклада $(-+)$ с определенным знаком, который на самом деле соответствует знаку, приводящему к суперсимметричной теории без тахиона.

²⁾ Возможно, более тонким способом из унитарности можно вывести необходимость использования GSO-проекции в секторе R даже на однопетлевом уровне.

Если использовать GSO-проектор будет описываться суммой инностей с граничными условиями с сектором NS. Складывая все вместе $(-+)$, $(+-)$ и $(++)$, которые при с явной пространственно-временной персимметричную форму теории с держащую GSO-проекцию, можно ходимо суммировать по всем возможным. Многопетлевое обобщение этого в гл. 14.

В проведенном обсуждении им дует отметить. Ясно, что для мод *обходимо* учесть секторы $(-+)$ сектор $(--)$ (в эти секторы при модулярных преобразованиях). О учет секторов $(-+)$ и $(+-)$ в *статочным* для модулярной инвариантности рассмотрим модулярное преобразование в себя. Общий вид этого преобразования $\rightarrow (a\sigma_1 + b\sigma_2, c\sigma_1 + d\sigma_2)$, где числа четные. Такие преобразования остаются $(--)$ без изменения, но не очевидно не меняет *интеграла по мировым* условием $(--)$. Здесь может появиться из основных результатов следуют в том, что на однопетлевом уровне аномалия отсутствует. Этот результат высоких порядках, но необходим и в настоящей монографии не приводится.

Проведенные рассуждения являются обобщений. При доказательстве известно что теория должна содержать и сектора NS и R), а также использовать группы на вклад сектора R для проекции в секторе NS. Это предположительно поскольку модулярные преобразования для доказательства необходимы секторов R и NS.

Ясно, что нельзя построить теория держащую состояния только из сектора NS возникают как полюсы из сектора R), поэтому невозможно ли построить последовательную теорию, основанную только на секторе

предположение нет необходимости, и если мы ослабим его, то возможны другие способы достижения модулярной инвариантности. Самым очевидным модулярно-инвариантным способом согласовать граничные условия для правых и левых мод является предположение, что левые и правые моды должны подчиняться одинаковым граничным условиям. Таким образом, совокупность четырех граничных условий $(++; ++)$, $(+-; +-)$, $(-+; -+)$ и $(--; --)$ является модулярно-инвариантной. Любое действие модулярного преобразования на левые моды сопровождается таким же действием на правые моды и поэтому перемешивает эти четыре граничных условия.

Описанный способ построения приводит к теории, которая не является суперсимметричной. На самом деле соответствующая теория вообще не содержит фермионов, поскольку левые моды R (или NS) взаимодействуют с правыми модами R (или NS), в каждом случае образуя бозоны. Из-за отсутствия фермионов (а также присутствия тахиона — он не удален из спектра с помощью GSO-проекции!) описанная модель, возможно, имеет небольшое практическое значение. Ей присущи недостатки модели Венециано, но, возможно, она в той же степени последовательна. Значение этой модели состоит в том, что она показывает существование двух способов обхода потенциальных трудностей, связанных с безмассовой частицей со спином $3/2$ в модели RNS: можно либо изменить теорию, сделав ее суперсимметричной, либо устранить безмассовую частицу со спином $3/2$.

Существует ряд других унитарных теорий, которые можно построить примерно таким же способом. В любом случае GSO-проекция заменяется на проекцию, устраняющую безмассовую частицу со спином $3/2$ вместо установления пространственно-временной суперсимметрии. Большинство таких теорий содержит тахионы, но одна модель с калибровочной группой $SO(16) \times SO(16)$ их не содержит. Мы не будем формулировать эту теорию в контексте настоящего обсуждения, а вместо этого опишем ее другим способом в одном из следующих разделов.

9.4.2. Петлевые вычисления

Вычисление суперсимметричных петлевых диаграмм в формулировке RNS требует сложения вкладов от всех возможных граничных условий для фермионов или «спиновых структур». В операторном подходе это достигается добавлением диаграмм с фермионной петлей, построенных из фермионных операторов, соответствующих модам с целым спином (сектор R), и диаграмм с бозонной петлей, построенных из фермионных операторов, соответствующих модам с полуцелыми спинами (сектор

NS). Кроме того, в каждом случае необходимо учесть вспомогательные проекторы $(-1)^F$ (условия GSO), обеспечивающие пространственно-временную суперсимметрию. Конечно, в ковариантном подходе важно учесть духи и антидухи, связанные с фермионными и бозонными модами.

Ковариантные вершины испускания бозонов не содержат духовых мод, которые входят только через пропагаторы. Как и в теории бозонных струн, весь вклад духовых координат сводится к тому, что они сокращают две степени функций распределения, возникающих от бозонных и фермионных мод. При наличии внешних фермионов ситуация сильно усложняется, поскольку вершины испускания фермионов содержат духовые моды нетривиальным образом (см. разд. 7.3.5). Вычисление многих основных диаграмм значительно проще проводится в калибровке светового конуса.

Различные виды петлевых диаграмм с внешними безмассовыми векторными частицами строятся с помощью следующих вершин испускания:

$$V_R(k, \xi) = \xi \cdot \psi e^{ik \cdot X} \quad (9.4.4)$$

для фермионной струны и

$$V_{NS}(k, \xi) = (\xi \cdot \dot{X} + k \cdot \psi \xi \cdot \psi) e^{ik \cdot X} \quad (9.4.5)$$

для бозонной струны. Использование проекционных GSO-операторов $1/2(1+G)$ в петлях открытых струн с циркулирующими бозонами и операторов $1/2(1+\bar{G})$ в петлях с циркулирующими фермионами дает четыре вклада в каждую из топологически различных амплитуд для открытых струн (G и \bar{G} определены в разд. 4.3.3). Поскольку гетеротическая струна суперсимметрична только по своим правым координатам, в этом случае подсчет числа вкладов проводится таким же способом. (Если внутренняя симметрия вводится в теорию посредством левых фермионных мод, то аналог проекционного GSO-оператора включает также различные граничные условия для этого сектора.) Аналогичный подсчет справедлив для теорий типа II в отдельности для левых и правых мод и приводит к 16 вкладам в однопетлевую диаграмму общего вида.

Амплитуды состоят из слагаемых, нарушающих или сохраняющих четность. Нарушающие четность вклады возникают при нечетном числе \bar{G} в фермионных петлях. Из-за следа по дираковским нулевым модам нарушающие четность петли должны содержать по крайней мере десять матриц γ^μ , чтобы получился ненулевой результат, так как в противном случае наличие матрицы γ_{11} приводит к нулевому ответу. При этом возникает

десятимерный тензор ε , индексы которого свертываются с линейно независимыми импульсами и векторами поляризации, связанными с испущенными частицами. Это означает, что необходимо присутствие по крайней мере шести внешних векторных частиц (поскольку наличие пяти частиц дало бы лишь четыре независимых импульса и пять векторов поляризации). Именно эта нарушающая четность часть гексагональной диаграммы может приводить к аномалиям. Этот вопрос обсуждается в следующей главе.

Обращение в нуль космологической постоянной для открытых суперструн (петля с $M=0$) было доказано выше, исходя из тождества для суперсимметричного следа (след по S_0). В формализме RNS этот результат возникает при сокращении трех ненулевых вкладов. Аналогичные причины приводят к обращению в нуль космологической постоянной в гетеротических теориях и теориях типа II. Теперь можно видеть, что это сокращение происходит благодаря тождеству Якоби (разд. 4.3.3), которое раньше использовалось для проверки наличия одинакового числа бозонных и фермионных состояний в спектре теории на каждом уровне. Складывая различные вклады аналогичным образом, можно доказать исчезновение двух- и трехчастичных амплитуд рассеяния.

9.5. Орбифолды и струны с твистами

В настоящем разделе мы опишем обобщение проекции GSO, которое имеет много интересных приложений. Его можно использовать для получения точно решаемой модели струнной компактификации, которая почти так же проста, как компактификация на плоский тор, описанная в разд. 9.2.2. Это обобщение можно также использовать для построения новой очень интересной десятимерной струнной теории без тахионов, в которой пространственно-временная суперсимметрия отсутствует или, возможно, присутствует на более глубоком уровне, но спонтанно нарушена.

9.5.1. Обобщение GSO-проекции

Рассмотрим теорию замкнутых струн с дискретной группой симметрии F . Например, если компактификация проводится на плоский тор, как в разд. 9.2.2, то F может просто представлять собой дискретную группу симметрии тора; именно этот пример мы рассмотрим в следующем разделе.

По мировой поверхности струны распространяются различные поля, такие как бозонные поля $X^\mu(\sigma_1, \sigma_2)$ и, возможно, фер-

мионные поля. Обозначим произвольное поле, распространяющееся по мировой поверхности, через $\phi(\sigma_1, \sigma_2)$. Рассмотрим однопетлевую интеграл по мировым поверхностям в виде тора, который можно считать определенным на плоскости (σ_1, σ_2) с отношением эквивалентности $\sigma_1 \approx \sigma_1 + 1$ и $\sigma_2 \approx \sigma_2 + 1$. Какие граничные условия необходимо наложить на $\phi(\sigma_1, \sigma_2)$? Очевидный выбор имеет вид

$$\phi(\sigma_1 + 1, \sigma_2) = \phi(\sigma_1, \sigma_2 + 1) = \phi(\sigma_1, \sigma_2). \quad (9.5.1)$$

Поскольку мы предполагаем существование дискретной группы симметрии F , можно рассмотреть обобщение условий (9.5.1). Мы можем выбрать два произвольных элемента g и h из F и потребовать выполнения равенств

$$\phi(\sigma_1 + 1, \sigma_2) = g\phi(\sigma_1, \sigma_2), \quad \phi(\sigma_1, \sigma_2 + 1) = h\phi(\sigma_1, \sigma_2). \quad (9.5.2)$$

В самом деле, из (9.5.2) следует

$$\begin{aligned} gh\phi(\sigma_1, \sigma_2) &= g\phi(\sigma_1, \sigma_2 + 1) = \phi(\sigma_1 + 1, \sigma_2 + 1) = \\ &= h\phi(\sigma_1 + 1, \sigma_2) = hg\phi(\sigma_1, \sigma_2). \end{aligned} \quad (9.5.3)$$

Равенство первого и последнего выражений в (9.5.3) представляет собой ниоткуда не вытекающее требование, которое скорее всего приводит к противоречию, если не выполняется равенство

$$gh = hg. \quad (9.5.4)$$

Предположим, что граничные условия выбраны таким образом, что пары групповых элементов (g, h) удовлетворяют этому условию.

Если мы решаем рассматривать граничные условия (g, h) , то какие еще вклады должны быть включены для получения модулярно-инвариантной теории? Как преобразуются g и h при преобразовании $(\sigma_1, \sigma_2) \rightarrow (\sigma'_1, \sigma'_2) = (a\sigma_1 + b\sigma_2, c\sigma_1 + d\sigma_2)$? Сдвиг $(\sigma'_1, \sigma'_2) \rightarrow (\sigma'_1 + 1, \sigma'_2)$ эквивалентен преобразованию $(\sigma_1, \sigma_2) \rightarrow (\sigma_1 + d, \sigma_2 - c)$, поэтому из (9.5.2) следует, что при этом преобразовании поле ϕ преобразуется в $g^d h^{-c} \phi$. Аналогично при преобразовании $(\sigma'_1, \sigma'_2) \rightarrow (\sigma'_1, \sigma'_2 + 1)$ поле ϕ преобразуется в $g^{-b} h^a \phi$. В целом при интересующем нас модулярном преобразовании пара (g, h) переходит в

$$(g', h') = (g^d h^{-c}, g^{-b} h^a). \quad (9.5.5)$$

В частности, g' и h' коммутируют, если коммутируют g и h , поэтому достаточно ограничиться рассмотрением коммутирующих пар (g, h) .

Конечно, если ограничиться случаем $g = h = 1$, то получится теория, с которой мы начали. Однако, если мы хотим обобщить первоначальную теорию, необходимо включить вклады с $g, h \neq 1$. Просто добавить к первоначальной теории произвольно выбранный вклад (g, h) нельзя, так как это нарушило бы модулярную инвариантность. Если мы хотим добавить какие-либо новые вклады в исходный интеграл по мировым поверхностям ($g = h = 1$), то мы должны добавить модулярно-инвариантную комбинацию. Общая теория допустимых модулярно-инвариантных комбинаций довольно сложна, в особенности, если рассматриваются ограничения, возникающие на уровне двух петель, но существует один простой и очевидный выбор. Можно суммировать по всем граничным условиям (g, h) , удовлетворяющим одному ограничению $gh = hg$. Правило суммирования по всем коммутирующим парам (g, h) , очевидно, модулярно-инвариантно, поскольку было показано, что модулярные преобразования переводят такие пары друг в друга. Мы остановимся на этом выборе, который представляет собой одно из обобщений GSO-проекции. Для достаточно сложных F существуют более тонкие выборы, но в тех случаях, которые рассмотрены ниже, суммирование по всем коммутирующим парам (g, h) является единственной возможностью.

Как и при обсуждении GSO-проекции, выбор граничных условий модулярно-инвариантным образом не гарантирует, что результирующие амплитуды будут модулярно-инвариантными. Это связано с возможностью существования квантовых аномалий, которые приводят к тому, что квантовомеханические интегралы по мировым поверхностям в виде тора не обладают полной модулярной инвариантностью, которая формально должна была бы следовать из граничных условий. Такие аномалии не возникают (в десяти измерениях) при наличии GSO-проекции, но в более общих ситуациях, которые будут рассмотрены ниже, модулярные аномалии могут появиться, и их устранение накладывает важное ограничение.

9.5.2. Струны на орбифолдах

В разд. 9.2.2 обсуждалось распространение струн на многообразии $M^4 \times T^6$, где M^4 — четырехмерное пространство Минковского, а T^6 — шестимерный тор. Такая компактификация с математической точки зрения достаточно проста для анализа, но далека от реальности. При этом остается ненарушенной $N = 4$ - или $N = 8$ -суперсимметрии в четырех измерениях (в зависимости от выбора исходной суперсимметричной теории), что является плохим базисом для построения реалистической четы-

рехмерной теории. Простая тороидальная компактификация приводит также к нереалистичным калибровочным группам и представлениям для полей материи в четырех измерениях. Мы рассмотрим компактификацию более общего вида, которая математически почти так же проста, но гораздо более реалистична.

Чтобы не вдаваться в абстрактные построения, рассмотрим конкретный пример. Сначала рассмотрим специальный тор T_0 (рис. 9.2), получаемый следующим отождествлением точек в комплексной плоскости z :

$$z \approx z + 1 \approx z + e^{2i\pi/3}. \quad (9.5.6)$$

«Фундаментальная область» в комплексной z -плоскости состоит из двух треугольников, изображенных на рис. 9.2. Спе-

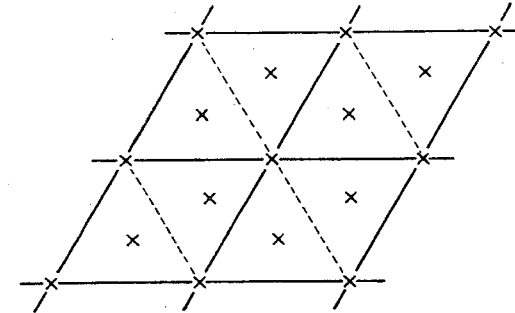


Рис. 9.2. Триангуляционная решетка в комплексной плоскости z , которая используется при построении тора с Z_3 -симметрией. При этом «фундаментальная область» тора состоит из двух треугольников и содержит три точки, неподвижные относительно действия группы Z_3 .

цифичной чертой этого тора является наличие группы симметрии Z_3 , которая генерируется преобразованием

$$\alpha_0 : z \rightarrow e^{2i\pi/3} z. \quad (9.5.7)$$

На торе существуют точки, остающиеся инвариантными при этом преобразовании. Это точки

$$z = \frac{k}{\sqrt{3}} e^{i\pi/6} \quad (9.5.8)$$

при $k = 0, 1, 2$. (В комплексной плоскости только точка $z = 0$ инвариантна относительно преобразования (9.5.7), а другие точки (9.5.8) при этом сдвигаются на векторы решетки, т. е. на векторы, кратные 1 или $\exp\{2i\pi/3\}$. Мы рассмотрим только точки при $k = 0, 1, 2$, поскольку точки с другими значениями k связаны с ними преобразованием (9.5.6).)

Рассмотрим три комплексные переменные z_i , $i = 1, 2, 3$. При отождествлении $z_i \approx z_i + 1 \approx z_i + \exp\{2i\pi/3\}$ получаются три тора T_i , $i = 1, 2, 3$, изоморфные рассмотренному ранее. Произведение $T = T_1 \times T_2 \times T_3$ является тором, действительная размерность которого равна шести (комплексная размерность равна трем), и мы хотим рассмотреть распространение струны в пространстве $M^4 \times T$, или, точнее, в определенной модификации этого многообразия.

Тор T допускает Z_3 -симметрию

$$\alpha: z_i \rightarrow e^{2i\pi/3} z_i, \quad i = 1, 2, 3. \quad (9.5.9)$$

Эта симметрия имеет $3^3 = 27$ неподвижных точек (точек, инвариантных относительно действия группы слева), для которых z_i принимает одно из значений (9.5.8). Обозначим группу Z_3 -генерируемую преобразованиями α , буквой F .

Расширим (9.5.6) добавочным отношением эквивалентности, которое состоит в отождествлении двух точек на T , связанных действием F . Обозначая координаты точки на T через $\{z_i\}$, наложим следующее отношение эквивалентности:

$$\{z_i\} \approx \{e^{2i\pi/3} z_i\}. \quad (9.5.10)$$

Пусть Z обозначает пространство T/F классов эквивалентности точек T по этому отношению эквивалентности; Z не является многообразием, так как отношение эквивалентности (9.5.10) вводит конические сингулярности в 27 неподвижных точках преобразования α (этот вопрос рассмотрен более подробно в разд. 16.3). Из-за конических сингулярностей Z называют «орбифолдом», а не многообразием. Хотя Z не является многообразием, распространение струны в $M^4 \times Z$, которое мы сейчас рассмотрим; по-видимому, хорошо определено.

Рассмотрим сначала распространение точечной частицы на Z (или на $M^4 \times Z$, но в действительности сейчас мы хотим рассмотреть именно Z). На T точечная частица описывалась бы волновой функцией $\psi(z_i)$, принадлежащей гильбертову пространству K_0 . Сужение на $Z = T/F$ означает, что мы налагаем на волновую функцию $\psi(z_i)$ условие

$$\psi(e^{2i\pi/3} z_i) = \psi(z_i). \quad (9.5.11)$$

Гильбертово пространство K состояний точечной частицы, распространяющейся в Z , является подпространством волновых функций K_0 , которое состоит из функций, подчиняющихся условию (9.5.11), или, другими словами, пространством состояний, инвариантных относительно α . Проекционный оператор на состояния, инвариантные относительно α , имеет вид

$$P = (1 + \alpha + \alpha^2)/3. \quad (9.5.12)$$

Он проектирует большое гильбертово пространство K_0 на подпространство состояний K частиц, распространяющихся в $Z = T/F$. Если H представляет собой гамильтониан точечной частицы, то статистическая сумма в T имеет вид $\text{Tr} \exp\{-\beta H\}$, а в $Z = T/F$ она имеет вид $\text{Tr} \exp\{-\beta H\} P$.

Следуя этому методу рассуждений в теории струн, первым шагом в обсуждении распространения струны в Z (или на самом деле в $M^4 \times Z$) должно быть изучение распространения струны в T (соответствующее гильбертово пространство обсуждалось в разд. 9.2.2), а затем проектирование на F -инвариантное подпространство. Рассмотрим однопетлевую диаграмму, мировая поверхность которой, как и в предыдущем разделе, является параллелограммом в плоскости (σ, τ) с отождествленными противоположными сторонами. Если струны распространяются в T , то функциональное интегрирование проводится по параллелограмму с периодическими граничными условиями. Если вместо этого струны распространяются в $Z = T/F$, то, как и для точечной частицы, мы должны спроектировать струнные волновые функции на F -инвариантные состояния. Как и в случае GSO-проекции, проекцию на состояния, инвариантные относительно F , можно произвести путем суммирования по граничным условиям в направлении τ , или, другими словами, путем учета граничных условий $(1, 1)$, $(1, \alpha)$ и $(1, \alpha^2)$ и обозначениях предыдущего раздела.

В случае точечных частиц описание заканчивается введением такой проекции, но в случае струн необходимо идти дальше, так как сумма по граничным условиям $(1, 1)$, $(1, \alpha)$ и $(1, \alpha^2)$ не является модулярно-инвариантной. На самом деле из (9.5.5) следует, что если задействованы три комбинации $(1, 1)$, $(1, \alpha)$ и $(1, \alpha^2)$ с равными весами, то необходимо, задействовать все девять комбинаций (α^k, α^m) , $k, m = 0, 1, 2$ также с равными весами. Необходимость включения новых вкладов в чем-то аналогична тому, что модулярная инвариантность предписывает добавление R -сектора к NS -сектору, как показано в разд. 9.4.1.

Существует альтернативное объяснение необходимости включения новых секторов. Рассмотрим замкнутую струну в $M^4 \times Z$; при этом M^4 будем описывать стандартными координатами Минковского x^μ , $\mu = 0, \dots, 3$, а Z — комплексными координатами z_i , $i = 1, 2, 3$, введенными выше. Обычные граничные условия для замкнутой струны имеют вид

$$(x^\mu(\sigma + \pi), z_i(\sigma + \pi)) = (x^\mu(\sigma), z_i(\sigma)). \quad (9.5.13)$$

Но на Z точки $\{z_i\}$ и $\{e^{2i\pi/3} z_i\}$ эквивалентны, поэтому вместо (9.5.13) мы можем рассмотреть замкнутые струны,

подчиняющиеся граничным условиям

$$(x^\mu(\sigma + \pi), z_i(\sigma + \pi)) = (x^\mu(\sigma), e^{2i\pi/3} z_i(\sigma)). \quad (9.5.14)$$

Это соответствует граничным условиям, включающим оператор твиста α в направлении σ . Этот «твистованный сектор» необходимо спроектировать на состояния, инвариантные относительно $F = Z_3$, что снова производится путем суммирования по граничным условиям $1, \alpha, \alpha^2$ в направлении τ . Для тора в плоскости (σ, τ) вклад твистованного сектора состоит из членов с граничными условиями $(\alpha, 1), (\alpha, \alpha)$ и (α, α^2) . Вдобавок множитель $\exp\{2i\pi/3\}$ в (9.5.14) можно заменить на $\exp\{4i\pi/3\}$, что соответствует струнам с оператором твиста α^2 в направлении σ . Проектируя этот сектор на F -инвариантные состояния, получаем, что необходимые добавки к интегралу по мировым поверхностям соответствуют включению членов с граничными условиями $(\alpha^2, 1), (\alpha^2, \alpha)$ и (α^2, α^2) . В целом состояния без твистов и два типа твистованных секторов, спроектированные на F -инвариантные подпространства, учитываются путем суммирования по всем девяти возможным граничным условиям на торе.

Существует множество причин, по которым распространение струны в $M^4 \times Z$ представляется гораздо более реалистичной моделью компактификации, чем распространение струны в $M^4 \times T$. Прежде всего компактификация на $M^4 \times Z$ спонтанно нарушает часть преобразований суперсимметрии. После компактификации на $M^4 \times Z$ остаются ненарушенными только те исходные преобразования десятимерной суперсимметрии, которые инвариантны относительно F , такие как ненарушенные четырехмерные суперсимметрии. Если начать с $N = 1$ -суперсимметрии в десяти измерениях, то компактификация на $M^4 \times T$ приводит к $N = 4$ -суперсимметрии в четырех измерениях. Из этих четырех суперсимметрий только одна инвариантна относительно F , поэтому компактификация на $M^4 \times Z$ нарушает потенциальную $N = 4$ -суперсимметрию до $N = 1$, что гораздо предпочтительнее с точки зрения феноменологии в четырех измерениях¹⁾.

¹⁾ Для доказательства того, что в четырех измерениях выживает только $N = 1$ -суперсимметрия, можно привести следующие аргументы. Десятимерная группа Лоренца $SO(1, 9)$ имеет подгруппу $SO(1, 3) \times SO(6)$, где $SO(1, 3)$ — четырехмерная группа Лоренца, а $SO(6) \approx SU(4)$ — подгруппа $SO(1, 9)$, коммутирующая с $SO(1, 3)$. Четыре суперсимметрии из четырехмерной $N = 4$ -суперсимметрии образуют векторное представление 4 группы $SU(4)$. При построении Z -орбифлекда конкретный оператор симметрии α выбран из подгруппы $SU(3)$ группы $SO(6)$ или $SU(4)$. Поэтому только один элемент представления 4 группы $SU(4)$ инвариантен относительно $SU(3)$, и именно этот элемент соответствует ненарушенной суперсимметрии.

Другое желательное свойство компактификации на орби-фолд вместо обычного тора состоит в том, что возникают интересные возможности нарушения калибровочной симметрии. Пусть G — десятимерная калибровочная группа. Пусть u — элемент группы G , подчиняющийся условию $u^3 = 1$, т. е. генерирующий подгруппу Z_3 в группе G . При построении орбифлекда вместо требования инвариантности состояний относительно преобразования α мы могли бы потребовать инвариантности относительно комбинации вращения и калибровочного преобразования

$$\bar{\alpha} = \alpha \cdot u. \quad (9.5.15)$$

Все сделанное выше построение можно повторить, используя преобразование $\bar{\alpha}$ и группу F , которую оно генерирует, вместо α и F . С формальной точки зрения логика построения та же, однако физика несколько отличается и даже более интересна. Таким образом, возникает механизм одновременного спонтанного нарушения суперсимметрии и калибровочных симметрий. Суперсимметрии, не коммутирующие с α , и калибровочные симметрии, не коммутирующие с u , спонтанно нарушаются.

Рассмотрим, например, теорию гетеротических струн с калибровочной группой $E_8 \times E_8$. Выберем u из первого сомножителя E_8 . Как показано в приложении 6.A, E_8 содержит максимальную подгруппу $E_8 \times SU(3)$. Центром $SU(3)$ является группа Z_3 , генератор которой обозначим буквой u . Подгруппой E_8 , которая коммутирует с u , является $E_6 \times SU(3)$. Поэтому компактификация на орбифлекд с $\bar{\alpha} = \alpha \cdot u$ нарушает E_8 до $E_6 \times SU(3)$ (оставляя вторую группу E_8 ненарушенной). Такая компактификация более предпочтительна, чем обычная тороидальная компактификация, оставляющая ненарушенной группу $E_8 \times E_8$, так как группа E_6 подходит как четырехмерная группа большого объединения, а E_8 — нет. (E_8 не имеет комплексных представлений, а векторное представление 27 группы E_6 представляет возможность разместить одно поколение кварков и лептонов относительно экономичным образом.)

Вычисление спектра струны, распространяющейся в $M^4 \times Z$, несложно, но здесь оно будет опущено. При данном выборе u существует 36 (!) киральных поколений кварков и лептонов, преобразующихся по представлению 27 группы E_6 ; 9 из них возникает из сектора без твистов, а 27 — из твистованного сектора. Очень привлекательной чертой теории является то, что

Если бы α вместо этого принадлежало подгруппе $U(3)$, а не $SU(3)$, то суперсимметрия при редукции к четырем измерениям была бы нарушена полностью. По существу эти же аргументы будут играть важную роль в тл. 15 и 16.

представление группы E_6 , желательное с феноменологической точки зрения, возникает автоматически и появляется много поколений фермионов (на самом деле слишком много), которые не нужно вводить каким-либо даже очевидным способом.

Если ограничиться компактификацией на орбифолды, которая оставляет ненарушенной $N = 1$ -суперсимметрию в четырех измерениях, то физика орбифолдов очень похожа на физику, возникающую при компактификации на многообразия с $SU(3)$ -группой голономии, которую мы детально рассмотрим в гл. 15 и 16. На самом деле, как мы увидим в разд. 16.10, такие орбифолды можно рассматривать как предельные случаи определенных многообразий с $SU(3)$ -группой голономии. Являются ли орбифолды «просто» предельными случаями или представляют собой самый интересный случай, остается пока неизвестным.

9.5.3. Струны с твистами в десяти измерениях

В проведенном обсуждении орбифолды рассматривались с точки зрения компактификации десяти измерений в четыре. Понятие орбифолда можно также использовать при построении интересных десятимерных струнных теорий, которые напоминают модели, рассмотренные выше в разд. 9.4.1, но представляют больший интерес, так как одна из моделей свободна от тахионов. Модель без тахионов представляет собой вариант гетеротической струны с калибровочной группой $E_8 \times E_8$ или $SO(32)$, содержащий твисты. Ее можно построить, исходя из любой из этих двух моделей; ниже мы рассмотрим модель с группой $E_8 \times E_8$.

При построении орбифолда сначала необходимо выбрать группу F , которая является группой симметрии уже известной струнной теории. Какие группы симметрии допустимы для десятимерной $E_8 \times E_8$ -теории? Эта модель симметрична относительно группы Лоренца $SO(1,9)$ и калибровочной группы $E_8 \times E_8$. Если мы хотим построить пуанкаре-инвариантную струнную теорию в десяти измерениях, то F должна коммутировать с группой Пуанкаре. Единственным элементом группы $SO(1,9)$, обладающим этим свойством, является поворот на угол 2π

$$x = \exp(2\pi J_{12}). \quad (9.5.16)$$

Можно попытаться построить конструкцию, похожую на орбифолд, исходя из группы $F_0 \approx Z_2$, генерируемой x . Но эта конструкция допускает обобщение. Пусть y — элемент группы $E_8 \times E_8$ со свойством $y^2 = 1$, и пусть $z = xy$. Тогда $z^2 = 1$, а элемент z генерирует группу, изоморфную Z_2 , которую мы

назовем F . Обсудим теорию, полученную из $E_8 \times E_8$ -струнной теории, с помощью твистов, генерируемых F , т. е. с помощью проектирования на F -инвариантные состояния и последующего добавления «твистованного» сектора, необходимого для получения модулярной инвариантности, как и в предыдущем разделе. Результирующая теория не является суперсимметричной (возможно, ее следует интерпретировать как теорию со спонтанно нарушенной суперсимметрией, которая выполняется на более фундаментальном уровне), поскольку десятимерные суперсимметрии нечетны относительно z .

Оказывается, что существует только один выбор элемента y , при котором конструируемая модель модулярно-инвариантна и свободна от тахионов. Как показано в приложении 6.A, алгебра Ли группы E_8 содержит алгебру $SO(16)$ в качестве максимальной подалгебры. Присоединенное представление группы E_8 разлагается на представления $120 \oplus 128$ относительно действия подгруппы $SO(16)$. Центр $SO(16)$ содержит элемент, который в фундаментальном представлении имеет вид

$$y_0 = -1. \quad (9.5.17)$$

Относительно действия y_0 представление 120 группы $SO(16)$ является четным, в то же время этот элемент можно выбрать таким образом, чтобы представление 128 было нечетным. Пусть в группе $E_8 \times E_8$ элементы $y_0^{(1)}$ и $y_0^{(2)}$ будут соответственно элементами первой и второй групп с приведенными выше свойствами. В рассматриваемой модели только один выбор y приводит к теории без тахионов; это следующий выбор:

$$y = y_0^{(1)} \times y_0^{(2)}. \quad (9.5.18)$$

Конечно, $y = 1$ для всех синглетов группы $E_8 \times E_8$.

Первый шаг в построении струнной теории с твистами состоит в проектировании $E_8 \times E_8$ -гетеротической суперструны на подпространство $z = 1$; затем для восстановления модулярной инвариантности необходимо добавить «твистованный сектор», в котором граничные условия в направлении σ содержат оператор твиста z , как и при построении орбифолдов.

Проекцию на подпространство $z = 1$ в обычном или нетвистованном секторе легко описать. При $z = xy$ и $x^2 = y^2 = 1$ равенство $z = 1$ эквивалентно равенству $x = y$. Состояния с $x = 1$ или $x = -1$ являются бозонами и фермионами соответственно, а проекция означает, что в спектре $E_8 \times E_8$ -теории необходимо удерживать бозоны при $y = 1$ и фермионы при $y = -1$. Гравитино, например, имеет следующие значения: $x = -1$, $y = +1$; поэтому оно выпадает при проектировании, что

соответствует ожидаемому результату, поскольку безмассовая частица со спином $3/2$ не может существовать в теории без суперсимметрии. Гравитону соответствуют значения $x = y = 1$, поэтому он остается — рассматриваемая теория, как и другие теории замкнутых струн, содержит гравитацию. Что является калибровочной группой твистованной теории? Среди калибровочных бозонов $E_8 \times E_8$ -теории бозоны с $y = 1$ преобразуются по представлению

$$(120, 1) \oplus (1, 120) \quad (9.5.19)$$

при действии группы $SO(16) \times SO(16)$. Это присоединенное представление группы $SO(16) \times SO(16)$, поэтому ненарушенной калибровочной группой твистованной теории является группа $SO(16) \times SO(16)$ (поскольку дополнительные безмассовые бозоны в твистованном секторе не возникают). Что касается безмассовых фермионов, то состояниями из присоединенного представления $E_8 \times E_8$, соответствующими $y = -1$, являются в точности те состояния, которые преобразуются по представлению

$$(128, 1) \oplus (1, 128), \quad (9.5.20)$$

поэтому в секторе без твистов мы получаем именно эти безмассовые фермионы.

Анализ твистованного сектора более сложен. При этом полезно выбрать определенный способ описания теории, которую мы хотим рассмотреть. Для левых мод мы используем фермионное описание группы $E_8 \times E_8$ с помощью двух групп левых фермионов λ^A и $\tilde{\lambda}^B$, $A, B = 1, \dots, 16$. Для правых мод используется явно суперсимметричный формализм калибровки светового конуса, описанный в гл. 5. Таким образом, в теории присутствует восемь правых фермионов S^a , преобразующихся по одному из двух спинорных представлений группы $SO(8)$ — по представлению 8_s , киральность которого будем считать положительной. Фермионы S^a в суперсимметричной форме теории, построенной в гл. 5, подчиняются периодическим граничным условиям

$$S^a(\sigma + \pi) = S^a(\sigma). \quad (9.5.21)$$

Энергия основного состояния правых мод (включая как X^μ , так и S^a) равна нулю. Основное состояние вырождено из-за квантования нулевых мод S^a и состоит из шестнадцати состояний, преобразующихся по представлению $8_v \oplus 8_c$ группы $SO(8)$. В частности, в противоположность S^a безмассовые фермионы имеют отрицательную киральность. Конечно, при проектировании на состояния с $z = +1$ остающиеся $SO(16) \times SO(16)$ -фермионы преобразуются по представлению (9.5.20).

Приступим к построению твистованного сектора. В этом секторе правые моды в направлении σ подчиняются граничным условиям, содержащим оператор твиста x , в то время как левые моды в направлении σ подчиняются граничным условиям, содержащим оператор твиста y . Что это означает для правых мод, относительно легко себе представить. Модами, нечетными относительно поворота на 2π с помощью оператора x , являются моды S^a , поэтому граничные условия (9.5.21) заменяются условиями

$$S^a(\sigma + \pi) = -S^a(\sigma). \quad (9.5.22)$$

Таким образом, в твистованном секторе «суперсимметричные» фермионы S^a подчинены граничным условиям, которые аналогичны граничным условиям NS-сектора в RNS-формализме. Поэтому можно заимствовать анализ из гл. 4. Основное состояние $|\Omega\rangle$ правых мод невырождено, и для него $L_0 = -1/2$. Поскольку для основного состояния левых мод, как будет показано, $\tilde{L}_0 = 0$, основное состояние правых мод устраняется после наложения условия $\tilde{L}_0 = L_0$. Что касается безмассовых состояний правых мод, то они строятся так же, как и в гл. 4, путем действия S^a -мод с энергией $+1/2$ на состояние $|\Omega\rangle$:

$$|\Omega^a\rangle = S^a_{-1/2} |\Omega\rangle. \quad (9.5.23)$$

Отметим, что состояния $|\Omega^a\rangle$ имеют ту же киральность, что и S^a , и противоположную киральность по отношению к безмассовым фермионным состояниям нетвистованного сектора. Безмассовые бозоны в твистованном секторе отсутствуют.

Теперь необходимо обсудить левые моды в твистованном секторе. Степенями свободы, нечетными относительно y , являются $SO(16) \times SO(16)$ -фермионы λ^A и $\tilde{\lambda}^B$, поэтому «твист» означает необходимость изменения граничных условий для λ^A и $\tilde{\lambda}^B$. Но при этом возникает затруднение. Фермионное построение $E_8 \times E_8$ -модели, описанное в разд. 6.3.2, уже требует суммирования по всем возможным граничным условиям в направлении σ для мод λ^A и $\tilde{\lambda}^A$; при этом имеются следующие возможности:

$$(PP), (PA), (AP) \text{ и } (AA). \quad (9.5.24)$$

Здесь, например, (PP) обозначает сектор, в котором все λ^A и $\tilde{\lambda}^A$ периодичны по σ . Поскольку мы уже суммируем по всем возможным граничным условиям в направлении σ до введения «твиста» y , на первый взгляд оператор твиста просто переставляет члены в (9.5.24) и не дает ничего нового. Для теории это было бы губительно, поскольку левый сектор без твиста содержит

безмассовый вектор $(\tilde{\alpha}_{-1}|\Omega\rangle)$, который в комбинации с правыми состояниями (9.5.23) привел бы к появлению в теории безмассового спина $3/2$ при отсутствии пространственно-временной суперсимметрии.

Прежде чем сделать этот вывод, уместно более тщательно обсудить проекцию типа GSO, используемую для получения $E_8 \times E_8$ -симметрии в фермионном подходе. В разд. 6.3.2 определены операторы $(-1)^{F_1}$ и $(-1)^{F_2}$, которые удовлетворяют следующим соотношениям:

$$\begin{aligned} (-1)^{F_1} \lambda^A &= -\lambda^A (-1)^{F_1}, & (-1)^{F_1} \tilde{\lambda}^B &= +\tilde{\lambda}^B (-1)^{F_1}, \\ (-1)^{F_2} \lambda^A &= +\lambda^A (-1)^{F_2}, & (-1)^{F_2} \tilde{\lambda}^B &= -\tilde{\lambda}^B (-1)^{F_2}. \end{aligned} \quad (9.5.25)$$

Там же показано, что приведенные свойства определяют $(-1)^{F_1}$ и $(-1)^{F_2}$ только с точностью до знака. GSO-подобная проекция на состояния со свойством $(-1)^{F_1} = (-1)^{F_2} = 1$ обеспечивает $E_8 \times E_8$ -симметрию в суперсимметричной теории с правильными знаками, рассмотренной в разд. 6.3.2. Например, для основного состояния левых мод $|\Omega\rangle$ в PP -секторе должны выполняться равенства $(-1)^{F_1} = (-1)^{F_2} = 1$. Из рассмотрения модулярной инвариантности $E_8 \times E_8$ -теории в разд. 9.3.2 нам известно, что в суперсимметричной форме теории выбор знаков, приводящий к $E_8 \times E_8$ -симметрии, также приводит к модулярной инвариантности.

Теперь можно установить, что означает «твист» с преобразованием y , который с первого взгляда просто переставляет четыре сектора (9.5.24). Ответ заключается в том, что в твистованном секторе необходимо ввести противоположную проекцию; поэтому, например, в твистованном PP -секторе для основного состояния левых мод $|\Omega\rangle$ справедливы равенства $(-1)^{F_1} = (-1)^{F_2} = -1$. При таком предположении низшие состояния с $(-1)^{F_1} = (-1)^{F_2} = +1$ имеют вид

$$|\Omega_{ab}\rangle = \lambda_{-1/2}^A \tilde{\lambda}_{-1/2}^B |\Omega\rangle. \quad (9.5.26)$$

В гл. 6 было показано, что для основного состояния левых мод $L_0 = -1$, поэтому для состояний $|\Omega_{ab}\rangle$ имеем $L_0 = 0$. Взаимодействие с правыми состояниями (9.5.23) дает безмассовые фермионы положительной киральности, которые преобразуются по представлению $(16, 16)$ относительно группы $SO(16) \times SO(16)$. Легко видеть, что при наличии противоположной проекции типа GSO из гл. 6 левые твистованные (AP) -, (PA) - и (AA) -секторы не дают каких-либо безмассовых частиц. Итак, объединение полученных результатов для твистованных и нетвистованного

секторов дает безмассовые фермионы (не считая синглетов группы $SO(16) \times SO(16)$), которые преобразуются по представлению

$$(128, 1)_- \oplus (1, 128)_- \oplus (16, 16)_+, \quad (9.5.27)$$

где индекс обозначает киральность в десяти измерениях.

Для обоснования утверждения о том, что в левом твистованном секторе необходимо произвести противоположную по сравнению с обычной GSO-проекцией, выпишем модулярно-инвариантный производящий функционал для этой теории. Он пропорционален выражению

$$\text{tr}(\exp(i\tau L_0 + i\bar{\tau} \tilde{L}_0)) \sim \frac{1}{\theta_1^4(\tau)} \left\{ \frac{\theta_2^4(\tau)}{\theta_2^8(\bar{\tau})} + \frac{\theta_4^4(\tau)}{\theta_4^8(\bar{\tau})} - \frac{\theta_3^4(\tau)}{\theta_3^8(\bar{\tau})} \right\}. \quad (9.5.28)$$

Внимательный читатель должен уметь вывести это выражение и проверить его модулярную инвариантность. Первый член в правой части (9.5.28) представляет собой вклад нетвистованного сектора, спроектированного на состояния с $z = +1$. Последние два члена соответствуют твистованному сектору. В действительности именно анализ модулярно-инвариантной формулы (9.5.28) оправдывает приведенную выше интерпретацию левого твистованного сектора.

9.5.4. Альтернативный взгляд на $SO(16) \times SO(16)$ -теорию

Теперь мы кратко опишем, как можно получить только что построенную теорию, если правые моды описываются в рамках RNS-формализма, а в то же время для описания группы $E_8 \times E_8$ (как и выше) используется фермионный формализм.

Построение суперсимметричной $E_8 \times E_8$ -теории в разд. 6.3 включает проекционные операторы $(-1)^{F_1}$ и $(-1)^{F_2}$ для каждого из четырех левых секторов AA , AP , PA и PP . В RNS-формализме имеется также GSO-проекционный оператор $(-1)^{F_R}$ для правых мод. Определение общих знаков этих операторов довольно сложно; суперсимметричная и $E_8 \times E_8$ -инвариантная форма теории включает выбор знаков, который проводится таким образом, чтобы безмассовые калибровочные и гравитационные супермультиплеты были четными.

Если описать правые моды в рамках RNS-формализма, то каким образом можно получить $SO(16) \times SO(16)$ -теорию, которая была только что построена? Ответ сводится к соответствующему изменению знаков различных операторов типа GSO. Необходимые изменения знаков меняются от сектора к сектору

и имеют вид

сектор	изменение	
(R; A, A) и (NS; P, P),	$(-1)^{F_1}$ и $(-1)^{F_2}$,	
(R; P, A) и (NS; A, P),	$(-1)^{F_R}$ и $(-1)^{F_1}$,	(9.5.29)
(R; A, P) и (NS; P, A),	$(-1)^{F_R}$ и $(-1)^{F_2}$.	

Можно показать, что такое изменение знаков является единственным, приводящим к модулярно-инвариантной теории без тахионов. Изучим возникающий при этом спектр. В R-секторе (пространственно-временные фермионы) имеем

$$\frac{1}{8} (\text{масса})^2 = N_R = \tilde{N} - a, \quad (9.5.30)$$

в то время как в NS-секторе (пространственно-временные бозоны)

$$\frac{1}{8} (\text{масса})^2 = N_{NS} - \frac{1}{2} = \tilde{N} - a. \quad (9.5.31)$$

Здесь, как и в случае $E_8 \times E_8$ -теории, $a = 1$ для AA-сектора, $a = 0$ для AP- и PA-секторов и $a = -1$ для PP-сектора. Сначала исследуем возможность существования тахионов. Поскольку N неотрицательно, для возникновения тахиона необходимо положить $a = 1$ и $\tilde{N} = 1/2$. Но это означает, что $N_{NS} = 0$ в AA-секторе. А это невозможно, так как (NS; A, A) является одним из секторов, который остался без изменения. Как и в $E_8 \times E_8$ -теории, N_{NS} в этом секторе имеет собственные значения $1/2, 3/2, \dots$. Таким образом, тахионы отсутствуют.

Теперь исследуем безмассовые состояния. Из приведенных выше правил следует, что единственными секторами, в которых могут возникнуть эти состояния, являются (R; A, A) с $N_R = 0$ и $\tilde{N} = 1$, (R; P, A) и (R; A, P) с $N_R = \tilde{N} = 0$, (NS; A, A) с $N_{NS} = 1/2$ и $\tilde{N} = 1$. При этом безмассовые бозоны возникают только в последнем секторе и имеют следующие квантовые числа:

$$(8_v; 1, 1)_R \times [(8_v; 1, 1) \oplus (1; 120, 1) \oplus (1; 1, 120)]_L. \quad (9.5.32)$$

Здесь первая цифра относится к поперечной группе $SO(8)$, а две следующие — к двум множителям $SO(16)$. Индексы R и L относятся соответственно к правым и левым модам. Произведение $8_v \times 8_v = 35_v \oplus 28 \oplus 1$ дает гравитон, антисимметричный тензор и дилатон, которые являются синглетами по калибровочной группе. Другие члены дают поля из представлений

$(8_v; 120, 1) \oplus (8_v; 1, 120)$, которые являются калибровочными полями Янга—Миллса для группы $SO(16) \times SO(16)$. Заметим, что в $E_8 \times E_8$ -теории присутствуют дополнительные безмассовые векторные частицы, возникающие в секторах (NS; P, A) и (NS; A, P), которые преобразуются по представлениям $(8_v; 128, 1) \oplus (8_v; 1, 128)$, что необходимо для укомплектования присоединенного представления группы $E_8 \times E_8$. Произведенное изменение множителей $(-1)^F$ в NS- и A-частях этих секторов запрещает возникновение в них безмассовых мод. Спектр этих секторов начинается с состояний, удовлетворяющих равенствам $N_{NS} = 1$ и $\tilde{N} = 1/2$, что соответствует уравнению $(\text{масса})^2 = 4$.

Существуют два типа безмассовых фермионов в $SO(16) \times SO(16)$ -теории. Сначала рассмотрим состояния (R; A, A) с $N_R = 0$ и $\tilde{N} = 1$. Описание левых мод с помощью фоковского пространства должно иметь вид $\psi_{-1/2}^A \bar{\psi}_{-1/2}^B |0\rangle$, чтобы выполнялись соотношения $(-1)^{F_1} = (-1)^{F_2} = -1$ и $\tilde{N} = 1$. Беря тензорное произведение с правыми спинорами из представления 8_s , получаем общие квантовые числа $(8_s; 16, 16)$. Дополнительные спиноры возникают в секторах (R; P, A) и (R; A, P) при $N = \tilde{N} = 0$. В этом случае существование оператора, обратного к $(-1)^F$, для состояний R подразумевает, что эти состояния должны быть спинорами из представления 8_c противоположной киральности. Основными P-состояниями являются 128-компонентные спиноры, а основными A-состояниями с $(-1)^F = 1$ являются синглеты. В результате получаем безмассовые спиноры в представлении $(8_c; 128, 1) \oplus (8_c; 1, 128)$. На этом описание безмассового сектора заканчивается.

Первые возбужденные состояния лежат только на «полшага» выше основного состояния — другими словами, их масса определяется уравнением $(\text{масса})^2 = 4$, что в два раза меньше квадрата массы первых возбужденных состояний двух других гетеротических теорий. Как уже отмечалось, эти состояния задаются секторами (NS; A, P) и (NS; P, A) с $N_{NS} = 1$ и $\tilde{N} = 1/2$. Состояния с $N_{NS} = 1$ имеют вид $a_{-1}^i |0\rangle$ и $b_{-1/2}^i b_{-1/2}^j |0\rangle$, что соответствует представлениям 8_v и 28 группы $SO(8)$. Вместе эти представления образуют 36-компонентный антисимметричный тензор относительно массивной малой группы $SO(9)$. Таким образом, квантовые числа в этом случае равны $(36; 128, 16) \oplus (36; 16, 128)$.

Ясно, что $SO(32)$ -, $E_8 \times E_8$ - и $SO(16) \times SO(16)$ -теории тесно связаны — их можно описать одними и теми же степенями свободы, но с различными граничными условиями. Многие физики высказали предположение, что эти три теории на самом деле могут быть различными вакуумными состояниями одной

фундаментальной теории. Очень вероятно, что это относится и к теориям типа II A и II B.

Таким образом, мы описали несколько модулярно-инвариантных десятимерных струнных теорий, в которых суперсимметрия нарушена модификацией граничных условий. (Помимо $SO(16) \times SO(16)$ -теории без тахионов и простой модулярно-инвариантной теории, но с тахионом, которая построена в конце разд. 9.4.1.) Существует много вариантов рассмотренных конструкций, которые приводят к модулярно-инвариантным десятимерным струнным теориям с тахионами. В ряде случаев тахионы заряжены относительно калибровочной группы.

Хотелось бы думать, что в теории с тахионами тахионное состояние можно интерпретировать как нестабильность, которая может привести к компактификации на стабильное состояние без тахиона. В модели Венециано, по-видимому, этого не происходит по следующей причине. Рассмотрим модель Венециано на многообразии $M^n \times K$, где K — компактное многообразие размерности $26 - n$. Рассмотрим тахион с импульсом p^μ , касательным к M^n . Его вершинный оператор $\exp\{ip \cdot X\}$ отщепляется от компактных измерений и имеет стандартный вид независимо от выбора K , приводя к одному и тому же значению массы тахиона. С другой стороны, в десятимерных модулярно-инвариантных теориях с заряженными тахионами вершинный оператор тахиона имеет совершенно другой вид и никоим образом не отщепляется от компактифицированных измерений. В этих моделях масса тахиона определенно зависит от компактификации.

9.6. Резюме

Мы описали однопетлевые квантовые поправки в теориях суперструн, используя формализм светового конуса с явной пространственно-временной суперсимметрией. Как и в бозонной теории, однопетлевые диаграммы открытых струн расходятся из-за испускания в вакуум состояния замкнутой струны с нулевым импульсом. Поскольку в теориях суперструн замкнутые струны не содержат тахионов, эту расходимость можно полностью отнести на счет безмассового дилатона. Возможное сокращение расходимостей планарной и неориентируемой диаграмм исследуется в следующей главе.

Однопетлевые амплитуды теорий типа II модулярно-инвариантны и конечны. Условие модулярной инвариантности однопетлевого подынтегрального выражения накладывает ограничения на возможные теории гетеротических струн. Суперсимметричные варианты этих теорий возможны только при самодуальных решетках $\Gamma_8 + \Gamma_8$ или Γ_{16} . Мы исследовали роль GSO-проек-

ции в модулярно-инвариантных теориях, а также некоторые альтернативы, в которых вместо получения теорий с пространственно-временной суперсимметрией устраняется безмассовая частица со спином $3/2$. Полученные результаты привели также к интересному подходу к компактификации высших измерений, а именно к «орбифолдам», а также к построению теории гетеротических струн с калибровочной группой $SO(16) \times SO(16)$. Последняя не содержит тахионов, несмотря на отсутствие суперсимметрии.

Приложение 9.A. Следы по фермионным модам

В настоящем приложении мы приведем ряд свойств, которые полезны в вычислениях, включающих следы по фермионным нулевым модам.

Операторы нулевых мод S_0^a образуют шестнадцатимерное пространство $|i\rangle$ и $|\dot{a}\rangle$, где состояния нормированы соотношениями $\langle i | j \rangle = \delta_{ij}$ и $\langle \dot{a} | \dot{b} \rangle = \delta_{ab}$. Тождественный оператор в пространстве S_0 имеет вид

$$I = |i\rangle\langle i| + |\dot{a}\rangle\langle \dot{a}|, \quad (9.A.1)$$

что приводит к следующему выражению для следа произвольного оператора A в пространстве S_0 :

$$\text{tr}_{S_0}(A) = \langle i | A | i \rangle - \langle \dot{a} | A | \dot{a} \rangle, \quad (9.A.2)$$

где знак минус возникает из-за антикоммутируемости фермионных состояний $|\dot{a}\rangle$ и $\langle \dot{a}|$.

Действие операторов S_0 на эти состояния приведено в разд. 7.4.1 в терминах матриц γ_{aa}^i , введенных в приложении 5.A:

$$S_0^a | \dot{a} \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \gamma_{aa}^i | i \rangle, \quad (9.A.3)$$

$$S_0^a | i \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \gamma_{aa}^i | \dot{a} \rangle. \quad (9.A.4)$$

В гл. 7 также показано, что существует только один независимый тензор, квадратичный по S_0 ,

$$R_0^{ij} = \frac{1}{4} \gamma_{ab}^{ij} S_0^a S_0^b, \quad (9.A.5)$$

который представляет собой оператор, меняющий спиральность состояния без изменения его числа заполнения. Действие R_0^{ij} на эти состояния легко выводится путем последовательного

применения (9.A.3) и (9.A.4), что дает

$$R_0^{ij} |k\rangle = \delta^{ik} |i\rangle - \delta^{jk} |j\rangle, \quad (9.A.6)$$

$$R_0^{ij} |\dot{a}\rangle = -\frac{1}{2} \gamma_{ab}^{ij} |\dot{b}\rangle. \quad (9.A.7)$$

Операторы R_0^{ij} удовлетворяют алгебре углового момента

$$[R_0^{ij}, R_0^{kl}] = \delta^{ik} R_0^{jl} + \delta^{il} R_0^{jk} - \delta^{jk} R_0^{il} - \delta^{jl} R_0^{ik}. \quad (9.A.8)$$

Формулы для действия произведений операторов R_0 и S_0 на бозонные состояния можно получить последовательным применением выписанных выше формул. Например, произведение двух R_0 дает

$$R_0^{ij} R_0^{kl} |m\rangle = \delta^{mk} \delta^{il} |j\rangle - \delta^{mk} \delta^{il} |i\rangle - \delta^{ml} \delta^{ik} |j\rangle + \delta^{ml} \delta^{jk} |i\rangle, \quad (9.A.9)$$

$$R_0^{ij} R_0^{kl} |\dot{a}\rangle = \frac{1}{4} (\gamma^{kl} \gamma^{ij})^{ab} |\dot{b}\rangle. \quad (9.A.10)$$

В петлевых вычислениях необходимо определять след от произведений S_0 . Очевидно, что для ненулевого результата необходимо наличие четного числа операторов S_0 . Так как любую билинейную комбинацию S_0 можно выразить через произведение операторов R_0 , достаточно рассмотреть следы от степеней таких произведений.

Начнем со следа тождественного оператора, который, как легко видеть при подстановке $A = I$ в (9.A.2), равен нулю:

$$\text{tr}_{S_0}(I) = \delta^{ii} - \delta^{\dot{a}\dot{a}} = 8 - 8 = 0. \quad (9.A.11)$$

След от R_0^{ij} равен нулю по тривиальной причине, поскольку

$$\langle k | R_0^{ij} | k \rangle = 0 = \langle \dot{a} | R_0^{ij} | \dot{a} \rangle. \quad (9.A.12)$$

Бозонный вклад в $\text{tr}_{S_0}(R_0^{ij} R_0^{kl})$ равен $2(\delta^{jk} \delta^{il} - \delta^{ik} \delta^{jl})$, что следует из (9.A.9). Этот вклад сокращается со следом по фермионному сектору, который вычисляется путем умножения (9.A.10) на $\langle \dot{a} |$:

$$\text{tr}_{S_0}(R_0^{ij} R_0^{kl}) = 0. \quad (9.A.13)$$

На самом деле рассматриваемый след равен нулю, если только не присутствуют все восемь операторов S_0^a . Другими словами, среди 2^8 операторов $1, S_0^a, S_0^a S_0^{a_2}, \dots, S_0^a S_0^{a_2} \dots S_0^{a_8}$ только последний имеет ненулевой след. Для доказательства введем операторы «рождения» и «уничтожения»

$$\begin{aligned} B_1 &= (S_0^1 + iS_0^2)/\sqrt{2}, \\ B_1^\dagger &= (S_0^1 - iS_0^2)/\sqrt{2} \end{aligned} \quad (9.A.14)$$

с антикоммутирующим соотношением $\{B_1^\dagger, B_1\} = 1$ и аналогичные операторы для трех остальных пар S_0 . Тогда в терминах собственных состояний $|0\rangle$ и $|1\rangle$ оператора числа частиц $B_1^\dagger B_1 = iS_0^1 S_0^2$ следы в секторе $S_0^1 - S_0^2$ имеют вид

$$\text{tr}(1) = \langle 0 | 0 \rangle - \langle 1 | 1 \rangle = 1 - 1 = 0,$$

$$\text{tr}(B_1^\dagger B_1) = \langle 0 | B_1^\dagger B_1 | 0 \rangle - \langle 1 | B_1^\dagger B_1 | 1 \rangle = 0 - 1 = -1. \quad (9.A.15)$$

В терминах S_0^1 и S_0^2 имеем $\text{tr}(1) = 0$ и $\text{tr}(S_0^1 S_0^2) = i$. Обобщение на случай произведения восьми операторов S_0 имеет вид

$$\text{tr}(S_0^{a_1} S_0^{a_2} \dots S_0^{a_8}) = \varepsilon^{a_1 a_2 \dots a_8}. \quad (9.A.16)$$

Первый исчезающий след возникает при наличии четырех сомножителей R_0 (т. е. восьми степеней S_0)

$$t^{ijklmnpq} = \text{tr}_{S_0}(R_0^{ij} R_0^{kl} R_0^{mn} R_0^{pq}). \quad (9.A.17)$$

Общую структуру этого тензора можно вывести из (9.A.5) и (9.A.16). Очевидно, что он должен быть антисимметричен по любой паре индексов ij, kl, mn и pq и симметричен относительно перестановки пар индексов между собой. Последнее свойство вытекает после алгебраических преобразований с использованием (9.A.8) и того факта, что след от произведения трех операторов R_0 равен нулю. Полный тензор имеет вид

$$\begin{aligned} t^{ijklmnpq} &= -\frac{1}{2} \varepsilon^{ijklmnpq} - \frac{1}{2} \{(\delta^{ik} \delta^{jl} - \delta^{il} \delta^{jk})(\delta^{mp} \delta^{nq} - \delta^{mq} \delta^{np}) + \\ &+ (\delta^{km} \delta^{ln} - \delta^{kn} \delta^{lm})(\delta^{pi} \delta^{qj} - \delta^{pj} \delta^{qi}) + \\ &+ (\delta^{im} \delta^{ln} - \delta^{in} \delta^{lm})(\delta^{kp} \delta^{lq} - \delta^{kq} \delta^{lp})\} + \\ &+ \frac{1}{2} \{ \delta^{jk} \delta^{lm} \delta^{np} \delta^{qi} + \delta^{jm} \delta^{nk} \delta^{lp} \delta^{qi} + \delta^{im} \delta^{np} \delta^{qk} \delta^{li} + \\ &+ 45 \text{ членов, полученных антисимметризацией} \\ &\text{по каждой паре индексов} \}. \end{aligned} \quad (9.A.18)$$

Тензор ε и два члена в фигурных скобках являются тремя независимыми тензорными структурами, которые симметричны относительно упомянутой выше перестановки индексов. Поэтому коэффициенты перед ними можно вычислить, рассмотрев три специальных случая.

Тензор t возникает очень естественным образом от следа по S_0 в четырехчастичных однопетлевых вычислениях, но совсем не очевидно, что этот тензор должен был появиться в гл. 7 при вычислении соответствующих древесных диаграмм. На самом деле возникает тот же тензор, а кинематический множитель K , возникающий при вычислении бозонной древесной диаграммы в разд. 7.4.2, можно записать в виде

$$K = t^{ijklmnpq} k_{1s_1}^{i\tau_1} k_{2s_2}^{k\tau_2} k_{3s_3}^{m\tau_3} k_{4s_4}^{p\tau_4}. \quad (9.A.19)$$

Такое же соответствие кинематических множителей имеет место также и в случае внешних фермионов.

Приложение 9.Б. Модулярная инвариантность функций F_2 и \mathcal{L}

В настоящем приложении мы докажем модулярную инвариантность функций F_2 и \mathcal{L} . Поскольку модулярная группа генерируется преобразованиями $\tau \rightarrow -1/\tau$ и $\tau \rightarrow \tau + 1$, причем инвариантность относительно последнего преобразования очевидна в каждом случае, достаточно изучить поведение функций F_2 и \mathcal{L} при замене переменных $\tau \rightarrow -1/\tau$.

Начнем с вывода более общей формулы. Рассмотрим функцию $\mathcal{F}(x)$ от вектора $x \equiv (x_1, x_2, \dots, x_p)$, определенную следующим соотношением:

$$\mathcal{F}(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^p} \exp[-\pi(n+x) \cdot A \cdot (n+x)], \quad (9.B.1)$$

где A — положительно определенная матрица $p \times p$. При суммировании компоненты вектора n пробегает все целые значения. Функция $\mathcal{F}(x)$ периодична с целым периодом по каждой компоненте $\mathcal{F}(x) = \mathcal{F}(x + e_i)$, где e_i — вектор, i -я компонента которого равна единице, а все остальные равны нулю. Поэтому $\mathcal{F}(x)$ можно разложить в ряд Фурье:

$$\mathcal{F}(x) = \sum_{m \in \mathbb{Z}^p} e^{2i\pi m \cdot x} \mathcal{G}(m), \quad (9.B.2)$$

где обратное преобразование имеет вид

$$\mathcal{G}(m) = \int_0^1 d^p x e^{-2i\pi m \cdot x} \mathcal{F}(x). \quad (9.B.3)$$

Подстановка определения \mathcal{F} в правую часть этого уравнения дает

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(m) &= \sum_{n \in \mathbb{Z}^p} \int_0^1 d^p x \exp[-\pi(n+x) \cdot A \cdot (n+x) - 2i\pi m \cdot x] = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} d^p x \exp[-\pi x \cdot A \cdot x - 2i\pi m \cdot x] = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} d^p x \exp[-\pi(x + im \cdot A^{-1}) \cdot A \cdot (x + im \cdot A^{-1}) - \pi m \cdot A^{-1} \cdot m] = \\ &= (\det A)^{-1/2} \exp[-\pi m \cdot A^{-1} \cdot m], \quad (9.B.4) \end{aligned}$$

где сумма по целым компонентам n вычислена путем расширения области интегрирования по x на все пространство \mathbb{R}^p и взятия гауссова интеграла. Подстановка полученного выражения обратно в (9.B.2) дает основное искомое тождество

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(x) &= \sum_{n \in \mathbb{Z}^p} \exp[-\pi(n+x) \cdot A \cdot (n+x)] = \\ &= (\det A)^{-1/2} \sum_{m \in \mathbb{Z}^p} \exp[-\pi m \cdot A^{-1} \cdot m + 2i\pi m \cdot x]. \quad (9.B.5) \end{aligned}$$

В качестве первого применения этого преобразования рассмотрим функцию, возникающую при тороидальной компактификации теорий типа II

$$F_2(a, \tau) = a (\text{Im } \tau)^{1/2} \sum_{n_1 n_2} \exp[-2\pi i n_1 n_2 \text{Re } \tau - \pi(a^2 n_1^2 + n_2^2/a_2) \text{Im } \tau]. \quad (9.B.6)$$

Это частный случай (9.B.1) с $p = 2$ и $x = 0$. Матрица A имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} a^2 \text{Im } \tau & i \text{Re } \tau \\ i \text{Re } \tau & a^{-2} \text{Im } \tau \end{pmatrix} \quad (9.B.7)$$

и удовлетворяет тождествам

$$\det A = |\tau|^2, \quad A^{-1}(\tau) = A(-1/\tau). \quad (9.B.8)$$

Последнее следует из равенств

$$\text{Im}(1/\tau) = -\text{Im}(\tau/|\tau|^2), \quad (9.B.9)$$

$$\text{Re}(1/\tau) = \text{Re}(\tau/|\tau|^2). \quad (9.B.10)$$

Подстановка в (9.Б.5) приводит к соотношению

$$F_2(a, \tau) = a (\text{Im } \tau)^{1/2} \sum_n \exp(-\pi n \cdot A \cdot n) = \\ = a \left(\frac{\text{Im } \tau}{|\tau|^2} \right)^{1/2} \sum_m \exp(-\pi m \cdot A^{-1} \cdot m). \quad (9.Б.11)$$

Отсюда следует равенство $F_2(a, \tau) = F_2(a, -1/\tau)$, которое и требовалось доказать.

Рассмотрим теперь функцию $\mathcal{L}(\bar{\nu}, \bar{\tau}, \zeta)$, определенную выражениями

$$\mathcal{L} = \sum_{P \in \Lambda} e^{-i\pi \bar{\tau} (P+S)^2}, \quad (9.Б.12)$$

$$S^I = \sum_{r=1}^4 \left(\frac{\ln \bar{\rho}_r}{\ln \bar{\omega}} K_r^I + \frac{\bar{\xi}_r^I}{\ln \bar{\omega}} \right) = \sum_{r=1}^4 \left(\frac{\bar{\nu}_r}{\bar{\tau}} K_r^I + \frac{i \bar{\xi}_r^I}{2\pi \bar{\tau}} \right). \quad (9.Б.13)$$

В этом случае формула (9.Б.5) применяется при $p=16$, $A_{ij} = i\bar{\tau} g_{ij}$, где $g_{ij} = \sum_{l=1}^{16} e_l^i e_l^j$ — метрика на решетке Λ , и $x_i = \sum_{l=1}^{16} S^l e_l^i$. Подстановка в общую формулу дает

$$\mathcal{L} = \sum_{P \in \Lambda} e^{-i\pi \bar{\tau} (P+S)^2} = \frac{(\bar{\tau})^{-8}}{\sqrt{\det g}} \sum_{M \in \Lambda^*} e^{i\pi (M+\bar{\tau}S)^2/\bar{\tau} - i\pi \bar{\tau} S^2}. \quad (9.Б.14)$$

Это преобразование имеет простой вид только в случае самодуальных решеток, для которых $\sqrt{\det g} = 1$ и $\Lambda^* = \Lambda$.

Отметим, что в частном случае, когда $K_r = 0$ и $\xi_r^I = 0$ для внешних частиц, \mathcal{L} является просто Θ -функцией на решетке (которая описана в разд. 6.4.7). Если $\det g = 1$, то формула преобразования принимает вид

$$\sum_{P \in \Lambda} q^{P^2} = \left(-\frac{\pi i}{\ln q} \right)^8 \sum_{P \in \Lambda} e^{\pi^2 P^2 / \ln q}, \quad (9.Б.15)$$

где $q = \exp\{-i\pi \bar{\tau}\}$.

10. Калибровочная аномалия в теории суперструн типа I

Суперсимметричный янг-миллсовский мультиплет в десяти измерениях нарушает четность, так как безмассовые фермионы принадлежат спинорному представлению группы $SO(1, 9)$, имеющему только одну из двух возможных киральностей. В контексте теории струн это означает, что калибровочные взаимодействия безмассовых фермионных состояний открытой суперструны нарушают четность. С формальной точки зрения нарушение четности происходит потому, что необходимо выбрать одну из двух возможных GSO-проекции в секторе Рамона. Поскольку открытые суперструны играют важную роль при построении теорий замкнутых струн, большинство теорий замкнутых струн также нарушает четность. В теориях типа I или IIB использование одной или другой GSO-проекции приводит к нарушению четности в случае замкнутых струн точно так же, как для открытых струн. Нарушения четности можно избежать в теории типа IIA, так как одна GSO-проекция используется для правых мод на мировой поверхности, в то время как противоположная проекция GSO — для левых; при этом вся система инвариантна относительно одновременных отражений или преобразований четности на мировой поверхности и в пространстве-времени. Эта модель не инвариантна относительно отражений на мировой поверхности или в пространстве-времени в отдельности. Гетеротические теории нарушают четность по отношению к преобразованию пространства-времени (и по отношению к преобразованию мировой поверхности), так как нарушающий четность правый мультиплет взаимодействует с сохраняющим четность левым мультиплетом.

Нарушающие четность калибровочные взаимодействия играют также важную роль в четырехмерных теориях — они являются основой $SU(2) \times U(1)$ -модели электрослабых взаимодействий. Нейтрино обладает отрицательной спиральностью, и его слабый гиперзаряд $Y = -1$, в то время как его античас-

тица — антинейтрино — имеет положительную спиральность и слабый гиперзаряд $Y = +1$.

В то время как калибровочные взаимодействия легких фермионов в четырех измерениях нарушают четность, их гравитационные взаимодействия четность сохраняют. В соответствии с четырехмерной *CPT*-теоремой для каждого фермионного состояния с определенной киральностью существует античастица с той же массой, но с противоположной киральностью. Гравитационные взаимодействия фермионов зависят только от массы и спиральности, поэтому в целом гравитационные взаимодействия фермионов сохраняют четность. Но это не справедливо в десяти измерениях, поскольку десятимерное *CPT*-преобразование сохраняет киральность безмассовых фермионов. Таким образом, гравитационные взаимодействия суперсимметричного янг-миллсовского мультиплетта, так же как калибровочные взаимодействия, нарушают четность. При компактификации из десяти измерений в четыре нарушение четности в низкоэнергетических гравитационных взаимодействиях автоматически устраняется, но при подходящих условиях нарушающие четность калибровочные взаимодействия остаются, как подробно показано в гл. 14. С другой стороны, по-видимому, невозможно получить калибровочные взаимодействия в четырех измерениях, которые нарушали бы четность, исходя из многомерной теории с сохраняющими четность калибровочными взаимодействиями¹⁾. Таким образом, нарушение четности, которое почти неизбежно происходит в десяти измерениях из-за присутствия суперсимметричного янг-миллсова мультиплетта, является важным положительным моментом при попытке описать природу с помощью теории струн.

В то же время нарушающие четность калибровочные взаимодействия могут приводить к непоследовательной теории. Например, четырехмерные калибровочные теории с нарушающими четность калибровочными взаимодействиями последовательны только в том случае, если треугольная аномалия Адлера — Белла — Джакива сокращается. Самая обычная возможная аномалия представляет собой треугольную аномалию с тремя внешними калибровочными бозонами, изображенную на рис. 10.1, *a*; может возникнуть также треугольная аномалия с одним калибровочным бозоном и двумя гравитонами, хотя последняя и менее привычна. Сокращение этих аномалий яв-

¹⁾ В действительности четность может быть нарушена спонтанно в процессе компактификации, но это нарушение четности не проявляется в четырехмерных калибровочных взаимодействиях. Это будет ясно в гл. 14 из анализа фермионных квантовых чисел, возникающих в четырех измерениях после компактификации.

ляется важным элементом самосогласованности стандартной теории электрослабых взаимодействий. Аналогичный вопрос в десяти измерениях относится к шестиугольной диаграмме с внешними калибровочными бозонами и гравитонами, изображенной на рис. 10.1, *б*.

Из исследования шестиугольной диаграммы в десятимерных суперсимметричных полевых теориях сразу следует, что в супергравитации типа IIA возможная аномалия отсутствует (в теории сохраняется четность); в то же время можно показать,

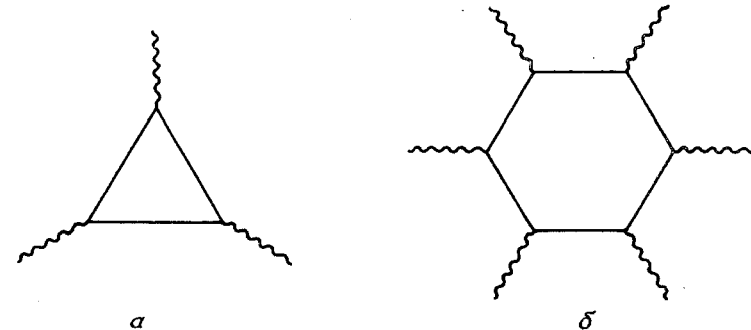


Рис. 10.1. *a* — в четырехмерных калибровочных теориях с калибровочными взаимодействиями, нарушающими четность, аномалия может возникнуть в треугольной диаграмме с внешними калибровочными бозонами. *б* — аналогичный вопрос в десяти измерениях относится к шестиугольной диаграмме с внешними калибровочными бозонами или гравитонами.

что в супергравитации типа IIB аномалии поразительным образом сокращаются при суммировании вкладов частиц с различными спинами. Изучение десятимерных теорий с $N = 1$ -супергравитацией, по-видимому, обнаруживает, что все они содержат шестиугольные аномалии, например в шестиугольную диаграмму с одними внешними калибровочными бозонами дают потенциально аномальный вклад глюино, причем их вклад не равен нулю для любой неабелевой калибровочной группы. Эти вопросы подробно исследуются в гл. 13. Здесь же после краткого обсуждения аномалий в $D = 10$ -суперсимметричной теории Янга — Миллса мы изучим соответствующие вопросы в теории струн. На самом деле мы изучим шестиугольную диаграмму с внешними калибровочными бозонами в теории суперструн типа I. При этом будет получен удивительный результат — аномалия сокращается тогда и только тогда, когда калибровочной группой является группа $SO(32)$. В гл. 13 анализ механизма, приводящего к этому результату, покажет, что сокращение аномалии можно интерпретировать на теоретико-полевом

языке как существование дополнительных аномальных диаграмм помимо той, которая изображена на рис. 10.1, б. Эта интерпретация предполагает, что другие шестиугольные аномалии также сокращаются в теории типа I с калибровочной группой $SO(32)$, хотя соответствующие вычисления не проведены. Она также указывает на возможное существование десятимерной теории суперструн без аномалий с калибровочной группой $E_8 \times E_8$; в действительности этот ключевой момент сыграл важную роль в открытии теории гетеротических суперструн, которая описана в гл. 6.

10.1. Введение в аномалии

Общее обсуждение значения и структуры аномалий в обычных полевых теориях точечных частиц откладывается до разд. 13.2. Ниже мы ограничимся краткими предварительными замечаниями, которые подготовят почву для вычислений в теории суперструн.

10.1.1. Аномалии в полевой теории точечных частиц

Аномалия представляет собой нарушение классического закона сохранения, которое возникает из-за квантовомеханических петлевых поправок. Аномалии важны в четырехмерной квантовой полевой теории по различным причинам. Их интерпретация и значение сильно зависят от того, является ли аномальная симметрия глобальной или локальной. Определенные глобальные симметрии с необходимостью должны быть нарушены по феноменологическим причинам, и эту функцию в ряде случаев могут выполнить аномалии. С другой стороны, локальные симметрии не должны быть нарушены за счет аномалий, так как приводят к неустрашимым противоречиям.

Примером глобальной симметрии, которую желательно нарушить, является классическая масштабная инвариантность КХД с безмассовыми кварками. Ее необходимо нарушить (за счет аномалий в тензоре энергии-импульса), для того чтобы адроны могли возникнуть как связанные состояния с ненулевыми массами. Другой пример желательного нарушения глобальной симметрии также предоставляется КХД с n безмассовыми кварками. На классическом уровне в этой теории присутствует $U_L(n) \times U_R(n)$ -симметрия, соответствующая независимым вращениям левых и правых компонент кварков. Эту симметрию необходимо нарушить до диагональной $SU(n)$ -подгруппы для согласования с приближенной векторной $SU(n)$ -симметрией наблюдаемых адронов.

Ситуация совсем другая, когда квантовомеханические аномалии нарушают калибровочную симметрию. Калибровочная инвариантность играет решающую роль в последовательной интерпретации квантовой теории, содержащей калибровочные поля. В частности, она ответственна за отщепление продольно поляризованных калибровочных полей. Такие продольные состояния должны отщепляться в физических процессах, если теория унитарна.

Теории, в которых калибровочные взаимодействия нарушают четность, иногда называют киральными калибровочными теориями. Киральная калибровочная теория представляет собой калибровочную теорию, в которой левые и правые фермионы под действием калибровочной группы преобразуются по-разному. Пусть R и \bar{R} обозначают представления калибровочной группы для левых и правых фермионов соответственно. В четырех измерениях античастицами левых фермионов являются правые и наоборот. Поэтому TCP -симметрия требует, чтобы в четырех измерениях представление \bar{R} было комплексно-сопряженным к R . Следовательно, в четырех измерениях киральные калибровочные теории, в которых представления R и \bar{R} различны, представляют собой теории, в которых представление R является комплексным (т. е. неэквивалентно своему комплексно-сопряженному). Поэтому калибровочные группы, не имеющие комплексных представлений (такие как $SO(32)$ и $E_8 \times E_8$), не могут привести к киральной теории.

В большем числе измерений существо дела может сильно измениться. В нечетном числе измерений не существует вейлевских фермионов, нет лево-правой асимметрии (нарушения четности) и нет аномалий. В четном числе измерений имеется важное отличие между $4k$ и $4k + 2$ измерениями. В $4k$ измерениях при $k > 1$ ситуация с точки зрения рассматриваемых вопросов аналогична ситуации в четырех измерениях.

Действительно что-то новое происходит в случае $4k + 2$ измерений, и именно этот случай представляет интерес для теории суперструн, поскольку размерность мировой поверхности равна двум, а размерность пространства-времени — десяти! В $4k + 2$ измерениях античастица левой частицы снова левая, поэтому можно построить теории, содержащие фермионы только одной киральности. Вот почему гравитационные взаимодействия в $4k + 2$ измерениях могут нарушать четность. Кроме того, фермионы с заданной киральностью в $4k + 2$ измерениях должны принадлежать действительному представлению калибровочной группы. (Если начать с комплексного представления Q , то античастицы будут принадлежать представлению \bar{Q} , а вместе они образуют действительное представление $Q \oplus \bar{Q}$.) Калибровочные

аномалии могут возникнуть тогда, когда представления калибровочной группы R и \bar{R} для левых и правых фермионов различны, поэтому калибровочные взаимодействия нарушают четность. Как мы уже отметили, в четырех измерениях представление R отличается от \bar{R} тогда и только тогда, когда оно является комплексным представлением. Как было сказано выше, представления R и \bar{R} в $4k+2$ измерениях всегда действительны, но не обязательно одинаковы, поэтому, представления R и \bar{R} различны, калибровочные взаимодействия нарушают четность и могут возникнуть калибровочные аномалии.

Существует много способов вычисления аномалий (т. е. аномальных дивергенций от токов, сохраняющихся на классическом уровне) в обычной полевой теории. Эффективное действие $\Gamma(A)$ для поля Янга—Миллса A_μ , взаимодействующего с киральным спинором ψ , определяется следующим выражением:

$$\exp [i\Gamma(A)] \sim \int D\psi D\bar{\psi} \exp \left\{ - \int dx \bar{\psi} \left(\frac{1 + \Gamma_{11}}{2} \right) \Gamma \cdot D\psi \right\}, \quad (10.1.1)$$

где D_μ — калибровочно-ковариантная производная, а $(1 + \Gamma_{11})/2$ — киральный проекционный оператор. Генератором калибровочных преобразований является оператор

$$D_\mu \frac{\delta}{\delta A_\mu}, \quad (10.1.2)$$

и соответственно величина

$$G = D_\mu \frac{\delta}{\delta A_\mu} \Gamma(A) \quad (10.1.3)$$

является мерой нарушения инвариантности эффективного действия относительно калибровочных преобразований. Действительно, вектор

$$J_\mu = \frac{\delta}{\delta A_\mu} \Gamma \quad (10.1.4)$$

является калибровочным током, индуцированным фоновым полем, и

$$G = D_\mu J^\mu. \quad (10.1.5)$$

Таким образом, нарушение калибровочной инвариантности ($G \neq 0$) есть то же самое, что и несохранение тока в фоновом поле. Аномалию можно вычислить непосредственно, исходя из функционального интеграла, если расходимости тщательным образом регуляризованы. Оказывается, что в этом подходе аномалия возникает от фазы в фермионной мере. Альтернативный способ вычисления аномалии заключается в непосредственном вычислении соответствующих диаграмм Фейнмана.

В случае калибровочных токов вопрос, важный с физической точки зрения, заключается в том, отщепляются или нет продольные компоненты соответствующих калибровочных полей. Самым прямым подходом к изучению этого вопроса является рассмотрение диаграмм с внешними частицами, соответствующими калибровочным полям на массовой оболочке. Тогда можно выбрать поляризационный вектор для одной из частиц продольным, оставив остальные поперечными и поэтому физическими, и проверить, равно ли нулю результирующее выражение для диаграммы. Если оно равно нулю для всех S -матричных элементов, то теория свободна от аномалий. Поверхностные аргументы могут легко привести к нулевому результату как следствию классической симметрии. Для того чтобы не сделать таких ошибок, связанных с неоправданными сдвигами переменных интегрирования, необходимо тщательно регуляризовать расходящиеся интегралы до вычисления аномалии. (Это аналогично вычислению аномалии в алгебре Вирасоро, где неосторожное обращение с расходящимися суммами также приводит к неправильным ответам.)

Существует много методов регуляризации расходимостей в квантовой теории поля, и все их можно использовать для вычисления аномалий. Среди них регуляризация Паули—Вилларса, метод Фудзикавы подавления фермионных мод с большим импульсом в функциональном интеграле, размерная регуляризация (суперсимметричная или нет в зависимости от того, что больше подходит), методы разделения точек и т. д. Аномалии возникают в теориях, нарушающих четность, так как в случае нарушающих четность калибровочных или гравитационных взаимодействий все перечисленные схемы регуляризации нарушают калибровочную инвариантность или общую ковариантность; при этом нарушение симметрий не всегда исключается снятием регуляризации и известно как аномалия. Результирующее выражение для аномалии, полученное любым из этих методов, с точностью до несущественных членов совпадает с тем, которое можно выделить в эффективном действии в виде локального контрчлена. Истинной аномалией является та, которую нельзя сократить добавлением таких контрчленов.

10.1.2. Калибровочная аномалия в $D = 10$ -суперсимметричной теории Янга—Миллса

Аномалии возникают только в нарушающих четность петлевых амплитудах, так как сохраняющие четность петлевые амплитуды можно регуляризовать таким образом, чтобы сохранялась калибровочная инвариантность и общая ковариантность.

Нарушающие четность амплитуды содержат тензор ε , обусловленный вершинами взаимодействия киральных частиц в петле. Вместо того, чтобы обсуждать общие свойства (к которым мы вернемся в гл. 13), мы проиллюстрируем их конкретным примером, представляющим большой самостоятельный интерес, а именно янг-миллсовской калибровочной аномалией в $D = 10$ -суперсимметричной теории Янга—Миллса. Эту теорию, описанную в приложении 4.А, особенно уместно здесь рассмотреть,

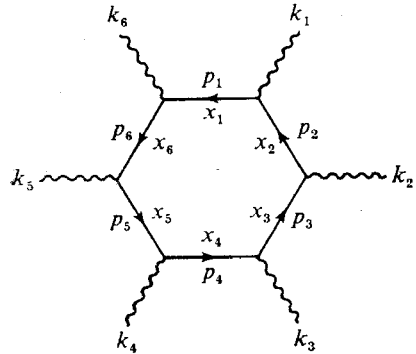


Рис. 10.2. Кинематические обозначения в шестиугольной диаграмме.

так как она является частью низкоэнергетического приближения в суперструнных теориях, которые изучаются в следующем разделе. Анализ аномалии в этом случае поможет нам развить много методов, необходимых для вычислений в теории струн. Он также покажет различия между этими теориями.

Суперсимметричная теория Янга—Миллса с $D = 10$ содержит векторные калибровочные поля в присоединенном представлении калибровочной группы и спиноры Майорана—Вейля также в присоединенном представлении. Рассмотрим однопетлевую диаграмму с M внешними калибровочными частицами на массовой оболочке и внутренними фермионными линиями, которая изображена на рис. 10.2. Формальное выражение для этой диаграммы (с точностью до численного коэффициента, который нас не интересует) имеет вид

$$A_M \sim T \int d^{10}p \operatorname{tr} \left[\frac{\Gamma \cdot p_1}{p_1^2} \Gamma \cdot \zeta_1 \frac{\Gamma \cdot p_2}{p_2^2} \dots \Gamma \cdot \zeta_M \left(\frac{1 + \Gamma_{11}}{2} \right) \right]. \quad (10.1.6)$$

Теоретико-групповой множитель равен

$$T = \operatorname{Tr} (t^{a_1} t^{a_2} \dots t^{a_M}), \quad (10.1.7)$$

где a_i — заряд i -го испущенного бозона, а t — матрицы присоединенного представления калибровочной алгебры, так как фермионы принадлежат именно этому представлению. Вектор $\zeta_i^\mu(k_i)$ описывает поляризацию i -го бозона. Поскольку требуется, чтобы бозон был физическим и находился на массовой оболочке, должны выполняться равенства

$$k_i \cdot \zeta_i = k_i \cdot k_i = 0. \quad (10.1.8)$$

Импульсы внутренних фермионных линий равны

$$p_i = p - \sum_{j=1}^{i-1} k_j. \quad (10.1.9)$$

Киральный проекционный оператор $(1 + \Gamma_{11})/2$ введен для описания киральности циркулирующих фермионов. Такие проекционные операторы содержатся в каждом пропагаторе, но их можно объединить в одном члене, как в формуле (10.1.6). Член с ε возникает от следа матриц Дирака, содержащего Γ_{11} , поэтому только этот член имеет отношение к анализу аномалии. Результат взятия следа, содержащего матрицу Γ_{11} , и выполнения интегрирования должен содержать тензор ε , свернутый с десятью импульсами и векторами поляризации. Поскольку только $M - 1$ импульсов k_i являются линейно-независимыми (так как $\sum k_i = 0$), первым случаем, содержащим достаточное число линейно-независимых k_i и ζ_i , чтобы привести к ненулевому результату, является случай $M = 6$ ¹⁾. Поэтому шестиугольная диаграмма является простейшей потенциально аномальной диаграммой, и ниже мы ограничимся этим случаем.

Часть интеграла в амплитуде A_6 , содержащая Γ_{11} , линейно расходится. (Это характерное поведение петлевых амплитуд, приводящих к аномалиям.) Поэтому ее необходимо регуляризовать. В методе Паули—Вилларса, например, производится вычитание такого же выражения, в котором безмассовые пропагаторы $\Gamma \cdot p/p^2$ заменены на массивные пропагаторы $\Gamma \cdot p + m/(p^2 + m^2)$.

Чтобы проверить наличие аномалии, будем считать, что один из векторов поляризации (скажем, под номером 6) является продольным, т. е. положим $\zeta_6^\mu = k_6^\mu$. Тогда регуляризованный интеграл можно вычислить явно, при этом полный ответ получается с учетом регуляризационного члена. Окончательное выражение для аномалии получается в пределе, когда масса в регуляризационном члене стремится к бесконечности $m \rightarrow \infty$. В результате получаем конечное выражение для аномалии

$$G \sim T \varepsilon_{\mu_1 \dots \mu_5 \nu_1 \dots \nu_5} \zeta_1^{\mu_1} \dots \zeta_5^{\mu_5} k_1^{\nu_1} \dots k_5^{\nu_5}. \quad (10.1.10)$$

(Алгебраические детали опущены, поскольку они шаг за шагом повторяют выкладки, которые будут проделаны в разд. 10.2.1 при вычислении аномалии в теории струн.)

Описанный выше результат говорит о том, что $D = 10$ -суперсимметричная теория Янга—Миллса содержит аномалию

¹⁾ Обобщение на произвольное четное число измерений имеет вид $M = 1 + D/2$.

при любом выборе калибровочной группы! Только в абелевом случае, когда теория становится свободной, множитель T может быть равен нулю. Таким образом, сама по себе суперсимметричная теория Янга—Миллса в десяти измерениях не может быть последовательной.

Теоретико-полевая аномалия пропорциональна следу (10.1.7), в котором матрицы принадлежат присоединенному представлению калибровочной группы. В общем случае он не может быть равен нулю. Кинематический множитель, на который умножается след в выражении (10.1.10), симметричен относительно перестановки пяти внешних физических состояний. Таким образом, если добавить члены с перестановками частиц, которые требует бозе-симметрия, то пять индексов будут входить в след симметричным образом. С учетом свойства цикличности следа отсюда вытекает, что в аномалию дает вклад только полностью симметризованный след. Для выделения этого члена удобно ввести определение $t = \sum_a c_a t^a$, где c_a — произвольные константы. Элемент t является произвольным элементом алгебры калибровочной группы. Поскольку след $\text{Tr}(t^6)$, полностью симметричен, он содержит всю необходимую теоретико-групповую информацию. Такие следы можно связать с аналогичными выражениями, основанными на других представлениях алгебры. Например, пусть λ^a — матрицы фундаментального представления группы $SO(n)$ и $\lambda = \sum c_a \lambda^a$. В этом случае матрица t имеет $n(n-1)/2$ строк и столбцов, которые можно перенумеровать парой антисимметризованных индексов, пробегающих значения от 1 до n . С другой стороны, матрицы λ имеют размер $n \times n$. Они связаны следующим соотношением:

$$t_{ab, cd} = \frac{1}{2} (\lambda_{ac} \delta_{bd} - \lambda_{bc} \delta_{ad} - \lambda_{ad} \delta_{bc} + \lambda_{bd} \delta_{ac}). \quad (10.1.11)$$

Используя символ Tr для обозначения следа в присоединенном представлении и символ tr для обозначения следа в фундаментальном представлении, нетрудно показать, что

$$\text{Tr} t^6 = (n - 32) \text{tr} \lambda^6 + 15 \text{tr} \lambda^4 \text{tr} \lambda^2. \quad (10.1.12)$$

Аналогично для группы $USp(n)$ имеем равенство

$$\text{Tr} t^6 = (n + 32) \text{tr} \lambda^6 + 15 \text{tr} \lambda^4 \text{tr} \lambda^2, \quad (10.1.13)$$

а для группы $U(n)$ — равенство

$$\text{Tr} t^6 = n \text{tr} \lambda^6 + 15 \text{tr} \lambda^4 \text{tr} \lambda^2. \quad (10.1.14)$$

(Эти вопросы обсуждаются подробнее в разд. 13.5.3.) Таким образом, среди всех классических простых групп только в од-

ном случае можно устранить $\text{tr} \lambda^6$, а именно в случае группы $SO(32)$. (Это можно также проделать во многих других случаях, представляющих собой произведения простых классических групп.) Необходимо, однако, подчеркнуть, что суперсимметричная теория Янга—Миллса аномальна и для этих групп, так как член $\text{tr} \lambda^4 \text{tr} \lambda^2$ остается. В следующем разделе мы покажем, что эффекты, специфичные для суперструн, приводят к сокращению таких членов для группы $SO(32)$.

10.1.3. Аномалии в теории суперструн

В разд. 7.1.5 показано, что в теории струн присутствует бесконечное число калибровочных инвариантностей, связанных с отщеплением состояний с нулевой нормой. Продольная мода безмассового векторного состояния $k \cdot \alpha_{-1} |0; k\rangle = L_{-1} |0; k\rangle$ представляет собой основной пример. Отщепление состояний с нулевой нормой является одним из свойств последовательной и унитарной теории. Существует много способов изучения аномалий в теории поля, причем с современной точки зрения не все они просто обобщаются на теорию струн. Например, в теории поля можно рассмотреть калибровочную инвариантность фермионного детерминанта во внешнем калибровочном поле, но аналогичный вопрос в теории струн в настоящее время не может быть задан, так как теория струн сформулирована на массовой оболочке. Тем не менее методы изучения аномалий в теории поля, которые обобщаются на теорию струн, существуют. В полевой теории калибровочная инвариантность обеспечивает отщепление продольной моды векторного мезона от S -матрицы, а при наличии аномалий этого отщепления не происходит. Таким образом, вопрос об аномалиях в теории струн можно свети к вопросу о том, действительно ли продольная мода безмассового векторного мезона отщепляется от S -матрицы на однопетлевом уровне. На самом деле в теории струн желательно проверить отщепление всех состояний с нулевой нормой, но этот вопрос до конца исследован только на уровне безмассовых частиц, в связи с чем мы рассмотрим только этот случай.

Оказывается, что соответствующее исследование удобнее провести в ковариантной калибровке. Полностью фиксированная калибровка, такая как калибровка светового конуса, нарушает явную лоренц-инвариантность. В такой калибровке преобразование Лоренца включает компенсирующее калибровочное преобразование, подобранное так, чтобы преобразованная теория находилась в той же калибровке, что и до преобразования. Поэтому нарушение калибровочной инвариантности за счет аномалий проявляется в нарушении лоренц-инвариантности.

Не известно ни одного простого пути изучения этого явления. Отчасти потому, что вершины в калибровке светового конуса принимают простой вид только при исчезающих «+»-компонентах импульсов и векторов поляризации, но при этом ограничения нарушающие четность амплитуды равны нулю и невозможно проверить наличие аномалий. Поэтому мы ограничимся ковариантной формулировкой теории.

Как и в теории поля, в теории струн можно дать формальное доказательство отщепления продольной моды векторного мезона от петлевой диаграммы. В теории струн такое формальное доказательство может быть основано на сокращении пропагатора, как было кратко описано в разд. 7.1.5. Однако в петлевых амплитудах сокращение пропагатора должно производиться осторожно, так как оно могло бы привести к расходимости, которая для получения конечного результата компенсирует нуль, содержащийся в сокращенном пропагаторе. Именно это и происходит при вычислении шестиугольной аномалии в теориях типа I.

Анализ калибровочной инвариантности древесных диаграмм в теориях суперструн очень похож на анализ бозонной теории, проведенный в разд. 7.1.5. Рассмотрим в качестве примера древесную диаграмму для открытой струны с фермионными конечными состояниями и с испущенными безмассовыми векторными состояниями. Правила вычисления таких диаграмм содержат фермионный пропагатор $S = 1/F_0 = F_0/L_0$ и вершину испускания $W(\zeta, k, 1) = \zeta \cdot \psi(1) \exp\{ik \cdot X(1)\}$. Если вектор поляризации r -го состояния положить равным импульсу, то вершину можно записать в виде

$$W(k_r, k_r, 1) = k_r \cdot \psi(1) V_0(k_r, 1) = i\sqrt{2} [F_0, V_0(k_r, 1)]. \quad (10.1.15)$$

Как и в бозонной теории множители F_0 в коммутаторе сокращаются с соседними пропагаторами и приводят к исчезновению амплитуды. Этот аргумент не использует оператор GSO-проекции — теория является калибровочно-инвариантной без привлечения пространственно-временной суперсимметрии.

В отсутствие GSO-проекции приведенный выше аргумент остается в силе, даже если бы фермионный пропагатор имел вид

$$\Delta^m = \frac{1}{(F_0 - im)} = \frac{F_0 + im}{L_0 + m^2} \quad (10.1.16)$$

вместо $1/F_0$. Действительно, вершинный оператор для продольного векторного мезона можно записать в виде

$$i\sqrt{2} [F_0 - im, V_0], \quad (10.1.17)$$

поэтому пропагатор все еще сокращается. Это важно, потому что, как и в теории поля, однопетлевую диаграмму удобно регуляризовать с помощью вычитания фермионной петли с $m \neq 0$. Описанная калибровочно-инвариантная регуляризация¹⁾ показывает отсутствие однопетлевой калибровочной аномалии при отсутствии GSO-проекции. Это неудивительно, поскольку без GSO-проекции в теории сохраняется четность. Однако все меняется, если ввести проекцию GSO. В этом случае вершины содержат множители $(1 + \bar{\Gamma})$, и вершину для продольного векторного мезона нельзя больше записать в виде коммутатора с $F_0 - im$, так как im коммутирует с $(1 + \bar{\Gamma})$, а F_0 преобразует $(1 + \bar{\Gamma})$ в $(1 - \bar{\Gamma})$. Как и в полевой теории, наличие множителей $\bar{\Gamma}$ делает регуляризацию невозможной, и возникает возможность появления аномалии.

10.2. Анализ шестиугольных диаграмм

Шестиугольные диаграммы, отвечающие за чистую калибровочную аномалию в теориях суперструн типа I, содержат фермионные петли и шесть внешних янг-милловских частиц. Поскольку эти частицы являются состояниями открытой струны, диаграммы делятся на три класса: планарные, неориентируемые и непланарные, которые описаны в гл. 8 и 9. С каждой диаграммой связан свой теоретико-групповой множитель Чана — Патона, который вводится по правилам, описанным в разд. 6.1. Этот множитель строится из следов λ -матриц, принадлежащих фундаментальному представлению калибровочных алгебр $SO(n)$, $USp(n)$ и $U(n)$. Для планарных диаграмм он имеет вид

$$G_P = n \text{tr} (\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_6), \quad (10.2.1)$$

где циклическая последовательность матриц внутри следа соответствует циклической последовательности, в которой испущенные частицы присоединены к границе диаграммы. Как объяснялось в предыдущих главах, множитель Чана — Патона стоит перед динамическим выражением (которое описано ниже), имеющим ту же циклическую симметрию. Для описания полной планарной однопетлевой амплитуды необходимо добавить выражения, описывающие остальные 59 циклически неэквивалентных перестановок частиц. Множитель n возникает от следа

¹⁾ Эта регуляризация нарушает другие принципы струнной теории, которые требуют равенства нулю интерсепта траекторий Редже $m = 0$, но она сохраняет калибровочную инвариантность безмассового векторного мезона, а это все, что необходимо в данном случае.

единичной матрицы, которая связана с границей кольца без присоединенных к ней частиц.

Неориентируемая шестиугольная диаграмма имеет похожий теоретико-групповой множитель. В этом случае мировая поверхность (являющаяся листом Мёбиуса) имеет только одну границу, к которой присоединены все частицы. В результате множитель n отсутствует. Как и в разд. 8.1.2 и 9.1.3, теоретико-групповой множитель, соответствующий листу Мёбиуса, имеет вид

$$G_N = \eta \operatorname{tr} (\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_6), \quad (10.2.2)$$

где множитель η возникает из-за наличия нечетного числа твистов, как объяснялось в разд. 6.1 (он равен -1 для группы $SO(n)$, $+1$ для группы $USp(n)$ и 0 для группы $U(n)$). В частности, этот теоретико-групповой множитель соответствует диаграмме, в которой внешние частицы расположены в том же циклическом порядке, что и матрицы внутри следа, а твист вставлен между вершинами испускания частиц под номерами 6 и 1. Другие диаграммы с одним, тремя или пятью твистами также дают вклады с тем же теоретико-групповым множителем, если выпускаемые частицы расположены в том же циклическом порядке вдоль границы листа Мёбиуса. Как и в петлевых вычислениях из предыдущих глав разделение вычислений на части с различным нечетным числом твистов является несколько искусственным с точки зрения вида мировой поверхности, для которой единственным отличительным свойством является циклический порядок частиц на границе листа Мёбиуса. В используемом нами операторном формализме сумма необходима для получения правильной области интегрирования, соответствующей заданному циклическому порядку частиц. Как и в предыдущих главах, работу можно облегчить путем вычисления только одного вклада и подходящего расширения области интегрирования.

Последний класс диаграмм включает непланарные диаграммы с двумя или четырьмя твистами, для которых теоретико-групповой множитель имеет вид произведения следов

$$G_T = \operatorname{tr} (\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4) \operatorname{tr} (\lambda_5 \lambda_6). \quad (10.2.3)$$

Для групп $SO(n)$ и $USp(n)$ все члены факторизуются на произведение следов, содержащих 2 и 4 матрицы λ_r , так как след нечетного числа матриц равен нулю из-за антисимметрии λ . Для групп $U(n)$ могут существовать также диаграммы с тремя частицами на каждой из границ мировой поверхности или только с одной частицей на одной из границ. Так как группы $U(n)$, как было показано, не согласуются с суперсимметрией,

их можно не рассматривать (наличие аномалии является еще одной причиной их непоследовательности). Любое конкретное разбиение и упорядочение матриц λ_r в групповом множителе, таком как (10.2.3), соответствует нескольким диаграммам с двумя или четырьмя твистами. Полная непланарная амплитуда задается суммой всех неэквивалентных диаграмм.

Разделение амплитуды на три вида диаграмм очень естественно в теории суперструн типа I, так как каждый вид теоретико-группового множителя связан с мировой поверхностью определенной топологии. В случае обычной полевой теории точечных частиц правила Фейнмана не отличают пропагатор с твистом от пропагатора без твиста, поэтому все вклады имеют одинаковый динамический множитель. Поскольку в этом случае безмассовые фермионы, циркулирующие по петле, принадлежат присоединенному представлению, аномалию удобнее выразить через след от матриц в присоединенном представлении $\operatorname{Tr}(t_1 \dots t_6)$, как сделано в разд. 10.1.2. Однако там же было отмечено, что такие следы можно выразить через следы от матриц в фундаментальном представлении калибровочной группы. Последние можно классифицировать таким же образом, как и в теории струн. В следующем разделе будет показано, что решающим отличием между теоретико-полевыми вычислениями разд. 10.1.2 и соответствующими вычислениями в теории струн является сокращение членов вида G_T в случае струн благодаря эффектам, связанным с сектором замкнутых струн рассматриваемой теории.

Выражение для полной однопетлевой амплитуды задается суммой членов, отвечающих трем типам топологий. Поскольку непланарные диаграммы имеют отличную теоретико-групповую структуру, они должны давать нулевую аномалию сами по себе. Планарные и неориентируемые диаграммы имеют одинаковую теоретико-групповую структуру, поэтому они могут быть подобраны так, чтобы дать сокращающиеся вклады в аномалию. Каждый из трех видов членов задается суммой четырех вкладов, соответствующих четырем возможным выборам граничных условий (спиновых структур), которые, согласно гл. 9, обозначаются $(- -)$, $(- +)$, $(+ -)$ и $(+ +)$. Эта комбинация диаграмм расходится как $\int dq/q = 2\pi^2 \int d\omega/\omega \ln^2 \omega$ вблизи точки $q = 0$ (или $\omega = 1$) как для планарной, так и для неориентируемой диаграммы. Тот факт, что эта расходимость слабее расходимости в бозонной теории, является следствием сокращения вкладов с граничными условиями $(- -)$ и $(+ -)$, т. е. вкладов от бозонной и фермионной петель без множителей $\bar{\Gamma}$ внутри следа. Каждый из вкладов от диаграмм с циркулирующими

фермионами или бозонами, включающий множитель Γ , расходится как $\int dq/q$. Из четырех типов членов (для каждой топологии) три вида $(--)$, $(+-)$ и $(-+)$ дают сохраняющие четность амплитуды, в то время как четвертый $(++)$ дает не сохраняющую четность амплитуду, поскольку он содержит множитель Γ_{11} в следе, что приводит к появлению тензора ϵ .

В разд. 10.4.2 будет показано, что расходимости в сохраняющих четность планарной и неориентируемой петлевых амплитудах сокращаются для группы $SO(32)$. Хотя формализм калибровки светового конуса очень полезен в изучении этого сокращения, его нельзя без больших трудностей применить к анализу нарушающих четность амплитуд. Потенциальные аномалии, которые мы хотим теперь изучить, возникают только от нарушающих четность членов с граничными условиями $(++)$, поэтому для соответствующих вычислений гораздо удобнее использовать ковариантный формализм гл. 4.

10.2.1. Аномалия планарной диаграммы

Формальное выражение для диаграммы Фейнмана, описывающей нарушающую четность фермионной петли с шестью внешними калибровочными частицами, имеет вид

$$A_P(1, 2, \dots, 6) = g^6 G_P \int d^{10}p \text{Tr}(\bar{\Gamma} SW(1) SW(2) \dots SW(6)). \quad (10.2.4)$$

Здесь фермионный пропагатор задается соотношением

$$S = F_0/L_0. \quad (10.2.5)$$

В выражении (10.2.4)

$$\bar{\Gamma} = \Gamma_{11} (-1)^{\sum d_{-n} \cdot d_n}, \quad (10.2.6)$$

поэтому оператор $(1 + \bar{\Gamma})/2$ является GSO-проекционным оператором в фермионном секторе (как в разд. 4.3.3), а вершины испускания безмассовых калибровочных частиц на массовой оболочке имеют вид

$$W(r) \equiv W(\zeta_r, k_r, 1) = \zeta_r \cdot \psi(1) e^{ik_r \cdot X(1)}. \quad (10.2.7)$$

Кинематика процесса показана на рис. 10.2. Необходимо также включить фермионные и бозонные духовые моды в определение пропагаторов, но их влияние на амплитуду сводится к сокращению двух степеней функции распределения, как в случае бозонной теории, описанном в гл. 8. Выражение (10.2.4) описывает член, в котором фермионная функция распределения

имеет вид $[f(\omega)]^8$. Она сокращается с функцией распределения, возникающей от бозонных мод, точно так же как при вычислениях в суперсимметричном случае с использованием калибровки светового конуса. В рассматриваемом случае бозонные и фермионные духовые вклады в петлевую амплитуду также сокращаются.

Поскольку амплитуда (10.2.4) бесконечна, ее необходимо регуляризовать. Как и в разд. 10.1.2 аномалия вычисляется путем замены поляризационного вектора одной из испущенных калибровочных частиц на ее импульс. Из-за того что рассматриваемая диаграмма в отличие от древесных диаграмм расходится, сокращение пропагаторов не может быть использовано в качестве аргумента в пользу калибровочной инвариантности амплитуды. При этом не было бы учтено неизбежное отсутствие калибровочной инвариантности в регуляризирующих членах.

С формальной точки зрения амплитуда (10.2.4) обладает циклической симметрией относительно перестановки шести внешних линий. Остается ли это справедливым после вычитания расходимости с помощью регуляризирующего члена, зависит от конкретного выбора регулятора. Если последний нарушает циклическую симметрию, то ее можно восстановить, усреднив по циклическим перестановкам частиц. Поскольку на современном уровне развития струнной теории правила Фейнмана вводятся несколько искусственно, чтобы удовлетворить условию унитарности, а не вытекают из фундаментального принципа наименьшего действия, не совсем ясно, как таким требованиям, если они существуют, должен удовлетворять метод регуляризации. К настоящему времени изучено два различных метода регуляризации расходимостей в диаграммах, относящихся к вычислению аномалий. Оба метода приводят к одним и тем же условиям сокращения аномалий, но они дают немного отличающиеся формулы в том случае, когда аномалии нетривиальны. Одним из методов является естественное обобщение метода Паули—Вилларса на случай теории струн, а другой метод тесно связан с методом Фудзикавы. Оба эти метода описаны в настоящей главе. (Метод Паули—Вилларса детально описан в основном тексте, а второй метод вынесен в приложение 10.A.)

Как уже упоминалось, метод Паули—Вилларса состоит в вычитании из расходящейся диаграммы такой же диаграммы, но с массивными фермионными пропагаторами, и последующим переходе к пределу $m \rightarrow \infty$ в конце вычислений. Расходимость можно подобрать так, чтобы они сократились, так как они представляют собой эффекты малых расстояний, которые не зависят от наличия произвольных, но конечных масс. Поскольку регуляризованные амплитуды конечны, простые преобразования,

такие, как сокращение пропагаторов, могут быть выполнены, не приводя к ошибкам. Поэтому, так как эти преобразования не дают аномалии в первоначальном выражении без массового параметра, происхождение аномалии связано только с регуляризирующим членом. Как будет показано ниже, в пределе $m \rightarrow \infty$ возникает конечная ненулевая аномалия.

Чтобы применить метод Паули — Вилларса в теории суперструн, необходимо определить массивный фермионный пропагатор для струны. Так как F_0 представляет собой обобщение выражения $i\Gamma$ -р на случай теории струн, естественное определение имеет вид

$$S^m = \frac{1}{F_0 - im} = \frac{F_0 + im}{L_0 + m^2}. \quad (10.2.8)$$

Тогда регуляризирующий член A_p^m (1, 2, ..., 6) получается из выражения (10.2.4) путем замены пропагаторов на оператор S^m , определенный формулой (10.2.8). В отличие от регуляризации Паули — Вилларса в обычной полевой теории, в теории струн масса регулятора m никогда не может превысить всех масс физических частиц, так как последние имеют неограниченный спектр масс.

Если вводятся интегральные представления для множителей $(L_0 + m^2)^{-1}$, как в предыдущих вычислениях струнных амплитуд, то в результате это приводит к появлению в петлевом подынтегральном выражении дополнительного множителя ω^{m^2} . Напомним, что до регуляризации интеграл в граничной точке $q = 0$ или $\omega = 1$ расходится следующим образом:

$$\int dq/q = 2\pi^2 \int d\omega/\ln^2 \omega. \quad (10.2.9)$$

Простое вычитание члена A_p^m изменяет расходимость

$$\int d\omega (1 - \omega^{m^2})/\ln^2 \omega \sim m^2 \int d\omega/\ln \omega, \quad (10.2.10)$$

который все еще расходится в точке $\omega = 1$. Чтобы полностью вычесть расходимость, необходимо взять комбинацию из трех членов, такую как

$$A_p - 2A_p^m + A_p^{\sqrt{2}m}, \quad (10.2.11)$$

где расходящиеся части в сумме дают интеграл

$$\int d\omega (1 - 2\omega^{m^2} + \omega^{2m^2})/\ln^2 \omega \sim m^4 \int d\omega, \quad (10.2.12)$$

который конечен в точке $\omega = 1$. Поскольку показано, что получено конечное выражение и можно выполнять обычные преоб-

разования, не имеет большого значения, использовали ли один или два регуляризирующих члена. (На самом деле оказывается, что выражение для аномальной части A_p^m такое же, как и для $A_p^{\sqrt{2}m}$.) Имея это в виду, для простоты изложения в дальнейшем мы будем использовать выражение

$$A_p^{reg} = A_p - A_p^m \quad (10.2.13)$$

в качестве регуляризованной амплитуды.

Регуляризованные амплитуды не удовлетворяют обычным требованиям, предъявляемым к струнным амплитудам, так как введение массового параметра m нарушает конформную инвариантность. В частности, наличие массивных пропагаторов в регуляризирующем члене нарушает калибровочное условие L_1 , которое раньше обеспечивало отщепление продольных мод внешних калибровочных частиц. Это как раз совпадает с ожидаемым результатом от введения регулятора в амплитуду, имеющую аномалию.

Процедура вычисления аномалии, возникающей из (10.2.13) (точнее, из (10.2.11)), сводится к проверке на калибровочную инвариантность каждой внешней линии путем поочередной замены вектора поляризации на соответствующий импульс. Выражение для A_p обладает циклической симметрией относительно перестановки внешних частиц, поскольку $\bar{\Gamma}$ можно перемещать внутри следа с помощью простых преобразований, которые можно выполнять в регуляризованном выражении. Однако A_p^m не обладает циклической симметрией, так как $\bar{\Gamma}$ расположена за вершиной под номером 6 и не антикоммутирует с S^m . В результате шестая линия отличается от пяти других. В дальнейшем мы покажем, что выбранная схема регуляризации обеспечивает калибровочную инвариантность всех внешних частиц, за исключением шестой, которая должна нести всю ответственность за возникновение аномалии.

Начнем рассмотрение потенциальных аномалий, связанных с частицами 1—5. Чтобы записать амплитуду A_p в виде разности двух членов, в которых можно сократить пропагаторы с одной из сторон рассматриваемой вершины, можно использовать тождество

$$W(k, k, 1) = k \cdot \psi(1) e^{ik \cdot X(1)} = [F_0, e^{ik \cdot X(1)}]. \quad (10.2.14)$$

В слагаемом A_p^m полезно записать (10.2.14) в виде

$$W(k, k, 1) = [F_0 - im, V_0(k, 1)]. \quad (10.2.15)$$

Это также приводит к разности двух членов, в каждом из которых пропагаторы, соседние с рассматриваемой вершиной,

сокращаются. Если выбрать, например, для изучения линию под номером 1, то два из этих четырех членов имеют вид

$$G_P \int d^{10}p \left\{ \text{Tr} \left[V_0(k_1) \frac{F_0}{L_0} \zeta_2 \cdot \psi(1) V_0(k_2) \dots \frac{F_0}{L_0} \varepsilon_6 \cdot \psi(1) V_0(k_6) \bar{\Gamma} \right] - \right. \\ \left. - \text{Tr} \left[V_0(k_1) \frac{F_0 + im}{L_0 + m^2} \zeta_2 \cdot \psi(1) V_0(k_2) \dots \frac{F_0 + im}{L_0 + m^2} \zeta_6 \cdot \psi(1) V_0(k_6) \bar{\Gamma} \right] \right\}, \quad (10.2.16)$$

в то время как в двух других членах пропагаторы сокращаются между частицами 1 и 2. След по фермионным нулевым модам (матрицам Дирака) вычисляется очень просто, так как для получения ненулевого результата требуется наличие десяти матриц Γ из-за присутствия множителя Γ_{11} в $\bar{\Gamma}$. Необходимые матрицы возникают от нулевых мод в пяти множителях F_0 в числителях пропагаторов и в пяти множителях $\psi(1)$ в вершинах. При этом используются все фермионные моды вершин и числителей пропагаторов. Используя равенство

$$\text{tr}(\Gamma_{11} \Gamma_{\mu_1} \dots \Gamma_{\mu_{10}}) = 32 \varepsilon_{\mu_1 \dots \mu_{10}}, \quad (10.2.17)$$

получаем, что результирующее выражение пропорционально интегралу

$$\int d^{10}p \varepsilon_{\mu_1 \dots \mu_5 \nu_1 \dots \nu_5} \zeta_2^{\mu_1} \dots \zeta_6^{\mu_5} (p - k_1)^{\nu_1} k_2^{\nu_2} \dots k_5^{\nu_5} \times \\ \times \left\{ \text{Tr} \left[V_0(k_1) \frac{1}{L_0} V_0(k_2) \dots \frac{1}{L_0} V_0(k_6) \right] - \right. \\ \left. - \text{Tr} \left[V_0(k_1) \frac{1}{L_0 + m^2} V_0(k_2) \dots \frac{1}{L_0 + m^2} V_0(k_6) (-1)^{\sum d_{-n} \cdot d_n} \right] \right\}. \quad (10.2.18)$$

Множители L_0 в знаменателях этого выражения содержат пять импульсов p_2, \dots, p_6 , где $p_r = p - \sum_{s=1}^{r-1} k_s$. Поэтому после сдвига $p \rightarrow p + k_1$ в определении петлевого импульса полученное выражение перестает зависеть от k_1 или k_6 . Таким образом, каждый из этих двух членов должен обращаться в нуль, так как в подынтегральном выражении недостаточно независимых импульсов для свертки с тензором ε . Анализ для линий 2—5 проводится так же.

Сдвиг в определении петлевого импульса может производиться только в регуляризованном выражении. (В нерегуляризованном выражении для аномалии переопределение петлевого импульса определенно несправедливо. Это является классической ошибкой, приводящей к выводу об отсутствии аномалии.) Вывод о том, что сумма этих членов равна нулю, справедлив, но имеет небольшой пробел, так как каждое слагаемое содер-

жит произведение вершин $V_0(k_1, 1)$ и $V_0(k_6, 1)$ в одной точке мировой поверхности (т. е. отсутствует промежуточный пропагатор). Ликвидация этого пробела требует бесконечно малого разделения вершин и последующего перехода к пределу совпадающих точек. Это вычисление очень напоминает вычисление аномалии с помощью метода разделения точек, который описан в приложении 10.A. Результат заключается в том, что каждый из двух членов в (10.2.18) дает одинаковый конечный ответ, поэтому их разность действительно равна нулю.

Вычисление расходимости, связанной с линией под номером 6, немного отличается из-за присутствия рядом с вершиной множителя $\bar{\Gamma}$. В этом случае удобно переписать соотношение, которое использовалось в (10.2.18) (используя тот факт, что $\{F_0, \bar{\Gamma}\} = 0$), в следующем виде:

$$k_6 \cdot \psi V_0(k_6) \bar{\Gamma} = \{F_0, V_0(k_6) \bar{\Gamma}\} = \{F_0 - im, V_0(k_6) \bar{\Gamma}\} + 2im V_0(k_6) \bar{\Gamma}, \quad (10.2.19)$$

причем первое соотношение надо использовать в A_P , а второе — в A_P^m . Записывая таким образом выражение для аномалии, снова получаем два члена с сокращающимися пропагаторами, которые возникают из A_P и A_P^m . Парно они обращаются в нуль по тем же причинам, что и раньше, оставляя нетривиальный член, содержащий аномалию, который пропорционален выражению

$$W_P \sim G_P m \int d^{10}p \text{Tr} \left(\frac{F_0 + im}{L_0 + m^2} \zeta_1 \cdot \psi(1) V_0(k_1, 1) \dots \zeta_5 \cdot \psi(1) \times \right. \\ \left. \times V_0(k_5, 1) \frac{F_0 + im}{L_0 + m^2} V_0(k_6, 1) \bar{\Gamma} \right). \quad (10.2.20)$$

След по матрицам Дирака снова включает матрицу Γ_{11} , которая требует наличия по крайней мере десяти матриц Γ для того, чтобы получился нетривиальный результат (10.2.17). В действительности существует одиннадцать возможных источников этих Γ -матриц. Матрица Γ содержится в множителях F_0 у каждого из шести пропагаторов и в множителях $\psi(1)$ у каждой вершины для частиц 1—5. Это означает, что один из членов im в пропагаторе остается после взятия следа по матрицам Дирака. (Все другие возможные члены, которые могли бы остаться, линейны по фермионным осцилляторам d_n и поэтому равны нулю после взятия следа по d_n .) Результат включает линейную комбинацию членов, возникающих от различных способов выбора десяти Γ -матриц из присутствующих одиннадцати матриц. В каждом члене пять из Γ -матриц свертываются

с пятью оставшимися тензорами поляризации, в то время как другие пять Γ -матриц свертываются с пятью из шести импульсов в пропагаторах $p_r = p - \sum_{i=1}^{r-1} k_i$, поэтому след по матрицам Дирака пропорционален выражению

$$\begin{aligned} & \text{ime}_{\mu_1 \dots \mu_5 \nu_1 \dots \nu_5} \zeta_1^{\mu_1} \dots \zeta_5^{\mu_5} [(p - k_1)^{\nu_1} \dots (p - k_1 - k_2 - k_3 - k_4 - k_5)^{\nu_5} - \\ & - p^{\nu_1} (p - k_1 - k_2)^{\nu_2} \dots (p - k_1 - k_2 - k_3 - k_4 - k_5)^{\nu_5} + \dots \\ & \dots - p^{\nu_1} (p - k_1)^{\nu_2} \dots (p - k_1 - k_2 - k_3 - k_4)^{\nu_5}] = - \text{ime}(\zeta, k), \end{aligned} \quad (10.2.21)$$

где функция $\varepsilon(\zeta, k)$ пропорциональна аномалии низкоэнергетической теории и определена соотношением

$$\varepsilon(\zeta, k) = \varepsilon_{\mu_1 \dots \mu_5 \nu_1 \dots \nu_5} \zeta_1^{\mu_1} \dots \zeta_5^{\mu_5} k_1^{\nu_1} \dots k_5^{\nu_5}. \quad (10.2.22)$$

Результирующая аномалия имеет вид

$$\begin{aligned} W_P \sim \lim_{m \rightarrow \infty} m^2 \varepsilon(\zeta, k) G_P \int d^{10} p \text{Tr} \left(\frac{1}{L_0 + m^2} V_0(k_1, 1) \dots V_0(k_5, 1) \times \right. \\ \left. \times \frac{1}{L_0 + m^2} V_0(k_6, 1) \Gamma_d \right), \end{aligned} \quad (10.2.23)$$

где $\Gamma_d = (-1)^{\sum d \cdot n \cdot d_n}$. После этого вычисления становятся очень похожими на вычисления петлевых амплитуд для бозонной теории в гл. 8 с тем отличием, что импульс в (10.2.23) удовлетворяет равенству $k_r^2 = 0$, а $D = 10$.

Вычисление интеграла продолжается путем замены каждого пропагатора его интегральным представлением $(L_0 + m^2)^{-1} = \int_0^1 x_r^{L_0 + m^2 - 1} dx_r$. В рассматриваемом случае преобразования, описанные в разд. 8.1.1, связывают выражение для аномалии с корреляционными функциями вершинных операторов. Эти функции вычисляются в точках ρ_r (где $\rho_r \equiv x_1 \dots x_r$) кольца, которое строится так же, как в гл. 8 и 9, путем отождествления произвольной действительной точки ρ с точками $\omega^j \rho$, где $\omega \equiv \equiv \rho_6$, а n — произвольное целое число. Используя соотношения из разд. 8.1.1, можно показать, что

$$W_P \sim \lim_{m \rightarrow \infty} m^2 \varepsilon(\zeta, k) G_P \int_0^1 \frac{d\omega}{\omega} \int_R \left(\prod_{r=1}^5 \frac{d\rho_r}{\rho_r} \right) \omega^{m^2} I(1, \dots, 6), \quad (10.2.24)$$

где

$$\begin{aligned} I(1, \dots, 6) & \equiv \int d^{10} p \omega^{p^2/2} \text{Tr} (\omega^N V_0(k_1, \rho_1) \dots V_0(k_6, \rho_6) \Gamma_d) = \\ & = \left(\frac{-2\pi}{\ln \omega} \right)^5 \prod_{r < s} [\psi(c_{sr}, \omega)]^{k_r \cdot k_s}, \end{aligned} \quad (10.2.25)$$

а область интегрирования R задается неравенствами $1 \geq \geq \rho_1 \geq \dots \geq \rho_5 \geq \omega$. Функция $\ln \psi(c_{sr}, \omega)$ (где $c_{sr} = \rho_s / \rho_r$), определенная в разд. 8.1.1, является корреляционной функцией между $X(\rho_r)$ и $X(\rho_s)$. В этом случае множитель $[f(\omega)]^{2-D}$ отсутствует, так как след по фермионным модам (и связанным с ними духам) приводит к множителю

$$\text{Tr} (-\omega^n)^{\sum d \cdot n \cdot d_n} = [f(\omega)]^8, \quad (10.2.26)$$

который сокращается с функциями распределения, возникающими от следа по α -модам и их духам.

Из формулы (10.2.24) сразу следует, что в пределе $m \rightarrow \infty$ основной вклад в интеграл дает область $\omega \sim 1$. Это соответствует ожиданию того, что любая ненулевая аномалия возникает при компенсации бесконечности амплитуды в точке $\omega = 1$ и нуля от сокращенного пропагатора. Для того чтобы исследовать область вблизи $\omega = 1$, проще всего, как и в разд. 8.1.1, перейти к новым переменным z_r и q , определенным соотношениями

$$z_r = \exp \left(\frac{2\pi i \ln \rho_r}{\ln \omega} \right), \quad q = \exp \left(\frac{2\pi^2}{\ln \omega} \right). \quad (10.2.27)$$

Тогда область, дающая основной вклад, лежит вблизи $q \sim 0$, что соответствует стремлению к нулю радиуса отверстия в кольце. При этом преобразовании функция $\psi(c_{sr}, \omega)$ преобразуется в $\psi(z_s/z_r, q^2)$ по правилу

$$\psi(c_{sr}, \omega) = -\frac{i\pi}{\ln q} \exp \left[-\frac{(\ln z_s/z_r)^2}{4 \ln q} \right] \psi(z_s/z_r, q^2), \quad (10.2.28)$$

как показано в приложении 8.A. Объединяя полученное выражение с интегралом по импульсу (см. разд. 8.1.1)

$$\int d^{10} p \prod_{r=1}^6 x_r^{p_r^2/2} = \left(\frac{-2\pi}{\ln \omega} \right)^5 \prod_{1 \leq r < s \leq 6} \left\{ c_{sr}^{-1/2} \exp \left(\frac{\ln^2 c_{sr}}{2 \ln \omega} \right) \right\}^{k_r \cdot k_s}, \quad (10.2.29)$$

можно выразить I через переменные z_r и q :

$$\begin{aligned} I & = \left(\frac{-\ln q}{\pi} \right)^5 \prod_{r < s} (\psi(z_s/z_r, q^2))^{k_r \cdot k_s} \exp \left[-\left(k_r \cdot k_s \frac{\ln^2(z_s/z_r)}{2 \ln q^2} \right) \right] = \\ & = \left(\frac{-\ln q}{\pi} \right)^5 \langle p=0 | \text{Tr} (q^{2N} V_0(k_1, z_1) \dots V_0(k_6, z_6) \Gamma_d) | p=0 \rangle, \end{aligned} \quad (10.2.30)$$

т. е. представить в виде корреляционной функции для вершин на границе кольца или цилиндра. Символ $|p=0\rangle$ означает, что

вычисление проводится при нулевом импульсе. След относится ко всем осцилляторным модам. Путем записи выражения для I в последней форме (10.2.30) нам удалось представить всю зависимость от q в виде, очень удобном для последующего анализа.

Как и в разд. 8.1.1, мера интегрирования в переменных кольца имеет вид

$$\int_0^1 \prod_1^6 \frac{dx_r}{x_r} = \int_0^1 \frac{d\omega}{\omega} \int_0^1 \left(\prod_1^5 \frac{d\rho_r}{\rho_r} \Theta(\rho_r - \rho_{r+1}) \right) = \int_0^1 \frac{d\omega}{\omega} (\ln \omega)^5 \int_0^1 \left(\prod_{r=1}^5 dv_r \Theta(v_{r+1} - v_r) \right), \quad (10.2.31)$$

где $v_r \equiv \ln z_r / 2i\pi = \ln \rho_r / \ln \omega$ (при этом $v_6 = 1$). Замена переменных и подстановка выражения для I в (10.2.24) приводит к выражению для аномалии

$$W_P \sim \lim_{m \rightarrow \infty} \varepsilon(\zeta, k) m^2 G_P \int_0^1 \left(\prod_{r=1}^5 dv_r \Theta(v_{r+1} - v_r) \right) \int_0^1 d\omega \omega^{m^2-1} \times \langle p=0 | \text{Tr}(q^{2N} V_0(k_1, z_1) \dots V_0(k_6, z_6) \Gamma_d) | p=0 \rangle. \quad (10.2.32)$$

Очевидно, что единственный вклад в след, который не обращается в нуль в пределе $m \rightarrow \infty$, дает член с $N=0$, поскольку q стремится к нулю экспоненциально при $\omega \rightarrow 1$, а N имеет дискретные (целые) собственные значения. Это можно продемонстрировать явно, рассматривая интеграл по ω

$$\int_0^1 \omega^{m^2-1} e^{4\pi^2 N / \ln \omega} d\omega = \frac{1}{m^2} \int_0^1 e^{-\lambda - 4\pi^2 m^2 N / \lambda} d\lambda, \quad (10.2.33)$$

который равен $1/m^2$ при $N=0$, в то время как члены с ненулевыми N экспоненциально убывают при $m \rightarrow \infty$. В результате выражение для аномалии, возникающей от планарной петлевой диаграммы, имеет вид

$$W_P \sim \varepsilon(\zeta, k) G_P \int_0^1 \left(\prod_{r=1}^5 dv_r \Theta(v_{r+1} - v_r) \right) \langle 0 | V_0(k_1, z_1) \dots V_0(k_6, z_6) | 0 \rangle = \varepsilon(\zeta, k) G_P \int_0^1 \left(\prod_{r=1}^5 dv_r \Theta(v_{r+1} - v_r) \right) \prod_{r < s} (z_s - z_r)^{k_r \cdot k_s}, \quad (10.2.34)$$

где $z_r = \exp(2\pi i v_r)$. Последний шаг очень похож на вычисление бозонной древесной диаграммы. При этом используется корреляционная функция, полученная для древесных амплитуд в приложении 7.A. Полный вклад в шестиугольную калибровочную аномалию от планарных диаграмм получается путем суммирования по перестановкам внешних линий.

Аномалия (10.2.34) имеет тот же вид, что и аномалия в суперсимметричной теории Янга — Миллса в разд. 10.1.2, умноженная на множитель, напоминающий древесную диаграмму, однако оба сравнения являются неточными. Калибровочная аномалия суперсимметричной теории Янга — Миллса в разд. 10.1.2 содержит след по матрицам присоединенного представления калибровочной алгебры, в то время как в рассматриваемом случае матрицы принадлежат фундаментальному представлению классической алгебры. В низкоэнергетическом пределе $k_r \ll \sqrt{T}$ (где натяжение струны положено равным $T = 1/\pi$) аномалия сводится к выражению, которое возникает от безмассовой шестиугольной петли в суперсимметричной теории Янга — Миллса, но с важным изменением в теоретико-групповом множителе. Связь между теоретико-групповыми множителями можно понять следующим образом. Теоретико-полевой след $\text{Tr}(t_1 t_2 \dots t_6)$ (с матрицами в присоединенном представлении) можно выразить через суперпозицию членов вида $\text{tr}(\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_6)$ и $\text{tr}(\lambda_1 \dots \lambda_4) \text{tr}(\lambda_5 \lambda_6)$ (включая другие перестановки) для любой классической группы, как показано в разд. 10.1.2. Конкретные коэффициенты в этом разложении зависят от группы. Если это разложение проведено, то члены с шестью λ -матрицами внутри одного следа в точности соответствуют низкоэнергетическому пределу аномалии в теории струн, возникающей от планарной и неориентируемой диаграмм, просуммированных по всем перестановкам внешних линий. Можно было бы ожидать аналогичного соотношения между членами с произведением двух следов и аномалиями, связанными с непланарными диаграммами в теории струн. Однако, как будет показано ниже в этой главе, именно здесь новые эффекты теории струн приводят к сокращениям, которые имеют место даже в низкоэнергетическом пределе.

Динамический множитель, на который умножается след, отличается от древесной амплитуды в двух отношениях. Прежде всего он содержит двойные полюсы в каналах, образованных группами близко расположенных частиц. Например, имеются двойные полюсы в канале, образованном частицами от 1 до k , которые возникают в граничной точке области интегрирования, где $z_1 \sim z_2 \sim \dots \sim z_k$, и в то же время $z_{k+1} \sim \dots \sim z_6 = 1$. Кроме того, во всех каналах отсутствуют безмассовые полюсы,

что неудивительно, так как ненулевой вычет в таких полюсах соответствовал бы аномалии в диаграмме, содержащей менее шести внешних безмассовых частиц. Заслуживает внимания то обстоятельство, что аномалия в теории струн содержит полюсы, соответствующие ненулевым массам, в различных каналах. Путем факторизации в этих полюсах можно получить выражения для аномальных диаграмм, содержащих менее шести внешних частиц, часть которых обладает массами. Эти диаграммы дают примеры аномалий калибровочной инвариантности, связанных с массивными модами, которые обсуждались в начале разд. 10.1.3.

В приложении 10.A вычисление аномалии повторяется с использованием регуляризации, которая обрезает пропагаторы с помощью множителей $\exp\{-\eta_r L_0\}$, а в конце вычислений берется предел $\eta_r \rightarrow 0$. Эта процедура регуляризации эквивалентна такому ограничению области интегрирования корреляционной функции вершинных операторов, при котором величины $\ln \rho_r$ никогда не могут совпасть. Минимальное значение $\ln \rho_r - \ln \rho_{r+1}$ равно $-\eta_{r+1}$. Если регуляризовать так один пропагатор, то результат для аномалии будет иметь тот же вид, что и выражение, полученное при регуляризации Паули—Вилларса. Если все значения параметров η_r выбраны одинаковыми и, таким образом, регуляризация для всех частиц проводится симметрично, то получается другой результат. Функциональная форма подынтегрального выражения является той же, но по переменным v_r , параметризующим частицы на границе диска, интегрирование проводится по ограниченной области (по объединению областей R_1 и R_2 , которые описаны в приложении 10.A).

10.2.2. Аномалия неориентируемой диаграммы

Аномалия, возникающая от неориентируемых диаграмм, вычисляется путем объединения методов разд. 8.1.2 для неориентируемых бозонных петлевых диаграмм с методами предыдущего раздела. Вклады в аномалию с заданным теоретико-групповым множителем возникают от суммы нескольких диаграмм, содержащих нечетное число пропагаторов с твистами. Взятие следа по матрицам Дирака для нулевых мод совпадает со случаем планарной петлевой диаграммы, поэтому выражение для аномалии снова сводится к структуре, очень похожей на соответствующую бозонную петлевую диаграмму. Это приводит к следующему выражению для вклада в аномалию от неориентируемой диаграммы, который имеет вид (10.2.32) с заменой

q^2 на $-\sqrt{q}$ и z_r на $z_r^{1/2}$, как в (7.61):

$$W_N \sim \lim_{m \rightarrow \infty} \varepsilon(\zeta, k) m^2 G_N \int_0^2 \left(\prod_{r=1}^5 dv_r \Theta(v_{r+1} - v_r) \right) \int_0^1 d\omega \omega^{m^2-1} \times \\ \times \langle p=0 | \text{Tr}((-1)^N q^{N/2} V_0(k_1, \sqrt{z_1}) \dots V_0(k_6, \sqrt{z_6}) \Gamma_d) | p=0 \rangle, \quad (10.2.35)$$

где нормировка совпадает с нормировкой (10.2.32). В рассматриваемом случае подынтегральное выражение похоже на корреляционную функцию шести операторов V_0 на границе листа Мёбиуса, поэтому интегрирование по угловым переменным $v_r = \ln z_r / 2\pi i$ проводится последовательно от нуля до двух. После перехода к пределу $m \rightarrow \infty$ и взятия интеграла по ω выражение для аномалии можно записать в виде

$$W_N \sim \varepsilon(\zeta, k) G_N \int_0^2 \left(\prod_{r=1}^5 dv_r \Theta(v_{r+1} - v_r) \right) \times \\ \times \langle 0 | V_0(k_1, \sqrt{z_1}) \dots V_0(k_6, \sqrt{z_6}) | 0 \rangle = \eta \frac{32}{n} W_P, \quad (10.2.36)$$

где произведена замена переменной $\sqrt{z_r}$ на z_r (т. е. замена $v_r/2$ на v_r , что дает множитель 32) и использовано равенство $G_N = \eta G_P/n$. В результате полная аномалия с теоретико-групповым множителем $\text{tr}(\lambda_1 \dots \lambda_6)$ имеет вид

$$W = W_P + W_N \quad (10.2.37)$$

и равна нулю для калибровочной группы $SO(32)$ и только для нее.

Относительный множитель $\eta 32/n$ в (10.2.36) имеет простую интерпретацию в низкоэнергетической эффективной суперсимметричной теории Янга—Миллса, рассмотренной в разд. 10.1.2. В последнем случае полная аномалия была пропорциональна следу $\text{Tr} t^6$, который разлагается на следы от матриц фундаментального представления, например для группы $SO(32)$ справедливо разложение (10.1.12). Член $n \text{tr} \lambda^6$ в этом разложении возникает в низкоэнергетическом пределе планарной шестиугольной диаграммы. Низкоэнергетический предел для любой неориентируемой диаграммы дает член $\text{tr} \lambda^6$. Число таких диаграмм равно числу способов, которыми нечетное число твистов можно распределить по внутренним линиям шестиугольной диаграммы, и равно 32. Каждая из этих диаграмм приводит к появлению динамического множителя $\varepsilon(\zeta, k)$ в аномалии, и после бозе-симметризации возникает общий множитель 32. Последний член $15 \text{tr} \lambda^4 \text{tr} \lambda^2$ в (10.1.12) имеет теоретико-групповую структуру непланарной диаграммы.

10.2.3. Отсутствие аномалий в непланарных диаграммах

Теперь мы проанализируем непланарную шестиугольную диаграмму и покажем, что она не содержит аномалии. Это не должно нас удивлять, так как непланарные диаграммы не расходятся, и аргументы, основанные на сокращении пропагаторов, должны быть справедливыми. Проверим это утверждение в деталях.

Вычисление рассматриваемых диаграмм, имеющих четное число пропагаторов с твистами, включает тот же след по матрицам Дирака для нулевых мод, что и другие петлевые диаграммы. Выражение для аномалии снова напоминает выражение для непланарной петли бозонной струны в разд. 8.1.3. Основное отличие от предыдущих вычислений состоит в замене множителей q^{2N} в (10.2.32) на $q^{2N-s/4}$ (где s — инвариантный квадрат энергии в синглетном канале), который равен нулю в пределе $q \rightarrow 0$ для любых значений N . Точнее он стремится к нулю при $s < 0$ и по определению приравнивается нулю для всех других значений s путем аналитического продолжения.

Может показаться, что равенство нулю вклада в аномалию от непланарной диаграммы противоречит вычислению аномалии в суперсимметричной теории Янга — Миллса. Теоретико-полевая аномалия всегда содержит члены вида $\text{tr}(\lambda_1 \dots \lambda_4) \text{tr}(\lambda_5 \lambda_6)$ даже в случае группы $SO(32)$, когда член $\text{tr}(\lambda_1 \dots \lambda_6)$ отсутствует. Решение парадокса заключается в том, что непланарная петлевая диаграмма содержит безмассовые связанные состояния замкнутой струны, кроме состояний из сектора открытой струны. Присутствие полюсов замкнутой струны в s -канале обсуждалось в разд. 8.1.3, где было показано, что эти полюсы возникают благодаря множителю $q^{-s/4}$. Это означает, что в низкоэнергетическом пределе теория содержит дополнительные вклады, в которых основную роль играют безмассовые полюсы замкнутой струны. Эти полюсы появляются именно в тех синглетных каналах, в которых аномалия полевой теории не равна нулю, поэтому они могут привести к необходимому сокращению аномалии. В гл. 13 мы исследуем это явление систематически с точки зрения низкоэнергетической теории, а здесь мы сделаем только несколько замечаний.

Обмен замкнутыми струнами в канале 5—6 возникает от таких конфигураций, когда мировая поверхность имеет вид длинной тонкой трубы, которая одним концом соединяется с диском с двумя частицами, присоединенными к его границе, а другим концом соединяется с диском с четырьмя частицами, присоединенными к его границе. При низких энергиях безмассовые частицы из спектра замкнутой струны выживают, по-

этому помимо ожидаемой аномальной шестиугольной диаграммы появляется *древесная* диаграмма, в которой пара калибровочных частиц в одной вершине обменивается безмассовыми частицами из спектра замкнутой струны с четырьмя калибровочными частицами в другой вершине. Эта древесная диаграмма аномальна, если происходит обмен частицей, соответствующей антисимметричному тензорному полю $B_{\mu\nu}$, так как в этом случае можно получить тензор ϵ , свернутый с десятью внешними векторными индексами. Вершина, связывающая поле $B_{\mu\nu}$ с двумя калибровочными частицами, имеет вид $\partial_{[\rho} B_{\mu\nu]} \text{tr}(A^\rho F^{\mu\nu})$, как будет показано в разд. 13.5.3, где $F^{\mu\nu}$ — янг-миллсова напряженность, определенная через векторный потенциал A^μ , а квадратные скобки [...] обозначают антисимметризацию индексов.

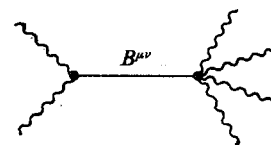


Рис. 10.3. Древесная диаграмма с обменом квантом поля $B^{\mu\nu}$ между вершиной с двумя калибровочными частицами и вершиной с четырьмя калибровочными частицами. Эта древесная диаграмма возникает как часть низкоэнергетического предела непланарной струнной шестиугольной петлевой диаграммы и имеет аномалию, которая в точности сокращает обычную низкоэнергетическую шестиугольную аномалию.

В разд. 13.5.3 показано, что вершина, связывающая поле $B_{\mu\nu}$ с четырьмя калибровочными частицами, имеет вид $\epsilon_{\mu_1 \dots \mu_{10}} \times B^{\mu_1 \mu_2} F^{\mu_3 \mu_4} \dots F^{\mu_9 \mu_{10}}$. Древесная диаграмма с обменом $B_{\mu\nu}$ (рис. 10.3) состоит из нескольких членов, получаемых сверткой полей $B_{\mu\nu}$ в каждой вершине с промежуточным пропагатором, который содержит множитель $1/(k_5 + k_6)^2$. В древесной амплитуде, соответствующей этой диаграмме, имеется один член с аномалией, коэффициент при которой имеет в точности то значение, которое необходимо для сокращения вклада от шестиугольной петлевой диаграммы. Возможно, появление аномалий в древесных диаграммах является необычным свойством. Как детально показано в гл. 13, это явление отражает тот факт, что связь B с двумя калибровочными бозонами калибровочно-инвариантна только тогда, когда B преобразуется нетривиально при янг-миллсовых калибровочных преобразованиях, в то время как связь B с четырьмя калибровочными бозонами калибровочно-инвариантна только тогда, когда поле B совсем не преобразуется, и, таким образом, «интерференционный» член между этими двумя вершинами, которым является диаграмма,

изображенная на рис. 10.3, нарушает калибровочную инвариантность независимо от того, какой закон калибровочного преобразования предполагается для B .

10.3. Другие однопетлевые аномалии в теории суперструн

В предыдущих разделах было показано, что калибровочная инвариантность на массовой оболочке или сохранение тока проявляется в том, что амплитуды с внешними калибровочными частицами должны обращаться в нуль при подстановке $\xi_\mu = k_\mu$ вместо одного из векторов поляризации. Аналогично если тензор поляризации для внешнего гравитона выбран в виде $\xi_{\mu\nu} = k_\mu \xi_\nu + k_\nu \xi_\mu$, то амплитуда должна быть равна нулю вследствие отщепления продольно поляризованных гравитонов, что требуется для сохранения энергии-импульса. Если этого не происходит, то говорят о «гравитационной аномалии».

Как обсуждается ниже в разд. 13.3.2, шестиугольные диаграммы с внешними гравитонами могут приводить к гравитационным аномалиям. В теории типа I эти диаграммы состоят из нескольких топологически различных типов, которые описаны в разд. 8.3.3. В теории типа II единственной петлевой диаграммой для замкнутой струны является диаграмма с мировой поверхностью в виде тора. Поскольку петлевая диаграмма конечна, скорее всего аргументы, основанные на сокращении пропагаторов, могут быть использованы для доказательства отсутствия аномалии в диаграмме. Это соответствует результату, полученному при вычислении аномалии в низкоэнергетической теории (описанному в разд. 13.5.2), из которого следует, что шестиугольные аномалии в точности сокращаются для той комбинации безмассовых состояний, которая соответствует теории типа II. В этом же порядке по α' замкнутые струны типа I могут взаимодействовать также с бутылкой Клейна, кольцом и листом Мёбиуса. Поэтому если все аномалии для теории с калибровочной группой $SO(32)$ сокращаются, как предположительно следует из низкоэнергетического анализа в гл. 13, то гравитационные аномалии, связанные с этими диаграммами, должны сокращаться для группы $SO(32)$, хотя для других групп это может не иметь места.

В дополнение к аномалиям с одними внешними калибровочными бозонами или одними гравитонами могут возникать «смешанные аномалии» в диаграммах, содержащих одновременно внешние гравитоны и янг-миллсовы частицы. Однопетлевыми диаграммами этого типа (для суперструн типа I) являются кольцо и лист Мёбиуса. Анализ низкоэнергетической теории

в гл. 13 подсказывает, что эти аномалии также должны сокращаться для группы $SO(32)$.

Проведенный выше анализ относится к суперструнам типа I. Однако, как будет показано в разд. 13.5, низкоэнергетический анализ говорит о том, что аномалии сокращаются для гетеротических теорий и теорий типа IIB; на самом деле именно низкоэнергетический анализ аномалий стимулировал открытие гетеротических теорий. По-видимому в этих теориях петлевая диаграмма с шестью внешними частицами конечна, и аргументы, основанные на сокращении пропагаторов, доказывают равенство нулю всех аномалий. Поскольку конечность петлевой диаграммы связана с модулярной инвариантностью, по-видимому, существует явная связь между отсутствием десятимерных калибровочных и гравитационных аномалий и модулярной инвариантностью, которая соответствует инвариантности теории относительно двумерных глобальных диффеоморфизмов тороидальной мировой поверхности.

10.4. Сокращение расходимостей для группы $SO(32)$

Напомним, что в гл. 9 были обнаружены расходимости вида $\int_0^1 dq/q$ и в планарной, и в неориентируемой петлевых диаграммах. В каждом случае эти расходимости связаны с безмассовыми дилатонными головастиками, изображенными на рис. 10.4. Расходимость планарной петли пропорциональна дилатонному головасту, который вычисляется на диске, в то время как расходимость неориентируемой петли пропорциональна дилатонному головасту, вычисленному на RP^2 . Теперь мы найдем, при каких условиях (если такие условия существуют) эти расходимости сокращаются.

10.4.1. Дилатонные головасты и петлевые расходимости

Сначала мы кратко обсудим значение дилатонных головастика в контексте предельной низкоэнергетической полевой теории. Пусть ϕ обозначает дилатонное поле, а $V(\phi)$ — потенциальную энергию дилатона. Головастик определяется выражением

$$\partial V / \partial \phi, \quad (10.4.1)$$

равенство которого нулю является одним из уравнений движения теории.

В четырех измерениях существует совсем мало суперсимметричных полевых теорий; при этом к ним можно добавить скалярный потенциал $V(\phi)$. В десяти измерениях также немного

суперсимметричных полевых теорий, но из построения таких теорий следует, что к десятимерной супергравитации невозможно добавить потенциал $V(\phi)$ без явного нарушения суперсимметрии. Таким образом, в десяти измерениях дилатонный головастик должен быть равен нулю как следствие суперсимметрии, хотя аналогичное утверждение в четырехмерной супергравитации не справедливо.

Поскольку расходимости в теории типа I связаны с дилатонными головастиками, а дилатонные головастики нарушают суперсимметрию, бесконечности должны сокращаться в суперсимметричных теориях. Теория типа I определена не является суперсимметричной (на однопетлевом уровне) для всех калибровочных групп, за исключением группы $SO(32)$, так как суперсимметрия подразумевает общую ковариантность, а в гл. 13 будет показано, что для всех групп, кроме $SO(32)$, в теории присутствуют гравитационные аномалии. Однако, по-видимому (с учетом полученных выше результатов и результатов гл. 13), все эти аномалии сокращаются в случае группы $SO(32)$, и, та-

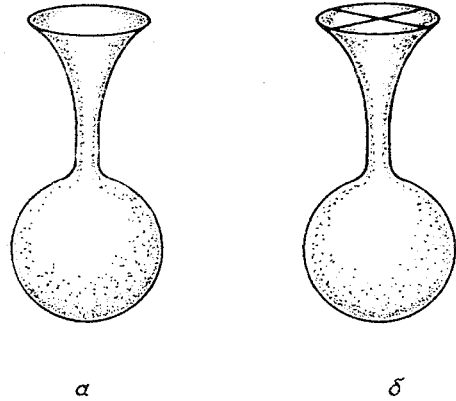


Рис. 10.4. Расходимости планарной и неориентируемой диаграмм возникают от дилатонных головастиков на диске или на RP^2 , как изображено на рисунках *a* и *b* соответственно.

ким образом, суперсимметрия в этом случае предположительно имеет место. Если это так, то дилатонные головастики должны сокращаться для группы $SO(32)$, а также должны сокращаться однопетлевые бесконечности. Именно этот вопрос мы сейчас исследуем.

Читатель, возможно, удивляется следующему. Если мы полагаем, что дилатонный головастик сокращается между диском и RP^2 в случае группы $SO(32)$, то почему мы не исследуем прямо этот вопрос, а вместо этого пытаемся найти ответ на него косвенным образом путем изучения однопетлевых бесконечностей? На самом деле дилатонный головастик на диске или на RP^2 представляет собой вакуумное среднее дилатонного вершинного оператора (при нулевом импульсе) на соответствующих мировых поверхностях. Соответствующее вычисление для каждой мировой поверхности в отдельности несложно, не

считая нормировки, и, как легко видеть, приводит к ненулевому ответу в каждом случае. К сожалению, в этой проблеме решающее значение играют относительные нормировочные коэффициенты, которые трудно определить, поскольку они зависят от конечных множителей, которые в обоих случаях не определяются после фиксирования калибровки по Фаддееву — Попову. По-видимому, наиболее прямым способом определения правильной нормировки дилатонных головастиков на диске и на RP^2 является получение этих головастиков в качестве коэффициентов при расходимостях ориентируемой и неориентируемой петлевых диаграмм, нормировки которых известны из унитарности.

Обратимся теперь к математическому анализу. Выражения для планарной и неориентируемой петлевых диаграмм, полученных в разд. 9.1.2 и 9.1.3, расходятся в граничных точках $q \rightarrow 0$ (или $q' \rightarrow 0$). Коэффициент при расходимости в любом из этих случаев пропорционален выражению

$$F_P(0) = \int_0^1 \left(\prod_{r=1}^3 \Theta(v_{r+1} - v_r) dv_r \right) \prod_{r < s} (\sin \pi(v_s - v_r))^{2\alpha' k_r \cdot k_s}, \quad (10.4.2)$$

где $v_4 = 1$. (В анализ этого раздела полезно включить явную зависимость от α' .) Произведя замену v_3 на

$$x = \frac{\sin \pi(v_2 - v_1) \sin \pi v_3}{\sin \pi(v_3 - v_1) \sin \pi v_2} \quad (10.4.3)$$

с якобианом

$$\frac{\partial v_3}{\partial x} = \frac{1}{\pi} \operatorname{Im} \left(\frac{1}{x - y} \right), \quad (10.4.4)$$

где $y = \exp\{i\pi v_1\} \sin \pi(v_2 - v_1) / \sin \pi v_2$, с помощью прямых вычислений можно показать, что

$$F_P(0) = \frac{1}{\pi} \int_0^1 dx \int_0^1 dv_2 \int_0^{v_2} dv_1 x^{-\alpha' s} (1 - x)^{-\alpha' t} \operatorname{Im} \left(\frac{1}{x - y} \right). \quad (10.4.5)$$

Это выражение можно вычислить, используя соотношение

$$\begin{aligned} \int_0^{v_2} \frac{dv_1}{x - y} &= \int_0^{v_2} \frac{dv_1 (e^{2i\pi v_2} - 1)}{e^{2i\pi v_1} + (x - 1)e^{2i\pi v_2} - x} = \\ &= \frac{1 - e^{2i\pi v_2}}{(x - 1)e^{2i\pi v_2} - x} \left(\frac{1}{2i\pi} \ln \left(\frac{x}{x - 1} \right) - v_2 \right), \quad (10.4.6) \end{aligned}$$

которое легко интегрируется по v_2 , что дает

$$F_P(0) = -\frac{1}{2\pi^2} \int_0^1 \left(\frac{\ln x}{1-x} + \frac{\ln(1-x)}{x} \right) x^{-\alpha's} (1-x)^{-\alpha't} dx. \quad (10.4.7)$$

Сравним этот результат с выражением для древесной диаграммы с тем же порядком внешних частиц, приведенным в разд. 7.4.2, которое можно записать (с восстановленной зависимостью от α') в виде

$$\begin{aligned} A_{tree} &= -2g^2(\alpha')^2 K G_P \frac{\Gamma(-\alpha's) \Gamma(-\alpha't)}{\Gamma(1-\alpha's-\alpha't)} = \\ &= 2g^2 K G_P \frac{\alpha'}{t} \int_0^1 x^{-\alpha's-1} (1-x)^{-\alpha't} dx. \end{aligned} \quad (10.4.8)$$

Отсюда следует, что расходимость планарной петли пропорциональна производной от древесной амплитуды

$$K g^4 G_P F(0) \sim \frac{g^2}{\alpha'} \frac{\partial}{\partial \alpha'} A_{tree}. \quad (10.4.9)$$

10.4.2. Сокращение расходимостей

Неориентируемая петлевая амплитуда имеет в точности тот же вид, что и планарная амплитуда, но с заменой q^2 на $-q^2$ и с другим коэффициентом. Следовательно, для определенной калибровочной группы расходимости этих двух амплитуд могут сократиться. Поскольку $\eta G_P = n G_N$ для группы $SO(32)$ ($n = 32$ и $\eta = -1$), оба вклада вместе дают

$$A_P + A_N = 8\pi^3 g^4 K G_P \int_{-1}^1 \frac{d\lambda}{\lambda} F(\lambda), \quad (10.4.10)$$

где $\lambda = q^2$. Это выражение несингулярно, если предполагается, что симметризация в точке $\lambda = 0$ производится с помощью симметричного обрезания — другими словами, если интеграл понимается в смысле главного значения.

Приведенный аргумент в пользу конечности $SO(32)$ -теории является не совсем строгим. Степень отдельных расходимостей зависит от выбора переменных. Если бы мы определили переменную q в выражении для неориентируемой петлевой амплитуды по-другому, то с формальной точки зрения сокращение расходимостей не имело бы места. По-видимому, использованный выбор переменной q' является естественным, так как он приводит к подынтегральным выражениям для планарной и неориентируемой петель, которые объединяются путем расшире-

ния области интегрирования. Вопрос, который действительно необходимо решить, заключается в том, существует ли калибровочно-инвариантный способ регуляризации расходимостей петлевых амплитуд, который удовлетворяет сделанному выбору. Тот факт, что калибровочные аномалии также сокращаются в одной петле для группы $SO(32)$ (как обсуждается в этой главе и гл. 13), является еще одним свидетельством выделенной роли группы $SO(32)$ в теориях типа I. Он также свидетельствует о том, что доказательство сокращения расходимостей можно провести строго.

Не существует принципиальных трудностей для рассмотрения амплитуд с большим, чем четыре, числом внешних состояний, однако явные вычисления представляют алгебраические трудности, так как в общем случае множители в вершинах содержат сложные вклады от фермионных ненулевых мод. На самом деле для петель с $M > 4$ внешними бозонными линиями, возможно, удобнее использовать ковариантный формализм, основанный на полях ψ^μ , несмотря на то что бозонные и фермионные петли необходимо вычислять отдельно, а затем складывать.

Связь бесконечностей с дилатонными головастиками означает, что сокращение расходимостей, показанное для четырехчастичных амплитуд, должно быть также свойством однопетлевых амплитуд с произвольным числом внешних состояний. Картины мировых поверхностей на рис. 8.12 и 8.15, *в* показывают, что сокращение расходимостей можно рассматривать как сокращение вкладов диска (для планарной диаграммы) и действительной проективной плоскости (для неориентируемой диаграммы), которые связаны с мировой поверхностью длиной узкой трубой. Эти конфигурации не могут зависеть от количества внешних состояний, присоединенных к мировой поверхности, и, следовательно, должны быть независимы от числа внешних частиц. Этот аргумент должен быть применимым даже в случае многопетлевых диаграмм. Если $SO(32)$ -теория суперструн типа I содержит многопетлевые расходимости, то они должны иметь совершенно другое происхождение.

В дополнение к описанным выше петлевым диаграммам, которые все имеют порядок g^4 , существуют другие диаграммы, дающие вклады в потенциальные расходимости теории того же порядка. Для бозонной теории они описаны в разд. 8.3.3. Например, диаграмма в виде диска с внешними состояниями замкнутой струны (рис. 8.23, *а*) имеет расходимость, которая должна была бы сократиться с расходимостью диаграммы, описываемой проективной плоскостью. Аналогично все расходимости, связанные с бутылкой Клейна, и расходимости, связанные

с взаимодействием замкнутых струн, в котором внешние состояния взаимодействуют с кольцом или листом Мёбиуса, должны сокращаться. Рис. 8.27 показывает, что последнюю сумму расходимостей можно формально представить в виде последовательности диска и проективной плоскости. Поскольку локальное поведение мировых поверхностей, которые отвечают за эти расходимости, идентично детально описанным петлевым диаграммам, кажется неизбежным, что для этой пары диаграмм сокращение расходимостей будет происходить точно так же.

10.5. Резюме

В этой главе мы описали вычисление однопетлевых вкладов в калибровочную аномалию в теории суперструн типа I. Эти вклады изучались путем рассмотрения шестиугольных диаграмм, в которых внешними состояниями являются безмассовые калибровочные частицы на массовой оболочке. Сокращение этих аномалий необходимо для последовательности теории. Вычисления в теории струн обобщают аналогичные вычисления в полевой теории Янга—Миллса, которые также были кратко описаны. Планарная и неориентируемая шестиугольные диаграммы с циркулирующими по петле киральными фермионами приводят к аномалиям, имеющим одну и ту же форму. Требование сокращения аномалий однозначно определяет калибровочную группу — ею должна быть группа $SO(32)$. Непланарные диаграммы свободны от аномалий отдельно и независимо от калибровочной группы. Этот факт тесно связан с тем обстоятельством, что непланарные диаграммы содержат связанные состояния из гравитационного сектора. Для пояснения этого сокращения мы упомянули, что при низких энергиях аномалия непланарной шестиугольной диаграммы включает вклад от обмена безмассовой частицей, соответствующей антисимметричному тензорному полю. В гл. 13 показано, что обмен такой частицей может дать аномалию, которая в точности сокращает аномалию с фермионной петлей и соответствующим теоретико-групповым множителем.

Приложение 10.A. Альтернативная регуляризация

В этом приложении описан метод регуляризации шестиугольных струнных диаграмм, который можно интерпретировать как «разделение точек» в вершинах на мировой поверхности. Регуляризация достигается путем введения в пропагатор, несущий импульс p_r , множителя $\exp\{-\eta_r L_0\}$, где η_r — малый положительный параметр, который устремляется к нулю в конце

вычислений. Такое обрезание приводит к подавлению состояний с большой величиной $L_0 = N + p^2/2$ в пропагаторе. Поэтому он сильно напоминает метод, использованный Фудзикавой для регуляризации фермионных детерминантов путем подавления мод с большим импульсом за счет гауссова обрезания импульсов. В контексте теории струн этот метод подавляет также состояния с большими массами. Измененный пропагатор имеет вид

$$S_{\eta_r} = e^{-\eta_r L_0} \frac{F_0}{L_0} = F_0 \int_0^{y_r} x_r^{L_0 - 1} dx_r, \quad (10.A.1)$$

где $y_r = \exp\{-\eta_r\}$, что означает, что отношение ρ_r/ρ_{r-1} всегда меньше $\exp\{-\eta_r\}$, поэтому точки ρ_r и ρ_{r-1} не могут совпадать.

Эта регуляризация симметрична по всем внешним частицам, если все шесть параметров η_r выбраны одинаковыми. Такой выбор устраняет из амплитуды все полюсы, так как в любом из каналов, образованном внешними частицами, соответствующая совокупность переменных ρ не содержит близкие значения ρ_r на мировой поверхности. Альтернативная возможность, оставляющая большинство полюсов, состоит в таком выборе, когда все переменные η_r равны нулю, за исключением одной, которая соответствует сокращенным пропагаторам рядом с линией, чья аномалия в данный момент исследуется.

Рассмотрим сначала случай общих значений η_r . Поскольку при такой регуляризации все внешние линии эквивалентны, рассмотрим расходимость, связанную с линией под номером 6. Как и раньше, аномалия появляется только в нарушающей четность амплитуде (10.2.4). Используя соотношение (10.2.14), регуляризованную аномалию задаем разностью двух членов с сокращенными пропагаторами. Для случая планарной диаграммы ее можно записать в виде

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_P \sim \lim_{\{\eta_r\} \rightarrow 0} G_P \int d^{10}p \left(\text{Tr} \left[e^{-\eta_1} W(\xi_1, k_1, 1) \frac{F_0 e^{-\eta_2 L_0}}{L_0} \dots V_0(k_6, 1) \bar{\Gamma} \right] - \right. \\ \left. - \text{Tr} \left[\frac{F_0 e^{-\eta_1 L_0}}{L_0} W(\xi_1, k_1, 1) \dots W(\xi_5, k_5, 1) e^{-\eta_6 L_0} V_0(k_6, 1) \bar{\Gamma} \right] \right). \end{aligned} \quad (10.A.2)$$

Подстановка интегрального представления для каждого пропагатора дает

$$\mathcal{W}_P \sim G_P (W_P^1 + W_P^2), \quad (10.A.3)$$

где

$$W_P^1 = \lim_{\{\eta_r\} \rightarrow 0} \int d^{10}p \int_0^{y_1} \frac{dx_1}{x_1} \dots \int_0^{y_5} \frac{dx_5}{x_5} \text{Tr} [\omega^{L_0} W(k_1, \rho_1) F_0 \dots \times \\ \times W(k_5, \rho_5) F_0 W(k_6, \rho_6) \bar{\Gamma}], \quad (10.A.4)$$

$$W_P^2 = - \lim_{\{\eta_r\} \rightarrow 0} \int d^{10}p \int_0^{y_2} \frac{dx_2}{x_2} \dots \int_0^{y_6} \frac{dx_6}{x_6} \text{Tr} [\omega^{L_0} F_0 W(k_1, \rho_1) \dots \times \\ \times W(k_5, \rho_5) F_0 W(k_6, \rho_6) \bar{\Gamma}]. \quad (10.A.5)$$

В слагаемом W_P^1 $x_6 \equiv y_6$, в то время как в W_P^2 $x_1 \equiv y_1$. И в W_P^1 , и в W_P^2 $\omega = x_1 x_2 \dots x_6$, а $\rho_r = x_1 \dots x_r$. Отметим, в частности, что в W_P^1

$$\ln \omega = \ln \rho_5 - \eta_6, \quad (10.A.6)$$

а в W_P^2

$$v_1 = \frac{\ln \rho_1}{\ln \omega} = \frac{-\eta_1}{\ln \omega}. \quad (10.A.7)$$

След по матрицам Дирака вычисляется тем же способом, который привел к (10.2.16), и дает члены, по форме похожие на первое слагаемое в (10.2.16). W_P^1 содержит интеграл

$$\int d^{10}p \varepsilon_{\mu_1 \dots \mu_5 \nu_1 \dots \nu_5} \xi_1^{\mu_1} \dots \xi_5^{\mu_5} p^{\nu_1} k_1^{\nu_2} \dots k_4^{\nu_5} \times \\ \times \text{Tr} (\omega^{L_0} V_0(k_1, \rho_1) \dots V_0(k_6, \rho_6) \Gamma_d), \quad (10.A.8)$$

в то время как W_P^2 содержит

$$\int d^{10}p \varepsilon_{\mu_1 \dots \mu_5 \nu_1 \dots \nu_5} \xi_1^{\mu_1} \dots \xi_5^{\mu_5} (p - k_1)^{\nu_1} k_2^{\nu_2} \dots k_5^{\nu_5} \times \\ \times \text{Tr} (\omega^{L_0} V_0(k_1, \rho_1) \dots V_0(k_6, \rho_6) \Gamma_d). \quad (10.A.9)$$

В (10.2.16) интегралы этого типа объединены с регуляризирующими членами Паули—Вилларса, поэтому можно было перейти к пределу $\eta_r \rightarrow 0$ и произвести простой сдвиг петлевого импульса, что привело бы к исчезновению каждого члена. В исследуемом случае важно рассмотреть петлевой интеграл до перехода к пределу. В обоих членах интегрирование по p содержит множители

$$\frac{1}{2} \sum_{r=1}^6 p_r^2 \ln x_r = \frac{1}{2} p^2 \ln \omega + p_\mu \sum_{r=1}^6 k_r^\mu \ln \rho_r + \frac{1}{2} \sum_{r < s} k_r \cdot k_s \ln(\rho_s/\rho). \quad (10.A.10)$$

Это означает, что множитель p^ν в (10.A.8) и (10.A.9) можно заменить на член, линейный до $\partial/\partial p^\nu$, т. е.

$$p^\nu \rightarrow \frac{1}{\ln \omega} \frac{\partial}{\partial p^\nu} - \sum_{r=1}^6 k_r^\nu \frac{\ln \rho_r}{\ln \omega}. \quad (10.A.11)$$

После интегрирования по частям, мы видим, что только второй член дает вклад в (10.A.8) и (10.A.9). Используя сохранение импульса для исключения k_6^ν , в каждом случае члены, которые остаются после свертки с тензором ε , можно записать в виде

$$\varepsilon(\xi, k) \left(\sum_{r=1}^6 \eta_r / \ln \omega \right) \int d^{10}p \text{Tr} (\omega^{L_0} V_0(\rho_1) \dots V_0(\rho_6) \bar{\Gamma}). \quad (10.A.12)$$

В пределе $\eta_r \rightarrow 0$ это выражение дает основной вклад в интеграл в области интегрирования вблизи $\omega = 1$.

Слагаемое W_P^1 теперь можно записать в виде

$$W_P^1 \sim \varepsilon(\xi, k) \int_0^{\eta_1} \frac{dx_1}{x_1} \dots \int_0^{\eta_5} \frac{dx_5}{x_5} \left(\sum_{r=1}^6 \eta_r / \ln \omega \right) \times \\ \times \int d^{10}p \text{Tr} (\omega^{L_0} V_0(\rho_1) \dots V_0(\rho_6) \Gamma_d). \quad (10.A.13)$$

Для того чтобы выделить область вблизи $\omega = 1$, удобно произвести еще одну замену переменных $v_r = \ln \rho_r / \ln \omega$ ($r = 1, \dots, 5$) и $q = \exp(2\pi^2 / \ln \omega)$. Отметим, что в этом случае q зависит от v_5 , благодаря соотношению (10.A.6), из которого следует

$$v_5 = \frac{\ln \rho_5}{\ln \omega} = \frac{\ln \rho_5}{\ln \rho_5 - \eta_6}, \quad (10.A.14)$$

поэтому

$$q = \exp[-2\pi^2(1 - v_5)/\eta_6]. \quad (10.A.15)$$

Эта переменная экспоненциально убывает при $\eta_6 \rightarrow 0$, когда разность $1 - v_5$ конечна. Замена переменных приводит к следующим соотношениям:

$$\frac{d\rho_r}{\rho_r} = \ln \omega dv_r \quad (10.A.16)$$

для $r = 1, 2, 3, 4$, в то время как для $r = 5$

$$\frac{d\rho_5}{\rho_5} = \frac{1}{\eta_6} \ln^2 \omega dv_5, \quad (10.A.17)$$

поэтому мера интегрирования в (10.A.13) принимает вид

$$\prod_{r=1}^5 \frac{d\rho_r}{\rho_r} = \frac{1}{\eta_6} \ln^6 \omega \prod_{r=1}^5 dv_r. \quad (10.A.18)$$

След в (10.A.13) в преобразованных переменных имеет вид (10.2.30). Отметим, в частности, что все степени $\ln \omega$ сокращаются и результат пропорционален $\sum_{r=1}^6 \eta_r / \eta_6$. Так как q убывает экспоненциально быстро в пределе $\eta_r \rightarrow 0$, то, как и раньше, в результат дает вклад только член с $N = 0$:

$$\mathcal{W}_P^1 \sim \varepsilon(\xi, k) \frac{\sum_{r=1}^6 \eta_r}{\eta_6} \int_{R_1} \prod_{r=1}^5 dv_r \langle 0 | V_0(z_1) \dots V_0(z_6) | 0 \rangle. \quad (10.A.19)$$

Область интегрирования R_1 обсуждается ниже. Выражение для \mathcal{W}_P^2 имеет тот же вид, что и \mathcal{W}_P^1 , но с заменой η_6 в знаменателе на η_1 , заданное формулой (10.A.7). Соответствующая область интегрирования R_2 также отличается.

Выбор симметричной регуляризации означает равенство всех η_r общему значению η до перехода к пределу $\eta \rightarrow 0$. В этом случае область интегрирования для \mathcal{W}_P^1 в переменных ρ_r задается следующим образом:

$$\rho_6 = \rho_5 - \eta \leq \rho_4 - 2\eta \leq \rho_1 - 5\eta \leq -6\eta. \quad (10.A.20)$$

Используя соотношения $v_r = \ln \rho_r / \ln \omega$ и (10.A.14), получаем, что область R_1 задается неравенствами

$$1 + v_{r-1} \leq v_5 + v_r \quad \text{для } r = 1, \dots, 6, \quad (10.A.21)$$

где $v_6 = 1$ и $v_0 \equiv 0$. Аналогично область интегрирования R_2 в выражении для \mathcal{W}_P^2 с использованием соотношения (10.A.7) принимает вид

$$v_1 + v_{i-1} \leq v_i. \quad (10.A.22)$$

Обе области R_1 и R_2 не пересекаются, так как для области R_1 $v_1 + v_5 \geq 1$, в то время как для области R_2 $v_1 + v_5 \leq 1$. Подынтегральное выражение имеет тот же вид, что и при регуляризации Паули—Вилларса, но полная область интегрирования, полученная в результате сложения \mathcal{W}_P^1 и \mathcal{W}_P^2 , оказывается меньше области интегрирования в случае регуляризации Паули—Вилларса. Тем не менее оба метода дают полностью совпадающий критерий для сокращения аномалий.

Результат особенно просто выглядит, если все значения η_r для $r \leq 5$ положить равными нулю до перехода к пределу по

η_6 . Тогда процедура несимметрична по внешним состояниям. В этом случае $\mathcal{W}_P^2 = 0$, а результат для \mathcal{W}_P^1 идентичен полной аномалии (10.2.34), полученной методом Паули—Вилларса (в котором внешние состояния также несимметричны). Аналогично, приравнявая все η_r , за исключением η_1 , нулю, получаем равенство $\mathcal{W}_P^1 = 0$; тогда полная аномалия возникает от члена \mathcal{W}_P^2 , который равен \mathcal{W}_P в (10.2.34). Каждый из этих частных примеров эквивалентен регуляризации только одного из пропагаторов, соседнего с шестой вершиной, к которой присоединено продольное состояние.

II. Функциональные методы в калибровке светового конуса

Вычисления в рамках теории возмущений, основанные на операторном формализме и описанные в гл. 7—10, можно использовать тогда, когда по крайней мере одна из струн в каждой вершине взаимодействия представлена физическим состоянием на массовой оболочке. Такой подход эффективен при вычислении древесных и однопетлевых амплитуд, но его нельзя применить в случае многопетлевых амплитуд, так как последние обязательно содержат по крайней мере одну вершину, в которой взаимодействуют три внутренние (и поэтому находящиеся вне массовой оболочки) струны.

В принципе систематическое получение правил для вычислений произвольных диаграмм в теории струн должно опираться на вторично квантованную полевою теорию струн. Такая теория развита в калибровке светового конуса для бозонных струн и суперструн. Основные усилия направлены сейчас также на формулировку ковариантных калибровочно-инвариантных принципов действия. Такая формулировка могла бы привести к более глубокому пониманию геометрического смысла теории струн.

В настоящей монографии мы не будем развивать струнную полевою теорию, а вместо этого в данной главе будет развит «первично квантованный» подход к правилам Фейнмана для струнной полеовой теории в калибровке светового конуса. Помимо того, что этот подход демонстрирует по крайней мере некоторые из составных частей струнной полеовой теории, он обладает рядом других достоинств. Эквивалентность первично квантованных правил Фейнмана интегралам по мировым поверхностям — единственному подходу к многопетлевым амплитудам, который упоминался до сих пор, — важна для понимания унитарности последнего подхода. Вместе с этим, хотя в предыдущих главах уделялось большое внимание конформной инвариантности и конформным отображениям, явное и обстоятельное использование этих понятий в данной главе должно про-

лить на них новый свет. Большая часть вычислений в данной главе будет ограничена бозонной теорией. В последнем разделе мы опишем обобщение этих идей на формализм калибровки светового конуса с пространственно-временной суперсимметрией.

11.1. Струнный интеграл по мировым поверхностям

Как и в теории точечных частиц структуру правил вычисления диаграмм, вытекающих из полеовой теории, можно получить в рамках первично квантованной теории. Основная идея состоит в описании струнных амплитуд рассеяния путем обобщения фейнмановского интеграла по траекториям из квантовой механики точечных частиц. В этом подходе амплитуда рассеяния в теории струн описывается суммой по всем связным мировым поверхностям с весом $\exp iS$, соединяющим входящие и выходящие струны. Мировая поверхность может иметь присоединенные ручки или вырезанные отверстия (в случае теорий с открытыми струнами), которые соответствуют петлевым поправкам вторично квантованной полеовой теории.

11.1.1. Аналоговая модель

Начнем с описания цели данной главы. В разд. 1.4 приведена общая формула, выражающая струнные амплитуды рассеяния через интегралы по римановым поверхностям. Эти интегралы (с помощью гауссова интегрирования) можно свести к интегралам по конечному числу параметров (модулярные параметры поверхности и параметры, характеризующие положение вершинных операторов). В соответствии с этим, например, амплитуда рассеяния M тахионов в основном состоянии (в теории бозонных струн) в произвольном порядке теории возмущений (т. е. с мировой поверхностью, имеющей произвольное число присоединенных ручек или вырезанных отверстий) имеет вид

$$A(1, 2, \dots, M) = \int d\mu(z_1, z_2, \dots, z_M, \gamma) \times \exp\left(-\frac{1}{2\pi\alpha'} \sum_{r>s} p_r \cdot p_s N(z_r; z_s, \gamma)\right). \quad (11.1.1)$$

Здесь z_i — координаты вершинных операторов, а γ — модулярные параметры мировой поверхности. В соответствии с нашим анализом в гл. 1 и 3 мера $d\mu$ должна определяться путем вычисления функциональных детерминантов струнных координат X^μ и конформных духов b, c . Здесь также $N(z_r; z_s, \gamma)$ — функция Грина уравнения Лапласа на мировой поверхности с

граничными условиями Неймана (нормальная производная от N на границе мировой поверхности, если она существует, равна нулю)¹⁾. Для внешних открытых струн z_i являются точками на границе мировой поверхности, в то время как в случае замкнутых струн внешние частицы присоединяются к внутренней части мировой поверхности. По историческим причинам формула (11.1.1) (первоначально с неточным правилом определения меры $d\mu$) была известна как аналоговая модель.

Выражение (11.1.1) представляет собой замечательную формулу, которая суммирует многое из того, что в настоящее время известно в теории струн. Однако она имеет несколько недостатков. Не очевидно, например, почему (11.1.1) согласуется с унитарностью. Не ясно также, какова связь, если она существует, формулы (11.1.1) со стандартными предписаниями для получения амплитуд рассеяния с помощью диаграмм Фейнмана.

Наша цель в данной главе состоит в том, чтобы пролить свет на эти вопросы путем вывода формулы (11.1.1) с помощью стандартного квантовомеханического формализма, использующего гамильтониан в калибровке светового конуса. Рассматриваемая техника была предложена Манделштамом. Она является хорошо определенной квантовомеханической основой для вычислений в рамках теории возмущений. Правила вычисления в этой калибровке теоретико-возмущенческих диаграмм можно получить из эрмитова квантовомеханического гамильтониана, поэтому унитарность гарантирована.

В этом методе струна рассматривается как квантовомеханическая система, в которой взаимодействия между струнами задаются таким способом, который обеспечивает унитарность теории. Переменные интегрирования в (11.1.1) (координаты вершинных операторов и модулярные параметры поверхности) отождествляются с физическими параметрами, такими как времена взаимодействия и часть полного импульса p^+ , которая переносится промежуточными струнными состояниями. Недостатком метода определено является то, что лоренц-ковариантность не является явной; ее доказательство будет одной из наших целей. Другой недостаток заключается в том, что происхождение калибровочной инвариантности и общей ковариантности (или их обобщений на теорию струн) не проанализировано; надлежащий анализ ставится задачей для физики завтрашнего дня.

¹⁾ Это граничное условие соответствует результату, полученному в разд. 2.1.3, а именно тому, что производная по σ от $X^\mu(\sigma, \tau)$ на концах струны $\sigma = 0, \pi$ должна быть равна нулю.

В большей части настоящей главы мы будем обсуждать теорию бозонных струн, а соответствующие результаты для суперсимметричных струн будут кратко сформулированы в разд. 11.7.

11.1.2. Пропагатор свободной струны

Чтобы проиллюстрировать некоторые тонкие вопросы, которые содержит функциональный формализм, полезно детально рассмотреть пропагатор свободной струны. Согласно фейнмановскому подходу к квантовой механике, функциональный интеграл для свободного пропагатора, определяющего амплитуду перехода из произвольного состояния $|X_1(\sigma)\rangle$ в момент τ_1 в произвольное состояние $|X_2(\sigma)\rangle$ в момент τ_2 , имеет вид

$$G(X_1(\sigma), \tau_1; X_2(\sigma), \tau_2) = \langle X_2 | \int \mathcal{D}X^i(\sigma, \tau) \times \exp\left(i \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \int d\sigma \mathcal{L}\right) | X_1 \rangle, \quad (11.1.2)$$

где $X^i(\sigma, \tau_A) \equiv X_A^i(\sigma)$, $|X_A\rangle \equiv |X_A(\sigma)\rangle$ ($A=1, 2$), $\int \mathcal{D}X^i(\sigma, \tau)$ — интеграл по всем поверхностям, соединяющим начальную и конечную конфигурации струны, а \mathcal{L} — лагранжиана плотность для бозонной струны, которая подробно рассматривалась в гл. 2. Часто для вычислительных целей бывает удобно произвести замену $\tau \rightarrow -i\tau$, и тогда можно считать, что параметры струны образуют одну комплексную переменную (как сделано в гл. 1 и 3)

$$\rho = \tau + i\sigma. \quad (11.1.3)$$

Эта замена используется всюду в настоящей главе. Произведем также изменение масштаба параметра σ таким образом, чтобы он пробегал значения

$$0 \leq \sigma \leq 2\pi |p^+| \quad (11.1.4)$$

с соответствующим изменением масштаба параметра τ , при котором

$$X^+ = \tau/2\pi T \quad (11.1.5)$$

(это означает замену $2|p^+|\sigma$ на σ и $2|p^+|\tau$ на τ). Как и раньше, для удобства натяжение струны будет полагаться равным $T = 1/\alpha'$ (т. е. $\alpha' = 1/2$), а значение p^+ для входящих струн будет выбираться положительным. При этом

$$\exp\left(i \int d\tau d\sigma \mathcal{L}\right) \rightarrow \exp\left(-\frac{1}{2\pi} \int d\tau \int_0^{2\pi|p^+|} d\sigma \partial_\alpha X^i \partial^\alpha X^i\right). \quad (11.1.6)$$

Состояния струны нормированы следующим образом:

$$\langle X_2 | X_1 \rangle \equiv \int \mathcal{D}X_i^i G(\mathbf{X}_1(\sigma), \tau_1; \mathbf{X}_2(\sigma), \tau_2) = 1. \quad (11.1.7)$$

Напомним, что физические состояния замкнутой струны не зависят от начала отсчета координаты σ . Поэтому нормировка физических состояний замкнутой струны $|\mathbf{X}(\sigma)\rangle_{\text{физ}}$ выражается через состояния струны, на которые не наложено никаких ограничений, путем проектирования на подпространство состояний, удовлетворяющих условию

$$|\mathbf{X}(\sigma)\rangle_{\text{физ}} = \frac{1}{2\pi|p^+|} \int_0^{2\pi|p^+|} d\sigma_0 |\mathbf{X}(\sigma + \sigma_0)\rangle. \quad (11.1.8)$$

В этом выражении состояние со сдвинутым аргументом $\mathbf{X}(\sigma + \sigma_0)$ генерируется из состояния $\mathbf{X}(\sigma)$ следующим образом:

$$\begin{aligned} |\mathbf{X}(\sigma + \sigma_0)\rangle &= \exp\left(\frac{i\sigma_0}{|p^+|} \int_0^{2\pi|p^+|} d\sigma X'^i(\sigma) \frac{\partial}{\partial X^i(\sigma)}\right) |\mathbf{X}(\sigma)\rangle = \\ &= \exp\left(i(L_0 - \tilde{L}_0) \frac{\sigma_0}{|p^+|}\right) |\mathbf{X}(\sigma)\rangle. \end{aligned} \quad (11.1.9)$$

Результат интегрирования по σ_0 в (11.1.8) сводится к наложению обычного дополнительного условия $L_0 = \tilde{L}_0$ на физическое пространство состояний замкнутой струны. Из условия (11.1.8) следует, что нормировка физического состояния удовлетворяет уравнению

$$\text{физ} \langle \mathbf{X} | \mathbf{X} \rangle_{\text{физ}} = \frac{1}{2\pi|p^+|} \int_0^{2\pi|p^+|} d\sigma_0 \langle \mathbf{X}(\sigma) | \mathbf{X}(\sigma + \sigma_0) \rangle. \quad (11.1.10)$$

В вычислениях с замкнутыми струнами внешние состояния берутся без проектирования, а результат интегрируется по переменным каждой внешней струны. Поэтому результат отличается на множитель $1/\sqrt{2\pi p_r^+}$ в нормировке каждого внешнего состояния замкнутой струны с импульсом p_r . Кроме того, при вычислении амплитуды рассеяния интегрирование по σ для каждого внешнего состояния дает дополнительный множитель $2\pi p_r^+$ для каждой замкнутой струны, что приводит к суммарному множителю $\sqrt{2\pi p_r^+}$, о котором необходимо помнить при получении ковариантной амплитуды рассеяния замкнутых струн.

Функциональный интеграл необходимо определить таким образом, чтобы он содержал регуляризацию расходимостей, связанных с коротковолновыми модами. Эти бесконечности можно учесть в определении константы связи g и фазы амплитуды рассеяния. Для большей ясности запишем пропагатор в виде

$$G(\mathbf{X}_1(\sigma), \tau_1; \mathbf{X}_2(\sigma), \tau_2) = \langle \mathbf{X}_2 | \exp[-P^- X^+] | \mathbf{X}_1 \rangle, \quad (11.1.11)$$

где $\hat{t} = \tau_2 - \tau_1 \geq 0$. Гамильтониан P^- в калибровке светового конуса, определенный в разд. 2.3.1, сопряжен с $X^+ = \hat{t}/2$ и задается в конфигурационном пространстве следующим выражением:

$$P^- = \pi \int_0^{2\pi|p^+|} \left\{ \mathbf{P}^2(\sigma) + \frac{1}{\pi^2} \left(\frac{\partial \mathbf{X}(\sigma)}{\partial \sigma} \right)^2 \right\} d\sigma, \quad (11.1.12)$$

где $\mathbf{P}(\sigma) = \dot{\mathbf{X}}(\sigma)/\pi = -i\delta/\delta\mathbf{X}(\sigma)$. Это выражение представляет собой просто сумму гамильтонианов гармонических осцилляторов для нормальных координат.

Волновая функция струны Ψ , удовлетворяющая уравнению

$$\left(P^- + \frac{\partial}{\partial X^+} \right) \Psi = 0, \quad (11.1.13)$$

является просто произведением бесконечного числа волновых функций гармонических осцилляторов. Аналогично пропагатор есть просто произведение функций Грина бесконечного числа гармонических осцилляторов, где функция Грина для одного гармонического осциллятора, соответствующего нормальной моде x с частотой ω , имеет вид (после поворота Вика в мнимое время)

$$\begin{aligned} G_\omega(x_1, 0; x_2, t) &= \left(\frac{\omega}{2\pi \sinh \omega t} \right)^{1/2} \exp\left(-\frac{1}{2} \omega (x_1^2 + x_2^2) \coth \omega t + \right. \\ &\quad \left. + \omega x_1 x_2 \operatorname{csch} \omega t \right). \end{aligned} \quad (11.1.14)$$

В этом выражении x_1 и x_2 обозначают начальное и конечное значения координаты x , а $G(x, t; x', t')$ удовлетворяет уравнению

$$\left(H + \frac{\partial}{\partial t} \right) G(x, t; x', t') = \delta(t - t') \delta(x - x'), \quad (11.1.15)$$

где

$$H = -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \omega^2 x^2. \quad (11.1.16)$$

Нормировка выбрана таким образом, чтобы $G(x_1, 0; x_2, t)$ равнялась $\delta(x_1 - x_2)$ при $t = 0$, что соответствует нормировке

состояний (11.1.7). Множитель в (11.1.14), зависящий от x , представляет собой просто экспоненту от классического действия, в то время как квантовомеханическая информация содержится в множителе, независимом от x .

Функция Грина в теории струн соответствует бесконечному числу осцилляторов с линейным частотным спектром. Произведение независимых от x членов расходится из-за множителя $(\prod_m \omega_m)^{1/2}$ (где $\omega_m \sim m$). Ниже мы опишем метод Гайлса и Торна для регуляризации этой расходимости путем высокочастотного обрезания.

11.1.3. Решеточное обрезание

Для тщательного анализа расходимостей можно ввести высокочастотное обрезание путем замены непрерывного параметра σ на одномерную решетку с шагом a . (Альтернативный способ состоит во введении решетки по обоим направлениям σ и τ , которые рассматриваются симметричным образом. Этот способ приводит к тем же физическим результатам.) При этом ожидается, что физические возбуждения струны имеют длину волны, намного превосходящую a , поэтому теория струн возникает в непрерывном пределе. Координаты и импульсы в узлах решетки определяются следующим образом:

$$X_I^i = X^i(Ia), \quad I = 0, 1, \dots, M, \quad (11.1.17)$$

$$P_I^i \equiv -i \frac{\partial}{\partial X_I^i} = aP^i(Ia), \quad I = 0, 1, \dots, M, \quad (11.1.18)$$

где длина струны в направлении σ равна

$$2\pi\rho^+ = Ma. \quad (11.1.19)$$

Из периодических граничных условий для замкнутой струны следует $\mathbf{X}_M = \mathbf{X}_0$, в то время как для открытой струны условие исчезновения производной от \mathbf{X} на концах струны принимает вид $\mathbf{X}_0 = \mathbf{X}_{-1}$ и $\mathbf{X}_M = \mathbf{X}_{M-1}$. Интегралы по σ заменяются на дискретные решеточные суммы

$$\int_0^{2\pi\rho^+} d\sigma \rightarrow a \sum_{I=0}^M, \quad (11.1.20)$$

а $\partial X(\sigma)/\partial\sigma \rightarrow (X_{I+1} - X_I)/a$. Поэтому решеточное выражение для гамильтониана принимает вид

$$P^- = \frac{\pi}{a} \sum_{I=0}^{M-1} \left\{ P_I^2 + \frac{1}{\pi^2} (\mathbf{X}_{I+1} - \mathbf{X}_I)^2 \right\} \quad (11.1.21)$$

вместо (11.1.12). Эту систему M связанных гармонических осцилляторов можно решить путем перехода к базису нормальных мод.

Для замкнутых струн координаты \mathbf{X}_I и \mathbf{P}_I можно записать через их моды \hat{X}_m^i и $\hat{P}_m^i \equiv -i\partial/\partial\hat{X}_{-m}^i$ в следующем виде:

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_I &= \mathbf{x} + \sqrt{\frac{\pi}{M}} \sum_{m=1}^{(M-1)/2} (\hat{X}_m e^{2\pi imI/M} + \hat{X}_{-m} e^{-2\pi imI/M}) \equiv \\ &\equiv \mathbf{x} + i \frac{\pi}{M} \sum_{m=1}^{(M-1)/2} \frac{1}{\omega_m^c} ((\alpha_m - \tilde{\alpha}_{-m}) e^{2\pi imI/M} + (\tilde{\alpha}_m - \alpha_{-m}) e^{-2\pi imI/M}), \end{aligned} \quad (11.1.22)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_I &= \frac{\mathbf{p}}{M} + \frac{1}{\sqrt{\pi M}} \sum_{m=1}^{(M-1)/2} (\hat{P}_m e^{2\pi imI/M} + \hat{P}_{-m} e^{-2\pi imI/M}) \equiv \\ &\equiv \frac{\mathbf{p}}{M} + \frac{1}{M} \sum_{m=1}^{(M-1)/2} ((\alpha_m + \tilde{\alpha}_{-m}) e^{-2\pi imI/M} + (\tilde{\alpha}_m + \alpha_{-m}) e^{-2\pi imI/M}), \end{aligned} \quad (11.1.23)$$

где предполагается, что M нечетно. Частоты замкнутой струны определяются следующим выражением:

$$\omega_m^c = 2 \sin \frac{\pi m}{M}. \quad (11.1.24)$$

Чтобы координаты были действительными, необходимо выполнение равенств $\hat{X}_{-m} = \hat{X}_m^*$ и $\hat{P}_{-m} = \hat{P}_m^*$. Операторы α_m и $\tilde{\alpha}_m$, определенные приведенными выше уравнениями, удовлетворяют коммутационным соотношениям для гармонического осциллятора (нормированным так, чтобы в пределе $m/M \rightarrow 0$ они переходили в коммутационные соотношения для непрерывного случая)

$$[\alpha_m^i, \alpha_n^j] = [\tilde{\alpha}_m^i, \tilde{\alpha}_n^j] = \frac{\omega_m^c M}{2\pi} \delta_{m, -n} \delta^{ij}. \quad (11.1.25)$$

В нормальных координатах гамильтониан можно записать в виде (используя равенство $Ma = 2\pi\rho^+$)

$$\begin{aligned} P^- &= \frac{p^2}{2\rho^+} + \frac{2}{a} \sum_{m=1}^{(M-1)/2} (|\hat{P}_m|^2 + (\omega_m^c)^2 |\hat{X}_m|^2) \equiv \\ &\equiv \frac{p^2}{2\rho^+} + \frac{2}{\rho^+} \sum_{m=1}^{(M-1)/2} (\alpha_{-m} \cdot \alpha_m + \tilde{\alpha}_{-m} \cdot \tilde{\alpha}_m) + \frac{2(D-2)}{a} \sum_{m=1}^{(M-1)/2} \omega_m^c, \end{aligned} \quad (11.1.26)$$

где последнее слагаемое возникает от нормального упорядочения операторов α (т. е. операторы рождения должны находиться слева от операторов уничтожения). Для больших M этот член можно аппроксимировать, используя соотношение

$$\frac{2}{a} \sum_{m=1}^{(M-1)/2} \omega_m^c = \frac{2}{a} \cot(\pi/2M) \sim \frac{4M}{\pi a} - \frac{1}{6\rho^+} + O(1/M). \quad (11.1.27)$$

Расходящееся слагаемое пропорционально числу узлов решетки. Если данная аппроксимация применяется в случае амплитуд рассеяния, этот член имеет одинаковый вид для любой диаграммы, дающей вклад в заданный процесс, так как полная величина ρ^+ , а следовательно, полное число узлов фиксированы. В результате множитель $\exp(-P\hat{t}/2)$ в амплитуде содержит лоренц-неинвариантный множитель $\exp[-2(D-2)M\hat{t}/\pi a]$. Это физически несущественный общий фазовый множитель (после перехода к действительному времени), в котором фаза пропорциональна площади мировой поверхности. Этот множитель можно устранить путем вычитания из гамильтониана члена $4(D-2)/a\pi$ в каждом узле решетки, которое является локальным вычитанием (т. е. не зависящим от M и ρ^+). Следующее слагаемое $-1/6\rho^+$ нельзя изменить путем локального вычитания, поэтому его величина имеет абсолютное значение. В результате формула (11.1.26) определяет физический спектр масс замкнутой струны. Например, квадрат массы основного состояния равен

$$2\rho^+P^- - \rho^2 = -\frac{(D-2)}{3}. \quad (11.1.28)$$

где P^- обозначает теперь гамильтониан, в котором произведено вычитание. Очевидно, что эта процедура дает то же выражение для массы тахиона, что и метод регуляризации с помощью ζ -функции, описанный в гл. 2.

Возбужденные моды получаются, как обычно, путем применения операторов рождения α_{-m} и $\tilde{\alpha}_{-m}$ к основному состоянию. Эти состояния должны удовлетворять дискретному аналогу условия (11.1.8). Это означает, что состояния должны быть собственными состояниями оператора L' , который сдвигает X_I в X_{I+1} и $\partial/\partial X_I$ в $\partial/\partial X_{I+1}$, т. е.

$$\begin{aligned} U^{-1}\alpha_m^i U &= \alpha_m^i \exp\{2\pi i m J/M\}, \\ U^{-1}\tilde{\alpha}_m^i U &= \tilde{\alpha}_m^i \exp\{-2\pi i m J/M\}, \end{aligned} \quad (11.1.29)$$

где

$$U = \exp\left\{\frac{2\pi i J}{M} \sum_{m=1}^{(M-1)/2} \frac{2\pi m}{\omega_m^c M} (\alpha_{-m}^i \alpha_m^i - \tilde{\alpha}_{-m}^i \tilde{\alpha}_m^i)\right\}. \quad (11.1.30)$$

В континуальном пределе эти формулы сводятся к (11.1.9).

Соответствующий анализ для открытых струн немного отличается из-за граничных условий. Координаты открытой струны разлагаются в ряд по функциям $\cos\left[m\pi\left(I + \frac{1}{2}\right)/M\right]$, где $1 \leq m \leq M-1$. Частоты мод открытой струны задаются выражением

$$\omega_m^0 = 2 \sin \frac{m\pi}{2M}, \quad (11.1.31)$$

а выражение для гамильтониана, определенного формулой (11.1.21), похоже на (11.1.26), но член, связанный с нормальным упорядочением, теперь имеет вид $(D-2) \sum \omega_m^0/a$, где

$$\frac{1}{a} \sum_1^{M-1} \omega_m^0 = \frac{1}{a} \left(\cot \frac{\pi}{4M} - 1 \right) \sim \frac{4M}{\pi a} - \frac{1}{a} - \frac{1}{24\rho^+} + O(1/M). \quad (11.1.32)$$

Окончательное выражение для P^- имеет вид

$$P^- \sim \frac{\rho^2}{2\rho^+} + \frac{1}{\rho^+} \sum_{m=1}^{M-1} \alpha_{-m} \cdot \alpha_m + (D-2) \left(\frac{4M}{\pi a} - \frac{1}{a} - \frac{1}{24\rho^+} \right). \quad (11.1.33)$$

Кроме слагаемого, пропорционального M , здесь присутствует другой расходящийся член $-(D-2)/a$, который дает лоренц-неинвариантный вклад в амплитуды рассеяния. Этот вклад связан со свободными концами струны, и его можно устранить путем локального изменения гамильтониана. Это достигается добавлением к гамильтониану члена $(D-2)/2a$ в каждой концевой точке струны. Самосогласованность этой процедуры, следующую из вычислений пропагатора, необходимо проверить для амплитуд с большим числом струн. Спектр состояний открытой струны совпадает со спектром, полученным в предыдущих главах, так как квадрат массы основного состояния равен $-(D-2)/12$.

При наличии решеточной регуляризации пропагатор струны является хорошо определенным. Он задается произведением функций Грина для отдельных осцилляторов (где каждая комплексная мода \hat{X}_m^i описывает два независимых осциллятора, соответствующих действительной и мнимой частям). Сравнивая нормировки в (11.1.16) и (11.1.26), мы видим, что каждый

комплексный осциллятор с частотой ω_m дает множитель $G_{\omega_m}(\hat{\mathbf{X}}_{1m}, 0; \hat{\mathbf{X}}_{2m}, \hat{t})$ того же вида, что и (11.1.14), но с заменой t на \hat{t}/a , x_1 и x_2 — на действительную и мнимую части $\hat{\mathbf{X}}_{1m}$ и $\hat{\mathbf{X}}_{2m}$ ($m \neq 0$) и с общим множителем 2. Функция Грина нулевой моды принимает вид $(a/2\pi\hat{t})^{(D-2)/2} \exp[-(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)^2 \rho^+ / \hat{t}]$, поэтому пропагатор замкнутой струны имеет вид

$$G^c(\mathbf{X}_1, 0; \mathbf{X}_2, \hat{t}) = G^c(\mathbf{0}, 0; \mathbf{0}, \hat{t}) \exp\left(-\frac{(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)^2 \rho^+}{\hat{t}}\right) \times \\ \times \prod_{m=1}^{(M-1)/2} \exp\left(-(|\hat{\mathbf{X}}_{1m}|^2 + |\hat{\mathbf{X}}_{2m}|^2) \omega_m \coth(\omega_m \hat{t}/a) + \right. \\ \left. + 2 \operatorname{Re}(\hat{\mathbf{X}}_{1m} \cdot \hat{\mathbf{X}}_{2m}) \omega_m \operatorname{csch}(\omega_m \hat{t}/a)\right). \quad (11.1.34)$$

В функциональном интеграле не зависящий от \mathbf{X} множитель $G^c(\mathbf{0}, 0; \mathbf{0}, \hat{t})$ возникает (с использованием условий Дирихле $\mathbf{X}_1 = \mathbf{X}_2 = \mathbf{0}$ в начальный и конечный моменты времени) из $(\det \Delta)^{-1/2}$, где Δ — оператор Лапласа на мировой поверхности. Используя выражение для функции Грина осциллятора (11.1.14), получаем явный вид этого множителя

$$G^c(\mathbf{0}, 0; \mathbf{0}, \hat{t}) = 2 \left\{ \left(\frac{a}{2\pi\hat{t}}\right)^{1/2} \prod_{m=1}^{(M-1)/2} \left(\frac{\omega_m}{2\pi \sinh \omega_m \hat{t}/a}\right) \right\}^{D-2}. \quad (11.1.35)$$

11.1.4. Континуальный предел

Частоты замкнутой струны ω_m^c , заданные формулой (11.1.24), удовлетворяют равенству

$$\prod_{m=1}^{(M-1)/2} \omega_m^c = \prod_{m=1}^{(M-1)/2} 2 \sin \frac{\pi m}{M} = \sqrt{M}, \quad (11.1.36)$$

которое приводит к следующему соотношению для замкнутых струн (с использованием равенства $\omega_m^c = \omega_{M-m}^c$):

$$G^c(\mathbf{0}, 0; \mathbf{0}, \hat{t}) = \left\{ \pi^{-(M-1)} \left(\frac{\rho^+}{\hat{t}}\right) \prod_{m=1}^{M-1} (1 - \exp[-2\omega_m^c \hat{t}/a]) \right\}^{-1} \times \\ \times \exp\left[-\hat{t} \sum_{m=1}^{M-1} \omega_m^c / a\right] \sim \\ \sim \left\{ \pi^{-(M-1)} \left(\frac{\rho^+}{\hat{t}}\right) \prod_{m=1}^{M-1} [1 - \exp(-2m\hat{t}/\rho^+)] \right\} \times \\ \times \exp(-4M\hat{t}/\pi a + \hat{t}/6\rho^+) \Big\}^{(D-2)/2}. \quad (11.1.37)$$

Расходящийся член в экспоненте — это как раз тот член, который обсуждался раньше и который можно исключить переопределением гамильтониана. Единственная другая зависимость от M содержится в множителе $\pi^{(2-D)M/2}$, который можно исключить локальным переопределением внешних волновых функций. Тогда окончательное выражение имеет гладкий континуальный предел.

Из дополнительного условия на состояния замкнутой струны (которые являются собственными состояниями оператора U (11.1.30)) следует, что физический пропагатор $G_{\text{физ}}^c$ строится по G^c путем симметризации, т. е.

$$G_{\text{физ}}^c = \frac{1}{M} \sum_{I=0}^{M-1} G^c(\{\mathbf{X}_{1,I}\}, 0; \{\mathbf{X}_{2,I+I}\}, \hat{t}). \quad (11.1.38)$$

При вычислении амплитуды рассеяния сумму необходимо заменить на интеграл по σ , поэтому нормировка каждого внешнего состояния должна включать множитель $(aM)^{-1/2} = (2\pi\rho^+)^{-1/2}$, который обсуждался выше.

Чтобы понять, каким образом спектр состояний закодирован в пропагаторе, можно рассмотреть простой пример, в котором начальное и конечное состояния являются «точечными», т. е. $\hat{\mathbf{X}}_{1m} = \hat{\mathbf{X}}_{2m} = 0$ для всех $m \neq 0$. Эти состояния автоматически удовлетворяют дополнительному условию $L_0 = \bar{L}_0$, так как они уничтожаются оператором $\alpha_m^i - \bar{\alpha}_{-m}^i$, что следует из (11.1.22). В рассматриваемом примере после обращения пропагатора (11.1.34) в функцию от поперечных импульсов путем фурье-преобразования по x_1 и x_2 пропагатор приводится к виду

$$\tilde{G}^c \sim e^{-p^2/4\rho^+} G^c(\mathbf{0}, 0; \mathbf{0}, 0). \quad (11.1.39)$$

Из уравнения (11.1.37) следует, что \tilde{G}^c можно представить в виде бесконечной суммы экспоненциальных членов $\exp(-2N\hat{t}/\rho^+)$ (где N — неотрицательное целое число), поэтому вся зависимость от поперечного импульса содержится в множителе $\exp(-(p^2 + 8N - 8)\hat{t}/4\rho^+)$. Вместо зависимости от \hat{t} в этом множителе можно перейти к зависимости от ρ^- с помощью преобразования Лапласа

$$\int_0^\infty d\hat{t} e^{\rho^- \hat{t}/2} \tilde{G}^c(\mathbf{P}_1, 0; \mathbf{P}_2, \hat{t}). \quad (11.1.40)$$

Замена переменной интегрирования на $\hat{t}/2\rho^+$ приводит к функции от ρ^2 (где ρ^μ — ковариантный D -мерный импульс), умноженной на $2\rho^+$. Эта функция имеет полюсы, которые

соответствуют всем состояниям замкнутой струны, которые взаимодействуют с точечными внешними состояниями. Массы этих состояний задаются положениями полюсов: $(\text{масса})^2 = -p^2 = -p^2 + 2p^+p^- = 8N - 8$. При вычислении амплитуд рассеяния множитель $2p^+$ в числителе любого внутреннего пропагатора сокращается с компенсирующими множителями $(2p^+)^{-1/2}$ для каждой частицы, связанной с вершиной. При этом у каждой внешней частицы, входящей в вершину, сохраняется множитель $(2p^+)^{1/2}$, что соответствует внешним состояниям, нормированным обычным релятивистским образом.

Рассмотренный в предыдущем абзаце простой пример является сингулярным из-за точечного характера начального и конечного состояний. Несмотря на это, рассмотренный пример формально иллюстрирует основные свойства, характерные также для пропагатора между физическими состояниями общего вида.

При вычислении пропагатора для открытой струны используется тождество

$$\prod_{m=1}^{M-1} \omega_m^0 \equiv \prod_{m=1}^{M-1} 2 \sin \frac{m\pi}{2M} = \sqrt{M}, \quad (11.1.41)$$

аналогичное (11.1.36), что приводит к похожей структуре независящего от X множителя

$$G^0(0, 0; 0, \hat{\tau}) \sim \left\{ \pi^{-(M-1)} \left(\frac{p^+}{\hat{\tau}} \right) M^{-1/2} \times \right. \\ \left. \times \exp \left\{ -\hat{\tau} \left(\frac{4M}{\pi a} - \frac{1}{a} - \frac{1}{24p^+} \right) \right\} \prod_{m=1}^{M-1} [1 - \exp(-m\hat{\tau}/p^+)] \right\}^{(D-2)/2}. \quad (11.1.42)$$

Расходящиеся члены в экспоненте — это те члены, которые обсуждались раньше и которые можно исключить локальным переопределением гамильтониана. Помимо этого, здесь присутствует нормировочный множитель $M^{(2-D)/4}$, который не убирается локальной перенормировкой гамильтониана. Его следует отнести к нормировочному множителю $M^{(2-D)/8}$ волновых функций открытой струны. Поскольку пропагатор построен так, что предел $\hat{\tau} = 0$ дает правильно нормированные состояния, ясно, что этот зависящий от M множитель необходим для получения правильно нормированных состояний.

Можно показать, по крайней мере на простых примерах, что при вычислении амплитуд рассеяния на массовой оболочке эти множители в комбинации с другими множителями в вершинах

приводят к конечному и лоренц-инвариантному континуальному пределу только в критической размерности $D = 26$. Поэтому в критической размерности нет необходимости в бесконечной перенормировке волновой функции или константы связи. На самом деле оказывается, что при проведении таких не зависящих от импульса перенормировок не возникает никаких противоречий, поэтому, как правило, в этой главе мы не будем следить за тем, как сокращаются расходимости при вычислении амплитуд. (Но критическая размерность определенно играет решающую роль в обеспечении лоренц-инвариантности амплитуд.)

11.2. Вычисление амплитуд

Изучение пропагатора говорит о том, что скорее всего бесконечности, связанные с высокочастотными модами струны, можно исключить путем переопределения фазы амплитуды и нормировки волновых функций и константы связи. При вычислении амплитуд рассеяния для определения функционального интеграла мы будем использовать континуальный подход, справедливость которого зависит от корректности такого подхода к высокочастотным модам.

11.2.1. Вершины взаимодействия

Взаимодействия между струнами описываются процессами разрыва или слияния струн, происходящими в точках струн. Это означает локальность взаимодействия, которая представляет собой важное физическое требование, предъявляемое к теории. С этим связано условие непрерывной эволюции координат струн, поэтому вершина отлична от нуля только между такими состояниями I_1 и I_2 , для которых начальные и конечные струны в совокупности совпадают. Эти утверждения не только разумны с физической точки зрения, но являются также важной предпосылкой для получения результатов, согласующихся с причинностью и лоренц-инвариантностью. Поэтому вершина содержит функционал Δ , который представляет собой бесконечное произведение δ -функций Дирака, отождествляющих каждую точку входящих и выходящих струн. С помощью преобразования Фурье этот функционал можно также выразить через бесконечное произведение δ -функций для нормальных мод. Если τ_i — время взаимодействия, то состояния струны в моменты $\tau^1 = \tau_i - \varepsilon$ и $\tau^2 = \tau_i + \varepsilon$ (где ε — бесконечно малый промежуток времени) связаны с помощью вершины взаимодействия V , имеющей матричный элемент $\langle 2|V|1 \rangle$. В бозонной

теории других множителей в вершине, кроме функционала Δ , нет, поэтому в координатном базисе взаимодействие общего вида можно записать следующим образом:

$$\langle X_{I_2}^i | V | X_{I_1}^i \rangle \sim \Delta [X_{I_2}^i(\sigma) - X_{I_1}^i(\sigma)], \quad (11.2.1)$$

где $X_{I_1}^i(\sigma)$ — поперечные координаты струны до взаимодействия, а $X_{I_2}^i(\sigma)$ — после взаимодействия. Выбор вершины безусловно является простым, но является ли он правильным и единственным? Ответ на оба вопроса положительный. Один способ доказательства заключается в тщательном анализе требований лоренц-инвариантности. Вместо проведения этого доказательства, которое с технической точки зрения довольно сложно, мы проведем явное вычисление амплитуд рассеяния и покажем, что результаты, полученные с их помощью, обладают нужными свойствами (включая лоренц-инвариантность). В теориях суперструн вершины содержат также дополнительные множители, в которые входят такие операторы, как функциональные производные от функционала Δ по $X^i(\sigma)$ в точке взаимодействия $\sigma = \sigma_1$. Это различие между суперструнами и бозонными струнами аналогично тому обстоятельству, что в теории Янга — Миллса кубическое взаимодействие между калибровочными частицами содержит производную, в то время как кубическое взаимодействие скалярных полей ее не содержит.

Взаимодействия струн можно разделить на два класса простым геометрическим способом в соответствии с тем, происходит ли слияние или разрыв струн во внутренних точках или происходит соприкосновение концов струны.

1. Первый класс состоит из таких взаимодействий, когда две граничные точки открытых струн соприкасаются и объединяются, или из обращенных во времени реакций, когда во внутренней точке струны происходит разрыв и образуются два новых свободных конца. Например, вершина, описывающая объединение струн 1 и 2 с образованием струны 3, имеет вид

$$g\Delta [X_1^i(\sigma) + X_2^i(\sigma) - X_3^i(\sigma)], \quad (11.2.2)$$

где $X_r^i(\sigma)$ — координаты r -й струны, причем X_r отличны от нуля только при подходящих значениях σ (эта параметризация более подробно описана в разд. 11.4.5). Такое взаимодействие, изображенное на рис. 11.1, а, является струнным обобщением кубического взаимодействия в теории Янга — Миллса, и по этой причине ему приписывается константа связи g .

Тот же процесс слияния двух граничных точек описывает такое взаимодействие, при котором открытая струна превращается в замкнутую, как изображено на рис. 11.1, б. Поскольку

это взаимодействие изменяет струны только локально, для последовательности теории необходимо, чтобы соответствующая константа связи совпадала с константой связи кубического взаимодействия открытых струн. Например, благодаря этому процессу, возникают полюсы, соответствующие замкнутым струнам, в непланарных петлевых диаграммах, описанных в гл. 8. Без этого вклада амплитуды не были бы лоренц-инвариантными.

2. Второй класс состоит из таких взаимодействий, когда две внутренние точки соприкасаются таким образом, что входящие струны мгновенно перестраивают свои части и образуют выходящие струны. Примером служит взаимодействие, изображенное на рис. 11.2, а, при котором две замкнутые струны объединяются и образуют одну замкнутую струну или, наоборот, одна

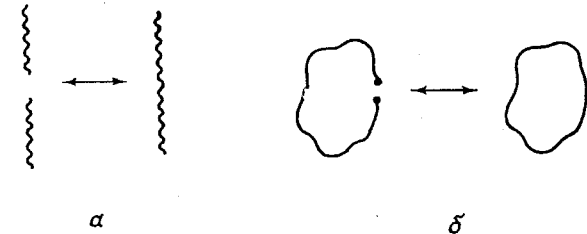


Рис. 11.1. Струнное взаимодействие разрыва — слияния: а — взаимодействие трех открытых струн. Это струнное обобщение кубического янг-миллсова взаимодействия; б — переход между открытой и замкнутой струнами. В теориях типа I это взаимодействие связывает гравитационный и янг-миллсов секторы.

замкнутая струна превращается в две. Это взаимодействие представляет собой струнное обобщение кубического взаимодействия между гравитонами, поэтому ему приписывается гравитационная константа связи κ . Это единственное взаимодействие, которое возможно в любой теории замкнутых ориентированных струн (таких как теории суперструн типа II или гетеротические теории).

Другая вершина взаимодействия, возникающая при слиянии внутренних точек струн, описывает процесс, в котором две входящие открытые струны обмениваются своими сегментами с образованием двух входящих открытых струн (рис. 11.2, б). С локальной точки зрения для струн это то же взаимодействие, что и на рис. 11.2, а, поэтому ему тоже приписывается гравитационная константа связи. Хотя это взаимодействие является контактным, его не следует путать с контактными взаимодействиями в полевой теории точечных частиц. Например, это

взаимодействие не дает вклада в процесс деления одной струны на три, в то время как в теории Янга — Миллса контактный член дает вклад в любой четырехчастичный процесс. Вклад контактного члена является существенным для получения лоренц-

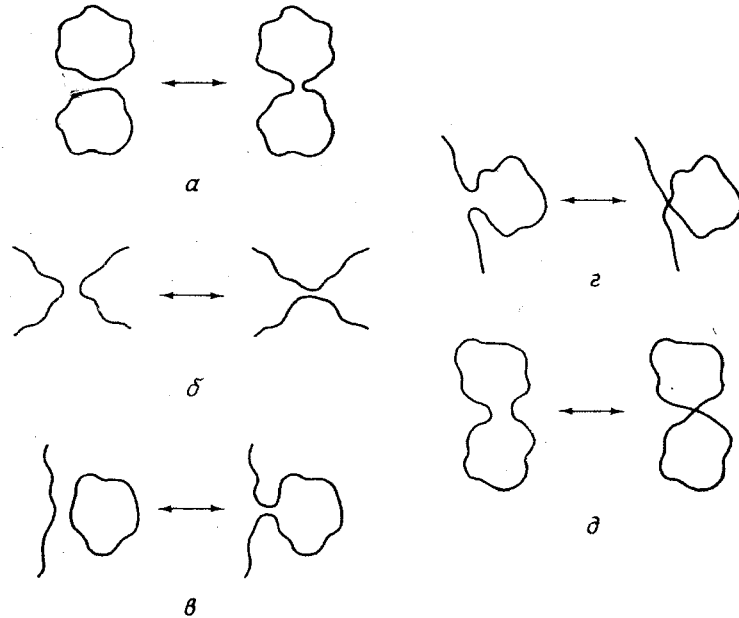


Рис. 11.2. Обменные струнные взаимодействия: *a* — взаимодействие, при котором две замкнутые струны сливаются в одну или одна замкнутая струна разрывается на две. Это струнное обобщение гравитационного взаимодействия. Для теорий замкнутых ориентированных струн это единственное взаимодействие в калибровке светового конуса; *b* — взаимодействие, при котором пара открытых струн образует другую пару открытых струн; *c* — взаимодействие, при котором открытая струна сливается с замкнутой струной или происходит обратный процесс; *z* — взаимодействие, при котором одна открытая струна перегруппирует свои сегменты; *d* — аналогичное взаимодействие одной замкнутой струны.

инвариантных древесных амплитуд. Требование лоренц-инвариантности амплитуды рассеяния определяет константу связи этого взаимодействия, которая должна быть равна g^2 , как будет ясно из обсуждения, приведенного в разд. 11.3.1. В свою очередь эта константа связи связана с гравитационной константой связи κ , что приводит к следующему соотношению между гравитационной и янг-миллсовыми константами связи:

$$\kappa \sim Tg^2. \quad (11.2.3)$$

Существуют три другие возможные взаимодействия, включающие соприкосновение внутренних точек струн. Одно из них (рис. 11.2, *в*) описывает объединение замкнутой и открытой струн с образованием одной открытой струны. На рис. 11.2, *г* показано самодействие открытой струны, при котором две внутренние точки соприкасаются и сегмент струны обращается. Аналогичный процесс для неориентированной замкнутой струны изображен на рис. 11.2, *д*. Взаимодействия, которые иллюстрируются рис. 11.2, *в* и 11.2, *д*, могут иметь место только в теориях с неориентированными замкнутыми струнами. Это легко вывести из невозможности закрепления стрелок на струнах для придания им ориентации.

11.2.2. Параметризация процессов рассеяния

Рассмотрим амплитуды рассеяния начальных собственных состояний импульса на массовой оболочке в конечные состояния, которые также являются собственными состояниями импульса и находятся на массовой оболочке. В конце вычислений начальный и конечный моменты времени τ_i и τ_f устремляются к $-\infty$ и $+\infty$.

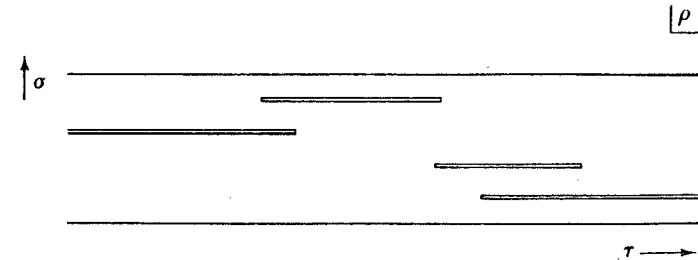


Рис. 11.3. Представление мировой поверхности амплитуды рассеяния открытых струн в ρ -плоскости. Горизонтальные щели являются границами мировой поверхности, т. е. мировыми линиями конечных точек струн.

Мировую поверхность для таких процессов рассеяния, включающих только открытые струны, удобно представить в виде полосы, как показано на рис. 11.3. В этой параметризации горизонтальной осью является ось τ , т. е. в калибровке светового конуса она пропорциональна времени, в то время как вертикальная ось определяет параметризацию σ . Горизонтальные линии обозначают границы струн, на которых струнные координаты удовлетворяют условию равенства нулю нормальной производной от X . Поскольку координата X на обеих сторонах горизонтальной линии принадлежит разным струнам, на этих линиях она не является непрерывной.

Диаграмма на рис. 11.3 иллюстрирует объединение струн в конечных точках и разделение струн с образованием новых граничных точек во «времена» взаимодействия τ_i . При вычислении амплитуды рассеяния по этим временам необходимо провести интегрирование. Горизонтальные линии, которые соединяют две точки взаимодействия, представляют собой петли, т. е. они описывают разделение и последующую рекомбинацию струн. Поэтому горизонтальные линии надо представлять себе как щели, вырезанные в полосе таким образом, что внешняя граница полосы является непрерывной линией, соответствующей мировым линиям граничных точек внешних струн (при этом входящая струна при $\tau_i \rightarrow -\infty$ и выходящая струна при $\tau_f \rightarrow +\infty$ рассматриваются как отдельные точки). Теоретико-групповой множитель для диаграммы, описывающей открытую струну, получается путем приписывания границам полосы зарядов (что совпадает с методом Чана — Патона, описанным в разд. 6.1). Эти множители в настоящей главе опущены.

По предположению параметр σ_r r -й струны возрастает от низа полосы к ее верху для входящих струн, в то время как для выходящих струн он возрастает от верха к низу. Область изменения параметра σ_r выбирается в виде отрезка $0 \leq \sigma_r \leq \leq \pi |\alpha_r|$, где величина α_r определяется выражением

$$\alpha_r = 2\rho_r^+, \quad (11.2.4)$$

причем она положительна для входящих струн и отрицательна — для выходящих. Преимущество этой нормировки параметров заключается в том, что полная ширина полосы остается постоянной во времени и не зависит от взаимодействий струн как следствие сохранения p^+ , откуда следует равенство $\sum_i \alpha_i = -\sum_f \alpha_f$, где i и f обозначают соответственно начальные и конечные частицы. Часто мы будем использовать один параметр σ с областью изменения $0 \leq \sigma \leq \pi \sum_i \alpha_i$. На заданной внешней входящей струне r параметр σ связан с параметром σ_r следующим соотношением:

$$\sigma = \sigma_r + \sigma_{0r}, \quad (11.2.5)$$

где σ_{0r} — значение параметра σ внизу струны. Для выходящих струн соотношение имеет вид

$$\sigma = -\sigma_r + \sigma_{0r}, \quad (11.2.6)$$

где σ_{0r} теперь соответствует верхней точке струны. Петлевая поправка, соответствующая открытой струне, к диаграмме для открытой струны, которая представляется на рис. 11.3 горизонтальной щелью в мировой поверхности, характеризуется двумя

значениями переменных τ_i на концах щели и величиной параметра σ (обозначаемой σ_L), равной расстоянию от щели до нижней границы диаграммы. Таким образом, для каждой петли существуют три дополнительных параметра, по которым необходимо провести интегрирование. Петли замкнутых струн, которые представляют собой ручки, присоединенные к мировой поверхности, также можно представить в плоскости $\rho = \tau + i\sigma$, но более сложным образом. При такой параметризации мировой поверхности метрика на мировой поверхности была выбрана таким образом, что двумерная кривизна везде равна нулю, за исключением точек взаимодействия, где кривизна (одномерной границы для мировых поверхностей открытых струн или двумерных поверхностей для замкнутых струн) обращается в бесконечность. При такой параметризации переменные интегрирования имеют описанную выше физическую интерпретацию. При вычислении функционального интеграла удобно отобразить мировую поверхность на верхнюю комплексную полуплоскость или на всю комплексную плоскость; при этом устанавливается связь с более стандартными параметризациями римановых поверхностей.

11.2.3. Вычисление функционального интеграла

Типичная функция Грина имеет структуру последовательности вершин, между которыми струны распространяются свободно, а соответствующие пропагаторы имеют вид (11.1.2). Времена взаимодействия должны интегрироваться по всей области их значений. Функции Грина в пространстве импульсов с присоединенными внешними пропагаторами вне массовой оболочки получают путем умножения амплитуды на $\exp[-\sum_r \rho_r^- \tau_r / 2]$ и интегрирования по временам τ_r , в которые рождаются внешние струны на заданных конфигурациях мировой поверхности. Здесь ρ_r^- — c -число, которое равно значению оператора P_r^- в полюсе пропагатора соответствующей внешней струны. С другой стороны, связанная часть S -матричного элемента получается путем умножения функции Грина на множители $\exp[-P_r^- \tau_r / 2]$ для каждой внешней частицы r в начальное или конечное время τ_r ($= \tau_i \rightarrow -\infty$ или $\tau_f \rightarrow \infty$). Этот множитель отсекает внешние пропагаторы от функции Грина. Связанная часть S -матрицы не является релятивистски ковариантной величиной, так как она содержит кинематические множители, необходимые для получения релятивистской меры в фазовом пространстве, которая возникает при вычислении сечения рассеяния. В координатах светового конуса релятивистская мера в

фазовом пространстве частицы на массовой оболочке с импульсом p^μ имеет вид $d^{D-2}p dp^\mu / \alpha^{1/2}$ (при этом $p^- = (p^2 + m^2) / \alpha$), поэтому ковариантная амплитуда A рассеяния M скалярных частиц связана с S -матрицей соотношением

$$\langle f | (S - 1) | i \rangle = -i (2\pi)^D \delta^D \left(\sum_r p_r^\mu \right) \prod_{r=1}^M (\alpha_r)^{-1/2} A(1, 2, \dots, M). \quad (11.2.7)$$

Поскольку единственным следствием вставки вершин является появление Δ -функционалов, которые отождествляют координаты непосредственно перед и сразу после момента взаимодействия, результат можно выразить в виде одного функционального интеграла по всем поверхностям, соединяющим начальную струну в момент времени $\tau = \tau_i \rightarrow -\infty$ и конечные струны в момент времени $\tau = \tau_f \rightarrow \infty$. Заметим, что полная амплитуда включает диаграммы с обоими упорядочениями времен взаимодействия τ , как показано на рис. 11.3. При заданном теоретико-групповом множителе (т. е. при заданном порядке внешних частиц вдоль границы струны) результат представляется в виде одного выражения, которое необходимо проинтегрировать по всем возможным значениям переменных τ_i и σ_L . Тот факт, что подынтегральные выражения диаграмм с различным упорядочением τ_i имеют одинаковый вид в тех точках, где два значения τ_i совпадают, является совершенно нетривиальным и имеет место только в критической размерности. Общее выражение для L -петлевой амплитуды рассеяния с M частицами из спектра открытой струны (с $M - 2 + 2L$ вершинами) имеет вид

$$A(1, 2, \dots, M) = G \int \prod_{\text{вершины}} d\tau_i \prod_{\text{петли}} d\sigma_L \times \int \prod_{r,n,i} dP_{r,n}^i \Psi_r(P_{r,n}^i) \mathcal{W}(P_{r,n}^i, p_r^i, \alpha_r, \tau_r), \quad (11.2.8)$$

где G — теоретико-групповой множитель, соответствующий описываемому процессу (если он включает открытые струны). В этом выражении функция \mathcal{W} представляет собой амплитуду рассеяния входящих и выходящих струнных состояний, описываемых модами $P_{r,n}^i$ с импульсами $P_r^i(\sigma)$, которые определены выражением

$$P_r^i(\sigma) = \frac{1}{\pi\alpha_r} \left\{ p_r^i + \sum_n P_{r,n}^i \cos \frac{n\sigma_r}{\alpha_r} \right\}, \quad (11.2.9)$$

где r обозначает струну, а n — номер моды. Эти внешние состояния являются собственными состояниями операторов энергии P_r^- ; последнее означает, что они являются собственными состояниями импульса и соответствуют определенным числам заполнения. Поэтому волновые функции внешних струн Ψ_r являются произведениями осцилляторных собственных функций для каждой моды, т. е. волновая функция состояния с числами заполнения $k_{r,n}^i$, где n и i нумеруют моды, имеет вид

$$\Psi_r(P_{r,n}^i) = \prod_{n=1}^{\infty} \prod_{i=1}^{D-2} H_{k_{r,n}^i}^{(P_{r,n}^i)} \exp[-(P_{r,n}^i)^2 / 4n], \quad (11.2.10)$$

где $H_{k_{r,n}^i}$ — полином Эрмита от $P_{r,n}^i$ степени $k_{r,n}^i$. Волновая функция основного состояния струны (т. е. тахиона) является просто произведением гауссовых множителей.

Функция \mathcal{W} определяется функциональным интегралом

$$\mathcal{W}(P_{r,n}^i, p_r^i, \alpha_r, \tau_r) = g^{M-2+2L} \int \prod \mathcal{D}X^i(\sigma, \tau) \prod_{r=1}^M (\alpha_r)^{1/2} \times \times \exp \left[- \sum_{r=1}^M P_r^- \tau_r / 2 \right] \exp \left(i \sum_{r=1}^M \int P_r^i(\sigma) X^i(\sigma, \tau_r) d\sigma - \int \mathcal{L} d\tau d\sigma \right), \quad (11.2.11)$$

где множитель $\exp \left(i \sum_r \int P_r^i X_r^i d\sigma \right)$ преобразует внешние волновые функции из импульсного пространства в конфигурационное. Множители $\exp[-P_r^- \tau_r / 2]$ необходимы для преобразования функции Грина в амплитуду на массовой оболочке, а множители $\sqrt{\alpha_r}$ являются обратными множителями, компенсирующими множители $1/\sqrt{\alpha_r}$ в выражении (11.2.7) для ковариантной амплитуды. Лагранжева плотность для бозонной струны в калибровке светового конуса имеет вид

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2\pi} \left[\left(\frac{\partial X^i}{\partial \tau} \right)^2 + \left(\frac{\partial X^i}{\partial \sigma} \right)^2 \right]. \quad (11.2.12)$$

На функции $X^i(\sigma, \tau)$, по которым проводится интегрирование в (11.2.11), наложены граничные условия $\partial X^i / \partial \sigma = 0$ вдоль сплошных линий, т. е. на концах открытых струн. Все проведенное обсуждение одинаково применимо и к замкнутым струнам, для которых модифицируются только граничные условия, а именно функции X^i для замкнутых струн должны быть периодическими.

Функциональный интеграл можно определить путем одно-временной дискретизации переменных σ и τ с образованием решетки, состоящей из конечного числа точек, что сводит функциональный интеграл к произведению конечного числа обычных интегралов. Альтернативное определение состоит в том, что функциональный интеграл выражается через интегралы от нормальных мод координат, для которых введено высокочастотное обрезание с помощью решетки по σ , как было сделано при вычислении пропагатора. В любом случае функциональный интеграл, который необходимо вычислить, имеет вид произведения гауссовых интегралов с внешними источниками при $\tau = \pm\infty$, соответствующими в (11.2.11) линейным по $X^i(\sigma_r, \tau_r)$ членам. В результате функциональный интеграл можно вычислить с помощью обычной процедуры дополнения до полного квадрата. Это можно сделать путем записи содержащих $X^i(\sigma, \tau)$ членов в экспоненте (11.2.11) в следующем виде:

$$\sum_{r,s} \left\{ \int d\sigma' d\sigma'' \sum_{r,s} \frac{1}{4} P_r^i(\sigma') N(\sigma', \tau_r; \sigma'', \tau_s) P_s^i(\sigma'') - \pi \int d\sigma d\tau \left(X^i(\sigma, \tau) + \frac{i}{2} \sum_r \int d\sigma' P_r^i(\sigma') N(\sigma', \tau_r; \sigma, \tau) \right) \Delta \times \right. \\ \left. \times \left(X^i(\sigma, \tau) + \frac{i}{2} \sum_s \int d\sigma'' P_s^i(\sigma'') N(\sigma'', \tau_s; \sigma, \tau) \right) \right\}, \quad (11.2.13)$$

где Δ — произведение $-1/2\pi^2$ на двумерный лапласиан, т. е.

$$\Delta = -\frac{1}{2\pi^2} \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial\sigma} \right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial\tau} \right)^2 \right\}. \quad (11.2.14)$$

В (11.2.13) поверхностные члены в моменты времени τ_r игнорируются. Они учитываются явным образом в определении $\det \Delta$, которое приведено ниже.

Требуется, чтобы функция Грина $N(\sigma, \tau; \sigma', \tau')$, которая обратна оператору Δ , удовлетворяла уравнению

$$\Delta N(\sigma, \tau; \sigma', \tau') = -\frac{1}{\pi} \delta(\sigma - \sigma') \delta(\tau - \tau') + f(\sigma, \tau), \quad (11.2.15)$$

где f — произвольная функция. Для сравнения (11.2.13) с (11.2.11) необходимо провести несколько интегрирований по частям и использовать граничные условия Неймана для $X(\sigma, \tau)$ и функции Грина

$$\frac{\partial}{\partial n} N(\sigma, \tau; \sigma', \tau') = g(\sigma, \tau), \quad (11.2.16)$$

где n обозначает нормаль к границе мировой поверхности (которая совпадает с направлением σ на концах струны и с на-

правлением τ для всех значений σ в начальный и конечный моменты времени τ_i и τ_f). Функция $g(\sigma, \tau)$ подчиняется закону Гаусса. Интегрирование уравнения (11.2.15) и использование формулы Грина дает $2\pi + \int d\sigma d\tau f(\sigma, \tau) = \oint dl g(\sigma, \tau)$. Благодаря сохранению суммарного импульса, обусловленному интегрированием по нулевым модам X^i , ни g , ни f не влияют на вид формул (11.2.13) и (11.2.11). Отметим, что N определена только с точностью до произвольного решения уравнения Пуассона с источником $f(\sigma, \tau)$. Для замкнутых струн функция Грина периодична по координатам σ и σ' .

Функциональный интеграл (11.2.13) является гауссовым по переменным

$$X^{i'}(\sigma, \tau) \equiv X^i(\sigma, \tau) + \frac{i}{2} \sum_r \int d\sigma' P_r^i(\sigma') N(\sigma', \tau_r; \sigma, \tau), \quad (11.2.17)$$

поэтому с использованием формулы

$$\int \mathcal{D}X^{i'}(\sigma, \tau) \exp(-\pi X^{i'}(\sigma, \tau) \Delta X^{i'}(\sigma, \tau)) = [\det \Delta]^{-(D-2)/2} \quad (11.2.18)$$

амплитуду $\mathcal{W}(P_{r,n}^i, p_r^i, \alpha_r)$ можно записать в виде

$$\mathcal{W} = g^{M-2+2L} [\det \Delta]^{-(D-2)/2} \prod_r (\alpha_r)^{1/2} \exp \left[-\sum_r P_r^- \tau_r / 2 \right] \times \\ \times \exp \left(\frac{1}{4} \sum_{r,s} \int d\sigma' d\sigma'' P_r^i(\sigma') N(\sigma', \tau_r; \sigma'', \tau_s) P_s^i(\sigma'') \right). \quad (11.2.19)$$

Экспоненциальные множители в этом выражении можно объединить в явно ковариантное выражение, если выразить временные переменные τ_r , связанные с начальными и конечными струнами, через функцию Неймана, используя соотношение

$$\tau = \frac{1}{2\pi} \sum_r \int d\sigma' N(\sigma, \tau; \sigma', \tau_r), \quad (11.2.20)$$

где интеграл берется в начальное и конечное времена по входящим и выходящим струнам. Для проверки этого уравнения сначала заметим, что обе части уравнения удовлетворяют уравнению Лапласа при произвольных значениях τ . Тот факт, что нормальная производная от правой части (11.2.20) равна нулю на концевых точках струны при произвольных τ , является следствием граничных условий (11.2.16) для N и сохранения p^+ . Нормальная производная правой части при $\tau \rightarrow \tau_r$ ($\equiv \tau_i$ или τ_f , при этом σ параметризует струну r) требует тщательного анализа в той области интегрирования, где σ' приближается

к σ и N сингулярна. Путем интегрирования (11.2.15) по малой области вблизи точки $\sigma' = \sigma$ при $\tau \rightarrow \tau_r$ можно показать, что этот вклад равен $+1$ при $\tau = \tau_f$ и -1 при $\tau = \tau_i$, что согласуется с левой частью (11.2.20). Этот результат позволяет произвести в (11.2.19) следующую замену:

$$\begin{aligned} \sum_r P_r^- \tau_r &= \frac{1}{2\pi} \sum_{r,s} P_r^- \int d\sigma' N(\sigma, \tau_r; \sigma', \tau_s) = \\ &= -\frac{1}{\pi^2} \sum_{r,s} \frac{P_r^- p_s^+}{\alpha_r \alpha_s} \int d\sigma \int d\sigma' N(\sigma, \tau_r; \sigma', \tau_s). \end{aligned} \quad (11.2.21)$$

11.2.4. Амплитуды с внешними основными состояниями

Для многих целей входящую или выходящую струну можно рассматривать как одну точку в плоскости ρ . Например, оказывается, что функция $N(\sigma, \tau_r; \sigma', \tau_s)$ ($r \neq s$), вычисленная на различных входящих или выходящих струнах, не зависит от σ и σ' с точностью до членов, которые экспоненциально убывают с $|\tau_r|$. (Как и раньше, τ_r и τ_s равны τ_i для входящих струн или τ_f для выходящих струн, а σ и σ' принадлежат соответственно струнам r и s .) Если внешними состояниями являются основные состояния, то этими членами можно пренебречь. Они становятся важными в том случае, когда внешними состояниями являются возбужденные состояния, так как множитель $\exp(-\sum_r \tau_r P_r^-/2)$ обеспечивает компенсирующее экспоненциальное возрастание. В разд. 11.4 после нахождения явного вида функции Неймана это станет очевидным. Если внешними состояниями являются основные состояния, то интегрирование по σ' и σ'' в (11.2.19) и (11.2.21) членов с $r \neq s$ проводится тривиально и приводит просто к появлению множителей λ_{α_r} и λ_{α_s} . Эти множители умножаются на нулевые моды в $P_r^i(\sigma')$ и $P_s^i(\sigma'')$ в экспоненте (11.2.19). Вспоминая, что нулевые моды имеют вид p^i/λ_{α} , получаем, что общим следствием является сокращение степеней λ_{α} . Этот результат вместе с показателем экспоненты (11.2.21) приводит к члену, содержащему лоренц-инвариантное произведение векторов $p_r \cdot p_s$.

Члены с $r = s$ содержат функцию Грина, вычисленную между точками одной струны в момент времени τ_i или τ_f . Функция Грина $N(\sigma', \tau_r; \sigma'', \tau_r)$ зависит от σ' и σ'' , но так, что зависимость от вида диаграммы отсутствует, т. е. она не зависит от α_r , так как точки (σ', τ_r) и (σ'', τ_r) находятся далеко от точек взаимодействия. В результате после подстановки в (11.2.19) и (11.2.21) интегрирование по σ' и σ'' приводит к членам, содержащим $(P_{r,n}^i)^2$ (где $n > 0$), которые не зависят от α_r . Другим

источником зависимости от $P_{r,n}^i$ являются внешние волновые функции, имеющие вид (11.2.10). Поэтому для внешних основных состояний интегралы по $P_{r,n}^i$ (с $n > 0$) имеют гауссов вид и приводят к изменению общего нормировочного множителя, не изменяя зависимость от α_r . Части функций Грина в (11.2.19) и (11.2.21) с $r = s$, которые соответствуют нулевым модам, вместе дают множитель

$$\mathcal{M} = \prod_r \exp\left(\frac{D-2}{48(\pi\alpha_r)^2} \int_0^{\pi\alpha_r} d\sigma' \int_0^{\pi\alpha_r} d\sigma'' N(\sigma', \tau_r; \sigma'', \tau_r)\right), \quad (11.2.22)$$

где использовано выражение для квадрата массы основного состояния $p_r^2 = (D-2)/12$, к которому приводит суммирование вакуумных энергий в (11.1.33).

Если внешними состояниями являются возбужденные состояния, то главный член в функции Грина, вычисленной между точками на различных входящих или выходящих струнах (т. е. член, который не убывает экспоненциально), не дает вклада. Это является следствием равенства

$$\int dP_{r,n}^i H_{k_{r,n}^i}(P_{r,n}^i) \exp[-(P_{r,n}^i)^2/2n] = 0 \quad (11.2.23)$$

для $k_{r,n}^i \neq 0$, где один множитель $\exp[-(P_{r,n}^i)^2/4n]$ возникает от волновой функции, а другой такой же множитель возникает от членов с $r = s$, упомянутых в предыдущем абзаце¹⁾. В этом случае необходимо учитывать соответствующие ненулевые моды в функции Грина, даже если они являются экспоненциально малыми. Это является следствием того обстоятельства, что член $\exp(-P_r^- \tau_r/2)$ содержит большой компенсирующий множитель $\exp(-N_{(r)} \tau_r/\alpha_r)$ (для открытых струн), где $N_{(r)}$ — число заполнения для r -й струны, который в точности компенсирует экспоненциальное убывание функции Грина.

Объединение всех этих членов дает общее выражение для L -петлевой амплитуды, описывающей рассеяние M тахионов на массовой оболочке из спектра открытой струны:

$$\begin{aligned} A(1, 2, \dots, M) &= g^{M-2+2L} G \int \prod_{\text{вершины}} d\tau_i \prod_{\text{петли}} d\sigma_L \mathcal{M} \det \Delta^{-(D-2)/2} \times \\ &\times \prod_r (\alpha_r)^{1/2} \exp\left(\frac{1}{2} \sum_{r < s} p_r \cdot p_s N(\sigma, \tau_r; \sigma', \tau_s)\right). \end{aligned} \quad (11.2.24)$$

¹⁾ С математической точки зрения равенство (11.2.23) является следствием ортогональности волновых функций гармонического осциллятора для основного и возбужденного состояний.

Но эта формула все же не учитывает все возможные петлевые диаграммы, так как пока описан лишь способ учета отверстий в мировой поверхности. Другие диаграммы, которые получаются путем добавления ручек, описываются аналогичным образом. Поэтому, как будет показано ниже, похожие формулы применимы в бозонной теории замкнутых струн.

Проблема вычисления произвольной диаграммы теперь сводится к проблеме вычисления оператора, обратного оператору Лапласа Δ , точнее к вычислению функции Грина $\det \Delta$ на подходящем двумерном многообразии с заданными граничными условиями Неймана. Этому вопросу посвящено большое число математических работ. В случае древесных и однопетлевых диаграмм решение можно записать в явном виде, и, конечно, результаты совпадают с полученными в предыдущих главах настоящей монографии. Действительная мощь функциональных методов становится очевидной при изучении многопетлевых амплитуд. Однако мы начнем с изучения древесных диаграмм.

11.3. Древесные амплитуды для открытых струн

На рис. 11.4 приведен пример струнной древесной диаграммы для взаимодействия M открытых струн. Диаграмма содержит $M - 2$ времен взаимодействия τ_i , одно из которых несущественно, так как амплитуда зависит только от разностей между ними. Глобальная инвариантность относительно трансляций по τ приводит к сохранению энергии, что отражается в появлении в S -матрице множителя $\delta(\sum_r p_r^-)$. Если число внешних струн не слишком велико, то можно подобрать такое преобразование Лоренца, что все p^+ -компоненты импульсов, за исключением двух, обратятся в нуль; при этом длины всех струн вдоль σ будут равны нулю, кроме одной входящей струны и одной выходящей. В этом случае диаграмма принимает вид ленты, которая не имеет горизонтальных границ, за исключением своих краев, проходящих через точки $\sigma = 0$ и $\pi\alpha$. В этой частной лоренцевой системе отсчета функции Грина и функциональный детерминант вычисляются особенно просто. Именно это свойство стоит за простотой операторного формализма для струны в калибровке светового конуса, который обсуждался в предыдущих главах. Однако для использования этого метода необходимо принять на веру, что в калибровке светового конуса сохраняется лоренц-инвариантность, и в любом случае этот метод нельзя обобщить на многопетлевые диаграммы. По этим причинам важно вычислить функцию Грина для общей древесной диаграммы, приведенной на рис. 11.4.

11.3.1. Конформное отображение

Вычисление функции Грина упрощается при использовании инвариантности относительно конформных преобразований, с помощью которых ее можно отобразить в верхнюю полуплоскость некоторой комплексной переменной z , где функция Грина выписывается тривиальным образом. Граница струнной диаграммы,

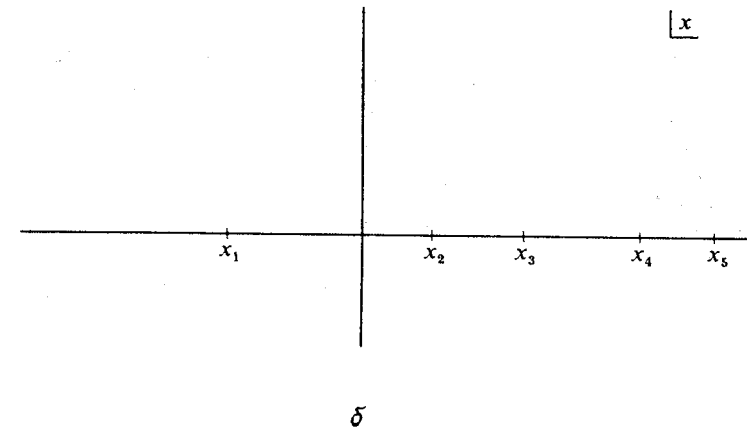
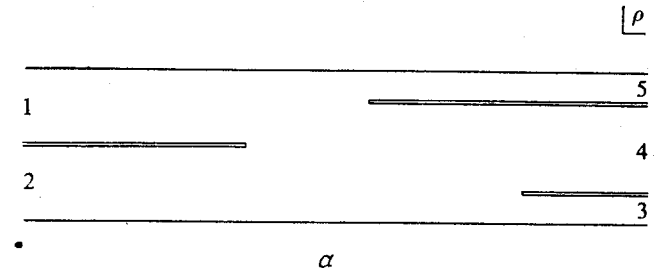


Рис. 11.4. a — струнная диаграмма для древесной диаграммы общего вида; b — ее отображение в верхнюю z -полуплоскость.

раммы, включая горизонтальные щели, отображается непрерывным образом на действительную ось плоскости z . Функция Грина в плоскости z (которая имеет равную нулю нормальную производную к действительной оси) легко вычисляется. Конформная инвариантность уравнения Лапласа обеспечивает при этом тривиальность его обратного преобразования к переменным ρ . Тот факт, что произвольную древесную диаграмму для струн можно конформно отобразить на верхнюю полуплоскость

z -плоскости, означает, что все струнные диаграммы конформно отображаются друг на друга с помощью подходящего преобразования. Это пример, иллюстрирующий теорему Римана, с которой мы встретились в разд. 1.4 при обсуждении ковариантного метода вычисления струнных диаграмм. Конформная эквивалентность древесных диаграмм является тем свойством, которое отсутствует в случае петлевых диаграмм. Петлевые диаграммы зависят от «модулярных параметров», характеризующих конформно неэквивалентные поверхности с одинаковой топологией. Простым примером является параметр τ для тора (гл. 8, 9).

Подходящее отображение задается преобразованием Шварца — Кристоффеля

$$\rho \equiv \tau + i\sigma = \sum_{r=1}^M \alpha_r \ln(x_r - z). \quad (11.3.1)$$

Граница струнной диаграммы в плоскости ρ отображается при этом в действительную ось плоскости z , как показано на рис. 11.4. Малые полуокружности в верхней полуплоскости вокруг сингулярных точек преобразования $z = x_r$ являются образами струн в начальный или конечный (очень большие) моменты времени τ_i или τ_f в зависимости от знака α_r . В конце вычислений эти моменты времени устремляются к $\pm\infty$, а радиусы полуокружностей ε_r — к нулю. По мере уменьшения величины z и обхода вокруг сингулярной точки x_r по полуокружности мнимая часть ρ изменяется на величину $i\alpha_r$, которая соответствует увеличению или уменьшению σ в бесконечном прошлом или будущем. Точки взаимодействия ($\rho_i = \tau_i + i\sigma_i$) представляют собой точки поворота границы, изображенной на рис. 11.4. Поэтому эти точки отображаются в точки y_i , определяемые уравнением для точек поворота $\partial\rho/\partial z = 0$. Таким образом, точки y_i являются решениями следующего уравнения:

$$\sum_{r=1}^M \frac{\alpha_r}{z - x_r} = 0. \quad (11.3.2)$$

Если умножить это уравнение на все знаменатели, то получим полином по y степени $M-1$. Но коэффициент при главном члене равен нулю $\sum \alpha_r = 0$, поэтому в действительности полином имеет степень $M-2$ и $M-2$ корней. Из этих корней только $M-3$ корня, соответствующие разностям τ , имеют физический смысл.

Описанное преобразование заданной струнной диаграммы определено неоднозначно, поскольку верхнюю полуплоскость

можно отобразить на себя с помощью вещественного проективного преобразования, т. е. $SL(2, R)$ -преобразования с тремя произвольными независимыми параметрами. Это преобразование переводит точку z в

$$z' \equiv R(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad (11.3.3)$$

где $ad - bc = 1$, а a, b, c и d — действительные числа. Это преобразование можно записать в другой удобной форме

$$\frac{R(z) - y_1}{R(z) - y_2} = \eta \frac{z - y_1}{z - y_2}. \quad (11.3.4)$$

Параметры y_1 и y_2 являются *неподвижными точками* преобразования, в то время как η представляет собой *мультипликатор*. В интересующем нас случае преобразование является *гиперболическим*, откуда следует, что параметры η, y_1 и y_2 должны быть действительными и $\eta \neq 1$ ¹⁾. Неоднозначность преобразования означает, что три точки x_2 можно фиксировать произвольным образом. При обычном выборе фиксируемые точки располагают в точках 0, 1 и ∞ , как сделано в гл. 7. После этого остается $M-3$ переменных интегрирования, соответствующих числу моментов взаимодействия τ_i в струнной диаграмме (после вычитания одной переменной, которая несущественна благодаря глобальной трансляционной инвариантности по времени). В принципе $M-3$ переменных x_r можно представить в виде функций от τ_i (фиксируя одну из них) путем обращения рассматриваемого отображения, но в общем случае такой переход очень сложен.

Рассмотрим подробнее отображение в случае четырех внешних частиц ($M=4$). Полагая $x_1 = 1, x_2 = \infty, x_3 = 0$ и $x_4 = x$, получаем отображение

$$\rho = \alpha_1 \ln(1 - z) + \alpha_3 \ln z + \alpha_4 \ln(z - x) + T_0, \quad (11.3.5)$$

где T_0 — несущественная бесконечная константа. Подстановка этого выражения в (11.3.2) позволяет определить образы z_+ и z_- точек взаимодействия ρ_1 и ρ_2 как решения квадратного уравнения

$$z_{\pm} = \frac{1}{2(1 - \gamma_1)} \left\{ 1 + (\gamma_2 - \gamma_1)x \pm \Delta^{1/2} \right\}, \quad (11.3.6)$$

где

$$\gamma_1 = -\frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2}, \quad \gamma_2 = \frac{\alpha_3}{\alpha_1 + \alpha_2}, \quad (11.3.7)$$

$$\Delta = x^2(\gamma_2 - \gamma_1)^2 + 2x(2\gamma_1\gamma_2 - \gamma_1 - \gamma_2) + 1. \quad (11.3.8)$$

¹⁾ Проективное преобразование называется *эллиптическим*, если $y_1 = y_2^*$, а $|\eta| = 1$, или *параболическим*, если $y_2 - y_1 = \varepsilon, \eta = 1 - \alpha\varepsilon$ и $\varepsilon \rightarrow 0$.

На рис. 11.5, *a* и 11.5, *б* показаны две струнные диаграммы в калибровке светового конуса, которые дают вклады в рассматриваемую амплитуду. Это единственные вклады с теоретико-групповым множителем $\text{tr}(\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4)$. При отображении этих диаграмм в плоскость z переменная x принимает значения

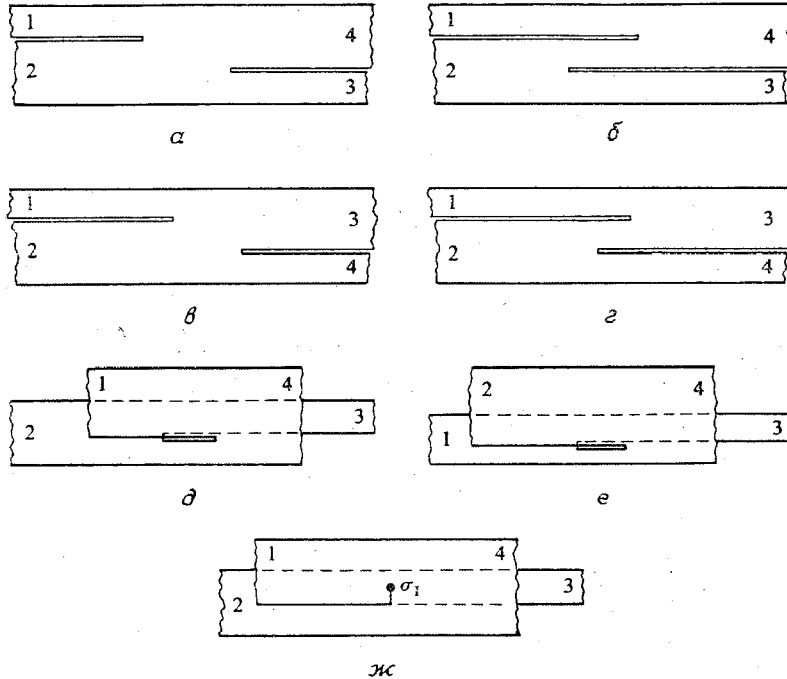


Рис. 11.5. Древесные диаграммы, дающие вклад в четырехчастичное рассеяние. Диаграммы *a* и *б* соответствуют теоретико-групповому множителю $\text{tr}(\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4)$ и имеют полюсы в s - и t -каналах соответственно. Диаграммы *в* и *г* соответствуют теоретико-групповому множителю $\text{tr}(\lambda_1 \lambda_2 \lambda_4 \lambda_3)$ и имеют полюсы в s - и u -каналах соответственно. Последние три диаграммы соответствуют теоретико-групповому множителю $\text{tr}(\lambda_1 \lambda_3 \lambda_2 \lambda_4)$; *д* и *е* имеют полюсы в t - и u -каналах соответственно; *ж* — четырехструнный контактный член, точка σ_i отделяет часть струны 1, которая соединяется со струной 3, от той части, которая соединяется со струной 4.

в области $0 \leq x \leq 1$. Выражение для амплитуды включает интеграл по всем положительным значениям разности времен между двумя точками взаимодействия ($\hat{t} \equiv \tau_2 - \tau_1$), изображенными на рис. 11.5, *a*, и по всем отрицательным значениям, которым соответствует рис. 11.5, *б*. Разность времен взаимодействия дается выражением

$$\hat{t} = \text{Re}[\rho(z_+) - \rho(z_-)]. \quad (11.3.9)$$

Вклад в диаграмму, изображенный на рис. 11.5, *a*, содержит полюсы по инварианту $s = -(p_1 + p_2)^2$, которые появляются при интегрировании в пределе, когда промежуточная струна распространяется в течении бесконечно большого промежутка времени. Граничная точка интегрирования по \hat{t} на рис. 11.5, *a* $\tau = \infty$ соответствует точке $x = 0$ (где $z_- = 0$). Другая граничная точка интегрирования $\hat{t} = 0$ отображается в точку x , лежащую между 0 и 1, которую мы обозначим через x_0 . Величина x_0 не является лоренц-инвариантной, так как она зависит от значений α_r . Поскольку значения z_+ и z_- не совпадают в точке $x = x_0$, значения $\sigma \equiv -i \text{Im} \rho$ в двух точках взаимодействия не равны друг другу. Аналогично процесс, изображенный на рис. 11.5, *б*, приводит к полюсам по инварианту $t = -(p_1 + p_4)^2$ при интегрировании в пределе $\hat{t} = -\infty$, который соответствует пределу $x = 1$ (при этом $z_+ = 1$). Обе рассматриваемые диаграммы имеют одинаковые подинтегральные выражения в терминах переменной x , поэтому полная лоренц-инвариантная область интегрирования $0 \leq x \leq 1$ получается после суммирования этих вкладов.

Диаграмма, изображенная на рис. 11.5, *в*, получается из диаграммы, показанной на рис. 11.5, *a*, путем взаимной замены частиц 3 и 4, поэтому она содержит полюсы в s -канале. Отображение границы диаграммы можно получить из диаграммы, изображенной на рис. 11.5, *a*, с помощью подстановки $x/(x-1)$ вместо x , что приводит к отрицательным значениям x в интервале $x_0/(x_0-1) \leq x \leq 0$. Вклад от диаграммы, изображенной на рис. 11.5, *г*, заполняет оставшиеся отрицательные значения на оси x $-\infty \leq x \leq x_0/(x_0-1)$ и приводит к полюсам в u -канале (где $u = -(p_1 + p_3)^2$). Эти диаграммы объединяются вместе и образуют лоренц-инвариантную часть амплитуды с теоретико-групповым множителем $\text{tr}(\lambda_1 \lambda_2 \lambda_4 \lambda_3)$.

Последние вклады в амплитуду показаны на рис. 11.5, *д*, 11.5, *е* и 11.5, *ж* и соответствуют теоретико-групповому множителю $\text{tr}(\lambda_1 \lambda_3 \lambda_2 \lambda_4)$, причем их границы отображаются в область $1 \leq x \leq \infty$. В этом случае вклад, изображенный на рис. 11.5, *д*, содержит полюсы в s -канале. По мере изменения переменной \hat{t} от ∞ до 0 переменная x изменяется от 1 до значения x_- , при котором две точки взаимодействия совпадают и по σ , и по τ . Это происходит тогда, когда точки z_- и z_+ совпадают, т. е. когда $\Delta = 0$. Последнее условие имеет два решения

$$x = x_{\pm} = \frac{1}{(\gamma_2 - \gamma_1)^2} (\gamma_1 + \gamma_2 - 2\gamma_1\gamma_2 \pm 2\sqrt{\gamma_1(\gamma_1 - 1)\gamma_2(\gamma_2 - 1)}). \quad (11.3.10)$$

Диаграмма с полюсами в u -канале (рис. 11.5, *е*) соответствует

области $x_+ \leq x \leq \infty$. Амплитуды, изображенные на рис. 11.5, *д* и 11.5, *е*, не переходят друг в друга непрерывным образом при $\tau = 0$. В области между x_+ и x_- значения z_+ и z_- образуют комплексно-сопряженную пару, и только одно из них (z_-) лежит в верхней полуплоскости. Соответствующая этой области конфигурация струны изображена на рис. 11.5, *ж*. Эта конфигурация представляет собой четырехструнное контактное взаимодействие, при котором две входящие струны касаются во внутренней точке ($\sigma = \sigma_I$), а возникающая при этом струна делится с образованием двух выходящих струн. По значениям σ_I необходимо проинтегрировать от низа струны 1 до верха струны 3. На рис. 11.5, *ж* изображены два листа, а вертикальная сплошная линия обозначает разрез, по которому часть струны 1, находящаяся ниже точки σ_I , соединяется со струной 3, в то время как остальная часть струны 1 соединяется со струной 4.

В терминах переменной x все три вклада, изображенные на рис. 11.5, *д*, *е*, *ж*, имеют лоренц-инвариантные подынтегральные выражения одного вида. Для того чтобы полная амплитуда была лоренц-инвариантна, необходимо включить диаграмму, которая заполняет область между $x = x_-$ и $x = x_+$, с определенным коэффициентом. Это означает, что нормировка четырехструнного мгновенного взаимодействия определяется через взаимодействие, в которых две открытые струны объединяются в одну. Подынтегральные выражения в диаграммах на рис. 11.5, *д* и 11.5, *ж* имеют одинаковый вид в точке $x = x_-$, поэтому их вклады в амплитуду переходят друг в друга непрерывным образом при правильной нормировке. Но вклад диаграммы на рис. 11.5, *ж* включает интегрирование по σ_I (т. е. по $\text{Im } \rho_I$), в то время как вклад диаграммы на рис. 11.5, *д* включает интегрирование по $\hat{\tau}$ (т. е. по $\text{Re } \rho_I$). В результате для того, чтобы компенсировать в мере множитель i , коэффициент в четырехструнном члене должен быть равен ig^2 . Локально по σ это четырехструнное контактное взаимодействие является таким же, как в случае слияния двух замкнутых струн с образованием одной замкнутой струны. Это взаимодействие представляет собой обобщение гравитационного взаимодействия на теорию струн; тем самым показано, что гравитационная константа связи κ определяется через константу связи для открытых струн (или янг-милсову константу связи) g .

11.3.2. Вычисление амплитуд

Функция Грина в z -плоскости задается решением уравнения Лапласа с равной нулю нормальной производной к действитель-

ной оси

$$N(z; z') = \ln |z - z'| + \ln |z - z'^*|. \quad (11.3.11)$$

В выражение для амплитуды (11.2.24) входит функция Грина, которая вычисляется между точками на различных струнах при $\tau = \pm \infty$, т. е. когда z и z' равны x_r , поэтому необходимо знать только функции Грина $N(x_r; x_s)$. Для использования этого результата переменные x_r можно выразить через переменные интегрирования исходной струнной диаграммы, т. е. через τ_l , и подставить в (11.2.24), но такая задача невыполнима. Гораздо проще произвести замену переменных интегрирования τ_l в (11.2.24) на x_r . Для этого необходимо вычислить якобиан преобразования $|\partial \tau_l / \partial z_r|$.

После такой замены переменных интегрирования амплитуда представляется в виде интеграла по $M-3$ независимым переменным интегрирования x_r . Ими являются просто переменные Кобы — Нильсена, описанные в разд. 1.5.4 и 7.1.4. Множителями, которые все еще необходимо вычислить, являются определитель $\det \Delta$, экспонента, содержащая функцию Грина, аргументы которой соответствуют точкам на одной струне, и якобиан $|\partial \tau_l / \partial z_r|$. Все эти выражения не зависят от внешних поперечных импульсов. Так как экспонента в (11.2.24), содержащая функцию Грина, является лоренц-инвариантной в терминах переменных x_r , произведение этих множителей также должно быть лоренц-инвариантным и поэтому независимым от α_r . Это означает, что результирующая ковариантная амплитуда рассеяния $A(1, 2, \dots, M)$ должна иметь вид

$$\int dx_2 dx_3 \dots dx_{M-2} V(x_1, \dots, x_M) \prod_{r < s} |x_r - x_s|^{p_r \cdot p_s}, \quad (11.3.12)$$

где V — мера, не зависящая от α_r . В обозначениях подразумевается, что переменные x_1 , x_{M-1} и x_M фиксированы произвольным образом.

Явное вычисление $\det \Delta$ описано кратко в приложении 11.А, а вычисление якобиана перехода от струнной диаграммы к верхней полуплоскости — в приложении 11.Б. Это приводит к некоторому выражению для

$$|\partial \tau_l / \partial z_r| |\det \Delta|^{(2-D)/2} \mathcal{M} \quad (11.3.13)$$

и, таким образом, к мере интегрирования V . Результат сводится к тому, что в критической размерности ($D = 26$) мера дает в точности множитель $\prod_r (\alpha_r)^{-1/2}$, который необходим для компенсации кинематических множителей при получении ковариантного выражения. Тот факт, что правильные кинематические

множители возникают только при вычислении меры в 26 измерениях, представляет собой еще один пример того, каким образом в теории возникает критическая размерность.

Для древесных диаграмм, так же как для однопетлевых амплитуд, при вычислении V можно воспользоваться кратчайшим путем, который состоит в переходе к специальной лоренцевой системе отсчета. При этом подразумевается, что теория является лоренц-инвариантной (что справедливо в критической размерности). Но этот метод не обобщается на случай многопетлевых амплитуд (для которых вычисления в приложениях 11.А и 11.Б должны быть обобщены). Сначала рассмотрим специальный предел, в котором все струны имеют очень малый импульс p^+ , за исключением двух, номера которых можно выбрать произвольно, например 1 и M (т. е. $\alpha_r \ll \alpha_1, \alpha_M$), и все внешние поперечные импульсы равны нулю. При этом условие нахождения на массовой оболочке имеет вид $p_r^- \sim -2/\alpha_r$. Если струна 1 находится в основном состоянии, то никакое из промежуточных состояний не может быть возбужденным, так как вершина взаимодействия любого возбужденного состояния с двумя основными состояниями содержит степени поперечных импульсов.

Тогда с помощью обычных квантовомеханических правил легко выписать ковариантную амплитуду

$$A(1, 2, \dots, M) = \mathcal{Y}(\alpha_1, \dots, \alpha_M) \int_0^\infty d\tau_2 \dots d\tau_{M-2} \times \\ \times \exp\left(-\sum_{r=2}^{M-1} p_r^- \tau_r / 2\right), \quad (11.3.14)$$

где \mathcal{Y} — нормировочный множитель, не зависящий от τ_r . В рассматриваемом частном случае инфинитезимальных α_r уравнение (11.3.2) для точек взаимодействия решается явно, что дает $M-2$ решений

$$y_r \sim x_r - \frac{\alpha_r}{\alpha_1} \bar{x}_r + O(\alpha_r^2), \quad r = 2, \dots, M-1, \quad (11.3.15)$$

где

$$\bar{x}_r = \frac{(x_r - x_1)(x_r - x_M)}{(x_1 - x_M)}. \quad (11.3.16)$$

Заметим, что $M-2$ решений y_r естественным образом ассоциируются со струнами, для которых значения α малы. Подставляя $z = y_r$ в (11.3.1), получаем (после простых алгебраических

выкладок) выражение для τ_r через x_r

$$\tau_r \equiv \text{Re } \rho_r \sim \alpha_1 \ln(x_r - x_1) - \alpha_1 \ln(x_r - x_M) + \\ + \alpha_r (\ln(\alpha_r \bar{x}_r / \alpha_1) - 1) + \sum'_{2 \leq s \leq M-1} \alpha_s \ln|x_r - x_s|, \quad (11.3.17)$$

где штрих означает, что член с $s = r$ опущен. Таким образом,

$$\exp\left\{-\sum_{r=2}^{M-1} p_r^- \tau_r / 2\right\} \sim (x_M - x_1)^2 \prod_{r=2}^{M-1} \left(\frac{\alpha_r \bar{x}_r}{e \alpha_1}\right) \times \\ \times \exp\left\{\sum_{1 \leq r < s \leq M} \left(\frac{\alpha_s}{\alpha_r} + \frac{\alpha_r}{\alpha_s}\right) \ln|x_r - x_s|\right\}, \quad (11.3.18)$$

где множитель $(x_M - x_1)^2$ компенсирует член с $r = 1$ и $s = M$ в экспоненциальном множителе.

Якобиан замены переменных интегрирования τ_r на x_r (при фиксированных значениях x_1, x_{M-1} и x_M) можно получить из (11.3.17), что дает

$$\frac{\partial(\tau_2 \dots \tau_{M-2})}{\partial(x_2 \dots x_{M-2})} \sim \prod_{r=2}^{M-2} \left| \frac{\alpha_1}{\bar{x}_r} \right|. \quad (11.3.19)$$

Подставляя полученные выражения в (11.3.14) и используя тот факт, что

$$p_r \cdot p_s \sim \alpha_r / \alpha_s + \alpha_s / \alpha_r, \quad (11.3.20)$$

получаем следующее выражение:

$$A(1, 2, \dots, M) = \mathcal{Y}(\alpha_1, \dots, \alpha_M) \frac{1}{|\alpha_1|} \prod_{r=2}^{M-1} \left| \frac{\alpha_r}{e} \right| \times \\ \times |(x_{M-1} - x_1)(x_M - x_1)(x_M - x_{M-1})| \times \\ \times \int dx_2 dx_3 \dots dx_{M-2} \prod_{1 \leq r < s \leq M} |x_s - x_r|^{p_r \cdot p_s}. \quad (11.3.21)$$

Его можно сравнить непосредственно с общим результатом для ковариантной струнной амплитуды рассеяния (11.3.12). Определим

$$\mathcal{Y}(\alpha_1, \dots, \alpha_M) = g^{M-2} G |\alpha_1| \prod_{r=2}^{M-2} |e/\alpha_r|, \quad (11.3.22)$$

где G — подходящий теоретико-групповой множитель, и константа связи g вставлена во все вершины взаимодействия. Тогда

$$V(x_1, \dots, x_M) = g^{M-2} G \prod_1^{M-1} \Theta(x_{r+1} - x_r) \times \\ \times |(x_{M-1} - x_1)(x_M - x_1)(x_M - x_{M-1})|. \quad (11.3.23)$$

Таким образом, амплитуда (11.3.12) сводится к форме Кобы — Нильсена, полученной в гл. 1 и 7.

11.4. Древесные диаграммы открытых струн с возбужденными внешними состояниями

До сих пор явные вычисления проводились для процессов, в которых внешними состояниями являлись основные состояния на массовой оболочке; в этом случае вычисления упрощаются, так как содержат только главный член функции Грина. В данном разделе мы рассмотрим функции Грина более детально и получим выражения для древесных диаграмм открытых струн с произвольными внешними возбужденными состояниями струны на массовой оболочке. Эти вычисления включают явное выражение для кубических взаимодействий между произвольными состояниями на массовой оболочке через осцилляторы, которые действуют в каждом фоковском пространстве трех струн. Эта вершина обобщает вершины испускания, которые использовались в предыдущих главах (для описания испускания струны в одном фиксированном состоянии). Более общая вершина создает основу для построения полевой теории взаимодействующих струн в калибровке светового конуса (вопрос, который в настоящей монографии не рассматривается).

В рассматриваемом анализе удобно ввести отдельные параметризации для каждой струны

$$\zeta_r = \xi_r + i\eta_r \equiv \frac{\tau_r}{\alpha_r} + i \frac{\sigma_r}{|\alpha_r|}, \quad (11.4.1)$$

где

$$0 \leq \eta_r \leq \pi, \quad (11.4.2)$$

а значения ξ_r отрицательны для всех струн независимо от того, являются ли они входящими или выходящими. Для каждой струны справедливы разложения по модам

$$X_r(\eta_r) = \mathbf{x}_r + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{X}_{rn} \cos n\eta_r, \quad (11.4.3)$$

$$P_r(\eta_r) = \frac{1}{\pi\alpha_r} \left(\mathbf{p}_r + \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}_{rn} \cos n\eta_r \right). \quad (11.4.4)$$

11.4.1. Функция Грина на бесконечной полосе

Рассмотрим сначала функцию Грина одной свободно распространяющейся открытой струны, которой соответствует длинная полоса ширины $\pi|\alpha|$. Для этого случая введем обозначение $\alpha = \alpha_1 = -\alpha_2$. Функцию Грина легко вычислить явно путем отображения полосы на полуплоскость с помощью преобразования

$$\zeta = \rho/\alpha = \ln z, \quad (11.4.5)$$

которое отображает входящую струну в момент $\xi = \xi_i$ в малую полуокружность в верхней полуплоскости с центром в точке $z=0$, а выходящую струну при $\xi = \xi_f$ — в «малую» полуокружность вокруг точки $z^{-1}=0$ (т. е. в большую полуокружность). При вычислении функции Грина между произвольными точками вдали от $z=0$ и $z=\infty$ начальное и конечное значения ξ можно положить равными бесконечности; тогда функция Грина в z -плоскости задается выражением (11.3.11), которое можно переписать в терминах переменной ζ путем обращения преобразования $z = \exp \zeta$, что дает

$$N_{\text{полоса}}(\sigma, \tau; \sigma', \tau') = \ln |e^{\zeta} - e^{\zeta'}| + \ln |e^{\zeta} - e^{\zeta''}| = \\ = 2 \max(\xi, \xi') - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n} e^{-n|\xi - \xi'|} \cos n\eta \cos n\eta'. \quad (11.4.6)$$

Если точки ξ и ξ' соответствуют начальному или конечному моментам времени, то функцию Грина необходимо модифицировать, так как на границе полуплоскости с вырезанными малыми полуокружностями необходимо наложить граничные условия Неймана. Для каждого экспоненциально убывающего члена $\exp\{n\xi\}$ или $\exp\{n\xi'\}$ существует дополнительный член, который соответствует волне, отраженной от границы в начальный или конечный момент времени, необходимый для того, чтобы функция Грина удовлетворяла граничному условию $\partial N/\partial \xi = 0$ в точках ξ_i или ξ_f (с аналогичным условием для производной по ξ'). При ξ , близких к ξ_i , в отраженной волне $\exp\{n\xi\}$ заменяется на $\exp\{2n\xi_i - n\xi\}$, и аналогичная замена производится для ξ вблизи ξ_f (то же производится с экспонентами, содержащими ξ'). В конечном счете при ξ и $\xi' \rightarrow \xi_i$ или ξ_f каждый член, содержащий $\exp\{n\xi\}$ или $\exp\{n\xi'\}$ (удваивается, что дает

$$N_{\text{полоса}}(\sigma, \tau; \sigma', \tau') = 2 \max(\xi, \xi') - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n} e^{-n|\xi - \xi'|} \cos n\eta \cos n\eta'. \quad (11.4.7)$$

11.4.2. Функция Грина для произвольных древесных амплитуд

Вычислим теперь функцию Грина для древесной диаграммы открытых струн общего вида, такой, как изображенная на рис. 11.4. Отображение, связывающее плоскость z с плоскостью ρ , задается формулой (11.3.1). Используя (11.3.11), легко получить главную часть функции Грина, вычисленной между точками ρ_r и ρ_s на входящих или выходящих струнах в моменты τ_r или τ_s , которые предполагаются большими. Поэтому, если r и s принадлежат разным струнам, то главным является следующий конечный член:

$$N(\sigma_r, \tau_r; \sigma_s, \tau_s) = 2 \ln |x_r - x_s|, \quad (11.4.8)$$

который не зависит от ρ_r и ρ_s . Этот член уже появлялся в предыдущем вычислении древесных диаграмм с внешними основными состояниями.

Когда обе точки принадлежат одной струне r , ситуация несколько усложняется, так как в этом случае функция Грина сингулярна при $\eta_r = \eta'_r$. Поведение в основном такое, как будто струна r является невзаимодействующей, поскольку точки на мировой поверхности при $\xi = \xi_r$ находятся очень далеко от области взаимодействия. Этот факт уже использовался при обосновании того, что для внешних тахионов члены с $r = s$ в экспоненте (11.2.19) дают вклад только в множители, входящие в меру. В рассматриваемом случае требуется несколько более тщательный анализ, который включает рассмотрение точек $z_r = x_r + \varepsilon \exp\{i\phi_r\}$ и $z'_r = x_r + \varepsilon \exp\{i\phi'_r\}$ на малой полуокружности радиуса ε вокруг точки x_r . Эти точки отображаются в точки $\xi_r = \xi'_r \equiv \tau_r/\alpha_r \sim \ln \varepsilon + \sum_{s \neq r} \alpha_s/\alpha_r \ln |x_r - x_s|$ и $\eta_r = \phi_r$, $\eta'_r = \phi'_r$. Члены в функции Грина, которые не убывают с ξ_r , имеют вид

$$N(\sigma_r, \tau_r; \sigma'_r, \tau'_r) = 2\xi_r - 2 \ln |2(\cos \eta_r - \cos \eta'_r)| - 2 \sum_{s \neq r} \frac{\alpha_s}{\alpha_r} \ln |x_r - x_s| + O(\tau_r^{-1}). \quad (11.4.9)$$

Первые два члена в правой части имеют тот же вид, что и выражение для функции Грина на ленте (11.4.7), вычисленной между двумя точками только в начальное или только в конечное время.

Интегрируя (11.4.9) по σ_r и по σ'_r , получаем

$$\frac{\tau_r}{\alpha_r} = N_{00}^{rr} + \sum_{s \neq r} \frac{\alpha_s}{\alpha_r} \ln |x_r - x_s|. \quad (11.4.10)$$

Объединяя (11.4.8) и (11.4.9), находим

$$\xi_r \equiv \frac{\tau_r}{\alpha_r} = \sum_s \frac{\alpha_s}{2\pi\alpha_r} \int d\eta_s N(\sigma_r, \tau_r; \sigma_s, \tau_s), \quad (11.4.11)$$

что совпадает с выражением (11.2.20) для τ , которое получено раньше.

Приступим теперь к рассмотрению полной функции Грина, включая экспоненциально убывающие члены. Вычисленная между точками, расположенными далеко от начального или конечного моментов времени для любой струны, функция Грина имеет общее разложение

$$N(\sigma_r, \tau_r; \sigma_s, \tau_s) = -\delta_{rs} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n} \cos n\eta_r \cos n\eta_s + \sum_{n, m=0}^{\infty} 2N_{mn}^{rs} e^{m\xi_r + n\xi_s} \cos m\eta_r \cos n\eta_s. \quad (11.4.12)$$

Первый член и $2N_{00}^{rs}$ — единственные члены, которые не являются убывающими функциями от ξ_r и ξ_s . Они соответствуют (11.4.8) и (11.4.9), поэтому

$$N_{00}^{rs} = \delta_{rs} \xi_r + (1 - \delta_{rs}) \ln |x_r - x_s| - \delta_{rs} \sum_{s' \neq r} \frac{\alpha_{s'}}{\alpha_r} \ln |x_r - x_{s'}|. \quad (11.4.13)$$

Бесконечный ряд членов с коэффициентами N_{mn}^{rs} при m или $n \neq 0$ состоит из убывающих функций от ξ_r и ξ_s .

Чтобы получить функцию Грина, вычисленную между точками на струнах при больших значениях начального или конечного времени, полученное выражение необходимо снова изменить таким образом, чтобы включить отраженные волны, которые необходимы для удовлетворения граничных условий Неймана на малых полуокружностях в z -плоскости. Как было показано, это приводит к удвоению каждого члена, содержащего множитель $\exp\{n\xi_r\}$ или $\exp\{n\xi_s\}$. Это означает, что при ξ_r и $\xi_s = \xi_i$ или $\xi_f \rightarrow -\infty$

$$N(\sigma_r, \tau_r; \sigma_s, \tau_s) = -\delta_{rs} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n} \cos n\eta_r \cos n\eta_s + 4 \sum_{m=1}^{\infty} (N_{m0}^{rs} e^{m\xi_r} \cos m\eta_r + N_{0m}^{rs} e^{m\xi_s} \cos m\eta_s) + 8 \sum_{m, n=1}^{\infty} N_{mn}^{rs} e^{m\xi_r + n\xi_s} \cos m\eta_r \cos n\eta_s + 2N_{00}^{rs}. \quad (11.4.14)$$

11.4.3. Амплитуда в осцилляторных переменных

После подстановки выражения (11.4.14) для N в формулу (11.2.19) для W можно выполнить интегрирование по σ и σ_r , которое проектирует на моды \mathbf{P}_r . Тогда амплитуда для произвольной древесной диаграммы (заданной формулой (11.2.8)) принимает вид

$$A(1, 2, \dots, M) = g^{M-2} G \int \prod_{l=1}^{M-3} d\tau_l \mathcal{Y}(\{\alpha_r\}, \{\tau_r\}) \int \prod_{r, n, i} dP_{r, n}^i \times \\ \times \Psi_r(P_{r, n}^i) \exp \left\{ - \sum_r \frac{1}{2} P_r^- \tau_r - \sum_r \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\mathbf{P}_{rn})^2}{4n} + \right. \\ \left. + \sum_{r, s, m, n=0}^{\infty} \frac{1}{2} N_{mn}^{rs} e^{m\xi_r + n\xi_s} \mathbf{P}_{rm} \cdot \mathbf{P}_{sn} \right\}. \quad (11.4.15)$$

Элемент объема \mathcal{Y} не зависит от поперечных импульсов и чисел заполнения для внешних струн, поэтому его можно найти путем вычисления в простом частном случае; этот же метод будет использован для вычисления вершины. При вычислении вершины открытых струн $M=3$, поэтому переменные интегрирования τ_l отсутствуют.

Осцилляторное представление подынтегрального выражения в (11.4.15) можно получить путем использования пространственно-временных волновых функций

$$\Psi_r(P_{r, n}^i) = \prod_{n, i} \langle k_{r, n}^i | P_{r, n}^i \rangle, \quad (11.4.16)$$

где $k_{r, n}^i$ — числа заполнения для струны с номером r . Понадобится также соотношение, показывающее, что

$$\prod_{r, n} \exp[-(\mathbf{P}_{r, n})^2/4n] = \prod_{r, i, n} \Psi_r^0(P_{r, n}^i) = \prod_{r, i, n} \langle P_{r, n}^i | 0 \rangle \quad (11.4.17)$$

является произведением волновых функций основных состояний для ненулевых мод внешних струн. Состояния $|P_{r, n}^i\rangle$ являются собственными состояниями оператора импульса и могут быть выражены через операторы рождения и уничтожения

$$|P_{r, n}^i\rangle = \left(\frac{1}{\pi n}\right)^{1/4} \exp\left(\frac{P_n^i \alpha_{-n}^i}{n} - \frac{(\alpha_{-n}^i)^2}{2n} - \frac{(P_n^i)^2}{4n}\right) |0\rangle; \quad (11.4.18)$$

при этом они являются собственными состояниями оператора: $\alpha_n^i + \alpha_{-n}^i$ с собственными значениями P_n^i . Выполнено также равенство $\langle P_n^i | P_n^i \rangle = \delta(P_n^i - P_n^i)$.

Подставляя полученные выражения для $\Psi_n(P_{r, n}^i)$ и $\exp(-\sum(\mathbf{P}_{rn})^2/4n)$ в (11.4.15), импульсные множители \mathbf{P}_{rm} можно заменить на $\alpha_m^r + \alpha_{-m}^r$. Тогда экспонента в (11.4.15) будет содержать члены вида $(\alpha_m^r + \alpha_{-m}^r) \exp\{m\xi_r\}$, где $e^{m\xi_r}$ — экспоненциально малый множитель. Эти малые множители можно компенсировать множителями $\exp(\sum P_r^- \tau_r/2)$, которые становятся большими после умножения на бра-состояния с ненулевыми числами заполнения. В результате в экспоненте остаются только моды, соответствующие операторам рождения, а конечное выражение принимает вид (с использованием (11.4.16))

$$A(1, 2, \dots, M) = g^{M-2} G \mathcal{Y}(\{k_{r, n}^i\} | \exp(-\sum_r P_r^- \tau_r/2) \times \\ \times \exp\left\{\frac{1}{2} \sum_{r, s} \sum_{m, n=0}^{\infty} N_{mn}^{rs} e^{m\xi_r + n\xi_s} \alpha_{-m}^r \cdot \alpha_{-n}^s\right\} | 0), \quad (11.4.19)$$

где P_r^- выражены через осцилляторные переменные, а $\alpha_0^r \equiv \mathbf{p}_r$.

Тот факт, что экспоненциально малые множители в экспоненте дают конечный вклад, легко показать путем протаскивания множителя $\exp\{-\sum P_r^- \tau_r/2\}$ направо, используя соотношение

$$\exp(-P_r^- \tau_r/2) \alpha_{-n}^r = \alpha_{-n}^r e^{-n\tau_r/\alpha_r} \exp(-P_r^- \tau_r/2); \quad (11.4.20)$$

при этом зависимость от ξ_r и ξ_s в экспоненте сокращается. Тогда возбужденные моды внутри P_r^- при действии на основное состояние исчезают, оставляя множители $\exp(\tau_r(\mathbf{p}_r^2 - 1)/2\alpha_r)$. Заметим, что если бы аннигилирующие моды оставались, то соответствующие экспоненциальные множители в результате оказались бы все равно малыми, поэтому пренебрежение ими оправдано.

Члены в экспоненте (11.4.19), содержащие коэффициенты N_{00}^{rs} , можно преобразовать, используя (11.4.13). При этом вклад от $\delta_{rs}\xi_r$ дает множитель, который сокращается с множителями $\exp\{-\tau_r \mathbf{p}_r^2/2\alpha_r\}$. Использование (11.4.10) для выражения множителя $\exp\{\tau_r/\alpha_r\} \equiv \exp\{\xi_r\}$ приводит к следующему полному вкладу нулевых мод в экспоненту (11.4.19):

$$\sum_{r \neq s} \left\{ \frac{1}{2} \mathbf{p}_r \cdot \mathbf{p}_s \ln|x_r - x_s| - \left(1 - \frac{1}{2} \mathbf{p}_r^2\right) \frac{\alpha_s}{\alpha_r} \ln|x_r - x_s| + N_{00}^{rr} \right\} \quad (11.4.21)$$

Подставляя полученное выражение в (11.4.19) и вспоминая, что множитель $\mathcal{M} = \exp\{N_{00}^{rr}\}$ объединяется простым способом

с элементом объема, получаем

$$A(1, 2, \dots, M) = g^{M-2} G \int dx_2 dx_3 \dots dx_{M-2} \prod_{r < s} |x_r - x_s|^{p_r \cdot p_s} \times \\ \times \prod_{r < s} (x_r - x_s)^{(1-p_r^2/2)\alpha_s/\alpha_r + (1-p_s^2/2)\alpha_r/\alpha_s} \times \\ \times \langle \{k_r^i, n\} | \exp \left\{ \frac{1}{2} \sum_{r, s} \sum_{m, n} N_{mn}^{rs} \alpha_{-m}^r \cdot \alpha_{-n}^s \right\} | 0 \rangle, \quad (11.4.22)$$

где $-p_r^2 = 2(N_r - 1)$ — квадрат массы r -й струны. Здесь сделан выбор $x_1 = 1$, $x_{M-1} = 0$ и $x_M = \infty$ за счет использования остаточной $SL(2, R)$ -инвариантности отображения; \sum' обозначает сумму без учета члена с $m = n = 0$. Полученное выражение явно сводится к амплитуде рассеяния тахионов на массовой оболочке (для которых $k_{n_r} = 0$ и $p_r^2 = 2$) в форме Кобы — Нильсена.

11.4.4. Общий вид коэффициентов Неймана

Функция Грина в z -плоскости задается выражением (11.3.11), которое переводится в ρ -плоскость путем обращения преобразования (11.3.1)

$$N(\rho; \rho') = \ln |z(\rho) - z'(\rho')| + \ln |z(\rho) - z'^*(\rho')|. \quad (11.4.23)$$

Коэффициенты Неймана N_{mn}^{rs} в (11.4.12) можно выразить с помощью контурного интеграла в z -плоскости, используя функцию Грина (11.3.11) в z -плоскости, следующим образом. Ненулевые коэффициенты Фурье ($m, n \neq 0$) в (11.4.12) имеют вид

$$N_{mn}^{rs} = \delta_{rs} \delta_{mn} \frac{1}{n} e^{-n|\xi_r - \xi_s|} + \\ + \frac{1}{\pi^2} e^{-m\xi_r - n\xi_s} \int_0^{2\pi} d\eta_r d\eta_s \cos m\eta_r \cos n\eta_s \ln(z_r - z_s), \quad (11.4.24)$$

где два члена в функции Грина ($\ln |z_r - z_s|$ и $\ln |z_r - z_s^*|$) объединены путем расширения области интегрирования по η_r и η_s .

Представляя косинусы в экспоненциальном виде, получаем один член следующего вида:

$$N_{mn}^{rs} = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_0^{2\pi} d\eta_r d\eta_s e^{-m\xi_r - n\xi_s} \ln(z(\xi_r) - z(\xi_s)) = \\ = \frac{1}{mn(2\pi i)^2} \int_{x_r} dz_r \int_{x_s} dz_s \frac{e^{-m\xi_r(z_r) - n\xi_s(z_s)}}{(z_r - z_s)^2}, \quad (11.4.25)$$

где переход ко второму равенству включает интегрирование по частям и последующую замену переменных интегрирования, приводящую к интегралам в z -плоскости вокруг точек x_r и x_s . Поскольку функции $\zeta_r(z_r)$ и $\zeta_s(z_s)$ являются сингулярными при $z_r = x_r$ и $z_s = x_s$ соответственно, интеграл дает ненулевой результат. Другие члены, возникающие при разложении косинуса, содержат функции $\zeta_r(z_r^*)$ или $\zeta_s(z_s^*)$, которые не имеют сингулярности в этих точках и поэтому не дают вклада при $r \neq s$. При $r = s$ они дают ненулевой вклад, который в точности сокращает член с δ_{rs} в (11.4.24). Поэтому выражение (11.4.25) представляет собой полный результат для всех r и s . Этот результат также верен, когда m или n равно нулю.

11.4.5. Коэффициенты Неймана для кубической вершины открытых струн

Выражение для вершины взаимодействия, связывающей три открытые струны, в осцилляторном базисе можно получить из (11.4.22), рассмотрев случай $M = 3$ и фиксируя $x_1 = 1$, $x_2 = 0$ и $x_3 = \infty$. Вершину $|V\rangle$ можно определить в тензорном произведении осцилляторных пространств трех струн следующим выражением:

$$A(1, 2, 3) \equiv g \langle k_{1,n}^i, k_{2,n}^i, k_{3,n}^i | V \rangle = \\ = g \langle \{k_r^i, n\} | \exp \left\{ \frac{1}{2} \sum_{r, s=1}^3 \sum_{m, n} N_{mn}^{rs} \alpha_{-m}^r \cdot \alpha_{-n}^s \right\} | 0 \rangle. \quad (11.4.26)$$

В этом выражении время взаимодействия фиксировано некоторым значением $\tau = \tau_0$, которое определяется отображением (11.3.1) для случая $M = 3$ (учитывая выбранные значения x_1 , x_2 и x_3):

$$\rho = \alpha_1 \ln(z - 1) + \alpha_2 \ln z. \quad (11.4.27)$$

Точка взаимодействия ρ_0 является сингулярной точкой отображения, которая удовлетворяет уравнению

$$\frac{\alpha_1}{z-1} + \frac{\alpha_2}{z} = 0. \quad (11.4.28)$$

Это уравнение имеет единственное решение

$$z_0 = -\frac{\alpha_2}{\alpha_3}, \quad (11.4.29)$$

которое определяет ρ_0 , поэтому время взаимодействия равно

$$\tau_0 \equiv \text{Re } \rho_0 = \alpha_1 \ln \left(-\frac{\alpha_1}{\alpha_3} \right) + \alpha_2 \ln \left(-\frac{\alpha_2}{\alpha_3} \right) = \sum_{r=1}^3 \alpha_r \ln |\alpha_r|. \quad (11.4.30)$$

Коэффициенты Неймана для кубической вершины можно вычислить явно, исходя из формулы (11.4.25), путем подстановки выражений для ζ_r , которые следуют из отображения (11.4.27):

$$e^{-\zeta_1} = \frac{z^{-\alpha_1/\alpha_1}}{z-1}, \quad (11.4.31)$$

$$e^{-\zeta_2} = \frac{(1-z)^{-\alpha_1/\alpha_2}}{z}, \quad (11.4.32)$$

$$e^{-\zeta_3} = -z \left(1 - \frac{1}{z}\right)^{-\alpha_1/\alpha_3}. \quad (11.4.33)$$

Коэффициенты Неймана можно вычислить, исходя из формулы (11.4.25), путем разложения подынтегрального выражения в ряд Тейлора и выделения вычетов в точках $z_r = x_r$ и $z_s = x_s$.

Определим

$$N_m^r \mathcal{P} = \sum_s N_{m0}^{rs} p_s, \quad (11.4.34)$$

где

$$\mathcal{P} = \alpha_1 p_2 - \alpha_2 p_1. \quad (11.4.35)$$

Хотя это и не очевидно, но функция \mathcal{P} симметрична относительно циклических перестановок внешних состояний при учете законов сохранения $\sum_r \alpha_r$ и $\sum_r p_r$. Справедливо также равенство

$$\sum_{r=1}^3 \frac{p_r^2}{\alpha_r} = -\frac{\mathcal{P}^2}{\hat{\alpha}}, \quad (11.4.36)$$

где

$$\hat{\alpha} = \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3. \quad (11.4.37)$$

Коэффициенты N_m^r и N_{mn}^{rs} , получающиеся из формулы (11.4.25) после подстановки формул (11.4.31)–(11.4.33), принимают вид

$$N_m^r = \frac{1}{\alpha_r} f_m \left(-\frac{\alpha_{r+1}}{\alpha_r} \right), \quad (11.4.38)$$

$$N_{mn}^{rs} = -\frac{m n \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3}{n \alpha_r + m \alpha_s} N_m^r N_n^s, \quad (11.4.39)$$

где $\alpha_4 = \alpha_1$. Функции f_m определены следующим образом:

$$\begin{aligned} f_m &= \frac{1}{m!} \frac{\Gamma(m\gamma)}{\Gamma(m\gamma+1-m)} = \frac{(-1)^{m-1}}{m!} \frac{\Gamma(m-m\gamma)}{\Gamma(1-m\gamma)} = \\ &= \frac{1}{m!} (m\gamma-1)(m\gamma-2)\dots(m\gamma-m+1). \end{aligned} \quad (11.4.40)$$

Эти функции можно интерпретировать как функции, устанавливающие соответствие между координатами входящих и выходящих струн и струны в момент взаимодействия, как описано в приложении 11.В.

Выражение для вершины при $\tau=0$ получается из вершины, описываемой формулой (11.4.22), путем сдвига по τ с помощью оператора $\exp[\sum_r P_r^- \tau_0/2]$. При этом ничего не меняется, если все три внешних состояния находятся на своих массовых оболочках, т. е. когда $\sum_r P_r^- = 0$, что не является удивительным, так как на массовой оболочке амплитуда инвариантна относительно трансляций по τ . Результат имеет вид

$$\begin{aligned} |V\rangle &= \exp\left(\sum_r P_r^- \tau_0/2\right) \exp\left\{\frac{1}{2} \sum_{r,s} \sum_{m,n=1}^{\infty} N_{mn}^{rs} \alpha_{-m}^r \cdot \alpha_{-n}^s + \right. \\ &\quad \left. + \sum_r \sum_m N_m^r \alpha_{-m}^r \cdot \mathcal{P}\right\} |0\rangle \delta\left(\sum_r p_r\right). \end{aligned} \quad (11.4.41)$$

Множитель $\exp[\sum_r P_r^- \tau_0/2]$ можно протащить вправо от других экспоненциальных множителей в $|V\rangle$, используя формулу (11.4.20); при этом N преобразуется в \bar{N} , где

$$\bar{N}_m^r = N_m^r e^{m\tau_0/\alpha_r}. \quad (11.4.42)$$

Мы используем также формулу

$$\exp\left(\sum_r P_r^- \tau_0/2\right) |0\rangle = \exp\left(-\left(\mathcal{P}^2/2\hat{\alpha} + \sum_r 1/\alpha_r\right) \tau_0\right) |0\rangle. \quad (11.4.43)$$

Окончательное выражение для вершины при $\tau=0$ имеет вид

$$|V\rangle = \exp\left(-\tau_0 \sum_r 1/\alpha_r + \Delta_B\right) |0\rangle \delta\left(\sum_r p_r\right), \quad (11.4.44)$$

где

$$\Delta_B = \frac{1}{2} \sum_{r,s} \sum_{m,n=1}^{\infty} \bar{N}_{mn}^{rs} \alpha_{-m}^r \cdot \alpha_{-n}^s + \sum_r \sum_m \bar{N}_m^r \alpha_{-m}^r \cdot \mathcal{P} - \frac{\tau_0}{2\hat{\alpha}} \mathcal{P}^2. \quad (11.4.45)$$

Вершина $|V\rangle$ представляет функционал $\Delta[X_1(\sigma) + X_2(\sigma) - X_3(\sigma)]$ в осцилляторном базисе. Это можно проверить непосредственно, замечая, что $|V\rangle$ удовлетворяет равенствам

$$(\hat{X}_1(\sigma) - \hat{X}_3(\sigma)) |V\rangle = 0, \quad 0 \leq \sigma \leq \pi \alpha_1, \quad (11.4.46)$$

$$(\hat{X}_2(\sigma) - \hat{X}_3(\sigma)) |V\rangle = 0, \quad \pi \alpha_1 \leq \sigma \leq \pi(\alpha_1 + \alpha_2). \quad (11.4.47)$$

Кроме того, поскольку $P^i(\sigma) \equiv -i\delta/\delta X^i(\sigma)$, вершина взаимодействия удовлетворяет условиям сохранения импульса

$$(\hat{P}_1(\sigma) + \hat{P}_3(\sigma))|V\rangle = 0, \quad 0 \leq \sigma \leq \pi\alpha_1, \quad (11.4.48)$$

$$(\hat{P}_2(\sigma) + \hat{P}_3(\sigma))|V\rangle = 0, \quad \pi\alpha_1 \leq \sigma \leq \pi(\alpha_1 + \alpha_2). \quad (11.4.49)$$

Эти уравнения проверяются путем выражения координат и импульсов (которые отмечены шляпками) через моды операторов рождения и уничтожения и исключения мод операторов уничтожения протаскиванием их вправо от множителя $\exp \Delta_B$. На вершину взаимодействия в форме (11.4.41) легко наложить условие нахождения внешних состояний на массовой оболочке, которому соответствует равенство нулю суммы $\sum P_T^-$.

11.5. Однопетлевые амплитуды открытых струн

Рассмотрим теперь вычисление петлевых амплитуд функциональными методами. Простейшим примером является планарная однопетлевая диаграмма, которая в операторном формализме обсуждалась в гл. 8. Все другие однопетлевые диаграммы открытых струн можно вычислить аналогичным образом. При этом необходимые изменения довольно просты и здесь детально не описываются, так как ответы уже получены в гл. 8. В дальнейшем мы будем рассматривать только процессы с внешними основными состояниями, чтобы не загромождать формулы.

11.5.1. Конформное отображение планарной петлевой диаграммы

Рассмотрим амплитуду с M внешними тахионами и одной петлей открытых струн. Струнная диаграмма в этом случае имеет щель, которая соединяет две внутренние точки взаимодействия. С этой диаграммой связан теоретико-групповой множитель $n \operatorname{tr}(\lambda_1 \dots \lambda_M)$, где множитель n возникает от $\operatorname{tr}(1)$, соответствующего внутренней границе. Рассматриваемую диаграмму можно отобразить в верхнюю комплексную полуплоскость многими способами. Например, можно провести такое отображение, что внешняя граница снова будет отображаться в действительную ось z , в то время как щель будет отображаться в окружность в верхней полуплоскости. Это отображение прекрасно обобщается на случай многопетлевых диаграмм. Однако при наличии только одной петли несколько проще использовать отображение, в котором внутренний струнный пропагатор разрезается, как показано на рис. 11.6. При таком отображении внешняя граница отображается в один сегмент

положительной действительной оси, а внутренняя граница петли отображается в сегмент отрицательной действительной оси. Извилистые линии, обозначающие разрез, отображаются в две

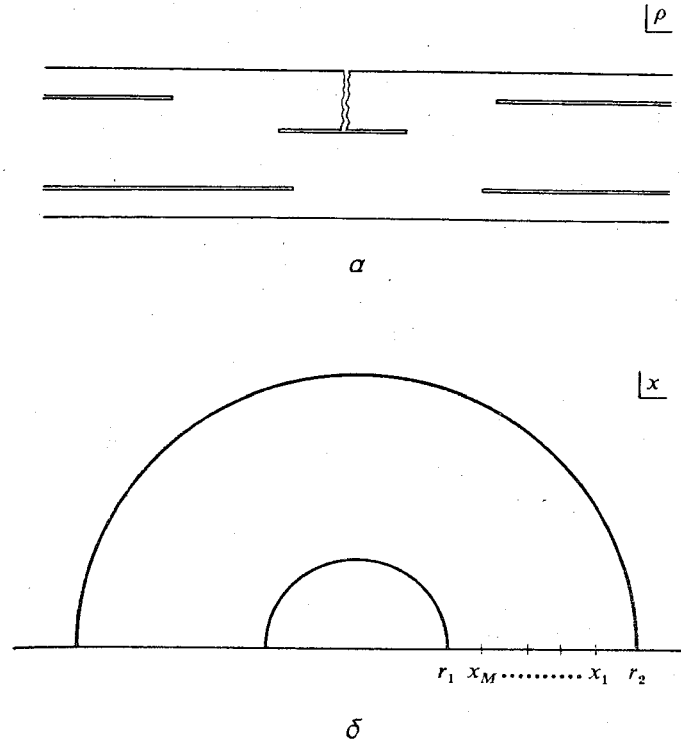


Рис. 11.6. Отображение планарной петлевой диаграммы из ρ -плоскости (а) на полукольцо в верхней z -полуплоскости (б). Внешняя граница диаграммы отображается на отрезок положительной действительной оси между двумя полуокружностями радиусов r_1 и r_2 , в то время как граница щели в ρ -плоскости отображается на отрезок отрицательной действительной оси z между теми же полуокружностями. При отображении один из внутренних пропагаторов разрезается вдоль волнистых линий, которые отображаются на внутреннюю и внешнюю полуокружности, и поэтому полуокружности отождествляются.

полуокружности с радиусами r_1 и r_2 соответственно (при этом $r_1 < r_2$), которые пересекают положительную действительную ось в двух граничных точках образа внешней границы. Отождествление извилистых линий на струнной диаграмме означает отождествление двух полуокружностей.

Обозначая отношение радиусов как

$$r_1/r_2 = \omega, \quad (11.5.1)$$

требуемое отображение получаем в виде

$$\rho = \sum_{r=1}^M \alpha_r \ln \psi(x_r/z, \omega) + \text{const}, \quad (11.5.2)$$

где функция ψ определена в гл. 8. Ее логарифм имеет вид

$$\ln \psi(x, \omega) = \ln \left(\frac{1-x}{\sqrt{x}} \right) + \frac{\ln^2 x}{2 \ln \omega} + \sum_{n=1}^{\infty} [\ln(1 - \omega^n x) + \ln(1 - \omega^n/x) - 2 \ln(1 - \omega^n)]; \quad (11.5.3)$$

как показано в гл. 8, он пропорционален корреляционной функции $\langle X^i(z) X^j(z') \rangle$. Периодичность функции ψ при сдвиге $\ln x \rightarrow \ln x + \ln \omega$ подразумевает, что точка z отождествляется со всеми точками $\omega^n z$ (где n — произвольное целое число). Отображение внешней границы в положительную ось z подобно отображению для древесных диаграмм, так как $\psi \sim (z - x_r)$ при $x_r \sim z$. Внешние частицы отображаются в точки x_r , которые располагаются между r_1 и r_2 (и повторяются в интервалах от $\omega^n r_1$ до $\omega^n r_2$ вдоль положительной оси). При отрицательных z у члена $\sum_{r=1}^M \alpha_r \ln^2(x_r/z)/2 \ln \omega$ появляется мнимая часть, поэтому отрицательная ось z отображается в щель в плоскости ρ , для которой величина σ равна

$$\sigma_a \equiv \text{Im } \rho_a = \pi \sum_r \alpha_r \frac{\ln x_r}{\ln \omega}; \quad (11.5.4)$$

таким образом, величина σ_a (т. е. ширина внутренней распространяющейся струны, которая на рис. 11.6 не разрезана) явно выражается через ω . Вся граница щели в плоскости ρ отображается на интервал между точками $z = -r_1$ и $z = -r_2$, а также на интервалы от $-\omega^n r_1$ до $-\omega^n r_2$ вдоль отрицательной оси. В этом случае отображение ρ в z имеет произвол, связанный с масштабными преобразованиями z (поскольку оно зависит только от отношения радиусов r_1 и r_2), а не с полной группой проективных преобразований. (В обозначениях (11.3.4) инвариантные точки фиксируются следующим образом: $y_1 = 0$ и $y_2 = \infty$, оставляя один произвольный параметр η .)

Переменными интегрирования в плоскости ρ являются времена взаимодействия внешних частиц (из которых только $M-2$ независимы), два момента взаимодействия, связанных

с петлей (τ_a и τ_b), и величина σ_a . Одно из времен можно фиксировать благодаря инвариантности относительно глобальных трансляций по τ . Это приводит к тому, что общее число переменных интегрирования равно M . После конформного отображения этими переменными становятся ω и $M-1$ переменных x_r в z -плоскости (одно из значений x_r можно фиксировать, используя масштабную симметрию). Область интегрирования задается неравенствами $0 \leq \omega \leq 1$, $\omega x_M \leq x_1 \leq \dots \leq x_{M-1} \leq x_M$, где x_M фиксировано произвольным образом и может быть выбрано, например, равным ω (что сделано в гл. 8, где x_r обозначались через ρ_r и было положено $\rho_M = \omega$). Отметим, что расположения струн, соответствующие различным значениям ω , конформно неэквивалентны.

11.5.2. Функция Грина

Необходимая функция Грина является решением уравнения Лапласа внутри полукольца, изображенного на рис. 11.6, с граничными условиями Неймана на действительной оси, а также условием отождествления двух полуокружностей. Построение функции Грина можно рассматривать как задачу электростатики (используя аналоговую модель из разд. 11.1.1), которую можно решить методом воображаемых зарядов. В рассматриваемом случае требуется бесконечный ряд воображаемых зарядов. Результат получается тот же, что и при вычислении корреляционной функции $\langle X^i(z) X^j(z') \rangle$ в гл. 8, а именно

$$N(z, z') = \ln |\psi(z'/z)| + \ln |\psi(\bar{z}'/z)|. \quad (11.5.5)$$

Вблизи сингулярной точки $z = z'$ эта функция сводится к той же функции Грина, которая была получена для древесных диаграмм, но без конечных поправок. Однако те члены в амплитуде, которые дают вклад в \mathcal{M} (11.2.22), а именно вклады, содержащие экспоненту от функции Грина, вычисленной на точках одной струны в моменты $\tau = \infty$ или $-\infty$, чувствительны к тому обстоятельству, что первый член в (11.5.2) отличается от соответствующего выражения для древесных диаграмм. Рассматриваемая функция Грина содержит $\ln |(z' - z)(z' - \bar{z})/zz'|$ вместо $\ln |(z' - z)(z' - \bar{z})|$, поэтому при $z \sim z'$ N содержит дополнительный член $-2 \ln |z|$. Следовательно, выражение для \mathcal{M} (11.2.22) включает дополнительный множитель

$$\exp \left(- \sum_r \frac{1}{24} (D-2) \ln |x_r| \right), \quad (11.5.6)$$

который равен $\prod_r |x_r|^{-1}$ при $D = 26$.

11.5.3. Планарная однопетлевая амплитуда

Вычисление однопетлевых амплитуд требует вычисления произведения $|\partial\tau_r/\partial z_r| |\det \Delta|^{(2-D)/2} \mathcal{M}$. Как и в случае древесных диаграмм существует простой способ вычисления этого элемента объема (который не зависит от поперечных импульсов), если предположить существование лоренц-инвариантности. Прежде всего представим, что петля возникает при сшивании M -частичной древесной диаграммы, как описано в гл. 8. Это изображено на рис. 11.7. Широкие струны (с шириной $\pm\pi\alpha$)

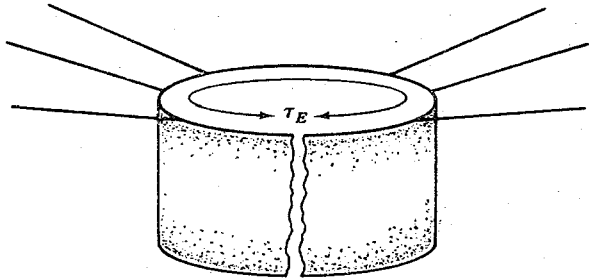


Рис. 11.7. Представление планарной петлевой диаграммы, используемое при вычислении элемента объема. У всех струн $p^+ = 0$, за исключением одной входящей и одной выходящей струн. Эти две струны сшиваются вместе, а по времени разделения состояний проводится интегрирование.

начинаются и заканчиваются в конечные времена произвольными состояниями; при этом временной интервал между этими состояниями составляет τ_E . Петля строится путем взятия следа по этим состояниям (включая интегрирование по петлевому импульсу), что соответствует цилиндру с периметром τ_E . (Это построение очень похоже на то, которое было использовано при вычислении петлевых диаграмм в гл. 8 и 9.) Легко видеть, что построенная картина конформно эквивалентна диаграмме, которую мы хотим вычислить путем отождествления струнной диаграммы в ρ -плоскости в z -плоскость, используя преобразование $z = e^\rho/\alpha$. В этом случае струна отображается на полукольцо, показанное на рис. 11.6, причем параметр $\omega = r_1/r_2$ отождествляется с $\exp\{-\tau_E/\alpha\}$. Элемент объема снова можно вычислить путем рассмотрения специального случая, в котором внешние струны в основном состоянии обладают очень малыми α_r и исчезающими поперечными импульсами. Как и в случае древесных амплитуд открытых струн, состояния, циркулирующие по петле, не могут меняться в промежутке времени между взаимодействиями с внешними частицами, поскольку для этого потребовались бы степени внешних поперечных импульсов.

Однако вместо следования по этому пути можно дать прямое определение элемента объема путем явного вычисления $|\partial\tau_r/\partial z_r| |\det \Delta|^{(2-D)/2} \mathcal{M}$, как намечено в приложениях 11.A и 11.B. Каждый метод дает одинаковое выражение для элемента объема. Результирующая амплитуда имеет вид (для $D = 26$),

$$A_p(1, 2, \dots, M) = g^M G \int_0^1 \frac{d\omega}{\omega^2} \int_{x_M}^{x_M/\omega} \frac{dx_1}{x_1} \int_{x_M}^{x_1} \dots \int_{x_M}^{x_{M-2}} \frac{dx_{M-1}}{x_{M-1}} \times \\ \times \left(\frac{\pi}{\ln \omega}\right)^{13} f(\omega)^{-24} \prod_{1 \leq s < t \leq N} [\psi(x_s/x_t, \omega)]^{p_r \cdot p_s}, \quad (11.5.7)$$

что совпадает с выражением, полученным в разд. 8.1.1, где x_M было положено равным ω . Граничная точка области интегрирования, в которой амплитуда расходится, т. е. при $\omega \rightarrow 1$, представляет собой предел, когда длина щели становится малой $\tau_a - \tau_b \rightarrow 0$. Это означает, что в данном подходе к петлевой амплитуде расходимость петли открытых струн возникает как эффект малых расстояний. Как показано в разд. 8.1.1, существует альтернативная интерпретация расходимости как инфракрасного эффекта, возникающего благодаря испусканию мягкого дилатона.

11.5.4. Другие однопетлевые амплитуды

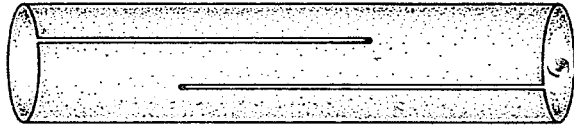
Вычисление планарной петлевой диаграммы можно обобщить на непланарные и неориентируемые петлевые диаграммы открытых струн довольно очевидным способом. В этом случае струнные диаграммы описывают взаимодействия, в которых струны, распространяющиеся внутри петли, переворачиваются перед рекомбинацией. Когда оба внутренних пропагатора содержат твисты, получается ориентируемая непланарная диаграмма, у которой частицы присоединены к обеим границам. Эта диаграмма, изображенная на рис. 11.8, а, представляет собой часть полной непланарной амплитуды, рассмотренной в гл. 8. Там было отмечено, что полная амплитуда содержит полюсы, соответствующие замкнутым струнам, в канале, образованном частицами 1 и 2. Можно показать, что в калибровке светового конуса эти полюсы возникают от вкладов, изображенных на рис. 11.8, б, которые содержат два последовательных взаимодействия, превращающих открытую струну в замкнутую путем соединения концов открытой струны.

Локально по σ новое взаимодействие идентично взаимодействию, при котором две открытые струны сливаются в одну. Как и ожидалось, это взаимодействие возникает при перекры-

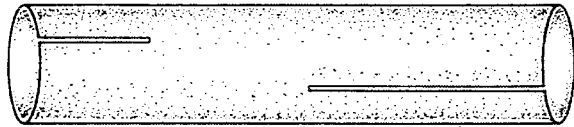
тии открытой и замкнутой струн. Подходящее конформное преобразование в z -плоскость для процесса, изображенного на рис. 11.8, имеет вид

$$\rho = \sum_{r=1}^K \alpha_r \ln \psi(x_r/z, w) + \sum_{r=K+1}^M \alpha_r \ln \psi^T(x_r/z, w), \quad (11.5.8)$$

где K частиц присоединено к внешней границе и $M - K$ — к внутренней. В этом случае переменные x_r внешних частиц,



a



b

Рис. 11.8. Два вида вкладов в однопетлевую непланарную диаграмму с одной начальной и одной конечной открытыми струнами. a — струнная диаграмма с двойным твистом; b — вклад, имеющий полюсы, которые соответствуют замкнутой струне. Заметим, что диаграмма a содержит два промежуточных состояния открытой струны, а b — одно промежуточное состояние замкнутой струны. Две диаграммы становятся одинаковыми, когда временное разделение вершин исчезает.

присоединенных к одной границе струнной диаграммы, отображаются на положительную действительную полуось z , а переменные частиц, присоединенных к другой границе, — на отрицательную действительную полуось. Диаграммы, показанные на рис. 11.8, дают вклады в амплитуду с одинаковым подынтегральным выражением в переменных x_r , но каждый вклад интегрируется по лоренц-инвариантной области. Для того чтобы получить полную лоренц-инвариантную область интегрирования, вклады от обоих процессов необходимо сложить с правильной относительной нормировкой. Этим определяется нормировка вершины открытая струна \leftrightarrow замкнутая струна через вершину взаимодействия трех открытых струн. Из требования, чтобы обе диаграммы на рис. 11.8 имели одинаковый вид в общей гра-

ничной точке области интегрирования, сразу следует, что новой вершине соответствует константа связи g . Это определение похоже на способ, по которому нормировка четырехструнного взаимодействия определялась при рассмотрении амплитуды для четырех открытых струн. Когда только один из внутренних пропагаторов содержит твист, возникает неориентируемая диаграмма, имеющая одну границу (лист Мёбиуса). Поскольку амплитуды, связанные с этими диаграммами, уже были вычислены в операторном формализме в гл. 8, в дальнейшем мы их рассматривать не будем.

11.6. Амплитуды замкнутых струн

11.6.1. Древесные амплитуды

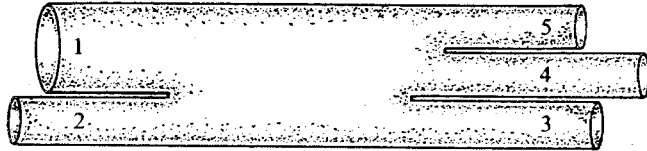
Мировая поверхность для древесных диаграмм замкнутых струн характеризуется периодическими граничными условиями, как показано на рис. 11.9, на котором изображена амплитуда рассеяния для M замкнутых струн. Кроме интегрирования по времени взаимодействия, необходимо провести интегрирование по σ на внутренней струне, чтобы обеспечить распространение только таких состояний, которые инвариантны относительно глобальных сдвигов по координате σ . Поэтому точка взаимодействия теперь характеризуется двумя параметрами τ_l и σ_l или одним комплексным параметром $\rho_l = \tau_l + i\sigma_l$. (Предполагается, что внешние состояния находятся в физическом подпространстве и удовлетворяют (11.1.10).) Благодаря инвариантности относительно глобальных трансляций по τ и по σ , одну из (двумерных) точек взаимодействия можно фиксировать, в то время как по остальным $2M - 6$ параметрам необходимо проинтегрировать. Древесные амплитуды для внешних замкнутых струн в основном состоянии имеют вид

$$A_c(1, 2, \dots, M) = 4\pi \left(\frac{\kappa}{4\pi}\right)^{M-2} \int \prod_{l=1}^{M-3} d\tau_l d\sigma_l \mathcal{M} \det \Delta^{-(D-2)/2} \times \exp\left(\frac{1}{4} \sum_{r \neq s} p_r \cdot p_s N(\sigma, \tau_r; \sigma', \tau_s)\right). \quad (11.6.1)$$

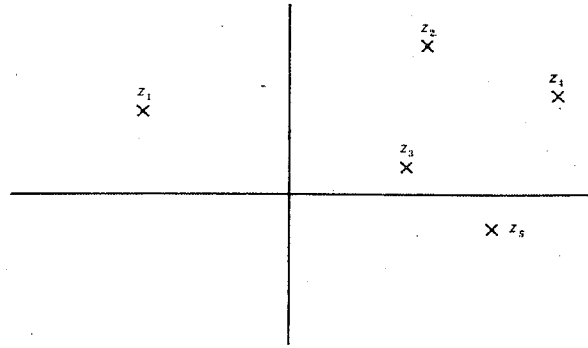
Функцию Грина N можно вычислить путем конформного отображения струнной диаграммы на всю комплексную плоскость. Подходящее отображение снова задается формулой (11.3.1), но с комплексными параметрами z_r вместо x_r :

$$\rho \equiv \tau + i\sigma = \sum_{r=1}^M \alpha_r \ln(z_r - z). \quad (11.6.2)$$

Концы струнной диаграммы при $\tau = \tau_i$ или τ_f отображаются в малые окружности вокруг точек z_r . Радиусы этих окружностей исчезают при τ_i или $\tau_f \rightarrow \infty$. Ситуация здесь такая же, какая была рассмотрена в разд. 1.4.4. Там было показано, что комплексную плоскость можно конформно отобразить на себя с помощью $SL(2, C)$ -преобразований, поэтому существующего



а



б

Рис. 11.9. Отображение произвольной древесной диаграммы для замкнутой струны в комплексную плоскость. Начальные и конечные струны отображаются в точки z_r , отмеченные крестиками.

произвола достаточно для фиксирования трех из комплексных параметров z_r . Остальные $M-3$ комплексные переменные z_r интегрируются по комплексной плоскости. Именно это число переменных интегрирования было получено выше при рассмотрении струнной картины.

Для конкретной струнной диаграммы, такой как на рис. 11.9, переменные τ_l имеют определенный порядок. По разности между последовательными переменными τ_l необходимо проинтегрировать от 0 до ∞ . При отображении в z -плоскости этому соответствует интегрирование по $M-3$ независимым перемен-

ным z_r по части комплексной плоскости, которая не является лоренц-инвариантной. Различным струнным диаграммам соответствуют разные упорядочения переменных τ_l . Складывая различные вклады, получаем в качестве области интегрирования всю комплексную плоскость z . Как в случае диаграмм открытых струн нетривиальным является то, что различные диаграммы объединяются гладко, и это на самом деле справедливо только в критической размерности.

Поскольку струнная мировая поверхность не имеет границ, функция Грина имеет вид

$$N(z; z') = \ln |z - z'|. \quad (11.6.3)$$

Элемент объема снова может быть найден путем рассмотрения специального случая, когда $M-2$ струны имеют инфинитезимальные p^+ и нулевые поперечные импульсы (и предполагая, что результат является лоренц-инвариантным в 26 измерениях). В целом вычисление $|\partial\tau_l/\partial z_r| |\det \Delta|^{(2-D)/2} \mathcal{M}$ похоже на вычисления в случае открытых струн, как показано в приложениях 11.A и 11.B. При фиксированных значениях $x_1 = 0$, $x_{M-1} = 1$ и $x_M = \infty$ в каждом случае элемент объема дает просто кинематический множитель $\prod_r \alpha_r^{-1/2}$. Результирующая ковариантная амплитуда рассеяния принимает вид

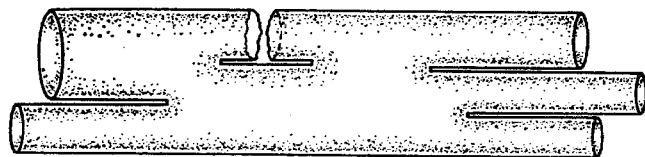
$$A(1, 2, \dots, M) \sim 4\pi \left(\frac{\alpha}{4\pi}\right)^{M-2} \int \left(\prod_{r=2}^{M-2} d^2 z_r \right) \prod_{1 \leq s < r \leq M-1} |z_r - z_s|^{p_r \cdot p_s / 2} \quad (11.6.4)$$

при $z_1 = 0$, $z_{M-1} = 1$ и $z_M = \infty$, что совпадает с видом амплитуды в модели Шапиро — Вирасоро, приведенной в разд. 7.2.1.

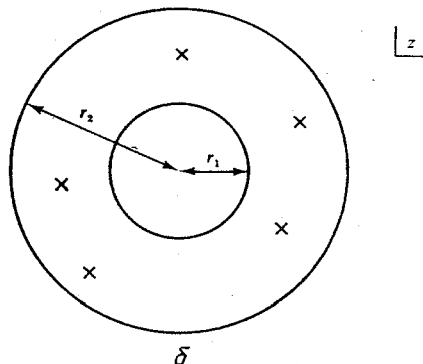
11.6.2. Однопетлевые амплитуды замкнутых струн

Рассмотрим однопетлевые амплитуды замкнутых струн. В этом случае обсуждение аналогично обсуждению, проведенному в разд. 11.5 для петлевой амплитуды открытых струн. Соответствующая струнная диаграмма изображена на рис. 11.10, а. Снова горизонтальные линии в прорезях должны быть попарно отождествлены. Существует несколько различных конформных преобразований, пригодных для отображения этой области в комплексную плоскость. При одном из них диаграмма отображается в верхнюю комплексную полуплоскость с вырезанным отверстием. Граница отверстия состоит из четырех секторов, причем противоположные пары отождествляются и возникает тор. При другом преобразовании мировая поверхность

отображается в комплексную плоскость с двумя вырезанными неконцентрическими кругами, границы которых отождествляются друг с другом с помощью проективного преобразования. Оба метода обобщаются на случай многопетлевых диаграмм, но в случае однопетлевых диаграмм они являются излишне громоздкими.



а



б

Рис. 11.10. Отображение однопетлевой диаграммы для замкнутых струн (а) на кольцо в z -плоскости (б); отношение внутреннего и внешнего радиусов кольца равно $r_1/r_2 = |\omega|$, произвольная точка z отождествляется с точками $\omega^n z$, где n — произвольное целое число.

Самый удобный способ вычисления однопетлевой диаграммы замкнутых струн состоит в разрезании струнной диаграммы вдоль штриховой линии и ее конформного отображения на кольцо в комплексной z -плоскости, которое изображено на рис. 11.10, б. Это преобразование похоже на отображение, использованное для петель открытых струн. Внутренняя и внешняя окружности (с радиусами r_1 и r_2) снова отождествляются, т. е. произвольная точка z отождествляется со всеми точками $\omega^n z$, где $|\omega| = r_1/r_2$. Фаза комплексного параметра ω соответствует тому, что две окружности, возникающие при разрезе вдоль волнистых линий на рис. 11.10, а, необходимо отождествить только с точностью до глобального сдвига параметра σ .

Отображение записывается в терминах функции $\psi(z_r/z, \omega)$ следующим образом:

$$\rho = \sum_{r=1}^M \alpha_r \left\{ \ln \psi(z_r/z, \omega) - \frac{\ln^2(z_r/z)}{2 \ln \omega} - \frac{\ln z \ln |z_r|}{\ln |\omega|} \right\}, \quad (11.6.5)$$

где функция ψ задана выражением (11.5.3). Ширина по параметру σ внутренней распространяющейся струны (которая не разрезана на рис. 11.10) определяется последним членом в (11.6.5)

$$\sigma_a = -2\pi \sum_{r=1}^M \alpha_r \frac{\ln |z_r|}{\ln |\omega|}. \quad (11.6.6)$$

Это соответствует мнимой части ρ , возникающей при обходе z вокруг начала координат. (Сумма первых двух членов в (11.6.5) регулярна при $z=0$.) В общем случае при обходе вокруг ручки параметризация содержит «твист», при котором изменение параметра σ равно

$$\phi_a = \text{Im} [\rho(\omega z) - \rho(z)] = \text{Im} \sum_{r=1}^M \alpha_r \left(\ln z_r - \ln |z_r| \frac{\ln \omega}{\ln |\omega|} \right), \quad (11.6.7)$$

где использовано соотношение $\psi(\omega x, \omega) = \psi(x, \omega)$. На самом деле разность $\rho(\omega z) - \rho(z)$ не имеет мнимой части.

Амплитуда задается интегралом по $M-1$ парам параметров σ_r и τ_r в точках взаимодействия, причем инвариантность относительно глобальных трансляций по τ и по σ можно использовать для фиксирования одной точки взаимодействия. Кроме того, необходимо проинтегрировать по ширине струны σ , расположенной под щелью, (σ_a) и по относительному твисту двух внутренних пропагаторов (ϕ_a). В целом это дает $2M$ действительных параметров, которые отображаются в M комплексных переменных z_r и ω . Как и ожидалось, подсчет числа переменных интегрирования совпадает с числом переменных интегрирования для замкнутой римановой поверхности с M выделенными точками и одной ручкой.

Область интегрирования по переменным z_r , изображенная на рис. 11.10, зависит от величины $\omega \equiv \exp\{2\pi i \tau\}$, поскольку она определяет отношение радиусов кольца. Область интегрирования по ω (или τ) требует более тщательного рассмотрения. При этом важно, что конформное отображение (11.6.5) инвариантно относительно преобразований

$$\tau \rightarrow \tau + 1, \quad (11.6.8)$$

$$\tau \rightarrow -1/\tau, \quad \ln z_r \rightarrow 2\pi i \ln z_r / \ln \omega, \quad \ln z \rightarrow 2\pi i \ln z / \ln \omega, \quad (11.6.9)$$

которые являются модулярными преобразованиями переменной t . Связанное с ними преобразование переменных $\ln z$ соответствует преобразованию $v \rightarrow v/t$ в обозначениях гл. 8. В гл. 8 показано, что в правильном выражении для однопетлевого интеграла для замкнутых струн интегрирование по t должно проводиться только по одной фундаментальной области, например такой, как обозначенная буквой F на рис. 8.21. Очень важной проверкой формализма, развитого в настоящей главе, является то, что область интегрирования должна правильно описываться струнной диаграммой без лишних вкладов. Напомним, что в предыдущих обсуждениях петлевых амплитуд замкнутых струн ограничение области интегрирования одной фундаментальной областью было необходимо для обеспечения унитарности. Поскольку вычисления в калибровке светового конуса в данной главе представляют собой приложения обычной квантовой механики, унитарность гарантирована, и неизбежно должна возникнуть правильная область интегрирования. Любая последовательная теоретико-полевая формулировка теории струн, такая как формулировка, основанная из калибровке светового конуса, гарантировано воспроизводит правильную область интегрирования.

Функция Грина в z -плоскости (как показано в гл. 8) имеет вид

$$N(z, z') = \ln \chi(z'/z, \omega), \quad (11.6.10)$$

где функция χ , похожая на $|\psi|$, определена в разд. 8.2.1. Она дается выражением

$$\ln \chi(x, \omega) = \ln \left| \frac{1-x}{\sqrt{x}} \right| + \frac{\ln^2 |x|}{2 \ln |\omega|} + \sum_{n=1}^{\infty} (\ln |1 - \omega^n x| + \ln |1 - \omega^n/x| - 2 \ln |1 - \omega^n|). \quad (11.6.11)$$

Эта функция удовлетворяет требуемому условию периодичности относительно преобразования $x \rightarrow \omega x$. Множители в петлевой амплитуде, не зависящие от поперечных импульсов, снова можно вычислить либо путем рассмотрения специального случая, в котором внешние частицы обладают исчезающе малыми α_r и p_r^i , либо путем явного вычисления с использованием обобщения методов, обрисованных в приложениях 11.A и 11.B. Результирующая амплитуда в точности совпадает с амплитудой, приведенной в разд. 8.2.1.

Хотя мы не будем вычислять многопетлевые диаграммы, трудно подсчитать число переменных интегрирования, соответствующих произвольной диаграмме. Например, рассмотрим про-

цесс рассеяния замкнутых струн с M внешними частицами и L петлями (т. е. ручками). Добавление ручки, которая соответствует вставке пары отождествленных горизонтальных линий на рис. 11.10, увеличивает число внутренних пропагаторов на три. Обобщение рассуждения, проведенного в однопетлевом случае, показывает, что с каждым из этих пропагаторов связано только два действительных параметра, поэтому общее число действительных параметров, по которым необходимо проинтегрировать, равно $6L + 2M - 6$. Эти параметры в точности совпадают с модулярными параметрами, с которыми мы впервые встретились в геометрическом подходе в разд. 3.4. Конформная структура римановой поверхности рода L включает $3L - 3$ комплексных параметра или $6L - 6$ действительных параметра, а M комплексных параметров или $2M$ действительных характеризуют положения M внешних частиц на поверхности.

11.7. Суперструны

В настоящем разделе мы кратко опишем применение функциональных методов в калибровке светового конуса к вычислению суперструнных амплитуд. Большая часть обсуждения касается процессов рассеяния для открытых струн, а обобщение на замкнутые струны проводится непосредственно. Основная отличительная черта, которая возникнет при обсуждении, состоит в том, что суперструнные взаимодействия не полностью описываются Δ -функционалами перекрытия, обеспечивающими непрерывность координат в момент взаимодействия. Кроме того, необходимо в точку взаимодействия вставить оператор, чтобы взаимодействие было совместимо с лоренц-инвариантностью и суперсимметрией.

Мы используем формализм калибровки светового конуса, в котором пространственно-временная суперсимметрия является явной. В этом случае условие инвариантности теории с взаимодействием относительно пространственно-временной суперсимметрии в значительной степени определяет вид взаимодействий. Дополнительные ограничения, накладываемые лоренц-инвариантностью, просто определяют множитель в мере, который является функцией от p_r^+ (т. е. от α_r).

11.7.1. $SU(4) \times U(1)$ -формализм

Вычисление функционального интеграла проще всего проводить после его выражения через интеграл по коммутирующему (или антикоммутирующему) набору координат. Поскольку фермионный $SO(8)$ -спинор $S^a(\sigma)$ удовлетворяет антикоммутиру-

ному соотношению

$$\{S^a(\sigma), S^b(\sigma')\} = \pi \delta^{ab} \delta(\sigma - \sigma'), \quad (11.7.1)$$

он одновременно является координатой и своим сопряженным импульсом. Второй спинор \tilde{S}^a (или $\tilde{S}^{\dot{a}}$ в случае теории типа IIA) удовлетворяет аналогичному соотношению. Для теории типа IIB можно определить антикоммутирующие грассмановы координаты $S_1^a + i\tilde{S}_2^a$, которые отличаются от своих сопряженных импульсов $S_1^a - i\tilde{S}_2^a$. Однако для других суперструнных теорий такого разложения, сохраняющего явную $SO(8)$ -симметрию, не существует (S и \tilde{S} являются неэквивалентными $SO(8)$ -спинорами в теории типа IIA, они зависимы в суперструнных теориях типа I, а в гетеротических теориях спиноры \tilde{S} совсем отсутствуют.) В последних случаях можно ввести отличающиеся «координаты» и сопряженные «импульсы» только с нарушением явной $\text{spin}(8)$ -симметрии. Наиболее прямой метод для этого состоит в разложении переменных по отношению к $\text{spin}(6) \times \text{spin}(2) \sim SU(4) \times U(1)$ -подгруппе. Группу $\text{spin}(6)$ естественно рассматривать как группу вращений шести «внутренних» пространственно-временных измерений, а $U(1)$ — как группу, связанную со спиральностью в обычном четырехмерном пространстве-времени. Вложение выбирается таким образом, что три восьмимерных представления $\text{spin}(8)$ разлагаются следующим образом:

$$8_v \rightarrow 6_0 + 1_1 + 1_{-1}, \quad (11.7.2)$$

$$8_s \rightarrow 4_{1/2} + \bar{4}_{-1/2}, \quad (11.7.3)$$

$$8_c \rightarrow 4_{-1/2} + \bar{4}_{1/2}, \quad (11.7.4)$$

где индексы обозначают представления группы $U(1)$, которые можно рассматривать как четырехмерную спиральность. Используя (11.7.2), получаем

$$X^i \rightarrow (X^I, X^R, X^L), \quad (11.7.5)$$

где $I = 1, \dots, 6$, а R и L соответствуют правой и левой киральностям, т. е.

$$X^R = \frac{1}{\sqrt{2}} (X^7 + iX^8), \quad (11.7.6)$$

$$X^L = \frac{1}{\sqrt{2}} (X^7 - iX^8). \quad (11.7.7)$$

Также

$$S^A(\sigma) + iS^{A+4}(\sigma) \sim \theta^A(\sigma), \quad (11.7.8)$$

$$S^A(\sigma) - iS^{A+4}(\sigma) \sim \lambda_A(\sigma) \equiv \frac{\delta}{\delta \theta^A(\sigma)}, \quad (11.7.9)$$

где нижний индекс $A = 1, \dots, 4$ преобразуется по представлению 4 группы $SU(4)$. Запись этого индекса сверху соответствует представлению $\bar{4}$ группы $SU(4)$. Символ \sim означает, что нормировка выбрана таким образом, что θ^A и λ_A удовлетворяют антикоммутационным соотношениям

$$\{\lambda_A(\sigma), \theta^B(\sigma')\} = \delta_A^B \delta(\sigma - \sigma'), \quad (11.7.10)$$

$$\{\theta^A(\sigma), \theta^B(\sigma')\} = \{\lambda_A(\sigma), \lambda_B(\sigma')\} = 0. \quad (11.7.11)$$

Второй грассманов $SU(4)$ -спинор $\tilde{\theta}^A(\sigma)$ и его сопряженный импульс $\tilde{\lambda}_A(\sigma)$ определяются аналогично $S^a(\sigma)$. Проведенное разложение, в котором шесть поперечных измерений отличаются от двух других, является математическим приемом для определения двух наборов грассмановых координат θ^A и $\tilde{\theta}^A$. Однако по отношению к пространственно-временным координатам такое разделение является вполне естественным, поскольку в конечном счете рассматриваемые теории могут иметь физический смысл только в том случае, если шесть измерений компактифицируются и тем самым действительно выделяются среди всех измерений.

Для открытых струн граничные условия, которым удовлетворяют грассмановы координаты, имеют вид

$$\theta^A(0) = \tilde{\theta}^A(0), \quad \theta^A(\pi|\alpha|) = \tilde{\theta}^A(\pi|\alpha|), \quad (11.7.12)$$

поэтому разложение по гармоникам записывается в виде

$$\theta^A(\sigma) = \sum_{-\infty}^{\infty} \theta_m^A e^{im\sigma/|\alpha|}, \quad \tilde{\theta}^A(\sigma) = \sum_{-\infty}^{\infty} \tilde{\theta}_m^A e^{-im\sigma/|\alpha|}. \quad (11.7.13)$$

Координаты θ^A и $\tilde{\theta}^A$ являются независимыми функциями на длине струны $0 \leq \sigma \leq \pi|\alpha|$, так как экспоненты в (11.7.13) образуют полный базис только на удвоенной длине. Это видно из следующего соотношения:

$$\tilde{\theta}^A(\sigma) = \theta^A(-\sigma). \quad (11.7.14)$$

Аналогично грассмановы импульсы для открытой струны имеют следующее разложение:

$$\lambda_A(\sigma) = \sum_{-\infty}^{\infty} \lambda_{mA} e^{im\sigma/|\alpha|}, \quad \tilde{\lambda}_A(\sigma) = \sum_{-\infty}^{\infty} \tilde{\lambda}_{mA} e^{-im\sigma/|\alpha|}, \quad (11.7.15)$$

где

$$\lambda_{mA} = \frac{1}{2\pi|\alpha|} \frac{\partial}{\partial \theta_{-m}^A}, \quad (11.7.16)$$

что обеспечивает выполнение соотношений (11.7.10) и (11.7.11).

Моды θ и λ удобно нормировать путем определения фермионных операторов рождения и уничтожения R_m^A и R_{mA}

$$\theta_m^A = \frac{1}{\sqrt{2} \alpha} R_m^A, \quad \lambda_{mA} = \frac{1}{\sqrt{2} \pi |\alpha|} R_{mA}, \quad (11.7.17)$$

где

$$\{R_m^A, R_{nB}\} = \alpha \delta_{m+n, 0} \delta_B^A, \quad (11.7.18)$$

$$\{R_m^A, R_n^B\} = \{R_{mA}, R_{nB}\} = 0. \quad (11.7.19)$$

Эти моды содержат множитель $\sqrt{\alpha}$, связанный с безразмерными модами S_m^a , который важен при рассмотрении действия генераторов группы Лоренца J^{+-} и J^{i-} , так как эти генераторы содержат множители $x^- = -i\partial/\partial p^+$. Хотя S^a и \tilde{S}^a преобразуются как компоненты спинора на мировой поверхности, координаты θ^A и $\tilde{\theta}^A$ так не преобразуются. Множители $\sqrt{\alpha}$ вставлены для упрощения громоздких обозначений в последующем изложении.

Для замкнутых струн координаты θ^A и $\tilde{\theta}^A$ имеют независимые разложения

$$\theta^A(\sigma) = \sum_{-\infty}^{\infty} \theta_m^A e^{2im\sigma/|\alpha|}, \quad \tilde{\theta}^A(\sigma) = \sum_{-\infty}^{\infty} \tilde{\theta}_m^A e^{-2im\sigma/|\alpha|}, \quad (11.7.20)$$

так же как импульсы

$$\lambda_A(\sigma) = \sum_{-\infty}^{\infty} \lambda_{mA} e^{2im\sigma/|\alpha|}, \quad \tilde{\lambda}_A(\sigma) = \sum_{-\infty}^{\infty} \tilde{\lambda}_{mA} e^{-2im\sigma/|\alpha|}. \quad (11.7.21)$$

Соотношения $\lambda_A(\sigma) = \delta/\delta\theta^A(\sigma)$ и $\tilde{\lambda}_A(\sigma) = \delta/\delta\tilde{\theta}^A(\sigma)$ возникают при отождествлении

$$\theta_m^A = \frac{1}{\alpha} Q_m^A, \quad \tilde{\theta}_m^A = \frac{1}{\alpha} \tilde{Q}_m^A, \quad (11.7.22)$$

$$\lambda_{mA} = \frac{1}{\pi|\alpha|} Q_{mA}, \quad \tilde{\lambda}_{mA} = \frac{1}{\pi|\alpha|} \tilde{Q}_{mA}, \quad (11.7.23)$$

где

$$\{Q_m^A, Q_{nB}\} = \{\tilde{Q}_m^A, \tilde{Q}_{nB}\} = \alpha \delta_{m+n, 0} \delta_B^A, \quad (11.7.24)$$

а остальные антикоммутируют равны нулю.

Струнные волновые функции теперь являются функциями от θ_m^A и $\tilde{\theta}_m^A$, а также от импульсных мод P_m^i . Поэтому они могут быть не более чем линейными функциями от каждой моды. Рассмотрим, например, волновую функцию основного состояния

$u(p^i, \theta_0^A)$. Эту волновую функцию можно разложить в степенной ряд

$$u(x, \theta_0^A) = u^1 + u_A^{1/2} \theta_0^A + \alpha u_{AB}^0 \theta_0^A \theta_0^B + \frac{1}{3} \alpha \varepsilon_{ABCD} u^A \theta_0^B \theta_0^C \theta_0^D + \frac{1}{6} \alpha^2 \varepsilon_{ABCD} u^{-1} \theta_0^A \theta_0^B \theta_0^C \theta_0^D. \quad (11.7.25)$$

Верхние индексы у компонент обозначают их $U(1)$ -спиральность. На компоненты волновой функции накладываются следующие условия TCP -самосопряженности:

$$u^{-1} = u^{1*}, \quad u^A,^{-1/2} = u_A^{1/2*}, \quad (11.7.26)$$

$$u_{AB}^0 = u^{0AB*} = \frac{1}{2} \varepsilon_{ABCD} u^{0CD}. \quad (11.7.27)$$

После наложения этих условий видно, что волновая функция основного состояния описывает восемь бозонных состояний (с целыми спиральностями) и восемь фермионных состояний (с полуцелыми спиральностями), что в точности соответствует янг-миллсову супермультиплету в десяти измерениях.

11.7.2. Генераторы супергруппы Пуанкаре

Генераторы супергруппы Пуанкаре можно выразить через $SU(4) \times U(1)$ -координаты и импульсы. Для этого необходимо провести разложение выражений для генераторов, которые выписаны в $SO(8)$ -обозначениях в разд. 5.2.2, и нормировать область значений σ на отрезок $0 \leq \sigma \leq \pi|\alpha|$. Оператор поперечного импульса представляет собой просто интеграл от плотности импульса

$$P^i = \int_0^{\pi|\alpha|} P^i(\sigma) d\sigma, \quad (11.7.28)$$

где i пробегает восемь значений R, L и I ($=1, \dots, 6$). Каждый из двух $SO(8)$ -суперзарядов Q^a и \tilde{Q}^a , которые составляют один 16-компонентный суперзаряд Майораны — Вейля в десяти измерениях, распадается на два $SU(4)$ -спинорных суперзаряда. Таким образом, в теории типа IIB два $SO(8)$ -суперзаряда разлагаются следующим образом:

$$Q_M^a \rightarrow (Q_M^{+A}, Q_M^+), \quad (11.7.29)$$

$$Q_M^a \rightarrow (Q_M^{-A}, Q_M^-), \quad (11.7.30)$$

где $M = 1, 2$. Значение индексов \pm вскоре будет ясно.

Компоненты суперзарядов без точек выражаются в виде интегралов по грассмановым координатам и импульсам

$$Q_1^{+A} = \int_0^{\pi|\alpha|} Q_1^{+A}(\sigma) d\sigma, \quad Q_2^{+A} = \int_0^{\pi|\alpha|} Q_2^{+A}(\sigma) d\sigma, \quad (11.7.31)$$

где плотности зарядов равны

$$Q_1^{+A}(\sigma) = \frac{1}{\pi} \varepsilon(\alpha) \theta^A(\sigma), \quad Q_2^{+A}(\sigma) = \frac{1}{\pi} \varepsilon(\alpha) \bar{\theta}^A(\sigma) \quad (11.7.32)$$

(при этом $\varepsilon(\alpha) = 1$, если $\alpha > 0$, и $\varepsilon(\alpha) = -1$, если $\alpha < 0$), и

$$Q_{1A}^+ = \int_0^{\pi|\alpha|} Q_{1A}^+(\sigma) d\sigma, \quad Q_{2A}^+ = \int_0^{\pi|\alpha|} Q_{2A}^+(\sigma) d\sigma, \quad (11.7.33)$$

где

$$Q_{1A}^+(\sigma) = \lambda_A(\sigma), \quad Q_{2A}^+(\sigma) = \bar{\lambda}_A(\sigma). \quad (11.7.34)$$

Компоненты суперзарядов с точками имеют более сложный вид, поскольку они билинейны по осцилляторам, как обсуждалось в разд. 5.2.2. В $SU(4)$ -обозначениях они имеют вид

$$Q_{1A}^- = \int_0^{\pi|\alpha|} \left\{ \sqrt{2} \rho_{AB}^I \left(P^I - \frac{1}{\pi} X'^I \right) \theta^B + 2\pi\varepsilon(\alpha) \left(P^L - \frac{1}{\pi} X'^L \right) \lambda_A \right\} d\sigma, \quad (11.7.35)$$

$$Q_{2A}^- = \int_0^{\pi|\alpha|} \left\{ \sqrt{2} \rho_{AB}^I \left(P^I + \frac{1}{\pi} X'^I \right) \bar{\theta}^B + 2\pi\varepsilon(\alpha) \left(P^L + \frac{1}{\pi} X'^L \right) \bar{\lambda}_A \right\} d\sigma, \quad (11.7.36)$$

$$Q_1^{-A} = \int_0^{\pi|\alpha|} \left\{ 2 \left(P^R - \frac{1}{\pi} X'^R \right) \theta^A - \sqrt{2} \pi\varepsilon(\alpha) \rho^{IAB} \left(P^I - \frac{1}{\pi} X'^I \right) \lambda_B \right\} d\sigma, \quad (11.7.37)$$

$$Q_2^{-A} = \int_0^{\pi|\alpha|} \left\{ 2 \left(P^R + \frac{1}{\pi} X'^R \right) \bar{\theta}^A - \sqrt{2} \pi\varepsilon(\alpha) \rho^{IAB} \left(P^I + \frac{1}{\pi} X'^I \right) \bar{\lambda}_B \right\} d\sigma. \quad (11.7.38)$$

В приведенных выражениях матрицы ρ_{AB}^I и ρ^{IAB} являются коэффициентами Клебша — Гордана группы $SU(4)$, которые описывают связь векторного представления с парой спиноров или антиспиноров. Часть их необходимых свойств приведена в приложении 11.Г.

Суперзаряды удовлетворяют (анти)коммутационным соотношениям, необходимым для образования алгебры суперзарядов:

$$\{Q_M^{+A}, Q_{NB}^+\} = \alpha \delta_B^A \delta_{M,N}, \quad (11.7.39)$$

$$\{Q_M^{+A}, Q_N^{-B}\} = \sqrt{2} \rho^{IAB} p^I \delta_{M,N}, \quad (11.7.40)$$

$$\{Q_{MA}^+, Q_{NB}^-\} = \sqrt{2} \rho_{AB}^I p^I \delta_{M,N}, \quad (11.7.41)$$

$$\{Q_M^{+A}, Q_{NB}^-\} = 2p^L \delta_{M,N} \delta_B^A, \quad (11.7.42)$$

$$\{Q_{MA}^+, Q_N^{-B}\} = 2p^R \delta_{M,N} \delta_A^B, \quad (11.7.43)$$

$$\{Q_M^{-A}, Q_{NB}^-\} = 2H \delta_{M,N} \delta_B^A, \quad (11.7.44)$$

а остальные антикоммутаторы и коммутаторы равны нулю. Полученные (анти)коммутационные соотношения представляют собой $SU(4) \times U(1)$ -разложение $N = 2$ -супералгебры, которая выписана в $SO(8)$ -обозначениях в разд. 5.2.2. В ковариантном виде она имела бы вид

$$\{Q_M, Q_N\} \sim \Gamma_{\mu} P^{\mu} \delta_{M,N}. \quad (11.7.45)$$

Выражение для гамильтониана в правой части (11.7.44) имеет вид

$$H \equiv P^- = \int_0^{\pi|\alpha|} \left\{ \varepsilon(\alpha) \left(\pi \mathbf{P}^2 + \frac{1}{\pi} \mathbf{X}'^2 \right) - 2i \left(\theta^A \lambda'_A - \bar{\theta}^A \bar{\lambda}'_A \right) \right\} d\sigma. \quad (11.7.46)$$

Для проверки замкнутости (11.7.44) важно наложить вспомогательное условие $N = \bar{N}$ для теорий типа II или $N = \bar{N} - 1$ для гетеротической теории, где N и \bar{N} — операторы чисел заполнения, построенные из соответствующих видов осцилляторов.

Выражения для генераторов супергруппы Пуанкаре в гетеротической струнной теории получаются путем отбрасывания одной из грассмановых координат (например, $\bar{\theta}$) в приведенных выше выражениях и включения дополнительных членов, которые описывают внутреннюю симметрию (как обсуждалось в гл. 6). В некиральной теории типа IIA выражения для генераторов те же, что и в теории типа IIB, но с перестановкой $\bar{\theta}^A$ и λ_A .

В теориях типа I не все суперзаряды сохраняются (т. е. не все они коммутируют с H). Для открытых струн граничные условия ограничивают суперсимметрию таким образом, что

сохраняются только средние суперзаряды

$$Q^+ = \sqrt{\frac{1}{2}} (Q_1^+ + Q_2^+) = \sqrt{\frac{1}{2}} \int_{-\pi|\alpha|}^{\pi|\alpha|} Q_1^+(\sigma) d\sigma, \quad (11.7.47)$$

$$Q^- = \sqrt{\frac{1}{2}} (Q_1^- + Q_2^-) = \sqrt{\frac{1}{2}} \int_{-\pi|\alpha|}^{\pi|\alpha|} Q_1^-(\sigma) d\sigma, \quad (11.7.48)$$

где опущенные индексы относятся к одному из представлений 4 или $\bar{4}$. В приведенных выражениях мы выразили заряды в виде интегралов по двойной области интегрирования $-\pi|\alpha| \leq \sigma \leq \pi|\alpha|$. Таким же образом для замкнутых струн типа I условие симметризации двух фоковских пространств приводит к соответствующему ограничению суперсимметрии.

Выражения для суперзарядов просто выписываются через соответствующие моды путем подстановки разложений координат и импульсов. Например, для открытых струн выражения для зарядов Q^- имеют вид

$$Q_{\bar{A}} \equiv \sqrt{\frac{1}{2}} (Q_{1\bar{A}} + Q_{2\bar{A}}) = \frac{1}{\alpha} \sum_{m=-\infty}^{\infty} (\sqrt{2} \alpha_{-m}^L \rho_{AB}^I R_m^B + 2\alpha_{-m}^L R_{mA}), \quad (11.7.49)$$

$$Q^{-A} \equiv \sqrt{\frac{1}{2}} (Q_1^{-A} + Q_2^{-A}) = \frac{1}{\alpha} \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-\sqrt{2} \alpha_{-m}^L \rho^{IAB} R_{mB} + 2\alpha_{-m}^R R_m^A), \quad (11.7.50)$$

а гамильтониан равен

$$H_{op} \equiv P_{op}^- = \frac{2}{\alpha} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2} \alpha_{-m} \alpha_m + \frac{m}{\alpha} R_{-m}^A R_{mA} \right) = \frac{1}{\alpha} (p^2 + 2N_{op}). \quad (11.7.51)$$

В этих выражениях осциллятор бозонной нулевой моды определен равенством $\alpha_0^i = p^i$, а оператор N_{op} определен формулой

$$N_{op} = \sum_{m=1}^{\infty} \left(\alpha_{-m}^i \alpha_m^i + \frac{m}{\alpha} R_{-m}^A R_{mA} + \frac{m}{\alpha} R_{-mA} R_m^A \right). \quad (11.7.52)$$

В приведенном выражении константа, связанная с нормальным упорядочением, отсутствует, так как она сокращается от моды к моде при переходе от (11.7.46) к (11.7.52).

В теории типа IIB соответствующие формулы имеют вид

$$Q_{\bar{1}A} = \frac{2}{\alpha} \sum_{m=-\infty}^{\infty} (\sqrt{2} \alpha_{-m}^L \rho_{AB}^I Q_m^B + 2\alpha_{-m}^L Q_{mA}), \quad (11.7.53)$$

$$Q_1^{-A} = \frac{2}{\alpha} \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-\sqrt{2} \alpha_{-m}^L \rho^{IAB} Q_{mB} + 2\alpha_{-m}^R Q_m^A) \quad (11.7.54)$$

и имеются эквивалентные формулы для Q_2^- , в которых используются операторы \tilde{Q} . Осциллятор бозонной нулевой моды в секторе замкнутой струны определяется равенством $\alpha_0^i = p^i/2$. Гамильтониан замкнутой струны равен

$$H_{cl} \equiv P_{cl}^- = \frac{1}{\alpha} (p^2 + 4N_{cl} + 4\tilde{N}_{cl}), \quad (11.7.55)$$

где

$$N_{cl} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\alpha_{-n}^i \alpha_n^i + \frac{n}{\alpha} Q_{-n}^A Q_{nA} + \frac{n}{\alpha} Q_{-nA} Q_n^A \right) \quad (11.7.56)$$

с идентичным выражением для \tilde{N}_{cl} , построенным по $\tilde{\alpha}_m$ и \tilde{Q}_m . Аналогичным образом генераторы группы Лоренца $J^{\mu\nu}$, перечисленные в разд. 5.2.2, можно переписать в $SU(4) \times U(1)$ -формализме. Эти генераторы имеют вид

$$J^{\mu\nu} = l^{\mu\nu} + E^{\mu\nu} + K^{\mu\nu}, \quad (11.7.57)$$

где $l^{\mu\nu}$ и $E^{\mu\nu}$ заданы теми же выражениями, что и в гл. 5, с поперечными векторными индексами, разложенными на $SU(4)$ -компоненты $\mathfrak{6}$, L и R . Спиновые части этих генераторов задаются следующим образом:

$$\begin{aligned} K^{IJ} &= -\frac{i}{2} \int_0^{\pi|\alpha|} (\lambda(\sigma) \rho^{IJ} \theta(\sigma) + \tilde{\lambda}(\sigma) \rho^{IJ} \tilde{\theta}(\sigma)) d\sigma = \\ &= -\frac{i}{2\alpha} \sum_{n=-\infty}^{\infty} R_{-n}^A (\rho^{IJ})_A{}^B R_{nB}, \end{aligned} \quad (11.7.58)$$

где $(\rho^{IJ})_A{}^B = (\rho_{AC}^I \rho^{JCB} - \rho_{AC}^J \rho^{ICB})/2$,

$$\begin{aligned} K^{RI} &= \frac{\pi i \varepsilon(\alpha)}{2\sqrt{2}} \int_0^{\pi|\alpha|} (\lambda(\sigma) \rho^I \lambda(\sigma) + \tilde{\lambda}(\sigma) \rho^I \tilde{\lambda}(\sigma)) d\sigma = \\ &= \frac{i}{2\sqrt{2}\alpha} \sum_{n=-\infty}^{\infty} R_{-nA} \rho^{IAB} R_{nB}, \end{aligned} \quad (11.7.59)$$

$$K^{LI} = -\frac{i\varepsilon(\alpha)}{2\pi\sqrt{2}} \int_0^{\pi|\alpha|} (\theta(\sigma)\rho^l\theta(\sigma) + \bar{\theta}(\sigma)\rho^l\bar{\theta}(\sigma)) d\sigma =$$

$$= -\frac{i}{2\sqrt{2}\alpha} \sum_{n=-\infty}^{\infty} R_{-n}^A \rho_{AB}^l R_n^B, \quad (11.7.60)$$

$$K^{LR} = \frac{i}{2} \int_0^{\pi|\alpha|} :(\lambda(\sigma)\theta(\sigma) + \bar{\lambda}(\sigma)\bar{\theta}(\sigma)): d\sigma = -\frac{i}{2\alpha} \sum_{n=-\infty}^{\infty} :R_{-n}^A R_{nA}^A:.$$

$$(11.7.61)$$

В последней формуле символ $:$ обозначает нормальное упорядочение ненулевых мод, в то время как нулевые моды антисимметризируются (т. е.: $R_{0A}R_0^A := (R_{0A}R_0^A - R_0^AR_{0A})/2$). Аналогичные выражения для теорий замкнутых струн получаются путем подстановки соответствующих разложений по модам.

Легко показать, что спиновые генераторы удовлетворяют $SO(8)$ -подалгебре полной десятимерной группы Лоренца

$$[K^{ij}, K^{kl}] = -iK^{ik}\delta^{jl} + \text{перестановки}, \quad (11.7.62)$$

хотя в теории в $SU(4) \times U(1)$ -формализме эта симметрия не является явной. В частности, вращения, генерируемые операторами J^{LI} и J^{RI} , представляют собой симметрии, которые требуют явной проверки. Эти вращения генерируют преобразования, которые перемешивают два неэквивалентных $SU(4)$ -спинора

$$[J^{LI}, Q^{-A}] = -i\sqrt{\frac{1}{2}}\rho^{IAB}Q_B^-, \quad (11.7.63)$$

$$[J^{LI}, Q_A^-] = 0; \quad (11.7.64)$$

аналогичные соотношения выполняются для J^{RI} . Гамильтониан инвариантен относительно этих преобразований, поэтому

$$[J^{LI}, H] = [J^{RI}, H] = 0. \quad (11.7.65)$$

11.7.3. Алгебра суперсимметрии в теории с взаимодействием

В бозонной теории взаимодействия были основаны на простом утверждении о том, что координаты струны непрерывны в момент взаимодействия. Это привело к тем же лоренц-инвариантным амплитудам, которые были получены в предыдущих главах с помощью операторных методов. Для суперструн непрерывности координат в (супер)пространстве недостаточно. В до-

полнение к Δ -функционалу, обеспечивающему непрерывность, вершина должна содержать оператор, который действует в точке разрыва или слияния. Например, будет показано, что взаимодействие трех открытых суперструн, которое в бозонной теории полностью задавалось Δ -функционалом, имеет вид

$$g\hat{H}(\sigma_l)\Delta[Z_1(\sigma) + Z_2(\sigma) - Z_3(\sigma)] \quad (11.7.66)$$

в теории суперструн типа I. Совокупность суперпространственных координат обозначена $Z_r(\sigma) = (X_r^i(\sigma), \theta_r^A(\sigma), \bar{\theta}_r^A(\sigma))$, а $\hat{H}(\sigma_l)$ является оператором, построенным из $P_r^i(\sigma)$, $\theta_r^A(\sigma)$ и $\bar{\theta}_r^A(\sigma)$, который действует в точке взаимодействия $\sigma_l = \pi\alpha_l$ (при параметризации, использованной в разд. 11.2.2). Как будет показано, оператор \hat{H} линеен по P^i , что делает его похожим на кубическое взаимодействие калибровочных частиц в обычной теории Янга — Миллса.

Чтобы определить вид взаимодействия, оказывается удобным работать в осцилляторном базисе, в котором вершину можно записать в виде тензорного произведения кет-векторов в осцилляторных пространствах трех струн. Это обобщает выражение (11.4.44) для $|V\rangle$ в бозонной теории. Соответствующая величина в теории суперструн обозначается через $|H\rangle$, а (11.7.66) записывается в осцилляторном базисе в виде

$$|H\rangle = \hat{H}|V\rangle_s, \quad (11.7.67)$$

где $|V\rangle_s$ — суперпространственный Δ -функционал $\Delta[Z_1(\sigma) + Z_2(\sigma) - Z_3(\sigma)]$ в осцилляторном базисе.

Вершина взаимодействия $|H\rangle$ генерирует нелинейные преобразования в пространстве струнных состояний, так как она отображает одну струну в пару струн. На самом деле она эквивалентна кубическому взаимодействию в *полевой теории струн*. Хотя полевая теория струн не рассматривается в настоящей монографии, наш подход к определению вида $|H\rangle$ эквивалентен методу определения кубической вершины струнной полевой теории в калибровке светового конуса. Точно так же как в гамильтониане (или P^-) возникают поправки от взаимодействия, для того чтобы теория с взаимодействием удовлетворяла алгебре суперзарядов, которая изоморфна (11.7.39) — (11.7.44), в других генераторах супералгебры также должны возникать члены от взаимодействия. В частности, поскольку правая часть (11.7.44) теперь содержит гамильтониан взаимодействия, который действует на струнные состояния нелинейно, левая часть также должна действовать нелинейно. В свою очередь это означает, что Q^{-A} и Q_A^- должны содержать члены

взаимодействия, которые можно представить (до порядка g) кет-векторами

$$|Q^{-A}\rangle = \hat{Q}^{-A} |V\rangle_S \quad (11.7.68)$$

и

$$|Q_{\bar{A}}\rangle = \hat{Q}_{\bar{A}} |V\rangle_S \quad (11.7.69)$$

соответственно.

Первый набор генераторов с учетом взаимодействия должен удовлетворять алгебре суперсимметрии. Различные генераторы состоят из приведенной ранее части, соответствующей свободной теории, плюс член взаимодействия порядка g , который сейчас рассматривается. (В генераторах возможно также присутствие членов более высокого порядка, но здесь будут рассмотрены только члены порядка g .) Уравнениями, определяющими эти члены, являются уравнения алгебры суперсимметрии, которые разлагаются до порядка g . Единственными членами в этом порядке являются перекрестные члены, содержащие антикоммутатор главного члена в суперзаряде с членом взаимодействия порядка g . Разлагая уравнения таким образом, получаем следующие условия:

$$\sum_r Q_r^{-A} |Q_{\bar{B}}\rangle + \sum_r Q_{r\bar{B}} |Q^{-A}\rangle = 2\delta_B^A |H\rangle, \quad (11.7.70)$$

$$\sum_r Q_r^{-A} |H\rangle + \sum_r H_r |Q^{-A}\rangle = 0, \quad (11.7.71)$$

$$\sum_r Q_{r\bar{A}} |H\rangle + \sum_r H_r |Q_{\bar{A}}\rangle = 0, \quad (11.7.72)$$

$$\sum_r Q_r^{-A} |Q^{-B}\rangle + \sum_r Q_r^{-B} |Q^{-A}\rangle = \sum_r Q_{r\bar{A}} |Q_{\bar{B}}\rangle + \sum_r Q_{r\bar{B}} |Q_{\bar{A}}\rangle = 0. \quad (11.7.73)$$

В этих уравнениях генераторы с индексом r обозначают генераторы, определенные в предыдущем разделе, которые построены из координат и импульсов струны r . Поскольку члены взаимодействия записываются в обозначениях трех фоковских пространств, каждый из генераторов в нулевом порядке необходимо представить в виде суммы трех членов, каждый из которых соответствует одному из трех фоковских пространств для струн. Генераторы группы Лоренца J^{+-} и J^{i-} также содержат поправки от взаимодействия, которые действуют нелинейно в пространстве струн, но здесь мы следить за ними не будем. Вместо этого мы кратко опишем, как уравнения (11.7.70)–(11.7.73) определяют вид членов взаимодействия, включая гамильтониан взаимодействия $|H\rangle$.

11.7.4 Дельта-функционал непрерывности

Выражение для $|V\rangle_S$ можно найти, исходя из Δ -функционала, теми же методами, с помощью которых был определен оператор $|V\rangle$ в бозонной теории (см. разд. 11.4.5). Результат имеет вид

$$|V\rangle_S = \exp\{\Delta_B + \Delta_F\} |0\rangle \delta\left(\sum_r \mathbf{p}_r\right) \delta\left(\sum_r \alpha_r \theta_r^A\right) \delta\left(\sum_r \alpha_r\right), \quad (11.7.74)$$

где Δ^B представляет собой то же выражение (11.4.45) (построенное из бозонных мод), что и раньше, в то время как фермионные моды содержатся в операторе

$$\Delta_F = \sum_{r,s=1}^3 \sum_{m,n=1}^{\infty} U_{mn}^{rs} R_{-mA}^r R_{-n}^{sA} + \sum_{r=1}^3 \sum_{m=1}^{\infty} V_m^r R_{-mA} \Theta^A. \quad (11.7.75)$$

В этом выражении

$$\Theta^A = \frac{1}{\alpha_3} (\theta_1^A - \theta_2^A) \quad (11.7.76)$$

и обладает циклической симметрией благодаря δ -функциям сохранения в (11.7.74). Матрицы U_{mn}^{rs} связаны с N_{mn}^{rs} следующим соотношением:

$$U_{mn}^{rs} = \frac{m}{\alpha_r} \bar{N}_{mn}^{rs}, \quad (11.7.77)$$

а

$$V_m^r = -\hat{\alpha} \sqrt{2} \frac{m}{\alpha_r} \bar{N}_m^r. \quad (11.7.78)$$

Хотя выражение (11.7.47) можно получить из функционального интеграла тем же путем, который привел к выражению для $|V\rangle$ в бозонной теории, но проще проверить, что это выражение действительно представляет Δ -функционал путем исследования непрерывности координат

$$(Z_1(\sigma) - Z_3(\sigma)) |V\rangle_S = 0, \quad 0 \leq \sigma \leq \pi\alpha_1, \quad (11.7.79)$$

$$(z_2(\sigma) - Z_3(\sigma)) |V\rangle_S = 0, \quad \pi\alpha_1 \leq \sigma \leq \pi(\alpha_1 + \alpha_2) \quad (11.7.80)$$

и сохранения импульса

$$\left(\frac{\delta}{\delta Z_1(\sigma)} + \frac{\delta}{\delta Z_3(\sigma)}\right) |V\rangle_S = 0, \quad 0 \leq \sigma \leq \pi\alpha_1, \quad (11.7.81)$$

$$\left(\frac{\delta}{\delta Z_2(\sigma)} + \frac{\delta}{\delta Z_3(\sigma)}\right) |V\rangle_S = 0, \quad \pi\alpha_1 \leq \sigma \leq \pi(\alpha_1 + \alpha_2), \quad (11.7.82)$$

где условия относятся как к бозонным, так и к грассмановым переменным. Координаты и импульсы в (11.7.79)–(11.7.82) выражаются через операторные моды (α_m^i , R_m^A и R_{mA}).

Суперзаряды Q^{A+} и Q_A^+ пропорциональны соответственно интегралам от плотностей $\epsilon(\alpha)\theta^A(\sigma)$ и $\lambda_A(\sigma)$. Это означает, что грассмановы компоненты (11.7.79)–(11.7.82) эквивалентны сохранению (+)-компонент плотностей суперзаряда на струнах в момент взаимодействия при всех значениях σ .

Ситуация с (—)-компонентами суперзарядов не такая простая. Напомним, что Q^{-A} и Q_A^- являются интегралами от квадратичных форм бозонных и фермионных координат и импульсов; Δ -функционал в вершине взаимодействия обеспечивает сохранение плотностей этих зарядов при всех значениях σ вне сингулярной точки взаимодействия $\sigma_l = \pi\alpha_1$. Однако область вблизи $\sigma = \sigma_l$ необходимо рассмотреть более тщательно, так как здесь многие операторы имеют сингулярность. Действие оператора $\sum_r Q_r^-$ на $|N\rangle$ определяется решением уравнений (11.7.70)–(11.7.73). Но необходимо изучить поведение операторов, которые сингулярны при $\sigma = \sigma_l$.

11.7.5. Сингулярные операторы вблизи точки взаимодействия

То обстоятельство, что эволюция струнных координат является везде гладкой, за исключением точек разрыва или слияния, где некоторые операторы имеют особенности, не является удивительным с точки зрения функционального подхода в калибровке светового конуса. Кривизна мировой поверхности в точках взаимодействия бесконечна, в то время как во всех других точках она равна нулю. Существование таких сингулярностей, которые в теории с взаимодействием играют решающую роль, является естественным с функциональной точки зрения. Конформное отображение в верхнюю полуплоскость z приводит к параметризации, в которой кривизна мировой поверхности нигде не имеет особенностей и все операторы хорошо определены. Поэтому существование сингулярных операторов можно отнести на счет отображения.

Рассмотрим конформное отображение, которое отображает верхнюю полуплоскость z в струнную диаграмму (на плоскость ρ , где $\rho = \tau + i\sigma$). В окрестности точки взаимодействия (z_l и ρ_l) отображение имеет точку ветвления, соответствующую квадратному корню, так как граница струны удваивается при повороте на себя, поэтому

$$(z - z_l) \sim c(\rho - \rho_l)^{1/2}, \quad (11.7.83)$$

где c — константа. Отсюда следует

$$\partial z / \partial \rho \sim c(\rho - \rho_l)^{-1/2}. \quad (11.7.84)$$

В теории операторы содержат множители $(\partial z / \partial \rho)^J$, где J — конформный вес оператора. Поскольку P^i преобразуется с весом $J = 1$, это означает, например, что оператор

$$P^i(\rho) = \frac{\partial z}{\partial \rho} P^i(z) \quad (11.7.85)$$

расходится в окрестности точки взаимодействия. Операторы $\theta(\rho)$ и $\tilde{\theta}(\rho)$ имеют такие же расходимости. С другой стороны, операторы $X^i(\rho)$ и $\lambda(\rho)$ имеют вес $J = 0$ и поэтому несингулярны. (Законы преобразования θ и λ будут ясны из дальнейшего изложения, где приведены явные вычисления.)

Для большей ясности рассмотрим сначала поведение оператора $(P_1^i(\sigma) - X_1^i(\sigma)/\pi)$, определенного на струне 1 вблизи точки взаимодействия $\sigma = \pi\alpha_1$,

$$(P_1^i(\sigma) - \frac{1}{\pi} X_1^i(\sigma)) |V\rangle_S = \frac{1}{\pi\alpha_1} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \alpha_m^i e^{im\sigma/\alpha_1} |V\rangle_S. \quad (11.7.86)$$

Подстановка выражения для $|V\rangle_S$ и протаскивание операторов уничтожения сквозь множитель $\exp \Delta_V$ приводит к выражению

$$\frac{1}{\pi\alpha_1} \left\{ p_1^i + \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_{-m}^i e^{-im\sigma/\alpha_1} + \mathcal{P}^i \sum_{n=1}^{\infty} n e^{in\sigma/\alpha_1} \bar{N}_n^1 + \sum_{s=1}^3 \sum_{m,n=1}^{\infty} n \bar{N}_{nm}^{1s} \alpha_{-m}^i e^{in\sigma/\alpha_1} \right\} |V\rangle_S, \quad (11.7.87)$$

где операторы \mathcal{P}^i определены в (11.4.35).

Можно показать, что последние два члена в предыдущем уравнении расходятся в пределе $\epsilon \rightarrow 0$, где ϵ — положительный параметр:

$$\epsilon = \pi\alpha_1 - \sigma. \quad (11.7.88)$$

Подставляя выражение для \bar{N}_m из (11.4.42) и (11.4.38), получаем главную часть второй суммы в (11.7.87) (с использованием формулы Стирлинга) при $\epsilon \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{P}^i}{\pi\alpha_1} \sum_{n=1}^{\infty} n e^{in\sigma/\alpha_1} \bar{N}_n^1 &= \frac{\mathcal{P}^i}{\pi\alpha_1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} e^{in\sigma/\alpha_1} \frac{\Gamma(-n\alpha_2/\alpha_1)}{\Gamma(1-n-n\alpha_2/\alpha_1)} e^{n\tau_0} \sim \\ &\sim - \frac{2\mathcal{P}^i}{(2\pi)^{3/2} \alpha_1 \sqrt{-\alpha_2\alpha_3}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} e^{in\epsilon/\alpha_1} \sim \frac{\eta^* \mathcal{P}^i}{\pi(-2\hat{\alpha})^{1/2}} \epsilon^{-1/2}, \end{aligned} \quad (11.7.89)$$

где

$$\eta = e^{\pi i/4}, \quad (11.7.90)$$

а $\hat{\alpha} = \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3$, как и раньше. Для того чтобы надлежащим образом определить бесконечную сумму, важно учесть, что ϵ имеет малую мнимую часть, что соответствует рассмотрению оператора в точке, немного сдвинутой в область отрицательных значений τ .

Аналогичным образом из (11.4.39) следует, что при $n \rightarrow \infty$

$$\bar{N}_{nm}^{1s} \sim -\frac{m\hat{\alpha}}{\alpha_s} \bar{N}_n^1 \bar{N}_m^s, \quad (11.7.91)$$

и, таким образом, последний член в (11.7.87) также расходится при $\epsilon \rightarrow 0$ и имеет вид

$$\frac{\alpha_{-m}^{si}}{\pi \alpha_1} \sum_{n=1}^{\infty} n \bar{N}_{nm}^{1s} e^{in\sigma/\alpha_1} \sim -\frac{\eta^* \alpha_{-m}^{si} (-\hat{\alpha})^{1/2}}{\sqrt{2} \pi} \epsilon^{-1/2} \frac{m}{\alpha_s} \bar{N}_m^s. \quad (11.7.92)$$

Из полученных результатов следует

$$\epsilon^{1/2} \left(P_1^i(\sigma) - \frac{1}{\pi} X_1^i(\sigma) \right) |V\rangle_S \sim \frac{1}{\pi} \eta^* Z^i |V\rangle_S, \quad (11.7.93)$$

где линейная комбинация бозонных осцилляторов Z^i определена следующим выражением:

$$Z^i = |2\hat{\alpha}|^{-1/2} \left(\mathcal{P}^i - \hat{\alpha} \sum_{r,m} \frac{m}{\alpha_r} \bar{N}_m^r \alpha_{-m}^i \right). \quad (11.7.94)$$

Аналогичным образом получаем

$$\epsilon^{1/2} \left(P_1^i(\sigma) + \frac{1}{\pi} X_1^i(\sigma) \right) |V\rangle_S \sim \frac{1}{\pi} \eta Z^i |V\rangle_S. \quad (11.7.95)$$

Выражение для Z^i симметрично относительно циклической перестановки трех струн, что отражает то обстоятельство, что тот же результат получается при рассмотрении действия операторов в окрестности точки взаимодействия на любой из струн, хотя мы начинали с рассмотрения операторов, определенных на струне 1.

Аналогичные подходы применимы к рассмотрению действия грасмановых координат в точке взаимодействия. По существу тот же анализ дает

$$\epsilon^{1/2} \theta_1^A(\sigma) |V\rangle_S \sim \eta^* Y^A |V\rangle_S, \quad (11.7.96)$$

$$\epsilon^{1/2} \bar{\theta}_1^A(\sigma) |V\rangle_S \sim \eta Y^A |V\rangle_S, \quad (11.7.97)$$

где

$$Y^A = \left| \frac{1}{2} \hat{\alpha} \right|^{1/2} \left(\Theta^A + \sqrt{\frac{1}{2}} \sum_{r,m} \frac{m}{\alpha_r} \bar{N}_m^r R_{-m}^{rA} \right). \quad (11.7.98)$$

Путем такого же анализа нетрудно показать, что операторы $X_r^i(\sigma)$, $\lambda_A(\sigma)$ и $\bar{\lambda}_A(\sigma)$ не имеют сингулярностей в точке взаимодействия.

11.7.6. Члены взаимодействия

Теперь вернемся к рассмотрению уравнений (11.7.70)–(11.7.73), которые являются уравнениями для определения Q^- . Подставляя $|H\rangle = \hat{H}|V\rangle$ и $|Q_A^- \rangle = \hat{Q}^{-A}|V\rangle$, уравнения, содержащие \hat{H} , которые требуется решить, можно записать в виде

$$\sum_{r=1}^3 Q_r^{-A} \hat{Q}_B^- |V\rangle_S + \sum_{r=1}^3 Q_{rB}^- \hat{Q}^{-A} |V\rangle_S = 2\delta_B^A \hat{H} |V\rangle_S, \quad (11.7.99)$$

$$\sum_{r=1}^3 Q_r^{-A} \hat{H} |V\rangle_S + \sum_{r=1}^3 H_r \hat{Q}^{-A} |V\rangle_S = 0, \quad (11.7.100)$$

$$\sum_{r=1}^3 Q_{rA}^- \hat{H} |V\rangle_S + \sum_{r=1}^3 H_r \hat{Q}_A^- |V\rangle_S = 0, \quad (11.7.101)$$

в то время как (11.7.73) дает дополнительные ограничения на $|Q^- \rangle$.

Вторые члены в (11.7.100) и (11.7.101) равны нулю, если рассматриваются матричные элементы между произвольными состояниями на массовой оболочке (так как $\sum_r H_r = 0$ для состояний на массовой оболочке). Можно показать, что для таких состояний $\sum_r Q_r^- \hat{H} |V\rangle_S = 0$. В свою очередь отсюда следует, что \hat{H} не может быть просто константой, так как $\sum_r Q_r^- |V\rangle_S \neq 0$. Простейший способ доказать это заключается в представлении Q_r^- в виде интегралов от плотностей. Например,

$$\sum_{r=1}^3 Q_r^{-A} |V\rangle_S = \int_{1+2+3} \left\{ \left(P^R - \frac{1}{\pi} X'^R \right) \theta^A - \frac{\pi \epsilon(\alpha)}{\sqrt{2}} \rho^{IAB} \left(P^I - \frac{1}{\pi} X'^I \right) \lambda_B \right\} d\sigma |V\rangle_S. \quad (11.7.102)$$

В этом выражении контуры интегрирования по струнам 1, 2 и 3 проходят их ширину дважды (рис. 11.11). Из сохранения импульсов $P_r^i(\sigma)$, заданного формулами (11.7.81) и (11.7.82), и из непрерывности координат $X_r^i(\sigma)$ и $\theta_r^A(\sigma)$, заданной формулами (11.7.79) и (11.7.80), в момент взаимодействия следует, что интегрирование в (11.7.102) вдоль струн 1 и 2 сокращается с интегрированием вдоль струны 3 везде, за исключением, возможно, сингулярных областей вблизи $\sigma = \pm \pi \alpha_1$. Вблизи этих

точек в подынтегральном выражении доминирует главный член $(\epsilon)^{-1/2}$ в $(P - X'/\pi)$ и θ , который задан формулами (11.7.93), (11.7.95), (11.7.96) и (11.7.97). Подстановка этих выражений в (11.7.102) дает

$$\sum_{r=1}^3 Q_r^{-A} |V\rangle_S = \oint \frac{d\epsilon}{2\pi i \epsilon} 4 \sqrt{2} Z^R Y^A |V\rangle_S = 4 \sqrt{2} Z^R Y^A |V\rangle_S. \quad (11.7.103)$$

Тот факт, что результат задается вычетом в полюсе по ϵ зависит от контура интегрирования, который на струне 3 сдвинут

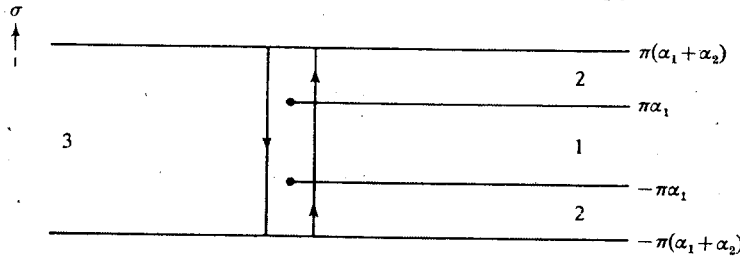


Рис. 11.11. Контур интегрирования для вычисления $\sum_{r=1}^3 Q_r^{-A} |V\rangle_S$. Параметризация струн расширена таким образом, что область определения σ удвоена: $-\pi(\alpha_1 + \alpha_2) \leq \sigma \leq \pi(\alpha_1 + \alpha_2)$, поэтому точки взаимодействия встречаются дважды: при $\sigma = \pi\alpha_1$ и $\sigma = -\pi\alpha_1$.

немного в сторону положительных значений τ , а на струнах 1 и 2 — в сторону отрицательных значений τ , как показано на рис. 11.11. Аналогично находим

$$\sum_{r=1}^3 Q_r^A |V\rangle_S = 4 \rho_{AB}^I Z^I Y^B |V\rangle_S. \quad (11.7.104)$$

$SO(8)$ -компоненты генераторов группы Лоренца J^{ij} , действуя на $|V\rangle_S$, также дают ненулевой результат. Например,

$$\sum_{r=1}^3 J_r^{LI} |V\rangle_S = -i \sqrt{2} Y \rho^I Y |V\rangle_S. \quad (11.7.105)$$

Теперь мы можем найти множители \hat{Q}^{-A} , \hat{Q}_A^- и \hat{H} , которые входят в члены взаимодействия супералгебры (11.7.70) — (11.7.73). Очень важно, что присутствие этих множителей не влияет на сохранение суперзарядов Q_A^+ и Q^{+A} . Это означает, например, что мы должны потребовать выполнения равенства $[\sum_r Q_r^{+A}, \hat{H}] = 0$. Выполнение аналогичных соотношений также необходимо для того, чтобы эти множители не нарушали дру-

гие симметрии $|V\rangle_S$. Этого можно достичь путем построения множителей из Z^i и Y^A , которые определены соотношениями (11.7.94) и (11.7.98).

Алгебраические уравнения (11.7.99) — (11.7.101) определяют вид рассматриваемых множителей, характеризующих члены взаимодействия в супералгебре. Результат имеет вид

$$\hat{Q}^{-A} = Y^A, \quad (11.7.106)$$

$$\hat{Q}_A^- = \frac{2}{3} \epsilon_{ABCD} Y^B Y^C Y^D, \quad (11.7.107)$$

$$\hat{H} = \frac{1}{2} Z^L - \sqrt{\frac{1}{2}} Z^I \rho_{AB}^I Y^A Y^B + \frac{1}{3} Z^R \epsilon_{ABCD} Y^A Y^B Y^C Y^D. \quad (11.7.108)$$

В принципе в этих выражениях мы должны допустить существование общего множителя, который является независимой функцией от α_r . Только действие операторов J^+ и J^- может характеризовать зависимость от p^+ (т. е. зависимость от α) в вершине, так как только эти генераторы содержат производные $\partial/\partial p^+$. Таким образом, неизвестную функцию можно определить путем исследования замкнутости алгебры Лоренца. Однако, поскольку общая функция не зависит от рассматриваемых состояний, ее также можно определить, рассматривая отдельные матричные элементы $|H\rangle$, например между основными состояниями векторных частей.

Найдя вид членов взаимодействия в осцилляторном представлении, можно перегруппировать множители, на которые умножается Δ -функционал в точке взаимодействия, используя связи (11.7.94) между Z^i и $(P^i(\sigma_I) \pm X'^i(\sigma_I)/\pi)$ и (11.7.98) между $Y^A(\sigma_I)$ и $\theta^A(\sigma_I)$. Как и ожидалось, вершина взаимодействия линейна по оператору импульса $P^i(\sigma_I)$, что немного похоже на кубическое янг-милсово взаимодействие.

Другие виды взаимодействий между открытыми и замкнутыми суперструнами, которые описаны в разд. 11.2.1 для бозонной теории, можно получить таким же образом. Кубическое взаимодействие между ориентированными замкнутыми суперструнами (типа II или гетеротическими) представляет особый интерес, так как оно обобщает кубическое взаимодействие гравитонов в общей теории относительности. В теории типа II это взаимодействие (обозначаемое $|H\rangle_{cl}$) в осцилляторном базисе записывается в виде тензорного произведения кет-векторов в левом и правом пространствах

$$|H\rangle_{cl} = |H\rangle \otimes |\tilde{H}\rangle, \quad (11.7.109)$$

где два множителя в правой части являются просто вершинами взаимодействия в пространствах с тильдой и без тильды. При

такой записи предполагается, что вершина действует на состояния, которые удовлетворяют дополнительному условию $N = \bar{N}$. Таким способом можно получить все вершины взаимодействия, которые используются при функциональном вычислении амплитуд рассеяния в калибровке светового конуса.

11.7.7. Древесные амплитуды открытых суперструн

Вычисление амплитуд в настоящем разделе проводится методами, которые обобщают методы, использованные для бозонной струны в начале данной главы. В рассматриваемом случае необходимо включить интегрирование по грасмановым координатам и вставить операторы в вершины взаимодействия. Эти операторы действуют как дополнительные источники, поэтому теперь результат содержит свертки между внешними частицами и точками взаимодействия. Мы не будем детально описывать соответствующие вычисления, а просто выпишем результаты для древесных диаграмм с внешними основными состояниями открытой струны, полученные описанным методом.

Четырехчастичная амплитуда уже была получена путем соединения пары $|H\rangle$ пропагатором в осцилляторном базисе. Это вычисление иллюстрирует тот факт, что в большинстве общих случаев операторные методы являются гораздо более сложными, чем функциональные методы. Только когда все внешние частицы, за исключением двух, имеют нулевые компоненты p^+ своих импульсов, операторные методы являются более простыми.

Древесная амплитуда общего вида выражается в виде функции от нулевых мод

$$\theta_r \equiv \theta_{r,0}. \quad (11.7.110)$$

Эти переменные входят в выражение для амплитуды в комбинациях Θ_{rs} , которые определены выражением

$$\Theta_{rs} = \frac{\theta_s - \theta_r}{\alpha_s + \alpha_r}, \quad (11.7.111)$$

где линии r и s присоединены к одной вершине в циклическом порядке (т. е. по часовой стрелке вокруг вершины линия s расположена после линии r). Определим также следующие величины, связанные с заданной вершиной, содержащей линии r и s :

$$\mathcal{P}_{rs}^i = \alpha_r p_s^i - \alpha_s p_r^i, \quad (11.7.112)$$

$$\hat{\alpha}_{rs} = -\alpha_r \alpha_s (\alpha_r + \alpha_s), \quad (11.7.113)$$

$$J_{rs} = \mathcal{P}_{rs}^L + \frac{\hat{\alpha}_{rs}}{\sqrt{2}} \rho_{AB}^i \mathcal{P}_{rs}^i \Theta_{rs}^A \Theta_{rs}^B + \frac{\hat{\alpha}_{rs}^2}{6} \mathcal{P}_{rs}^R \varepsilon_{ABCD} \Theta_{rs}^A \Theta_{rs}^B \Theta_{rs}^C \Theta_{rs}^D. \quad (11.7.114)$$

Кроме того, необходимо определить комбинацию множителей, связанных с парой вершин, которые содержат частицы (r, s) и (t, u) :

$$K_{rs;tu} = -\frac{1}{24} \hat{\alpha}_{rs} \hat{\alpha}_{tu} \varepsilon_{ABCD} \left(\frac{\mathcal{P}_{rs}^2}{\hat{\alpha}_{rs}} - \frac{\mathcal{P}_{tu}^2}{\hat{\alpha}_{tu}} \right) \times \\ \times \{ \hat{\alpha}_{rs} \Theta_{rs}^A \Theta_{rs}^B \Theta_{rs}^C \Theta_{rs}^D - \hat{\alpha}_{tu} \Theta_{tu}^A \Theta_{tu}^B \Theta_{tu}^C \Theta_{tu}^D \}. \quad (11.7.115)$$

Древесная амплитуда с M внешними частицами в основном состоянии, которые расположены в заданном циклическом порядке, имеет вид

$$A(1, \dots, M) = g^{M-2} G \int \prod_{r=2}^{M-1} dx_r \Theta(x_{r+1} - x_r) (K.N.) \prod_{r=1}^{M-1} \frac{1}{(x_{r+1} - x_r)} \times \\ \times \sum_{perms} T(\{x_r, \theta_r\}) \delta^4 \left(\sum_r \alpha_r \theta_r \right) \delta^{10} \left(\sum_r p_r \right), \quad (11.7.116)$$

где G — теоретико-групповой множитель Чана — Патона, а $(K.N.)$ обозначает обычное подынтегральное выражение Коба — Нильсена (при фиксированных значениях $x_1 = 0$ и $x_M = \infty$)

$$K.N. = \prod_{r < s} (x_s - x_r)^{p_r \cdot p_s}. \quad (11.7.117)$$

Сумма $\sum_{perms} T$ определена следующим образом. Каждый член суммы связан со своей древесной диаграммой, в которой граничные частицы 1 и M фиксированы, а порядок остальных частиц произволен. Сумма берется по всем возможным перестановкам промежуточных частиц (хотя полная амплитуда описывает процесс, в котором частицы расположены в циклическом порядке, соответствующем множителю $K.N.$). Каждый член суммы сам является суммой по всем возможным спариваниям соответствующей части вершин в древесной диаграмме без спаривания остальных вершин. Спаренным вершинам, которые обозначены (r, s) и (t, u) , соответствует множитель $K_{rs;tu}$, в то время как любой неспаренной вершине (r, s) приписывается множитель J_{rs} .

Выражение для амплитуды явно инвариантно относительно преобразований суперсимметрии, генерируемых зарядами $Q^{+A} = \sum_r \alpha_r \theta_r^A$ и $Q_A^- = \sum_r \rho / \partial \theta_r^A$ благодаря δ -функциям сохранения в (11.7.116). Проверка инвариантности амплитуды также относительно преобразований суперсимметрии, генерируемых зарядами Q^- , является более сложной.

Тот факт, что результат содержит все возможные процессы с основными состояниями, является достоинством формализма. Для того чтобы получить амплитуду для конкретного набора безмассовых внешних состояний, приведенное выражение необходимо просто умножить на волновые функции $u_r(k_r^i, \theta_r^A)$ и проинтегрировать амплитуду по переменным θ_r , используя правила интегрирования Березина $\int d\theta_r^A = 0$ и $\int d\theta_r^A \theta_r^A = 1$. При желании результирующие амплитуды можно выразить через состояния, соответствующие компонентам в разложении волновой функции (11.7.25).

11.8. Резюме

В настоящей главе мы развили функциональный подход к вычислению по теории возмущений струнных диаграмм в калибровке светового конуса. В этой калибровке вычисление амплитуд рассеяния сводится к применению обычных квантовомеханических принципов. Обобщение метода интеграла по траекториям для точечных частиц на случай струн использовано для вычисления пропагатора свободной струны и, следовательно, для получения спектра состояний свободной струны. Этот метод затем был использован для вычисления древесных диаграмм на массовой оболочке и однопетлевых амплитуд как для открытых, так и для замкнутых струн. Большинство вычислений проведено для процессов с внешними струнами в основном состоянии, но получено также общее выражение для древесных диаграмм открытых струн с произвольными внешними состояниями. Это привело к явному осцилляторному выражению для вершины, связывающей три открытые струны общего вида. Полученную вершину вместе с аналогичными выражениями для других фундаментальных вершин в теории можно использовать для определения взаимодействия между струнными полями во вторично квантованной полевой теории струн в калибровке светового конуса, которую мы не рассматривали.

Вычисление суперструнных амплитуд рассеяния кратко описано в суперсимметричном формализме в калибровке светового конуса. Основные отличительные черты состоят в том, что функциональный интеграл включает интегрирование по фермионным координатам, а вершины взаимодействия больше не являются Δ -функционалами перекрытия. В точке взаимодействия возникает дополнительный оператор. Для кубического взаимодействия открытых струн этот оператор линеен по производным по X^i (как кубическое взаимодействие в теории

Янга — Миллса), в то время как для кубического взаимодействия струн типа II он билинеен по производным (как кубическое взаимодействие гравитонов).

Приложение 11.А. Детерминант лапласиана

В общем случае детерминант двумерного оператора Лапласа является сингулярным. Поэтому необходима процедура регуляризации для корректного определения величины детерминанта. Сингулярности возникают от нескольких источников. Существует мультипликативная бесконечность, пропорциональная exp (площадь), которая встретилась при обсуждении пропагатора в разд. 11.1.4. Ее можно включить в общий фазовый множитель амплитуды рассеяния (когда τ снова продолжается на действительные значения). Поскольку площадь в пространстве параметров не зависит от числа внешних струн, фаза одинакова для всех процессов, а общая бесконечная фаза не влияет на физику. Эта бесконечность является просто следствием бесконечности, связанной с нормальным упорядочением, которая обсуждалась в разд. 11.1.3. Для мировых поверхностей с границей существует дополнительная бесконечность, пропорциональная exp (периметр), которую, как было показано в разд. 11.1.4, также можно убрать путем перенормировки струнного гамильтониана на концах струны.

Лапласиан также сингулярен в точках с бесконечной кривизной. В случае диаграмм для открытых струн одномерная геодезическая кривизна границы бесконечна в точках взаимодействия и должна быть тщательно регуляризована. Для диаграмм замкнутых струн в точках взаимодействия бесконечна двумерная кривизна. Эти бесконечности можно поглотить переопределением струнной константы связи. Кроме того, как показано в разд. 11.1.4, требуют перенормировки и струнные волновые функции. На самом деле эти бесконечные перенормировки константы связи и волновой функции сокращаются друг с другом при вычислениях, проводимых для физических процессов в критической размерности пространства-времени. Это является еще одной нетривиальной стороной понятия критической размерности. Однако мы предпочитаем поглотить эти бесконечности с помощью перенормировки параметров и исходить из лоренц-инвариантности при определении критической размерности.

Все рассмотренные выше бесконечности связаны с двумерной полевой теорией на мировой поверхности и не имеют отношения к бесконечностям квантово-полевой теории струн (которые возникают от пределов интегрирования по положениям

точек разрыва или слияния струн, т. е. от формы двумерной поверхности). Бесконечности в детерминанте возникают для древесных диаграмм, а также для диаграмм с произвольным числом петель. Нас интересует конечный результат, возникающий после устранения всех расходимостей.

Конформное отображение струнной мировой поверхности в верхнюю комплексную полуплоскость также сингулярно, и на самом деле нас интересует произведение детерминанта на якобиан этого конформного преобразования. Якобиан будет описан в следующем приложении.

а. Древесные диаграммы для открытых струн

Метод вычисления детерминанта для древесных диаграмм должен учитывать его аномальные трансформационные свойства относительно конформных преобразований. Поскольку детерминант легко вычисляется в верхней полуплоскости, его вид для конкретной струнной диаграммы можно получить, если известно его поведение при конформных преобразованиях (так как произвольную диаграмму можно конформно отобразить в верхнюю полуплоскость). Конформное преобразование выражается в изменении масштаба двумерной метрики

$$\hat{h}^{\alpha\beta}(\sigma, \tau) \rightarrow h^{\alpha\beta}(\sigma, \tau) = e^{-2\phi(\sigma, \tau)} \hat{h}^{\alpha\beta}(\sigma, \tau), \quad (11.A.1)$$

где $\phi(\sigma, \tau)$ — произвольная функция, определяющая конформное преобразование. При таком преобразовании двумерная кривизна \hat{R} меняется следующим образом:

$$R = e^{-2\phi} (\hat{R} + 4\pi^2 \hat{\Delta}\phi). \quad (11.A.2)$$

Граница струнной диаграммы представляет собой кривую $z^\alpha(s) = (\tau(s), \sigma(s))$, которая параметризуется параметром s . Единичный вектор, касательный к кривой, имеет вид $t^\alpha = \dot{z}^\alpha / (h_{\beta\gamma} \dot{z}^\beta \dot{z}^\gamma)^{1/2}$, а нормальный вектор равен $n^\alpha = -\epsilon^{\alpha\beta} t_\beta$. Геодезическая кривизна k является мерой того, насколько кривая отличается от геодезической линии, и определяется следующим выражением:

$$k = n_\beta t^\alpha \nabla_\alpha t^\beta, \quad (11.A.3)$$

где ∇_α — ковариантная производная, содержащая символы Кристоффеля.

Геодезическая кривизна границы \hat{k} изменяется при преобразовании (11.A.1) следующим образом:

$$k = e^{-\phi} (\hat{k} - \hat{n}^\alpha \partial_\alpha \phi), \quad (11.A.4)$$

где переменные со шляпками вычислены по метрике \hat{h} (а n^α обозначает нормаль к границе).

В общем случае оператор Лапласа имеет вид

$$\Delta = -\frac{1}{2\pi^2 \sqrt{\hat{h}}} \partial_\alpha \sqrt{\hat{h}} \hat{h}^{\alpha\beta} \partial_\beta. \quad (11.A.5)$$

Его детерминант можно вычислить по формуле

$$\ln \det' \Delta = \text{tr}' \ln \Delta, \quad (11.A.6)$$

где штрих означает, что в определении \det и tr нулевые моды отброшены. Нулевые моды дают просто множитель $\delta^{D-2}(\sum_r \mathbf{p}_r)$, связанный с сохранением поперечного импульса. Из (11.A.6) следует

$$\ln \det' \Delta = -\int_\epsilon^\infty \frac{dt}{t} \text{tr}'(e^{-t\Delta}), \quad (11.A.7)$$

где ϵ — параметр ультрафиолетового обрезания, который определяет регуляризованный детерминант и нарушает конформную инвариантность классической теории. Обозначим собственные значения Δ через λ_n , т. е.

$$\Delta \Phi_n = \lambda_n \Phi_n, \quad \lambda_n \geq 0, \quad (11.A.8)$$

где волновые функции Φ_n нормированы соотношением

$$\langle \Phi_m, \Phi_n \rangle = \delta_{mn}. \quad (11.A.9)$$

Подстановка собственных значений в (11.A.7) дает

$$\ln \det' \Delta = -\int_\epsilon^\infty \frac{dt}{t} \sum' e^{-t\lambda_n}. \quad (11.A.10)$$

Стандартный путь решения этого уравнения заключается в рассмотрении его вариации при произвольном инфинитезимальном изменении конформного множителя $\delta\phi(\sigma, \tau)$. При такой вариации лапласиан изменяется на $-2\Delta\delta\phi$, поэтому изменения собственных значений равны

$$\delta\lambda_n = -2\lambda_n \langle \Phi_n \delta\phi \Phi_n \rangle. \quad (11.A.11)$$

Подстановка вариаций в (11.A.10) дает

$$\delta \det' \Delta = 2 \int_\epsilon^\infty dt \sum' \langle \Phi_n \delta\phi \Phi_n \rangle \frac{d}{dt} e^{-t\lambda_n} = -2 \text{tr}'(\delta\phi e^{-\epsilon\Delta}); \quad (11.A.12)$$

таким образом, результат определяется свойствами оператора $\exp\{-t\Delta\}$ («ядро оператора теплопроводности») при малых «временах» $t = \varepsilon$. Разложение этого оператора при малых t имеет вид

$$\text{tr}(f e^{-t\Delta}) = \int d^2z \sqrt{h(z)} f(z) \langle z | e^{-t\Delta} | z \rangle \sim t^{-1} A(f) + t^{-1/2} B(f) + C(f) + O(t^{1/2}), \quad (11.A.13)$$

где коэффициенты $A(f)$, $B(f)$ и $C(f)$ известны как коэффициенты Деви́тта — Сили, а формула применима для произвольных функций f .

Это разложение можно получить, изучая оператор диффузии

$$G(z, z'; t) = \langle z' | e^{-t\Delta} | z \rangle, \quad (11.A.14)$$

который удовлетворяет уравнению диффузии

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta\right) G = 2\pi\delta(t-t')\delta^2(z-z'). \quad (11.A.15)$$

Это уравнение можно решить по теории возмущений вблизи исходной заданной метрики \hat{h} . Поскольку результат чувствителен только к свойствам многообразия на малых расстояниях, всегда можно выбрать конформную калибровку, в которой $h^{\alpha\beta} = \exp\{2\phi\}\delta^{\alpha\beta}$. Тогда лапласиан принимает вид

$$2\pi^2\Delta = -\partial^2 - V, \quad (11.A.16)$$

где

$$V = (e^{-2\phi} - 1)\partial^2. \quad (11.A.17)$$

Оператор G определяется интегральным уравнением

$$G = G_0 + G_0 V G, \quad (11.A.18)$$

где G_0 — оператор диффузии в плоском пространстве

$$G_0(z, z'; t) = (4\pi t)^{-1/2} \exp(-|z - z'|^2/4t) \quad (11.A.19)$$

в случае отсутствия границы (в противном случае G_0 должен удовлетворять подходящим граничным условиям). Для получения решения уравнения (11.A.18) по теории возмущений удобно выбрать координаты, в которых

$$\phi(0, 0) = 0, \quad \partial_\alpha \phi(0, 0) = 0 \quad (11.A.20)$$

(при отсутствии границы); при этом в пределе $t \rightarrow 0$ выражение для G обрывается на членах, квадратичных по G_0 , т. е.

$$G = G_0 + G_0 V G_0 + O(t^{1/2}). \quad (11.A.21)$$

Мы не будем выписывать дальнейшие детали вычисления коэффициентов (которые вычисляются теперь совсем просто). Однако подстановка $f = \delta\phi$ в (11.A.12) (с граничными условиями Неймана) приводит к выражению

$$-\frac{1}{2} \delta(\ln \det' \Delta) \sim \text{tr}'(\delta\phi e^{-\varepsilon\Delta}) \sim \frac{1}{4\pi\varepsilon} \int d^2z \sqrt{h} \delta\phi - \frac{1}{8\sqrt{\pi\varepsilon}} \int d\hat{l} \delta\phi + \frac{1}{12\pi} \left[\int d\hat{l} \hat{k} \delta\phi + \frac{1}{2} \int d^2z \sqrt{h} \hat{R} \delta\phi \right] + O(\sqrt{\varepsilon}), \quad (11.A.22)$$

где $d\hat{l}$ — дифференциал вдоль границы.

Уравнения (11.A.1) — (11.A.4) определяют зависимость от ϕ различных функций, содержащихся в (11.A.22), поэтому последнее выражение можно проинтегрировать по ϕ :

$$\ln \det' \Delta|_\phi - \ln \det' \Delta|_{\phi=0} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon} \int d^2z \sqrt{h} e^{2\phi} + \frac{1}{4\sqrt{\pi\varepsilon}} \int d\hat{l} e^\phi - \frac{1}{6\pi} \left(\frac{1}{2} \int d^2z \sqrt{h} \hat{h}^{\alpha\beta} \frac{\partial\phi}{\partial z^\alpha} \frac{\partial\phi}{\partial z^\beta} + \int d\hat{l} \phi \hat{k} + \frac{1}{2} \int d^2z \sqrt{h} \phi \hat{R} \right) + (\text{члены, не зависящие от } \phi). \quad (11.A.23)$$

Первые два члена в правой части являются расходящимися членами, пропорциональными площади и периметру мировой поверхности, о которых говорилось выше. С этого момента они учитываться не будут. Величина $\ln \det' \Delta$ при $\phi = 0$ такая же, как выражение для $\ln \det' \Delta$ в z -плоскости с вырезанными малыми окружностями.

Поскольку формула (11.A.23) будет применяться к преобразованиям z -плоскости в ρ -плоскость, мы рассмотрим плоскую метрику $\hat{h}^{\alpha\beta} = \delta^{\alpha\beta}$, которая соответствует z -плоскости. Чтобы устранить сингулярные точки взаимодействия, мы вырежем малые круги радиуса r_l вокруг точек ρ_l , как показано на рис. 11.12, а. Эти круги отображаются в полукруги (изображенные на рис. 11.12, б) в z -плоскости с центрами в точках z_l . Мы также вырежем точки, соответствующие входящим и выходящим струнам при $\tau = \pm\infty$, путем обрезания мировой поверхности в точках $\tau = \tau_r$, где $|\tau_r|$ велико, что также изображено на рис. 11.12, а. Это соответствует вырезанию малых полукругов из z -плоскости с центрами в точках $z = x_r$ и с радиусами ε_r (см. рис. 11.12, б). Как обычно, удобно также выбрать $x_M = \infty$; при этом область, которую необходимо вырезать вокруг x_M , является область $|z| \geq 1/\varepsilon_M$, где ε_M мало.

Поверхность является плоской, поэтому $\Delta\phi = 0$ во всех точках. В результате весь эффект конформного преобразования связан с окружностями вокруг вырезанных областей. Для

плоской поверхности масштабный множитель выражается через координаты до и после преобразования (соответственно z и ρ) следующей формулой:

$$e^\phi = \left| \frac{\partial \rho}{\partial z} \right|. \quad (11.A.24)$$

Прежде чем рассмотреть конформное преобразование струнной диаграммы в верхнюю z -полуплоскость, рассмотрим $SL(2, R)$ -преобразование, которое отображает верхнюю полуплоскость на себя. Как было показано в гл. 1, это преобразование является несингулярным конформным преобразованием.

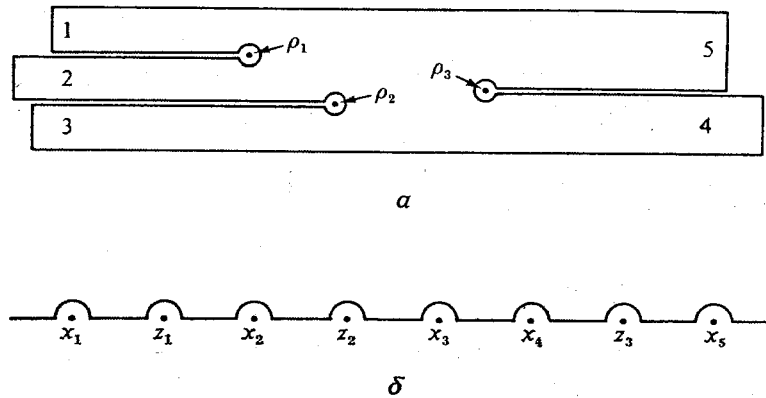


Рис. 11.12. a — в мировой поверхности вокруг точек взаимодействия ρ_l вырезаны круглые отверстия. Существование начальных и конечных струн ограничено временами τ_r , которые являются большими, но конечными; b — образами отверстий вокруг точек ρ_l являются полукруги радиусов ε_l с центрами в точках z_l на действительной оси z . Образами струн в моменты τ_r являются полукружности радиусов ε_r с центрами в точках x_r .

Простое применение формулы (11.A.23) приводит к выражению для детерминанта в верхней полуплоскости с полукругами радиусов ε_l , вырезанными вокруг образов точек взаимодействия (z_l), и полукругами радиусов ε_r , вырезанными вокруг точек x_r (учитывая выделенность точки x_M). При вычислении используется тот факт, что $\partial^2 \phi = 0$, поэтому первый член порядка ε^0 в (11.A.23) можно проинтегрировать по частям, что приводит к граничным членам

$$-\frac{1}{12\pi} \int d^2 z \partial^\alpha \phi \partial_\alpha \phi = -\frac{1}{12\pi} \int d\hat{l} \hat{n}^\alpha \phi \partial_\alpha \phi, \quad (11.A.25)$$

где контур проходит вдоль полукружностей с центрами в точках $z = z_l$ или z_r . Результирующее выражение для детерми-

нанта в z -плоскости, которое удовлетворяет (11.A.23), имеет следующий вид:

$$\ln \det' \Delta |_{\phi=0} = \frac{1}{6} \sum_p \ln \varepsilon_p + \text{члены, не зависящие от } \varepsilon_p, \quad (11.A.26)$$

где \sum_p обозначает сумму по всем значениям l и r .

Рассмотрим теперь конформное отображение z -плоскости на струнную диаграмму (т. е. на ρ -плоскость), определенное формулой (11.3.1):

$$\rho = \sum_{r=1}^{M-1} \alpha_r \ln(x_r - z), \quad (11.A.27)$$

где использована инвариантность относительно трансляций по τ для фиксирования $x_M = \infty$ и опущена бесконечная константа в (11.3.1). Точки взаимодействия являются решениями уравнения $\partial \rho / \partial z = 0$, что дает

$$\sum_{r=1}^{M-1} \frac{\alpha_r}{(z_l - x_r)} = 0. \quad (11.A.28)$$

Вблизи точки взаимодействия преобразование (11.A.27) имеет точку ветвления, соответствующую квадратному корню, поэтому вблизи $\rho = \rho_l$

$$\rho - \rho_l = \frac{1}{2} c_l (z - z_l)^2, \quad (11.A.29)$$

где

$$c_l = \frac{\partial^2 \rho}{\partial z^2} \Big|_{z=z_l}. \quad (11.A.30)$$

Отсюда следует, что окружности радиусов r_l вокруг точек взаимодействия в ρ -плоскости отображаются в окружности радиусов ε_l в z -плоскости, где

$$\ln \varepsilon_l = \frac{1}{2} (\ln 2r_l - \ln c_l). \quad (11.A.31)$$

Поведение функции ϕ вблизи точек взаимодействия имеет вид

$$\phi \equiv \ln \left| \frac{\partial \rho}{\partial z} \right| \sim \ln |z - z_l| + \ln c_l = \frac{1}{2} (\ln (2|\rho - \rho_l|) + \ln c_l). \quad (11.A.32)$$

Подстановка полученного выражения в (11.A.25) дает следующий вклад в $\ln \det' \Delta$:

$$\frac{1}{12\pi} \sum_l \int d\hat{l} \frac{1}{\varepsilon_l} (\ln \varepsilon_l + \ln c_l) = \frac{1}{24} \sum_l (\ln 2r_l + \ln c_l). \quad (11.A.33)$$

В приведенном выражении только второй член *через* константы c_l зависит от формы струнной диаграммы. Другие вклады в (11.A.23) возникают из (11.A.26) и члена, содержащего κ . Зависимость от c_l в этих членах сокращается, поэтому вся зависимость $\ln \det' \Delta$ от c_l задается выражением (11.A.33). Как упоминалось выше, зависимость от радиусов r_l можно исключить перенормировкой константы связи.

Другие вклады в $\ln \det' \Delta$ идут от области, к которой присоединяются внешние частицы. Вблизи произвольной точки $z = x_2$ ($r \neq M$) отображение хорошо аппроксимируется следующей формулой:

$$\rho \sim \alpha_r \ln(z - x_r), \quad (11.A.34)$$

поэтому

$$\varepsilon_r = e^{\tau_r / \alpha_r}, \quad (11.A.35)$$

где τ_2 — большое время, в которое возникают входящие или исчезают выходящие струны. Вблизи любой из этих точек

$$\phi = \ln \left| \frac{\partial \rho}{\partial z} \right| \sim \ln \left| \frac{\alpha_r}{z - x_r} \right|. \quad (11.A.36)$$

В этом случае вклад (11.A.25) в (11.A.23) имеет вид

$$-\frac{1}{12\pi} \int d\hat{l} \hat{n}^\alpha \phi \partial_\alpha \phi = -\frac{1}{12} \sum_r \ln \frac{|\alpha_r|}{\varepsilon_r} \quad (11.A.37)$$

и одновременно следующий член в (11.A.23)

$$-\frac{1}{6\pi} \int d\hat{l} \hat{k} \phi = \frac{1}{6} \sum_r \ln \frac{|\alpha_r|}{\varepsilon_r} \quad (11.A.38)$$

дает ненулевой вклад. Член с $r = M$ имеет такой же вид, но с противоположным знаком у $\ln |\alpha_M|$ из-за обращения ориентации контура интегрирования вокруг точки на бесконечности.

Наконец, источником зависимости от ε_r является \mathcal{M} — вклад самодействия r -й струны при $\tau = \tau_r$, который определяется формулой (11.2.22)

$$\begin{aligned} \ln \mathcal{M} &= \sum_r \frac{D-2}{48(\pi\alpha_r)^2} \int_0^{\pi\alpha_r} d\sigma d\sigma' N(\sigma, \tau_r; \sigma', \tau_r) \sim \\ &\sim \frac{D-2}{24} \sum_r \ln \varepsilon_r + \text{члены, не зависящие от } \varepsilon_r. \end{aligned} \quad (11.A.39)$$

При вычислении интеграла использована формула (11.4.9) для функции Грина на ленте.

Члены (11.A.37), (11.A.38) и (11.A.26) объединяются с $\ln \mathcal{M}$ таким образом, что зависимость от ε_r при $r \neq M$ сокращается. Благодаря обращению знака, связанного с контуром на бесконечности, вся зависимость от ε_M дает множитель $x_M^{(D-2)/12}$. Этот множитель необходим для сокращения сингулярного множителя $\prod_{r < M} |x_M - x_r|^{p_r \cdot p_M} \sim x_M^{(2-D)/12}$ в подынтегральном выражении для амплитуды (11.3.12), который возникает при $x_M = \infty$. Вместе с (11.A.33) эти выражения определяют вид $[\det' \Delta]^{(2-D)/2} \mathcal{M}$:

$$[\det' \Delta]^{(2-D)/2} \mathcal{M} = \left(x_M^{-2} \alpha_M^{-1} \prod_l \left| \frac{\partial^2 \rho}{\partial z^2} \right|^{1/2} \prod_{r=1}^{M-1} \alpha_r \right)^{(2-D)/24}. \quad (11.A.40)$$

Чтобы получить меру интегрирования для древесных диаграмм открытых струн, этот результат необходимо объединить с выражением для якобиана.

б. Древесные диаграммы для замкнутых струн

Для замкнутых струн вычисления очень похожи на вычисления в предыдущем случае, за тем исключением, что теперь необходимо вырезать полные круги вокруг точек взаимодействия z_l и точек $z = z_r$, в которых присоединяются внешние частицы. Результат сводится к тому, что все вклады в $\ln \det' \Delta$ удваиваются, поэтому результирующее выражение для $[\det' \Delta]^{(2-D)/2} \mathcal{M}$ возводится в квадрат.

в. Петлевые вычисления

В случае древесных диаграмм можно было определить меру интегрирования путем рассмотрения конформных отображений. Как показано в предыдущих главах, мировая поверхность петлевой диаграммы зависит от параметров Тейхмюллера, которые не меняются при инфинитезимальных преобразованиях метрики. Это означает, что определение зависимости множителей в мере от этих параметров путем простого рассмотрения конформных отображений, как было сделано для древесных диаграмм, здесь невозможно. Простейшим примером петлевой диаграммы является планарная петля открытой струны, рассмотренная в разд. 8.1.1 и 11.5. В этом случае зависимость от параметра $\omega = \exp\{2\pi i\tau\}$ невозможно определить с помощью конформных отображений. Ниже мы просто приведем конечное выражение, получающееся после вычисления детерминанта

(при $x_M = 1$):

$$[\det' \Delta]^{(2-D)/2} \mathcal{M} = \prod_r x_r^{-1} \left\{ \frac{\pi}{\ln w} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - w^n)^{-2} \times \right. \\ \left. \times \left(\prod_I \frac{\partial^2 \rho_I}{\partial z^2} \right)^{-1/24} \prod_r (|\alpha_r| w)^{-1/12} \right\}^{(D-2)/2}. \quad (11.A.41)$$

Приложение 11.Б. Якобиан конформного отображения

а. Древесные диаграммы

Вычисление якобиана J особенно просто, если три произвольные точки x_r фиксировать следующим образом: $x_1 = 0$, $x_{M-1} = 1$ и $x_M = \infty$. В этом случае якобиан

$$J = \left| \det \frac{\partial \tau_I}{\partial x_r} \right| \quad (11.B.1)$$

имеет точно такую же зависимость от x_r , как выражение

$$\prod_I |c_I|^{1/2} = \prod_I |\partial^2 \rho / \partial z^2|^{1/2}. \quad (11.B.2)$$

Это следует из аналитичности и того обстоятельства, что оба выражения имеют одинаковые сингулярности в точках совпадения двух x_r или двух точек взаимодействия, т. е. двух ρ_I . Совпадение сингулярностей следует из вида конформного отображения (11.A.27). В результате комбинация $J \prod_I |c_I|^{-1/2}$ не зависит от x_r . Это важно, так как при $D = 26$ именно эта комбинация содержится в произведении (11.A.40) и якобиана J . Поскольку $J \prod_I |c_I|^{-1/2}$ не зависит от x_r , эту комбинацию можно вычислить с помощью особенно удобного выбора значений $x_r \ll x_{r+1}$. В этом случае связь между $M - 3$ точками взаимодействия и x_r особенно проста, а именно

$$\rho_I = \rho(z_I) \sim \ln x_I \sum_{s \leq I} \alpha_s + \dots, \quad (11.B.3)$$

где точки обозначают члены, не зависящие от x_r для $r \leq I$. Поэтому якобиан задается только диагональными членами. Дифференцируя (11.A.27), находим

$$J = \prod_{I=2}^{M-2} x_I^{-1} |\gamma_I|, \quad (11.B.4)$$

где

$$\gamma_I = \sum_{s \leq I} \alpha_s. \quad (11.B.5)$$

Дифференцируя (11.A.27) еще раз, получаем

$$|c_I| = \left| \frac{\partial^2 \rho_I}{\partial z^2} \right|_{z=x_I} = \left| \frac{(\gamma_I^3)}{x_I^2 \alpha_I \gamma_{I-1} \alpha_s} \right|. \quad (11.B.6)$$

Замечая, что $\gamma_1 = \alpha_1$ и $\gamma_{M-1} = -\alpha_M$, получаем

$$J \prod_{I=2}^{M-1} \left| \frac{\partial^2 \rho}{\partial z^2} \right|_{z=x_I}^{-1/2} = \left| \alpha_M^{-3/2} \prod_{r=1}^{M-1} \alpha_r^{1/2} \right|. \quad (11.B.7)$$

Очевидно, что полученный результат вместе с (11.A.40) дает простой результат для меры только в критической размерности. Полагая $D = 26$, получаем

$$J [\det' \Delta]^{(2-D)/2} \mathcal{M} = x_M^2 \prod_{r=1}^M |\alpha_r|^{-1/2}, \quad (11.B.8)$$

что является ожидаемым произведением кинематических множителей для внешних частиц и множителя $(x_M - x_1)(x_M - x_{M-1})(x_{M-1} - x_1)$, вычисленного при $x_M \rightarrow \infty$, $x_{M-1} = 1$ и $x_1 = 0$. Бесконечный множитель x_M^2 необходим для сокращения компенсирующего нулевого множителя в подынтегральном выражении для амплитуды, как объяснялось выше.

В случае замкнутых струн вычисление якобиана очень похоже, а предыдущий результат возводится в квадрат, так как интегрирование является двумерным. Поскольку результирующее выражение (11.A.40) для замкнутых струн также возводилось в квадрат, с первого взгляда кажется, что в меру входят квадраты требуемых кинематических множителей. Но мы уже отметили, что интегрирование по координатам σ внешних частиц дает множитель $2\pi |\alpha_r|$ для каждой частицы. Вместе с множителем $(2\pi |\alpha_r|)^{-1/2}$ в нормировке каждого состояния замкнутой струны результат тем не менее пропорционален ожидаемому кинематическому множителю (при $D = 26$).

б. Планарная петлевая диаграмма

Как и при вычислении детерминанта, мы просто выпишем результат вычисления якобиана для планарной петлевой диаграммы. Метод вычислений, приводящий к этому результату, представляет собой сложное обобщение предыдущего метода вычислений древесных диаграмм. Результат имеет вид

$$\left| \frac{\partial \tau}{\partial z} \right| \prod_I \left| \frac{\partial^2 \rho}{\partial z^2} \right|^{-1/2} = \frac{\pi}{w |\ln w|} \prod_r |\alpha_r|^{1/2}. \quad (11.B.9)$$

Комбинация этого выражения с (11.А.41) дает простой ковариантный ответ только в критической размерности $D = 26$:

$$J[\det' \Delta]^{(2-D)/2} \mathcal{M} = \omega^{-2} \left(\frac{\pi}{|\ln \omega|} \right)^{13} [f(\omega)]^{-24} \prod_r \alpha_r^{-1/2} x_r^{-1}. \quad (11.Б.10)$$

После подстановки этого выражения в (11.2.24) (которое конкретизируется для рассматриваемого случая) получается то же выражение для диаграммы, что и в гл. 8.

Приложение 11.В. Свойства функций f_n

Функции f_n , определенные выражением (11.4.40), можно переписать в следующем виде:

$$f_n(\gamma) = \frac{1}{n!} (n\gamma - 1)(n\gamma - 2) \dots (n\gamma - n + 1). \quad (11.В.1)$$

Они просто связаны с геометрическими свойствами струнной диаграммы, что легко показать путем обращения отображения струнной диаграммы в z -плоскость, которое задается, например, формулой (11.4.27). Это позволяет выразить z через переменные $\xi_r \equiv \xi_r + i\eta_r$ в подходящих областях ρ -плоскости. В области, соответствующей струне 3,

$$\xi_3 = \frac{\rho}{\alpha_3} + \pi i = \pi i - \gamma \ln \left(1 - \frac{1}{z} \right) - \ln z, \quad (11.В.2)$$

где $\gamma = -\alpha_1/\alpha_3$. Это выражение можно записать в виде

$$y = \gamma \ln(1 + xe^y), \quad (11.В.3)$$

где

$$y = \pi i - \ln z - \xi_3, \quad x = e^{\xi_3}. \quad (11.В.4)$$

Функцию $y(x)$ можно получить в виде ряда по x , используя формулу Лагранжа. Для произвольной заданной функции ξ , удовлетворяющей уравнению

$$\xi = a + x\phi(\xi), \quad (11.В.5)$$

произвольную функцию $f(\xi)$ можно записать в виде

$$f(\xi) = f(a) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \frac{d^{n-1}}{da^{n-1}} (f'(a) \phi^n(a)). \quad (11.В.6)$$

Для решения уравнения (11.В.3) примем $\xi = e^{1/\gamma}$, $a = 1$, $\phi(\xi) = \xi^\gamma$, $f(\xi) = \ln \xi = y/\gamma$. В этом случае (11.В.6) дает

$$\frac{y}{\gamma} = x + \frac{(2\gamma - 1)}{2} x^2 + \dots + \frac{(n\gamma - 1)!}{n! (n\gamma - n)!} x^n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(\gamma) x^n, \quad (11.В.7)$$

где $f_n(\gamma)$ определена формулой (11.4.40). Рассматриваемый ряд сходится при

$$|x| < |\gamma - 1|^{\gamma-1} |\gamma|^{-\gamma}. \quad (11.В.8)$$

Условие (11.В.4) принимает вид

$$\ln z = -\xi_3 + \pi i - \gamma \sum_{n=1}^{\infty} f_n(\gamma) e^{n\xi_3}. \quad (11.В.9)$$

Этот ряд сходится в области определения струны 3. Аналогично переменную z можно связать с координатой ξ_1 в области, соответствующей струне 1, что дает

$$\ln z = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \left(1 - \frac{1}{\gamma} \right) e^{n\xi_1}, \quad (11.В.10)$$

и с координатой ξ_2 :

$$\ln z = \xi_2 + \sum_{n=1}^{\infty} f_n \left(\frac{1}{1-\gamma} \right) e^{n\xi_2}. \quad (11.В.11)$$

Приложение 11.Г. Свойства $SU(4)$ -коэффициентов Клебша — Гордана

Матрицы ρ являются коэффициентами Клебша — Гордана, которые связывают два представления 4 или $\bar{4}$ с представлением $\bar{6}$ группы $SU(4)$. Они нормированы по аналогии с матрицами Дирака следующими соотношениями:

$$\rho^{JAC} \rho_{CB}^J + \rho^{JAC} \rho_{CB}^I = 2\delta_B^A \delta^{IJ}. \quad (11.Г.1)$$

$SO(8)$ -матрицы γ_{ab}^{ij} , определенные в приложении 5.Б, образуют спинорное представление группы $SO(8)$ (которое подробно описано в приложении 5.А). Они разлагаются по $SU(4)$ -матрицам согласно формулам

$$\gamma^{IJ} = \begin{pmatrix} (\rho^{IJ})^A_B & 0 \\ 0 & (\rho^{IJ})^A_B \end{pmatrix}, \quad (11.Г.2)$$

$$\gamma^{IL} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \sqrt{2} \rho^I_{AB} & 0 \end{pmatrix}, \quad (11.Г.3)$$

$$\gamma^{IR} = \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{2} \rho^{IAB} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (11.Г.4)$$

$$\gamma^{RL} = \begin{pmatrix} \delta_B^A & 0 \\ 0 & -\delta_A^B \end{pmatrix}. \quad (11.Г.5)$$

В основном тексте введено также следующее определение:

$$\rho_A^{BII} = \frac{1}{2} (\rho_{AC}^I \rho^{CBI} - \rho_{AC}^I \rho^{CBI}). \quad (11.Г.6)$$

Для доказательства соотношений из разд. 11.7 полезно использовать следующие тождества:

$$\rho_{AB}^I = \frac{1}{2} \varepsilon_{ABCD} \rho^{ICD}, \quad (11.Г.7)$$

$$\rho_{A[B}^I \rho_{CD]}^J = \frac{1}{3} \varepsilon_{BCDE} (\rho^I \rho^J)_A{}^E, \quad (11.Г.8)$$

$$\rho_{[AB}^I \rho_{CD]}^J = -\frac{1}{3} \varepsilon_{ABCD} \delta^{IJ}, \quad (11.Г.9)$$

$$\rho_{AC}^I \rho^{BDJ} = 2 (\delta_A^D \delta_C^B - \delta_A^B \delta_C^D). \quad (11.Г.10)$$

12. Некоторые сведения по дифференциальной геометрии

В первых одиннадцати главах этой книги мы попытались дать введение в теорию струн в том виде, как она понимается в настоящее время. Теперь мы обратим внимание на то, чтобы установить связь с более привычной физикой. В этой главе рассматриваются некоторые понятия дифференциальной геометрии, которые полезны для понимания общей теории относительности и теории Янга — Миллса даже в четырех измерениях, а особенно нужны в десятимерной физике. Изложение в этой главе сравнительно элементарно; его целью является главным образом дать минимальные сведения, которые потребуются в гл. 13 и 14. В гл. 13 мы обсудим теорию супергравитации в десяти измерениях, являющуюся по крайней мере в рамках теории возмущений низкоэнергетическим пределом десятимерной теории суперструн. В гл. 14 мы рассмотрим некоторые важные идеи, связанные с компактификацией от десяти к четырем измерениям. Заключительные главы этой книги (гл. 15 и 16) посвящены более специализированной математике и более спекулятивным идеям относительно компактификации.

12.1. Спиноры в общей теории относительности

В начале нашего обсуждения полезно подумать о взаимодействии спиноров с гравитационным полем. Эта задача имеет огромное значение для струнных теорий, в которых присутствуют как фермионы, так и гравитация, и одного этого уже достаточно для того, чтобы ее здесь рассмотреть. Кроме того, обдумывание взаимодействия спиноров с гравитационным полем заставляет изучить такие вопросы, аналоги которых для теории Янга — Миллса мы также хотим рассмотреть впоследствии. Вопрос о взаимодействии спиноров с гравитацией рассматривается кратко в гл. 4 в связи с обсуждением двумерной супергравитации, но здесь мы изучим его подробнее.

На протяжении большей части этой главы мы рассматриваем многообразие M размерности n . Оно может быть наделено метрикой евклидовой или лоренцевой сигнатуры. Когда нам приходится делать какой-то определенный выбор, мы чаще всего рассматриваем метрику евклидовой сигнатуры (положительно определенную). Если надо рассмотреть глобальные топологические свойства, то многообразие M обычно выбирается компактным.

Мы хотим рассмотреть спинорные поля на многообразии M . Причина того, что это не так просто сделать, заключается в следующем. При переходе от одного набора координат x^μ к другому набору x'^μ векторное поле V^μ преобразуется по закону

$$V^\mu \rightarrow V'^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} V^\nu. \quad (12.1.1)$$

Здесь матрица

$$Z = \partial x'^\mu / \partial x^\nu \quad (12.1.2)$$

является в общем случае элементом группы $GL(n, R)$ обратимых вещественных матриц размера $n \times n$. Вектор V^μ преобразуется по фундаментальному векторному представлению этой группы. Самые первые формулы общей теории относительности, описывающие взаимодействие материи и гравитации, требуют, чтобы поля материи образовывали представления группы $GL(n, R)$. Физическое поле в некотором данном представлении группы $GL(n, R)$ преобразуется при замене координат с помощью матрицы Z (12.1.2), действующей в этом представлении. Представления группы $GL(n, R)$ — это тензоры. Из каждого представления группы $GL(n, R)$ с помощью ограничения всегда получается некоторое представление группы $SO(n)$, так как $SO(n)$ является подгруппой группы $GL(n, R)$, но обратное неверно. Спиноры образуют представление группы $SO(n)$, которое не возникает из представления группы $GL(n, R)$. Для описания взаимодействия спиноров с гравитацией нужен модифицированный формализм, в котором матрица Z заменяется $SO(n)$ -матрицей (или в зависимости от сигнатуры $SO(n-1, 1)$ -матрицей).

Необходимый первый шаг состоит в введении в каждой точке x на многообразии M репера из ортонормированных касательных векторов $e_\mu^a(x)$, $a = 1, \dots, n$. Здесь μ — индекс, нумерующий компоненты касательного вектора к M в точке x , а индекс a — просто номер вектора $e_\mu^a(x)$. Ортонормированность означает, что $e_\mu^a(x) e^{b\mu}(x) = \eta^{ab}$, где η^{ab} — метрика плоского пространства. Это равносильно соотношению

$$e_\mu^a(x) e_{a\nu}(x) = g_{\mu\nu}(x), \quad (12.1.3)$$

где $g_{\mu\nu}(x)$ — метрический тензор на M , а $e_{a\mu}(x) = \eta_{ab} e_\mu^b(x)$. Векторы e_μ^a образуют базис касательного пространства T_x , состоящего из всех векторов, касательных к M в точке x . Этот репер обычно называют тетрадой. «Лоренцев» индекс a тетрады поднимается и опускается с помощью лоренцевой метрики η_{ab} , в то время как пространственно-временной индекс μ поднимается и опускается с помощью метрического тензора $g_{\mu\nu}$.

В выборе тетрады имеется большой произвол. Столь же хорошим выбором, как $e_\mu^a(x)$, было бы $\tilde{e}_\mu^a(x) = \Lambda_b^a(x) \cdot e_\mu^b(x)$, где Λ_b^a — произвольное, зависящее от x преобразование Лоренца. Такая замена тетрады называется локальным преобразованием Лоренца. Именно это лоренцево преобразование $\Lambda_b^a(x)$ в конце концов заменяет $GL(n, R)$ -матрицу, фигурирующую в обсуждении выше.

На первый взгляд не очевидно, что следует ввести тетраду; полезность этого выясняется в процессе обсуждения. Но должно быть ясно, что если мы собираемся ввести тетраду, то надо обеспечить, чтобы формализм был инвариантен относительно локальных преобразований Лоренца, так что физические наблюдаемые не зависели бы от произвола в выборе тетрады. Как и при рассмотрении любой другой локальной калибровочной инвариантности, чтобы добиться локальной лоренц-инвариантности, необходимо ввести калибровочное поле $\omega_\mu^{ab}(x)$ для группы Лоренца $SO(n-1, 1)$ (или $SO(n)$ в случае положительной сигнатуры). Здесь μ — индекс вектора, касательного к многообразию, а a и b — $SO(n-1, 1)$ -индексы. Калибровочное поле ω_μ преобразуется при локальных лоренцевых преобразованиях стандартным образом: $\omega_\mu \rightarrow \Lambda \omega_\mu \Lambda^{-1} - \partial_\mu \Lambda \cdot \Lambda^{-1}$. Калибровочное поле локальной группы Лоренца обычно называется спиновой связностью.

Следует найти такой минимальный выбор спиновой связности, при котором введение тетрады и спиновой связности не меняет содержание общей теории относительности. (В теории струн общая теория относительности, конечно, модифицируется, и предпочтительным может быть некоторый неминимальный выбор спиновой связности. Но сначала важно понять минимальный выбор.) Для начала поясним, как используется спиновая связность. Ковариантную производную векторного поля V^μ в общей теории относительности обычно определяют, полагая $D_\lambda V^\mu = \partial_\lambda V^\mu + \Gamma_{\lambda\nu}^\mu V^\nu$, где $\Gamma_{\lambda\nu}^\mu$ — символы Кристоффеля. С другой стороны, как только введена тетрада, можно работать не с $V^\mu(x)$, а с $V^a(x) = e_\mu^a(x) V^\mu(x)$. Величины V^a содержат ту же информацию, что и V^μ , так как последние всегда можно

восстановить: $V^\mu(x) = e_a^\mu(x) V^a(x)$. В терминах V^a естественная ковариантная производная имеет вид $D_\mu V^a = \partial_\mu V^a + \omega_{\mu b}^a V^b$. Если требуется избежать модификации стандартного содержания общей теории относительности, то два выражения для ковариантной производной вектора V должны быть эквивалентны. Это будет выполнено в том смысле, что будет справедливо соотношение $D_\mu V^a = e_\nu^a D_\mu V^\nu$, если мы определим спиновую связность таким образом, чтобы ковариантная производная тетрады была равна нулю:

$$D_\mu e_\nu^a = 0. \quad (12.1.4)$$

Здесь, как и в обычной общей теории относительности, ковариантная производная такого поля, как e_ν^a , с несколькими индексами определяется с добавлением членов, содержащих связность, для каждого индекса: $D_\mu e_\nu^a = \partial_\mu e_\nu^a - \Gamma_{\mu\nu}^\lambda e_\lambda^a + \omega_{\mu b}^a e_\nu^b$. Уравнение (12.1.4) содержит как раз столько информации, сколько требуется, чтобы однозначно определить как символы Кристоффеля (получив при этом стандартные формулы), так и спиновую связность. Простейший способ убедиться в этом — заметить, что (12.1.4) содержит (при переменных индексах μ, ν и a) n^3 независимых уравнений, что равно общему числу независимых компонент символов Кристоффеля и спиновой связности. Вытекающая из (12.1.4) явная формула для спиновой связности в этой книге не понадобится, но мы приводим ее для полноты изложения:

$$\omega_{\mu}^{ab} = \frac{1}{2} e^{\nu a} (\partial_\mu e_\nu^b - \partial_\nu e_\mu^b) - \frac{1}{2} e^{\nu b} (\partial_\mu e_\nu^a - \partial_\nu e_\mu^a) - \frac{1}{2} e^{\rho a} e^{\sigma b} (\partial_\rho e_{\sigma c} - \partial_\sigma e_{\rho c}) e_\mu^c. \quad (12.1.5)$$

Следствием соотношений (12.1.3) и (12.1.4) (и правила Лейбница $D_\mu(AB) = (D_\mu A)B + A(D_\mu B)$, которое справедливо для ковариантных производных) является тот факт, что $D_\lambda g_{\mu\nu} = 0$, как и в общей теории относительности.

Определив спиновую связность, мы можем составить калиброво-ковариантную напряженность поля $R_{\mu\nu}{}^a{}_b = \partial_\mu \omega_\nu{}^a{}_b - \partial_\nu \omega_\mu{}^a{}_b + [\omega_\mu, \omega_\nu]^a{}_b$. Эта напряженность имеет то же содержание, что и тензор Римана $R_{\mu\nu}{}^\sigma{}_\tau$, определенный обычным образом через символы Кристоффеля и их производные. На самом деле из (12.1.4) следует, что $R_{\mu\nu}{}^a{}_b = e_\sigma^a e_\tau^b R_{\mu\nu}{}^\sigma{}_\tau$.

С помощью спиновой связности нетрудно дать описание взаимодействия спиноров с гравитационным полем. Как и в случае любого калибровочного поля, спиновая связность может

взаимодействовать с полем $\psi(x)$ в любом требуемом представлении калибровочной группы. В данном случае калибровочная группа — это группа Лоренца, и мы выбираем в качестве $\psi(x)$ поле в спинорном представлении группы Лоренца. Если Σ^{ab} — генераторы группы Лоренца в спинорном представлении, то ковариантная производная поля ψ стандартным образом определяется как

$$D_\mu \psi = \partial_\mu \psi + \frac{1}{2} \omega_\mu^{ab} \Sigma_{ab} \psi. \quad (12.1.6)$$

Потребуем, чтобы при замене тетрады с помощью локального преобразования Лоренца $\Lambda(x)$ соблюдался закон $\psi(x) \rightarrow \Lambda(x)\psi(x)$; тогда и ковариантная производная поля $\psi(x)$ также преобразуется однородно: $D_\mu \psi(x) \rightarrow \Lambda(x)D_\mu \psi(x)$.

Чтобы определить уравнение Дирака, нужны также гамма-матрицы. Сначала вводим стандартные гамма-матрицы Γ_a , отвечающие плоскому пространству и удовлетворяющие соотношению $\{\Gamma_a, \Gamma_b\} = 2\eta_{ab}$ ¹⁾. Гамма-матрицы, отвечающие искривленному пространству, определяются тогда как $\Gamma_\mu(x) = e_\mu^a(x) \Gamma_a$. Они удовлетворяют соотношению $\{\Gamma_\mu(x), \Gamma_\nu(x)\} = 2g_{\mu\nu}(x)$. Вследствие (12.1.4) гамма-матрицы также ковариантно постоянны в том смысле, что $D_\mu \Gamma_\lambda = \Gamma_\lambda D_\mu$. Теперь уже ясно, как определить оператор Дирака. Он равен просто $\not{D} = \Gamma^\mu D_\mu$, в точности так же как в калибровочных теориях.

Необходимо сделать еще несколько замечаний. Во-первых, мы обсуждали минимальную спиновую связность, удовлетворяющую уравнению (12.1.4). В общем случае полезно рассматривать также другие, неминимальные, спиновые связности, которые, как правило, зависят от других физических полей помимо метрики. Удобной мерой неминимальности некоторой неминимальной спиновой связности является так называемое «кручение» $T_{\mu\nu}^a$, определяемое выражением

$$T_{\mu\nu}^a = D_\mu e_\nu^a - D_\nu e_\mu^a. \quad (12.1.7)$$

Кручение зависит только от спиновой связности, но не от символов Кристоффеля, так как (в силу симметрии по нижним индексам величин $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$, входящих в определение ковариантных производных) символы Кристоффеля в правой части уравнения (12.1.7) сокращаются. По той же причине наиболее эффективный способ получения формулы (12.1.5) в случае минимальной спиновой связности, т. е. без кручения, состоит в том, чтобы

¹⁾ При обсуждении дифференциальной геометрии ниже в этой книге мы принимаем (как обычно в физической литературе), что матрицы Дирака Γ^μ являются эрмитовыми при пространственноподобных μ .

исходить из выражения (12.1.7) (при $T = 0$), а не из соотношения (12.1.4).

В начале этого раздела мы уже объяснили одну причину, по которой необходимо ввести тетраду, чтобы описать взаимодействие спиноров с гравитационным полем. Есть и другая, более глубокая причина. Она появляется при рассмотрении топологически нетривиальной ситуации. Выше мы предположили, что можно найти ортонормированный репер касательных векторов, что, конечно, можно сделать локально, но глобально на топологически нетривиальном многообразии в общем случае этого сделать нельзя. Например, на обычной двумерной сфере

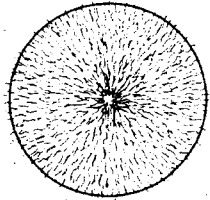


Рис. 12.1. Нельзя «причесать волосы на сфере», или, другими словами, невозможно найти нигде не равное нулю касательное векторное поле на поверхности обычной двумерной сферы.

нельзя выбрать гладкое касательное векторное поле, нигде не обращающееся в нуль. Эта теорема часто формулируется как высказывание, что «нельзя причесать бильярдный шар». Раз нельзя найти и одного не обращающегося в нуль векторного поля на двумерной сфере, то тем более нельзя найти ортонормированный репер векторных полей, т. е. тетраду. На самом деле топологически нетривиальные многообразия, на которых можно определить всюду одну тетраду, встречаются сравнительно редко. Такие многообразия называются параллелизуемыми, и они, по видимому, не подходят для суперструнной компактификации.

Что же делать, если топологические проблемы не позволяют определить тетраду всюду? Мы, конечно, можем задать тетраду локально, так что мы покрываем M открытыми множествами $O_{(\alpha)}$, на каждом из которых вводим некоторую тетраду e_{μ}^{α} . В областях перекрытия $O_{(\alpha\beta)} = O_{(\alpha)} \cap O_{(\beta)}$ две тетрады $e_{(\alpha)}$ и $e_{(\beta)}$ с необходимостью связаны локальным преобразованием Лоренца:

$$e_{(\alpha)}(x) = \Lambda_{(\alpha\beta)}(x) e_{(\beta)}(x). \quad (12.1.8)$$

Появившееся в этой формуле локальное преобразование Лоренца $\Lambda_{(\alpha\beta)}(x)$ называется функцией перехода. Само собой разумеется, если бы мы использовали другие тетрады $e_{(\alpha)}$ и $e_{(\beta)}$ в $O_{(\alpha)}$ и $O_{(\beta)}$, мы получили бы другие функции перехода. Но независимо от того, какие использовались тетрады и функции перехода, из (12.1.8) следует, что в области тройного перекры-

тия $O_{(\alpha\beta\gamma)} = O_{(\alpha)} \cap O_{(\beta)} \cap O_{(\gamma)}$ функции перехода удовлетворяют условию

$$\Lambda_{(\alpha\beta)} \Lambda_{(\beta\gamma)} \Lambda_{(\gamma\alpha)} = 1. \quad (12.1.9)$$

Как же теперь ввести спиноры в этой, более трудной ситуации? В каждом открытом множестве $O_{(\alpha)}$ введем спинорное поле $\psi_{(\alpha)}$. В областях перекрытия $O_{(\alpha\beta)}$ потребуем, чтобы $\psi_{(\alpha)}$ и $\psi_{(\beta)}$ описывали одну и ту же физическую ситуацию в том смысле, что

$$\psi_{(\alpha)}(x) = \tilde{\Lambda}_{(\alpha\beta)}(x) \psi_{(\beta)}(x). \quad (12.1.10)$$

Здесь $\tilde{\Lambda}$ — $SO(n)$ - или $SO(n-1, 1)$ -матрица Λ , записанная в спинорном представлении. Уравнение (12.1.10) имеет смысл только в том случае, если в области тройного перекрытия выполняется соотношение

$$\tilde{\Lambda}_{(\alpha\beta)} \tilde{\Lambda}_{(\beta\gamma)} \tilde{\Lambda}_{(\gamma\alpha)} = 1. \quad (12.1.11)$$

На первый взгляд кажется, что все в порядке, так как (12.1.11) представляется следствием равенства (12.1.9). Но необходимо учитывать, что спинорное представление двузначно и приводит к неопределенности в знаке, возникающей при переходе от Λ к $\tilde{\Lambda}$. Действительно, $-\tilde{\Lambda}$ ничем не хуже $+\tilde{\Lambda}$. Поэтому соотношение (12.1.11) не следует только из условия (12.1.9); правая часть соотношения (12.1.11) может оказаться равной -1 вместо $+1$. Чтобы определить спиноры на непараллелизуемом многообразии M , надо попытаться выбрать знаки у всех $\tilde{\Lambda}_{(\alpha\beta)}$ таким образом, чтобы выполнялось соотношение (12.1.11). Если это можно сделать, то говорят, что многообразие M допускает спинорную структуру, или является спинорным многообразием. (Если M не односвязно, то может быть несколько неэквивалентных способов выбора знаков, согласованного с (12.1.11), и в таком случае говорят, что M допускает несколько спинорных структур.) Теория суперструн содержат фермионы, так что эти теории могут быть определены только на спинорных многообразиях. В двух и в трех измерениях любое ориентируемое многообразие является спинорным; в этом и заключается причина того, что понятие спинорного многообразия не слишком хорошо известно физикам. В четырех и более измерениях «большинство» (в любом разумном смысле) многообразий не являются спинорными, так что требование существования спинорной структуры есть важное ограничение на суперструнную компактификацию.

12.2. Спинорные структуры на мировой поверхности

В предыдущем разделе мы рассмотрели распространение спиноров в искривленном пространстве. Совершенно аналогичная задача возникает в теории струн при изучении распространения спиноров на искривленной мировой поверхности, как уже обсуждалось в разд. 4.3.4. Там мы рассматривали только локальные проблемы, а сейчас мы возвращаемся к этому вопросу и рассмотрим некоторые простые глобальные свойства.

Важное упрощение связано с тем, что группа вращений в двумерном пространстве является абелевой группой $SO(2)$.

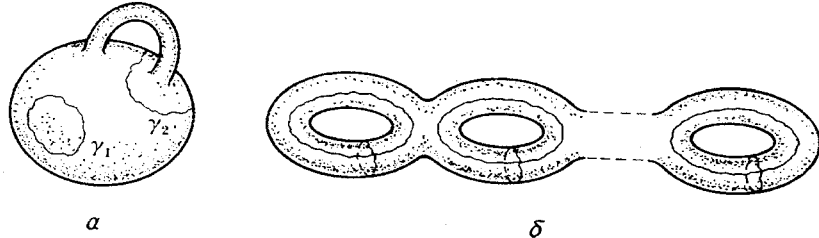


Рис. 12.2. *a* — компактная мировая поверхность струны с двумя замкнутыми кривыми γ_1 и γ_2 на ней, из которых первая топологически тривиальна, а вторая — нет; *b* — на поверхности рода k имеется $2k$ топологически независимых замкнутых кривых.

Она изоморфна группе $U(1)$ комплексных чисел, по модулю равных единице. Пусть, как и в разд. 4.4.1, W — один генератор группы $SO(2)$. Представление группы $SO(2)$ можно определить, задав собственное значение оператора W . В отличие от ситуации в размерности большей двух векторное поле V^μ не отвечает неприводимому представлению группы $SO(2)$, а разлагается на компоненты V^+ и V^- , отвечающие $W = 1$ и $W = -1$ соответственно. Если поле V^μ вещественно, то V^+ и V^- комплексно сопряжены друг другу. Подобным образом двухкомпонентное спинорное поле ψ^A имеет компоненты ψ^+ и ψ^- положительной и отрицательной киральности, которые отвечают $W = 1/2$ и $W = -1/2$ соответственно. Эти компоненты также сопряжены друг другу, если спинор ψ^A вещественный (майорановский).

Ограничимся для простоты рассмотрением ориентируемых мировых поверхностей. Аналогичное обсуждение можно провести и в случае неориентируемых поверхностей, но это требует большей осторожности и более точных определений. Рассмотрим мировую поверхность, представляющую собой компактную риманову поверхность рода k (рис. 12.2). Мы хотим обсудить параллельный перенос векторов и спиноров по таким замкнутым кривым, как показанные на рис. 12.2, *a* кривые γ_1 и γ_2 . Доста-

точно рассмотреть V^+ и ψ^+ , так как V^- и ψ^- преобразуются как комплексно-сопряженные.

При параллельном переносе вокруг некоторой замкнутой кривой γ величина V^+ преобразуется с некоторой фазой $e^{i\alpha}$. Что же происходит с ψ^+ при параллельном переносе вокруг γ ? Исключая неопределенность в знаке, на этот вопрос легко ответить, заметив, что произведение $\psi^+ \cdot \psi^+$ преобразуется как V^+ и при параллельном переносе вокруг γ приобретает фазу $e^{i\alpha}$. Поэтому ψ^+ должно преобразовываться с множителем

$$\sqrt{e^{i\alpha}}. \quad (12.2.1)$$

Здесь возникает неопределенность, так как квадратный корень имеет два знака. Если кривая γ стягиваемая (подобно γ_1 на рис. 12.2, *a*), то неоднозначность можно разрешить следующим способом. В пределе, когда γ — очень малая замкнутая кривая, векторы и спиноры не должны меняться при переносе вокруг γ , если мы предполагаем, что спиновая связность не сингулярна (а это определено имеет место в случае обычной спиновой связности, заданной соотношением (12.1.5) так, что метрика ковариантно постоянна). Таким образом, для очень малой кривой $\alpha \approx 0$, и параллельный перенос спиноров дает знак плюс у корня квадратного в (12.2.1). Для любой стягиваемой кривой γ , необязательно инфинитезимальной, знак квадратного корня в (12.2.1) определяется из требования, что множитель (12.2.1) является непрерывно меняющимся функционалом от γ , который становится положительным, когда γ стягивается в точку. С другой стороны, если γ — топологически нетривиальная кривая (подобно γ_2 на рис. 12.2, *a*), то естественного способа выбора знака в (12.2.1) не существует, и мы должны рассматривать обе возможности.

В более общем случае на поверхности рода k (рис. 12.2, *b*) имеется $2k$ независимых нестягиваемых петель. Поэтому приходится $2k$ раз делать выбор знаков, когда мы решаем, каким образом осуществлять параллельный перенос спиноров на поверхности рода k . Всего имеется 2^{2k} возможных вариантов того, как определить параллельный перенос спиноров на поверхность рода k . (Если перевести это обсуждение на язык предыдущего раздела, можно показать, что все 2^{2k} варианта совместны с (12.1.11).) На поверхности рода k имеется 2^{2k} спинорных структур.

Теперь мы можем достичь лучшего понимания GSO-проекции, которая, как мы видели в гл. 4, дает суперсимметрию в RNS-модели. Сначала рассмотрим подробно поверхность рода один. Как и в гл. 8 и 9, ее можно рассматривать как параллеле-

лограмм в плоскости (σ_1, σ_2) , у которого отождествлены противоположные стороны. Это показано на рис. 12.3. На параллелограмме мы можем выбрать плоскую метрику, и в таком случае вектор не меняется при параллельном переносе вокруг замкнутых петель, стягиваемых или нестягиваемых. Поэтому спиноры меняют знак на ± 1 при обходе по замкнутой петле в направлении σ_1 или σ_2 . Имеются четыре возможных набора граничных условий для спиноров, которые можно обозначить $(++)$, $(-+)$, $(+-)$ и $(--)$, где первый и второй знаки «+» или «-» указывают на поведение при параллельном переносе соответственно в направлении σ_1 или σ_2 . Эти четыре на-

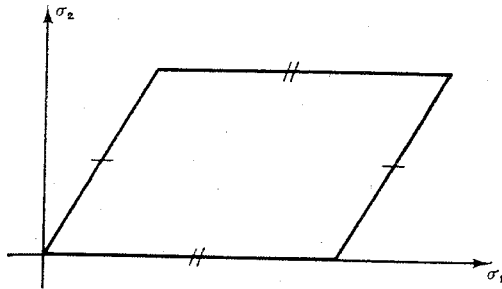


Рис. 12.3. Поверхность рода один, рассматривается как параллелограмм в (σ_1, σ_2) -плоскости с отождествленными противоположными сторонами.

бора граничных условий отвечают четырем спинорным структурам на поверхности рода один⁴⁾.

Когда мы вычисляем однопетлевой интеграл по путям в теории струн, содержащей фермионы, то какую спинорную структуру мы используем? Для суперструн в RNS-формализме это рассмотрено в разд. 9.4, где объяснялось, почему унитарность и модулярная инвариантность требуют GSO-проекции (или какой-нибудь другой подобной проекции, которая уничтожает безмассовые частицы спина $3/2$). Фермионы и бозоны возникают в RNS-модели при выборе знака «+» или «-» соответственно в граничных условиях в направлении σ_1 . Чтобы теория содержала и бозоны, и фермионы, надо суммировать по возможным граничным условиям в направлении σ_1 . GSO-проекция равносильна вставке $(1 + (-1)^F)/2$ в интеграл по путям. Оператор

⁴⁾ Мы уже обсуждали эти граничные условия на поверхности рода 1 в гл. 9, хотя и не использовали язык спинорных структур. Как обсуждалось там, если в теории имеется несколько различных типов фермионов, каждый из них может отвечать разным спинорным структурам, возможно, с некоторыми корреляциями между различными выборами.

$(-1)^F$ обращает граничные условия по σ_2 , так что GSO-вставка оператора $(1 + (-1)^F)/2$ есть указание суммировать по возможным граничным условиям в направлении σ_2 . Собирая эти факты вместе, получаем, что суперсимметричная теория с GSO-проекцией на однопетлевом уровне получается с помощью суммирования по всем четырем возможным граничным условиям, или, другими словами, по всем четырем возможным спинорным структурам. Независимое суммирование по граничным условиям как в направлении σ_1 , так и в направлении σ_2 являлось бы, формально говоря, прескрипцией, инвариантной относительно

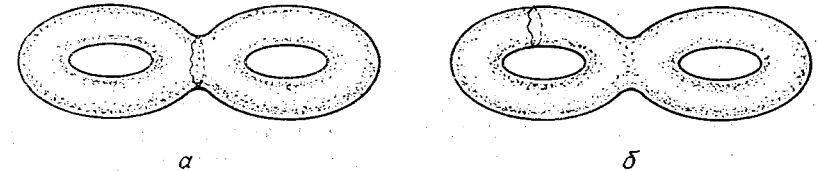


Рис. 12.4. Поверхность рода два: *a* — с разрезом, разделяющим две ручки; *b* — с разрезом, обнаруживающим некоторое состояние, циркулирующее в одной из петель.

модулярных преобразований, которые переставляют σ_1 и σ_2 . Необходимо проверить это и убедиться, что нет аномалии относительно модулярных преобразований; это верно в критической размерности, как мы видели в гл. 9.

Каково обобщение всего этого на случай поверхностей большего рода? Так как на однопетлевом уровне мы суммировали по всем четырем спинорным структурам, можно было бы ожидать, что на k -петлевом уровне мы должны суммировать по всем 2^{2k} спинорным структурам. Действительно, раз мы решили суммировать по всем спинорным структурам на однопетлевом уровне, унитарность вынуждает нас делать то же самое и на k -петлевом уровне. Если «разрезать» двухпетлевую диаграмму, как на рис. 12.4, *a*, разделив ее на две однопетлевые, то унитарность, несомненно, заставляет независимо просуммировать по четырем спинорным структурам каждой из двух поддиаграмм, если это было сделано на однопетлевом уровне. Соединяя вместе две поддиаграммы, получаем суммирование по всем $4 \times 4 = 16$ спинорным структурам на поверхности рода два.

Теперь мы можем ответить на вопрос, который мог привести в недоумение читателя, когда в гл. 4 была введена GSO-проекция. Благодаря тому, что в теории имеется сохраняющееся дискретное квантовое число $(-1)^F$, в древесных диаграммах можно, конечно, выполнить GSO-проекцию и рассматривать только такие процессы, в которых внешние состояния четны

относительно $(-1)^F$. Но что гарантирует нам, что частицы неправильной G-четности (нечетные относительно $(-1)^F$) не будут рождаться парами в петлевых диаграммах? Чтобы проверить, что этого не происходит, рассмотрим типичное струнное состояние, циркулирующее вокруг петли λ в диаграмме, подобной изображенной на рис. 12.4, б. Указание суммировать по всем спинорным структурам означает, что мы суммируем по граничным условиям фермионов, которые могут быть периодическими или антипериодическими при обходе вокруг петли λ . Таким образом, струнное состояние на разрезе λ может быть либо R-, либо NS-состоянием, т. е. либо фермионом, либо бозоном. Суммирование по спинорным структурам означает также, что граничные условия в направлении, ортогональном λ , могут быть либо периодическими, либо антипериодическими; это и есть GSO-проекция. Таким образом, промежуточными состояниями в петлевых диаграммах являются в точности те же состояния, которые разрешены в качестве внешних. Нежелательные состояния не рождаются парами.

12.3. Топологически нетривиальные калибровочные поля

После рассмотрения понятий, связанных с мировой поверхностью струны, вернемся к пространственно-временным объектам. Следующей нашей целью будет обсуждение топологически нетривиальных калибровочных полей в пространстве-времени. Необходимые здесь понятия вполне аналогичны тем, с которыми мы встречались при обсуждении спинорных структур в n измерениях, поэтому мы начнем с переосмысления в разд. 12.3.1 понятий векторов и спиноров в римановой геометрии. Обсуждение калибровочных полей в разд. 12.3.2 проводится в не столь абстрактной форме и является логически независимым, но более абстрактная точка зрения полезна, особенно в приложениях к более трудным задачам.

12.3.1. Касательное расслоение

В каждой точке x некоторого гладкого многообразия M мы имеем векторное пространство T_x , состоящее из касательных векторов к M в точке x (рис. 12.5). Поле спина один, или векторное поле V , представляет собой в каждой точке x элемент $V^{\mu}(x)$ пространства T_x . В любом естественном смысле касательные векторные пространства T_x и $T_{x'}$ в различных точках x и x' на M являются *разными пространствами*. Одно из них — пространство касательных векторов в точке x , а другое — пространство касательных векторов в точке x' .

Хотя интуитивно представляется очевидным (рис. 12.5), что векторные пространства T_x и $T_{x'}$ действительно не являются одинаковыми, этот вопрос очень важен и заслуживает тщательного исследования. Можно было бы сравнить касательные векторы в точке x с касательными векторами в точке x' с помощью параллельного переноса вдоль некоторого пути γ , ведущего из x в x' . Но такой параллельный перенос зависел бы от произвольного выбора пути из x в x' и поэтому не являлся бы естественной операцией.

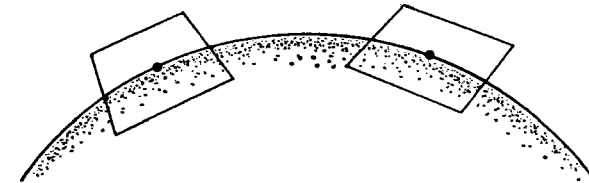


Рис. 12.5. Касательное расслоение в двух точках x и x' на римановом многообразии.

В каком смысле можно сказать, что два векторных пространства, таких как T_x и $T_{x'}$, вообще отличаются друг от друга? В действительности любые два векторных пространства T и \tilde{T} одинаковой размерности n изоморфны. Изоморфизм между ними — это просто обратимое линейное отображение $\rho: T \rightarrow \tilde{T}$. Такие отображения, конечно, существуют, если T и \tilde{T} имеют одинаковую размерность, но при этом есть много таких отображений и нет естественного способа выбрать какое-то одно из них. Естественный выбор изоморфизма между T и \tilde{T} был бы возможен, если бы эти пространства были снабжены базисами e^a , $a = 1, \dots, n$ для T и \tilde{e}^a , $a = 1, \dots, n$ для \tilde{T} . Тогда мы определили бы изоморфизм из T в \tilde{T} соотношением $\rho(e^a) = \tilde{e}^a$. В римановой геометрии, вообще говоря, нет естественного способа выбрать базисы $e^a(x)$ в векторных пространствах T_x . Но в разд. 12.1 мы видели, что хотя естественного способа сделать это нет, но тем не менее очень полезно произвольным образом выбрать базис $e^a(x)$, т. е. тетраду. В любой области O , в которой выбрана тетрада, векторные пространства T_x можно рассматривать как в некотором смысле одинаковые. Надо просто выбрать произвольную точку $x_0 \in O$ и отобразить T_x на T_{x_0} с помощью обратимого отображения $e^a(x) \rightarrow e^a(x_0)$. Хотя это и не является естественной операцией, так как имеется зависимость от произвольного выбора тетрады, но высказывание о том, что различные пространства T_x могут рассматриваться как одинаковые, приобретает какой-то смысл.

В общем случае, однако, как мы упоминали в конце разд. 12.1, выбрать гладко меняющееся тетрадное поле по всему топологически нетривиальному многообразию M невозможно. При этом мы не можем рассматривать векторные пространства T_x как одинаковые даже с помощью произвольного выбора. Мы должны принять точку зрения, что векторное поле $V^\mu(x)$ в каждой точке x принимает значение в *другом* (но гладко меняющемся) векторном пространстве T_x . Тогда получается прототип одного чрезвычайно важного математического понятия. Векторное расслоение V над многообразием M — это семейство векторных пространств V_x , по одному для каждой точки $x \in M$, гладко зависящих от x . Векторное пространство V_x называется слоем векторного расслоения V над точкой x . Классическим примером векторного расслоения над M является пример, который мы только что описали, — касательное расслоение T , слоем которого над каждой точкой является касательное пространство T_x . Векторное расслоение называется топологически тривиальным, если, выбрав гладко меняющийся базис для каждого пространства V_x , можно все их отождествить с V_{x_0} для любой данной точки x_0 . Согласно этому определению, касательное расслоение T является топологически тривиальным, если можно выбрать одно тетрадное поле по всему многообразию M ; таким образом, то, что мы раньше называли параллелизуемыми многообразиями, есть многообразия, касательные расслоения которых топологически тривиальны. Каждое векторное расслоение является тривиальным локально, так как локально всегда можно ввести аналог тетрадного поля.

Если касательное расслоение не является топологически тривиальным, то, как и в разд. 12.1, лучше, что мы можем сделать, — это покрыть M открытыми множествами $O_{(\alpha)}$ и выбрать тетраду $e_{(\alpha)}$ в каждом множестве $O_{(\alpha)}$; эти тетрады будут связаны соответствующими переходными функциями на областях перекрытия. Этот формализм совершенно аналогичен формализму, используемому в случае калибровочных полей, к чему мы теперь перейдем.

12.3.2. Калибровочные поля и векторные расслоения

Наиболее элементарную формулировку понятий, связанных с калибровочной теорией, начинают с калибровочной группы G и полей материи $\psi^i(x)$, преобразующихся по некоторому представлению R группы G . Здесь x обозначает точку пространства-времени M , а $i = 1, \dots, n$ — индекс в представлении R . Затем рассматривают локальные калибровочные преобразования, осуществляемые калибровочной функцией $g(x)$, зависящей от точ-

ки пространства-времени. Закон преобразования имеет вид $\psi^i(x) \rightarrow g_j^i(x) \psi^j(x)$, где g_j^i записана в представлении R .

Такая формулировка достаточна и совершенно удовлетворительна для калибровочных теорий в плоском пространстве-времени или вообще в любой топологически тривиальной ситуации. Под топологически тривиальным пространством мы понимаем пространство, подобное евклидову пространству или открытому шару в евклидовом пространстве, которое можно без разрывов стянуть в точку. Но на топологически нетривиальном многообразии M , подобном сфере или римановой поверхности с n ручками, обычная формулировка калибровочной теории допускает очень важное обобщение.

Требуемая мотивировка похожа на принцип эквивалентности в общей теории относительности. Эта мотивировка напоминает также обсуждение в разд. 12.1 вопроса о том, как ввести фермионы в топологически нетривиальных ситуациях. Но здесь мы рассмотрим ее более подробно. Мы уже знаем, как формулируются калибровочные теории на топологически тривиальном пространстве. Поэтому покроем M открытыми множествами $O_{(\alpha)}$, каждое из которых топологически тривиально. Например, если M — сфера (рис. 12.6), то достаточно двух открытых множеств, в качестве которых можно выбрать O_+ и O_- , представляющие собой дополнения соответственно к южному и северному полюсам. На каждом открытом множестве $O_{(\alpha)}$ мы формулируем калибровочные теории обычным способом. На каждом множестве $O_{(\alpha)}$ вводится поле $\psi^i_{(\alpha)}(x)$ в представлении R калибровочной группы. Закон калибровочных преобразований имеет вид

$$\psi^i_{(\alpha)} \rightarrow g^i_{j(\alpha)} \psi^j_{(\alpha)}, \quad (12.3.1)$$

причем теперь мы имеем право использовать разные калибровочные функции $g^i_{j(\alpha)}$ на каждом множестве $O_{(\alpha)}$. Мы, конечно, не хотим, чтобы поля ψ на различных множествах $O_{(\alpha)}$ были совершенно независимыми; необходимо наложить некоторые условия, отвечающие тому факту, что различные множества $O_{(\alpha)}$ склеены друг с другом в пространство M . Пусть $O_{(\alpha\beta)} = O_{(\alpha)} \cap O_{(\beta)}$ — область перекрытия множеств $O_{(\alpha)}$ и $O_{(\beta)}$. Потребуем,

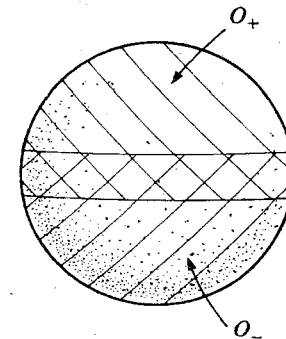


Рис. 12.6. Покрытие сферы двумя открытыми множествами O_+ и O_- .

чтобы поле $\psi_{(\alpha)}(x)$ на $O_{(\alpha)}$ и поле $\psi_{(\beta)}(x)$ на $O_{(\beta)}$ отвечали одной и той же физической ситуации в области, где оба определены, а именно на $O_{(\alpha\beta)}$. Разумеется, они отвечают одной и той же физической ситуации в том и только в том случае, когда они связаны некоторым калибровочным преобразованием $g_{(\alpha\beta)}$. Поэтому мы потребуем выполнения условия

$$\psi_{(\alpha)} = g_{(\alpha\beta)}\psi_{(\beta)} \text{ на } O_{(\alpha\beta)} \quad (12.3.2)$$

для некоторой функции $g_{(\alpha\beta)}$. (Мы опускаем здесь индексы, отвечающие представлению R , которые встречались в предшествующих формулах). Функции $g_{(\alpha\beta)}$ называются переходными функциями, что логично, так как они осуществляют переход между физически эквивалентными описаниями в области перекрытия $O_{(\alpha\beta)}$. Аналогичные величины появлялись в нашем обсуждении спиноров в искривленном пространстве-времени.

Имеется некоторое условие самосогласованности, которому должны удовлетворять переходные функции, чтобы соотношение (12.3.2) имело смысл. Пусть $O_{(\alpha\beta\gamma)} = O_{(\alpha)} \cap O_{(\beta)} \cap O_{(\gamma)}$ — область тройного перекрытия областей $O_{(\alpha)}$, $O_{(\beta)}$ и $O_{(\gamma)}$. Тогда для самосогласованности (12.3.2) должно выполняться условие

$$g_{(\alpha\beta)}g_{(\beta\gamma)}g_{(\gamma\alpha)} = 1 \quad (12.3.3)$$

на $O_{(\alpha\beta\gamma)}$. Как преобразуются функции $g_{(\alpha\beta)}$ под действием калибровочных преобразований? Рассмотрение соотношений (12.3.1), (12.3.2) и (12.3.3) показывает, что закон преобразования, который надо постулировать, должен иметь вид

$$g_{(\alpha\beta)} \rightarrow g_{(\alpha)}g_{(\alpha\beta)}g_{(\beta)}^{-1}. \quad (12.3.4)$$

Если можно так выбрать калибровочные функции $g_{(\alpha)}$ в (12.3.4), чтобы сделать переходные функции $g_{(\alpha\beta)}$ равными единице, то различные поля $\psi_{(\alpha)}^i$ будут равны друг другу в областях перекрытия, и наше описание сведется к обычному описанию, когда поле материи — обычное поле $\psi^i(x)$, определенное на всем многообразии M . Новизна в рассмотренном описании возникает тогда, когда невозможно с помощью калибровочного преобразования сделать переходные функции равными единице.

Чтобы проиллюстрировать, что все это означает, рассмотрим подробнее пример сферы S^n (рис. 12.6). Здесь имеется одна область перекрытия O_{+-} , состоящая из всех точек сферы, кроме северного и южного полюсов. Следовательно, имеется единственная переходная функция $g_{+-}: O_{+-} \rightarrow G$. Она, конечно, определена только с точностью до калибровочных преобразований: функция g_{+-} калибровочно-эквивалентна $g_{+}g_{+-}g_{-}^{-1}$, где g_{+} и g_{-} — произвольные калибровочные преобразования в O_{+}

и O_{-} . На первый взгляд может показаться, что с помощью двух произвольных G -значных функций можно сделать одну функцию g_{+-} равной единице. Если бы это было так, то обсуждаемое обобщение обычных калибровочных теорий было бы пустым, по крайней мере в случае сферы S^n . Но это не так, причем только вследствие топологических сложностей.

Область перекрытия O_{+-} содержит, в частности, экватор $\Sigma \approx S^{n-1}$. Любую из функций g_{+} , g_{-} или g_{+-} можно ограничить на экватор, получив отображение $S^{n-1} \rightarrow G$. Поэтому важно кратко обсудить топологическую классификацию таких отображений.

Для любого k отображение $a: S^k \rightarrow G$ называется топологически, или гомотопически, тривиальным, если его можно продолжить до отображения $a: B \rightarrow G$, где B — шар, границей которого является сфера S^k (рис. 12.7). Это дает соотношение эквивалентности, когда два отображения $a: S^k \rightarrow G$ и $b: S^k \rightarrow G$ считаются эквивалентными, если произведение ab^{-1} тривиально в указанном выше смысле. Классы эквивалентности называются гомотопическими классами и образуют группу, называемую гомотопической группой $\pi_k(G)$.

Возвращаясь к предыдущему, мы теперь замечаем, что g_{+} и g_{-} тривиальны как элементы $\pi_{n-1}(G)$, так как они имеют продолжения на O_{+} и O_{-} , включающие северную и южную полусферы соответственно. Но для функции g_{+-} ничто нам этого не гарантирует. Переходная функция g_{+-} , вообще говоря, не может быть продолжена ни на северную, ни на южную полусферу и определяет нетривиальный элемент группы $\pi_{n-1}(G)$. Гомотопический класс отображения g_{+-} инвариантен относительно (12.3.4), так как g_{+} и g_{-} гомотопически тривиальны. Но эта топологическая информация является единственным свойством g_{+-} , инвариантным относительно (12.3.4). (Действительно, если $f: O_{+-} \rightarrow G$ лежит в том же гомотопическом классе, что и g_{+-} , то $g_{+} = f \cdot g_{+-}^{-1}$ можно продолжить на O_{+} и использовать в (12.3.4), преобразуя g_{+-} в f .) Поэтому калибровочные поля на S^n топологически классифицируются указанием элемента из $\pi_{n-1}(G)$. Для $n = 2$ и $G = U(1)$ имеем $\pi_1(U(1)) = Z$, а нетривиальные калибровочные поля называются магнитными монополями. В случае когда $n = 4$, а G — любая простая неабелева группа, имеем

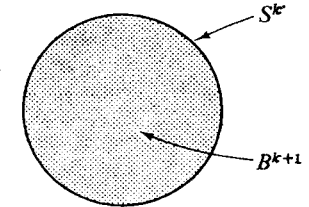


Рис. 12.7. Сфера S^k является границей $(k+1)$ -мерного шара B . Для любого пространства G отображение $a: S^k \rightarrow G$ гомотопически тривиально, если его можно продолжить до отображения $a: B \rightarrow G$.

$\pi_3(G) = Z$, а нетривиальные калибровочные поля называются инстантонами. Аналоги для больших значений n менее известны физикам. В случае пространств, отличных от S^n , топологическая классификация калибровочных полей в общем случае весьма сложна. Для десятимерного многообразия и калибровочной группы E_8 можно дать сравнительно простое решение, но оно использует понятия, выходящие за рамки данной книги.

В случае топологически нетривиального калибровочного поля с переходными функциями $g_{(\alpha\beta)}$, которые нельзя сделать равными единице, необходимо работать с разными калибровочными полями $A_{(\alpha)}$ в каждом открытом множестве $O_{(\alpha)}$ точно так же, как мы поступали в случае заряженного поля материи $\psi_{(\alpha)}$. Как и заряженные поля, различные поля $A_{(\alpha)}$ связаны друг с другом калибровочными преобразованиями:

$$A_{\mu(\alpha)} = g_{(\alpha\beta)} A_{\mu(\beta)} g_{(\alpha\beta)}^{-1} - \partial_{\mu} g_{(\alpha\beta)} g_{(\alpha\beta)}^{-1}. \quad (12.3.5)$$

В топологически нетривиальной ситуации никакое из полей $A_{(\alpha)}$ нельзя продолжить на все пространство, не получив где-то сингулярность типа дираковской струны. Но если выполняется надлежащее обобщение условия квантования Дирака, то дираковскую струну можно как угодно перемещать с помощью калибровочных преобразований, а выбрав разные калибровки в каждом множестве $O_{(\alpha)}$, можно описывать физическую ситуацию в каждой такой области в терминах несингулярного калибровочного поля $A_{(\alpha)}$. Аналогом условия квантования Дирака служит условие согласованности, которому подчинены переходные функции в областях тройного перекрытия, так что это условие с самого начала включено в наше описание.

Суммируем предшествующее рассмотрение, так чтобы подчеркнуть связь между описанием топологически нетривиальных калибровочных полей и приведенным в разд. 12.3.1 обсуждением касательного расслоения. Рассмотрим систему с топологически нетривиальным калибровочным полем A_{μ} , взаимодействующим с заряженным полем ψ . Как и выше, накроем пространство-время простыми открытыми множествами $O_{(\alpha)}$. Наблюдатели в $O_{(\alpha)}$ и $O_{(\beta)}$ могут согласиться с утверждением, что возможные значения заряженного поля ψ образуют векторное пространство V_x . Но эти наблюдатели в $O_{(\alpha)}$ и в $O_{(\beta)}$ не могут согласовать выбор базиса для V_x , так как топологически нетривиальная ситуация — это как раз такая ситуация, в которой не существует гладко меняющегося базиса для V_x . Если выбран базис для V_x , то поле $\psi(x)$, являющееся элементом пространства V_x , может быть описано волновой функцией $\psi^i(x)$, состоящей из компонент, отнесенных к этому базису. Поскольку наблюдатели в $O_{(\alpha)}$ и в $O_{(\beta)}$ не могут согласовать выбор базиса, они

описывают одно и то же поле ψ с помощью разных волновых функций $\psi_{(\alpha)}^i(x)$ и $\psi_{(\beta)}^i(x)$, и эти волновые функции связаны переходными функциями, которые осуществляют переход от базиса в $O_{(\alpha)}$ к базису в $O_{(\beta)}$. Но повторим еще раз: наблюдатели в $O_{(\alpha)}$ и в $O_{(\beta)}$ согласны друг с другом в том, что в каждой точке x векторного пространства V_x существуют возможные значения заряженного поля ψ . Таким образом, существенным понятием является понятие векторного расслоения, т. е. семейства гладко меняющихся векторных пространств V_x , по одному для каждой точки x в M .

Для данного многообразия M и калибровочной группы G классификация векторных расслоений на M с калибровочной группой G является в общем случае, как мы уже отмечали, очень сложной проблемой. Для многих задач существенно понять простейшие топологические инварианты, ассоциированные с векторными расслоениями. Такими инвариантами являются характеристические классы. В разд. 12.5 мы обсудим характеристические классы, но сначала необходимо рассмотреть элементарные аспекты теории дифференциальных форм.

12.4. Дифференциальные формы

Рассмотрим антисимметричное тензорное поле $B_{i_1 i_2 \dots i_k}$ с k индексами, которое задано на компактном многообразии M размерности n . В математике такое поле называется k -формой, или, иначе, дифференциальной формой степени k . Постулируем для поля B калибровочное преобразование

$$\delta B_{i_1 i_2 \dots i_k} = \frac{1}{k} \{ \partial_{i_1} \Lambda_{i_2 \dots i_k} - (-1)^k \partial_{i_2} \Lambda_{i_3 \dots i_k i_1} \pm \text{циклические перестановки} \}, \quad (12.4.1)$$

где тензор $\Lambda_{i_1 i_2 \dots i_{k-1}}$ антисимметричен по всем $k-1$ индексам, а знаки в правой части выбираются так, чтобы обеспечить полную антисимметричность тензора δB по всем индексам. Чтобы избежать постоянно повторяющихся громоздких выражений в правой части соотношения (12.4.1), удобно определить оператор внешнего дифференцирования d . Его определение заключается просто в том, что, действуя на любую дифференциальную форму, скажем на p -форму ϕ , этот оператор дает $(p+1)$ -форму с компонентами

$$(d\phi)_{i_1 \dots i_{p+1}} = \frac{1}{p+1} \{ \partial_{i_1} \phi_{i_2 \dots i_{p+1}} - (-1)^{p+1} \partial_{i_2} \phi_{i_3 \dots i_{p+1} i_1} \pm \text{циклические перестановки} \}. \quad (12.4.2)$$

Знаки в правой части выбираются так, чтобы обеспечить полную антисимметричность компонент $d\phi$. Это определение позволяет переписать (12.4.1) в сжатом виде $\delta B = d\Lambda$.

На первый взгляд может показаться, что формулы (12.4.1) и (12.4.2) вполне подходят для плоского пространства, но в случае искривленного пространства все обычные частные производные надо заменить ковариантными производными. Можно ожидать, что формула (12.4.2) заменится формулой

$$(D\phi)_{i_1 \dots i_{p+1}} = \frac{1}{p+1} \left\{ D_{i_1} \phi_{i_2 \dots i_{p+1}} - (1)^{p+1} D_{i_2} \phi_{i_3 \dots i_{p+1} i_1} \pm \right. \\ \left. \pm \text{циклические перестановки} \right\}, \quad (12.4.3)$$

где D — ковариантная производная, определенная относительно некоторой римановой метрики на M . Но формулы (12.4.2) и (12.4.3) эквивалентны друг другу. Этот факт доказывается в учебниках по общей теории относительности; его можно доказать непосредственно, исходя из определения ковариантной производной и свойств аффинной связности. Например, если ϕ — 1-форма, то (12.4.3) дает

$$2(D\phi)_{ij} = D_i \phi_j - D_j \phi_i = \partial_i \phi_j - \Gamma_{ij}^k \phi_k - \partial_j \phi_i + \Gamma_{ji}^k \phi_k = \\ = \partial_i \phi_j - \partial_j \phi_i = 2(d\phi)_{ij}. \quad (12.4.4)$$

Мы воспользовались определением ковариантной производной $D_i \phi_j$ и тем фактом, что в римановой геометрии аффинная связность Γ_{ij}^k симметрична по нижним индексам i и j . Эквивалентность выражений (12.4.3) и (12.4.2) для p -форм при $p > 1$ доказывается аналогично, хотя при этом приходится проследить за большим количеством слагаемых. Эквивалентность выражений (12.4.3) и (12.4.2), не зависящая от выбора метрики в определении (12.4.3), означает, что оператор d в выражении (12.4.2) является общековариантным оператором, несмотря на то что он определен без выбора метрики. Это означает, что он зависит только от многообразия M как топологического (или гладкого) многообразия. Только дифференциальные формы являются такими полями, на которых можно определить разумный дифференциальный оператор (а именно d), не зависящий от выбора метрики, — в этом причина их важной роли в математике. Любое свойство многообразия M , которое можно сформулировать только в терминах свойств оператора d , автоматически является топологическим инвариантом в силу только что установленных фактов. Другие дифференциальные операторы, изучаемые в математике и физике (такие как, например, оператор Дирака), зависят от выбора метрики, и извлечь из них топологические

инварианты (такие как индекс Дирака, который мы исследуем в гл. 14) можно только с помощью весьма специальных рассуждений.

Далее, дифференциальная форма ϕ называется замкнутой, если $d\phi = 0$. Она называется точной, если $\phi = d\alpha$ для некоторой дифференциальной формы α . Разумеется, если ϕ — форма степени k (k -форма), то α должна быть формой степени $k-1$. Мы определили оператор d таким образом, что он может действовать на дифференциальные формы любой степени, так что для данной p -формы форма $d\phi$ — это $(p+1)$ -форма, к которой снова можно применить оператор d . Фундаментальный факт заключается в том, что для любой формы ϕ выполняется условие $d(d\phi) = 0$. Этот фундаментальный факт можно выразить равенством $d^2 = 0$ или утверждением, что каждая точная форма замкнута. Проверить равенство $d^2 = 0$ можно непосредственно из определения (12.4.2), нужно лишь внимательно проследить за различными членами (полезно сначала поупражняться с формами небольшой степени).

Используя равенство $d^2 = 0$, легко видеть, что $(p+1)$ -форма

$$C = dB \quad (12.4.5)$$

инвариантна относительно (12.4.1); более того, она удовлетворяет тождеству Бианки $dC = 0$. Частный случай всего этого хорошо знаком из теории Максвелла. Если B оказывается 1-формой, его можно рассматривать как абелево калибровочное поле, и в таком случае (12.4.1) — стандартный закон калибровочных преобразований, а Λ в этом случае есть 0-форма. Более того, в этом случае (12.4.5) представляет собой (с точностью до множителя 2) стандартное определение $C_{ij} = (\partial_i B_j - \partial_j B_i)/2$ калибровочно-инвариантной напряженности поля, а равенство $dC = 0$ эквивалентно стандартному тождеству Бианки $\partial_i C_{jk} + \partial_j C_{ki} - \partial_k C_{ij} = 0$.

Для тождества Бианки, которое мы только что установили, имеется в некотором смысле обратное утверждение. Любая дифференциальная форма C , удовлетворяющая условию $dC = 0$, локально может быть представлена в виде $C = dB$. Для произвольных p это утверждение известно как лемма Пуанкаре, для малых p оно знакомо физикам из теории электромагнетизма. В теории электромагнетизма хорошо известно, что из уравнения Максвелла $dF = 0$ (где F — 2-форма, отвечающая напряженности электромагнитного поля) следует существование такой 1-формы A (вектор-потенциал), что $F = dA$. Точнее существование такой 1-формы гарантировано только локально, глобально же могут возникнуть затруднения. Прототипом ситуации, когда $dF = 0$, но вектор-потенциал не может быть определен всюду

без появления сингулярностей, является магнитный монополю Дирака. Общей задаче обращения тождества Бианки (можно ли p -форму C , удовлетворяющую условию $dC = 0$, глобально представить в виде $C = dB$) мы ниже уделяем значительное внимание, причина чего вскоре станет ясна.

Если найдена калибровочно-инвариантная напряженность C , нетрудно сформулировать обобщение действия Максвелла. Оно имеет вид

$$S = \frac{p+1}{2p!} \int_M g^{i_1 j_1} \dots g^{i_{p+1} j_{p+1}} C_{i_1 \dots i_{p+1}} C_{j_1 \dots j_{p+1}} = \frac{\langle C, C \rangle}{2(p!)^2}, \quad (12.4.6)$$

где g — метрический тензор на многообразии M , а внутреннее произведение определено соотношением $\langle \phi, \psi \rangle = \int \phi \wedge * \psi$. В действительности это минимальное обобщение действия Максвелла. Другое обобщение встретится в следующей главе.

Теперь как для целей настоящего рассмотрения, так и для целей гл. 14 очень полезно понять, как устроены нулевые моды. Под нулевыми модами мы подразумеваем те моды, которые, согласно (12.4.6), имеют нулевое действие, но являются физическими модами, неустранимыми посредством калибровочного преобразования (12.4.1). В гл. 14 мы обнаружим, что при компактификации до четырех измерений теории, определенной исходно в большем числе измерений, нулевые моды проявляются в четырех измерениях в качестве безмассовых частиц. Математические методы, которые будут развиты для изучения нулевых мод, помогут нам также определить простейшие топологические инварианты, ассоциированные с векторными расслоениями, а именно характеристические классы.

Так как нулевая мода B должна иметь нулевое действие, из (12.4.6) очевидно, что она должна удовлетворять условию $dB = 0$. В то же время, так как мы считаем, что физическая нулевая мода — это то, что нельзя устранить калибровочным преобразованием, то имеем $B \neq d\Lambda$ для любой $(p-1)$ -формы Λ . Таким образом, число линейно независимых нулевых мод p -форм — это число линейно независимых p -форм, которые замкнуты, но не точны. Это число называется p -м числом Бетти b_p . Мы определили число b_p исключительно исходя из свойств оператора d , который, как мы знаем, не зависит от метрики на M , так что целые числа b_p являются топологическими инвариантами. Это один из основных и легче всего вычисляемых топологических инвариантов многообразия M .

Эквивалентный способ сформулировать определение числа b_p состоит в следующем. Пусть C_p — векторное пространство,

состоящее из всех замкнутых p -форм, т. е. p -форм α , удовлетворяющих условию $d\alpha = 0$. Пусть D_p — векторное пространство, состоящее из всех точных p -форм, т. е. таких p -форм α , что $\alpha = d\beta$ для некоторой $(p-1)$ -формы β . Тогда D_p — подпространство в пространстве C_p , так что можно определить векторное фактор-пространство

$$H^p(M; R) = C_p / D_p. \quad (12.4.7)$$

(Для данных векторного пространства C и его подпространства D фактор-пространство $H = C/D$ определяется как пространство, состоящее из классов эквивалентности элементов C , когда два элемента c и c' из C считаются эквивалентными, если $c - c' \in D$.) Пространство $H^p(M; R)$ называется p -й группой когомологий многообразия M с вещественными коэффициентами¹⁾. (Групповая структура в $H^p(M; R)$ — это просто структура аддитивной группы в $H^p(M; R)$ как векторном пространстве.) Связь между пространствами H^p и числами Бетти b_p очень проста: b_p есть просто размерность векторного пространства $H^p(M; R)$.

Мы не можем здесь дать полное описание чисел Бетти и групп когомологий, но еще задержимся на этой теме, чтобы дать читателю некоторое представление об этом предмете. p -Форму α можно проинтегрировать по любому p -мерному подмногообразию T в M . Для небольших p это хорошо известно физикам. Например, если $p = 1$, то мы имеем дело с 1-формой, которая представляет собой абелево калибровочное поле A . Его можно проинтегрировать вдоль любой кривой γ и получить $I_\gamma = \int_\gamma A_i dx^i$. Если $p = 2$, то мы имеем дело с 2-формой, подобной напряженности электромагнитного поля, которую можно проинтегрировать по любой двумерной поверхности S и получить «магнитный поток через S »: $I_S = \int_S F_{ij} d\Sigma^{ij}$, где $d\Sigma^{ij}$ — элемент площади поверхности S . Это обобщается на случай интеграла от p -формы α по произвольному p -мерному подмногообразию T с границей или без нее:

$$I_T = \int_T \alpha_{i_1 \dots i_p} d\Sigma^{i_1 \dots i_p}. \quad (12.4.8)$$

¹⁾ Упоминание о вещественных коэффициентах отражает тот факт, что на самом деле H^p имеет важное обобщение — классы когомологий с целыми коэффициентами. Это понятие, к сожалению, выходит за рамки настоящего рассмотрения, хотя оно и играет значительную роль в десятимерной физике.

Здесь $d\Sigma^{i_1 \dots i_p}$ — элемент объема на T . Ниже мы будем пользоваться сокращенной записью выражения (12.4.8)

$$I_T = \int_T \alpha. \quad (12.4.9)$$

Интегралы от дифференциальных форм подчиняются одной важной теореме, известной как теорема Стокса. Пусть W — произвольное компактное подмногообразие в M , ∂W — его граница. Пусть, далее, размерность W равна $p+1$ и β — некоторая p -форма. Тогда теорема Стокса утверждает, что

$$\int_W d\beta = \int_{\partial W} \beta. \quad (12.4.10)$$

Для небольших p это хорошо знакомо по теории электромагнетизма.

Теперь мы обсудим связь между группами когомологий и интегралами от дифференциальных форм по замкнутым подмногообразиям. Под замкнутым подмногообразием мы понимаем просто компактное подмногообразие без границы. Пусть α — замкнутая p -форма, а T — замкнутое подмногообразие в M размерности p . Замкнутая p -форма α является элементом пространства, которое мы обозначили C_p , так что ее класс эквивалентности в C_p/D_p определяет элемент в $H^p(M; R)$, называемый классом когомологий формы α . Две замкнутые формы α и α' определяют один и тот же класс когомологий, если $\alpha - \alpha' = d\beta$ для некоторой $(p-1)$ -формы β . В таком случае

$$\int_T \alpha - \int_T \alpha' = \int_T d\beta = \int_{\partial T} \beta = 0, \quad (12.4.11)$$

так как $\partial T = 0$. Таким образом, интеграл от замкнутой формы α по замкнутому многообразию T зависит только от класса когомологий формы α . В частности, если класс когомологий формы α равен нулю, другими словами, если $\alpha = d\beta$ для некоторой формы β , то $\int_T \alpha = 0$ для всех замкнутых подмногообразий T . Знаменитая теорема де Рама устанавливает обратное утверждение. Если класс когомологий α не равен нулю, то всегда найдется какое-нибудь замкнутое подмногообразие T , для которого $\int_T \alpha \neq 0$.

Если форма α такова, что $\int_T \alpha$ есть целое число для всех T , то говорят, что класс когомологий α целочисленный. Такие классы дают связь между когомологиями де Рама, рассматри-

ваемыми здесь, и более сложными когомологиями с целыми коэффициентами, которые мы, к сожалению, не сможем изучить.

Фиксируем теперь замкнутую p -форму α , класс когомологий которой может быть нулевым или ненулевым, и рассмотрим $I(T) = \int_T \alpha$ как функционал от замкнутого многообразия T . Если многообразие T можно непрерывно деформировать в T' , то $I(T) = I(T')$, так как в силу теоремы Стокса

$$\int_T \alpha - \int_{T'} \alpha = \int_{\partial W} \alpha = \int_W d\alpha = 0. \quad (12.4.12)$$

Здесь W , изображенное на рис. 12.8, — многообразие, соединяющее T и T' , так что $\partial W = T - T'$ (знак минус означает, что T и T' входят в ∂W с противоположными ориентациями).

Очевидно, что такое многообразие W существует всегда, когда T можно деформировать в T' . Рассмотренное свойство является частным случаем некоторого много более сильного ограничения на $I(T)$. Пусть T — любое замкнутое p -мерное подмногообразие, которое является границей некоторого $(p+1)$ -мерного подмногообразия W в M , так что $\partial W = T$. Тогда

$$I(T) = \int_T \alpha = \int_{\partial W} \alpha = \int_W d\alpha = 0. \quad (12.4.13)$$

Таким образом, если T — граница, то интеграл по T от любой замкнутой формы равен нулю. Теорема де Рама снова дает своего рода обратное утверждение. Если замкнутое подмногообразие T в M (и любое его кратное) не является границей никакого подмногообразия в M на единицу большей размерности, то, согласно теореме де Рама, всегда найдется некоторая замкнутая дифференциальная форма α на M , такая что $\int_T \alpha \neq 0$. Замкнутое подмногообразие T в пространстве-времени M называют топологически нетривиальным, если T не является границей какого-либо подмногообразия W в M .

Собирая эти утверждения вместе, получаем, что p -е число Бетти b_p многообразия M равно числу независимых замкнутых p -мерных поверхностей в M , которые топологически нетривиальны.

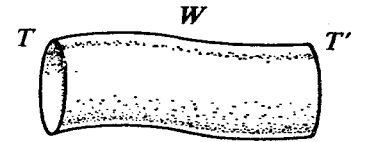


Рис. 12.8. Многообразие W соединяет «пленкой» два многообразия T и T' , которые могут быть деформированы друг в друга.

Существует и другой способ сформулировать эти идеи, который иногда оказывается полезным. Пусть α — p -форма, которая замкнута, но не точна; это означает, что $d\alpha = 0$, но $\alpha \neq d\beta$ для всех $(p-1)$ -форм β . В силу последнего предположения невозможно так выбрать β , чтобы величина

$$W = \langle \alpha - d\beta, \alpha - d\beta \rangle \quad (12.4.14)$$

обратилась в нуль. Хотя мы и не можем обратить в нуль W , но можно так выбрать β , чтобы положительно определенная величина W стала настолько малой, насколько это возможно. Вариационное уравнение, отвечающее минимизации W по β , имеет вид $d^*(\alpha - d\beta) = 0$, где d^* — оператор, сопряженный оператору d относительно внутреннего произведения \langle, \rangle . Точнее, как нетрудно видеть, d^* есть оператор, который, действуя на произвольную p -форму ψ , дает $(p-1)$ -форму $d^*\psi$, определенную соотношением

$$(d^*\psi)_{i_1 \dots i_{p-1}} = -p D^{i_0} \psi_{i_0 \dots i_{p-1}}. \quad (12.4.15)$$

Так как $d^2 = 0$, квадрат сопряженного оператора d^{*2} также должен быть равен нулю, что легко проверить, воспользовавшись соотношением (12.4.15).

Если положить $\gamma = \alpha - d\beta$, то те факты, которые мы только что узнали, можно суммировать утверждением, что любой p -мерный класс когомологий (например, класс произвольной замкнутой p -формы α) можно представить дифференциальной формой γ , удовлетворяющей уравнениям

$$d\gamma = d^*\gamma = 0. \quad (12.4.16)$$

Но, поскольку оператор d отображает p -формы в $(p+1)$ -формы, сопряженный ему оператор d^* отображает p -формы в $(p-1)$ -формы, так что оператор

$$\Delta = dd^* + d^*d \quad (12.4.17)$$

отображает p -формы в p -формы. Оператор Δ называют лапласианом Ходжа — де Рама, действующим на дифференциальные формы. (Читатель может проверить, что, действуя на 0-формы, являющиеся обычными функциями, оператор Δ представляет собой обычный лапласиан.) Решение уравнения $\Delta\alpha = 0$ называют гармонической дифференциальной формой. Очевидно, что любая форма γ , удовлетворяющая уравнениям (12.4.16), является гармонической; таким образом, из того, что каждый класс когомологий можно представить решением уравнений (12.4.16), следует, что каждый класс когомологий можно представить гармонической дифференциальной формой.

Обратное также верно: каждая ненулевая гармоническая форма представляет ненулевой класс когомологий. Чтобы это доказать, предположим сначала, что γ удовлетворяет уравнению $\Delta\gamma = 0$. Тогда $0 = \langle \gamma, (dd^* + d^*d)\gamma \rangle = \langle d\gamma, d\gamma \rangle + \langle d^*\gamma, d^*\gamma \rangle$. Поскольку \langle, \rangle — положительно определенное внутреннее произведение на дифференциальных формах, отсюда следует, что γ удовлетворяет уравнениям (12.4.16). В частности, это означает, что γ замкнута и поэтому является представителем некоторого класса когомологий. Чтобы убедиться, что этот класс когомологий не равен нулю, предположим обратное, т. е. что $\gamma = d\beta$ для некоторой формы β . Тогда, так как γ удовлетворяет уравнениям (12.4.16), имеем $0 = \langle d^*\gamma, \beta \rangle = \langle \gamma, d\beta \rangle = \langle \gamma, \gamma \rangle$, откуда следует, что $\gamma = 0$. Поэтому класс когомологий гармонической дифференциальной формы γ может равняться нулю только в том случае, если сама форма γ равна нулю. Это завершает доказательство утверждения, что гармонические p -формы находятся во взаимно однозначном соответствии с p -мерными классами когомологий. В частности, p -е число Бетти b_p равно числу линейно независимых гармонических p -форм.

Часто бывает удобен другой способ сформулировать этот результат. Так как $d^2 = (d^*)^2 = 0$, то $\Delta = S^2$, где $S = d + d^*$. Поскольку S — эрмитов оператор, он имеет такие же нулевые моды, как и его квадрат Δ . В частности, нулевые моды оператора S можно выбрать так, чтобы они были дифференциальными формами определенной степени (так как это, очевидно, можно сделать для оператора Δ , отображающего p -формы в p -формы); тогда p -е число Бетти, или число гармонических p -форм, — это то же, что число независимых p -форм, аннулируемых оператором S . Как эрмитов оператор первого порядка S напоминает оператор Дирака. Эта аналогия представлена более точно в гл. 14.

Опишем теперь операцию, называемую внешним произведением, которая очень важна для изучения дифференциальных форм. Из двух данных тензорных полей A и B на многообразии M можно получить новые тензоры, перемножая их и различными способами свертывая индексы. В случае дифференциальных форм есть один особенно важный закон умножения, который пригоден для изучения топологических свойств многообразия M , так как в нем не используется метрический тензор. Если A и B — p -форма и q -форма соответственно, то внешнее произведение $A \wedge B$ мы определим как $(p+q)$ -форму вида

$$(A \wedge B)_{i_1 \dots i_{p+q}} = \frac{p!q!}{(p+q)!} \{A_{i_1 \dots i_p} B_{i_{p+1} \dots i_{p+q}} \pm \text{перестановки}\}, \quad (12.4.18)$$

где в правой части производится суммирование по перестановкам, чтобы получилось выражение, полностью антисимметричное по всем индексам $p+q$. Когда недоразумение маловероятно, мы будем обозначать произведение $A \wedge B$ просто как AB . Внешнее произведение удовлетворяет соотношению

$$A \wedge B = (-1)^{pq} B \wedge A, \quad (12.4.19)$$

что можно проверить прямо из определения (12.4.18); единственным слегка нетривиальным местом будет только знак $(-1)^{pq}$, возникающий из-за полной антисимметричности в определении внешнего произведения. Внешнее произведение и внешняя производная подчиняются соотношению

$$d(A \wedge B) = (dA) \wedge B + (-1)^p A \wedge (dB), \quad (12.4.20)$$

что также можно видеть из определений. Важное следствие равенства (12.4.20) состоит в том, что если формы A и B замкнуты, то замкнута и форма $A \wedge B$. Если A и B замкнуты, они определяют соответственно p -мерный и q -мерный классы когомологий, а их произведение $A \wedge B$, также замкнутая форма, определяет $(p+q)$ -мерный класс когомологий. Более того, класс когомологий формы $A \wedge B$ зависит только от когомологических классов форм A и B . Действительно, если заменить A дифференциальной формой $\tilde{A} = A + d\alpha$ того же класса когомологий, то $\tilde{A} \wedge B = A \wedge B + (d\alpha) \wedge B = A \wedge B + d(\alpha \wedge B)$, а значит (так как $d(\alpha \wedge B)$ отвечает нулю в когомологии), формы $A \wedge B$ и $\tilde{A} \wedge B$ определяют один и тот же класс когомологий. Таким образом, внешнее произведение дает корректно определенный закон умножения на когомологических классах. Для данных замкнутых p -формы и q -формы, представляющих элементы из $H^p(M; R)$ и $H^q(M; R)$ соответственно, их внешнее произведение определяет некоторый элемент из $H^{p+q}(M; R)$. Этот закон перемножения когомологических классов определяет структуру, называемую кольцом когомологий многообразия M , и содержит намного больше информации, чем отдельные группы когомологий. Например, как мы увидим в гл. 16, при подходящих условиях группы когомологий, точнее их размерности, т. е. числа Бетти, определяют число безмассовых фермионов, в то время как кольцо когомологий определяет юкавские взаимодействия.

Так как числа Бетти играют важную роль во многих аспектах десятимерной физики, остановимся на обсуждении нескольких их основных свойств. Простейшее свойство состоит в том, что нулевое число Бетти b_0 всегда есть единица. Это легко показать, заметив, что 0-форма — это просто обычная функция ϕ ,

а замкнутая 0-форма ϕ , удовлетворяющая условию $d\phi = 0$, должна быть постоянной функцией, скажем $\phi = 1$. Эта 0-форма замкнута, но не точна. (В случае 0-формы равенство $\phi = d\alpha$ означало бы, что α должна быть (-1) -формой!) Значит, с точностью до нормировки существует ровно одна замкнутая, но не точная 0-форма, что и дает $b_0 = 1$ ¹⁾. Другое фундаментальное свойство чисел Бетти состоит в том, что на компактном ориентируемом многообразии M размерности n выполняется соотношение $b_p = b_{n-p}$ для любого p . Это легко доказать, отождествляя числа Бетти b_p с числами нулевых мод лапласиана Δ , действующего на p -формах. Пусть $\varepsilon_{i_1 \dots i_n}$ — тензор Леви-Чивиты многообразия M . Это полностью антисимметричный тензор, который помимо метрического тензора является единственным ковариантно постоянным тензором (тензорным полем) на римановом многообразии общего вида. Имеется естественный оператор $*$, называемый оператором дуальности Пуанкаре²⁾, который отображает p -формы в $(n-p)$ -формы. Этот оператор определяется условием, что для произвольной p -формы α $(n-p)$ -форма $*\alpha$ имеет вид

$$(*\alpha)_{i_1 \dots i_{n-p}} = \varepsilon_{i_1 \dots i_{n-p} i_{n-p+1} \dots i_n} \alpha_{i_{n-p+1} \dots i_n} / p! \quad (12.4.21)$$

Он удовлетворяет равенству $(*^2) = (-1)^{p(n-p)}$, а также связан с определенными выше операторами d и d^* соотношением $d^* = (-1)^{np+n+1} * d *$. Эти соотношения хоть и нетривиальны, но легко могут быть проверены. Из указанных свойств следует

$$\begin{aligned} * \Delta &= *(dd^* + d^*d) = (-1)^{np+1} * ((-1)^n d^* d^* + * d^* d) = \\ &= (-1)^{np+1} ((-1)^n * d^* d + d^* d^*) * = \\ &= (dd^* + d^*d) * = \Delta *, \quad (12.4.22) \end{aligned}$$

так что оператор $*$ коммутирует с лапласианом Δ . Поэтому оператор $*$ отображает гармонические p -формы в гармонические же $(n-p)$ -формы и наоборот. Это и обеспечивает тот факт, что $b_p = b_{n-p}$ на компактном ориентируемом многообразии M размерности n . Одним из следствий этого является утверждение, что на таком многообразии $b_n = 1$ ³⁾.

Еще одно фундаментальное свойство чисел Бетти относится к их поведению, когда рассматривается произведение много-

¹⁾ Здесь подразумевается, что многообразии M связно. Если же многообразии состоит из нескольких отдельных связанных кусков, нулевое число Бетти b_0 равно, очевидно, числу этих кусков. — *Прим. перев.*

²⁾ Его часто называют также оператором Ходжа. — *Прим. перев.*

³⁾ Точнее $b_n = b_0$, ср. примечание 1 выше на этой странице. — *Прим. перев.*

образий. Пусть Z_1 и Z_2 — два компактных многообразия, и пусть $Z = Z_1 \times Z_2$. Пусть $b_p(Z_1)$, $b_p(Z_2)$ и $b_p(Z)$ — p -е числа Бетти многообразий Z_1 , Z_2 и Z соответственно. Тогда формула Кюннета утверждает, что

$$b_p(Z) = \sum_{k=0}^p b_k(Z_1) b_{p-k}(Z_2). \quad (12.4.23)$$

Доказательство простое. Пусть α — гармоническая k -форма на Z_1 , а β — гармоническая $(p-k)$ -форма на Z_2 . Тогда $\alpha \wedge \beta$ — гармоническая p -форма на Z , которая всегда отлична от нуля. (Эта конструкция при различных значениях k и при всевозможных выборах форм α и β дает достаточно много гармонических p -форм на Z , чтобы доказать, что $b_p(Z)$ по крайней мере не меньше, чем правая часть (12.4.23).) Чтобы продемонстрировать, что в (12.4.23) имеет место точное равенство, а не неравенство, мы должны показать, что внешние произведения $\alpha \wedge \beta$, где α и β определены на Z_1 и Z_2 соответственно, дают базис в пространстве гармонических форм на Z . Это немедленно следует из того факта, что лапласианы на Z , Z_1 и Z_2 связаны соотношением $\Delta_Z = \Delta_{Z_1} + \Delta_{Z_2}$. Этот факт опять нетривиален, но доказать его не трудно¹⁾. Каждый из этих операторов неотрицателен (а Δ_{Z_1} и Δ_{Z_2} коммутируют между собой), так что нулевая мода оператора Δ_Z должна одновременно быть нулевой модой операторов Δ_{Z_1} и Δ_{Z_2} . Следовательно, гармоническая дифференциальная форма на Z есть всегда линейная комбинация выражений вида $\alpha \wedge \beta$, где α и β — гармонические формы на Z_1 и Z_2 соответственно.

Рассмотрим кратко числа Бетти для некоторых простых пространств. Одно общее утверждение состоит в том, что для компактного ориентируемого многообразия размерности n выполняется условие $b_0 = b_n = 1$. Если ограничиться компактными ориентируемыми многообразиями, то сфера S^n — единственное пространство, для которого все остальные числа Бетти равны нулю. Что числа Бетти сферы S^n , кроме b_0 и b_n , равны нулю, можно доказать, исследовав лапласиан. Кроме того, это связано с другим определением чисел Бетти, которое было намечено выше. Число Бетти b_p — это число независимых p -мерных подмногообразий Y , не являющихся топологически тривиальными в том смысле, что Y не есть граница R ни для какого $(p+1)$ -мерного подмногообразия R . На сфере S^n каждое p -мерное подмногообразие при $1 \leq p \leq n-1$ топологически тривиально. (Иногда это выражают высказыванием, что

¹⁾ Читателю, желающему проверить это утверждение, рекомендуется рассмотреть сначала случай, когда Δ действует на 0-формах.

«нельзя заарканить сферу», рис. 12.9.) Таким образом, b_p равно нулю при $1 \leq p \leq n-1$. (Но точка на S_n представляет собой нуль-мерное подмногообразие, не являющееся границей, а значит, $b_0 = 1$; сама сфера S^n есть n -мерное подмногообразие, не являющееся границей, так что $b_n = 1$.) Числа Бетти для произведения сфер можно получить из формулы Кюннета. Например, для обычного двумерного тора $T = S^1 \times S^1$ числа Бетти есть $b_0 = 1$, $b_1 = 2$, $b_2 = 1$. Классическим результатом является обобщение этого факта на случай компактной римановой поверхности (или мирового листа струны!) с g ручками: $b_0 = 1$, $b_1 = 2g$, $b_2 = 1$. Значение числа b_1 есть отражение того факта, с которым мы столкнулись при обсуждении спинорных структур на римановой поверхности рода g : на такой поверхности имеется $2g$ независимых нестягиваемых замкнутых кривых. В действительности существуют вполне практические методы, позволяющие вычислить числа Бетти любого разумного пространства, но в этой книге мы не сможем их изучить.

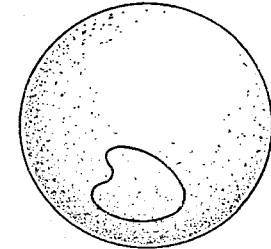


Рис. 12.9. Петля на двумерной сфере всегда является топологически тривиальной. В более общем случае: p -мерная сфера S^p на S^n при $1 \leq p < n$ всегда топологически тривиальна.

В заключение этого введения в теорию дифференциальных форм приведем очень удобные, но несколько более абстрактные обозначения, которых мы до сих пор предпочитали избегать. Пусть M — n -мерное многообразие с локальными координатами x^i , $i = 1, \dots, n$. Хотя эта точка зрения обычно не используется в физической литературе, но «координаты» x^i на многообразии можно рассматривать как вещественнозначные функции на нем, или, другими словами, как 0-формы. Поскольку x^i — 0-формы, их внешние производные являются 1-формами dx^i . Так как внешнее произведение 1-форм антисимметрично, имеем $dx^i \wedge dx^j = -dx^j \wedge dx^i$, или просто $dx^i dx^j = -dx^j dx^i$ (если подразумевается внешнее произведение). Формы dx^i образуют полный базис 1-форм на M (по крайней мере локально), а это означает, что любую 1-форму A можно представить в виде

$$A = \sum_{i=1}^n A_i(x^j) dx^i, \quad (12.4.24)$$

где скалярные функции $A_i(x^j)$ представляют собой «компоненты» A в системе координат x^i . Если считать, что A — абелево

калибровочное поле, то напряженностью является

$$F = dA = \frac{1}{2} (\partial_i A_j - \partial_j A_i) dx^i dx^j, \quad (12.4.25)$$

или просто $F = \frac{1}{2} F_{ij} dx^i dx^j$. Заметим, что мы могли бы также написать $F = dx^i dx^j \partial_i A_j$, или $F = dx^i \partial_i A$, если подразумевается, что производная ∂_i действует только на компоненты A_j , но не на фундаментальные 1-формы dx^j в разложении $A = A_j dx^j$. В более общем виде если ϕ — дифференциальная форма произвольной степени, то в том же смысле имеем $d\phi = dx^i \partial_i \phi$.

12.5. Характеристические классы

Теперь в нашем распоряжении имеются необходимые средства, чтобы дать описание простейших топологических инвариантов, характеризующих топологически нетривиальные калибровочные поля. Это характеристические классы. Рассмотрим сначала случай $U(1)$ -калибровочного поля. Как и в разд. 12.3.2, покроем наше многообразие M открытыми множествами $O_{(\alpha)}$. В каждом открытом множестве $O_{(\alpha)}$ калибровочное поле — это 1-форма $A_{(\alpha)}$. В этом случае уравнение (12.3.5) упрощается (мы полагаем $g_{(\alpha\beta)} = \exp(i\phi_{(\alpha\beta)})$ и переопределяем калибровочное поле, поглощая множитель i , так, чтобы оно было вещественным):

$$A_{(\beta)} = A_{(\alpha)} + d\phi_{(\alpha\beta)}. \quad (12.5.1)$$

Здесь $\phi_{(\alpha\beta)}$ — гладкие функции на $O_{(\alpha)} \cap O_{(\beta)}$.

Калибровочно-инвариантная напряженность поля есть $F = dA_{(\alpha)}$. Напряженность является 2-формой, которая в силу условия (12.5.1) (и $d^2 = 0$) не зависит от α , поэтому она однозначно определена на всем M . Более того, тождество Бианки $dF = 0$ означает, что F замкнута и, следовательно, определяет элемент второй группы когомологий $H^2(M; R)$ многообразия M с вещественными коэффициентами. Класс когомологий формы $F/2\pi$ в $H^2(M; R)$ называется первым классом Черна рассматриваемого векторного $U(1)$ -расслоения. (Векторное $U(1)$ -расслоение, т. е. векторное расслоение, калибровочная группа которого есть $U(1)$, часто называют комплексным линейным расслоением.) В топологически тривиальной ситуации имеем $F = dA$ для одной и той же определенной всюду 1-формы A . В этом случае (согласно определению группы когомологий) класс F в H^2 равен нулю, и первый класс Черна равен нулю.

В топологически нетривиальной ситуации калибровочное поле на самом деле представляет собой семейство калибровочных полей $A_{(\alpha)}$, удовлетворяющих соотношениям (12.5.1). Два ка-

либровочных поля, или, точнее, два семейства $A_{(\alpha)}$ и $\tilde{A}_{(\alpha)}$ принадлежат одному и тому же топологическому классу, если они удовлетворяют соотношениям (12.5.1) с одинаковыми переходными функциями $\phi_{(\alpha\beta)}$ ¹⁾:

$$\begin{aligned} A_{(\alpha)} &= A_{(\beta)} + d\phi_{(\alpha\beta)}, \\ \tilde{A}_{(\alpha)} &= \tilde{A}_{(\beta)} + d\phi_{(\alpha\beta)}. \end{aligned} \quad (12.5.2)$$

Взяв разность этих уравнений, замечаем, что $A_{(\alpha)} - \tilde{A}_{(\alpha)}$ не зависит от α и, таким образом, является 1-формой, определенной всюду. Пусть B обозначает эту 1-форму. Имеем также соответствующие напряженности $F = dA$ и $\tilde{F} = d\tilde{A}$, а также их разность $F - \tilde{F} = dB$. Важный момент здесь в том, что так как $A_{(\alpha)}$ и $\tilde{A}_{(\alpha)}$ не являются всюду однозначно определенными (а меняются при переходе от $O_{(\beta)}$ к $O_{(\alpha)}$ согласно (12.5.1)), то равенства $F = dA$ и $\tilde{F} = d\tilde{A}$ не означают, что класс когомологий формы F или формы \tilde{F} равен нулю. Но так как B всюду однозначно определена, то равенство $F - \tilde{F} = dB$ означает, что F и \tilde{F} принадлежат одному классу когомологий. Другими словами, первый класс Черна является топологическим инвариантом.

Если первый класс Черна не равен нулю, т. е. F не равно нулю в $H^2(M; R)$, то в силу теорем де Рама, рассмотренных в разд. 12.4, всегда найдется замкнутое двумерное многообразие T в пространстве-времени, для которого

$$I(T) = \frac{1}{2\pi} \int_T F \neq 0. \quad (12.5.3)$$

В этом случае условие квантования магнитного заряда Дирака, примененное к T , гарантирует, что $I(T)$ — целое число, так что класс когомологий формы $F/2\pi$ всегда является целочисленным элементом в $H^2(M; R)$. Первый класс Черна можно рассматривать как такое правило, по которому каждому двумерному замкнутому многообразию T сопоставляется целое число $I(T)$. Целые числа $I(T)$ не могут изменяться при непрерывных деформациях калибровочного поля. Последнее замечание — еще один способ понять топологическую инвариантность первого класса Черна.

¹⁾ Точнее говоря, достаточно потребовать, чтобы переходные функции $\tilde{g}_{(\alpha\beta)}$ для $\tilde{A}_{(\alpha)}$ можно было продеформировать непрерывным образом в переходные функции $g_{(\alpha\beta)}$ для $A_{(\alpha)}$, не нарушая в процессе деформации условия самосогласованности (12.3.3). — Прим. перев.

12.5.1. Неабелев случай

Теперь мы хотим обобщить понятие классов Черна на случай простой неабелевой калибровочной группы G . В этом случае требуется немного более сложное рассмотрение. Калибровочное поле $A^a_{(\alpha)}$ несет дополнительный индекс a , отвечающий алгебре Ли группы G . Это поле можно рассматривать как 1-форму со значениями в этой алгебре Ли. Напряженность калибровочного поля теперь имеет вид $F^a = dA^a + f^a_{bc} A^b \wedge A^c$, где f^a_{bc} — структурные константы алгебры Ли группы G . Здесь F^a можно определить как 2-форму со значениями в алгебре Ли. Так как F^a имеет индекс, отвечающий алгебре Ли, напряженность является не калибровочно-инвариантной, а лишь калибровочно-ковариантной. Тожество Бианки не означает, что F^a замкнута; вместо этого выполняется условие

$$0 = dF^a + f^a_{bc} A^b \wedge F^c. \quad (12.5.4)$$

Так как F^a не является замкнутой формой, то нет и аналога первого класса Черна. Легко показать, однако, что из (12.5.4) следует, что 4-форма

$$\Omega = \sum_{a,b} \delta_{ab} F^a \wedge F^b \quad (12.5.5)$$

замкнута, $d\Omega = 0$. Если нормировать генераторы G так, чтобы $\text{tr } T^a T^b = \delta^{ab}$, то (12.5.5) будет эквивалентно формуле $\Omega = \sum_{a,b} F^a \wedge F^b \cdot \text{tr } T^a T^b$. Вводя матричнозначные формы

$$A = \sum T^a A^a, \quad F = \sum T^a F^a, \quad (12.5.6)$$

получаем сокращенную запись

$$\Omega = \text{tr } F \wedge F. \quad (12.5.7)$$

След в формуле (12.5.7) берется по индексам T -матриц, которые явно не указываются. Так как $d\Omega = 0$, форма Ω определяет элемент из $H^4(M; R)$, известный как второй класс Черна в случае калибровочного поля с калибровочной группой $SU(N)$ или как первый класс Понтрягина в случае группы $SO(N)$.

Чтобы показать, что в топологически тривиальной ситуации второй класс Черна равен нулю, введем 3-форму Черна — Саймонса ω_3 , определяя ее в каждом множестве $O_{(\alpha)}$ по формуле

$$\omega_3(\alpha) = \text{tr } A_{(\alpha)} \wedge dA_{(\alpha)} + \frac{2}{3} \text{tr } A_{(\alpha)} \wedge A_{(\alpha)} \wedge A_{(\alpha)}. \quad (12.5.8)$$

Здесь, как и в выражении (12.5.7), $\text{tr } A \wedge A \wedge A$ — сокращенная запись для $A^a \wedge A^b \wedge A^c \cdot \text{tr } T^a T^b T^c$. Из определений сле-

дует, что $\text{tr } F \wedge F = d\omega_3$. В топологически тривиальной ситуации, когда ω_3 однозначно определена всюду, это означает, что второй класс Черна равен нулю. Чтобы показать, что второй класс Черна — топологический инвариант, предположим, что даны калибровочные поля A и \tilde{A} , принадлежащие одному топологическому классу. Другими словами, два семейства $A_{(\alpha)}$ и $\tilde{A}_{(\alpha)}$ удовлетворяют соотношениям (12.3.5) с одинаковыми переходными функциями $g_{(\alpha\beta)}$. Тогда для разности $\delta A = A - \tilde{A}$ неоднородный член в законе преобразования (12.3.5) сокращается, т. е. δA является калибровочно-ковариантной 1-формой подобно напряженностям F и \tilde{F} . Тогда 3-форма $Z = \text{tr } \delta A \wedge (F + \tilde{F}) - \frac{1}{3} \text{tr } \delta A \wedge \delta A \wedge \delta A$ однозначно определена, не зависит от α , и после некоторых вычислений можно показать, что $\text{tr } F \wedge F - \text{tr } \tilde{F} \wedge \tilde{F} = dZ$. Это означает, что классы когомологий форм $\text{tr } F \wedge F$ и $\text{tr } \tilde{F} \wedge \tilde{F}$ равны, или, другими словами, второй класс Черна одинаков для любых двух калибровочных полей из одного топологического класса.

Как и в абелевом случае, если $\Omega = \text{tr } F \wedge F$ не равно нулю в когомологиях, то всегда найдется четырехмерное многообразие T , для которого интеграл

$$I(T) = \frac{1}{8\pi^2} \int_T \text{tr } F \wedge F \quad (12.5.9)$$

не равен нулю. Интеграл $I(T)$ есть величина, которую в КХД называют «полным инстантонным числом» калибровочного поля на T , и, как известно из КХД, эта величина всегда есть целое число. Следовательно, форма $\text{tr } F \wedge F / 8\pi^2$ всегда определяет целочисленный элемент в $H^4(M; R)$. Второй класс Черна $SU(N)$ -калибровочного поля (или первый класс Понтрягина $SO(N)$ -калибровочного поля) можно рассматривать как правило, сопоставляющее каждому замкнутому четырехмерному многообразию T некоторое целое число, а именно полное число инстантонов на T . Целые числа $I(T)$ не могут измениться при непрерывных вариациях калибровочного поля. Как и в предыдущем обсуждении, это дает еще один способ понять, что второй класс Черна есть топологический инвариант.

Обобщение на высшие характеристические классы не вызывает существенных затруднений. Если $d_{a_1 \dots a_k}$ — любой симметричный инвариантный тензор ранга k в алгебре Ли группы G , то положим

$$\Omega_{2k} = \sum_{a_1 \dots a_k} F^{a_1} \wedge \dots \wedge F^{a_k} \cdot d_{a_1 \dots a_k}. \quad (12.5.10)$$

Из (12.5.4) следует, что $d\Omega_{2k} = 0$, когда $d_{a_1 \dots a_k}$ — инвариантный тензор. Таким образом, Ω_{2k} определяет элемент из $H^{2k}(M; R)$. Очень важен случай, когда $d_{a_1 \dots a_k} = \text{str } T_{a_1} \dots T_{a_k}$, где str — симметризованный след (симметризованный относительно всех перестановок индексов a_1, \dots, a_k). В случае $U(N)$ -калибровочного поля, если str — симметризованный след в фундаментальном представлении, класс когомологий формы Ω_{2k} называется k -м классом Черна (с вещественными коэффициентами). Если не может возникнуть недоразумений, мы будем записывать этот класс когомологий как $\Omega_{2k} = \text{tr } F^k$, подразумевая в правой части внешнее произведение. В случае калибровочной группы $U(N)$ все характеристические классы можно выразить через линейные комбинации внешних произведений форм Ω_{2k} . Каково аналогичное утверждение в случае группы $SO(N)$? Для группы $SO(N)$ симметризованный след нечетного числа генераторов в фундаментальном представлении равен нулю, так что Ω_{2k} (при сделанном выше выборе $d_{a_1 \dots a_k}$) не равно нулю только при $k = 2r$ для некоторого целого r . В этом случае класс когомологий формы Ω_{2k} называется r -м классом Понтрягина $SO(N)$ -расслоения.

Для группы $SO(2N)$ в частном случае $k = N$ помимо указанного выше имеется также следующий важный выбор коэффициентов $d_{a_1 \dots a_k}$. Для ортогональных групп присоединенное представление совпадает с представлением антисимметричных тензоров второго ранга, так что генераторы T^a удобно обозначить как $T^{ij} (= -T^{ji})$, $i, j = 1, \dots, 2N$, а напряженность поля Янга — Миллса — соответственно как $F^{ij} (= -F^{ji})$. Поэтому антисимметричный тензор $\varepsilon_{i_1 \dots i_{2N}}$ можно теперь рассматривать как инвариантный тензор ранга N в алгебре Ли группы $SO(2N)$. Используя этот тензор в (12.5.10), приходим к определению замкнутой $2N$ -формы

$$\eta = \frac{1}{N! (4\pi)^N} \varepsilon_{i_1 \dots i_{2N}} \cdot F^{i_1 i_2} \wedge \dots \wedge F^{i_{2N-1} i_{2N}}, \quad (12.5.11)$$

когомологический класс которой в $H^{2N}(M; R)$ называется классом Эйлера векторного расслоения. Топологическую инвариантность высших классов Черна и Понтрягина и класса Эйлера можно доказать с помощью методов, использовавшихся выше.

Характеристический класс $\text{tr } F \wedge F$ можно определить для любого векторного расслоения, структурная группа которого есть компактная группа Ли. Этот характеристический класс можно определить, например, для векторного расслоения с калибровочной группой E_8 . В случае группы E_8 следующий после $\text{tr } F \wedge F$ характеристический класс (помимо внешних произве-

дений форм $\text{tr } F \wedge F$) дается 16-формой $\text{tr } F^8$, так как после квадратичного инварианта, используемого в определении $\text{tr } F \wedge F$, следующий симметричный инвариант в алгебре Ли группы E_8 — это инвариант восьмой степени.

12.5.2. Характеристические классы многообразий

Если даны многообразие M и векторное расслоение V , то простейшими топологическими инвариантами являются рассмотренные характеристические классы. Их можно определить для любого расслоения V . Особенно интересен случай, когда V — касательное расслоение T многообразия M . Как объясняется в разд. 12.1 и 12.3, в этом случае естественное калибровочное поле — это спиновая связность ω_μ^{ab} , а калибровочно-ковариантная напряженность $R_{\mu\nu}{}^{ab}$ — это по существу тензор Римана. Для касательного расслоения дифференциальные формы $\text{tr } R \wedge R$ и в более общем виде $\text{tr } R^{2k}$ (в последнем выражении подразумевается внешнее произведение) замкнуты, а их классы когомологий являются топологическими инвариантами, не зависящими от выбора метрики на M . Класс когомологий формы $\text{tr } R^{2k}$, согласно нашему общему рассмотрению, — это k -й класс Понтрягина касательного расслоения на M ; обычно его называют просто k -м классом Понтрягина многообразия M . Подобным образом класс Эйлера (12.5.11) касательного расслоения обычно называют классом Эйлера многообразия M . Если размерность M равна $2n$, то класс Эйлера — $2n$ -форма, которую можно проинтегрировать по M и получить число

$$\chi(M) = \int_M \eta. \quad (12.5.12)$$

Это число называется эйлеровой характеристикой многообразия M ; оно используется в гл. 14. Если размерность многообразия M кратна четырем, то можно также получить некоторые числа (называемые характеристическими числами), проинтегрировав по M определенные характеристические классы или внешние произведения характеристических классов. Эти числа называются числами Понтрягина; для нас они менее полезны. Эйлер разумеется, первоначально определил эйлерову характеристику (в двух измерениях) более элементарным способом: понятия тензоров кривизны и дифференциальных форм были развиты столетиями позднее.

Одно из приложений обсуждаемых понятий в теории струн состоит в следующем. В $N = 1$ -супергравитации в десяти измерениях одним из полей супергравитационного мультиплета является 2-форма B . Обсуждаемые в гл. 13 соображения,

связанные с сокращением аномалий, показывают, что калибровочно-инвариантной напряженностью поля B является не $H_0 = dB$, а $H = dB + \omega_{3L} - \omega_{3Y}$. Здесь $\omega_{3Y} = \text{tr } A \wedge dA + \frac{2}{3} \text{tr } A \wedge A \wedge A$ — янг-миллсова 3-форма Черна — Саймонса (A — калибровочное поле), а $\omega_{3L} = \text{tg } \omega \wedge d\omega + \frac{2}{3} \text{tr } \omega \wedge \omega \wedge \omega$ — 3-форма Черна — Саймонса, построенная из спиновой связности. Они удовлетворяют соотношениям $d\omega_{3Y} = \text{tr } F \wedge F$, $d\omega_{3L} = \text{tr } R \wedge R$ соответственно. Тожество Бианки указывает, что $dH_0 = 0$, откуда следует, что H удовлетворяет более нетривиальному тождеству

$$dH = \text{tr } R \wedge R - \text{tr } F \wedge F. \quad (12.5.13)$$

Так как в когомологиях dH равно нулю, тождество (12.5.13) означает, что классы когомологий форм $\text{tr } F \wedge F$ и $\text{tr } R \wedge R$ равны друг другу. Когомологический класс $\text{tr } F \wedge F$ — это первый класс Понтрягина $SO(32)$ - или $E_8 \times E_8$ -расслоения V , а когомологический класс $\text{tr } R \wedge R$ — первый класс Понтрягина касательного расслоения T . Тожество (12.5.13) означает, что эти характеристические классы равны; это является важным ограничением на топологию, которая выбирается при компактификации.

12.5.3. Эйлерова характеристика римановой поверхности

В качестве другого интересного приложения этих результатов рассмотрим случай, когда M является многообразием размерности два — мировым листом Σ струны. В этом случае p -формы существуют только для $p \leq 2$, а единственный нетривиальный характеристический класс касательного расслоения — класс Эйлера. Интеграл от него по Σ дает эйлерову характеристику

$$\chi(\Sigma) = \frac{1}{8\pi} \int_{\Sigma} \varepsilon^{ijkl} R_{ijkl} e^{kl}. \quad (12.5.14)$$

С помощью двумерного тождества $\varepsilon^{ij} \varepsilon^{kl} = g^{ik} g^{jl} - g^{il} g^{jk}$ выражение (12.5.14) переписывается в виде

$$\chi(\Sigma) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Sigma} \sqrt{g} R, \quad (12.5.15)$$

где R — скалярная кривизна Риччи, и мы также восстановили в (12.5.15) множитель \sqrt{g} — квадратный корень из детерминанта метрического тензора, который опускается в большинстве наших формул. Из формулы (12.5.15) мы видим, что правая часть есть топологический инвариант. Это утверждение было

сделано в гл. 3, когда объяснялось, почему возможное наличие члена, пропорционального выражению в правой части равенства (12.5.15), несущественно для квантования свободной струны. Идентифицировав выражение (12.5.15) как интеграл от класса Эйлера, мы получаем вполне удовлетворительное объяснение того, что выражение в правой части равенства (12.5.15) является топологическим инвариантом. Но развитый аппарат не является, конечно, необходимым для того, чтобы установить этот частный факт. Действительно, легко видеть, что $\sqrt{g} R$ — локально полная производная. Например, в разд. 3.1.2 мы нашли, что в системе координат, для которой $g_{ij} = \delta_{ij} e^{\phi}$, имеем $\sqrt{g} R = \square \phi$. Тот факт, что $\sqrt{g} R$ есть локально полная производная, означает, что интеграл $\int \sqrt{g} R$ не может измениться ни при

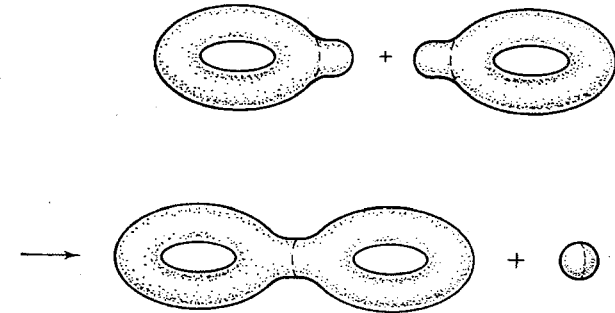


Рис. 12.10. Если даны две поверхности: Σ_1 рода g_1 и Σ_2 рода g_2 , то удаляя из каждой поверхности полусферу и переставляя получившиеся куски, мы можем получить поверхность рода $g_1 + g_2$ и поверхность рода нуль.

каких локальных вариаций метрики, а, значит, является топологическим инвариантом.

Легко получить значение эйлеровой характеристики для римановой поверхности произвольного рода. Пусть $\chi(g)$ обозначает эйлерову характеристику поверхности рода g . Для рода нуль явное вычисление интеграла (12.5.15) для обычной сферической метрики на S^2 (если радиус равен r , то площадь равна $4\pi r^2$, а кривизна $R = 2/r^2$) дает $\chi(0) = 2$. Для рода один замечаем, что на торе можно взять плоскую метрику. При таком выборе метрики интеграл (12.5.15), очевидно, равен нулю, т. е. $\chi(1) = 0$. Для $g > 1$ величину $\chi(g)$ легко найти с помощью рекуррентного соотношения $\chi(g_1) + \chi(g_2) = \chi(g_1 + g_2) + \chi(0)$, или (что эквивалентно)

$$\chi(g_1 + g_2) = \chi(g_1) + \chi(g_2) - 2. \quad (12.5.16)$$

Доказательство соотношения (12.5.16) легко провести с помощью простых операций разрезания и склеивания, посредством которых, не изменяя полного интеграла от кривизны, можно из поверхности рода g_1 и поверхности рода g_2 сделать поверхность рода $g_1 + g_2$ и поверхность рода нуль. Это показано на рис. 12.10. Используя известные значения $\chi(g)$ для рода один и для рода нуль, из (12.5.16) выводим, что для любого рода g имеем

$$\chi(g) = 2 - 2g. \quad (12.5.17)$$

В гл. 14 мы снова выведем эту формулу, связывая эйлерову характеристику с числами Бетти с помощью теоремы об индексе.

13. Низкоэнергетическое эффективное действие

Спектр частиц в теории струн состоит из конечного числа безмассовых состояний и из бесконечной «башни» массивных возбуждений, масштаб масс которых характеризуется фундаментальным параметром — натяжением струны, или наклоном Редже. Как объяснялось в предыдущих главах, этот параметр должен быть порядка массы Планка (10^{19} ГэВ), чтобы гравитон взаимодействовал с обычной ньютоновской силой. Если требуется дать феноменологическое описание следствий теории струн для низкоэнергетической физики, то совсем необязательно явно описывать, что происходит с массивными состояниями. Вместо этого естественно построить эффективное действие, целиком основанное на полях, отвечающих только безмассовым или по крайней мере очень легким степеням свободы. Такое описание оказывается полезным не только для феноменологического анализа, но также для выяснения определенных теоретических вопросов, таких как наличие или отсутствие аномалий.

Бесконечный набор полей, отвечающих точечным частицам, которые возникают в теории струн, состоит из конечного числа безмассовых полей, которые мы пока будем обозначать все вместе как ϕ_0 , и бесконечного числа тяжелых полей, обозначаемых все вместе как ϕ_n . Теория струн в принципе должна допускать описание в терминах динамики полей ϕ_0 , ϕ_n , управляемой некоторым классическим действием $S(\phi_0, \phi_n)$ (или на квантовом уровне некоторым квантовым эффективным действием). В настоящее время нет по-настоящему удовлетворительного способа построить и изучить точное классическое действие $S(\phi_0, \phi_n)$. Правильное понимание, по-видимому, должно включать и понимание теоретико-струнного обобщения общей ковариантности и янг-миллсовской калибровочной инвариантности и поэтому очевидно является важнейшей задачей, которой, кстати, также уделялось много внимания в связи с возродившимся в середине 80-х годов интересом к теории струн.

Низкоэнергетическое эффективное действие $S_{\text{эфф}}(\phi_0)$ для безмассовых полей ϕ_0 в принципе можно получить проинтегрировав по массивным полям, входящим в $S(\phi_0, \phi_H)$:

$$e^{iS_{\text{эфф}}(\phi_0)} \sim \int D\phi_H e^{iS(\phi_0, \phi_H)}.$$

В принципе это не приближение, а просто первый шаг вычисления точного фейнмановского интеграла по путям. В классическом приближении соответствующая процедура заключается в исключении массивных полей ϕ_H из уравнений движения, после чего остается меньшая система уравнений, включающая только безмассовые поля. Это равносильно тому, что функциональное интегрирование выполнено в древесном приближении. Полный функциональный интеграл включает также диаграммы с петлями массивных полей. Так описывается корректное исключение этих степеней свободы из квантовой теории. Тогда эффективное действие $S_{\text{эфф}}(\phi_0)$ можно рассматривать как ряд по степеням \hbar , отвечающим числу включенных петель для ϕ_H . Главный член, т. е. $(\hbar)^0$ -приближение, отвечает описанному выше классическому исключению полей ϕ_H .

Точное эффективное действие для безмассовых полей не может не быть очень сложным и нелокальным. Даже в обычной теории поля исключение массивных полей вносит нелокальность, а в теории струн, если и можно на что-то рассчитывать, так это на еще более сложную структуру, так как здесь объект, отвечающий исключаемым из исходного классического действия степеням свободы, представляет собой на самом деле протяженное тело — струну. Вся идея построения эффективного действия для безмассовых полей состоит в том, что хотя точная формула и оказалась бы лишь сложным и искусственным переписыванием точной теории, но можно получить полезные формулы с помощью последовательного разложения по числу производных. В конце концов каждая производная вносит подавление лишней степенью отношения E/M , где E — характерная энергия процесса, а M — характерный масштаб масс в теории струн. Таким образом, при обычных энергиях первые несколько членов такого разложения должны давать прекрасное приближение, хотя при этом и приходится жертвовать хорошей ультрафиолетовой сходимостью точной струнной теории. На практике, так как мы в настоящее время не знаем приемлемого вида действия $S(\phi_0, \phi_H)$, мы не можем реально построить низкоэнергетическое эффективное действие для безмассовых полей. Но что мы можем сделать — это исследовать струнные S -матричные элементы и просто сконструировать классическое действие для безмассовых полей, которое бы их воспроизвело. Более

того, в крайне низкоэнергетическом пределе главные члены эффективного действия могут быть построены, исходя только из принципов инвариантности: калибровочной инвариантности и локальной суперсимметрии.

13.1. Минимальная супергравитация плюс суперсимметричная теория Янга — Миллса

Рассмотрим длинноволновое разложение эффективного действия $S_{\text{эфф}}^{(0)}$ более систематически. Нам надо разложить эффективное действие по степеням параметра (длина)⁻¹. На самом деле каждая производная отвечает некоторой степени обратной длины. С другой стороны, необходимо учитывать размерность в единицах длины для различных полей. Кинетические энергии свободных бозонов $(\partial_M \phi)^2$ и свободных фермионов $\bar{\psi} \Gamma^M \partial_M \psi$ одинаково важны при больших длинах волн. Это можно учесть, приписывая фермионам размерность (длина)^{-1/2}. Если N_∂ и N_f — число производных и число фермионов в данном члене лагранжиана, а

$$n = N_\partial + \frac{1}{2} N_f, \quad (13.1.1)$$

то подсчет значения n дает точный способ вычисления степени обратной длины при длинноволновом разложении теории. Члены со все большими n становятся все менее важными по мере увеличения длины волн. Лагранжианы минимальных супергравитаций в десяти измерениях, как мы увидим ниже, имеют только члены с $n = 2$.

Чтобы другим способом увидеть, почему параметр n является естественным в супергравитации, рассмотрим общий вид закона преобразований суперсимметрии. Пусть ϕ^m — произвольная степень бозонного поля, а ψ отвечает произвольному фермионному полю. Закон преобразований суперсимметрии естественным образом принимает вид¹⁾

$$\begin{aligned} \delta_0 \phi &\sim \phi^m \psi \eta, \\ \delta_0 \psi &\sim \partial \phi^m \eta + \phi^m \psi^2 \eta. \end{aligned} \quad (13.1.2)$$

Эти преобразования согласуются с выбранными значениями числа n , если положить $n = -1/2$ для параметра суперсимметрии η . Непротиворечивым образом можно потребовать, чтобы закон преобразований суперсимметрии и уравнения движения согласовывались со значениями числа n , и так можно найти

¹⁾ Здесь η — инфинитезимальный грассманов (антикоммутирующий) параметр преобразований. — Прим. перев.

супергравитационные лагранжианы, у которых все члены имеют $n = 2$. Обозначим такую главную часть лагранжиана через S_2 . Члены с $n = 2$ важны, потому что они описывают основную асимптотику при больших длинах волн. Возможные формы лагранжиана S_2 можно определить, основываясь только на суперсимметрии и не обращаясь к теории струн.

К супергравитационным лагранжианам можно добавить члены высших степеней S_4, S_6 и т. д. и соответственно добавить члены высших степеней δ_2, δ_4 и т. д. в преобразованиях суперсимметрии. Действительно, в теории струн такие члены, конечно, присутствуют. (По-видимому, возникают только члены с четным n .) Если такие члены добавлены, то уже нельзя ограничиться какими-то определенными значениями n ; попытки замкнуть алгебру суперсимметрии заставляют добавлять члены с все большими значениями n .

Прежде чем принять утверждение, что длинноволновое поведение супергравитации определяется членами типа S_2 , необходимо задаться вопросом: возможны ли члены более низкого порядка? Члены типа S_0 должны иметь вид $\int d^n x \sqrt{g} V(\phi)$, где ϕ — некоторое скалярное поле. Члены типа S_1 должны иметь вид $\int d^n x \sqrt{g} V(\phi) \bar{\psi} \psi$. В четырехмерной супергравитации такие члены возможны и в самом деле играют важную роль в феноменологии. В киральной десятимерной супергравитации подобные члены несовместимы с суперсимметрией¹⁾. Попытка модифицировать десятимерную супергравитацию, добавляя к обсуждаемым ниже лагранжианам члены типа S_0 и S_1 (вместе с преобразованиями суперсимметрии типа δ_{-1}), не приводит к успеху. (Легко проанализировать случай $N = 1$ -суперсимметрии в десяти измерениях. Члены типа S_1 и δ_{-1} невозможны вследствие условий киральности на поля, а тогда, как легко видеть, члены типа S_0 нарушают суперсимметрию. В четырехмерном случае применима конструкция, использующая одновременно члены S_0, S_1 и δ_{-1} .) Невозможность добавить к лагранжиану десятимерной супергравитации члены типа S_0 играла важную роль в наших рассуждениях в гл. 10. Возможный дилатонный головастик был бы пропорционален S_0 (точнее $\partial V / \partial \phi$), и его не должно быть, когда аномалия сокращается и суперсимметрия не нарушена, так как S_0 нарушает суперсимметрию. Это было главным пунктом в аргументах в пользу того, что сокращение аномалий в суперструнах типа I с необходимостью приводит к сокращению расходимостей.

¹⁾ Другая ситуация в некиральной теории типа IIA (см. [432]).

13.1.1. $N = 1$ -супергравитация в десяти и одиннадцати измерениях

В этом разделе мы опишем $N = 1$ -супергравитацию в десяти измерениях. Среди суперструнных теорий с $N = 1$ есть теория суперструн типа I с калибровочной группой $SO(32)$ и теории гетеротических струн с калибровочной группой $E_8 \times E_8$ или $SO(32)$. В любом варианте безмассовый сектор состоит из супермультиплета Янга — Миллса (A_M^a, χ^a) в присоединенном представлении калибровочной группы и $N = 1$ -супергравитационного супермультиплета. Суперсимметричная теория Янга — Миллса описана в приложении 4.A. Поэтому мы переходим прямо к теории супергравитации, после чего рассмотрим систему взаимодействующих супермультиплетов Янга — Миллса и супергравитации.

Супергравитационный мультиплет состоит из гравитона, описываемого репером e_M^A , антисимметричного тензора B_{MN} , который на языке, используемом в гл. 12, есть 2-форма скаляра ϕ , гравитино ψ_M и спинора λ . Все спиноры майорана-вейлевские, причем ψ_M — левый, а λ — правый. Прописные буквы M, N, \dots обозначают десятимерные пространственно-временные координаты, а A, B, \dots — локальные лоренцевы индексы, или индексы, отвечающие касательному пространству¹⁾. Как обычно, e_M^A обозначает матрицу, обратную e_A^M , а e обозначает детерминант матрицы репера e_M^A . Матрицы Дирака для десятимерного пространства-времени имеют вид

$$\Gamma^M = e_M^A \Gamma^A. \quad (13.1.3)$$

Здесь Γ^A — постоянные матрицы, удовлетворяющие условию

$$\{\Gamma^A, \Gamma^B\} = 2\eta^{AB}, \quad (13.1.4)$$

в то время как матрицы Γ^M зависят от полей согласно (13.1.3). Матрицы Γ^A — 32-мерные, так как 32 — минимальная размерность, необходимая для того, чтобы можно было реализовать алгебру Дирака для десяти различных матриц. Но если применить их к киральному спинору, то они по существу умножаются на проекционный оператор $1/2(1 \pm \Gamma_{11})$, который проецирует их на 16-мерное подпространство.

¹⁾ Здесь и в последующих главах обозначения несколько отличаются от обозначений первых двенадцати глав. А именно, пространственно-временные координаты там имели индексы μ, ν и т. д., а здесь они имеют индексы M, N и т. д. Причина такого изменения в том, что в следующих главах мы рассматриваем расщепление координат на четырехмерные x^μ и шестимерные y^i .

Один из способов вывода действия $N = 1$ -супергравитации в десяти измерениях заключается в том, что сначала формулируют супергравитацию в одиннадцати измерениях, а затем делают обрезание до $D = 10$. Одно из преимуществ такого подхода состоит в том, что при другом обрезании получается также теория супергравитации типа IIA. Формулировка одиннадцатимерной теории представляет также и самостоятельный интерес, хотя она, по-видимому, не является кандидатом на описание физической реальности.

В одиннадцатимерной супергравитационной теории участвуют только три различных поля: репер e_M^A , майорановское гравитино ψ_M и 3-форма калибровочного потенциала A_{MNP} . (Индексы здесь 11-значные.) Так как в этом случае имеется меньше полей, чем в десяти измерениях, формулы получаются несколько более короткими. Мы ограничимся здесь просто тем, что приведем эти формулы. Результат (выведенный Кремером, Жулиа и Шерком; вид мультиплета был впервые указан Намом) состоит в следующем:

$$L = -\frac{1}{2\kappa^2} eR - \frac{1}{2} e\bar{\psi}_M \Gamma^{MNP} D_N \left(\frac{1}{2} (\omega + \hat{\omega}) \right) \psi_P - \frac{1}{48} eF_{MNPQ}^2 - \frac{\sqrt{2}\kappa}{384} e (\bar{\psi}_M \Gamma^{MNPQRS} \psi_S + 12\bar{\psi}^N \Gamma^{PQ} \psi^R) (F + \hat{F})_{NPQR} - \frac{\sqrt{2}\kappa}{3456} \varepsilon^{M_1 \dots M_{11}} F_{M_1 \dots M_4} F_{M_5 \dots M_8} A_{M_9 M_{10} M_{11}}. \quad (13.1.5)$$

Как обычно, символ Γ с многими индексами обозначает антисимметризованные произведения с единичным весом. Например,

$$\Gamma^{MN} = \frac{1}{2} (\Gamma^M \Gamma^N - \Gamma^N \Gamma^M). \quad (13.1.6)$$

Подразумевается, что спиновая связность ω_{MAB} дается решением уравнений поля, которые получаются в результате вариации по ней как по независимому полю. (Оно включает часть, отвечающую кручению, которая содержит члены вида $\bar{\psi}\Gamma\psi$.) Символ $\hat{\omega}_{MAB}$ обозначает суперковариантную связность, преобразования суперсимметрии которой не содержат производных от инфинитезимального грассмана параметра. Она имеет вид

$$\hat{\omega}_{MAB} = \omega_{MAB} + \frac{1}{8} \bar{\psi}^P \Gamma_{PMAVBQ} \psi^Q. \quad (13.1.7)$$

F_{MNPQ} — ротор, или инвариантная напряженность поля A_{MNP} , $F = 6dA$, как обсуждалось в гл. 12, F_{MNPQ} — суперковариантно-

зация F_{MNPQ} . (Это означает, что преобразования суперсимметрии для F_{MNPQ} не содержат производных от параметра η .)

Действие, имеющее вид интеграла от лагранжевой плотности (13.1.5), инвариантно относительно локальных преобразований суперсимметрии. Преобразования можно записать в терминах инфинитезимального грассмана параметра $\eta(x)$, который зависит от точки пространства-времени и преобразуется как майоранов спинор. Эти преобразования имеют вид

$$\delta e_M^A = \frac{\kappa}{2} \bar{\eta} \Gamma^A \psi_M,$$

$$\delta A_{MNP} = -\frac{\sqrt{2}}{8} \bar{\eta} \Gamma_{[MN} \psi_{P]}, \quad (13.1.8)$$

$$\delta \psi_M = \frac{1}{\kappa} D_M (\hat{\omega}) \eta + \frac{\sqrt{2}}{288} (\Gamma_M^{PQRS} - 8\delta_M^P \Gamma^{QRS}) \eta \hat{F}_{PQRS}.$$

Получив ответ для $D = 11$, можно получить и супергравитационные теории для $D = 10$ с помощью размерной редукции. Для этого требуется лишь отбросить зависимость полей от одной из пространственных координат и разложить одиннадцатимерные поля на десятимерные составляющие. Одиннадцатимерный репер при редукции дает десятимерный репер, вектор и скаляр. А именно,

$$e_M^A \rightarrow \begin{pmatrix} e_M^A & A_M \\ 0 & \phi \end{pmatrix}, \quad (13.1.9)$$

где для простоты мы использовали одни и те же обозначения для десяти- и одиннадцатимерного реперов. Блок размера 10×1 , состоящий из нулей, получается в результате выбора калибровки, использующего калибровочную свободу, связанную с преобразованиями Лоренца одиннадцатого и первых десяти измерений. 3-форма A_{MNP} разлагается в десяти измерениях на 3-форму A_{MNP} и 2-форму B_{MN} (которая отвечает A_{MN11}). Гравитино разлагается на два майорана вейлевских гравитино ψ_M^i ($i = 1, 2$) и два майорана-вейлевских спинора λ^i в $D = 10$. Два участника каждой пары имеют противоположные киральности, что отражает лево-правую симметрию исходной теории в $D = 11$.

Состав полей, полученный при этой редукции, описывает супергравитацию типа IIA в $D = 10$. Лагранжиан этой теории получается, если проделать указанную декомпозицию для $D = 11$ -лагранжиана. Получающийся лагранжиан всегда удобно представить в виде, в котором эйнштейновский член появляется

в обычной форме записи (пропорционален скалярной кривизне). Но описанная редукция дала бы в этом члене лишний множитель ϕ , получающийся при редукции из $e = \det e_M^A$. От этого множителя можно избавиться, проведя рескейлинг десятимерного репера e_M^A на ϕ^ν , где $\nu = -(D-2)^{-1} = -1/8$. Это вызывает появление некоторых специальных степеней ϕ в других членах лагранжиана.

Из супергравитации типа IIA можно получить $N=1$ -супергравитацию в $D=10$, если проделать обрезание, положив $A_M = A_{MNP} = 0$, а также $\psi_M^R = \lambda^L = 0$. (R и L указывают на правую и левую киральности.) Остающийся после этого лагранжиан дается выражением вида

$$\begin{aligned} e^{-1} L_{SG} = & -\frac{1}{2\kappa^2} R - \frac{1}{2} \bar{\psi}_M \Gamma^{MNP} D_N \psi_P - \frac{3}{4} \phi^{-3/2} H_{MNP}^2 - \\ & - \frac{1}{2} \bar{\lambda} \Gamma^M D_M \lambda - \frac{9}{16\kappa^2} (\partial_M \phi / \phi)^2 - \frac{3\sqrt{2}}{8} \bar{\psi}_M \Gamma^N \Gamma^M \lambda (\partial_N \phi / \phi) + \\ & + \frac{\sqrt{2}\kappa}{16} \phi^{-3/4} H_{NPQ} (\bar{\psi}_M \Gamma^{MNPQR} \psi_R + 6\bar{\psi}^N \Gamma^P \psi^Q - \sqrt{2} \bar{\psi}_M \Gamma^{NPQ} \Gamma^M \lambda) + \\ & + (\text{ферми-поля})^4. \end{aligned} \quad (13.1.10)$$

Члены с четырьмя фермионными полями все известны, и их можно найти в литературе. Здесь подразумевается, что ψ_M — левый майорана-вейлевский спинор, а λ — правый майорана-вейлевский спинор, который иногда называют «дилатино». 3-форма H — ротор поля B , т. е. в обозначениях дифференциальных форм $H = dB$. Остальные поля — дилатон ϕ и, конечно, гравитон.

Преобразования суперсимметрии для этого действия можно вывести из преобразований для теории в $D=11$. Но это требует некоторой аккуратности. Прежде всего только левокиральная часть параметра η отвечает выживающей симметрии, так как одна из суперсимметрий в $D=10$ пропадает при обрезании теории IIA до $N=1$ -теории. Киральность параметров суперсимметрии согласуется, разумеется, с киральностью калибровочного поля ψ_M . Более сложный вопрос возникает из-за того, что получающийся закон преобразований не сохраняет выбор калибровки (13.1.9). Чтобы не вступать в противоречие с этим выбором калибровки, в определение преобразований $D=10$ -суперсимметрии необходимо включить некоторый вклад от $D=11$ локальных лоренцевых преобразований, восстанавливающих калибровочное условие $e_{11}^A = 0$. В результате таких

действий получаем

$$\begin{aligned} \delta e_M^A &= \frac{\kappa}{2} \bar{\eta} \Gamma^A \psi_M, \\ \delta \phi &= -\frac{\sqrt{2}\kappa}{3} \phi \bar{\eta} \lambda, \\ \delta B_{MN} &= \frac{\sqrt{2}}{4} \phi^{3/4} \left(\bar{\eta} \Gamma_M \psi_N - \bar{\eta} \Gamma_N \psi_M - \frac{\sqrt{2}}{2} \bar{\eta} \Gamma_{MN} \lambda \right), \\ \delta \lambda &= -\frac{3\sqrt{2}}{8} \frac{1}{\phi} (\Gamma \cdot \partial \phi) \eta + \frac{1}{8} \phi^{-3/4} \Gamma^{MNP} \eta H_{MNP} + (\text{ферми-поля})^2, \\ \delta \psi_M &= \frac{1}{\kappa} D_M \eta + \frac{\sqrt{2}}{32} \phi^{-3/4} (\Gamma_M^{NPQ} - 9\delta_M^N \Gamma^{PQ}) \eta H_{NPQ} + \\ & + (\text{ферми-поля})^2. \end{aligned} \quad (13.1.11)$$

Члены вида (ферми-поля)⁴ в формуле (13.1.10) и члены вида (ферми-поля)² в формулах (13.1.11) все известны.

Десятимерные теории супергравитации являются, конечно, низкоэнергетическими пределами определенных струнных теорий. Дальнейшая размерная редукция дает разнообразные супергравитации в различном числе измерений, меньшем десяти. Если теория струн окажется корректной, это можно было бы считать «объяснением» существования супергравитационных теорий для $D \leq 10$. Одиннадцатимерная супергравитация остается загадкой. Трудно поверить, что ее существование — просто случайность, но в настоящее время трудно и высказать убедительную гипотезу о том, какова могла бы быть ее роль в общей схеме.

13.1.2. Супергравитация типа IIB

Размерная редукция $D=11$ -супергравитации дает теорию в десяти измерениях с двумя суперсимметриями — супергравитацию типа IIB. Две суперсимметрии имеют противоположные киральности, и теория в целом обладает лево-правой симметрией, т. е. она «некиральная». Существует еще вторая $N=2$ -супергравитация в $D=10$, у которой обе суперсимметрии имеют одинаковую киральность. Эта теория — супергравитация типа IIB — является, очевидно, киральной (лево-правонесимметричной). Ее нельзя получить посредством редукции или обрезания из теории в большем числе измерений. Эта теория описывает основную асимптотику низкоэнергетического поведения эффективного действия теории суперструн типа IIB. Благодаря этому явная формулировка данной супергравитационной теории представляет особенный интерес.

Безмассовый спектр теории суперструн типа IIB был уже определен в разд. 5.3.2, где было обнаружено, что в терминах

представлений поперечной группы $SO(8)$ физические степени свободы имеют вид

$$(8_v + 8_c) \otimes (8_v + 8_c) = \\ = (1 + 28 + 35_v + 28 + 35_c)_B + (8_s + 8_s + 56_s + 56_s)_F. \quad (13.1.12)$$

Напомним, что 35_v — гравитон, а 35_c — антисимметричный самодуальный тензор четвертого ранга. Мультиплеты 56_s отвечают двум гравитино, а 8_s — паре майорана-вейлевских спиноров. Мультиплеты 28 отвечают паре антисимметричных тензоров второго ранга.

Целью настоящего раздела является дать описание взаимодействующей супергравитации типа IIB в явно ковариантном виде. Для этого обозначим бозонные поля как e_M^A , A^α , A_{MN}^α и A_{MNPQ} , где $\alpha = 1, 2$. Самодуальность $SO(8)$ -представления 35_c , отражается в $SO(9, 1)$ -самодуальности напряженности $F_{MNPQR} = 5\delta_{[M}A_{NPQR]}$ в свободной ковариантной теории. На языке форм: $F = *F$. Простого ковариантного действия, из которого следовало бы такое уравнение движения, по-видимому, не существует¹⁾. Кинетический член обычного типа $\int d^{10}x (F_{MNPQR})^2$ описывает и самодуальную, и антисамодуальную напряженность поля. Простого способа так модифицировать это действие, чтобы самодуальная часть отвечала распространяющимся физическим степеням свободы, а антисамодуальная — нет, не имеется. Но теория допускает явно ковариантные уравнения движения. Таким образом, для этой конкретной теории гораздо легче попытаться найти ковариантные уравнения движения, чем ковариантное действие. В соответствии с этими соображениями мы и будем действовать.

Задача нахождения действия с явной лоренц-ковариантностью имеет аналог в случае суперсимметрии. Для многих суперсимметричных теорий (включая рассматриваемую) неизвестна суперпротянутая формулировка «вне массовой поверхности». Это означает, что нельзя написать действие с явной суперсимметрией. Но всегда можно ввести суперполя «на массовой поверхности» и записать явно суперсимметричные уравнения движения. В самом деле, супергравитация типа IIB представляет собой пример такой теории. Но чтобы не создавать, насколько это возможно, усложнений, мы сформулируем теорию в терминах компонентных полей, а не суперполей. Хотя суперполевой подход весьма изящен, для него потребовалось бы

¹⁾ Такое действие для киральных супергравитаций при $D = 6$ и $D = 10$ было найдено Каваловым и Мкртчяном (Preprint YERPH, 938(89)-86). — Прим. перев.

развить довольно сложный формализм, который не понадобится больше нигде в этой книге. Поэтому мы его здесь не будем рассматривать.

Вывод ковариантных уравнений поля супергравитации типа IIB основывается на двух соображениях. Первое касается связи между уравнениями поля и преобразованиями суперсимметрии для полей. Прежде всего имеется очевидное требование, что при суперсимметричных вариациях уравнений движения должно возникать выражение, которое обращается в нуль на уравнениях движения. Эти условия достаточно ограничительны, так что если преобразования суперсимметрии известны и известно одно из уравнений движения, то все остальные также могут быть найдены. Но имеется еще более сильное требование. Когда коммутатор двух локальных преобразований суперсимметрии применяется к полям, условие замыкания алгебры требует, чтобы результат отвечал комбинации локальных симметрий теории, а именно общего координатного преобразования, локального лоренцева преобразования, локального преобразования суперсимметрии и дополнительных локальных калибровочных преобразований, связанных с «калибровочными полями» A_{MN}^α и A_{MNPQ} . Но поскольку мы имеем дело с формализмом на массовой поверхности, когда нет вспомогательных полей, необходимых для замыкания алгебры вне массовой поверхности, этот результат справедлив только в том случае, если удовлетворяются уравнения движения. Из этого факта можно извлечь пользу. Это означает, что в процессе построения преобразований суперсимметрии для полей с самосогласованной калибровочной алгеброй одновременно можно получить и некоторые из уравнений движения. Соображения самосогласованности вместе с рассмотренными условиями, как оказывается (при вычислениях), полностью определяют теорию!

В то время как описанные выше условия самосогласованности действительно полностью определяют теорию, другой фундаментальный принцип симметрии помогает так упорядочить понятия и формулы, чтобы вычисления стали намного проще, а результаты приобрели более изящный вид. Симметрия, которая здесь имеется в виду, это некоторая глобальная $SU(1, 1)$ -симметрия. (Некомпактная форма группы $SU(2)$, изоморфная $SL(2, R)$, которую мы встречали раньше при изучении конформных отображений единичного диска в себя. В частности отображение $z \rightarrow (az + b)/(cz + d)$ представляет собой несингулярное обратимое отображение единичного диска в себя, если

матрица $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ принадлежит группе $SU(1, 1)$.)

Глобальная $SU(1, 1)$ -симметрия супергравитации типа IIB представляет собой один пример некоторого общего явления в расширенных супергравитационных теориях. В этих теориях имеется некомпактная группа глобальной симметрии G с максимальной компактной подгруппой H . Скалярные поля теории отвечают фактор-пространству G/H . Отсюда, в частности, следует, что их число равно $\dim G - \dim H$. В рассматриваемом случае максимальная компактная подгруппа группы $SU(1, 1)$ — это группа $U(1)$, и теория содержит $3 - 1 = 2$ скалярных поля. Самый известный пример этого явления возникает в $N = 8$ -супергравитации в четырех измерениях, в которой имеется глобальная симметрия $E_{7,7}$. Группа $E_{7,7}$ есть некомпактная форма группы E_7 с максимальной компактной подгруппой $SU(8)$. Так как группа E_7 имеет 133 генератора, а группа $SU(8)$ — 63 генератора, отсюда следует, что в $N = 8$ -супергравитации имеется $133 - 63 = 70$ скалярных полей.

Поскольку число $\dim G - \dim H$ не отвечает размерности представления группы G , необходимо предпринять дополнительные усилия, чтобы получить глобальную G -симметрию таких теорий в явном виде. Но это оправдывает себя. Подходящий для этого метод почти (хотя и не в точности) аналогичен тетрадной формулировке ОТО, когда гравитон описывается полем e_M^A . Это поле, очевидно, преобразуется линейно относительно группы глобальной симметрии $GL(D, R)$, являющейся подгруппой группы общих координатных преобразований. (Группа действует только на мировой индекс M .) Это некомпактная группа, максимальной компактной подгруппой которой является $SO(D)$. В тетрадном формализме эта группа используется как отдельная локальная симметрия — локальная лоренцева инвариантность. Независимых распространяющихся калибровочных полей, отвечающих этой симметрии, нет, так как кинетический член для связности ω_M^{AB} (аналогичный члену F^2 в теории Янга — Миллса) не вводится. В результате можно воспользоваться локальной симметрией, чтобы устранить $D(D - 1)/2$ компонент поля e_M^A , оставив только компоненты, отвечающие фактор-множеству $GL(D, R)/SO(D)$. Пока здесь больше степеней свободы, чем число физических поляризаций гравитона, так как еще не учитывались локальные общекоординатные преобразования. Тщательный анализ показывает, что их можно использовать, чтобы ограничить рассмотрение $D - 2$ поперечными направлениями. Этого можно добиться, например, выбрав калибровку светового конуса. Таким образом, физические поляризации гравитона на самом деле отвечают фактор-пространству $SL(D - 2, R)/SO(D - 2)$. Это свойство имеет место в случае гравитации, но не в случае

описания скалярных полей в терминах фактор-пространства. Поскольку аналог общекоординатной инвариантности отсутствует, G/H -описание скалярных полей оказывается более простым, чем ОТО.

В соответствии со сделанными выше замечаниями попытаемся описать два скаляра в супергравитации типа IIB с помощью матрицы V_\pm^α , аналогичной реперу e_M^A . Индекс $\alpha = 1, 2$ отвечает представлению 2 группы $SU(1, 1)$, а индекс \pm описывает два представления $U(1)$ с «зарядами» $U = \pm 1$. Матрица V_-^α комплексно-сопряжена V_+^α ; Матрица типа 2×2 полей V_\pm^α принадлежит группе $SU(1, 1)$. Таким образом, имеем, в частности,

$$\varepsilon_{\alpha\beta} V_-^\alpha V_+^\beta = \det V = 1. \quad (13.1.13)$$

При глобальных $SU(1, 1)$ -преобразованиях

$$\delta V_\pm^\alpha = m^\alpha_\beta V_\pm^\beta, \quad (13.1.14)$$

где m^α_β — постоянная матрица, принадлежащая алгебре Ли группы $SU(1, 1)$. При локальных $U(1)$ -преобразованиях с инфинитезимальным параметром $\Sigma(x)$ имеем

$$\delta V_\pm^\alpha = \pm i \Sigma V_\pm^\alpha. \quad (13.1.15)$$

(В общем случае поле Φ_U заряда U удовлетворяет условию $\delta \Phi_U = i U \Sigma \Phi_U$.)

$SU(1, 1)$ -инвариантная комбинация

$$Q_M = -i \varepsilon_{\alpha\beta} V_-^\alpha \partial_M V_+^\beta \quad (13.1.16)$$

играет роль $U(1)$ -калибровочного поля, так как из (13.1.15) следует

$$\delta Q_M = \partial_M \Sigma, \quad (13.1.17)$$

где мы воспользовались соотношением (13.1.13). Уравнение (13.1.16) является аналогом формулы для спиновой связности в терминах репера. Существует еще одна $SU(1, 1)$ -инвариантная величина, которую можно построить из V_\pm^α , а именно

$$P_M = -\varepsilon_{\alpha\beta} V_+^\alpha \partial_M V_+^\beta. \quad (13.1.18)$$

Это выражение, очевидно, имеет заряд $U = 2$, а комплексно-сопряженное выражение имеет $U = -2$. Если бы нашей задачей было только дать описание нелинейной сигма-модели со скалярными полями, отвечающими $SU(1, 1)/U(1)$, то это было бы легко сделать. Лагранжиан был бы пропорционален

$g^{MNP} P_M^* P_N^*$. Однако, как уже объяснялось, это выражение не имеет хорошего обобщения в теории супергравитации типа IIB.

Как следует описывать другие поля в теории? Из ОТО нам известно, что фермионные поля должны преобразовываться по локальной, а не глобальной группе симметрии¹⁾. Поэтому мы вводим поля λ и ψ_M , которые отвечают представлениям 8_s и 56_s соответственно и имеют $U(1)$ -заряды, равные $U = 3/2$ и $U = 1/2$ соответственно. Каждое из них на самом деле состоит из двух полей, причем эти поля комплексно-сопряженные, (Комплексно-сопряженные поля имеют заряды $U = -3/2$ и $U = -1/2$.) Тот факт, что λ и ψ_M — вейлевские спиноры, выражается условиями $\Gamma_{11}\lambda = \lambda$ и $\Gamma_{11}\psi_M = -\psi_M$.

Для бозонных полей в случае ОТО удобнее использовать мировые индексы, а следовательно, для сигма-модели — $SU(1, 1)$ -индексы. Таким образом, два поля 28 описываются $SU(1, 1)$ -дублетом A_{MN}^α . Поле 4-формы A_{MNPQ} является синглетом по $SU(1, 1)$ и, конечно, не заряжено по $U(1)$. Из полей A_{MN}^α и A_{MNPQ} можно построить напряженности

$$F_{MNP}^\alpha = 3\partial_{[M} A_{NP]}^\alpha, \quad (13.1.19)$$

$$F_{MNPQR} = 5\partial_{[M} A_{NPQR]} + \frac{5}{8} i\kappa \varepsilon_{\alpha\beta} A_{[MN}^\alpha F_{PQR]}^\beta. \quad (13.1.20)$$

В последнее выражение включен нелинейный член, что будет удобно впоследствии. Выражение (13.1.19), очевидно, определяет напряженность поля, которая, как обычно, инвариантна относительно преобразований $\delta A_{MN}^\alpha = 2\partial_{[M} \Lambda_{N]}^\alpha$. Но выражение (13.1.20) на первый взгляд кажется неинвариантным относительно этих преобразований. На самом деле оно инвариантно при условии, что 4-форма потенциала одновременно преобразуется по правилу

$$\delta A_{MNPQ} = -\frac{1}{4} i\kappa \varepsilon_{\alpha\beta} \Lambda_{[M}^\alpha F_{NPQ]}^\beta, \quad (13.1.21)$$

конечно, в дополнение к обычным калибровочным преобразованиям

$$\delta A_{MNPQ} = 4\partial_{[M} \Lambda_{NPQ]}. \quad (13.1.22)$$

$SU(1, 1)$ -дублет незаряженных по $U(1)$ напряженностей F_{MNP}^α можно заменить эквивалентным выражением, являющимся $SU(1, 1)$ -синглетом с зарядом $U = 1$. Соответствующая формула имеет вид

$$G_{MNP} = -\varepsilon_{\alpha\beta} V_+^\alpha F_{MNP}^\beta. \quad (13.1.23)$$

¹⁾ Здесь имеются в виду локальные преобразования Лоренца. — Прим. перев.

Необходимо еще одно определение — определение $U(1)$ -ковариантной производной. Поле Φ_U заряда U имеет ковариантную производную также заряда U , которая дается выражением

$$D_M \Phi_U = (\partial_M - iUQ_M) \Phi_U, \quad (13.1.24)$$

где Q_M — связность, определенная соотношением (13.1.16). Это обычное определение ковариантной производной, точно такое же, как в случае электромагнетизма.

Итак, мы описали все, что необходимо для того, чтобы представить формулы для преобразований суперсимметрии в виде, обладающем явной $SU(1, 1) \times U(1)$ -симметрией, где $SU(1, 1)$ — глобальная, а $U(1)$ — локальная симметрия. Вывод или проверку этих формул можно провести непосредственно (хотя это и требует длительных вычислений), и мы здесь не будем этого продельвать. Локальные преобразования суперсимметрии получаются в виде

$$\begin{aligned} \delta e_M^A &= -2\kappa \operatorname{Im}(\bar{\eta} \Gamma^A \psi_M), \\ \delta V_+^\alpha &= \kappa V_+^\alpha \bar{\eta}^* \lambda, \\ \delta V_-^\alpha &= \kappa V_-^\alpha \bar{\eta} \lambda^*, \end{aligned} \quad (13.1.25)$$

$$\delta A_{MN}^\alpha = V_+^\alpha (\bar{\eta}^* \Gamma_{MN} \lambda^* + 4i\bar{\eta} \Gamma_{[M} \psi_{N]}^*) + \text{компл.-сопр.},$$

$$\delta A_{MNPQ} = 2 \operatorname{Re}(\bar{\eta} \Gamma_{[MNP} \psi_{Q]}) - \frac{3}{8} i\kappa \varepsilon_{\alpha\beta} A_{[MN}^\alpha \delta A_{PQ]}^\beta,$$

а также

$$\delta \lambda = \frac{i}{\kappa} \Gamma^M \eta^* P_M - \frac{i}{24} \Gamma^{MNP} \eta G_{MNP} + (\text{ферми-поля})^2,$$

$$\begin{aligned} \delta \psi_M &= \frac{1}{\kappa} D_M \eta + \frac{i}{480} \Gamma^{M_1 \dots M_5} \Gamma_M \eta F_{M_1 \dots M_5} + \\ &+ \frac{1}{96} (\Gamma_M^{NPQ} G_{NPQ} - 9\Gamma^{NP} G_{MNP}) \eta^* + (\text{ферми-поля})^2. \end{aligned} \quad (13.1.26)$$

Отметим, что параметр суперсимметрии η имеет $U(1)$ -заряд $U = 1/2$, такой же, как у поля гравитино ψ_M .

Легко проверить, что приведенные выше соотношения воспроизводят обычную алгебру суперсимметрии в линеаризованном и глобальном пределе, т. е. для свободной теории. Приятным свойством приведенных выше формул является то, что в них входят единственно возможные структуры, совместные с различными симметриями теории, — общекоординатной инвариантностью, локальной лоренц-инвариантностью, калибровочными Λ_M - и Λ_{MNP} -инвариантностями, локальной $U(1)$ -симметрией и глобальной $SU(1, 1)$ -симметрией. Нетривиальным упражнением является проверка того, что численные коэффициенты

при различных членах в точности такие, как указано. На самом деле условие замыкания алгебры полностью определяет как эти коэффициенты, так и уравнения движения. Кроме того, большинство коэффициентов определяется из формул по несколько раз, к счастью, с одним и тем же результатом!

Замыкание алгебры дает уравнения движения для киральных полей теории, причем каждое из них удовлетворяет полемому уравнению первого порядка. Это фермионные поля λ и ψ_M и 4-форма потенциала A_{MNPQ} . Уравнение движения для 4-формы A_{MNPQ} представляет собой условие $F = *F$, где F отличается от dA членами взаимодействия; F дается формулой (13.1.20). (Имеется также член вида (ферми-поля)², который мы опускаем.)

Другие уравнения движения можно получить, применив преобразования суперсимметрии к найденным уравнениям. Получаем (пренебрегая вкладом фермионных полей)

$$\begin{aligned} D^M P_M &= \frac{1}{24} \kappa^2 G_{MNP} G^{MNP}, \\ D^P G_{MNP} &= P^P G_{MNP}^* - \frac{2}{3} i \kappa F_{MNPQR} G^{PQR} - \\ &- R_{MN} = P_M P_N^* + P_M^* P_N + \frac{1}{6} \kappa^2 F_{MP_1 \dots P_4} F^{P_1 \dots P_4 N} + \\ &+ \frac{1}{8} \kappa^2 \left(G_M^{PQ} G_{NPQ}^* + G_M^{PQ} G_{NPQ} - \frac{1}{6} g_{MN} G^{PQR} G_{PQR}^* \right). \end{aligned} \quad (13.1.27)$$

Потенциально важным применением этих уравнений является исследование спонтанной компактификации. При этом обычно предполагается, что фермионные поля можно положить равными нулю. (Это единственно, что можно сделать в рамках классического рассмотрения, хотя можно представить себе «конденсат», образующийся квантовомеханически.) Для этой цели достаточно иметь уравнения в том виде, в котором они написаны выше (без вклада фермионных полей).

В заключение этого краткого введения в теорию супергравитации типа IIB сделаем одно последнее замечание. $SU(1, 1)/U(1)$ -симметрия, оказавшаяся столь полезной в описанном выше построении, не сохраняется в суперструнном расширении теории типа IIB. В частности, $U(1)$ -группа вращает две суперсимметрии между собой, но даже эта симметрия не сохраняется в суперструнном расширении. Это замечание проще всего понять, вернувшись к суперсимметричному суперструнному действию $S = S_1 + S_2$, описанному в разд. 5.1.2. Там введены две суперпространственные грассмановы координаты $\theta^A(\sigma, \tau)$, $A = 1, 2$. Слагаемое S_1 обладает явной вращательной

$SO(2)$ -симметрией, которая и есть рассматриваемая $U(1)$ -симметрия, но слагаемое S_2 (которое было очень важным в суперструнном анализе) этой симметрией не обладает.

13.1.3. Взаимодействующая система супергравитации и суперсимметричной теории Янга — Миллса

Мы завершили наш обзор супергравитационных теорий в десяти измерениях. Следующей нашей задачей является построение взаимодействия $N = 1$, $D = 10$ -супергравитации, описанной в разд. 13.1.1, с $N = 1$, $D = 10$ -суперсимметричной теорией Янга — Миллса. Напомним, что в приложении 4.A мы показали, что сама по себе суперсимметричная теория Янга — Миллса дается простым лагранжианом

$$L_{YM} = -\frac{1}{4} F_{MN}^a F^{MNa} - \frac{1}{2} \bar{\chi}^a \Gamma^M (D_M \chi)^a. \quad (13.1.28)$$

Это действие инвариантно относительно глобальных преобразований суперсимметрии

$$\delta A_M^a = \frac{1}{2} \bar{\eta} \Gamma_M \chi^a, \quad \delta \chi^a = -\frac{1}{4} \Gamma^{MN} F_{MN}^a \eta. \quad (13.1.29)$$

Задача состоит в том, чтобы построить взаимодействие этой теории с супергравитацией, так чтобы получавшаяся система была инвариантной относительно локальных преобразований суперсимметрии.

Напряженность поля Янга — Миллса определяется, как обычно, формулой

$$F_{MN}^a = \partial_M A_N^a - \partial_N A_M^a + g f_{bc}^a A_M^b A_N^c, \quad (13.1.30)$$

а калибровочно-ковариантная производная — формулой

$$(D_M \chi)^a = \partial_M \chi^a + g f_{bc}^a A_M^b \chi^c, \quad (13.1.31)$$

где f_{bc}^a — структурные константы полупростой группы Ли. Калибровочная константа связи g имеет при $D = 10$ размерность (длина)³. На квантовом уровне условие сокращения аномалий накладывает ограничение на выбор допустимой группы симметрий, но на классическом уровне любая полупростая группа допустима.

Как и в разд. 12.5.1, введем матрицы T^a , отвечающие генераторам группы и нормированные так, что $\text{tr}(T^a T^b) = \delta^{ab}$, и определим матрицу потенциалов

$$A = \sum_a T^a A_M^a dx^M \quad (13.1.32)$$

и аналогично для «глюино» χ . Напряженность поля Янга — Миллса в этих обозначениях описывается матричнозначной 2-формой $F = \sum F^a T^a$, где

$$F^a = dA^a + gf^a_{bc} A^b \wedge A^c, \quad (13.1.33)$$

что можно также сокращенно записать в виде

$$F = dA + gA^2. \quad (13.1.34)$$

Взаимодействие супермультиплет Янга — Миллса с мультиплетом супергравитации (только с членами с $n = 2$) однозначно определяется требованием локальной суперсимметрии. Результат был получен в абелевом (группа $U(1)$) случае Чамседдином и де Витом и др., а также обобщен на неабелев случай Чаплином и Мантоном. Этот анализ требует больших и утомительных вычислений, но здесь возникает и нечто новое. Калибровочно-инвариантную напряженность поля 2-формы V_{MN} нужно (вместо $H = dB$) обобщить в виде

$$H = dB - \frac{\kappa}{\sqrt{2}} \omega_3, \quad (13.1.35)$$

где ω_3 — 3-форма Черна — Саймонса

$$\omega_3 = A^a F^a - \frac{1}{3} gf_{abc} A^a A^b A^c = A^a dA^a + \frac{2}{3} gf_{abc} A^a A^b A^c, \quad (13.1.36)$$

или эквивалентно

$$\omega_3 = \text{tr} \left(AF - \frac{1}{3} gA^3 \right) = \text{tr} \left(AdA + \frac{2}{3} gA^3 \right), \quad (13.1.37)$$

как это описано в предыдущей главе. В то время как H , очевидно, инвариантно относительно преобразований $\delta B = d\Lambda$, менее очевидно, что оно обладает янг-миллсовой калибровочной инвариантностью. Действительно, чтобы добиться калибровочной инвариантности, необходимо постулировать нетривиальный закон калибровочных преобразований для поля B . Это неожиданно, поскольку B — незаряженное поле. При калибровочном преобразовании

$$\delta A = d\Lambda + [A, \Lambda], \quad (13.1.38)$$

где Λ — инфинитезимальный матричный параметр, вариация члена Черна — Саймонса равна

$$\delta \omega_3 = \text{tr} (d\Lambda dA) = d\omega_2^1, \quad (13.1.39)$$

где

$$\omega_2^1 = \text{tr} (\Lambda dA). \quad (13.1.40)$$

Нижний индекс обозначает степень формы, а верхний показывает, сколько раз входит параметр Λ . Теперь ясно, как добиться калибровочной инвариантности. Если задать закон преобразования

$$\delta B = \frac{\kappa}{\sqrt{2}} \text{tr} (\Lambda dA) = \frac{\kappa}{\sqrt{2}} \omega_2^1 \quad (13.1.41)$$

для 2-формы потенциала, то 3-форма $H = dB - \kappa \omega_3 / \sqrt{2}$, очевидно, будет калибровочно-инвариантной. (Множитель $\kappa / \sqrt{2}$ в (13.1.35) исчезнет после рескейлинга переменных, описанного ниже.)

Лагранжиан взаимодействия супергравитации и суперянг-миллсовой теории имеет вид

$$\begin{aligned} e^{-1} L = e^{-1} L_{SG} \text{ (с модифицированной } H_{MNP}) - \\ - \frac{1}{4} \phi^{-3/4} F_{MN}^a F^{MNa} - \frac{1}{2} \bar{\chi}^a \Gamma^M (D_M (\hat{\omega}) \chi)^a - \\ - \frac{1}{8} \kappa \phi^{-3/8} \bar{\chi}^a \Gamma^M \Gamma^{NP} (F_{NP}^a + \hat{F}_{NP}^a) \left(\psi_M + \frac{1}{12} \sqrt{2} \Gamma_M \lambda \right) + \\ + \frac{1}{16} \sqrt{2} \kappa \phi^{-3/4} \bar{\chi}^a \Gamma^{MNP} \chi^a H_{MNP} - \\ - \frac{1}{1536} \sqrt{2} \kappa^2 \bar{\chi}^a \Gamma_{MNP} \chi^a \bar{\psi}_Q (4 \Gamma^{MNP} \Gamma^Q + 3 \Gamma^Q \Gamma^{MNP}) \lambda - \\ - \frac{1}{512} \kappa^2 \bar{\chi}^a \Gamma_{MNP} \chi^a \bar{\lambda} \Gamma^{MNP} \lambda - \frac{1}{384} \kappa^2 \bar{\chi}^a \Gamma_{MNP} \chi^a \bar{\chi}^b \Gamma^{MNP} \chi^b. \end{aligned} \quad (13.1.42)$$

Последнее слагаемое в этом выражении обращается в нуль при $a = b$ вследствие некоторого тождества, которое имеет место для майорана-вейлевских спиноров при $D = 10$. Поэтому оно отсутствует в абелевом случае.

Инфинитезимальные преобразования, обобщающие (13.1.29) на случай искривленного пространства, даются следующими формулами:

$$\begin{aligned} \delta A_M^a = \frac{1}{2} \phi^{3/8} \bar{\eta} \Gamma_M \chi^a, \\ \delta \chi^a = -\frac{1}{4} \phi^{-3/8} \Gamma^{MN} \hat{F}_{MN}^a \eta + \frac{\sqrt{2}}{64} \kappa \left[3 (\bar{\lambda} \chi^a) \eta - \frac{3}{2} (\bar{\lambda} \Gamma^{MN} \chi^a) \Gamma_{MN} \eta - \right. \\ \left. - \frac{1}{24} (\bar{\lambda} \Gamma^{MNPQ} \chi^a) \Gamma_{MNPQ} \eta \right]. \end{aligned} \quad (13.1.43)$$

Преобразования полей супергравитации также подобны (13.1.11), но с подстановкой модифицированной 3-формы H в выражения для $\delta \lambda$ и $\delta \psi_M$. Кроме того, вариации получают

также дополнительные части:

$$\delta' \lambda = \frac{\sqrt{2}}{432} \kappa \bar{\chi}^a \Gamma^{MNP} \chi^a \Gamma_{MNP} \eta,$$

$$\delta' B_{MN} = \frac{\sqrt{2}}{2} \kappa \phi^{3/8} \bar{\eta} \Gamma_{[M} \chi^a A_{N]}, \quad (13.1.44)$$

$$\delta' \psi_M = -\frac{1}{256} \kappa \bar{\chi}^a \Gamma^{NPQ} \chi^a (\Gamma_{MNPQ} - 5g_{MN} \Gamma_{PQ}) \eta.$$

После этих изменений локальная суперсимметрия чистой супергравитации обобщается на случай взаимодействующей системы супергравитация плюс суперянг-миллсова теория.

Прежде чем перейти к дальнейшему обсуждению этих формул, сделаем некоторые переопределения полей, чтобы формулы приобрели более красивый вид. А именно положим

$$\phi^{new} = (\phi^{old})^{3/4}, \quad (13.1.45)$$

$$A_M^{new} = g A_M^{old}, \quad F_{MN}^{new} = g F_{MN}^{old}, \quad (13.1.46)$$

$$B_{MN}^{new} = \frac{\sqrt{2}}{\kappa} g^2 B_{MN}^{old}, \quad H_{MNP}^{new} = \frac{\sqrt{2}}{\kappa} g^2 H_{MNP}^{old}, \quad (13.1.47)$$

Тогда уравнение (13.1.35) принимает вид

$$H = dB - \omega_3. \quad (13.1.48)$$

После перечисленных выше изменений обозначений, лагранжиан взаимодействующей системы супергравитации и суперянг-миллсовой теории принимает следующий вид:

$$e^{-1} L = -\frac{1}{2\kappa^2} R - \frac{1}{4g^2\phi} \text{tr} (F_{MN}^2) - \frac{1}{\kappa^2} (\partial_M \phi / \phi)^2 - \frac{3\kappa^2}{8g^4\phi^2} H_{MNP}^2 -$$

$$-\frac{1}{2} \bar{\psi}_M \Gamma^{MNP} D_N \psi_P - \frac{1}{2} \bar{\lambda} \Gamma^M D_M \lambda - \frac{1}{2} \text{tr} (\bar{\chi} \Gamma^M D_M \chi) -$$

$$-\frac{1}{\sqrt{2}} \bar{\psi}_M \Gamma^N \Gamma^M \lambda (\partial_N \phi / \phi) + \frac{\kappa^2}{16g^2\phi} \text{tr} (\bar{\chi} \Gamma^{MNP} \chi) H_{MNP} -$$

$$-\frac{\kappa}{4g\sqrt{\phi}} \text{tr} \left[\bar{\chi} \Gamma^M \Gamma^{NP} \left(\psi_M + \frac{\sqrt{2}}{12} \Gamma_M \lambda \right) F_{NP} \right] +$$

$$+\frac{\kappa^2}{16g^2\phi} (\bar{\psi}_M \Gamma^{MNPQR} \psi_R + 6\bar{\psi}^N \Gamma^P \psi^Q -$$

$$-\sqrt{2} \bar{\psi}_M \Gamma^{NPQ} \Gamma^M \lambda) H_{NPQ} + (\text{ферми-поля})^4. \quad (13.1.49)$$

При формулировке этой теории мы ввели гравитационную константу связи κ , которая в десяти измерениях имеет размерность (длина)⁴, и калибровочную константу связи g , которая в десяти измерениях имеет размерность (длина)³. Тогда на первый

взгляд кажется, что теория характеризуется произвольным безразмерным параметром $\lambda = g^4/\kappa^3$. Более внимательное рассмотрение показывает, что это не так. Выражение (13.1.49) инвариантно при рескейлинге $\phi \rightarrow c\phi$, если g преобразуется как $g \rightarrow g/\sqrt{c}$. Если требуется, g можно совсем исключить из лагранжиана, определив $\phi' = \phi (g^2/\kappa^{3/2})$. (Множитель $\kappa^{3/2}$ несуществен — он включен, чтобы сделать ϕ' безразмерным.) Таким образом, в теории супергравитации нет свободного безразмерного параметра. Суть дела в том, что в лагранжиане (13.1.49) ничто не определяет вакуумное среднее поле ϕ . В действительности мы имеем дело не с однопараметрическим семейством теорий, параметризованным параметром λ , а с одной теорией с однопараметрическим семейством вакуумных состояний. По крайней мере это вырождение имеет место на классическом уровне. На квантовом уровне оно может быть снято, а может остаться¹⁾. Для понимания физического содержания теории крайне важно знать, как снимается вырождение или как определяется вакуумное среднее ϕ , поскольку (например) физическая калибровочная константа, которая на самом деле равна $g^2\phi$, зависит от того, какой вакуум из однопараметрического семейства классических вакуумов имеет физический смысл.

Если рассматривается теория суперструн, а не теория супергравитации, то важную роль играет еще один дополнительный параметр α' , но по-прежнему в фундаментальных законах отсутствует произвольный безразмерный параметр, так как α' определяется в терминах g и κ : $\kappa \sim g^2/\alpha'$ (для суперструн типа I) или $\kappa^2 \sim g^2\alpha'$ (для гетеротических струн). Таким образом, в уравнениях теории струн произвольная фундаментальная безразмерная постоянная действительно отсутствует. В разд. 3.4.6 мы уже сделали по существу это наблюдение другим способом, показав, что произвольный параметр, по-видимому, присутствующий в струнной теории возмущений, есть просто иллюзия, и его можно поглотить сдвигом значения поля дилатона ϕ .

Чтобы избежать чересчур громоздких формул, в выражении (13.1.49) мы не выписали явно члены вида (ферми-поля)⁴. Но один из них — последнее слагаемое в (13.1.42) — представляет особый интерес. В комбинации с членами $\bar{\chi}\chi H$ и H^2 он дает полный квадрат

$$-\frac{3\kappa^2}{8g^4\phi^2} \left[H_{MNP} - \frac{g^2\phi}{12} \text{tr} (\bar{\chi} \Gamma_{MNP} \chi) \right]^2. \quad (13.1.50)$$

¹⁾ Это вырождение не может быть снято, если только не нарушена спонтанно суперсимметрия, так как потенциальная энергия $V(\phi)$, необходимая, чтобы снять вырождение, как мы узнали выше, нарушает суперсимметрию.

В связи с рассмотрением нарушения суперсимметрии делались предположения, что билинейная комбинация $\bar{\chi}\Gamma_{MNP}\chi$ может приобрести вакуумное среднее за счет динамических эффектов. Если это происходит, то можно ожидать, что и H_{MNP} приобретает компенсирующее вакуумное среднее, так что выражение (13.1.50) обращается в нуль. Тогда в формуле преобразования суперсимметрии для «дилатино» λ индуцируется неоднородный член. Это дает интересную схему нарушения суперсимметрии с сохранением космологической постоянной, равной нулю по крайней мере в определенном приближении. Это может быть также разумное объяснение того, почему шесть измерений (три комплексных измерения) должны свертываться. В настоящее время, однако, для этих спекуляций нет убедительных оснований.

13.2. Масштабная инвариантность классической теории

Основываясь на выражении (13.1.49), мы уже сделали некоторые замечания о значении вакуумного среднего поля дилатона. Здесь мы рассмотрим этот вопрос подробнее. Сначала обсудим вкратце некоторые простые, но, возможно, непривычные свойства обычной ОТО, которая в D измерениях описывается действием

$$S = -\frac{1}{2\kappa^2} \int d^D x \sqrt{g} g^{MN} R_{MN}. \quad (13.2.1)$$

Эта теория не является масштабно-инвариантной, как квантовая теория¹⁾ Но она масштабно-инвариантна как классическая теория. При преобразовании

$$g_{MN} \rightarrow t^{-2} g_{MN} \quad (13.2.2)$$

(это масштабное преобразование, так как все длины умножаются на t^{-1}) стандартные формулы ОТО показывают, что R_{MN} инвариантно, так что S преобразуется как

$$S \rightarrow t^{-(D-2)} S. \quad (13.2.3)$$

На классическом уровне нормировка S не имеет значения: она не влияет на классические уравнения движения. Таким образом, ОТО является масштабно-инвариантной как классическая теория. На квантовом уровне преобразование, подобное (13.2.2),

¹⁾ За исключением случая двух измерений, когда (13.2.1) представляет собой топологический инвариант.

при котором действие умножается на некоторую постоянную, не является симметрией. (Мы можем формально рассматривать этот вопрос, хотя стандартная ОТО, вероятно, и не имеет смысла как квантовая теория.) Это следует, например, из описания квантовой теории в терминах интеграла по траекториям.

$$Z = \int e^{iS/\hbar}. \quad (13.2.4)$$

Очевидно, что изменение нормировки S не оставляет (13.2.4) инвариантным. Хотя (13.2.2) не является симметрией, это преобразование имеет следствия в квантовой гравитации, которые могут показаться несколько странными. Для описания классической теории требуются фундаментальные константы c (скорость света) и κ (гравитационная постоянная). Можно ожидать, что в квантовой теории нужна новая фундаментальная константа \hbar , но в действительности это не так. Из уравнений (13.2.3) и (13.2.4) видно, что изменение значения \hbar можно скомпенсировать преобразованием (13.2.2), так что в квантовой ОТО на самом деле нет фундаментальной константы \hbar ¹⁾.

Чтобы описать взаимодействие с фермионами, надо ввести репер e_{MA} , который удовлетворяет соотношению $g_{MN} = \eta^{AB} e_{MA} e_{NB}$ и, значит, под действием преобразований (13.2.2) преобразуется как

$$e_{MA} \rightarrow t^{-1} e_{MA}. \quad (13.2.5)$$

Взаимодействие с фермионами

$$S = - \int d^D x e \left(\frac{1}{2\kappa^2} R + \frac{1}{2} \bar{\psi} e^{MA} \Gamma_A D_M \psi \right) \quad (13.2.6)$$

обладает той же классической масштабной инвариантностью, если закон преобразования ψ имеет вид

$$\psi \rightarrow t^{1/2} \psi. \quad (13.2.7)$$

Что же происходит в супергравитации? Рассматривая в качестве примера $N=1$ -супергравитацию в формулировке (13.1.49), читатель может заметить, что эта теория обладает такой же классической масштабной инвариантностью, но теперь мы должны приписать полю дилатона ϕ нетривиальный закон преобразования. В самом деле, закон преобразования ϕ имеет вид

$$\phi \rightarrow t^2 \phi. \quad (13.2.8)$$

¹⁾ С этим утверждением трудно согласиться. Фактически \hbar фиксируется граничными условиями. — *Прим. ред.*

Таким образом, супергравитация обладает такой же классической масштабной инвариантностью, как и минимальная ОТО. Но имеется и существенное отличие. Хотя вакуумное среднее поля ϕ в классической супергравитации произвольно, мы должны приписать ϕ *некоторое* вакуумное значение¹⁾. Поэтому в десятимерной супергравитации масштабная инвариантность классической теории спонтанно нарушена. На классическом уровне безмассовый дилатон ϕ можно рассматривать как голдстоуновский бозон, отвечающий спонтанно нарушенной масштабной инвариантности.

Квантовомеханически масштабная инвариантность не является реальной симметрией, так что ϕ лучше считать псевдо-голдстоуновским бозоном. В таком случае можно ожидать, что он приобретает массу. Этому препятствует суперсимметрия, по крайней мере пока она не нарушена, так как ϕ входит в один супермультиплет с гравитоном, который определенно не может приобретать массу. В более общем виде суперсимметрия, как отмечалось выше, запрещает не только массовый член для ϕ , но и произвольный потенциал $V(\phi)$.

Забудем на время ограничения, связанные с суперсимметрией, и обсудим вместо них ограничения, возникающие вследствие классической масштабной инвариантности. На классическом уровне масштабная инвариантность допускает потенциал частного вида

$$V(\phi) \sim \phi, \quad (13.2.9)$$

хотя вследствие суперсимметрии в действительности такой член в рассматриваемом лагранжиане отсутствует. Предположим, что некоторый потенциал генерируется за счет однопетлевых эффектов. Однопетлевые эффекты имеют порядок \hbar . При масштабных преобразованиях \hbar изменяется: в десяти измерениях ее поведение, согласно (13.2.3) и (13.2.4), имеет вид $\hbar \rightarrow t^8 \hbar$. Таким образом, масштабная псевдосимметрия требует, чтобы однопетлевой потенциал преобразовывался как \hbar , умноженное на (13.2.9), т. е. как ϕ^5 . В общем случае n -петлевой вклад $V^{(n)}$ в эффективный потенциал может быть пропорциональным \hbar^n , умноженному на ϕ , так что, если этот вклад не равен нулю, он ведет себя как

$$V^{(n)}(\phi) \sim \phi^{4n+1}. \quad (13.2.10)$$

¹⁾ Формулы сингулярны при $\phi = 0$. Точнее, вид кинетической энергии $(\partial_m \phi / \phi)^2$ показывает, что значение $\phi = 0$ лежит «бесконечно далеко» в пространстве полей.

Заметим, что вклады большего порядка в эффективный потенциал при $\phi \rightarrow 0$ стремятся к нулю все быстрее. Непертурбативный вклад при $\phi \rightarrow 0$ будет, по-видимому, стремиться к нулю быстрее любой степени ϕ : непертурбативные эффекты в конце концов в режиме слабой связи (для малых ϕ) должны стремиться к нулю быстрее, чем эффекты любого конечного порядка теории возмущений.

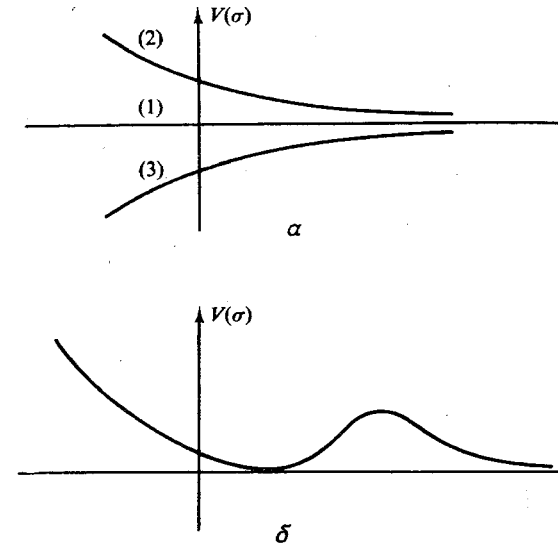


Рис. 13.1. Возможные варианты вида потенциала для поля $\sigma = -\ln \phi$. Потенциал может быть тождественно равным нулю (кривая (1) на рисунке а); при $\sigma \rightarrow \infty$ он может стремиться к нулю сверху (кривая (2)) или снизу (кривая (3)) и при этом не иметь других нулей; он может также иметь изолированный нуль в дополнение к нулю на бесконечности (б).

Какое поведение $V(\phi)$ было бы желательным или ожидаемым? (Это обсуждение в действительности нужно было бы провести в контексте рассмотрения редукции к четырем измерениям, но для краткости мы будем работать прямо в десяти измерениях.) Имеется возможность, что $V(\phi)$ тождественно равно нулю, что описывается кривой (1) на рис. 13.1, а. В этом случае ϕ — безмассовая частица. Поскольку ϕ имеет универсальное взаимодействие с материей (например, посредством связи F^2/ϕ), это поле давало бы поправки к макроскопическим гравитационным свойствам, которые могли бы быть астрономически наблюдаемыми. Тогда оно должно было бы удовлетворять

довольно сильным экспериментальным ограничениям, аналогичным ограничениям на скалярное поле Бранса — Дикке¹⁾.

Если потенциал $V(\phi)$ не равен тождественно нулю, то мы сталкиваемся с многочисленными новыми вопросами. Минимум $V(\phi)$ — это то, что обычно называется космологической постоянной. Одной из главных задач в теории суперструн, несомненно, является вопрос о том, почему космологическая постоянная остается нулевой после нарушения суперсимметрии. Вероятно, это тот вопрос, для ответа на который нашего современного понимания не хватает наиболее очевидным образом. Приведенные выше факты, касающиеся классической масштабной инвариантности, делают обращение в нуль космологической постоянной еще более загадочным. Соотношение (13.2.10) показывает, по-видимому, что независимо от того, что происходит, потенциал $V(\phi)$ обращается в нуль при $\phi \rightarrow 0$. Так как значение $\phi = 0$ лежит «бесконечно далеко», последующее рассмотрение будет более понятным, если работать с полем $\sigma = -\ln \phi$. Потенциал, который обращается в нуль при $\sigma \rightarrow \infty$, может стремиться к нулю сверху или снизу. Если V стремится к нулю снизу, как это описывается кривой (3) на рис. 13.1, а, то космологическая постоянная (абсолютный минимум V) отрицательна, что весьма неприятно. Поэтому будем надеяться, что V стремится к нулю сверху. В таком случае одна из возможностей состоит в том, что $V = 0$ достигается только при $\sigma \rightarrow \infty$, что отвечает кривой (2) на рис. 13.1, а. Тогда в природе вообще нет стабильного вакуума: σ будет «скатываться вниз по склону» до бесконечности. Такая идея впервые была высказана Дираком в 30-х годах с целью описания того, что теперь называют проблемой иерархии. Идея Дирака заключалась в том, что большие числа (такие как отношение планковской массы к массе протона) растут во времени по мере того, как σ скатывается по склону. Хотя эта идея и имеет привлекательные стороны, но экспериментальные ограничения на скорость изменения во времени констант связи делают маловероятной возможность того, что природа устроена именно так. Другая возможность состоит в том, что кроме нуля при $\sigma \rightarrow \infty$ потенциал V имеет изолированный минимум (в котором $V = 0$) при некотором конечном

¹⁾ Помимо астрономических тестов наиболее сильные ограничения на взаимодействие скалярного поля, подобного ϕ , обусловлены следующим фактом. В космологических моделях вследствие взаимодействия ϕ с материей его вакуумное среднее изменялось бы во времени. Механизм этого явления объясняется в конце разд. 14.5. Изменение во времени среднего значения ϕ вследствие взаимодействия F^2/ϕ привело бы к изменению во времени постоянной тонкой структуры, но эта возможность чрезвычайно сильно ограничена наблюдаемыми свойствами.

значении σ , как показано на рис. 13.1, б. В этой возможности нет ничего недопустимого, если не считать загадки, почему потенциал V должен иметь такую форму. Кроме того, многие физики считают противоречащим интуиции постулировать, что наш мир вырожден по энергии (нуль потенциала при конечном σ) с другим миром, «скатывающимся по склону».

13.3. Анализ аномалий

Обратимся теперь к изучению аномалий — вопросу, с которым мы встретились в первый раз в гл. 10.

Симметрии классической теории поля могут быть нарушены некоторыми квантовыми эффектами, называемыми аномалиями. Происхождение этих эффектов можно проследить, рассматривая определенные аномальные диаграммы с вставками классически сохраняющихся токов, для которых не существует регулятора, совместимого с одновременным сохранением всех участвующих токов. Аномалии, нарушающие глобальные законы сохранения, сказываются на физическом содержании теории, но не делают ее несостоятельной. Аномалии же в локальных законах сохранения, таких как калибровочная инвариантность или общая ковариантность, делают теорию несостоятельной. Такие аномалии могут возникать только в нарушающих четность амплитудах (для сохраняющих четность амплитуд всегда существует калибровочно-инвариантная регуляризация Паули — Вилларса).

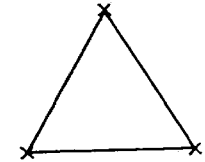


Рис. 13.2. Аномальная треугольная диаграмма с $V-A$ -током в каждой вершине.

Классическим примером ограничений на калибровочное взаимодействие, необходимых для исключения аномалий, является $SU(2) \times U(1)$ -модель электрослабых взаимодействий в четырех измерениях. Кварки и лептоны образуют левые дублеты и правые синглеты по «слабой» $SU(2)$. В этом случае имеется аномальная фермионная треугольная диаграмма с $V-A$ -токами в каждой вершине (рис. 13.2). Одновременного сохранения токов во всех трех вершинах требовать нельзя, так что единственная возможность избежать противоречия — сокращение суммы вкладов различных фермионов в теории. Например, если выбрать три тока, несущие квантовые числа по $U(1)$ (слабый гиперзаряд Y), то аномалия будет пропорциональна Y^3 . Следовательно, мы должны получить нуль, суммируя Y^3 по всем левым кваркам и лептонам. Так как все поколения имеют

одинаковый набор квантовых чисел, достаточно рассмотреть только первое поколение. Обычное распределение гиперзарядов имеет вид

$$\begin{aligned} Y(u_L) &= Y(d_L) = 1/3, \\ Y(\bar{u}_L) &= -4/3, \quad Y(\bar{d}_L) = 2/3, \\ Y(e_L^-) &= Y(\nu_L) = -1, \quad Y(e_L^+) = 2. \end{aligned} \quad (13.3.1)$$

Включая множитель 3, отвечающий числу цветов, для кварков получаем $\text{tr}(Y^3) = -6$, а для лептонов $\text{tr}(Y^3) = +6$. Таким образом, стандартные поколения действительно дают требуемое сокращение, в то время как урезанная теория, состоящая только из кварков или только из лептонов, была бы несостоятельной. Аномалии типов YT^2 и $Y\lambda^2$, где T и λ — генераторы $SU(2)_L$ и цветной группы соответственно, сокращаются аналогичным образом. В стандартной модели есть также потенциальная аномалия в треугольной диаграмме с одним внешним генератором гиперзаряда и двумя внешними гравитонами. Эта аномалия пропорциональна $\text{tr} Y$ (след опять берется по левым фермионам) и также обращается в нуль для стандартного поколения кварков и лептонов. Это тоже дает нетривиальное ограничение на квантовые числа кварков и лептонов.

Первоначально сокращение аномалий понималось как требование, необходимое для перенормируемости стандартной электрослабой теории. Если так понимать требование сокращения аномалий, то, предполагая, что теория струн верна, можно было бы удивляться, почему аномалии кварков и лептонов действительно сокращаются в природе. Теория струн настолько улучшает ультрафиолетовое поведение теории поля, что если бы аномалии относились главным образом к вопросу перенормируемости, то теоретико-полевой анализ аномалий не имел бы отношения к делу. Ведь нас в конце концов не беспокоит тот факт, что по крайней мере одна неперенормируемая теория — общая теория относительности — входит как составная часть в низкоэнергетическое приближение к теории струн. Почему тогда необходимо, чтобы сокращались аномалии кварков и лептонов?

Реальный ответ на этот вопрос заключается в том, что, хотя аномалии и можно рассматривать как ультрафиолетовый эффект, связанный с отсутствием калибровочно-инвариантной регуляризации для определенных диаграмм, их можно также понимать и как инфракрасный эффект. Даже низкоэнергетическую часть аномальной треугольной диаграммы (и ее «высокоэнергетических» родственников) нельзя примирить с калибровочной инвариантностью и унитарностью. Эта точка зрения была

должным образом оценена только под влиянием относительно недавних работ по роли аномалий в составных моделях кварков и лептонов. Но сказанное выше есть не более, чем уточнение того утверждения, которое с самых первых работ на эту тему считалось существенной частью всей истории с аномалиями, а именно что аномалия — это нарушение калибровочной инвариантности, которое нельзя устранить с помощью добавления к эффективному действию каких бы то ни было локальных неведомых модификаций физики на малых расстояниях.

Наша цель состоит в том, чтобы получить ограничения для суперсимметричных теорий в десяти измерениях, аналогичные тем, которые были описаны выше для стандартной модели. В гл. 10 мы вычислили шестиугольную однопетлевую амплитуду в теории суперструн типа I, показанную на рис. 13.3. Там был сделан вывод, что единственная классическая янг-миллсова группа, для которой возможно сокращение аномалии, — это группа $SO(32)$.

Здесь мы рассмотрим низкоэнергетический анализ, который сделает этот результат более прозрачным, а также покажет, что аномалии могут сократиться и для десятимерной $N = 1$ -супергравитации с калибровочной группой $E_8 \times E_8$. Причина адекватности низкоэнергетического анализа только что объяснена ¹⁾. Этот анализ требует рассмотрения потенциально аномальных процессов с внешними калибровочными бозонами и с внешними гравитонами. Результаты, по-видимому, можно проверить с помощью полного однопетлевого вычисления для струн, но на практике до сих пор были выполнены только вычисления, описанные в гл. 10. Провести анализ, конечно, намного проще для низкоэнергетического эффективного действия, и этот подход обладает тем преимуществом, что он не требует никаких знаний или предположений о природе или

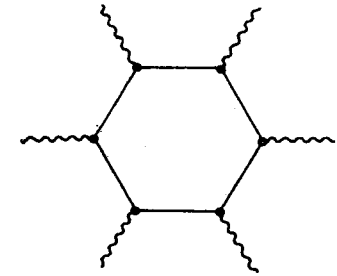


Рис. 13.3. Шестиугольная диаграмма, которая дает аномалии в десяти измерениях.

¹⁾ Точнее низкоэнергетический анализ адекватен для ответа на вопрос, когда аномалии могли бы сократиться при добавлении подходящих контрчленов, но не для выяснения того, когда они действительно сокращаются, что, как мы увидим, зависит от конкретных коэффициентов в определенных членах, возможных в низкоэнергетическом лагранжиане.

о существовании возможных суперструнных теорий. В действительности именно так впервые появилась группа $E_8 \times E_8$, прежде чем стало известно, как включить ее в теорию струн.

13.3.1. Структура аномалий в теории поля

Аномалии представляют собой нарушение калибровочной инвариантности и общей ковариантности. Чтобы исследовать возможность возникновения аномалий, изучают эффективное действие $\Gamma(A_M, g_{MN})$ для калибровочного поля A_M и гравитационного поля g_{MN} , которое получается после интегрирования по всем другим полям. Ставится вопрос о том, является ли это эффективное действие калибровочно-инвариантным и общековариантным. (Эффективное действие Γ не совпадает с рассмотренным ранее объектом $S_{\text{эфф}}$, так как оно получается после интегрирования как по массивным, так и по безмассовым модам.)

Ток, индуцированный данным фоновым полем A , определяется в терминах эффективного действия Γ как

$$J_M = \frac{\delta \Gamma}{\delta A^M}. \quad (13.3.2)$$

Рассмотрим вариацию эффективного действия $\Gamma(A)$ при калибровочном преобразовании $\delta A_M = D_M \Lambda$:

$$G = \delta_\Lambda \Gamma = \text{tr} \int dx D_M \Lambda(x) \frac{\delta}{\delta A_M(x)} \Gamma(A). \quad (13.3.3)$$

Интегрирование по частям показывает, что $G = 0$, если калибровочный ток (13.3.2) ковариантно сохраняется. Таким образом, если имеется аномалия, то калибровочные токи на самом деле не сохраняются. Следствием несохранения таких калибровочных токов является тот факт, что состояния, отвечающие нефизическим поляризациям калибровочных полей, появляются в качестве полюсов S -матрицы, что означает нарушение унитарности. В вычислениях в гл. 10 аномалия описывалась как взаимодействие продольно поляризованного калибровочного поля с пятью поперечно поляризованными. Это в свою очередь означает, что продольная мода появляется как полюс двухпетлевой диаграммы с десятью поперечно поляризованными калибровочными полями на внешних линиях, как показано на рис. 13.4, что несовместимо с унитарностью.

Рассмотрим шестиугольную диаграмму в десяти измерениях только с калибровочными бозонами на внешних линиях. Существует много способов свернуть калибровочные и лоренцевы индексы внешних линий, и, следовательно, есть много инва-

риантных амплитуд, характеризующих шестиугольную диаграмму. Аномальное поведение возникает в действительности только в тех амплитудах, которые нарушают четность (другие можно регуляризовать калибровочно-инвариантным образом), и только в амплитудах, которые полностью симметричны относительно перестановок калибровочных индексов внешних линий. Последнее мы не будем пытаться здесь объяснить сколько-нибудь подробно, а лишь заметим, что это условие возникает в любом вычислении аномалий по теории возмущений, так оно

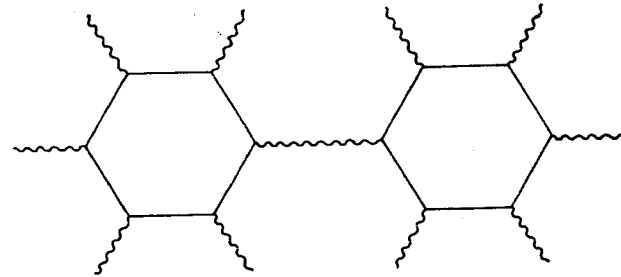


Рис. 13.4. Если продольные моды нельзя исключить из однопетлевых диаграмм, то в двухпетлевых диаграммах они появляются как полюсы.

возникало, например, в гл. 10. Вследствие полной симметричности по калибровочным индексам все внешние калибровочные бозоны можно без потери существенной информации описывать одним и тем же калибровочным генератором T^1). Аномальные петлевые диаграммы с шестью внешними калибровочными бозонами пропорциональны инвариантам шестого порядка, полученным из T . Десятимерная SPT -теорема вынуждает нас иметь дело только с вещественными фермионными представлениями, для которых след от нечетной степени T равен нулю, так что возможные инварианты шестого порядка имеют вид

$$\text{tr } T^6, \text{tr } T^4 \text{tr } T^2, (\text{tr } T^2)^3. \quad (13.3.4)$$

Опишем более конкретно (например, следуя нашему опыту, приобретенному в гл. 10) вид аномальных шестиугольных амплитуд. Удобно ввести обозначение $F_0 = dA$ для линейризованного приближения к напряженности поля Янга — Миллса; линейризованное приближение адекватно, поскольку мы рассмат-

¹⁾ Аномальные диаграммы с более чем шестью внешними калибровочными бозонами в десяти измерениях не являются полностью симметричными по калибровочным индексам, но они однозначно определяются в терминах аномальных шеститочечных амплитуд благодаря условиям согласованности Весса — Зумино, описанным в разд. 13.3.5.

риваем наименьшее число внешних калибровочных бозонов, для которого возникает аномалия. При линеаризованном калибровочном преобразовании $A_M \rightarrow A_M + \partial_M \Lambda$ на одной из внешних линий аномальная вариация шестиугольной амплитуды Γ имеет вид¹⁾

$$\delta\Gamma = \int d^{10}x (c_1 \text{tr} \Lambda F_0^5 + c_2 \text{tr} \Lambda F_0 \text{tr} F_0^4 + c_3 \text{tr} \Lambda F_0 (\text{tr} F_0^2)^2). \quad (13.3.5)$$

В выражении (13.3.5) подразумевается внешнее произведение дифференциальных форм, а подынтегральное выражение, составленное из пяти 2-форм F_0 , представляет собой 10-форму, которую можно проинтегрировать по десятимерному пространству-времени. Аналогичная формула в четырех измерениях — это хорошо знакомая аномалия $\delta\Gamma = \text{tr} \Lambda F^2$, возникающая в треугольной диаграмме. Три коэффициента c_1, c_2, c_3 , отвечающие трем симметричным инвариантам (13.3.4), зависят от калибровочных квантовых чисел частиц, бегающих по шестиугольной петле. Обобщение аномалии до включения членов с более чем шестью внешними калибровочными бозонами не означает просто замены F_0 на калибровочно-инвариантную напряженность F в выражении (13.3.5). Но поскольку аномалии старших порядков сокращаются тогда и только тогда, когда сокращаются аномалии в шеститочечной функции, явный вид выражения (13.3.5) для некоторых целей несуществен. Для доказательства того, что в любой теории аномалия имеет общий вид (13.3.5) только с тремя коэффициентами c_k , зависящими от теории, надо показать, что добавляя, если необходимо, локальные контрчлены, аномалию в любом бозе-симметричном действии можно привести к виду (13.3.5). Это доказательство носит несколько технический характер, и мы ограничимся замечанием, что явные вычисления, подобные вычислениям в гл. 10 или привычным вычислениям четырехмерной аномалии, всегда приводят к ответу указанного вида.

13.3.2. Гравитационные аномалии

Аномалии могут быть также в диаграммах Фейнмана с внешними гравитонами. Такие аномалии называются гравитационными и отвечают нарушению общей ковариантности. Нам уже встречались гравитационные аномалии в двух измерениях (на

¹⁾ Добавля к Γ локальный контрчлен вида $\text{tr} \Lambda F_0 \text{tr} \Lambda F_0^3$, при желании можно сделать так, что коэффициент c_2 будет стоять при $\text{tr} F_0^2 \text{tr} \Lambda F_0^3$ вместо более удобного варианта, который мы выбрали.

мировом листе струны) в разд. 3.2.3. Теперь мы рассмотрим десятимерный случай.

Диаграммы, сохраняющие четность, можно регуляризовать с сохранением общей ковариантности, так что гравитационные аномалии возникают только для полей, гравитационное взаимодействие которых нарушает четность, точнее для полей, квантовые числа которых по группе Лоренца таковы, что их взаимодействия не могут не нарушать четность. В евклидовом пространстве размерности D это происходит с частицами в комплексном представлении группы $SO(D)$, так что лоренц-инвариантность запрещает массовые члены и регуляризация Паули — Вилларса невозможна. Группа $SO(D)$ имеет комплексные представления только в том случае, если D равно $4k + 2$ для некоторого k , поэтому гравитационные аномалии могут возникать только в таких размерностях.

Аналогично калибровочной аномалии гравитационная аномалия в десяти измерениях в первый раз появляется в диаграмме с шестью внешними линиями. Но анализ фейнмановских диаграмм в этом случае несколько длиннее, чем нам бы здесь хотелось, поэтому мы постараемся сформулировать результат в таком виде, чтобы он звучал правдоподобно, а интересующийся читатель может обратиться к литературе.

Аналогия между теорией Янга — Миллса и ОТО становится, конечно, наиболее полной после введения спиновой связности ω_{MAB} , являющейся в десяти измерениях калибровочным полем для группы $SO(10)$. На самом деле аналогия будет, возможно, полнее всего, если рассмотреть в приближении слабого поля гравитационную волну специального вида

$$h_{MN} = h_M h_N e^{ik \cdot x}. \quad (13.3.6)$$

Любую плоскую волну можно записать как линейную комбинацию плоских волн этого специального вида, так что мы не теряем ничего существенного, рассматривая рассеяние гравитационных волн в таком частном случае. Для волны этого специального вида линеаризованная спиновая связность равна

$$\omega_{MAB} = (h_M e^{ik \cdot x}) M_{AB}, \quad (13.3.7)$$

где M_{AB} — генератор группы $SO(10)$:

$$M_{AB} = h_A k_B - h_B k_A. \quad (13.3.8)$$

Спиновую связность (13.3.7) можно рассматривать как $SO(10)$ -калибровочное поле A_{MAB} , которое зависит от точки как $h_M e^{ik \cdot x}$, а его $SO(10)$ -содержание дается генератором M_{AB} группы $SO(10)$. Например, линеаризованный тензор Римана имеет вид

$$R_{0AB} = d\omega_{AB}. \quad (13.3.9)$$

При таком подходе общая кинематика гравитационных аномалий оказывается похожей на кинематику калибровочных аномалий. Действительно, аномалия возникает только в канале, полностью симметричном по «групповым индексам» внешних гравитонов, так что, как и в случае калибровочной аномалии, имеются три возможные комбинации: $\text{tr } M^6$, $\text{tr } M^4 \text{tr } M^2$, $(\text{tr } M^2)^3$. Общий вид аномалии в эффективном действии также аналогичен (13.3.5). Рассмотрим инфинитезимальное преобразование координат специального вида

$$x^M \rightarrow x^M + \varepsilon_0 h^M e^{ik \cdot x} \quad (13.3.10)$$

с малым параметром ε_0 . Преобразуя метрику, согласно стандартным правилам ОТО, мы обнаруживаем, что гравитационное поле остается в виде (13.3.6), но h подвергается калибровочному преобразованию

$$h_M \rightarrow h_M + k_M \varepsilon_0. \quad (13.3.11)$$

В рамках той аналогии, которую мы пытаемся проводить между калибровочными теориями и гравитацией, h_M является «вектором поляризации» «калибровочного поля» (13.3.7). Таким образом, (13.3.11) отвечает правильному закону преобразований этого калибровочного поля при калибровочных преобразованиях. С другой стороны, зарядовая матрица (13.3.8) инвариантна относительно калибровочных преобразований (13.3.11) в точности так же, как в линеаризованном приближении калибровочной теории. Представляется правдоподобным, таким образом, что общий вид аномальной вариации эффективного действия при координатных преобразованиях (13.3.10) очень близок к тому, с чем мы встречались в случае калибровочной теории. Действительно, если ввести матрицу из алгебры Ли группы $SO(10)$ $\Theta = M \varepsilon_0$, то общая форма вариации эффективного действия примет вид

$$\delta \Gamma = \int d^{10} x (d_1 \text{tr } \Theta R_0^5 + d_2 \text{tr } \Theta R_0 \text{tr } R_0^4 + d_3 \text{tr } \Theta R_0 (\text{tr } R_0^2)^2). \quad (13.3.12)$$

Здесь R_0 — 2-форма линеаризованной римановой кривизны, определенная в (13.3.9); как и раньше, подразумевается внешнее произведение пяти 2-форм, а след берется по $SO(10)$ -индексам. Хотя эта формула очень похожа на формулу (13.3.5) для калибровочной теории, конкретные выражения для коэффициентов d_i , скажем в случае шестиугольной аномалии, отвечающей безмассовой частице спина 1/2, коренным образом отличаются от выражений для s_i , что обсуждается более подробно ниже.

Удалось ли нам или нет с помощью эвристических аргументов сделать это правдоподобным, но именно выражение (13.3.12) есть общая форма гравитационных аномалий, возникающая в реальных пертурбативных вычислениях. Читатель, желающий проследить, как выражение (13.3.12) возникает из фейнмановских диаграмм, должен обратиться к литературе. Но мы хотели бы подчеркнуть, что (13.3.12) является корректным общим выражением для изменения шеститочечной амплитуды при инфинитезимальных диффеоморфизмах, которые не обязательно имеют специальный вид (13.3.10), использованный при эвристическом рассмотрении. Если вместо (13.3.10) рассмотреть общий инфинитезимальный диффеоморфизм

$$x^M \rightarrow x^M + \eta^M(x^N), \quad (13.3.13)$$

то равенство (13.3.12) будет по-прежнему выполняться для

$$\Theta_{AB} = D_A \eta_B - D_B \eta_A. \quad (13.3.14)$$

Гравитационные аномалии отвечают нарушению закона сохранения энергии-импульса, точно так же как калибровочные аномалии отвечают несохранению токов. При инфинитезимальном координатном преобразовании вариация метрики равна $\delta g_{MN} = D_M \xi_N + D_N \xi_M$. Поэтому вариация эффективного действия имеет вид

$$\delta \Gamma = \int dx \sqrt{g} (D_M \xi_N + D_N \xi_M) \delta \Gamma / \delta g_{MN}. \quad (13.3.15)$$

Но $\delta \Gamma / \delta g_{MN}$ есть $1/2 \langle T_{MN} \rangle$, где $\langle T_{MN} \rangle$ — среднее значение тензора энергии-импульса гравитационных полей. Таким образом, как в случае (13.3.3), с помощью интегрирования по частям получаем

$$\delta \Gamma = - \int dx \sqrt{g} \xi_N D_M \langle T^{MN} \rangle, \quad (13.3.16)$$

так что гравитационная аномалия соответствует нарушению сохранения тензора энергии-импульса.

13.3.3. Смешанные аномалии

Наконец, можно рассмотреть «смешанные аномалии» с внешними калибровочными бозонами и гравитонами. Как и выше, калибровочные бозоны описываются зарядовой матрицей T , а гравитоны — $SO(10)$ -матрицей M . Так же как чисто калибровочные аномалии и чисто гравитационные аномалии, смешанные аномалии возникают в каналах, полностью симметричных по зарядовым матрицам внешних калибровочных бозонов и аналогично

по $SO(10)$ -матрицам внешних гравитонов. Возникающие теоретико-групповые инварианты принимают вид (имея в виду, что след нечетной степени матрицы T или M в рассматриваемых представлениях равен нулю)

$$\text{tr } T^4 \text{tr } M^2, \quad \text{tr } T^2 \text{tr } M^4, \quad \text{tr } T^2 (\text{tr } M^2)^2, \quad (\text{tr } T^2)^2 \text{tr } M^2. \quad (13.3.17)$$

Общий вид смешанных членов в вариации эффективного действия при калибровочных и координатных преобразованиях (в таких же обозначениях) дается выражением

$$\delta\Gamma = \int d^{10}x (e_1 \text{tr } \Lambda F_0 \text{tr } R_0^4 + e_2 \text{tr } \Theta R_0 \text{tr } F_0^4 + e_3 \text{tr } \Lambda F_0 (\text{tr } R_0^2)^2 + e_4 \text{tr } \Theta R_0 (\text{tr } F_0^2)^2), \quad (13.3.18)$$

где коэффициенты e_i зависят от деталей конкретной теории. Сокращение аномалий в десяти измерениях означает, что все десять коэффициентов c_i , d_j и e_k должны равняться нулю.

Четыре слагаемых в (13.3.18) соответствуют инвариантам (13.3.17). Читатель может спросить, почему опущены некоторые другие, по-видимому возможные, члены, такие как

$$\int d^{10}x \text{tr } \Lambda F_0 \text{tr } F_0^2 \text{tr } R_0^2, \quad (13.3.19)$$

и подобные им члены, в которых калибровочные бозоны и гравитоны поменялись ролями. Ответ заключается в том, что члены вида (13.3.19) можно исключить, заменяя их таким выражением, как слагаемое с коэффициентом e_4 в (13.3.18), если к эффективному действию Γ добавить локальный контрчлен

$$\tilde{\Gamma} = \int d^{10}x \text{tr } AdA \text{tr } F_0^2 \text{tr } \omega d\omega, \quad (13.3.20)$$

где ω — спиновая связность, а A — калибровочное поле. Используя калибровочные преобразования

$$\delta(\text{tr } AdA) = d(\text{tr } \Lambda dA), \quad \delta(\text{tr } \omega d\omega) = d(\text{tr } \Theta d\omega) \quad (13.3.21)$$

(и, конечно, калибровочную инвариантность напряженности F_0 в используемом линеаризованном приближении), читатель может убедиться, что слагаемые вида (13.3.18) можно сократить с помощью добавления локального контрчлена $\tilde{\Gamma}$ (13.3.20) и смешанные аномалии можно привести к виду (13.3.18).

С физической точки зрения мы можем добавить к эффективному действию контрчлен (13.3.20) или любое другое локальное выражение, так как вследствие локальности это не нарушает ни унитарности, ни всех остальных физических принципов. Теория, в которой аномалии могут быть уничтожены добавлением та-

кого контрчлена, как (13.3.20), не является в действительности аномальной, поскольку можно добиться калибровочной инвариантности и общей ковариантности, не нарушая никаких физических принципов. Впоследствии нам будет важна возможность свободно распоряжаться некоторыми кажущимися потенциальными аномалиями посредством добавления членов вида (13.3.20).

13.3.4. Аномальные диаграммы Фейнмана

Отложим на время вывод детальных формул и обсудим теперь общую картину сокращения аномалий с низкоэнергетической точки зрения. Из общих соображений следует, что к обсуждению аномалий имеют отношение только фейнмановские диаграммы с безмассовыми частицами на внутренних линиях. Диаграммы с массивными частицами на внутренних линиях дают локальные амплитуды, аномальное поведение которых,

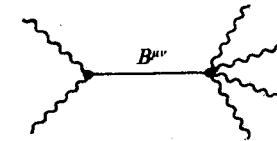


Рис. 13.5. Аномальная диаграмма, в которой два калибровочных бозона (или гравитона) с одной стороны и четыре калибровочных бозона (или два калибровочных бозона и два гравитона, или четыре гравитона) с другой стороны обмениваются безмассовой 2-формой B .

если оно имеет место, несущественно, так как оно устранимо посредством добавления к действию физически допустимых локальных контрчленов. А какие диаграммы с безмассовыми внутренними линиями существенны? Один вариант — это шестиугольная диаграмма на рис. 13.3; именно она наиболее очевидным образом соответствует аномальной треугольной диаграмме в четырех измерениях. В теории суперструн типа IIB существенны только шестиугольные диаграммы. Тем не менее мы узнаем, что в сокращении аномалий в теории суперструн типа I и в теории гетеротических струн играет роль другая аномальная диаграмма, незнакомая нам в четырех измерениях. Это — диаграмма, показанная на рис. 13.5, в которой между глюонами и гравитонами происходит обмен безмассовой 2-формой B . Взаимодействие поля B с двумя глюонами уже фигурировало в обсуждении $N=1$ -супергравитации в десяти измерениях. Мы отмечали, что наивное определение напряженности поля B как $H_0 = dB$ на самом деле заменяется определением $H = dB - \text{tr}(AdA + \frac{2}{3}A^3)$, где добавлена янг-миллсова форма

Черна — Саймонса. Член H^2 включает в себя взаимодействие B с двумя глюонами, а именно

$$S_1 = \int d^{10}x \sqrt{g} (H_0)^{MNP} \text{tr} A_M \partial_N A_P. \quad (13.3.22)$$

Получить такую диаграмму, как на рис. 13.5, можно только, если добавить к лагранжиану член, отсутствующий в минимальной супергравитационной теории и отвечающий взаимодействию B с четырьмя калибровочными бозонами. Оказывается, такое взаимодействие имеет вид

$$S_2 = \int d^{10}x B \wedge \text{tr} F^4. \quad (13.3.23)$$

Заметим, что S_2 инвариантно относительно калибровочных преобразований $\delta B = d\Lambda$ 2-формы B ; чтобы доказать это, надо проинтегрировать по частям и воспользоваться тем, что форма $\text{tr} F^4$ замкнута.

Мысль о присутствии в древесной диаграмме такой аномалии, как на рис. 13.5, может показаться неожиданной, если думать, что аномалии возникают только вследствие ультрафиолетовых расходимостей в петлевых диаграммах. На самом деле выражение (13.3.23) инвариантно относительно янг-миллсовых калибровочных преобразований, если поле B инвариантно при таких преобразованиях. Все это очевидно и естественно для заряженного поля B . Но с другой стороны в разд. 13.1.3 мы выяснили, что член H^2 , из которого получается (13.3.22), является калибровочно-инвариантным, если только поле B не инвариантно относительно калибровочных преобразований. Суммируя, получаем, что, хотя либо выражение (13.3.22), либо выражение (13.3.23) само по себе калибровочно-инвариантно, лагранжиан, содержащий оба этих члена, калибровочно-неинвариантен. Таким образом, комбинация этих двух взаимодействий, появляющаяся на рис. 13.5, нарушает калибровочную инвариантность.

Нетрудно определить форму этого нарушения. При калибровочном преобразовании $\delta A = d\Lambda$ выражение (13.3.22) изменяется на

$$\delta S_1 = - \int d^{10}x \sqrt{g} \text{tr} (\Lambda F^{MN}) D^P H_{MNP}. \quad (13.3.24)$$

Если H^2 — единственный член в лагранжиане, в который входит поле B , то уравнение движения для B имеет вид $D^P H_{MNP} = 0$. В этом случае вариация (13.3.24) обращается в нуль, что отражает тот факт, что сам по себе член (13.3.22) не противоречит калибровочной инвариантности. Но при наличии других взаи-

модействий уравнение $D^P H_{MNP} = 0$ не выполняется. Вследствие взаимодействия (13.3.23) это уравнение на самом деле заменяется уравнением $D^P H_{MNP} = \varepsilon_{MNA_1 A_2 \dots A_6} \text{tr} (F^{A_1 A_2} \dots F^{A_5 A_6})$, так что выражение (13.3.24) принимает вид

$$\delta S_1 = - \int d^{10}x \sqrt{g} \text{tr} (\Lambda F) \wedge \text{tr} F^4, \quad (13.3.25)$$

что в точности совпадает с теми аномалиями, которые мы хотели бы сократить. Эквивалентный способ выразить это на языке диаграмм состоит в том, что если подставить вершину (13.3.24) в диаграмму на рис. 13.5, то $D^P H_{MNP}$ сократится с пропагатором поля B в этой диаграмме, что и даст выражение (13.3.25).

Итак мы видим, что некое экзотическое явление, которое с низкоэнергетической точки зрения выглядит как появление аномальной древесной диаграммы, может привести к сокращению некоторых аномалий, обсуждавшихся выше. Для этого требуется взаимодействие вида (13.3.23), которого нет в минимальной супергравитационной модели, но в теории струн наличие таких членов взаимодействия не вызвало бы удивления.

Попытка сократить аномалии такими диаграммами, как на рис. 13.5, имеет далеко идущие последствия. Основное сокращение аномалий зависит от существования безмассового бозона B , который может переходить в два или четыре глюона (или гравитона при последующих обобщениях). После редукции к четырем измерениям некоторые моды поля B останутся по-прежнему безмассовыми частицами, что мы подробно рассмотрим в гл. 14. Таким образом, мы получим безмассовую бесспиновую частицу a со связью с двумя четырехмерными безмассовыми калибровочными бозонами. Как мы увидим, эта связь имеет вид $a \text{tr} FF$, который встречается в аксионном решении проблемы сильного нарушения CP -инвариантности. Поэтому вполне возможно, что решение CP -проблемы может быть найдено в описанном здесь механизме сокращения аномалий.

Какие же аномалии можно сократить таким способом? Механизм сокращения аномалий требует, чтобы пропагатор поля B не имел ни калибровочных квантовых чисел, ни квантовых чисел для группы $SO(10)$, поэтому сократить можно только аномалии, в которых теоретико-групповые факторы, встречавшиеся выше, факторизуются в произведение следов. Например, в случае полей Янга — Миллса мы можем рассчитывать на сокращение таким способом членов с $\text{tr} T^2 \text{tr} T^4$ или с $(\text{tr} T^2)^3$, но не можем рассчитывать на сокращение членов, отвечающих $\text{tr} T^6$. При достаточно большом числе независимых полей B мы могли бы таким способом сократить все аномалии, кроме двух

неприводимых аномалий $\text{tr } T^6$ и $\text{tr } M^6$. В действительности в десятимерном $N = 1$ -супергравитационном мультиплете есть только одна 2-форма B , и можно сократить только некоторые факторизуемые аномалии, подобрав подходящие неизвестные члены взаимодействия типа (13.3.23). Действительно, чтобы факторизуемую аномалию можно было представить как вычет в полюсе, отвечающем одному полю B на рис. 13.5, она должна в общем случае иметь вид

$$\delta\Gamma = \int d^{10}x (\text{tr } \Lambda F_0 + u \text{tr } \Theta R_0) \wedge (v \text{tr } F_0^4 + w \text{tr } R_0^4 + x (\text{tr } F_0^2)^2 + y (\text{tr } R_0^2)^2 + z \text{tr } F_0^2 \text{tr } R_0^2) \quad (13.3.26)$$

с неопределенными коэффициентами u, v, w, x, y, z . Разумеется, мы имеем право воспользоваться произволом, как в соотношении (13.3.20), и привести аномалии к такому виду. Таким образом, для сокращения аномалий требуется, чтобы неприводимые аномалии $\text{tr } T^6$ и $\text{tr } M^6$ сокращались в шестиугольных диаграммах, а восемь факторизованных аномалий, параметризованных выше с помощью $c_2, c_3, d_3, d_4, e_1, e_2, e_3$ и e_4 , можно было выразить через всего лишь шесть независимых коэффициентов u, v, w, x, y, z . Кроме того, необходимо, конечно, чтобы последние параметры генерировались в теории струн с правильными коэффициентами.

13.3.5. Математическое описание аномалий

В этом разделе (который не является строго необходимым для понимания остальной части главы) мы хотим дать хотя бы общее представление о том, каким образом аномалии с более чем шестью внешними калибровочными бозонами и гравитонами определяются по шестиугольным аномалиям. Читатель, интересующийся подробностями, может обратиться к другим источникам.

Пусть $G(\Lambda)$ — изменение эффективного действия при калибровочном или общекоординатном преобразовании Λ . Таким образом, если Γ — эффективное действие, то

$$G(\Lambda) = \frac{\delta}{\delta\Lambda} \Gamma. \quad (13.3.27)$$

В D измерениях $G(\Lambda)$ всегда представляет собой интеграл по всему пространству-времени от некоторой D -формы I_D^1 . Выше мы встречали некоторые примеры таких форм I_D^1 . В интеграле $G = \int I_D^1$ такая D -форма I_D^1 определена только с точностью до точной формы.

Для аномалий существует важное условие самосогласованности, называемое условием Весса — Зумино. А именно, утверждается, что

$$\delta_{\Lambda_1} G(\Lambda_2) - \delta_{\Lambda_2} G(\Lambda_1) = G(\Lambda), \quad (13.3.28)$$

где

$$\Lambda = [\Lambda_1, \Lambda_2]. \quad (13.3.29)$$

Необходимость этого условия очевидна из соотношений $G(\Lambda) = \delta_{\Lambda} \Gamma$ и (13.3.29).

Существует изящный способ решения условия самосогласованности (13.3.28) в терминах калибровочно-инвариантной $(D+2)$ -формы I_{D+2} . Поскольку мы предполагаем, что пространство-время всего лишь D -мерное, $(D+2)$ -форм в обычном смысле не существует, так что I_{D+2} надо рассматривать как формальное выражение. (На самом деле существует изощренная математическая интерпретация двух дополнительных измерений, требуемых для существования $(D+2)$ -формы, но для наших целей это не нужно.)

Прежде чем объяснить связь между $(D+2)$ -формой I_{D+2} и аномалией G , напомним некоторые факты из гл. 12, касающиеся общей структуры калибровочно-инвариантных дифференциальных форм. При янг-милловых калибровочных преобразованиях 2-форма напряженности поля преобразуется по правилу $\delta F = [F, \Lambda]$. Поэтому $2m$ -форма типа $\text{tr}(F^m)$ является калибровочно-инвариантной вследствие тождества $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$, справедливого для форм четной степени. Если матрицы F записаны в вещественном представлении калибровочной группы, то генераторам отвечают антисимметричные матрицы. В этом случае $\text{tr}(F^m)$ равен нулю, если m нечетное. Этот случай на самом деле представляет первостепенный интерес, поскольку в $D = 4k + 2$ измерениях преобразование CPT приводит к сопряжению в смысле свойств полей относительно калибровочной группы, не изменяя киральности этих полей. Таким образом, сумма произвольного представления и сопряженного ему (если оно отличается) представляет собой вещественное представление.

Как мы знаем, описание гравитационного поля в тетрадном формализме очень похоже на описание полей Янга — Миллса. В частности, спиновую связность ω_M^{AB} можно рассматривать как янг-миллов потенциал, аналогичный A_M . Ее можно записать как 1-форму:

$$\omega^{AB} = \omega_M^{AB} dx^M \quad (13.3.30)$$

и, если опустить вниз один индекс с помощью метрики Минковского, рассматривать как $D \times D$ -матрицу в фундаментальном

представлении алгебры Лоренца $SO(D-1,1)$. С помощью этой связности строится $D \times D$ -матрица 2-форм кривизны

$$R = d\omega + \omega^2, \quad (13.3.31)$$

которая полностью аналогична 2-форме (13.1.34). Выражение ω^2 обозначает как матричное произведение, так и внешнее произведение 1-форм. При инфинитезимальном преобразовании Лоренца, параметром которого служит $SO(D-1,1)$ -матрица Θ , имеем

$$\delta\omega = d\Theta + [\omega, \Theta], \quad (13.3.32)$$

$$\delta R = [R, \Theta]. \quad (13.3.33)$$

Все это полностью аналогично янг-миллсовым калибровочным преобразованиям.

Точно так же как и в янг-миллсовом случае, из форм кривизны можно построить лоренц-инвариантные дифференциальные формы $\text{tr}(R^m)$. Так как R — антисимметричная матрица, эти формы обращаются в нуль, если m нечетное. Теперь можно описать наиболее общие возможные выражения для I_{D+2} . Они даются полиномами, составленными из калибровочно-инвариантных комбинаций $\text{tr}(F^m)$ и $\text{tr}(R^m)$. Эти выражения, содержащие янг-миллсову и гравитационную кривизны, достаточны для описания наиболее общих аномалий, в которых участвуют поля Янга — Миллса и гравитации. Так как F и R являются 2-формами, общее число множителей F и R в каждом слагаемом $(D+2)$ -формы равно $1 + D/2$. Конечно, это возможно только в том случае, если D четное. Но киральные поля, нарушение четности и аномалии могут иметь место только при четных D .

Объясним теперь, как $(D+2)$ -форма I_{D+2} связана с аномалией G . Любая форма типа $\text{tr}(F^m)$ локально может быть записана в виде

$$\text{tr}(F^m) = d\omega_{2m-1}, \quad (13.3.34)$$

где $(2m-1)$ -форма ω_{2m-1} , которая полиномиальна по калибровочным полям и их производным, называется формой Черна — Саймонса. (Формы Черна — Саймонса введены в разд. 12.5.) В случае $m=2$ форма Черна — Саймонса определена явно соотношением (13.1.37). В общем случае имеем формулу

$$\omega_{2m-1}(A) = m \int_0^1 dt t^{m-1} \text{tr}(A(dA + tA^2)^{m-1}). \quad (13.3.35)$$

Поскольку мы хотим рассматривать аналогичные выражения в лоренцевом случае, введем символы $\omega_{2m-1, Y}$ и $\omega_{2m-1, L}$, индексы

которых позволяют различать янг-миллсов и лоренцев случаи. Так как $\text{tr}(F^m)$ и $\text{tr}(R^m)$ — точные формы, отсюда следует, что любой составленный из них полином также есть точная форма. Например,

$$\text{tr}(F^m) \text{tr}(R^n) = d[\omega_{2m-1, Y} \text{tr}(R^n)] = d[\text{tr}(F^m) \omega_{2n-1, L}]. \quad (13.3.36)$$

Здесь мы воспользовались тем, что

$$d \text{tr} F^m = d \text{tr} R^n = 0, \quad (13.3.37)$$

как следует из равенства (13.3.34) и из того, что $d^2 = 0$.

Предположим теперь, что I_{D+2} есть некоторая $(D+2)$ -форма, заданная в виде полинома от $\text{tr} F^m$ и $\text{tr} R^m$ и, таким образом, калибровочно-инвариантная. Поскольку она является также точной, мы можем написать

$$I_{D+2} = dI_{D+1}, \quad (13.3.38)$$

где $(D+1)$ -форма I_{D+1} определена с точностью до замкнутой формы. Хотя I_{D+2} калибровочно-инвариантна, но I_{D+1} в общем случае такой не является. Например, вариация 3-формы Черна — Саймонса при калибровочном преобразовании, как было показано, равна $d \text{tr}(\Lambda dA)$. Если вариация I_{D+1} при калибровочном преобразовании не равна нулю, она всегда является точной. Значит, можно написать

$$\delta I_{D+1} = dI_D^1. \quad (13.3.39)$$

Это, в частности, обеспечивает калибровочную инвариантность I_{D+2} . Выражение I_D^1 представляет собой D -форму, линейную по калибровочным параметрам Λ и Θ (на что указывает верхний индекс). Эта величина задана не однозначно, а с точностью до замкнутой формы, но она однозначно определяет интеграл

$$G = \int I_D^1, \quad (13.3.40)$$

который представляет собой аномалию, связанную с I_{D+2} .

Само построение обеспечивает, что G удовлетворяет условию Весса — Зумино (13.3.28). Чтобы доказать это, предположим, что D -мерное пространственно-временное многообразие M можно представить как границу некоторой $(D+1)$ -мерной области Σ . (В математических обозначениях $M = \partial\Sigma$.) Один из способов добиться этого, если мы работаем в евклидовом пространстве, состоит в том, чтобы добавить точку на бесконечности, так что топологически M становится D -сферой S^D . Тогда в качестве Σ можно взять $(D+1)$ -мерный шар, для которого

$M = S^D$ является его поверхностью. В таком случае аномалию можно переписать следующим образом:

$$G(\Lambda) = \int_M I_D^1 = \int_{\Sigma} dI_D^1 = \delta_{\Lambda} \int_{\Sigma} I_{D+1}. \quad (13.3.41)$$

Тогда из равенства $[\delta_{\Lambda_1}, \delta_{\Lambda_2}] = \delta_{\Lambda}$ следует, что условие (13.3.28) выполняется. Это имеет следующий смысл: $D + 2$ -форма в $D = 2n$ измерениях состоит из $n + 1$ напряженности F и (или) R в каждом слагаемом. Поскольку $F = dA + A^2$ и $R = d\omega + \omega^2$, минимальное число полей, входящих в такое выражение, также равно $n + 1$. Таким образом, «самые малые» аномальные однопетлевые диаграммы — это диаграммы с $n + 1$ внешними калибровочными полями. Но вследствие нелинейности F и R эти формулы определяют также аномалии для диаграмм с большим числом внешних калибровочных полей. В самом деле, очевидно, что член с $n + 1$ калибровочным полем однозначно определяет полную формулу с помощью замены $dA \rightarrow F$ и $d\omega \rightarrow R$. Следовательно, если аномалии с $n + 1$ калибровочной частицей на внешних линиях выводятся с помощью явных вычислений диаграмм Фейнмана, то общую формулу можно получить без дальнейших вычислений.

13.3.6. Аномалии других типов

В дополнение к калибровочным и гравитационным аномалиям можно задаться вопросом: возможны ли аномалии, нарушающие локальную суперсимметрию в некоторых из тех десятимерных супергравитационных теорий, которые в остальном свободны от аномалий? Хотя большинство специалистов в данной области считают это невозможным, убедительных аргументов пока не дано.

Выше мы рассматривали только инфинитезимальные калибровочные и координатные преобразования. Отсутствие аномалий относительно таких инфинитезимальных преобразований влечет за собой отсутствие аномалий и для всех тех калибровочных и координатных преобразований, которые можно получить непрерывной деформацией из тождественного преобразования. При этом остается вопрос о возможных аномалиях в тех калибровочных или координатных преобразованиях, которые невозможно непрерывно деформировать в тождественное. Такие «глобальные» аномалии представляют собой пространственно-временной аналог аномалий в модулярных преобразованиях на мировой поверхности. Имеется доказательство того, что пространственно-временных глобальных аномалий не бывает в таких

десятимерных супергравитационных теориях, в которых сокращаются пертурбативные аномалии, но это доказательство слишком длинное, чтобы его можно было здесь изложить.

13.4. Явные формулы для аномалий

Выше мы обсудили общий вид аномалий в произвольной десятимерной теории. Теперь мы рассмотрим вид аномалий, которые в интересующих нас случаях реально возникают из шестиугольных диаграмм.

Начнем с чисто гравитационных аномалий. Они возникают в шестиугольных диаграммах только при наличии полей, преобразующихся по комплексным представлениям группы $SO(10)$. Например, майорана-вейлевский спинор λ из мультиплета $N = 1$, $D = 10$ -супергравитации относится к 16-мерному спинорному представлению. Это комплексное представление с сопряженным ему представлением $\overline{16}$. Подобный киральный гравитон может принадлежать представлению 144 или $\overline{144}$. При $D = 4k + 2$ группа $SO(D)$ также имеет комплексные бозонные представления. Простейшим примером является самодуальный или антисамодуальный тензор ранга $2k + 1$

$$F_{M_1 \dots M_{2k+1}} = \pm \frac{i}{(2k+1)!} \varepsilon_{M_1 \dots M_{2k+1} N_1 \dots N_{2k+1}} F^{N_1 \dots N_{2k+1}}. \quad (13.4.1)$$

Важным примером является самодуальный тензор пятого ранга, встречающийся в супергравитации типа IIB.

Явное вычисление гравитационных аномалий можно выполнить в «минимальном» случае, рассмотрев петлю с $2k + 2$ внешними гравитонами (для $D = 4k + 2$). Здесь удобна регуляризация Паули — Вилларса; аномалию тогда можно вычислить, пользуясь тем же общим способом, что и в случае янг-милловых аномалий. На практике необходимо применить ряд приемов, чтобы успешно справиться с комбинаторикой. Остановимся на этом, чтобы сообщить результаты.

Как мы узнали, гравитационная аномалия в десяти измерениях записывается в терминах инварианта шестого порядка от $SO(10)$ -матрицы M ; возможны инварианты $\text{tr } M^6$, $\text{tr } M^4 \text{tr } M^2$ и $(\text{tr } M^2)^3$. В более общем виде получаем, что в $4k + 2$ измерениях мы сталкиваемся с инвариантами порядка $2k + 2$, такими как $\text{tr } M^{2k+2}$ и т. д. Чтобы наше рассмотрение больше соответствовало принятой в математике терминологии, мы будем далее использовать обозначение R (как для 2-формы кривизны) вместо M . Подчеркнем, однако, что, хотя R и возникает в некоторых математических рассуждениях (как в разд. 13.3.5) в качестве

Аномалии $I_{3/2}$ и I_A описываются аналогичными симметричными функциями. В частности,

$$\begin{aligned}\widehat{I}_{3/2} &= \widehat{I}_{1/2} \left(-1 + 2 \sum_{i=1}^{2k+1} \cosh x_i \right) = \\ &= \widehat{I}_{1/2} \left(D - 1 + 4Y_2 + \frac{4}{3}Y_4 + \frac{8}{45}Y_6 + \dots \right).\end{aligned}\quad (13.4.10)$$

В важном случае, когда $D = 10$, для дальнейшего полезно заметить, что

$$\begin{aligned}(\widehat{I}_{3/2} - \widehat{I}_{1/2})_6 &= \frac{496}{2835}Y_6 + \left(\frac{496}{1080} - \frac{2}{3} \right)Y_2Y_4 + \left(\frac{496}{1296} - \frac{1}{3} \right)Y_2^3 = \\ &= \frac{1}{2835} (496Y_6 - 588Y_2Y_4 + 140Y_2^3).\end{aligned}\quad (13.4.11)$$

Наконец, аномалия для антисимметричного тензора описывается выражением

$$\begin{aligned}\widehat{I}_A &= -\frac{1}{8} \prod_{i=1}^{2k+1} \frac{x_i}{\tanh x_i} = -\frac{1}{8} - \frac{1}{6}Y_2 + \left(\frac{7}{45}Y_4 - \frac{1}{9}Y_2^2 \right) + \\ &+ \frac{1}{2835} (-496Y_6 + 588Y_2Y_4 - 140Y_2^3) + \dots\end{aligned}\quad (13.4.12)$$

В дополнение к описанным выше чисто гравитационным аномалиям необходимы также формулы для аномалий в таких диаграммах, которые содержат как внешние гравитоны, так и внешние калибровочные поля или только внешние калибровочные поля. Такие аномалии характеризуются инвариантами, которые составлены из зарядовой матрицы T , обозначаемой далее через F для согласования с математической терминологией, а также из $SO(10)$ -матрицы R . Смешанные аномалии в $4k+2$ измерениях содержат члены, общий порядок по F и R каждого из которых равен $2k+2$. Однопетлевые аномалии в диаграммах, содержащих внешние калибровочные поля, возникают только для петель, составленных из киральных полей, несущих янг-миллсов заряд. В наших приложениях единственными безмассовыми киральными полями, несущими калибровочные квантовые числа, являются вейлевские спиноры. Следовательно, надо найти обобщение формулы только для $I_{1/2}$, содержащее зависимость от напряженности поля Янга — Миллса. Оказывается, что

искомое правило удивительно простое:

$$\widehat{I}_{1/2}(F, R) = \text{tr}(e^{iF}) \widehat{I}_{1/2}(R), \quad (13.4.13)$$

где $\widehat{I}_{1/2}(R)$ — величина, составленная с помощью выражения (13.4.6). Как и выше, смысл формулы (13.4.13) состоит в том, что в случае $4k+2$ измерений ее надо разложить по степеням F и R и оставить только члены порядка $2k+2$.

След в выражении для $\text{tr} e^{iF}$ должен браться в том представлении, в котором лежат киральные поля спина $1/2$. Если $\text{tr} F^{2m+1} = 0$, как бывает для вещественных представлений, то $\text{tr} e^{iF}$ можно заменить на $\text{tr} \cos F$. Используя разложение в ряд

$$\text{tr} \cos F = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m)!} \text{tr}(F^{2m}), \quad (13.4.14)$$

а также разложение (13.4.7), можно получить и разложение в ряд для $\widehat{I}_{1/2}(F, R)$. Отметим, что формула (13.4.13) в частном случае дает и чисто гравитационную аномалию. Первый член ряда (13.4.14) — это $\text{tr}(1) = n$, где n — размерность представления, которому принадлежат киральные фермионы. Как можно было ожидать, для чисто гравитационной аномалии играют роль только число и спин таких полей. Остальные же их теоретико-групповые свойства несущественны.

Из формул (13.4.7), (13.4.13) и (13.4.14) мы узнаем, что для $D = 2$ аномалия дается выражением

$$\widehat{I}_{1/2}(F, R) = \frac{n}{48} \text{tr} R^2 - \frac{1}{2} \text{tr} F^2, \quad (13.4.15)$$

а для $D = 6$ — выражением

$$\widehat{I}_{1/2}(F, R) = \frac{1}{24} \text{tr} F^4 - \frac{1}{96} \text{tr} F^2 \text{tr} R^2 + \frac{n}{128} \left(\frac{1}{45} \text{tr} R^4 + \frac{1}{36} (\text{tr} R^2)^2 \right). \quad (13.4.16)$$

Аналогично при $D = 10$ находим

$$\begin{aligned}\widehat{I}_{1/2}(F, R) &= -\frac{1}{720} \text{tr} F^6 + \frac{1}{24 \cdot 48} \text{tr} F^4 \text{tr} R^2 - \\ &- \frac{1}{256} \text{tr} F^2 \left[\frac{1}{45} \text{tr} R^4 + \frac{1}{36} (\text{tr} R^2)^2 \right] + \\ &+ \frac{n}{64} \left[\frac{1}{2 \cdot 2835} \text{tr} R^6 + \frac{1}{4 \cdot 1080} \text{tr} R^2 \text{tr} R^4 + \frac{1}{8 \cdot 1296} (\text{tr} R^2)^3 \right].\end{aligned}\quad (13.4.17)$$

Формулы этого раздела отвечают случаю аномалий для комплексных вейлевских фермионов. Если в $8k + 2$ измерениях мы хотим рассматривать майорана-вейлевские фермионы, то необходимо результат разделить на 2.

13.5. Сокращение аномалий

Как мы видели, поля материи с киральными взаимодействиями вызывают появление чисто гравитационных аномалий в случае размерности пространства-времени, равной $D = 4k + 2$. Киральные поля, встречающиеся в $D = 10$ -супергравитации, могут быть трех типов, описанных в предыдущем разделе.

Для аномалий в десяти измерениях соответствующие члены имеют шестой порядок по зарядовым матрицам F и R (на языке разд. 13.3.5 аномалии описываются 12-формами). Теперь мы хотим узнать, происходит ли сокращение аномалий при объединении различных вкладов. Поэтому можно отбросить общий для различных вкладов множитель и сосредоточить внимание на выражениях для $I_{3/2}$, $I_{1/2}$ и I_A , определенных в предыдущем разделе. Сначала рассмотрим чисто гравитационные аномалии. Из формул (13.4.7), (13.4.11) и (13.4.12) следует, что члены шестого порядка имеют вид

$$\begin{aligned} (\hat{I}_{1/2})_6 &= -\frac{1}{2835} Y_6 - \frac{1}{1080} Y_2 Y_4 - \frac{1}{1296} Y_2^3, \\ (\hat{I}_{3/2})_6 &= \frac{495}{2835} Y_6 - \frac{225}{1080} Y_2 Y_4 + \frac{63}{1296} Y_2^3, \\ (\hat{I}_A)_6 &= -\frac{496}{2835} Y_6 + \frac{224}{1080} Y_2 Y_4 - \frac{64}{1296} Y_2^3. \end{aligned} \quad (13.5.1)$$

13.5.1. Супергравитация типа I без материи

Легко рассмотреть случай супергравитации типа I без калибровочных взаимодействий (или теории суперструн типа I, содержащей только замкнутые струны). Полями с аномальными взаимодействиями в этих теориях являются безмассовое майорана-вейлевское поле гравитино и безмассовое майорана-вейлевское поле спина $1/2$ противоположной киральности. Сумма их вкладов в аномалию характеризуется величиной $1/2(I_{3/2} - I_{1/2})$. (Множитель $1/2$ объяснен в конце предыдущего раздела.) Поскольку $(I_{3/2} - I_{1/2})_6 \neq 0$, аномалия в чистой $N = 1$ -супергравитации не сокращается. К вкладам от шестиугольных диаграмм необходимо добавить вклады, отвечающие обмену полем B , описанные в разд. 13.3.4, которые подробнее

исследуются в разд. 13.5.3. Но этот механизм не может привести к сокращению членов вида Y_6 . Следовательно, теории струн (или, если уж на то пошло, никакой теории иного типа), которая имела бы чистую $N = 1$, $D = 10$ -супергравитацию в качестве низкоэнергетического приближения и была бы свободна от аномалий, существовать не может.

13.5.2. Супергравитация типа IIB

В случае супергравитации типа IIB имеется комплексное гравитино одной киральности, комплексный спинор другой киральности и поля с антисимметричным самодуальным тензором напряженности. Полный вклад в аномалию этих полей дается комбинацией $I_{3/2} - I_{1/2} + I_A$. Эта комбинация демонстрирует «загадочное» сокращение — первое нетривиальное сокращение аномалий, которое мы обнаруживаем в десятимерной теории супергравитации или суперструн:

$$(\hat{I}_{3/2})_6 - (\hat{I}_{1/2})_6 + (\hat{I}_A)_6 = 0. \quad (13.5.2)$$

Коэффициенты здесь в точности такие, чтобы сократились по отдельности члены трех разных типов. Сокращение в формуле (13.5.2), где нет никаких произвольных параметров, значения которых можно было бы подобрать, представляет собой весьма замечательный факт, хотя он, возможно, не столь удивителен в свете прекрасных свойств сходимости ориентированных однопетлевых суперструнных диаграмм.

13.5.3. Разрешенные калибровочные группы для $N = 1$ -теорий суперструн

В разд. 13.5.1 мы видели, что в чистой $N = 1$, $D = 10$ -супергравитации имеются аномалии, благодаря которым она не может быть низкоэнергетическим пределом некоторой безаномальной теории струн. Введем теперь взаимодействие с супермультиплетом Янга — Миллса. В этом случае дополнительно имеется n левых майорана-вейлевских спиноров, принадлежащих присоединенному представлению группы (n — размерность этого представления). Полная аномалия, обусловленная шестиугольными однопетлевыми диаграммами, пропорциональна

$$\hat{I} = \hat{I}_{3/2}(R) - \hat{I}_{1/2}(R) + \hat{I}_{1/2}(F, R). \quad (13.5.3)$$

Комбинируя (13.4.11) и (13.4.17) (и используя соответствие (13.4.8)), выражаем эту величину через полином шестого

порядка¹⁾

$$\begin{aligned} \widehat{I}_{12} = & -\frac{1}{720} \text{Tr } F^6 + \frac{1}{24 \cdot 48} \text{Tr } F^4 \text{tr } R^2 - \\ & - \frac{1}{256} \text{Tr } F^2 \left[\frac{1}{45} \text{tr } R^4 + \frac{1}{36} (\text{tr } R^2)^2 \right] + \\ & + \frac{n-496}{64} \left[\frac{1}{2 \cdot 2835} \text{tr } R^6 + \frac{1}{4 \cdot 1080} \text{tr } R^2 \text{tr } R^4 + \frac{1}{8 \cdot 1296} (\text{tr } R^2)^3 \right] + \\ & + \frac{1}{384} \text{tr } R^2 \text{tr } R^4 + \frac{1}{1536} (\text{tr } R^2)^3. \quad (13.5.4) \end{aligned}$$

Здесь мы используем для обозначения следа в случае калибровочных полей символ Tr вместо символа tr , чтобы подчеркнуть, что данный след берется в присоединенном представлении. Матрицы кривизны являются, конечно, десятимерными и отвечают фундаментальному представлению группы $O(9, 1)$ или группы $O(10)$. Собственно аномалии даются выражениями вида $G = \int I_{10}^1$, где I_{10}^1 построено из I_{12} , как описано в разд. 13.3.5.

Аномалия (13.5.4) определенно не равна нулю при любом выборе числа n . Но с помощью аномальных диаграмм, отвечающих обмену полей B , можно получить вклад, сокращающий аномалию, при условии, что I_{12} представимо в факторизованном виде

$$I_{12} = (\text{tr } R^2 + k \text{Tr } F^2) X_8, \quad (13.5.5)$$

где k — постоянная, а X_8 — полином четвертой степени по F и R . Этот вопрос мы уже обсуждали в разд. 13.3.4, а здесь рассмотрим его подробнее. Прежде всего выясним условия, при которых возникает факторизация.

Необходимым условием того, чтобы выражение (13.5.4) факторизовалось в виде (13.5.5), является обращение в нуль коэффициента при $\text{tr } R^6$. Здесь дело в том, что $\text{tr } R^6$ нельзя представить в виде комбинации выражений $\text{tr } R^2 \text{tr } R^4$ и $(\text{tr } R^2)^3$. Причина заключается в том, что для группы $SO(10)$ имеется независимый инвариант Казимира шестого порядка, который входит в выражение $\text{tr } R^6$, вычисленное в фундаментальном представлении. Таким образом, необходимое условие факторизации аномалии (13.5.4) имеет вид $n = 496$, т. е. янг-миллсова группа должна иметь 496 генераторов. Это впервые дает возможный ответ на вопрос: Сколько в природе янг-милловских симметрий? Если $N = 1$ -теория суперструн справедлива, то для анализа требуется

¹⁾ Здесь авторы возвращаются к обозначениям разд. 13.5.5: \widehat{I}_{12} обозначает инвариантную 12-форму (в разд. 13.3.5 в общем случае рассматривались D -формы I_D) в отличие от введенных на время обозначений $I_{1/2}$, $I_{3/2}$. — Прим. перев.

дополнительно 484 генератора симметрии, кроме тех, которые уже получили экспериментальное подтверждение. Полагая $n = 496$ и умножая выражение (13.5.4) на 48, перепишем его в виде

$$\begin{aligned} \widehat{I}_{12} \sim & -\frac{1}{15} \text{Tr } F^6 + \frac{1}{24} \text{Tr } F^4 \text{tr } R^2 - \frac{1}{960} \text{Tr } F^2 [4 \text{tr } R^4 + 5 (\text{tr } R^2)^2] + \\ & + \frac{1}{8} \text{tr } R^2 \text{tr } R^4 + \frac{1}{32} (\text{tr } R^2)^3. \quad (13.5.6) \end{aligned}$$

Это выражение можно факторизовать в виде (13.5.5) только в том случае, если $\text{Tr } F^6$ можно представить как линейную комбинацию выражений $\text{Tr } F^2 \text{Tr } D^4$ и $(\text{Tr } F^2)^3$. Делая допущение, с помощью элементарных вычислений можно непосредственно показать, что единственная возможность — случай, когда $k = -1/30$ и

$$\text{Tr } F^6 = \frac{1}{48} \text{Tr } F^2 \text{Tr } F^4 - \frac{1}{14400} (\text{Tr } F^2)^3. \quad (13.5.7)$$

Тогда находим

$$\begin{aligned} X_8 = & \frac{1}{24} \text{Tr } F^4 - \frac{1}{7200} (\text{Tr } F^2)^2 - \frac{1}{240} \text{Tr } F^2 \text{tr } R^2 + \\ & + \frac{1}{8} \text{tr } R^4 + \frac{1}{32} (\text{tr } R^2)^2. \quad (13.5.8) \end{aligned}$$

Мы должны теперь задаться вопросом, для каких 496-мерных калибровочных групп выполняется условие (13.5.7). Сначала рассмотрим группы $SO(n)$. След в фундаментальном представлении группы $SO(n)$ будем обозначать символом tr , а след в присоединенном представлении — символом Tr . Можно получить конкретные формулы, связывающие два типа следов. Пусть дан некоторый генератор F группы $SO(n)$. В фундаментальном представлении F — просто антисимметричная $n \times n$ -матрица F_{ac} . В присоединенном представлении F имеет вид

$$F_{ab, cd} = \frac{1}{2} (F_{ac} \delta_{bd} - F_{bc} \delta_{ad} - F_{ad} \delta_{bc} + F_{bd} \delta_{ac}). \quad (13.5.9)$$

С помощью этой формулы легко найти, что

$$\text{Tr } F^2 = (n-2) \text{tr } F^2, \quad (13.5.10)$$

$$\text{Tr } F^4 = (n-8) \text{tr } F^4 + 3 (\text{tr } F^2)^2, \quad (13.5.11)$$

$$\text{Tr } F^6 = (n-32) \text{tr } F^6 + 15 \text{tr } F^2 \text{tr } F^4 \quad (13.5.12)$$

и т. д. Отсюда следует, что, например, в случае группы $SO(32)$

$$\text{Tr } F^6 = 15 \text{tr } F^2 \text{tr } F^4. \quad (13.5.13)$$

Это как раз тот случай, когда $\text{Tr } F^6$ факторизуется, хотя группа имеет независимый инвариант шестого порядка. Он просто не вносит вклад в $\text{Tr } F^6$. Этот инвариант дает вклад в $\text{tr } F^6$, и его нельзя факторизовать, но это для нас не имеет значения.

Из формулы (13.5.12) видно, что среди групп $SO(n)$ группа $SO(32)$ — единственная группа, для которой существует инвариант Казимира шестого порядка, но $\text{Tr } F^6$ можно все же факторизовать¹⁾. Используя также соотношения (13.5.10) и (13.5.11), обнаруживаем, что выполняется условие (13.5.7) с правильными в точности коэффициентами! Наконец, размерность $SO(32)$ равна $31 \times 32/2 = 496$, как и требуется. Таким образом, $SO(32)$ — одно из решений.

Как это ни удивительно, но существует вторая 496-мерная группа, удовлетворяющая условию (13.5.7). Поскольку размерность группы E_8 равна 248, прямое произведение двух таких групп $E_8 \times E_8$ имеет правильную размерность. Известно, что группа E_8 не имеет независимых инвариантов Казимира четвертого и шестого порядков. Это означает, что $\text{Tr } F^4$ пропорционален $(\text{Tr } F^2)^2$, а $\text{Tr } F^6$ пропорционален $(\text{Tr } F^2)^3$. Задача состоит в том, чтобы найти коэффициенты пропорциональности. Элементарный метод решения состоит в том, чтобы заметить, что группа E_8 имеет подгруппу $SO(16)$, по отношению к которой присоединенное представление группы E_8 разлагается по правилу $248 = 120 + 128$, как объясняется в приложении 6.A. Здесь 120 — присоединенное представление группы $SO(16)$, а 128 — спинорное. Вычислить след легко для специальных $SO(16)$ -матриц как в представлении 120, так и в представлении 128. С помощью этих результатов можно найти коэффициент пропорциональности для суммы, которая отвечает представлению 248 группы E_8 . Таким способом находим

$$\begin{aligned} \text{Tr } F^4 &= \frac{1}{100} (\text{Tr } F^2)^2, \\ \text{Tr } F^6 &= \frac{1}{7200} (\text{Tr } F^2)^3. \end{aligned} \quad (13.5.14)$$

Какой вывод отсюда следует для прямого произведения $E_8 \times E_8$? В этом случае $\text{Tr } F^{2m}$ означает $\text{Tr } F_1^{2m} + \text{Tr } F_2^{2m}$, где индексы 1 и 2 относятся к двум сомножителям E_8 . Следовательно, чтобы выполнялось соотношение (13.5.7), должно выполняться равенство

$$\begin{aligned} \frac{1}{7200} [(\text{Tr } F_1^2)^3 + (\text{Tr } F_2^2)^3] &= \\ &= \frac{1}{48} (\text{Tr } F_1^2 + \text{Tr } F_2^2) \frac{1}{100} [(\text{Tr } F_1^2)^2 + (\text{Tr } F_2^2)^2] - \\ &\quad - \frac{1}{14400} (\text{Tr } F_1^2 + \text{Tr } F_2^2)^3. \end{aligned} \quad (13.5.15)$$

¹⁾ $\text{Tr } F^6$ можно факторизовать также для группы $SO(n)$ при малых n , когда инвариант Казимира шестого порядка отсутствует, так что саму величину $\text{Tr } F^6$ можно выразить через $\text{Tr } F^2$ и $\text{Tr } F^4$, но число генераторов при этом будет намного меньше, чем 496.

Примечательно, что перекрестные члены сокращаются и равенство выполняется.

Соотношение $1/30 \text{Tr } F^2 = \text{tr } F^2$ является тождеством для группы $SO(32)$ (см. (13.5.10)). Мы находим полезным использовать эту формулу как определение символа tr для группы $E_8 \times E_8$. (В последнем случае это совпадает со стандартным определением следа tr для генераторов из подгруппы $SO(16) \times SO(16)$, которая имеет 32-мерное фундаментальное представление.)

Можно было бы поинтересоваться, существуют ли другие 496-мерные группы, удовлетворяющие условию (13.5.7). Ответ состоит в том, что имеются еще две группы. Это группы $[U(1)]^{496}$ и $E_8 \otimes [U(1)]^{248}$. Для них условие (13.5.7) удовлетворяется тривиальным образом, так как след для сомножителей обращается в нуль. Не известно теорий струн, отвечающих какой-либо из этих групп, и представляется совершенно невероятным, чтобы какая-нибудь интересная теория могла основываться на одной из них.

Обратимся теперь к источнику условия факторизации (13.5.5), которое мы теперь запишем в виде $I_{12} = (\text{tr } R^2 - \text{tr } F^2) X_8$. Мы уже обсудили значение условия факторизации в разд. 13.3.4, но ввиду его фундаментальной важности вернемся к нему, чтобы рассмотреть его более формально. В этом более формальном рассмотрении будем считать аномалии формальными 12-формами, как в разд. 13.3.5.

Из того факта, что I_{12} — точная форма, $I_{12} = dI_{11}$, следует, что X_8 точна, а значит, замкнута. (Глобальные свойства здесь несущественны.) Далее, мы знаем, что $\text{tr } R^2 = d\omega_{3L}$ и $\text{tr } F^2 = d\omega_{3Y}$, где ω_{3L} и ω_{3Y} — лоренцева и янг-миллсова формы Черна — Саймонса, которые в янг-миллсовом случае определены соотношением (13.1.37), а в лоренцевом случае — аналогичным выражением, получающимся заменой A на спиновую связность ω . Следовательно, возможный выбор I_{11} имеет вид

$$I_{11}^{(a)} = (\omega_{3L} - \omega_{3Y}) X_8. \quad (13.5.16)$$

При локальных калибровочных преобразованиях X_8 инвариантна, в то время как, согласно равенству (13.1.39), имеем $d\omega_{3Y} = d\omega_{2Y}^1$. Аналогично при локальных преобразованиях Лоренца $d\omega_{3L} = d\omega_{2L}^1$, где $\omega_{2L}^1 = \text{tr}(\Theta d\omega)$. Другой возможный выбор I_{11} имеет вид

$$I_{11}^{(b)} = (\text{tr } R^2 - \text{tr } F^2) X_7, \quad (13.5.17)$$

где $dX_7 = X_8$. Какой из этих выборов правильный? Статистика Бозе требует, чтобы каждая из напряженностей входила равноправно. (Это дает «самосогласованную» форму аномалии, которая удовлетворяет условию самосогласованности Весса — Зумино (13.3.28).) Поэтому надо выбрать линейную комбинацию

$$I_{11} = \frac{1}{3} (\omega_{3L} - \omega_{3Y}) X_8 + \frac{2}{3} (\text{tr } R^2 - \text{tr } F^2) X_7 + \alpha d [(\omega_{3L} - \omega_{3Y}) X_7]. \quad (13.5.18)$$

Здесь α — произвольный параметр, а последнее слагаемое отвечает неопределенности в определении I_{11} . Тогда можно определить форму I_{10} соотношением $\delta I_{11} = dI_{10}$, а форму X_6^1 соотношением $\delta X_7 = dX_6^1$. Это дает

$$I_{10} = \left(\frac{2}{3} + \alpha\right) (\text{tr } R^2 - \text{tr } F^2) X_6^1 + \left(\frac{1}{3} - \alpha\right) (\omega_{2L}^1 - \omega_{2Y}^1) X_8 \quad (13.5.19)$$

по модулю точных форм, которые не важны для аномалии $G = \int I_{10}$. Интегрирование по частям дает

$$G = \left(\frac{2}{3} + \alpha\right) \int (\omega_{3L} - \omega_{3Y}) dX_6^1 + \left(\frac{1}{3} - \alpha\right) \int (\omega_{2L}^1 - \omega_{2Y}^1) X_8. \quad (13.5.20)$$

В соответствии с обсуждением в разд. 13.3.4 мы хотим теперь построить локальные вклады в эффективное действие безмассовых полей, которые могут дать аномалии в древесных диаграммах¹⁾. Как и выше, центральным вопросом является закон преобразований (13.1.41). Было обнаружено, что структура суперсимметрии во взаимодействующей системе «супергравитация плюс суперянг-миллсова теория» требует, чтобы 2-форма B преобразовывалась под действием янг-миллсовых калибровочных преобразований по правилу $\delta B = \omega_{2Y}^1$. Единственное, что остается, — заменить такой закон преобразования на

$$\delta B = \omega_{2Y}^1 - \omega_{2L}^1, \quad (13.5.21)$$

поскольку тогда при добавлении к лагранжиану контрчлена

$$\Delta \Gamma = \int B X_8 - \left(\frac{2}{3} + \alpha\right) \int (\omega_{3L} - \omega_{3Y}) X_7 \quad (13.5.22)$$

¹⁾ Струнная интерпретация этих новых локальных вкладов состоит в том, что они возникают после того, как в однопетлевых диаграммах проводится интегрирование по массивным модам. Таким образом, аномальные древесные диаграммы низкоэнергетической теории получаются, как в гл. 10, на более микроскопическом уровне как петлевые вклады.

аномалии сокращаются. Это выражение единственно с точностью до калибровочно-инвариантных членов.

Если вариация δB кроме ω_{2Y}^1 должна содержать еще ω_{2L}^1 , то почему мы не обнаружили этого члена в разд. 13.1.2? Причина состоит в том, что в низкоэнергетическом разложении ω_{2L}^1 имеет более высокий порядок, чем ω_{2Y}^1 , поэтому этот член не возникает в минимальном, урезанном до $n = 2$, варианте теории. При переходе от янг-миллсовых выражений к их лоренцевым аналогам мы заменяем калибровочное поле A на спиновую связность ω . Но спиновая связность линейна по производным от тетрады, поэтому мы получаем члены более высокого порядка согласно правилу (13.1.1). Это проявляется уже в минимальной теории, где кинетические члены R и F^2 имели степень $n = 2$ каждый. Из модифицированной формулы преобразований (13.5.21) следует, что калибровочно-инвариантная 3-форма напряженности (13.1.48) также должна быть заменена на

$$H = dB + \omega_{3L} - \omega_{3Y}. \quad (13.5.23)$$

Отметим одно интересное следствие равенства (13.5.23). Взяв внешнюю производную от (13.5.23), получаем

$$dH = \text{tr } R^2 - \text{tr } F^2. \quad (13.5.24)$$

Три-форма H должна быть хорошо определена глобально, так как $H_{MNP} H^{MNP}$ входит в выражение для плотности энергии. Отсюда следует, что для любого замкнутого четырехмерного подмногообразия M_4 в десятимерном пространстве-времени M_{10} имеем

$$\int_{M_4} dH = \int_{M_4} (\text{tr } R^2 - \text{tr } F^2) = 0. \quad (13.5.25)$$

Другими словами, класс когомологий 4-формы $\text{tr } R^2 - \text{tr } F^2$ тривиален.

Может показаться, что выбор $\Delta \Gamma$, необходимый для сокращения аномалий, взят с потолка. Дело, конечно, в том, что в точности этот контрчлен должен с необходимостью возникать в эффективном действии для теорий суперструн типа $SO(32)$ и $E_8 \times E_8$.

13.5.4. $SO(16) \times SO(16)$ -теория

Теория $SO(16) \times SO(16)$ -гетеротических струн описана в разд. 9.5.3, где также показано, что для нее выполняется условие однопетлевой модулярной инвариантности. Здесь мы проверим условие сокращения калибровочных и гравитационных аномалий в соответствующем низкоэнергетическом действии. В отличие

от других теорий струн без тахионов эта теория не суперсимметрична (или, возможно, ее следует интерпретировать как теорию, в которой суперсимметрия спонтанно нарушена).

В противоположность другим теориям струн в $SO(16) \times SO(16)$ -теории однопетлевые амплитуды не являются конечными, поскольку в отсутствие суперсимметрии дилатонные головастики вносят инфракрасные расходимости. Это может служить поводом для беспокойства, но как показано в разд. 9.5.3, эта теория удовлетворяет условию однопетлевой модулярной инвариантности — условию отсутствия аномалий относительно глобальных диффеоморфизмов на мировой поверхности. В суперсимметричных вариантах гетеротической струны модулярная инвариантность выполняется именно в тех случаях ($SO(32)$ и $E_8 \times E_8$), когда сокращаются шестиугольные аномалии. Такая связь наводит на мысль, что $SO(16) \times SO(16)$ -теория должна быть свободна от аномалий. Теперь мы проверим это предположение и выясним, что происходит на самом деле.

Киральные поля $SO(16) \times SO(16)$ -теории состоят только из майорана-вейлевских спиноров. В терминах физических поляризации, которые описываются поперечной группой $SO(8)$ и группой внутренних симметрий $SO(16) \times SO(16)$, эти поля отвечают представлениям

$$(8_s; 16, 16), \quad (8_c; 128, 1), \quad (8_c; 1, 128). \quad (13.5.26)$$

Поскольку это все киральные поля, которые существуют, полная аномалия пропорциональна 12-форме, содержащейся в качестве соответствующей компоненты в выражении

$$\hat{I}_{1/2}(F, R) = \text{Tr}(\cos F) \hat{I}_{1/2}(R). \quad (13.5.27)$$

Здесь $\text{Tr}(\cos F)$ обозначает выражение

$$\text{tr}_{16 \times 16}(\cos F) - \text{tr}_{128 \times 1}(\cos F) - \text{tr}_{1 \times 128}(\cos F), \quad (13.5.28)$$

где индексы указывают на представление группы $SO(16) \times SO(16)$, в котором надо записать матрицу 2-форм F , а относительные знаки являются отражением относительной киральности пространственно-временных спиноров.

Первое, что следует отметить относительно формулы (13.5.28), это тот факт, что если разложить $\cos F$ в ряд $1 - \frac{1}{2}F^2 + \dots$, то член, отвечающий единичной матрице 1, обращается в нуль, поскольку $16 \times 16 - 128 - 128 = 0$. Этот факт отвечает тому, что число левых спиноров равно числу правых, и в результате чисто гравитационная аномалия сокращается. В отличие от $N = 1$ -теорий, в которых требовалось 496 спиноров, чтобы уравновесить чисто гравитационную аномалию, идущую от гравитации, в рассматриваемом случае сокращение чисто гравитационных анома-

лий не определяет общее число спиноров, а лишь требует, чтобы было равное число обеих киральностей. Тем не менее теория, конечно, остается киральной, поскольку левые и правые спиноры принадлежат разным представлениям калибровочной группы.

Разложение выражения (13.5.27) с помощью соотношений (13.4.7) и (13.4.8) дает следующий результат:

$$-\frac{1}{2} \text{Tr} F^2 \left[\frac{1}{180 \cdot 512} \text{tr} R^4 + \frac{1}{72 \cdot 64} (\text{tr} R^2)^2 \right] + \frac{1}{24 \cdot 48} \text{Tr} F^4 \text{tr} R^2 - \frac{1}{15 \cdot 48} \text{Tr} F^6. \quad (13.5.29)$$

Как и в предыдущем разделе, попытаемся факторизовать это выражение в виде $(\text{tr} R^2 + k \text{tr} F^2) X_8$, где $\text{tr} F^2$ вычисляется в некотором подходящем представлении. Поскольку $\text{tr} R^4$ нельзя выразить через $\text{tr} R^2$ и в то же время отсутствует слагаемое вида $\text{tr} R^2 \text{tr} R^4$, необходимо, чтобы $\text{Tr} F^2 = 0$. Исследуем сначала это последнее условие, а затем вернемся к остальной части выражения.

Рассмотрим единственную группу $SO(16)$ в качестве калибровочной группы. В этом случае с помощью элементарных вычислений, аналогичных тем, которые проведены в предыдущем разделе, можно показать, что

$$\begin{aligned} \text{tr}_{128} F^6 &= 16 \text{tr} F^6 + \frac{15}{4} (\text{tr} F^2)^3 - 15 \text{tr} F^2 \text{tr} F^4, \\ \text{tr}_{128} F^4 &= 6 (\text{tr} F^2)^2 - 8 \text{tr} F^4, \\ \text{tr}_{128} F^2 &= 16 \text{tr} F^2, \end{aligned} \quad (13.5.30)$$

где следы в правых частях вычисляются в фундаментальном представлении 16. Используя индексы 1 и 2, чтобы различать первый и второй сомножители $SO(16)$, запишем

$$\begin{aligned} \text{tr}_{16 \times 16} F^2 &= 16 \text{tr} F_1^2 + 16 \text{tr} F_2^2, \\ \text{tr}_{128 \times 1} F^2 &= 16 \text{tr} F_1^2, \\ \text{tr}_{1 \times 128} F^2 &= 16 \text{tr} F_2^2. \end{aligned} \quad (13.5.31)$$

Отсюда следует, что

$$\text{Tr} F^2 = \text{tr}_{16 \times 16} F^2 - \text{tr}_{128 \times 1} F^2 - \text{tr}_{1 \times 128} F^2 = 0. \quad (13.5.32)$$

Аналогичные вычисления дают

$$\begin{aligned} \frac{1}{15} \text{Tr} F^6 &= \frac{1}{4} [(\text{tr} F_1^2)^3 + (\text{tr} F_2^2)^3] - \\ &\quad - (\text{tr} F_1^2 + \text{tr} F_2^2) (\text{tr} F_1^4 + \text{tr} F_2^4), \end{aligned} \quad (13.5.33)$$

$$\frac{1}{24} \text{Tr} F^4 = \frac{1}{4} [(\text{tr} F_1^2)^2 + (\text{tr} F_2^2)^2 - \text{tr} F_1^2 \text{tr} F_2^2] - \text{tr} F_1^4 - \text{tr} F_2^4. \quad (13.5.34)$$

Подставляя (13.5.32), (13.5.33) и (13.5.34) в формулу (13.5.29) и умножая на 48, получаем факторизованный результат:

$$(\operatorname{tr} R^2 - \operatorname{tr} F_1^2 - \operatorname{tr} F_2^2) X_8, \quad (13.5.35)$$

где $X_8 = \frac{1}{24} \operatorname{Tr} F^4$ дается формулой (13.5.34).

Так как в спектре $SO(16) \times SO(16)$ -теории содержится безмассовая 2-форма B_{MN} , мы можем теперь завершить доказательство сокращения аномалий с помощью в точности такого же рассуждения, как и в предыдущем разделе. Потребуем, чтобы янг-миллсовы и лоренцевы преобразования 2-формы имели вид

$$\delta B = \omega_{2Y}^1 - \omega_{2L}^1, \quad (13.5.36)$$

и построим калибровочно-инвариантную напряженность поля

$$H = dB + \omega_{3L} - \omega_{3Y}. \quad (13.5.37)$$

Здесь подразумевается, что след матриц в определениях форм ω_{2Y}^1 и ω_{3Y} берется в представлении $(16; 1) + (1, 16)$ группы $SO(16) \times SO(16)$. Как и раньше, X_7 определяется соотношением $X_8 = dX_7$, а контрчлен в эффективном действии дается такой же формулой, как (13.5.22):

$$\Delta \Gamma = \int BX_8 - \left(\frac{2}{3} + \alpha\right) \int (\omega_{3L} - \omega_{3Y}) X_7. \quad (13.5.38)$$

В разд. 9.3 описана техника, позволяющая построить довольно много модулярно-инвариантных десятимерных теорий струн с тахионами. С помощью вычислений, аналогичных только что описанным, можно обнаружить, что все эти теории оказываются свободными от аномалий.

14. Компактификация высших измерений

Поскольку суперструнные теории с необходимостью являются десятимерными теориями, любое обсуждение феноменологии должно начинаться с рассмотрения вопроса, каким образом наблюдаемая четырехмерная физика связана с лежащей в основе десятимерной физикой. Этому вопросу и посвящена настоящая глава. Обсуждение проводится в константе теории поля, но с акцентом на тех свойствах, которые зависят только от допущений качественного характера, а не от численных деталей и, таким образом, могут быть справедливы и в теории струн. Наши усилия в этой главе будут направлены не на подробную разработку моделей компактификации, а на то, чтобы сформулировать постановку задачи и ввести некоторые важные понятия.

14.1. Волновые операторы в десяти измерениях

Большая часть предшествующих глав посвящена распространению струн в десятимерном плоском пространстве Минковского M^{10} , но с этого момента мы будем считать, что десятимерное пространство-время — это более общее многообразие M . Возьмем M вида $M^4 \times K$, где M^4 — четырехмерное пространство Минковского, а K — компактное шестимерное многообразие, которое, к сожалению, пока неизвестно. Точнее говоря, мы считаем, что *вакуумное* состояние является произведением $M^4 \times K$; это необходимо, если мы хотим сохранить четырехмерную пуанкаре-инвариантность. Разумеется, физические флуктуации необязательно будут подчиняться той же форме прямого произведения, что и вакуумная конфигурация, но, как и во многих других областях физики, понимание основного состояния является ключом к пониманию низкоэнергетических возбуждений. Действительно, мы увидим, что огромное число разных физических вопросов сводится к вопросам о топологии и геометрии многообразия K .

14.1.1. Безмассовые поля в десяти измерениях

Десятимерные индексы будем обозначать как $M, N, P = 1, \dots, 10$; десятимерные пространственно-временные координаты — как $X^M, M = 1, \dots, 10$. Индексами, касательными к M^4 , будут $\mu, \nu, \lambda = 1, \dots, 4$; координаты в пространстве M^4 будем обозначать $x^\mu, \mu = 1, \dots, 4$. Обозначениями индексов, касательных к K , будут служить, $i, j, k = 5, \dots, 10$, а координатами в K будут $y^i, i = 5, \dots, 10$.

Как обычно в дифференциальной геометрии, на данном n -мерном римановом многообразии Q касательные векторы в произвольной точке $p \in Q$ образуют n -мерное векторное пространство T_p — касательное пространство в точке p . Ортогональные преобразования пространства T_p образуют группу (группу касательного пространства), изоморфную (если сигнатура метрики на Q положительна) группе $SO(n)$. Группы касательного пространства для многообразий $M^4 \times K, M^4$ и K — это соответственно группы $SO(1, 9), SO(1, 3)$ и $SO(6)$. Разумеется, группа $SO(1, 3) \times SO(6)$ является подгруппой группы $SO(1, 9)$, где $SO(1, 3)$ действует на первые четыре компоненты, а $SO(6)$ — на последние шесть компонент 10-вектора для $SO(1, 9)$. Группа касательного пространства для многообразия Q не совпадает с группой симметрий Q , которая может быть больше или меньше. Многообразие Q может вообще не иметь симметрий, но его группа касательного пространства зависит только от сигнатуры и размерности. Касательная группа — это группа симметрий для измерений, выполняемых в малой области пространства-времени, и в этом качестве она входит в «принцип эквивалентности» Эйнштейна.

«Спин» физического поля Ψ в n -мерном пространстве-времени определяется выбором представления X касательной группы. В любой данной точке p поля преобразуются по представлению X касательной группы. Это означает, что в десятимерной физике можно ввести поле, компоненты которого (в любой данной точке p) преобразуются по любому представлению группы $SO(1, 9)$. Для установления связи между десятимерной и четырехмерной физиками надо прежде всего осознать, что поле, имеющее простой спиновый состав в десяти измерениях, может с четырехмерной точки зрения иметь достаточно сложный состав спинов, поскольку простое представление группы $SO(1, 9)$ может быть довольно сложным и приводимым как представление группы $SO(1, 3) \times SO(6)$. На практике имеется пять случаев, которые следует рассмотреть.

1. Калибровочные поля

Калибровочное поле A_M преобразуется по векторному представлению $SO(1, 9)$, и мы уже отмечали, что оно разлагается относительно $SO(1, 3) \times SO(6)$ как $(4, 1) \oplus (1, 6)$. Это равносильно высказыванию, что калибровочное поле $A_M, M = 1, \dots, 10$, в четырехмерном случае расщепляется на векторное поле $A_\mu, \mu = 1, \dots, 4$, и скаляры $A_i, i = 5, \dots, 10$. Если предположить, что в десяти измерениях A_M было калибровочным полем для некоторой калибровочной группы G , а следовательно, преобразовывалось по присоединенному представлению G , то и A_μ , и A_i будут преобразовываться по этому представлению. Это означает, что в десятимерной теории можно объединить то, что с четырехмерной точки зрения выглядит, как калибровочное поле A_μ и поля Хигса A_i в присоединенном представлении. Здесь (а также в других примерах, обсуждаемых ниже) мы на самом деле принимаем во внимание только спин; если учесть зависимость от y , например для $A_\mu(x^\nu, y^i)$, то мы получим бесконечное число четырехмерных полей.

2. Метрический тензор

Аналогично разлагается и метрический тензор $g_{MN}, M, N = 1, \dots, 10$. Компоненты $g_{\mu\nu}, \mu, \nu = 1, \dots, 4$, образуют четырехмерный метрический тензор, в то время как компоненты $g_{\mu k}, \mu = 1, \dots, 4, k = 5, \dots, 10$, — с четырехмерной точки зрения — поля спина один, а $g_{mn}, m, n = 5, \dots, 10$, — поля спина нуль.

3. Дифференциальные формы

Другими безмассовыми бозонными полями, возникающими в суперструнных теориях, являются антисимметричные тензорные поля $\Phi_{M_1 M_2 \dots M_k}$, которые антисимметричны по всем своим индексам. Как говорилось в гл. 12, такое поле в математической литературе называется k -формой, или дифференциальной формой степени k . Калибровочное поле можно рассматривать как 1-форму (со значениями в некоторой алгебре Ли), но этот случай ввиду его особой важности мы обсудим отдельно. Разложение k -формы относительно $SO(1, 3) \times SO(6)$ имеет очень простой вид: компоненты с q индексами, принимающими значения $1, \dots, 4$, и $k - q$ индексами, принимающими значения $5, \dots, 10$, преобразуются по $SO(1, 3)$ как q -форма, а по $SO(6)$ — как $(k - q)$ -форма.

4. Дираковские поля

Для построения спинорного представления $SO(1, 9)$ вводятся десять гамма-матриц Γ_M , $M = 1, \dots, 10$, которые удовлетворяют соотношению $\Gamma_M \Gamma_N + \Gamma_N \Gamma_M = 2\eta_{MN}$. Тогда генераторы группы $SO(1, 9)$ имеют вид $\Sigma_{MN} = [\Gamma_M, \Gamma_N]/4$. Для построения спинора для $SO(1, 3)$ потребовались бы только четыре гамма-матрицы γ_μ , $\mu = 1, \dots, 4$. Первые четыре матрицы Γ_M можно рассматривать как гамма-матрицы для $SO(1, 3)$. Тогда $SO(1, 9)$ -определение генератора Σ_{MN} для $M, N = 1, \dots, 4$ совпадает со стандартной $SO(1, 3)$ -формулой $\sigma_{\mu\nu} = [\gamma_\mu, \gamma_\nu]/4 = \gamma_{\mu\nu}/2$, так что спинорное поле для $SO(1, 9)$ преобразуется как спинор и для $SO(1, 3)$. Те же соображения (использующие только последние шесть матриц Γ_M) показывают, что $SO(1, 9)$ -спинор преобразуется как спинор для группы $SO(6)$. Сделанные замечания следовало бы дополнить обсуждением киральности; мы вернемся к этому важному вопросу ниже.

5. Поля Рариты — Швингера

Поле Рариты — Швингера $\psi_{M\alpha}$ имеет векторный $SO(1, 9)$ -индекс M и спинорный индекс α . Мы уже рассмотрели разложение относительно $SO(1, 3) \times SO(6)$ для векторных и для спинорных индексов по отдельности, и теперь легко объединить результаты этих двух рассмотрений. Компоненты с $M = 1, \dots, 4$ преобразуются как вектор-спинор (или как поле Рариты — Швингера) для $SO(1, 3)$ и как спинор для $SO(6)$, а компоненты с $M = 5, \dots, 10$ преобразуются как спинор для $SO(1, 3)$ и как вектор-спинор для $SO(6)$.

14.1.2. Нулевые моды волновых операторов

После того как рассмотрено разложение десятимерных полей согласно их спиновой структуре в четырех измерениях, следующим шагом должно быть определение масс полей с четырехмерной точки зрения. В качестве характерного примера рассмотрим случай дираковского поля Ψ , которое в десяти измерениях удовлетворяет уравнению

$$0 = i\hat{D}_{10}\Psi = i \sum_{M=1}^{10} \Gamma^M D_M \Psi, \quad (14.1.1)$$

где \hat{D}_{10} — десятимерный оператор Дирака. Это уравнение можно переписать в виде

$$0 = i(\hat{D}_4 + \hat{D}_K)\Psi. \quad (14.1.2)$$

Мы ввели здесь четырехмерный и внутренний операторы Дирака

$$\hat{D}_4 = \sum_{\mu=1}^4 \Gamma^\mu D_\mu, \quad \hat{D}_K = \sum_{p=5}^{10} \Gamma^p D_p, \quad (14.1.3)$$

которые удовлетворяют очевидному тождеству

$$\hat{D}_{10} = \hat{D}_4 + \hat{D}_K. \quad (14.1.4)$$

Из уравнения (14.1.2) сразу ясно, что \hat{D}_K представляет собой нечто вроде «массового» оператора, собственные значения которого с четырехмерной точки зрения являются массами фермионов.

Ввиду уравнения (14.1.2) прежде всего возникает мысль попробовать решить десятимерное уравнение Дирака с помощью разделения переменных в терминах общих собственных векторов для \hat{D}_4 и \hat{D}_K . Но это не проходит, поскольку операторы \hat{D}_4 и \hat{D}_K не коммутируют, а, наоборот, антикоммутируют, так что их нельзя диагонализировать одновременно (кроме сектора, состоящего из нулевых мод оператора \hat{D}_K). Правильной процедурой является введение оператора четырехмерной киральности $\Gamma^{(4)} = i\Gamma_1\Gamma_2\Gamma_3\Gamma_4$ и переписывание уравнения (14.1.2) в следующем, очевидно, эквивалентном, виде:

$$0 = i(\tilde{D}_4 + \tilde{D}_K)\Psi, \quad (14.1.5)$$

где $\tilde{D}_4 = \Gamma^{(4)}\hat{D}_4$, $\tilde{D}_K = \Gamma^{(4)}\hat{D}_K$. Теперь \tilde{D}_4 и \tilde{D}_K коммутируют, и их можно диагонализировать одновременно. Рассмотрим полный набор нормированных решений $\phi_i(y^k)$ задачи на собственные значения

$$i\tilde{D}_K\phi_i(y^k) = \lambda_i\phi_i(y^k). \quad (14.1.6)$$

Уравнение Дирака (14.1.5) решается в терминах

$$\Psi(x^\mu, y^k) = \sum_i \psi_i(x^\mu) \phi_i(y^k), \quad (14.1.7)$$

где ψ_i должны удовлетворять условию

$$0 = (i\tilde{D}_4 + \lambda_i)\psi_i(x^\mu). \quad (14.1.8)$$

Таким образом, в четырех измерениях каждое ψ_i выглядит как фермион массы λ_i . Необходимо отметить, что операторы \hat{D}_4 и \hat{D}_K в этих уравнениях эквивалентны стандартным операторам Дирака \hat{D}_4 и \hat{D}_K , так как $\tilde{\Gamma}_\mu = i\Gamma^{(4)}\Gamma_\mu$, $\mu = 1, \dots, 4$ и $\tilde{\Gamma}_k = \Gamma^{(4)}\Gamma_k$, $k = 5, \dots, 10$, удовлетворяют правильным антикоммутационным соотношениям для гамма-матриц на многообразиях M^4 и K соответственно.

С учетом усовершенствования, приведшего к разделению переменных (14.1.7), или без него основной вывод состоит в том, что именно нулевые моды оператора \hat{D}_K отвечают безмассовым фермионам в четырех измерениях. С другой стороны, ненулевые собственные значения уравнения Дирака на K , по-видимому, порядка $1/R$, где R — радиус компактного пространства K . Величина $1/R$, по-видимому, порядка массы Планка 10^{19} ГэВ; если так, эти частицы вряд ли наблюдаемы. Все известные фермионы в рассматриваемом приближении должны быть безмассовыми частицами; они должны отвечать нулевым модам оператора \hat{D}_K . Поэтому в последующем рассмотрении много внимания уделяется выяснению вопроса, существуют ли и почему существуют нулевые моды \hat{D}_K .

Замечания, аналогичные тем, которые сделаны выше для дираковских полей, можно сделать и о полях Рариты — Швингера, и о встречающихся различных бозонных полях. В каждом таком случае массы (с четырехмерной точки зрения) определяются собственными значениями некоторого подходящего волнового оператора Ω_K на многообразии K , и именно нулевые собственные значения проявляются в четырех измерениях в существовании безмассовых частиц. Разделение переменных, подобное (14.1.7), в каждом случае можно произвести без особых затруднений для безмассовых состояний и с несколько большим трудом для массивных. Нулевые собственные значения оператора \hat{D}_K и его аналогов для частиц других спинов играют центральную роль во всех феноменологических рассуждениях; поэтому они будут предметом нашего основного интереса в остальной части этой главы. Ниже мы последовательно рассмотрим нулевые моды фермионных операторов, нулевые моды дифференциальных форм и нулевые моды возмущений калибровочных и гравитационных полей. Мы разовьем также многие математические методы, которые важны для понимания феноменологии компактификации. Ближе к концу этой главы мы применим все это, чтобы сформулировать результаты, которые могут оказаться реалистической картиной квантовых чисел фермионов в природе.

14.2. Безмассовые фермионы

После того как мы определили оператор Дирака, мы хотим обсудить его нулевые моды, которые, согласно вводным замечаниям в начале главы, связаны с безмассовыми фермионами в четырех измерениях. Прежде чем углубиться в математику, связанную с нулевыми модами, перечислим кратко экспериментальные данные, для которых мы хотим найти описание. В при-

роде наблюдается несколько поколений кварков и лептонов спина $1/2$. Они известны главным образом через их калибровочные взаимодействия, которые определяются выбором представлений V_L и V_R для фермионов левой и правой киральности соответственно. Одним из самых важных фактов является то, что представления V_L и V_R не совпадают. Так, например, в терминах предполагаемой группы $SU(5)$ великого объединения представление V_L (для одного поколения) состоит из $\bar{5} + 10$, а V_R состоит из $5 + \bar{10}$. Поскольку из CPT -теоремы следует, что V_R изоморфно представлению, комплексно-сопряженному V_L , утверждение о том, что V_L отличается от V_R , эквивалентно утверждению, что V_L реализует комплексное представление калибровочной группы (комплексное представление — это просто такое представление, которое неизоморфно комплексно-сопряженному).

Наблюдаемые фермионы, конечно, имеют чрезвычайно малую массу по сравнению с масштабом масс великого объединения или гравитации; в противном случае они не были бы наблюдаемы. Почему это так? До тех пор пока калибровочные симметрии сохраняются, левый фермион может получить массу только посредством спаривания с правым фермионом, несущим такие же калибровочные квантовые числа (поскольку массивные частицы спина $1/2$ имеют два состояния определенной спиральности, которые должны иметь одинаковые калибровочные заряды). Тот факт, что левые и правые фермионы преобразуются относительно калибровочной группы по-разному, означает, что они должны оставаться безмассовыми, пока калибровочная группа не нарушена. В природе мы видим, что наблюдаемые кварки и лептоны остаются безмассовыми вплоть до масштаба масс порядка нескольких сотен ГэВ, на котором электрослабая калибровочная группа нарушается до подгруппы, отвечающей электромагнетизму. После этого фермионы будут в вещественном представлении остающейся калибровочной группы, и они могут получить и получают массы, за исключением, возможно, нейтрино. Мы не знаем, почему масштаб нарушения симметрии, отвечающей слабому взаимодействию, так мал по сравнению с массой Планка; в этом состоит проблема иерархии. Но мы по крайней мере понимаем причину малой массы кварков и лептонов в терминах малости массы W - и Z -бозонов; она заключается в киральной асимметрии между левыми и правыми фермионами, о которой мы говорили.

В природе могут существовать и другие фермионы, образующие вещественное представление калибровочной группы. (Такие частицы определенно существуют, если теория супер-

струн правильна.) Если это так, то возможны очень большие калибровочно-инвариантные массы для этих фермионов, и такие массы, по-видимому, возникли, поскольку мы не наблюдаем этих частиц. Есть все основания считать, что киральная асимметрия — единственная причина, по которой мы вообще можем наблюдать какие-либо фермионы, причем фермионы, которые мы наблюдаем, — это в точности те фермионы, которые имеют малую массу вследствие киральной асимметрии. Нашей целью при изучении нулевых мод оператора Дирака в десяти измерениях является попытка понять происхождение четырехмерной киральной асимметрии.

14.2.1. Индекс оператора Дирака

Обратимся теперь к изучению десятимерного оператора Дирака. Как мы узнали из приложения 5.A, размерность спинорного представления для $SO(10)$ или $SO(1,9)$ равна $2^5 = 32$. Кроме того, в случае лоренцевой сигнатуры $\{-++++\}$ матрицы Дирака Γ_M , удовлетворяющие условию $\{\Gamma_M, \Gamma_N\} = 2g_{MN}$, можно выбрать так, чтобы они были вещественными матрицами размера 32×32 . Чрезвычайно важны операторы киральности

$$\Gamma^{(10)} = \Gamma_1 \Gamma_2 \dots \Gamma_{10},$$

$$\Gamma^{(4)} = i\Gamma_1 \Gamma_2 \Gamma_3 \Gamma_4, \quad (14.2.1)$$

$$\Gamma^{(K)} = -i\Gamma_5 \Gamma_6 \dots \Gamma_K.$$

Эти три оператора мы будем называть десятимерным, четырехмерным и внутренним операторами киральности соответственно. Множители $\pm i$ введены для того, чтобы выполнялось условие

$$(\Gamma^{(10)})^2 = (\Gamma^{(4)})^2 = (\Gamma^{(K)})^2 = 1, \quad (14.2.2)$$

а также условие

$$\Gamma^{(10)} = \Gamma^{(4)} \Gamma^{(K)}. \quad (14.2.3)$$

Оба эти равенства в дальнейшем будут очень важны.

Как мы узнали в гл. 4 (при изучении GSO-проекции) и в гл. 13 (при изучении десятимерной супергравитации), безмассовые фермионы в десяти измерениях удовлетворяют условию киральности, которое здесь мы выберем в виде $\Gamma^{(10)} = +1$. Тот факт, что это условие можно наложить, зависит, помимо прочего, от вещественности гамма-матриц, благодаря которой $\Gamma^{(10)}$ вещественна и ее собственные векторы могут быть собственными векторами оператора CPT . Наложение этого условия десятимерной киральности в терминах редукции на многообразии $M^4 \times K$ означает, что

$$\Gamma^{(4)} = \Gamma^{(K)}. \quad (14.2.4)$$

Равенство (14.2.4) устанавливает связь между четырехмерной и внутренней киральностями.

Теперь можно задать наш главный вопрос: «Почему оператор Дирака на K может иметь нулевые собственные значения?» В действительности вопрос о топологических условиях существования нулевых собственных значений операторов Дирака является весьма обширным и очень интересным вопросом. В этой книге мы будем иметь дело только с простейшим топологическим инвариантом, связанным с нулевыми собственными значениями операторов Дирака; им является индекс оператора Дирака. Именно это понятие оказывается непосредственно связанным с киральной асимметрией в четырех измерениях; чтобы описать это понятие, определим «гамма-индекс»

$$H (i\hat{D}_K)^2. \quad (14.2.5)$$

Так как $[H, \Gamma^{(K)}] = 0$, собственные состояния для H можно выбрать так, чтобы они были в то же время собственными состояниями оператора $\Gamma^{(K)}$. Если $H\psi = E\psi$, то $H \cdot i\hat{D}_K \psi = E \cdot i\hat{D}_K \psi$, так что ψ и $i\hat{D}_K \psi$ всегда вырождены по энергии. Поскольку $\hat{D}_K \Gamma^{(K)} = -\Gamma^{(K)} \hat{D}_K$, состояния ψ и $i\hat{D}_K \psi$ отвечают противоположным собственным значениям $\Gamma^{(K)}$ и являются линейно-независимыми, за исключением случая $i\hat{D}_K \psi = 0$. Следовательно (рис. 14.1), собственные состояния H с ненулевой энергией всегда спарены. Для каждого состояния с $\Gamma^{(K)} = +1$ имеется состояние с $\Gamma^{(K)} = -1$ и наоборот. Но состояния, отвечающие нулевым собственным значениям, не обязательно спарены этим способом. Обозначим число нулевых собственных значений оператора $i\hat{D}_K$ с $\Gamma^{(K)} = \pm 1$ через n_{\pm} . Тогда индекс оператора $i\hat{D}_K$ определяется обычно как разность $n_+ - n_-$. Эту величину будем обозначать символом $\text{index } \hat{D}_K$.

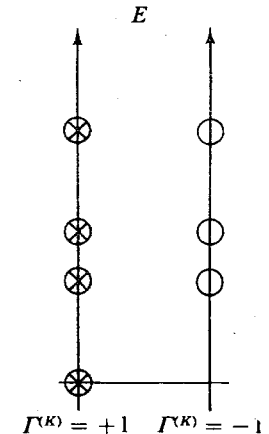


Рис. 14.1. Собственные значения «гамма-индекса» H с ненулевой энергией спарены. Такого спаривания может не быть для нулевых собственных значений. На рисунке моды положительной и отрицательной киральности обозначены символами \otimes и \odot соответственно; по вертикальной шкале отложены собственные значения E для H .

Индекс является важным понятием, так как он инвариантен относительно произвольных гладких деформаций оператора \hat{D}_K , сохраняющих его эрмитовость и основное соотношение $\Gamma^{(K)}\hat{D}_K = -\hat{D}_K\Gamma^{(K)}$. Причина заключается в том, что никакая гладкая деформация картины, изображенной на рис. 14.1, сохраняющая спаривание при ненулевых E , не может изменить ту разницу в числе состояний, которая может иметься при $E = 0$. При гладких деформациях спектра, сохраняющих спаривание при ненулевых E , числа n_+ и n_- могут изменяться, но

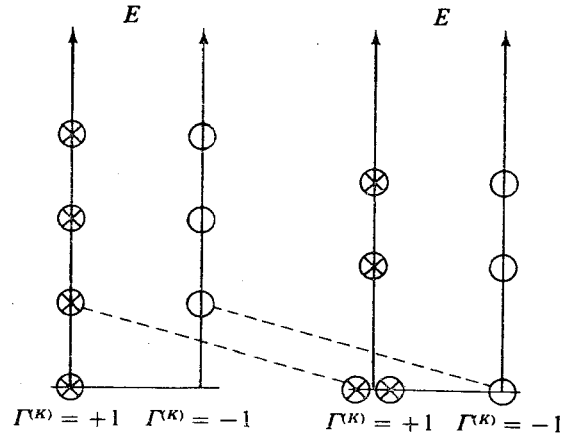


Рис. 14.2. Непрерывная деформация спектра гамильтониана H , сохраняющая спаривание при ненулевой энергии, может изменить n_+ и n_- , но не может изменить индекс, равный разности $n_+ - n_-$. На рисунке изображен процесс, когда пара состояний, первоначально имевших ненулевую энергию, принимает нулевую энергию, причем как n_+ , так и n_- изменяются на $+1$.

они изменяются обязательно на одну и ту же величину, как на рис. 14.2, оставляя индекс инвариантным. Инвариантность индекса при гладких деформациях спектра означает, в частности, что индекс является топологическим инвариантом.

Мы не упоминали пока о вакуумных средних калибровочных полей, и в самом деле до сих пор мало что зависело от того, присутствуют они или нет. Но если специально рассмотреть случай, когда вакуумное среднее калибровочного поля равно нулю, то легко доказать, что индекс на шестимерном компактном многообразии K равен нулю. (То же доказательство справедливо и в $4k + 2$ измерениях для любого k , и мы будем интересоваться также случаем двух измерений, т. е. $k = 0$, отвечающим случаю волновых операторов на мировом листе струны.) Дело в том, что, так как гамма-матрицы вещественны,

уравнение на нулевые моды оператора \hat{D}_K инвариантно относительно комплексного сопряжения. Но матрица $\Gamma^{(K)}$ чисто мнимая и при комплексном сопряжении меняет знак. Таким образом, если ψ — нулевая мода \hat{D}_K одной киральности, то ее комплексно-сопряженная ψ^* — нулевая мода противоположной киральности. Поэтому комплексное сопряжение дает спаривание между нулевыми модами противоположной киральности, обеспечивая равенство $n_+ = n_-$ и обращение в нуль индекса. Имеется простое «физическое» объяснение этого результата в четырех измерениях, которое мы рассмотрим немного ниже.

14.2.2. Учет калибровочных полей

До сих пор мы не рассматривали калибровочные поля, но их учет существен. Рассмотрим калибровочные поля с калибровочной группой J и со спинорами в некотором представлении Q . Индекс оператора Дирака \hat{D}_K можно определить тем же способом, и он по-прежнему будет топологическим инвариантом, но теперь это означает, что индекс зависит от топологии K и от всей топологической информации, заложенной в определении вакуумного среднего калибровочного поля на K . Тем не менее можно рассмотреть операцию комплексного сопряжения дираковских волновых функций. Комплексное сопряжение по-прежнему обращает киральность, но теперь оно заменяет представление Q комплексно-сопряженным представлением Q^* . Следовательно, число нулевых мод в представлении Q с положительной (или отрицательной) киральностью такое же, как число нулевых мод в представлении Q^* с отрицательной (или положительной) киральностью. Это означает, что индекс оператора Дирака в представлении Q отличается только знаком от индекса в представлении Q^* :

$$\text{index}_Q \hat{D}_K = -\text{index}_{Q^*} \hat{D}_K. \quad (14.2.6)$$

В частности, если Q вещественное или псевдовещественное представление, так что Q и Q^* эквивалентны, то индекс равен нулю (в $4k + 2$ измерениях). Но если Q — комплексное представление, то нет абсолютно никаких причин для того, чтобы $\text{index}_Q \hat{D}_K$ был равен нулю. Действительно, теорема Атьи — Зингера об индексе дает формулу для этой величины. В двух измерениях (случай, относящийся к изучению волновых операторов на струнной мировой поверхности Σ) эта формула имеет вид

$$\text{index}_Q \hat{D}_K = \frac{1}{2\pi} \int_{\Sigma} \text{tr}_Q F. \quad (14.2.7)$$

Здесь F — напряженность поля Янга — Миллса, рассматриваемая как 2-форма, а tr_Q — след в представлении Q группы J .

Если группа J полупростая, то $\text{tr}_Q F = 0$ и индекс равен нулю. В общем случае величина (14.2.7) является топологическим инвариантом в силу аргументов, приведенных в последнем разделе гл. 12. В случае шести измерений, который наиболее интересен при изучении компактификации, формула для индекса имеет вид

$$\text{index}_Q \hat{D}_K = \frac{1}{48(2\pi)^3} \int_K [\text{tr}_Q F \wedge F \wedge F - \frac{1}{8} \text{tr}_Q F \wedge \text{tr} R \wedge R]. \quad (14.2.8)$$

Здесь R — тензор Римана, рассматриваемый (так же как в заключительных замечаниях гл. 12) как 2-форма с дополнительным индексом алгебры Ли. Подынтегральное выражение в правой части (14.2.8) составлено из внешних произведений трех 2-форм т. е. является 6-формой, которую можно проинтегрировать по шестимерному многообразию K и получить в результате число. Это число также является топологическим инвариантом в силу аргументов, приведенных в последнем разделе гл. 12. Второе слагаемое в (14.2.8) выпадает, если калибровочная группа J полупростая, а если представление Q вещественное, то обращаются в нуль оба слагаемых, поскольку симметризованный след нечетного числа генераторов в таком представлении равен нулю.

В этой книге мы не приводим доказательства формулы (14.2.8), но здесь мы дадим качественное объяснение возникновения такой формулы. С этой целью удобно сформулировать понятие индекса альтернативным способом. Можно написать

$$\text{index}_Q \hat{D}_K = \text{tr}(\Gamma^{(K)} \exp - \beta H), \quad (14.2.9)$$

где β — произвольное положительное число. Суть формулы (14.2.9) в том, что состояния с ненулевой энергией встречаются парами, причем для каждого состояния с $\Gamma^{(K)} = +1$ имеется состояние с $\Gamma^{(K)} = -1$, и, следовательно, они сокращаются в результате взятия следа в (14.2.9). В этом выражении остаются только вклады состояний с нулевой энергией, а они в точности соответствуют нашему прежнему определению индекса $n_+ - n_-$. След надо брать, конечно, только по состояниям в представлении Q . Одна из причин полезности выражения (14.2.9) заключается в том, что если β взять очень малым, то величину (14.2.9) можно вычислить с помощью высокотемпературного разложения в квантовой статистической механике. Действительно, пусть x и y — две точки на многообразии K , и пусть

$$G(x, y; \beta) = \langle x | e^{-\beta H} | y \rangle. \quad (14.2.10)$$

Тогда из (14.2.9) имеем

$$\text{index}_Q \hat{D}_K = \int_K \text{tr}(G(x, x; \beta) \Gamma^{(K)}). \quad (14.2.11)$$

Поведение $G(x, x; \beta)$ при малых β можно вычислить с помощью различных знакомых физикам методов. Например, можно записать фейнмановский интеграл по путям, выразив $G(x, x; \beta)$ в терминах путей, приходящих из x в x за мнимое время β . При малых β основной вклад в интеграл вносят пути, которые не уходят далеко от точки x . Это приводит к разложению $G(x, x; \beta)$ по локальным функционалам от метрики и поля Янга — Миллса, умноженным на степени β . Подставляя это в формулу (14.2.11), неизбежно получаем выражение для $\text{index}_Q \hat{D}_K$ в виде интеграла $\int_K O$, где O — локальный функционал от метрики и поля Янга — Миллса. Но индекс, как известно, топологический инвариант. Единственными топологическими инвариантами, которые можно записать как интегралы от локальных функционалов, являются характеристические числа — интегралы от полиномов от напряженности поля Янга — Миллса и тензора кривизны Римана. Следовательно, индекс оператора Дирака дается выражением такого типа. Производя разложение выражения (14.2.11) по β , чтобы получить точную формулу (при этом оказывается, что наиболее эффективным приемом для вычисления является использование суперсимметричного интеграла по путям), приходим к выражениям (14.2.7) и (14.2.8) в двух и шести измерениях.

14.2.3. Киральная асимметрия

Возвращаясь к интересующей нас физической задаче, на первый взгляд можно подумать, что калибровочная группа J в обсуждении формулы (14.2.8) должна стать основной калибровочной группой в десятимерной теории. В таком случае мы вряд ли получим интересный ответ, поскольку *CPT*-теорема требует, чтобы в десяти измерениях фермионы данной киральности обязательно были в вещественном представлении калибровочной группы; суперсимметрия же требует, чтобы это было присоединенное представление. Но выражение (14.2.8) нетривиально только в случае комплексного представления.

Правильная интерпретация несколько другая. В десяти измерениях мы начинаем с некоторой объединенной калибровочной группы G . Затем включаем вакуумные средние калибровочных полей из некоторой подгруппы J группы G . Для сохранения лоренц-инвариантности в некомпактифицированных измерениях

нужно, чтобы вакуумные средние имели только компоненты A_M калибровочного поля при $M = 5, \dots, 10$. Как обсуждалось в предыдущем разделе, эти компоненты в случае четырех измерений играют роль хиггсовых бозонов. Их вакуумное среднее нарушает группу G до подгруппы, коммутирующей с группой J . Обозначим эту подгруппу через H . Группа H в четырех измерениях выглядит как ненарушенная калибровочная группа (или по крайней мере как группа, оставшаяся ненарушенной на масштабе компактификации). Десятимерные фермионы находятся в присоединенном представлении A группы G . Оно имеет разложение относительно $H \otimes J$ вида

$$A \approx \bigoplus_i L_i \otimes Q_i, \quad (14.2.12)$$

где L_i и Q_i — представления групп H и J соответственно.

Для четырехмерного физика интересно не то, как фермионы преобразуются относительно J , а то, как они преобразуются относительно ненарушенной группы H . Но между этими преобразованиями может быть корреляция, так как J -представление Q_i может зависеть от H -представления L_i . Четырехмерные безмассовые фермионы в представлении L_i группы H возникают из нулевых мод оператора Дирака в представлении Q_i группы J . Для четырехмерного физика интересно также не собственное значение непосредственно оператора $\Gamma^{(K)}$, а собственное значение оператора $\Gamma^{(4)}$, который измеряет обычную спиральность фермионов. К счастью, эти две величины равны вследствие уравнения (14.2.4).

По причинам, которые уже обсуждались, нас интересует в основном киральная асимметрия безмассовых фермионов. (Под безмассовыми фермионами мы понимаем фермионы, которые приобретают массу только в результате низкоэнергетического нарушения калибровочной симметрии.) Поэтому пусть $n_{L_i}^+$ и $n_{L_i}^-$ — числа мультиплетов с положительной и отрицательной киральностями соответственно в представлении L_i группы H . Киральная асимметрия определяется как $N_{L_i} = n_{L_i}^+ - n_{L_i}^-$. Эта величина важна, поскольку именно отличие от нуля величины киральной асимметрии препятствует тому, чтобы неспаренные фермионы получили калибровочно-инвариантные затравочные массы. Если $N_{L_i} = 0$, так что имеется равное число левых и правых фермионов с данными квантовыми числами, то калибровочная симметрия не препятствует тому, чтобы фермионы спарились и получили массы. В действительности эксперимент показывает, что для каждого i либо $n_{L_i}^+$, либо $n_{L_i}^-$

равно нулю, так что в природе фермионы, по-видимому, спарились и получили массы настолько, насколько это не противоречит существованию ненулевой киральной асимметрии. В случае когда L обозначает стандартное поколение кварков и лептонов, киральную асимметрию называют обычно числом поколений N_{gen} .

Теперь мы можем, наконец, выразить киральную асимметрию в четырех измерениях в терминах топологических инвариантов для многообразия K . Фермионы, преобразующиеся относительно H по представлению L_i , преобразуются относительно J по представлению Q_i , а фермионы, для которых $\Gamma^{(4)} = \pm 1$, имеют также $\Gamma^{(K)} = \pm 1$. Таким образом, получаем формулу

$$N_{L_i} = \text{index}_{Q_i} \hat{D}_K. \quad (14.2.13)$$

Эта формула имеет далеко идущие следствия в феноменологических приложениях суперструн. После того как в процессе последующего обсуждения нулевых мод бозонных полей будут развиты еще другие математические методы, ближе к концу этой главы мы вернемся к формуле (14.2.13) и вычислим величину (14.2.13) в одной весьма интересной ситуации.

14.2.4. Оператор Рариты — Швингера

Для оператора Рариты — Швингера можно провести аналогичное рассмотрение. Его индекс можно определить тем же способом, что и индекс оператора Дирака, и он будет топологическим инвариантом по тем же причинам. Как и в случае оператора Дирака, можно воспользоваться комплексным сопряжением и доказать, что индекс оператора Рариты — Швингера равен нулю в $4k + 2$ измерениях для полей Рариты — Швингера, не имеющих калибровочных взаимодействий. В интересных десятимерных теориях, по-видимому, не бывает заряженных полей Рариты — Швингера, так что нетривиальный индекс в них не возникает. Можно ожидать появления нулевых мод полей Рариты — Швингера только при некоторых более детальных предположениях, таких как низкоэнергетическая суперсимметрия, которая рассматривается в гл. 16.

14.2.5. Дальнейшие замечания

Выше была найдена общая формула (14.2.13), относящаяся только к асимметрии в квантовых числах между фермионами положительной и отрицательной киральностей. Но этого достаточно для того, чтобы предсказать те безмассовые фермионы, которые являются безмассовыми в силу ненарушенных калибровочных

симметрий. Как это уже отмечалось, таковы все известные легкие фермионы. Безмассовыми фермионами, которые не предсказываются формулой (14.2.13), были бы, например, пары семейство — антисемейство, которые могли бы иметь, но не имеют калибровочно-инвариантные массы.

Причина того, что формула (14.2.13) для киральной асимметрии не является лишь теоретико-полевым ответом, но, как можно ожидать, верна также в контексте теории струн, заключается в том, что, как мы пытались подчеркнуть, описываемая этой формулой киральная асимметрия инвариантна относительно любых гладких деформаций теории. На языке статистической физики киральная асимметрия зависит только от «класса универсальности» теории с калибровочной группой H в четырех измерениях. Именно по этой причине наблюдаемая в природе киральная асимметрия наряду с общей ковариантностью и неабелевой калибровочной инвариантностью является, вероятно, одной из лучших подсказок о физике на малых расстояниях, которые дает нам эксперимент.

Можно себе представить, разумеется, что струнная константа связи столь велика, что выталкивает вакуумное состояние в такой «класс универсальности», который не виден с теоретико-левой точки зрения. Если это так — то из нашего современного понимания теории струн можно извлечь лишь очень мало феноменологических свойств. Но если природе все же угодно позволить нам добиться некоторого понимания феноменологии на основе сегодняшних знаний о теории струн, то киральная асимметрия почти наверняка является одной из тех вещей, которые мы можем надеяться понять, причем именно потому, что она зависит только от класса универсальности теории.

Наконец, обратим внимание на «физическое» содержание уравнения (14.2.6), где утверждается, что $\text{index}_Q = -\text{index}_{Q^*}$. Ввиду формулы (14.2.13) это означает, что киральная асимметрия четырехмерных фермионов в представлении L ненарушенной группы H противоположна киральной асимметрии в комплексно-сопряженном представлении L^* . Но этого и следовало ожидать: это является следствием SPT -инвариантности, так как фермионы в представлении Q имеют античастицы противоположной киральности в представлении Q^* .

14.3. Нулевые моды антисимметричных тензорных полей

В этом разделе мы сосредоточим внимание на нулевых модах антисимметричных тензорных полей, называемых в математике дифференциальными формами. Большую часть необходимых математических сведений мы уже получили в гл. 12.

14.3.1. Антисимметричные тензорные поля

Пусть $B_{i_1 i_2 \dots i_p}$ — p -форма, т. е. антисимметричное тензорное поле ранга p . Чтобы такое поле могло присутствовать в физической теории, необходима калибровочная инвариантность, обеспечивающая «отцепление» временноподобных мод. Требуемая калибровочная инвариантность есть просто

$$\delta B = d\Lambda, \quad (14.3.1)$$

где Λ — $(p-1)$ -форма, а d — внешняя производная, о которой говорилось в гл. 12. Как выяснилось при изучении сокращения аномалий в гл. 13, поле B при определенных условиях должно нетривиально преобразовываться под действием янг-миллсовых калибровочных преобразований и общекоординатных преобразований. С точки зрения стоящей перед нами задачи определения безмассовых состояний, возникающих в результате компактификации до четырех измерений, рассмотрение этого вопроса можно отложить.

Как показано в гл. 12, калибровочно-инвариантная напряженность поля, отвечающая формуле (14.3.1), является просто $(p+1)$ -формой

$$C = dB, \quad (14.3.2)$$

а аналог максвеллова действия имеет вид

$$S = \frac{p+1}{2p!} \int_M g^{i_1 j_1} \dots g^{i_{p+1} j_{p+1}} C_{i_1 \dots i_{p+1}} C_{j_1 \dots j_{p+1}} = \frac{\langle C, C \rangle}{2(p!)^2}. \quad (14.3.3)$$

Здесь g — метрический тензор на многообразии M , а последнее равенство определяет внутренне произведение \langle, \rangle для $(p+1)$ -форм. В разд. 12.4 введен лапласиан Ходжа — де Рама

$$\Delta = dd^* + d^*d \quad (14.3.4)$$

и изучены его нулевые моды. Как указывалось, число таких нулевых мод (для p -форм) называется числом Бетти b_p . В гл. 12 мы узнали, что нулевая мода оператора Δ на компактном многообразии K должна иметь нулевую напряженность:

$$dB = 0. \quad (14.3.5)$$

Нас, конечно, интересуют те моды, которые удовлетворяют условию (14.3.5), но не являются чистой калибровкой:

$$B \neq d\Lambda. \quad (14.3.6)$$

В гл. 12 показано, что классы эквивалентности p -форм B , удовлетворяющих условию (14.3.5) (B и B' считаются эквивалент-

ными, если $B - B' = d\Lambda$), находятся во взаимно однозначном соответствии с нулевыми модами оператора Δ . С учетом всего, что мы уже узнали, естественно предположить, что при редукции десятимерной теории к четырем измерениям безмассовые четырехмерные поля будут возникать из нулевых мод лапласиана Δ . Теперь мы увидим, что это действительно так.

Относительно касательной группы $SO(1, 9)$ на многообразии \mathbf{M} компоненты поля B преобразуются по представлению антисимметричных тензоров ранга p . Относительно же группы $SO(1, 3) \times SO(6)$ (где два сомножителя являются касательными группами на M^4 и K соответственно) компоненты B с n индексами в области значений от 1 до 4 (касательные к M^4) и $p - n$ индексами в области значений от 5 до 10 (касательные к K) преобразуются как n -формы на M^4 и $(p - n)$ -формы на K . Такие компоненты будем обозначать как $(n, p - n)$ -формы.

Лапласианы Ходжа — де Рама на десятимерном многообразии $\mathbf{M} = M^4 \times K$ и на сомножителях M^4 и K обозначим соответственно через Δ_{10} , Δ_4 и Δ_K . Эти операторы удовлетворяют тождеству

$$\Delta_{10} = \Delta_4 + \Delta_K, \quad (14.3.7)$$

которое представляет собой аналог тождества (14.1.4) для спиноров. Уравнение движения, следующее из действия (14.3.3), имеет вид

$$d^* dB = 0. \quad (14.3.8)$$

Здесь d^* — обсуждавшийся в гл. 12 оператор, сопряженный к d , который отображает p -формы в $(p - 1)$ -формы. Если B — 1-форма, то уравнение (14.3.8) представляет собой уравнение Максвелла, которое в плоском пространстве имеет вид $\partial^\mu (\partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu) = 0$. Как и в теории Максвелла, уравнение (14.3.8) можно упростить с помощью подходящего выбора калибровки. Калибровка

$$d^* B = 0 \quad (14.3.9)$$

является обобщением лоренцевой калибровки $\partial^\mu B_\mu = 0$ в электродинамике. В лоренцевой калибровке, как известно, уравнения Максвелла (в плоском пространстве) сводятся к более простому виду $\square B_\mu = 0$, где $\square = \partial_\nu \partial^\nu$ — даламбертиан, или волновой оператор. Подобным образом калибровочное условие (14.3.9) сводит уравнение (14.3.8) к уравнению $\Delta B = 0$, так как $\Delta = dd^* + d^*d$. В силу тождества (14.3.7) это дает

$$(\Delta_4 + \Delta_K) B = 0. \quad (14.3.10)$$

В волновое уравнение (14.3.10) $(n, p - n)$ -формы при разных n входят независимо, так что каждый случай можно рассматривать по отдельности¹⁾.

Из уравнения (14.3.10) следует, что Δ_K играет роль оператора массы для четырехмерных полей. Число нулевых мод оператора Δ_K для $(n, p - n)$ -форм равно числу Бетти b_{p-n} для K ; это и будет числом безмассовых n -форм, возникающих в четырех измерениях при редукции десятимерной теории на $M^4 \times K$.

Действительно, пусть дана гармоническая дифференциальная форма β на K , удовлетворяющая условиям $d\beta = d^*\beta = 0$. Можно предположить, что β нормирована так, что $\langle \beta, \beta \rangle_K = 1$, где $\langle \cdot, \cdot \rangle_K$ — внутреннее произведение для дифференциальных форм на K , определенное формулой (14.3.3). Введем анзац

$$B = \alpha \wedge \beta, \quad (14.3.11)$$

где α — дифференциальная форма на многообразии M^4 , динамику которой мы будем исследовать. (Выражение „ α — дифференциальная форма на M^4 ” означает, что все индексы α отвечают касательному пространству к M^4 , а ее компоненты не зависят от координат в K .) α должна удовлетворять уравнению

$$0 = \Delta_4 \alpha = (dd^* + d^*d) \alpha, \quad (14.3.12)$$

где $B = \alpha \wedge \beta$ удовлетворяют условию (14.3.10). Аналогично калибровочное условие (14.3.9) сводится к требованию

$$d^* \alpha = 0. \quad (14.3.13)$$

Объединяя уравнения (14.3.12) и (14.3.13), обнаруживаем, что условия на α имеют вид

$$0 = d^* d \alpha = d^* \alpha. \quad (14.3.14)$$

Первое из них является уравнением, которое мы получили бы из стандартного действия

$$S^{(4)} = \frac{n+1}{2n!} \int_{M^4} g^{i_1 i_1} \dots g^{i_{n+1} i_{n+1}} c_{i_1 \dots i_{n+1}} c_{j_1 \dots j_{n+1}} = \langle d\alpha, d\alpha \rangle_{M^4} / 2 (n!)^2 \quad (14.3.15)$$

для n -формы α , распространяющейся на многообразии M^4 (здесь $c = d\alpha$). Второе из уравнений (14.3.14) представляет собой (как уже обсуждалось в случае десяти измерений) условие, которое можно наложить, чтобы зафиксировать калибровочную свободу в действии (14.3.15). Таким образом, в случае

¹⁾ Как для 1-форм (абелевых калибровочных полей), так и для p -форм, оператор $dd^* + d^*d$ в плоском пространстве совпадает с оператором \square .

анзаца $B = \alpha \wedge \beta$, где β — гармоническая $(p - n)$ -форма на K , α описывается стандартным действием для n -форм на M^4 . Выражение (14.3.15) можно получить и более прямым способом, подставив просто анзац $B = \alpha \wedge \beta$ в действие (14.3.3). Эти замечания подтверждают высказывание, что число безмассовых n -форм, возникающих в четырех измерениях при компактификации на $M^4 \times K$, равно числу Бетти $b_{p-n}(K)$.

При $n = 0$ формула (14.3.15) представляет собой стандартную формулу для безмассового скалярного поля, распространяющегося на M^4 . При $n = 1$ получается стандартное максвелловское действие для безмассового бозона спина 1. Для больших значений n действие (14.3.15) не так хорошо знакомо, но на самом деле его легко проанализировать. Например, если $n = 2$, то формула (14.3.15) представляет собой просто необычный способ описания свободного безмассового скалярного поля в четырех измерениях. Чтобы это увидеть, определим 1-форму y_μ соотношением $y_\mu = \varepsilon_\mu^{\nu\sigma} c_{\nu\sigma}$. Это соотношение между y и c есть просто операция дуальности Пуанкаре, обсуждавшаяся в разд. 12.4. Уравнение движения для 2-формы α , а именно $d^*c = 0$, в терминах y превращается в уравнение $dy = 0$. Отсюда следует, что $y = d\phi$ для некоторого скалярного поля ϕ . (В случае некомпактифицированного четырехмерного пространства Минковского глобальных трудностей в определении ϕ не возникает.) Тожество Бианки $dc = 0$ эквивалентно уравнению $d^*y = 0$, которое в терминах ϕ превращается в уравнение

$$\Delta\phi = 0, \quad (14.3.16)$$

которое представляет собой требуемое уравнение движения для безмассового скаляра ϕ . Если $n > 2$, то можно показать, что действие (14.3.15) не описывает никаких распространяющихся степеней свободы в четырех измерениях.

14.3.2. Применение к аксионам в $N = 1$ -теории суперструн

Теперь мы хотим обсудить некоторые приложения полученных выше результатов. Поскольку основные приложения касаются аксионов и проблемы сильного нарушения CP -инвариантности, мы сделаем сначала небольшое отступление, чтобы напомнить эти вопросы.

Квантовая хромодинамика, представляющая собой $SU(3)$ -калибровочную теорию, которая считается правильной теорией сильного ядерного взаимодействия, допускает включение в лагранжиан топологического члена вида

$$L_{top} = \frac{\theta}{32\pi^2} \text{tr}(\tilde{F}_{\mu\nu} F^{\mu\nu}). \quad (14.3.17)$$

Такой член не меняет классических уравнений движения, но влияет на квантовую теорию вследствие его вклада в функциональный интеграл в секторах калибровочных полей с ненулевым топологическим числом ($\int L_{top} d^4x \neq 0$), т. е. в так называемых инстантонных секторах. Влияние такого члена, если он присутствует, было бы очень существенным, поскольку он дает нарушение P - и T - (или CP) инвариантности. Имеется экспериментальное ограничение, основанное на отсутствии электрического дипольного момента у нейтрона: $\theta/32\pi^2 \leq 10^{-9}$. Для фундаментальной безразмерной константы это поразительно малое значение, и проблема сильного нарушения CP -инвариантности состоит в том, почему θ так мала.

Для решения «проблемы сильного нарушения CP -инвариантности» привлекательна идея аксиона, особенно слабо взаимодействующего «невидимого аксиона». Аксион представляет собой просто безмассовый скаляр a с взаимодействием вида

$$L_{axion} = \frac{1}{F} \int d^4x a \text{Tr} \tilde{F}_{\mu\nu} F^{\mu\nu}. \quad (14.3.18)$$

Точнее говоря, аксион — это скаляр, который был бы безмассовым, если бы не было взаимодействия (14.3.18); стандартный анализ показывает, что взаимодействие (14.3.18) дает аксиону массу порядка m_{π}/F . Поскольку говорить: «скаляр, который должен был бы быть безмассовым», слишком трудно, лучше сформулировать это так: аксион — это бесспиновое поле с глобальной симметрией

$$a \rightarrow a + c \quad (14.3.19)$$

(c — произвольная константа), которая нарушается только (или в первую очередь) взаимодействием (14.3.18). Экспериментальное обнаружение аксиона очень сильно зависит от значения F , так как аксионная связь пропорциональна F^{-1} . Для тех потенциальных аксионов, с которыми мы встретимся ниже, величина F порядка массы Планка, так что они взаимодействуют очень слабо.

После такого отступления вернемся к анализу нулевых мод десятимерных волновых операторов. Мы сосредоточим внимание на особенно интересном случае десятимерных теорий с $N = 1$ -суперсимметрией. В этом случае в мультиплет десятимерной супергравитации входит 2-форма. Вследствие рассмотрений в предыдущем разделе гармонические 0-, 1- и 2-формы на компактном пространстве K приводят к появлению безмассовых 2-, 1- и 0-форм в эффективной четырехмерной теории. Всегда имеется одна гармоническая 0-форма (постоянная функция,

равная 1), как это обсуждалось в разд. 12.4, поэтому в эффективной четырехмерной теории всегда получается точно одна 2-форма. Теперь мы найдем, что она имеет взаимодействие аксионного типа. Числа гармонических 1-форм и гармонических 2-форм на K — это числа Бетти b_1 и b_2 , для которых нет никаких универсальных ограничений. В эффективной четырехмерной теории содержится b_1 абелевых калибровочных полей в b_2 безмассовых скаляров, происходящих из компонент десятимерной 2-формы B . Мы выясним, что только что упомянутые скаляры также могут иметь при определенных условиях взаимодействия аксионного типа. Возможно, интересно подчеркнуть, что так как числа b_1 и b_2 могут быть произвольно большими (при подходящем выборе топологии многообразия K), то нет никакого общего ограничения сверху на число безмассовых бозонов в четырех измерениях, которые могут происходить из одного поля B в десятимерной теории.

Объясним теперь, почему указанные безмассовые скаляры могут иметь взаимодействия аксионного типа. Основная причина уже упоминалась в разд. 13.5.3, где было отмечено, что механизм сокращения аномалий в $N = 1$ -супергравитации в десяти измерениях требует существования безмассовых бозонов, которые взаимодействуют с двумя или четырьмя глюонами. Для сокращения аномалий требуется обобщение минимального действия, размерную редукцию которого мы рассмотрели выше. Калибровочно-инвариантная напряженность поля 2-формы B есть не $C = dB$, как в формуле (14.3.2), а

$$H = dB - \omega_Y + \omega_L, \quad (14.3.20)$$

где ω_Y и ω_L — янг-миллсова и лоренцева 3-формы Черна — Саймонса, которые введены в разд. 12.5.2 и включены в определение напряженности поля в разд. 13.1.3 и 13.5.3. Десятимерное действие (14.3.3) заменяется на

$$\bar{S} \sim \langle H, H \rangle. \quad (14.3.21)$$

Рассмотрим сначала безмассовые скаляры, возникающие из $(2, 0)$ -форм, т. е. из компонент B_{MN} с $M, N = 1, \dots, 4$. Безмассовая мода — это мода, волновая функция которой не зависит от компактифицированных координат и описывается в четырех измерениях в точности действием (14.3.21), где все индексы относятся к касательному пространству для M^4 . Теперь мы можем повторить точно те же шаги, которые привели нас к уравнению (14.3.16), но с учетом изменений, отвечающих определению (14.3.20). Сначала запишем $y_\mu = \varepsilon_\mu^{\nu\sigma\tau} H_{\nu\sigma\tau}$. Уравнение движения, вытекающее из действия (14.3.21), по-прежнему

имеет вид $d^*H = 0$, и это опять дает $dy = 0$, откуда $y = d\phi$ для некоторого скалярного поля ϕ . Но тождество Бианки теперь имеет вид не $dH = 0$, а

$$dH = \text{tr } R \wedge R - \text{tr } F \wedge F. \quad (14.3.22)$$

Для поля ϕ это дает не $\square\phi = 0$, а

$$\square\phi = \text{tr } R\tilde{R} - \text{tr } F\tilde{F}, \quad (14.3.23)$$

где содержится стандартное аксионное взаимодействие.

Скаляр ϕ мы называем модельно-независимым аксионом, поскольку способ, которым он получен, не зависит от деталей компактификации. Обратимся теперь к рассмотрению модельно-зависимых мод, которые возникают, когда второе число Бетти для K положительно, скажем $b_2(K) = n$. В таком случае на K имеются гармонические 2-формы β_k , $k = 1, \dots, n$, и, как в (14.3.11), мы рассматриваем анзац

$$B = \sum_k a_k(x^\mu) \beta_k(y^m), \quad (14.3.24)$$

где a_k — поля нулевого спина в четырех измерениях. В предыдущем рассмотрении для a_k мы получили минимальное уравнение $\Delta a_k = 0$. При каких условиях a_k могут получить взаимодействия аксионного типа?

Для простоты обозначений возьмем k , равное 1, и рассмотрим одну гармоническую 2-форму β и соответственно одно четырехмерное поле a . Модификация (14.3.20) определения напряженности поля не дает взаимодействия аксионного типа для a . Но такие взаимодействия могут возникать вследствие других членов, введенных в разд. 13.5.3 для сокращения аномалий. Это члены вида

$$\Delta S = \int_M B \wedge \text{tr } F^2 \wedge \text{tr } F^2. \quad (14.3.25)$$

Члены (14.3.25) в действии приводят к изменению уравнения поля B . Вместо уравнения

$$d^* dB = 0 \quad (14.3.26)$$

получаем

$$d^* dB = *(\text{tr } F^2 \wedge \text{tr } F^2), \quad (14.3.27)$$

где $*$ — оператор дуальности Пуанкаре, который из 8-формы $\text{tr } F^2 \wedge \text{tr } F^2$ делает 2-форму.

Здесь возникает вопрос, дает ли уравнение (14.3.27) взаимодействие аксионного типа для четырехмерного поля a . Аксион связан с двумя янг-милловскими напряженностями поля, в то

время как в правой части уравнения (14.3.27) их четыре. Но если компоненты F , касательные к K , имеют вакуумные средние (что в любом случае желательно, чтобы получить нетривиальный результат для киральной асимметрии фермионов), то, заменяя один из сомножителей $\text{tr } F^2$ в уравнении (14.3.27) его вакуумным средним, можно получить взаимодействие того же вида, что и для аксиона. Действительно, если

$$k = \frac{\int_K \beta \wedge \text{tr } F^2}{\int_K |\beta|^2}, \quad (14.3.28)$$

то в рамках анзаца (14.3.24) уравнение (14.3.27) в четырех измерениях сводится к

$$\Delta a = 2k \text{tr } F\tilde{F}, \quad (14.3.29)$$

что и дает аксионное взаимодействие.

Чтобы утверждать, что скалярное поле является аксионом, недостаточно только указать взаимодействие с $\text{tr } FF$. Необходимо также показать, что этот скаляр безмассовый, если не учитывать эффекты этого взаимодействия. Более удобный способ выразить то же самое состоит в том, чтобы заметить, что уравнение $\Delta a = 0$ инвариантно относительно преобразований

$$a \rightarrow a + c, \quad (14.3.30)$$

где c — постоянная. Преобразование (14.3.30) является в этом контексте аналогом симметрии, введенной Печчей и Куинн в их оригинальной работе о проблеме сильного нарушения CP -инвариантности. Симметрия типа Печчей — Куинн (14.3.30) нарушается связью с $\text{tr } F^2$ в (14.3.29). Четырехмерный скаляр a будет вести себя как аксион и поможет в решении проблемы сильного нарушения CP -инвариантности только в том случае, если связь с $\text{tr } F^2$ является доминирующим эффектом, нарушающим аксионную симметрию.

Очень слабые эффекты, отличные от FF -связи и нарушающие симметрию Печчей — Куинн, могли бы испортить аксионно-подобное поведение предполагаемого аксиона. Чтобы выяснить этот вопрос, надо исследовать форму аксионного вершинного оператора и определить, действительно ли аксионная симметрия имеет место в теории струн. В случае модельно-независимой моды ϕ , все индексы которой касательны к M^4 , представляется вероятным, что главные эффекты, нарушающие аксионную симметрию, определяются инстантонами калибровочной теории. В случае модельно-зависимого аксиона a ситуация

сложнее, и в настоящее время она активно исследуется. Здесь мы обсудим некоторые аспекты этой проблемы.

Мода a возникает при исследовании ориентированных бозонных струн, и мы рассмотрим именно этот случай, поскольку усложнения, связанные с суперструнами, несущественны для настоящего обсуждения¹⁾. Чтобы проверить наличие симметрии (14.3.30), необходимо точное теоретико-струнное рассмотрение, так как нарушающие симметрию эффекты очень высокого порядка по α' были бы достаточны, чтобы не позволить скаляру a быть аксионом. Подходящим формализмом для точного рассмотрения является описание распространения струны на фоне внешних полей, введенное в разд. 3.4. Распространение струны на многообразии $M^4 \times K$ описывается некоторой подходящей нелинейной сигма-моделью. Вершинный оператор для флуктуирующей поля B_{MN} имеет вид

$$V = \int d^2\sigma \epsilon^{\alpha\beta} B_{MN}(X^K) \partial_\alpha X^M \partial_\beta X^N. \quad (14.3.31)$$

Это оператор в нелинейной сигма-модели, отвечающей отображениям струнной мировой поверхности Σ в $M^4 \times K$. Подставляя в формулу (14.3.31) анзац $B(X^K) = a(x^\mu) \beta(y^k)$, где a — скалярное поле на M^4 , а β — гармоническая 2-форма на K , получаем

$$V = \int d^2\sigma a(x^\mu) \epsilon^{\alpha\beta} \partial_\alpha y^i \partial_\beta y^j \beta_{ij}. \quad (14.3.32)$$

Чтобы проверить симметрию $a \rightarrow a + c$, надо выяснить, является ли выражение (14.3.32) инвариантным относительно такого преобразования. Соответствующее изменение выражения (14.3.32) имеет вид

$$dV = c \int d^2\sigma \epsilon^{\alpha\beta} \partial_\alpha y^i \partial_\beta y^j \beta_{ij}. \quad (14.3.33)$$

Равно ли это нулю? Оказывается, что ответ состоит в том, что выражение (14.3.33) обращается в нуль во всех порядках сигма-модельной теории возмущений и, таким образом, во всех порядках по α' , но точно в нуль оно не обращается. Чтобы показать это, заметим, что гармоническую 2-форму β локально можно представить в виде

$$\beta_{ij} = \partial_i \lambda_j - \partial_j \lambda_i, \quad (14.3.34)$$

¹⁾ В теории гетеротических струн дополнительные члены в рассматриваемом ниже вершинном операторе V обращаются в нуль при нулевом импульсе, а значит, несущественны. В теории суперструн типа I вершинный оператор имеет другой вид, но также обращается в нуль при нулевом импульсе. Действительно, в последнем случае аксионная симметрия не нарушается инстантонами на мировой поверхности и, по-видимому, является точной.

где λ — некоторая 1-форма на K . Подставляя выражение (14.3.34) в формулу (14.3.33), получаем

$$\delta V = 2c \int d^2\sigma \varepsilon^{\alpha\beta} \partial_\alpha (\lambda_j \partial_\beta y^j). \quad (14.3.35)$$

Это равно нулю, так как представляет собой интеграл от полной дивергенции.

Но при выводе формулы (14.3.35) мы использовали представление (14.3.34), которое справедливо только локально. Правильное общее утверждение состоит не в том, что δV равно нулю, а лишь в том, что δV есть топологический инвариант, который обращается в нуль, если отображение $\Sigma \rightarrow K$, заданное с помощью $\sigma^\alpha \rightarrow y^i(\sigma^\alpha)$, топологически тривиально. Как объяснялось в разд. 3.4, с точностью до конечного порядка по α' распространение струны на $M^4 \times K$ описывается сигма-модельной теорией возмущений, в которой $y^i(\sigma^\alpha)$ топологически тривиально. Вне рамок теории возмущений сигма-модель, описывающая распространение струны, имеет инстантоны, точно так же как в других квантовых полевых теориях. Точнее говоря, инстантоны появляются, если второе число Бетти многообразия K не равно нулю, так что в пространстве-времени есть топологически нетривиальные двумерные подмногообразия, на которые струнный мировой лист (подходящего рода) можно отобразить нестягиваемым образом. Это в точности ситуация, когда существует обсуждаемая мода a . Другими словами, во всех случаях, когда существует a , существуют и соответствующие инстантоны на мировой поверхности. Поскольку сигма-модельная константа связи порядка α' , вклады инстантонов на мировом листе будут порядка $e^{-1/\alpha'}$. Таким образом, симметрия Печчея — Куинн для модельно-зависимых аксионов, связанных с $b_2(K)$, справедлива во всех конечных порядках по α' , но не точно.

Нарушение инстантонами на мировой поверхности симметрии Печчея — Куинн для модельно-зависимых аксионов может быть достаточно сильным, чтобы эти моды оказались несущественными для низкоэнергетической феноменологии; тогда у нас остается только одна модельно-независимая мода ϕ . Оказывается, однако, что симметрия Печчея — Куинн для модельно-зависимых мод достаточно хороша, чтобы иметь одно замечательное теоретическое приложение, с которым мы встретимся в гл. 16.

14.3.3. «Ненулевые моды»

До сих пор обсуждались только моды, которые мы называли «нулевыми модами» и которые представляли собой моды с нулевым действием или с нулевой энергией. Но интересно обсу-

дить также более общие решения уравнений движения, вытекающие из действия (14.3.3). Нулевые моды — это (нетривиальные) решения уравнений движения, для которых $C = 0$. Теперь нашей задачей является изучение решений с $C \neq 0$. Из вариационных уравнений для действия (14.3.3) следует, что $d^*C = 0$. К этому надо добавить тождество Бианки $dC = 0$, которое следует из определения $C = dB$ для напряженности поля C . Поэтому решение уравнений движения с $C \neq 0$ характеризуется условиями

$$dC = d^*C = 0. \quad (14.3.36)$$

Другими словами, C (если оно не равно нулю) является гармонической $(p+1)$ -формой. С этим понятием мы уже хорошо знакомы по обсуждению нулевых мод, которые были гармоническими p -формами. В частности, для компактного многообразия K число линейно независимых решений уравнений (14.3.36) является, как мы знаем, топологическим инвариантом — $(p+1)$ -м числом Бетти b_{p+1} .

Любопытно, может быть, что если нулевые моды отвечают гармоническим p -формам, то решения с ненулевой энергией отвечают гармоническим $(p+1)$ -формам. По этой причине математические методы, которые нужны для изучения нулевых мод, непосредственно переносятся на случай решений с ненулевой энергией. Но необходимо подчеркнуть одну особенность. Решение C уравнений (14.3.36) локально всегда можно записать в терминах калибровочного потенциала B в виде $C = dB$. Это обеспечивается, как говорилось в разд. 12.4, леммой Пуанкаре. Можно ли глобально записать C как dB , или мы натолкнемся на сингулярности, аналогичные дираковской струне? Ответ получить нетрудно. На компактном многообразии K гармоническая дифференциальная форма, удовлетворяющая уравнениям (14.3.36), всегда отвечает ненулевому классу когомологий, а значит, не может быть представлена глобально в виде $C = dB$. Таким образом, на компактном многообразии ненулевые моды всегда представляют собой обобщение магнитного монополя Дирака.

Если рассматривается компактификация на многообразии $M^4 \times K$ и $(p+1)$ -е число Бетти многообразия K не равно нулю, то при определении вакуумного состояния имеется возможность взять решение уравнений (14.3.36), отвечающее ненулевой энергии. Это означает введение монополярной структуры в вакууме; анализ тождества Бианки $dC = 0$ показывает, что «монополярная» напряженность является сохраняющейся величиной, которая не может изменяться во времени. В более тонкой ситуации, с которой мы столкнулись при изучении сокращения

аномалий, когда тождество Бианки заменяется условием $dC = \text{tr } R \wedge R - \text{tr } F \wedge F$, более тщательный анализ показывает, что, для того чтобы избежать глобальных аномалий (потери модулярной инвариантности после компактификации), заряд монополя должен подчиняться условию квантования. Оказывается также, что в этом случае заряд «монополя» на самом деле не является постоянной интегрирования, а может меняться динамически (при туннелировании) на целочисленные кванты.

14.3.4. Внешняя производная и оператор Дирака

Выше мы рассматривали нулевые моды волнового оператора $\Delta = dd^* + d^*d$. Поскольку $d^2 = d^{*2} = 0$, этот оператор можно определить также, как

$$\Delta = S^2, \quad (14.3.37)$$

где

$$S = d + d^* \quad (14.3.38)$$

— оператор первого порядка.

Являясь оператором первого порядка, естественно возникающим в римановой геометрии, S напоминает оператор Дирака. Для приложений к проблемам поколений и квантовых чисел фермионов нам важно понять точную связь между оператором $S = d + d^*$ и оператором Дирака. Ниже мы предполагаем, что K — многообразие размерности n .

Оператор S переводит p -форму в линейную комбинацию $(p-1)$ -формы и $(p+1)$ -формы. Поэтому поле Ψ , на которое действует S , надо считать линейной комбинацией дифференциальных форм различной степени. Общая компонента поля Ψ представляет собой p -форму, которая антисимметрична по касательным векторным индексам, где p может принимать любое значение от 0 до n . Поле Ψ всего имеет (в сумме по n) 2^n компонент, так как каждый из n независимых касательных векторных индексов может либо присутствовать, либо отсутствовать. Это очень похоже на фермионную систему, в которой n одночастичных состояний, соответствующих n независимым значениям касательного векторного индекса. Таким образом, мы говорим, что i -й одночастичный уровень заполнен, если и только если Ψ имеет индекс типа i , что означает, что он принимает значение i . Как в случае любой фермионной системы, удобно ввести операторы рождения и уничтожения фермионов. Так, пусть a_i^* — оператор, рождающий индекс типа i . Другими словами, a_i^* аннулирует любую p -форму Ψ , которая уже имеет индекс типа i ; действуя на p -форму Ψ , которая не имеет такого индекса, a_i^*

делает из нее $(p+1)$ -форму, добавляя индекс типа i . Соответствующая формула имеет вид

$$(a_i^* \Psi)_{i_1 \dots i_{p+1}} = \frac{1}{p+1} \left\{ g_{ij_1} \Psi_{j_2 \dots i_{p+1}} \pm \right. \\ \left. \pm \text{циклические перестановки} \right\}, \quad (14.3.39)$$

где g — метрический тензор на многообразии K . Сопряженным оператору a_i^* является оператор a_i , который удаляет индекс типа i (и аннулирует любую дифференциальную форму, которая не имеет такого индекса). Формула имеет вид

$$(a_i \Psi)_{j_1 \dots j_{p-1}} = \Psi_{ij_1 \dots j_{p-1}}. \quad (14.3.40)$$

Операторы рождения и уничтожения, как обычно, удовлетворяют соотношению $\{a_i, a_j^*\} = g_{ij}$. Полезность операторов рождения и уничтожения определяется главным образом, тем, что с их помощью можно получить довольно удобные формулы для внешней производной d и сопряженной производной d^* . Оператор d рождает индекс типа i при дифференцировании поля, к которому этот оператор применен, в направлении i , так что

$$d = g^{ij} a_i^* D_j. \quad (14.3.41)$$

Здесь D_j — ковариантная производная. Напротив, оператор d^* удаляет индекс i при дифференцировании в направлении i , так что

$$d^* = g^{ij} a_i D_j. \quad (14.3.42)$$

Комбинация этих формул показывает, что оператор $S = d + d^*$, который появился при изучении гармонических дифференциальных форм, имеет вид

$$S = g^{ij} (a_i^* + a_i) D_j. \quad (14.3.43)$$

В этой формуле появился очень важный оператор

$$\Gamma_i = (a_i + a_i^*). \quad (14.3.44)$$

Эти матрицы заслуживают того, чтобы называться гамма-матрицами: они удовлетворяют стандартным соотношениям гамма-матричной алгебры $\{\Gamma_i, \Gamma_j\} = 2g_{ij}$. Может показаться удивительным¹⁾, что можно определить также второй набор гамма-матриц

$$\tilde{\Gamma}_i = i(a_i - a_i^*), \quad (14.3.45)$$

¹⁾ Это может и не показаться удивительным для читателя, ознакомившегося с построением спинорного представления группы $SO(2N)$ в приложении 5.A.

которые, как легко видеть, также удовлетворяют стандартным соотношениям гамма-матричной алгебры. Кроме того, Γ_i и $\tilde{\Gamma}_i$ взаимно антикоммутируют: $\{\Gamma_i, \tilde{\Gamma}_j\} = 0$. Для наших целей полезней иметь два набора взаимно коммутирующих, а не антикоммутирующих гамма-матриц. Это всегда можно сделать, но детали немного зависят от числа измерений, и мы ограничимся теперь случаем, представляющим основной интерес, когда n нечетное. Мы вводим два оператора киральности

$$\begin{aligned}\Gamma^{(n)} &= i^{n(n-1)/2} \Gamma_1 \Gamma_2 \dots \Gamma_n, \\ \tilde{\Gamma}^{(n)} &= i^{n(n-1)/2} \tilde{\Gamma}_1 \tilde{\Gamma}_2 \dots \tilde{\Gamma}_n,\end{aligned}\quad (14.3.46)$$

где фазовый множитель $i^{n(n-1)/2}$ включен для того, чтобы квадрат $\Gamma^{(n)}$ или квадрат $\tilde{\Gamma}^{(n)}$ был равен единице. Определим теперь второй набор гамма-матриц следующим образом:

$$\bar{\Gamma}_i = i \Gamma^{(n)} \cdot \tilde{\Gamma}_i. \quad (14.3.47)$$

Легко проверить, что матрицы $\bar{\Gamma}_i$ удовлетворяют между собой правильным антикоммутационным соотношениям для гамма-матриц, но в то же время коммутируют с матрицами Γ_i .

Матрицы Γ_i либо матрицы $\bar{\Gamma}_i$ могут рассматриваться как «собственно» гамма-матрицы для $SO(n)$. Один набор гамма-матриц можно реализовать на полях ϕ_α с одним спинорным индексом α , а значит, два набора коммутирующих гамма-матриц можно реализовать на полях $\Phi_{\alpha\beta}$ с двумя независимыми спинорными индексами α и β . С другой стороны, мы построили два набора коммутирующих гамма-матриц, начиная с поля Ψ , представлявшего собой линейную комбинацию дифференциальных форм переменной степени. Поэтому поле $\Phi_{\alpha\beta}$ с двумя независимыми спинорными индексами должно быть эквивалентно линейной комбинации дифференциальных форм. Проверка этого утверждения представляет собой просто упражнение из теории групп $SO(n)$. При первом знакомстве с уравнением Дирака выясняется, что вследствие антикоммутационных соотношений для гамма-матриц независимыми матрицами Дирака являются антисимметризованные произведения

$$\Gamma_{i_1 i_2 \dots i_p} = (\Gamma_{i_1} \Gamma_{i_2} \dots \Gamma_{i_p} \pm \text{перестановки}) / p!. \quad (14.3.48)$$

В результате тензоры, которые можно образовать, перемножая два спинора η и λ , — это 0-форма $\bar{\lambda}\eta$, 1-форма $\bar{\lambda}\Gamma_i\eta$, 2-форма $\bar{\lambda}\Gamma_{i_1 i_2}\eta$ и в общем случае p -форма $\bar{\lambda}\Gamma_{i_1 i_2 \dots i_p}\eta$ для любого $p \leq n$. В рамках теории групп комбинирование двух спиноров η_α и λ_β — это то же самое, что комбинирование двух разных

спинорных индексов одного биспинорного поля $\Phi_{\alpha\beta}$, у которого два таких индекса. Это подтверждает, что поле $\Phi_{\alpha\beta}$ действительно эквивалентно линейной комбинации дифференциальных форм с различными p .

Теперь мы можем воспользоваться этими сведениями, чтобы лучше понять оператор S . Напомним сначала общую структуру оператора Дирака. Обычно рассматривается спинорное поле ϕ_α^x со спинорным индексом α и, возможно, с дополнительным янг-милловым индексом x . Тогда оператор Дирака имеет вид

$$(\hat{D}\phi)_\alpha^x = (\Gamma_{\alpha\sigma}^i D_i) \phi_\sigma^x. \quad (14.3.49)$$

С учетом того, что поле, на которое действует оператор S , является, как мы знаем, биспинором $\Phi_{\alpha\beta}$, уравнение (14.3.43) можно переписать в совершенно аналогичном виде

$$(S\Phi)_{\alpha\beta} = \Gamma_{\alpha\sigma}^i D_i \Phi_{\sigma\beta}. \quad (14.3.50)$$

Мы видим, что S есть в точности оператор Дирака, действующий на спинорное поле, имеющее дополнительный спинорный индекс — второй спинорный индекс β поля $\Phi_{\alpha\beta}$, который играет роль «внутреннего» индекса, аналогичного индексу x в формуле (14.3.49). Кроме того, в одном очень важном случае использования оператора S , с которым мы столкнемся ближе к концу этой главы, второй спинорный индекс биспинорного поля возникнет именно в качестве индекса, отвечающего внутренней симметрии.

Поскольку S — разновидность оператора Дирака, естественно спросить, что в случае оператора S является аналогом дираковского индекса, изучавшегося в разд. 14.2.1. Для определения задачи об индексе вводится оператор «киральности» T , который антикоммутирует с S и удовлетворяет условию $T^2 = +1$. Полагая, что n_+ и n_- — числа нулевых мод оператора S с $T = +1$ и $T = -1$ соответственно, определяем «индекс» как $n_+ - n_-$. Он является топологическим инвариантом по тем же причинам, которые обсуждались в разд. 14.2.1. Но в случае оператора S имеется несколько возможных способов выбрать T , и они приводят к различным топологическим инвариантам.

Вариантом, наиболее полно соответствующим нашему рассмотрению оператора Дирака, является оператор $T = \Gamma^{(n)}$. В этом случае индекс представляет собой топологический инвариант, известный как сигнатура Хирцебруха и часто обозначаемый символом σ . Можно показать, что сигнатура равна нулю в $4k + 2$ измерениях, с помощью рассуждений, основанных на комплексном сопряжении и подобных тем рассуждениям, которые использовались в разд. 14.2, чтобы показать, что стандартный

индекс Дирака (без полей Янга — Миллса) равен нулю при таком числе измерений. Дело в том, что операторы рождения — уничтожения a_i, a_i^* по определению вещественны, поэтому из соотношений (14.3.46) следует, что $\Gamma^{(n)}$ и $\tilde{\Gamma}^{(n)}$ вещественны в $4k$ измерениях и чисто мнимые в $4k + 2$ измерениях. Оператор S , очевидно, вещественный, так что в $4k + 2$ измерениях комплексное сопряжение отображает нулевые моды оператора S с $\Gamma^{(n)} = +1$ в нулевые моды с $\Gamma^{(n)} = -1$, что и дает нулевой индекс σ . С другой стороны, в $4k$ измерениях индекс σ не обязательно равен нулю.

Другой возможный выбор оператора киральности, который для целей этой книги намного важнее, — это $\tilde{T} = i^n \Gamma^{(n)} \cdot \tilde{\Gamma}^{(n)}$. При таком выборе индекса оператора S является топологическим инвариантом, называемым эйлеровой характеристикой χ . Это, возможно, самый фундаментальный топологический инвариант многообразия. Отметим, что оператор \tilde{T} вещественен как в $4k$, так и в $4k + 2$ измерениях, т. е. эйлерова характеристика может быть отлична от нуля в любой четной размерности. Пока неочевидно, что такое определение эйлеровой характеристики как индекса оператора S совпадает с определением, данным в конце гл. 12, где эйлерова характеристика многообразия определялась как интеграл по многообразию от некоторого полинома от тензора кривизны. Это равенство представляет собой теорему Гаусса — Бонне — Черна, которую можно получить как частный случай теоремы об индексе Атья — Зингера. В разд. 14.4 мы сделаем это явно в двумерном случае.

Для эйлеровой характеристики многообразия K есть простое выражение в терминах чисел Бетти для K . Восстанавливая определение $\Gamma^{(n)}$ и $\tilde{\Gamma}^{(n)}$, находим

$$\tilde{T} = i^n \Gamma^{(n)} \tilde{\Gamma}^{(n)} = (-1)^n \prod_{i=1}^n (a_i + a_i^*) (a_i - a_i^*) = \prod_{i=1}^n (-1)^{N_i}, \quad (14.3.51)$$

где $N_i = a_i^* a_i$ — оператор числа фермионов i -го сорта. Для p -формы число заполненных состояний равно p , так что равенство (14.3.51) означает, что для p -форм $\tilde{T} = (-1)^p$.

Далее, нулевые моды оператора S — это гармонические дифференциальные формы, а число p -форм, являющихся такими нулевыми модами, есть число Бетти b_p . Следовательно, вклад p -форм в индекс оператора S равен $\pm b_p$, где знак выбирается в зависимости от значения \tilde{T} : $\tilde{T} = +1$ или $\tilde{T} = -1$. Другими словами, знак зависит от того, четно p или нечетно. Отсюда следует, что эйлерова характеристика равна

$$\chi(K) = \sum_{p=0}^n (-1)^p b_p. \quad (14.3.52)$$

Это и есть искомая формула, выражающая эйлерову характеристику через числа Бетти. Необходимо отметить одну важную особенность этого случая. При обсуждении индекса оператора Дирака общего вида указывалось, что если n_+ и n_- — числа нулевых мод положительной и отрицательной киральности, то, вообще говоря, топологическим инвариантом является только $n_+ - n_-$, и можно ожидать, что либо n_+ , либо n_- равно нулю в зависимости от того, положителен индекс или отрицателен. Оператор S является исключением: оба числа n_+ и n_- являются топологическими инвариантами в случае оператора S и представляют собой сумму чисел b_p для четных и для нечетных p соответственно. В обычной римановой геометрии (в отличие от более специализированных разделов, таких как изучение комплексных многообразий) оператор S — единственный известный оператор, обладающий таким свойством. В гл. 16 мы увидим, что существует по меньшей мере возможность того, что это свойство связано с решением проблемы иерархии калибровочных взаимодействий.

По аналогии с уравнением (14.2.9) сигнатуру σ и эйлерову характеристику χ можно записать в виде

$$\begin{aligned} \sigma &= \text{Tr}(\Gamma^{(n)} \exp -\beta \Delta), \\ \chi &= \text{Tr}(\Gamma^{(n)} \tilde{\Gamma}^{(n)} \exp -\beta \Delta), \end{aligned} \quad (14.3.53)$$

где $\Delta = S^2$ играет роль гамильтониана. В дальнейшем мы встретимся не совсем с оператором S , а с оператором $\tilde{S} = S(1 + \tilde{\Gamma}^{(n)})/2$, который есть просто оператор S , спроектированный на подпространство гильбертова пространства, на котором $\tilde{\Gamma}^{(n)} = +1$. В этом секторе $T = \tilde{T}$, так что не имеет значения, какой оператор киральности используется в определении индекса для \tilde{S} . Выбирая $T = \Gamma^{(n)}$, для индекса получаем выражение

$$\text{index } \tilde{S} = \text{Tr}(\Gamma^{(n)} (1 + \tilde{\Gamma}^{(n)})/2 \exp -\beta \Delta) = (\sigma + \chi)/2. \quad (14.3.54)$$

В $4k + 2$ измерениях σ , конечно, равно нулю, и выражение (14.3.54) сводится к равенству

$$\text{index } \tilde{S} = \chi/2. \quad (14.3.55)$$

Этот результат будет использован в последующем при исследовании числа фермионных поколений.

14.4. Теоремы об индексе на мировой поверхности струны

Несмотря на то что главная наша цель в этой главе — выяснить свойства волновых операторов в пространстве-времени, мы остановимся здесь на обсуждении того, как некоторые понятия

возникают при анализе волновых операторов на мировом листе струны, т. е. на компактной поверхности Σ рода g . Это позволит нам проиллюстрировать в простой ситуации многие из тех идей, которые рассмотрены выше, а также те, которые будут введены ниже. Как бы то ни было, соответствующие результаты имеют разнообразные приложения в теории струн.

14.4.1. Индекс Дирака

Как и в гл. 3 и 4, многие существенные утверждения отражают тот факт, что в двух измерениях группа вращений $SO(2)$ абелева. Любое ее неприводимое представление определяется заданием собственного значения единственного генератора W группы $SO(2)$. В наших приложениях это собственное значение всегда будет целым или полуцелым. Спинор ψ имеет компоненты положительной и отрицательной киральности ψ_+ и ψ_- , для которых $W = 1/2$ и $W = -1/2$. Аналогично ковариантная производная ∇_α имеет компоненты ∇_+ и ∇_- , для которых $W = +1$ и $W = -1$. Применение оператора Дирака дает спинор $\hat{\nabla}\psi$, который, подобно ψ , имеет компоненты с $W = \pm 1/2$. Уравнение Дирака $\hat{\nabla}\psi = 0$ в явном виде записывается как

$$\nabla_+\psi_- = 0, \quad \nabla_-\psi_+ = 0. \quad (14.4.1)$$

Два уравнения (14.4.1) являются уравнениями для нулевых мод отрицательной и положительной киральности соответственно. Если числа линейно независимых решений первого и второго уравнений (14.4.1) обозначить соответственно через n_- и n_+ , то индекс Дирака можно представить в виде

$$\text{index } \hat{\nabla} = n_+ - n_-. \quad (14.4.2)$$

Если ковариантная производная в уравнениях (14.4.1) построена только из спиновой связности без взаимодействия, скажем, с полем Янга — Миллса, то два уравнения (14.4.1) комплексно сопряжены друг другу, так что $n_+ = n_-$, а индекс Дирака равен нулю.

Ненулевой индекс возникает в том случае, когда дополнительно имеется калибровочное взаимодействие. Рассмотрим спинорное поле ψ^a , несущее янг-миллсов индекс a , отвечающий некоторому представлению R калибровочной группы G . Калибровочное поле будем обозначать через A_α . Уравнение Дирака имеет вид

$$\nabla_+\psi_-^a = 0, \quad \nabla_-\psi_+^a = 0. \quad (14.4.3)$$

Эти два уравнения по-прежнему комплексно сопряжены друг другу, если представление R вещественное или псевдовещественное;

вещественное; в противном случае они не сопряжены. В такой более общей ситуации индекс Дирака не обязательно равен нулю. Он дается формулой, которая обсуждалась в разд. 14.2:

$$\text{index } \hat{\nabla} = \frac{1}{2\pi} \int_\Sigma \text{tr } F. \quad (14.4.4)$$

Здесь F — 2-форма кривизны, а след берется, конечно, в представлении R .

Величина (14.4.4), очевидно, равна нулю, если группа G полупростая. Важна только компонента $U(1)$ группы G , поэтому мы сосредоточимся на случае, когда группа G и в действительности есть $U(1)$ (или $SO(2)$). Соответствующие калибровочные поля, для которых правая часть равенства (14.4.4) не равна нулю, имеют ненулевой поток магнитного поля, проинтегрированный по Σ , а следовательно, представляют собой обобщение магнитного монополя Дирака. Согласно классическому рассмотрению Дирака, магнитный заряд монополя, точнее правая часть равенства (14.4.4), должен быть целым числом, чтобы было возможно взаимодействие монополя с заряженным полем, таким как ψ . Уравнение (14.4.4) в действительности дает другое доказательство закона квантования Дирака, поскольку его левая часть определено есть целое число.

Рассмотренное выше поле ψ могло взаимодействовать с любым $U(1)$ -калибровочным полем, но один случай особенно интересен. На любом ориентируемом двумерном многообразии спиновая связность ω_α является $SO(2)$ - или $U(1)$ -калибровочным полем. Таким образом, в качестве $U(1)$ -калибровочного поля A_α в использованной выше конструкции можно выбрать просто ω_α . Это можно также немного обобщить: так как группа $U(1)$ абелева, имеет смысл выражение

$$A_\alpha = n\omega_\alpha, \quad (14.4.5)$$

где n — произвольное целое или полуцелое число¹⁾. Вследствие нелинейности $SO(N)$ -калибровочных преобразований при $N > 2$ выражение (14.4.5) имеет калибровочно-инвариантный смысл в случае более чем двух измерений только для $n = 1$, но в двух измерениях такого ограничения нет.

Выражение (14.4.5), безусловно, дает интересный пример абелева калибровочного поля, поскольку оно не вносит ничего

¹⁾ Число n должно быть целым или полуцелым, чтобы A_α удовлетворяло условию Дирака квантования магнитного заряда при любом выборе поверхности Σ , хотя на некоторых поверхностях допустимы другие дробные значения. Ниже мы увидим, что в естественно появляющихся приложениях n всегда целое или полуцелое.

произвольного, не связанного с самой поверхностью Σ . Мы увидим, что в этой специальной ситуации теорема об индексе (14.4.4) имеет много интересных приложений.

В случае (14.4.5) напряженность калибровочного поля $\varepsilon^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$ равна просто умноженной на $n/2$ скалярной кривизне Риччи R . Если через $\nabla_{(n)}$ обозначить оператор Дирака, действующий на спиноры с «зарядом» n , то теорема об индексе принимает вид

$$\text{index } \nabla_{(n)} = \frac{n}{4\pi} \int_{\Sigma} \sqrt{g} R. \quad (14.4.6)$$

Мы рассмотрим три интересных приложения формулы (14.4.6): эйлерову характеристику, конформные духи и суперконформные духи.

14.4.2. Эйлерова характеристика

Мы уже рассмотрели оператор S в $2n$ измерениях при любом n , индексом которого является эйлерова характеристика. Мы обнаружили, что, согласно формуле (14.3.50), S представляет собой обычный оператор Дирака, действующий на поле ψ_{α}^a со спинорным индексом α и с дополнительным «янг-милловым» индексом, который является просто другим спинорным индексом. В двух измерениях эта конструкция упрощается, так как группа $SO(2)$ абелева. Индекс a принимает два значения, соответствующих $W = 1/2$ и $W = -1/2$ в терминологии предыдущего раздела. Оператор S имеет простой вид

$$S = \begin{pmatrix} \nabla_{(1/2)} & 0 \\ 0 & \nabla_{(-1/2)} \end{pmatrix}, \quad (14.4.7)$$

где $\nabla_{(\pm 1/2)}$ — операторы, индекс которых дается выражением (14.4.6).

Чему равен индекс оператора S ? Необходимо напомнить, что у нас было две возможности выбора, отвечающие $\text{tr} e^{-\beta S^2}$ и $\text{tr} e^{-\beta S^2} \tilde{\Gamma}$. Эти выражения соответствуют сумме и разности двух операторов $\nabla_{(1/2)}$ и $\nabla_{(-1/2)}$, фигурирующих в выражении (14.4.7). Как видно из соотношений (14.3.53), эйлерова характеристика получается в последнем из двух вариантов. Таким образом, имеем

$$\chi = \text{index } \nabla_{(1/2)} - \text{index } \nabla_{(-1/2)} = \frac{1}{2\pi} \int_{\Sigma} R, \quad (14.4.8)$$

где использовано равенство (14.4.6). Выражение (14.4.8) было уже получено в конце гл. 12 на основе другого определения

эйлеровой характеристики, так что теперь мы видим, что эти два определения эквивалентны, по крайней мере в случае многообразия размерности два. Эти два определения (прежде χ определялась как интеграл от определенного характеристического класса, а теперь — как индекс оператора S) на самом деле эквивалентны в любой размерности. Это можно установить при более полном изучении теоремы об индексе.

Теперь в нашем распоряжении имеется значительно больше информации об эйлеровой характеристике, чем мы имели, когда в первый раз определили ее в гл. 12. Например, теперь мы знаем (из уравнения (14.3.52)), что

$$\chi = \sum_{p=0}^n (-1)^p b_p. \quad (14.4.9)$$

Для любого компактного связного многообразия $b_0 = 1$, а для двумерного многообразия дуальность Пуанкаре дает $b_2 = 1$. В конце гл. 12 мы нашли, что эйлерова характеристика римановой поверхности рода g равна $2 - 2g$. Объединяя эти результаты, видим, что первое число Бетти для поверхности рода g равно

$$b_1(g) = 2g. \quad (14.4.10)$$

Как обсуждалось в разд. 12.2, $2g$ — число независимых нестягиваемых петель на поверхности рода g . Таким образом, уравнение (14.4.10) есть иллюстрация связи между числом Бетти b_p многообразия M и числом независимых топологически нетривиальных p -мерных подмногообразий в M .

14.4.3. Нулевые моды конформных духов

В разд. 3.3 мы рассмотрели нулевые моды конформных духов и антидухов на компактной римановой поверхности рода g . Волновые уравнения для духов c_- и антидухов b_{++} положительной киральности имели вид

$$\nabla_- b_{++} = 0, \quad \nabla_- c_- = 0. \quad (14.4.11)$$

Числа нулевых мод для b - и c -полей на римановой поверхности рода g обозначались в разд. 3.3 через B_g и C_g соответственно. Мы обнаружили, что эти числа для небольших g ведут себя несколько нерегулярно, но для разности $\Delta_g = C_g - B_g$ был найден простой результат

$$\Delta_g = 3(1 - g). \quad (14.4.12)$$

Естественно ожидать, что разность Δ_g может быть индексом некоторого оператора, и это объясняет, что поведение величины Δ_g проще, чем B_g и C_g . Теперь мы увидим, что это действительно так.

Прежде всего мы можем заменить второе из уравнений (14.4.11) уравнением

$$\nabla_+ \tilde{c}_+ = 0, \quad (14.4.13)$$

где \tilde{c}_+ комплексно сопряжено c_- . Разность числа решений уравнения (14.4.13) и числа решений первого из уравнений (14.4.11) мы интерпретируем как индекс некоторого оператора. В рамках введенной выше терминологии оператор, который здесь имеется в виду, — это просто $\nabla_{(3/2)}$. Действительно, оператор $\nabla_{(3/2)}$ действует на поле ψ_α^a , где α — спинорный индекс ($W = \pm 1/2$), а индекс a — «калибровочный» индекс с $W = 3/2$. Для компонент поля ψ положительной и отрицательной киральности имеем $W = 1/2 + 3/2 = 2$ и $W = -1/2 + 3/2 = 1$ соответственно. Эти компоненты можно отождествить с полями b_{++} и \tilde{c}_+ соответственно. Таким образом,

$$\Delta_g = \text{index } \nabla_{(3/2)} = \frac{3}{4\pi} \int_{\Sigma} R. \quad (14.4.14)$$

Интеграл в правой части равен $3/2$ эйлеровой характеристике; используя известное значение эйлеровой характеристики для римановой поверхности рода g , мы возвращаемся к результату (14.4.12).

14.4.4 Нулевые моды суперконформных джухов

Подобным образом можно исследовать нулевые моды суперконформных джухов, которые мы еще не рассматривали. Правые моды состоят из джухов $\gamma_{(-1/2)}$ и антиджухов $\beta_{(+3/2)}$ (индексы обозначают собственные значения генератора W). Волновые уравнения имеют вид

$$\nabla_- \beta_{(+3/2)} = 0, \quad \nabla_- \gamma_{-1/2} = 0. \quad (14.4.15)$$

Аналогично бозонному случаю, рассмотренному в разд. 3.3, нулевые моды поля γ отвечают генераторам суперконформных симметрий, а нулевые моды поля β — тому, что можно назвать «супермодулями». Если U_g и V_g — числа нулевых мод на поверхности рода g для γ и β соответственно, то, как и в чисто бозонном случае, U_g и V_g ведут себя при малых g несколько нерегулярно. Действительно, $U_0 = 2$ (что отвечает существованию в квантовом бозонном секторе суперструн безаномальной группы симметрий с двумя нечетными генераторами $G_{\pm 1/2}$

помимо L_0 и $L_{\pm 1}$), в то время как $U_1 = 1$ (единственная нулевая мода на торе с плоской метрикой — это $u = \text{const}$) и $U_g = 0$ при $g > 1$. Что касается V_g , то значения этого числа таковы $V_0 = 0$, $V_1 = 1$, $V_g = 2g$ при $g > 1$ ¹⁾.

Мы не будем здесь доказывать все эти утверждения, а лишь отчасти проверим их, воспользовавшись теоремой об индексе, чтобы вычислить разность $\tilde{\Delta}_g = U_g - V_g$. Как и в бозонном случае, эта разность ведет себя более спокойно, чем U_g и V_g . Такие же рассуждения, как в бозонном случае, показывают, что число $\tilde{\Delta}_g$ можно интерпретировать как индекс оператора $\nabla_{(1)}$. Следовательно,

$$\tilde{\Delta}_g = 2(1 - g). \quad (14.4.16)$$

Любопытно, что $\tilde{\Delta}_g$ в точности равно эйлеровой характеристике римановой поверхности.

14.5. Нулевые моды нелинейных полей

До сих пор мы рассматривали нулевые моды спиноров и антисимметричных тензорных полей на фоне внешних калибровочных и гравитационных полей. Такие нулевые моды связаны, как оказывается, с многими плодотворными геометрическими и топологическими идеями, лишь немногие аспекты которых были нами рассмотрены. Изучавшиеся нами классические линейные уравнения представляют собой с точки зрения теории суперструн лишь приближение, но для большинства исследовавшихся вопросов это достаточно хорошее приближение, так как большая часть наших выводов основывается только на очень общих соображениях. Например, индекс Дирака зависит только от класса универсальности теории, а нулевые моды дифференциальных форм остаются нулевыми модами для почти любых калибровочно-инвариантных уравнений, которым эти поля могут удовлетворять, так как калибровочно-инвариантная напряженность поля нулевых мод обращается в нуль.

Обратимся теперь к рассмотрению других безмассовых десятимерных полей — калибровочного и гравитационного полей. Эти поля подчинены таким нелинейным уравнениям, как

¹⁾ Отметим, что числа U_1 и V_1 зависят от спинорной структуры (см. разд. 12.2) на торе, которая проявляется в периодических или антипериодических граничных условиях, которым удовлетворяют поля с полуцелым W в параллелограмме, показанном на рис. 12.3. В случае так называемой нечетной спинорной структуры (периодические граничные условия) $U_1 = V_1 = 1$, что отвечает, как указано в тексте, постоянным полям. В остальных случаях (антипериодичность хотя бы по одному направлению) $U_1 = V_1 = 0$. — Прим. перев.

классические уравнения Эйнштейна и Янга — Миллса в отличие от линейных уравнений на заданном фоне. Поэтому эти поля естественно называть нелинейными. Первый вопрос, который возникает при обсуждении волновых уравнений нелинейных полей, — это вопрос о том, удовлетворяет ли в действительности предполагаемое вакуумное состояние $M^4 \times K$ нелинейным уравнениям Эйнштейна и Янга — Миллса. Такое рассмотрение полностью отлично от того, что обсуждалось в нескольких последних разделах. Ответ на вопрос, удовлетворяет ли нелинейным уравнениям данное пространство K с заданными вакуумными средними полей материи, зависит не только от класса универсальности теории, но и от конкретного выбора действия. Решающее значение имеет, например, то, описывается ли гравитационное поле минимальным действием Эйнштейна — Гильберта $\sqrt{g}R$ или каким-то другим действием с поправками старших порядков, определяемыми теорией струн. Поэтому ответ на вопрос, какие пространства $M^4 \times K$ удовлетворяют нелинейным уравнениям, возникающим в теории струн, требует рассмотрения совершенно другого типа, чем то, которое предложено здесь.

Здесь же мы предположим просто, что найдено некоторое подходящее вакуумное состояние $M^4 \times K$, и зададимся вопросом, какой спектр безмассовых частиц возникает в четырех измерениях. В случае калибровочных и гравитационных полей это означает, что их полевые уравнения линеаризуются вблизи данного решения и исследуется спектр нулевых мод. Это рассмотрение с необходимостью основывается только на очень простых и общих аргументах, поскольку мы не предполагаем, что нам известны правильные уравнения калибровочных и гравитационных полей. Мы предполагаем только, что калибровочное и гравитационное поля описываются некоторыми калибровочно-инвариантными и общековариантными уравнениями, для которых $M^4 \times K$ является одним из решений. И действительно, важные выводы определяются только этим. Утверждения, зависящие от детального вида калибровочных и гравитационных уравнений, не слишком интересны, если не научиться использовать точные уравнения, возникающие в теории струн, так как при этом почти любая ошибка оказывается неприемлемо большой. Мода, которая является нулевой модой с точностью до 1%, соответствует частице, масса которой может иметь величину, равную 1% массы Планка.

Напомним, что при рассмотрении безмассовых мод нелинейных полей координаты на M^4 мы обозначаем через x^μ , $\mu = 1, \dots, 4$, координаты на K обозначаем через y^j , $j = 5, \dots, 10$, а все десять координат вместе обозначаем как X^M , $M =$

$= 1, \dots, 10$. Первое общее утверждение, которое надо сделать о компактификации на многообразии $M^4 \times K$, — это, конечно, утверждение, что имеется ковариантность относительно преобразований Пуанкаре на M^4 . Если исходная десятимерная теория была общековариантной, то четырехмерная группа Пуанкаре является на самом деле группой локальной симметрии, и поэтому следует ожидать появления в четырехмерной теории безмассового гравитона. Поскольку константа является нулевой модой для 0-форм, безмассовая мода есть просто $g_{\mu\nu}(x^\lambda)$, где все индексы касательны к M^4 и зависимость от y^j отсутствует. В общем случае это единственное безмассовое поле в четырех измерениях, возникающее из компонент $g_{\mu\nu}$ десятимерной метрики g_{MN} . Аналогично предположим, что исходная десятимерная теория обладает локальной симметрией относительно калибровочных преобразований для некоторой калибровочной группы G , а также что вакуумное среднее полей материи на K нарушает G до некоторой подгруппы H . Тогда постоянные вдоль K моды $A_\mu^a(x^\lambda)$ (с индексом a , пробегающим алгебру Ли подгруппы H) в четырех измерениях ведут себя, как безмассовые калибровочные поля для H , и в общем случае нельзя ожидать возникновения других безмассовых мод из компонент калибровочного поля, касательных к M^4 .

Более сложная ситуация возникает в случае, когда рассматриваются безмассовые моды компонент $g_{\mu j}$ метрического тензора с одним индексом, касательным к M^4 , и одним, касательным к K . Исторически именно этот случай привел к открытию теории Калуцы — Клейна и вплоть до настоящего времени вызывает появление многих последующих работ на эту тему. Безмассовые моды компонент $g_{\mu j}$ в четырех измерениях будут проявляться как безмассовые частицы спина один, другими словами как безмассовые калибровочные бозоны. Такие частицы возникают, если некоторая подходящая подгруппа группы исходной десятимерной общей ковариантности остается ненарушенной при компактификации $M^4 \times K$. Чтобы понять, как это может происходить, надо прежде всего рассмотреть описание непрерывных симметрий в ОТО. При общекоординатном преобразовании $y^k \rightarrow y^k + \varepsilon V^k(y^j)$ на K (где ε — малый параметр, а V^k — векторное поле) изменение метрики многообразия K легко найти по стандартным формулам ОТО: $\delta g_{ij} = \varepsilon(D_i V_j + D_j V_i)$. Таким образом, метрика на K остается инвариантной при координатном преобразовании $y^k \rightarrow y^k + \varepsilon V^k$, порождаемом векторным полем V , если V удовлетворяет уравнению Киллинга:

$$D_i V_j + D_j V_i = 0. \quad (14.5.1)$$

Координатное преобразование, порожаемое вектором Киллинга V , оставляет метрику на K инвариантной, поэтому оно является симметрией общековариантного уравнения для метрики на K . Если изучается уравнение не для одной только метрики, а для взаимодействующей системы, состоящей из метрики на K и подходящих полей материи (таких как калибровочные поля), то симметрия получается, если V можно сопроводить некоторым подходящим преобразованием полей материи, которое оставляет инвариантными их вакуумные средние.

Если имеется несколько векторов Киллинга V_a^i , $a = 1, \dots, n$, соответствующие преобразования координат порождают некоторую алгебру Ли. В общем случае

$$[V_a^i \partial_i, V_b^j \partial_j] = f_{abc} V_c^k \partial_k, \quad (14.5.2)$$

где f_{abc} — структурные константы некоторой алгебры Ли H , которая порождает группу симметрий для K .

Рассмотрим теперь компактификацию десятимерной общековариантной теории на многообразии $M^4 \times K$, предполагая, что K имеет группу симметрий H . Глобальное (т. е. не зависящее от координат на M^4) вращение на K будет преобразованием координат $(x^\mu, y^k) \rightarrow (x^\mu, y^k + \sum_a \varepsilon^a V_a^k)$, где ε^a — инфинитезимальные константы. Это глобальное преобразование не меняет метрику на $M^4 \times K$, если V_a — векторы Киллинга. Если исходная десятимерная теория является общековариантной, то можно рассматривать не только глобальные вращения на K , но и вращения, зависящие от x^μ . Соответствующая формула имеет вид

$$(x^\mu, y^k) \rightarrow (x^\mu, y^k + \sum_a \varepsilon^a(x^\nu) V_a^k), \quad (14.5.3)$$

где параметры преобразований теперь не константы, а функции от x^μ . При работе с очень большими по сравнению с планковской длинами волн, когда адекватно описание в терминах только безмассовых полей, мы выбираем $\varepsilon^a(x^\mu)$ медленно меняющимися функциями. Преобразования (14.5.3) будут тогда симметрией для любой общековариантной теории, компактифицированной на $M^4 \times K$, и в эффективной четырехмерной теории они будут выглядеть как зависящие от точки на M^4 локальные калибровочные преобразования с калибровочной группой H . Поэтому в эффективной четырехмерной теории должны быть безмассовые калибровочные бозоны для этой группы. Анзац, в котором они проявляются, имеет вид (в линеаризованном приближении)

$$g_{\mu j} = \sum_a A_\mu(x^\nu)^a V_{ja}(y^k), \quad (14.5.4)$$

где $A_\mu(x^\nu)$ — безмассовые калибровочные поля, которые возникают на M^4 . Чтобы проверить корректность анзаца (14.5.4), достаточно заметить, что при калибровочном преобразовании (14.5.3) поля A_μ^a преобразуются правильным образом: $\delta A_\mu^a = \partial_\mu \varepsilon^a + f^{abc} \varepsilon_b A_{\mu c}$.

Какие калибровочные симметрии могут возникать таким способом в процессе компактификации на многообразии $M^4 \times K$? Этот вопрос мы рассмотрим подробнее хотя бы потому, что он представляет исторический интерес, несмотря на то что выводы, к которым это приводит, по-видимому, уже не имеют большого значения в контексте теории суперструн. При обсуждении вопроса о том, какие группы симметрии могут возникать, мы временно откажемся от ограничения десятью измерениями и будем рассматривать компактификацию $(4+n)$ -мерной теории для произвольного n . Вопрос о калибровочных группах, которые могут возникать в четырех измерениях, равносильно вопросу о том, какую группу симметрии может иметь n -мерное многообразие K . Пусть x — точка на K . «Орбита» точки x относительно группы симметрии H многообразия K — это множество W_x , состоящее из всех точек в K , в которые можно перевести x с помощью действия группы. Говорят, что K — однородное пространство для действия группы H , если для каждой точки x орбита W_x полностью охватывает K ; последнее равносильно высказыванию, что для любой точки y на K существует некоторый элемент h группы H , такой, что $h(x) = y$. Из определений следует, что независимо от того, является K однородным для действия группы H или нет, каждая орбита W_x всегда обладает этим свойством. Максимальные возможные группы симметрии многообразий данной размерности всегда возникают для однородных пространств. Интуитивно это понятно, так как если K не является однородным пространством, то некоторые из измерений многообразия «излишни», так как группа H на самом деле действует в подмногообразиях W_x более низкой размерности. Поэтому мы предположим, что K — однородное пространство.

«Малая группа»¹⁾ точки x на K — это подгруппа H_0 группы H , оставляющая точку x неподвижной. Разность размерностей группы H и группы H_0 равна $\dim H - \dim H_0 = n$, где n — размерность многообразия K . Причина заключается в том, что любой генератор группы H , который не оставляет точку x неподвижной, сдвигает ее в некотором касательном направлении. Поскольку имеется только n таких направлений, может существовать самое большее n линейно независимых генераторов группы H ,

¹⁾ Часто используются также эквивалентные термины: «стационарная подгруппа», «подгруппа изотропии». — *Прим. перев.*

не оставляющих точку x неподвижной; если K — однородное пространство, то число таких независимых генераторов должно быть равно n , так как должен существовать *какой-нибудь* генератор группы H , который сдвигает x в любом заданном направлении.

С точностью до изоморфизма существует ровно одно пространство, однородное для действия данной группы H с данной малой группой точки H_0 . Такое однородное пространство удобно определить как пространство, состоящее из элементов группы H , подчиненных соотношению эквивалентности, согласно которому два элемента a и b из H считаются эквивалентными, если $a = bh_0$ для некоторого элемента h_0 из подгруппы H_0 . Пространство классов эквивалентности называется фактор-пространством H/H_0 ; оно является однородным для действия группы H левым умножением: $a \rightarrow ha$, где $h \in H$, $a \in H/H_0$. Выберем элемент a пространства H/H_0 , скажем $a = 1$. Его малая группа состоит из элементов $h \in H$, таких, что $h \cdot 1 = 1 \cdot h_0$ для некоторого $h_0 \in H_0$. Другими словами, малая группа изоморфна подгруппе H_0 . Единственность этой конструкции с точностью до изоморфизма нетрудно доказать, но мы не будем здесь этого делать.

Вместо того чтобы пытаться полностью определить максимальные группы симметрий для n -мерных многообразий K , зададимся просто вопросом, при каких n возможна наблюдаемая в природе группа калибровочной симметрии, а именно $Q = SU(3) \times SU(2) \times U(1)$. (Если требуется большая группа, то n должно быть большим, чем то значение, которое мы определим.) Пусть Q действует однородно¹⁾ на K , и пусть подгруппа Q_0 — малая группа точки. Подгруппа Q_0 не должна содержать целиком ни $SU(3)$, ни $SU(2)$, ни $U(1)$, поскольку в таком случае этот множитель в Q оставил бы K инвариантным и не был бы в действительности группой симметрий. Максимальной подгруппой группы $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$, не содержащей целиком ни одного из трех сомножителей, является $SU(2) \times U(1) \times U(1)$, где $SU(2)$ — «изоспиновая» подгруппа группы $SU(3)$, а две группы $U(1)$ отвечают линейным комбинациям «гиперзарядового» генератора группы $SU(3)$, коммутирующего с «изоспиновой» подгруппой, произвольного генератора группы $SU(2)$ и генератора $U(1)$ -сомножителя в $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$. (Существует бесконечно много неэквивалентных подгрупп $SU(2) \times U(1) \times U(1)$ группы Q , отвечающих разным неэквивалентным выборам генераторов двух $U(1)$ -сомножителей, но мы

¹⁾ Это необщепринятое выражение. Обычно говорят, что Q действует транзитивно на K , если K — однородное пространство для этого действия. — Прим. перев.

не будем здесь их классифицировать.) Итак, пространство с $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ -симметрией будет иметь минимальную возможную размерность, если малую группу выбрать в виде $Q_0 = SU(2) \times U(1) \times U(1)$. В таком случае Q_0 имеет размерность пять, в то время как размерность группы $Q = SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ равна двенадцати, поэтому размерность фактор-пространства, которая является наименьшей возможной размерностью пространства с $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ -симметрией, равна $12 - 5 = 7$.

Для теории суперструн этот результат в лучшем случае является лишь близким к попаданию. Имеется шесть компактных измерений, а надо было бы иметь семь. Если не удастся с помощью компактификации из десяти в шесть измерений получить группу $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$, то можно ли получить по крайней мере какую-нибудь интересную подгруппу этой группы? Действительно, существует единственное шестимерное многообразие с $SU(3) \times SU(2)$ -симметрией (а именно, $CP^2(2) \times S^2$, отвечающее малой группе $Q_0 = SU(2) \times U(1) \times U(1)$), но это пространство не имеет смысла в теории суперструн, поскольку на этом многообразии нельзя определить спиноры (необходимые для этого понятия обсуждались в разд. 12.1). Если бы можно было получить с помощью компактификации хотя бы группу $SU(3) \times SU(2)$, то можно было бы думать об описании физической картины с помощью теории суперструн типа IIA, в которой имеется $U(1)$ -калибровочный бозон в мультиплете десятимерной супергравитации, но сделать это не удается, так как с помощью компактификации нельзя получить даже группу $SU(3) \times SU(2)$.

Тот факт, что десяти измерений недостаточно, безусловно не является единственной проблемой, возникающей при попытках получить реалистическую калибровочную группу при компактификации. Другая важнейшая проблема состоит в том, что независимо от того, с какого числа измерений мы начинаем, невозможно получить реалистические квантовые числа фермионов в четырех измерениях, если предполагается, что калибровочные группы происходят целиком из симметрий компактного многообразия тем способом, который мы обсуждаем. Можно показать, что это следует из доказанной Атьей и Хирцебрухом довольно сложной теоремы о нулевых модах оператора Дирака на многообразиях с непрерывными симметриями. Но мы не будем углубляться в обсуждение этой теоремы и ее приложений в теории Калуцы — Клейна. С открытием безаномальных теорий суперструн, в которых еще до компактификации имеются калибровочные группы в десяти измерениях и которые обладают привлекательной феноменологией (эта феноменология

обсуждается ниже в данной книге), исчезла необходимость пытаться получить калибровочные симметрии через компактификацию. Напротив, $SO(32)$ - и $E_8 \times E_8$ -теории имеют более чем достаточно калибровочной симметрии, и проблема состоит в том, чтобы правильным образом нарушить симметрию, а не в том, чтобы получить больше симметрии.

До сих пор мы рассматривали нулевые моды полей, все индексы которых касательны к M^4 , а также смешанные компоненты метрики $g_{\mu k}$ с одним индексом, касательным к M^4 , и одним индексом, касательным к K . Остается обсудить нулевые моды компонент метрики g_{ij} и калибровочного поля A_k^a со всеми индексами, касательными к K . Вследствие большой сложности уравнений для этих полей наше обсуждение будет кратким.

Компоненты g_{ij} и A_j^a гравитационного и калибровочного полей входят (возможно, вместе с другими полями) в нелинейные уравнения, определяющие структуру многообразия K . Об этих уравнениях мы ничего заранее не предполагаем, помимо того, что они общековариантны и калибровочно-инвариантны. Может случиться, что уравнения, определяющие структуру многообразия K , фиксируют ее однозначно. В этом случае многообразие K жесткое и низкочастотных осцилляций нет. С другой стороны, может быть и так, что уравнения, определяющие структуру многообразия K , не фиксируют ее однозначно. При решении соответствующих уравнений могут возникнуть постоянные интегрирования ϕ_i . В математике такие постоянные интегрирования обычно называются модулями; они аналогичны отчасти модулям римановых поверхностей, обсуждавшимся в разд. 3.3. Не располагая другой информацией, нельзя сказать, сколько вообще имеется модулей. Но если неопределенные постоянные интегрирования возникают при нахождении структуры многообразия K , то в эффективной четырехмерной теории они проявятся в виде безмассовых частиц нулевого спина. Причина состоит в том, что неизбежно возникает возможность рассматривать ситуацию, когда модули ϕ_i не совсем постоянны, а являются слабо меняющимися функциями $\phi_i(x^\lambda)$, где x^λ — координаты на M^4 . Как в обычном доказательстве теоремы Голдстоуна (которая описывает ситуацию, когда неопределенные постоянные интегрирования для вакуума появляются вследствие спонтанного нарушения симметрии), функции $\phi_i(x^\lambda)$ в низкоэнергетической теории возникают как безмассовые поля.

Возникновение модулей означает потерю предсказательной силы теории, поскольку наблюдаемые величины, такие как постоянная тонкой структуры и массы частиц, вероятно, зависят от неопределенных постоянных интегрирования. С другой сто-

роны, связанные с модулями безмассовые частицы, если они действительно существуют, были бы интересным и, возможно, проверяемым предсказанием. Они вполне могли бы иметь универсальное взаимодействие с материей и вызывали бы тогда наблюдаемые отклонения от обычного закона тяготения. Помимо этого, если скаляр ϕ имеет универсальное взаимодействие с материей, то его волновое уравнение в расширяющейся Вселенной будет типа

$$(\partial_t^2 - \partial_i^2) \phi = \rho, \quad (14.5.5)$$

где ρ — источник поля ϕ , оператор, имеющий по предположению ненулевое среднее во Вселенной. Усредняя уравнение (14.5.5) по локальным неоднородностям во Вселенной и, следовательно, пренебрегая пространственными производными, его можно свести на больших масштабах к уравнению

$$\frac{d^2}{dt^2} \phi = \langle \rho \rangle, \quad (14.5.6)$$

где $\langle \rho \rangle$ — среднее значение ρ во Вселенной в данный момент космического времени. Уравнение (14.5.6) требует изменения ϕ во времени. Так как константы связи и отношения масс почти наверняка зависят нетривиальным образом от поля ϕ (особенно поскольку мы предполагаем универсальное взаимодействие этого поля с материей), зависимость поля ϕ от времени проявляется как зависимость от времени естественных «констант».

Обсуждавшаяся связь между модулями и безмассовыми частицами имеет место как в классической (в приближении, когда вакуум описывается классическими уравнениями, возникающими из теории суперструн), так и в квантовомеханической теории. (В точной теории вакуум определяется минимизацией некоторого эффективного потенциала.) В классической теории можно сделать одно общее утверждение. В силу соображений, основанных на масштабных преобразованиях и описанных в разд. 3.4.6 и 13.2, всегда имеется по крайней мере один модуль — среднее значение поля дилатона. Что касается точной квантовой теории, то в настоящее время мы не можем сделать какие-либо утверждения, но экспериментальные ограничения для тех явлений, которые обсуждались в конце предыдущего абзаца, показывают, что таких модулей не существует. Самые сильные ограничения возникают в действительности вследствие того, что изменение во времени естественных констант наблюдать не удается.

14.6. Модели квантовых чисел фермионов

В этом разделе мы применим, наконец, развитые выше методы для построения некоторого класса моделей квантовых чисел безмассовых фермионов, возникающих в четырех измерениях после компактификации. Особенно следует отметить, с какой легкостью получаются в четырех измерениях несколько «поколений» фермионов, тождественных по своим калибровочным квантовым числам, несмотря на то что вначале мы имеем один неприводимый мультиплет в десяти измерениях. Класс моделей, которые будут здесь представлены, наиболее интересен в случае гетеротической $E_8 \times E_8$ -теории, построение которой описано в гл. 6. Необходимые сведения о группе E_8 приведены в приложении 6.A.

Пространство-время мы считаем десятимерным многообразием $M^4 \times K$, где M^4 — пространство Минковского, а K — некоторое компактное шестимерное многообразие. Из общих соображений, обсуждавшихся в разд. 4.2.3, мы знаем, что если не включить в рассмотрение вакуумное среднее $E_8 \times E_8$ -калибровочного поля A_m , касательного к K , то киральная асимметрия фермионных квантовых чисел в четырех измерениях будет равна нулю. Поскольку киральная асимметрия зависит только от класса универсальности теории (именно поэтому она рассматривается нами как фундаментальная проблема!), ясно, что если включить в рассмотрение вакуумные средние калибровочных полей (не нарушая при этом $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ -симметрии), то киральная асимметрия четырехмерных фермионов будет инвариантна относительно непрерывных вариаций этих вакуумных средних. Киральная асимметрия четырехмерных фермионов может зависеть только от топологических инвариантов, связанных с калибровочными полями. Это ясно видно из формулы для индекса (14.2.8), который обращается в нуль, когда калибровочные поля топологически тривиальны.

Чтобы получить интересную модель четырехмерных фермионов, на многообразии K надо выбрать топологически нетривиальную конфигурацию $E_8 \times E_8$ -калибровочных полей, не нарушая при этом $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ -симметрии. В зависимости от свойств многообразия K имеется много возможностей выбора того, что считать средним значением калибровочного поля. Разные возможности в основном соответствуют классификации векторных расслоений на K . Диапазон этих возможностей так велик, что на первый взгляд не ясно, что выбрать за отправную точку в построении интересной модели. Но одна интересная возможность возникает по аналогии с нашими рассмотрениями явлений на мировой поверхности в разд. 14.4.1. Когда рассматри-

вается шестимерное риманово многообразие K , всегда имеется одно векторное расслоение, которое при этом обязательно подразумевается. Это касательное расслоение. Калибровочное поле, участвующее в параллельном переносе касательных векторов, — спиновая связность ω_m^{ab} , которая в шести измерениях является $SO(6)$ -калибровочным полем. Используя вложение группы $SO(6)$ в $E_8 \times E_8$, спиновую связность можно рассматривать как $E_8 \times E_8$ -калибровочное поле. Таким способом мы получаем калибровочное поле на K , которое можно использовать при компактификации и которое обладает тем привлекательным свойством, что не вносит слишком большого произвола, а содержит лишь информацию, которая и так присутствует при любом рассмотрении шестимерного риманова многообразия.

Какое вложение группы $SO(6)$ в группу $E_8 \times E_8$ мы хотели бы рассмотреть? Как обсуждается в приложении 6.A, группа E_8 имеет максимальную подгруппу $SO(16)$, относительно которой присоединенное представление для E_8 разлагается как $120 \oplus \oplus 128$, где 120 и 128 — соответственно присоединенное представление и представление спиноров положительной киральности для $SO(16)$. Группа $SO(16)$ в свою очередь имеет максимальную подгруппу $SO(10) \times SO(6)$, а последняя подгруппа $SO(6)$ — именно та группа, которую мы будем использовать. Итак, $SO(16)$ -калибровочное поле мы возьмем в виде

$$A_i = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \omega_i \end{pmatrix} \quad (14.6.1)$$

с ненулевыми матричными элементами только в 6×6 -блоке в правом нижнем углу, где мы помещаем спиновую связность ω_i .

В некотором смысле подгруппа $SO(6)$ группы E_8 является наименьшей (операторы Казимира, например, малы настолько, насколько это возможно), поэтому указанное выше вложение группы $SO(6)$ в один из двух сомножителей E_8 (совсем не затрагивающее вторую группу E_8) можно считать минимальным выбором. В действительности для такого выбора имеются веские теоретические основания. Так, например, уравнение, связанное с сокращением аномалий, а именно

$$dH = \text{tr } R \wedge R - \text{tr } F \wedge F, \quad (14.6.2)$$

накладывает топологические ограничения на возможные компактификации. Ограничение состоит в том, что правая часть, представляющая собой определенную комбинацию характеристических классов, должна обращаться в нуль на уровне когомологий. Это ограничение в точности выполняется при вложении, заданном формулой (14.6.1). В этом случае правая часть

уравнения (14.6.2) тождественно равна нулю как дифференциальная форма, а не только в смысле когомологий. Так как при других вложениях группы $SO(6)$ в $E_8 \times E_8$ значение квадратичного оператора Казимира для $SO(6)$ было бы больше, правая часть уравнения (14.6.2) не равнялась бы тождественно нулю и, как правило, не обращалась бы в нуль даже в когомологиях.

Если мы действительно выбираем вложение (14.6.1), то вторая группа E_8 остается ненарушенной, в то время как первая группа E_8 нарушается до подгруппы, которая коммутирует с $SO(6)$. Разложение E_8 -алгебры Ли относительно $SO(10) \times SO(6)$

$$248 = (45, 1) \oplus (1, 15) \oplus (10, 6) \oplus (16, 4) \oplus (\overline{16}, \overline{4}) \quad (14.6.3)$$

показывает, что подгруппа группы E_8 , коммутирующая с $SO(6)$, — это в точности группа $SO(10)$. Таким образом, наш анзац нарушает $E_8 \times E_8$ до $SO(10) \times E_8$.

Это уже значительный шаг к феноменологически приемлемой модели. Группа E_8 не является реалистическим кандидатом на роль калибровочной группы большого объединения в четырех измерениях (поскольку она имеет только вещественные представления), но группа $SO(10)$ является таким кандидатом. В самом деле, группа $SO(10)$, как известно, является единственным среди ортогональных групп разумным кандидатом для объединения в четырех измерениях. Представление $\mathbf{16}$ группы $SO(10)$ замечательным образом включает в себя одно поколение кварков и лептонов (вместе с одним ненаблюдаемым массивным левым нейтрино). Попытки использовать для объединения другие ортогональные группы привели к огромным трудностям. Группа $SO(10)$, а не какая-либо другая ортогональная группа, появилась выше не потому, что мы так специально устроили, а потому, что $SO(16)$ — максимальная подгруппа группы E_8 , а 6 — число компактных измерений.

А как обстоит дело с киральной асимметрией? Из соотношения (14.2.13) мы знаем, как вычислить киральную асимметрию фермионов, преобразующихся по некоторому представлению Q_i группы $SO(6)$ и соответствующему представлению L_i группы $SO(10)$. Киральная асимметрия N_{L_i} фермионов, преобразующихся в четырех измерениях по представлению L_i , дается равенством

$$N_{L_i} = \text{index}_{Q_i} \hat{D}_K, \quad (14.6.4)$$

т. е. равна индексу оператора Дирака \hat{D}_K на многообразии K для фермионов, которые преобразуются по представлению Q_i группы $SO(6)$. В результате изучения оператора Дирака мы

узнали также, что этот индекс не равен нулю только в том случае, если Q_i в (14.6.4) есть комплексное представление. Разложение (14.6.3) показывает, что единственные возникающие комплексные представления группы $SO(6)$ — это $\mathbf{4}$ и $\overline{\mathbf{4}}$. Фермионы, преобразующиеся по $SO(6)$ как $\mathbf{4}$ (или $\overline{\mathbf{4}}$), преобразуются по $SO(10)$ как $\mathbf{16}$ (или $\overline{\mathbf{16}}$), так что киральная асимметрия в четырех измерениях получается только для фермионов в этих представлениях. Но это и к лучшему, поскольку, как отмечалось выше, представление $\mathbf{16}$ (или $\overline{\mathbf{16}}$ в зависимости от принятых обозначений) есть подходящее представление фермионов для моделей большого объединения, основанных на $SO(10)$. Таким образом, описанная здесь конструкция автоматически дает не только правильную группу $SO(10)$, но и правильное представление фермионов $\mathbf{16}$, что является очень обнадеживающим фактом.

Каким получится число поколений фермионов? В природе до сих пор наблюдались три поколения (левые $\mathbf{16}$) и ни одного антипоколения (левые $\overline{\mathbf{16}}$). Теорема об индексе дает лишь число N_{gen} , представляющее собой разность числа левых мультиплетов $\mathbf{16}$ и числа левых мультиплетов $\overline{\mathbf{16}}$ в четырех измерениях. Ничего удивительного, разумеется, не будет, если поколения и антипоколения на некотором энергетическом масштабе спариваются и получают массы настолько большие, насколько возможно. В этом случае число антипоколений при низких энергиях будет равно нулю, а число поколений будет равно тому, что мы называем N_{gen} . Кажется, это действительно то, что происходит в природе, так как антипоколения (зеркальные фермионы со слабыми $V+A$ -взаимодействиями) не наблюдаются.

Согласно (14.6.4) и (14.6.3), полное число киральных поколений N_{gen} равно индексу оператора \hat{D}_K в представлении $\mathbf{4}$ группы $SO(6)$. Такую задачу об индексе мы уже анализировали. Для группы $SO(6)$ $\mathbf{4}$ — представление спиноров положительной киральности. Оператор Дирака \hat{D}_K , действующий на поле $\psi_{\alpha a}$, где α — спинорный индекс, а a — янг-милсов индекс, отвечающий представлению $\mathbf{4}$ группы касательного пространства $SO(6)$, есть в точности оператор \tilde{S} , который обсуждался в конце разд. 14.3.4. Его индекс дается формулой (14.3.55):

$$\text{index } \tilde{S} = \chi(K)/2, \quad (14.6.5)$$

где $\chi(K)$ — эйлерова характеристика многообразия K . На самом деле величина (14.6.5) — это не совсем то, что можно идентифицировать как число поколений в четырех измерениях. Разность между $\mathbf{16}$ и $\overline{\mathbf{16}}$ зависит от выбора базиса в алгебре

Ли группы $SO(10)$, и физики просто договорились определять наблюдаемые фермионы как представление $\mathbf{16}$, а не как представление $\overline{\mathbf{16}}$ группы $SO(10)$. Таким образом, число поколений в природе положительно более или менее по определению, поэтому его следует отождествить с абсолютным значением величины (14.6.5):

$$N_{gen} = |\chi(K)/2|. \quad (14.6.6)$$

Это наш окончательный результат для числа поколений.

Выражение (14.6.6) дает интереснейшую возможность получить ответ на вопрос, почему природа решила повторять структуру, давая нам при низких энергиях несколько поколений фермионов с одинаковыми калибровочными квантовыми числами. Начиная с одного неприводимого мультиплета фермионов в десяти измерениях, мы получаем, согласно выражению (14.6.6),

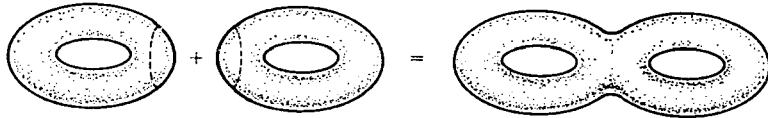


Рис. 14.3. Связная сумма $A + B$ двух пространств A и B получается удалением полусферы в каждом пространстве и склеиванием их по границе.

несколько поколений в четырех измерениях, причем их число определяется одним из действительно фундаментальных топологических инвариантов компактного многообразия K — его эйлеровой характеристикой.

Эйлерову характеристику различных простых пространств можно вычислить, воспользовавшись следующими средствами. Прежде всего у нас есть формула (14.3.52) для эйлеровой характеристики:

$$\chi(K) = \sum_p (-1)^p b_p. \quad (14.6.7)$$

Для произведения пространств $K = A \times B$ имеем

$$\chi(A \times B) = \chi(A) \times \chi(B). \quad (14.6.8)$$

Это равенство можно доказать, воспользовавшись формулой Кюннета, обсуждавшейся в разд. 12.4, вместе с формулой (14.6.7) или же используя описание эйлеровой характеристики как индекса оператора S . Для связной суммы двух пространств A и B (связная сумма $A + B$ образуется, как показано на рис. 14.3, удалением полусфер из A и из B и склеиванием последних вместе вдоль получившихся границ) имеем

$$\chi(A + B) = \chi(A) + \chi(B) - 2. \quad (14.6.9)$$

Поправка -2 в формуле (14.6.9) — это эйлерова характеристика двух полусфер, которые отбрасываются при образовании связной суммы. Формула (14.6.9) представляет собой n -мерное обобщение формулы, которая использовалась в конце гл. 12 для вычисления эйлеровой характеристики римановой поверхности произвольного рода, и может быть доказана тем же способом. Формулу (14.6.9) можно обобщить и получить поведение эйлеровой характеристики в процессе произвольных разрезов и склеиваний и тем самым вычислить эйлерову характеристику любого достаточно простого пространства.

Приведенных выше формул достаточно, чтобы рассмотреть множество интересных примеров. Из разд. 12.4 нам известно, что ненулевые числа Бетти сферы S^n суть $b_0 = b_n = 1$. Поэтому для $K = S^6$ формула (14.6.7) дает $\chi = 2$ и одно поколение. Для $K = S^2 \times S^4$ формула (14.6.8) дает $\chi = 4$, что отвечает двум поколениям. Для $K = S^2 \times S^2 \times S^2$ получаем $\chi = 8$, или четыре поколения. Связная сумма $K = A + B$, где $A = B = S^2 \times S^4$, имеет эйлерову характеристику $\chi = 4 + 4 - 2 = 6$, отвечающую модели с тремя поколениями. Очевидно, что таким способом можно получить любое число поколений. Без дополнительных физических принципов нельзя предсказать число поколений. Но все же очень приятно, что группа $SO(10)$ и правильное представление для фермионов возникают естественным образом. Маловероятно, чтобы эта удача была случайной, и очень может быть, что связь между числом поколений и топологией многообразия K есть зародыш будущего объяснения происхождения аромата.

В гл. 16 мы исследуем улучшенный вариант рассмотренной здесь модели, в котором группа голономии многообразия K есть не $SO(6)$, а $SU(3)$. Ненарушенная $SO(10)$ -симметрия, фигурировавшая выше, увеличится тогда до группы E_6 , а безмассовые фермионы будут в мультиплетах $\mathbf{27}$ для E_6 , а не $\mathbf{16}$ для $SO(10)$. В литературе в последнее время обсуждались многие другие возможные подходы для получения детальных моделей квантовых чисел фермионов.

14.7. Сокращение аномалий в четырех измерениях

Имеется еще один вопрос, который мы хотим исследовать. Теория свободна от аномалий, если эффективное действие инвариантно относительно калибровочных и общекоординатных преобразований. Если в некоторой теории такая инвариантность имеет место точно, то она должна иметь место и в любом корректном приближении, таком, как редукция к эффективной низкоэнергетической четырехмерной теории после компактификации.

Таким образом, безаномальные десятимерные теории должны редуцироваться в четырех измерениях к безаномальным же четырехмерным теориям. Посмотрим, как это происходит.

Пусть F_0 и R_0 — вакуумные средние напряженности поля Янга — Миллса и тензора Римана на K . Для настоящего анализа необязательно, чтобы фоновые поля удовлетворяли уравнениям движения, но необходимо, чтобы 4-форма

$$\text{tr } R_0^2 - \text{tr } F_0^2 \quad (14.7.1)$$

была равна нулю в когомологиях, так что тождество Бианки

$$dH = \text{tr } R_0^2 - \text{tr } F_0^2 \quad (14.7.2)$$

имело бы решение. Пусть G — десятимерная калибровочная группа $SO(32)$, или $E_8 \times E_8$, и пусть компоненты напряженности F , имеющие вакуумные средние, лежат в некоторой подгруппе J группы G . Подгруппа H , ненарушенная в четырех измерениях, есть подгруппа группы G , коммутирующая с J . Присоединенное представление A группы G разлагается относительно $H \times J$ в сумму вида

$$A \approx \bigoplus_i L_i \otimes Q_i, \quad (14.7.3)$$

где L_i — неприводимые представления группы H , а Q_i — неприводимые представления группы J . В частности

$$\sum_i \dim L_i \cdot \dim Q_i = 496. \quad (14.7.4)$$

Рассмотрим теперь уравнение Дирака для десятимерного поля «глюино» χ , преобразующегося по представлению (14.7.3). Согласно (14.1.4), десятимерное безмассовое уравнение Дирака $\hat{D}_{10}\chi = 0$ можно записать в виде

$$\hat{D}_4\chi + \hat{D}_K\chi = 0, \quad (14.7.5)$$

где \hat{D}_4 и \hat{D}_K — операторы Дирака на многообразиях M_4 и K соответственно. Согласно (14.2.8), киральная асимметрия четырехмерных фермионов, преобразующихся по представлению L_i ненарушенной группы H , равна

$$n_i = n_i^L - n_i^R = \frac{1}{48(2\pi)^3} \int_K \left[\text{tr}_{Q_i} F_0^3 - \frac{1}{8} \text{tr}_{Q_i} F_0 \text{tr } R_0^2 \right]. \quad (14.7.6)$$

Символ tr_{Q_i} означает, что след берется в представлении Q_i группы H .

Пусть T — генератор группы H . Тогда T^3 -аномалия для четырехмерных фермионов в представлении L_i группы J есть

$\text{tr}_{L_i} T^3$. Суммирование по i с n_i мультиплетами каждого типа дает полную аномалию

$$I = \sum n_i \text{tr}_{L_i} T^3. \quad (14.7.7)$$

В эту сумму могут давать вклад только комплексные представления, поскольку для вещественных представлений $\text{tr } T^3 = 0$.

Пусть X и Y — генераторы (или произведения генераторов) для H и J соответственно. Из соотношения (14.7.3) тогда следует

$$\sum_i \text{tr}_{L_i} X \text{tr}_{Q_i} Y = \text{Tr}(XY), \quad (14.7.8)$$

где Tr — след в 496-мерном присоединенном представлении группы G . Смысл уравнения (14.7.8) состоит в том, что сумма произведений $\text{tr}_{L_i} \cdot \text{tr}_{Q_i}$ по i воспроизводит след в присоединенном представлении группы G . Применим это к случаю, когда X равно T^3 , а Y равно F_0 или F_0^3 . Тогда сумма (14.7.7) с учетом (14.7.6) принимает вид

$$I = \int_K \left(\text{Tr } T^3 F_0^3 - \frac{1}{8} \text{Tr } T^3 F_0 \text{tr } R_0^2 \right). \quad (14.7.9)$$

Следующий шаг состоит в том, чтобы преобразовать выражение $\text{Tr } T^3 F_0^3$, используя тождество

$$\text{Tr } F^6 = \frac{1}{48} \text{Tr } F^2 \text{Tr } F^4 - \frac{1}{14400} (\text{Tr } F^2)^3 \quad (14.7.10)$$

из разд. 13.5.3, которое играет важную роль в сокращении аномалий. Применяя последнее равенство к произвольной линейной комбинации $\alpha T + \beta F_0$ и выделяя коэффициент при $\alpha^3 \beta^3$, получаем

$$\text{Tr } T^3 F_0^3 = \frac{1}{240} \text{Tr } T^3 F_0 \text{Tr } F_0^2. \quad (14.7.11)$$

При этом мы отбросили члены вида $\text{Tr } T F_0$ и $\text{Tr } T F_0^3$, которые обращаются в нуль, если группа H полупростая. Более общий случай мы прокомментируем ниже. Подставляя выражение (14.7.11) в формулу (14.7.9), находим

$$I = -\frac{1}{8} \int_K \text{Tr } T^3 F_0 (\text{tr } R_0^2 - \text{tr } F_0^2). \quad (14.7.12)$$

Используя равенство $\text{tr } R_0^2 - \text{tr } F_0^2 = dH$ и интегрируя по частям, получаем нуль, так как

$$\text{Tr } T^3 F_0 = \sum_i \text{tr}_{L_i} T^3 \text{tr}_{Q_i} F_0 \quad (14.7.13)$$

и в силу тождества Бианки $d \text{tr}_{Q_i} F_0 = 0$.

В рассмотренном выше доказательстве мы использовали предположение, что группа H полупроста, чтобы отбросить определенные члены в выражении (14.7.11). На первый взгляд может показаться, что в противном случае $U(1)$ -компонента группы H будет аномальной. Но этого не может быть, поскольку калибровочно-инвариантное эффективное действие безаномальной десятимерной теории должно оставаться калибровочно-инвариантным и в любом корректном приближении. Что же мы упускаем? Если группа H не полупростая, возможно новое физическое явление. $U(1)$ -компоненты группы H могут получить массы, поглотив некоторые из обсуждавшихся выше в разд. 14.3.2 скаляров, которые иначе были бы безмассовыми аксионами. В точности тогда, когда кажется, что выражение (14.7.11) предсказывает аномалии для данного $U(1)$ -калибровочного поля, это калибровочное поле исчезает из низкоэнергетического спектра, соединяясь с «аксионом» в массивный векторный мезон. Но мы не будем исследовать это явление; интересующийся читатель может заняться этим в качестве упражнения или обратиться к литературе.

Аналогично можно проанализировать четырехмерные смешанные калибровочно-гравитационные аномалии. Только что упомянутое «аксионное» явление играет важную роль в этом анализе, поскольку в любом случае четырехмерные смешанные аномалии не возникают, если группа H полупростая. Чисто гравитационные аномалии в четырех измерениях невозможны.

15. Некоторые сведения по алгебраической геометрии

В гл. 12 и 14 мы развили простые методы дифференциальной геометрии и использовали их для того, чтобы получить некоторые сведения о компактификации скрытых измерений, а также о том, что происходит на струнной мировой поверхности. Обратимся теперь к некоторым более специальным математическим методам, использующим комплексные многообразия и алгебраическую геометрию. В этом случае также мотивировка двоякая. Мировая поверхность струны представляет собой комплексное многообразие — риманову поверхность, и по мере развития теории струн более глубокое изучение явлений на мировой поверхности, вероятно, потребует привлечения более глубоких аспектов алгебраической геометрии, которые уже начали появляться в последних работах о многопетлевых диаграммах. Кроме того, алгебраическая геометрия использовалась в недавних попытках сформулировать более реалистические модели струнной компактификации.

В этой главе мы развиваем некоторые основные понятия комплексной геометрии с примерами, которые отобраны исходя из их роли в изучении явлений на мировой поверхности и в изучении компактификации. Мы не сможем, к сожалению, описать в этой книге недавние работы по применению алгебраической геометрии к многопетлевым диаграммам. Этот вопрос по-видимому, еще недостаточно разработан, а необходимый математический аппарат слишком обширен, чтобы мы могли его изложить даже в такой довольно большой главе, как эта. Излагая здесь по крайней мере некоторые элементарные основные сведения, мы надеемся облегчить задачу тем читателям, которые захотят почерпнуть дальнейшую информацию из других источников. Мы попытаемся дать умеренно полный обзор приложений алгебраической геометрии к струнной компактификации. Этот предмет вместе со свойствами мировой поверхности служит мотивировкой нашей математической работы в этой главе, и он будет также темой следующей главы.

15.1. Низкоэнергетическая суперсимметрия

Поскольку анализ низкоэнергетической суперсимметрии представляет собой такое приложение алгебраической геометрии, которое мы исследуем подробно, представляется уместным начать с обсуждения мотивировки для этого анализа.

15.1.1. Мотивировка

Одной из важных причин, побуждающих рассмотреть низкоэнергетическую суперсимметрию, является проблема иерархии — вопрос о том, почему энергетический масштаб нарушения симметрий слабых взаимодействий столь мал по сравнению с более фундаментальными масштабами, такими как масса Планка. Решение этой проблемы нам не известно, но одним из необходимых моментов такого решения является, по-видимому, то, что обычный хиггсов $SU(2) \times U(1)$ -дублет должен оставаться безмассовым на масштабе компактификации, причем с чрезвычайной точностью¹⁾. Это заставляет серьезно задуматься. Существует много механизмов (например, теоремы об индексе и киральные симметрии), которые могут дать безмассовые заряженные фермионы, но объяснить существование безмассовых заряженных полей нулевого спина трудно. Безмассовыми являются голдстоуновские бозоны, но они всегда нейтральны относительно ненарушенных калибровочных симметрий. На самом деле единственный известный способ объяснить существование безмассовых скаляров состоит в том, чтобы постулировать существование ненарушенной суперсимметрии низкоэнергетического мира. При таком предположении безмассовые заряженные скаляры могут естественным образом возникать как суперсимметричные партнеры безмассовых заряженных фермионов. Разумеется, если мы предполагаем, что хиггсов $SU(2) \times U(1)$ -дублет будет в точности безмассовым в пределе ненарушенной суперсимметрии, то очень малый, но не нулевой масштаб нарушения $SU(2) \times U(1)$ -симметрии в реальном мире должен быть связан с малым масштабом нарушения суперсимметрии.

Другой стимул к изучению условий для ненарушенной суперсимметрии состоит в том, что это дает один из способов нахождения решений уравнений движения теории. Состояние с

¹⁾ Имеется и другая возможность, состоящая в том, что хиггсов $SU(2) \times U(1)$ -дублет является не элементарным полем, а составным, которое образуется в результате динамического нарушения симметрии. Привлекательность этой замечательной идеи сильно снижают неисчислимые феноменологические трудности, и она пока не позволила достичь каких-либо интересных продвижений в теории струн.

ненарушенной суперсимметрией в четырех измерениях всегда удовлетворяет уравнениям движения. Это утверждение наиболее очевидно в случае глобальной суперсимметрии, когда гамильтониан неотрицательно определен и обращается в нуль тогда и только тогда, когда суперсимметрия ненарушена. Это утверждение верно и в супергравитации. Известные в настоящее время компактификационные решения уравнений ограничиваются почти одними только состояниями с ненарушенной суперсимметрией. Другие известные решения сравнительно просто связаны с такими состояниями с ненарушенной суперсимметрией¹⁾.

Последней важнейшей причиной изучения конфигураций с ненарушенной суперсимметрией является тот факт, что гипотеза о ненарушенной суперсимметрии очень ограничительна, но не чересчур ограничительна для феноменологии. Точнее этим достоинством обладает гипотеза о ненарушенной $N = 1$ -суперсимметрии. Большая ненарушенная алгебра суперсимметрии не привела бы к реалистической модели, так как в четырехмерных суперсимметричных теориях с $N \geq 2$ -суперсимметрией безмассовые фермионы преобразуются всегда по вещественному представлению калибровочной группы, что находится в полном противоречии с тем, что наблюдается в природе. Таким образом, мы будем на самом деле интересоваться условиями для ненарушенной $N = 1$ -суперсимметрии.

Мы сосредоточим внимание на $SO(32)$ - и $E_8 \times E_8$ -теориях, поскольку в них есть фундаментальные калибровочные поля и могут возникать киральные фермионы в четырех измерениях. Их феноменология, как мы увидим, весьма интересна, особенно в случае группы $E_8 \times E_8$. Но многие соображения, которые будут развиты ниже, могут быть применены также и к теориям типа II. Для $SO(16) \times SO(16)$ -теории вопрос о низкоэнергетической суперсимметрии не стоит, поскольку эта теория не имеет ненарушенной суперсимметрии даже в десяти измерениях.

Изучение условий ненарушенной суперсимметрии приведет нас в увлекательную область алгебраической геометрии, предмета, который имеет приложения, как уже отмечалось, также и на мировой поверхности. Тот факт, что в решении обеих задач участвуют схожие математические методы, является на самом деле одной из причин, позволяющих надеяться, что подход к компактификации, основанный на алгебраической геометрии, содержит рациональное зерно.

¹⁾ Например, можно получить спонтанное нарушение суперсимметрии в случае орбифолдов (см. разд. 9.5.2); можно также нарушить суперсимметрию на многообразиях с группой голономии $SU(3)$, если работать со спиновыми структурами, для которых нет ковариантно постоянного спинора.

15.1.2. Условия ненарушенной суперсимметрии

В теориях с локальной суперсимметрией инфинитезимальный параметр преобразований суперсимметрии $\eta_\alpha(X^M)$ может иметь произвольную зависимость от пространственно-временных координат X^M . Для любого выбора $\eta_\alpha(X)$ существует соответствующий сохраняющийся суперзаряд Q . Мы хотим выделить из этого бесконечного числа сохраняющихся суперзарядов те, которые генерируют ненарушенные суперсимметрии. Ненарушенная суперсимметрия Q — это просто такой сохраняющийся суперзаряд, который аннулирует вакуумное состояние $|\Omega\rangle$. Утверждение, что Q аннулирует $|\Omega\rangle$, эквивалентно утверждению, что для всех операторов U выполняется условие $\langle\Omega|\{Q, U\}|\Omega\rangle=0$. Это равенство определено выполняется, если U — бозонный оператор, поскольку тогда $\{Q, U\}$ — фермионный оператор. Таким образом, вопрос заключается в том, обращается ли в нуль $\langle\Omega|\{Q, U\}|\Omega\rangle$ в случае, когда U — фермионный оператор.

Но если U — фермионный оператор, то величина $\{Q, U\}$ есть просто δU — вариация оператора U при преобразовании суперсимметрии, генерируемом суперзарядом Q . Кроме того, в классическом пределе δU и $\langle\Omega|\delta U|\Omega\rangle$ совпадают. Таким образом, задача о нахождении ненарушенной суперсимметрии на древесном уровне равносильна задаче о нахождении таких преобразований суперсимметрии, для которых $\delta U=0$ для любого фермионного поля U . В классическом пределе достаточно проверить это для элементарных фермионных полей.

В низкоэнергетической эффективной теории поля в десяти измерениях элементарными фермионами являются только гравитино ψ_M , «дилатино» λ со спином $1/2$ и глюино χ^a . Как обсуждалось в гл. 13, их преобразования суперсимметрии имеют вид

$$\begin{aligned}\delta\psi_M &= \frac{1}{\kappa} D_M \eta + \frac{\kappa}{32g^2\phi} (\Gamma_M^{NPQ} - 9\delta_M^N \Gamma^{PQ}) \eta H_{NPQ} + (\text{ферми-поля})^2, \\ \delta\chi^a &= -\frac{1}{4g\sqrt{\phi}} \Gamma^{MN} F_{MN}^a \eta + (\text{ферми-поля})^2, \\ \delta\lambda &= -\frac{1}{\sqrt{2}\phi} (\Gamma \cdot \partial\phi) \eta + \frac{\kappa}{8\sqrt{2}g^2\phi} \Gamma^{MNP} \eta H_{MNP} + (\text{ферми-поля})^2.\end{aligned}\quad (15.1.1)$$

Здесь ϕ — поле дилатона, F_{MN}^a — напряженность поля Янга — Миллса, а H_{MNP} — калибровочно-инвариантная напряженность поля антисимметричного тензора B_{MN} . В то время как значения пространственно-временной метрики и поля дилатона ϕ мы можем задать произвольно, попытаюсь удовлетворить условиям $\delta\psi_M = \delta\lambda = \delta\chi^a = 0$, произвольные значения F и H выбрать

нельзя: они должны удовлетворять определенным тождествам Бианки. В минимальной десятимерной теории тождество Бианки для H есть $dH = -\text{tr} F \wedge F$, но, как мы видели в гл. 13, в теории струн это тождество принимает вид

$$dH = \text{tr} R \wedge R - \text{tr} F \wedge F. \quad (15.1.2)$$

Поскольку струнные поправки в уравнении (15.1.2) играют важную роль в нашем рассмотрении, можно задать вопросом, действительно ли можно пренебречь другими теоретико-струнными поправками в соотношениях (15.1.1). В принципе мы хотели бы найти вакуумные состояния не просто в предельной низкоэнергетической теории поля, а в точной теории струн со всеми ее массивными степенями свободы. Сделать это с помощью непосредственного изучения теоретико-струнного обобщения формул (15.1.1) слишком трудно: пришлось бы либо исследовать преобразования суперсимметрии для всей бесконечной башни массивных полей, либо, проинтегрировав по ним, изучать бесконечный ряд поправок к соотношениям (15.1.1), содержащих члены все более и более высокого порядка по α' . В любом случае нужные уравнения в замкнутом виде неизвестны. Несмотря на это, в разд. 16.6.3 мы сможем показать, что результаты, которые мы получаем из предельной низкоэнергетической теории поля, остаются справедливыми во всех конечных порядках по α' .

Анализ соотношений (15.1.1) в общем случае весьма сложен, поэтому мы упростим рассмотрение, предположив с самого начала, что калибровочно-инвариантная 3-форма H равна нулю, а поле дилатона ϕ есть константа. После того как будут развиты некоторые необходимые методы, мы вернемся к этой задаче в разд. 16.7 и найдем более общий класс суперсимметричных вакуумных состояний с ненулевой H и непостоянным ϕ . В наших упрощающих предположениях условия нахождения суперсимметричного генератора η , который оставляет вакуум инвариантным, сводятся к

$$\begin{aligned}0 &= \delta\psi_M = D_M \eta, \\ 0 &= \delta\chi^a = \Gamma^{ij} F_{ij}^a \eta.\end{aligned}\quad (15.1.3)$$

Таким образом, первое из этих уравнений утверждает, что генератор ненарушенной суперсимметрии η должен быть ковариантно постоянным. Это исключительно сильное условие, так как оно подразумевает условие интегрируемости $[D_M, D_N]\eta = 0$, или, другими словами,

$$R_{MNPQ} \Gamma^{PQ} \eta = 0, \quad (15.1.4)$$

где R_{MNPQ} — тензор Римана.

Будем искать вакуумное состояние, для которого десятимерное пространство-время имеет вид $T^4 \times K$, где T^4 — максимально симметричное пространство (пространство де Ситтера, анти-де Ситтера или пространство Минковского), а K — компактное шестимерное многообразие. Но теперь мы покажем, что из уравнения (15.1.4) следует обращение в нуль четырехмерной космологической постоянной, исключая тем самым возможности, связанные с пространствами де Ситтера и анти-де Ситтера. Напомним принятые нами обозначения: индексы M, N, P касательны к десятимерному пространству-времени, индексы μ, ν, λ касательны к T^4 , а индексы i, j, k касательны к K . Максимально симметричное пространство T^4 по определению имеет тензор кривизны вида $R_{\mu\nu\alpha\beta} = (r/12) \times \times (g_{\mu\alpha}g_{\nu\beta} - g_{\mu\beta}g_{\nu\alpha})$, где r — четырехмерная скалярная кривизна. Из уравнения (15.1.4) для $M, N = 1, \dots, 4$ теперь немедленно следует, что $r = 0$, так что максимально симметричное пространство T^4 в действительности должно быть плоским пространством Минковского, как нам и требовалось.

Этот результат нетривиален, так как в четырехмерных супергравитационных теориях суперсимметрия не означает обязательно обращение в нуль космологической постоянной. Например, ненарушенная $N = 1$ -суперсимметрия в четырех измерениях возможна как в пространстве Минковского, так и в пространстве анти-де Ситтера. В то время как ненарушенная суперсимметрия не приводит автоматически к обращению в нуль космологической постоянной, в рассматриваемой нами ситуации это происходит. Этот факт можно было бы рассматривать как феноменологическую удачу, но это мало затрагивает реальную загадку космологической постоянной, заключающуюся в том, почему она обращается в нуль *после* нарушения суперсимметрии.

Возвращаясь к уравнениям (15.1.3) и учитывая, что теперь T^4 — плоское пространство Минковского M^4 , находим, что отвечающие $M = 1, \dots, 4$ компоненты первого уравнения означают, что η не должно зависеть от четырех компактифицированных координат. Таким образом, первое из уравнений (15.1.3) сводится к некоторому утверждению о компактном шестимерном многообразии K : надо, чтобы на K можно было найти спинорное поле η , которое ковариантно постоянно. В следующем разделе мы исследуем следствия такого утверждения. С этого начнется наша встреча с алгебраической геометрией, а в конце концов мы разовьем методы, позволяющие исследовать и второе из уравнений (15.1.3).

15.1.3. Многообразия с группой голономии $SU(3)$

Спиновая связность ω на римановом многообразии K размерности n является в общем случае $SO(n)$ -калибровочным полем. При параллельном переносе вокруг стягиваемой замкнутой кривой γ физическое поле ψ преобразуется в $U\psi$, где $U = P \exp \int_{\gamma} \omega \cdot dx$ есть упорядоченная по пути вдоль γ экспонента от ω . Эти $SO(n)$ -матрицы U , которые можно получить таким способом, всегда образуют некоторую группу H , называемую группой голономии многообразия. (H образует группу, так как если параллельный перенос вокруг кривой γ_1 дает $SO(n)$ -матрицу U_1 , а параллельный перенос вокруг кривой γ_2

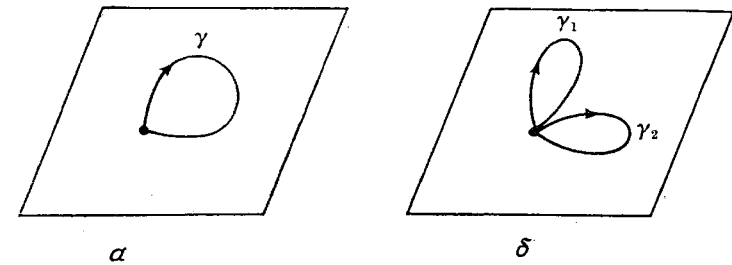


Рис. 15.1. *a* — при параллельном переносе вокруг замкнутой кривой касательные векторы преобразуются посредством ортогональной матрицы, получающейся в результате интегрирования спиновой связности вдоль этой кривой; *b* — получающиеся матрицы всегда образуют группу, поскольку можно взять композицию замкнутых кривых.

дает $SO(n)$ -матрицу U_2 , то произведение $U_1 \cdot U_2$ возникает в результате параллельного переноса вокруг составной кривой $\gamma_1 \cdot \gamma_2$, показанной на рис. 15.1, *b*. Так как мы ограничились стягиваемыми петлями, мы определили, таким образом, локальную группу голономии. Глобальные свойства появятся позднее.)

В общем случае H совпадает со всей группой $SO(n)$, но нас будут интересовать случаи, когда это не так. В «физическом» случае с $n = 6$ мы хотели бы найти условия, при которых K допускает спинорное поле η , удовлетворяющее уравнению $D_i \eta = 0$. Как и в калибровочных теориях, ковариантно постоянное поле η всегда возвращается к своему исходному значению в результате параллельного переноса вокруг стягиваемой замкнутой кривой. Таким образом, группа голономии многообразия, допускающего ковариантно постоянное спинорное поле η , состоит из таких $SO(6)$ -матриц U , которые удовлетворяют

уравнению $U\eta = \eta$. Какая подгруппа группы $SO(6)$ удовлетворяет этому условию? Алгебра Ли группы $SO(6)$ изоморфна алгебре Ли группы $SU(4)$, а спинорами положительной и отрицательной киральностей для $SO(6)$ являются соответственно фундаментальное представление $\mathbf{4}$ и представление $\bar{\mathbf{4}}$ группы $SU(4)$ ¹⁾. Мы можем предположить, что η имеет положительную киральность и, таким образом, принадлежит представлению $\mathbf{4}$ группы $SU(4)$. Подгруппа группы $SU(4)$, оставляющая инвариантным некоторый элемент в представлении $\mathbf{4}$, — это $SU(3)$. Действительно, с помощью $SU(4)$ -преобразования мы всегда можем привести η к виду

$$\eta = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \eta_0 \end{pmatrix}, \quad (15.1.5)$$

а ненарушенная подгруппа $SU(3)$ — это просто подгруппа группы $SU(4)$, действующая на первые три компоненты.

Поскольку представление $\mathbf{4}$ группы $SU(4)$ содержит ровно один $SU(3)$ -синглет, шестимерное многообразие K , группа голономии которого есть в точности $SU(3)$, а не какая-либо ее подгруппа, допускает ровно одно ковариантно постоянное поле η положительной киральности. Комплексно-сопряженное поле $\bar{\eta}$ является тогда единственным ковариантно постоянным спинорным полем отрицательной киральности. Если в четырех измерениях нам нужна ненарушенная $N = 1$ -суперсимметрия, то группа голономии многообразия K должна быть в точности $SU(3)$. Чтобы убедиться в этом, заметим, что если спинорные представления положительной и отрицательной киральностей для $SO(1, 3)$ обозначить через $\mathbf{2}$ и $\mathbf{2}'$, то представление $\mathbf{16}$ -компонентных спиноров положительной киральности для $SO(1, 9)$ разлагается относительно ее подгруппы $SO(1, 3) \times SO(6)$ или $SO(1, 3) \times SU(4)$ как $\mathbf{16} \approx (\mathbf{2}, \mathbf{4}) \oplus (\mathbf{2}', \bar{\mathbf{4}})^2$. Если оба представления $\mathbf{4}$ и $\bar{\mathbf{4}}$ содержат одно ковариантно постоянное спинорное поле, то ковариантно постоянные компоненты из представления $\mathbf{16}$ будут преобразовываться относительно $SO(1, 3)$ как $\mathbf{2} \oplus \mathbf{2}'$. Но представление $\mathbf{2} \oplus \mathbf{2}'$ (где представление $\mathbf{2}'$ — комп-

¹⁾ Эти факты объяснены в приложении 6.А.

²⁾ Это сводится к высказыванию, что в представлении $\mathbf{16}$ группы $SO(1, 9)$ положительная (или отрицательная) $SO(1, 3)$ -киральность связана с положительной (или отрицательной) $SO(6)$ -киральностью, что эквивалентно утверждению $\Gamma^{(4)} = \Gamma^{(6)}$, выведенному в разд. 14.2.1.

лексно-сопряженное по отношению к $\mathbf{2}$, так как представление $\mathbf{16}$ группы $SO(1, 9)$ вещественно, или иначе, так как два спинорных представления группы $SO(1, 3)$ комплексно-сопряженные) отвечает одному вещественному четырехкомпонентному майорановскому спинору группы $SO(1, 3)$. Поэтому $SU(3)$ -голономия многообразия K дает ненарушенную $N = 1$ -суперсимметрию в четырех измерениях.

Следующая наша задача — понять, какого сорта многообразия K допускают метрику с $SU(3)$ -голономией. Основным средством является тот факт, что если η ковариантно постоянно, то таким же является и любое тензорное поле, построенное из произведений η с самим собой. Одним из таких тензоров является «кэлерова форма» $k_{ij} = \bar{\eta} \Gamma_{ij} \eta$. Другой тензор, в некотором смысле даже более фундаментальный, — «комплексная структура» $J^i_j = g^{ik} k_{kj}$. Наконец, нам встретится также «голоморфная форма объема» $\omega_{ijk} = \eta^T \Gamma_{ijk} \eta$. Чтобы выяснить, что это означает, когда многообразии допускает метрику с $SU(3)$ -голономией, рассмотрим по очереди следствия, вытекающие из существования ковариантно постоянной комплексной структуры, ковариантно постоянной кэлеровой формы и ковариантно постоянной голоморфной формы объема. При этом нам встретятся многие основные понятия алгебраической геометрии, которые имеют также и другие приложения, например на мировой поверхности.

15.2. Комплексные многообразия

Вложение группы $SU(3)$ или $U(3)$ в группу $SO(6)$ можно описать следующим образом. Хотя, разумеется, не существует вещественного числа, квадрат которого равен -1 , но легко найти матрицу размера 2×2 , квадрат которой равен -1 , а именно

$$I = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (15.2.1)$$

Матрица из группы $U(3)$ — это матрица комплексных чисел размера 3×3

$$U = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad (15.2.2)$$

с матричными элементами, являющимися комплексными числами a_{ij} . Заменяя мнимую единицу i вещественной 2×2 -матрицей I , представим комплексное число $a_{ij} = \text{Re } a_{ij} + i \text{Im } a_{ij}$

вещественной 2×2 -матрицей $\tilde{a}_{ij} = \operatorname{Re} a_{ij} + I \cdot \operatorname{Im} a_{ij}$. Если превратить таким способом каждое комплексное число в вещественную 2×2 -матрицу, то комплексная 3×3 -матрица U станет вещественной 6×6 -матрицей \bar{U} . Если матрица U унитарная, то \bar{U} — ортогональная матрица. Это и есть вложение группы $U(3)$ в группу $SO(6)$.

В частности, $U(3)$ -матрица $U = i$ (другими словами, матрица с матричными элементами $a_{ij} = i \cdot \delta_{ij}$) представляется таким способом вещественной 6×6 -матрицей

$$\bar{I} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (15.2.3)$$

Если не считать единичной матрицы, матрица I является единственной $U(3)$ - (или $SU(3)$ -) инвариантной матрицей в фундаментальном представлении $\mathfrak{6}$ группы $SO(6)$. Действительно, чтобы некоторая матрица коммутировала со всеми матрицами из $U(3)$, она должна быть константой в каждом неприводимом представлении группы $U(3)$. Так как разложение представления $\mathfrak{6}$ относительно $U(3)$ состоит лишь из двух слагаемых ($\mathfrak{6} \approx \mathfrak{3} \oplus \bar{\mathfrak{3}}$), в представлении $\mathfrak{6}$ группы $SO(6)$ имеются только две матрицы, коммутирующие с подгруппой $U(3)$; это единичная матрица и матрица I . В частности, матрицу I можно однозначно охарактеризовать (с точностью до нормировки) тем, что она коммутирует с $U(3)$ и является бесследовой.

15.2.1. Почти комплексные структуры

Вернемся теперь к нашему многообразию K с голономией $SU(3)$ и с ковариантно постоянным спинорным полем $\eta(y)$ положительной киральности. Как и в конце предыдущего раздела, на этом многообразии можно определить тензорное поле $J^i_j(y) = g^{ik}(y) \bar{\eta}(y) \Gamma_{kj} \eta(y)$. При каждом $y \in K$ тензор J^i_j можно рассматривать как матрицу, действующую на касательные векторы по правилу $v^i \rightarrow J^i_j v^j$ для любого касательного вектора v^i . Рассматриваемая таким образом как матрица, действующая на касательные векторы, матрица J будет вещественной, бесследовой и $SU(3)$ -инвариантной, так что I совпадает (при подходящем выборе нормировки) с матрицей \bar{I} , определенной соотношением (15.2.3). Матрица J , в частности, удовлетворяет

равенству $(J^2)^i_j = -\delta^i_j$, или в краткой записи $J^2 = -1$. Тензорное поле J (с одним ковариантным и одним контравариантным индексами) на многообразии, удовлетворяющее условию $J^2 = -1$, называется *почти комплексной структурой*.

Матрицу J или, что эквивалентно, матрицу \bar{I} (15.2.3), конечно, нельзя диагонализировать над вещественными числами, но ее можно диагонализировать над комплексными числами. На самом деле матрица J дает i или $-i$ на состояниях, лежащих в представлении $\mathfrak{3}$ или $\bar{\mathfrak{3}}$ для группы $U(3)$. В любой точке y на многообразии K имеется подходящий базис комплексных координат z^a , $a = 1, 2, 3$, и комплексно-сопряженных им координат $\bar{z}^{\bar{a}}$, $\bar{a} = 1, 2, 3$, в котором J имеет вид $J^a_b = i\delta^a_b$, $J^{\bar{a}}_{\bar{b}} = -i\delta^{\bar{a}}_{\bar{b}}$, а другие компоненты равны нулю. Этот вид матрицы J мы будем называть каноническим. Относительно базиса y^i , $i = 1, \dots, 6$, в котором J имеет вид (15.2.3), координаты z^a можно определить как $z^1 = y^1 + iy^2$, $z^2 = y^3 + iy^4$, $z^3 = y^5 + iy^6$. Этот выбор координат z^a является однозначным, конечно, лишь с точностью до преобразования из группы $U(3)$.

15.2.2. Тензор Нёйенхёйса

Для данного многообразия K с почти комплексной структурой J и любой данной точки p на K всегда можно найти локальные координаты z^a , $\bar{z}^{\bar{a}}$, для которых J принимает канонический вид в одной этой точке p . Теперь мы хотим спросить: «Можно ли так выбрать комплексные координаты, чтобы привести J к каноническому виду не только в одной точке p , но и в целом открытом множестве, содержащем p ?» Координаты, обладающие этим свойством, можно назвать локальными голоморфными координатами. Если локальные голоморфные координаты существуют (в окрестности каждой точки $p \in K$), то говорят, что почти комплексная структура J является интегрируемой. Выяснение ответа на вопрос, какие почти комплексные структуры интегрируемы, похоже, по крайней мере качественно, на задачу, знакомую нам по общей теории относительности.

Предположим, что на многообразии K задано не тензорное поле J^i_j с одним ковариантным и одним контравариантным индексами, а симметричное тензорное поле g_{ij} с двумя ковариантными индексами. (В большинстве приложений g — метрический тензор, но в данный момент это неважно.) С помощью простой линейной алгебры можно показать, что для любой данной точки $p \in K$ существует система координат, такая, что g принимает стандартный вид $g_{ij} = \delta_{ij}$ в точке p . (Это справедливо для «локально инерциальных координат» в ОТО.) Мы хотим выяснить, можно ли найти координаты, для которых g имеет

стандартный вид не только в одной точке p , но и в целой окрестности этой точки. Такую систему координат можно назвать плоской системой координат.

Чтобы определить, когда существует плоская система координат, требуются некоторые фундаментальные понятия. Можно попытаться определить тензорное поле, составленное из производных от g . Оказывается, что по существу имеется только одно такое тензорное поле — тензор Римана R_{ijkl} . (Все другие можно сделать из R и его производных вместе с метрикой.) Необходимым условием существования плоской системы координат в целой окрестности точки p является условие, чтобы R обращалось в нуль в этой окрестности. (Это условие необходимо, так как если существует система координат, для которой $g_{ij} = \delta_{ij}$, то, вычисляя R_{ijkl} в этих координатах, немедленно получаем $R_{ijkl} = 0$.) Не слишком трудно доказать и обратное: если $R_{ijkl} = 0$, то плоская система координат существует, по крайней мере локально¹⁾.

Теперь мы хотим провести аналогичные рассуждения в случае почти комплексной структуры J^i_j . Прежде всего попытаемся определить новое тензорное поле, построенное из J^i_j и ее производных. По существу имеется одно такое тензорное поле — тензор Нейенхейса

$$N^k_{ij} = J^l_i (\partial_l J^k_j - \partial_j J^k_l) - J^l_j (\partial_l J^k_i - \partial_i J^k_l). \quad (15.2.4)$$

Доказать, что N — тензор, можно непосредственно. Один из способов состоит в том, что вводят на многообразии K произвольную метрику g и определяют величину

$$\bar{N}^k_{ij} = J^l_i (D_l J^k_j - D_j J^k_l) - J^l_j (D_l J^k_i - D_i J^k_l), \quad (15.2.5)$$

где D_l — ковариантная производная, построенная с помощью аффинной связности, вычисленной по g . Тогда \bar{N} (как и любое

¹⁾ Такая система координат может не существовать глобально. Она не существует глобально, например, если K — тор или бутылка Клейна. Соответствующее глобальное утверждение звучит следующим образом. Если $R_{ijkl} = 0$ всюду на K , то можно покрыть K открытыми множествами $O_{(\alpha)}$ и на каждом $O_{(\alpha)}$ выбрать плоские координаты $y^i_{(\alpha)}$. В областях пересечений $O_{(\alpha)} \cap O_{(\beta)}$ координаты $y^i_{(\alpha)}$ и $y^i_{(\beta)}$ связаны преобразованием $y^i_{(\alpha)} = M_{(\alpha\beta)}^i_j y^j_{(\beta)} + \phi_{(\alpha\beta)}^i$, где (для каждой пары α, β) $M_{(\alpha\beta)}$ — ортогональная матрица, а $\phi_{(\alpha\beta)}$ — константа; M и ϕ отвечают вращениям и трансляциям координат соответственно. Координаты $y^i_{(\alpha)}$ и $y^i_{(\beta)}$ отличаются (не более чем) на вращение плюс трансляцию, поскольку это самая общая замена координат, совместная с тем, что в каждой из этих координатных систем метрика имеет стандартный вид. В случае комплексных многообразий именно произвольная голоморфная замена координат играет роль M и ϕ .

другое выражение, составленное из J и ее ковариантных производных) — безусловно тензор. С другой стороны, воспользовавшись определением ковариантной производной в ОТО и тем, что $J^2 = -1$, получаем, что $\bar{N} = N$. Таким образом, N — тензор, составленный из J и ее производных без необходимости использовать вспомогательную метрику, причем тензор такого вида по существу единствен.

Далее, как и в аналогичном случае в ОТО, если удастся найти локальные голоморфные координаты, в которых J имеет стандартный вид в целой окрестности точки p , то вычисление N в этой системе координат немедленно показывает, что $N = 0$. Обратное утверждение представляет собой весьма трудную теорему Ньюлендера и Ниренберга. Согласно этой теореме, если $N = 0$, то для любой данной точки $p \in K$ в целой ее окрестности p можно найти локальные голоморфные координаты¹⁾. Таким образом, почти комплексная структура является интегрируемой тогда и только тогда, когда $N = 0$. Интегрируемая почти комплексная структура называется комплексной структурой. Многообразие K , наделенное комплексной структурой J , называется комплексным многообразием.

Вообще говоря, локальные голоморфные координаты z^a на комплексном многообразии существуют только локально (как и в вещественном случае, обсуждавшемся в примечании на стр. 458). Но комплексное многообразие по определению всегда можно покрыть открытыми множествами O_α , на каждом из которых имеется локальная голоморфная система координат $z^a_{(\alpha)}$, в которой комплексная структура J имеет стандартный вид

$$J^a_b = i\delta^a_b, \quad J^{\bar{a}}_{\bar{b}} = -i\delta^{\bar{a}}_{\bar{b}}, \quad (15.2.6)$$

а другие компоненты равны нулю. Как связаны $z^a_{(\alpha)}$ и $z^a_{(\beta)}$ в областях пересечений $O_{(\alpha)} \cap O_{(\beta)}$? Очевидно, они должны быть связаны заменой координат, сохраняющей стандартный вид J . Легко видеть, что координатные преобразования, сохраняющие стандартный вид J , — это голоморфные (аналитические) преобразования $z^a \rightarrow \tilde{z}^a = \tilde{z}^a(z^a)$ (т. е. \tilde{z}^a являются функциями

¹⁾ Определение локальных голоморфных координат легко сформулировать в виде системы дифференциальных уравнений с частными производными на эти комплекснозначные функции. Тогда условие $N = 0$ оказывается просто условием интегрируемости для этой системы (причем эта несложная ситуация непосредственно сводится к теореме Фробениуса). Если J — вещественно-аналитический тензор, из условия $N = 0$ сразу следует существование максимального числа локальных решений рассматриваемой системы, т. е. существование локальных голоморфных координат. Содержание сложной теоремы Ньюлендера — Ниренберга состоит в том, что от предположения о вещественной аналитичности можно на самом деле отказаться. — Прим. перев.

только от z^a , но не от комплексно-сопряженных \bar{z}^a). Таким образом, локальные голоморфные координаты $z_{(\alpha)}^a$ и $z_{(\beta)}^a$ являются голоморфными (аналитическими) функциями друг друга в областях пересечений $O_{(\alpha)} \cap O_{(\beta)}$. Обратное также верно и дает альтернативный способ сформулировать понятие комплексного многообразия. Пусть дано многообразие K размерности $2N$. Пусть K можно покрыть открытыми множествами $O_{(\alpha)}$ на каждом из которых можно найти локальные комплексные координаты $z_{(\alpha)}^a$, обладающие тем свойством, что в областях пересечений $O_{(\alpha)} \cap O_{(\beta)}$ координаты $z_{(\beta)}^b$ являются аналитическими функциями координат $z_{(\alpha)}^a$. Тогда K — комплексное многообразие. Чтобы доказать это, определим в каждом $O_{(\alpha)}$ тензор $J_{(\alpha)}$ с одним ковариантным и одним контравариантным индексами, потребовав, чтобы в координатах $z_{(\alpha)}^a$ его ненулевые компоненты имели вид $J_{(\alpha)}^{ab} = i\delta^{ab}$, $J_{(\alpha)}^{\bar{a}\bar{b}} = -i\delta^{\bar{a}\bar{b}}$. В области $O_{(\alpha)} \cap O_{(\beta)}$ имеем $J_{(\alpha)} = J_{(\beta)}$, поскольку тензор J инвариантен относительно голоморфных замен координат. Так как $J_{(\alpha)} = J_{(\beta)}$ в областях пересечений, все $J_{(\alpha)}$ вместе определяют тензорное поле, заданное глобально на всем K . Это тензорное поле представляет собой, очевидно, интегрируемую комплексную структуру, так как по построению мы имеем соответствующие локальные голоморфные координаты $z_{(\alpha)}^a$.

Причина введения понятия комплексного многообразия состоит отчасти в том, что на таком многообразии можно дать определение голоморфных (или аналитических) функций. Пусть K — комплексное многообразие. Комплекснозначная функция f на K называется голоморфной, если в каждой точке p и в любой системе локальных голоморфных координат f удовлетворяет условию $\partial f / \partial z^a = 0$. Это определение не зависит от выбора локальных голоморфных координат, поскольку любые две системы локальных голоморфных координат связаны голоморфным координатным преобразованием. Многие знакомые теоремы обычного комплексного анализа переносятся на эту более общую ситуацию. Так, например, модуль непостоянной голоморфной функции не может иметь локального максимума. (Это локальное утверждение, поэтому оно справедливо на произвольном комплексном многообразии как следствие хорошо знакомой теоремы на комплексной плоскости.) Отсюда следует, что на компактном комплексном многообразии (на котором любая несингулярная функция имеет максимум) любая голоморфная, нигде не сингулярная функция постоянна.

Вернемся теперь к нашей исходной задаче. Рассмотрим $2N$ -мерное многообразие K , группа голономии которого есть не

$SO(2N)$, а $U(N)$ или ее подгруппа. В любой точке $x \in K$ касательные векторы, которые преобразуются по векторному представлению группы $SO(2N)$, разлагаются относительно $U(N)$ как $N \oplus \bar{N}$. Существует единственная матрица J_x^i , действующая на касательных векторах в точке x и принимающая значения $+i$ или $-i$ соответственно на векторах из N или \bar{N} для $U(N)$. Матрица J определяет почти комплексную структуру. Так как J инвариантна относительно группы голономии, она ковариантно постоянна. Поэтому все ковариантные производные от J обращаются в нуль; в частности, обращается в нуль тензор Нейенхёйса. Таким образом, многообразие с $U(N)$ -голономией является комплексным многообразием.

15.2.3. Примеры комплексных многообразий

Не на каждом вещественном многообразии можно задать комплексную структуру. Например, сфера S^n допускает комплексную структуру в случае, когда $n = 2$ (как мы увидим ниже), и не допускает ее в других случаях. С другой стороны, если данное многообразие допускает комплексную структуру, то может оказаться, что оно допускает несколько комплексных структур, неэквивалентных друг другу. Два многообразия M и N имеют один и тот же топологический тип, если можно найти непрерывное взаимно однозначное отображение $f: M \rightarrow N$. В этом случае M и N считаются эквивалентными как вещественные многообразия. С другой стороны, два комплексных многообразия M и N эквивалентны как комплексные многообразия только в том случае, если можно найти обратимое отображение $f: M \rightarrow N$, которое является голоморфным в том смысле, что f отображает локальные голоморфные координаты на M в локальные голоморфные координаты на N . Обычной ситуацией является случай, когда какие-то многообразия эквивалентны как вещественные многообразия и неэквивалентны как комплексные многообразия; в таком случае мы говорим, что на одном и том же вещественном многообразии можно задать неэквивалентные комплексные структуры. Приведем некоторые примеры комплексных многообразий.

1. «Плоское пространство» и комплексный тор

Самым главным примером комплексного многообразия комплексной размерности n является S^n — декартово произведение n экземпляров комплексной плоскости S . Это то же самое, что R^{2n} — евклидово пространство размерности $2n$, наделенное комплексной структурой.

Теперь легко построить наш первый пример комплексного многообразия с нетривиальной топологией. Пусть Γ — решетка в C^n (это в точности то же самое, что и решетка в R^{2n}). Тогда фактор-пространство $E = C^n/\Gamma$ есть комплексное многообразие, известное как комплексный тор. Голоморфная функция на E — это то же самое, что голоморфная функция на C^n , инвариантная относительно решеточных трансляций. Непрерывно изменяя выбор решетки Γ , мы получаем многообразия E одного топологического типа, но с разными комплексными структурами.

2. Римановы поверхности

Следующий пример, играющий исключительно важную роль в теории струн, — произвольное ориентированное риманово многообразие вещественной размерности два является комплексным многообразием. (Случай рода один является частным случаем предыдущего примера.) Таким образом, мировая поверхность ориентированной замкнутой струны (в евклидовой формулировке) является комплексным многообразием. Чтобы доказать это, рассмотрим риманово многообразие Σ вещественной размерности два с метрическим тензором g_{ij} . Если многообразие Σ ориентировано, то на нем определен ковариантно постоянный антисимметричный тензор ε_{ij} , который можно нормировать так, чтобы в локально инерциальных системах выполнялось условие $\varepsilon_{12} = +1$ ¹⁾. Этот тензор удовлетворяет знакомому тождеству $\varepsilon^{ik}\varepsilon_{kj} = -\delta^i_j$. В силу этого тождества тензорное поле $J^i_j = g^{ik}\varepsilon_{kj}$ является почти комплексной структурой, так как $J^2 = -1$. Кроме того, из определения тензора Нейенхёйса немедленно следует, что этот тензор обращается в нуль в случае двух вещественных измерений или одного комплексного измерения²⁾. Следовательно, Σ — комплексное многообразие, и можно выбрать локальную комплексную координату z , приводящую J к стандартному виду (ненулевые компоненты J имеют вид $J^z_z = -J^{\bar{z}}_{\bar{z}} = i$). Мы воспользовались здесь теоремой Ньюлендера — Ниренберга, которая довольно сложна даже в случае

¹⁾ В предыдущих главах антисимметричный символ ε определялся как тензорная плотность. Для целей этой главы удобнее в определении включить дополнительный множитель \sqrt{g} , так что ε становится настоящим тензором.

²⁾ Чтобы доказать это, заметим, что в двух измерениях антисимметричный по j и l тензор $\partial_l J^k_j - \partial_j J^k_l$ всегда имеет общий вид $\varepsilon_{jl} V^k$, где ε — антисимметричный тензор, а V^k — некоторое векторное поле. Для $J^i_j = g^{im}\varepsilon_{mj}$ получаем, что тензор $W^k_{ij} = J^l_i(\partial_l J^k_j - \partial_j J^k_l)$ симметричен по i и j , поэтому тензор Нейенхёйса $N^k_{ij} = W^k_{ij} - W^k_{ji}$ равен нулю.

вещественной размерности два, для которого она была впервые доказана Корном и Лихтенштейном.

Эти рассуждения позволяют получить еще одно следствие, которое широко использовалось в первом томе этой книги. В системе координат z, \bar{z} антисимметричный тензор ε удовлетворяет соотношениям $\varepsilon_{zz} = \varepsilon_{\bar{z}\bar{z}} = 0$, а также $\varepsilon_{z\bar{z}} = -\varepsilon_{\bar{z}z} = if(z\bar{z})$, где f — некоторая функция. Так как тензор ε вещественный и не обращающийся в нуль, то $f = e^{2\rho}$ для некоторой вещественной функции ρ . С помощью ε_{ij} и J^i_j можно восстановить метрический тензор: $g_{ij} = \varepsilon_{ik}J^k_j$. Зная, как выглядят J и ε в координатах z, \bar{z} , мы видим, что метрика принимает вид $g_{zz} = g_{\bar{z}\bar{z}} = 0$, $g_{z\bar{z}} = g_{\bar{z}z} = \frac{1}{2}e^{2\rho}$. Для вещественных координат x^i , определенных соотношением $z = x^1 + ix^2$, метрика принимает вид $g_{ij} = e^{2\rho}\delta_{ij}$. Существование на любой мировой поверхности струны локальных координат, для которых $g_{ij} = e^{2\rho}\delta_{ij}$, мы широко использовали в первом томе. Теперь мы видим, что существование таких координат эквивалентно утверждению, что каждое ориентированное многообразие вещественной размерности два является комплексным многообразием.

Мы показали, что каждая риманова метрика g на ориентированной мировой поверхности струны E индуцирует интегрируемую комплексную структуру J . Кроме того, при вейлевских преобразованиях метрики $g \rightarrow e^{2\psi}g$ антисимметричный тензор преобразуется как $\varepsilon \rightarrow e^{2\psi}\varepsilon$, так что комплексная структура $J^i_j = g^{ik}\varepsilon_{kj}$ при вейлевских преобразованиях остается инвариантной. Таким образом, индуцированная комплексная структура J одинакова для любых двух метрик g и $g' = e^{2\psi}g$, отличающихся на вейлевское преобразование. Это обычно формулируется как высказывание, что комплексная структура на римановой поверхности зависит только от конформного класса метрики или от конформной структуры, определяемой метрикой. Но если две метрики на римановой поверхности Σ различаются не просто на вейлевское преобразование, то они определяют две различные комплексные структуры на E . Всевозможные комплексные структуры на римановой поверхности дают параметры Тейхмюллера, которые появляются (в различных воплощениях в зависимости от формализма) в петлевых интегралах в теории струн. Обсуждение в разд. 3.3 конформных структур на римановой поверхности данного рода можно теперь интерпретировать как рассмотрение комплексных структур на такой поверхности.

3. Комплексное проективное пространство

Следующий пример комплексного многообразия сильно отличается от предыдущего, но столь же фундаментален. Пусть $Z^k, k = 1, \dots, N+1$, — комплексные переменные, число которых

равно $N + 1$ и которые все одновременно не обращаются в нуль. Для любого не равного нулю комплексного числа λ семейство $\{Z^k\}$ будем считать эквивалентным семейству $\{\lambda Z^k\}$. Классы эквивалентности зависят от N независимых комплексных переменных и образуют многообразие, называемое комплексным проективным пространством CP^N . Многообразие CP^N компактно; чтобы убедиться в этом, заметим, что с помощью подходящего выбора общего множителя можно положить $\sum_{i=1}^{N+1} |Z^i|^2 = 1$. Если бы это было единственным условием, можно было бы считать, что $\{Z^k\}$ определяет точку на сфере S^{2N+1} , которая определено является компактной. Поскольку надо удалить еще степень свободы, отвечающую фазе, $\{Z^k\} \approx \{e^{i\alpha} Z^k\}$, пространство CP^N в действительности является фактор-пространством сферы S^{2N+1} по действию компактной группы $U(1)$ комплексных чисел, равных по модулю единице. Следовательно, CP^N компактно. Компактность CP^N можно доказать также, заметив, что CP^N эквивалентно однородному пространству $SU(N+1)/U(N)^1$.

Чтобы доказать, что CP^N — комплексное многообразие, заметим сначала, что если $Z^1 \neq 0$, то общий множитель можно выбрать так, что $Z^1 = 1$. Тогда остальные Z^i , $i = 2, \dots, N+1$, образуют набор из N независимых комплексных координат. Но эта система координат разрушается, когда $Z^1 = 0$. В более общем случае пусть $O_{(i)}$ для $i = 1, \dots, N+1$ есть подмножество в CP^N с $Z^i \neq 0$. Множества $O_{(i)}$, $i = 1, \dots, N+1$, образуют открытое покрытие многообразия CP^N . В каждом подмножестве $O_{(i)}$ мы выбираем локальные комплексные координаты $Z_{(i)}^j = Z^j/Z^i$, $1 \leq j \leq N+1$, $j \neq i$. (Основная идея этого определения заключается в том, что координаты $Z_{(i)}^j$ инвариантны относительно $\{Z^k\} \rightarrow \{\lambda Z^k\}$ и хорошо определены при $Z^i \neq 0$.) Чтобы доказать, что CP^N — комплексное многообразие, надо показать, что в областях $O_{(i)} \cap O_{(l)}$ координаты $Z_{(i)}^k$ являются аналитическими функциями от $Z_{(l)}^k$. Но это именно так, поскольку $Z_{(i)}^k = (Z^k/Z^i) Z_{(l)}^k$.

В одном случае комплексное проективное пространство нам уже знакомо: CP^1 — это сфера Римана, или обычная двумерная сфера S^2 . Действительно, CP^1 описывается двумя одно-

¹⁾ Мы будем обозначать локальные комплексные координаты строчными буквами z^a , w^b и т. д., за исключением случаев, когда строгое соблюдение этого условия было бы затруднительно. Однородные «координаты» на CP^N (которые не являются настоящими координатами, поскольку определены только с точностью до общего множителя) будут обозначаться прописными буквами Z_i , W_j .

родными координатами (Z, W) . Если $W \neq 0$, полагаем $W = 1$ с помощью выбора общего множителя и получаем комплексную Z -плоскость. Если $W = 0$, то можно положить $Z = 1$ (в определении пространства CP^1 требуется, чтобы Z и W не были равны нулю одновременно), так что это одна дополнительная точка, «точка на бесконечности», которая должна быть добавлена к комплексной плоскости, чтобы получить сферу Римана. Тот факт, что в теории струн на древесном уровне нет параметров Тейхмюллера, соответствует утверждению, что CP^1 имеет единственную комплексную структуру. То же верно для CP^N при любом N .

4. Гиперповерхности в CP^N

Многие новые примеры комплексных многообразий могут быть получены как подмногообразия в CP^N . Простейшим способом это можно сделать, выбирая полином $P(Z^1, Z^2, \dots, Z^{N+1})$, который является однородным степени k в том смысле, что $P(\lambda Z^1, \lambda Z^2, \dots, \lambda Z^{N+1}) = \lambda^k P(Z^1, Z^2, \dots, Z^{N+1})$. Однородность полинома P означает, что уравнение $P = 0$ имеет смысл в CP^N . Для общего полинома P это уравнение определяет компактное комплексное подмногообразие размерности $N - 1$ в CP^N , называемое гиперповерхностью степени k . Необходимое условие на полином P будет установлено ниже. При более общем подходе можно рассмотреть n однородных полиномов P_i , $i = 1, \dots, n$, степеней k_1, k_2, \dots, k_n . Вследствие однородности полиномов P_i уравнение $P_1 = P_2 = \dots = P_n = 0$ имеет смысл в CP^N . Для $n \leq N$ (и для общих P_i) это уравнение определяет компактное комплексное подмногообразие размерности $N - n$ в CP^N , называемое полным пересечением гиперповерхностей.

Чтобы выяснить условие, которое надо наложить на полиномы P_i в описанной выше конструкции, рассмотрим аналогичную задачу в случае вещественных многообразий. Начнем для простоты с x, y -плоскости X и попробуем определить гладкое подмногообразие размерности один, или, другими словами, кривую, с помощью уравнения $f(x, y) = 0$, где $f(x, y)$ — некоторая гладкая функция. Общая гладкая функция, такая как $f(x, y) = y - x^2$, определяет гладкую кривую (в данном случае параболу). Типичным примером функции, которая приводит к кривой с сингулярностью, является $\bar{f}(x, y) = y^2 - x^2$. В этом случае кривая $\bar{f}(x, y) = 0$ состоит из двух прямых и имеет сингулярность в точке $x = y = 0$, где две прямые встречаются друг с другом. С аналитической точки зрения признак того, что кривая $\bar{f} = 0$ сингулярна в точке $x = y = 0$, заключается в том, что в этой точке $d\bar{f}/dx = d\bar{f}/dy = 0$, или, другими словами, $d\bar{f} = 0$. (Здесь d — внешняя производная, определенная в гл. 12.

Утверждение $d\bar{f} = 0$ равносильно утверждению, что все частные производные функции \bar{f} равны нулю.) Вблизи любой точки на плоскости X , в которой $d\bar{f} \neq 0$, функцию \bar{f} можно выбрать в качестве одной из координат. Следовательно, вблизи любой точки на кривой $\bar{f} = 0$, в которой $d\bar{f} = 0$, уравнение $\bar{f} = 0$ эквивалентно обращению в нуль одной из координат и определяет гладкую кривую.

Эти соображения переносятся и на комплексный случай. Гиперповерхность в CP^N , определяемая нулями однородного полинома P , неособенна, если ни в какой точке на этой гиперповерхности частные производные $\partial P / \partial Z^i$ не обращаются все в нуль, другими словами, если уравнения $P = dP = 0$ не имеют решений, кроме $Z^i = 0$ (это не точка на CP^N). Обобщение на случай полного пересечения гиперповерхностей, определяемых нулями однородных полиномов P_1, P_2, \dots, P_n , состоит в том, что поверхность $P_1 = P_2 = \dots = P_n = 0$ неособенна, если на этой поверхности нет точки, в которой n -форма $dP_1 \wedge dP_2 \wedge \dots \wedge dP_n$ обращалась бы в нуль. Здесь также идея состоит в том, что локально вблизи любой точки на CP^N , где $dP_1 \wedge dP_2 \wedge \dots \wedge dP_n \neq 0$, в качестве части координат на CP^N можно выбрать P_i .

Для иллюстрации этих рассуждений рассмотрим кривую в (вещественной) x, y -плоскости, определяемую уравнением $f = 0$, где f — полином, скажем $f = x^n + y^n - 1$. Легко дать качественное описание этой кривой; например, она компактна, если n четное. Можно интересоваться аналитическим продолжением этой кривой на комплексные значения x и y . Тогда можно рассмотреть уравнение $x^n + y^n - 1 = 0$, где теперь x и y — комплексные переменные. Над комплексными числами эта кривая, конечно, некомпактна независимо от n . Можно спросить, возможно ли добавить «точки на бесконечности», чтобы компактифицировать ее. Это можно сделать, заменив $x^n + y^n - 1$ однородным полиномом в CP^2 . Таким образом, мы вводим третью переменную z и рассматриваем однородное уравнение $x^n + y^n - z^n = 0$, где x, y, z — однородные координаты в CP^2 (а значит, тройка x, y, z отождествляется с $\lambda x, \lambda y, \lambda z$ для ненулевого комплексного λ). Если z не равно нулю, то, выбирая общий множитель, можно взять $z = 1$, так что мы получаем снова уравнение $x^n + y^n - 1 = 0$ в комплексной плоскости. Но, работая в CP^2 , мы имеем также и «точки на бесконечности», где $z = 0$ и $x^n + y^n = 0$. Отметим, что имеется ровно n таких точек.

Уравнение $x^n + y^n - z^n = 0$ в многообразии CP^2 определяет компактное комплексное многообразие размерности один, которое должно быть римановой поверхностью некоторого рода. Каков род этой поверхности? Как мы увидим в последующем раз-

деле этой главы, ответ заключается в том, что она имеет род $(n-1)(n-2)/2$.

Хотя комплексная структура многообразия CP^N единственна, для гиперповерхности в CP^N это не так (за исключением нескольких случаев). Пусть P — однородный полином степени n от $N+1$ однородных координат Z^1, \dots, Z^{N+1} , и пусть P' — второй однородный полином той же степени n от $N+1$ комплексных координат W^1, \dots, W^{N+1} . Уравнения $P = 0$ и $P' = 0$ определяют комплексные многообразия Q и Q' одного топологического типа, поскольку возможна гладкая интерполяция между полиномами P и P' . Но многообразия Q и Q' не обязательно имеют одинаковую комплексную структуру. Чтобы они имели одинаковую комплексную структуру, должно существовать голоморфное отображение, переводящее Z^i в W^i и превращающее P в P' . Чтобы это отображение $Z^i \rightarrow W^i$ было обратимым, не имело полюсов и было инвариантным относительно умножения всех Z^i и умножения всех W^i на комплексное число, оно должно быть на самом деле линейным.

В качестве примера, который будет интересен для нас впоследствии, рассмотрим случай квинтики в CP^4 , определяемой нулями полинома P пятой степени от пяти переменных Z^1, \dots, Z^5 . Немного арифметики, и мы находим, что имеется $5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 / 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 126$ независимых полиномов пятой степени от пяти переменных. С другой стороны, линейная замена координат определяется обратной 5×5 -матрицей с 25 независимыми матричными элементами. Таким образом, число независимых степеней свободы у полинома пятой степени, которые нельзя устранить переопределением координат, равно $126 - 25 = 101$. Следовательно, комплексная структура квинтики в CP^4 зависит по крайней мере от 101 комплексного параметра. При $N > 2$ все комплексные структуры гиперповерхности в CP^N могут быть найдены этим способом, поэтому комплексная структура квинтики в CP^4 зависит в точности от 101 параметра.

15.3. Кэлеровы многообразия

На многообразии K с группой голономии $U(N)$ (или $SU(N)$) можно определить естественную комплексную структуру J^i ; что явилось темой предыдущего раздела. В этом разделе мы сосредоточили внимание просто на следствии обращения в нуль

¹⁾ Рассмотрим однопараметрическое семейство полиномов $P_t = tP + (1-t)P'$, $0 \leq t \leq 1$. Когда t пробегает значения от нуля до единицы, нули полинома P_t определяют однопараметрическое семейство многообразий, которое начинается с Q и кончается многообразием Q' , что и доказывает совпадение топологического типа многообразий Q и Q' .

тензора Нейенхейса N^i_{jk} , построенного из J . Но $U(N)$ -голоморфия означает не только, что тензор Нейенхейса равен нулю, но и что J^i_j ковариантно постоянен. Этот раздел мы посвятим тому, чтобы проанализировать, что означает тот факт, что J^i_j является ковариантно постоянным. В действительности мы обнаружим, что удобнее изучать не комплексную структуру J , а 2-форму $k_{ij} = g_{ik}J^k_j$, где g — метрический тензор. Утверждения о ковариантности постоянности J или k эквивалентны, так как g ковариантно постоянен. Метрика с $U(N)$ -голоморфией называется кэлеровой метрикой; многообразие, допускающее такую метрику, называется кэлеровым многообразием, а 2-форма k называется кэлеровой формой. В этом разделе мы найдем общее локальное выражение для кэлеровой метрики и опишем несколько основных примеров.

15.3.1. Кэлерова метрика

В системе локальных голоморфных координат z^a и комплексно-сопряженных координат $\bar{z}^{\bar{a}}$ вектор v^i имеет голоморфные компоненты v^a и антиголоморфные компоненты $v^{\bar{a}}$. Разложение вектора v^i на v^a и $v^{\bar{a}}$ соответствует, разумеется, разложению фундаментального векторного представления группы $SO(2N)$ в виде $N \oplus \bar{N}$ для $U(N)$. Разделение на голоморфные и антиголоморфные индексы инвариантно относительно голоморфных замен координат и не зависит от выбора конкретной системы голоморфных координат. Поэтому естественно разлагать тензорные поля на части с определенными числами голоморфных и антиголоморфных индексов.

Например, метрический тензор g_{ij} в точке $p \in K$ инвариантен относительно действия группы $U(N)$ в касательном пространстве в этой точке. Поскольку при $N > 2$ из $N \otimes N$ или $\bar{N} \otimes \bar{N}$ невозможно сделать $U(N)$ -синглет, g удовлетворяет условию $g_{ab} = g_{\bar{a}\bar{b}} = 0$. Кроме того, поскольку тензор g симметричен, $g_{\bar{a}\bar{b}} = g_{\bar{b}\bar{a}}$. Используя равенство $k_{ij} = g_{ik}J^k_j$ и явный вид J в локальных голоморфных координатах, находим, что $k_{ab} = k_{\bar{a}\bar{b}} = 0$ и $k_{a\bar{b}} = -ig_{a\bar{b}} = -k_{\bar{b}a}$.

Изучение дифференциальных форм дает другой пример, когда важно разделять касательные векторные индексы на голоморфные и антиголоморфные. Так, рассмотрим p -форму $\psi_{i_1 i_2 \dots i_p}$; напомним, что это ковариантный тензор ранга p , который антисимметричен по всем индексам. В случае комплексного многообразия естественно задать вопрос, сколько у p -формы ψ голоморфных индексов и сколько антиголоморфных. Для многих целей важную роль играет понятие (p, q) -формы

$\psi_{a_1 a_2 \dots a_p \bar{a}_1 \bar{a}_2 \dots \bar{a}_q}$, которая полностью антисимметрична по p голоморфным и q антиголоморфным индексам. Мы примем такое упорядочение индексов, при котором голоморфные индексы (p, q) -формы всегда пишут сначала.

15.3.2. Внешние производные

На вещественном многообразии «внешняя производная» p -формы ψ определяется как $(p+1)$ -форма

$$(d\psi)_{i_1 i_2 \dots i_{p+1}} = \frac{1}{p+1} \partial_{i_1} \psi_{i_2 \dots i_{p+1}} \pm \text{циклические перестановки.} \quad (15.3.1)$$

На комплексном многообразии это понятие можно усовершенствовать. Определим «голоморфную» внешнюю производную ∂ , которая отображает (p, q) -формы в $(p+1, q)$ -формы, следующим условием: если ψ — (p, q) -форма, то $\partial\psi$ — $(p+1, q)$ -форма:

$$(\partial\psi)_{a_1 a_2 \dots a_{p+1} \bar{a}_1 \bar{a}_2 \dots \bar{a}_q} = \frac{1}{p+1} \partial_{a_1} \psi_{a_2 \dots a_{p+1} \bar{a}_1 \bar{a}_2 \dots \bar{a}_q} \pm \text{циклические перестановки.} \quad (15.3.2)$$

Так же как производная d , производная ∂ удовлетворяет равенству $\partial^2 = 0$. «Антиголоморфную» внешнюю производную $\bar{\partial}$, отображающую (p, q) -формы в $(p, q+1)$ -формы, мы определим, приняв, что если ψ — (p, q) -форма, то $\bar{\partial}\psi$ — $(p, q+1)$ -форма:

$$(\bar{\partial}\psi)_{a_1 \dots a_p \bar{a}_1 \bar{a}_2 \dots \bar{a}_{q+1}} = \frac{1}{q+1} (-1)^p \partial_{\bar{a}_1} \psi_{a_1 \dots a_p \bar{a}_2 \dots \bar{a}_{q+1}} \pm \text{циклические перестановки.} \quad (15.3.3)$$

Множитель $(-1)^p$ включается для того, чтобы обеспечить равенство $d = \partial + \bar{\partial}$. Благодаря этому из тождества $d^2 = 0$ следует

$$\partial^2 = \bar{\partial}^2 = \partial\bar{\partial} + \bar{\partial}\partial = 0. \quad (15.3.4)$$

Операторы ∂ и $\bar{\partial}$ часто называют операторами Дольбо. Существенно важное их свойство состоит в том, что эти операторы можно определить только в терминах комплексной структуры многообразия K , не вводя метрического тензора. Несмотря на то что в их определении используются обычные производные, а не ковариантные производные какого-либо типа, объекты $\partial\psi$ и $\bar{\partial}\psi$ преобразуются однородно при голоморфных заменах координат.

Поскольку $d^2 = 0$, форма ψ , которую можно записать в виде $\psi = d\chi$, автоматически удовлетворяет условию $d\psi = 0$. Лемма Пуанкаре дает локальное обратное утверждение: если ψ — p -форма, $p > 0$ и $d\psi = 0$, то локально ψ можно записать как $\psi = d\chi$ для некоторой $(p-1)$ -формы χ . Это утверждение имеет аналог в случае комплексных многообразий. Если ψ — (p, q) -форма, $p > 0$ (или $q > 0$) и $\partial\psi = 0$ (или $\bar{\partial}\psi = 0$), то локально ψ можно записать как $\psi = \partial\chi$ (или $\psi = \bar{\partial}\chi$), где χ — $(p-1, q)$ -форма (или $(p, q-1)$ -форма). Для комплексных многообразий имеется и другое утверждение, не имеющее прямого аналога в случае вещественных многообразий. Если ψ — (p, q) -форма, $p > 0, q > 0$ и $\partial\psi = \bar{\partial}\psi = 0$, то локально ψ можно записать как $\psi = \partial\bar{\partial}\chi$, где χ — $(p-1, q-1)$ -форма.

15.3.3. Аффинная связность и тензор Римана

Теперь мы можем дать общее локальное выражение для метрики с голономией $U(N)$. Ковариантно постоянный тензор k_{ij} является $(1, 1)$ -формой, а не просто 2-формой, так как выше мы отметили, что $k_{ab} = k_{\bar{a}\bar{b}} = 0$. Далее, поскольку k ковариантно постоянна, она удовлетворяет условию $\partial k = \bar{\partial} k = 0$. Отсюда следует, что k можно записать локально в виде

$$k = -i\partial\bar{\partial}\phi, \quad (15.3.5)$$

где ϕ — $(0, 0)$ -форма, или, другими словами, скалярная функция; такая функция ϕ называется кэлеровым потенциалом. Кэлеров потенциал определен неоднозначно: если F — произвольная голоморфная функция, то $\bar{\phi} = \phi + F + \bar{F}$ удовлетворяет условию $\partial\bar{\partial}\bar{\phi} = \partial\bar{\partial}\phi$. Локально это общий вид неопределенности в определении ϕ .

С учетом соотношения $k_{a\bar{b}} = -ig_{a\bar{b}}$ между метрическим тензором g и 2-формой k выражение (15.3.5) эквивалентно общему локальному выражению

$$g_{a\bar{b}} = g_{\bar{b}a} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^a \partial \bar{z}^b} \quad (15.3.6)$$

для метрики с голономией $U(N)$. В действительности мы пока выяснили только, почему метрику с $U(N)$ -голономией локально всегда можно записать в виде (15.3.6). Но обратное тоже верно: любая метрика, которая может быть записана в виде (15.3.6) (причем $g_{ab} = g_{\bar{a}\bar{b}} = 0$) имеет группу голономии $U(N)$.

Чтобы доказать это, полезно выяснить сначала вид аффинной связности для кэлеровых многообразий. Легко находим, что

ненулевые компоненты аффинной связности $\Gamma_{jk}^i = g^{il}(\partial_j g_{lk} + \partial_k g_{lj} - \partial_l g_{jk})/2$ имеют вид

$$\Gamma_{bc}^a = g^{a\bar{d}}\partial_b g_{c\bar{d}}, \quad \Gamma_{\bar{b}\bar{c}}^{\bar{a}} = g^{\bar{a}d}\partial_{\bar{b}} g_{c\bar{d}}. \quad (15.3.7)$$

Из такого выражения для аффинной связности следует (как читатель может проверить!), что стандартная комплексная структура J (с ненулевыми компонентами, равными $J_b^a = i\delta_b^a$, $J_{\bar{b}}^{\bar{a}} = -i\delta_{\bar{b}}^{\bar{a}}$) является ковариантно постоянной. Поскольку подгруппа группы $SO(2N)$, относительно которой J инвариантна, есть $U(N)$, ковариантная постоянность комплексной структуры J означает, что группа голономии кэлерова многообразия есть (самое большое) $U(N)$; это завершает доказательство утверждения, что метрики с голономией $U(N)$ — это в точности кэлеровы метрики¹⁾.

Подобно аффинной связности тензор Римана сильно упрощается для кэлерова многообразия. Из определения

$$R^i_{jkl} = \partial_k \Gamma_{jl}^i - \partial_l \Gamma_{kj}^i + \Gamma_{km}^i \Gamma_{lj}^m - \Gamma_{lm}^i \Gamma_{kj}^m \quad (15.3.8)$$

и выражений (15.3.7) немедленно следует, что R^i_{jkl} отлично от нуля только в том случае, если индексы i и j одного типа (оба голоморфные или оба антиголоморфные). Тогда отсюда следует (так как для метрики g имеем $g_{ab} = g_{\bar{a}\bar{b}} = 0$), что $R_{mjkl} = g_{mi} R^i_{jkl}$ отлично от нуля только в том случае, если индексы m и j противоположного типа. В силу общего для римановой геометрии соотношения симметрии $R_{mjkl} = R_{klmj}$ получаем, что R_{mjkl} также отлично от нуля, только если индексы k и l противоположного типа. Таким образом, ненулевые компоненты тензора Римана имеют вид $R_{a\bar{b}c\bar{d}}$. Общее циклическое тождество римановой геометрии $R_{ijkl} + R_{jkil} + R_{kijl} = 0$ для кэлеровых многообразий сводится к утверждению

$$R_{a\bar{b}c\bar{d}} = R_{c\bar{b}a\bar{d}} = R_{a\bar{d}c\bar{b}}. \quad (15.3.9)$$

Ненулевые компоненты $R_{a\bar{b}c\bar{d}}$, или, что эквивалентно, $R^{\bar{a}}_{\bar{b}c\bar{d}} = g^{a\bar{a}} R_{a\bar{b}c\bar{d}}$, тензора кривизны кэлерова многообразия легко вычислить. Одна из получающихся формул имеет вид

$$R^{\bar{a}}_{\bar{b}c\bar{d}} = \partial_c \Gamma^{\bar{a}}_{\bar{b}\bar{d}}. \quad (15.3.10)$$

¹⁾ Точнее говоря, кэлеровы метрики уже определены в начале этого раздела как метрики с голономией $U(N)$. Здесь же имеется в виду, что свойство (15.3.6) эквивалентно тому, что группа голономии есть $U(N)$. — Прим. перев.

Особенно полезное упрощение получается для тензора Риччи $R_{\bar{b}c} = R^{\bar{a}}_{\bar{b}ac}$, который ввиду (15.3.10) равен

$$R_{\bar{b}c} = -\partial_c \Gamma^{\bar{a}}_{\bar{b}\bar{a}}. \quad (15.3.11)$$

Из формул (15.3.7) следует (по аналогии с подобной формулой для вещественных многообразий), что $\Gamma^{\bar{a}}_{\bar{b}\bar{a}} = \partial_{\bar{b}} \ln \det g$. Следовательно, формула для тензора Риччи принимает вид

$$R_{\bar{b}c} = -\partial_{\bar{b}} \partial_c \ln \det g, \quad (15.3.12)$$

который окажется полезным в дальнейшем.

Полученные выше ограничения на тензор Римана кэлерова многообразия можно понять и интуитивно. Напомним, что на общем римановом многообразии M размерности $2N$ тензор Римана R_{ijkl} антисимметричен по k и l . При фиксированных i и j он является антисимметричной $2N \times 2N$ -матрицей, или, другими словами, генератором группы $SO(2N)$, который можно обозначить $R_{(ij)}$. (В явном виде $R_{(ij)}$ — матрица, матричный элемент которой с номером kl есть R_{ijkl}). Хорошо известное соотношение $[D_i, D_j] V^k = R_{ij}{}^k{}_l V^l$ показывает, что при параллельном переносе вектора V^k вокруг малой петли (который можно выразить через коммутатор ковариантных производных $[D_i, D_j]$, рис. 15.2) касательные векторы подвергаются вращению $SO(2N)$ -матрицами $R_{(ij)}$. Если группа голономии для M есть $U(N)$, то матрицы $R_{(ij)}$ не являются общими $SO(2N)$ -матрицами. Они являются $U(N)$ -матрицами, вложенными в $SO(2N)$ тем способом, который описан в разд. 15.2. Нетрудно указать, какие $SO(2N)$ -матрицы M_{kl} являются $U(N)$ -генераторами. В обычном нашем комплексном базисе условие имеет вид $M_{ab} = M_{\bar{a}\bar{b}} = 0$. Следовательно, утверждение, что при фиксированных i и j матрица $R_{(ij)}$ является $U(N)$ -матрицей, равносильно утверждению, что $R_{ijab} = R_{ij\bar{a}\bar{b}} = 0$. При этих условиях параллельный перенос вокруг инфинитезимальной петли дает $U(N)$ -преобразование. Так как петли конечного размера можно составить из инфинитезимальных петель, это необходимое и достаточное условие для $U(N)$ -голономии.

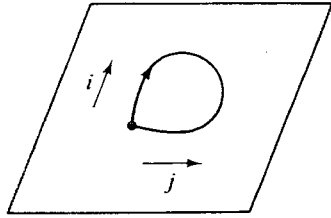


Рис. 15.2. При параллельном переносе вектора V^k вокруг малой петли в i, j -плоскости он изменяется на величину $\delta V^k \sim R_{ij}{}^k{}_l V^l$.

касательные векторы подвергаются вращению $SO(2N)$ -матрицами $R_{(ij)}$. Если группа голономии для M есть $U(N)$, то матрицы $R_{(ij)}$ не являются общими $SO(2N)$ -матрицами. Они являются $U(N)$ -матрицами, вложенными в $SO(2N)$ тем способом, который описан в разд. 15.2. Нетрудно указать, какие $SO(2N)$ -матрицы M_{kl} являются $U(N)$ -генераторами. В обычном нашем комплексном базисе условие имеет вид $M_{ab} = M_{\bar{a}\bar{b}} = 0$. Следовательно, утверждение, что при фиксированных i и j матрица $R_{(ij)}$ является $U(N)$ -матрицей, равносильно утверждению, что $R_{ijab} = R_{ij\bar{a}\bar{b}} = 0$. При этих условиях параллельный перенос вокруг инфинитезимальной петли дает $U(N)$ -преобразование. Так как петли конечного размера можно составить из инфинитезимальных петель, это необходимое и достаточное условие для $U(N)$ -голономии.

15.3.4. Примеры кэлеровых многообразий

Теперь мы опишем некоторые основные примеры кэлеровых многообразий.

Наиболее фундаментальным примером является, конечно, C^n — n -мерное комплексное пространство с координатами z^k , $k = 1, \dots, n$. Стандартная плоская метрика $ds^2 = \sum_k |dz^k|^2$ является кэлеровой, поскольку группа голономии (которая тривиальна) есть подгруппа группы $U(n)$. Кэлеров потенциал можно выбрать в виде

$$\phi = \sum_k |z^k|^2. \quad (15.3.13)$$

Заметим, что этот кэлеров потенциал определен глобально на всем многообразии C^n . Менее тривиальный пример — комплексный тор $E = C^n/\Gamma$, где, как и раньше, Γ — решетка в C^n . Плоская метрика на E также является кэлеровой (группа голономии по-прежнему тривиальна!), но кэлеров потенциал (15.3.13) годится теперь только локально, поскольку он неинвариантен относительно решеточных сдвигов.

Второй пример является основным в теории струн. Каждое ориентированное двумерное вещественное риманово многообразие является кэлеровым. В самом деле, ориентированное двумерное вещественное многообразие имеет группу голономии $SO(2)$ (или ее подгруппу). Поскольку группа $SO(2)$ — это то же самое, что $U(1)$, каждая метрика на ориентируемом двумерном многообразии является кэлеровой. Высказывание, что метрику двумерного многообразия можно записать локально в виде (15.3.6), представляет собой другую формулировку утверждения, что локально элемент длины такого многообразия можно привести к виду $ds^2 = e^{2\rho} dz d\bar{z}$. (В соотношении (15.3.6) подразумевается дополнительное, не очень глубокое утверждение, что локально всегда можно найти решение ϕ линейного уравнения $\partial^2 \phi / \partial z \partial \bar{z} = e^{2\rho}$.)

Еще один очень важный пример кэлерова многообразия — пространство CP^N . С точностью до нормировки существует единственная метрика на CP^N , инвариантная относительно унитарных преобразований $N+1$ однородной координаты Z^1, \dots, Z^{N+1} . Эта метрика имеет вид

$$ds^2 = (\bar{Z}^f Z^f)^{-1} \left(dZ^a - Z^a \frac{\bar{Z}^b dZ^b}{Z^c \bar{Z}^c} \right) \left(d\bar{Z}^a - \bar{Z}^a \frac{Z^d d\bar{Z}^d}{Z^e \bar{Z}^e} \right). \quad (15.3.14)$$

Она подобрана так, чтобы быть инвариантной относительно рескейлинга координат Z^a , так как Z^a определены в CP^N только с точностью до общего множителя. Эта метрика подобрана

также еще и таким образом, что она обращается в нуль, когда dZ^a (или $d\bar{Z}^{\bar{a}}$) пропорционально Z^a (или $\bar{Z}^{\bar{a}}$), поскольку точки, отличающиеся на $\delta Z^a \sim Z^a$, эквивалентны в CP^N и между ними должно быть нулевое расстояние. Метрика (15.3.14), известная как метрика Фубини — Штуди, явным образом инвариантна относительно $SU(N+1)$ -преобразований координат Z^a . Чтобы убедиться, что метрика (15.3.14) кэлерова, достаточно заметить, что в области, где $Z^{N+1} \neq 0$, можно положить $Z^{N+1} = 1$ (подобрав общий множитель); тогда обнаруживается, что метрику Фубини — Штуди можно получить в этой области из кэлерова потенциала $\phi = \ln \left(1 + \sum_{a=1}^N Z^a \bar{Z}^{\bar{a}} \right)$.

После того как мы выяснили, что CP^N — кэлерово многообразие, естественно спросить, является ли также кэлеровым многообразием гиперповерхность в CP^N или пересечение гиперповерхностей. На этот вопрос очень легко ответить. Комплексное подмногообразие кэлерова многообразия всегда является кэлеровым. Действительно, это следует из локального описания (15.3.6) кэлеровой метрики. Если K — многообразие, а Q — его подмногообразие, то метрика на K всегда индуцирует метрику на Q : для измерения расстояний на Q надо просто использовать метрику на K . Другими словами, индуцированная метрика g_{ij} на Q — это то же самое, что метрика g_{ij} на K , за тем исключением, что, рассматривая g_{ij} как метрику на Q , надо учитывать только компоненты с индексами i и j , касательными к Q . Далее, если метрику на K можно записать в виде (15.3.6) через вторые производные кэлерова потенциала, то это можно сделать и для индуцированной метрики на комплексном подмногообразии Q ; работать на Q означает просто, что надо вычислять $\partial^2 \phi / \partial Z^a \partial \bar{Z}^{\bar{b}}$ только для значений \bar{a} и \bar{b} , касательных к Q .

Таким образом, всякое комплексное подмногообразие в CP^N является кэлеровым многообразием. Существует также и обратное в некотором смысле утверждение. Каждое компактное кэлерово многообразие (с небольшими ограничениями на топологический класс кэлеровой формы, которые мы ниже обсудим) можно вложить в CP^N . Но может оказаться, что такое вложение данного кэлерова многообразия в CP^N трудно описать. Вложение в CP^N определено не всегда является самым экономичным способом описания данного кэлерова многообразия. Полное пересечение гиперповерхностей, обсуждавшееся в конце предыдущего раздела, представляет собой особенно простой пример комплексного подмногообразия в CP^N , но «типичное» комплексное подмногообразие в CP^N таким способом получить нельзя. Относительно простой пример комплексного подмногообразия в CP^N , которое нельзя получить как полное пересече-

ние гиперповерхностей, дает «скрученная кубическая кривая» в CP^3 . Это подпространство в CP^3 , состоящее из точек, однородные координаты которых имеют вид (u^3, u^2v, uv^2, v^3) , где u и v — комплексные числа, не равные одновременно нулю. Поскольку можно считать, что u и v определяют точку в CP^1 , скрученную кубическую кривую можно рассматривать как экзотическое вложение CP^1 в CP^3 . Не слишком трудно убедиться, что эту кривую нельзя реализовать в виде полного пересечения.

Вернемся теперь к общей теории. Пусть K — кэлерово многообразие, на котором выбрана какая-то конкретная кэлерова метрика g . Соответствующая кэлерова форма k , которая является замкнутой 2-формой, определяет некоторый элемент из $H^2(K; R)$ (второй группы когомологий де Рама многообразия K с вещественными коэффициентами). Этот элемент называется кэлеровым классом кэлеровой метрики g . Точно так же, как комплексное многообразие может допускать некоторое множество разных комплексных структур, кэлерово многообразие может допускать кэлеровы метрики с некоторым диапазоном возможных кэлеровых классов. Но кэлеров класс компактного кэлерова многообразия всегда не равен нулю. Другими словами, глобально нельзя записать k как $k = d\alpha$, где α — 1-форма. Чтобы это доказать, покажем, что на кэлеровом многообразии комплексной размерности N , т. е. вещественной размерности $2N$, N -кратное внешнее произведение кэлеровой формы k на саму себя всегда пропорционально полностью антисимметричному тензору Леви-Чивиты $\varepsilon_{i_1 \dots i_{2N}}$. Напомним, что в любой точке p можно выбрать стандартные комплексные координаты z^a , для которых $k = dz^1 \wedge d\bar{z}^{\bar{1}} + \dots + dz^N \wedge d\bar{z}^{\bar{N}}$. Отсюда легко вывести, что $k \wedge k \wedge \dots \wedge k = N! \varepsilon$. Объем компактного многообразия есть $V = \int \varepsilon$, причем величина не равна нулю. С другой стороны, если было бы $k = d\alpha$ глобально, то мы бы имели

$$\begin{aligned} N! \cdot V &= \int k \wedge k \wedge \dots \wedge k = \int d\alpha \wedge k \wedge \dots \wedge k = \\ &= \int d(\alpha \wedge k \wedge \dots \wedge k) = 0. \end{aligned} \quad (15.3.15)$$

Значит, кэлеров класс компактного кэлерова многообразия всегда не равен нулю.

Не каждое комплексное многообразие допускает кэлерову метрику — имеются сильные топологические ограничения. Например, чтобы компактное многообразие M было кэлеровым, вторая группа когомологий $H^2(M; R)$ должна быть ненулевой, другими словами, второе число Бетти для M должно быть

положительным. В противном случае кэлеров класс гипотетической кэлеровой метрики на M автоматически обращался бы в нуль, но мы только что видели, что кэлеров класс произвольной кэлеровой метрики на компактном кэлеровом многообразии не равен нулю. На самом деле все четыре числа Бетти компактного кэлерова многообразия должны быть положительными, так как класс когомологий n -кратного внешнего произведения $\{k \wedge k \wedge \dots \wedge k\}_n$ всегда не равен нулю при всех $n \leq N$. Действительно, если бы n -кратное внешнее произведение можно было записать в виде $\{k \wedge \dots \wedge k\}_n = d\lambda$, то для объема многообразия K мы имели бы $N! \cdot V = \int_K (d\lambda) \wedge \{k \wedge \dots \wedge k\}_{N-n} = \int_K d(\lambda \wedge \{k \wedge \dots \wedge k\}_{N-n}) = 0$, что невозможно. Есть много примеров компактных комплексных многообразий, которые нельзя наделить кэлеровой метрикой, поскольку некоторые из их четных чисел Бетти равны нулю.

Локально ничто не может помешать определить кэлерову метрику соотношением (15.3.6) на произвольном комплексном многообразии, поэтому препятствие к существованию кэлеровой метрики на данном комплексном многообразии является чисто топологическим. В самом деле, локально любые два комплексных многообразия одинаковой размерности неотличимы друг от друга.

15.4. Риччи-плоские кэлеровы многообразия с группой голономии $SU(N)$

Если многообразию K допускает кэлерову метрику g , такая кэлерова метрика не единственна. Мы можем взять произвольное скалярное поле ϕ и определить новую кэлерову метрику g' (которая будет иметь такой же кэлеров класс), полагая $g'_{ab} = g_{ab} + \partial_a \partial_b \phi$. Так связаны между собой любые две кэлеровы метрики с одинаковыми кэлеровыми классами.

После того как мы выяснили основное содержание условия $U(N)$ -голономии, нам нужно теперь понять суть дополнительных ограничений, связанных с $SU(N)$ -голономией. Если дано кэлерово многообразие K , допускающее в силу предшествующих замечаний бесконечное множество кэлеровых метрик, то можно ли найти такую кэлерову метрику на K , группа голономии которой есть не $U(N)$, а $SU(N)$? Сравнительно легко видеть, что имеется топологическое препятствие для нахождения такой метрики. Действительно, спиновая связность на кэлеровом многообразии представляет собой $U(N)$ - или $SU(N) \times$

$\times U(1)$ -калибровочное поле; $U(1)$ -часть спиновой связности — это абелево калибровочное поле, которое можно обозначить чертой A . Метрика с $SU(N)$ -голономией на K была бы такой кэлеровой метрикой, для которой A является чистой калибровкой, другими словами, что калибровочно-инвариантная напряженность поля $F = dA$ обращается в нуль. Такая метрика существует только в том случае, если $U(1)$ -часть спиновой связности топологически тривиальна. Наоборот, если спиновая связность дает $U(1)$ -поле с нетривиальным квантованным магнитным потоком, его нельзя исключить с помощью непрерывной вариации кэлеровой метрики. Как обсуждалось в гл. 14, замкнутая 2-форма F определяет элемент из $H^2(K; \mathbb{R})$ — второй группы когомологий де Рама для K с вещественными коэффициентами. Этот элемент называется первым классом Черна $c_1(K)$ многообразия K . (На самом деле это первый класс Черна так называемого канонического линейного расслоения на K , которое определено в примере (2) из разд. 15.6.3.) Многообразие K может допускать метрику с голономией $SU(N)$ только в том случае, если $c_1(K) = 0$.

15.4.1. Метрика Калаби — Яу

В 1957 г. Е. Калаби высказал предположение, что кэлерово многообразие K с нулевым первым классом Черна всегда допускает кэлерову метрику с $SU(N)$ -голономией. Точнее говоря, он высказал предположение, что существует ровно одна (с точностью до постоянного множителя) метрика с $SU(N)$ -голономией для любой данной комплексной структуры на K и любого данного кэлерова класса. Калаби доказал единственность этой гипотетической метрики. Существование этой метрики было доказано С.-Т. Яу двадцатью годами позднее. В силу этой весьма трудной теоремы метрики с $SU(N)$ -голономией в точности соответствуют кэлеровым многообразиям с нулевым первым классом Черна. Это приводит к решающему упрощению при поисках вакуумных состояний с ненарушенной суперсимметрией, так как описывать метрики с $SU(N)$ -голономией крайне трудно (ни одна из них явно не известна, если не считать определенных сингулярных предельных случаев), но кэлеровы многообразия с нулевым первым классом Черна можно найти, как мы увидим, с помощью качественных методов.

Едва ли можно было бы дать здесь доказательство существования метрик с $SU(N)$ -голономией на кэлеровых многообразиях с $c_1 = 0$, но следующие факты, возможно, позволяют представить это в более правдоподобном виде. Мы знаем уже, что

многообразии с $SU(N)$ -голономией допускает спинорное поле η , которое ковариантно постоянно: $D_i\eta = 0$ ¹⁾. Для такого спинорного поля всегда выполняется условие $[D_i, D_j]\eta = 0$, или

$$R_{ijkl}\Gamma^{kl}\eta = 0, \quad (15.4.1)$$

так что

$$0 = \Gamma^j\Gamma^{kl}R_{ijkl}\eta = 0. \quad (15.4.2)$$

С учетом гамма-матричного тождества $\Gamma^j\Gamma^{kl} = \Gamma^{jkl} + g^{ik}\Gamma^l - g^{jl}\Gamma^k$ и тождества для кривизны $R_{ijkl} + R_{iklj} + R_{iljk} = 0$ из соотношения (15.4.2) следует

$$\Gamma^k R_{ik}\eta = 0. \quad (15.4.3)$$

В действительности это означает, что $R_{ik} = 0$. Таким образом, метрика с $SU(N)$ -голономией обязательно является риччи-плоской.

Теперь мы установим это другим способом и одновременно докажем обратное утверждение. На самом деле мы покажем, что тензор Риччи кэлерового многообразия представляет собой (с точностью до множителя) напряженность поля для $U(1)$ -компоненты спиновой связности. Напомним, как получается вложение $U(1)$ в $SO(2N)$. Генератор группы $U(1)$ — это в точности комплексная структура J^i_j , ненулевые компоненты которой равны $J^a_b = i\delta^a_b$, $J^{\bar{a}}_{\bar{b}} = -i\delta^{\bar{a}}_{\bar{b}}$. Для данного $SO(2N)$ -генератора (другими словами, антисимметричной матрицы M_{kl}) его $U(1)$ -часть есть $\text{tr} JM = M^k_l J^l_k$. Но, как обсуждалось в связи с рис. 15.2, при параллельном переносе вокруг малой петли в ij -плоскости векторы поворачиваются на матрицу $R_{(ij)}$, матричный элемент которой с индексами kl равен R_{ijkl} ; $U(1)$ -часть этой матрицы равна $F_{ij} = \text{tr} JR_{(ij)} = R_{ijkl}J^l_k$. Это $U(1)$ -часть вращения, которому подвергаются векторы, параллельно переносимые вокруг малой петли в ij -плоскости, а это и есть напряженность поля для $U(1)$ -части спиновой связности. Следовательно, ненулевые компоненты напряженности F_{ij} равны

$$F_{a\bar{b}} = -F_{\bar{b}a} = R_{a\bar{b}}^k J^l_k = iR_{a\bar{b}}^c - iR_{a\bar{b}}^{\bar{c}}, \quad (15.4.4)$$

но в то же время

$$R_{a\bar{b}}^c = R_{a\bar{b}\bar{d}c}g^{\bar{d}c} = -R_{a\bar{b}c\bar{d}}g^{c\bar{d}} = -R_{a\bar{b}}^{\bar{d}}. \quad (15.4.5)$$

¹⁾ Выше мы установили это в случае $SU(3)$ -голономии, но это верно и в более общем случае $SU(N)$ -голономии. При вложении $SU(N)$ в $SO(2N)$, фигурирующем в кэлеровой геометрии, спинорное представление группы $SO(2N)$ всегда содержит некоторый $SU(N)$ -синглет.

Поэтому на самом деле $F_{a\bar{b}} = 2iR_{a\bar{b}}^c$. Сравнивая это с определением тензора Риччи $R_{a\bar{b}} = R_{a\bar{b}c}^c$ и используя кэлерово тождество $R_{a\bar{b}c}^c = -R_{a\bar{b}}^c$, окончательно получаем связь между тензором Риччи $R_{a\bar{b}}$ и напряженностью поля $F_{a\bar{b}}$:

$$F_{a\bar{b}} = -2iR_{a\bar{b}} = -F_{\bar{b}a}. \quad (15.4.6)$$

Таким образом, метрика с $SU(N)$ -голономией — это то же самое, что риччи-плоская кэлерова метрика. Этот удовлетворительный результат дает нам первое указание на то, что поиск вакуумных состояний с ненарушенной суперсимметрией означает в действительности поиск вакуумных состояний, удовлетворяющих уравнениям движения струнной теории поля. В конце концов условие риччи-плоскости определено является на больших расстояниях главным приближением для уравнений движения в рассматриваемых нами теориях!

Хотя мы и не можем доказать здесь существование таких метрик на общих кэлеровых многообразиях с $c_1 = 0$, мы можем отметить несколько фактов, делающих это правдоподобным. Выше мы видели, что тензор Риччи равен $R_{a\bar{b}} = -\partial_a\partial_{\bar{b}} \ln \det g$ (см. (15.3.12)). Следовательно, условие $R_{a\bar{b}} = 0$ состоит в том, что $\ln \det g = F(z^a) + \bar{F}(\bar{z}^{\bar{a}})$, где $F(z^a)$ — произвольная голоморфная функция от z^a . С помощью голоморфной замены координат $z^a \rightarrow \bar{z}^a(z^b)$ функции F локально можно придать любой вид, скажем, принять $F = 1/2$. Следовательно, условие, определяющее риччи-плоское пространство, локально имеет вид

$$\ln \det g = 1. \quad (15.4.7)$$

Здесь g должна быть, разумеется, кэлеровой метрикой, которая локально описывается соотношением $g_{a\bar{b}} = \partial_a\partial_{\bar{b}}\phi$ для некоторой скалярной функции ϕ . Поэтому, локально пытаясь найти риччи-плоскую кэлерову метрику, мы тем самым пытаемся подобрать одну скалярную функцию ϕ , удовлетворяющую одному уравнению (15.4.7). Локально это может быть сделано. (Плоское пространство, описываемое функцией $\phi = \sum |z^a|^2$, представляет собой одно из решений.) Можно ли решить указанное одно уравнение для одной неизвестной глобально — это другой вопрос. Мы уже отмечали топологическое препятствие — $c_1(K)$ должно быть равно нулю. Доказательство Яу гипотезы Калаби означает, что это единственное препятствие: кэлерово многообразие с $c_1 = 0$ допускает единственную риччи-плоскую кэлерову метрику для любого выбора комплексной структуры и кэлерова класса.

15.4.2. Ковариантно постоянные формы

В целях дальнейших приложений сформулируем критерий обращения в нуль первого класса Черна ($c_1 = 0$) другим способом. Мы знаем, что фундаментальное представление группы $SO(2N)$ разлагается относительно $SU(N)$ как $N \oplus \bar{N}$. Из антисимметричной комбинации N экземпляров представления N группы $SU(N)$ можно получить $SU(N)$ -инвариант $\varepsilon_{a_1 a_2 \dots a_N}$, который не является, конечно, $U(N)$ -инвариантом. Если мы рассмотрим теперь N -форму ω на многообразии с $SU(N)$ -голономией, у такого поля будет компонента, нейтральная относительно группы голономии, а потому инвариантная при параллельных переносах в случае многообразия с $SU(N)$ -голономией, но не в случае многообразия с $U(N)$ -голономией. В действительности ковариантно постоянные N -формы на многообразии с $SU(N)$ -голономией являются формами типа $(N, 0)$ или $(0, N)$, так как именно из произведения $N \otimes N \otimes \dots \otimes N$ или $\bar{N} \otimes \bar{N} \otimes \dots \otimes \bar{N}$ можно образовать синглет по $SU(N)$. Таким образом, одним из существенных свойств многообразия с $SU(N)$ -голономией является существование ковариантно постоянной $(N, 0)$ -формы ω . Комплексно-сопряженная ей форма является ковариантно постоянной $(0, N)$ -формой $\bar{\omega}$. В терминах ковариантно постоянного спинора η положительной киральности форму ω можно выразить в виде $\omega_{i_1 i_2 \dots i_N} = \eta^T \Gamma_{i_1 i_2 \dots i_N} \eta$. Поскольку ω ковариантно постоянна, она нигде не обращается в нуль (если бы она была равна нулю в одной точке, то она всюду обращалась бы в нуль). Обратное утверждение также верно. Заряженное поле, взаимодействующее с топологически нетривиальным калибровочным полем, всегда должно иметь где-то нули. Поэтому если комплексное многообразие K допускает нигде не равную нулю N -форму, то $U(1)$ -часть спиновой связности на K должна быть топологически тривиальной, а первый класс Черна для K должен равняться нулю.

Дифференциальная форма α типа $(p, 0)$, удовлетворяющая уравнению $\bar{\partial}\alpha = 0$, называется голоморфной p -формой, поскольку в локальных голоморфных координатах все компоненты формы α являются голоморфными функциями. Ковариантно постоянная $(N, 0)$ -форма на многообразии с $SU(N)$ -голономией, несомненно, является голоморфной. На практике часто пытаются доказать, что $c_1 = 0$ для некоторого комплексного многообразия K , разыскивая нигде не равную нулю голоморфную N -форму, хотя достаточно было бы найти просто нигде не равную нулю $(N, 0)$ -форму, голоморфную или нет.

15.4.3. Некоторые многообразия с $SU(N)$ -голономией

Теперь мы приведем некоторые примеры многообразий K , которые допускают метрики с $SU(N)$ -голономией. В первом примере в качестве K возьмем компактную риманову поверхность Σ . В этом случае вся спиновая связность представляет собой $U(1)$ -калибровочное поле. Чтобы спиновая связность была топологически тривиальным калибровочным полем, должно выполняться требование $\int_{\Sigma} F = 0$, где F — напряженность $U(1)$ -поля. Из рассмотрения, проведенного в гл. 14, мы знаем, что среди всех компактных римановых поверхностей $\int_{\Sigma} F$ равен нулю только в случае тора. Таким образом, только тор допускает метрику с $SU(1)$ -голономией. В действительности метрика с $SU(1)$ -голономией — это то же самое, что плоская метрика, так как группа $SU(1)$ тривиальна. В случае вещественной размерности два доказательства Яу гипотезы Калаби означает как раз, что тор допускает плоскую метрику, и мы определенно знаем, что это верно.

Как найти примеры комплексных многообразий с $c_1 = 0$ в случае комплексной размерности больше единицы? Как обсуждалось в разд. 15.2.3, некоторые из простейших примеров комплексных многообразий даются полными пересечениями гиперповерхностей в CP^N . Мы хотим определить, какие из этих многообразий имеют $c_1 = 0$ и допускают метрики с $SU(n)$ -голономией. Для начала рассмотрим случай, когда задан один однородный полином P степени k от $N + 1$ комплексной переменной Z^1, Z^2, \dots, Z^{N+1} . Уравнение $P = 0$ определяет гиперповерхность Q в CP^N . При каких значениях k и N гиперповерхность Q будет иметь $c_1 = 0$? Мы ответим на этот вопрос по крайней мере отчасти, указав для определенных k и N нигде не равную нулю голоморфную $(N - 1)$ -форму.

Сначала будем работать в области на Q , в которой $Z^{N+1} \neq 0$. В этой области можно параметризовать Q координатами $x^a = Z^a / Z^{N+1}$, $a = 1, \dots, N$. Рассмотрим теперь голоморфную $(N - 1)$ -форму

$$\omega = dx^1 \wedge dx^2 \wedge \dots \wedge dx^{N-1} / (\partial P / \partial x^N). \quad (15.4.8)$$

Здесь P обозначает $P(x^1, x^2, \dots, x^N, 1)$. На первый взгляд кажется, что определение ω зависит от произвольным образом выделенной координаты x^N . Но в действительности мы должны помнить, что на Q полином P — константа (на самом деле $P = 0$ на Q), так что на Q имеем $dP = 0$. В явном виде

$$dP = \sum_{a=1}^N (\partial P / \partial x^a) dx^a. \text{ Поэтому на } Q \text{ имеем (для любого } m) \\ dx^m / (\partial P / \partial x^m) = -dx^N / (\partial P / \partial x^N) + \sum_{i \neq m, N} f_i dx^i, \quad (15.4.9)$$

где вид функций f_i можно узнать, но он не имеет значения. Подставляя выражение (15.4.9) в формулу (15.4.8) (члены, содержащие $f_i dx^i$, выпадают, так как $dx^i \wedge dx^i = 0$), находим для любого m

$$\omega = (-1)^{N-m} dx^1 \wedge dx^2 \wedge \dots \wedge dx^m \dots \wedge dx^N / (\partial P / \partial x^m). \quad (15.4.10)$$

Символ dx^m означает, что dx^m должно быть опущено. Важность выражения (15.4.10) не просто в том, что мы хотим рассматривать все x^m равноправно. Исходное определение (15.4.8) формы ω имеет кажущуюся сингулярность при $\partial P / \partial x^N = 0$. Другой вариант выражения (15.4.10) показывает, что эта кажущаяся сингулярность безопасна. Действительно, сама возможность записать ω в виде (15.4.10) для произвольного m показывает, что, пока $Z^{N+1} = 0$, ω может быть сингулярна только в том случае, если полиномы $\partial P / \partial x^m$ все равны нулю для $m = 1, \dots, N$. Но, как показано в примере 4 из разд. 15.2.3, полиномы $\partial P / \partial x^m$ никогда не обращаются в нуль одновременно на гиперповерхности $P = 0$, если эта гиперповерхность несингулярна. Из определения ясно также, что ω нигде не равна нулю, кроме может быть тех мест, где $Z^{N+1} = 0$.

Чтобы исследовать поведение при $Z^{N+1} = 0$, предположим, например, что $Z^1 \neq 0$, и определим координаты $y^m = Z^m / Z^1$, $m = 2, \dots, N+1$, или, другими словами, $y^m = x^m \cdot (Z^{N+1} / Z^1)$. Если P — однородный полином степени k , то $P(1, y^2, \dots, y^{N+1}) = P(x^1, x^2, \dots, x^N, 1) \cdot (Z^{N+1} / Z^1)^k$. В терминах y^m форма ω принимает вид

$$\omega = \\ = (-1)^{1-m} (Z^1 / Z^{N+1})^{N+1-k} dy^2 \wedge dy^3 \wedge \dots \wedge dy^m \dots \wedge dy^{N+1} / (\partial P / \partial y^m), \quad (15.4.11)$$

При выводе выражения (15.4.11) не надо учитывать члены, обращающиеся в нуль при $P = 0$, и члены, пропорциональные, например, $dy^i \wedge dy^i$. Воспользовавшись выражением (15.4.11), замечаем, что если $N+1-k=0$, то ω не имеет ни нуля, ни полюса при $Z^{N+1} = 0$, так что при этом условии мы находим нигде не равную нулю (и несингулярную) голоморфную $(N-1)$ -форму. Для $k \neq N+1$ из выражения (15.4.11) видно, что ω имеет только нули и не имеет полюсов или имеет только полюсы и не имеет нулей. Немного поработав дополнительно, можно использовать тот факт, что на Q существует мероморф-

ная $(N-1)$ -форма только с нулями и без полюсов или только с полюсами и без нулей, чтобы показать, что $c_1(Q) \neq 0$, если $k \neq N+1$.

Таким образом, гиперповерхность степени $N+1$ в CP^N является относительно простым примером кэлера многообразия с $c_1 = 0$. Чтобы построить еще другие примеры, рассмотрим n однородных полиномов P_1, \dots, P_n степеней k_1, \dots, k_n в CP^N и примем, что Q — геометрическое место точек, где $P_1 = \dots = P_n = 0$. Пусть

$$\omega = dx^1 \wedge dx^2 \wedge \dots \wedge dx^{N-n} / (\det M), \quad (15.4.12)$$

где M — $n \times n$ -матрица, матричные элементы которой равны

$$M_{ab} = \partial P^a / \partial x^{N-n+b}. \quad (15.4.13)$$

Как и раньше, $x^k = Z^k / Z^{N+1}$. Рассуждения, подобные приведенным выше, показывают, что ω нигде не равна нулю и несингулярна, если и только если

$$\sum_{i=1}^n k_i = N+1. \quad (15.4.14)$$

Этим способом мы получаем дополнительные примеры кэлера многообразий с $c_1 = 0$.

Как пример этого, мы видим, что кубическое уравнение в CP^2 , такое, как уравнение Ферма $X^3 + Y^3 + Z^3 = 0$, определяет риманову поверхность с $c_1 = 0$. Согласно предыдущему обсуждению, топологически это должен быть тор. Уравнение четвертой степени в CP^3 , такое, как $X^4 + Y^4 + Z^4 + W^4 = 0$ определяет многообразие, которое допускает метрику с $SU(2)$ -голономией. Это многообразие известно как поверхность КЗ. Можно показать (с помощью методов, выходящих за рамки настоящего изложения), что топологически это единственный пример многообразия, которое допускает метрику с $SU(2)$ -голономией. Что касается многообразий комплексной размерности три, то есть много топологических типов, допускающих метрики с группой голономии $SU(3)$. Ввиду того что было сказано выше, примером такого многообразия будет гиперповерхность пятой степени в CP^4 , которая описывается таким уравнением, как

$$\sum_{a=1}^5 Z_a^5 = 0, \quad (15.4.15)$$

или более общим однородным полиномом пятой степени от пяти переменных. В CP^5 можно рассмотреть два кубических уравнения или квадратное уравнение и уравнение четвертой степени. В CP^6 мы можем рассмотреть две квадратики и кубуку.

Наконец, в CP^7 пересечение четырех квадрик определяет многообразие, допускающее метрику с $SU(3)$ -голономией. Это единственные примеры такого типа¹⁾. Но имеется много других конструкций многообразий с $SU(3)$ -голономией. Одну мы опишем в разд. 16.10. В противоположность ситуации в комплексной размерности два имеется огромное (возможно, бесконечное) количество примеров кэлеровых многообразий комплексной размерности три, для которых $c_1 = 0$. Приведенные только что примеры являются лишь некоторыми из простейших.

15.5. Волновые операторы на кэлеровых многообразиях

Как подробно обсуждалось в гл. 14, физические свойства теорий Калуцы — Клейна очень сильно зависят от нулевых мод таких волновых операторов, как оператор Дирака и операторы де Рама. Оказывается, на кэлеровых многообразиях эти операторы имеют весьма специфические свойства, и очень важно в этих свойства разобраться.

15.5.1. Оператор Дирака

Начнем рассмотрение с оператора Дирака. Стандартные гамма-матрицы Дирака Γ^i удовлетворяют соотношению $\{\Gamma^i, \Gamma^j\} = 2g^{ij}$. На N -мерном кэлеровом многообразии K алгебра Дирака упрощается, если работать в локальных голоморфных координатах z^a , $a = 1, \dots, N$, для которых $g^{ab} = g^{\bar{a}\bar{b}} = 0$. Гамма-матричная алгебра тогда имеет вид

$$\{\Gamma^a, \Gamma^b\} = \{\Gamma^{\bar{a}}, \Gamma^{\bar{b}}\} = 0, \quad \{\Gamma^a, \Gamma^{\bar{b}}\} = 2g^{a\bar{b}}. \quad (15.5.1)$$

С точностью до нормирующего множителя это обычная алгебра фермионных операторов рождения — уничтожения; $\Gamma^{\bar{b}}$ можно считать операторами рождения, а Γ^a — эрмитово сопряженными операторами уничтожения.

Спиноры, на которые действуют гамма-матрицы, можно построить способом, знакомым нам по изучению свободных фермионов. Начинаем с «фоковского вакуума» $|\Omega\rangle$, который аннулируется операторами уничтожения: $\Gamma^a|\Omega\rangle = 0$, $a = 1, \dots, N$. Остальными состояниями являются «одночастичные состояния» $|\Omega^{\bar{a}}\rangle = \Gamma^{\bar{a}}|\Omega\rangle$, «двухчастичные состояния» $|\Omega^{\bar{a}\bar{b}}\rangle = -|\Omega^{\bar{b}\bar{a}}\rangle =$

¹⁾ Формально можно было бы найти другие примеры, удовлетворяющие условию (15.4.14), используя линейные уравнения, но эти примеры в действительности не новые, поскольку линейное уравнение CP^N соответствует просто обращению в нуль одной из координат, что сводит исходную задачу к задаче в CP^{N-1} с числом уравнений, меньшим на единицу.

$= \Gamma^{\bar{a}}\Gamma^{\bar{b}}|\Omega\rangle$ и т. д. вплоть до совершенно заполненного состояния $|\bar{\Omega}\rangle = \Gamma^{\bar{1}}\Gamma^{\bar{2}} \dots \Gamma^{\bar{N}}|\Omega\rangle$.

Нам надо изучить не просто спинорное представление группы $SO(2N)$, которое мы только что построили, а спинорные поля, зависящие как-то от координат $z^a, \bar{z}^{\bar{a}}$. Для общего спинорного поля на K имеем разложение

$$\psi(z^a, \bar{z}^{\bar{a}}) = \phi(z^a, \bar{z}^{\bar{a}})|\Omega\rangle + \phi_{\bar{b}}(z^a, \bar{z}^{\bar{a}})\Gamma^{\bar{b}}|\Omega\rangle + \dots + \phi_{\bar{b}\bar{c}}(z^a, \bar{z}^{\bar{a}})\Gamma^{\bar{b}}\Gamma^{\bar{c}}|\Omega\rangle + \dots \quad (15.5.2)$$

На первый взгляд можно подумать, что поле ϕ , не имеющее индексов, есть некоторое бесспиновое поле, но в действительности это не обязательно так. Поле ϕ может взаимодействовать с $U(1)$ -частью спиновой связности. Действительно, если $U(1)$ -генератор из $U(N)$ нормировать так, чтобы представления N и \bar{N} группы $U(N)$ имели $U(1)$ -заряд, равный соответственно $+1$ и -1 , то операторы рождения $\Gamma^{\bar{a}}$, преобразующиеся по $U(N)$ как \bar{N} , будут иметь заряд -1 . Заполненное состояние $|\bar{\Omega}\rangle$ получается из фоковского вакуума $|\Omega\rangle$ действием N операторов рождения, так что если q — $U(1)$ -заряд состояния $|\Omega\rangle$, то $U(1)$ -заряд состояния $|\bar{\Omega}\rangle$ равен $q - N$. С другой стороны, состояния $|\Omega\rangle$ и $|\bar{\Omega}\rangle$ можно связать операцией комплексного сопряжения. Эта операция меняет местами операторы рождения $\Gamma^{\bar{a}}$ и операторы уничтожения Γ^a , а следовательно, меняет местами пустое состояние $|\Omega\rangle$ и заполненное состояние $|\bar{\Omega}\rangle$. В то же время комплексное сопряжение изменяет знак $U(1)$ -генератора. Мы заключаем, что заполненное и пустое состояния имеют противоположные $U(1)$ -заряды, так что $q = N/2$.

Таким образом, неправильно думать, что на общем кэлеровом многообразии в разложении (15.5.2) ϕ — это то же самое, что нейтральное бесспиновое поле. В общем случае ϕ не будет нейтральным по отношению к $U(1)$ -части спиновой связности. Единственный вариант, когда ϕ есть то же самое, что бесспиновое поле — это случай, который нам особенно интересен — случай риччи-плоского кэлерова многообразия, на котором $U(1)$ -часть спиновой связности всегда тривиальна. В такой ситуации ϕ совершенно не чувствует спиновой связности как нейтральный скаляр. Следовательно, мы можем выбрать ϕ постоянным. Тогда спинор $\psi = |\Omega\rangle$ является одним из ковариантно постоянных спинорных полей на многообразии с $SU(N)$ -голономией, а другим является $\psi = |\bar{\Omega}\rangle$.

Что касается $\phi_{\bar{a}}$ в разложении (15.5.2), то это поле имеет один (ковариантный) антиголоморфный индекс, поэтому его

можно рассматривать как $(0, 1)$ -форму. (Это применимо только для $SU(N)$ -голономии; в противном случае $\phi_{\bar{a}}$ имеет $U(1)$ -заряд, не такой, как у обычной $(0, 1)$ -формы.) Поскольку $\phi_{\bar{a}\bar{b}}$ антисимметрично по двум своим антиголоморфным индексам, это поле эквивалентно $(0, 2)$ -форме. Если продолжать в том же духе, становится ясно, что состояния, которые получаются действием k операторов рождения на «фоковский вакуум», эквивалентны $(0, k)$ -формам. Таким образом, спиноры на многообразии с $SU(N)$ -голономией — это то же самое, что $(0, k)$ -формы для $k = 0, \dots, N-1$. Операторы рождения, превращающие $(0, k)$ -формы в $(0, k+1)$ -формы, являются гамма-матрицами, которые обращают киральность, поэтому $(0, k)$ -форма является спинором, киральность которого равна $(-1)^k$.

Теперь нам надо исследовать оператор Дирака $\hat{D} = \Gamma^i D_i$. Две из его собственных функций — это два ковариантно постоянных спинора. Имеются ли другие? Стандартное вычисление показывает, что

$$\hat{D}^2 = \Gamma^i \Gamma^j D_i D_j = (1/2) \{ \Gamma^i, \Gamma^j \} D_i D_j + (1/4) [\Gamma^i, \Gamma^j] [D_i, D_j] = \\ = D_i D^i + [\Gamma^i, \Gamma^j] [\Gamma^k, \Gamma^l] R_{ijkl} / 32. \quad (15.5.3)$$

С помощью тождества

$$\Gamma^i \Gamma^j \Gamma^k \Gamma^l = \Gamma^{ijkl} - (\Gamma^{ik} g^{jl} \pm \text{перестановки}) + \\ + g^{ij} g^{kl} - g^{ik} g^{jl} + g^{il} g^{jk} \quad (15.5.4)$$

выражение (15.5.3) приводится к виду

$$-\hat{D}^2 = -D_i D^i + R/4, \quad (15.5.5)$$

где R — скаляр Риччи. Для многообразия с $SU(3)$ -голономией $R = 0$, так что $\hat{D}_2 = D_i D^i$. Оператор $-D_i D^i$ неотрицательно определен, и его собственные функции должны быть ковариантно постоянными. Доказательство состоит в следующем: если $-D_i D^i \psi = 0$, то

$$0 = \int_K \langle \bar{\psi} | (-D_i D^i) | \psi \rangle = + \int_K \langle \bar{D}_i \bar{\psi} | D^i \psi \rangle, \quad (15.5.6)$$

а это возможно только в том случае, если $D_i \psi = 0$. Спинорное представление $SO(2N)$ не содержит $SU(N)$ -синглетов, отличных от фоковского вакуума и комплексно-сопряженного ему состоя-

¹⁾ Можно определить (p, q) -формы на любом комплексном многообразии, так что эквивалентность спиноров и $(0, k)$ -форм для многообразий с $SU(N)$ -голономией означает, в частности, что на таких многообразиях всегда можно определить спиноры, что является нетривиальным утверждением, как уже отмечалось в разд. 12.1.

ния. Ковариантно постоянные спиноры должны быть синглетами по группе голономии, поэтому на многообразии, группой голономии которого является $SU(N)$, а не ее подгруппа, имеется ровно два ковариантно постоянных спинора. Таким образом, на многообразии с $SU(N)$ -голономией собственными функциями оператора Дирака, отвечающими нулевым собственным значениям, являются только ковариантно постоянные $(0, 0)$ - и $(0, N)$ -формы.

Мы еще ничего не сказали о наиболее далеко идущем следствии взаимосвязи между спинорами и $(0, k)$ -формами на многообразиях с $SU(N)$ -голономией. Рассмотрим подробнее оператор Дирака

$$\hat{D} = \Gamma^{\bar{a}} D_{\bar{a}} + \Gamma^a D_a. \quad (15.5.7)$$

Займемся первым слагаемым $\hat{D}_+ = \Gamma^{\bar{a}} D_{\bar{a}}$. Примененный к $(0, k)$ -форме $\psi = \phi_{\bar{a}_1 \dots \bar{a}_k} \Gamma^{\bar{a}_1} \dots \Gamma^{\bar{a}_k} | \Omega \rangle$ оператор \hat{D}_+ дает $(0, k+1)$ -форму:

$$\hat{D}_+ \psi = \frac{1}{k+1} (\bar{D}_{\bar{a}_0} \phi_{\bar{a}_1 \dots \bar{a}_k} \pm \\ \pm \text{циклические перестановки}) \Gamma^{\bar{a}_0} \dots \Gamma^{\bar{a}_k} | \Omega \rangle. \quad (15.5.8)$$

Сравнивая выражения (15.5.8) и (15.5.3), видим, что оператор \hat{D}_+ на самом деле эквивалентен оператору Дольбо \bar{D} . Поскольку оператор Дирака эрмитов, он равен $\hat{D} = \bar{D} + \bar{D}^*$, где \bar{D}^* — оператор, эрмитово сопряженный оператору \bar{D} .

15.5.2. Когомологии Дольбо

Эти вопросы могут быть рассмотрены более «топологическим» способом аналогично тому, как в гл. 14 рассматривались когомологии де Рама. Форму ψ , удовлетворяющую условию $\bar{D}\psi = 0$, будем называть \bar{D} -замкнутой формой, а форму ψ , которую можно записать в виде $\psi = \bar{D}\lambda$, — \bar{D} -точной. Так как $\bar{D}^2 = 0$, каждая \bar{D} -точная форма \bar{D} -замкнута. Кроме того, могут быть и нетривиальные примеры \bar{D} -замкнутых форм. Это значит, что могут быть такие $(0, n)$ -формы ψ , которые удовлетворяют условию $\bar{D}\psi = 0$, но не могут быть записаны как $\psi = \bar{D}\lambda$. Так же как в определении когомологий де Рама, две \bar{D} -замкнутые $(0, n)$ -формы ψ и ψ' естественно считать эквивалентными, если их разность является тривиальной в том смысле, что $\psi - \psi' = \bar{D}\lambda$ для некоторой λ . Соответствующие классы эквивалентности образуют векторное пространство, которое называется группой когомологий Дольбо $H^{0,n}(K)$ (групповой структурой здесь является аддитивная структура векторного пространства).

Некоторые стандартные рассуждения из теории коомологий де Рама легко переносятся на случай коомологий Дольбо. Например если ψ $\bar{\partial}$ -замкнута, но не точна, то нельзя так выбрать λ , чтобы величина $I = \langle \psi - \bar{\partial}\lambda | \psi - \bar{\partial}\lambda \rangle$ обратилась в нуль. Но можно выбрать λ так, чтобы минимизировать I . Вариационное уравнение

$$\delta I / \delta \lambda = 0 \quad (15.5.9)$$

показывает, что форма $\psi' = \psi - \bar{\partial}\lambda$ удовлетворяет как уравнению $\bar{\partial}\psi' = 0$, так и уравнению $\bar{\partial}^*\psi' = 0$. Отсюда следует, что в каждом классе коомологий Дольбо найдется решение ψ' уравнений $\bar{\partial}\psi' = \bar{\partial}^*\psi' = 0$. И обратно, те же аргументы, что и в случае коомологий де Рама, показывают, что решение уравнений $\bar{\partial}\psi = \bar{\partial}^*\psi = 0$ нельзя записать в виде $\psi = \bar{\partial}\chi$, так что классы коомологий Дольбо на самом деле находятся во взаимно однозначном соответствии с формами ψ , удовлетворяющими условиям $\bar{\partial}\psi = \bar{\partial}^*\psi = 0$. Форма, удовлетворяющая уравнениям $\bar{\partial}\psi = \bar{\partial}^*\psi = 0$, очевидно, является нулевой собственной функцией «лапласиана»

$$\Delta_{\bar{\partial}} = \bar{\partial}\bar{\partial}^* + \bar{\partial}^*\bar{\partial}. \quad (15.5.10)$$

Как и в случае с коомологией де Рама, собственная функция ψ лапласиана с нулевым собственным значением удовлетворяет уравнению

$$0 = \langle \psi | \Delta_{\bar{\partial}} | \psi \rangle = \langle \bar{\partial}\psi | \bar{\partial}\psi \rangle + \langle \bar{\partial}^*\psi | \bar{\partial}^*\psi \rangle = 0, \quad (15.5.11)$$

поэтому она должна удовлетворять уравнениям $\bar{\partial}\psi = \bar{\partial}^*\psi = 0$.

Объединяя все эти факты, получаем, что классы коомологий Дольбо находятся (как и в случае коомологий де Рама) во взаимно однозначном соответствии с нулевыми модами лапласиана¹⁾. Кроме того, поскольку $\bar{\partial}^2 = \bar{\partial}^{*2} = 0$, лапласиан $\Delta_{\bar{\partial}}$ с точностью до нормировки совпадает с квадратом оператора Дирака. Следовательно, группы коомологий Дольбо $H^{0,n}$ есть в точности пространства $(0, n)$ -форм, аннулируемых оператором Дирака. В частности, обсуждение формулы (15.5.6) определяет пространства $H^{0,n}$ для многообразий с $SU(N)$ -голономией: они одномерны при $n = 0, N$ и нулевые в остальных случаях.

¹⁾ Может быть, следует напомнить, что во всех случаях, когда здесь и ниже рассматриваются соотношения между коомологиями и нулевыми модами лапласианов, подразумевается (как и в случае коомологий де Рама), что мы имеем дело с компактным многообразием. — *Прим. перев.*

При изучении оператора Дирака в вещественной дифференциальной геометрии мы обнаружили лишь один инструмент предсказания нулевых мод — индекс Дирака. В кэлеровой геометрии формализм коомологий Дольбо предоставляет гораздо большие возможности для предсказания нулевых мод оператора Дирака, а следовательно, безмассовых частиц. Вместо одного числа, способного предсказать нулевые моды, — индекса — мы имеем $N + 1$ такое число, а именно размерности групп коомологий Дольбо $H^{0,n}$, $n = 0, \dots, N$. Последние зависят только от комплексной структуры многообразия K , но не от выбора метрики на нем. В комплексной геометрии те свойства комплексного многообразия K , которые зависят только от его топологии и комплексной структуры, очень похожи на обычные топологические свойства вещественных многообразий, хотя сложная структура комплексного многообразия в общем случае может зависеть от произвольных параметров. Таким образом, группы коомологий Дольбо должны рассматриваться как квазитопологические.

В качестве первой иллюстрации важности этого заключения отметим, что обычная теорема об индексе никогда не может предсказать появления нулевых мод оператора Дирака обеих киральностей — положительной и отрицательной. В вещественной дифференциальной геометрии такая возможность представляется маловероятной¹⁾, в то время как в кэлеровой геометрии такая ситуация совершенно естественна. Например, на многообразии с $SU(N)$ -голономией минимальный оператор Дирака имеет, как мы обнаружили, две нулевые моды — $(0, 0)$ -форму и $(0, N)$ -форму. При нечетных N (это оказывается интересующим нас случаем) эти состояния имеют противоположную киральность. Данная ситуация становится «естественной» благодаря именно тому факту, что нулевые моды оператора Дирака соответствуют классам коомологий Дольбо, которые являются квазитопологическими. В последующих обобщениях роль коомологий Дольбо будет еще более важной.

15.5.3. Разложение Ходжа

До сих пор в кэлеровой геометрии мы изучали лишь $(0, n)$ -формы. Теперь мы хотим изучить свойства (p, q) -форм для произвольных p и q .

¹⁾ В вещественной дифференциальной геометрии в случае $8k + 2$ измерений имеется теорема о \mathbb{Z}_2 -индексе, которая иногда может предсказать, что оператор Дирака имеет по нулевой моде каждой киральности. Но в вещественном случае нет ничего, что было бы аналогично ситуации, возникающей в кэлеровой геометрии.

Определение групп \bar{d} -когомологий немедленно переносится на (p, q) -формы. Рассмотрим (p, q) -формы, которые являются \bar{d} -замкнутыми, но не \bar{d} -точными. Считая две такие формы ψ и ψ' эквивалентными, если их разность точна, получаем классы эквивалентности, которые образуют группы когомологий Дольбо $H^{p,q}$. Точно такие же рассуждения, как и выше, показывают, что элементы пространства $H^{p,q}$ находятся во взаимно однозначном соответствии с (p, q) -формами, аннулируемыми оператором $\Delta_{\bar{d}} = \bar{d}\bar{d}^* + \bar{d}^*\bar{d}$.

Уже не в первый раз мы встречаемся с группами когомологий, состоящими из гармонических дифференциальных форм. В гл. 14 мы определили лапласиан $\Delta = dd^* + d^*d$ и заметили, что группы когомологий де Рама H_D^n (только в этом разделе мы используем индекс D , отвечающий когомологии де Рама) можно отождествить с гармоническими n -формами, т. е. n -формами, аннулируемыми оператором Δ . Можно спросить, какова связь между «вещественным» лапласианом Δ и «комплексным» лапласианом $\Delta_{\bar{d}}$. Ответ состоит в том, что на кэлеровых многообразиях (но не на более общих комплексных многообразиях) эти операторы связаны соотношением $\Delta_{\bar{d}} = \Delta/2$. В частности, они имеют одинаковые нулевые моды, так что класс когомологий де Рама является также и классом когомологий Дольбо (в компактном случае. — *Перев.*) и наоборот. В вещественной дифференциальной геометрии классы когомологий де Рама всегда можно считать порождаемыми n -формами с определенными n , но связь между когомологиями де Рама и Дольбо позволяет сделать гораздо более точное утверждение в случае кэлеровой геометрии. Можно считать, что классы когомологий де Рама кэлерова многообразия определяются (p, q) -формами с определенными p и q . Математическое соотношение между группами когомологий де Рама и Дольбо имеет вид

$$H_D^n = \bigoplus_{p+q=n} H^{p,q}. \quad (15.5.12)$$

Это утверждение называется разложением Ходжа.

Один из способов доказательства сформулированных выше утверждений состоит в следующем. Напомним, что согласно разд. 14.3.4, комплекс де Рама дифференциальных форм произвольной степени удобно описывать в терминах поля $\psi_{\alpha\beta}$ с двумя спинорными индексами. В гл. 14 введены два набора антикоммутирующих гамма-матриц $\Gamma^i, \tilde{\Gamma}^j, i, j = 1, \dots, 2N$, удовлетворяющих соотношениям $\{\Gamma^i, \Gamma^j\} = \{\tilde{\Gamma}^i, \tilde{\Gamma}^j\} = 2g^{ij}$, $\{\Gamma^i, \tilde{\Gamma}^j\} = 0$. В кэлеровом случае эти два набора гамма-матриц

становятся двумя антикоммутирующими наборами фермионных операторов рождения — уничтожения: $\{\Gamma^a, \Gamma^b\} = \{\tilde{\Gamma}^a, \tilde{\Gamma}^b\} = 2g^{ab}$. Голоморфные и антиголоморфные индексы удобно рассматривать симметричным образом, что было бы невозможно с одним только набором гамма-матриц. Поэтому будем рассматривать

$$\Gamma^{\bar{a}} \text{ и } \tilde{\Gamma}^b \quad (15.5.13)$$

как операторы рождения. Такой выбор симметричен относительно замены голоморфных индексов a на антиголоморфные индексы \bar{a} , если при этом $\Gamma \leftrightarrow \tilde{\Gamma}$. Мы вводим «фоковский вакуум» $|\Omega\rangle$, который аннулируется операторами уничтожения

$$\Gamma^a \text{ и } \tilde{\Gamma}^{\bar{a}}. \quad (15.5.14)$$

Произвольное состояние

$$\Gamma^{\bar{b}_1} \dots \Gamma^{\bar{b}_q} \tilde{\Gamma}^{a_1} \dots \tilde{\Gamma}^{a_p} \cdot |\Omega\rangle \quad (15.5.15)$$

антисимметрично по p голоморфным и q антиголоморфным индексам, так что мы отождествляем его с (p, q) -формой.

В разд. 14.3.4 мы определили оператор S , действующий на биспинорное поле $\psi_{\alpha\beta}$ формулой

$$(S\psi)_{\alpha\beta} = \Gamma_{\alpha\sigma}^i D_i \psi_{\sigma\beta}. \quad (15.5.16)$$

Выше мы задали алгебру Дирака таким образом, что S представляет собой оператор $\bar{d} + \bar{d}^*$, квадрат которого есть $\Delta_{\bar{d}}$, а нулевые моды являются поэтому классами когомологий Дольбо. С другой стороны, в гл. 14, используя несколько другое определение алгебры Дирака, мы интерпретировали тот же самый оператор S как оператор $d + d^*$, квадрат которого равен Δ , а нулевые моды являются классами когомологий де Рама. Поэтому связь между когомологиями Дольбо и де Рама уже доказана. Лучше, однако, не останавливаться на этом и явно продемонстрировать, что оператор S^2 отображает (p, q) -формы в (p, q) -формы, а следовательно, его нулевые моды являются формами с определенными p и q . В любом случае соответствующие формулы полезны сами по себе.

Биспинорное поле $\psi_{\alpha\beta}$ является частным случаем более общего объекта — спинорного поля $\psi_{\alpha x}$ с дополнительным индексом x , на который действует некоторое поле Янга — Миллса. Биспинор $\psi_{\alpha\beta}$ есть тот частный случай, когда x оказывается дополнительным спинорным индексом. Оператор S , действующий на $\psi_{\alpha\beta}$, представляет собой в точности оператор Дирака с минимальной калибровочной связью, причем полем Янга — Миллса, действующим на индекс β , в нем служит спиновая связность.

Рассмотрим общий случай поля Ψ_α^x с произвольным янг-миллсовым индексом x и вычислим квадрат минимального оператора Дирака $\Gamma^i D_i$, действующего на такое поле. Вывод соотношений (15.5.3) и (15.5.5) модифицируется, поскольку в коммутаторе ковариантных производных имеется дополнительный член $[D_i, D_j] \sim F_{ij}^x T^x$, где F_{ij}^x — напряженность поля Янга — Миллса, а T^x — генераторы группы. Соотношение, обобщающее (15.5.5), имеет вид

$$(i\Gamma^i D_i)^2 = -D_i D^i + R/4 - \Gamma^{ij} F_{ij}^x T^x / 4. \quad (15.5.17)$$

Нам надо специализировать эту общую формулу на случай, когда индекс x является дополнительным спиновым индексом, на который действует спиновая связность. В этом случае генераторы T^x равны $[\tilde{\Gamma}^k, \tilde{\Gamma}^l]/4$, а F_{ij}^x есть R_{ijkl} . Кроме того, как мы знаем из гл. 14, оператор $(i\Gamma^i D_i)^2$ в этом случае представляет собой лапласиан Δ , ассоциированный с когомологиями де Рама. Следовательно, выражение (15.5.17) в этой ситуации сводится к следующей формуле для лапласиана:

$$\Delta = -D_i D^i + R/4 - R_{ijkl} [\Gamma^i, \Gamma^j] [\tilde{\Gamma}^k, \tilde{\Gamma}^l] / 16. \quad (15.5.18)$$

В случае кэлерова многообразия (не обязательно с $SU(N)$ -голономией), как мы знаем, ненулевыми компонентами тензора Римана являются R_{abcd} , так что последнее слагаемое в формуле (15.5.18) принимает вид $R_{abcd} [\Gamma^a, \Gamma^b] [\tilde{\Gamma}^c, \tilde{\Gamma}^d]$. Это выражение содержит по одному оператору рождения и уничтожения каждого типа, а следовательно, отображает (p, q) -формы в (p, q) -формы. То же верно и для ковариантных производных D_i (так как $U(N)$ -представление (p, q) -форм зависит от p и q , а D_i содержит только $U(N)$ -спиновую связность и не может изменить $U(N)$ -представление). Поэтому Δ отображает (p, q) -формы в (p, q) -формы, и гармонические формы можно выбрать так, чтобы они были формами с определенными (p, q) . Это завершает наше обсуждение разложения Ходжа.

15.5.4. Числа Ходжа

Для вещественных многообразий размерность группы когомологий де Рама H_D^n называется числом Бетти b_n . Аналогично в кэлеровой геометрии размерность группы когомологий Дольбо $H^{p, q}$ называется числом Ходжа $h^{p, q}$. Из разложения Ходжа следует

$$b_n = \sum_{p+q=n} h^{p, q}. \quad (15.5.19)$$

Отсюда вытекает, что эйлерова характеристика кэлерова многообразия дается выражением вида

$$\chi = \sum_n (-1)^n b_n = \sum_{p, q} (-1)^{p+q} h^{p, q}. \quad (15.5.20)$$

Числа Ходжа подчиняются определенным простым ограничениям, которые легко вывести из (15.5.18). Во-первых, симметрия относительно $\Gamma^i \leftrightarrow \tilde{\Gamma}^i$ означает, что

$$h^{p, q} = h^{q, p}. \quad (15.5.21)$$

Это равенство отражает тот факт, что выбор того, что считать голоморфным, а что — антиголоморфным, произволен и решается по договоренности. Во-вторых, выражение (15.5.18) инвариантно относительно замены операторов рождения на операторы уничтожения (что вызывает замену представления N группы $SU(N)$ на представление \bar{N}). Отсюда следует, что

$$h^{p, q} = h^{N-p, N-q}. \quad (15.5.22)$$

Это неравенство определяет дуальность Пуанкаре в случае кэлеровых многообразий.

Обсудим теперь, как определить числа Ходжа в некоторых простых случаях. Сначала рассмотрим компактную риманову поверхность рода g . Числа Бетти, как мы знаем, равны $b_0 = b_2 = 1$, $b_1 = 2g$. Уравнений (15.5.19) и (15.5.21) достаточно, чтобы получить $h^{0,0} = h^{1,1} = 1$, $h^{1,0} = h^{0,1} = g$. Здесь $h^{1,0}$ — число глобально определенных голоморфных $(1, 0)$ -форм, или, другими словами, глобально определенных голоморфных дифференциалов $a(z)dz$. Тот факт, что это число равно g , представляет собой первоначальную формулировку теоремы Римана — Роха.

В качестве второго примера рассмотрим многообразие комплексной размерности три, группа голономии которого есть в точности $SU(3)$, а не ее подгруппа. В начале этого раздела мы показали, что фермионные нулевые моды, являющиеся $(0, n)$ -формами, должны быть ковариантно постоянными. Это означает, что $h^{0,0} = h^{3,0} = 1$ и $h^{1,0} = h^{2,0} = 0$. Остальные числа Ходжа, которые не определяются условиями (15.5.21) и (15.5.22), — это $h^{1,1}$ и $h^{2,1}$. Поскольку $h^{2,0} = h^{0,2} = 0$, число $h^{1,1}$ равно числу гармонических 2-форм b_2 . Что касается числа $h^{2,1}$, оно тоже имеет качественный смысл, с чем мы встретимся ниже, в результате некоторых дальнейших применений когомологий Дольбо. Эйлерова характеристика многообразия, группа голономии которого есть в точности $SU(3)$, равна $\chi = 2(h^{1,1} - h^{2,1})$.

15.6. Уравнения Янга — Миллса и голоморфные векторные расслоения

Уравнение (15.1.3) при упрощающем предположении $H = d\phi = 0$ дает два условия ненарушенной суперсимметрии. Одно из них, $0 = D_i\eta$, было предметом нашего рассмотрения до настоящего момента. Обратимся теперь ко второму уравнению

$$0 = \Gamma^{ij} F_{ij} \eta, \quad (15.6.1)$$

где F_{ij} — напряженность некоторого калибровочного поля Янга — Миллса, которое является связностью в некотором векторном расслоении X . Теперь мы можем изучить следствия этого уравнения. Уравнение (15.6.1), записанное явно через операторы рождения — уничтожения, принимает вид

$$0 = (F_{\bar{a}\bar{b}} \Gamma^{\bar{a}\bar{b}} + F_{ab} \Gamma^{ab} + 2F_{\bar{a}b} \Gamma^{\bar{a}b}) \eta. \quad (15.6.2)$$

Все три слагаемых в этом уравнении должны равняться нулю по отдельности. Потребовав, чтобы первое слагаемое в уравнении (15.6.2) равнялось нулю, если η — фоковский вакуум, или чтобы второе слагаемое равнялось нулю, если η — совершенно заполненное состояние, мы найдем, что

$$F_{\bar{a}\bar{b}} = F_{ab} = 0. \quad (15.6.3)$$

Анализ последнего слагаемого в уравнении (15.6.2) немного сложнее; $\Gamma^{\bar{a}\bar{b}}$ содержит один оператор рождения и один оператор уничтожения. Если $\Gamma^{\bar{a}\bar{b}}$ действует на совершенно пустое или на совершенно заполненное состояние η , оператор уничтожения должен уничтожить то, что создал оператор рождения, или наоборот, так что $\Gamma^{\bar{a}\bar{b}} \eta = \pm g^{\bar{a}\bar{b}} \eta$. Следовательно, обращение в нуль последнего слагаемого в уравнении (15.6.2) равносильно условию

$$g^{\bar{a}\bar{b}} F_{\bar{a}\bar{b}} = 0. \quad (15.6.4)$$

Мы будем предполагать, что поля вещественны в том смысле, что (1, 0)- и (0, 1)-части калибровочного поля A эрмитово сопряжены друг другу. В таком случае, чтобы удовлетворить условию (15.6.3), достаточно потребовать, чтобы $F_{\bar{a}\bar{b}} = 0$, поскольку условие $F_{ab} = 0$ получается из него комплексным сопряжением. Локально нетрудно найти общее решение уравнения $F_{\bar{a}\bar{b}} = 0$. Это уравнение означает, что $0 = [D_{\bar{a}}, D_{\bar{b}}] = [\partial_{\bar{a}} + iA_{\bar{a}}, \partial_{\bar{b}} + iA_{\bar{b}}]$, а значит,

$$A_{\bar{b}} = i\partial_{\bar{b}} V \cdot V^{-1}, \quad (15.6.5)$$

где V — некоторая матричнозначная функция координат z^a , $\bar{z}^{\bar{b}}$. Поскольку A_a эрмитово сопряжено $A_{\bar{a}}$, это дает

$$A_a = i\partial_a V^* \cdot V^*. \quad (15.6.6)$$

Здесь V^* — матрица, сопряженная V , так что $V^* = V^{-1}$, если и только если V унитарна. Уравнения (15.6.5) и (15.6.6) показывают, что или $A_{\bar{a}}$, или A_a можно обратить в нуль с помощью калибровочного преобразования, но в общем случае не одновременно. Одновременно они могут обратиться в нуль только в том случае, если V унитарна.

Пусть f — заряженное поле, взаимодействующее с калибровочным полем A . Тогда говорят, что f «голоморфно», если

$$D_{\bar{a}} f = 0. \quad (15.6.7)$$

Условие интегрируемости для этого уравнения имеет вид $[D_{\bar{a}}, D_{\bar{b}}] = 0$. Ввиду соотношения (15.6.5) уравнение (15.6.7) локально, эквивалентно равенству $f = Vg$, где g — голоморфная функция в обычном смысле: $\partial_{\bar{a}} g = 0$. Глобально же уравнение (15.6.7) представляет собой важное обобщение элементарного определения аналитической или голоморфной функции. Уравнение (15.6.3) играет фундаментальную роль в комплексной геометрии, так как оно приводит к такому обобщению обычного комплексного анализа.

15.6.1. Голоморфные векторные расслоения

Проанализируем теперь значение уравнения (15.6.3) в глобальном отношении. Во-первых, отметим, что векторное расслоение X , для которого калибровочное поле служит связностью, может быть, вообще говоря, топологически нетривиальным. Поэтому в общем случае мы должны, как в разд. 12.3, покрыть наше многообразие K открытыми множествами $O_{(\alpha)}$, на каждом из которых будет калибровочное поле $A_{(\alpha)}$. В областях перекрытий $O_{(\alpha\beta)} = O_{(\alpha)} \cap O_{(\beta)}$ поле $A_{(\alpha)}$ связано с полем $A_{(\beta)}$ калибровочным преобразованием $U_{(\alpha\beta)}$. В явном виде имеем

$$A_{i(\alpha)} = U_{(\alpha\beta)} A_{i(\beta)} U_{(\alpha\beta)}^{-1} + i\partial_i U_{(\alpha\beta)} \cdot U_{(\alpha\beta)}^{-1} \quad (15.6.8)$$

на $O_{(\alpha\beta)}$. Из соотношения (15.6.8) следует, что $U_{(\alpha\beta)} = U_{(\beta\alpha)}^{-1}$. Функции $U_{(\alpha\beta)}$ называются переходными функциями расслоения X . Самосогласованность соотношения (15.6.8) требует, чтобы в областях тройного перекрытия $O_{(\alpha\beta\gamma)} = O_{(\alpha)} \cap O_{(\beta)} \cap O_{(\gamma)}$ переходные функции удовлетворяли условию согласованности

$$U_{(\alpha\beta)} U_{(\beta\gamma)} U_{(\gamma\alpha)} = 1. \quad (15.6.9)$$

Переходные функции определены, конечно, неоднозначно. Под действием калибровочного преобразования в каждом множестве $O_{(\alpha)}$, осуществляемого с помощью калибровочной функции $U_{(\alpha)}$, переходные функции $U_{(\alpha\beta)}$ превращаются в столь же хорошие переходные функции

$$\tilde{U}_{(\alpha\beta)} = U_{(\alpha)} U_{(\alpha\beta)} U_{(\beta)}^{-1}, \quad (15.6.10)$$

которые точно так же удовлетворяют условию (15.6.9).

В ситуации, когда $F_{\bar{a}\bar{b}} = 0$, поле $A_{(\alpha)}$ на каждом $O_{(\alpha)}$ можно записать, как в формуле (15.6.6), в виде

$$A_{\bar{a}(\alpha)} = i\partial_{\bar{a}} V_{(\alpha)} \cdot V_{(\alpha)}^{-1}, \quad (15.6.11)$$

где теперь в разных открытых множествах $O_{(\alpha)}$ имеем разные $V_{(\alpha)}$. Подставляя выражение (15.6.11) в уравнение (15.6.8), находим, что в каждом множестве $O_{(\alpha\beta)}$ величина

$$U'_{(\alpha\beta)} = V_{(\alpha)}^{-1} U_{(\alpha\beta)} V_{(\beta)} \quad (15.6.12)$$

удовлетворяет уравнению

$$\partial_{\bar{a}} U'_{(\alpha\beta)} \cdot [U'_{(\alpha\beta)}]^{-1} = 0. \quad (15.6.13)$$

Сравнивая (15.6.10) и (15.6.12), мы видим, что (если взять $U_{(\alpha)} = V_{(\alpha)}^{-1}$) функции $U'_{(\alpha\beta)}$ можно рассматривать как новые переходные функции для расслоения X . Уравнение (15.6.13) означает, что эти новые переходные функции голоморфны.

Векторное расслоение, в котором переходные функции можно выбрать голоморфными, называется голоморфным векторным расслоением. Таким образом, мы обнаружили, что решение уравнения (15.6.3) является голоморфным векторным расслоением. Обратное также верно (хотя мы не будем здесь это доказывать). Если переходные функции $U_{(\alpha\beta)}$ для данного векторного расслоения X над комплексным многообразием K можно выбрать голоморфными, то в X найдется калибровочное поле, удовлетворяющее уравнению (15.6.3). Такое калибровочное поле называется голоморфным калибровочным полем или голоморфной связностью.

Топологически два векторных расслоения X и \tilde{X} с переходными функциями $U_{(\alpha\beta)}$ и $\tilde{U}_{(\alpha\beta)}$ считаются эквивалентными, если U и \tilde{U} связаны так же, как в формуле (15.6.12). С голоморфной точки зрения ситуация более сложная. Важность понятия голоморфного векторного расслоения в большой степени определяется тем, что для таких расслоений можно дать обобщение (как в уравнении (15.6.7)) понятия аналитической, или голоморфной, функции. Голоморфные векторные расслоения с переходными функциями U и \tilde{U} приводят к эквивалентным понятиям голо-

морфной функции только в том случае, если $V_{(\alpha)}$ в (15.6.12) можно выбрать голоморфными; только при этом X и \tilde{X} считаются голоморфно эквивалентными.

Голоморфная связность A_i в данном голоморфном векторном расслоении не единственна. Столь же хорошо (в том смысле, что уравнение (15.6.3) также выполнено) новое калибровочное поле A'_i , $(0, 1)$ -часть которого имеет вид

$$A'_a = GA_a G^{-1} + i\partial_a G \cdot G^{-1}. \quad (15.6.14)$$

Не слишком трудно доказать, что любые две голоморфные связности A и A' в одном и том же голоморфном векторном расслоении связаны соотношением (15.6.14). Матрица G определена глобально, поскольку A и A' как связности в одном и том же расслоении должны иметь одинаковые сингулярности типа дираковских струн; $(1, 0)$ -часть для A' задавать не надо, поскольку она связана с $(0, 1)$ -частью комплексным сопряжением.

Если G — унитарная матрица, то A' калибровочно эквивалентно A , но в противном случае это не так. В общем случае для G можно написать полярное разложение $G = UP$, где U унитарна, а P эрмитова. Унитарная часть несущественна, так что можно просто считать, что матрица G эрмитова.

15.6.2. Уравнение Дональдсона — Уленбек — Яу

Теперь мы выясним следующий вопрос. Если дано голоморфное векторное расслоение X , то можно ли в этом расслоении выбрать связность A , которая удовлетворяла бы не только условию (15.6.3), но и (15.6.5)? Это равносильно вопросу, можно ли так выбрать эрмитову матрицу G в формуле (15.6.14), чтобы эрмитова матрица $H = g^{\bar{a}\bar{b}} F_{\bar{a}\bar{b}}$ в уравнении (15.6.4) была равна нулю в каждой точке на K . Можно ожидать, что локально можно так подобрать одну эрмитову матрицу G , чтобы другая эрмитова матрица H обратилась в нуль. Можно ли сделать это глобально — уже другой вопрос. Он требует, как обычно, топологического рассмотрения.

Если $A = U(1)$ -калибровочное поле, то ответить на этот вопрос совсем легко. В таком случае $(1, 1)$ -форма F калибровочно-инвариантна и представляет первый класс Черна линейного расслоения X . Пусть k — кэлерава форма на кэлеровом многообразии K , размерность которого предполагается равной N . Тогда можно проверить, что в этом случае H дается выражением

$$H = \varepsilon^{a_1 a_2 \dots a_N} \bar{\varepsilon}^{b_1 b_2 \dots b_N} F_{a_1 \bar{b}_1} k_{a_2 \bar{b}_2} \dots k_{a_N \bar{b}_N} / (N-1)!^2. \quad (15.6.15)$$

Следовательно, $H = 0$ тогда и только тогда, когда (N, N) -форма $\lambda = F \wedge k \wedge \dots \wedge k$ обращается в нуль. С другой стороны,

$$f = \int_K \lambda. \quad (15.6.16)$$

является топологическим инвариантом в том смысле, что при фиксированных расслоении X и кэлеровом классе k величина f не зависит от выбора калибровочного поля A на X . Решающую роль здесь играет тот факт, что классы Черна являются топологическими инвариантами, или конкретнее, что класс когомологий $(1, 1)$ -формы F зависит только от топологии расслоения X .

Таким образом, необходимым условием для того, чтобы нашлась голоморфная связность A , для которой $H = 0$, является требование, чтобы топологический инвариант

$$f = \int_K \text{tr } F \wedge k \wedge \dots \wedge k = (N - 1)! \int_K H \quad (15.6.17)$$

обращался в нуль. Легко видеть, что это условие является (в абелевом случае) также и достаточным. В абелевом случае эрмитова матрица G в формуле (15.6.14) есть просто $G = e^\sigma$, где σ — некоторая скалярная функция. Кроме того, если F' — калибровочно-инвариантная напряженность поля A' , то в абелевом случае $H' = g^{ab} F'_{ab}$ связана с $H = g^{ab} F_{ab}$ соотношением $H' = H + \Delta\sigma$ (где $\Delta = g^{ab} \partial_a \bar{\partial}_b$ — обычный лапласиан). Чтобы удовлетворить условию $H' = 0$, надо найти такую функцию σ , что $\Delta\sigma = -H$, а это возможно тогда и только тогда, когда $\int_K H = 0$. Действительно, если ψ_k — собственные функции лапласиана Δ , отвечающие собственным значениям λ_k , то решение уравнения $\Delta\sigma = -H$ должно иметь вид

$$\sigma(x) = \sum_k \frac{1}{\lambda_k} \psi_k(x) \langle \psi_k | H \rangle. \quad (15.6.18)$$

Трудность в выражении (15.6.18) связана с тем, что λ_k может обращаться в нуль для некоторых k . Выражение (15.6.18) представляет собой корректное решение уравнения $\Delta\sigma = -H$, если и только если $\langle \psi_k | H \rangle = 0$ всегда, когда $\lambda_k = 0$. В действительности единственное нулевое собственное значение лапласиана Δ соответствует постоянной функции 1, так что необходимое и до-

статочное условие справедливости выражения (15.6.18) имеет вид

$$0 = \langle 1 | H \rangle = \int_K H, \quad (15.6.19)$$

как и утверждалось.

В неабелевом случае, конечно, не так просто определить глобальные условия для существования решения уравнения (15.6.4). Если $A = U(N)$ -калибровочное поле, то первое необходимое условие состоит в том, что $U(1)$ -часть поля A должна удовлетворять только что сформулированным условиям. Дополнительное требование определяется теоремами, которые были недавно доказаны Дональдсоном, а также Уленбек и Яу. Это требование состоит в том, что голоморфное векторное расслоение X должно быть стабильным. Это довольно умеренное топологическое ограничение, смысл которого мы не будем пытаться здесь прояснить. В интересующих нас приложениях необходимое условие будет очевидно из физических соображений.

Поскольку условия, которые мы обсуждали, связаны с ненарушенной суперсимметрией, естественно думать, что из них должны следовать уравнения движения, в данном случае уравнения Янга — Миллса. Действительно, при $F_{ab} = F_{\bar{b}\bar{c}} = 0$ уравнения Янга — Миллса $D^i F_{ij} = 0$ сводятся к

$$g^{ab} D_a F_{bc} = 0. \quad (15.6.20)$$

Из тождества Бианки $D_i F_{jk} + D_j F_{ki} + D_k F_{ij} = 0$ в этой ситуации следует, что $D_a F_{bc} = D_c F_{ba}$, поэтому уравнения Кэлера — Янга — Миллса (15.6.20) равносильны уравнениям $D_c g^{ab} F_{ab} = 0$, которые определено следуют из уравнения $g^{ab} F_{ab} = 0$, которое мы только что обсуждали.

15.6.3. Примеры

Рассмотренные выше понятия могут показаться несколько абстрактными, поэтому мы приведем несколько конкретных примеров, часть которых важна для дальнейших приложений.

1. Голоморфные векторные расслоения над римановыми поверхностями

Как обычно, удобно начать со случая, когда рассматриваемое комплексное многообразие представляет собой риманову поверхность Σ (комплексной размерности один). Пусть A — произвольное калибровочное поле на Σ . Тогда неизбежно

выполняется равенство $F_{\bar{a}\bar{b}} = 0$ (так как на римановой поверхности \bar{a} и \bar{b} имеют только одно возможное значение, а именно \bar{z}), поэтому A определяет голоморфное векторное расслоение над Σ .

Сказанное выше, возможно, создает несколько преувеличенное представление о количестве голоморфных векторных расслоений над римановой поверхностью. Два калибровочных поля A и A' могут определять эквивалентные голоморфные векторные расслоения, если они отличаются на преобразование типа (15.6.14); в самом деле, голоморфные векторные расслоения данного топологического типа над данной римановой поверхностью определяются конечным числом параметров. Этим вопросом мы займемся в следующем разделе.

2. Касательное расслоение и его родственники

Чтобы дать следующий пример голоморфного векторного расслоения, рассмотрим произвольное комплексное многообразие K . Так называемое голоморфное касательное расслоение состоит из касательных векторов, имеющих только $(1, 0)$ -часть, т. е. сечением голоморфного касательного расслоения является векторное поле v^a только с голоморфным индексом.

Чтобы показать, что это — голоморфное векторное расслоение, построим переходные функции в явном виде. Комплексное многообразие K можно покрыть открытыми множествами $O_{(\alpha)}$, на каждом из которых имеются комплексные координаты $z^a_{(\alpha)}$. В областях перекрытия $O_{(\alpha\beta)}$ координаты $z^a_{(\alpha)}$ являются аналитическими функциями координат $z^a_{(\beta)}$, что является одним из способов сформулировать определение комплексного многообразия. Следовательно, такие величины, как $\partial z^a_{(\alpha)} / \partial z^b_{(\beta)}$, являются аналитическими функциями от $z^a_{(\alpha)}$ (или от $z^b_{(\beta)}$). Рассмотрим векторное поле v общего вида на K . В каждом открытом множестве $O_{(\alpha)}$ векторное поле v имеет компоненты $v^a_{(\alpha)}$. В областях перекрытий $O_{(\alpha\beta)}$ при переходе от координат $z^a_{(\beta)}$ к координатам $z^a_{(\alpha)}$ векторное поле v преобразуется по закону, знакомому из ОТО:

$$v^a_{(\alpha)} = \frac{\partial z^a_{(\alpha)}}{\partial z^b_{(\beta)}} v^b_{(\beta)}. \quad (15.6.21)$$

Отсюда видно, что переходные функции касательного расслоения имеют вид

$$V_{(\alpha\beta) b}^a = \partial z^a_{(\alpha)} / \partial z^b_{(\beta)}. \quad (15.6.22)$$

Поскольку эти функции голоморфны, касательное расслоение является голоморфным векторным расслоением.

Вместо рассмотрения векторного поля v^a с голоморфным касательным векторным индексом мы можем, например, рассмотреть дифференциальную форму ω_a типа $(1, 0)$. При координатных преобразованиях она преобразуется как $\omega_{a(\alpha)} = (\partial z^b_{(\beta)} / \partial z^a_{(\alpha)}) \omega_{b(\beta)}$. Теперь переходные функции являются голоморфными, так что дифференциальные формы типа $(1, 0)$ принимают значения в голоморфном векторном расслоении, которое обычно называют голоморфным кокасательным расслоением Ω . В более общем виде можно рассмотреть дифференциальные формы $\omega_{a_1 a_2 \dots a_p}$ типа $(p, 0)$. Закон преобразования при переходе от координат $z^a_{(\beta)}$ к координатам $z^b_{(\alpha)}$ для них имеет вид

$$\omega_{a_1 a_2 \dots a_p(\alpha)} = \left(\frac{\partial z^b_1}{\partial z^a_1} \right) \dots \left(\frac{\partial z^b_p}{\partial z^a_p} \right) \omega_{b_1 b_2 \dots b_p(\beta)}. \quad (15.6.23)$$

Переходные функции опять голоморфны, так что дифференциальные формы типа $(p, 0)$ принимают значения в голоморфном векторном расслоении, которое мы обозначим Ω^p .

На комплексном многообразии K комплексной размерности N дифференциальная форма типа $(N, 0)$ должна быть пропорциональна $dz^1 dz^2 \dots dz^N$. Поэтому дифференциальные формы типа $(N, 0)$ образуют одномерное векторное расслоение, называемое каноническим линейным расслоением L многообразия K . Первый класс Черна этого расслоения называется первым классом Черна многообразия K . Если он равен нулю, L — тривиальное линейное расслоение¹⁾ и если K компактно, то у расслоения L существует единственное нигде не равное нулю и не сингулярное голоморфное сечение ω . (Голоморфное сечение тривиального линейного расслоения эквивалентно голоморфной функции, а на компактном комплексном многообразии K существует только одна ненулевая и не сингулярная голоморфная функция, а именно 1.) Эта нигде не равная нулю голоморфная N -форма ω выше играла одну из ключевых ролей при обсуждении многообразий с $SU(N)$ -голономией.

¹⁾ Это утверждение справедливо без дополнительных оговорок, если K односвязно. Впрочем, такое же замечание надо сделать и по поводу того, что из условия риччи-плоскости кэлера многообразия следует, как говорилось в разд. 15.4, существование ковариантно постоянного спинорного поля.— *Прим. перев.*

3. Новые векторные расслоения из старых

Обобщение сделанных выше замечаний приводит к некоторому общему методу построения новых векторных расслоений из старых. Пусть X — голоморфное векторное расслоение над комплексным многообразием K . Пусть $U_{(\alpha\beta)}$ — переходные функции для X . Если комплексная размерность расслоения X равна n , то $U_{(\alpha\beta)}$ — комплексные $n \times n$ -матрицы, или, другими словами, элементы группы $GL(n, C)$. Пусть R — любое представление группы $GL(n, C)$, а $\bar{U}_{(\alpha\beta)}$ — переходные функции $U_{(\alpha\beta)}$, записанные в представлении R . Тогда $\bar{U}_{(\alpha\beta)}$ являются голоморфными функциями, которые удовлетворяют тождествам, необходимым, чтобы $\bar{U}_{(\alpha\beta)}$ были переходными функциями некоторого нового голоморфного векторного расслоения X_R .

В качестве $\bar{U}_{(\alpha\beta)}$ можно взять, например, обратные транспонированные по отношению к $U_{(\alpha\beta)}$ матрицы. При таком выборе $\bar{U}_{(\alpha\beta)}$ представляют собой переходные функции расслоения \bar{X} , которое называется дуальным или комплексно-сопряженным по отношению к X ¹⁾. Особенно важен также случай, когда R — присоединенное представление группы $GL(n, C)$. В этом случае X_R обычно обозначается как $\text{Epd } X$ и называется расслоением эндоморфизмов расслоения X . Смысл такого названия в том, что если X_p — слой расслоения X над точкой $p \in X$, то слоем расслоения X_R над точкой p является пространство всех эндоморфизмов, или линейных преобразований векторного пространства X_p .

4. Прямая сумма

Другая фундаментальная операция — прямая сумма векторных расслоений. Пусть X и Y — произвольные голоморфные векторные расслоения над K , слоями которых над точкой p являются X_p и Y_p . Тогда мы определяем новое расслоение $X \otimes Y$, называемое прямой суммой X и Y , полагая, что слой расслоения $X \otimes Y$ над p есть $X_p \oplus Y_p$ — прямая сумма векторных пространств X_p и Y_p . Очевидно, что если $U_{(\alpha\beta)}$ и $V_{(\alpha\beta)}$ — переходные функции для X и Y , то $X \otimes Y$ — векторное расслоение, пе-

¹⁾ Комплексно-сопряженным расслоением \bar{X} чаще всего называют расслоение, переходные функции которого комплексно сопряжены переходным функциям расслоения X . Таким образом, если X — голоморфное расслоение, то \bar{X} — антиголоморфное. Просто как векторные расслоения (если забыть о голоморфности) двойственное расслоение \bar{X} и комплексно-сопряженное расслоение \bar{X} изоморфны (это видно, например, когда переходные функции $U_{(\alpha\beta)}$ исходного расслоения X выбраны унитарными), но этот изоморфизм не единственный. — Прим. перев.

реходные функции которого имеют вид

$$W_{(\alpha\beta)} = \begin{pmatrix} U_{(\alpha\beta)} & 0 \\ 0 & V_{(\alpha\beta)} \end{pmatrix}. \quad (15.6.24)$$

Аналогично можно определить тензорное произведение расслоений X и Y , обозначаемое $X \otimes Y$, как расслоение, слой которого над p представляет собой тензорное произведение векторных пространств X_p и Y_p .

5. Линейные расслоения над CP^N

В качестве следующего примера рассмотрим линейные расслоения (или $U(1)$ -расслоения) над комплексным проективным пространством CP^N . Напомним, что CP^N можно описывать в терминах $N+1$ однородной координаты Z^1, Z^2, \dots, Z^{N+1} . Покроем CP^N открытыми множествами $O_{(a)}$, $a = 1, \dots, N+1$, где $O_{(a)}$ — область, в которой $Z^a \neq 0$.

Одномерные комплексные расслоения, т. е. линейные расслоения над CP^N , определим теперь явно, указав переходные функции $V_{(ab)}$ в областях перекрытия $O_{(ab)} = O_{(a)} \cap O_{(b)}$. Возьмем произвольное целое число n и определим

$$V_{(ab)} = (Z^b/Z^a)^n. \quad (15.6.25)$$

Здесь, очевидно, $V_{(ab)}$ — голоморфные функции, и в областях тройного перекрытия $O_{(abc)} = O_{(a)} \cap O_{(b)} \cap O_{(c)}$ они удовлетворяют условию $V_{(ab)} \cdot V_{(bc)} \cdot V_{(ca)} = 1$. Следовательно, они являются переходными функциями некоторого линейного расслоения $L(n)$ над CP^N . Это все линейные расслоения над CP^N , хотя мы не будем пытаться здесь это доказать.

Опишем теперь явно, что такое сечение расслоения $L(n)$, или, другими словами, функция, принимающая значения в этом линейном расслоении. Конкретно такую функцию можно описать, задав на каждом $O_{(a)}$, $a = 1, \dots, N+1$, функцию $f_{(a)}(Z^b, \bar{Z}^{\bar{b}})$, обладающую двумя основными свойствами. Поскольку Z^b — однородные координаты, мы требуем выполнения условия

$$f_{(a)}(\lambda Z^b, \bar{\lambda} \bar{Z}^{\bar{b}}) = f_{(a)}(Z^b, \bar{Z}^{\bar{b}}). \quad (15.6.26)$$

Кроме того, в областях перекрытия функции $f_{(a)}$ должны удовлетворять условию $f_{(a)} = V_{(ab)} f_{(b)}$. В силу явного вида переходных функций $V_{(ab)}$ последнее равенство равносильно утверждению $(Z^a)^n f_{(a)} = (Z^b)^n f_{(b)}$, так что функция $f = (Z^a)^n f_{(a)}$ не зависит от a . С другой стороны, f не обладает обычным свойством

однородности (15.6.26), а удовлетворяет соотношению

$$f(\lambda Z^b, \bar{\lambda} \bar{Z}^{\bar{c}}) = \lambda^n f(Z^b, \bar{Z}^{\bar{c}}). \quad (15.6.27)$$

Таким образом, чтобы описать некоторое сечение расслоения $L(n)$, мы можем обойтись без открытых покрытий и переходных функций и использовать одну функцию f , удовлетворяющую не обычному условию однородности (15.6.26), а обобщенному условию (15.6.27).

6. Векторные расслоения над гиперповерхностями

В ходе феноменологических рассмотрений в гл. 16 мы обнаружим, что векторные расслоения над многообразиями с $SU(3)$ -голономией могут играть важную роль в построении более или менее реалистических моделей. Поэтому мы хотим построить здесь некоторые примеры таких расслоений. Мы ограничимся описанием некоторых примеров векторных расслоений над многообразием, представляющим собой один из простейших примеров многообразий с $SU(3)$ -голономией, а именно над гиперповерхностью Q в CP^4 , которая определяется нулями полинома P пятой степени.

Начнем с явного описания касательных расслоений для CP^4 и для Q . Касательное векторное поле v^a можно рассматривать как генератор инфинитезимального преобразования координат $\delta Z^a = v^a$. Здесь в общем случае z^a могут быть любыми комплексными координатами на любом комплексном многообразии K . В случае многообразия CP^4 самое простое описание связано с выбором в качестве z^a стандартных однородных координат Z^1, Z^2, \dots, Z^5 , которые определены с точностью до общего множителя: $Z^a \approx \lambda Z^a$. Если в случае многообразия CP^4 мы пишем стандартную формулу $\delta Z^a = V^a$, $a = 1, \dots, 5$, то $V^a(Z^b, \bar{Z}^{\bar{c}})$, должны быть однородными функциями степени один (т. е. $V^a(\lambda Z^b, \bar{\lambda} \bar{Z}^{\bar{c}}) = \lambda V^a(Z^b, \bar{Z}^{\bar{c}})$). Это необходимо, поскольку формула $\delta Z^a = V^a$ имеет смысл только в том случае, если Z^a и V^a имеют одинаковую однородность. Кроме того, одна из пяти функций V^a лишняя, так как размерность CP^4 равна всего лишь четырем. Эту неопределенность можно исключить, заметив, что V^a и $V^a + \lambda Z^a$ должны считаться эквивалентными в CP^4 , поскольку преобразование $\delta Z^a = \lambda Z^a$ тривиально в CP^4 .

Если надо рассмотреть касательное расслоение не для CP^4 , а для гиперповерхности Q в CP^4 , то мы должны наложить условие, что векторное поле V^a касательно к этой гиперповерхности. Последнее означает, что определяющее гиперповерхность уравнение $P = 0$ должно быть инвариантно относительно преобразо-

вания $\delta Z^a = V^a$. Изменение P при таком координатном преобразовании равно $\delta P = (\partial P / \partial Z^a) V^a$ и должно обращаться в нуль, чтобы поле V^a было касательным к гиперповерхности. Суммируя, получаем, что касательное векторное поле к гиперповерхности Q есть набор из пяти функций $V^a(Z^b, \bar{Z}^{\bar{c}})$, которые однородны степени один и подчиняются отношению эквивалентности

$$V^a \approx V^a + \lambda Z^a \quad (15.6.28)$$

и условию

$$\frac{\partial P}{\partial Z^a} V^a = 0. \quad (15.6.29)$$

Последнее условие совместно с отношением эквивалентности, так как для любого однородного полинома P пятой степени имеем $Z^a (\partial P / \partial Z^a) = 5P$, и эта величина обращается в нуль на гиперповерхности Q .

Уравнения (15.6.28) и (15.6.29) описывают одно конкретное голоморфное векторное расслоение над Q , а именно касательное расслоение T . Теперь мы опишем некоторые более общие комплексные векторные расслоения над Q , которые имеют такой же топологический тип, но другую комплексную структуру. Чтобы это сделать, рассмотрим возмущение уравнений, входящих в определение T . Полезного способа изменить уравнение (15.6.28) не существует, но это не относится к уравнению (15.6.29). В уравнении (15.6.29) $\partial P / \partial Z^a$ представляет собой при каждом a полином четвертой степени от Z^b . Пусть P_a , $a = 1, \dots, 5$, — любые пять полиномов четвертой степени от Z^b , удовлетворяющие (на Q) условию

$$P_a Z^a = 0. \quad (15.6.30)$$

Тогда уравнение (15.6.29) можно заменить уравнением

$$P_a V^a = 0. \quad (15.6.31)$$

Это уравнение по-прежнему совместно с (15.6.28) в силу условия (15.6.30). При любом выборе пяти полиномов P_a (подчиняющихся условию (15.6.30)), уравнения (15.6.28) и (15.6.31) вместе определяют голоморфное векторное расслоение \tilde{T} над Q . Оно эквивалентно расслоению T топологически, но имеет отличающуюся комплексную структуру. Получаем следующий общий вид полиномов P_a , совместный с условием (15.6.30):

$$P_a = \partial P / \partial Z^a + p_{abcde} Z^b Z^c Z^d Z^e, \quad (15.6.32)$$

где p_{abcde} симметрично по четырем последним индексам, но обращается в нуль, если его симметризовать по всем пяти

индексам. Небольшие вычисления показывают, что произвол в выборе p_{abcde} имеет 224 параметра, так что построенная голоморфная деформация расслоения T зависит от 224 параметров.

Расслоение \bar{T} , так же как T , представляет собой трехмерное комплексное векторное расслоение (или $SU(3)$ -расслоение), так как в каждой точке на Q вектор V^a в силу уравнений (15.6.28) и (15.6.31) имеет три независимые комплексные компоненты. Когда в следующей главе мы займемся поисками моделей с нарушенной суперсимметрией в четырех измерениях и калибровочной группой $SO(10)$, нас будут интересовать четырехмерные расслоения над Q . В рассматриваемом случае некоторые четырехмерные расслоения над Q можно получить, отбросив либо условие (15.6.28), либо (15.6.31). Оказывается, что гораздо интереснее отбросить условие (15.6.28), так что $SU(4)$ -расслоение X над Q мы определяем, указав, что сечением расслоения X является набор из пяти функций V^a , однородных степени один и удовлетворяющих условию (15.6.31). Точнее для каждой точки p на Q существуют четыре независимых решения уравнения (15.6.31); они образуют векторное пространство, которое и является слоем расслоения X над точкой p .

При отказе от условия (15.6.28) не остается причин требовать выполнения условия (15.6.30). Поэтому мы больше не требуем, чтобы симметризация p_{abcde} по всем пяти индексам давала нуль. На первый взгляд кажется, что в p_{abcde} имеется $5 \cdot (5 \cdot 6 \times 7 \cdot 8 / 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4) = 350$ параметров, но число параметров, определяющих комплексную структуру расслоения X , другое. После того как условие (15.6.28) отброшено, индекс a у V^a или P_a уже не имеет внутреннего смысла. Если взять любую 5×5 -матрицу Λ и подставить $\bar{P}_a = \Lambda_{ab} P_b$ в уравнение (15.6.31), то получится расслоение, эквивалентное тому, которое получилось бы с использованием P_a . Поскольку Λ имеет $5 \times 5 = 25$ компонент, число независимых параметров, участвующих в определении X , равно $350 - 25 = 325$.

Топологически X построено так же, как $T \oplus L$ (прямая сумма касательного расслоения T и тривиального линейного расслоения L). Чтобы в этом убедиться, заметим, что топологический тип расслоения X не может зависеть от произвольных непрерывных параметров p_{abcde} . Таким образом, топологический тип расслоения X можно определить, рассматривая случай $p_{abcde} = 0$. В этом случае мы замечаем, что X содержит тривиальное линейное расслоение L (это та степень свободы, которую мы могли бы удалить с помощью отношения эквивалентности (15.6.28)), а ортогональное дополнение к L явно совпадает с T . В то время как топологически X эквивалентно расслоению $T \oplus L$, голоморфно это не так. Напротив, X представляет

собой «голоморфную деформацию» расслоения $T \oplus L$, т. е. расслоение, которое можно получить из $T \oplus L$ с помощью непрерывного изменения комплексной структуры.

15.7. Когомологии Дольбо и некоторые приложения

Пусть K — кэлерово многообразие комплексной размерности N . Мы определили оператор $\bar{\partial}$, отображающий $(0, q)$ -формы в $(0, q+1)$ -формы, указав, что если $\psi_{\bar{a}_1 \bar{a}_2 \dots \bar{a}_q}$ есть $(0, q)$ -форма, то $(0, q+1)$ -форма $\bar{\partial}\psi$ имеет вид

$$(\bar{\partial}\psi)_{\bar{a}_1 \bar{a}_2 \dots \bar{a}_{q+1}} = \frac{1}{q+1} \partial_{\bar{a}_1} \psi_{\bar{a}_2 \dots \bar{a}_{q+1}} \pm \text{циклические перестановки.} \quad (15.7.1)$$

Во многих отношениях оператор $\bar{\partial}$ очень похож на обычную внешнюю производную d для вещественных многообразий, но есть и важнейшие отличия. Одним из главных отличий является тот факт, что $\bar{\partial}$ в отличие от d в присутствии полей Янга — Миллса имеет обобщение, которое сохраняет существенное свойство $\bar{\partial}^2 = 0$.

Чтобы описать это обобщение, рассмотрим голоморфное векторное расслоение X , наделенное голоморфной связностью, так что напряженность поля Янга — Миллса удовлетворяет условию $F_{\bar{a}\bar{b}} = 0$. Пусть ψ — некоторая $(0, q)$ -форма со значениями в X . Это означает, что $\psi_{\bar{a}_1 \bar{a}_2 \dots \bar{a}_q}$ антисимметрично по q антиголоморфным индексам $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_q$ и, кроме того, несет еще индекс x , отвечающий расслоению X . Определим калибровочно-ковариантную внешнюю производную \bar{D} , отображающую $(0, q)$ -формы со значениями в X в $(0, q+1)$ -формы со значениями в X , соотношением

$$(\bar{D}\psi)_{\bar{a}_1 \bar{a}_2 \dots \bar{a}_{q+1}} = \frac{1}{q+1} D_{\bar{a}_1} \psi_{\bar{a}_2 \dots \bar{a}_{q+1}} \pm \text{циклические перестановки.} \quad (15.7.2)$$

Таким образом, мы просто заменили в определении внешней производной обычную производную ∂_a ковариантной производной $D_{\bar{a}}$. Так как для голоморфной связности в голоморфном векторном расслоении выполняется условие $[D_{\bar{a}}, D_{\bar{b}}] = 0$, то $D_{\bar{a}}$ не хуже, чем ∂_a , обеспечивает условие $\bar{D}^2 = 0$.

Поскольку $\bar{D}^2 = 0$, можно обычным образом определить группы когомологий. $(0, q)$ -форма ψ со значениями в X считается \bar{D} -замкнутой, если $\bar{D}\psi = 0$, и \bar{D} -точной, если $\psi = \bar{D}\lambda$ для

некоторого λ . Классы эквивалентности $(0, q)$ -форм, которые являются замкнутыми, но не точными, образуют пространство $H^q(X)$ — q -ю группу когомологий Дольбо со значениями в X . Как обычно, $H^q(X)$ можно также охарактеризовать как пространство нулевых мод эрмитова оператора $\bar{D} + \bar{D}^*$ (где \bar{D}^* — оператор, эрмитово сопряженный \bar{D}).

Чтобы понять взаимосвязь с рассмотренным выше определением когомологий Дольбо, заметим, что индекс x формы $\psi_{\bar{a}_1 \bar{a}_2 \dots \bar{a}_q}^x$ может соответствовать произвольному голоморфному векторному расслоению X . В частности, x может отвечать расслоению Ω^p дифференциальных форм типа $(p, 0)$, которое описано в примере 2 разд. 15.6.3. В таком случае $\psi_{\bar{a}_1 \bar{a}_2 \dots \bar{a}_q}^x$ — это то же самое, что дифференциальная форма $\psi_{a_1 a_2 \dots a_p \bar{a}_1 \bar{a}_2 \dots \bar{a}_q}$ с p голоморфными и q антиголоморфными индексами. В этой ситуации калибровочно-ковариантный оператор \bar{D} — то же самое, что $\bar{\partial}$ -оператор, действующий на (p, q) -формах. Поэтому то, что в разд. 15.5.3 обозначалось как $H^{p, q}$, теперь записывается как $H^q(\Omega^p)$.

Рассмотрим пример. Для данного голоморфного расслоения X над комплексным многообразием K группа когомологии $H^0(X)$ допускает особенно простую интерпретацию. Элементом из $H^0(X)$ является скалярное поле ψ^x со значениями в X , удовлетворяющее уравнению $0 = \bar{D}\psi^x$. Точнее оно должно удовлетворять уравнению $0 = D_a \psi^x$ для всех \bar{a} . Это уравнение мы уже обсуждали (см. уравнение (15.6.7)). Если локально с помощью калибровочного преобразования исключить все калибровочные поля, входящие в D_a , то уравнение принимает вид $d_a \psi^x = 0$, а это означает, что локально ψ^x представляют собой аналитические в обычном смысле этого слова функции. На самом деле, если X — тривиальное линейное расслоение L , то элемент из $H^0(X)$ есть всюду голоморфная функция, которая должна быть постоянной, если K компактно. Для более общего X группа когомологий $H^0(X)$ дает обобщение понятия всюду голоморфной функции. Например, пусть K — многообразие CP^N , а X — линейное расслоение $L(n)$, определенное в предыдущем разделе, где мы показали, что сечение расслоения $L(n)$ представляет собой однородную функцию f степени n от $N+1$ однородной координаты Z^1, \dots, Z^{N+1} . Функция f является голоморфным сечением расслоения $L(n)$, если она является голоморфной функцией координат Z^i . Глобально определенная голоморфная функция степени n от Z^i должна быть полиномом n -го порядка от Z^i . (Любая другая однородная голоморфная функция где-ни-

будь имела бы сингулярности.) Для отрицательных n полиномов n -го порядка, разумеется, не существует. Если n неотрицательное, то имеется $(N+n)!/N!n!$ независимых полиномов n -го порядка от $N+1$ переменных, что и дает размерность пространства $H^0(L(n))$.

Теперь мы кратко опишем некоторые приложения обобщенного понятия когомологий Дольбо.

15.7.1. Нулевые моды оператора Дирака

Пусть K — многообразие с группой голономии $SU(N)$. Тогда, как мы узнали в разд. 15.5.1, спинорное поле на K представляет собой набор $(0, q)$ -форм, $q = 1, \dots, N$. Спинорное поле ψ_a^x со значениями в некотором голоморфном векторном расслоении X есть набор $(0, q)$ -форм $\psi_{\bar{a}_1 \dots \bar{a}_q}^x$ со значениями в X . Оператор Дирака $\Gamma^i D_i$ для таких полей представляет собой оператор Дольбо $\bar{D} + \bar{D}^*$, что уже обсуждалось в случае, когда X тривиально. Нулевые моды оператора Дирака являются нулевыми модами оператора Дольбо; другими словами, они являются классами когомологий Дольбо, т. е. элементами группы когомологий $H^q(X)$.

С другой стороны, нулевые моды оператора Дирака приводят к появлению безмассовых фермионов в четырех измерениях. Именно это обуславливает наш интерес к когомологиям Дольбо. В гл. 16 нам будут полезны некоторые общие утверждения о когомологиях Дольбо многообразий с $SU(N)$ -голономией.

Первое общее утверждение состоит в том, что $H^q(X)$ имеет такую же размерность, как $H^{N-q}(\bar{X})$, где \bar{X} — дуальное, или комплексно-сопряженное по отношению к X , расслоение. Это доказывается с помощью комплексного сопряжения. Комплексно-сопряженная $(0, q)$ -форма $\psi_{\bar{a}_1 \bar{a}_2 \dots \bar{a}_q}^x$ со значениями в X дает $(q, 0)$ -форму $\psi_{a_1 a_2 \dots a_q}^{*\bar{x}}$ со значениями в \bar{X} . Сворачивая с ковариантно постоянной $(0, N)$ -формой ω на многообразии с $SU(N)$ -голономией

$$\psi_{a_1 a_2 \dots a_q}^{*\bar{x}} \rightarrow \phi_{\bar{b}_{q+1} \dots \bar{b}_N}^{\bar{x}} = \psi_{a_1 a_2 \dots a_q}^{*\bar{x}} g^{a_1 \bar{b}_1} g^{a_2 \bar{b}_2} \dots g^{a_q \bar{b}_q} \omega_{\bar{b}_1 \bar{b}_2 \dots \bar{b}_N}, \quad (15.7.3)$$

мы можем связать ψ^* с $(0, N-q)$ -формой ϕ со значениями в \bar{X} ; ϕ удовлетворяет уравнению Дирака тогда и только тогда, когда уравнению Дирака удовлетворяет ψ . Это доказывает, что на

многообразии с $SU(N)$ -голономией $H^q(X)$ и $H^{N-q}(\bar{X})$ имеют одинаковую размерность. Последнее утверждение представляет собой частный случай двойственности Пуанкаре на комплексных многообразиях.

С физической точки зрения при компактификации на многообразиях с $SU(3)$ -голономией связь между H^q и H^{3-q} означает, что безмассовые фермионы, происходящие из H^{3-q} и из H^q , всегда CPT -сопряжены. Поэтому достаточно рассмотреть моды, происходящие, скажем, из H^0 и H^1 . Теория группы H^0 особенно проста в интересующем нас больше всего случае, т. е. в случае, когда калибровочное поле можно выбрать так, чтобы выполнялось уравнение (15.6.4), связанное с ненарушенной суперсимметрией. Чтобы в этом убедиться, заметим, что элементы из H^0 аннулируются оператором Дирака $\Gamma^i D_i$, а следовательно, и его квадратом, для которого мы получим формулу (15.5.17). Для удобства повторим здесь эту формулу:

$$(i\Gamma^i D_i)^2 = -D_i D^i + R/4 - \Gamma^{ij} F_{ij}^x T^x / 4. \quad (15.7.4)$$

Слагаемое $R/4$ можно отбросить, поскольку оно обращается в нуль для многообразий с $SU(N)$ -голономией. Кроме того, когда мы имеем дело с H^0 , последнее слагаемое тоже можно отбросить, так как связь между спинорами и $(0, q)$ -формами имеет такой вид, что (если поле Янга — Миллса удовлетворяет условиям (15.6.3) и (15.6.4)) $\Gamma^{ij} F_{ij}$ аннулирует $(0, 0)$ -формы. Поэтому на $(0, 0)$ -формах имеем $(i\Gamma^i D_i)^2 = -D_i D^i$. Таким образом, нулевая мода ψ оператора Дирака должна аннулироваться оператором $-D_i D^i$, а следовательно, она должна быть ковариантно постоянной. Практически это означает, что безмассовыми модами в четырех измерениях, происходящими из H^0 (или из H^3), являются только такие моды, как глюино, которые очевидным образом связаны с суперсимметрией и ненарушенными калибровочными симметриями. Действительная сложность изучения фермионных нулевых мод на многообразии с $SU(3)$ -голономией связана с исследованием группы когомологий H^1 (или, что эквивалентно, H^2).

Для проверки некоторых предыдущих рассуждений напомним, что связь между формами и спинорами на многообразии с $SU(3)$ -голономией такова, что киральность в шестимерном смысле $(0, q)$ -формы равна $(-1)^q$. Ввиду корреляции между шестимерной и четырехмерной киральностями, описанной в гл. 14, $(0, q)$ -форма и в четырехмерном смысле также имеет киральность $(-1)^q$. Таким образом, элементы из H^1 можно рассматривать как левые фермионы в четырех измерениях, а CPT -сопряженные, которые происходят из H^2 (для комплексно-сопряженного расслоения), — как правые.

15.7.2. Деформации комплексных многообразий

В этом и следующем разделах мы обращаемся к обсуждению связи между когомологиями Дольбо и деформациями комплексной структуры.

Пусть K — комплексное многообразие. Тогда на K имеется тензорное поле J^i_k , которое удовлетворяет уравнению

$$J^i_k J^k_m = -\delta^i_m, \quad (15.7.5)$$

а также условию обращения в нуль тензора Нёйенхёйса:

$$0 = N^k_{ij}, \quad (15.7.6)$$

построенного из J . Локально можно найти голоморфные координаты z^a на K . В системе координат z^a , $\bar{z}^{\bar{b}}$ ненулевые компоненты тензора J имеют вид

$$J^a_b = i\delta^a_b, \quad J^{\bar{a}}_{\bar{b}} = -i\delta^{\bar{a}}_{\bar{b}}. \quad (15.7.7)$$

Мы хотим выяснить, можно ли деформировать комплексную структуру многообразия K до «близкой», но не эквивалентной комплексной структуры. (В частном случае римановой поверхности это переформулировка вопроса, которым мы в первый раз задались в разд. 3.3, когда исследовали конформно неэквивалентные метрики на такой поверхности.) Итак, мы спрашиваем, можно ли найти такое возмущение комплексной структуры J

$$J^i_k \rightarrow \tilde{J}^i_k = J^i_k + \tau^i_k, \quad (15.7.8)$$

чтобы по-прежнему выполнялись ключевые уравнения (15.7.5) и (15.7.6). Разумеется, если \tilde{J} получается из J с помощью диффеоморфизма или координатного преобразования на K , уравнения (15.7.5) и (15.7.6) будут выполняться, как они выполнялись для J . Но в этом случае \tilde{J} определяет комплексную структуру, которая эквивалентна (с точностью до диффеоморфизма) комплексной структуре, получающейся из J . Нас интересует описание таких возмущений τ , которые удовлетворяют уравнениям (15.7.5) и (15.7.6), но не могут быть получены применением диффеоморфизма к J . Используя соотношения (15.7.7), не слишком трудно показать, что из уравнения (15.7.5) следует $\tau^a_b = \tau^{\bar{a}}_{\bar{b}} = 0$, но оно никак не ограничивает ни $\tau^a_{\bar{b}}$, ни комплексно-сопряженное $\tau^{\bar{a}}_b$. А что можно сказать об уравнении в (15.7.6)? Используя определение (15.2.4) тензора Нёйенхёйса, читатель может убедиться, что все компоненты тензора N^k_{ij} автоматически обращаются в нуль, кроме

$$N^a_{\bar{b}\bar{c}} = \bar{\partial}_{\bar{b}} \tau^a_{\bar{c}} - \bar{\partial}_{\bar{c}} \tau^a_{\bar{b}} \quad (15.7.9)$$

и комплексно-сопряженных компонент $N^{\bar{a}}_{bc}$, которые, конечно, обращаются в нуль, если обращаются в нуль компоненты (15.7.9). Обращение в нуль компонент $N^a_{\bar{b}\bar{c}}$ допускает простую интерпретацию. Если $\tau^a_{\bar{b}}$ рассматривать как $(0, 1)$ -форму со значениями в голоморфном касательном расслоении T , то условие $N^a_{\bar{b}\bar{c}} = 0$ равносильно условию

$$\bar{\partial}\tau^a = 0. \quad (15.7.10)$$

Это показывает, что деформацию τ комплексной структуры определяет некоторый элемент группы когомологий $H^1(T)$.

Деформации $J \rightarrow J + \tau$ следует, конечно, считать тривиальными, если их можно получить с помощью инфинитезимальной замены координат

$$z^a \rightarrow \bar{z}^a = z^a + \varepsilon v^a(z^b, \bar{z}^{\bar{c}}), \quad (15.7.11)$$

где ε — малый параметр. Закон преобразования для J при таких заменах координат определяется законом преобразования тензоров в ОТО:

$$J^i_j \rightarrow \tilde{J}^i_j = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^{i'}} \frac{\partial x^{i'}}{\partial \bar{x}^j} J^{i'}_{j'}. \quad (15.7.12)$$

Отсюда находим, что закон инфинитезимальных преобразований для τ^a имеет вид

$$\tau^a \rightarrow \tau^a + \varepsilon \bar{\partial} v^a. \quad (15.7.13)$$

Это показывает, что если две разные деформации тензора J , скажем τ и τ' , имеют одинаковый класс когомологий в $H^1(T)$, то они определяют одну и ту же (с точностью до диффеоморфизма) деформацию комплексной структуры. Объединяя все эти результаты, мы видим, что все возможные деформации комплексной структуры комплексного многообразия находятся во взаимно однозначном соответствии с элементами $H^1(T)$ — группы когомологий Дольбо многообразия K со значениями в голоморфном касательном расслоении T .

Например, пусть K — риманова поверхность Σ . Элемент из $H^1(T)$ — гармоническая форма $\psi^z_{\bar{z}}$ с одним голоморфным векторным индексом, который может иметь только одно значение, а именно z , и одним антиголоморфным индексом $(0, 1)$ -формы, который должен быть \bar{z} . Сворачивая с ковариантно постоянным метрическим тензором, мы можем с ψ связать поле

$$b_{z\bar{z}} = g_{z\bar{z}} \psi^z_{\bar{z}}, \quad (15.7.14)$$

которое преобразуется подобно антидúхам, возникающим в ковариантном квантовании теории струн. Элемент из $H^1(T)$ экви-

валентен нулевой моде оператора Дирака, действующего на $\psi^z_{\bar{z}}$ или на $b_{z\bar{z}}$. Таким образом, мы находим, что инфинитезимальные деформации комплексной структуры на Σ находятся во взаимно однозначном соответствии с нулевыми модами антидúхового поля b . Приятно, что этим способом мы снова пришли к результату, полученному впервые в разд. 3.3.

Рассмотрим другое важное приращение. Пусть K — многообразие с группой голономии $SU(3)$. В этом случае с использованием голоморфной 3-формы ω находим, что элемент $\psi^a_{\bar{b}}$ из $H^1(T)$ эквивалентен $(2, 1)$ -форме

$$\chi_{a_1 a_2 \bar{b}} = \omega_{a_1 a_2 a_3} \psi^{a_3}_{\bar{b}}. \quad (15.7.15)$$

Поскольку ω ковариантно постоянна, χ — гармоническая форма тогда и только тогда, когда гармонической является ψ . Таким образом, на многообразии с $SU(3)$ -голономией $H^1(T)$ совпадает с $H^{2,1}$. В частности, это означает, что число Ходжа $h^{2,1}$, определенное как размерность группы когомологий $H^{2,1}$, равно числу комплексных параметров, участвующих в определении комплексной структуры на K .

Например, пусть K — квинтика в CP^4 . В примере 4 из разд. 15.2.3 мы видели, что комплексная структура на K определяется 101 независимым комплексным параметром полинома пятой степени. Следовательно, K имеет $h^{2,1} = 101$. Из разд. 15.5.54 нам известно, что $h^{p,q} = h^{q,p} = h^{3-p, 3-q}$ и $h^{0,0} = h^{3,0} = 1$, $h^{1,0} = h^{2,0} = 0$. После этого остается только найти $h^{1,1}$ — число гармонических $(1, 1)$ -форм. На любом кэлеровом многообразии всегда имеется по крайней мере одна такая форма — кэлерова форма. На гиперповерхности в CP^N всегда имеется ровно одна гармоническая $(1, 1)$ -форма¹⁾, поэтому для такого пространства $h^{1,1} = 1$. Следовательно, для такого пространства можно вычислить эйлерову характеристику. Она равна

$$\chi = \sum_{p,q} (-1)^{p+q} h^{p,q} = -200. \quad (15.7.16)$$

Конечно, в нашем выводе этого равенства имеется пробел, так как мы не доказали, что $h^{1,1} = 1$. В последнем разделе этой главы мы дадим независимое доказательство утверждения, что для квинтики в CP^4 $\chi = -200$ (и, следовательно, $h^{1,1} = 1$).

15.7.3. Деформации голоморфных векторных расслоений

В предыдущем разделе мы показали, что деформации комплексной структуры комплексного многообразия K связаны с

¹⁾ Кроме одного исключения для случая $N = 3$.

$H^1(T)$, где T — голоморфное касательное расслоение на K . Здесь мы рассмотрим голоморфное векторное расслоение X над K и дадим аналогичное описание деформаций комплексной структуры расслоения X в терминах когомологий Дольбо.

Расслоение X можно описать, указав калибровочное поле A_i , для которого $F_{\bar{a}\bar{b}} = 0$. В последнем уравнении существенна только $(0, 1)$ -часть калибровочного поля. Если мы хотим рассмотреть возмущение расслоения, достаточно рассмотреть возмущение $(0, 1)$ -части поля A . Запишем $\tilde{A}_{\bar{a}} = A_{\bar{a}} + \delta A_{\bar{a}}$, где $\delta A_{\bar{a}}$ — инфинитезимальное отклонение, и выясним, выполняется ли уравнение $F_{\bar{a}\bar{b}} = 0$ в низшем порядке по δA . Необходимое для этого уравнение имеет вид $D_{\bar{a}}\delta A_{\bar{b}} - D_{\bar{b}}\delta A_{\bar{a}} = 0$, или в более короткой записи $\bar{D}\delta A = 0$. Таким образом, форма δA должна быть \bar{D} -замкнутой и, следовательно, определяет некоторый класс когомологий Дольбо.

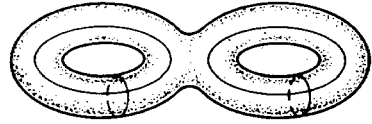


Рис. 15.3. Четыре генератора фундаментальной группы римановой поверхности рода два.

Поскольку δA представляет собой $(0, 1)$ -форму в присоединенном представлении калибровочной группы, соответствующая группа когомологий есть $H^1(\text{End } X)$. (Напомним, что $\text{End } X$ мы определили как расслоение, которое получается, если переходные функции записать в присоединенном представлении.)

Пусть, например, X — тривиальное линейное расслоение над римановой поверхностью Σ рода g . Тогда $\text{End } X$ тривиально, подобно X , так что $H^1(\text{End } X)$ то же, что $H^0,1$. Для римановой поверхности рода g эта группа когомологий, как мы знаем, имеет размерность g , так что голоморфные деформации комплексной структуры расслоения X зависят от g комплексных параметров. Для них можно дать явное описание. Как показано на рис. 15.3 в случае рода два, фундаментальная группа поверхности рода g имеет $2g$ генераторов. Можно потребовать, чтобы комплексное поле изменялось на произвольным образом заданную фазу при обходе вокруг любой независимой нестягиваемой петли на Σ . Поскольку имеется $2g$ независимых петель, возможные граничные условия зависят от $2g$ вещественных или от g комплексных параметров. Так как граничные условия можно изменять непрерывно, они не влияют на топологию расслоения X , но влияют на его голоморфную структуру (как мы доказали с помощью вычисления $H^1(\text{End } X)$).

Рассмотрим другой пример. Пусть T — голоморфное касательное расслоение для некоторой квинтики в CP^4 . В примере 6 из

разд. 15.6.3 мы явным образом построили семейство голоморфных деформаций расслоения T , зависящее от 224 комплексных параметров. Хотя здесь мы этого не доказываем, но это все возможные непрерывные деформации расслоения T , так что $H^1(\text{Epd } T)$ имеет размерность 224. Там же аналогичным образом построили 325-мерное семейство деформаций расслоения $X \sim T \oplus L$, и это отвечает утверждению, что $H^1(\text{Epd } X)$ имеет размерность 325.

15.8. Разветвленные накрытия комплексных многообразий

В этом заключительном разделе мы кратко и несколько эвристически опишем понятие разветвленного накрытия комплексного многообразия и поведение эйлеровой характеристики при таком накрытии. Наша цель состоит в том, чтобы обогатить наше понимание римановых поверхностей и комплексных многообразий и развить новый метод определения эйлеровой характеристики многообразия с $SU(3)$ -голомомией.

Пусть k — стандартная кэлерова форма на CP^N . Какие гармонические формы существуют на CP^N ? Помимо 0-формы 1 и 2-формы k мы знаем, что существуют гармонические формы, отвечающие внешним произведениям $k \wedge k$, $k \wedge k \wedge k$ и т. д. вплоть до N -кратного внешнего произведения $(k \wedge k \wedge \dots \wedge k)_N$. Хотя мы не пытаемся здесь это доказывать, но это все гармонические формы на CP^N ; в частности, эйлерова характеристика CP^N равна $N + 1$. Этот факт ниже нам понадобится.

Пусть X, Y и Z — однородные координаты для CP^2 . Рассмотрим риманову поверхность Σ , определенную однородным уравнением

$$Z^n = X^n + Y^n \quad (15.8.1)$$

в CP^2 . Мы хотим определить род этой поверхности и сделаем это посредством вычисления эйлеровой характеристики.

Сами по себе X и Y являются однородными координатами на сфере Римана $R \approx CP^1$. Если $X^n + Y^n$ не равно нулю, то уравнение (15.8.1) позволяет Z принимать n возможных значений при заданных X и Y . Таким образом, если бы уравнение

$$X^n + Y^n = 0 \quad (15.8.2)$$

не имело корней, поверхность Σ состояла бы просто из n экземпляров сферы R . Так как эйлерова характеристика сферы R равна 2, эйлерова характеристика n экземпляров сферы R будет равна $2n$.

В действительности уравнение (15.8.2) имеет n корней на сфере Римана. При $X^n + Y^n \neq 0$ уравнение (15.8.1) дает

n значений для Z , но при $X^n + Y^n = 0$ из уравнения (15.8.1) следует, что $Z = 0$. Поэтому эйлерова характеристика римановой поверхности Σ не равна просто умноженной на n эйлеровой характеристике сферы R . Какова же необходимая поправка? Пусть P — множество из n точек на R , в которых выполняется уравнение (15.8.2). Пусть $R - P$ — сфера R , из которой эти точки удалены, и пусть $\Sigma - P$ — поверхность Σ , из которой удалены соответствующие точки. Тогда $\Sigma - P$ действительно представляет собой n экземпляров многообразия $R - P$, так что эйлерова характеристика для $\Sigma - P$ есть умноженная на n эйлерова характеристика для $R - P$:

$$\chi(\Sigma - P) = n \cdot \chi(R - P). \quad (15.8.3)$$

Эйлерова характеристика сферы R есть 2. Эйлерова характеристика точки есть 1, так что для P эйлерова характеристика равна n . При склеивании пространств или при удалении из них некоторых частей эйлерова характеристика ведет себя аддитивно¹⁾, поэтому

$$\chi(R - P) = \chi(R) - \chi(P) = 2 - n. \quad (15.8.4)$$

Таким образом, $\chi(\Sigma - P) = n(2 - n)$. Вклеивая n точек, чтобы восстановить Σ из $\Sigma - P$, получаем

$$\chi(\Sigma) = \chi(\Sigma - P) + \chi(P) = n(3 - n), \quad (15.8.5)$$

что определяет род римановой поверхности Σ . В частности, при $n = 3$ эйлерова характеристика равна нулю, а Σ есть поверхность рода один, т. е. обычный тор. Это согласуется с тем фактом, что в разд. 15.4.3 мы нашли нигде не равную нулю голоморфную 1-форму на Σ в точности для $n = 3$.

Рассмотренная конструкция обычно описывается словами, что Σ есть n -кратное накрытие римановой сферы R , ветвящееся над n корнями уравнения (15.8.2); Σ получается, если взять n экземпляров сферы R всюду, кроме точек ветвления, где надо взять только один экземпляр сферы R .

Попробуем применить это в случае гиперповерхности H в CP^3 :

$$W^n = X^n + Y^n + Z^n. \quad (15.8.6)$$

Сами по себе X , Y и Z представляют собой однородные координаты для многообразия M , изоморфного CP^2 , с эйлеровой ха-

¹⁾ В конце гл. 12 такая аддитивность в частном случае доказана и использовалась для определения эйлеровой характеристики римановой поверхности. В общем случае аддитивность можно доказать аналогичным образом с помощью того факта, что эйлерова характеристика есть интеграл от полинома от тензора Римана.

рактеристикой равной 3. Если бы уравнение

$$X^n + Y^n + Z^n = 0 \quad (15.8.7)$$

не имело корней, то уравнение (15.8.6) просто определяло бы n возможных значений W при данных (X, Y, Z) . В действительности уравнение (15.8.7) выполняется на римановой поверхности Σ' , которая изоморфна поверхности Σ , рассмотренной выше. (Уравнение (15.8.7) можно связать с уравнением для Σ , умножив Z на корень n -й степени из -1 . Гиперповерхность H можно описать как n -кратное накрытие многообразия $M \approx CP^2$, ветвящееся над Σ' . Эйлерова характеристика для M есть 3, так что эйлерова характеристика для $M - \Sigma'$ равна $3 - n(3 - n)$, а для $H - \Sigma'$ она равна $3n - n^2(3 - n)$. Наконец, эйлерова характеристика для H равна

$$\chi(H) = \chi(H - \Sigma') + \chi(\Sigma') = n(n^2 - 4n + 6). \quad (15.8.8)$$

Например, $K3$ -поверхность ($n = 4$) имеет $\chi = 24$.

Продвинемся еще на шаг дальше и рассмотрим гиперповерхность Q в CP^4 , определенную уравнением

$$U^n = W^n + X^n + Y^n + Z^n. \quad (15.8.9)$$

Сами по себе W , X , Y и Z являются однородными координатами для многообразия $N \approx CP^3$ с эйлеровой характеристикой 4. Гиперповерхность Q является n -кратным накрытием многообразия N , разветвленным над множеством H' и отвечающим уравнению

$$W^n + X^n + Y^n + Z^n = 0. \quad (15.8.10)$$

Для H' эйлерова характеристика дается формулой (15.8.8). С помощью таких же рассуждений, как в предыдущем примере, получаем эйлерову характеристику для Q

$$\begin{aligned} \chi(Q) &= \chi(Q - H') + \chi(H') = n\chi(N - H') + \chi(H') = \\ &= n\chi(N) + (1 - n)\chi(H') = -n(n^3 - 5n^2 + 10n - 10). \end{aligned} \quad (15.8.11)$$

Полагая $n = 5$, находим, что квинтика в CP^4 , которая допускает метрику с голономией $SU(3)$, имеет $\chi = -200$. Последнее находится в согласии с рассмотрением в разд. 15.7.2.

16. Модели с низкоэнергетической суперсимметрией

В гл. 15 развиты некоторые основные методы алгебраической геометрии, в частности формализм, который нужен для понимания различных вариантов компактификации, приводящей к низкоэнергетической суперсимметрии в четырех измерениях. В данной главе мы применяем эти методы в целях довольно подробного исследования свойств получающихся моделей.

Необходимо отметить, что при рассмотрении орбифолдов в гл. 9 мы уже обсуждали некоторые частные примеры моделей с низкоэнергетической суперсимметрией. Точная связь орбифолдов с моделями, которые изучаются в этой главе, исследуется в разд. 16.10.

16.1. Один простой анзац

В предыдущей главе мы сформулировали условия, при которых ненарушенная суперсимметрия сохраняется после компактификации из десяти измерений на $M^4 \times K$. Десятимерный спинор η_α генерирует ненарушенную суперсимметрию в четырех измерениях, если преобразование суперсимметрии с параметром η_α оставляет инвариантными элементарные фермионные поля. Ограничение уравнений из разд. 15.1.2 на внутреннее пространство K и отбрасывание фермионных полей дает

$$\begin{aligned} \text{а) } 0 &= \delta\psi_i = \frac{1}{\kappa} D_i \eta + \frac{\kappa}{32g^2\phi} (\Gamma_i{}^{jkl} - 9\delta_i^j \Gamma^{kl}) \eta H_{jkl}, \\ \text{б) } 0 &= \delta\lambda = -\frac{1}{\sqrt{2}\phi} (\Gamma \cdot \partial\phi) \eta + \frac{\kappa}{8\sqrt{2}g^2\phi} \Gamma^{ijk} \eta H_{ijk}, \\ \text{в) } 0 &= \delta\chi = -\frac{1}{4\sqrt{\phi}} \Gamma^{ij} F_{ij} \eta. \end{aligned} \quad (16.1.1)$$

Здесь ψ , λ и χ — гравитино, дилатино и глюино соответственно; ϕ — дилатон, а H — калибровочно-инвариантная напряженность

поля для 2-формы B . Эти уравнения надо дополнить тождеством Бианки

$$dH = \text{tr } R \wedge R - \text{tr } F \wedge F. \quad (16.1.2)$$

Рассматриваемые уравнения заметно упрощаются, если предположить, что $d\phi = H = 0$. Как мы увидим, при этом упрощающем предположении остается достаточно много интересного физического содержания, и мы подробно проанализируем эту ситуацию прежде, чем пытаться сформулировать обобщения. Действительно, чтобы рассмотреть обобщения, требуется более мощный подход, который будет развит ниже.

При $d\phi = H = 0$ первое из уравнений (16.1.1) говорит нам, что K — кэлерово многообразие с нулевым первым классом Черна, наделенное метрикой с $SU(3)$ -голономией, существование которой предсказывается доказательством Яу гипотезы Калаби. Второе условие в (16.1.1) — пустое, когда $d\phi = H = 0$. Последнее, третье, условие говорит нам, что калибровочное поле A является голоморфной связностью в голоморфном векторном расслоении X и удовлетворяет уравнению Дональдсона — Уленбек — Яу.

Как только топология многообразия K фиксирована, метрика с $SU(3)$ -голономией на K определяется конечным числом параметров. Это параметры, определяющие топологический класс кэлеровой формы и комплексную структуру на K . Подобным образом, если сделан выбор топологического класса расслоения X , то решение уравнения (16.1.1, в) зависит только от конечного числа параметров, а именно параметров, входящих в определение комплексной структуры расслоения X . Поэтому, если сделаны все дискретные топологические выборы, то в нашем распоряжении остается только конечное число непрерывно изменяющихся параметров, чтобы попытаться удовлетворить уравнению (16.1.2). Поскольку для упрощения условий (16.1.1) мы предположили, что $H = 0$, из уравнения (16.1.2) следует

$$0 = \text{tr } F \wedge F - \text{tr } R \wedge R. \quad (16.1.3)$$

На первый взгляд уравнение (16.1.3) может показаться не многообещающим. Это уравнение представляет собой в действительности бесконечное множество условий, так как 4-форма $\text{tr } F \wedge F - \text{tr } R \wedge R$ должна обращаться в нуль в каждой точке на K . Как можно подобрать конечный набор параметров, остающихся после наложения условий (16.1.1), чтобы удовлетворить уравнению (16.1.3)? Ожидать выполнения переопределенного набора условий, подобного (16.1.3), можно только в том

случае, если они выполняются очевидным образом, а для этого требуется, чтобы между F и R существовала некоторая связь.

Как можно этого достичь? Мы используем частный случай анзаца, введенного в разд. 14.6, чтобы получить разумную модель фермионных квантовых чисел. Как там отмечалось, спиновую связность ω_i риманова многообразия K можно рассматривать как калибровочное поле. Калибровочной группой является группа голономии H многообразия K , которая в рассматриваемом случае есть группа $SU(3)$. Если бы десятимерная калибровочная группа была $SU(3)$, мы могли бы просто считать, что калибровочное поле A_i десятимерной теории равно спиновой связности ω_i . Напряженность поля Янга — Миллса F равнялась бы тогда тензору кривизны Римана R , и выполнялось бы условие (16.1.3) (с точностью до нормировочного множителя, который мы вскоре рассмотрим). На практике же десятимерная калибровочная группа представляет собой не $SU(3)$, а гораздо большую группу. На самом деле самой интересной возможностью является группа $E_8 \times E_8$. Чтобы провести указанное выше построение, надо выбрать $SU(3)$ -подгруппу H' группы $E_8 \times E_8$ и положить H' -калибровочные поля равными спиновой связности. Выбор $SU(3)$ -подгруппы в $E_8 \times E_8$ можно интерпретировать как вложение группы голономии H в группу $E_8 \times E_8$, так что всю эту конструкцию мы будем описывать как «вложение спиновой связности в калибровочную группу».

По причине, которая ниже станет ясной, мы хотим выбрать минимальное вложение. Поэтому мы выбираем максимальную подгруппу $SU(3) \times E_6$, например, в первой E_8 и отождествляем группу голономии H с первым сомножителем¹⁾. Когда $SU(3)$ -калибровочные поля совпадают со спиновой связностью, уравнение (16.1.3) выполняется с точностью до возможного нормировочного множителя, возникающего вследствие того, что следы $\text{tr } F \wedge F$ и $\text{tr } R \wedge R$ вычисляются в различных представлениях. Действительно, $\text{tr } R \wedge R$ вычисляется в векторном представлении группы $SO(1, 9)$, которое относительно $SU(3)$ преобразуется как $3 \oplus \bar{3} \oplus$ -синглеты. Для $\text{tr } F \wedge F$ ситуация сложнее. Мы должны вспомнить, что в гл. 13 мы определяли символ tr в случае группы E_8 как обозначение одной тридцатой следа в присоединенном представлении группы E_8 . Напомним также разложение присоединенного представления группы E_8 относительно $SU(3) \times E_6$

$$248 = (3, 27) \oplus (\bar{3}, \bar{27}) \oplus (8, 1) \oplus (1, 78). \quad (16.1.4)$$

¹⁾ Требуемые в настоящей главе данные о группе E_8 описываются в приложении 6.A.

Здесь (8, 1) и (1, 78) — присоединенные представления групп $SU(3)$ и E_6 соответственно; (3, 27) — тензорное произведение фундаментального представления 3 для $SU(3)$ и фундаментального представления 27 для E_6 , а $(\bar{3}, \bar{27})$ — комплексно-сопряженное ему произведение. Можно непосредственно показать, что след квадрата $SU(3)$ -матрицы в присоединенном представлении 8 в три раза больше, чем след в представлении $3 \oplus \bar{3}$. Добавляя к этому 27 экземпляров представления $3 \oplus \bar{3}$, явно видных в (16.1.4), обнаруживаем, что след квадрата $SU(3)$ -генератора в присоединенном представлении группы E_8 в $3 + 27 = 30$ раз больше, чем в представлении $3 \oplus \bar{3}$ для $SU(3)$. Этот множитель 30 компенсирует тот факт, что $\text{tr } F \wedge F$ определено как одна тридцатая следа от $F \wedge F$ в присоединенном представлении для E_8 . Следовательно, в уравнении (16.1.3) мы можем интерпретировать $\text{tr } F \wedge F$ как след в представлении $3 \oplus \bar{3}$ для $SU(3)$. Поскольку $\text{tr } R \wedge R$ представляет собой след в том же представлении, условие (16.1.3) выполняется. Оно не выполнялось бы, если бы мы выбрали неминимальное вложение $SU(3)$ в $E_8 \times E_8$, поэтому мы вынуждены брать именно минимальное вложение.

Вложение спиновой связности в калибровочную группу рассматривалось в гл. 14 просто для того, чтобы получить реалистическую модель фермионных квантовых чисел. В гл. 14 мы рассматривали общее риманово многообразие с голономией $SO(6)$. Вложение группы голономии в группу E_8 с помощью последовательности $SO(6) \times SO(10) \subset SO(16) \subset E_8$ нарушало группу E_8 до $SO(10)$. Это приводило к существованию киральных фермионов в представлениях 16 и $\bar{16}$ для $SO(10)$, причем чистое число поколений было равно половине эйлеровой характеристики многообразия K . Здесь мы рассматриваем частный случай, когда группа голономии H есть не $SO(6)$, а подгруппа $SU(3)$. Ненарушенная подгруппа группы E_8 соответственно больше: E_6 , а не $SO(10)$. Для группы E_6 число поколений определяется просто числом киральных мультиплетов 27, поскольку представление 27 группы E_6 разлагается относительно $SO(10)$ как $27 \approx 16 \oplus 10 \oplus 1$. Число поколений в E_6 -модели, получающейся, если в качестве K взять многообразие с $SU(3)$ -голономией, должно быть равно половине эйлеровой характеристики — точно так же, как в более общих $SO(10)$ -моделях, поскольку рассматриваемая здесь конструкция представляет собой частный случай того, что рассматривалось в гл. 14. Действительно, в следующем разделе в процессе систематического изучения спектра безмассовых частиц мы восстановим

утверждение, что число поколений есть половина эйлеровой характеристики.

Поскольку утверждается, что рассматриваемая здесь конструкция дает вакуумные состояния с ненарушенной суперсимметрией, она должна также приводить к решениям уравнений движения. Чтобы исследовать этот вопрос, рассмотрим вид эффективной низкоэнергетической теории поля для десятимерной теории. Эффективный лагранжиан с точностью до поправок порядка $(\alpha')^2$ имеет вид

$$e^{-1}L_{\text{эфф}} = -\frac{1}{2\kappa^2}R - \frac{1}{4g^2\phi} \text{tr}(F_{MN}^2) - \frac{1}{\kappa^2}(\partial_M\phi/\phi)^2 - \\ - \frac{3\kappa^2}{8g^4\phi^2}H_{MNP}^2 + \frac{1}{4g^2\phi}(R_{MNPQ}R^{MNPQ} - 4R_{MN}R^{MN} + R^2) + \\ + \text{фермионные члены.} \quad (16.1.5)$$

Все члены в формуле (16.1.5) можно вывести из пространственно-временной суперсимметрии (они описаны в гл. 13), но имеются два исключения. Первое исключение состоит в том, что лоренцев член Черна — Саймонса в выражении

$$H = dB + \omega_L - \omega_{YM} \quad (16.1.6)$$

не нужен в минимальном лагранжиане супергравитации. Второе исключение — взаимодействие $R_{MNPQ}R^{MNPQ} + \dots$ в выражении (16.1.5). Хотя эти два члена не необходимы для пространственно-временной суперсимметрии, можно показать (ценой значительных усилий), что они связаны друг с другом суперсимметрией, а потому если один из них есть, то должен быть и другой. Можно также, что не очень трудно, вычислить трехточечные связи в теории гетеротических струн на массовой поверхности (основные шаги объяснялись в разд. 7.4.4) и показать, что оба поправочных члена генерируются с указанными коэффициентами. (Аналогичное вычисление в теории типа I сложнее.) Дальнейшее исследование струнных амплитуд рассеяния обнаруживает, что следующие поправки в эффективном лагранжиане возникают в порядке $(\alpha')^3$, где встречается большое число таких членов, как R^4 -взаимодействие.

Легко видеть, что в этом порядке наш анзац удовлетворяет уравнениям движения. Например, уравнения Эйнштейна выполняются, поскольку тензор Риччи равен нулю для метрик с $SU(3)$ -голономией (поправки к уравнениям Эйнштейна вследствие членов R^2 в (16.1.5) малы, так как $D^i R_{ijkl} = 0$ для риччи-плоской метрики). Подобным же образом уравнения Янга — Миллса выполнены, поскольку (как мы выяснили в конце разд. 15.6.2) они следуют из уравнений (16.1.1). Немного бо-

лее тонкий случай — уравнение для дилатона, которое (при нашем предположении, что $d\phi = H = 0$) принимает вид

$$0 = \text{tr} F_{ij}F^{ij} - \text{tr} R_{ij}R^{ij}, \quad (16.1.7)$$

где $\text{tr} R_{ij}R^{ij} \equiv R_{ijkl}R^{ijkl}$ (след в $\text{tr} R_{ij}R^{ij}$ берется по тем индексам тензора Γ_{ijkl} , которые были опущены). Подобно (16.1.3) уравнение (16.1.7) не внушает доверия, если только нет какой-либо специальной связи между F и R . Вложение спиновой связности в калибровочную группу дает такую связь, и уравнение (16.1.7) действительно выполняется в этом случае.

Все это находится в согласии с нашим ожиданием, что состояния с ненарушенной суперсимметрией должны удовлетворять уравнениям движения. Но выражение (16.1.5) справедливо с учетом только поправок порядка $(\alpha')^2$, а мы хотим распространить анализ на старшие порядки. После того как будут развиты подходящие методы, мы вернемся к этому вопросу и докажем, что решения уравнений движения можно построить во всех конечных порядках по α' , исходя из многообразий с $SU(3)$ -голономией. При этом мы выясним также, как ослабить предположение о вложении спиновой связности в калибровочную группу и найти более общие решения.

Поскольку α' является фундаментальной постоянной, если теория струн верна, какой смысл имеет разложение по степеням α' ? Многообразии с $SU(3)$ -голономией имеет радиус r , который не фиксируется уравнениями Эйнштейна. (Условие $SU(3)$ -голономии инвариантно относительно рескейлинга метрики $g_{ij} \rightarrow tg_{ij}$.) Все кривизны и напряженности полей обращаются в нуль для больших r , причем безразмерным параметром разложения является α'/r^2 . Наше предшествующее рассмотрение равносильно проверке уравнений движения вплоть до членов порядка $(\alpha'/r^2)^2$.

Вложение спиновой связности в калибровочную группу немедленно приносит ряд феноменологических дивидендов. Группа E_8 не является подходящей калибровочной группой для великого объединения в четырех измерениях, поскольку она не имеет комплексных представлений. На самом деле единственной исключительной группой, которая имеет комплексные представления и поэтому подходит для великого объединения в четырех измерениях, является группа E_6 . Группа E_6 весьма выделена также и с точки зрения суперсимметрии. Она является единственным кандидатом на роль калибровочной группы великого объединения, в котором естественное представление для фермионов 27 совпадает с естественным представлением для хиггсовых бозонов, как должно быть при построении суперсимметричных моделей. Например, в случае группы $SO(10)$ фермионы и хиггсовы бозоны естественным образом лежат

в представлениях 16 и 10 соответственно; они объединяются в представлении 27 группы E_6 .

В нашем построении группа E_6 появилась не потому, что эта четырехмерная группа, которую нам хотелось бы получить, а потому, что вложение спиновой связности в калибровочную группу представляет собой простейший способ удовлетворить необходимым уравнениям и автоматически нарушает симметрию $E_8 \times E_8$ до группы $E_6 \times E_8$. Аналогично киральные супермультиплеты возникают в представлениях 27 и $\bar{27}$ группы E_6 , являющихся единственными действительно подходящими представлениями не потому, что мы специально так сделали, а потому, что они являются единственными комплексными представлениями группы E_6 , которые возникают в разложении (16.1.4) алгебры Ли для E_8 .

Когда в этой главе нам понадобится конкретный пример многообразия с $SU(3)$ -голономией, им обычно будет квинтика Q в CP^4 — гиперповерхность, определенная нулями однородного полинома пятой степени P от пяти комплексных переменных Z_1, Z_2, \dots, Z_5 . Полином P может иметь вид

$$P = Z_1^5 + Z_2^5 + Z_3^5 + Z_4^5 + Z_5^5 \quad (16.1.8)$$

или быть каким-нибудь более общим, не столь симметричным полиномом, таким как $P' = \sum_i Z_i^5 + \varepsilon Z_1 Z_2 Z_3 Z_4 Z_5$. Как отмечалось в гл. 15, после исключения 25 степеней свободы, которые поглощаются линейным переопределением переменных Z_i , остается 101 независимый комплексный параметр, участвующий в выборе полинома P . Описание этого многообразия с помощью полиномов позволит провести широкое изучение свойств модели. Полное пересечение k гиперповерхностей в CP^{3+k} , также описанное в гл. 15, можно изучать подобным образом, хотя мы и не будем этого делать. В конце этой главы мы опишем совершенно другой класс простых примеров многообразий с $SU(3)$ -голономией.

16.2. Спектр безмассовых частиц

В этом разделе мы рассматриваем спектр безмассовых частиц в эффективной четырехмерной теории, возникающей при компактификации десятимерного мира на многообразии с $SU(3)$ -голономией. Мы будем предполагать, что спиновая связность вложена в калибровочную группу, хотя большая часть рассмотрения останется справедливой и после дальнейших обобщений. Сначала мы рассмотрим безмассовые частицы, которые возникают как нулевые моды полей, несущих $E_8 \times E_8$ -заряды, а затем мы обратимся к нейтральным полям.

16.2.1. Нулевые моды заряженных полей

Поле глюино χ_α^x имеет спинорный индекс α и индекс x , отвечающий присоединенному представлению группы E_8 (или $E_8 \times E_8$; для краткости мы сосредоточим внимание на одном сомножителе E_8 , в который вложена спиновая связность). В предположении, что в вакууме имеются только $SU(3)$ -калибровочные поля для максимальной подгруппы $SU(3) \times E_6 \subset E_8$, компоненты поля χ , преобразующиеся по различным представлениям группы $SU(3)$, в уравнении Дирака расцепляются.

Синглетные по $SU(3)$ моды не зависят от вложения спиновой связности в калибровочную группу, а следовательно, являются спинорными полями на K . Спинорное поле ψ_α на K эквивалентно набору дифференциальных форм $\psi_{\bar{a}_1 \dots \bar{a}_q}$ типов

$(0, q)$. Нулевые моды оператора Дирака образуют группы когомологий Дольбо $H^{0,q}$ и в четырех измерениях приводят к возникновению безмассовых фермионов киральностей $(-1)^q$. Из разд 15.5.4 мы знаем, что $H^{0,1} = H^{0,2} = 0$, в то время как $H^{0,0}$ и $H^{0,3}$ — одномерны и состоят из ковариантно постоянных полей. Следовательно, для $SU(3)$ -синглетов имеется ровно одна нулевая мода положительной киральности и одна отрицательной киральности. Разложение (16.1.4) алгебры Ли группы E_8 показывает, что синглетные по $SU(3)$ состояния преобразуются по присоединенному представлению группы E_6 , так что только что идентифицированные моды представляют собой четырехмерные глюино положительной и отрицательной киральностей¹⁾.

Обратимся теперь к несинглетам по $SU(3)$. Фермионы ψ_α^x , преобразующиеся по некоторому представлению R для $SU(3)$, можно рассматривать как спинорные поля со значениями в некотором голоморфном векторном расслоении X_R , определяемом представлением R . Дираковские нулевые моды отвечают группам когомологий Дольбо $H^q(X_R)$. Как показано в разд. 15.7.1, H^{3-q} связано с H^q посредством CPT -симметрии, а H^0 равно нулю, когда R нетривиально. Поэтому интересные моды возникают из $H^1(X_R)$. Таким образом, мы имеем дело с $(0, 1)$ -формой ψ_α^x с индексом x , отвечающим некоторому представлению R группы $SU(3)$.

В случае вложения спиновой связности в калибровочную группу можно очень конкретно описать получающуюся структуру. Для мод, преобразующихся как 3 для $SU(3)$, янг-миллсов

¹⁾ Подобным образом десятимерные глюино для второй группы E_8 имеют в качестве своих нулевых мод только четырехмерные глюино.

индекс эквивалентен голоморфному касательному векторному индексу. Таким образом, в этом случае ψ_b^x эквивалентно $(0, 1)$ -форме ψ_b^a с дополнительным голоморфным касательным векторным индексом. Эквивалентным образом мы можем связать ψ с $(2, 1)$ -формой $\tilde{\psi}_{a_1 a_2 \bar{b}} = \omega_{a_1 a_2 a_3} \psi_b^{a_3}$, где $\omega_{a_1 a_2 a_3}$ — голоморфная 3-форма. Отвечающая $(2, 1)$ -форме $\tilde{\psi}$ группа когомологий есть $H^{2,1}$, а число нулевых мод есть число Ходжа $h^{2,1}$. Разложение (16.1.4) алгебры Ли группы E_8 показывает, что моды, преобразующиеся по представлению $\mathbb{3}$ группы $SU(3)$, преобразуются по представлению $\mathbf{27}$ группы E_6 , а следовательно, мы показали, что число левых безмассовых мультиплетов $\mathbf{27}$ равно $N_{\mathbf{27}} = h^{2,1}$.

Полезно также альтернативное описание тех же мод в терминах ψ_b^a . Поскольку a — касательный векторный индекс со значениями в касательном расслоении T , соответствующая группа когомологий при таком описании есть $H^1(T)$. Из разд. 15.7.2 мы знаем, что $H^1(T)$ обладает качественной значимостью: она параметризует инфинитезимальные деформации комплексной структуры на K .

Перейдем теперь к полям, преобразующимся по представлению $\mathbb{3}$ группы $SU(3)$. В этом случае янг-миллсов индекс является антиголоморфным касательным векторным индексом, а значит, мы имеем дело с $(0, 1)$ -формой $\phi_a^{\bar{b}}$ с антиголоморфным касательным векторным индексом \bar{b} . Такое поле эквивалентно $(1, 1)$ -форме $\tilde{\phi}_{b\bar{a}} = g_{b\bar{b}} \phi_a^{\bar{b}}$. Соответствующая группа когомологий есть $H^{1,1}$, а число дираковских нулевых мод есть число Ходжа $h^{1,1}$. Разложение E_8 -алгебры Ли показывает, что моды, преобразующиеся как $\mathbb{3}$ для $SU(3)$, преобразуются по представлению $\mathbf{27}$ группы E_6 ; таким образом, мы выяснили, что число безмассовых левых мультиплетов $\mathbf{27}$ в четырех измерениях равно $N_{\mathbf{27}} = h^{1,1}$.

Число поколений есть $N_{gen} = |N_{\mathbf{27}} - N_{\overline{\mathbf{27}}}| = |h^{2,1} - h^{1,1}|$. Поскольку это число совпадает с половиной эйлеровой характеристики, мы получили наш старый результат из разд. 14.6.

Наконец, рассмотрим моды, преобразующиеся по присоединенному представлению группы $SU(3)$. Разложение E_8 -алгебры Ли показывает, что эти моды являются синглетами по E_6 , так что они не имеют никаких известных в настоящее время калибровочных взаимодействий. Тем не менее оказывается, что они могут играть важную роль в феноменологии. $SU(3)$ -расслоение X , которое получается из касательного расслоения T , если спи-

новую связность записать в присоединенном представлении группы $SU(3)$, обозначалось $\text{End } T$ в примере 3 из разд. 15.6.3; это расслоение, слой которого в данной точке $x \in K$ состоит из (бесследовых) линейных преобразований голоморфных касательных векторов в точке x . Дираковские нулевые моды образуют группу когомологий Дольбо $H^1(\text{End } T)$. Качественный смысл этой группы исследован в разд. 15.7.3. Если рассматривать T как голоморфное векторное расслоение над многообразием K (и не учитывать тот факт, что T является голоморфным касательным расслоением для K), то группа когомологий $H^1(\text{End } T)$ параметризует возможные деформации голоморфной структуры для T .

В качестве примера рассмотрим квинтику Q в CP^4 — гиперповерхность, заданную нулями однородного полинома пятой степени P . В этом случае можно дать явное описание группы $H^{2,1}$, так как, согласно объяснению в разд. 15.7.2 и 15.2.3, элементы из $H^{2,1}$ соответствуют возмущениям полинома P , которые нельзя поглотить линейными заменами координат. Эта связь возникает потому, что выбор полинома P определяет комплексную структуру на Q . Здесь мы подсчитаем явно существенные возмущения полинома P . Взяв в качестве P минимальный полином пятой степени $P = \sum Z_i^5$, мы хотим сосчитать такие возмущения δP полинома P , которые нельзя поглотить линейными заменами координат $\delta Z_i = a_{ij} Z_j$. Легко видеть, что возмущение вида $\delta P = Z_i^4 Z_j$, при любых i и j можно поглотить заменой координат $\delta Z_i = -Z_j/5$, так что существенные полиномы δP — это те полиномы, которые самое большее кубичны по каждой переменной Z_k . Имеется несколько типов таких полиномов:

$$(20) \quad Z_1^3 Z_2^2,$$

$$(30) \quad Z_1^3 Z_2 Z_3,$$

$$(30) \quad Z_1^2 Z_2^2 Z_3, \quad (16.2.1)$$

$$(20) \quad Z_1^2 Z_2 Z_3 Z_4,$$

$$(1) \quad Z_1 Z_2 Z_3 Z_4 Z_5.$$

Число в скобках перед каждым мономом в (16.2.1) — это число мономов подобной структуры, получающихся из данного перестановками переменных Z_j . Складывая эти числа в (16.2.1), мы видим, что деформация комплексной структуры на Q зависит от 101 комплексного параметра, так что в рассматриваемой модели имеется 101 поколение. Связь фермионных поколений

с полиномами полезна не только для подсчета числа поколений, но, как мы увидим ниже, и для многих других целей.

Факты, необходимые для подсчета других полей, также приведены в гл. 15. На Q имеется ровно одна гармоническая $(1, 1)$ -форма, а именно кэлерова форма, поэтому существует ровно одно антипоколение. Таким образом число поколений равно $101 - 1 = 100$. Наконец, число синглетных по E_6 мод, возникающих из $H^1(\text{End } T)$, равно 224, что соответствует подсчету определенных полиномов, обсуждавшихся в примере 6 разд. 15.6.3.

Появление выше безмассовых мультиплетов 27 и $\overline{27}$ можно объяснить в терминах вещественной дифференциальной геометрии: при вложении спиновой связности в калибровочную группу безмассовые поколения и антипоколения возникают в вещественной дифференциальной геометрии из гармонических p -форм для четных и нечетных p . Но появление выше безмассовых E_6 -синглетов при произвольном выборе полинома пятой степени P не имеет аналога в вещественной дифференциальной геометрии: никакая теорема об индексе или другой топологический инвариант вещественной дифференциальной геометрии не представляет такие моды. Их появление — одно из чудес алгебраической геометрии.

16.2.2. Флуктуации гравитационного поля

В случае десятимерных полей, несущих $E_8 \times E_8$ -заряды, мы нашли, что удобно подсчитывать нулевые моды фермионов. Бозонные нулевые моды, конечно, связаны с ними ненарушенной суперсимметрией. При обсуждении нулевых мод для других полей мы найдем, что удобнее рассматривать непосредственно бозонные нулевые моды. Начнем с нулевых мод, которые возникают в флуктуациях гравитационного поля. Десятимерный метрический тензор g_{MN} имеет компоненты $g_{\mu\nu}$ со всеми индексами, касательными к четырехмерному пространству Минковского M^4 , компоненты $g_{\mu i}$ с одним индексом, касательным к M^4 , и одним — касательным к компактному пространству K , а также компоненты g_{ij} с обоими индексами, касательными к K . Первый случай является универсальным в теории Калуцы — Клейна: единственной безмассовой модой, происходящей из $g_{\mu\nu}$, является четырехмерный гравитон.

Безмассовые моды, происходящие из $g_{\mu i}$, являются в четырех измерениях калибровочными бозонами и находятся во взаимно однозначном соответствии с непрерывными симметриями многообразия K . Но многообразии, группа голономии ко-

торого есть $SU(3)$ (а не ее собственная подгруппа)¹⁾, никогда не имеет непрерывных симметрий, так что из $g_{\mu i}$ не получается никаких безмассовых мод. Чтобы это доказать, заметим, что векторное поле V^i , генерирующее непрерывную симметрию, должно удовлетворять уравнению Киллинга $D_i V_j + D_j V_i = 0$. Отсюда следует, что $0 = D^i (D_i V_j + D_j V_i)$. Но $D^i D_i V_j = D_j D^i V_i + R_{jk} V^k$. Из уравнения Киллинга следует, что $D^i V_i = 0$, а из $SU(3)$ -голономии следует, что $R_{jk} = 0$. Поэтому векторное поле Киллинга на риччи-плоском пространстве удовлетворяет уравнению $0 = D^i D_i V_j$. Отсюда следует равенство $0 = \int_K V^i D^i D_i V_j$. Для компактного K интегрирование по частям дает

$$0 = \int_K (D^i V^i) (D_i V_j). \quad (16.2.2)$$

Следовательно, векторное поле Киллинга V на компактном риччи-плоском многообразии K должно быть ковариантно постоянным. Но $SU(3)$ -голономия несовместима с существованием ковариантно постоянного векторного поля, поскольку от носителя $SU(3)$ вектор для группы $SO(6)$ разлагается как $3 \oplus \overline{3}$, что не содержит $SU(3)$ -синглета.

Перейдем теперь к нулевым модам метрического тензора g_{ij} пространства K . Такие моды отвечают вырождению вакуумного состояния, поэтому их легко найти. Отправной точкой нашего построения вакуумного состояния была метрика на K с голономией $SU(3)$. Любая деформация метрики на K , которая сохраняет тот факт, что группа голономии есть $SU(3)$, должна отвечать какой-то нулевой моде волнового оператора, описывающего возмущения метрики, и, следовательно, безмассовой частице в четырех измерениях. Но, с другой стороны, доказательство Яу гипотезы Калаби дает точное описание возмущений метрики, сохраняющих $SU(3)$ -голономию. Они отвечают деформациям комплексной структуры или кэлерова класса на K .

Чтобы проверить эти утверждения, а также показать, что нулевых мод, которые не сохраняют $SU(3)$, нет, полезно написать явное уравнение для возмущений метрики. В низшем

¹⁾ Шестимерное многообразие, группа голономии которого является собственной подгруппой группы $SU(3)$, должно иметь очень простую структуру: у него должно быть такое накрывающее пространство, которое представляет собой либо тор, либо произведение тора и пространства $K3$ — единственного пространства с голономией $SU(2)$. Такие многообразия, по видимому, не подходят для феноменологии, поскольку, например, их эйлерова характеристика равна нулю.

порядке по α'/r^2 уравнение для метрики g_{ij} на K представляет собой уравнение Эйнштейна $R_{ij} = 0$. Используя разложение $g_{ij} = g_{ij}^0 + h_{ij}$, где g^0 — риччи-плоский фон, а h_{ij} — возмущение метрики, получаем для h уравнение $\Delta h = 0$, где Δ — определенный линейный оператор, который можно получить, линеаризуя уравнения Эйнштейна около классического решения. Этот оператор часто называют лапласианом Лихнеровича. В калибровке $D^i h_{ij} - 1/2 D_j h^i_i = 0$ рассматриваемое уравнение имеет следующий явный вид:

$$0 = (\Delta h)_{ij} = -D_k D^k h_{ij} - R_{tsjt} h^{st}. \quad (16.2.3)$$

В случае $SU(3)$ -голономии уравнения для компонент $h_{a\bar{b}}$ и $h_{\bar{a}b}$ в (16.2.3) расцепляются. Более или менее легко видеть, что уравнение для $h_{a\bar{b}}$ совпадает с уравнением на гармоническую $(1, 1)$ -форму, которое дается лапласианом в разд. 15.5.3. На самом деле нулевая мода $h_{a\bar{b}}$ отвечает вариации кэлера класса кэлера метрики на K . Несколько труднее показать, что уравнение для $h_{\bar{a}b}$, которое получается из (16.2.3), означает, что $h_{\bar{a}b}^a = g^{a\bar{a}} h_{\bar{a}b}$ представляет собой элемент из $H^1(T)$, а потому отвечает деформации комплексной структуры на K .

Нулевые моды $h_{a\bar{b}}$ (или, что эквивалентно, деформации комплексной структуры на K) являются комплексными и в четырех измерениях приводят к появлению комплексных безмассовых скаляров. Если спиновая связность вложена в калибровочную группу, эти безмассовые скаляры находятся во взаимно однозначном соответствии с безмассовыми мультиплетами 27, поскольку и те и другие определяются элементами группы $H^1(T)$. Например, в случае квинтики Q в CP^4 деформации комплексной структуры находятся во взаимно однозначном соответствии с тем же 101 мономом, обсуждавшимся выше. При ненарушенной суперсимметрии безмассовые скаляры, возникающие из деформаций комплексной структуры на K , с необходимостью являются скалярными компонентами безмассовых киральных суперполей, которые мы будем обозначать $X_{(\alpha)}$.

Что можно сказать о нулевых модах $h_{a\bar{b}}$ или гармонических $(1, 1)$ -формах? В случае квинтики Q в CP^4 имеется единственная гармоническая $(1, 1)$ -форма — форма Кэлера. Эта мода имеет особое значение: она описывается анзацем $h_{a\bar{b}} = g_{a\bar{b}}^0$ и поэтому отвечает общей дилатации на K . Таким образом, для квинтики выбор кэлера класса представляет собой просто выбор радиуса или объема. Другие гравитационные нулевые моды определяют «форму» многообразия K .

Гармонические $(1, 1)$ -формы, естественно, вещественны. В случае ненарушенной суперсимметрии вещественные скаляры, возникающие в четырех измерениях из нулевых мод для $h_{a\bar{b}}$, должны иметь псевдоскалярных партнеров, чтобы составлять комплексный супермультиплет; ниже мы найдем этих партнеров.

16.2.3. Другие бозонные поля

Другие бозонные поля, которые должны рассматриваться в $N=1$ -супергравитации, — это дилатон ϕ и 2-форма B_{MN} с компонентами $B_{\mu\nu}$, $B_{\mu j}$ и B_{ij} .

Относительно ϕ и $B_{\mu\nu}$ здесь следует лишь немного добавить к общим замечаниям в разд. 14.3.1. При компактификации на $M^4 \times K$ они всегда приводят к появлению одной скалярной и одной псевдоскалярной мод соответственно с волновыми функциями, не зависящими от точки на K . Псевдоскалярная мода имеет аксиноподобные взаимодействия. Эти моды вместе входят в скалярную компоненту некоторого кирального супермультиплета.

Что касается компоненты $B_{\mu j}$, то из общих соображений следует, что соответствующие нулевые моды являются с точки зрения четырех измерений безмассовыми полями спина один и находятся во взаимно однозначном соответствии с гармоническими 1-формами на K . Но на многообразии с $SU(3)$ -голономией гармонических 1-форм нет (группы когомологий $H^{0,1}$ и $H^{1,0}$ равны нулю), поэтому нет и безмассовых полей, происходящих из $B_{\mu j}$.

Наконец, рассмотрим компоненты B_{ij} . Поскольку для многообразия с $SU(3)$ -голономией $H^{2,0} = H^{0,2} = 0$, единственный нетривиальный результат возникает для $(1, 1)$ -компонент $B_{a\bar{b}}$. Соответствующие нулевые моды являются гармоническими $(1, 1)$ -формами и в четырех измерениях приводят к появлению вещественных безмассовых скаляров. В действительности это те недостающие моды, которые дополняют неполные супермультиплеты, встретившиеся нам при обсуждении гравитационных флуктуаций. Каждая гармоническая $(1, 1)$ -форма на K приводит к появлению гравитационной нулевой моды и нулевой моды для B . Эти два типа мод связаны суперсимметрией и образуют скалярные компоненты комплексных киральных супермультиплетов $Y_{(\beta)}$ в четырех измерениях.

16.3. Нарушение симметрии с помощью петель Вильсона

Вложение спиновой связности в калибровочную группу дает простой способ удовлетворить уравнениям, необходимым для ненарушенной суперсимметрии, и одновременно получить связь

с феноменологией. Принципиальным успехом является автоматическое появление разумной калибровочной группы E_6 с фермионами и хиггсовыми бозонами в подходящем представлении 27. Кроме того, тот факт, что из более фундаментальной объединенной структуры можно получить множество фермионных поколений, означает, что проблема аромата в принципе может иметь решение. В то же время имеются и бросающиеся в глаза недостатки. Простые конструкции многообразий с $SU(3)$ -голономией дают слишком много поколений фермионов. Например, квинтика в CP^4 дает 100 поколений; с помощью подсчета полиномов можно показать, что полное пересечение гиперповерхностей в CP^{3+N} всегда дает по меньшей мере 64 поколения. Кроме того, хотя группа E_6 и является интересным кандидатом для великого объединения в четырехмерной теории, тем не менее феноменология определенно не допускает, чтобы E_6 оставалась ненарушенной при низких энергиях. Мы должны найти удовлетворительный способ нарушения E_6 при некоторой очень высокой энергии до приемлемой низкоэнергетической подгруппы.

Чтобы нарушить E_6 , мы должны придать вакуумные средние полям, несущим E_6 -заряды. В теоретико-полевом пределе единственными безмассовыми заряженными бозонами являются E_6 -калибровочные бозоны. («Собственно струнные» моды имеют в теоретико-полевом пределе положительный квадрат массы, а имеющиеся в настоящее время средства не позволяют исследовать состояния, в которых они имеют вакуумные средние.) Разумеется, любое нетривиальное вакуумное среднее E_6 -калибровочных бозонов нарушит E_6 до некоторой подгруппы. Но в общем случае одновременно нарушается и суперсимметрия. Поскольку основной причиной использования многообразий с $SU(3)$ -голономией является ненарушенная суперсимметрия, механизм нарушения E_6 , который портит суперсимметрию, противоречит всей идее данной конструкции. Чтобы многообразия с $SU(3)$ -голономией были применимы, мы должны найти способ нарушить E_6 , не нарушая суперсимметрию.

На первый взгляд представляется безнадежным делом пытаться добиться этого, не выходя за рамки упрощающего анзаца $df = H = 0$, который позволил найти решения соответствующих уравнений. В разд. 16.1 встречались такие уравнения, как $0 = \text{tr } F \wedge F - \text{tr } R \wedge R$ и $0 = \text{tr } F_{ij} F^{ij} - \text{tr } R_{ij} R^{ij}$, которые накладывают очень сильные ограничения на напряженность поля Янга — Миллса F . Действительно, эти уравнения, по-видимому, требуют, чтобы E_6 -напряженность была равна нулю. Как же тогда можно нарушить E_6 ?

Утверждение, что E_6 -напряженность F_{ij} равна нулю, на самом деле означает, что локально E_6 -калибровочное поле A_i является чистой калибровкой: $A_i = d_i U \cdot U^{-1}$. Другой вопрос, верно ли это глобально. Если многообразие K односвязно, то условие $F_{ij} = 0$ гарантирует, что с помощью калибровочного преобразования можно обратить в нуль калибровочное поле. Но если K не является односвязным, $\pi_1(K) \neq 0$, то имеется более общая возможность, которая появляется в электродинамике как эффект Бомы — Ааронова. Пусть γ — нестягиваемая петля в K , начинающаяся и оканчивающаяся в некоторой точке x . Тогда «петля Вильсона»

$$U_\gamma = P \exp \oint_\gamma A \cdot dx \quad (16.3.1)$$

является калибровочно-ковариантной величиной и, если $U_\gamma \neq 1$, ее нельзя сделать равной единице с помощью калибровочного преобразования. Пока выполняется условие $F_{ij} = 0$, U_γ зависит только от топологического класса петли γ в $\pi_1(K)$. Если U_γ не лежит в центре группы E_6 , то E_6 нарушается до подгруппы, коммутирующей со всеми U_γ . Но E_6 -калибровочное поле с $F_{ij} = 0$ не вносит вклада ни в какие локальные уравнения, такие как классические уравнения движения или условия ненарушенной суперсимметрии, так что они по-прежнему выполняются, если выполнялись при $U_\gamma = 1$.

16.3.1. Варианты нарушения симметрии

В типичной ситуации имеется много топологических классов нестягиваемых петель γ в пространстве-времени. Для каждой γ мы определяем U_γ формулой (16.3.1). Такие U_γ подчинены некоторому важному общему ограничению. Пусть γ и γ' — две различные нестягиваемые петли в K , начинающейся и оканчивающейся в одной и той же точке x . Групповая структура фундаментальной группы $\pi_1(K)$ определяется так, что произведение $\gamma\gamma'$, показанное на рис. 16.1, — это петля, которая проходит сначала по γ' , а затем по γ . Используя это определение, мы видим, что

$$U_{\gamma\gamma'} = P \exp \int_{\gamma\gamma'} A \cdot dx = \left(P \exp \int_\gamma A \cdot dx \right) \left(P \exp \int_{\gamma'} A \cdot dx \right), \quad (16.3.2)$$

так что на самом деле

$$U_{\gamma\gamma'} = U_\gamma \cdot U_{\gamma'}. \quad (16.3.3)$$

Уравнение (16.3.3) можно охарактеризовать, сказав, что отображение $\gamma \rightarrow U_\gamma$ есть гомоморфизм фундаментальной группы

в E_6 . Как только сделан выбор такого гомоморфизма, группа E_6 нарушается до подгруппы, коммутирующей со всеми калибровочно-ковариантными составными полями U_γ .

Мы можем явно определить возможные варианты нарушения E_6 , которые получаются с помощью этого механизма. Группа E_6 содержит максимальную подгруппу $SU(3)_C \times SU(3)_L \times SU(3)_R$, где $SU(3)_C$ — цветовая группа сильных взаимодействий, а $SU(3)_L$ и $SU(3)_R$ описывают слабые взаимодействия левых и правых кварков соответственно. Группа слабых взаимодействий $SU(2)_L$ вложена в $SU(3)_C \times SU(3)_L \times SU(3)_R$ следующим образом:

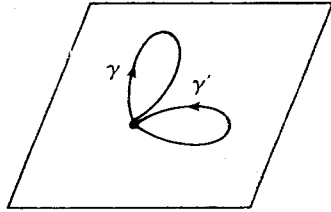


Рис. 16.1. Две петли γ и γ' «перемножаются», как здесь показано. Это — закон умножения в определении фундаментальной группы $\pi_1(K)$.

$$(1) \otimes \begin{pmatrix} SU(2)_L & \\ & 1 \end{pmatrix} \otimes (1). \quad (16.3.4)$$

Генератор группы $U(1)_Y$, отвечающий слабому гиперзаряду, имеет вид

$$Y = (0) \otimes \begin{pmatrix} 1/3 & & \\ & 1/3 & \\ & & -2/3 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 4/3 & & \\ & -2/3 & \\ & & -2/3 \end{pmatrix}. \quad (16.3.5)$$

Его можно записать как сумму $SU(3)_L$ - и $SU(3)_R$ -частей: $Y = Y_L + Y_R$, где

$$Y_L = (0) \otimes \begin{pmatrix} 1/3 & & \\ & 1/3 & \\ & & -2/3 \end{pmatrix} \otimes (0), \quad (16.3.6)$$

$$Y_R = (0) \otimes (0) \otimes \begin{pmatrix} 4/3 & & \\ & -2/3 & \\ & & -2/3 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим сначала простейшую ситуацию, когда фундаментальная группа многообразия K представляет собой циклическую группу Z_n , которая генерируется некоторым элементом γ , удовлетворяющим условию $\gamma^n = 1$. В этом случае нарушение симметрии определяется одним элементом $U = U_\gamma$ группы E_6 . Из соотношения (16.3.3) следует, что $U^n = 1$, так как (16.3.3) означает, что $(U_\gamma)^n = U_{\gamma^n} = U_1 = 1$. Предполагая,

что U коммутирует с $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$, элемент U после диагонализации его $SU(3)_R$ -части можно привести к виду

$$U = (\alpha) \otimes \begin{pmatrix} \beta & & \\ & \beta & \\ & & \beta \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \gamma & & \\ & \delta & \\ & & \varepsilon \end{pmatrix}. \quad (16.3.7)$$

Здесь $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ и ε должны быть корнями n -й степени из единицы, чтобы обеспечить равенство $U^n = 1$. Чтобы U принадлежало группе $SU(3)_C \times SU(3)_L \times SU(3)_R$, потребуем выполнения условий $\alpha^3 = 1$ (тогда α определяет элемент центра группы $SU(3)$) и $\gamma\varepsilon = 1$. Подгруппа группы E_6 , коммутирующая с U (или с любым другим одним элементом группы E_6), имеет ранг, равный шести. Для общих значений фазовых множителей в формуле (16.3.7) ненарушенная группа есть $SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1) \times U(1) \times U(1)$, где три сомножителя $U(1)$ представляют собой Y_L и диагональные $SU(3)_R$ -матрицы. Таким образом, в этом случае низкоэнергетическая теория состоит из стандартной модели плюс два дополнительных абелевых калибровочных взаимодействия. Если такова группа, остающаяся ненарушенной для общей матрицы вида (16.3.7), то в частных случаях ненарушенные группы больше. Например, при $\gamma = \delta$ и без других специальных ограничений ненарушенная группа есть $SU(3)_C \times SU(2)_L \times SU(2)_R \times U(1) \times U(1)$. Этот случай отвечает модели слабых взаимодействий с обобщенной лево — правой симметрией. Мы не будем здесь классифицировать все возможные случаи.

Хотя мы предположили, что фундаментальная группа многообразия K порождается одним элементом U , подобные же результаты получались бы и в случае, когда фундаментальная группа многообразия K абелева. Если группа $\pi_1(K)$ абелева, то различные U_γ коммутируют друг с другом, так как из соотношения (16.3.3) следует, что $U_\gamma U_{\gamma'} = U_{\gamma\gamma'} = U_{\gamma'\gamma} = U_\gamma U_{\gamma'}$. В такой ситуации (предполагая, что группа $SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$ должна остаться ненарушенной) все U_γ можно одновременно привести к виду (16.3.7). Но если группа $\pi_1(K)$ неабелева, то появляется существенно новая возможность. Если $\gamma \rightarrow V_\gamma$ есть двумерное неприводимое представление группы $\pi_1(K)$, то можно положить

$$U_\gamma = (\alpha_\gamma) \otimes \begin{pmatrix} \beta_\gamma & & \\ & \beta_\gamma & \\ & & \beta_\gamma^{-2} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \phi_\gamma & \\ & V_\gamma \end{pmatrix}. \quad (16.3.8)$$

Здесь $\phi_\gamma = \det V_\gamma^{-1}$, а $\gamma \rightarrow \alpha_\gamma$ и $\gamma \rightarrow \beta_\gamma$ представляют собой одномерные представления группы $\pi_1(K)$, причем α_γ является кубическим корнем из единицы (определяющим элемент центра группы $SU(3)$) при всех γ . Эта структура оставляет ненарушенной группу ранга пять, которая в отсутствие других ограничений на матричные элементы в выражении (16.3.8) имеет вид $SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1) \times U(1)$. Две подгруппы $U(1)$ отвечают Y_L и Y_R , определенным формулой (16.3.6). На самом деле это самая малая группа, до которой можно нарушить E_6 с помощью одних только петель Вильсона, сохраняя ненарушенной стандартную модель, поскольку каждая E_6 -матрица, коммутирующая с группой стандартной модели, коммутирует как с Y_L , так и с Y_R .

Таким образом, если E_6 нарушается только петлями Вильсона, то должно существовать по крайней мере одно новое калибровочное взаимодействие, и имеется совершенно определенное предсказание, каким оно должно быть. С другой стороны, вполне возможно, что играют роль также другие механизмы нарушения E_6 . Например, как мы увидим ниже, при ослаблении предположения $d\phi = H = 0$ можно использовать плоские направления суперпотенциала, чтобы нарушить E_6 до $SO(10)$ или $SU(5)$, сохраняя при этом ненарушенной суперсимметрию.

По этой и другим причинам очень интересно узнать, до каких низкоэнергетических групп можно нарушить $SU(5)$ или $SO(10)$ с помощью петель Вильсона. На этот вопрос ответить легко. В случае группы $SU(5)$ петля Вильсона U , оставляющая ненарушенной стандартную модель, должна быть элементом группы $U(1)$, которая генерируется гиперзарядом. Такой элемент нарушил бы $SU(5)$ в точности до стандартной модели. Для $SO(10)$ рассмотрение несколько отличается. Группа $SO(10)$ содержит подгруппу $SU(5) \times U(1)$, где дополнительная $U(1)$ отвечает разности барионного и лептонного чисел $B - L$. Любой элемент группы $SO(10)$, коммутирующий с группой стандартной модели, коммутирует также и с $B - L$. Таким образом, в $SO(10)$ -моделях нарушение симметрии с помощью петель Вильсона, оставляющее ненарушенной стандартную модель, оставило бы ненарушенной по крайней мере $SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y \times U(1)_{B-L}$. Точно так же, как в случае группы E_6 , нарушение симметрии с помощью петель Вильсона в случае группы $SO(10)$ приводит к предсказанию по крайней мере одного нового калибровочного взаимодействия; при этом любопытно, что эти новые взаимодействия различны.

Проведенное обсуждение показывает, что нарушение симметрии с помощью петель Вильсона может привести к более или менее реалистической низкоэнергетической калибровочной

группе. Теперь нужно найти примеры моделей с $SU(3)$ -голономией и с достаточно большой фундаментальной группой, к которой можно применить проведенное выше обсуждение.

16.3.2. Модель с четырьмя поколениями

Если дано многообразие K_0 с $SU(3)$ -голономией, являющееся односвязным, то нарушить E_6 описанным только что способом нельзя. Но очень часто многообразие K_0 можно так модифицировать, чтобы получить многообразие с $SU(3)$ -голономией, фундаментальная группа которого нетривиальна. Предположим, что K_0 имеет группу симметрий F . Группа F автоматически будет дискретной группой симметрии, поскольку мы доказали, что многообразие с $SU(3)$ -голономией не имеет непрерывных симметрий. В этой ситуации естественно ввести отношение эквивалентности, считая две точки x и y эквивалентными, если $y = fx$ для некоторого $f \in F$. Такие классы эквивалентности образуют новое пространство, которое мы обозначим $K = K_0/F$.

Это фактор-пространство K является многообразием, если F действует свободно в том смысле, что для $f \in F$ и $x \in K_0$ имеем $fx \neq x$, если $f \neq 1$. Идея здесь в том, что многообразие представляет собой топологическое пространство, которое локально выглядит как евклидово пространство. Локальные измерения в точке $x \in K_0$ зависят от того, что x может иметь образ fx , который считается эквивалентным x . Точнее они не зависят от этого (а значит, $K = K_0/F$ является многообразием), если F действует свободно и x и fx — различные точки. С помощью локальных измерений наблюдатель в точке x не может обнаружить, что его считают эквивалентным другому наблюдателю в точке fx , если $x \neq fx$. Например, пусть K_0 — обычное трехмерное евклидово пространство с евклидовыми координатами x_1, x_2, x_3 . Трансляция T , определенная соотношением $T(x_i) = x_i + a_i, i = 1, 2, 3$, действует свободно, и если F — группа, порожденная этой трансляцией, то K_0/F — многообразие. С другой стороны, пусть P — преобразование четности: $P(x_i) = -x_i$. Тогда P действует свободно везде, кроме точки $x_i = 0$, которая является неподвижной точкой. Если F — группа Z_2 , порожденная преобразованием P , то K_0/F имеет сингулярность в точке $x_i = 0$ и многообразием не является.

В этом разделе мы будем предполагать, что F действует свободно, так что $K = K_0/F$ — многообразие¹⁾. Если группа

¹⁾ Но в теории струн пространство K_0/F , по-видимому, имеет смысл, даже если F не действует свободно, как мы узнали из рассмотрения орби-фолдов в разд. 9.5.2. Связь между орби-фолдами и многообразиями с $SU(3)$ -голономией исследуется в разд. 16.10.

голономии многообразия K_0 есть $SU(3)$, то это справедливо также для K , как мы докажем ниже. Но K не будет односвязным. Пусть γ — некоторый путь на K_0 , начинающийся в точке $x \in K$ и заканчивающийся в точке fx для некоторого $f \in F$. Тогда γ является замкнутой петлей в K , даже если (при $f \neq 1$) она и не замкнута в K_0 . В качестве f в этом построении мы можем выбрать произвольный элемент группы F . Более того, если K_0 односвязно, то топологический класс γ зависит только от выбора f . Следовательно, если K_0 односвязно, то фундаментальная группа многообразия K есть $\pi_1(K) \approx F$.

Таким образом, мы можем построить многообразия K с $SU(3)$ -голономией, не являющиеся односвязными, если найдем свободное действие дискретной группы F на односвязном пространстве K_0 с $SU(3)$ -голономией. Кроме того, любое неодносвязное многообразие K с $SU(3)$ -голономией может быть построено таким способом, причем K_0 будет так называемым универсальным накрывающим пространством для K , а $F \approx \pi_1(K)$.

Наиболее простые конструкции многообразий с $SU(3)$ -голономией дают односвязные примеры. Это верно, например, для гиперповерхности Q в CP^4 , заданной нулями однородного полинома пятой степени, такого как

$$P = Z_1^5 + Z_2^5 + \dots + Z_5^5. \quad (16.3.9)$$

Как найти дискретную группу, действующую свободно на этой гиперповерхности? Метрика с $SU(3)$ -голономией на квинтике однозначно определяется комплексной структурой (после того как фиксирован кэлеров класс или объем). Комплексная структура инвариантна относительно голоморфных замен координат. Чтобы найти голоморфное отображение многообразия Q в себя, обычно ищут голоморфное отображение пространства CP^4 в себя, оставляющее инвариантной гиперповерхность Q . Голоморфное отображение пространства CP^4 в себя (без полюсов или других сингулярностей) всегда является линейным преобразованием $Z_i \rightarrow A_{ij}Z_j$ с некоторой матрицей A_{ij} . Линейные преобразования координат Z_i определенно являются такими голоморфными отображениями Q в себя¹⁾, которые найти легко; труднее показать, что ими все и исчерпывается. Кроме того, линейные преобразования координат Z_i всегда оставляют инвариантным кэлеров класс многообразия CP^4 и, следовательно, многообразия Q .

Линейные преобразования координат Z_i , оставляющие P инвариантным и действующие на гиперповерхности $P = 0$ сво-

¹⁾ Если, конечно, они сохраняют полином P . — Прим. перев.

бодно, можно найти без особых затруднений. Пусть A является преобразованием

$$A(Z_i) = Z_{i+1}, \quad (16.3.10)$$

где по определению $Z_{i+5} = Z_i$. Тогда, очевидно, A оставляет полином P инвариантным. Кроме того, $A^5 = 1$, так что A порождает группу, изоморфную Z_5 .

Несколько менее очевидно, что A на гиперповерхности действует свободно. Неподвижная точка преобразования A на CP^4 должна иметь координаты Z_i , для которых $Z_{i+1} = \lambda Z_i$ при некотором комплексном λ . (Возможность появления $\lambda \neq 1$ возникает потому, что общий множитель у координат несуществен на CP^4 .) Поскольку $Z_{i+5} = Z_i$, отсюда следует, что $\lambda^5 = 1$, и легко видеть, что точки на CP^4 , для которых $Z_{i+1} = \lambda Z_i$, не удовлетворяют уравнению $P = 0$. Таким образом, хотя преобразование A и не действует свободно на CP^4 , но на гиперповерхности $P = 0$ оно действует свободно. То же верно и для A^k , если k не делится на 5, так что группа Z_5 , порождаемая преобразованием A , на гиперповерхности действует свободно.

Чтобы получить большую свободно действующую группу, примем, что $\alpha = e^{2i\pi/5}$ — корень пятой степени из единицы, и определим преобразование B формулой

$$B(Z_k) = \alpha^k Z_k. \quad (16.3.11)$$

Тогда $B^5 = 1$ и $BA = AB$ (A и B как преобразования координат Z_i удовлетворяют соотношению $BA = AB\alpha$, но фазовый множитель α в CP^4 несуществен). Поэтому A и B вместе порождают группу F , изоморфную группе $Z_5 \times Z_5$. По аналогии с нашими предыдущими замечаниями легко видеть, что $A^k B^l$ не имеет неподвижных точек на гиперповерхности, если k и l не делятся на 5, так что F действует свободно.

Теперь мы исследуем многообразие $K = Q/F$, фундаментальная группа которого (поскольку Q односвязно) есть $Z_5 \times Z_5$. Первый вопрос, который следует задать: какова эйлерова характеристика многообразия K ? Есть много способов ответить на этот вопрос. Например, можно заметить, что эйлерова характеристика можно определить как интеграл от определенного полинома от кривизны, рассмотренного в разд. 12.5.2. Для шестимерного многообразия M он имеет вид

$$\chi = \frac{1}{48\pi^3} \int_M e^{i_2 \dots i_6} R_{i_2 i_3 i_4} R_{i_3 i_4 i_5} R_{i_4 i_5 i_6}. \quad (16.3.12)$$

Предположим теперь, что некоторое многообразие K_0 (не обязательно односвязное) допускает действие дискретной группы

симметрии F из $N(F)$ элементов. Если F действует свободно, то K_0 состоит из $N(F)$ «фундаментальных областей» действия группы F . Многообразию $K = K_0/F$ состоит из одной фундаментальной области, некоторые границы которой отождествлены. Чтобы вычислить эйлерову характеристику многообразия K_0 по формуле (16.3.12), надо выполнить интегрирование по всем $N(F)$ фундаментальным областям. Чтобы вычислить эйлерову характеристику многообразия K по формуле (16.3.12), тот же интеграл надо взять только по одной фундаментальной области. Поэтому эйлеровы характеристики для K и K_0 связаны соотношением

$$\chi(K) = \chi(K_0)/N(F). \quad (16.3.13)$$

Возвращаясь к гиперповерхности Q в CP^4 , допускающей свободное действие группы $F = Z_5 \times Z_5$, мы можем теперь определить эйлерову характеристику многообразия $K = Q/F$. Поскольку $\chi(Q) = -200$, а $N(F) = 5 \times 5 = 25$, имеем

$$\chi(K) = -8. \quad (16.3.14)$$

Таким образом, в физической модели, компактифицированной на K , имеется $|\chi|/2 = 4$ поколений. Эта довольно простая модель с четырьмя поколениями, в которой есть естественная возможность нарушения E_6 , поскольку $\pi_1(K) = Z_5 \times Z_5$, в дальнейшем будет широко использоваться в целях иллюстрации.

Полезно проверить тот результат, что $\chi(K) = -8$, более явно. С этой целью вычислим числа Ходжа $h^{p,q}$ многообразия K . Гармоническая (p, q) -форма на K есть то же самое, что гармоническая (p, q) -форма на накрывающем пространстве Q , инвариантная относительно F . Отсюда следует, например, что $h^{0,1} = h^{0,2} = 0$ на K , поскольку на Q нет ни гармонических $(0, 1)$ -форм, ни гармонических $(0, 2)$ -форм. С другой стороны, на Q имеется единственная гармоническая $(1, 1)$ -форма — форма Кэлера. Она инвариантна относительно F (в противном случае $K = Q/F$ не было бы кэлеровым многообразием), поэтому K имеет $h^{1,1} = 1$. Многообразие K имеет также $h^{0,0} = 1$, как и любое связанное компактное комплексное многообразие, поскольку постоянная функция является единственной гармонической $(0, 0)$ -формой.

Чтобы вычислить $h^{2,1}$, подсчитаем деформации комплексной структуры на K . Определение многообразия K использует полином пятой степени P , являющийся $(Z_5 \times Z_5)$ -инвариантным, так что можно рассматривать фактор-пространство гиперповерхности $P = 0$ по $Z_5 \times Z_5$. Деформации комплексной структуры многообразия K отвечают $(Z_5 \times Z_5)$ -инвариантным возмущениям полинома P , которые нельзя поглотить заменой пере-

менных. Легко видеть, что помимо P имеются еще пять независимых $(Z_5 \times Z_5)$ -инвариантных полиномов пятой степени:

$$\begin{aligned} (a) & Z_1^3 Z_2 Z_5 + \dots, \\ (б) & Z_1^3 Z_3 Z_4 + \dots, \\ (в) & Z_1^2 Z_2 Z_3^2 + \dots, \\ (г) & Z_1^2 Z_2^2 Z_4 + \dots, \\ (д) & Z_1 Z_2 Z_3 Z_4 Z_5. \end{aligned} \quad (16.3.15)$$

Здесь «+ ...» обозначает добавление членов, получающихся циклическими перестановками переменных Z_i . Добавление любого из пяти полиномов (16.3.15) нельзя поглотить линейными заменами переменных Z_i , так что комплексная структура многообразия $K = Q/F$ зависит от пяти комплексных параметров и K имеет $h^{2,1} = 5$.

Теперь мы определили все независимые числа Ходжа для K , кроме $h^{3,0}$. Из совместности со значением $\chi(K) = -8$ следует, что $h^{3,0} = 1$. Действительно, на Q имеется единственная голоморфная $(3, 0)$ -форма, а именно ковариантно постоянная $(3, 0)$ -форма ω , которая является отличительным признаком многообразия с $SU(3)$ -голономией. На основе одного только этого соображения можно заключить, что для K число $h^{3,0}$ равно 1 или 0. Чтобы доказать, что $h^{3,0} = 1$, надо показать, что ω инвариантна относительно $F = Z_5 \times Z_5$. В противном случае K не имело бы голоморфной 3-формы и не имело бы $SU(3)$ -голономии.

Вместо того чтобы использовать методы, специально применимые к данному примеру, мы докажем общее утверждение, которое было сформулировано выше. Пусть K_0 — произвольное многообразие с $SU(3)$ -голономией, а F — любая дискретная группа, действующая свободно на K_0 . Тогда $K = K_0/F$ имеет голономию $SU(3)$. Мы докажем это, показав, что $h^{0,3}(K) = 1$, так что на K существует голоморфная 3-форма.

Рассмотрим оператор $\bar{\partial}$, действующий на $(0, k)$ -формы. Индекс эрмитова оператора $D = \bar{\partial} + \bar{\partial}^*$ называется арифметическим родом A . Поскольку нулевые моды оператора D являются гармоническими $(0, k)$ -формами, киральность которых есть $(-1)^k$, арифметический род равен $A = \sum_k (-1)^k h^{0,k}$. Подобно индексу любого оператора, арифметический род можно выразить с помощью интегральной формулы, аналогичной формуле (16.3.12). Те же рассуждения, что и в случае эйлеровой характеристики, можно использовать, чтобы доказать, что если K_0 — произвольное комплексное многообразие (без ограничения на

первый класс Черна), а F действует свободно, то арифметический род для K связан с арифметическим родом для K_0 соотношением $A(K) = A(K_0)/N(F)$.

Применим это к случаю, когда K_0 имеет голономию $SU(3)$. Тогда знание чисел Ходжа позволяет заключить, что $A(K_0) = 0$. Соотношение $A(K) = A(K_0)/N(F)$ в этом случае показывает, что $A(K) = 0$. Поскольку K имеет $h^{0,0} = 1$ (как любое связное комплексное многообразие) и $h^{0,1} = h^{0,2} = 0$ (так как на K_0 нет гармонических $(0,1)$ -форм или $(0,2)$ -форм), обращение в нуль числа $A(K)$ означает, что K имеет $h^{0,3} = 1$. Следовательно, K имеет голономию $SU(3)$.

16.4. Связь с обычными моделями великого объединения

Петли Вильсона U , которые были введены для описания нарушения E_6 , во многих отношениях подобны обычным полям Хиггса. Связь между ними имеет вид $U = e^{i\phi}$, где ϕ — хиггсов-бозон в присоединенном представлении группы E_6 . Естественное появление присоединенного представления весьма привлекательно, так как известно, что оно безусловно является подходящим представлением для начальной стадии нарушения симметрии великого объединения. Но имеется и некоторое число отличий от обычного великого объединения. Многие из них возникают вследствие того, что собственные значения для U квантуются. Например, если фундаментальная группа многообразия K есть $\pi_1(K) = Z_n$, то U удовлетворяет условию $U^n = 1$ и ее собственные значения являются корнями n -й степени из единицы. В противоположность этому собственные значения обыкновенного хиггсова бозона ϕ в присоединенном представлении группы E_6 непрерывно зависят от произвольных констант связи. Ниже мы исследуем связь с обычным великим объединением, а в конце этого раздела сделаем некоторые выводы.

16.4.1. Альтернативное описание нарушения симметрии

Мы начнем с того, что дадим альтернативное описание механизма нарушения симметрии. Пусть K_0 — односвязное многообразие, а F — дискретная группа симметрий, действующая свободно; пусть $K = K_0/F$. Обыкновенное поле $\psi(x)$ на K_0/F , преобразующееся по некоторому представлению группы E_6 , эквивалентно полю $\psi(x)$ на K_0 , удовлетворяющему условию

$$\psi(fx) = \psi(x) \quad (16.4.1)$$

для всех $f \in F$. Рассмотрим теперь теорию с группой симметрии E_6 (исходно ненарушенной). Условие (16.4.1) можно обобщить

тогда следующим образом. Для каждого $f \in F$ выберем элемент $U_f \in E_6$ и потребуем, чтобы ψ удовлетворяла не условию (16.4.1), а условию

$$\psi(fx) = U_f \psi(x). \quad (16.4.2)$$

Из этого уравнения можно вывести, что для любых $f, f' \in F$ выполняется условие

$$U_f U_{f'} \psi(x) = U_f \psi(f'x) = \psi(ff'x) = U_{ff'} \psi(x). \quad (16.4.3)$$

Следовательно, условие (16.4.2) имеет смысл только в том случае, если

$$U_f U_{f'} = U_{ff'}, \quad (16.4.4)$$

или, другими словами, если отображение $f \rightarrow U_f$ представляет собой гомоморфизм группы F в E_6 .

Это условие появлялось также при обсуждении нарушения симметрии с помощью петель Вильсона, что указывает на некоторую связь между этим механизмом и условием (16.4.2). Действительно, точную связь описать трудно. В предыдущем разделе мы начинали с E_6 -калибровочного поля A_i , для которого $F_{ij} = 0$. Несмотря на нулевую напряженность поля, нетривиальные петли Вильсона могут сделать невозможным обращение в нуль поля A_i с помощью однозначного калибровочного преобразования U . Но нулевая напряженность поля делает возможным обращение в нуль поля A_i с помощью калибровочного преобразования, которое *не является однозначным*. Такое неоднозначное калибровочное преобразование вносит «твист» в граничные условия, которым удовлетворяют заряженные поля, а это проявляется в условии (16.4.2). Нарушение симметрии с помощью петель Вильсона в точности эквивалентно формализму, в котором E_6 -калибровочное поле равно нулю в вакууме, но заряженные поля удовлетворяют условию (16.4.2).

Это альтернативное описание делает очевидным, что при описании вакуумного состояния мы можем взять произвольный гомоморфизм $f \rightarrow U_f$; в предыдущем разделе это могло быть не очевидно. Как мы увидим, альтернативное описание очень удобно для понимания также и других физических свойств.

16.4.2. E_6 -соотношения между константами взаимодействия

Хотя мы и должны допустить, что исходная объединенная группа спонтанно нарушена, для древесных констант связи четырехмерного великого объединения имеются важные следствия. Мы хотим выяснить аналогичные вопросы в случае, когда объединение происходит не в четырех, а в десяти измерениях. Для

этого рассмотрим односвязное многообразие K_0 с голономией $SU(3)$. Находя свободно действующую дискретную группу симметрий F , мы формулируем физическое описание на факторпространстве $K = K_0/F$; нарушение E_6 описывается выбором гомоморфизма $f \rightarrow U_f$ группы F в E_6 . Этот гомоморфизм отображает F в дискретную подгруппу группы E_6 , которую мы обозначим \bar{F} . Нарушенная калибровочная группа в четырех измерениях представляет собой подгруппу G группы E_6 , коммутирующую с \bar{F} .

Представление 27 группы E_6 имеет разложение относительно $G \times \bar{F}$ вида

$$27 = \bigoplus_i R_i \otimes T_i, \quad (16.4.5)$$

где R_i и T_i — определенные представления для G и \bar{F} соответственно. С точки зрения четырехмерной физики T_i представляют лишь косвенный интерес, но R_i очень важны. Различные выборы представлений R_i отвечают, например, u -кваркам или заряженным лептонам.

Чтобы найти безмассовые фермионы, мы ищем нулевые моды оператора Дирака на K . (Требуемый оператор Дирака, разумеется, учитывает вложение спиновой связности в калибровочную группу.) Нулевая мода оператора Дирака на K — это то же самое, что нулевая мода на накрывающем пространстве K_0 , удовлетворяющая подходящему ограничению вида

$$\psi(fx) = U_f \psi(x), \quad (16.4.6)$$

которое сформулировано выше в (16.4.2). Суть этого условия состоит в том, что допустимые моды преобразуются по F точно так же, как они преобразуются относительно \bar{F} . Таким образом, моды, преобразующиеся относительно группы G по представлению R_i , преобразуются (согласно формуле (16.4.5)) по представлению T_i относительно \bar{F} , поэтому, согласно уравнению (16.4.6), они должны преобразовываться и относительно группы F также по представлению T_i .

Прежде чем пытаться получить какие-то следствия из этого утверждения, рассмотрим более простой случай, когда E_6 не нарушена. Условие (16.4.6) сводится тогда к более элементарному утверждению

$$\psi(fx) = \psi(x), \quad (16.4.7)$$

с которого мы начали этот раздел. Уравнение (16.4.7) означает, что моды на K_0 , которые остаются физическими при переходе от K_0 к $K = K_0/F$, являются модами, инвариантными относительно F . Пусть ψ — нулевая мода уравнения Дирака на K_0 , преобразующаяся по представлению 27 группы E_6 . Согласно

(16.4.7), если ψ не инвариантна относительно F , то ее не надо учитывать в формулировке физики на K ; если же она инвариантна относительно F , то ее надо оставить. Если ψ остается, она приносит в четырех измерениях целый мультиплет 27 безмассовых фермионов (положительной или отрицательной киральности), поскольку E_6 не нарушена.

Рассмотрим аналогичным образом уравнение (16.4.6), следствия которого на первый взгляд менее прозрачны. Нулевая мода ψ оператора Дирака на K_0 в общем случае преобразуется по некоторому представлению T_j группы F . Уравнение (16.4.7) означало бы, что ψ дает в четырех измерениях либо полный мультиплет 27 для E_6 , либо ничего в зависимости от того, является ли ψ E_6 -инвариантной. Уравнение (16.4.6) приводит к более сложному результату. Если ψ преобразуется по представлению T_j для F , то из уравнения (16.4.6) следует, что надо оставить те компоненты из 27, которые также преобразуются относительно \bar{F} по представлению T_j . В силу соотношения (16.4.5) это означает, что надо оставить те компоненты, которые относительно G преобразуются по представлению R_j .

Таким образом, данная нулевая мода ψ на K_0 не приводит к появлению полного E_6 -мультиплета, когда вместо K_0 теория формулируется на K . Обращая рассуждение, предположим, что нас интересуют безмассовые фермионы, преобразующиеся по представлению R_i группы G . Согласно уравнению (16.4.5), они преобразуются относительно \bar{F} по представлению T_i . Следовательно, уравнение (16.4.6) утверждает, что эти моды происходят из дираковских нулевых мод на K_0 , преобразующихся относительно F по представлению T_i . Это означает, например, что безмассовые u -кварки и безмассовые заряженные лептоны, если они преобразуются по различным представлениям группы G , происходят из различных нулевых мод оператора Дирака на K_0 . Это в свою очередь означает, что физический u -кварк связан группой E_6 не с физическими заряженными лептонами, а с теми модами на K_0 , которые нарушают условие (16.4.6) и не имеют ничего общего с физикой на K .

В случае четырехмерных объединенных теорий часто задается вопрос: «Какой заряженный лептон является партнером u -кварка по $SU(5)$ (или по E_6)?» В контексте настоящего построения на этот вопрос ответить нельзя, поскольку нет естественного способа распределить физические фермионы по $SU(5)$ - или E_6 -мультиплетам. Вопрос о том, какой лептон связан с u -кварком по $SU(5)$, обычно возникает из-за тех следствий, которые возникают для вероятностей мод распада протона. Если u -кварк испускает X - или Y -бозон ($SU(5)$ -партнеры фотона, триплетные по цвету), то какой лептон может родиться?

В настоящем рассмотрении на последний вопрос отвечать не надо, поскольку триплетных по цвету $SU(5)$ -партнеров фотона не существует (они нарушают условие (16.4.6)). Так нарушается E_6 ! Протон, конечно, будет все же распадаться. Имеется бесконечно много массивных векторных бозонов с такими же квантовыми числами, взаимодействиями и массой того же порядка, что у обычных X - и Y -бозонов. Но естественного способа сказать, какой из них является $SU(5)$ -партнером фотона, не существует. Вопрос о вероятностях мод распада протона по-прежнему имеет смысл, но данные, необходимые для ответа на него, уже другие.

Когда классическая теория поля формулируется на K_0 , она приводит к различным четырехмерным полям ϕ^i , преобразующимся по различным представлениям группы E_6 с множеством разных E_6 -инвариантных взаимодействий, таких как кубическое взаимодействие $\lambda_{ijk}\phi^i\phi^j\phi^k$. Если же она формулируется на $K = K_0/F$, то классические взаимодействия представляют собой те же λ_{ijk} (поскольку исходным пунктом является точно тот же классический лагранжиан), но некоторые из полей ϕ^i (те, которые нарушают условие (16.4.6)) надо положить равными нулю. Состояния ϕ и ϕ' на K , происходящие из одного и того же E_6 -мультиплета на K_0 , имеют взаимодействия, которые связаны по E_6 . Состояния ϕ и ϕ' на K , происходящие из разных E_6 -мультиплетов на K_0 , имеют взаимодействия, которые не связаны по E_6 , даже если теория формулируется на K_0 и тем более если она формулируется на K .

Теперь мы можем применить эти сведения, чтобы прийти к очень важному заключению. На K_0 имеется только один мультиплет безмассовых E_6 -калибровочных бозонов в присоединенном представлении, поэтому калибровочные константы сильных, слабых и электромагнитных взаимодействий в четырехмерном мире удовлетворяют (на древесном уровне) стандартным E_6 -соотношениям. Следовательно, обычное вычисление Джорджи — Куинн — Вайнберга величины $\sin^2 \theta$ и масштаба объединения остается справедливым и в этой ситуации. Это вычисление величины $\sin^2 \theta$, которое мы рассмотрим в общих чертах в разд. 16.9, является, конечно, одним из значительных успехов великого объединения.

Но так как физические кварки, разрешенные на K , не возникают на K_0 как E_6 -партнеры друг друга, их юкавские константы взаимодействия не подчиняются никаким E_6 -соотношениям. Не существует E_6 -соотношений ни между массами кварков и лептонов, ни между массами u - и d -кварков. Но это и хорошо, поскольку такие соотношения связаны с неприятными проблемами, особенно в таких моделях, как данная с простым

составом хиггсовых полей. (Единственные хиггсовы бозоны с взаимодействием с кварками и лептонами происходят из мультиплета 27 группы E_6 .)

Сделанные выше замечания сформулированы в терминах теории поля, но они остаются справедливыми и в теории струн. Действительно, рассуждение, касающееся справедливости E_6 -отношений между калибровочными константами, справедливо в произвольной классической теории поля, сформулированной на $K = K_0/F$, поэтому оно применимо, в частности, к бесконечнокомпонентной классической теории поля, которую можно вывести из теории струн. Имеется одно аналогичное утверждение, которое можно понять только с позиций теории струн. До нарушения группы $E_8 \times E_8$ калибровочные константы для двух групп E_8 равны. После вложения спиновой связности, скажем в первую группу E_8 , что нарушает группу $E_8 \times E_8$ до $E_6 \times E_8$, остаются ли равными калибровочные константы для E_6 и для E_8 ? В классической теории поля, вообще говоря, это не так. Например, если $F_{(1)}$ и $F_{(2)}$ — напряженности поля для двух групп E_8 , то можно ожидать взаимодействия типа $\Delta L = \text{tr } F_{(1)}^2 \cdot \text{tr } F_{(2)}^2$. В результате вложения спиновой связности в первую группу E_8 это дало бы член вида $\Delta L = \langle \text{tr } F_{(1)}^2 \rangle \cdot \text{tr } F_{(2)}^2$, который вносит вклад в калибровочную константу для ненарушенной E_8 , не влияя на калибровочную константу для E_6 . В теории струн такие поправки не возникают: E_6 - и E_8 -константы равны. Это можно доказать, воспользовавшись σ -модельной формулировкой распространения для струны во внешних фоновых полях, введенной в разд. 3.4, но эту тему мы не исследуем в данной книге.

16.4.3. Подсчет безмассовых частиц

При подсчете безмассовых частиц, возникающих в результате вложения спиновой связности в калибровочную группу, мы встретились с одним интересным свойством, важность которого не была подчеркнута. Чистое число киральных мультиплетов 27 определяется теоремой об индексе как половина эйлеровой характеристики многообразия K . Но после более тщательного рассмотрения мы обнаружили, что можем предсказать по отдельности число 27-плетов левой и правой киральности. Они даются числами Ходжа $h^{1,1}$ и $h^{2,1}$ соответственно. Например, для квинтики в CP^4 мы обнаружили один 27-плет положительной киральности и 101 — отрицательной киральности. С точки зрения низкоэнергетической физики очень странно, что 27-плет положительной киральности не спаривается, чтобы приобрести массу, с 27-плетом отрицательной киральности. Это можно понять только при изучении микроскопической структуры.

Проверим это для нашей упрощенной модели, основанной на гиперповерхности Q в CP^4 , которая определяется нулями полинома пятой степени P , такого как $P = Z_1^5 + Z_2^5 + \dots + Z_5^5$. Мы определили преобразования

$$A: Z_k \rightarrow Z_{k+1}, \quad (16.4.9)$$

$$B: Z_k \rightarrow \alpha^k Z_k, \quad (16.4.10)$$

где $\alpha = e^{2i\pi/5}$. Они удовлетворяют соотношениям $A^5 = B^5 = 1$ и $AB = BA$, а поэтому порождают группу $F \approx Z_5 \times Z_5$. В модели, основанной на $K = Q/F$, имеем $N_{gen} = 4$.

Поскольку F — абелева группа, ее представления легко описать. Представление группы F является одномерным представлением, которое получается указанием значений для A и B , в качестве которых можно взять любые корни пятой степени из единицы:

$$A = \alpha^s, \quad B = \alpha^t, \quad (16.4.11)$$

где s и t — любые целые числа, удовлетворяющие ограничению $0 \leq s, t \leq 4$. Всего в группе F имеется 25 представлений. В зависимости от выбора петель Вильсона в разложении (16.4.8) может появиться любое представление T_i группы F , так что мы можем рассмотреть и общий случай. Если T_i — тривиальное представление, то в силу предыдущего обсуждения мы ожидаем, что $n_i^- = N_{gen} + 1 = 5$. Если же T_i — нетривиальное представление, то мы ожидаем, что $n_i^- = 4$. Проверим эти утверждения.

Ключом к решению является связь между элементами группы когомологий $H^{2,1}(Q)$ и полиномами пятой степени. В самом деле, как мы видели в разд. 16.2.1, все 101 элемент из $H^{2,1}$ соответствуют полиномам пятой степени, которые не более чем кубичны по каждой из переменных Z_i . Назовем их допустимыми полиномами. Легко подсчитать безмассовые фермионы на гиперповерхности Q , преобразующиеся по данному представлению T_i группы F . Надо просто исследовать допустимые полиномы и узнать, сколько из них преобразуются по данному представлению группы F . Утверждение, что для тривиального представления $n_0^- = 5$, а для нетривиального $n_i^- = 4$, равносильно утверждению, что среди 101 допустимого полинома есть пять инвариантных относительно F и по четыре полинома для каждого из 24 нетривиальных представлений группы F . На самом деле мы уже указали пять инвариантных допустимых полиномов в разд. 16.3.2, когда мы явно вычисляли числа Ходжа для $K = Q/E$. Теперь остается показать, что в каждом из 24 нетривиальных секторов имеется ровно по четыре допустимых поли-

нома. Общий случай мы оставляем читателю и сосредоточим внимание на одном интересном примере.

Поскольку F порождается преобразованиями A и B , выбор гомоморфизма группы F в E_6 равносильно выбору двух петель Вильсона U_A и U_B . Мы рассмотрим пример, когда $U_A = 1$ и

$$U_B = (1) \otimes \begin{pmatrix} \alpha & & \\ & \alpha & \\ & & \alpha^{-2} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \alpha & & \\ & \alpha & \\ & & \alpha^{-2} \end{pmatrix}. \quad (16.4.12)$$

Это нарушает E_6 до лево — право-симметричного расширения стандартной модели $SU(3)_C \times SU(2)_L \times SU(2)_R \times U(1) \times U(1)$. Вспоминая, что представление 27 для E_6 имеет разложение относительно $SU(3)_C \times SU(3)_L \times SU(3)_R$ вида $(3, \bar{3}, 1) \oplus (1, 3, \bar{3}) \oplus (\bar{3}, 1, 3)$, можно легко определить, как различные кварки и лептоны преобразуются относительно U_B . Действительно, возникают все корни пятой степени из единицы. Для детального понимания четырехмерных безмассовых фермионов, возникающих в этой модели, необходимо изучить допустимые полиномы, инвариантные относительно A и преобразующиеся относительно B как α^t , $t = 0, 1, \dots, 4$. Мы привели в (16.3.15) пять таких полиномов, которые возникают для $t = 0$, так что наша задача состоит в том, чтобы найти те полиномы, которые возникают для $t \neq 0$, в частности, показать, что их число всегда равно четырем. Четыре полинома, возникающие в каждом из четырех возможных секторов, имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} t=1: & (Z_1^3 Z_3 Z_5 + \dots), & t=2: & (Z_1^3 Z_2^2 + \dots), \\ & (Z_1^3 Z_4^2 + \dots), & & (Z_1^3 Z_4 Z_5 + \dots), \\ & (Z_1^2 Z_2^2 Z_5 + \dots), & & (Z_1^2 Z_2^2 Z_4 + \dots), \\ & (Z_1^2 Z_2 Z_3 Z_4 + \dots); & & (Z_1^2 Z_2 Z_3 Z_5 + \dots); \\ t=3: & (Z_1^3 Z_5^2 + \dots), & t=4: & (Z_1^3 Z_3^2 + \dots), \\ & (Z_1^3 Z_2 Z_3 + \dots), & & (Z_1^3 Z_2 Z_4 + \dots), \\ & (Z_1^2 Z_3^2 Z_5 + \dots), & & (Z_1^2 Z_2^2 Z_3 + \dots), \\ & (Z_1^2 Z_2 Z_4 Z_5 + \dots); & & (Z_1^2 Z_3 Z_4 Z_5 + \dots). \end{aligned} \quad (16.4.13)$$

В каждом случае символ «+ ...» обозначает добавление членов, получающихся циклическими перестановками переменных. Этот результат подтверждает, что в каждом секторе с $t \neq 0$ имеется четыре левых безмассовых мультиплетов и ни одного

правого, в то время как для $t = 0$ имеется пять левых безмассовых мультиплетов и один правый безмассовый мультиплет.

Обсудим теперь физические следствия. Выбор матрицы U_V был сделан, чтобы синглеты по цвету имели $t \neq 0$. Но некоторые из синглетов по цвету имеют $t = 0$. Следовательно, помимо четырех E_6 -поколений, которые в этой модели предсказывает теорема об индексе, мы получаем дополнительные безмассовые частицы, представляющие собой синглеты по цвету. На самом деле эти дополнительные состояния преобразуются относительно группы слабых взаимодействий $SU(2)_L \times SU(2)_R$ как $(1/2, 1/2) \oplus (0, 0)$, поскольку это те представления, которые при нашем выборе U_V отвечают сектору $t = 0$. Моды в представлении $(1/2, 1/2)$ особенно интересны, так как они имеют квантовые числа (и взаимодействия) обычных слабо взаимодействующих дублетов.

Рассмотрим теперь физическую проблему, к которой мы хотим применить полученные результаты. Одной из классических проблем теорий великого объединения является так называемая проблема тонкой настройки. Почему слабо взаимодействующий дублет является таким легким (его порядок массы не больше 1 ТэВ) по сравнению с фундаментальными масштабами масс великого объединения и гравитации? Такую его легкость в отличие от легкости наблюдаемых кварков и лептонов нельзя трактовать как следствие калибровочной инвариантности. Особое беспокойство по поводу этой проблемы определяется тем, что триплетные по цвету скаляры, которые связаны по группе великого объединения с обычными хиггсовыми бозонами, должны быть чрезвычайно тяжелыми, так как иначе они приводили бы к неприемлемо высокой скорости распада протона.

В отсутствие суперсимметрии не известно разумного ответа на эти вопросы в контексте четырехмерного великого объединения¹⁾. В суперсимметричных теориях великого объединения в четырех измерениях первая часть проблемы сильно облегчается: не так трудно объяснить легкость хиггсова дублета, поскольку он лежит в одном мультиплете с фермионами, которые могут быть легкими в силу разнообразных причин, и поскольку теоремы о неперенормировках оставляют хиггсов дублет безмассовым во всех порядках, если он был безмассовым на древесном уровне. Но в суперсимметричном великом объединении

¹⁾ Один из возможных подходов дают модели с динамическим нарушением симметрии слабых взаимодействий, но они связаны с огромными феноменологическими трудностями и, по-видимому, практически несовместны с великим объединением.

очень трудно объяснить, почему хиггсов дублет легкий в то время, как его триплетные по цвету партнеры сверхтяжелые.

В одном важном отношении суперсимметрия усложняет задачу. В суперсимметричных теориях кварки имеют триплетных по цвету партнеров, массы которых не могут быть больше масштаба нарушения суперсимметрии. Если суперсимметрия сохраняется до низких энергий, то скалярные партнеры кварков будут вызывать распад протона с неприемлемо высокой скоростью, если этому что-то не помешает. В обычном суперсимметричном великом объединении это предотвращается тем, что постулируется дискретная симметрия, запрещающая нежелательные взаимодействия. Это может быть, например, какая-то Z_2 -симметрия X , относительно которой кварковые и лептонные суперполя Q и L являются нечетными, а хиггсовы суперполя H — четными. Такая симметрия разрешает требуемые взаимодействия суперполей $H\bar{L}\bar{L}$ и $H\bar{Q}Q$, а нежелательные взаимодействия QQQ запрещает.

Исследуем теперь эти вопросы в контексте обсуждавшихся выше суперструнных моделей. Без каких-либо специальных приспособлений, а только с предпочтительным выбором дискретных параметров, определяющих способ нарушения симметрии, мы получили безмассовые «хиггсовы бозоны», которые имеют сверхтяжелых триплетных по цвету партнеров. Это дополнительные безмассовые моды, которые не предсказывают теоремы об индексе, но которые появляются при $t = 0$ в описанной выше конструкции. Эта часть проблемы вызывает затруднения в суперсимметричном великом объединении в четырех измерениях. Остается объяснить, почему триплетные по цвету партнеры кварков не приводят к распаду протона. Обычно это простая часть проблемы: в рамках четырехмерной теории поля можно произвольным образом постулировать нужные симметрии. Но в данном случае такого произвольного выбора сделать нельзя. Наоборот, мы должны найти нужные симметрии, например, обнаруживая, что они автоматически появляются в случае некоторого подходящего многообразия с $SU(3)$ -голономией. Эти и другие причины побуждают нас исследовать в разд. 16.5 глобальные симметрии, возникающие в струнной компактификации. Мы увидим, что наша упрощенная модель с четырьмя поколениями в значительной степени приближается к тому, чтобы иметь правильные глобальные симметрии, но не достигает их. Вычисления по Джорджи — Куини — Вайнбергу, описанные в разд. 16.9, выявляют еще одну проблему в этой упрощенной модели.

Полезно, по-видимому, объяснить другим способом, почему нарушение симметрии с помощью петель Вильсона облегчает

задачу, связанную с получением легких хиггсовых дублетов со сверхтяжелыми триплетными по цвету партнерами. Эта проблема обычно возникает потому, что нужная иерархия масс для скаляров получается только в том случае, если хиггсовы бозоны, нарушающие симметрию великого объединения, имеют в точности правильные вакуумные средние. В типичной ситуации стандартный электрослабый дублет будет безмассовым только в том случае, если хиггсов бозон ϕ в присоединенном представлении группы великого объединения имеет в точности правильные собственные значения; это искусственное требование, так как такие собственные значения зависят от произвольных констант связи в исходном лагранжиане. Нарушение симметрии петлями Вильсона накладывает своего рода условие квантования на собственные значения ϕ , так как ϕ заменяется групповым элементом U , удовлетворяющим условию типа $U^n = 1$. Неудивительно, что это естественное квантование хиггсовых собственных значений создает возможности решения проблемы тонкой настройки.

16.4.4. Дробные электрические заряды

Одна из тем разд. 16.4 — описание связи обсуждающихся струнных моделей с обычным великим объединением. До сих пор мы обсуждали аналоги большинства характерных предсказаний теории великого объединения, но одно еще предстоит рассмотреть. Одна из характерных черт великого объединения состоит в том, что оно объясняет квантование электрического заряда: включение четырехмерной теории в теорию с объединенной группой G предсказывает, что квант электрического заряда — это наименьший заряд, который возникает в любом из представлений группы G . Настоящая причина такого предсказания заключается в том, что обычное нарушение калибровочной симметрии хиггсовыми бозонами можно непрерывным образом исключить, изменяя константы связи так, чтобы сделать вакуумные средние хиггсовых полей равными нулю. Поэтому должна иметься возможность для электрических зарядов плавно переходить в такие заряды, которые разрешены в случае ненарушенной группы G , или, другими словами, в те заряды, которые встречаются в представлениях группы G . Но если фундаментальная группа многообразия конечна, то вильсоновские петли U удовлетворяют условиям квантования типа $U^n = 1$ и их нельзя исключить непрерывным образом. Следовательно, вопрос о квантовании электрического заряда должен быть рассмотрен заново.

В теории поля в противоположность теории струн нарушение симметрии с помощью петель Вильсона не нарушает стан-

дартного квантования электрического заряда. Причина заключается в том, что в теории поля переход от односвязного многообразия K_0 к фактор-пространству $K = K_0/F$ означает просто, что отбрасываются некоторые из состояний — те, которые не удовлетворяют условию (16.4.2). Поскольку состояния на K_0 укладываются в мультиплеты для G , все они удовлетворяют обычному условию квантования электрического заряда; поэтому то же самое справедливо и для подмножества состояний, сохраняющегося при работе на K и наложении ограничений (16.4.2).

Но в теории струн состояния на $K = K_0/F$ не являются просто подмножеством состояний, которые возникли бы, если теория была сформулирована на K_0 . Нестягиваемые петли на K мы рассматривали как техническое средство для объяснения нарушения симметрии, но они играют также важную физическую роль. Замкнутая струна может обернуться вокруг такой нестягиваемой петли, как показано на рис. 16.2, что дает новую ветвь физического спектра, возникающую в том случае, когда теория формулируется на K , а не на K_0 . В теории, содержащей только замкнутые струны, замкнутая струна, обернувшаяся вокруг нестягиваемой петли, не может разорваться, поэтому наименьшее состояние в этом секторе должно быть стабильным. Если радиус многообразия K порядка r , то масса наименьшего состояния в закрученном секторе будет порядка r/α' ; таким образом, если параметр разложения α'/r^2 в теоретико-полевоом описании мал, то эти состояния будут иметь массы по крайней мере порядка $1/\sqrt{\alpha'}$. Это означает, что в теории гетеротических струн, в которой замкнутые струны несут электрический заряд, квантование электрического заряда необходимо проверить. В случае теории суперструн типа I, по-видимому, применимо обычное квантование электрического заряда.

Прежде чем приступить к вычислению, отметим некоторые общие факты, которые накладывают ограничения на возможный ответ. Пусть γ — гомотопический класс некоторой замкнутой струны в $\pi_1(K)$. Любые два состояния замкнутой струны, лежащие в одном и том же гомотопическом классе, можно связать друг с другом с помощью испускания и поглощения «обыкновенных» замкнутых струн, поэтому их электрические заряды должны отличаться на целое число. Разница между электрическим зарядом синглетной по цвету замкнутой струны

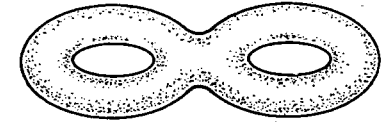


Рис. 16.2. В случае не односвязного многообразия замкнутая струна может намотаться на нестягиваемую петлю.

и целым кратным заряда электрона должна зависеть только от гомотопического класса замкнутой струны. Пусть μ_γ — этот дефект заряда замкнутой струны в гомотопическом классе γ , т. е. его отличие от целого значения. Когда две замкнутые струны из гомотопических классов γ и γ' соединяются, они образуют гомотопический класс $\gamma\gamma'$. Сохранение электрического заряда означает, что при этом дефект заряда должен складываться, поэтому

$$\mu_\gamma + \mu_{\gamma'} = \mu_{\gamma\gamma'} \pmod{1}. \quad (16.4.14)$$

Символ $\pmod{1}$ в этом уравнении отражает тот факт, что μ определено только с точностью до целого числа. Предположим теперь, что фундаментальная группа многообразия K конечна. Тогда для любого данного гомотопического класса γ существует некоторое целое число n , такое, что обертывание n раз вокруг γ дает стягиваемую петлю, $\gamma^n = 1$. Тогда из уравнения (16.4.14) следует, что $n \cdot \mu_\gamma = 0 \pmod{1}$, или, другими словами, что $\mu_\gamma = k/n$ для некоторого целого k . Мы хотим вычислить это k .

Чтобы это сделать, будем работать в рамках фермионной формулировки $E_8 \times E_8$ -гетеротических суперструн, когда E_8 реализована на шестнадцати левых фермионах λ^A , $A = 1, \dots, 16$. Петлю Вильсона U_γ можно диагонализировать, переходя к комплексному базису из восьми λ_i , $i = 1, \dots, 8$, и их комплексно-сопряженных λ_i^* , так что

$$U_\gamma \lambda_i = e^{2i\pi m_i/n} \lambda_i \quad (16.4.15)$$

для некоторых целых m_i . Поскольку оператор электрического заряда Q коммутирует с U_γ (иначе электромагнетизм был бы спонтанно нарушен!), Q можно диагонализировать одновременно с U_γ :

$$Q \lambda_i = q_i \lambda_i, \quad (16.4.16)$$

где числа q_i — электрические заряды для λ_i . Для простоты будем предполагать, что U_γ и Q вложены в одну и ту же группу E_8 .

Так как дефект электрического заряда μ_γ является топологическим инвариантом, чтобы его вычислить, мы можем рассматривать струну, взаимодействующую только с петлей Вильсона U . Рассмотрим те λ , которые лежат в NS-подобном секторе, где они удовлетворяют антипериодическим граничным условиям. Для $U = 1$ граничное условие имеет вид $\lambda_i(\sigma + \pi) = -\lambda_i(\sigma)$, и уровни энергии пропорциональны $\varepsilon = 2k + 1$, где k — произвольное целое число. Для более общего U граничное:

условие имеет вид $\lambda_i(\sigma + \pi) = -U \lambda_i(\sigma)$, или в терминах базиса (16.4.15)

$$\lambda_i(\sigma + \pi) = -e^{2i\pi m_i/n} \lambda_i. \quad (16.4.17)$$

Уровни энергии для λ тогда имеют вид

$$E_k(m_i) = 2(k - m_i/n) + 1, \quad (16.4.18)$$

где по-прежнему k — произвольное целое число. Дефект заряда μ_γ есть просто электрический заряд «заполненного моря Дирака», нормально упорядоченный путем вычитания значения при $m_i = 0$. Заряд Q_i дираковского моря из фермионов типа λ_i с отрицательной энергией есть просто q_i , умноженное на «число состояний с отрицательной энергией». Последнее, разумеется, требует какой-то регуляризации, поэтому попробуем записать это в виде

$$Q_i = q_i \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sum_{k < 0} e^{-\varepsilon E_k(m_i)}, \quad (16.4.19)$$

где множитель $e^{-\varepsilon E_k}$ включен для того, чтобы регуляризовать вклад состояний с очень большой отрицательной энергией. После явного вычитания значения при $m_i = 0$, выражение (16.4.19) заменяется выражением

$$Q_i = q_i \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sum_{k < 0} (e^{-\varepsilon E_k(m_i)} - e^{-\varepsilon E_k(0)}). \quad (16.4.20)$$

Для значений E_k , определенных выражением (16.4.18), сумму и предел в формуле (16.4.20) легко вычислить, что дает

$$Q_i = q_i m_i/n. \quad (16.4.21)$$

Суммируя выражения (16.4.21) по i , мы находим, наконец, значение дефекта заряда:

$$\mu_\gamma = \frac{1}{n} \sum_i q_i m_i. \quad (16.4.22)$$

Мы видим, в частности, что обычный закон квантования электрического заряда, вообще говоря, не выполняется; $\sum_i q_i m_i$ представляет собой целое кратное обычного кванта электрического заряда¹⁾, но множитель $1/n$ в (16.4.22) означает, что струны, намотанные на нестягиваемую петлю, могут иметь электрический заряд, который в n раз меньше, чем заряд

¹⁾ При стандартном вложении цветовой группы $SU(3)$ в $SO(16)$ или E_8 кварки трех цветов с $q_i = 1/3$ и одним и тем же значением m дают целочисленный вклад в $\sum q_i m_i$.

других синглетных по цвету частиц, не подверженных конфайнменту.

Это завершает обсуждение квантования электрического заряда. Однако осознание того факта, что квант электрического заряда может быть меньшим, чем заряд электрона, немедленно поднимает следующий вопрос: «Что происходит с монополями?» В любой $U(1)$ -калибровочной теории на бесконечности можно определить поле монополя Дирака. Квантовомеханическое взаимодействие монополя заряда g и заряженной частицы заряда q непротиворечиво, если выполняется условие Дирака $g = 2\pi/q \cdot$ (целое число). Если q в n раз меньше, чем заряд электрона e , то g должно быть в n раз больше, чем обычный квант Дирака $2\pi/e$. Как это может быть?

В $U(1)$ -калибровочной теории монополярное калибровочное поле, определенное на бесконечности, нельзя продолжить на все пространство без того, чтобы столкнуться с сингулярностью. В начале 70-х годов Поляков и 'Хофт показали, что в четырехмерных объединенных теориях поле монополя всегда можно «развернуть» и получить несингулярную конфигурацию, магнитный заряд которой равен кванту Дирака. Если же объединение происходит не в четырех, а только в десяти измерениях, то рассмотрение модифицируется. В этом случае мы не можем развернуть монополь в четырехмерной объединенной калибровочной группе, поскольку ее не существует. Нарушение симметрии с помощью петель Вильсона означает, что приближение, в котором теория представляет собой четырехмерную теорию с E_6 -симметрией, не существует. Группа симметрии E_6 применима только в десяти измерениях, и мы должны попытаться развернуть монополь в десятимерной калибровочной группе. Точнее говоря, в десятимерной теории надо начинать с монополя Дирака не на сфере S^2 на бесконечности, а на $S^2 \times K$, где K — пространство Калуцы — Клейна. Его надо попытаться продолжить без сингулярностей с $S^2 \times K$ на $R^3 \times K$, где R^3 — обыкновенное трехмерное пространство. Топологическая задача здесь совершенно другая, и нет никаких причин ожидать того же ответа. Действительно, решение топологической задачи, требующее применения методов, которые мы не можем здесь развить, показывает, что минимальный магнитный заряд всегда равен $n \cdot 2\pi/e$, если минимальный электрический заряд равен e/n .

16.4.5. Обсуждение

Мы видели, что нарушение симметрии петлями Вильсона сохраняет достижения теорий обычного великого объединения. По крайней мере, что касается подсчета состояний, состояния

укладываются в представления объединенной группы, возможно с добавлением вещественных представлений. Справедливо обычное вычисление величины $\sin^2 \theta$ по ренормгруппе. С другой стороны, имеются и некоторые интересные отличия. Юкавские константы не удовлетворяют теоретико-групповым соотношениям (но удовлетворяют другим соотношениям, которые мы ниже исследуем). Существуют новые возможности для решения проблемы тонкой настройки. Квантование электрического и магнитного зарядов не имеет обычного вида. Большинство отличий между обычным великим объединением и нарушением симметрии с помощью петель Вильсона коренится в том факте, что петли Вильсона удовлетворяют естественному условию квантования в противоположность хиггсовым бозонам, отвечающим нарушению симметрии в обычном великом объединении.

Одной из главных привлекательных черт нарушения симметрии с помощью петель Вильсона является то, что не вводятся хиггсовы бозоны или хиггсов потенциал, а используется только то, что уже имеется (если K неодносвязно). Другая главная привлекательная черта состоит в том, что нарушение симметрии с помощью петель Вильсона зависит только от дискретных выборов и поэтому имеет квазитопологическую природу. Это открывает возможность того, что со временем удастся объяснить нарушение симметрии петлями Вильсона исходя из общих качественных соображений, а не на основе попыток решить трудную динамическую задачу.

Мы обсуждаем нарушение симметрии с помощью петель Вильсона так, как будто это единственный механизм нарушения симметрии великого объединения. Но имеется возможность, что работают также другие механизмы. Ниже мы обсудим другой механизм нарушения E_6 , использующий плоские направления суперпотенциала. Такой механизм может дать совершенно естественное нарушение E_6 до $SO(10)$ или $SU(5)$. Возможно, что лишь последняя группа должна нарушаться с помощью петель Вильсона. Большая часть наших рассмотрений без особых изменений переносится и на такие случаи.

16.5. Глобальные симметрии

При обсуждении проблемы тонкой настройки мы обнаружили, что можно легко получить безмассовые хиггсовы дублеты, имеющие сверхтяжелых триплетных по цвету партнеров, но для удовлетворительного объяснения высокой стабильности протона требуется какой-то механизм подавления кубического взаимодействия кварковых суперполей. Одним из возможных механизмов

для достижения этого являются глобальные симметрии; они интересны также во многих других отношениях. Настоящий раздел мы посвятим обсуждению глобальных симметрий, возникающих на многообразиях с $SU(3)$ -голономией. Начнем с некоторых общих вопросов.

16.5.1. Сохранение CP -инвариантности в суперструнных моделях

На многообразии K с группой голономии $SU(3)$ имеются определенные ковариантно постоянные тензорные поля. Наиболее важные из них — кэлерова форма k , представляющая собой $(1, 1)$ -форму, и голоморфная форма объема ω , представляющая собой $(3, 0)$ -форму. Если группа голономии многообразия K есть $SU(3)$ (а не ее подгруппа), то с точностью до нормировки k является единственной ковариантно постоянной $(1, 1)$ -формой. Поэтому любая изометрия f многообразия K отображает k в себя с точностью до множителя. Поскольку кэлерова форма k вещественна, этот множитель равен ± 1 .

Если $f \cdot k = +k$, то f сохраняет комплексную структуру $J^i_j = g^{im}k_{mj}$ и называется голоморфным отображением многообразия K в себя. Оно отображает локальные голоморфные координаты в локальные голоморфные координаты. С другой стороны, если $f \cdot k = -k$, то f является антиголоморфным отображением, которое изменяет знак комплексной структуры и заменяет голоморфные координаты на антиголоморфные. Многообразии с $SU(3)$ -голономией может допускать, а может не допускать антиголоморфную изометрию. Например, гиперповерхность в CP^4 , заданная нулями полинома

$$P = \sum_{i=1}^5 Z_i^5 + \mu Z_1 Z_2 Z_3 Z_4 Z_5, \quad (16.5.1)$$

инвариантна относительно антиголоморфного преобразования $Z_i \rightarrow Z_i^*$, если μ вещественно. Но она не обладает ни этой, ни какой-либо другой антиголоморфной симметрией при общих комплексных μ .

Качественное значение антиголоморфной симметрии обусловлено тем фактом, что 6-форму Леви-Чивиты ε , соответствующую ориентации многообразия K , можно записать как $\varepsilon = k \wedge k^i \wedge k$. Таким образом, в случае трех комплексных измерений преобразование, которое меняет знак формы k на обратный, обращает ориентацию. С физической точки зрения это отвечает тому, что антиголоморфные симметрии связаны, как мы увидим ниже, с CP -инвариантностью.

Рассмотрим теорию струн, компактифицированную на многообразии $M^4 \times K$. В десятимерных суперструнных теориях, за исключением теории типа IIA, четность в десятимерном смысле не сохраняется: эти теории не инвариантны относительно преобразований (даже если это изометрии), обращающих ориентацию многообразия $M^4 \times K$. Такие преобразования заменяли бы безмассовые фермионы в представлении 16 касательной группы $SO(1, 9)$, которые имеются в теории, на фермионы в представлении $16'$, которых в теории нет. Обращающая ориентацию изометрия \bar{C} многообразия K обращает ориентацию и для $M^4 \times K$, поэтому она не является симметрией теории. Подобным образом обычное преобразование четности P для некомпактифицированных координат, а именно $(t, x, y, z) \rightarrow (t, -x, -y, -z)$, обращает ориентацию пространства M^4 , а также $M^4 \times K$, а следовательно, не является симметрией. Но комбинация CP обращает ориентацию для M^4 , так и для K , поэтому она сохраняет ориентацию для $M^4 \times K$ и является симметрией. Поскольку это комбинация преобразования P с некоторой внутренней симметрией, связанной с комплексным сопряжением, можно ожидать, что CP соответствует понятию обычного CP , и это действительно так. Чтобы убедиться в этом, заметим, что представление 16 группы $SO(1, 9)$ разлагается относительно $SO(1, 3) \times SO(6)$, как $(2, 4) \oplus (2', \bar{4})$, где 2 и $2'$ — левые и правые спиноры для $SO(1, 3)$, а 4 и $\bar{4}$ — спиноры положительной и отрицательной киральности для $SO(6)$. Преобразование P меняет местами 2 и $2'$ для $SO(1, 3)$, в то время как обращающее четность преобразование \bar{C} многообразия K меняет местами 4 и $\bar{4}$. Следовательно, CP заменяет $(2, 4)$ на $(2', \bar{4})$. Мультиплеты в представлениях 27 и $\bar{27}$ группы E_6 мы получили из представлений 4 и $\bar{4}$ для $SO(6)$, поэтому CP заменяет левые мультиплеты 27 на правые $\bar{27}$ и заслуживает названия CP .

16.5.2. R -преобразования в суперструнных моделях

Рассмотрим теперь голоморфные симметрии, оставляющие кэлерову форму k инвариантной. Голоморфное преобразование f отображает $(3, 0)$ -формы в $(3, 0)$ -формы, поэтому оно должно отображать ковариантно постоянную $(3, 0)$ -форму ω в себя с точностью до множителя:

$$f \cdot \omega = e^{i\beta} \omega \quad (16.5.2)$$

для некоторого β . В разд. 16.3.2 мы показали, что $\beta = 0$, если f действует свободно, но в общем случае это не верно. Величина

β имеет качественное значение. Три-форма ω связана с ковариантно постоянным спинором положительной киральности η соотношением $\omega_{ijk} = \eta^T \Gamma_{ijk} \eta$. Очевидно, что $f \cdot \eta = \pm e^{i\beta/2} \eta$. (Знак выбирают произвольно, поскольку f определено только с точностью до поворота на 2π .) Ковариантно постоянный спинор η генерирует преобразования ненарушенной суперсимметрии. Поэтому ненарушенные суперсимметрии преобразуются так же, как η . Если $\beta \neq 0$, то f не коммутирует с ненарушенными суперсимметриями в четырех измерениях, а поворачивает их на фазу $e^{\pm i\beta/2}$ для положительной или отрицательной киральности. При рассмотрении четырехмерной суперсимметрии такую симметрию обычно называют R -симметрией. Суперпотенциал W не инвариантен относительно R -симметрии, а изменяет фазу. В следующем разделе мы даем примеры голоморфных преобразований f , являющихся и не являющихся R -симметриями.

16.5.3. Глобальные симметрии упрощенной модели

Анализ глобальных симметрий на многообразиях с $SU(3)$ -голомомией приводит к удивительно богатой структуре. Чтобы приобрести некоторый опыт, рассмотрим наш обычный случай — квинтику Q в CP^4 — гиперповерхность, определенную нулями полинома пятой степени. Для начала возьмем полином минимального вида

$$P = Z_1^5 + Z_2^5 + \dots + Z_5^5. \quad (16.5.3)$$

Чтобы найти симметрии гиперповерхности, мы ищем простые линейные преобразования координат Z_i , отображающие полином P в себя с точностью до фазового множителя. Таких отображений много. Полином P инвариантен относительно 120 перестановок переменных Z_k . Он инвариантен также относительно фазовых преобразований $Z_k \rightarrow \alpha^{m_k} Z_k$, где $\alpha = e^{2i\pi/5}$, а m_k — произвольные элементы группы Z_5 (целые числа по модулю пять). Поскольку общий множитель у Z_k несуществен в CP^4 , преобразования со степенями $\{m_k\}$ и $\{m_k + 1\}$ эквивалентны; только четыре из пяти элементов m_k являются независимыми. Получаем группу симметрий из $120 \times 5^4 = 75\,000$ элементов. Это группа симметрий модели со 100 поколениями, получающейся из полинома (16.5.3).

Мы хотим узнать, какие из этих симметрий являются R -симметриями, или, в более общем виде, как преобразуется относительно них голоморфная 3-форма ω . В разд. 15.4.3 мы вывели несколько явных выражений для ω . Одно из них, специализи-

рованное для случая данного выбора полинома P , имеет вид

$$\omega = dZ_1 \wedge dZ_2 \wedge dZ_3 / Z_4^4. \quad (16.5.4)$$

Используя этот вид формы ω , получаем, что ω меняет знак при перестановке $Z_1 \leftrightarrow Z_2$ (где Z_k для $k > 2$ фиксированы). Вследствие имеющейся перестановочной симметрии (которая неявна в выражении (16.5.4) отсюда следует, что ω нечетна относительно любых транспозиций. Следовательно, ω нечетна относительно нечетных перестановок координат Z_k и четна относительно четных перестановок. Таким образом, нечетные перестановки координат Z_k являются R -симметриями в четырехмерном смысле. Подобным образом из выражения (16.5.4) можно видеть, что относительно преобразования $Z_1 \rightarrow \alpha^m Z_1$ (остальные Z_k инвариантны) форма ω преобразуется как $\omega \rightarrow \alpha^m \omega$. Из перестановочной симметрии следует, что в более общем случае относительно преобразования

$$Z_k \rightarrow \alpha^{m_k} Z_k \quad (16.5.5)$$

закон преобразования формы ω имеет вид

$$\omega \rightarrow \alpha^{\sum m_k} \omega. \quad (16.5.6)$$

Таким образом, преобразование такого типа является R -симметрией, если $\sum m_k$ не равно нулю.

На самом деле нас больше интересуют симметрии модели с четырьмя поколениями, основанной на использовании многообразия Q/F , где F — группа $Z_5 \times Z_5$, порожденная преобразованиями $A(Z_k) = Z_{k+1}$ и $B(Z_k) = \alpha^k Z_k$. Если дано линейное преобразование U координат Z_i , оставляющее P инвариантным, то при каких условиях оно дает симметрию не только для Q , но и для Q/F ? На первый взгляд можно подумать, что требование состоит в том, что U должно коммутировать с A и B . Если бы это было так, то Q/F не имело бы симметрий, поскольку 5×5 -матрица, коммутирующая с A и B , должна быть пропорциональна единичной матрице, а такое преобразование несущественно на CP^4 .

Однако не верно, что U должно коммутировать с A и B , чтобы давать симметрию на Q/F . Рассмотрим общий случай многообразия K_0 и симметрии U . Мы хотим узнать, является ли U симметрией не только для K_0 , но и для $K = K_0/F$, где F — некоторая группа, действующая свободно на K_0 . Пусть x — точка на K_0 . На многообразии K точка x эквивалентна точке fx для любого $f \in F$. Таким образом, действие преобразования U имеет смысл на K только в том случае, если Ux совпадает (на K) с $U \cdot fx$. Другими словами, U имеет смысл как преобразование

многообразия K только в том случае, если для каждого $x \in K$ и для каждого $f \in F$ существует некоторое $f' \in F$ такое, что $U \cdot fx = f' \cdot Ux$. Иначе говоря, это означает, что UfU^{-1} для любого $f \in F$ должно быть некоторым элементом f' из F .

Вернемся к нашему примеру, где K_0 является гиперповерхностью, а F представляет собой группу, порожденную преобразованиями A и B . Симметрия U модели с четырьмя поколениями должна быть линейным преобразованием координат Z_k , удовлетворяющим условиям

$$UAU^{-1} = A^k B^l, \quad UBU^{-1} = A^m B^n. \quad (16.5.7)$$

Здесь k, l, m и n — целые числа, определенные только по модулю пять, так что их можно рассматривать как элементы группы Z_5 . Поскольку A и B удовлетворяют коммутационному соотношению $BA = AB\alpha$, заключаем, что k, l, m и n с необходимостью должны удовлетворять условию $kn - lm = 1$. Это означает, что матрица

$$\begin{pmatrix} k & l \\ m & n \end{pmatrix} \quad (16.5.8)$$

имеет единичный детерминант и, следовательно, принадлежит группе $SL(2, Z_5)$ 2×2 -матриц с матричными элементами из Z_5 и с единичным детерминантом. По аналогии с $SL(2, Z)$ мы можем называть эту группу «модулярной группой над Z_5 ». Как нетрудно подсчитать, эта группа имеет 120 элементов.

Для любого выбора k, l, m и n существует (с точностью до нормировки) не больше одной матрицы U , удовлетворяющей соотношениям (16.5.7). Действительно, если U и \tilde{U} обе удовлетворяют условиям (16.5.7) (с одинаковыми k, l, m и n), то $U^{-1}\tilde{U}$ коммутирует и с A , и с B и, следовательно, должна быть пропорциональна единичной матрице. Верно также, что некоторая подходящая 5×5 -матрица существует для любых k, l, m и n . В самом деле, как и обычная модулярная группа, модулярная группа над Z_5 порождается матрицами

$$S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (16.5.9)$$

Чтобы показать, что для любого элемента группы $SL(2, Z_5)$ существует соответствующее линейное преобразование координат Z_k , достаточно найти линейные преобразования, соответствующие S и T . Они имеют вид

$$\hat{S}: Z_k \rightarrow \sum_m \alpha^{km} Z_m / \sqrt{5}, \quad (16.5.10)$$

$$\hat{T}: Z_k \rightarrow \alpha^{3k^2} Z_k, \quad (16.5.11)$$

что можно проверить. Ниже для упрощения обозначений мы будем вместо \hat{S} и \hat{T} использовать символы S и T .

Пока мы установили только лишь то, что группа $H = SL(2, Z_5)$ нетривиальным образом меняет фундаментальную группу F многообразия Q/F . Необходимо еще выяснить условия, при которых элемент группы H является в действительности симметрией многообразия Q/F , а также физический смысл тех элементов из H , которые не являются симметриями. С этой целью полезно рассмотреть не один только конкретный полином P , а общий однородный полином пятой степени, инвариантный относительно F . Инвариантные полиномы перечислены в формулах (16.3.15) при вычислении чисел Ходжа для Q/F . Общий инвариантный полином пятой степени имеет вид

$$\tilde{P}(Z_1, \dots, Z_5) = C_0 \sum Z_k^5 + C_1 (Z_1^3 Z_2 Z_5 + \dots) + C_2 (Z_1^3 Z_3 Z_4 + \dots) + C_3 (Z_1^2 Z_2 Z_3^2 + \dots) + C_4 (Z_1^2 Z_2^2 Z_4 + \dots) + C_5 Z_1 Z_2 Z_3 Z_4 Z_5, \quad (16.5.12)$$

где C_i — комплексные параметры. С помощью рескейлинга переменных Z_k можно, например, положить $C_0 = 1$, но остальные пять параметров в \tilde{P} действительно независимы в соответствии с тем фактом, что данная модель имеет пять поколений (и одно антипоколение).

При любом выборе параметров C_i уравнение $\tilde{P} = 0$ определяет многообразие, допускающее единственную метрику с $SU(3)$ -голономией. При переменных C_i получаем пятипараметрическое (параметры комплексные) семейство таких метрик. Физически существование этого многопараметрического семейства метрик соответствует, как обсуждалось в разд. 16.2.2, существованию пяти безмассовых суперполей в низкоэнергетической теории. Пять независимых C_i можно рассматривать как физические поля. Пусть N — пространство параметров C_i . Длинноволновые осцилляции формы компактного многообразия Q/F описываются суперсимметричной сигма-моделью для отображений четырехмерного пространства-времени в N . Любая точка на N отвечает возможному вакуумному состоянию. Важным элементом понимания низкоэнергетической физики в рамках нашей модели является определение вакуумных средних для C_i , или, другими словами, выяснение того, какая точка на N отвечает физическому вакууму.

Если U принадлежит группе H , а полином пятой степени \tilde{P} инвариантен относительно A и B , то из соотношений (16.5.7) следует, что $U\tilde{P}$ тогда также является инвариантным относительно A и B . Таким образом, U индуцирует линейные преобразования параметров C_i и, следовательно, отображение

пространства N в себя. (Читатель может попробовать определить, какие преобразования параметров C_i создают S и T ; для T это особенно просто.) Это означает, что H отображает пространство параметров N в себя, и, следовательно, H является группой симметрий нелинейной сигма-модели, основанной на N , а значит, физической теории, которая основана на редукции десяти измерений на $M^4 \times (Q/F)$. Таким образом, наша упрощенная модель с четырьмя поколениями имеет неабелеву группу глобальных симметрий H из 120 элементов!

Между моделями рассматриваемого типа и обычным великим объединением существуют, конечно, сильнеешие различия. В обычном случае глобальные симметрии и особенно сложные группы глобальных симметрий представляются несколько искусственными, а в нашем случае простейшая модель с достаточно малым числом поколений автоматически обладает довольно сложной группой дискретных симметрий H . Но большинство H -симметрий спонтанно нарушены. Если выбрано конкретное вакуумное состояние в четырех измерениях, соответствующее конкретному выбору F -инвариантного полинома (т. е. конкретной точке в N), то H нарушается до подгруппы, оставляющей этот полином инвариантным.

В группе H имеется подгруппа Z_2 , которая никогда не нарушается (в отсутствие петель Вильсона). Она порождается преобразованием $\phi: Z_k \rightarrow Z_{-k}$. Это преобразование соответствует в смысле записи (16.5.8) матрице

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (16.5.13)$$

которая является одним нетривиальным элементом центра группы H . Легко видеть, что это преобразование оставляет общий полином вида (16.5.12) инвариантным. На первый взгляд это очень похоже на то, чего мы хотели при рассмотрении проблемы тонкой настройки в разд. 16.4. Появилась некоторая Z_2 -симметрия, причем она появилась не по нашему желанию, а потому, что фактор-пространство квинтики в CP^4 по $Z_5 \times Z_5$ всегда имеет Z_2 -симметрию.

Некоторые частные выборы полинома дают большие ненарушенные подгруппы группы H . Например, вернемся снова к случаю минимального полинома $P = \sum Z_k^5$. Этот полином инвариантен относительно неабелевой подгруппы группы H , состоящей из 20 элементов. Эта группа порождается преобразованием T и преобразованием $W: Z_k \rightarrow Z_{2k}$. (Заметим, что $W^2 = \phi$.) Группа H_0 , порожденная преобразованиями T и W , характеризуется соотношениями $T^5 = W^4 = 1$, $WT = T^{-1}W$.

В силу (16.5.6) из предшествующего обсуждения заключаем, что W является R -симметрией (голоморфная 3-форма нечетна относительно W), а ϕ и T таковыми не являются.

Наиболее общая модель с четырьмя поколениями и с ненарушенной группой H_0 отвечает не минимальному полиному P , а полиному

$$P' = \sum Z_k^5 + \mu Z_1 Z_2 Z_3 Z_4 Z_5. \quad (16.5.14)$$

Говоря современным языком, предположение, что вакуум описывается полиномом P , не было бы естественным, поскольку это не выделено никакой симметрией (в модели с четырьмя поколениями). Естественным является предположение, что вакуум определяется полиномом вида P' , так как это наиболее общий вид (для модели с четырьмя поколениями), который оставляет H_0 ненарушенной. Последнее утверждение равносильно наблюдению, что полиномы, которые в формуле (16.5.12) входят с коэффициентами C_1, C_2, C_3, C_4 , не инвариантны относительно H_0 . На самом деле они являются неинвариантными относительно T , так что выражение (16.5.14) можно выделить требованием ненарушенной глобальной Z_5 -симметрии, порожденной преобразованием T .

Если включаются петли Вильсона, то ненарушенная симметрия должна оставлять их инвариантными по модулю возможных калибровочных преобразований. Например, петли Вильсона, заданные уравнением (16.4.12), инвариантны относительно T , поэтому при таком выборе нарушения симметрии остается ненарушенная Z_5 -симметрия, которая оставляет выражение (16.5.14) технически естественным выбором вакуумного состояния. Что касается преобразования W , то оно не оставляет инвариантными петли Вильсона (16.4.12) (даже по модулю калибровочных преобразований), поэтому оно не является симметрией после такого нарушения E_6 . Но преобразование $\phi = W^2$ является симметрией, если оно сопровождается подходящим калибровочным преобразованием V_ϕ . Необходимое калибровочное преобразование можно описать, указав, что элемент $U_1 \otimes U_2 \otimes U_3$ группы $SU(3)_C \times SU(3)_L \times SU(3)_R$ отображается в $U_1^{-1} \otimes U_3 \otimes U_2$; в группе E_6 существует элемент, который это осуществляет. Возможно, следует отметить, что V_ϕ можно интерпретировать в четырех измерениях как обобщенное зарядовое сопряжение, которое заменяет кварки на антикварки и $SU(2)_L$ на $SU(2)_R$, так что преобразование ϕ представляет собой нечто вроде симметрии зарядового сопряжения.

Ее появление является довольно естественным, хотя и не слишком желательным свойством моделей, в которых $SU(2)_L$ -симметрия слабых взаимодействий расширена до группы $SU(2)_L \times SU(2)_R$.

16.5.4. Законы преобразований полей материи

Теперь мы определим, как преобразуются безмассовые заряженные поля упрощенной модели относительно описанных выше глобальных симметрий. Цель состоит в том, чтобы получить ограничения на юкавские взаимодействия. Основным инструментом является связь между безмассовыми киральными полями и полиномами. В самом деле, имеется взаимно однозначное соответствие между безмассовыми 27-плетами в четырех измерениях и допустимыми возмущениями δP полинома P , участвующего в определении модели. Мы рассмотрим случай, когда P имеет вид (16.5.14), так что имеется интересная ненарушенная группа дискретных симметрий.

В отсутствие петель Вильсона, нарушающих E_6 , допустимыми возмущениями полинома P являются полиномы, инвариантные относительно $Z_5 \times Z_5$. Такие полиномы уже фигурировали выше в рассмотрении; они имеют вид

$$\begin{aligned}\psi_2 &= Z_1^2 Z_2 Z_3^2 + \dots, \\ \psi_{-2} &= Z_1^2 Z_2^2 Z_4 + \dots, \\ \psi_1 &= Z_1^3 Z_2 Z_5 + \dots, \\ \psi_{-1} &= Z_1^3 Z_3 Z_4 + \dots, \\ \psi_0 &= Z_1 Z_2 Z_3 Z_4 Z_5.\end{aligned}\tag{16.5.15}$$

Здесь обозначение «+...» указывает на добавление членов, получаемых циклическими перестановками переменных. Для каждого из полиномов (16.5.15) существует соответствующий безмассовый мультиплет 27 в упрощенной модели, преобразующийся относительно ненарушенной группы симметрий H_0 способом, описанным в предыдущем разделе. Поэтому легко указать закон преобразований для 27-плетов¹⁾. Обозначения ψ_k выбраны таким образом, что ψ_k преобразуется относительно T как $\alpha^k \psi_k$. В то же время W отображает ψ_k в ψ_{-k} , и все ψ_k инвариантны относительно преобразования $\phi = W^2$.

¹⁾ Ситуация не была бы такой простой, если бы мы имели дело с R -симметриями, так как скалярная и спинорная компоненты 27-плета преобразуются относительно R -симметрии различно, и нам пришлось бы решить, какая из них (если вообще какая-либо) преобразуется как соответствующий полином. Получить ограничения на юкавские взаимодействия, возникающие из R -симметрий, довольно сложно, и лучше всего для этого использовать формулу для юкавских связей, которая приведена в следующем разделе.

Это завершает описание закона преобразований 27-плетов относительно H_0 . В упрощенной модели имеется еще один мультиплет $\bar{27}$, отвечающий кэлеровой форме, который мы обозначим χ . Поскольку кэлерова форма является четной относительно голоморфных преобразований, χ инвариантно относительно H_0 .

Обсудим теперь, что происходит после нарушения E_6 . Интересным для обсуждения примером является модель нарушения E_6 согласно уравнению (16.4.12). При таком выборе вильсоновские петли не влияют на синглетные по цвету состояния, преобразующиеся относительно $SU(2)_L \times SU(2)_R$ по представлению $(1/2, 1/2) \oplus (0, 0)$, и они описываются в соответствии с сделанными выше замечаниями. Это — безмассовые хиггсовы бозоны. Что касается других компонент из мультиплета 27, то они описываются не полиномами (16.5.15), а более общими полиномами (16.4.13). Для каждого $SU(3)_C \times SU(2)_L \times SU(2)_R \times U(1) \times U(1)$ -мультиплета, отличного от хиггсовых бозонов, имеется четыре соответствующих полинома вместо пяти полиномов (16.5.15) (это и есть утверждение, что имеются дополнительные хиггсовы бозоны со сверхтяжелыми триплетными по цвету партнерами). Мы оставляем читателю проверку с помощью формул (16.4.13) того утверждения, что четыре полинома в каждом секторе преобразуются относительно T как $\alpha^2, \alpha, \alpha^{-1}$ и α^{-2} .

Вспомним теперь из нашего обсуждения проблемы тонкой настройки, что, для того чтобы запретить нарушающие барионное число кубические взаимодействия кварковых и лептонных суперполей, не запрещая при этом существования масс у кварков и лептонов, желательно найти такую глобальную симметрию X , относительно которой кварки и лептоны преобразовывались бы нетривиально, а некоторые хиггсовы бозоны оставались инвариантными. В суперсимметричном великом объединении в четырех измерениях X можно постулировать произвольным образом, но в обсуждаемых суперструнных моделях X должно быть найдено. Мы видим теперь, что глобальная симметрия T упрощенной модели обладает многими, но не всеми требуемыми свойствами. Действительно, все кварки и лептоны преобразуются нетривиально относительно T , и имеются хиггсовы бозоны (возникающие из полинома ψ_0 в (16.5.15), не имеющего аналогов в других секторах), которые нейтральны относительно T . Свойства кварков и лептонов по отношению к T таковы, что запрещаются большинство, но не все взаимодействия, нарушающие барионное число. Преобразование T не запрещает кубическое взаимодействие трех кварковых суперполей, преобразующихся как α^2, α^2 и α или как α, α и α^{-1} .

Может возникнуть вопрос, не препятствует ли распаду протона Z_2 -симметрия ϕ , которая обязательна для данной модели с четырьмя поколениями (до нарушения E_6). В конце концов именно Z_2 -симметрия обычно постулируется для этой цели из феноменологических соображений. Однако до нарушения E_6 тот факт, что ϕ всегда ненарушена, означает, что допустимые возмущения определяющего полинома P и, следовательно, все безмассовые 27-плеты четны относительно ϕ , что не дает никаких ограничений на юкавские связи. Нарушение группы E_6 превращает ϕ в C -симметрию, как описано в предыдущем разделе, а самое большее, что может сделать C -симметрия, это связать распада протонов с распадами антипротонов. (Другие способы нарушения E_6 совсем лишают нас ϕ -сохранения.)

В теории поля можно ожидать, что все юкавские связи, не запрещенные ненарушенной симметрией, отличны от нуля. Справедливо ли это и в теории струн? В следующем разделе мы увидим, что на юкавские связи налагаются дополнительные ограничения.

16.6. Топологические формулы для юкавских констант связи

В то время как четырехмерные теории великого объединения с минимальным составом материи предсказывают определенные соотношения между юкавскими константами, в случае суперструнных моделей, как мы узнали, аналогичные формулы не имеют места. Это совсем не плохо, так как соотношения между юкавскими константами, выполняющиеся в некоторых четырехмерных объединенных теориях, всегда были связаны с трудностями. Тем не менее естественно задать вопрос, существуют ли более или менее простые утверждения о юкавских константах связи, которые в суперструнных моделях заменяли бы теоретико-групповые соотношения, не имеющие здесь силы.

Короткий обзор некоторых фактов о суперсимметрии окажется полезным как в этом, так и в следующем разделах. В четырехмерных суперсимметричных теориях взаимодействия киральных суперполей Φ^k описываются членами двух типов. Имеются члены, которые записываются в виде интеграла по всему суперпространству:

$$L_1 = \int d^4\theta K(\Phi^k, \bar{\Phi}^i). \quad (16.6.1)$$

Такие члены часто называют D -членами. Имеются также члены, в которых используется интегрирование по фермионным координатам только одной киральности:

$$L_2 = \int d^2\theta W(\Phi^k) + \text{компл.-сопр.} \quad (16.6.2)$$

Они называются F -членами; здесь W — суперпотенциал, который должен быть (для суперсимметрии) голоморфной функцией комплексных суперполей Φ^k . В противоположность этому K в формуле (16.6.1) не должно быть голоморфной функцией полей; действительно, голоморфная или антиголоморфная части выражения (16.6.1) давали бы нуль после интегрирования по $d^4\theta$. (В K и W могут быть члены с производными, в последнем случае — с некоторыми ограничениями, но они играют лишь второстепенную роль в низкоэнергетической физике, и мы не должны их рассматривать.) В результате интегрирования по θ выражение (16.6.1) дает кинетическую энергию полей

$$L_{kin} = g_{i\bar{j}} \partial_\mu \phi^i \partial^\mu \bar{\phi}^{\bar{j}} + g_{i\bar{j}} \psi^i \partial \bar{\psi}^{\bar{j}}, \quad (16.6.3)$$

где ϕ^k и ψ^k — скалярные и спинорные компоненты суперполей Φ^k . Здесь $g_{i\bar{j}} = \partial^2 K / \partial \phi^i \partial \bar{\phi}^{\bar{j}}$ представляет собой «метрику» в «пространстве скалярных полей». Таким образом, в результате интегрирования в выражении (16.6.1) по $d^4\theta$ обнаруживается, что пространство скалярных полей является кэлеровым многообразием с кэлеровым потенциалом K . После интегрирования в выражении (16.6.2) по $d^2\theta$ получаем юкавские члены и скалярный потенциал:

$$L_{int} = \sum_k \left| \frac{\partial W}{\partial \phi^k} \right|^2 + \left(\frac{\partial^2 W}{\partial \phi^i \partial \phi^k} \psi^i \psi^k + \text{эрмит. сопр.} \right). \quad (16.6.4)$$

Выражение (16.6.4) демонстрирует важную роль суперпотенциала. В отсутствие других полей и взаимодействий условие ненарушенной суперсимметрии имеет вид $\partial W / \partial \phi^k = 0$. Если вводится взаимодействие с калибровочными полями, потенциальный член получает дополнительное слагаемое

$$\Delta V = \sum_a (D_a)^2. \quad (16.6.5)$$

Здесь суммирование проводится по всем калибровочным генераторам; D_a — функции от киральных полей материи, преобразующиеся в присоединенном представлении калибровочной группы. В перенормируемых теориях $D_a = \langle \phi | T_a | \phi \rangle$, где T_a — калибровочные генераторы, действующие на поля материи ϕ . Общий вид функции D_a может быть намного сложнее. Ненарушенная суперсимметрия теперь требует помимо $\partial W / \partial \phi^k = 0$ выполнения условия $D_a = 0$. В случае взаимодействия с супергравитацией выражение (16.6.4) становится более сложным; условия ненарушенной суперсимметрии и нулевой космологической постоянной принимают вид $\partial W / \partial \phi^k = W = D_a = 0$.

Из выражения (16.6.4) видно, что кубические члены в W непосредственно приводят к взаимодействиям $\phi\psi\psi$ юкавского типа. Но мы не можем связать эти члены с физическими юкавскими связями, если не введем правильную нормировку бозонных и фермионных полей ϕ и ψ . Нормировка ϕ и ψ определяется кинетической энергией или в силу (16.6.3) квадратичными членами в K . Таким образом, для предсказания юкавских констант в четырех измерениях мы должны научиться получать из исходной десятимерной теории как кубические члены $\phi\psi\psi$, так и квадратичные члены $\psi\partial\psi$.

16.6.1. Топологическая формула для суперпотенциала

Найдем сначала формулу для кубических членов $\phi\psi\psi$ в эффективном четырехмерном лагранжиане (ϕ и ψ — бозонные и фермионные компоненты киральных суперполей). Эту формулу мы получим, считая исходной теорией десятимерную теорию поля, а затем обсудим теоретико-струнные поправки. Формула, которая будет найдена, справедлива не только тогда, когда спиновая связность вложена в калибровочную группу, но и в более общем случае, когда десятимерное калибровочное поле A_i представляет собой любую голоморфную связность в голоморфном векторном расслоении X , удовлетворяющую уравнению Дональдсона — Уленбек — Яу.

Безмассовый фермион ψ в четырех измерениях возникает как нулевая мода исходного десятимерного поля глюино χ . Подобным образом ϕ происходит из нулевой моды в малых флуктуациях десятимерного калибровочного поля A_i около его вакуумного значения. Таким образом, в десяти измерениях мы должны искать взаимодействие вида $A \cdot \chi \cdot \chi$. Такое взаимодействие найти нетрудно; это минимальное калибровочное взаимодействие

$$L_{gauge} = \Gamma^{i\alpha\beta} A_i^x \chi_\alpha^y \chi_\beta^z f_{xyz} \quad (16.6.6)$$

где индексы x, y и z нумеруют присоединенное представление группы E_8 , а f_{xyz} — структурные константы для E_8 . (Взаимодействие (16.6.6) возникает, если раскрыть выражение для ковариантной производной в действии Дирака $\bar{\chi}\hat{D}\chi$.) Лагранжеву плотность (16.6.6) надо проинтегрировать по всем десяти координатам, чтобы получить функционал действия:

$$S = \int_{M^4 \times K} L_{gauge} \quad (16.6.7)$$

Если мы хотим получить четырехмерный лагранжиан, который, чтобы получить S , надо интегрировать только по M^4 , то мы про-

сто перепишем выражение (16.6.7) в виде $S = \int_{M^4} \int_K L_{gauge}$. Это показывает, что четырехмерный лагранжиан, из которого можно получить юкавские константы, имеет вид

$$L_{Yuk}^{(4)} = \int_K \Gamma^{i\alpha\beta} A_i^x \chi_\alpha^y \chi_\beta^z f_{xyz} \quad (16.6.8)$$

При выводе формулы (16.6.8) не понадобилось предположения о $SU(3)$ -голономии, но теперь мы хотим ограничиться таким случаем.

В разложении $16 = (2, 4) \oplus (2', \bar{4})$ спинора для $SO(1, 9)$ в терминах $SO(1, 3) \times SO(6)$ в четырехмерном смысле левыми спинорами являются компоненты $(2', \bar{4})$. Относительно предполагаемой группы голономии $SU(3)$ компактного многообразия K $\bar{4}$ преобразуется, как $1 \oplus \bar{3}$. Как мы видели в разд. 16.2, единственные нулевые моды, возникающие из $SU(3)$ -синглетов, — это глюино, юкавские связи которых определяются суперсимметрией и калибровочной инвариантностью. Поэтому мы сосредоточим внимание на компоненте $\bar{3}$, которая эквивалентна $(0, 1)$ -форме χ_α^x с дополнительным индексом x , отвечающим присоединенному представлению группы E_8 . Десятимерное калибровочное поле A_i имеет $(1, 0)$ - и $(0, 1)$ -части, преобразующиеся по $SU(3)$ как $\bar{3}$ и $\bar{3}$. Так как $SU(3)$ -синглет нельзя получить из $\bar{3} \times \bar{3} \times \bar{3}$, мы должны рассмотреть именно $(0, 1)$ -часть поля A_i .

Согласно теории группы $SU(3)$, единственным синглетом, который можно получить из $\bar{3} \times \bar{3} \times \bar{3}$, является полностью антисимметричная комбинация. Таким образом, даже без подробного изучения алгебры Дирака из формулы (16.6.8) мы можем получить выражение

$$L_{Yuk}^{(4)} = \int_K \varepsilon^{abc} f_{xyz} A_i^x \chi_\alpha^y \chi_\beta^z, \quad (16.6.9)$$

где ε — антисимметричный тензор для $SU(3)$.

Выражение (16.6.9) представляет собой ответ на наш вопрос. Если мы действительно знаем риччи-плоскую кэлерову метрику на K и можем решить уравнение Дирака для нулевых мод, то подставляя в выражение (16.6.9) волновые функции нулевых мод и интегрируя по K , получим юкавские константы связи в четырех измерениях. При такой формулировке представляется, что вычисление величины (16.6.9) требует обширных знаний о многообразии K . На самом же деле выражение

(16.6.9) можно переписать в квазитопологическом виде, в котором его можно вычислить, используя только качественную информацию.

Полностью антисимметричная комбинация $SU(3)$ -индексов в выражении (16.6.9) равносильна внешнему произведению $(0, 1)$ -форм A и χ . Действительно, три $(0, 1)$ -формы в (16.6.9) по существу объединяются в $(0, 3)$ -форму. В топологической формулировке подынтегральное выражение естественно является 6-формой или $(3, 3)$ -формой; $(3, 3)$ -форму можно получить из $(0, 3)$ -формы, которая неявно присутствует в (16.6.9), путем умножения на ковариантно постоянную $(3, 0)$ -форму, присущую многообразию с $SU(3)$ -голономией. Таким образом, выражение (16.6.9) эквивалентно выражению

$$L_{Yu_k}^{(4)} = \int_K \omega \wedge A^x \wedge \chi^y \wedge \chi^z f_{xyz}, \quad (16.6.10)$$

которое лучше проясняет суть дела.

Пусть даны киральные суперполя Φ_k в четырех измерениях. Каждое поле Φ_k отвечает гармонической $(0, 1)$ -форме $u_{(k)}^x$ на K . Мы хотим вычислить кубический член в суперпотенциале $W = \lambda_{klm} \Phi_k \Phi_l \Phi_m + \dots$. Для этого достаточно положить $(0, 1)$ -формы A и χ в выражении (16.6.10) равными $u_{(k)}$, $u_{(l)}$ и $u_{(m)}$. Тогда получим формулу для юкавских констант

$$\lambda_{klm} = \int_K \omega \wedge u_{(k)}^x \wedge u_{(l)}^y \wedge u_{(m)}^z f_{xyz}. \quad (16.6.11)$$

В качестве проверки заметим, что выражение (16.6.11) полностью симметрично по k , l и m , что сначала не было очевидно.

Далее в нашем построении $u_{(k)}$ — гармонические $(0, 1)$ -формы. Как гармонические формы они определяют элементы группы когомологий Дольбо $H^1(X)$, где X — голоморфное векторное расслоение, участвующее в выборе вакуумного состояния. В самом деле, выражение (16.6.11) инвариантно относительно преобразований вида

$$u_{(m)} \rightarrow u_{(m)} + \bar{D}\epsilon_{(m)}, \quad (16.6.12)$$

где \bar{D} — калибровочно ковариантный оператор \bar{d} . Чтобы проверить, что величина (16.6.11) инвариантна относительно преобразований (16.6.12), надо показать, что

$$0 = \int_K \omega \wedge u_{(k)}^x \wedge u_{(l)}^y \wedge \bar{D}\epsilon_{(m)}^z f_{xyz}. \quad (16.6.13)$$

Это можно доказать с помощью интегрирования по частям и используя тот факт, что $\bar{D}\omega = \bar{D}u_{(k)} = 0$, так как ω и $u_{(k)}$ гармо-

нические. Инвариантность относительно преобразований (16.6.12) означает, что величина (16.6.11) зависит только от классов когомологий форм $u_{(k)}$ в группе когомологий Дольбо $H^1(X)$ (где X — голоморфное векторное расслоение, участвующее в определении вакуумного состояния). Это в свою очередь означает, что (16.6.11) представляет собой квазитопологическую формулу. Для ее вычисления не надо знать риччи-плоскую метрику на K : нужна только топология и комплексная структура многообразия K . Действительно, в формулу (16.6.11) входят только голоморфная 3-форма ω и волновые функции $u_{(k)}$. Голоморфная 3-форма зависит только от комплексной структуры многообразия K , но не от конкретного выбора метрики. Часто ее можно описать явно, как это сделано в некоторых примерах в разд. 16.5.3. Что касается волновых функций, то поскольку нам не нужны явные волновые функции нулевых мод, а только волновые функции, лежащие в правильном классе \bar{D} -когомологий, решение задачи о нахождении подходящих волновых функций также зависит только от топологии и комплексной структуры многообразия K . Поскольку формула (16.6.11) является квазитопологической, она представляет собой на самом деле вполне удобную формулу для суперпотенциала, хотя для ее вычисления (кроме некоторых частных случаев) требуются методы, которые выходят за рамки настоящего изложения.

Почему, если не учитывать эстетические критерии, желательно иметь топологическую формулу для суперпотенциала? В низкоэнергетическом мире есть много загадок, которые, очень возможно, связаны с обращением в нуль, по крайней мере на древесном уровне, некоторых юкавских констант связи. Примерами являются крайняя легкость электрона и кварков из первого поколения, а также малость угла Кабиббо. Большинство обычных подходов к проблеме обращения в нуль некоторых юкавских констант связи основывается на попытках постулировать глобальные симметрии, из которых это следовало бы. (В предыдущем разделе мы пытались найти, а не постулировали такие симметрии.) Этот подход не привел к исчерпывающим результатам; по-видимому, глобальные симметрии, объясняющие обращение в нуль констант связи, которые действительно малы, обычно предсказывают обращение в нуль также и тех констант связи, которые не являются малыми. В результате того, что суперпотенциал дается топологической формулой в рамках десятимерных суперструн, возникает возможность, что некоторые юкавские константы связи обращаются в нуль потому, что они запрещены из топологических соображений, а не вследствие симметрий. Топологические соображения, которые

могли бы вызвать обращение в нуль некоторых юкавских констант, не обязательно должны иметь нежелательные следствия в других областях.

Общие формулы (16.6.9) и (16.6.11) несколько упрощаются в случае, когда спиновая связанность вложена в калибровочную группу. В этом случае безмассовые частицы в четырех измерениях, которые возникают при присоединенном представлении группы E_6 , преобразуются относительно ненарушенной группы E_6 согласно представлениям $\mathbf{27}$, $\overline{\mathbf{27}}$ или $\mathbf{1}$. Кубические связи для суперполей, допустимые по E_6 -инвариантности, имеют вид $\mathbf{27}^3$, $\overline{\mathbf{27}}^3$, $\mathbf{1}^3$ и $\mathbf{1} \cdot \mathbf{27} \cdot \overline{\mathbf{27}}$. Вообще говоря, все они присутствуют и могут быть получены из выражения (16.6.11). Например, безмассовые суперполя $\Phi_{(k)}^p$, преобразующиеся по представлению $\mathbf{27}$ для E_6 (здесь p — E_6 -индекс, а k — индекс поколения), с микроскопической точки зрения происходят из элементов $u_{(k)}^a{}_b$ группы когомологий $H^1(T)$ ¹⁾. Вследствие E_6 -инвариантности члены типа $\mathbf{27}^3$ в суперпотенциале должны иметь вид

$$W = \lambda_{klm} \Phi_{(k)}^p \Phi_{(l)}^q \Phi_{(m)}^r d_{pqr}, \quad (16.6.14)$$

где d_{pqr} — кубический симметричный тензор, характерный для E_6 , а λ_{klm} — константы, которые мы хотим определить. Если подставить $u_{(k)}^a{}_b$ в выражение (16.6.9), из $SU(3)$ -инвариантности следует, что касательные векторные индексы трех волновых функций $u_{(k)}^a{}_b$ сворачиваются полностью антисимметричным образом, так что выражение (16.6.9) в этом случае принимает вид

$$\lambda_{klm} = \int_K \omega_{def} \omega_{abc} g^{a\bar{a}} g^{b\bar{b}} g^{c\bar{c}} u_{(k)}^d{}_a u_{(l)}^e{}_b u_{(m)}^f{}_c. \quad (16.6.15)$$

Эта формула используется в разд. 16.6.4.

Аналогично суперполя $\tilde{\Phi}_{(f)p}$, преобразующиеся по представлению $\overline{\mathbf{27}}$ группы E_6 , могут иметь кубические связи следующего общего вида:

$$W = \tilde{\lambda}_{fgh} \tilde{\Phi}_{(f)p} \tilde{\Phi}_{(g)q} \tilde{\Phi}_{(h)r} d^{pqr}, \quad (16.6.16)$$

где опять d^{pqr} — E_6 -инвариант. Чтобы определить константы $\tilde{\lambda}_{fgh}$, напомним, что с микроскопической точки зрения $\Phi_{(f)}$ воз-

¹⁾ Поскольку здесь можно запутаться в индексах, заметим, что один какой-то элемент из $H^1(T)$ был бы обозначен как $u^a{}_b$. Так как в $H^1(T)$, вообще говоря, имеется больше одного элемента, u несет еще и индекс поколения (k) .

никают как гармонические $(1; 1)$ -формы $u_{(f)ab}$. $SU(3)$ -инвариантность выражения (16.6.9) означает, что полная антисимметричность по $(1, 0)$ -индексам должна подразумеваться структурными константами группы E_6 , так что выражение (16.6.9) в этой ситуации сводится к выражению

$$\tilde{\lambda}_{fgh} = \int_K \tilde{\omega}_{def} \omega_{abc} g^{a\bar{a}} g^{b\bar{b}} g^{c\bar{c}} g^{d\bar{d}} g^{e\bar{e}} g^{f\bar{f}} u_{(f)da} u_{(g)eb} u_{(h)fc}. \quad (16.6.17)$$

К счастью, некоторые простые свойства группы $SU(3)$, показывают, что выражение (16.6.17) эквивалентно некоторому, гораздо более естественно выглядящему выражению, а именно внешнему произведению трех $(1, 1)$ -форм

$$\tilde{\lambda}_{fgh} = \int_K u_{(f)} \wedge u_{(g)} \wedge u_{(h)}. \quad (16.6.18)$$

Большим преимуществом этой формулы по сравнению с предыдущими является то, что она зависит только от классов когомологий де Рама форм u в $H^2(K)$. (Поскольку выражение (16.6.18) инвариантно относительно преобразований $u \rightarrow u + d\alpha$, как мы говорили в разд. 12.4.) Когомологии де Рама являются топологическими инвариантами, так что формула (16.6.18) в отличие от предыдущих — строго топологическая и не зависит от выбора комплексной структуры на K .

Чтобы привести пример такого следствия топологических формул для суперпотенциала, которое с низкоэнергетической точки зрения было бы загадочным, предположим, что K не допускает антиголоморфной симметрии, так что CP спонтанно нарушена. В таком случае можно ожидать, что юкавские константы связи комплексные, и это будет верно для λ_{klm} из выражения (16.6.15), поскольку величины, входящие в это выражение, являются комплексными. Но константы $\tilde{\lambda}_{fgh}$ в выражении (16.6.18) вещественны, даже если CP нарушена, так как $(1, 1)$ -формы, которые одни только и участвуют в выражении (16.6.18), естественным образом являются вещественными.

Мы обсудили только юкавские связи суперполей, происходящих из присоединенного представления группы E_6 . Имеются также другие безмассовые киральные суперполя, соответствующие деформациям комплексной структуры и кэлеровой формы и обозначаемые как $X_{(\alpha)}$ и $Y_{(\beta)}$ соответственно. Хотя явно эти поля мы не рассматривали, на самом деле они участвовали в проведенном выше рассмотрении, так как, например, величины λ_{klm} в выражении (16.6.15) зависят от комплексной структуры и, таким образом, от вакуумных средних для $X_{(\alpha)}$.

Поэтому, например, формулу (16.6.14) правильнее было бы записать в виде

$$W = \lambda_{klm} X_{(\alpha)} \Phi_{(k)}^p \Phi_{(l)}^q \Phi_{(m)}^r d_{pq}. \quad (16.6.19)$$

Разумеется, при разложении около вакуумного значения для $X_{(\alpha)}$, которое должно быть каким-то образом определено, зависимость величин λ_{klm} от $X_{(\alpha)}$ даст при низких энергиях лишь очень малый вклад. В то время как константы связей суперполей, полученные в этом разделе, зависят от комплексной структуры на K , они не зависят от выбора кэлеровой метрики и, следовательно, не зависят от $Y_{(\beta)}$. Значение этого факта мы рассмотрим в разд. 16.8.

Читатель может спросить, не имеются ли помимо полученных еще такие члены в суперпотенциале, которые отвечают связям $X_{(\alpha)}$ и $Y_{(\beta)}$ только с самими собой. По крайней мере, в случае, когда спиновая связность вложена в калибровочную группу, такие члены возникать не могут. Действительно, например, член в суперпотенциале типа X^3 дал бы член вида $|\partial W/\partial X|^2 = |X|^4$ в обычной потенциальной энергии V (16.6.4). При этом X не могло бы иметь вакуумное среднее значение. Но из классификации Калаби—Яу для метрик с $SU(3)$ -голономией известно, что комплексная структура и кэлеров класс могут иметь произвольные значения, другими словами, что вакуумные средние значения для X могут быть произвольными. (Здесь мы используем результат, который будет получен в разд. 16.7, где будет показано, что решение уравнений теории, по крайней мере в любом конечном порядке по α' , можно построить исходя из общей метрики с $SU(3)$ -голономией.) Аналогичные рассуждения, использующие тот факт, что число безмассовых 27-плетов является топологическим инвариантом, не зависящим от вакуумного среднего для X , показывают, что связей вида $X \cdot 27 \cdot \overline{27}$ не существует, хотя глобальных симметрий, запрещающих такие члены, может и не быть.

16.6.2. Кинетические члены

Знание суперпотенциала дает ключ к предсказанию того, какие юкавские константы связи обращаются в нуль, и в этом много физического содержания. Особая легкость некоторых фермионов, малость углов смешивания и даже стабильность протона, возможно, определяются тем, что некоторые юкавские константы связи равны нулю. Но, для того чтобы получить для юкавских констант количественные предсказания, помимо суперпотенциала необходимо знать также D -члены в уравнении (16.6.1). Общая стратегия получения формул для D -членов

такая же, как в случае суперпотенциала. Исходя из точного десятимерного действия, после интегрирования по компактному многообразию K получают эффективное четырехмерное действие. Таким способом можно получить формулы для кинетических членов в эффективной четырехмерной теории. Если спиновая связность вложена в калибровочную группу, получающиеся формулы носят топологический характер. Отчасти для краткости, а отчасти потому, что теорема о неперенормировке, которая обсуждается ниже, по-видимому, не имеет аналога в случае кинетических членов, мы не будем обсуждать детальную формулу для кинетических членов в четырех измерениях, возникающую после компактификации.

Но один простой факт о неперенормировке юкавских констант связи, несомненно, следует отметить. Если r — радиус многообразия K , то в результате интегрирования по K коэффициенты при различных членах в эффективной четырехмерной теории умножаются на подходящую степень r . Нетрудно видеть, что как калибровочные, так и юкавские константы связи формально имеют порядок $1/r$. Четырехмерные калибровочные константы, которые не слишком малы, соответствуют такому радиусу r , который не на много больше планковского радиуса; тогда ненулевые юкавские константы формально имеют тот же порядок величины.

16.6.3. Теорема о неперенормировке и ее следствия

При анализе суперпотенциала для полей материи в предыдущих разделах мы работали исключительно в терминах десятимерной теории поля. Это означает, что если r — радиус компактного многообразия K , то наши результаты справедливы только в низшем порядке по α'/r^2 . Теперь мы покажем, что результаты, относящиеся к суперпотенциалу, на самом деле справедливы во всех конечных порядках по α'/r^2 . (В некоторых случаях, по-видимому, имеются поправки, непертурбативно малые при $\alpha' \rightarrow 0$.)

Доказательство является удивительно простым. Радиус r многообразия K представляет собой в действительности один из модулей, участвующих в определении метрики с $SU(3)$ -голономией на K . Поэтому он соответствует в четырех измерениях безмассовому полю, которое мы также обозначим через r . Суперпартнером для r является псевдоскаляр ρ , возникающий как нулевая мода десятимерной 2-формы B_{MN} . Этот псевдоскаляр при нулевом импульсе отщепляется вследствие той же абелевой калибровочной инвариантности $\delta B = d\Lambda$, которая вызывает отщепление B при нулевом импульсе в исходной десятимерной

теории. Утверждение, что p отщепляется при нулевом импульсе, равносильно утверждению, что p является аксионоподобной модой, которая управляется глобальной симметрией:

$$\delta p = \text{const.} \quad (16.6.20)$$

Эта симметрия обсуждается в разд. 14.3.2, где показано, что она справедлива во всех конечных порядках по α' ; указано также, что в теории гетеротических струн непертурбативно она не выполняется. Суперсимметрия объединяет r и p в одно комплексное суперполе Y .

Суперпотенциал W является голоморфной функцией комплексных переменных, поэтому если он вообще зависит от r , то он зависит от r и p в комбинации $Y = r + ip$. Но W не может зависеть от p , поскольку тогда p имело бы взаимодействия без производных и аксионная симметрия была бы нарушена. Следовательно, суперпотенциал W не может зависеть и от r . Таким образом, W не может зависеть от безразмерного параметра α'/r^2 , поэтому его можно вычислить при $\alpha' = 0$, что дается теоретико-полевой формулой. (Могут возникать непертурбативные поправки, так как симметрия (16.6.20) выполняется только в конечных порядках по α' .) В качестве проверки этого доказательства отметим, что, как из него следует, теоретико-полевая формула для W не может зависеть от кэлера класса метрики, а это было уже обнаружено в разд. 16.6.1.

Такое удивительно простое доказательство сильнейшим образом подымает значение выведенной выше топологической формулы для суперпотенциала. Даже если α'/r^2 умеренно мало, непертурбативные (связанные с инстантонами на мировом листе) эффекты, которые, согласно рассмотрению в разд. 14.3.2, могут нарушать симметрию (16.6.20), будут очень малы, так что топологическая формула для суперпотенциала будет исключительно точной. Недавние исследования показали в полном согласии с тем, что здесь сказано, что на многих (но не на всех) многообразиях с $SU(3)$ -голономией непертурбативные эффекты действительно дают поправки к топологической формуле, пропорциональные $e^{-r^2/\alpha'}$, но соответствующий анализ занял бы здесь слишком много места.

Неперенормировка суперпотенциала имеет также удивительно сильные следствия. Мы уже встречали заманчивые указания на то, что риччи-плоские кэлеровы многообразия со спиновой связностью, вложенной в калибровочную группу, дают решения уравнений движения теории струн. Это, безусловно, верно в низшем порядке по α' , в котором мы проверили уравнения в разд. 16.1. Теперь легко показать, что это остается верным,

возможно с некоторым подходящим переопределением вакуумного состояния, во всех конечных порядках по α' .

Представим себе компактификацию десятимерной теории на $T^4 \times K$, где T^4 — некоторое четырехмерное многообразие, которое априори не предполагается четырехмерным пространством Минковского. Десятимерная теория струн дает какую-то эффективную теорию, описывающую физику на T^4 . Мы хотим показать, что, исходя из K , представляющего собой риччи-плоское кэлерово многообразие (со спиновой связностью, вложенной в калибровочную группу), мы можем найти решение исходных уравнений, по крайней мере во всех конечных порядках по α' . Это решение имеет ненарушенную суперсимметрию, а T^4 является четырехмерным пространством Минковского. Достаточно показать, что эти утверждения выполняются в терминах эффективной теории на T^4 , а не исходной десятимерной теории поля.

В каждом порядке по α' теория струн дает поправки к уравнениям эффективной теории на T^4 . Мы знаем, что эти поправки сохраняют то свойство, что эффективная теория на T^4 является суперсимметричной теорией¹⁾, но нам не известно, что пространство Минковского есть решение с ненарушенной суперсимметрией. Обсуждение, следующее за уравнением (16.6.5), сводится к тому, что необходимо показать, что в эффективной теории $W = \partial W / \partial \phi^k = D_a = 0$. Входящие сюда D_a соответствуют безмассовым $E_6 \times E_8$ -калибровочным бозонам, так как по массивным бозонам можно проинтегрировать при определении того, что мы понимаем под эффективной низкоэнергетической теорией. Ненарушенная группа $E_6 \times E_8$ обеспечивает обращение в нуль членов D_a , так что остается рассмотреть только условия $W = \partial W / \partial \phi^k = 0$. Так как суперпотенциал W не получает вкладов, зависящих от α' (по крайней мере в конечных порядках), эти условия будут выполнены, если они выполнялись при $\alpha' = 0$. Но это имеет место, поскольку мы уже проверили полевые уравнения в пределе низкоэнергетической теории поля. Таким образом, по крайней мере во всех конечных порядках по α' , этим способом мы получаем решения уравнений движения теории. В следующем разделе мы рассмотрим одно интересное обобщение этих рассуждений.

Важно отметить, что приведенное выше доказательство имеет макроскопический характер и ничего не говорит о том, что происходит на микроскопическом уровне. Выше мы исключили интегрированием массивные степени свободы, чтобы

¹⁾ В противном случае эта теория, содержащая при $\alpha' = 0$ безмассовую частицу спина 3/2, не была бы самосогласованной.

обсудить эффективную теорию для безмассовых степеней свободы. Это доказательство не гарантирует, что уравнения для массивных полей не модифицируются поправками, зависящими от α' , или что такие поправки не сдвигают их вакуумные средние. Доказательство гарантирует лишь, что, какие бы ни происходили изменения в уравнениях или вакуумных значениях массивных полей вследствие теоретико-струнных поправок, это не влияет на вакуумную конфигурацию легких полей в четырех измерениях.

Возможно, следует сформулировать это более явным образом. Рассмотрим компактифицированную теорию, которая в четырех измерениях имеет массивные поля X_j и безмассовые поля ϕ_m . Массовые члены в лагранжиане имеют вид

$$L_M = -\frac{1}{2} \sum_i M_i^2 X_i^2. \quad (16.6.21)$$

Мы не включили, разумеется, массовые члены для безмассовых полей ϕ_m . Обратимся теперь к теоретико-струнным поправкам порядка $(\alpha')^p$ для некоторого p . Их вклад, помимо прочего, может иметь вид членов, линейных по некоторым из полей:

$$\Delta L = \sum_i \epsilon_i X_i + \sum_j \rho_j \phi_j. \quad (16.6.22)$$

Каковы последствия таких изменений в теории? Решая уравнения

$$\frac{\partial}{\partial X_i} (L_M + \Delta L) = 0 \quad (16.6.23)$$

для массивных полей, мы находим, что вакуумные средние для X_i сдвигаются на величину

$$\delta X_i = \epsilon_i / M_i^2. \quad (16.6.24)$$

При построении пертурбативного разложения вакуумного состояния выражения (16.6.24) дают небольшое и безопасное изменение вакуумных значений для X_i . Совершенно другая ситуация возникает для величин ρ_j в выражениях (16.6.22). Поскольку поля ϕ_j безмассовые, ненулевое ρ_j формально должно сдвигать ϕ_j на

$$\delta \phi_j \sim \rho_j / 0. \quad (16.6.25)$$

В действительности этот сдвиг должен быть большим, но, видимо, не бесконечным. Но не имеющий смысла вид уравнения (16.6.25) означает, что разложение вакуумного состояния по теории возмущений около начальной точки, дающее $\rho_j \neq 0$, невозможно. Пертурбативные поправки, дающие ненуле-

вые значения ρ_j , дестабилизируют бы вакуумное состояние, очень сильно изменяя его и делая неприменимой теорию возмущений.

Таким образом, мы показали, воспользовавшись теоремой о неперенормировке для суперпотенциала, что в каждом порядке разложения по α' , начальной точкой которого является риччи-плоское кэлерово многообразие, четырехмерный суперпотенциал не изменяется, и поэтому вакуумные средние безмассовых полей не сдвигаются. В использовавшихся выше терминах это означает, что ρ_j равны нулю, а вакуум стабилен, хотя возможно вакуумные значения массивных полей подвергнутся малым конечным сдвигам. С другой стороны, теорема о неперенормировке допускает возможность того, что при построении вакуумного решения в разложении по степеням α' могут возникать изменения вакуумных значений массивных полей. В следующем разделе мы явно продемонстрируем необходимость таких сдвигов в немного другом контексте.

Необходимо отметить, что сдвиги массивных полей могут включать поправки к форме метрики, так что наши рассуждения допускают возможность того, что, начиная с риччи-плоской кэлеровой метрики и строя решение уравнений поля в разложении по α' , мы можем прийти к такому решению, которое не является риччи-плоским кэлеровым. Недавние вычисления показали, что это имеет место.

Наш анализ является по существу пертурбативным; он оставляет возможность того, что вне рамок теории возмущений (с нарушением симметрии (16.6.20)) безмассовые моды будут возбуждены, а вакуум дестабилизирован. Недавние исследования, использующие взаимосвязи между различными теориями струн, показывают, что этого не происходит, но мы не будем здесь пытаться выяснить этот вопрос.

Тот факт, что теоретико-струнные поправки конечных порядков не модифицируют суперпотенциал, напоминает то, что в четырехмерной теории поля суперпотенциал не перенормируется во всех конечных порядках теории возмущений. Можно спросить, остается ли суперпотенциал W неизменным в разложении по петлям теории струн. На однопетлевом уровне это можно доказать полностью аналогично доказательству в гл. 9 того, что ньютоновская постоянная не перенормируется на однопетлевом уровне (в некомпактифицированной теории). Неперенормировка суперпотенциала W во всех конечных порядках петлевого разложения представляется вполне правдоподобной, но полного доказательства пока нет.

Использованные в этом разделе аргументы неприменимы к кинетическим членам в лагранжиане, которые возникают из

интеграла по суперпространству $\int d^4\theta K$. Различие состоит в том, что K не является аналитической функцией суперполей; на самом деле K зависит от радиуса компактного многообразия, и именно отсюда возникает зависимость юкавских констант от этого радиуса. Подобным же образом для четырехмерной теории поля верно, что K перенормируется в теории возмущений.

16.6.4. Приложения к упрощенной модели

Одной из главных причин исследования топологических соотношений для суперпотенциала было стремление понять, можно ли предсказать такие нули юкавских констант связи, которые не следуют из симметрий. Это действительно возможно, но, так как анализ носит технический характер, мы ограничимся лишь весьма специальным примером, который не потребует использования всей силы топологических аргументов.

Мы снова обратимся к обычной нашей модели, отвечающей квинтике Q в CP^4 . Как обычно, возьмем фактор-пространство квинтики Q по группе $F = Z_5 \times Z_5$, чтобы получить модель с четырьмя поколениями. Если наложить дискретную симметрию T , определенную соотношением (16.5.11), то полином пятой степени, определяющий Q , будет иметь вид (16.5.14). Не учитывая для простоты нарушение E_6 , напомним, что пять безмассовых 27-плетов в четырех измерениях соответствуют пяти полиномам, которые даны формулами (16.5.15), и имеют закон преобразования относительно глобальной симметрии T , который описан там же.

Ясно, что глобальная симметрия T накладывает ограничения на юкавские константы; в обнаружении таких ограничений и состояла цель, с которой квантовые числа по T были указаны в формулах (16.5.15). Можно ли найти дополнительные ограничения на юкавские константы? Юкавские константы выражаются квантопологическим интегралом (16.6.15). В то время как мы могли бы подвергнуть этот интеграл топологическому рассмотрению, гораздо проще заметить, что вместо вычисления интеграла на пространстве Q/F эйлеровой характеристики -8 , которое используется для того, чтобы получить модель с четырьмя поколениями, мы можем вычислить этот интеграл на односвязном накрывающем пространстве Q . Преимущество такого способа действий состоит в том, что Q имеет огромную группу симметрий, включая фазовые преобразования (16.5.5), большая часть которой теряется, если мы работаем на Q/F . Вычисляя интеграл (16.6.15) на Q , вместо вычисления на Q/F , мы можем предсказать обращение в нуль некоторых членов,

которые согласуются со всеми симметриями на Q/F , но нарушают некоторые симметрии на Q .

Симметрии пространства Q , не являющиеся симметриями пространства Q/F , можно назвать псевдосимметриями. Использование псевдосимметрий для определения ограничений на юкавские константы на Q/F представляет собой особенно простой случай топологических рассуждений.

Посмотрим теперь, как проводится такое рассмотрение. В выражение (16.6.15) входят два явных сомножителя ω и три волновые функции $u_{(k)}$, $u_{(l)}$, $u_{(m)}$. Чтобы интеграл получился ненулевым, произведение $\omega^2 u_{(k)} u_{(l)} u_{(m)}$ должно быть инвариантным относительно преобразований (16.5.5). С учетом закона преобразований (16.5.6) это означает, что произведение трех функций u должно преобразовываться как

$$u_{(k)} u_{(l)} u_{(m)} \rightarrow \alpha^3 \sum^{m_k} u_{(k)} u_{(l)} u_{(m)}. \quad (16.6.26)$$

Это условие легко применить, так как функции $u_{(m)}$ находятся во взаимно однозначном соответствии с определенными полиномами пятой степени и так же преобразуются под действием преобразований (16.5.5). Работая вместо $u_{(m)}$ с полиномами ψ_m , определенными в формулах (16.5.15), находим, что произведение

$$\psi_k \psi_l \psi_m \quad (16.6.27)$$

должно преобразовываться согласно (16.6.26), чтобы соответствующая кубическая связь суперполей не обращалась в нуль. С другой стороны, произведение (16.6.27) трех полиномов пятой степени представляет собой полином пятнадцатой степени. Единственный полином пятнадцатой степени, который преобразуется по закону (16.6.26), имеет вид

$$Z_1^3 Z_2^3 Z_3^3 Z_4^3 Z_5^3, \quad (16.6.28)$$

и мы заключаем, что кубическая связь суперполей из трех поколений обращается в нуль, если в произведении трех соответствующих полиномов $\psi_k \psi_l \psi_m$ не появляется моном (16.6.28). Теперь легко видеть, что разрешенными юкавскими связями являются

$$\begin{aligned} & \psi_0^3, \quad \psi_0 \psi_2 \psi_{-2}, \quad \psi_2 \psi_{-1} \psi_{-1}, \\ & \psi_{-2} \psi_1 \psi_1, \quad \psi_2 \psi_2 \psi_1, \quad \psi_{-2} \psi_{-2} \psi_{-1}, \end{aligned} \quad (16.6.29)$$

но связь

$$\psi_0 \psi_{-1} \psi_1 \quad (16.6.30)$$

запрещена. Замечательным в этом результате является то, что выражение (16.6.30) сохраняет любую глобальную симметрию.

которую сохраняют связи (16.6.29). С точки зрения низкоэнергетического наблюдателя невозможность обнаружить взаимодействие (16.6.30), в то время как все взаимодействия (16.6.29) присутствуют, весьма загадочно. Природа преподносит нам некоторые очень похожие загадки в виде удивительно малых масс кварков и лептонов и удивительно малых углов смешивания. Мы видели, как одна такая загадка может иметь простое микроскопическое объяснение.

16.7. Другой подход к нарушению симметрии

В этой главе мы изучали следствия из уравнений (16.1.1) для ненарушенной суперсимметрии в четырех измерениях, которые мы повторяем здесь для удобства:

$$\begin{aligned} \text{а) } 0 &= \delta\psi_i = \frac{1}{\kappa} D_i \eta + \frac{\kappa}{32g^2\phi} (\Gamma_i{}^{jkl} - 9\delta_i{}^j \Gamma^{kl}) \eta H_{jkl}, \\ \text{б) } 0 &= \delta\lambda = -\frac{1}{\sqrt{2}\phi} (\Gamma \cdot \partial\phi) \eta + \frac{\kappa}{8\sqrt{2}g^2\phi} \Gamma^{ijk} \eta H_{ijk}, \\ \text{в) } 0 &= \delta\chi = -\frac{1}{4g\sqrt{\phi}} \Gamma^{ij} F_{ij} \eta. \end{aligned} \quad (16.7.1)$$

Наше рассмотрение целиком основывалось на одном простом анзаце для этих уравнений, а именно на вложении спиновой связности в калибровочную группу и на использовании условия $H = \partial\phi = 0$. В то время как такой анзац удовлетворяет уравнениям (16.7.1), сами эти уравнения являются только приближением для некоторых точных уравнений, включающих в себя члены старшего порядка по α' . В предыдущем разделе мы использовали теорему о неперенормировке для суперпотенциала, чтобы показать, что поправки более высокого порядка не приводят к возбуждению массовых полей и дестабилизации вакуума, но возбуждают только массивные поля, и их можно включить в малые пертурбативные поправки к вакууму.

Нельзя считать удовлетворительным ограничение простым анзацем, который мы рассматривали выше, когда не очевидно, что нет более общих возможностей. Мы теперь воспользуемся теоремой о неперенормировке суперпотенциала, чтобы найти более общие вакуумные состояния с ненарушенной $N = 1$ -суперсимметрией в четырех измерениях. Мы дадим лишь довольно краткое введение в этот обширный и пока не вполне исследованный предмет.

Рассмотрим компактификацию на $M^4 \times K$, где K — компактное шестимерное многообразие, радиус которого обозначим через r . Рассмотрим разложение по степеням $1/r$, или, точнее, по степеням α'/r^2 . Наша цель состоит в том, чтобы сформулиро-

вать такие утверждения, которые выполняются по крайней мере во всех конечных порядках по α'/r^2 . Важно иметь в виду, что r является динамической переменной и на самом деле одним из четырехмерных полей теории. В действительности r связано по суперсимметрии с аксиноподобной модой, которая фигурировала в доказательстве теоремы о неперенормировке.

Сначала попробуем наложить условие $H = d\phi = 0$ в уравнениях (16.7.1), но без вложения спиновой связности в калибровочную группу. Из уравнения (16.7.1а) следует, что K должно быть многообразием с $SU(3)$ -голономией. Заметим, что правая часть уравнения (16.7.1а) содержит одну производную и имеет порядок $1/r$. Уравнение (16.7.1б) выполняется, если мы полагаем $H = d\phi = 0$. Что касается уравнения (16.7.1в), то его мы уже рассматривали в разд. 15.6. Из этого уравнения следует, что A является голоморфной связностью в голоморфном векторном расслоении X над K и удовлетворяет уравнению

$$g^{ab} F_{ab} = 0. \quad (16.7.2)$$

Уравнение (16.7.2) вместе с условием голоморфности $F_{ab} = 0$ мы будем называть уравнениями Кэлера — Янга — Миллса. Десятимерная калибровочная группа (в наиболее интересном случае это группа $E_8 \times E_8$) нарушается до подгруппы, коммутирующей с калибровочными полями, которые имеются в вакуумном состоянии. Вложение спиновой связности в калибровочную группу представляет собой одно решение уравнения (16.7.2); оно нарушает группу $E_8 \times E_8$ до $E_6 \times E_8$ (или, возможно, до ее подгруппы, если вводятся петли Вильсона). Но уравнение (16.7.2) имеет много других решений. Согласно теоремам Дональдсона (в комплексной размерности два) и Уленбек — Яу (в комплексной размерности три и больше), обсуждавшимся в разд. 15.6.2, существует единственное решение уравнения (16.7.2) в любом стабильном голоморфном векторном расслоении X над K .

Существует много примеров таких расслоений. Так, в разд. 15.6.3 мы построили нетривиальные четырехмерные голоморфные векторные расслоения над квинтикой Q в CP^4 . Мы обнаружили, что такие расслоения X ранга четыре можно получить с помощью деформаций расслоения $T \otimes L$, где T — касательное расслоение для Q , а L — тривиальное линейное расслоение. Единственная голоморфная связность A на X , удовлетворяющая условию (16.7.2), представляет собой некоторое $SU(4)$ -калибровочное поле. Поскольку группа E_8 содержит максимальную подгруппу $SO(10) \times SO(6) \approx SO(10) \times SU(4)$, использование в вакуумном состоянии этого решения уравнения

(16.7.2) дает модель, в которой группа $E_8 \times E_8$ нарушена до $SO(10) \times E_8$ (или до ее подгруппы, если вводится петля Вильсона). Ниже этот пример хорошо иметь в виду, хотя уравнение (16.7.2) имеет много других решений; например, на кэлеровом многообразии с $h^{1,1} > 1$ оно имеет абелевы решения, которые обсуждались в гл. 15.

При разложении по степеням $1/r$ естественно считать, что калибровочное поле A имеет порядок $1/r$, так как оно появляется в ковариантной производной $D = \partial + iA$. В то время как правая часть уравнения (16.7.1а) имеет порядок $1/r$, правая часть уравнения (16.7.1в) имеет порядок $1/r^2$. Теоретико-струнные поправки, опущенные в уравнениях (16.7.1), имеют более высокий порядок.

Взяв многообразие K с группой голономии $SU(3)$, с условиями $H = d\phi = 0$ и с A , являющимися решением уравнения (16.7.2), мы удовлетворим уравнениям (16.7.1). Чего же нам еще не хватает? Уравнения (16.7.1) надо дополнить тождеством Бианки (16.1.2), которое мы повторяем здесь для удобства:

$$dH = \text{tr} R \wedge R - \text{tr} F \wedge F. \quad (16.7.3)$$

Оно удовлетворяется при $H = 0$, если спиновая связность вложена в калибровочную группу, но не удовлетворяется в противном случае. Именно этот пункт был причиной того, что в разд. 16.1 мы ограничились случаем вложения спиновой связности в калибровочную группу.

Поскольку $\text{tr} F \wedge F$ и $\text{tr} R \wedge R$ представляют соответственно вторые классы Черна для X и для касательного расслоения T на K и так как dH тривиально в когомологиях, условие (16.7.3) имеет решение только в том случае, если

$$c_2(X) = c_2(T). \quad (16.7.4)$$

Это требование уже было отмечено в разд. 13.5.3 и 14.7. Если требование (16.7.4) выполняется, то условию (16.7.3) можно удовлетворить.

Правая часть уравнения (16.7.3) имеет порядок $1/r^4$, так что тождество (16.7.3) совместно с выбором H порядка $1/r^3$. При таком выборе уравнения (16.7.1) на самом деле не удовлетворяются, но ошибка будет всего лишь порядка $1/r^3$. Наша задача состоит в том, чтобы определить, можно ли так модифицировать конфигурацию полей, чтобы уравнения (16.7.1) выполнялись до порядка $1/r^3$ включительно, а на самом деле и во всех конечных порядках. При этом необходимо учитывать зависящие от α' поправки к уравнениям (16.7.1).

На самом деле ошибка порядка $1/r^3$ в уравнениях (16.7.1) есть струнный эффект порядка α' . Об этом можно догадаться

просто потому, что параметров разложения в действительности является α'/r^2 , но мы проведем более подробное обсуждение. Член $\text{tr} R \wedge R$ отсутствует в уравнении (16.7.3) в предельной суперсимметричной теории поля, сформулированной в разд. 13.1.3; он имеет порядок α' , хотя в формулах мы положили α' равным единице. Если исключить член $\text{tr} R \wedge R$ из уравнения (16.7.3), то из него будет следовать, что $c_2(X) = 0$; в комплексной размерности три решения уравнения (16.7.2) с $c_2(X) = 0$, как мы увидим ниже, должно иметь $F = 0$ ¹⁾. В этом случае уравнение (16.7.3) допускало бы выбор $H = 0$. Таким образом, именно эффекты порядка α' являются реальной причиной того, что при попытках удовлетворить уравнению (16.7.1) мы сталкиваемся с ошибкой порядка $1/r^3$. Эту ошибку надо проанализировать с помощью общей теоремы о неперенормировке для зависящих от α' поправок, которую мы обсуждали в предыдущем разделе.

В теории Калуцы — Клейна на компактном многообразии радиуса r естественным масштабом масс является $1/r$ и появляется бесконечное число четырехмерных частиц с массами такого порядка. Тот факт, что уравнение (16.7.1) выполнено в порядке $1/r$, означает, что четырехмерное гравитино в этом порядке безмассовое. Его масса, если она вообще появляется, возникает в порядке $1/r^3$ или в любом таком порядке, в котором не удается удовлетворить уравнению (16.7.1) (или его струнному обобщению).

Четырехмерная теория с безмассовой частицей спина $3/2$ должна быть суперсимметричной. Тот факт, что для очень больших r гравитино является по существу безмассовым по сравнению со всеми другими модами, означает, что компактификация из десяти в четыре измерения на $M^4 \times K$ должна давать четырехмерную теорию, которая суперсимметрична. Нарушена ли спонтанно суперсимметрия или нет, это другой вопрос. Если гравитино получает массу порядка $1/r^3$ (или более высокого порядка), это должно допускать интерпретацию как спонтанное нарушение суперсимметрии.

Как мы исследуем спонтанное нарушение суперсимметрии? Условие ненарушенной суперсимметрии можно кратко

¹⁾ С точки зрения феноменологии, это, конечно, не очень интересно, так как $E_8 \times E_8$ останется ненарушенной. Включение в уравнение (16.7.3) члена $\text{tr} R \wedge R$, делающее возможным использование нетривиальных решений уравнения (16.7.3) (подобных вложению спиновой связности в калибровочную группу или более общим возможностям, исследуемым в этом разделе), является главным преимуществом теории струн по сравнению с предельной низкоэнергетической теорией поля.

сформулировать в терминах суперпотенциала W ; оно имеет вид

$$W = \frac{\partial W}{\partial \phi^k} = 0, \quad (16.7.5)$$

где ϕ^k пробегает все киральные суперполя¹⁾. Уравнение (16.7.5) немедленно показывает, что, для того, чтобы определить, могут ли эффекты порядка $1/r^3$ и выше (другими словами, эффекты порядка α' и выше) привести в действие спонтанное нарушение суперсимметрии, мы должны исследовать суперпотенциал. Если зависящие от r поправки к поведению при больших r не включают в себя поправки к W , то они не могут вызвать спонтанного нарушения суперсимметрии. Но это как раз такой вопрос, которым занимаются теоремы о неперенормировках. По крайней мере в конечных порядках нет никаких зависящих от α' (или от r) поправок к поведению при больших r суперпотенциала. Так как рассматриваемая конфигурация обладает ненарушенной суперсимметрией в пределе очень больших r , суперсимметрия должна оставаться ненарушенной во всех порядках по $1/r$. В проведенном выше рассмотрении уравнение (16.7.1) удовлетворялось только с точностью порядка $1/r^3$, но приведенные только что факты показывают, что должна иметься возможность так подобрать метрику и разные другие поля, чтобы эту ошибку исключить.

Зададим вопрос: что это рассуждение доказывает, а что нет? Суть теоремы о неперенормировке для суперпотенциала состоит в том, что все массивные моды исключаются и анализируется эффективный суперпотенциал для безмассовых степеней свободы. Тогда простые соображения, использующие аксионную симметрию, показывают, что этот суперпотенциал не получает поправок, зависящих от r или от α' . Эти соображения гарантируют, что в каждом порядке по $1/r$ можно получить вакуумное решение, в котором суперпотенциал не модифицируется, и поэтому вакуумные средние безмассовых полей не сдвигаются. Эти соображения ничего не говорят о том, как это вакуумное решение выглядит с точки зрения массивных степеней свободы. Если мы их не исключим, а оставим в рассмотрении, то зависящие от r поправки вполне могут сдвинуть вакуумные средние этих массивных мод. Все это обсуждалось с несколько другой точки зрения в предыдущем разделе.

¹⁾ Имеется еще условие $D^a = 0$, где a пробегает алгебру Ли. Структура этого условия такова, что возможность ему удовлетворить устойчива относительно небольших изменений D^a при условии, что ненарушенная калибровочная группа полупростая. В этом случае не нужно рассматривать его при обсуждении поправок к поведению для больших r .

Обсудим теперь явное построение вакуумного решения по теории возмущений по $1/r$ в низших ее порядках. Это позволит нам также явно проиллюстрировать рассмотрения предыдущего раздела. Десятимерные уравнения мы разлагаем по степеням $1/r$, считая пространственно-временные производные и калибровочные поля величинами порядка $1/r$. Единственное уравнение, которое мы имеем в порядке $1/r^2$, — это уравнение Эйнштейна

$$R_{ij} = 0. \quad (16.7.6)$$

Оно удовлетворяется, если в качестве K взять риччи-плоское кэлерово многообразие. В порядке $1/r^3$ имеем уравнения Янга — Миллса

$$D^i F_{ij} = 0, \quad (16.7.7)$$

которые выполняются, если в качестве калибровочного поля взять голоморфную связность в голоморфном векторном расслоении X , удовлетворяющую уравнению Дональдсона — Уленбек — Яу. В порядке $1/r^4$ имеется тождество Бианки (16.7.3), которое надо дополнить уравнением движения для поля H

$$d^* H = 0. \quad (16.7.8)$$

Если предполагается, что $c_2(X) = c_2(T)$, то уравнения (16.7.3) и (16.7.8) вместе имеют решение, которое единственно, если (для минимизации энергии) мы выбираем H ортогональным к гармоническим 3-формам на K . В порядке $1/r^4$ мы в первый раз встречаемся с уравнением для поля дилатона

$$\square \phi = \text{tr } F_{ij} F^{ij} - \text{tr } R_{ij} R^{ij}, \quad (16.7.9)$$

а также с некоторой модификацией уравнения Эйнштейна (16.7.6), которую мы здесь не будем рассматривать, так как уравнения (16.7.9) достаточно для того, чтобы проиллюстрировать ключевые понятия.

На компактном многообразии K уравнение

$$\square \phi = J \quad (16.7.10)$$

при произвольном J не имеет решения. Необходимо, чтобы источник J был ортогонален всем нулевым модам волнового оператора \square . Если ψ — такая нулевая мода, $\square \psi = 0$, то (используя эрмитовость оператора \square) из уравнения (16.7.10) следует

$$0 = \int_K \psi \square \phi = \int_K \psi J. \quad (16.7.11)$$

Обращение в нуль выражения (16.7.11) для каждой собственной функции ψ оператора \square с нулевым собственным значением является необходимым и достаточным условием того, что уравнение (16.7.10) имеет решение ¹⁾.

Скалярный волновой оператор особенно прост: единственной нулевой модой оператора \square является постоянная функция 1. Таким образом, требование (16.7.11), чтобы источник был ортогонален нулевым модам волнового оператора, в этом случае сводится к условию

$$0 = \int_K (\text{tr } F_{ij} F^{ij} - \text{tr } R_{ij} R^{ij}). \quad (16.7.12)$$

Теорема о неперенормировке для суперпотенциала, которая предсказывает, что значения массивных полей можно так переопределить, чтобы получить вакуумное решение в разложении по α' , предсказывает, что условие (16.7.12) должно выполняться. Сейчас мы увидим, что действительно условие (16.7.12) является следствием топологического условия $c_2(X) = c_2(T)$, а также различных других условий, которые мы наложили, чтобы удовлетворить уравнениям (16.7.1) в главном порядке по $1/r$. Заметим сначала, что

$$\text{tr } F_{ij} F^{ij} = 2g^{a\bar{a}} g^{b\bar{b}} \text{tr } F_{ab} F_{\bar{a}\bar{b}} + 2g^{a\bar{a}} g^{b\bar{b}} \text{tr } F_{a\bar{b}} F_{\bar{a}b}. \quad (16.7.13)$$

Второе слагаемое в (16.7.13) можно переписать, используя тождество

$$g^{a\bar{a}} g^{b\bar{b}} \text{tr } F_{a\bar{b}} F_{\bar{a}b} = g^{a\bar{a}} g^{b\bar{b}} \text{tr } F_{a\bar{a}} F_{b\bar{b}} - k \wedge \text{tr } F \wedge F, \quad (16.7.14)$$

где k — кэлерава форма. Объединяя эти манипуляции, получаем формулу для действия Янга — Миллса

$$\int_K \text{tr } F_{ij} F^{ij} = \int_K [2g^{a\bar{a}} g^{b\bar{b}} \text{tr } F_{ab} F_{\bar{a}\bar{b}} + 2 \text{tr } (g^{a\bar{a}} F_{a\bar{a}})^2 - 2k \wedge \text{tr } F \wedge F]. \quad (16.7.15)$$

Последний член в правой части (16.7.15) является топологическим инвариантом, т. е. зависит только от топологического класса кэлеравой метрики на K и топологического класса векторного расслоения X^2). Формула (16.7.15) показывает, что ре-

¹⁾ Требуемое здесь доказательство эквивалентно тому, которое дано в разд. 15.6.2 для уравнения $\Delta\sigma = H$.

²⁾ Формула (16.7.15) показывает, что решение уравнений Кэлера — Янга — Миллса, для которых $\text{tr } F \wedge F$ тривиален в когомологиях, имеет нулевое действие и поэтому должно иметь место равенство $F = 0$, как отмечалось выше.

шение уравнений Кэлера — Янга — Миллса, которое предсказывается теоремами Дональдсона и Уленбек — Яу, в данном топологическом классе имеет минимальное действие. Формула (16.7.15) имеет аналог, в котором F заменяется на тензор Римана R . Подставляя (16.7.15) и его аналог в уравнение (16.7.12), находим, что правая часть этого уравнения принимает вид

$$-2 \int_K k \wedge \text{tr } (F \wedge F - R \wedge R). \quad (16.7.16)$$

Подставляя $dH = \text{tr } (F \wedge F - R \wedge R)$ в выражение (16.7.16), интегрируя по частям и используя тот факт, что $dk = 0$, обнаруживаем, что выражение (16.7.16) равно нулю. Таким образом, мы проверили, что уравнение (16.7.9) имеет решение.

Подведем итог тому, что было сделано, и сравним это с общим рассмотрением, проведенным после выражения (16.6.21) в предыдущем разделе. Массивные поля X_i в выражении (16.6.21) с точки зрения нашего теперешнего обсуждения соответствуют ненулевым собственным значениям волнового оператора \square . Безмассовые поля ϕ_k из предшествующего обсуждения отвечают нулевым модам ψ оператора \square . Обращение в нуль источников ρ_k в выражении (16.6.22) аналогично требованию (16.7.11), чтобы источники в уравнении (16.7.9) были ортогональны нулевым модам волнового оператора \square . Равенство нулю правой части уравнения (16.7.12) представляет собой условие, которое обеспечивает, что возмущение $\text{tr } F_{ij}^2 - \text{tr } R_{ij}^2$ не взаимодействует с безмассовыми полями, происходящими из нулевых мод оператора \square ; такое взаимодействие дестабилизировало бы вакуум, вызывая спонтанное нарушение суперсимметрии.

Таким образом, общая идея заключается в том, что при разложении полевых уравнений по степеням $1/r$ в каждом порядке мы получаем уравнение общего вида

$$\square \sigma = J, \quad (16.7.17)$$

где σ — некоторое поле, \square — некоторый эллиптический оператор с дискретным спектром, а J — источник, зависящий от вакуумного состояния, построенного в более низких порядках по $1/r$. Условие того, что уравнение (16.7.17) имеет решение, состоит в том, что J должно быть ортогонально всем нулевым модам оператора \square . Согласно теореме о неперенормировке для суперпотенциала, это всегда имеет место, что было явно проверено в низших порядках, хотя мы и рассматривали только простейший случай.

16.8. Обсуждение

В предыдущем разделе приведены аргументы в пользу того, что по крайней мере во всех конечных порядках по α' существуют более общие состояния с ненарушенной суперсимметрией. Исходным пунктом в общем случае является многообразие K с $SU(3)$ -голономией и связность Кэлера — Янга — Миллса в голоморфном векторном расслоении, второй класс Черна которого такой же, как у касательного расслоения на K . Чтобы все это немного конкретизировать, вернемся к нашему привычному примеру — квинтике Q в CP^4 . В действительности мы обсудим модель с четырьмя поколениями, которая основывается на фактор-пространстве такой гиперповерхности по $Z_5 \times Z_5$.

Если мы вкладываем спиновую связность в калибровочную группу, то получаем E_6 -модель с одним мультиплетом C_x в представлении $\overline{27}$, пятью мультиплетами $D_{(a)}^x$ в представлении 27 и с некоторым числом безмассовых E_6 -синглетов $E_{(m)}$. Здесь x — E_6 -индекс, a (a) и (m) — индексы аромата для 27 -плетов и синглетов соответственно. В данный момент нас будут интересовать те E_6 -синглеты, которые возникают из $H^1(\text{End } T)$, когда касательное расслоение T вложено в $E_8 \times E_8$. Имеются также такие E_6 -синглеты, которые происходят из деформаций комплексной структуры и кэлерова класса на K , но в этом разделе их мы рассматривать не будем.

Вложение спиновой связности в калибровочную группу соответствует наложению условий $C = D = E = 0$. Это дает вакуумное состояние, в котором суперпотенциал W удовлетворяет условиям

$$W = \frac{\partial W}{\partial \phi^k} = 0 \quad (16.8.1)$$

и суперсимметрия не нарушается. Зададимся теперь вопросом, можно ли, исходя из условий $C = D = E = 0$, найти такие «плоские направления», в которых суперпотенциал тождественно равен нулю. Если это так, то сдвиг в этих плоских направлениях дает новые решения уравнений (16.8.1), так что в этом случае помимо состояний, полученных с помощью вложения спиновой связности в калибровочную группу, в пространстве полей есть и другие близкие точки с ненарушенной суперсимметрией.

В обычных моделях низкоэнергетической суперсимметрии такие плоские направления часто возникают. Но в рассматриваемой ситуации, если статья на низкоэнергетическую точку зрения, это кажется маловероятным. Рассмотрим сначала одно плоское направление, в котором возбуждается ровно один E_6 -

синглет E . Так как E является безмассовой модой, отвечающей некоторому ненулевому элементу из $H^1(\text{End } T)$, в суперпотенциале нет члена E^2 . Но и нет никаких очевидных причин, по которым суперпотенциал не может иметь членов других порядков:

$$E^k, \quad k = 3, 4, 5, \dots \quad (16.8.2)$$

Существование плоского направления, по-видимому, потребовало бы обращения в нуль бесконечного числа коэффициентов, для чего нет никаких очевидных причин. Тем не менее в примере 6 из разд. 15.6.3 мы явным образом построили голоморфные деформации \tilde{T} голоморфного касательного расслоения T на K . В начале предыдущего раздела мы показали, что (по крайней мере во всех конечных порядках по α') для построения нового вакуумного состояния с ненарушенной суперсимметрией можно использовать *любое* голоморфное расслоение X с таким же вторым классом Черна, как у T . Расслоение \tilde{T} , которое является деформацией расслоения T , конечно, имеет такой же второй класс Черна, как T , так что его можно использовать в этой конструкции.

В этом примере число параметров, входящих в определение \tilde{T} , равно числу безмассовых E_6 -синглетов $E_{(m)}$, поэтому построенные таким способом новые вакуумные состояния находятся во взаимно однозначном соответствии со всевозможными значениями $E_{(m)}$. Следовательно, все вклады в суперпотенциал вида (16.8.2), которые отвечают взаимодействию мод $E_{(m)}$ только друг с другом, равны нулю (во всяком случае, во всех конечных порядках по α'), каким бы неправдоподобным это ни казалось с низкоэнергетической точки зрения. Таким образом, мы обнаружили первый пример плоских направлений в суперпотенциале модели, полученной компактификацией на Q . Эти плоские направления оставляют E_6 ненарушенной, так как мы рассматривали только E_6 -синглеты.

Более интересны, возможно, такие плоские направления, которые дают нарушение E_6 . Эти направления должны отвечать возбуждению 27 - и $\overline{27}$ -плетов $D_{(a)}^x$ и C_x . В этом случае в суперпотенциале имеются члены взаимодействия. Действительно, выше даны топологические формулы для членов

$$d^{xyz} C_x C_y C_z, \quad d_{xyz} D_{(a)}^x D_{(b)}^y D_{(c)}^z. \quad (16.8.3)$$

Одно только то, что у нас есть формула для связей C^3 и D^3 , не гарантирует, что эти связи не равны нулю. Возможно, читатель почувствует, что надо быть начеку, после того как ему сказали, что E^3 -связи, для которых также выведена общая топологическая формула, в этой конкретной модели все равны нулю. Но

в этой модели C^3 - и D^3 -связи не равны нулю¹⁾. На первый взгляд можно подумать, что наличие суперполевых C^3 - и D^3 -связей препятствует существованию плоских направлений, которые отвечают возбуждению C или D . Но это не так; C^3 - и D^3 -связи исключают большинство плоских направлений, но не все, ограничивая тем самым возможные способы нарушения E_6 . Относительно максимальной подгруппы $SO(10) \times U(1)$ группы E_6 представление 27 для E_6 разлагается как

$$27 \approx 16^{-1} \oplus 10^2 \oplus 1^{-4}, \quad (16.8.4)$$

где верхний индекс есть $U(1)$ -заряд. Из соотношения (16.8.4) легко видеть, что сохраняющая $SO(10) \times U(1)$ связь типа 27^3 должна иметь следующий общий вид:

$$27^3 \approx 16 \cdot 16 \cdot 10 \oplus 10 \cdot 10 \cdot 1. \quad (16.8.5)$$

Заметим, что выражение (16.8.5) не содержит членов, кубичных или квадратичных по 1 для $SO(10)$. Поэтому если D^3 — единственный член в суперпотенциале W , который надо учитывать, а 1 для $SO(10)$ — единственная ненулевая компонента в D , то $W = \partial W / \partial \phi = 0$. Мультиплет C в представлении 27 имеет разложение, аналогичное разложению (16.8.4). Он также содержит компоненту, синглетную по $SO(10)$, а E_6 -инвариантное взаимодействие C^3 также не опасно в том отношении, что оно не портит плоского направления, в котором возбуждена только эта компонента в C .

Пусть c и d — синглетные по $SO(10)$ компоненты в C и D соответственно. Мы видели, что в минимальном суперпотенциале вида $C^3 + D^3$ остаются плоские направления, в которых c и d имеют вакуумные средние, поэтому E_6 нарушается до $SO(10)$. Помимо суперпотенциала, мы должны рассмотреть также члены $(D_a)^2$ в потенциальной энергии, где a пробегает алгебру Ли группы $E_8 \times E_8$, чтобы получить ненарушенную суперсимметрию. Из условия обращения этих членов в нуль следует просто, что если c имеет вакуумное среднее, то и d должно его иметь²⁾. Принимая во внимание минимальный суперпотенциал

¹⁾ В случае C^3 -связи это легко доказать. Один $\overline{27}$ -плет C возникает из одной гармонической $(1, 1)$ -формы на K — кэлеровой формы. Суперполевая C^3 -связь по нашей формуле связана с интегралом $\int_Q k \wedge k \wedge k$, который определенно не равен нулю. Что касается D^3 -связей, то хотя нам и удалось найти для них ограничения с помощью симметрий и псевдосимметрий в разд. 16.6.1 и 16.6.4, но доказательство того, что они отличны от нуля, требует применения более мощных методов, чем те, которые развиты здесь.

²⁾ Зависящие от α' поправки могли бы повлиять на величину необходимого отношения c/d , но в остальном они безопасны.

и члены $(D_a)^2$, происходящие из калибровочных взаимодействий, заключаем, что этим и исчерпываются возможные плоские направления.

Существуют ли действительно эти плоские направления, нарушающие E_6 до $SO(10)$? С низкоэнергетической точки зрения это кажется маловероятным. Хотя члены C^3 и D^3 допускают такие плоские направления, но бесконечное число суперполевых связей типа

$$C^x D_x E, \quad (C^x D_x)^2 \quad (16.8.6)$$

и т. д. разрушило бы плоские направления, нарушающие E_6 . Как и в обсуждении членов (16.8.2), представляется маловероятным с низкоэнергетической точки зрения, что все эти коэффициенты равны нулю. Тем не менее это так (во всех конечных порядках по α'). Необходимая здесь аргументация в точности аналогична рассуждениям по поводу членов (16.8.2). В примере 6 из разд. 15.6.3 мы построили расслоения X ранга четыре над Q как деформации расслоения $T \oplus L$. Число параметров в конструкции расслоения X такое же, как число параметров в плоских направлениях, разрешенных минимальным суперпотенциалом и $(D_a)^2$ -связями. Из существования этих расслоений X следует существование расширенного семейства возможных вакуумных состояний. Связность Кэлера — Янга — Миллса на X представляет собой $SU(4)$ -калибровочное поле, вложение которого в группу E_8 нарушает E_8 до $SO(10)$ точно так же, как в тех выводах, к которым мы пришли при обсуждении плоских направлений в суперпотенциалах.

Таким образом, теорема о неперенормировке для суперпотенциала приводит к новому механизму нарушения симметрии; оставляя $N=1$ -суперсимметрию ненарушенной, мы можем воспользоваться этим механизмом, чтобы нарушить E_6 до группы $SO(10)$, которую, если нужно, можно нарушить дальше с помощью петель Вильсона. Используя голоморфное расслоение ранга пять, а следовательно, вложение $SU(5)$ -калибровочного поля в E_8 , можно нарушить E_8 до $SU(5)$; это опять можно объединить с петлями Вильсона. Мы не будем строить здесь примеров стабильных голоморфных векторных расслоений ранга пять над многообразиями с $SU(3)$ -голономией, но таких примеров имеется много. Феноменология этих $SO(10)$ - и $SU(5)$ -моделей весьма интересна, хотя пока мало исследована.

В заключение отметим еще раз, что все наши рассмотрения оправданы только в конечных порядках теории возмущений по α' . Есть указания на то, что вне рамок теории возмущений

теорема о неперенормировке для суперпотенциала нарушается на уровне инстантонов на мировой поверхности. Ясной же картины следствий этого явления пока еще нет.

16.9. Перенормировка констант связи

Константы связи на масштабе великого объединения можно связать с константами связи при обычных энергиях с помощью стандартных вычислений по ренормгруппе. Если бы мы знали правильную схему струнной компактификации, то мы знали бы все исходные константы связи на масштабе объединения. Но мы этого не знаем. Даже не зная всех микроскопических подробностей теории, часто из общих соображений можно определить некоторые из исходных соотношений между константами связи. Одним из основных результатов, полученных в разд. 16.4.2, было то, что, как мы показали, в рамках теории Калуцы — Клейна с нарушением симметрии великого объединения, осуществляемым петлями Вильсона, древесные калибровочные константы (но не юкавские константы) удовлетворяют стандартным теоретико-групповым соотношениям. Поэтому справедливо вычисление величины $\sin^2 \theta_W$ и масштаба объединения по Джорджи — Куинн — Вайнбергу. Здесь мы обсудим его следствия.

Обозначим константы связи для сильных, слабых и электромагнитных взаимодействий через α_3 , α_2 и α_{em} соответственно¹⁾. Стандартная формула для ренормгруппы имеет вид

$$\begin{aligned}\alpha_3^{-1}(\mu) &= \alpha_{GUT}^{-1} + \frac{1}{2\pi} b_3 \ln \frac{M_{GUT}}{\mu}, \\ \alpha_2^{-1}(\mu) &= \alpha_{GUT}^{-1} + \frac{1}{2\pi} b_2 \ln \frac{M_{GUT}}{\mu}, \\ \alpha_{em}^{-1}(\mu) &= \alpha_{GUT}^{-1} + \frac{1}{2\pi} b_{em} \ln \frac{M_{GUT}}{\mu}.\end{aligned}\quad (16.9.1)$$

Здесь M_{GUT} — масштаб масс объединения, μ — масштаб, при котором наблюдаются взаимодействия, α_{GUT} — константа связи на масштабе объединения, а b_3 , b_2 и b_{em} — однопетлевые коэффициенты бета-функций. Это можно представить в виде формул

¹⁾ Таким образом, α_3 — константа связи для цветовой группы $SU(3)$, а α_2 — для группы $SU(2)_L$.

для масштаба объединения и для угла θ_W :

$$\ln \frac{M_{GUT}}{\mu} = \frac{\alpha_{em}^{-1} - \frac{8}{3} \alpha_3^{-1}}{(b_{em} - \frac{8}{3} b_3) / 2\pi}, \quad (16.9.2)$$

$$\sin^2 \theta_W = \alpha_{em} \left(\alpha_3^{-1} + \frac{1}{2\pi} (b_2 - b_3) \ln \frac{M_{GUT}}{\mu} \right).$$

Удобно выбрать $\mu = M_W$, тогда экспериментальные значения приближенно равны $\alpha_{em}^{-1} = 128$, $\alpha_3^{-1} = 9$.

В случае E_6 -моделей с низкоэнергетической суперсимметрией имеем

$$\begin{aligned}b_3 &= 3F + \frac{1}{2} \Delta_3 - 9, \\ b_2 &= 3F + \frac{1}{2} \Delta_2 - 6, \\ b_{em} &= 8F + \sum Q^2 - 6C.\end{aligned}\quad (16.9.3)$$

Здесь F — число полных семейств и антисемейств (киральных мультиплетов в представлениях 27 и $\bar{27}$ по E_6), Δ_3 — число триплетных и антитриплетных по цвету киральных супермультиплетов, которые не попадают в полные E_6 -мультиплеты, Δ_2 — число киральных супермультиплетов, являющихся слабыми дублетами и не попадающих в полные E_6 -мультиплеты, $\sum Q^2$ — сумма квадратов электрических зарядов киральных суперполей, не входящих в полные E_6 -мультиплеты, а C — сумма квадратов зарядов легких положительно заряженных калибровочных бозонов (для стандартной модели вклад дает только W^+ и $C = 1$). Мы немедленно замечаем, что при $F \geq 4$ E_6 -модели с низкоэнергетической суперсимметрией имеют $b_3 > 0$ и испорчены полюсами Ландау. Если $F = 4$, то α_3^{-1} стремится к нулю при $10^{11 \pm 1}$ ГэВ. Так как экспериментальные данные требуют, по-видимому, чтобы было $F \geq 3^1$, мы заключаем, что E_6 -модели с низкоэнергетической суперсимметрией должны иметь ровно три поколения (и ни одного антипоколения).

Рассмотрим сначала случай, когда в качестве низкоэнергетической калибровочной группы выступает такая группа, как

¹⁾ Феноменологически приемлемую модель для $F=2$ почти, но не совсем удается построить. В такой модели нет t -кварка, но он заменяется дополнительным b' -кварком с зарядом $-1/3$. Этот b' -кварк вместе со всеми известными фермионами точно укладывается в два 27 -плета для E_6 , но такие модели, по-видимому, исключаются наблюдениями b -кваркового распада, а также реакции $e^+e^- \rightarrow b\bar{b}$.

$SU(3) \times SU(2) \times U(1) \times U(1)$, в которой к стандартной модели добавляются только дополнительные нейтральные токи. Если допустить, что киральные суперполя образуют полные мультиплеты по E_6 , то получается $\sin^2 \theta_W = 0,206$, что хорошо согласуется с экспериментом, а также $\lg(M_{GUT}/M_W) = 15,8$. Последнее значение для M_{GUT} является вполне разумным, хотя этот вопрос требует некоторых пояснений.

В четырехмерных моделях великого объединения любое значение M_{GUT} , лежащее между приблизительно 10^{15} ГэВ и массой Планка, можно считать приемлемым. Но в константе теории Калуцы — Клейна все совершенно по-другому. Например, соотношение $g^2 \sim \kappa^2/\alpha'$, которое имеет место в теории гетеротических струн, означает, что струнный масштаб $(\alpha')^{-1/2}$ не может быть много ниже массы Планка (поскольку калибровочные константы в природе порядка единицы). Если допустить (как мы поступали в этой главе), что компактификация и нарушение симметрии великого объединения — это одно и то же, то в области выше M_{GUT} , но ниже струнного масштаба мы имеем дело с десятимерной теорией поля. Так как последняя является неперенормируемой, то эффективные константы связи будут быстро расти при переходе к высоким энергиям. Замечая, что $\alpha_{GUT} \sim 1$ и требуя, чтобы струнная константа связи на струнном масштабе не была намного больше единицы (это требование не является строго логическим, но, мы надеемся, что оно справедливо), заключаем, что M_{GUT} не может быть много меньше, чем $M_{\text{Планк}}$. Полученное выше значение M_{GUT} , вероятно, лежит вблизи нижнего предела тех значений, которые мы хотели бы рассматривать. Это означает, что калибровочные бозоны вряд ли вызовут распад протона с наблюдаемой скоростью, хотя можно только догадываться, с какой скоростью будет осуществляться распад протона за счет триплетных по цвету партнеров кварков.

Выше мы предполагали, что $\Delta_2 = \Delta_3 = 0$. Чтобы объяснить массы кварков и лептонов, не вызывая распада протона, можно ввести дополнительные хиггсовы дублеты в неполных мультиплетах. В суперсимметричных моделях потребовалось бы два хиггсовых дублета: один — для массы u -кварка, и один — для массы d -кварка. В E_6 -модели хиггсовы дублеты, которые должны взаимодействовать с кварками и лептонами, вполне могут преобразовываться по представлению 27 группы E_6 . Фермионные партнеры таких хиггсовых бозонов имеют треугольные аномалии, которые можно сократить с помощью включения других хиггсовых дублетов, возникающих из мультиплета 27. На самом деле описанный в разд. 16.4.3 механизм получения безмассовых хиггсовых дублетов со сверхтяжелыми триплетными по цвету

партнерами позволяет избежать аномалий именно таким способом. К сожалению, предсказания для M_{GUT} и для $\sin^2 \theta_W$ значительно ухудшаются вследствие включения хиггсовых бозонов в неполных E_6 -мультиплетах. Например, если включить два хиггсовых дублета, происходящих из некоторого мультиплета 27 группы E_6 , и еще два из мультиплета 27, то мы получим $\lg(M_{GUT}/M_W) = 12,9$ и $\sin^2 \theta_W = 0,25$.

До сих пор мы рассматривали модели, в которых к низкоэнергетической группе $SU(3) \times SU(2)_L \times U(1)$ добавляются только нейтральные токи. Имеется несколько других интересных примеров. Одним из наиболее интересных примеров является лево — право-симметричное расширение стандартной низкоэнергетической модели до группы $SU(3) \times SU(2)_L \times SU(2)_R \times U(1) \times U(1)$. На самом деле мы с необходимостью получаем этот вариант, если примем описанный в разд. 16.4.3 механизм получения безмассовых хиггсовых дублетов без партнеров, триплетных по цвету, и если мы хотим получить безмассовые хиггсовы дублеты, способные взаимодействовать как с u -кварками, так и с d -кварками. К сожалению, лево — право-симметричное расширение стандартной модели по ренормгруппе дает неприемлемые предсказания. В отсутствие одиночных хиггсовых бозонов получаем $\sin^2 \theta_W = 0,27$ и $\lg(M_{GUT}/M_W) = 23,7$. Одиночные хиггсовы бозоны уменьшают M_{GUT} , но, к сожалению, при этом $\sin^2 \theta_W$ возрастает.

Другая возможность состоит в том, чтобы использовать более общие вакуумные состояния, описанные в предыдущем разделе, чтобы нарушить E_6 до $SO(10)$. При этом одна из привлекательных черт связана с тем, что в E_6 -поколении

$$27 \approx 16 \oplus 10 \oplus 1 \quad (16.9.4)$$

компоненты $10 \oplus 1$ экспериментально не наблюдаются, так что в E_6 -моделях в любом случае надо предположить, что такие частицы получают большие массы, чем другие, возможно масштаба ТэВ. Использование плоских направлений для нарушения E_6 до $SO(10)$ может привести к этому автоматически.

Если E_6 нарушается до $SO(10)$ с помощью плоских направлений, то исчезает вклад компонент $10 \oplus 1$ в ренормгрупповые вычисления. Если отбросить этот вклад, то изменение величин (16.9.3) соответствует замене $F \rightarrow 2F/3$. В результате приемлемым становится значение $F = 4$, а возможно, даже $F = 5$. В однопетлевом приближении предсказания для $\sin^2 \theta_W$ и M_{GUT} не изменятся и поэтому по-прежнему приемлемы.

Другая заманчивая черта $SO(10)$ -моделей состоит в том, что если все заряженные киральные суперполя преобразуются как 16 для $SO(10)$, то перенормируемые взаимодействия,

нарушающие барионное число, отсутствуют, поскольку суперполевая связь 16^3 запрещена по $SO(10)$. (Могут еще быть нарушающие барионное число члены размерности пять, происходящие из суперполевых связей 16^4 ; они могут вызывать затруднения в зависимости от таких вопросов, как значение M_{GUT} .) Но в этом случае не ясно, откуда могут появиться массы кварков и лептонов. Если мы хотим получить массы кварков и лептонов обычным способом из кубических связей для суперполей, то необходимо иметь хиггсовы бозоны, происходящие из мультиплетта 10 для $SO(10)$. Если они не сопровождаются легкими партнерами, триплетными по цвету (которые могут вызывать распад протона), то они портят ренормгрупповые предсказания точно так же, как в E_6 -моделях. Одна возможность состоит в том, что имеются непарные хиггсовы бозоны, происходящие из мультиплетта 10 для $SO(10)$ (непарные в том смысле, что их $SO(10)$ -партнеры сверхтяжелые), но ренормгрупповые предсказания сохраняются благодаря тому, что хиггсовы вклады уравновешиваются вкладами дополнительных непарных цветных триплетов, происходящих из мультиплеттов в представлениях 16 и $\overline{16}$ группы $SO(10)$. Осуществление этой потенциально привлекательной возможности было бы впечатляющим проявлением чудесной силы алгебраической геометрии и когомологий Дольбо (или теории струн). Другое недавнее предложение, пока еще мало изученное, состоит в том, что массы кварков и лептонов могут возникать не из членов в суперпотенциале, а из взаимодействий, мягко нарушающих суперсимметрию.

16.10. Орбифолды и алгебраическая геометрия

Простейшей моделью компактификации из десяти измерений в четыре является компактификация на плоском шестимерном торе T . Такая схема компактификации, обсуждавшаяся в гл. 6 и 9, с точки зрения низкоэнергетической феноменологии далека от реальности. Шестимерный вещественный тор, фигурировавший в наших предшествующих рассмотрениях, с точки зрения настоящего обсуждения естественно рассматривать как трехмерный комплексный тор

$$T \approx C^3/\Gamma, \quad (16.10.1)$$

где Γ — решетка в трехмерном комплексном пространстве C^3 . С такой точки зрения T — комплексное многообразие комплексной размерности три с нулевым первым классом Черна. Оно допускает плоскую метрику, группа голономии которой является подгруппой группы $SU(3)$, на самом деле тривиальной.

В разд. 9.5.2 мы изучали распространение струн на орбифолдах как обобщение случая распространения на торе. На этом пути нам удалось получить модель компактификации, которая являлась точно решаемой и почти такой же простой, как компактификация на тор. В этом разделе наша цель состоит в том, чтобы объяснить связь между орбифолдами и многообразиями с $SU(3)$ -голономией и в то же время описать новый метод построения многообразий с $SU(3)$ -голономией.

Как и в разд. 9.5.2, примем, что z — комплексная переменная, а T_0 — тор, получающийся отождествлением точек $z \approx z + 1 \approx z + e^{2i\pi/3}$ в комплексной z -плоскости. Этот конкретный тор T_0 допускает действие группы $F_0 \approx Z_3$, порожденной преобразованием

$$z \rightarrow az, \quad (16.10.2)$$

где $\alpha = e^{2i\pi/3}$. Пусть z_i , $i = 1, 2, 3$ — три комплексные переменные, а T_i — тор, получающийся с помощью отождествления $z_i \approx z_i + 1 \approx z_i + e^{2i\pi/3}$ в комплексной z_i -плоскости. Тогда комплексный тор $T = T_1 \times T_2 \times T_3$ допускает действие группы $F \approx Z_3$, порожденной преобразованием

$$z_i \rightarrow az_i, \quad i = 1, 2, 3. \quad (16.10.3)$$

Как объяснялось в разд. 9.5.2, преобразование (16.10.3) имеет 27 неподвижных точек, и, следовательно, топологическое пространство

$$X = T/F \quad (16.10.4)$$

не является многообразием.

Теперь мы опишем, как модифицировать X , чтобы получить комплексное многообразие с нулевым первым классом Черна. Пусть P — множество, состоящее из 27 неподвижных точек. Если мы исключим эти точки из T , то получим некоторое многообразие, которое обозначим $T - P$; оно является комплексным, но не компактным. Вследствие аддитивности эйлеровой характеристики имеем

$$\chi(T - P) = \chi(T) - \chi(P) = 0 - 27 = -27. \quad (16.10.5)$$

Здесь мы используем тот факт, что эйлерова характеристика точки равна единице, так что $\chi(P) = 27$. Группа F состоит из трех элементов и действует свободно на $T - P$, поэтому $(T - P)/F$ является многообразием, причем

$$\chi((T - P)/F) = (-27)/3 = -9. \quad (16.10.6)$$

Поскольку группа F действует на z_k голоморфно, комплексная структура многообразия $T - P$ инвариантна относительно F и

$(T-P)/F$ является комплексным многообразием. Кроме того, нигде не обращаясь в нуль голоморфная 3-форма

$$\omega = dz_1 \wedge dz_2 \wedge dz_3 \quad (16.10.7)$$

на $T-P$, очевидно, инвариантна относительно преобразования (16.10.3), поэтому она имеет смысл и на многообразии $(T-P)/F$, которое, следовательно, имеет первый класс Черна, равный нулю.

Разумеется многообразие $(T-P)/F$ не является компактным: оно имеет 27 «дырок» там, где первоначально из T были удалены точки. Но эти дырки можно заполнить подходящими многообразиями с $c_1=0$. Необходимый объект представляет собой трехмерное комплексное многообразие, которое мы обозначим через Y . В терминологии примера 5 из разд. 15.6.3 Y представляет собой глобальное пространство расслоения $L(-3)$ над CP^2 . Многообразие Y допускает метрику с $SU(3)$ -голономией, которая (в отличие от большинства таких метрик) может быть описана явно, хотя мы и не будем этого делать. Эйлерова характеристика многообразия Y есть 3. Вклеивая в каждую из 27 «дырок» в $(T-P)/F$ по экземпляру многообразия Y , мы получаем компактное и несингулярное многообразие \hat{Z} , которое является комплексным многообразием с $c_1=0$ (так как этими свойствами обладают $(T-P)/F$ и Y). Из аддитивности эйлеровой характеристики следует, что

$$\chi(\hat{Z}) = \chi((T-P)/F) + 27 \cdot \chi(Y) = -9 + 27 \times 3 = 72. \quad (16.10.8)$$

Таким образом, если спиновая связность вложена в калибровочную группу, компактификация на \hat{Z} дает модель с 36 поколениями киральных фермионов в четырех измерениях.

Отличные от нуля числа Ходжа пространства Y есть $h^{0,0} = h^{1,1} = h^{2,2} = 1$ ¹⁾. В частности, риччи-плоская эйлерова метрика на Y зависит от одного вещественного параметра — его «радиуса». Когда мы вклеиваем по экземпляру Y в каждую «дырку» в $(T-P)/F$ и, таким образом, строим компактное многообразие \hat{Z} , радиусы r_i , $i=1, \dots, 27$, всех 27 экземпляров пространства Y также являются свободными параметрами. В пределе, когда $r_i \rightarrow 0$, мы восстанавливаем «орбифолд» $Z = T/F$, который рассматривается в разд. 9.5.2. Как там указано, хотя Z и не является гладким многообразием, распространение струн на Z , по-видимому, хорошо определено. Правильное число поколений, а именно 36, возникает и в орбифолдных вычис-

¹⁾ Они совпадают с числами Ходжа для CP^2 , так как многообразие Y , являясь глобальным пространством линейного расслоения $L(-3)$ над CP^2 , стягивается на CP^2 .

лениях при условии, что учитываются вклады «твистованных секторов».

Таким образом, распространение струны на орбифолде Z можно понимать как специальный предел $r_i \rightarrow 0$ в описании распространения струны на гладком многообразии \hat{Z} с $SU(3)$ -голономией. Специалисты по теории поля могут счесть необходимым провести разрешение особенностей пространства Z , заменяя эти особенности экземплярами многообразия Y , — процедура, известная в алгебраической геометрии под названием «раздутия» особенностей. В теории поля явное разрешение особенностей происходит при вычислении значений $+72$ для эйлеровой характеристики и $+32$ для числа поколений. На самом деле примечательно, что струнное вычисление автоматически дает поправочный член $+3 \times 27$ в выражении (16.10.8) (как вклады твистованных секторов), даже если разрешение особенностей явно не проводится.

Во многих отношениях орбифолды являются самыми простыми примерами многообразий с $SU(3)$ -голономией; их главные соперники — полные пересечения гиперповерхностей в CP^N . Можно себе представить, что со временем будут обнаружены физические принципы, которые выделяют этот особенно простой случай, и даже если этого не произойдет, весьма интересно иметь точно решаемый пример.

Ответ 36 для числа поколений не является очень привлекательным. Но есть множество вариантов описанной выше конструкции, которые дают более разумные ответы. Тор T и дискретную группу F можно заменить другими комплексными торами и другими действиями дискретных групп и построить некоторое число аналогов орбифолда Z и соответствующего многообразия с разрешенными особенностями \hat{Z} . Несколько таких примеров дают четыре поколения, если спиновая связность вложена в калибровочную группу, а при ослаблении предположения, что спиновая связность вложена в калибровочную группу, возникает много других возможностей. К сожалению, серьезное обсуждение этого вопроса увело бы нас слишком далеко.

16.11. Дальнейшие замечания

Физика элементарных частиц дарит нам много нерешенных проблем. Если этими задачами заниматься в контексте компактификации десятимерной теории струн, то большинство загадок можно перевести в вопросы о компактном многообразии K . Для большей части мы можем составить словарь для перевода вопросов о наблюдаемых физических явлениях в вопросы о компактном многообразии K . Мы попытались дать читателю

представление о том, как мог бы выглядеть такой словарь, хотя мы и опустили многие вопросы (например, обсуждение масс нейтрино). Несомненно, мы пока не имеем правильного понимания многих вопросов в этом словаре. Но в нем имеется одна бросающаяся в глаза пустая страница или даже глава. Это отсутствие понимания того, почему космологическая постоянная равна нулю. По этому поводу нет пока никаких идей, которые можно было бы принять безусловно. Весьма вероятно, что будущее развитие теории струн в большой степени будет зависеть от успехов в понимании космологической постоянной или же от отсутствия таковых. Вполне возможно, что, для того чтобы сформулировать правильную модель нарушения суперсимметрии и объяснить большинство физических явлений при низких энергиях, потребуется понять, почему космологическая постоянная равна нулю после нарушения суперсимметрии. Мы можем надеяться самое лучшее на то, что описание, данное в этой главе, окажется некоторой идеализацией той картины, которая может появиться на основе такого понимания¹⁾.

Конечно, проблема космологической постоянной — лишь одна из наиболее бросающихся в глаза таинственных загадок. На самом деле хотя нам многое известно о теории струн, но главная ее суть остается скрытой. Нам не известно, какие принципы объединяют все те неожиданные совпадения, которые делают возможной теорию струн. Мы не знаем, почему распространяющиеся струны, т. е. континуальные интегралы по мировым поверхностям, являются правильной основой для обобщения неабелевых калибровочных теорий и общей теории относительности. Ответы на подобные вопросы могут прийти с таких направлений, откуда их пока никто не ждет.

¹⁾ Недавно наметился некоторый прогресс в понимании проблемы космологической постоянной, связанный с учетом нетривиальных топологических конфигураций в квантовой гравитации, так называемых дочерних вселенных, см. [5]; другой подход к этой проблеме использует дополнительные времениподобные измерения, см. [11]. — *Прим. ред.*

Библиография

Глава 8

Построение петлевых амплитуд началось сразу после получения M -частичных древесных диаграмм в дуально-резонансной модели (до того как поняли значение критической размерности и условия на массу основного состояния). Сначала появилась статья Киккавы, Сакиты и Вирасоро [337], за которой быстро последовали операторные конструкции Бардакчи, Халперна и Шапиро [45] и Амати, Боуча и Жерве [27], после которых появилось много других работ. Анализ расходимостей планарной однопетлевой амплитуды в терминах θ -функций впервые был описан Неве и Шерком [200, 398], а анализ всех однопетлевых диаграмм для открытых струн был проведен Гроссом, Неве, Шерком и Шварцем [263]. Значение критической размерности для получения унитарных непланарных амплитуд впервые было показано Ловлейсом [360], который правильно предположил, что в критической размерности должен присутствовать дополнительный набор отщепленных состояний.

Бринк и Олайв [77] построили проекционный оператор на физические состояния на массовой поверхности, который позволил им вычислить унитарные однопетлевые амплитуды в критической размерности [78]. Их результаты теперь можно получить более простым способом путем включения духовых мод, и именно этот способ мы использовали для вычислений в разд. 8.1.1.

Систематическая факторизация непланарных диаграмм в терминах состояний замкнутой струны проведена в работах [112] и [106]. Шапиро [465] и Адемолло и др. [4] дали интерпретацию расходимостей планарных петлевых диаграмм для открытых струн в терминах испускания в вакуум тахионного и безмассового дилатонного состояний и устранили эти расходимости путем перенормировки натяжения струны. Однопетлевая амплитуда для замкнутых струн вычислена Шапиро [464], который также прояснил значение модулярной инвариантности.

Ром рассмотрел космологическую постоянную, возникающую на однопетлевом уровне [429]. Она обсуждается также в статье [416]. Диаграммы в виде диска и проективной плоскости с внешними состояниями замкнутой струны рассмотрены Грином и Шварцем [250].

Глава 9

До оценки значения пространственно-временной суперсимметрии было проделано лишь несколько вычислений петлевых амплитуд в RNS-модели; сначала появилась статья Годдарда и Вальца [225], а затем еще несколько статей [79, 106, 234, 506]. Используя формализм калибровки светового конуса с пространственно-временной суперсимметрией (описанный в гл. 5), Грин и Шварц вычислили четырехчастичные однопетлевые амплитуды для открытых суперструн в теориях типа I [240], как описано в разд. 9.1, и петлевые амплитуды для замкнутых струн в теориях типа II [242], как описано в разд. 9.1.2. Они проанализировали и интерпретировали расходимости петлевых амплитуд для открытых струн и показали конечность петлевых амплитуд для замкнутых струн.

Креммер и Шерк рассмотрели компактификацию теории свободных замкнутых бозонных струн на тор [115], и вычислили непланарную петлю для открытых струн в компактифицированной теории, продемонстрировав существование связанных состояний с ненулевой степенью отображения. Тороидальная компактификация суперструнных теорий, описанная в разд. 9.2.2, рассмотрена Грином, Шварцем и Бринком [241], которые рассмотрели также предел, в котором компактифицированные измерения имеют радиусы, исчезающие вместе с обратным натяжением струны, что приводит к вычислению однопетлевых амплитуд в пространстве-времени с размерностью $D \leq 10$ для $N = 4$ -теории Янга — Миллса и $N = 8$ -супергравитации; соответствующие результаты приведены в разд. 9.2.3.

Влияние граничных условий с твистами на нарушение суперсимметрии рассмотрено в цитированной выше статье Рома [429], где рассмотрено также влияние нарушения суперсимметрии на космологическую константу.

Гросс, Харви, Мартинец, Ром [269] и Яхикодзава [526] вычислили однопетлевые амплитуды для гетеротической струны и продемонстрировали их модулярную инвариантность и конечность. Даже в модулярно инвариантной десятимерной теории модулярная инвариантность может нарушаться при компактификации, как показал Виттен [521]. В этой статье сформулирован критерий, при котором модулярная инвариантность со-

храняется при компактификации, а также показано, что различные модели замкнутых суперструн модулярно инвариантны во всех порядках теории возмущений.

Диксон, Харви, Вафа и Виттен ввели понятие орбифолда [145]. Модулярно инвариантные десятимерные струнные теории без пространственно-временной суперсимметрии построены в статьях [26, 146, 454]; модель без тахиона, описанная в разд. 9.5.3, построена в статьях Диксона, Харви [146] и Алварец-Гауме, Гинспарга, Мура, Вафы [26].

Глава 10

Здесь мы упомянем лишь небольшую подборку из обширной литературы по аномалиям в теориях точечных частиц. Вопрос об аномалиях в полевой теории был поднят в статьях Стейнберга [468] и Швингера [452]. Изучение аномальной треугольной диаграммы с одним аксиальным током и двумя векторными токами было начато в пионерских работах Адлера [5], Белла, Джакива [61] и Бардина [49], что привело к анализу аномалий в законах сохранения калибровочных токов [70, 211, 265].

Работы по аномалиям в теории Янга — Миллса и гравитации в высших размерностях, которые имеют непосредственное отношение к гл. 13, упоминаются в тексте самой главы.

Возможность существования шестиугольных аномалий в теории суперструн типа I обсуждалась в статье [512], где высказано предположение, что аномалии возникают во всех теориях типа I. В той же статье, в которой впервые исследовались гравитационные аномалии, Алварец-Гауме и Виттен [21] обнаружили сокращение аномалий в (десятимерной) супергравитации типа IIB. Эта работа, а также комментарии Фридана и Шенкера, стимулировали исследование аномалий в суперструнных теориях. Анализ аномалий шестиугольной диаграммы в теории суперструн типа I, описанный в разд. 10.2, проведен Грином и Шварцем [252]. Грин и Шварц [249] дали также интерпретацию результатов в терминах эффективной низкоэнергетической теории (что описано в гл. 13). Этот анализ указывает на возможность сокращения аномалий в $E_8 \times E_8$ -суперструнной теории, которая в свою очередь привела к открытию гетеротической струны Гроссом, Харви, Мартинцем и Ромом [267]. Отсутствие аномалий в модулярных преобразованиях для гетеротической струны [268, 269] тесно связано с отсутствием калибровочных и гравитационных аномалий.

Глава 11

Идея использования методов функционального интегрирования для изучения теории струн возникла сразу после появления

теории струн [300, 215]. Этот подход оказался полезным для построения древесных, однопетлевых и многопетлевых диаграмм открытых бозонных струн [11, 12, 320, 323—325, 360]. Результирующее выражение для амплитуд соответствует аналоговой модели Фарли и Нилсена [171]. Хотя эти работы в большей своей части правильные, они являются неполными, так как не учитывают духовые моды Фаддеева — Попова. Только после статей Полякова [417, 418] стало ясно, каким образом использовать ковариантные функциональные методы интегрирования по мировым поверхностям струны, чтобы правильно учесть локальные симметрии. Сейчас это направление превратилось в самостоятельную ветвь исследований, которая для соответствующего ей изложения требует отдельной монографии.

Параллельно развивался функциональный метод вычислений в калибровке светового конуса. Этот метод основывается на описании свободных струн, которое дано Годдардом, Голдстоуном, Ребби и Торном [226] (и которое приведено в гл. 2), и был использован Манделстамом для описания взаимодействующих бозонных струн [368]. Он разработал методы вычислений древесных диаграмм в теории бозонных струн [365—368], описанные в разд. 11.3, с помощью которых можно получить вершину взаимодействия трех произвольных состояний открытой струны, введенную Адемолло и др. [2]. Манделстам также применил эту технику к RNS-струнам [367]. Метод решеточного обрезания теории предложен Гайлсом и Торном [219, 476]. Торн также отметил то обстоятельство, что расходимости сокращаются между внешними волновыми функциями и вершинами [476].

В калибровке светового конуса лоренц-инвариантность не является явной, и Манделстам доказал ее для открытых бозонных струн в критической размерности $D=26$ [369]. Функциональные методы в калибровке светового конуса использовались также в однопетлевых вычислениях [31, 32, 368].

Вычисление множителей в мере, возникающих от функционального детерминанта и якобиана конформного отображения струнной диаграммы в верхнюю полуплоскость, проведено Манделстамом [370] для древесных, однопетлевых и многопетлевых диаграмм открытых и замкнутых бозонных струн. Вычисление функциональных детерминантов основано на методе Маккина и Зингера [383] и Алвареца [14] (см. также [155]).

Функциональный метод в калибровке светового конуса можно использовать для определения амплитуд вне массовой поверхности. Амплитуды для «точечных» состояний вне массовой поверхности изучались Грином [235, 237—239]. Они тесно связаны с амплитудами для токов вне массовой поверхности, кото-

рые изучались Шварцем [445—447], Корриганом, Фарли [111] для открытых струн и Грином, Шапиро [236] для замкнутых струн.

Каку и Киккава [326, 327] и Креммер и Шерк [113, 114] использовали бозонную трехструнную вершину в качестве основы для построения полевой теории взаимодействующих струн в калибровке светового конуса. Этот вопрос также обсуждался в работе [293]. Грин и Шварц обобщили конструкцию на кубические взаимодействия открытых суперструн [243], а вместе с Бринком — на замкнутые суперструны типа IIB [244]. Единое описание в калибровке светового конуса, использующее $SU(4) \times U(1)$ -формализм построено Грином и Шварцем [248]. Четырехчастичные суперструнные амплитуды вычислены в работе [248], а M -частичные амплитуды построены Манделстамом [371].

Глава 12

Связь спиноров с гравитационным полем описана в учебниках по общей теории относительности (см., например, [483] с. 365—374). Относительно простое объяснение того обстоятельства, что спинорную структуру нельзя определить на произвольном римановом многообразии, можно найти в работе [282]. Интерпретация этого через глобальные аномалии в квантовомеханическом интеграле по траекториям дана в работах [194, 521]. Часть элементарных свойств спинорных структур на мировой поверхности более подробно обсуждается в работе [454]. Статьи [14, 15] являются отличными источниками сведений по двумерной геометрии мировых поверхностей.

Изложение для физиков некоторых понятий данной главы можно найти в работах [159, 394]. Очень естественным обобщением обсуждаемых идей являются кохомологии с целыми коэффициентами, относительно простое изложение которых содержится в работах [69, 253]. Более детально характеристические классы и расслоения описаны в работах [306, 385]. Некоторые применения кохомологий и характеристических классов с целыми коэффициентами к теории струн содержатся в работах [490, 521, 522]. Многие упомянутые здесь работы имеют отношение также к гл. 14—16.

Глава 13

$N = 1, D = 4$ -супергравитация впервые была построена в работах [127, 188], а $N = 1, D = 11$ -супергравитация была предложена Намом [392] и построена Креммером, Жулиа и Шерком

[118]. Теория, объединяющая $N = 1, D = 10$ -суперсимметричную теорию Янга — Миллса [80, 223] и $N = 1, D = 10$ -супергравитацию, в абелевом случае построена в работах [62, 95], а в неабелевом случае — в работах [96, 99]; $N = 4, D = 8$ -теория супергравитации приведена в работе [119]. Обзор теорий супергравитации можно найти в работах [202, 481, 493].

В статье Нама [392] высказано также предположение о существовании двух $N = 2, D = 10$ -супергравитаций и теорий суперструн (теперь эти теории известны как теории типа IIA и IIB). Супергравитация типа IIB впервые подробно рассмотрена в работе [245], а дальнейшее развитие получила в статьях [298, 449, 450]. Обсуждение в разд. 13.1.2 основано на работе [450]. Возможные феноменологические следствия супергравитации типа IIB обсуждаются в работе [272].

Ранняя история аномалий обрисована при обсуждении литературы для гл. 10. Важное недавнее развитие включает изучение калибровочных аномалий в высших размерностях [181—184, 258, 466], а также введение в гравитационные и смешанные аномалии [21]. Литература по этому вопросу обширна. Из недавних статей упомянем [15, 24, 25, 50, 59].

Сокращение аномалий в супергравитации типа IIB, а также несокращение аномалий в супергравитации типа I впервые было продемонстрировано в работе [21]. В статье [249] в терминах эффективной полевой теории показано, что струнные эффекты могут приводить к сокращению аномалий в $N = 1$ -теориях с калибровочными группами $SO(32)$ или $E_8 \times E_8$. Механизм сокращения аномалий после компактификации части измерений обсуждается в работах [251, 514]. В тексте мы не могли обсудить подробно глобальные аномалии. Детальное изложение этого вопроса можно найти в работе [521]. Механизм сокращения аномалий для теории с калибровочной группой $SO(16) \times SO(16)$ приведен в работах [26, 146].

Глава 14

Ссылки на раннюю историю теорий типа Калуцы — Клейна и их приложений к теории струн приведены в библиографии к гл. 1 и обзорной статье [435]. Хорошая подборка старых и новых статей по теориям типа Калуцы — Клейна содержится в книге [28].

Четырехмерные объединенные теории являются важной отправной точкой для построения единых теорий в $4 + n$ измерениях. Статья [411] представляет собой раннюю попытку объединения кварков и лептонов. Великое объединение в смысле объединения всех известных калибровочных взаимодействий в рам-

ках единой калибровочной группы было начато с $SU(5)$ -модели [212], за которой последовали модели с калибровочными группами $SO(10)$ [199, 213] и E_6 [1, 273—275]. Большинство из этих статей, а также многие другие перепечатаны в сборнике [533].

Связь безмассовых четырехмерных частиц с нулевыми модами волновых операторов в $4 + n$ измерениях предложена в статье [507]. В этой статье высказана также гипотеза о том, что квантовые числа (и заряды) безмассовых фермионов могут быть получены из топологических инвариантов компактного многообразия. В дальнейшем последний вопрос обсуждался в статьях [98, 100, 348, 409, 425, 485, 498, 519]. Проблема фермионных квантовых чисел была явно сформулирована как проблема индекса в работах [498, 519]. Невозможность получения киральных фермионов из теорий в $4 + n$ измерениях без элементарных калибровочных полей для нечетных n была доказана в работе [507], для n , кратных четырем, — в работе [498] и для n вида $4k + 2$ — в работе [519]. Обсуждение последнего случая основывается на теореме, первоначально доказанной в работе [38]. Теории с элементарными калибровочными полями в $4 + n$ измерениях рассматривались в работах [98, 100, 348, 409, 425, 485, 498, 519]. Вложение спиновой связности в калибровочную группу и сопоставление числа фермионов эйлеровой характеристике было предложено в работе [519] и применялось в теории струн (в более специализированном контексте, о котором сказано в гл. 15 и 16) в работе [86]. Ближайшим предшественником этой идеи в четырехмерных теориях является «ортогональное объединение по семействам» [208, 504] или его E_8 -аналог [55].

Идеи решения проблемы нарушения CP -четности с помощью аксионов были развиты в статьях [135, 341, 414, 484, 503]. Материал раздела 14.3.2, касающийся аксионов (и дополнительные вопросы, которые не рассматривались) содержится в работах [142, 489, 514].

Ссылки на дифференциальную геометрию на мировой поверхности струны приведены в библиографии к гл. 12.

Существует связь между теоремами об индексе и суперсимметричной квантовой механикой, которая была показана в работах [510, 511]. В работах [22, 194] эта связь была использована для доказательства теоремы Атьи — Зингера об индексе с помощью интеграла по траекториям. Ориентированное на физиков доказательство обобщения теоремы об индексе на случай, когда областью значений индекса являются характеры группы симметрии, приведено в работе [519] для непрерывных симметрий и в работе [229] в общем случае.

Вопрос о том, действительно ли «константы» в природе не зависят от времени, важен для теории струн, так как если бы масса дилатонного поля в природе строго равнялась нулю, то «константы» менялись бы во времени. Аргументы в подтверждение этого кратко приведены в конце разд. 14.5, а более подробно — в книге [483], с 622—631. (Там обсуждается скалярное поле Бранса — Дикке, которое сильно напоминает дилатонное поле.) То обстоятельство, что изменение констант в природе не замечено, является основной причиной, свидетельствующей о том, что дилатон не является строго безмассовым. Изменение гравитационной константы со временем впервые предложено в работах [143, 144] как подход к тому, что теперь называется проблемой иерархии. Прямое экспериментальное доказательство того, что гравитационная константа меняется со временем более медленно, чем предполагал Дирак, было проведено совсем недавно [287]. Ограничения на изменение во времени других констант гораздо строже; имеется хороший обзор на эту тему [158]. Безмассовый или очень легкий дилатон мог бы также проявиться в лабораторных проверках теории гравитации. К этому относятся два типа экспериментов. Если дилатон не является строго безмассовым, то должны наблюдаться видимые отклонения от закона $1/r^2$ убывания силы гравитационного взаимодействия. Экспериментальная ситуация в этом вопросе довольно сложна; см. обзор [221]. Если дилатон является в точности безмассовым, он все равно может проявляться при проверках принципа эквивалентности на лабораторных расстояниях [290, 351].

Глава 15

Отличным коротким введением в комплексные многообразия является [101]. Более детальное изложение содержится в книге [488] на относительно элементарном уровне, а на более углубленном и исчерпывающем уровне — в книге [257]. Геометрия комплексных многообразий является одним из аспектов алгебраической геометрии, которую можно строить над более общими полями; соответствующее обобщение представляет интерес для теории чисел и может оказаться важным в теории струн. Изложение более абстрактной точки зрения на алгебраическую геометрию (в возрастающей степени трудности) содержится в работах [334, 460, 280]. Начальные сведения о комплексных многообразиях для физиков содержатся в работах [17, 294]. Во многих последних статьях голоморфная геометрия находит широкое применение при описании мировых поверхностей [26, 60, 68, 91, 196, 374]. Среди многих работ по римановым поверхностям упомянем [63, 178, 391].

Связь между ненарушенной суперсимметрией и ковариантно постоянными спинорными полями отмечена в работе [507]. Применение десятимерных теорий, приводящих к многообразиям с $SU(3)$ -группой голономии, развивалось в работе [86] и последующих статьях, которые можно найти в библиографии к гл. 16. Гипотеза Калаби содержится в работе [83], а доказательство Яу — в работе [530]. Обобщение Дональдсона — Уленбек — Яу гипотезы Калаби на случай теории Янга — Миллса содержится в статьях [149, 479].

Примеры комплексных многообразий и голоморфных векторных расслоений, приведенные в тексте книги, являются стандартными, за исключением векторных расслоений над гиперповерхностями в CP^n , которые описаны в примере 6 из разд. 15.6.3. Эти расслоения были построены как продолжение (не опубликованное) статьи [523]; в разд. 16.7 они используются для построения $SO(10)$ -моделей.

Глава 16

Компактификация на многообразия с $SU(3)$ -группой голономии впервые изучалась в работе [86], где было получено большинство из наших утверждений о спектре безмассовых частиц. Мы описали только простейшие примеры многообразий с $SU(3)$ -группой голономии; дальнейшие примеры можно найти в работах [469, 531]. Применения нарушения симметрии с помощью петель Вильсона к низкоэнергетическим константам связи и к проблеме тонкой настройки изучались в работах [75, 455, 518]. Этому предшествовала статья [297], в которой использовалась петля Вильсона с непрерывной областью возможных значений. Нарушение симметрии с помощью петель Вильсона для допустимых значений электрического и магнитного зарядов исследовалось в работе [490]. Наше обсуждение глобальных симметрий в компактифицированных моделях во многом следует работе [518]. Ренормгрупповое вычисление в разд. 16.9 приведено в работе [137]. Дополнительные феноменологические вопросы обсуждались в работах [93, 126, 137, 140, 162, 333, 396, 415], а также во многих недавних статьях.

Топологическая формула для суперпотенциала (в пределе полевой теории) была введена в работе [469]. Эта формула успешно применялась как для положительных эйлеровых характеристик [470], так и для отрицательных [88]. Выражения для D -членов в пределе полевой теории содержатся также в статье [470]. Теорема о неперенормируемости суперпотенциала, говорящая о том, что формула, полученная в пределе полевой теории, не имеет поправок в конечном порядке по α' , была

доказана в работе [253]. Было показано, что вне рамок теории возмущений при определенных условиях эта топологическая формула не справедлива [142]. Последний результат в тексте не объяснялся, хотя некоторые подготовительные сведения можно найти в разд. 14.3.2. В статье [381] приведен аргумент в пользу того, что суперпотенциал не имеет поправок в конечных порядках по \hbar .

В разд. 16.6.3 и 16.7.8 изложен макроскопический подход к предсказанию существования вакуумных решений [142, 523]. Хотя мы не обсуждали это в тексте, но к этому вопросу возможен микроскопический подход с точки зрения вычислений для σ -модели такого типа, которая описана в разд. 3.4 (в бозонной теории); σ -модели, возникающие при компактификации суперсимметричных струнных теорий на многообразиях с $SU(3)$ -группой голономии обсуждались в работах [84, 86, 87, 303, 457]. В библиографии к гл. 3 приведены дополнительные ссылки, в которых обсуждается роль σ -моделей в теории струн.

Ранние вычисления бета-функций в σ -моделях, основанных на риччи-плоских кэлеровых многообразиях [17—20] (при интерпретации в терминах теории струн, как это сделано в цитированных выше статьях), указывают на то, что эти многообразия дадут решение уравнений струнной теории. Четырехпетлевые вычисления в σ -модели [259] дали ненулевую бета-функцию, которая исследована в работах [190, 419] и для которой, в частности, было показано, что результаты согласуются с результатами, которые можно извлечь из анализа струнных амплитуд рассеяния, полученных в работе [270]. Было показано [395], что рассматриваемый контрчлен имеет интерпретацию (в терминах переопределения вакуума), которую мы описали в разд. 16.6.3 и 16.7.8 с макроскопической точки зрения [523]. Обобщенная схема нарушения симметрии, которая кратко описана в разд. 16.7.8, была проверена путем прямых вычислений по теории возмущений [524]. Вычисления для орбифолдов [148, 278], помимо того, что они представляют интерес по другим причинам, явились проверкой схемы нарушения симметрии с совершенно другой точки зрения.

Ультрафиолетовая конечность сигма-моделей, основанных на гиперкэлеровых многообразиях, также явилась предметом интенсивного изучения [347, 389]. В статье [43] приведен аргумент в пользу ультрафиолетовой конечности этих моделей вне рамок теории возмущений.

Другие подходы к обобщениям вложения спиновой связности в калибровочную группу использованы в работах [58, 304, 471]. Детальное обсуждение предельной низкоэнергетической супергравитации, которая может возникнуть при компактификации

струн, можно найти в статье [126]. Дополнительные ограничения по сравнению со стандартной моделью от легких калибровочных бозонов, которые возникают в некоторых схемах компактификации, обсуждаются в работе [124]. Имеются общие обзоры низкоэнергетической феноменологии [166, 310, 453]. Недавно в статье [256] сделана попытка построения детальной реалистической модели.

Литература

1. Achiman Y. and Stech B. (1978), Quark-lepton symmetry and mass scales in an E_6 unified gauge model, Phys. Lett. **77B**, 389.
2. Ademollo M., Del Giudice E., Di Vecchia P. and Fubini S. (1974), Couplings of three excited particles in the dual-resonance model, Nuovo Cim. **19A**, 181.
3. Ademollo M., D'Adda A., D'Auria R., Napolitano E., Di Vecchia P., Gliozzi F. and Sciuto S. (1974), Unified dual model for interacting open and closed strings, Nucl. Phys. **B77**, 189.
4. Ademollo M., D'Adda A., D'Auria R., Gliozzi F., Napolitano E., Sciuto S. and Di Vecchia P. (1975), Soft dilatons and scale renormalization in dual theories, Nucl. Phys. **B94**, 221.
5. Adler S. L. (1969), Axial-vector vertex in spinor electrodynamics, Phys. Rev. **177**, 2426.
6. Adler S. L. and Bardeen W. A. (1969), Absence of higher-order corrections in the anomalous axial-vector divergence equation, Phys. Rev. **182**, 1517.
7. Affleck I., Dine M. and Seiberg V. (1985), Dynamical supersymmetry breaking in four dimensions and its phenomenological implications, Nucl. Phys. **B256**, 557.
8. Aharonov Y. and Casher A. (1986), On the origin of the universe in the context of string models, Phys. Lett. **166B**, 289.
9. Ahn Y. J., Breit J. and Segré G. (1985), The one-loop effective Lagrangian of the superstring, Phys. Lett. **162B**, 303.
10. Ahn Y. J. and Breit J. D. (1986), On one-loop effective Lagrangians and compactified superstrings, Nucl. Phys. **B273**, 75.
11. Alessandrini V. (1971), A general approach to dual multiloop diagrams, Nuovo Cim. **2A**, 321.
12. Alessandrini V. and Amati D. (1971), Properties of dual multiloop amplitudes, Nuovo Cim. **4A**, 793.
13. Alessandrini V., Amati D. and Morel B. (1972), The asymptotic behavior of the dual Pomeron amplitude, Nuovo Cim. **7A**, 797.
14. Alvarez O. (1983), Theory of strings with boundaries. Fluctuations, topology and quantum geometry, Nucl. Phys. **B216**, 125.
15. Alvarez O., Singer I. and Zumino B. (1984), Gravitational anomalies and the family's index theorem, Commun. Math. Phys. **96**, 409.
16. Alvarez O. (1986), Differential geometry in string models, in Workshop on Unified String Theories, 29 July — 16 August, 1985, eds. M. Green and D. Gross (World Scientific, Singapore), p. 103.
17. Alvarez-Gaumé L. and Freedman D. Z. (1980) in Unification of the Fundamental Particle Interactions, eds. S. Ferrara et al. (Plenum Press).
18. Alvarez-Gaumé L. and Freedman D. Z. (1980), Kahler geometry and the renormalization of supersymmetric sigma models, Phys. Rev. **D22**, 846.

19. *Alvarez-Gaumé L. and Freedman D. Z.* (1981), Geometrical structure and ultraviolet finiteness in the supersymmetric σ -model, *Commun. Math. Phys.* **80**, 443.
20. *Alvarez-Gaumé, Mukhi S. and D. Z. Freedman.* (1981), The background field method and the ultraviolet structure of the supersymmetric nonlinear σ -model, *Ann. Phys.* (N. Y.) **134**, 85.
21. *Alvarez-Gaumé L. and Witten E.* (1983), Gravitational anomalies, *Nucl. Phys.* **B234**, 269.
22. *Alvarez-Gaumé L.* (1983), Supersymmetry and the Atiyah—Singer index theorem, *Commun. Math. Phys.* **90**, 161.
23. *Alvarez-Gaumé L.* (1983), A note on the Atiyah—Singer index theorem, *J. Phys.* **A16**, 4177.
24. *Alvarez-Gaumé L. and Ginsparg P.* (1984), The topological meaning of non-Abelian anomalies, *Nucl. Phys.* **B243**, 449.
25. *Alvarez-Gaumé L. and Ginsparg P.* (1985), Geometry anomalies, *Nucl. Phys.* **B262**, 439.
26. *Alvarez-Gaumé L., Ginsparg P., Moore G. and Vafa C.* (1986), An $O(16) \times O(16)$ heterotic string, *Phys. Lett.* **171B**, 155.
27. *Amati D., Bouchiat C. and Gervais J. L.* (1969), On the building of dual diagrams from unitarity, *Nuovo Cim. Lett.* **2**, 399.
28. *Appelquist T., Chodos A. and Freund P. G. O.* (1987), Modern Kaluza—Klein Theory and Applications, (Benjamin—Cummings).
29. *Ardalan F. and Arfaei H.* (1986), Critical dimensions from loops in a string sigma model, *Phys. Lett.* **175B**, 164.
30. *Arefeva I. Y. and Volovich I. V.* (1985), Spontaneous compactification of $O(32)$ superstrings, *Phys. Lett.* **158B**, 31.
31. *Arfaei H.* (1975), Volume element for loop diagram in the string picture of dual models, *Nucl. Phys.* **B85**, 535.
32. *Arfaei H.* (1976), Theory of closed interacting strings, *Nucl. Phys.* **B112**, 256.
33. *Atiyah M. F. and Singer I. M.* (1968), The index of elliptic operators: I, *Ann. of Math.* **87**, 484.
34. *Atiyah M. F. and Segal G. B.* (1968), The index of elliptic operators: II, *Ann. of Math.* **87**, 531.
35. *Atiyah M. F. and Singer I. M.* (1968), The index of elliptic operators: III, *Ann. of Math.* **87**, 546.
36. *Atiyah M. F. and Singer I. M.* (1968), The index of elliptic operators: IV, *Ann. of Math.* **93**, 119.
37. *Atiyah M. F. and Singer I. M.* (1968), The index of elliptic operators: V, *Ann. of Math.* **93**, 139.
38. *Atiyah M. F. and Hirzebruch F.* (1970) in *Essays in Topology and Related Subjects*, ed. A. Haefliger and R. Narasimhan (Springer-Verlag, New York).
39. *Bailin D. and Love A.* (1985), Compactifications of anomaly-free ten-dimensional supergravity, *Phys. Lett.* **157B**, 375.
40. *Bailin D. and Love A.* (1985), Cosmological instability in ten-dimensional supergravity, *Phys. Lett.* **163B**, 135.
41. *Bailin D., Love A. and Wong D.* (1985), Supergravity limit of superstring theory and Friedmann—Robertson—Walker cosmology, *Phys. Lett.* **165B**, 270.
42. *Bailin D., Love A. and Thomas S.* (1986), Dimensional reductions of superstring theory, *Nucl. Phys.* **B273**, 537.
43. *Banks T. and Seiberg N.* (1986), Nonperturbative infinities, *Nucl. Phys.* **B273**, 157.
44. *Barbieri R., Cremer E. and Ferrara S.* (1985), Flat and positive potentials in $N = 1$ supergravity, *Phys. Lett.* **163B**, 143.

45. *Bardakçi K., Halpern M. B. and Shapiro J. A.* (1969), Unitary closed loops in Reggeized Feynman theory, *Phys. Rev.* **185**, 1910.
46. *Bardakçi K.* (1974), Dual models and spontaneous symmetry breaking, *Nucl. Phys.* **B68**, 331.
47. *Bardakçi K.* (1974), Dual models and spontaneous symmetry breaking II, *Nucl. Phys.* **B70**, 397.
48. *Bardakçi K.* (1978), Spontaneous symmetry breakdown in the standard dual string model, *Nucl. Phys.* **B133**, 297.
49. *Bardeen W. A.* (1969), Anomalous Ward identities in spinor field theories, *Phys. Rev.* **184**, 1848.
50. *Bardeen W. A. and Zumino B.* (1984), Consistent and covariant anomalies in gauge and gravitational theories, *Nucl. Phys.* **B244**, 421.
51. *Barger V., Deshpande N. G. and Whisnant K.* (1986), Phenomenological mass limits on extra Z of E_6 superstrings, *Phys. Rev. Lett.* **56**, 30.
52. *Barger V., Deshpande N. G., Phillips R. J. N. and Whisnant K.* (1986), Extra fermions in E_6 superstrings theories, *Phys. Rev.* **D33**, 1912.
53. *Barr S. M.* (1985), Harmless axions in superstring theories, *Phys. Lett.* **158B**, 397.
54. *Barr S. M.* (1985), Effects of extra light Z bosons in unified and superstring models, *Phys. Rev. Lett.* **55**, 2778.
55. *Bars I. and Günaydin M.* (1980), Grand unification with the exceptional group E_6 , *Phys. Rev. Lett.* **45**, 859.
56. *Bars I.* (1985), Compactification of superstrings and torsion, *Phys. Rev.* **D33**, 383.
57. *Bars I. and Visser M.* (1985), Number of massless fermion families in superstring theory, *Phys. Lett.* **163B**, 118.
58. *Bars I., Nemeschansky D. and Yankielowicz S.* (1986), Torsion in superstrings, in *Workshop on Unified String Theories*, 29 July—16 August, 1985, eds. M. Green and D. Gross (World Scientific, Singapore), p. 522.
59. *Baulieu L.* (1986), Anomaly evanescence and the occurrence of mixed Abelian-non-Abelian gauge symmetries, *Phys. Lett.* **167B**, 56.
60. *Belavin A. A. and Knizhnik V. G.* (1986), Algebraic geometry and the geometry of quantum strings, *Phys. Lett.* **168B**, 201.
61. *Bell I. S. and Jackiw R.* (1969), A PCAC puzzle: $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$ in the σ -model, *Nuovo Cim.* **60A**, 47.
62. *Bergshoeff E., De Roo M., de Wit B. and Van Nieuwenhuizen P.* (1982), Ten-dimensional Maxwell—Einstein supergravity, its currents, and the issue of its auxiliary fields, *Nucl. Phys.* **B195**, 97.
63. *Bers L.* (1972), Uniformization, moduli and Kleinian groups. *Bull. London Math. Soc.* **4**, 257.
64. *Binétruy P. and Gaillard M. K.* (1986), Radiative corrections in compactified superstring models, *Phys. Lett.* **168B**, 347.
65. *Binétruy P., Dawson S., Hinchcliffe I. and Sher M.* (1985), Phenomenologically viable models from superstrings, *Nucl. Phys.* **B273**, 501.
66. *Bonora L., Pasti P. and Tonin M.* (1985), Cohomologies and anomalies in supersymmetric theories, *Nucl. Phys.* **B252**, 458.
67. *Bonora L. and Cotta-Ramusino P.* (1986), Some remarks on anomaly cancellation in field theories derived from superstrings, *Phys. Lett.* **169B**, 187.
68. *Bost J. B. and Jolicœur T.* (1986), A holomorphy property and critical dimension in string theory from an index theorem, *Phys. Lett.* **174B**, 273.
69. *Bott R. and Tu L.* (1983), *Differential Forms in Algebraic Topology* (Springer-Verlag). [Имеется перевод: *Ботт Р., Ту Л. В. Дифференциальные формы в алгебраической топологии.* — М.: Наука, 1989.]
70. *Bouchiat C., Iliopoulos J. and Meyer P.* (1972), An anomaly-free version of Weinberg's model. *Phys. Lett.* **38B**, 519.

71. *Boulware D. G. and Deser S.* (1985), String-generated gravity models, *Phys. Rev. Lett.* **55**, 2656.
72. *Bowick M. J., Smolin L. and Wijewardhana L. C. R.* (1986), Role of string excitations in the last stages of black-hole evaporation, *Phys. Rev. Lett.* **56**, 424.
73. *Braden H. W., Frampton P. H., Kephart T. W. and Kshirsagar A. K.* (1986), Limitations of heterotic-superstring phenomenology, *Phys. Rev. Lett.* **56**, 2688.
74. *Brans C. and Dicke R. H.* (1961), Mach's principle and a relativistic theory of gravity, *Phys. Rev.* **124**, 925.
75. *Breit J. D., Ovrut B. A. and Segrè G.* (1985), E_6 symmetry breaking in the superstring theory, *Phys. Lett.* **158B**, 33.
76. *Breit J. D., Ovrut B. A. and Segrè G.* (1985), The one-loop effective Lagrangian of the superstring, *Phys. Lett.* **162B**, 303.
77. *Brink L., Olive D. and Scherk J.* (1973), The gauge properties of the dual model Pomeron—Reggeon vertex: Their derivation and their consequences, *Nucl. Phys.* **B61**, 173.
78. *Brink L. and Olive D.* (1973), Recalculation of the unitary single planar dual loop in the critical dimension of space time, *Nucl. Phys.* **B58**, 237.
79. *Brink L. and Fairlie D. B.* (1974), Pomeron singularities in the fermion meson dual model, *Nucl. Phys.* **B74**, 321.
80. *Brink L., Schwarz J. H. and Scherk J.* (1977), Supersymmetric Yang-Mills theories, *Nucl. Phys.* **B121**, 77.
81. *Burgess C., Font A. and Quevedo F.* (1986), Low-energy effective action for the superstring, *Nucl. Phys.* **B272**, 661.
82. *Burnett T. H., Gross D. J., Neveu A., Scherk J. and Schwarz J. H.* (1970), Renormalized self-energy operator in the dual-resonance model, *Phys. Lett.* **32B**, 115.
83. *Calabi E.* (1955), On Kähler manifolds with vanishing canonical class, algebraic geometry and topology, in *Algebraic Geometry and Topology: A Symposium in Honor of S. Lefschetz* (Princeton University Press), p. 78.
84. *Callan C. G., Friedan D., Martinec E. J. and Perry M. J.* (1985), Strings in background fields, *Nucl. Phys.* **B262**, 593.
85. *Campbell B. A., Ellis J., Enqvist K., Nanopoulos D. V., Hagelin J. S. and Olive K. A.* (1986), Superstring dark matter, *Phys. Lett.* **173B**, 270.
86. *Candelas P., Horowitz G., Strominger A. and Witten E.* (1985), Vacuum configurations for superstrings, *Nucl. Phys.* **B258**, 46.
87. *Candelas P., Horowitz G., Strominger A. and Witten E.* (1985), Superstring phenomenology, in *Symp. on Anomalies, Geometry, Topology*, March 28—30, 1985, eds. W. A. Bardeen and A. R. White (World Scientific, Singapore), p. 377.
88. *Candelas P.* (1985), Lecture at the Jerusalem Winter School.
89. *Castellani L.* (1986), Non-Abelian gauge fields from $10 \rightarrow 4$ compactification of closed superstrings, *Phys. Lett.* **166B**, 54.
90. *Castellani L., D'Auria R., Gliozzi F. and Sciuto S.* (1986), On the compactification of the closed supersymmetric string, *Phys. Lett.* **168B**, 47.
91. *Catenacci R., Cornalba M., Martellini M. and Reina C.* (1986), Algebraic geometry and path integrals for closed strings, *Phys. Lett.* **172B**, 328.
92. *Cecotti S., Derendinger J. P., Ferrara S., Girardello L. and Roncadelli M.* (1985), Properties of E_6 breaking and superstring theory, *Phys. Lett.* **156B**, 318.
93. *Cecotti S., Ferrara S., Girardello L. and Porrati M.* (1985), Lorentz Chern—Simons terms in $N=1$ 4D supergravity consistent with supersymmetry and string compactification, *Phys. Lett.* **164B**, 46.

94. *Cecotti S., Ferrara S., Girardello L., Pasquinacci A. and Porrati M.* (1986), Matter couplings in higher derivative supergravity, *Phys. Rev.* **D33**, 2504.
95. *Chamseddine A. H.* (1981), $N=4$ supergravity coupled to $N=4$ matter and hidden symmetries, *Nucl. Phys.* **B185**, 403.
96. *Chamseddine A. H.* (1981), Interacting supergravity in ten dimensions: The role of the six-index gauge field, *Phys. Rev.* **D24**, 3065.
97. *Chang D. and Mohapatra R. N.* (1986), A superstring inspired low-energy electro-weak model, *Phys. Lett.* **175B**, 304.
98. *Chapline G. F. and Slansky R.* (1982), Dimensional reduction and flavor chirality, *Nucl. Phys.* **B209**, 461.
99. *Chapline G. F. and Manton N. S.* (1983), Unification of Yang—Mills theory and supergravity in ten dimensions, *Phys. Lett.* **120B**, 105.
100. *Chapline G. F. and Grossman B.* (1984), Dimension reduction and massless chiral fermions, *Phys. Lett.* **135B**, 109.
101. *Chern S. S.* (1967), *Complex Manifolds Without Potential Theory* (D. V. Nostrand Co., Princeton).
102. *Cho Y. M. and Freund P. G. O.* (1975), Non-Abelian gauge fields as Nambu—Goldstone fields, *Phys. Rev.* **D12**, 1711.
103. *Choi K. and Kim J. E.* (1985), Harmful axions in superstring models, *Phys. Lett.* **154B**, 393.
104. *Choi K. and Kim J. E.* (1985), Domain walls in superstring models, *Phys. Rev. Lett.* **55**, 2637.
105. *Choi K. and Kim J. E.* (1985), Compactification and axions in $E_8 \times E'_8$ superstring models, *Phys. Lett.* **165B**, 71.
106. *Clavelli L. and Shapiro J. A.* (1973), Pomeron factorization in general dual models, *Nucl. Phys.* **B57**, 490.
107. *Clavelli L.* (1986), Proof of one-loop finiteness of type-I $SO(32)$ superstring theory, *Phys. Rev.* **D33**, 1098.
108. *Cohen E., Ellis J., Gomez G. and Nanopoulos D. V.* (1985), Superstring compactification and supersymmetry breaking, *Phys. Lett.* **160B**, 62.
109. *Cohen E., Ellis J., Enqvist K. and Nanopoulos D. V.* (1985), Scales in superstring models, *Phys. Lett.* **161B**, 85.
110. *Cohen E., Ellis H., Enqvist K. and Nanopoulos D. V.* (1985), Experimental predictions from the superstring, *Phys. Lett.* **165B**, 76.
111. *Corrigan E. F. and Fairlie D. B.* (1975), Off-shell states in dual resonance theory, *Nucl. Phys.* **B91**, 527.
112. *Cremmer E. and Scherk J.* (1972), Factorization of the Pomeron sector and currents in the dual resonance model, *Nucl. Phys.* **B50**, 222.
113. *Cremmer E. and Gervais J. L.* (1974), Combining and splitting relativistic strings, *Nucl. Phys.* **B76**, 209.
114. *Cremmer E. and Gervais J. L.* (1975), Infinite component field theory of interacting relativistic strings and dual theory, *Nucl. Phys.* **B90**, 410.
115. *Cremmer E. and Scherk J.* (1976), Dual models in four dimensions with internal symmetries, *Nucl. Phys.* **B103**, 399.
116. *Cremmer E. and Scherk J.* (1976), Spontaneous compactification of space in an Einstein—Yang—Mills—Higgs model, *Nucl. Phys.* **B108**, 409.
117. *Cremmer E. and Scherk J.* (1977), Spontaneous compactification of extra space dimensions, *Nucl. Phys.* **B118**, 61.
118. *Cremmer E., Julia B. and Scherk J.* (1978), Supergravity theory in 11 dimensions, *Phys. Lett.* **76B**, 409.
119. *Cremmer E. and Julia B.* (1979), The $SO(8)$ supergravity, *Nucl. Phys.* **B159**, 141.
120. *Cremmer E., Scherk J. and Schwarz J. H.* (1979), Spontaneously broken $N=8$ supergravity, *Phys. Lett.* **84B**, 83.

121. *Cremmer E., Julia B., Scherk J., Ferrara S., Girardello L. and Van Nieuwenhuizen P.* (1979), Spontaneous symmetry breaking and Higgs effect in supergravity without cosmological constant, Nucl. Phys. **B147**, 105.
122. *Daniel M. and Mavromatos N. E.* (1986), The heterotic string and supersymmetric counterparts of the Lorentz Chern—Simons terms, Phys. Lett. **173B**, 405.
123. *del Aguila F., Blair G., Daniel M. and Ross G. G.* (1986), Superstring inspired models, Nucl. Phys. **B272**, 413.
124. *del Aguila F., Blair G., Daniel M. and Ross G. G.* (1987), Analysis of neutral currents in superstring inspired models, Nucl. Phys. **B283**, 50.
125. *Derendinger J. P., Ibañez L. E. and Nilles H. P.* (1985), On the low-energy $d = 4$, $N = 1$ supergravity theory extracted from the $d = 10$, $N = 1$ superstring, Phys. Lett. **155B**, 65.
126. *Derendinger J. P., Ibañez L. E. and Nilles H. P.* (1986), On the low-energy limit of superstring theories, Nucl. Phys. **B267**, 365.
127. *Deser S. and Zumino B.* (1976), Consistent supergravity, Phys. Lett. **62B**, 335.
128. *de Wit and Freedman D. Z.* (1977), On $SO(8)$ extended supergravity, Nucl. Phys. **B130**, 105.
129. *de Wit B. and Nicolai H.* (1982), $N = 8$ supergravity with local $SO(8) \times SU(8)$ invariance, Phys. Lett. **108B**, 285.
130. *DeWitt B. S.* (1967), Quantum theory of gravity. I. The canonical theory, Phys. Rev. **160**, 1113.
131. *D'Hoker E. and Phong D. H.* (1986), Length-twist parameters in string path integrals, Phys. Rev. Lett. **56**, 912.
132. *D'Hoker E. and Phong D. H.* (1986), Multiloop amplitudes for the bosonic Polyakov string, Nucl. Phys. **B269**, 205.
133. *Diamandis G. A., Ellis J., Lahanas A. B. and Nanopoulos D. V.* (1986), Vanishing scalar masses in no-scale supergravity, Phys. Lett. **173B**, 303.
134. *Dimopoulos S.* (1981), Softly broken, supersymmetry and $SU(5)$, Nucl. Phys. **B193**, 150.
135. *Dine M., Fischler W. and Srednicki M.* (1981), A simple solution to the strong CP problem with a harmless axion, Phys. Lett. **104B**, 199.
136. *Dine M., Rohm R., Seiberg N. and Witten E.* (1985), Gluino condensation in superstring models, Phys. Lett. **156B**, 55.
137. *Dine M., Kaplunovsky V., Mangano M., Nappi C. R. and Seiberg N.* (1985), Superstring model building, Nucl. Phys. **B259**, 549.
138. *Dine M. and Seiberg N.* (1985), Couplings and scales in superstring models, Phys. Rev. Lett. **55**, 366.
139. *Dine M. and Seiberg N.* (1985), Is the superstring weakly coupled?, Phys. Lett. **162B**, 299.
140. *Dine M. and Seiberg N.* (1985), Is the superstring semiclassical, in Workshop on Unified String Theories, 29 July—16 August, 1985, eds. M. Green and D. Gross (World Scientific, Singapore), p. 678.
141. *Dine M. and Seiberg N.* (1986), String theory and the strong CP problem, Nucl. Phys. **B273**, 109.
142. *Dine M., Seiberg N., Wen X. G. and Witten E.* (1986), Nonperturbative effects on the string world sheet, Nucl. Phys. **B278**, 769.
143. *Dirac P. A. M.* (1937), Nature **139**, 323.
144. *Dirac P. A. M.* (1938), A new basis for cosmology, Proc. Roy. Soc. A. **165**, 199.
145. *Dixon L., Harvey J., Vafa C. and Witten E.* (1985), Strings on orbifolds, Nucl. Phys. **B261**, 678.
146. *Dixon L. and Harvey J.* (1986), String theories in ten dimensions without spacetime supersymmetry, Nucl. Phys. **B274**, 93.

147. *Dixon L., Harvey J., Vafa C. and Witten E.* (1986), Strings on orbifolds II, Nucl. Phys. **B274**, 285.
148. *Dixon L., Friedan D., Martinec E. and Shenker S.* (1987), The conformal field theory of orbifolds, Nucl. Phys. **B282**, 13.
149. *Donaldson S.* (1983), An application of gauge theory to four dimensional topology, J. Diff. Geom. **18**, 279.
150. *Drees M., Falck N. K. and Glück M.* (1986), The electroweak sector in superstring models, Phys. Lett. **167B**, 187.
151. *Duff M. J., Nilsson B. E. W. and Pope C. N.* (1985), Kaluza—Klein approach to the heterotic string, Phys. Lett. **163B**, 343.
152. *Duff M. J., Nilsson B. E. W., Warner N. P. and Pope C. N.* (1986), Kaluza—Klein approach to the heterotic string II, Phys. Lett. **171B**, 170.
153. *Duff M. J., Nilsson B. E. W. and Pope C. N.* (1986), Gauss—Bonnet from Kaluza—Klein, Phys. Lett. **173B**, 69.
154. *Duff M. J.* (1986), Hidden string symmetries? Phys. Lett. **173B**, 289.
155. *Durhuus B., Nielsen H. B., Olesen P. and Petersen J. L.* (1982), Dual models as saddle point approximations to Polyakov's quantized string, Nucl. Phys. **B196**, 498.
156. *Durhuus B., Olesen P. and Petersen J. L.* (1982), Polyakov's quantized string with boundary terms, Nucl. Phys. **198**, 157.
157. *Durhuus B., Olesen P. and Petersen J. L.* (1982), Polyakov's quantized string with boundary terms (II), Nucl. Phys. **201**, 176.
158. *Dyson F. J.* (1978), in Current Trends in the Theory of Fields, ed J. E. Lannutti and P. K. Williams, AIP Conference Proceedings No. 48, (Oxford University Press), p. 163.
159. *Eguchi T., Gilkey P. B. and Hanson A. J.* (1980), Gravitation, gauge theories and differential geometry, Phys. Reports **66**, 213.
160. *Ellis J., Enqvist K., Nanopoulos D. V. and Sarkar S.* (1986), Primordial nucleosynthesis, additional neutrinos and neutral currents from the superstring, Phys. Lett. **167B**, 457.
161. *Ellis J., Gómez C. and Nanopoulos D. V.* (1986), Axions, dilatons and Wess—Zumino terms in superstring theories, Phys. Lett. **168B**, 215.
162. *Ellis J., Gómez C. and Nanopoulos D. V.* (1986), No-scale structure from the superstring, Phys. Lett. **171B**, 203.
163. *Ellis J., Enqvist K., Nanopoulos D. V. and Zwirner F.* (1986), Observables in low-energy superstring models, Mod. Phys. Lett. **A1**, 57.
164. *Ellis J., Gómez C., Nanopoulos D. V. and Quirós M.* (1986), World sheet instanton effects on no-scale structure, Phys. Lett. **173B**, 59.
165. *Ellis J., Nanopoulos D. V. and Quirós M.* (1986), On the axion, dilaton, Polonyi, gravitino and shadow matter problems in supergravity and superstring models, Phys. Lett. **174B**, 176.
166. *Ellis J.* (1986), From the Higgs to superstring phenomenology, Proc. of the Lake Louise Winter Institute, p. 225.
167. *Ellis J., Nanopoulos D. V., Petcov S. T. and Zwirner F.* (1987), Gauginos and Higgs particles in superstring models, Nucl. Phys. **B283**, 93.
168. *Englert F.* (1982), Spontaneous compactification of eleven-dimensional supergravity, Phys. Lett. **119B**, 339.
169. *Enqvist K., Nanopoulos D. V. and Quirós M.* (1986), Cosmological difficulties for intermediate scales in superstring models, Phys. Lett. **169B**, 343.
170. *Evans M. and Ovrut B. A.* (1986), Splitting the superstring vacuum degeneracy, Phys. Lett. **174B**, 63.
171. *Fairlie D. B. and Nielsen H. B.* (1970), An analogue model for KSV theory, Nucl. Phys. **B20**, 637.
172. *Fairlie D. B. and Martin D.* (1974), Green's function techniques and dual fermion loops, Nuovo Cim. **21A**, 647.

173. *Fayet P. and Iliopoulos J.* (1974), Spontaneously broken supergauge symmetries and Goldstone spinors, *Phys. Lett.* **51B**, 46.
174. *Fayet P.* (1977), Spontaneously broken supersymmetric theories of weak, electromagnetic and strong interactions, *Phys. Lett.* **69B**, 489.
175. *Fischler W. and Susskind L.* (1986), Dilaton tadpoles, string condensates and scale invariance, *Phys. Lett.* **171B**, 383.
176. *Fischler W. and Susskind L.* (1986), Dilaton tadpoles, string condensates and scale invariance II. *Phys. Lett.* **173B**, 262.
177. *Foda O. and Helayël-Neto J. A.* (1986), A coset space compactification of the field theory limit of a heterotic string, *Class. Quantum Grav.* **3**, 607.
178. *Ford L. R.* (1951), *Automorphic Functions* (Chelsea, New York). [Имеется перевод более раннего издания: *Форд Л. Р.* Автоморфные функции. — М. — Л.: ОНТИ, 1936.]
179. *Forgacs P. and Manton N. S.* (1980), Space-time symmetries in gauge theories, *Commun. Math. Phys.* **72**, 15.
180. *Frampton P. H., Goddard P. and Wray D.* (1971), Perturbative unitarity of dual loops, *Nuovo Cim.* **3A**, 755.
181. *Frampton P. H. and Kephart T. W.* (1983), Explicit evaluation of anomalies in higher dimensions, *Phys. Rev. Lett.* **50**, 1343.
182. *Frampton P. H. and Kephart T. W.* (1983), Consistency conditions for Kaluza — Klein anomalies, *Phys. Rev. Lett.* **50**, 1347.
183. *Frampton P. H. and Kephart T. W.* (1983), Analysis of anomalies in higher space-time dimensions, *Phys. Rev.* **D28**, 1010.
184. *Frampton P. H. and Kephart T. W.* (1984), Left-right asymmetry from the eight-sphere, *Phys. Rev. Lett.* **53**, 867.
185. *Frampton P. H., van Dam H. and Yamamoto K.* (1985), Chiral fermions from compactification of $O(32)$ and $E(8) \otimes E(8)$ string theories, *Phys. Rev. Lett.* **54**, 1114.
186. *Frampton P. H., Moxhay P. and Ng Y. J.* (1985), One-loop finiteness in $O(32)$ open-superstring theory, *Phys. Rev. Lett.* **55**, 2107.
187. *Frampton P. H., Kikuchi Y. and Ng Y. J.* (1986), Modular invariance in closed superstrings, *Phys. Lett.* **174B**, 262.
188. *Freedman D. Z., Van Nieuwenhuizen P. and Ferrara S.* (1976), Progress toward a theory of supergravity, *Phys. Rev.* **D13**, 3214.
189. *Freedman D. Z., Gibbons G. W. and West P. C.* (1983), Ten into four won't go, *Phys. Lett.* **124B**, 491.
190. *Freeman M. D. and Pope C. N.* (1986), Beta-functions and superstring compactifications, *Phys. Lett.* **174B**, 48.
191. *Freeman M. D. and Olive D. I.* (1986), The calculation of planar one-loop diagrams in string theory using the BRS formalism, *Phys. Lett.* **175B**, 155.
192. *Freund P. G. O. and Rubin M. A.* (1980), Dynamics of dimensional reduction, *Phys. Lett.* **97B**, 233.
193. *Freund P. G. O. and Oh P.* (1985), Cosmological solutions with «ten into four» compactification, *Nucl. Phys.* **B255**, 688.
194. *Friedan D. and Windey P.* (1984), Supersymmetric derivation of the Atiyah — Singer index and the chiral anomaly, *Nucl. Phys.* **B235** [FS11], 395.
195. *Friedan D., Shenker S. and Martinec E.* (1985), Covariant quantization of superstrings, *Phys. Lett.* **160B**, 55.
196. *Friedan D. and Shenker S.* (1987), The analytic geometry of conformal field theory, *Nucl. Phys.* **B281**, 509.
197. *Friedan D. and Shenker S.* (1986), The integrable analytic geometry of quantum string, *Phys. Lett.* **175B**, 287.

198. *Friedan D., Martinec E. and Shenker S.* (1986), Conformal invariance, supersymmetry and string theory, *Nucl. Phys.* **B271**, 93.
199. *Fritzsch H. and Minkowski P.* (1975), Unified interactions of leptons and hadrons, *Ann. Phys.* **93**, 193.
200. *Frye G. and Susskind L.* (1970), Removal of the divergence of a planar dual-symmetric loop, *Phys. Lett.* **31B**, 537.
201. *Frye G. and Susskind L.* (1970), Non-planar dual symmetric loop graphs and the Pomeron, *Phys. Lett.* **31B**, 589.
202. *Gates S. J., Grisaru M., Roček M. and Siegel W.* (1983), Superspace or One Thousand and One Lessons in Supersymmetry, (Benjamin/Cummings).
203. *Gates S. J. and Nishino H.* (1985), New $D = 10$, $N = 1$ supergravity coupled to Yang — Mills supermultiplet and anomaly cancellations, *Phys. Lett.* **157B**, 157.
204. *Gates S. J. and Nishino H.* (1986), New $D = 10$, $N = 1$ superspace supergravity and local symmetries of superstrings, *Phys. Lett.* **173B**, 46.
205. *Gates S. J. and Nishino H.* (1986), Manifestly supersymmetric $O(\alpha')$ superstring corrections in new $D = 10$, $N = 1$ supergravity Yang — Mills theory, *Phys. Lett.* **173B**, 52.
206. *Gava E., Iengo R., Jayaramin T. and Ramachandran R.* (1986), Multi-loop divergences in the closed bosonic string theory, *Phys. Lett.* **168B**, 207.
207. *Gell-Mann M., Ramond P. and Slansky R.* (1978), Color embeddings, charge assignments, and proton stability in unified gauge theories, *Rev. Mod. Phys.* **50**, 721.
208. *Gell-Mann M., Ramond P. and Slansky R.* (1979), Complex spinors and unified theories, in *Supergravity*, ed. P. van Nieuwenhuizen et al. (North-Holland), p. 315.
209. *Gell-Mann M. and Zwiebach B.* (1984), Spacetime compactification due to scalars, *Phys. Lett.* **141B**, 333.
210. *Gell-Mann M. and Zwiebach B.* (1985), Dimensional reduction of space-time induced by nonlinear scalar dynamics and noncompact extra dimensions, *Nucl. Phys.* **B260**, 569.
211. *Georgi H. and Glashow S. L.* (1972), Gauge theories without anomalies, *Phys. Rev.* **D6**, 429.
212. *Georgi H. and Glashow S. L.* (1974), Unity of all elementary-particle forces, *Phys. Rev. Lett.* **32**, 438.
213. *Georgi H.* (1974), The state of the art — gauge theories, in *Proceedings of the American Institute of Physics*, 23 ed. C. E. Carlson, p. 575.
214. *Georgi H., Quinn H. R. and Weinberg S.* (1974), Hierarchy of interactions in unified gauge theories, *Phys. Rev. Lett.* **33**, 451.
215. *Gervais J. L. and Sakita B.* (1971), Functional-integral approach to dual-resonance theory, *Phys. Rev.* **D4**, 2291.
216. *Gervais J. L. and Sakita B.* (1973), Ghost-free string picture of Veneziano model, *Phys. Rev. Lett.* **30**, 716.
217. *Gildener E. and Weinberg S.* (1976), Symmetry breaking and scalar bosons, *Phys. Rev.* **D13**, 3333.
218. *Gildener E.* (1976), Gauge-symmetry hierarchies, *Phys. Rev.* **D14**, 1667.
219. *Giles R. and Thorn C. B.* (1977), Lattice approach to string theory, *Phys. Rev.* **D16**, 366.
220. *Gilkey P. B.* (1975), The spectral geometry of a Riemannian manifold, *J. Diff. Geom.* **10**, 601.
221. *Glashow S.* (1986), The fifth force, *proc. of the 1986 Moriond workshop*.
222. *Gliozzi F., Scherk J. and Olive D.* (1976), Supergravity and the spinor dual model, *Phys. Lett.* **65B**, 282.
223. *Gliozzi F., Scherk J. and Olive D.* (1977), Supersymmetry, supergravity theories and the dual spinor model, *Nucl. Phys.* **B122**, 253.

224. *Goddard P.* (1971), Analytic renormalization of dual one-loop amplitudes, *Nuovo Cim.* **4A**, 349.
225. *Goddard P. and Waltz R. E.* (1971), One-loop amplitudes in the model of Neveu and Schwarz, *Nucl. Phys.* **B34**, 99.
226. *Goddard P., Goldstone J., Rebbi C. and Thorn C. B.* (1973), Quantum dynamics of a massless relativistic string, *Nucl. Phys.* **B56**, 109.
227. *Gomez C.* (1986), Topologically non-trivial gauge configurations and the heterotic string, *Phys. Lett.* **168B**, 212.
228. *Gomez C.* (1986), Modular invariance and compactification of the moduli space, *Phys. Lett.* **175B**, 32.
229. *Goodman M. and Witten E.* (1986), Global symmetries in four and higher dimensions, *Nucl. Phys.* **B271**, 21.
230. *Goodman M.* (1986), Proof of character-valued index theorems, *Commun. Math. Phys.* **107**, 391.
231. *Gořoff M. H. and Sagnotti A.* (1985), Quantum gravity at two loops, *Phys. Lett.* **160B**, 81.
232. *Gořoff M. N. and Sagnotti A.* (1986), The ultraviolet behavior of Einstein gravity, *Nucl. Phys.* **B266**, 709.
233. *Govindarajan T. R., Jayaraman T., Mukherjee A. and Wadia S. R.* (1986), Twisted current algebras and gauge symmetry breaknig in string theory, *Mod. Phys. Lett.* **A1**, 29.
234. *Green M. B.* (1973), Cancellation of the leading divergence in dual loops, *Phys. Lett.* **46B**, 392.
235. *Green M. B.* (1976), Reciprocal space-time and momentum-space singularities in the narrow resonance approximation, *Nucl. Phys.* **B116**, 449.
236. *Green M. B. and Shapiro J. Q.* (1976), Off-shell states in the dual model, *Phys. Lett.* **64B**, 454.
237. *Green M. B.* (1976), The structure of dual Green functions, *Phys. Lett.* **65B**, 432.
238. *Green M. B.* (1977), Point-like structure and off-shell dual strings, *Nucl. Phys.* **B124**, 461.
239. *Green M. B.* (1977), Dynamical point-like structure and dual strings, *Phys. Lett.* **69B**, 89.
240. *Green M. B. and Schwarz J. H.* (1982), Supersymmetric dual string theory (III). Loops and renormalization, *Nucl. Phys.* **B198**, 441.
241. *Green M. B., Schwarz J. H. and Brink L.* (1982), $N = 4$ Yang — Mills and $N = 8$ supergravity as limits of string theories, *Nucl. Phys.* **B198**, 474.
242. *Green M. B. and Schwarz J. H.* (1982), Supersymmetrical string theories, *Phys. Lett.* **109B**, 444.
243. *Green M. B. and Schwarz J. H.* (1983), Superstring interactions, *Nucl. Phys.* **B218**, 43.
244. *Green M. B., Schwarz J. H. and Brink L.* (1983), Superfield theory of type (II) superstrings, *Nucl. Phys.* **B219**, 437.
245. *Green M. B. and Schwarz J. H.* (1983), Extended supergravity in ten dimensions, *Phys. Lett.* **122B**, 143.
246. *Green M. B.* (1983), Sypersymmetrical dual string theories and their field theory limits — a review, *Surveys in High Energy Physics* **3**, 127.
247. *Green M. B. and Schwarz J. H.* (1984), Covariant description of superstrings, *Phys. Lett.* **136B**, 367.
248. *Green M. B. and Schwarz J. H.* (1984), Superstring field theory, *Nucl. Phys.* **B243**, 475.
249. *Green M. B. and Schwarz J. H.* (1984), Anomaly cancellations in supersymmetric $D = 10$ gauge theory and superstring theory, *Phys. Lett.* **149B**, 117.

250. *Green M. B. and Schwarz J. H.* (1985), Infinity cancellations in $SO(32)$ superstring theory, *Phys. Lett.* **151B**, 21.
251. *Green M. B., Schwarz J. H. and West P. C.* (1985), Anomaly-free chiral theories in six dimensions, *Nucl. Phys.* **B254**, 327.
252. *Green M. B. and Schwarz J. H.* (1985), The hexagon gauge anomaly in type I superstring theory, *Nucl. Phys.* **B255**, 93.
253. *Greenberg M. J.* (1967), *Lectures on Algebraic Topology* (Benjamin).
254. *Greene B. R., Kirklın K. H. and Miron P. J.* (1986), Superstring models with $SU(5)$ and $SO(10)$ unifying groups, *Nucl. Phys.* **B274**, 574.
255. *Greene B. R., Kirklın K. H., Miron P. J. and Ross G. G.* (1986), A three generation superstring model, *Nucl. Phys.* **B278**, 667.
256. *Greene B. R., Kirklın K. H., Miron P. J. and Ross G. G.* (1986), A superstring inspired standard model, *Phys. Lett.* **180B**, 69.
257. *Griffiths P. and Harris J.* (1978), *Principles of Algebraic Geometry* (Wiley-Interscience). [Имеется перевод: Гриффитс Ф., Харрис Дж. Принципы алгебраической геометрии. В 2-х т. — М.: Мир, 1982.]
258. *Grimm R. and Mărculescu S.* (1974), The structure of anomalies for arbitrary dimension of the space-time, *Nucl. Phys.* **B68**, 203.
259. *Grisaru M. T., van de Ven A. and Zanon D.* (1986), Four-loop β -function for the $N = 1$ and $N = 2$ supersymmetric non-linear sigma model in two dimensions, *Phys. Lett.* **173B**, 423.
260. *Grisaru M. T., van de Ven A. E. M. and Zanon D.* (1986), Two-dimensional supersymmetric sigma models on Ricci flat Kähler manifolds are not finite, *Nucl. Phys.* **B277**, 388.
261. *Grisaru M. T., van de Ven A. E. M. and Zanon D.* (1986), Four loop divergences for the $N = 1$ supersymmetric nonlinear sigma model in two dimensions, *Nucl. Phys.* **B277**, 409.
262. *Gross D. J., Neveu A., Scherk J. and Schwarz J. H.* (1970), The primitive graphs of dual-resonance models, *Phys. Lett.* **31B**, 592.
263. *Gross D. J., Neveu A., Scherk J. and Schwarz J. H.* (1970), Renormalization and unitarity in the dual-resonance model, *Phys. Rev.* **D2**, 697.
264. *Gross D. J. and Schwarz J. H.* (1970), Basic operators of the dual-resonance model, *Nucl. Phys.* **B23**, 333.
265. *Gross D. J. and Jackiw R.* (1972), Effect of anomalies on quasi-renormalizable theories, *Phys. Rev.* **D6**, 477.
266. *Gross D. J. and Perry M. J.* (1983), Magnetic monopoles in Kaluza — Klein theories, *Nucl. Phys.* **B226**, 29.
267. *Gross D. J., Harvey J. A., Martinec E. and Rohm R.* (1985), Heterotic string, *Phys. Rev. Lett.* **54**, 502.
268. *Gross D. J., Harvey J. A., Martinec E. and Rohm R.* (1985), Heterotic string theory (I). The free heterotic string, *Nucl. Phys.* **B256**, 253.
269. *Gross D. J., Harvey J. A., Martinec E. and Rohm R.* (1986), Heterotic string theory (II). The interacting heterotic string, *Nucl. Phys.* **B267**, 75.
270. *Gross D. J. and Witten E.* (1986), Superstring modifications of Einstein's equations, *Nucl. Phys.* **B277**, 1.
271. *Günaýdin M., Romans L. J. and Warner N. P.* (1985), Gauged $N = 8$ supergravity in five dimensions, *Phys. Lett.* **154B**, 268.
272. *Günaýdin M., Romans L. J. and Warner N. P.* (1985), IIB or not IIB: That is the question, *Phys. Lett.* **164B**, 309.
273. *Gürsey F. and Sikivie P.* (1976), E_7 as a universal gauge group, *Phys. Rev. Lett.* **36**, 775.
274. *Gürsey F., Ramond P. and Sikivie P.* (1976), A universal gauge theory model based on E_7 , *Phys. Lett.* **60B**, 177.
275. *Gürsey F. and Sikivie P.* (1977), Quark and lepton assignments in the E_7 model, *Phys. Rev.* **D16**, 816.

276. Guth A. H. and Tye S. H. (1980), Phase transitions and magnetic monopole production in the very early universe, Phys. Rev. Lett. **44**, 631; erratum 963.
277. Guth A. H. (1981), Inflationary universe: A possible solution to the horizon and flatness problems, Phys. Rev. **D23**, 347.
278. Hamidi S. and Vafa C. (1987), Interactions on orbifolds, Nucl. Phys. **B279**, 465.
279. Han C. W., Han S. K., Jun J. W., Kim J. K. and Koh I. G. (1986), Absence of leading divergence in the parity-odd one-loop amplitude of type-I $SO(32)$ superstring theory, Phys. Rev. **D34**, 1219.
280. Hartshorne R. (1977), Algebraic Geometry (Springer-Verlag). [Имеется перевод: Харгсхорн Р. Алгебраическая геометрия. — М.: Мир, 1981.]
281. Harvey J. A. (1986), Twisting the heterotic string, in Workshop on Unified String Theories, 29 July—16 August, 1985, eds. M. Green and D. Gross (World Scientific, Singapore), p. 704.
282. Hawking S. W. and Pope C. N. (1978), Generalized spin structures in quantum gravity, Phys. Lett. **73B**, 42.
283. Hawking S. W. (1978), Spacetime foam, Nucl. Phys. **B144**, 349.
284. Hawking S. W., Page D. N. and Pope C. N. (1979), The propagation of particles in spacetime foam, Phys. Lett. **86B**, 175.
285. Hawking S. W., Page D. N. and Pope C. N. (1980), Quantum gravitational bubbles, Nucl. Phys. **B170**, 283.
286. Helayël-Neto J. A. and Smith A. W. (1986), A possible role of gravitino condensates in superstring compactification, Phys. Lett. **175B**, 37.
287. Hellings R. W., Adams P. J., Anderson J. D., Keeseey M. S., Lau E. L., Standish E. M., Canuto V. M. and Goldman I. (1983), Experimental test of the variability of G using Viking lander ranging data, Phys. Rev. Lett. **51**, 1609.
288. Henneaux M. (1986), Hamiltonian formulation of $d = 10$ supergravity theories, Phys. Lett. **168B**, 233.
289. Hewett J. L., Rizzo T. G. and Robinson J. A. (1986), Low-energy phenomenology of some supersymmetric E_8 -breaking patterns, Phys. Rev. **D33**, 1476.
290. Holding S. C., Stacey F. D. and Tuck G. J. (1986), Gravity in mines — an investigation of Newton's law, Phys. Rev. **D33**, 3487.
291. Holman R. and Reiss D. B. (1986), Fermion masses in $E_8 \times E_8'$ superstring theories, Phys. Lett. **166B**, 305.
292. Holman R. and Reiss D. B. (1986), Fermion masses and phenomenology in $SO(10)$ or $SU(5)$ superstring compactifications, Phys. Lett. **176B**, 74.
293. Hopkinson J. F. L., Tucker R. W. and Collins P. A. (1975), Quantum strings and the functional calculus, Phys. Rev. **D12**, 1653.
294. Horowitz G. (1986), What is a Calabi—Yau space?, in Workshop on Unified String Theories, 29 July—16 August, 1985, eds. M. Green and D. Gross (World Scientific, Singapore), p. 635.
295. Horvath Z., Palla L., Cremmer E. and Scherk J. (1977), Grand unified schemes and spontaneous compactification, Nucl. Phys. **B127**, 57.
296. Horvath Z. and Palla L. (1978), Spontaneous compactification and «monopoles» in higher dimensions, Nucl. Phys. **B142**, 327.
297. Hosotani Y. (1983), Dynamical gauge symmetry breaking as the Casimir effect, Phys. Lett. **129B**, 193.
298. Howe P. S. and West P. C. (1984), The complete $N = 2$, $d = 10$ supergravity, Nucl. Phys. **B238**, 181.
299. Howe P. S., Papadopoulos G. and Stelle K. S. (1986), Quantizing the $N = 2$ super sigma-model in two dimensions, Phys. Lett. **174B**, 405.
300. Hsue C. S., Sakita B. and Virasoro M. A. (1970), Formulation of dual theory in terms of functional integrations, Phys. Rev. **D2**, 2857.

301. Hübsch T., Nishino H. and Pati J. C. (1985), Do superstrings lead to quarks or to preons?, Phys. Lett. **163B**, 111.
302. Hübsch T. (1987), Calabi—Yau manifolds: motivations and constructions, Commun. Math. Phys. **108**, 291.
303. Hull C. M. and Witten E. (1985), Supersymmetric sigma models and the heterotic string, Phys. Lett. **160B**, 398.
304. Hull C. M. (1986), Sigma model beta-functions and string compactifications, Nucl. Phys. **B267**, 266.
305. Hull C. M. (1986), Anomalies, ambiguities and superstrings, Phys. Lett. **167B**, 51.
306. Husemoller D. (1966), Fibre Bundles (Springer-Verlag). [Имеется перевод: Хьюзмоллер Д. Расслоенные пространства. — М.: Мир, 1970.]
307. Ibáñez L. E., López C. and Muñoz C. (1985), The low-energy supersymmetric spectrum according to $N = 1$ supergravity GUTs, Nucl. Phys. **B256**, 218.
308. Ibáñez L. E. and Nilles H. P. (1986), Low-energy remnants of superstring anomaly cancellation terms, Phys. Lett. **169B**, 354.
309. Ibáñez L. E. (1985), Phenomenology from superstrings, in proc. of the First Torino Meeting on Superunification and Extra Dimensions (World Scientific), p. 189.
310. Ibáñez L. E. (1986), Some topics in the low energy physics from superstrings, CERN preprint Th. 4459/86.
311. Ibáñez L. E., and Mas J. (1987), Low energy supergravity and superstring-inspired models, Nucl. Phys. **B286**, 107.
312. Ida M., Matsumoto H. and Yazaki S. (1970), Factorization and duality of multiloop diagrams, Prog. Theor. Phys. **44**, 456.
313. Imbimbo C. and Mukhi S. (1986), Chiral fermions and the Witten index for the compactified heterotic string, Nucl. Phys. **B263**, 629.
314. Ito K. (1985), Manifestly supersymmetric path integral formulation of the superstring field theories, Phys. Lett. **164B**, 301.
315. Itoyama H. and Leon J. (1986), Some quantum corrections to Calabi—Yau compactification, Phys. Rev. Lett. **56**, 2352.
316. Jacob M. editor. (1974), Dual theory, in Physics Reports, Reprint Volume I, (North-Holland, Amsterdam, 1974).
317. Jevicki A. (1986), Covariant string theory Feynman amplitudes, Phys. Lett. **169B**, 359.
318. Josphipura A. S. and Sarkar U. (1986), Phenomenologically consistent discrete symmetries in superstrings theories, Phys. Rev. Lett. **57**, 33.
319. Kaku M. and Thorn C. B. (1970), Unitary nonplanar closed loops, Phys. Rev. **D1**, 2860.
320. Kaku M. and Yu L. (1970), The general multi-loop Veneziano amplitude, Phys. Lett. **33B**, 166.
321. Kaku M. and Scherk J. (1971), Divergence of the two-loop planar graph in the dual-resonance model, Phys. Rev. **D3**, 430.
322. Kaku M. and Scherk J. (1971), Divergence of the N -loop planar graph in the dual-resonance model, Phys. Rev. **D3**, 2000.
323. Kaku M. and Yu L. (1971), Unitarization of the dual-resonance amplitude. I. Planar N -loop amplitude, Phys. Rev. **D3**, 2992.
324. Kaku M. and Yu L. (1971), Unitarization of the dual-resonance amplitude. II. The nonplanar N -loop amplitude, Phys. Rev. **D3**, 3007.
325. Kaku M. and Yu L. (1971), Unitarization of the dual-resonance amplitude. III. General rules for the orientable and nonorientable multiloop amplitudes, Phys. Rev. **D3**, 3020.
326. Kaku M. and Kikkawa K. (1974), Field theory of relativistic strings. I. Trees, Phys. Rev. **D10**, 1110.

327. *Kaku M. and Kikkawa K.* (1974), Field theory of relativistic strings. II. Loops and pomerons, *Phys. Rev.* **D10**, 1823.
328. *Kalb M. and Ramond P.* (1974), Classical direct interstring action, *Phys. Rev.* **D9**, 2273.
329. *Kalosh R.E.* (1985), Ten-dimensional supersymmetry requires $E_8 \times E_8$ or $SO(32)$, *Phys. Lett.* **159B**, 111.
330. *Kalosh R. E. and Nilsson B. E. W.* (1986), Scale invariant $d = 10$ superspace and the heterotic string, *Phys. Lett.* **167B**, 46.
331. *Kaluza Th.* (1921), On the problem of unity in physics, *Sitz. Preuss. Akad. Wiss.* **K1**, 966. [Имеется перевод: *Калуца Т.* К проблеме единства физики. — В сб. Альберт Эйнштейн и теория гравитации. — М.: Мир, 1979.]
332. *Kalyniak P. and Sundaresan M. K.* (1986), Symmetry-breaking scenarios of Wilson-loop broken E_8 , *Phys. Lett.* **167B**, 320.
333. *Kaplunovsky V.* (1985), Mass scales of the string unification, *Phys. Rev. Lett.* **55**, 1036.
334. *Kendig K.* (1977), *Elementary Algebraic Geometry* (Springer-Verlag).
335. *Kent A.* (1986), Conformal invariance, current algebra and modular invariance, *Phys. Lett.* **173B**, 413.
336. *Kephart T. and Frampton P.* (1983), Analysis of anomalies in higher space-time dimensions, *Phys. Rev.* **D28**, 1010.
337. *Kikkawa K., Sakita B. and Virasoro M. A.* (1969), Feynman-like diagrams compatible with duality. I. Planar diagrams, *Phys. Rev.* **184**, 1701.
338. *Kikkawa K.* (1969), Regge cut from a nonplanar duality amplitude, *Phys. Rev.* **187**, 2249.
339. *Kikkawa K., Klein S. A., Sakita B. and Virasoro M. A.* (1970), Feynman-like diagrams compatible with duality. II. General discussion including nonplanar diagram, *Phys. Rev.* **D1**, 3258.
340. *Kikuchi Y., Marzban C. and Ng. Y.* (1986), Heterotic string modifications of Einstein's and Yang—Mills actions, *Phys. Lett.* **176B**, 57.
341. *Kim J. E.* (1979), Weak-interaction singlet and strong CP invariance, *Phys. Rev. Lett.* **43**, 103.
342. *Kim J. K., Koh I. G. and Yoon Y.* (1986), Calabi—Yau manifolds from arbitrary weighted homogeneous spaces, *Phys. Rev.* **D33**, 2893.
343. *Klein O.* (1926), Quantentheorie und fünfdimensionale Relativitätstheorie, *Z. Phys.* **37**, 895.
344. *Koba Z. and Nielsen H. B.* (1969), Reaction amplitude for p -mesons a generalization of the Veneziano—Bardakci—Ruegg—Virasoro model, *Nucl. Phys.* **B10**, 633.
345. *Koba Z. and Nielsen H. B.* (1969), Manifestly crossing-invariant parametrization of n -meson amplitude, *Nucl. Phys.* **B12**, 517.
346. *Kodaire K.* (1985), *Complex Manifolds and Deformation of Complex Structures* (Springer-Verlag).
347. *Коган Я. И., Морозов А. Ю., Переломов А. М.* О конечности $N = 4$ суперсимметричных сигма-моделей. — Письма в ЖЭТФ, 1984, т. 40, вып. 1, с. 38—41.
348. *Koh I. G. and Nishino H.* (1985), Towards realistic $D = 6$, $N = 2$ Kaluza—Klein supergravity on coset $E_7/SO(12) \times Sp(1)$ with chiral fermions, *Phys. Lett.* **153B**, 45.
349. *Kolb E. W. and Slansky R.* (1984), Dimensional reduction in the early universe: Where have all the massive particles gone?, *Phys. Lett.* **135B**, 378.
350. *Kolb E. W., Perry M. J. and Walker T. P.* (1986), Time variation of fundamental constraints, primordial nucleosynthesis, and the size of extra dimensions, *Phys. Rev.* **D33**, 869.
351. *Kreuzer L. B.* (1968), Experimental measurement of the equivalence of active and passive gravitational mass, *Phys. Rev.* **169**, 1007.

352. *Labastida J. M. F.* (1986), Equivalence of dual-field theoretical limits of superstring theories, *Phys. Lett.* **171B**, 377.
353. *Lam C. S. and Li D-X.* (1986), Modular invariance and one-loop finiteness of five-point amplitudes in type-II and heterotic string theories, *Phys. Rev. Lett.* **56**, 2575.
354. *Lang W. and Louis J.* (1985), 16/16 supergravity coupled to matter: The low energy limit of the superstring, *Phys. Lett.* **158B**, 40.
355. *Lazarides G., Panagiotakopoulos C. and Shafi Q.* (1986), Phenomenology and cosmology with superstrings, *Phys. Rev. Lett.* **56**, 432.
356. *Lazarides G., Panagiotakopoulos C. and Shafi Q.* (1986), Baryon asymmetry, stable proton and $n - \bar{n}$ oscillations in superstring models, *Phys. Lett.* **175B**, 309.
357. *Linde A. D.* (1982), A new inflationary universe scenario: A possible solution of the horizon, flatness, homogeneity, isotropy and primordial monopole problems, *Phys. Lett.* **108B**, 389.
358. *Lorenzo F. J., Mittelbrunn J. R., Medrano M. R. and Sierra G.* (1986), Quantum mechanical amplitude for string propagation, *Phys. Lett.* **171B**, 369.
359. *Lovelace C.* (1970), M -loop generalized Veneziano formula, *Phys. Lett.* **32B**, 703.
360. *Lovelace C.* (1971), Pomeron form factors and dual Regge cuts, *Phys. Lett.* **34B**, 500.
361. *Luciano J. F.* (1978), Space-time geometry and symmetry breaking, *Nucl. Phys.* **B135**, 111.
362. *Maeda K.* (1986), Cosmological solutions with Calabi—Yau compactification, *Phys. Lett.* **166B**, 59.
363. *Maeda K. and Pollock M. D.* (1986), On inflation in the heterotic superstring model, *Phys. Lett.* **173**, 251.
364. *Mahapatra S. and Misra S. P.* (1986), Fermion condensates and weak symmetry breaking in a superstring-based model, *Phys. Rev.* **D33**, 3464.
365. *Mandelstam S.* (1973), Interacting-string picture of dual resonance models, *Nucl. Phys.* **B64**, 205.
366. *Mandelstam S.* (1973), Manifestly dual formulation of the Ramond-model, *Phys. Lett.* **46B**, 447.
367. *Mandelstam S.* (1974), Interacting-string picture of the Neveu—Schwarz—Ramond model, *Nucl. Phys.* **B69**, 77.
368. *Mandelstam S.* (1974), Dual-resonance models, *Phys. Reports* **C13**, 259.
369. *Mandelstam S.* (1974), Lorentz properties of the three-string vertex, *Nucl. Phys.* **B83**, 413.
370. *Mandelstam S.* (1986), The interacting-string picture and functional integration, in *Workshop on Unified String Theories*, 29 July—16 August, 1985, eds. M. Green and D. Gross (World Scientific, Singapore), p. 46.
371. *Mandelstam S.* (1986), Interacting-string picture of the fermionic string, in *Workshop on Unified String Theories*, 29 July—16 August, 1985, eds. M. Green and D. Gross (World Scientific, Singapore), p. 577.
372. *Mangano M.* (1985), Low energy aspects of superstring theories, *Z. Phys.* **S. 28**, 613.
373. *Mani H. S., Mukherjee A., Ramachandran R. and Balachandran A. P.* (1986), Embedding of $SU(5)$ GUT in $SO(32)$ superstring theories, *Nucl. Phys.* **B263**, 621.
374. *Manin Yu. I.* (1986), The partition function of the Polyakov string can be expressed in terms of theta-functions, *Phys. Lett.* **172B**, 184.
375. *Манин Ю. И.* Статистическая сумма струны Полякова выражается через тэта-функции. — Письма в ЖЭТФ, 1986, т. 43, вып. 4, с. 161—163.
376. *Manton N. S.* (1981), Fermions and parity violation in dimensional reduction schemes, *Nucl. Phys.* **B193**, 502.

377. *Manton N. S.* (1986), Dimensional reduction of supergravity, *Ann. Phys.* **167**, 328.
378. *Marcus N. and Sagnotti A.* (1984), A test of finiteness predictions for supersymmetric theories, *Phys. Lett.* **135**, 85.
379. *Marcus N. and Sagnotti A.* (1985), The ultraviolet behavior of $N = 4$ Yang — Mills and the power counting of extended superspace, *Nucl. Phys.* **B256**, 77.
380. *Маркушевич Д. Г., Ольшанецкий М. А., Переломов А. М.* Вакуумные конфигурации в суперструнах, связанные с полупростыми алгебрами Ли. — Письма в ЖЭТФ, 1986, т. 43, вып. 2, с. 59—62.
381. *Martinec E.* (1986), Nonrenormalization theorems and fermionic string finiteness, *Phys. Lett.* **171B**, 189.
382. *Matsuoka T. and Suematsu D.* (1986), Gauge hierarchies in the $E_8 \times E_8$ superstring theory, *Nucl. Phys.* **B274**, 106.
383. *McKean H. P., Jr. and Singer I. M.* (1967), Curvature and the eigenvalues of the Laplacian, *J. Diff. Geom.* **1**, 43.
384. *Miao L.* (1986), The θ -structure in string theories: superstrings, *Phys. Lett.* **175B**, 284.
385. *Milnor J. W. and Stasheff J. D.* (1974), *Characteristic Classes* (Princeton University Press). [Имеется перевод: *Милнор Дж., Сташефф Дж.* Характеристические классы. — М.: Мир, 1979.]
386. *Mohapatra R. N.* (1986), Mechanism for understanding small neutrino mass in superstring theories, *Phys. Rev. Lett.* **56**, 561.
387. *Mohapatra P. K.* (1986), Realization of the discrete group in E_6 and the possible low-energy gauge groups in superstrings, *Phys. Lett.* **174B**, 51.
388. *Moore G. and Nelson P.* (1986), Measure for moduli. The Polyakov string has no local anomalies, *Nucl. Phys.* **B266**, 58.
389. *Morozov A. Yu. and Perelomov A. M.* (1986), Hyperkählerian manifolds and exact beta functions of two-dimensional $N = 4$ supersymmetric sigma models, *Nucl. Phys.* **B271**, 620.
390. *Müller-Hoissen F.* (1985), Spontaneous compactification with quadratic and cubic curvature terms, *Phys. Lett.* **163B**, 106.
391. *Mumford D.* (1975), *Curves and Their Jacobians* (University of Michigan Press).
392. *Nahm W.* (1978), Supersymmetries and their representations, *Nucl. Phys.* **B135**, 149.
393. *Nandi S. and Sarkar U.* (1986), Solution to the neutrino-mass problem in superstring E_6 theory, *Phys. Rev. Lett.* **56**, 564.
394. *Nash C. and Sen S.* (1983), *Topology and Geometry for Physicists*, (Academic Press).
395. *Nemeschansky D. and Sen A.* (1986), Conformal invariance of supersymmetric σ -models on Calabi — Yau manifolds, *Phys. Lett.* **178B**, 365.
396. *Nepomechie R. I., Wu Y. S. and Zee A.* (1985), New compactifications on Calabi — Yau manifolds, *Phys. Lett.* **158B**, 311.
397. *Nepomechie R. I.* (1986), Chern — Simons terms and bosonic strings, *Phys. Lett.* **B171**, 195.
398. *Neveu A. and Scherk J.* (1970), Parameter-free regularization of one-loop unitary dual diagram, *Phys. Rev.* **D1**, 2355.
399. *Neveu A. and Schwarz J. H.* (1971), Factorizable dual model of pions, *Nucl. Phys.* **B31**, 86.
400. *Neveu A. and Schwarz J. H.* (1971), Quark model of dual pions, *Phys. Rev.* **D4**, 1109.
401. *Neveu A. and Scherk J.* (1972), Gauge invariance and uniqueness of the renormalization of dual models with unit intercept, *Nucl. Phys.* **B36**, 317.
402. *Nielsen H. B. and Olesen P.* (1970), A parton view on dual amplitudes, *Phys. Lett.* **32B**, 203.

403. *Nilles H. P.* (1984), Supersymmetry, supergravity and particle physics, *Phys. Reports* **110**, 1.
404. *Nilles H. P.* (1986), Supergravity and the low-energy limit of superstring theories, (CERN preprint Th. 4444/86).
405. *Nilsson B. E. W. and Tollstén A. K.* (1986), Superspace formulation of the ten-dimensional coupled Einstein — Yang — Mills system, *Phys. Lett.* **171B**, 212.
406. *Nilsson B. E. W. and Tollstén A. K.* (1986), The geometrical off-shell structure of pure $N = 1$; $d = 10$ supergravity in superspace, *Phys. Lett.* **169B**, 369.
407. *Nilsson B. E. W.* (1986), Off-shell $d = 10$, $N = 1$ Poincaré supergravity and the embeddability of higher-derivative field theories in superspace, *Phys. Lett.* **175B**, 319.
408. *Nishino H. and Gates S. J.* (1986), Dual versions of higher-dimensional supergravities and anomaly cancellations in lower dimensions, *Nucl. Phys.* **B268**, 532.
409. *Olive D. and West P.* (1982), The $N = 4$ supersymmetric E_8 gauge theory and coset space dimensional reduction, *Nucl. Phys.* **B217**, 248.
410. *Palla L.* (1978), Spontaneous compactification, in *Proceedings of the 1978 Tokyo Conference on High Energy Physics*, p. 629.
411. *Pati J. C. and Salam A.* (1973), Unified lepton-hadron symmetry and a gauge theory of the basic interactions, *Phys. Rev.* **D8**, 1240.
412. *Pati J. C. and Salam A.* (1974), Lepton number as the fourth «color», *Phys. Rev.* **D10**, 275.
413. *Paton J. E. and Chan H. M.* (1969), Generalized Veneziano model with isospin, *Nucl. Phys.* **B10**, 516.
414. *Peccei R. D. and Quinn H.* (1977), CP conservation in the presence of pseudoparticles, *Phys. Rev. Lett.* **38**, 1440.
415. *Pilch K. and Schellekens A. N.* (1985), Fermion spectra from superstrings, *Nucl. Phys.* **B259**, 637.
416. *Polchinski J.* (1986), Evaluation of the one loop string path integral, *Commun. Math. Phys.* **104**, 37.
417. *Polyakov A. M.* (1981), Quantum geometry of bosonic strings, *Phys. Lett.* **103B**, 207.
418. *Polyakov A. M.* (1981), Quantum geometry of fermionic strings, *Phys. Lett.* **103B**, 211.
419. *Pope C. N., Sohnius M. F. and Stelle K. S.* (1987), Counterterm counterexamples, *Nucl. Phys.* **B283**, 192.
420. *Preskill J., Frampton P. H. and van Dam H.* (1983), Anomalies and fermion masses in D dimensions, *Phys. Lett.* **124B**, 209.
421. *Quiros M.* (1986), On the effective potential and gravitino mass determination in compactified superstring models, *Phys. Lett.* **173B**, 265.
422. *Rabin J. M.*, (1986), Chern — Simons and Wess — Zumino terms in string theory, *Phys. Lett.* **172B**, 333.
423. *Raby S. and Slansky R.* (1986), Compactification of closed bosonic strings, *Phys. Rev. Lett.* **56**, 693.
424. *Ramond P.* (1971), Dual theory for free fermions, *Phys. Rev.* **D3**, 2415.
425. *Randjbar-Daemi S., Salam A. and Strathdee S.* (1983), Spontaneous compactification in six-dimensional Einstein — Maxwell theory, *Nucl. Phys.* **B214**, 491.
426. *Randjbar-Daemi S., Salam A., Sezgin E. and Strathdee J.* (1985), An anomaly-free model in six dimensions, *Phys. Lett.* **151B**, 351.
427. *Rebbi C.* (1974), Dual models and relativistic quantum strings, *Phys. Reports* **C12**, 1.
428. *Restuccia A. and Taylor J. G.* (1986), On the construction of higher loop closed superstring amplitudes, *Phys. Lett.* **174B**, 56.

429. *Rohm R.* (1984), Spontaneous supersymmetry breaking in supersymmetric string theories, *Nucl. Phys.* **B237**, 553.
430. *Rohm R. and Witten E.* (1986), The antisymmetric tensor field in superstring theory, *Ann. Phys.* **170**, 454.
431. *Romans L. J.* (1985), New compactifications of chiral $N = 2$, $d = 10$ supergravity, *Phys. Lett.* **153B**, 392.
432. *Romans L. J. and Warner N. P.* (1986), Some supersymmetric counterparts of the Lorentz Chern — Simons term, *Nucl. Phys.* **B273**, 320.
433. *Romans L. J.* (1986), Massive $N = 2a$ supergravity in ten dimensions, *Phys. Lett.* **169B**, 374.
434. *Sakai N. and Senda I.* (1986), Vacuum energies of string compactified on torus, *Prog. Theor. Phys.* **75**, 692.
435. *Salam A. and Strathdee J.* (1982), On Kaluza — Klein theory, *Ann. Phys.* **141**, 316.
436. *Schellekens A. N.* (1986), Anomaly cancellation in ten dimensions and beyond, *Phys. Lett.* **175B**, 41.
437. *Scherk J.* (1971), Renormalization in the dual resonance model. Its arbitrariness in the general case and for unit intercept, *Nucl. Phys.* **B29**, 357.
438. *Scherk J.* (1971), Zero-slope limit of the dual resonance model, *Nucl. Phys.* **B31**, 222.
439. *Scherk J. and Schwarz J. H.* (1974), Dual models for non-hadrons, *Nucl. Phys.* **B81**, 118.
440. *Scherk J. and Schwarz J. H.* (1974), Dual models and the geometry of space-time, *Phys. Lett.* **52B**, 347.
441. *Scherk J.* (1975), An introduction to the theory of dual models and strings, *Rev. Mod. Phys.* **47**, 123.
442. *Scherk J. and Schwarz J. H.* (1979), How to get masses from extra dimensions, *Nucl. Phys.* **B153**, 61.
443. *Scherk J. and Schwarz J. H.* (1979), Spontaneous breaking of supersymmetry through dimensional reduction, *Phys. Lett.* **82B**, 60.
444. *Schwarz J. H.* (1973), Dual resonance theory, *Phys. Reports* **8**, 269.
445. *Schwarz J. H.* (1973), Off-shell dual amplitudes without ghosts, *Nucl. Phys.* **B65**, 131.
446. *Schwarz J. H. and Wu C. C.* (1974), Off-mass-shell dual amplitudes (II), *Nucl. Phys.* **B72**, 397.
447. *Schwarz J. H.* (1974), Off-mass-shell dual amplitudes III, *Nucl. Phys.* **B76**, 93.
448. *Schwarz J. H.* (1982), Superstring theory, *Phys. Reports* **89**, 223.
449. *Schwarz J. H. and West P. C.* (1983), Symmetries and transformations of chiral $N = 2$, $D = 10$ supergravity, *Phys. Lett.* **126B**, 301.
450. *Schwarz J. H.* (1983), Covariant field equations of chiral $N = 2$, $D = 10$ supergravity, *Nucl. Phys.* **B226**, 269.
451. *Schwarz J. H.* (1985), Superstrings. The First Fifteen Years of Superstring Theory, in 2 volumes (World Scientific, Singapore).
452. *Schwinger J.* (1951), On gauge invariance and vacuum polarization, *Phys. Rev.* **82**, 664.
453. *Segrè G. C.* (1985), Low energy physics from superstrings (Cargese summer school lectures).
454. *Seiberg N. and Witten E.* (1986), Spin structures in string theory, *Nucl. Phys.* **B276**, 272.
455. *Sen A.* (1985), Heterotic string in an arbitrary background field, *Phys. Rev.* **D32**, 2102.
456. *Sen A.* (1986), Local gauge and Lorentz invariance of heterotic string theory, *Phys. Lett.* **166B**, 300.

457. *Sen A.* (1986), σ -model approach to the heterotic string theory, in Workshop on Unified String Theories, 29 July — 16 August, 1985, eds. M. Green and D. Gross (World Scientific, Singapore), p. 497.
458. *Sen A.* (1986), Superspace analysis of local Lorentz and gauge anomalies in the heterotic string theory, *Phys. Lett.* **174B**, 277.
459. *Sen A.* (1986), Central charge of the Virasoro algebra for supersymmetric sigma models on Calabi — Yau manifolds, *Phys. Lett.* **178B**, 370.
460. *Шафаревич И. П.* Основы алгебраической геометрии. В 2-х т. — М.: Наука, 1988.
461. *Shafi Q. and Wetterich C.* (1983), Cosmology from higher-dimensional gravity, *Phys. Lett.* **129B**, 387.
462. *Shapiro J. A.* (1970), Electrostatic analogue for the Virasoro model, *Phys. Lett.* **33B**, 361.
463. *Shapiro J. A.* (1971), Nonorientable dual loop graphs and isospin, *Phys. Rev.* **D4**, 1249.
464. *Shapiro J. A.* (1972), Loop graph in the dual-tube model, *Phys. Rev.* **D5**, 1945.
465. *Shapiro J. A.* (1975), Renormalization of dual models, *Phys. Rev.* **D11**, 2937.
466. *Sierra G. and Townsend P. K.* (1984), Chiral anomalies and constraints on the gauge group in higher-dimensional supersymmetric Yang — Mills theories, *Nucl. Phys.* **B222**, 493.
467. *Slansky R.* (1981), Group theory for unified model building, *Phys. Reports* **79**, 1.
468. *Steinberger J.* (1949), On the use of subtraction fields and the lifetimes of some types of meson decay, *Phys. Rev.* **76**, 1180.
469. *Strominger A. and Witten E.* (1985), New manifolds for superstring compactification, *Commun. Math. Phys.* **101**, 341.
470. *Strominger A.* (1985), Topology of superstring compactification, in Workshop on Unified String Theories, 29 July — 16 August, 1985, eds. M. Green and D. Gross (World Scientific, Singapore), p. 654.
471. *Strominger A.* (1986), Superstrings with torsion, *Nucl. Phys.* **B274**, 253.
472. *Tanii Y.* (1985), Absence of the supersymmetry anomaly in heterotic string theory, *Phys. Lett.* **165B**, 275.
473. *Taylor T. R.* (1985), Hidden sector of superstring models: An effective Lagrangian analysis, *Phys. Lett.* **164B**, 43.
474. *Thierry-Mieg J.* (1985), Remarks concerning the $E_8 \times E_8$ and D_{16} string theories, *Phys. Lett.* **156B**, 199.
475. *Thierry-Mieg J.* (1986), Anomaly cancellation and fermionisation in 10-, 18- and 26-dimensional superstrings, *Phys. Lett.* **171B**, 163.
476. *Thorn C. B.* (1986), The theory of interacting relativistic strings, *Nucl. Phys.* **B263**, 493.
477. *Thorn C. B.* (1986), Introduction to the theory of relativistic strings, in Workshop on Unified String Theories, 29 July — 16 August, 1985, eds. M. Green and D. Gross (World Scientific, Singapore), p. 5.
478. *Townsend P. K. and Sierra G.* (1983), Chiral anomalies and constraints on the gauge group in higher-dimensional supersymmetric Yang — Mills theories, *Nucl. Phys.* **B222**, 493.
479. *Uhlenbeck K. and Yau S. T.* (1986), preprint.
480. *Vafa C.* (1986), Modular invariance and discrete torsion on orbifolds, *Nucl. Phys.* **B273**, 592.
481. *Van Nieuwenhuizen P.* (1981), Supergravity, *Phys. Reports* **68**, 189.
482. *Veneziano G.* (1974), An introduction to dual models of strong interactions and their physical motivations, *Phys. Rev.* **C9**, 199.
483. *Weinberg S.* (1972), Gravitation and Cosmology (Wiley-Interscience).

- [Имеется перевод: *Вейнберг С.* Гравитация и космология. — М.: Мир, 1975.]
484. *Weinberg S.* (1978), A new light boson?, *Phys. Rev. Lett.* **40**, 223.
485. *Weinberg S.* (1984), Charges from extra dimensions, *Phys. Lett.* **125B**, 265.
486. *Weinberg S.* (1984), Quasi-Riemannian theories of gravitation in more than four dimensions, *Phys. Lett.* **138B**, 47.
487. *Weiss N.* (1986), Superstring cosmology: Is it consistent with a matter-dominated universe?, *Phys. Lett.* **172B**, 180.
488. *Wells R. O., Jr.* (1980), *Differential Analysis on Complex Manifolds*, (Springer-Verlag). [Имеется перевод первого изд.: *Уэлс Р.* Дифференциальное исчисление на комплексных многообразиях. — М.: Мир, 1976.]
489. *Wen X. G. and Witten E.* (1986), World-sheet instantons and the Peccei — Quinn symmetry, *Phys. Lett.* **166B**, 397.
490. *Wen X. G. and Witten E.* (1985), Electric and magnetic charges in superstring models, *Nucl. Phys.* **B261**, 651.
491. *Wess J. and Zumino B.* (1971), Consequences of anomalous Ward identities, *Phys. Lett.* **37B**, 95.
492. *Wess J. and Zumino B.* (1974), Supergauge transformations in four dimensions, *Nucl. Phys.* **B70**, 39.
493. *Wess J. and Bagger J.* (1983), *Supersymmetry and Supergravity*, (Princeton Univ. Press). [Имеется перевод: *Весс Ю., Беггер Дж.* Суперсимметрия и супергравитация. — М.: Мир, 1986.]
494. *Wetterich C.* (1982), $SO(10)$ unification from higher dimensions, *Phys. Lett.* **110B**, 379.
495. *Wetterich C.* (1982), Spontaneous compactification in higher dimensional gravity, *Phys. Lett.* **113B**, 377.
496. *Wetterich C.* (1983), Massless spinors in more than four dimensions, *Nucl. Phys.* **B211**, 177.
497. *Wetterich C.* (1983), Dimensional reduction of Weyl, Majorana and Majorana — Weyl spinors, *Nucl. Phys.* **B222**, 20.
498. *Wetterich C.* (1983), Chirality index and dimensional reduction of fermions, *Nucl. Phys.* **B223**, 109.
499. *Wetterich C.* (1984), Discrete symmetries in Kaluza — Klein theories, *Nucl. Phys.* **B234**, 413.
500. *Wetterich C.* (1984), Dimensional reduction of fermions in generalized gravity, *Nucl. Phys.* **B242**, 473.
501. *Wetterich C.* (1985), Spontaneous symmetry breaking and fermion chirality in higher-dimensional gauge theory, *Nucl. Phys.* **B260**, 402.
502. *Wetterich C.* (1985), Fermion mass predictions from higher dimensions, *Nucl. Phys.* **B261**, 461.
503. *Wilczek F.* (1978), Problem of strong P and T invariance in the presence of instantons, *Phys. Rev. Lett.* **40**, 279.
504. *Wilczek F. and Zee A.* (1979), Princeton preprint, unpublished.
505. *Wilczek F. and Zee A.* (1982), Families from spinors, *Phys. Rev.* **D25**, 553.
506. *Winnberg J.-O.* (1975), Recalculation of the single planar dual fermion loop, *Nucl. Phys.* **B94**, 205.
507. *Witten E.* (1981), Search for a realistic Kaluza — Klein theory, *Nucl. Phys.* **B186**, 412.
508. *Witten E.* (1981), Dynamical breaking of supersymmetry, *Nucl. Phys.* **B188**, 513.
509. *Witten E.* (1982), Instability of the Kaluza — Klein vacuum, *Nucl. Phys.* **B195**, 481.
510. *Witten E.* (1982), Constraints on supersymmetry breaking, *Nucl. Phys.* **B202**, 253.

511. *Witten E.* (1982) Supersymmetry and Morse theory, *J. Diff. Geom.* **17**, 661.
512. *Witten E.* (1983), $D = 10$ superstring theory, in *Fourth Workshop on Grand Unification*, eds. P. Langacker et al. (Birkhauser), p. 395.
513. *Witten E.* (1983), Global aspects of current algebra, *Nucl. Phys.* **B223**, 422.
514. *Witten E.* (1984), Some properties of $O(32)$ superstrings, *Phys. Lett.* **149B**, 351.
515. *Witten E.* (1985), Cosmic superstrings, *Phys. Lett.* **153B**, 243.
516. *Witten E.* (1985), Dimensional reduction of superstring models, *Phys. Lett.* **155B**, 151.
517. *Witten E.* (1985), Superconducting strings, *Nucl. Phys.* **B249**, 557.
518. *Witten E.* (1985), Symmetry breaking patterns in superstring models, *Nucl. Phys.* **B258**, 75.
519. *Witten E.* (1985), Fermion quantum numbers in Kaluza — Klein theory, in *Shelter Island II: Proceedings of the 1983 Shelter Island Conference on Quantum Fields Theory and the Fundamental Problems of Physics*, eds. R. Jackiw et al. (MIT Press, Cambridge, Mass.), p. 227.
520. *Witten E.* (1985), Global gravitational anomalies, *Commun. Math. Phys.* **100**, 197.
521. *Witten E.* (1986), Global anomalies in string theory, in *Symposium on Anomalies, Geometry, Topology*, March 28—30, 1985, eds. W. A. Bardeen and A. R. White (World Scientific, Singapore), p. 61.
522. *Witten E.* (1986), Topological tools in ten dimensional physics, in *Workshop on Unified String Theories*, 29 July — 16 August, 1985, eds M. Green and D. Gross (World Scientific, Singapore), p. 400. With an appendix by R. E. Stong, Calculation of $\Omega_{11}^{Spin}(K(Z, 4))$.
523. *Witten E.* (1986), New issues in manifolds of $SU(3)$ holonomy, *Nucl. Phys.* **B268**, 79.
524. *Witten L. and Witten E.* (1987), Large radius expansion of superstring compactification, *Nucl. Phys.* **B281**, 109.
525. *Wu Y.-S. and Zi Wang* (1986), The time variation of Newton's gravitational constant in superstring theories, *Phys. Rev. Lett.* **57**, 1978.
526. *Yahikozawa S.* (1986), Evaluation of the one-loop amplitude in heterotic string theory, *Phys. Lett.* **166B**, 135.
527. *Yamamoto K.* (1985). Saving the axions in superstring models, *Phys. Lett.* **161B**, 289.
528. *Yamamoto K.* (1986), The phase transition associated with intermediate gauge symmetry breaking in superstring models, *Phys. Lett.* **168B**, 341.
529. *Yasuda O.* (1986), Higher derivative terms and zero modes in $D = 10$ supergravity, *Phys. Lett.* **169B**, 64.
530. *Yau S. T.* (1977), Calabi's conjecture and some new results in algebraic geometry, *Proc. Natl. Acad. Sci.* **74**, 1798.
531. *Yau S. T.* (1985), Compact three dimensional Kahler manifolds with zero Ricci curvature, in *Symp. on Anomalies, Geometry, Topology*, March 28—30, 1985, eds. W. A. Barden and A. R. White (World Scientific, Singapore), p. 395.
532. *Zee A.* (1972), Axial-vector anomalies and the scaling property of field theory, *Phys. Rev. Lett.* **29**, 1198.
533. *Zee A.* (1982), *Unity of Forces in the Universe* (World Scientific).
534. *Zumino B.* (1975), Supersymmetry and the vacuum, *Nucl. Phys.* **B89**, 535.
535. *Zumino B., Wu Y. S. and Zee A.* (1984), Chiral anomalies, higher dimensions, and differential geometry, *Nucl. Phys.* **B239**, 477.
536. *Zwiebach B.* (1985), Curvature squared terms and string theories, *Phys. Lett.* **156B**, 315.

Литература, добавленная при переводе ¹⁾

1. *Alvarez-Gaume L., Gomez C., Moore G. and Vafa C.* (1988), Strings in the operator formalism, Nucl. Phys. **B303**, 455, 1988; Fermionic strings in the operator formalism, Nucl. Phys. **B311**, 333.
2. *Alvarez-Gaume L.* (1989), Topics in conformal field theory and string theory. Lectures given at NATO School in Mathematical Physics, Montreal, Canada, Jul 1988. CERN preprint CERN-TH-5287/89.
3. *Antoniadis I.* (1988), Status report on four-dimensional strings. Invited talk given at 24th Int. Conf. on High Energy Physics, Munich, West Germany, Aug. 4—10, 1988 CERN preprint CERN-TH-5199/88.
4. *Callan C. G. and Thorlacius L.* (1989), Sigma models and string theory. Princeton Univ. preprint Print-89-0232.
5. *Coleman S.* (1988), Why there is nothing other than something? Nucl. Phys. **B302**, 431.
6. *Frampton P. H. and Volovich I. V.* (1989), p -adic strings. Phys. Rept. **197**, 1.
7. *D'Hoker E. and Phong D. H.* (1988), The geometry of string perturbation theory. Rev. Mod. Phys. **60**, 917.
8. *Lerche W., Schellekens A. N., Warner N. P.* (1989), Lattices and strings. Phys. Rept. **179**, 1.
9. *Katanaev M. O., Volovich I. V.* (1990), Two dimensional gravity with dynamical torsion and strings, Ann. Phys. **197**, 1.
10. *Nilles H. P.* (1988), Towards a standard string model. Lectures given at Int. School of Subnuclear Physics, The Superworld III, Erice, Italy, Aug 7—15, 1988. Munich, Max Planck Inst. preprint, TUM-TH-101/88, Oct 1988, 27 p.
11. *Понов А. Д.* Киральные фермионы в суперструнах и $d = 10, 11$ супергравитации с дополнительными времениподобными измерениями, ТМФ, **75**, 237 (1988).
12. *Schwarz J. H.* (1988), Superconformal symmetry in string theory. Lectures presented at the 1988 Banff Summer Institute on Particles and Fields, Banff, Canada, Aug 14—27, 1988. Cal Tech preprint, CALT-88-1503.
13. *Vafa C. and Warner N.* (1989), Catastrophes and the classification of conformal theories. Phys. Lett. **B218**, 51, 1989.
14. *Veneziano G.* (1988), Topics in string theory. CERN preprint CERN-TH-5019/88.
15. *Verlinde E. and Verlinde H.* (1988), Lectures on string perturbation theory. Presented at Spring School and Workshop on Superstrings, Trieste, Italy, Apr 11—22, 1988. Princeton Advanced Study Inst. preprint, LASSNS-HEP-88/52.
16. *Witten E.* (1988), The search for higher symmetry in string theory. Lecture given at Mtg. on String Theory of the Royal Society, London, England, Dec. 1988, Princeton Advanced Study Inst. preprint IASSNS-HEP-88/55.

¹⁾ Список литературы содержит обзоры основных направлений развития теории суперструн в 1987—1989 гг. Обзоры по полевой теории струн включены в дополнительную литературу, приведенную на с. 643. — *Прим. ред.*

Полевая теория струн

Полевая теория струн является областью очень активных исследований, которую мы не отразили в этих двух томах. Она включает формулировку теории струн как вторично квантованной полевой теории, основанной на функциональных струнных полях. Чтобы отразить это направление исследований, практически потребовался бы третий том. Несмотря на наше решение не развивать струнную полевую теорию в настоящей монографии, мы чувствуем, что было бы полезно перечислить некоторые из статей, посвященных этому предмету.

Большинство ранних работ по струнной теории поля основывалось на формулировке, использующей калибровку светового конуса. Многие вопросы, относящиеся к этому подходу, обсуждаются в гл. 11. Основными работами, в которых была развита большая часть подхода, являются статьи Каку и Кикавы [40, 41] и Креммера и Шерка [14, 15].

Обобщение подхода к полевой теории струн, использующего калибровку светового конуса, на случай теории суперструн содержится в статьях Грина, Шварца и Бринка [29—31]. Одно интересное наблюдение в этих статьях состоит в том, что гамильтониан взаимодействия задается антикоммутатором подходящей компоненты суперзаряда, соответствующей световому конусу, с самой собой. Более того, оба оператора однозначно определяются (при правдоподобных предположениях) требованием замкнутости алгебры.

Хотя формулировка теории в калибровке светового конуса может быть правильной и полной, существует много вопросов, на которые она не отвечает. Возможно ковариантная формулировка с очень большой группой калибровочных инвариантностей необходима для ответа на многие самые глубокие вопросы, касающиеся геометрии компактификации, существования или несуществования пространственно-временных сингулярностей, и другие. Такая формулировка должна выявить фундаментальные принципы, лежащие в основе теории струн. Вопрос о том,

окажется ли ковариантная струнная полевая теория правильным подходом к пониманию логической структуры струнной теории, остается открытым. Такой взгляд определенно является самым консервативным подходом к этой проблеме. Гораздо более радикальный подход описан в работе [22].

Раннее исследование ковариантной струнной полевой теории в «старые времена» теории струн содержится в статье [49]. После возрождения интереса к теории струн первый важный шаг на пути построения ковариантных полевых теорий струн сделал Зигель [67, 68], который показал, что важную роль должен играть BRST-оператор. Около 1985 г. это направление стало быстро развиваться в пионерских работах Бэнкса и Пескина [6], Зигеля и Звибаха [69] и Неве и Веста [52—57], которые построили калибровочно-инвариантные полевые теории свободных струн. Многие другие статьи, в которых развиваются калибровочно-инвариантные полевые теории свободных струн, перечислены в приведенном ниже списке литературы. Калибровочно-инвариантная нелинейная полевая теория открытых бозонных струн была предложена в работе [77] и проинтерпретирована в терминах кольца некоммутативных когомологий. Другие подходы к линейным калибровочно-инвариантным полевым теориям струн предприняты в статьях [32, 33, 56]. Многие важные статьи, существующие только в виде препринтов, ниже не приведены.

Литература

1. Aratyn H. and Zimerman A. N. (1986), On covariant formulation of the free Neveu—Schwarz and Ramond string models, Phys. Lett. **166B**, 130.
2. Aratyn H. and Zimerman A. H. (1986), Gauge invariance of the bosonic free field string theory, Phys. Lett. **168B**, 75.
3. Aratyn H. and Zimerman A. H. (1986), Differential form formulation of the Neveu—Schwarz and Ramond free field string theories, Nucl. Phys. **B269**, 349.
4. Aulakh C. S. (1986), Consistently truncated open superstring, Phys. Lett. **175B**, 297.
5. Awada M. A. (1986), The gauge-covariant formulation of interacting strings and superstrings, Phys. Lett. **172B**, 32.
6. Banks T. and Peskin M. E. (1986), Gauge invariance of string fields, Nucl. Phys. **B264**, 513.
7. Banks T., Friedan D., Martinec E., Peskin M. and Preitschopf C. (1986), All free string theories are theories of forms, Nucl. Phys. **B274**, 71.
8. Bardakçi K. (1986), Covariant gauge theory of strings, Nucl. Phys. **B217**, 561.
9. Baulieu L. and Ouvry S. (1986), Quasi—Yang—Mills structure for the open bosonic string, Phys. Lett. **171B**, 57.
10. Bengtsson A. K. H., Brink L., Cederwall M. and Ögren M. (1985), Uniqueness of superstring actions, Nucl. Phys. **B254**, 625.
11. Bengtsson I. (1986), Hamiltonian treatment of free string field theory, Phys. Lett. **172B**, 342.

12. Carson L. and Hosotani Y. (1986), Line functionals and string field theory, Phys. Rev. Lett. **56**, 2144.
13. Chappell G. J. and Taylor J. G. (1986), On gauge invariant bosonic strings, Phys. Lett. **175B**, 159.
14. Cremmer E. and Gervais J. L. (1974), Combining and splitting relativistic strings, Nucl. Phys. **B76**, 209.
15. Cremmer E. and Gervais J. L. (1975), Infinite component field theory of interacting relativistic strings and dual theory, Nucl. Phys. **B90**, 410.
16. Das S. R. and Rubin M. A. (1986), A Tomonaga—Schwinger—Dirac formulation for string theories, Phys. Lett. **169B**, 182.
17. Daté G. D., Günaydin M., Pernici M., Pilch K. and Van Nieuwenhuizen P. (1986), A minimal covariant action for the free open spinning string field theory, Phys. Lett. **171B**, 182.
18. de Alwis S. P. and Ohta N. (1986), Fully gauge-invariant field theory of free superstrings, Phys. Lett. **174B**, 383.
19. de Alwis S. P. and Ohta N. (1986), All free string theories are theories of BRST cohomology, Phys. Lett. **174B**, 388.
20. Floratos E. G., Kazama Y. and Tamvakis K. (1986), On the relation between the gauge-covariant formulation of string field theories, Phys. Lett. **166B**, 295.
21. Friedan D. (1985), On two-dimensional conformal invariance and the field theory of strings, Phys. Lett. **162B**, 102.
22. Friedan D. and Shenker S. (1986), The integrable analytic geometry of quantum string, Phys. Lett. **175B**, 287.
23. Friedan D. and Shenker S. (1987), The analytic geometry of conformal field theory, Nucl. Phys. **B281**, 509.
24. Friedan D. (1986), String field theory, Nucl. Phys. **B271**, 540.
25. Gervais J.-L. (1986), Group theoretic approach to the string field theory action, Nucl. Phys. **B276**, 339.
26. Giddings S. (1986), The Veneziano amplitude from gauge invariant string field theory, Nucl. Phys. **B278**, 242.
27. Giddings S. and Martinec E. (1986), Conformal geometry and string field theory, Nucl. Phys. **B278**, 91.
28. Giddings S., Martinec E. and Witten E. (1986), Modular invariance in string field theory, Phys. Lett. **176B**, 362.
29. Green M. V. and Schwarz J. H. (1983), Superstring interactions, Nucl. Phys. **B218**, 43.
30. Green M. B., Schwarz J. H. and Brink L. (1983), Superfield theory of type (II) superstrings, Nucl. Phys. **B219**, 437.
31. Green M. B. and Schwarz J. H. (1984), Superstring field theory, Nucl. Phys. **B243**, 475.
32. Hata H., Itoh K., Kugo T., Kunitomo H. and Ogawa K. (1986), Manifestly covariant field theory of interacting string I, Phys. Lett. **172B**, 186.
33. Hata H., Itoh K., Kugo T., Kunitomo H. and Ogawa K. (1986), Manifestly covariant field theory of interacting string II, Phys. Lett. **172B**, 195.
34. Hata H., Itoh K., Kugo T., Kunitomo H. and Ogawa K. (1986), Covariant string field theory, Phys. Rev. **D34**, 2360.
35. Hata H., Itoh K., Kugo T., Kunitomo H. and Ogawa K. (1986), Pregeometrical string field theory: creation of space-time and motion, Phys. Lett. **175B**, 138.
36. Hopkinson J. F. L., Tucker R. W. and Collins P. A. (1975), Quantum strings and the functional calculus, Phys. Rev. **D12**, 1653.
37. Horowitz G. T. and Strominger A. (1986), Origin of gauge invariance in string theory, Phys. Rev. Lett. **57**, 519.
38. Horowitz G. T., Lykken J., Rohm R. and Strominger A. (1986), Purely cubic action for string field theory, Phys. Rev. Lett. **57**, 283.

39. *Itoh K., Kugo T., Kunimoto H. and Ooguri H.* (1986), Gauge invariant local action of string field from BRS formalism, *Prog. Theor. Phys.* **75**, 162.
40. *Kaku M. and Kikkawa K.* (1974), Field theory of relativistic strings. I. Trees, *Phys. Rev.* **D10**, 1110.
41. *Kaku M. and Kikkawa K.* (1974), Field theory of relativistic strings. II. Loops and pomerons, *Phys. Rev.* **D10**, 1823.
42. *Kaku M.* (1985), Locality in the gauge-covariant field theory of strings, *Phys. Lett.* **162B**, 97.
43. *Kaku M.* (1986), Gauge field theory of covariant strings, *Nucl. Phys.* **B267**, 125.
44. *Kaku M. and Lykken J.* (1985), Supergauge field theory of superstrings, in *Symp. on Anomalies, Geometry, Topology*, March 28—30, 1985, eds. W. A. Bardeen and A. R. White (World Scientific, Singapore), p. 360.
45. *Kazama Y., Neveu A., Nicolai H. and West P. C.* (1986), Symmetry structures of superstring field theories, *Nucl. Phys.* **B276**, 366.
46. *LeClair A.* (1986), Fermionic string field theory, *Phys. Lett.* **168B**, 53.
47. *LeClair A. and Distler J.* (1986), Gauge invariant superstring field theory, *Nucl. Phys.* **B273**, 552.
48. *Marcus N. and Sagnotti A.* (1986), String field theory and equations of motion, *Phys. Lett.* **178B**, 343.
49. *Marshall C. and Ramond P.* (1975), Field theory of the interacting string: The closed string, *Nucl. Phys.* **B85**, 375.
50. *Meurice Y.* (1986), About the uniqueness of covariant string field theory, *Phys. Lett.* **173B**, 257.
51. *Nakawaki Y. and Saito T.* (1972), Field theory of dual-resonance model, *Prog. Theor. Phys.* **48**, 1324.
52. *Neveu A., Schwarz J. H. and West P. C.* (1985), Gauge symmetries of the free bosonic string field theory, *Phys. Lett.* **164B**, 51.
53. *Neveu A. and West P. C.* (1985), Gauge symmetries of the free supersymmetric string field theories, *Phys. Lett.* **165B**, 63.
54. *Neveu A., Nicolai H. and West P. C.* (1986), Gauge covariant local formulation of free strings and superstrings, *Nucl. Phys.* **B264**, 573.
55. *Neveu A., Nicolai H. and West P. C.* (1986), New symmetries and ghost structure of covariant string theories, *Phys. Lett.* **167B**, 307.
56. *Neveu A. and West P. C.* (1986), The interacting gauge covariant bosonic string, *Phys. Lett.* **168B**, 192.
57. *Neveu A. and West P. C.* (1986), Gauge covariant local formulation of bosonic strings, *Nucl. Phys.* **B268**, 125.
58. *Ohta N.* (1986), Covariant second quantization of superstrings, *Phys. Rev. Lett.* **56**, 440.
59. *Ohta N.* (1986), Covariant quantization of superstrings based on Becchi — Rouet — Stora invariance, *Phys. Rev.* **D33**, 1681.
60. *Ooguri H.* (1986), String field theory with spacetime supersymmetry, *Phys. Lett.* **172B**, 204.
61. *Peskin M. B. and Thorn C. B.* (1986), Equivalence of the light-cone formulation and the gauge-invariant formulation of string dynamics, *Nucl. Phys.* **B269**, 509.
62. *Pfeffer D., Ramond P. and Rodgers V. G. J.* (1985), Gauge invariant field theory of free strings, *Nucl. Phys.* **B276**, 131.
63. *Raby S., Slansky R. and West G.* (1985), Toward a covariant string field theory, in *proc. of the Lewes String Theory Workshop* (World Scientific), p. 246.
64. *Ramond P.* (1986), A pedestrian approach to covariant string theory, *Suppl. Prog. Theor. Phys.* **86**, 126.

65. *Sciuto S.* (1969), The general vertex function in dual resonance models, *Nuovo Cim. Lett.* **2**, 411.
66. *Senda I.* (1986), Light-cone field theory of closed bosonic strings compactified on a torus, *Phys. Lett.* **174B**, 267.
67. *Siegel W.* (1984), Covariantly second-quantized string II, *Phys. Lett.* **149B**, 157; **151B**, 391.
68. *Siegel W.* (1984), Covariantly second-quantized string III, *Phys. Lett.* **149B**, 162; **151B**, 396.
69. *Siegel W. and Zwiebach B.* (1986), Gauge string fields, *Nucl. Phys.* **B263**, 105.
70. *Taylor J. G. and Restuccia A.* (1985), European Physical Society meeting, Bari, Italy.
71. *Terao H. and Uehara S.* (1986), Covariant second quantization of free superstring, *Phys. Lett.* **168B**, 70.
72. *Terao H. and Uehara S.* (1986), Gauge invariant actions and gauge fixed actions of free superstring field theory, *Phys. Lett.* **173B**, 134.
73. *Terao H. and Uehara S.* (1986), Gauge invariant actions of free closed superstring field theories, *Phys. Lett.* **173B**, 409.
74. *Thorn C. B.* (1985), Comments on covariant formulations of string theories, *Phys. Lett.* **159B**, 107.
75. *Thorn C. B.* (1986), The theory of interacting relativistic strings, *Nucl. Phys.* **B263**, 493.
76. *Tseytlin A. A.* (1986), Covariant string field theory and effective action, *Phys. Lett.* **168B**, 63.
77. *Witten E.* (1986), Non-commutative geometry and string field theory, *Nucl. Phys.* **B268**, 253.
78. *Witten E.* (1986), Interacting field theory of open superstrings, *Nucl. Phys.* **B276**, 291.
79. *Yamron J. P.* (1986), A gauge invariant action for the free Ramond string, *Phys. Lett.* **174B**, 69.
80. *Yoneya T.* (1985), Space-time local symmetry of string field theory, *Phys. Rev. Lett.* **55**, 1828.
81. *Zwiebach B.* (1985), Gauge invariant string actions, in *Workshop on Unified String Theories*, 29 July—16 August, 1985, eds. M. Green and D. Gross (World Scientific, Singapore), p. 607.

Литература, добавленная при переводе¹⁾

1. *Alvarez-Gaume L., Gomez C. and Reina C.* (1987), Loop groups, grassmannians and string theory, *Phys. Lett.* **190B**, 55.
2. *Alwis S. P.* (1987), Remarks on the relation between different (open) string field theories, *Phys. Lett.* **189B**, 405.
3. *Alwis S. P., Grisar M. T. and Mezincescu L.* (1987), Ward identities in open string field theory, *Phys. Lett.* **197B**, 96.
4. *Арефьева И. Я., Волович И. В.* Калибровочно-инвариантное действие взаимодействующих бозонных струн. — ТМФ, 1986, т. 67, с. 477.
5. *Арефьева И. Я. and Volovich I. V.* (1987), General relativity invariance and string field theory ICTP preprint, IC/87/62.
6. *Арефьева И. Я. and Chekhov L. O.* (1987), Closed string fields as parameters of extra gauge symmetry of open string field theory, ICTP preprint, IC/87/62.

¹⁾ Приведенный список литературы по полевой теории струн, добавленный редакторами перевода, включает в себя в основном работы, вышедшие в 1987—1989 гг.

7. *Aref'eva I. Ya. and Volovich I. V.* (1986), String field algebra, *Phys. Lett.* **182B**, 312.
8. *Aref'eva I. Ya.* (1988), String field theory, lectures given at Int. Summer School on Conformal Invariance and String Theory, Poiana Brasov, Romania, Sep. 1—12, 1987, in: *Conformal Invariance String Theory*, eds. P. Dita and V. Geordescu, Academic Press, INC.
9. *Aref'eva I. Ya. and Medvedev P. B.* (1988), Field theory of open superstrings in the fermionic ghost representation, *Nucl. Phys.* **B130**, 101.
10. *Aref'eva I. Ya. and Medvedev P. B.* (1988), Truncation, picture-changing operation and space-time, supersymmetry in NSR string field theory, *Phys. Lett.* **202B**, 510.
11. *Aref'eva I. Ya. and Medvedev P. B.* (1989), Anomalies in Witten's field theory of the NSR string, *Phys. Lett.* **212B**, 299.
12. *Awada M. A. and Chamseddine A. H.* (1987), Closed string (field) theory and grassmannians. 1. Zurich, ETH preprint, ETH/PT/87-3.
13. *Awada M.* (1987), Functional loop spaces, grassmannians, and reparametrization invariant string field theory, CERN preprint, CERN-TH.4709.
14. *Bang-Gui Liu and Chen Yi-Xin* (1988), A new gauge and brst invariant interacting closed bosonic string field theory, *Class. Quant. Grav.* **5**, L119.
15. *Banks T. and Martinec E.* (1987), The renormalization group and string field theory, *Nucl. Phys.* **B294**, 733.
16. *Bardakci K.* (1988), A geometrical approach to string field theory, *Nucl. Phys.* **B284**, 334.
17. *Bars I. and Yankielowicz S.* (1989), The string field embedded in a loop space geometry, *Phys. Lett.* **196B**, 329.
18. *Baulieu L., Bergshoeff E. and Sezgin E.* (1988), Open BRST algebras, ghost unification and string field theory, *Nucl. Phys.* **B307**, 348.
19. *Blum R. and Samuel S.* (1989), The off-shell Koba-Nielsen formula, *Nucl. Phys.* **B323**, 337.
20. *Bochicchio M.* (1987), Quantization of the bosonic string field theory, *Phys. Lett.* **188B**, 330.
21. *Bogojevic A. R.* (1987), BRST invariance of the measure in string field theory, *Phys. Lett.* **B198**, 479.
22. *Bowick M. J. and Rajeev S. G.* (1987), The holomorphic geometry of closed bosonic string theory and diff S_1/S_1 , *Nucl. Phys.* **B293**, 348.
23. *Bordes J. and Lizzi F.* (1988), Computation of amplitudes in the discretized approach to string field theory, *Phys. Rev. Lett.* **61**, 278.
24. *Carow-Watamura U. and Watamura S.* (1988), N string vertex, canonical forms and bosonization, *Nucl. Phys.* **B302**, 149.
25. *Castellani L.* (1988), String field theory as general relativity of loops, *Phys. Lett.* **206B**, 47.
26. *Castellani L.* (1988), Infinite dimensional free differential algebras and string field theory, *Nucl. Phys.* **B317**, 46.
27. *Chen W. and Yue Yu* (1988), Free heterotic string field theory, *Phys. Rev.* **D35**, 3915.
28. *Chen Yi-Xin and Bang-Gui Liu* (1988), A covariant open bosonic string field theory including the endpoint and midpoint interaction, *Z. Phys.* **C39**, 547.
29. *LeClair A., Peskin M. E. and Preitschopf C. R.* (1988), String field theory on the conformal plane. 1. kinematical principles, *Nucl. Phys.* **B317**, 411.
30. *LeClair A., Peskin M. E. and Preitschopf C. R.* (1989), String field theory on the conformal plane. 2. generalized gluing, *Nucl. Phys.* **B317**, 464.
31. *Clarizia A. and Pezzella F.* (1987), BRST invariant mixed string vertex for the bosonic string, *Nucl. Phys.* **B301**, 499.

32. *Clarizia A. and Pezzella F.* (1988), N reggeon vertex for the Neveu—Schwarz string, *Nucl. Phys.* **B298**, 636.
33. *Di Vecchia P. M. Frau, Lerda A., Sciuto S.* (1987), N string vertex and loop calculation in the bosonic string, *Nucl. Phys.* **B298**, 527.
34. *Eskin A.* (1988), Conformal transformations and string field redefinitions, *Phys. Lett.* **206B**, 612.
35. *Jiyu Feng* (1988), New solutions and symmetries of the purely cubic bosonic string field theory, Caltech preprint CALT-68-1475.
36. *Freeman M. D. and West P.* (1988), Ghost vertices for the bosonic string using the group theoretic approach to string theory, *Phys. Lett.* **205B**, 30.
37. *Greensite J.* (San Francisco State U.), *Klinkhamer F. R.* (1989), An approach to general covariance in string space of brst string field theory, *Phys. Rev.* **D39**, 2317.
38. *Gross D. J. and Jevicki A.* (1987), Operator formulation of interacting string field theory. 3. NSR superstring, *Nucl. Phys.* **B293**, 29.
39. *Hata H. and Nojiri M.* (1987), A new symmetry in covariant open string field theory, *Phys. Rev.* **D36**, 1193.
40. *Holman R. and Sen S.* (1987), Gauge invariant closed string field theory and the Virasoro-Shapiro amplitude, FERMILAB preprint, Print-87-0430.
41. *Hori T.* (1987), Generalization of general relativity to the space of closed strings, *Phys. Lett.* **194B**, 487.
42. *Horowitz G. T.* (1987), Introduction to string field theory, lectures delivered at the ICTP Spring School on Supersymmetry, Supergravity and Superstrings, Trieste, Italy, Apr 1—11, 1987, and Theoretical Advanced Study Inst., Santa Fe, N. Mex., Jul 5—Aug 1, 1987, Santa Barbara Preprint, UCSB-TH-87-38.
43. *Horowitz G. T. and Martin S. P.* (1987), Conformal field theory and the symmetries of string field theory, *Nucl. Phys.* **B296**, 220.
44. *Horowitz G. T. and Witt D. M.* (1987), Toward a string field theory independent of space-time topology, *Phys. Lett.* **199B**, 176.
45. *Horowitz G. T., Morrow-Jones J., Martin S. P. and Woodard R. P.* (1987), New exact solutions for the purely cubic bosonic string field theory, *Phys. Rev. Lett.* **60**, 261.
46. *Hosoya A. and Itoyama H.* (1989), The vertex as a Bogolyubov transformed vacuum state in string field theory, *Nucl. Phys.* **B313**, 116.
47. *Ito K. and Onogi T.* (1987), One loop integration region in closed light cone string field theory, *Prog. Theor. Phys.* **78**, 135.
48. *Itoh K. and Kunitomo H.* (1988), Covariant string field theory on $Z(2)$ orbifold, *Prog. Theor. Phys.* **79**, 953.
49. *Iwazaki A.* (1987), Restrictions on gauge parameters in open string field theory, *Prog. Theor. Phys.* **78**, 990—995.
50. *Jevicki A.* (1987), Construction of interacting string and superstring field theory, *Int. J. Mod. Phys.* **A3**, 299.
51. *Jevicki A.* (1987), Three lectures on string field theory, Lectures presented at Summer Workshop on Particle Physics and Cosmology, Trieste, Italy, Jun 29—Aug 7, 1987, Brown Univ. preprint, BROWN-HET-640.
52. *Jimenez F. and Sierra G.* (1988), Quenched string field theory, *Phys. Lett.* **202B**, 58.
53. *Kaku M.* (1988), Why are there two brst string field theories?, *Phys. Lett.* **200B**, 22.
54. *Kaku M. and Lykken J.* (1988), Modular invariant closed string field theory, *Phys. Rev.* **D38**, 3067.
55. *Kaku M.* (1988), Geometric derivation of string field theory from first principles, closed strings and modular invariance, *Phys. Rev.* **D38**, 3052.
56. *Karchev N. I.* (1987), From the first to the second quantized string theory, *Phys. Lett.* **212B**, 158.

57. *Knecht M.* (1987), Witten type interaction of strings with unequal lengths, Orsay preprint, IPNO/TH 87-49.
58. *Krasnikov N. V.* (1987), Quantum field theory with infinite component local fields as an alternative to the string theories, *Phys. Lett.* **195B**, 377.
59. *Kugo T., Kunitomo H. and Suehiro K.* (1987), BRV invariance of string vertex on general ghost vacuum, *Prog. Theor. Phys.* **78**, 923.
60. *Kugo T.* (1987), Lorentz transformation in the light cone gauge string field theory, *Prog. Theor. Phys.* **78**, 690.
61. *Kugo T., Kunitomo H. and Suehiro K.* (1989), Nonpolynomial closed string field theory, Kyoto preprint, KUNS-965.
62. *Kugo T. and Terao H.* (1988), New gauge symmetries in Witten's Ramond string field theory, *Phys. Lett.* **208B**, 416.
63. *Leblanc Y.* (1987), String field theory at finite temperature, *Phys. Rev.* **D36**, 1780.
64. *Lechtenfeld O. and Samuel S.* (1988), Gauge-invariant modification of Wittens's open superstring, *Phys. Lett.* **B213**, 431.
65. *Manes J. L.* (1988), An anomalous transformation in string field theory, *Nucl. Phys.* **B303**, 305.
66. *Mansfield P.* (1988), The closed strings in Witten's open string field theory, *Nucl. Phys.* **B317**, 187.
67. *Morris T. R.* (1988), From first to second quantized string theory, *Phys. Lett.* **202B**, 222.
68. *Morrow-Jones J.* (1987), Lorentz transformations as in ner derivations in string field theory and the associativity anomaly revisited, *Nucl. Phys.* **B296**, 313.
69. *Neveu A. and West P.* (1987), Group theoretic approach to the perturbative string S matrix, *Phys. Lett.* **193B**, 187.
70. *Neveu A. and West P.* (1988), Group theoretic approach to the open bosonic string multiloop S matrix, *Commun. Math. Phys.* **114**, 613.
71. *Nojiri M. and Nojiri S.* (1987), A gauge invariant action containing both open and closed string fields, *Prog. Theor. Phys.* **79**, 284.
72. *Oh Ph.* (1987), Coset representation of closed loop space in string field theory, *Phys. Lett.* **196B**, 336.
73. *Ohrndorf T.* (1987), Witten's string field theory on a hyperelliptic curve, *Phys. Lett.* **203B**, 55.
74. *Ohrndorf T.* (1988), From conformal quantum mechanics on bordered Riemann surfaces to covariant string field theory, *Nucl. Phys.* **B301**, 460.
75. *Potting R. and Taylor C.* (1989), The midpoint transformation in Witten's string field theory, *Nucl. Phys.* **B316**, 59.
76. *Preitschopf C. R.* (1987), Oct 1987. The gluing theorem in the operator formulation of string field theory, Maryland Univ. preprint, UMD-EPP-88-087.
77. *Rakowski M. and Thompson G.* (1987), On the associativity anomaly in open string field theory, *Phys. Lett.* **B197**, 339.
78. *Ramond P., Rodgers V. G. J. and Viswanathan R. R.* (1987), The explicit gauge invariance of the free closed bosonic strings and open fermionic string, *Nucl. Phys.* **B293**, 293.
79. *Redlich A. N.* (1987) Gauge fixing in string field theory using the Polyakov path integral, *Nucl. Phys.* **B304**, 129.
80. *Romans L. J.* (1987), Operator approach to purely cubic string field theory, *Nucl. Phys.* **B298**, 369.
81. *Saadi M. and Zwiebach B.* (1989), Closed string field theory from polyhedra. MIT preprint, MIT-CTP-17.
82. *Sakai K.* (1988), Off-shell amplitude in Witten's bosonic string field theory. *Prog. Theor. Phys.* **80**, 294.

83. *Samuel S.* (1987), Introduction to string field theory. City Coll., N. Y., preprint, CCNY-HEP-87/9.
84. *Samuel S.* (1987), Covariant off-shell string amplitudes, *Nucl. Phys.* **B308**, 285.
85. *Sathiapalan B.* (1987), The off-shell vertex in conformal field theory and string field theory, *Phys. Lett.* **201B**, 454.
86. *Samuel S.* (1988). Mathematical formulation of Witten's superstring field theory, *Nucl. Phys.* **B296**, 187.
87. *Sazdovic B.* (1987), Equivalence of different formulations of the free Ramond string field theory, *Phys. Lett.* **195B**, 536.
88. *Shapiro J. A. and Thorn C. B.* (1987), BRST invariant transitions between closed and open strings, *Phys. Rev.* **D36**, 432.
89. *Shapiro J. A. and Thorn C. B.* (1987), Closed string — open string transitions and Witten's string field theory, *Phys. Lett.* **194B**, 43.
90. *Shapiro J. A.* (1987), Closed strings and Witten's string field theory, Rutgers Univ. preprint, RU-87-46, 1.
91. *Siopsis G.* (1987), Hamiltonian formulation of string field theory, *Phys. Lett.* **195B**, 541.
92. *Strominger A.* (1987), Closed string field theory, *Nucl. Phys.* **B294**, 93.
93. *Strominger A.* (1987), Lectures on closed string field theory, Delivered at ICTP School on Superstrings, Trieste, Italy, Apr 1—15, 1987, Princeton, Advanced Study Inst. preprint, IASSNS-HEP-87/28.
94. *Srednicki M. and Woodard R. P.* (1987), A world sheet regularization for Witten's string field theory, *Phys. Lett.* **196B**, 55.
95. *Thorn C. B.* (1987), Calculations in perturbative field theory, in Proc. of Conf. Perspectives in String Theory, Copenhagen, Denmark, Oct 12—16, 1987.
96. *Thorn C. B.* (1989), String field theory, *Phys. Rept.* **175**, 1.
97. *Uehara S.* (1987), On the covariantized light cone string field theory, *Phys. Lett.* **190B**, 76.
98. *Uehara S.* (1987), On the «covariantized light cone» string field theory. 2, *Phys. Lett.* **196B**, 47.
99. *Yoneya T.* (1987), String coupling constant and dilaton vacuum expectation value in string field theory, *Phys. Lett.* **197B**, 76.
100. *Wendt C.* (1989), Scattering amplitude for Witten's open superstring field theory, *Nucl. Phys.* **B314**, 209.
101. *Zwiebach B.* (1988), A note on covariant Feynman rules for closed strings, *Phys. Lett.* **B213**, 25—29.
102. *Zwiebach B.* (1988), Constraints on covariant theories for closed string fields, *Ann. Phys.* **186**, 111.
103. *Zwiebach B.* (1988), Closed string couplings with modular properties, *Nucl. Phys.* **B317**, 147.

Предметный указатель

- Аксиомы 410—414
 Аналоговая модель 197
 Аномалии Адлера — Белла — Джаки-ва 156
 — в теории суперструн 165—167
 — глобальные 55, 158
 — гравитационные 184, 362—365
 — калибровочные 160
 — неориентируемой диаграммы 180
 — планарной диаграммы 170
 — полевая теория 158—161
 — смешанные 365, 478
 — сокращение 366, 380
 — $SO(16) \times SO(16)$ -теория 387, 390
 — супергравитация типа I 380
 — — — II 381
 — условие Весса—Зумино 371, 373
 Аномальные диаграммы Фейнмана 367
 Антисимметричные тензорные поля 407
 — — — второго ранга 183
 Атьи—Зингера теорема 401, 422
- Бетти числа 313, 317, 427
 Бианки тождества 311, 451
 Бранса—Дикке скалярное поле 356
- Векторные расслоения 304
 — — голоморфные 494—497
 — — $U(1)$ 322
 Великое объединение 542—559
 Вершинный оператор 14—16
 Вершины взаимодействия 209
 Вильсона петли 533, 543
 Внешняя производная 418
 Волновые операторы 391
- Гамильтониан 201, 203, 262
 Гаусса—Бонне—Черна теорема 422
 Гауссов интеграл 20
 Гетеротические струны 114
 Глобальные симметрии 559—570
 Голоморфная функция 460
 Голоморфные координаты 457
 Голономия 453, 476
 Гомотопия 307
 Гравитационное поле 528—531
 Гравитино 450
 Гравитон 431
 Грина функция 23, 70, 74, 205, 245
 Группа диффеоморфизмов 53
 GSO-проекция 125—134
 — обобщение 132—134
- Действие в ОТО 352
 — — — с фермионами 353
 — низкоэнергетическое эффективное 331
 — обобщенное Максвелла 312
 Дельта-функционал 267
 де Рама теорема 314
 Дилатино 450
 — нарушение суперсимметрии 352
 Дилатон 29, 31, 450
 Дилатонные головастики 185
 Дирака индекс 398—403, 424—426, 548
 — монополь 425
 — оператор 398, 418, 424
 — уравнение 424
 Дифференциальные формы 309—322
 — — гармонические 317
 — — как безмассовые поля 393
 Дольбо космологии 487, 507
 — операторы 469
 Дональдсона—Уленбек—Яу уравнение 497

- Древесные амплитуды 67, 222, 232, 249
 Дробные электрические заряды 554
 Духи 21
- Иерархии проблема 356, 397
 Инстантон 308
 Инстантонное число 325
 Интеграл по импульсу 19, 50
 — — траектории 197
- Калаби—Яу метрика 477
 Калибровочные поля 302—309
 — функции 306
 Калуцы—Клейна теория 431, 435
 Касательное пространство 293
 — расслоение 302—304
 — — голоморфное 500
 Квантование электрического заряда 554
 Квантовая теория гравитации 64
 Квинтика 467, 524
 Киллинга векторы 432
 — уравнение 431
 Киральная асимметрия 397, 403
 Киральность в $4k+2$ измерениях 159
 — — 10 измерениях 398
 Ковариантная производная 293
 Когомологии де Рама 314, 490
 — Дольбо 487—489
 — — число Ходжа 492
 — разложение Ходжа 489
 Кольцо когомологий 318
 Компактификация 105—109
 — калибровочной симметрии 433
 — на орбиформе 139
 — — тор 105
 — появление модулей 436
 Комплексная структура 459
 Комплексное проективное пространство 463, 473
 — — — гиперповерхности 465
 — — — метрика 473
 Комплексные многообразия 455—467
 — — деформации 511—513
 — — разветвленные накрытия 515
 Константа связи гравитационная 228, 350
 — — Янга—Миллса 111
 Конформная инвариантность 26
 — — нарушение 173
 Конформное отображение 223, 285
 — — якобиан 286
- Корреляционная функция 23, 33
 Космологическая постоянная 63—66, 356, 571
 Кросс-канал 31
 Кэлера потенциал 470
 Кэлера метрика 468
 — форма 455
 Кэлера многообразия 467—476
 — — аффинная связность 470
 — — оператор Дирака 484
 — — риччи-плоские 476
 — — тензор Римана 471
 Кюннета формула 320
- Лапласиан 277, 316
 — вычисление детерминанта 277
 — Лихнеровича 530
 — Ходжа—де Рама 316
 Лист Мёбиуса 13, 34, 38, 95
 Лиувилевские моды 44
 Лоренца генераторы 263
 — преобразование 165, 293
 Лоренц-инвариантность 165
- Магнитные монополи 307, 312
 Масштабная инвариантность 352—355
 Метод когерентных состояний 19
 Многообразия замкнутые 314
 — комплексные 455—467
 — кэлеравы 467
 — параллелизуемые 296
 — римановы 462
 — с группой голономии $SU(3)$ 453
 — — — $SU(N)$ 481
 — характеристические классы 327
 Модулярная группа 47, 55, 57
 — — генераторы 55
 — — фундаментальная 57
 — инвариантность 53—57, 120, 125, 152
 Модулярные преобразования 54, 80
- Нарушение симметрии 531—539
 — четности 155—157
 Нейенхейса тензор 457
 Неймана коэффициенты 238—240
 Нелинейная сигма-модель 343, 415
 Неориентируемые диаграммы 34—39, 95
 — поверхности 13
 Неперенормировки теорема 579
 Непланарные диаграммы 13

- Нулевые моды 149, 394, 405
 — операторы Дирака 509
Ньюлендера—Ниренберга теорема 462
- Однопетлевые амплитуды 9—154
 — — для замкнутых струн 45—66
 — — — открытых струн 9—44
 — — неориентируемые диаграммы 34
 — — планарные диаграммы 14
 Оператор внешнего дифференцирования 309
 — твиста 34
 — эволюции 28
- Параллельный перенос 453, 472
Паули—Вилларса метод 171
 Перенормировка 59, 208
Печая—Куинна симметрия 414
 Планарные диаграммы 13—21, 89
Понтрягина класс 324—328
 — числа 327
 Почти комплексные структуры 456
 Проективная плоскость 72
 Пропагатор открытой бозонной струны 14
 — — — вклад духов 20
 — с твистом 35
 — свободной струны 199
 — фермионный 166
Пуанкаре дуальность 319
 — лемма 311
Пуассона формула 81
- Разложение по нормальным модам 108
 — — — на решетке 203
Рариты—Швингера оператор 405
 — — поле 394, 405
 Распад протона 545, 552, 570
 Расходимость 59
 Регуляризация 160
 — метод *Паули—Вилларса* 171
 — планарной диаграммы 171
 Решеточное обрезание 202
Римана—Роха теорема 493
 Римановы поверхности 7, 328, 462, 499
 RNS-формализм 124—132
R-симметрия 562
- Сингулярность 23, 24, 58, 98
 — нормальная пороговая 24
- $SL(2, Z)$ группа 54, 55
 $SO(16)$ группа 141
 $SO(16) \times SO(16)$ группа 142—145, 149
 — теория 145—148
 Сокращение расходимостей 188
CP-инвариантность 369, 560
 Спиновая связность 293—295, 521
 Спинорные структуры 298—301
 — — GSO-проекция 300
 Спиноры 291
Стокса теорема 314
 Струны с твистами 140—145
 Супергравитация 333—351, 380
 Суперзаряд 259—262
 Суперпотенциал 571—575
 Суперпуанкаре-генераторы 259
 Суперсимметрия 262, 264—266, 448
 — нарушение 352, 450
- Тахион 31
Тейхмюллера параметры 463
 Тетрада 293—295
 Тор 46—52, 105, 115
- Ультрафиолетовые расходимости 25—27, 62
 Унитарность 9—11, 24
- Флуктуации гравитационного поля 528
Фубини—Штуди метрика 474
 Функциональный интеграл 215—219
 — — $SU(4) \times U(1)$ -формализм 255—258
- Характеристические классы 322
 — — неабелев случай 324
Хиггса поля 393, 542
 Хиггсов дублет 448
 Хиггсовы бозоны 404
Хирцбруха сигнатура 421
Ходжа разложение 489—492
 — числа 492, 493
- Чана—Патона* множитель 167
Черна классы 322—326
 — — для $SU(N)$ -голономии 477
 — — *Саймонса* форма 324, 328, 372

- — — янг-миллсова и лоренцева 412
 Эйлера характеристика 327—329, 422, 493
 — — кэлерава многообразия 493
 Эффективное действие 331—389
- Шапиро—Вирасоро* модель 251
Шварца—Кристоффеля преобразование 224
 Шестиугольные диаграммы 167
- Эйлера* класс 326—328
- Юкавские взаимодействия 318, 568
- Якоби* функции 78
 Якобиан 286, 287
Янга—Миллса уравнения 494—499