

SUPERSTRING THEORY

Volume 1

Introduction

Michael B. Green

Queen Mary College, University of London

John H. Schwarz

California Institute of Technology

Edward Witten

Princeton University

Cambridge University Press

Cambridge

New York New Rochelle Melbourne Sydney

М.Грин, Дж.Шварц, Э.Виттен

Теория суперструн

В двух томах

Том 1

Введение

Перевод с английского
С. И. Азакова и П. Б. Медведева
под редакцией И. Я. Арефьевой



Москва «Мир» 1990

Оглавление

Предисловие редакторов перевода	5
Предисловие	8
1. Введение	10
1.1. На заре дуальных моделей	10
1.1.1. Амплитуда Венициано и дуальность	16
1.1.2. Высокоэнергетическое поведение модели Венициано	20
1.1.3. Ответвления модели Венициано	22
1.2. Дуальные модели всего сущего	23
1.2.1. Дуальность и гравитон	24
1.2.2. Объединение в высших размерностях	25
1.2.3. Суперсимметрия	27
1.3. Теория струн	29
1.3.1. Точечная безмассовая частица	29
1.3.2. Обобщение на струны	33
1.3.3. Уравнения связей	35
1.4. Взаимодействия струн	40
1.4.1. Расщепление струн	42
1.4.2. Вершинные операторы	46
1.4.3. Применение вершинных операторов	49
1.4.4. Вычисление амплитуды рассеяния	53
1.4.5. Масса гравитона	55
1.5. Другие аспекты струнной теории	57
1.5.1. Гравитационные тождества Уорда	57
1.5.2. Открытые струны	61
1.5.3. Внутренние симметрии открытых струн	63
1.5.4. Восстановление амплитуды Венициано	65
1.5.5. Сравнение с КХД	67
1.5.6. Унитарность и гравитация	68
1.6. Заключение	72
2. Свободные бозонные струны	73
2.1. Классическая бозонная струна	73
2.1.1. Струнное действие и его симметрия	75
2.1.2. Свободная струна в пространстве Минковского	77
2.1.3. Ковариантная фиксация калибровки и уравнения поля в классической теории	79
2.2. Квантование — старый ковариантный подход	91
2.2.1. Коммутационные соотношения и разложение по модам	91
2.2.2. Алгебра Вирасоро и физические состояния	96
2.2.3. Вершинные операторы	104

2.3. Квантование в калибровке светового конуса	112
2.3.1. Калибровка светового конуса и алгебра группы Лоренца	112
2.3.2. Построение поперечных физических состояний	120
2.3.3. Теорема об отсутствии духов и алгебра, порождающая спектр	123
2.3.4. Анализ спектра	135
2.3.5. Асимптотические формулы для плотности уровней	138
2.4. Резюме	141
3. Современное ковариантное квантование	143
3.1. Ковариантное квантование методом функциональных интегралов	143
3.1.1. Духи Фаддеева — Попова	144
3.1.2. Комплексное тензорное исчисление на мировой поверхности	147
3.1.3. Квантование духов	150
3.2. Квантование BRST	153
3.2.1. Построение BRST-заряда	154
3.2.2. Ковариантное вычисление аномалии Вирасоро	162
3.2.3. Аномалии Вирасоро, конформные и гравитационные аномалии	167
3.2.4. Бозонизация духовых координат	172
3.3. Глобальные свойства мировой поверхности струны	180
3.4. Струны в фоновых полях	190
3.4.1. Введение фоновой пространственно-временной метрики	190
3.4.2. Вейлевская инвариантность	192
3.4.3. Конформная инвариантность и уравнения движения	198
3.4.4. Поправки к общей теории относительности, вытекающие из теории струн	205
3.4.5. Включение других мод	205
3.4.6. Среднее дилатона и константа взаимодействия струн	209
3.5. Резюме	212
4. Суперсимметрия мировой поверхности в теории струны	213
4.1. Классическая теория	214
4.1.1. Глобальная суперсимметрия мировой поверхности	217
4.1.2. Суперпространство	218
4.1.3. Уравнения связей	223
4.1.4. Граничные условия и разложения по модам	226
4.2. Квантование — старый ковариантный подход	229
4.2.1. Коммутационные соотношения и разложения по модам	229
4.2.2. Супералгебра Вирасоро и физические состояния	232
4.2.3. Вершинные операторы, описывающие испускание бозонов	236
4.3. Квантование в калибровке светового конуса	240
4.3.1. Калибровка светового конуса	240
4.3.2. Теорема об отсутствии духов и алгебра, порождающая спектр	244
4.3.3. Условие GSO	249
4.3.4. Локально суперсимметричная форма действия	256
4.3.5. Суперструнное действие и его симметрии	261
4.4. Современное ковариантное квантование	264
4.4.1. Духи Фаддеева — Попова	264
4.4.2. BRST-симметрия	268
4.4.3. Ковариантное вычисление аномалии в алгебре Вирасоро	269
4.5. Расширенная суперсимметрия на мировой поверхности	270
4.5.1. Теория с $N = 2$	271
4.5.2. Теория с $N = 4$	276
4.6. Резюме	277
Приложение 4.A. Суперсимметричные теории Янга — Миллса	277

5. Пространственно-временная суперсимметрия в теории струн	281
5.1. Классическая теория	281
5.1.1. Суперчастица	282
5.1.2. Суперсимметричное действие струны	285
5.1.3. Локальная фермионная симметрия	288
5.1.4. Суперструны типа I и типа II	290
5.2. Квантование	292
5.2.1. Калибровка светового конуса	293
5.2.2. Супералгебра Пуанкаре	299
5.3. Анализ спектра	303
5.3.1. Открытые суперструны	303
5.3.2. Замкнутые суперструны	311
5.4. Некоторые замечания о ковариантном квантовании	313
5.5. Резюме	315
Приложение 5.A. Свойства групп $SO(2n)$	316
Приложение 5.B. Алгебра Клиффорда для группы $\text{spin}(8)$	322
6. Неабелева калибровочная симметрия	325
6.1. Открытые струны	326
6.1.1. Метод Чана — Патона	326
6.1.2. Допустимые калибровочные группы и представления	333
6.2. Алгебра токов на мировой поверхности струны	335
6.3. Гетеротическая струна	342
6.3.1. Теория с группой $SO(32)$	344
6.3.2. Теория $E_8 \times E_8$	350
6.4. Компактификация на торы	354
6.4.1. Компактификация на окружность	356
6.4.2. Фермионизация	358
6.4.3. Гетеротическая струна в бозонизованном виде	361
6.4.4. Представление вершинными операторами	368
6.4.5. Формулы для коциклов	375
6.4.6. Полная алгебра токов	376
6.4.7. Решетки для групп E_8 и $\text{spin}(32)/Z_2$	377
6.4.8. Спектр гетеротической струны	379
6.5. Резюме	383
Приложение 6.A. Некоторые сведения о группе E_8	384
Приложение 6.B. Модулярные формы	391
7. Древесные амплитуды	393
7.1. Открытые бозонные струны	395
7.1.1. Структура древесных амплитуд	396
7.1.2. Отщепление духовых состояний	403
7.1.3. Циклическая симметрия	405
7.1.4. Примеры	413
7.1.5. Калибровочная инвариантность на уровне древесных диаграмм	417
7.1.6. Оператор твиста	419
7.2. Замкнутые бозонные струны	421
7.2.1. Построение древесных амплитуд	421
7.2.2. Примеры	424
7.2.3. Связь с древесными диаграммами для открытых струн	432
7.3. Суперструны в формулировке RNS	434
7.3.1. Амплитуды открытой струны в бозонном секторе	434
7.3.2. Картина F_1	437
7.3.3. Примеры	440

7.3.4. Древесные амплитуды с одной фермионной линией	443
7.3.5. Вершина испускания фермиона	445
7.4. Суперструна в суперсимметричной формулировке	457
7.4.1. Вертексы для безмассовых частиц	458
7.4.2. Деревья для открытых струн	464
7.4.3. Деревья для замкнутой суперструны	469
7.4.4. Деревья гетеротической струны	470
7.5. Резюме	476
Приложение 7.A. Метод когерентных состояний и корреляционные функции	477
Библиография	482
Литература	492
Комментарии к литературе, добавленной при переводе	513

УВАЖАЕМЫЙ ЧИТАТЕЛЬ!

Ваши замечания о содержании книги, ее оформлении, качестве перевода и другие просим присылать по адресу: 129820, Москва, И-110, ГСП, 1-й Рижский пер., 2, издательство «Мир».

ББК 22.31
Г85
УДК 53 + 51

Грин М., Шварц Дж., Виттен Э.

Г85 Теория суперструн: В 2-х т. Т. 1. Введение: Пер. с англ. — М.: Мир, 1990. — 518 с., ил.

ISBN 5-03-001565-5

Первый том двухтомной монографии известных специалистов (Англия, США), посвященной наиболее передовой области современной математической физики. Теория суперструн — это синтез глубоких идей теоретической физики и ряда разделов современной математики. В ней частью решены, частью намечены пути решения фундаментальных задач единой теории элементарных частиц и гравитации. Материал тщательно отобран и включает наряду с теоретическими результатами обсуждение экспериментальных результатов.

Для математиков и физиков разных специальностей, аспирантов и студентов университетов.

Г 1602080000-346 16-90
041 (01)-90

ББК 22.31

Редакция литературы по математическим наукам

ISBN 5-03-001565-5 (русск.)
ISBN 5-03-001567-1
ISBN 0-521-35752-7 (англ.)

© Cambridge University Press 1987.
This book was originally published in the English language by Cambridge University Press of Cambridge, England
© перевод на русский язык, С. И. Азаков, П. Б. Медведев, 1990

Предисловие редакторов перевода

Теория суперструн — это современный вариант единой теории фундаментальных взаимодействий, иногда ее даже называют теорией всего сущего. Стремление создать такую теорию пронизывает всю историю науки — от пифагорейцев до Ньютона и Лейбница и далее Римана, Вейля, Эйнштейна и Гейзенберга. Не очевидно, что на пути к этой цели вообще возможны какие бы то ни было успехи. Тем более поразительными выглядят замечательные достижения теории суперструн — вычисление размерности пространства-времени, фиксация определенной калибровочной группы, включение в единую схему теории гравитации и, по-видимому, отсутствие расходимостей.

Струна — это кривая в пространстве, поэтому теория струн — это теория кривых, т. е. протяженных объектов, в отличие от обычной квантовой теории поля, которая описывает точечные объекты. С течением времени струна замечает некоторую поверхность, действие для струны вводится очень естественно — это просто площадь замечаемой поверхности. Взаимодействие струн также вводится очень естественным геометрическим образом — оно связано с процессами разрыва и слипания струн. Для разработки этих простых исходных идей потребовался весьма изощренный математический аппарат, включая теорию римановых поверхностей, теоремы об индексе, некоммутативную геометрию и др. В теории суперструн осуществился синтез разнообразных идей и методов теоретической и математической физики.

Предлагаемая читателю двухтомная монография М. Грина, Дж. Шварца и Э. Виттена «Теория суперструн» содержит как изложение физических идей, лежащих в основе теории струн, так и соответствующих математических методов. Эта книга, являясь настольной для специалистов, может служить также учебником для первоначального чтения по теории струн.

Авторы книги — одни из создателей современной теории суперструн. Именно знаменитая работа Майкла Грина и Джона Шварца 1984 г. о сокращении аномалий для выделенных калибровочных групп послужила поворотным пунктом в развитии

теории струн — после этой работы теория струн стала рассматриваться как кандидат на единую теорию всех взаимодействий элементарных частиц. Эдвард Виттен внес важнейший вклад в дальнейшую разработку теории работами по спонтанной компактификации и полевой теории струн.

Книга написана с большим мастерством, в значительной степени изложение следует парадоксальной истории теории струн, которая удивительным образом началась с известного результата — амплитуды Венециано, и которая изобилует чудесными открытиями и замечательными совпадениями. Для начинающего физика-теоретика будет поучительно проследить за подчас противоречивым развитием идей в одной из наиболее интригующих областей теоретической физики, непосредственно связанной со структурой пространства-времени и природой фундаментальных сил, а сложившийся математик может найти для себя новые постановки задач. Для чтения книги полезно знакомство с основами квантовой теории поля по известным монографиям Н. Н. Боголюбова и Д. В. Ширкова «Квантованные поля» и А. А. Славнова и Л. Д. Фаддеева «Введение в квантовую теорию калибровочных полей», а также с соответствующими разделами книги: Б. А. Дубровина, С. П. Новикова и А. Т. Фоменко «Современная геометрия».

Сделаем еще несколько замечаний. Теория струн затрагивает самые глубокие вопросы мироздания и является наиболее разработанной современной попыткой ответа на вопросы о природе фундаментальных взаимодействий. Однако, несмотря на огромный интерес к теории и замечательные достижения, следует сказать, что основные проблемы здесь остаются открытыми. С физической точки зрения главная проблема — отсутствие экспериментальных предсказаний. Мы можем надеяться вложить всю информацию об элементарных частицах в теорию суперструн, но сама теория струн не дала пока никаких экспериментальных предсказаний. С математической точки зрения остается проблема доказательства отсутствия расходимостей, хотя бы в рамках теории возмущений. Также остается нерешенной фундаментальная задача построения адекватной математической формулировки в духе полевой теории струн вне рамок теории возмущений.

Теория струн основана на стандартном представлении о пространстве-времени как гладком вещественном многообразии. Поэтому имеются проблемы, которые она не может решить в принципе, в частности, проблемы, связанные с процессами на очень малых, так называемых планковских расстояниях, например, в окрестности космологической сингулярности и при гравитационном коллапсе, где неприменимы обычные представления современной теоретической физики, включая и квантовую гравита-

цию. На планковских масштабах происходят флуктуации метрики, топологии и, возможно, даже флуктуации числового поля, геометрия становится неархимедовой. Подход к описанию этих явлений разрабатывается в рамках теории p -адических струн.

Имея в виду все открытые проблемы теории струн, все же можно утверждать, что будущие попытки продвинуться в понимании природы фундаментальных взаимодействий так или иначе будут учитывать достижения этой теории.

Предлагаемая читателю монография содержит изложение принципиальных результатов, которые без сомнения будут оказывать влияние на дальнейшее развитие математики и физики, причем включая не только их абстрактные разделы, но также и теорию дифференциальных уравнений, статистическую физику, физику твердого тела, биофизику и др.

При работе над переводом редакторы и переводчики старались сохранить живой разговорный язык книги, исправлен ряд замеченных опечаток. К списку литературы в основном добавлены ссылки на обзоры 1988—1989 гг., отражающие основные направления дальнейшего развития, а также литература по полевой теории струн. Один из редакторов (И. А.) искренне благодарит доктора Гупта из Калтеха за помощь в составлении этого списка с использованием слаковской базы данных Spire search.

Теребляно
Январь, 1990 г.

И. Арефьева
И. Волович

Предисловие

В последние годы оживились исследования по теории струн, которая привлекала к себе внимание с момента ее зарождения около двадцати лет назад. Как нам кажется, широко ощущается необходимость в систематическом и пригодном для учебных целей изложении современного состояния знаний о струнной теории. Мы надеемся, что данная книга поможет удовлетворить эту потребность. Дать исчерпывающие сведения о таком бурно развивающемся направлении, каким является струнная теория, вряд ли возможно даже в двух столь объемистых томах, которые у нас получились. Конечно, нам пришлось опустить многие важные вопросы, а другие изложить лишь вкратце. Полевая теория струн нами вообще не рассматривается (хотя гл. 11 тесно связана с полевой теорией струн в калибровке светового конуса). Изложение конформной теории поля не является систематическим, хотя в гл. 3 и других местах содержится основной материал, необходимый для понимания последних работ по этому предмету. Рассматривая распространение струны в фоновых полях, мы ограничиваемся только бозонной теорией, а многопетлевые диаграммы обсуждаются только в самых общих чертах и на элементарном уровне. Эти пропуски отражают сочетание человеческой слабости со стремлением удержать объем двух томов: настоящей книги в пределах 1000 страниц.

Мы надеемся, что эти два тома окажутся полезными широкому кругу читателей, начиная с тех, кем движет простое любопытство, и кончая теми, кто действительно желает проводить исследования в области теории струн. В первом томе, для чтения которого требуется знать только основные положения физики частиц и квантовой теории поля, дается детальное введение в основные идеи струнной теории. Мы намеревались сделать этот том замкнутым. Второй том затрагивает ряд более сложных тем, включая исследование однопетлевых амплитуд, низкоэнергетической эффективной теории поля и аномалий. В нем содержится также обширный материал математического характера по диф-

ференциальной и алгебраической геометрии и намечены возможные его приложения к феноменологии.

Нам кажется, что оба этих тома могут быть использованы в качестве учебников для чтения спецкурсов. Количество материала, вероятно, превышает объем, который можно изложить в течение одного года. Это позволяет преподавателю выделить те темы, которые он или она считает особенно важными, и опустить остальные. Несмотря на наши большие усилия, наверняка в тексте осталось значительное число опечаток, непоследовательностей в обозначениях и прочих ошибок. Мы будем признательны за любые замечания, которые позволят нам внести исправления в следующие издания.

Очень полезной для нас оказалась помощь нескольких людей, которых здесь мы имеем возможность поблагодарить. Кайл Гэри проявила большое мастерство и усердие, печатая значительную часть рукописи, а также придумывая, как реализовать требования, предъявляемые к оформлению книг издательством «Кэмбридж юниверсити Пресс», в рамках использованной нами системы набора TEX. Марк Горофф воспользовался своими обширными знаниями в области вычислительных систем, с тем чтобы помочь решить массу проблем, возникших в ходе этой работы. С вычислительными системами нам также помогли Пол Киберд и Вадим Каплуновски. Патриция Мойл Шварц составила указатель и сделала полезные замечания относительно рукописи. Харви Ньюмен подготовил каналы связи, позволившие нам передавать файлы между Пасаденой, Принстоном и Лондоном. Джудит Уолрих помогла составить библиографию. Полезная критика и замечания к тексту были высказаны Чедомиром Кринковичем, Чиарой Наппи, Райаном Ромом и Ларри Ромэнсом.

Мы хотим посвятить эту книгу нашим родителям.

1986

*Майкл Б. Грин
Джон Г. Шварц
Эдвард Виттен*

1. Введение

1.1. На заре дуальных моделей

В 1900 г., стараясь согласовать теорию с экспериментальными данными, Планк написал свою знаменитую формулу излучения черного тела. Не часто в физике бывает так, чтобы экспериментальная кривая имела прямое отношение к основам теории, обычно они связываются цепочкой более или менее замысловатых вычислений. Однако излучение черного тела оказалось счастливым исключением из этого правила. Аппроксимируя экспериментальные кривые, Планк предложил формулу, которая, как мы все хорошо знаем, непосредственно приводит к понятию кванта.

В шестидесятые годы одной из загадок в физике сильных взаимодействий было открытие все новых и новых сильновзаимодействующих частиц, или адронов. Казалось, что существуют адронные резонансы довольно высокого спина J с квадратом массы наилегчайшей частицы, приблизительно равным $m^2 = J/\alpha'$, где $\alpha' \sim 1$ (ГэВ) $^{-2}$ — константа, известная как наклон реджевской траектории. Такая зависимость была прослежена для частиц со спином до $J=11/2$, и казалось, что ее можно продолжить до бесконечности. Одна из причин, по которой рост числа сильно взаимодействующих частиц был удивительным, состояла в том, что слабые и электромагнитные взаимодействия проявили себя совсем по-другому: известно лишь несколько частиц с малыми массами, не участвующих в сильных взаимодействиях.

Резонансов было так много, что считать их всех фундаментальными представлялось явно неправдоподобным. Во всяком случае, в то время последовательной теории фундаментальных частиц высших спинов не существовало. Последовательная (перенормируемая) квантовая теория поля казалась применимой только для описания частиц со спином нуль, половина и единица, известными примерами были абелевы калибровочные теории, теории скалярного поля и взаимодействия Юкавы. Похоже, что эти ограничения на спин частиц, описываемых после-

довательной квантовой теорией поля, справедливы и сегодня, хотя теперь в число последовательных теорий со спином единица мы включили бы и теорию Янга — Миллса. Очевидное ограничение, состоявшее в применении последовательных квантовых теорий поля только к частицам с низкими спинами, согласовывалось с существованием успешного теоретико-полевого описания электромагнитных взаимодействий, в котором основные частицы обладают спином половина и единица, а также согласовывалось по крайней мере с попытками (которые

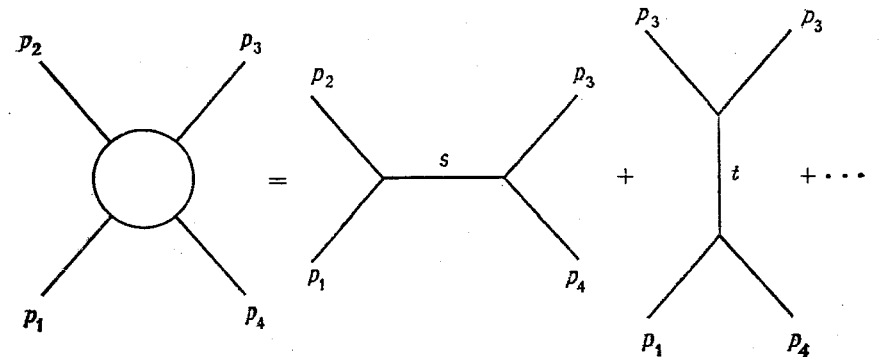


Рис. 1.1. Упругий процесс рассеяния с налетающими частицами с импульсами p_1, p_2 и уходящими частицами с импульсами $-p_3 - p_4$ (мы условимся помечать буквами входящие импульсы.) Приведены диаграммы и в s - и t -каналах. В теории поля амплитуда строится как сумма выражений, соответствующих диаграммам в каналах s и t .

со временем привели к успеху) построить полевые теории слабых взаимодействий. Но подобный подход в теории сильных взаимодействий не представлялся обнадеживающим.

Другая связанная с первой загадка, относящаяся к сильным взаимодействиям, касается высокоэнергетического поведения амплитуд рассеяния. Рассмотрим процесс упругого рассеяния с налетающими бесспиновыми частицами с импульсами p_1 и p_2 и уходящими частицами с импульсами p_3, p_4 . Мы будем пользоваться метрикой с сигнатурой $\{-, +, +, \dots, +\}$, так что квадрат массы частицы $m^2 = -p^2$. Общепринятые переменные Манделстама определяются следующим образом:

$$s = -(p_1 + p_2)^2, \quad t = -(p_2 + p_3)^2, \quad u = -(p_1 + p_3)^2. \quad (1.1.1)$$

Они удовлетворяют тождеству $s + t + u = \sum_i m_i^2$. Мы предположим, что внешние линии на рис. 1.1 соответствуют частицам типа пионов, преобразующимся по присоединенному представлению группы ароматов, которой в случае трех ароматов яв-

ляется группа $SU(3)$ или $U(3)$. Ароматовые квантовые числа i -го мезона, соответствующего внешней линии, специфицируются подбором ароматовых матриц λ_i . Мы обсудим член в амплитуде рассеяния, пропорциональный теоретико-групповому множителю $\text{tr}(\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4)$. Так как этот теоретико-групповой множитель инвариантен относительно циклической перестановки $1234 \rightarrow 2341$, бозе-статистика требует, чтобы соответствующая амплитуда была циклически симметрична при перестановке $p_1 p_2 p_3 p_4 \rightarrow p_2 p_3 p_4 p_1$. В терминах манделстамовских переменных

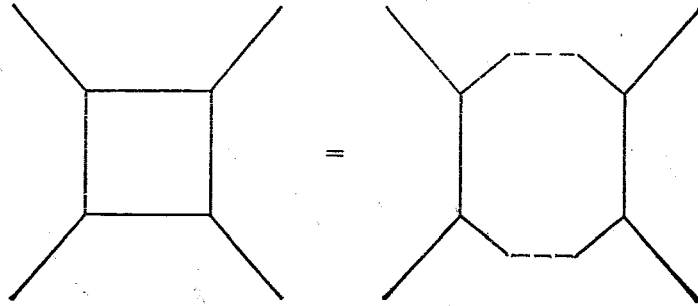


Рис. 1.2. Однопетлевая диаграмма, как здесь указано, может быть получена сшиванием двух древесных диаграмм.

эта перестановка импульсов означает замену $s \leftrightarrow t$, отвечающую симметрии, которой должна будет обладать амплитуда $A(s, t)$.

В квантовой теории поля основной нетривиальный вклад в амплитуду рассеяния дают древесные диаграммы, изображенные на рис. 1.1. Главной причиной того, что трудно построить последовательные квантовые полевые теории частиц высшего спина, является плохое высокоэнергетическое поведение древесных диаграмм с обменом этими частицами. Асимптотически это приводит к выходу за границы, накладываемые унитарностью. Рассмотрим, например, диаграмму в t -канале. Обозначим внешние частицы на рис. 1.1 через ϕ , а частицу, участвующую в обмене, через σ . Если σ имеет нулевой спин, то диаграмма на рис. 1.1 может содержать вершину, соответствующую простому взаимодействию $\phi^* \phi \sigma$; тогда амплитуда есть просто $A(s, t) = -g^2/(t - M^2)$, где g — константа взаимодействия, а M — масса частицы σ . Эта амплитуда обращается в нуль при $t \rightarrow \infty$, что является одним из аспектов очень хорошего высокоэнергетического поведения рассматриваемого кубического скалярного взаимодействия.

Предположим теперь, что частица σ описывается полем $\sigma^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_J}$ со спином J . Для такого поля кубическим взаимодей-

ствием на рис. 1.1 должно быть нечто похожее на $\phi^* \overset{\leftrightarrow}{\partial}_{\mu_1} \overset{\leftrightarrow}{\partial}_{\mu_2} \dots \dots \overset{\leftrightarrow}{\partial}_{\mu_J} \phi \cdot \sigma^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_J}$. Диаграмме на рис. 1.1 теперь будет соответствовать выражение, содержащее произведение $2J$ импульсов. Если внешние частицы являются скалярами, то вклад в амплитуду рассеяния от обмена в t -канале частицей со спином J при высоких энергиях имеет вид¹⁾

$$A_J(s, t) = -\frac{g^2(-s)^J}{t - M^2}. \quad (1.1.2)$$

Поэтому эта амплитуда ведет себя все хуже и хуже (все более и более расходит) для все больших и больших J . Эффективным критерием того, что есть плохое поведение амплитуды, является ответ на вопрос: что произойдет, если мы сошьем вместе амплитуды типа (1.1.2), чтобы получить петли, как, например, это изображено на рис. 1.2? Подынтегральное выражение, соответствующее однопетлевому вкладу в пространстве-времени размерности n , приблизительно равно $\int d^n p A^2/(p^2)^2$, где A — древесная амплитуда, определенная формулой (1.1.2). В четырехмерии такая петлевая диаграмма сходится, если $J < 1$, имеет потенциально перенормируемую логарифмическую расходимость при $J = 1$ и неприятную перенормируемую расходимость при $J > 1$.

Имеются сильно взаимодействующие частицы с разными массами и спинами, за счет которых может происходить обмен в t -канале, так что амплитуду в t -канале мы должны записать в общем виде

$$A(s, t) = -\sum_J \frac{g_J^2(-s)^J}{t - M_J^2}, \quad (1.1.3)$$

где теперь допускается возможность зависимости константы взаимодействия g_J и массы M_J обменных частиц от J (и, возможно, от других квантовых чисел, нами не указанных). Конечно, можно принять такую точку зрения, что сильные взаимодействия столь сильны, что борновское приближение, использованное в (1.1.3), неприменимо. Но будем оптимистами и по-

¹⁾ Такого поведение древесной амплитуды рассеяния в асимптотической области больших s и фиксированных t . Поведение вида s^J легко получить, сворачивая импульсы, возникающие в вершинах взаимодействия, изображенных на рис. 1.1. Точная формула (при промежуточных значениях s) сложнее и содержит полиномы Лежандра $P_J(\cos \theta_t)$ (θ — угол рассеяния в системе центра масс в t -канале). Мы предпочитаем записывать только формулу высокоэнергетического поведения, которая достаточно проста и вполне подходит для наших целей.

смотрим, как далеко мы можем продвинуться. Каково высокоэнергетическое поведение суммы в (1.1.3)? Если эта сумма *конечна*, то высокоэнергетическое поведение определяется просто адроном с наивысшим спином J , дающим вклад в (1.1.3). Это сильно отличается от того, что наблюдается в природе; истинное высокоэнергетическое поведение амплитуд адронного рассеяния намного более плавное, чем поведение каждого отдельного слагаемого в (1.1.3). (Реджевское асимптотическое поведение типа описанного в разд. 1.1.2 в действительности является довольно разумным приближением экспериментальных данных.) С другой стороны, не совсем обоснованно рассматривать (1.1.3) как конечную сумму. Несомненно, что не существует чего-то вроде «адрона наивысшего спина». Если же в (1.1.3) мы имеем дело с бесконечной суммой, то вполне возможно, что вся сумма ведет себя при высоких энергиях лучше, чем каждый отдельный член ряда, точно так же, как функция e^{-x} при $x \rightarrow \infty$ меньше любого члена ее разложения в степенной ряд $e^{-x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n/n!$.

Рассмотрение (1.1.3) в качестве бесконечной суммы приводит и к другому следствию. В физическом процессе, таком, как упругое рассеяние пионов, мы ожидаем, что амплитуда рассеяния будет иметь полюса в t -канале, как это и следует из (1.1.3), но мы также ожидаем указаний на существование резонансов в s -канале, или, другими словами, полюсов амплитуды при определенном значении s . Действительно, циклическая симметрия, которую мы ранее обсудили, требует, чтобы коэффициент при $t^0(\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4)$ в амплитуде рассеяния либо имел полюса и в s , и в t -каналах, либо не имел их вовсе. *Конечная* сумма в (1.1.3) определяет амплитуду $A(s, t)$ так, что она не имеет полюсов в s -канале; при фиксированном t (1.1.3) очевидным образом определяет целую функцию от s , если только сумма содержит конечное число слагаемых. Именно по этой причине ряд теории возмущений обычных квантовополевых теорий удовлетворяет кроссингсимметрии за счет включения диаграмм и в s -, и в t -каналах. В случае бесконечной суммы все обстоит не так. Хотя каждое слагаемое в (1.1.3) является целой функцией от s , бесконечная сумма может расходиться при некоторых конечных значениях s , являющихся полюсами в s -канале. Таким образом, как только мы примем, что (1.1.3) является *существенно бесконечным* рядом, становится совсем неочевидным, что члены в s -канале необходимо включать отдельно, они уже неявным образом могут присутствовать в (1.1.3).

Аналогичные замечания можно было бы сделать, если бы мы начали с резонансного рассеяния, или, другими словами,

рассмотрели бы вклады от амплитуд рассеяния с полюсами в s -канале. Мы построили бы амплитуду, аналогичную (1.1.3), но с полюсами в s -, а не в t -канале:

$$A'(s, t) = - \sum_j \frac{g_j^2 (-t)^j}{s - M_j^2}. \quad (1.1.4)$$

Симметрия относительно циклической перестановки внешних импульсов требует, чтобы и в (1.1.4), и в (1.1.3) массы и константы связи были одними и теми же. Исследуя (1.1.4), мы вновь обнаружили бы, что конечная сумма типа (1.1.4) неизбежно вела бы себя при высоких энергиях хуже, чем это наблюдается на самом деле, но если сумма бесконечна, то это могло бы быть и не так. Далее, конечная сумма (1.1.4) несомненно определяла бы (при фиксированном s) целую функцию от t , что опять же несправедливо в случае бесконечной суммы.

Развивая эти мысли, можно представить себе, что при умелом выборе констант связи g_j и масс M_j амплитуды $A(s, t)$ и $A'(s, t)$ в s - и t -каналах могут быть равными. В этом случае полную амплитуду можно записать *либо* как сумму только по полюсам в s -канале, как в (1.1.4), *либо* как сумму только по полюсам в t -канале, как в (1.1.3). Это резко контрастировало бы с ситуацией в теории поля, где обычно требуется сумма полюсов *как в s -, так и в t -каналах*.

В поддержку равенства амплитуд в s - и t -каналах высказывались примерно в 1968 г. Долен, Хорн и Шмидт, утверждавшие на основе приближенного вывода (1.1.3) и (1.1.4) (проведенного с помощью экспериментальных данных), что равенство $A(s, t) = A'(s, t)$ действительно приблизительно выполняется при малых значениях s и t . Это утверждение было названо гипотезой «дуальности», заключающейся в том, что диаграммы в s - и t -каналах дают альтернативное или «дуальное описание» одной и той же физики. Является ли дуальность некоторым приближением или основным принципом? На первый взгляд кажется почти невозможным так выбрать константы связи и массы, чтобы они в точности удовлетворяли условию дуальности $A(s, t) = A'(s, t)$. Однако способ сделать это был найден Венециано в 1968 г. Венециано просто постулировал формулу для амплитуды рассеяния в следующем виде:

$$A(s, t) = \frac{\Gamma(-\alpha(s)) \Gamma(-\alpha(t))}{\Gamma(-\alpha(s) - \alpha(t))}. \quad (1.1.5)$$

Здесь Γ — гамма-функция Эйлера

$$\Gamma(u) = \int_0^{\infty} t^{u-1} e^{-t} dt, \quad (1.1.6)$$

а $\alpha(s)$ — «реджевская траектория», для которой Венециано постулировал линейный вид $\alpha(s) = \alpha(0) + \alpha's$; α' и $\alpha(0)$ известны в теории полюсов Редже соответственно как наклон реджевской траектории и ее интерсепт.

1.1.1. Амплитуда Венециано и дуальность

На первый взгляд не совсем очевидно, что амплитуда Венециано удовлетворяет дуальности, но мы сейчас покажем, что это действительно так. Прежде всего нам необходимо кое-что знать о гамма-функции. Она подчиняется тождеству

$$\Gamma(u+1) = u\Gamma(u). \quad (1.1.7)$$

Чтобы доказать это, нужно начать с (1.1.6) и просто проинтегрировать по частям:

$$\Gamma(u+1) = - \int_0^{\infty} t^u \frac{d}{dt} e^{-t} dt = u \int_0^{\infty} t^{u-1} e^{-t} dt = u\Gamma(u). \quad (1.1.8)$$

Из (1.1.6) очевидно, что $\Gamma(1) = 1$. Если u — положительное целое, то повторное использование (1.1.7) приводит к формуле

$$\Gamma(u) = (u-1)!. \quad (1.1.9)$$

Интегральное представление гамма-функции в (1.1.6) справедливо, если только вещественная часть u положительна, и из него следует, что Γ не имеет особенностей в этой части комплексной u -плоскости. Рекуррентное соотношение (1.1.7) можно использовать для того, чтобы расширить область определения функции Γ и найти ее сингулярности. Записывая (1.1.7) в виде

$$\Gamma(u) = \frac{\Gamma(u+1)}{u}, \quad (1.1.10)$$

мы получаем определение гамма-функции при $\text{Re } u > -1$, так как правая часть (1.1.10) уже определена в этой области. Из уравнения (1.1.10) также следует, что Γ имеет простой полюс в точке $u=0$ с вычетом, равным 1. Эту процедуру можно обобщить; повторное использование (1.1.7) дает

$$\Gamma(u) = \frac{\Gamma(u+n)}{u(u+1)\dots(u+n-1)} \quad (1.1.11)$$

для любого положительного целого n . Правая часть уравнения (1.1.11) однозначно определяется интегральным представлением (1.1.6), если $\text{Re } u > -n$, так что мы получаем однозначное аналитическое продолжение гамма-функции в эту область. Так как n произвольно, гамма-функция фактически имеет однозначное

аналитическое продолжение во всю комплексную плоскость. Из (1.1.11) видно, что единственными особенностями функции Γ являются простые полюсы в точках $u=0, -1, -2, \dots$. Поведение этой функции при значениях u вблизи $-n$ (n — неотрицательное целое число) можно установить из формулы (1.1.11), и оно имеет вид

$$\Gamma(u) \sim \frac{1}{u+n} \frac{(-1)^n}{n!}. \quad (1.1.12)$$

Обсудим теперь аналитическое поведение функции

$$B(u, v) = \frac{\Gamma(u)\Gamma(v)}{\Gamma(u+v)}, \quad (1.1.13)$$

которая называется бета-функцией Эйлера. Амплитуда Венециано выражается через нее следующим образом: $A(s, t) = B(-\alpha(s), -\alpha(t))$. Из (1.1.13) очевидно, что бета-функция имеет простой полюс, когда u или v — неотрицательные целые. Двойные полюсы в (1.1.13) отсутствуют, хотя $\Gamma(u)$ и $\Gamma(v)$ могут одновременно иметь полюсы, так как, если это происходит, то и знаменатель в (1.1.13) в этом случае имеет полюс. Это важный момент, так как в релятивистской квантовой механике древесные амплитуды могут обладать только особенностями, являющимися простыми полюсами. Поведение функции $B(u, v)$ при $v \sim -n$ (n — неотрицательное целое) очевидно:

$$B(u, v) \sim \frac{1}{v+n} \frac{(-1)^n}{n!} (u-1)(u-2)\dots(u-n). \quad (1.1.14)$$

Здесь мы воспользовались формулой (1.1.7), с тем чтобы записать вычет в полюсе $v = -n$ в виде полинома по u ; это снова важный факт, так как вычет в полюсе в релятивистской квантовой механике должен быть полиномом. $B(u, v)$ как функция v при фиксированном u имеет только особенности, указанные в формуле (1.1.14). Мы утверждаем теперь, что бета-функция (для $\text{Re } u > 0$, так что приведенный ниже бесконечный ряд сходится) может быть представлена в виде

$$B(u, v) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{v+n} \frac{(-1)^n}{n!} (u-1)(u-2)\dots(u-n). \quad (1.1.15)$$

Идея здесь состоит в том, что сумма в правой части (1.1.15) воспроизводит все особенности бета-функции, так что эта сумма может отличаться от бета-функции только на целую функцию переменной v , т. е. на функцию без особенностей в комплексной v -плоскости. Такая функция не может обращаться в нуль при больших $|v|$. Так как сумма в правой части (1.1.15) обра-

щается в нуль для положительных u и больших $|v|$ (вне вещественной оси), и мы скоро увидим, что $B(u, v)$ обладает тем же свойством, то они должны быть равны.

Формулу (1.1.15) сразу же можно представить как формулу для амплитуды Венециано:

$$A(s, t) = - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha(s) + 1)(\alpha(s) + 2) \dots (\alpha(s) + n)}{n!} \frac{1}{\alpha(t) - n}. \quad (1.1.16)$$

Хотя амплитуда Венециано в том виде, в каком она была первоначально определена, явно удовлетворяет условию $A(s, t) = A(t, s)$, в форме (1.1.16) эта ее симметрия совсем не очевидна. В силу этой симметрии можно сразу же записать альтернативное выражение

$$A(s, t) = - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha(t) + 1)(\alpha(t) + 2) \dots (\alpha(t) + n)}{n!} \frac{1}{\alpha(s) - n}. \quad (1.1.17)$$

Теперь, взяв «реджевскую траекторию» в простом виде $\alpha(t) = \alpha' t + \alpha(0)$, можно утверждать, что особенности (1.1.16) являются простыми полюсами, соответствующими, как и в (1.1.3), обмену частицами с квадратом массы $M^2 = (n - \alpha(0))/\alpha'$, $n = 0, 1, 2, \dots$ в t -канале. Вычет в полюсе $\alpha(t) = n$ (при линейном выборе реджевской траектории) является полиномом n -го порядка по s , что соответствует с учетом (1.1.3) тому факту, что частицы массы $(n - \alpha(0))/\alpha'$ обладают спином не больше n . Таким образом, квадрат наименьшей возможной массы частицы со спином J равен $(J - \alpha(0))/\alpha'$, и именно по этой причине α' называется «наклоном реджевской траектории»; говорят, что частицы с квадратом массы $M^2 = (J - \alpha(0))/\alpha'$ лежат на «ведущей траектории Редже». Нам интересен случай $\alpha' > 0$, так как в противном случае все или почти все рассматриваемые частицы будут тахионами.

Равенство формул (1.1.16) и (1.1.17) представляет собой на первый взгляд невозможное свойство «дуальности»: одна и та же амплитуда может быть записана либо как сумма по полюсам в s -канале (формула 1.1.17), либо как сумма по полюсам в t -канале (формула 1.1.16).

Единственное, что не является очевидным ни в (1.1.17), ни в (1.1.16), так это знак вычетов в полюсах s - и t -каналов. В формуле (1.1.2) об описывающей обмен частицей со спином J , коэффициент при $-(-1)^J/(t - M^2)$, называемый вычетом в полюсе, должен быть положительным (так как g^2 должно быть положительным). Вообще в релятивистской квантовой теории

вычеты в полюсах должны быть положительными, чтобы выполнялось условие унитарности и отсутствовали духи. Таким образом возникает вопрос: положительные ли вычеты в формулах (1.1.16) и (1.1.17)? Ответ на этот вопрос совсем не очевиден. На начальном этапе многие исследования по дуальным моделям касались его, и в конечном итоге это привело к теореме об отсутствии духов, утверждающей, что духи (или отрицательные вычеты) отсутствуют в теории, если определенные довольно неожиданные ограничения будут наложены на значения $\alpha(0)$ и на размерность пространства-времени. В частности, оказалось, что размерность пространства-времени должна быть равна 26, а константа $\alpha(0)$ в реджевской траектории $\alpha(s) = \alpha's + \alpha(0)$ должна равняться 1. (Эти значения предполагаются теоремой об отсутствии духов, но однозначно ею не определяются.) Мы вернемся к этим темам в следующей главе.

Далее, мы хотим вывести интересное интегральное представление для амплитуды Венециано. Рассмотрим функцию

$$C(u, v) = \int_0^1 dx x^{u-1} (1-x)^{v-1}. \quad (1.1.18)$$

Она удовлетворяет соотношению

$$\begin{aligned} C(u-1, v+1) &= \int_0^1 dx x^{u-2} (1-x)^v = \frac{1}{u-1} \int_0^1 dx \left(\frac{d}{dx} x^{u-1} \right) \times \\ &\times (1-x)^v = \frac{v}{u-1} \int_0^1 dx x^{u-1} (1-x)^{v-1} = \frac{v}{u-1} C(u, v), \end{aligned} \quad (1.1.19)$$

где мы проинтегрировали по частям. Бета-функция в силу (1.1.7) удовлетворяет тому же тождеству $B(u-1, v+1) = \frac{v}{u-1} B(u, v)$. Для функции C имеет место и соотношение

$$\begin{aligned} C(u+1, v) &= \int_0^1 dx x^u (1-x)^{v-1} = \\ &= \int_0^1 dx x^{u-1} (1-x)^{v-1} - \int_0^1 dx x^{u-1} (1-x)^v = \\ &= C(u, v) - C(u, v+1). \end{aligned} \quad (1.1.20)$$

Аналогичное тождество для бета-функции $B(u+1, v) + B(u, v+1) = B(u, v)$ также является следствием формулы (1.1.7). Эти рекуррентные соотношения вместе с одинаковыми

асимптотическим поведением функций $B(u, v)$ и $C(u, v)$ и тем фактом, что они совпадают при $u = v = 1$, приводят на самом деле к тому, что $B(u, v) = C(u, v)$. Поэтому мы получаем следующее интегральное представление для амплитуды Венециано:

$$A(s, t) = \int_0^1 x^{-\alpha(s)-1} (1-x)^{-\alpha(t)-1} dx. \quad (1.1.21)$$

Это интегральное представление играет очень важную роль, так как именно в таком виде амплитуда Венециано обычно возникает в большинстве подходов, используемых для вычисления амплитуд рассеяния струн.

1.1.2. Высокоэнергетическое поведение модели Венециано

Наша следующая задача — понять асимптотическое поведение амплитуды Венециано при высоких энергиях. Рассмотрим сначала реджевскую область больших s и фиксированных t . Физической областью упругого рассеяния является область положительных s и отрицательных t или наоборот. Область больших s и фиксированных t соответствует малому углу рассеяния при высоких энергиях; именно феноменология в этой области привела к теории полюсов Редже и в конечном итоге к дуальным моделям.

Чтобы выявить асимптотическое поведение амплитуды Венециано, мы прежде всего должны знать асимптотическое поведение гамма-функции. Поведение $\Gamma(u)$ при больших u легко можно установить из интегрального представления

$$\Gamma(u) = \int_0^{\infty} dt t^{u-1} e^{-t}. \quad (1.1.22)$$

При больших u основной вклад в интеграл дает область $t \approx u - 1$. Вычисление интеграла в этой области методом седловой точки приводит к формуле Стирлинга:

$$\Gamma(u) \sim \sqrt{2\pi} u^{u-1/2} e^{-u}. \quad (1.1.23)$$

Хотя в нашем выводе мы предполагали, что u положительно, в действительности формула Стирлинга справедлива для больших u во всей плоскости u , кроме отрицательной оси u , где $\Gamma(u)$ имеет полюсы. Из (1.1.23) видно, что амплитуда Венециано

$$A(s, t) = \frac{\Gamma(-\alpha(s)) \Gamma(-\alpha(t))}{\Gamma(-\alpha(s) - \alpha(t))} \quad (1.1.24)$$

асимптотически ведет себя в области больших s и фиксированных t следующим образом:

$$A(s, t) \sim \Gamma(-\alpha(t)) (-\alpha(s))^{\alpha(t)}. \quad (1.1.25)$$

Асимптотическое поведение при больших s и фиксированных t для линейной реджевской траектории $\alpha(s) \sim \alpha's$ имеет вид

$$A(s, t) \sim s^{\alpha(t)}. \quad (1.1.26)$$

Уравнения (1.1.25) и (1.1.26) справедливы во всей комплексной плоскости s (для больших $|s|$), если только не слишком приближаться к положительной вещественной оси s . Так как физическая область — это в точности та область, которая при этом исключается, необходимо дать определенные пояснения. Дело в том, что в физической области функция $A(s, t)$ даже при больших s является быстроменяющейся функцией с многими нулями и полюсами. Это проявляется в существовании резонансов. Уравнения (1.1.25) и (1.1.26) справедливы в среднем, если соответствующим образом усреднить по нулям и полюсам. Простым и физически обоснованным способом это можно сделать, если рассмотреть s с небольшой мнимой частью. Такой способ вполне разумен, так как в действительности резонансы нестабильны, что приводит к тому, что из-за квантовых поправок у координат полюсов функции $A(s, t)$ появляются мнимые части. Эффект квантовых поправок, которые сдвигают полюсы с вещественной оси, можно имитировать, оставляя полюсы на вещественной оси, но рассматривая переменную s с мнимой частью.

Полезно сравнить (1.1.26) с общей формулой (1.1.2), описывающей рассеяние за счет обмена единственной элементарной частицей со спином J . В этом случае при больших s и фиксированных t амплитуда ведет себя как $A(s, t) \sim s^J$. Поэтому уравнение (1.1.26) соответствует асимптотическому поведению, которое проявилось бы из-за обмена в t -канале частицей с зависящим от t угловым моментом $J = \alpha(t)$. Таково удивительное свойство теории полюсов Редже; бесконечная сумма обменов в t -канале частицами произвольно большого углового момента при высоких энергиях эффективно может быть описана в виде обмена единственной фиктивной частицей с эффективным зависящим от t угловым моментом $J = \alpha(t)$. Если $\alpha(t) = \alpha't + \alpha(0)$ и α' положительно по вышеуказанным причинам, то $\alpha(t)$ отрицательна в физической области упругого рассеяния (отрицательные t , положительные s), по крайней мере когда t — достаточно большое по модулю отрицательное число. В этом случае $\alpha(t)$ можно сделать сколь угодно меньше нуля, а соответственно поведение при больших s может быть сделано сколь угодно мяг-

ким. Поэтому в этой области высокоэнергетическое поведение амплитуды Венециано также будет сколь угодно мягким. Это иллюстрирует тот факт, что в определенных отношениях высокоэнергетическое поведение дуальных моделей намного мягче аналогичного поведения в любой теории поля, даже в суперперенормируемой.

Вместо рассмотрения предела Редже полезно исследовать поведение амплитуды Венециано при высоких энергиях для фиксированного угла рассеяния. Легко получить, что при высоких энергиях переменные s , t и угол рассеяния θ_s в системе центра масс связаны между собой соотношением

$$2t = -s(1 - \cos \theta_s). \quad (1.1.27)$$

Тогда можно воспользоваться формулой Стирлинга и показать, что амплитуда Венециано при больших s и фиксированных θ_s ведет себя следующим образом:

$$A(s, t) \sim [F(\theta_s)]^{-\alpha(s)}, \quad (1.1.28)$$

где $F(\theta_s)$ — определенная функция, зависящая от угла рассеяния (не очень сильно). Итак, при фиксированном угле высокоэнергетическая амплитуда рассеяния спадает экспоненциально с ростом s .

1.1.3. Ответвления модели Венециано

С самого начала надежды на то, что модель Венециано приведет к каким-то важным результатам, были, пожалуй, еще слабее, чем в 1900 г. надежды на то, что экспериментальные исследования излучения черного тела станут первым шагом к созданию совершенно новой теории. Гипотеза дуальности всегда располагала лишь слабой экспериментальной поддержкой, и модель Венециано была придумана просто для того, чтобы удовлетворить этой не очень хорошо обоснованной гипотезе. Тем не менее исследование модели Венециано обнаружило ее чрезвычайно богатую структуру, частичное прояснение которой потребовало усилий множества физиков и привело к целой цепочке неожиданностей. Многие главы настоящей книги им и посвящены. Среди этих неожиданностей — легкость записи n -частичного обобщения амплитуды Венециано, осознание того факта, что модель Венециано фактически является моделью релятивистской струны, открытие того, что мы сейчас называем замкнутыми струнами, появление (в попытках ввести в модель фермионы) градуированных алгебр Ли и осознание того, что бозонная и суперсимметричная струнные теории имеют смысл соответственно только в 26- и 10-мерии. Почти на каждом шагу дуальные модели преподносили все новые сюрпризы тем, кто их

изучал, не произошло только одного — если не считать первоначальной ограниченной мотивировки, использование дуальных моделей в качестве фундаментальной теории сильных взаимодействий никогда не приводило к сколько-нибудь впечатляющему успеху.

В самом деле, важнейшие экспериментальные достижения в период после 1968 г. показали, что требуется теория сильных взаимодействий совсем другого рода. В области Редже поведение модели Венециано можно считать разумно согласующимся с истинным высокоэнергетическим поведением сильных взаимодействий. Однако имеется и другая (мало изученная экспериментально до 1968 г., но важная с точки зрения современных перспектив) область, в которой согласие не столь хорошее. Это область высокоэнергетического рассеяния при фиксированных углах, или, другими словами, область, в которой $s \rightarrow \infty$, $t \rightarrow -\infty$, а отношение s/t фиксировано. В этой области амплитуда Венециано спадает экспоненциально с ростом s , как мы убедились в конце предыдущего подраздела. Но современные эксперименты (и теория) указывают, что амплитуда рассеяния сильных взаимодействий спадает только в соответствии со степенным законом в высокоэнергетических процессах при фиксированном угле. Этот факт понятен в рамках партонной модели. Одно из любопытных исторических совпадений: эксперименты в SLAC, впервые указавшие на поведение сильных взаимодействий, соответствующее партонной модели (в глубокоэластичном рассеянии), проводились как раз в то время, когда Венециано опубликовал работу о его знаменитой амплитуде.

Неудачные попытки дуальных моделей описать наблюдаемое в определенных кинематических режимах поведение, соответствующее партонной модели, явились одной из главных причин того, что они перестали рассматриваться в качестве теорий сильных взаимодействий. В некотором смысле можно сказать, что ультрафиолетовое поведение амплитуд модели Венециано мягче поведения адронных амплитуд, хотя последние в высокоэнергетической области с фиксированным углом в свою очередь ведут себя намного мягче (спадают с энергией по степенному закону с намного большим показателем), чем соответствующие амплитуды рассеяния элементарных квантов в квантовой теории поля.

1.2. Дуальные модели всего сущего

Примерно в 1973 или 1974 г. возникла альтернативная теория сильных взаимодействий — квантовая хромодинамика, которая помимо всего прочего объяснила отмеченное выше поведение, соответствующее партонной модели. Первоначальная моти-

вировка дуальных моделей оказалась несостоятельной. Однако почти одновременно возникли новые возможные причины изучать чрезвычайно богатую структуру, реализованную в дуальных моделях. Теория сильных взаимодействий — это только одна из областей физики, где, как представляется, появляются элементарные частицы с необычно высоким спином. Подобная проблема возникает также в квантовой теории гравитации. В общей теории относительности гравитация описывается безмассовым полем со спином два — полем гравитона. Его нелинейное взаимодействие определяется неабелевой группой локальной симметрии, группой диффеоморфизмов пространства-времени. Общая теория относительности, несомненно, в какой-то степени вдохновила создателей теории Янга — Миллса, в которой нелинейности определяются аналогичной группой локальной симметрии. Поле Янга — Миллса является безмассовым полем со спином единица. Несмотря на то что эти теории во многом похожи, имеется огромная разница между спином единица и спином два. В соответствии с (1.1.2) обмен в t -канале безмассовой частицей спина один приводит к амплитуде, пропорциональной s/t . В четырехмерии такое высокоэнергетическое поведение вряд ли совместимо с перенормируемостью. Но обмен безмассовой частицы спина два в t -канале приводит в соответствии с (1.1.2) к амплитуде, пропорциональной s^2/t . В четырехмерии такое высокоэнергетическое поведение, конечно же, неприемлемо и соответствует совершенно перенормируемой теории.

Как мы отметили, дуальные модели дают один способ описания частиц высокого спина без ультрафиолетовых патологий. Для сильных взаимодействий дуальные модели не подходят, природа выбрала другой путь. Может быть, тогда они дают правильное описание частиц «чрезвычайно высокого спина» в квантовой гравитации?

1.2.1. Дуальность и гравитон

Одной из трудностей дуальных теорий сильных взаимодействий помимо их неспособности отразить свойства партонной модели было то, что они всегда предсказывали большое количество безмассовых частиц, ни одна из которых не существует в мире адронов. На наличие этих безмассовых частиц указывают, например, полюса в точках $s=0$ и $t=0$ в амплитуде Венециано (1.1.5), если положить $\alpha(0)=1$, чтобы исключить духи. Оказывается, что в дуальных моделях возникают безмассовые частицы различного спина. В частности, в секторе замкнутых струн дуальных моделей появляется безмассовая частица спина два. Изучение такого сектора показывает, что этого можно

было ожидать, исходя из тех общих соображений, что взаимодействия этой частицы аналогичны взаимодействиям в общей теории относительности. Можно ли эту частицу интерпретировать как гравитон?

Квантовая гравитация всегда представляла собой по преимуществу головоломку для теоретиков. Эксперимент мало что дает для ее решения, за исключением только констатации того факта, что и квантовая механика, и гравитация проявляются в законах природы. Характерным масштабом масс в квантовой гравитации является масса Планка $\sqrt{\hbar c/G} \approx 10^{19}$ ГэВ. Эта величина настолько далека от экспериментально достижимой, что, если не считать непредсказуемого везения (вроде открытия стабильной частицы с массой Планка, оставшейся с момента Большого Взрыва), вряд ли можно надеяться на прямую экспериментальную проверку теории квантовой гравитации. Реальная надежда проверить теорию квантовой гравитации всегда состояла в том, что в процессе построения последовательной теории квантовой гравитации можно понять, как гравитация должна объединяться с другими силами. Последовательная единая теория гравитации и других сил может однажды столкнуться с экспериментом через ее следствия в отношении уже измеренных величин типа массы электрона или угла Кабиббо или через ее предсказания новых явлений при высоких, но достижимых энергиях, вероятно порядка 1 ТэВ, области, где, по-видимому, скрыта тайна нарушения $SU(2) \times U(1)$ -симметрии.

1.2.2. Объединение в высших размерностях

Рассмотрение дуальных моделей в качестве теории квантовой гравитации сразу же дало результаты: то, что долгое время считалось недостатком дуальных моделей, немедленно превратилось в их достоинство. Недостаток заключался в том, что дуальные модели как будто не имели смысла в четырехмерном пространстве-времени. Модель Венециано для бозонов существует в пространстве-времени размерности 26, тогда как описывающая бозоны и фермионы модель Рамона — Неве — Шварца имеет смысл только в десятимерии. Если нашей целью является построение теории сильных взаимодействий и мы рассматриваем более реалистичный случай, когда имеются как бозоны, так и фермионы, тогда наличие шести лишних измерений является недостатком.

Если же мы хотим построить единую теорию, описывающую материю и гравитацию, то дело обстоит совсем не так. Самой первой и наилучшей идеей, предложенной для объединения теории, описывающей вещество, с общей теорией относительности,

была выдвинутая Калуцой в 1921 г. мысль, согласно которой гравитацию можно объединить с электромагнетизмом, если общую теорию относительности формулировать не в четырех, а в пяти измерениях. Это предположение в дальнейшем было развито начиная с 1926 г. Клейном (поэтому теория называется теорией Калуцы — Клейна) и было одной из основных тем работы Эйнштейна по созданию единой теории поля. На современном языке эту идею можно сформулировать так: основное в пятимерной общей теории относительности — не пятимерное пространство Минковского M^5 , а произведение $M^4 \times S^1$, четырехмерного пространства Минковского M^4 на окружность S^1 . Предполагается, что радиус окружности столь мал, что в повседневном опыте — и даже в лабораториях высоких энергий — всегда происходит усреднение по положению на окружности S^1 , так что мир представляется нам четырехмерным. Ясное объяснение того, как это может происходить, было дано Эйнштейном и Бергманом в 1938 г.

В чем преимущество пятого измерения? В пятимерии метрический тензор является (5×5) -матрицей g_{MN} , $M, N = 0, \dots, 4$. Рассмотрим пятимерные уравнения Эйнштейна в качестве динамических уравнений для всех компонент матрицы g_{MN} . Компоненты $g_{\mu\nu}$, $\mu, \nu = 0, \dots, 3$, имеют спин два с точки зрения четырехмерного пространства-времени и рассматриваются как компоненты метрического тензора гравитации в четырехмерии. С другой стороны, компоненты $g_{4\mu}$, $\mu = 0, \dots, 3$, имеют с этой точки зрения спин единица и описывают безмассовый фотон, который объединяется с гравитоном в рамках пятимерной общей теории относительности. Из этой единой теории следует очень интересное предсказание: компонента g_{44} будет вести себя как безмассовое скалярное поле.

Таким образом, как и следовало ожидать, эта интересная попытка объединения гравитации и «материи» приводит к очень любопытному предсказанию, касающемуся природы «материи». Действительно, это предсказание, похоже, смущало авторов ранних работ, поскольку предсказание новой частицы (или фактически нового поля; связь между частицами и полями не была еще известна, когда впервые предлагалось пятое измерение!) не было столь приемлемым в то время. Большинство первых авторов переставало теорию Калуцы — Клейна так, чтобы она не предсказывала безмассовую скалярную частицу. И лишь с появлением работы Йордана, Бранса и Дике и др. в 1950 г. и позднее безмассовый «скаляр Бранса — Дике» стал рассматриваться не как досадная мелочь, которую нужно замести под теоретический ковер, а как интересный прогноз, который следует проверить экспериментально. На возможный безмассовый

скаляр Бранса — Дике были наложены существенные экспериментальные ограничения, но его существование по-прежнему вероятно. В дуальных моделях нечто очень похожее на скаляр Бранса — Дике возникает в виде поля дилатона, хотя еще далеко не ясно, является ли это поле действительно безмассовым или приобретает массу за счет квантовых поправок.

Теперь мы знаем, что нужно объединять не только гравитацию и электромагнетизм. Удовлетворительная единая теория должна включать и многое другое. На самом деле пяти измерений недостаточно; может быть, нам удастся это сделать, располагая десятью? Если дуальные теории рассматривать как теории квантовой гравитации, то тот факт, что дуальная модель бозонов и фермионов осмысленна только в десятимерии, выглядит проклятием, обернувшимся благословением, намеком на то, что дуальные модели — это не просто последовательные теории квантовой гравитации, но последовательные единые теории всех взаимодействий.

1.2.3. Суперсимметрия

В 1974 г. эти возвышенные мечты стали несколько приземленнее, когда выяснилось, что существовавшие тогда так называемые «последовательные» дуальные модели обладают крайней мере одним недостатком: все они предсказывают тахион. Если даже в действительности с точки зрения физики это не является противоречием, то в любом случае такой факт, несомненно, неприятен. Он указывает, что во всяком случае вычисления осуществляются в нестабильном вакуумном состоянии. Кроме того, обмен тахионом влияет на инфракрасные расходимости в петлевых диаграммах, а это затрудняет выделение ультрафиолетового поведения «единых квантовых теорий гравитации» и выяснение того, насколько оно по-настоящему удовлетворительно.

Решение проблемы тахиона пришло весьма неожиданным образом. В 1974 г. Весс и Зумино, частично вдохновленные тем, что в дуальных моделях начали использоваться градуированные алгебры Ли, выдвинули идею пространственно-временной суперсимметрии. Эта работа была представлена как четырехмерное обобщение суперсимметрии двумерной мировой поверхности в струнной модели Рамона — Неве — Шварца¹⁾. Изобретение суперсимметрии совершенно обоснованно вызвало огромное количество последующих работ. Впервые появилась теория

¹⁾ Аналогичное предположение было сделано Гольфандом и Лихтманом в 1971 г. в работе, которая привлекла более широкое внимание лишь намного позже.

с симметрией между бозонами и фермионами, что является необходимым условием по-настоящему единой теории всего сущего. В течение нескольких лет глобальная суперсимметрия, рассмотренная в первых работах, была расширена до локальной суперсимметрии или супергравитации — значительного и чрезвычайно богатого расширения принципа симметрии общей теории относительности. Сначала казалось, что сходство между струнной и пространственно-временной суперсимметрией является просто аналогией. Но в 1977 г. Глиозци, Шерк и Олив показали, что можно так модифицировать модель Рамона — Невё — Шварца, введя «проекцию G -четности», что в ней тахион будет отсутствовать, а бозоны и фермионы будут иметь одинаковые массы и наборы мультиплетов. Предположение, что эта модифицированная модель может обладать пространственно-временной суперсимметрией, было весьма правдоподобно. В начале восьмидесятых годов двое из нас (М. Грин и Дж. Шварц) вновь вернулись к этому вопросу, и это предположение было доказано. Затем удалось показать, что в последовательной свободной от тахиона струнной теории со спином однопетлевые диаграммы конечны и, в частности, нет никаких ультрафиолетовых расходимостей.

Конечность на однопетлевом уровне в общековариантной теории сама по себе не новость. Обычная общая теория относительности в четырехмерном пространстве-времени на уровне одной петли (на массовой оболочке) конечна. Но конечность общековариантных теорий на однопетлевом уровне является результатом случайности, связанной с кинематикой, т. е. с отсутствием подходящего оператора правильной размерности и с нужными квантовыми числами, который смог бы сыграть роль контрчлена. С другой стороны, суперсимметричная струнная теория на однопетлевом уровне конечна по веской и вполне понятной причине. Дело в том, что петлевая диаграмма — это не что иное, как древесная диаграмма, некоторые концы которой соединены друг с другом, а древесные диаграммы в струнной теории отлично ведут себя при высоких энергиях, в определенном смысле мягче, чем древесные диаграммы любой суперперенормируемой теории поля. Поэтому естественно, что петли, сделанные из таких древесных диаграмм с мягким поведением, являются конечными до тех пор, пока картина не осложняется посторонними инфракрасными расходимостями.

Иными словами, струнные теории или дуальные модели с самого начала были явно свободны от проблемы ультрафиолетовых расходимостей. Стоял другой вопрос: существуют ли такие формы этих теорий, в которых вообще нет аномалий и других противоречий? Исторически пришлось преодолевать

много трудностей, чтобы избежать этих противоречий. Последним звеном в этой цепи было введение пространственно-временной суперсимметрии. Лишь с ним впервые удалось построить полностью последовательные дуальные модели в виде суперсимметричных струнных или суперструнных теорий. С помощью полной последовательной теории наконец оказалась возможной проверка ультрафиолетового поведения, по крайней мере на однопетлевом уровне, без лишней сложности. Хотя большинство работающих в этой области считают, что конечность имеет место (по той же самой причине) во всех порядках, полного и универсального доказательства этого факта к моменту написания настоящей книги нет.

В середине восьмидесятых годов произошел еще целый ряд драматических событий: сокращение гексагональных аномалий, возникновение новой теории, где в качестве калибровочной группы рассматривается исключительная группа $E_8 \times E_8$, стали обсуждаться феноменологические следствия, и, возможно, началось понимание структуры симметрии струнной теории на более глубоком, чем это было прежде, уровне. На этих событиях мы и сосредоточим в основном наше внимание в настоящей книге. А сейчас самое время объяснить, что же представляет собой струнная теория.

1.3. Теория струн

Теория струн сложна и многогранна. За прошедшие годы в ее рамках было развито большое количество различных подходов. Многие из них привели к важным в том или ином отношении результатам. Тщательное изложение любого из этих подходов может занять довольно много места. Нам важно ознакомиться с несколькими подходами, так как неизвестно с самого начала, какой из них окажется наиболее полезным в будущем. Все это может иногда создавать данному предмету сомнительную репутацию. Цель двух следующих разделов — дать наименее простое мини-введение в теорию струн. Если в процессе изложения мы пропустим некоторые важные моменты и сделаем его проще, чем оно должно быть на самом деле, то в последующих главах эти недостатки будут нами устранены.

1.3.1. Точечная безмассовая частица

Рассмотрим безмассовую классическую точечную частицу, движущуюся в пространстве Минковского. Соответствующим действием, описывающим такую частицу, является

$$S = \int d\tau e^{-1}(\tau) \eta_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau}. \quad (1.3.1)$$

Здесь $\eta_{\mu\nu}$ — метрика пространства Минковского (индексы μ и ν принимают значения $0, 1, \dots, (D-1)$ в пространстве-времени размерности D), τ — произвольный параметр вдоль траектории, $x^\mu(\tau)$ — положение частицы, $e(\tau)$ — нечто вроде «метрики» вдоль мировой линии частицы. Роль функции $e(\tau)$ — обеспечить инвариантность действия S относительно репараметризации, т. е. другого выбора параметра τ . В самом деле, действие (1.3.1) инвариантно при преобразованиях $\tau \rightarrow \tilde{\tau}(\tau)$, $e \rightarrow e(d\tau/d\tilde{\tau})$. Воспользовавшись калибровочной инвариантностью, можно выбрать калибровку $e=1$. В этой калибровке (1.3.1) сводится просто к квадратичному действию

$$\tilde{S} = \int d\tau \eta_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau}. \quad (1.3.2)$$

Варьированием \tilde{S} получается простое уравнение $d^2x^\mu/d\tau^2 = 0$, решениями которого являются прямые линии в пространстве Минковского. Однако было бы неверным утверждать, что произвольная прямая в пространстве Минковского является решением уравнений движения, выведенных из первоначального действия (1.3.1). Мы не имеем права с самого начала выбрать калибровку $e=1$ и забыть о e . Необходимо также рассматривать уравнение движения $\delta S/\delta e = 0$. Один из возможных способов заключается в том, что сначала решают уравнение $\delta S/\delta e = 0$, а затем фиксируют калибровку $e=1$. Аналогичным образом можно поступать для любой системы с локальной калибровочной инвариантностью. В электродинамике можно при желании приравнять временную компоненту вектор-потенциала нулю, выбрав калибровку $A_0=0$, но нельзя забывать о законе Гаусса $\delta S/\delta A_0 = 0$. Во всяком случае, из уравнения $\delta S/\delta e = 0$ следует, что калибровочно инвариантная величина

$$T = \eta_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} \quad (1.3.3)$$

должна обращаться в нуль. Так что решениями наших уравнений в точности являются светоподобные геодезические в пространстве Минковского, подтверждая тем самым, что (1.3.1) действительно является действием *безмассовой* классической точечной частицы.

Уравнение $d^2x^\mu/d\tau^2 = 0$, полученное варьированием действия (1.3.2), в котором фиксирована калибровка, не приводит к равенству $T=0$; из него только следует, что величина T сохраняется, $dT/d\tau = 0$. Таким образом, в случае теории с действием, в котором фиксирована калибровка, равенство $T=0$ является

некоторым ограничением на начальные данные. Если это ограничение наложить в момент $\tau=0$, оно автоматически будет выполняться при всех τ . Такая ситуация опять же является типичной для систем с локальными калибровочными симметриями. Например, в теории Максвелла закон Гаусса $\delta S/\delta A_0 = 0$ не вытекает из других уравнений Максвелла, но из них следует, что $\delta S/\delta A_0$ не зависит от времени, так что если в начальный момент эта вариационная производная равна нулю, то она остается таковой и во все последующие времена.

Что же происходит при квантовании системы? Каноническими импульсами являются $p_\mu = \delta S/\delta(dx^\mu/d\tau) = \eta_{\mu\nu} dx^\nu/d\tau$. После квантования они принимают вид $p_\mu = -i\partial/\partial x^\mu$. Это означает, что T становится лоренц-инвариантным волновым оператором $\eta^{\mu\nu} \partial^2/\partial x^\mu \partial x^\nu$, который мы будем обозначать через \square . Квантовое состояние — это просто функция $\phi(x^\mu)$ от пространственно-временных координат x^μ . Однако произвольная функция ϕ не должна рассматриваться как физически допустимая. В классическом случае нам разрешено быть только на орбитах $T=0$, а в квантовой механике необходимо потребовать, чтобы физическим состоянием было состояние, которое аннулируется действием T . Так как T является волновым оператором, ограничение $T\phi=0$ является просто безмассовым уравнением Клейна — Гордона $\square\phi=0$.

Итак, безмассовое уравнение Клейна — Гордона является уравнением Шрёдингера для квантовой системы, описываемой действием (1.3.1). То, что это уравнение линейно, неудивительно; уравнение Шрёдингера любой квантовой системы линейно. Пуанкаре-инвариантность уравнения также является очевидным следствием того факта, что действие (1.3.1) ковариантно относительно преобразований из группы Пуанкаре $x^\mu \rightarrow a^\mu_\nu x^\nu + b^\mu$, где a — преобразование Лоренца, а b — постоянный вектор. На первый взгляд может показаться странным, что в уравнение Шрёдингера не вошла «временная» производная $d/d\tau$, но это типично (хотя, возможно, этот факт не так широко известен) для квантовых систем, обладающих симметриями относительно репараметризации временной координаты; аналогичная ситуация возникает (как мы увидим) в квантовой теории свободной струны и при формальных попытках проквантовать общую теорию относительности.

Прежде чем переходить к струнной теории, задержимся на некоторое время и обсудим вкратце суперсимметричное обобщение теории точечной частицы. На самом деле имеется несколько возможных суперсимметричных обобщений, с суперсимметрией либо на мировой линии частицы, либо в пространстве-времени. В настоящий момент для нас наибольший интерес

представляет лагранжиан с пространственно-временной суперсимметрией:

$$S = \int d\tau \eta_{\mu\nu} \left(\frac{dx^\mu}{d\tau} - i\bar{\theta}\Gamma^\mu \frac{d\theta}{d\tau} \right) \left(\frac{dx^\nu}{d\tau} - i\bar{\theta}\Gamma^\nu \frac{d\theta}{d\tau} \right). \quad (1.3.4)$$

Это действие описывает точечную частицу, распространяющуюся не в пространстве Минковского, а в суперпространстве с координатами (x^μ, θ^a) . Здесь θ^a — антикоммутирующие координаты, преобразующиеся как спиноры при лоренцевских преобразованиях координат x^μ ; Γ^μ — гамма-матрицы Дирака. Квантование действия (1.3.4) несколько замысловато, и мы обсудим его в гл. 5. Сейчас же просто заметим, что в квантовую теорию обязательно войдет некоторое суперсимметричное расширение безмассового уравнения Клейна — Гордона, полученного нами для «бозонной» точечной частицы.

В десятимерном случае, представляющем особый интерес, где θ^a выбирается в виде одиночного майорано-вейлевского спинора, получается, что описываемая (1.3.4) квантовая система является безмассовым мультиплетом полей со спинами¹⁾ $(1, 1/2)$; этот мультиплет состоит из «фотона» A_μ и спинорного поля положительной киральности ψ , удовлетворяющих безмассовым уравнениям Максвелла и Дирака:

$$0 = \partial_\mu F^{\mu\nu} = \Gamma^\mu \partial_\mu \psi. \quad (1.3.5)$$

Если же в десятимерии в качестве θ мы рассмотрим пару майорано-вейлевских спиноров, то квантовая теория поля с действием (1.3.4) приводит вместо этого к линейаризованному приближению суперуравнений Эйнштейна, т. е. к десятимерной супергравитации.

Несколько необычным во всем этом является то, что при квантовании теории точечной частицы мы приходим к уравнениям (Клейна — Гордона в бозонном случае, суперуравнениям Максвелла и Эйнштейна в суперсимметричном случае), которые обычно рассматриваются как *классические* уравнения. Более того, хотя эти уравнения линейны, они имеют естественные нелинейные обобщения, которые на самом деле нас обычно и интересуют. Безмассовое уравнение Клейна — Гордона обобщается более или менее естественным образом; например, для теории ϕ^4 такое обобщение имеет вид $\square\phi + \lambda\phi^3 = 0$. Совершенно естественными обобщениями уравнений Максвелла и линейаризованных уравнений Эйнштейна являются уравнения

¹⁾ Мы говорим о спине, как если бы мы описывали представления четырехмерной группы Лоренца, где терминология стандартна. Например, для пространства любой размерности «спин 1» приписывается лоренцевскому вектору, «спин 1/2» — спинору и т. д.

$D_\mu F^{\mu\nu} = 0$ и $R_{\mu\nu} = 0$ теории Янга — Миллса и общей теории относительности. Обычно при квантовании классической теории мы не добавляем нелинейные члены в линейное уравнение Шрёдингера, но в случае безмассовой точечной частицы или суперчастицы нам необходимо это сделать.

В бесхитростной идее о световом луче в пространстве Минковского мы должны уловить намек на то, как нужно поступать в теории Янга — Миллса или общей теории относительности. «Настоящая» теория безмассовой точечной частицы, а именно суперсимметричная теория, в результате квантования приводит к уравнениям Максвелла и линейаризованным уравнениям Эйнштейна, которые затем должны обобщаться на нелинейные уравнения Янга — Миллса и Эйнштейна.

1.3.2. Обобщение на струны

Теперь мы готовы приступить к обсуждению струн. Струна — одномерный объект, математическая кривая. Мы рассматриваем как открытые струны, имеющие концы, так и замкнутые

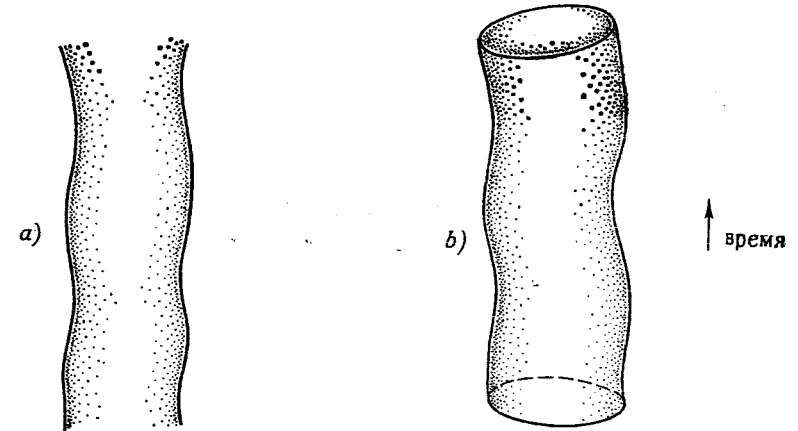


Рис. 1.3. Открытая (a) или замкнутая (b) струна, распространяясь в пространстве Минковского, замечает двумерную поверхность, известную как мировая поверхность струны. Из классических уравнений свободной теории струн следует, что эта поверхность должна быть минимальной, т. е. обладать наименьшей площадью.

струны, которые топологически эквивалентны окружностям. Открытая струна обычно описывается координатой σ , пробегая значения от 0 до π ; для замкнутой струны мы также будем считать, что $0 \leq \sigma \leq \pi$. Для описания движения струны полезно ввести еще и времениподобный параметр эволюции τ , который

является временной координатой для наблюдателя, сидящего в точке с координатой σ на струне. Струна, распространяясь в пространстве-времени (рис. 1.3), замечает мировую поверхность, являющуюся обобщением мировой линии точечной частицы. Математически мировая поверхность описывается функцией $X^\mu(\sigma, \tau)$ — положением струны при данных значениях σ и τ . Иногда объединяем σ и τ в двумерный вектор $\sigma^\alpha = (\tau, \sigma)$ и используем выражение $d^2\sigma$ для обозначения $d\sigma d\tau$.

В том виде, в каком первоначально действие струны предлагали Намбу и Гото, оно просто было пропорционально площади ее мировой поверхности. Одна из математических формул для площади поверхности струны, помещенной в пространство Минковского, имеет следующий вид¹⁾:

$$S = T \int d\sigma d\tau \sqrt{\dot{X}^2 X'^2 - (\dot{X} \cdot X')^2}, \quad (1.3.6)$$

где

$$\dot{X}^\mu = \frac{\partial X^\mu(\sigma, \tau)}{\partial \tau}, \quad X'^\mu = \frac{\partial X^\mu(\sigma, \tau)}{\partial \sigma}. \quad (1.3.7)$$

Если в качестве действия струны взять площадь ее мировой поверхности, то решения классических уравнений свободной струны соответствуют мировой поверхности минимальной (или по крайней мере экстремальной) площади. Это является обобщением того факта, что орбитами точечной частицы являются геодезические, или кривые минимальной длины. С действием (1.3.6) работать очень неудобно из-за его сильной нелинейности, особенно из-за квадратного корня. Можно записать эквивалентное, но намного более удобное выражение, если (как и в случае точечной частицы) ввести кроме $X^\mu(\sigma, \tau)$ еще новую переменную $h_{\alpha\beta}$, которая будет метрическим тензором мировой поверхности струны. Более удобной формой является

$$S = -\frac{T}{2} \int d^2\sigma \sqrt{h} h^{\alpha\beta} \eta_{\mu\nu} \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X^\nu. \quad (1.3.8)$$

Здесь \sqrt{h} — квадратный корень из абсолютного значения определителя матрицы $h_{\alpha\beta}$, а матрица $h^{\alpha\beta}$ является обратной к матрице $h_{\alpha\beta}$. Так как в (1.3.8) производные матрицы $h_{\alpha\beta}$ не входят,

¹⁾ T является коэффициентом пропорциональности, необходимым для того, чтобы сделать действие безразмерным. Если взять постоянную Планка и скорость света равными единице ($\hbar = c = 1$), то T будет иметь размерность (длина)⁻². В гл. 2 мы покажем, что в действительности T является натяжением струны, связанным с параметром наклона реджевской траектории для открытой струны следующим образом: $2\pi\alpha'T = 1$. Часто для упрощения обозначений удобно выбирать специальные единицы, в которых $T = 1/\alpha'$. Всегда можно легко восстановить общее выражение для T , исходя из простых соображений размерности.

то ее уравнение движения является связью и, как в дальнейшем будет показано в гл. 2, величину \hbar при желании можно исключить или по ней можно проинтегрировать, что вновь приводит к (1.3.6).

В классической теории действие (1.3.8) описывает распространение струны в пространстве Минковского любой размерности, но в квантовой механике наиболее интересным оказывается случай, когда размерность пространства равна 26.

Действия (1.3.6) и (1.3.8) инвариантны относительно общекоординатных преобразований мировой поверхности струны $\tau, \sigma \rightarrow \tau'(\tau, \sigma), \sigma'(\tau, \sigma)$. (В случае действия (1.3.8) метрика мировой поверхности должна меняться при таких преобразованиях в соответствии со стандартными законами преобразования метрического тензора.) С точки зрения одномерного муравья, живущего на струне, действия (1.3.6) и (1.3.8) описывают общековариантную теорию поля в $1+1$ измерениях. В эту $1+1$ -мерную теорию поля компоненты X^μ входят как скалярные поля, они преобразуются как компоненты вектора при 26-мерных преобразованиях из группы Пуанкаре и как скаляры при репараметризациях мировой поверхности. Фактически (1.3.8) является стандартным действием, описывающим взаимодействия безмассовых скалярных полей X^μ с $(1+1)$ -мерной гравитацией. Двумерные действия (1.3.6) и (1.3.8) и их суперсимметричные обобщения описывают единственные общековариантные теории поля, имеющие, как известно, смысл в пространстве-времени любого числа измерений. Может возникнуть желание добавить к (1.3.6) $(1+1)$ -мерный эйнштейновский член $\sqrt{h} R$, где R — $(1+1)$ -мерный скаляр кривизны; для наших целей в настоящий момент этот член несуществен, так как $\sqrt{h} R$ является полной дивергенцией (точнее, топологическим инвариантом) в $1+1$ измерениях. В дальнейшем добавление этого члена окажется полезным.

1.3.3. Уравнения связей

Инвариантность относительно репараметризации мировой поверхности существенна для решения уравнений минимальной поверхности, выведенных из действия (1.3.8). Симметричный 2×2 -тензор $h_{\alpha\beta}$ имеет три независимые компоненты. В двумерной общековариантной преобразование $\sigma, \tau \rightarrow \sigma', \tau'$ зависит от двух произвольных функций, а именно новых координат σ' и τ' . С помощью этого преобразования любые две из трех независимых компонент h можно обратить в нуль. Стандартной и удобной параметризацией мировой поверхности является такая параметризация, при которой $h_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} e^\Phi$, где $\eta_{\alpha\beta}$ — метрика пло-

ской мировой поверхности, а e^φ — неизвестный конформный множитель. Такой выбор всегда можно осуществить по крайней мере локально. Мы будем называть его конформной калибровкой.

Теперь мы сталкиваемся с приятной неожиданностью. В конформной калибровке конформный множитель e^φ выпадает из формулы (1.3.8) по той причине, что в двумерии величина \sqrt{h} пропорциональна e^φ , а тензор $h^{\alpha\beta}$ пропорционален $e^{-\varphi}$. Следовательно, в конформной калибровке действие (1.3.8) сводится к простому действию свободного поля

$$S = -\frac{T}{2} \int d^2\sigma \eta_{\mu\nu} \eta^{\alpha\beta} \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X^\nu. \quad (1.3.9)$$

Уравнение движения, выведенное из действия (1.3.9), является простым линейным волновым уравнением

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} - \frac{\partial^2}{\partial \sigma^2} \right) X^\mu = 0. \quad (1.3.10)$$

Однако, так же как и в случае точечной частицы, волновое уравнение, выведенное из действия с фиксированной калибровкой (1.3.9), нужно дополнить определенными уравнениями связей. Уравнениями связей, возникающими в данном случае, являются уравнения $\delta S / \delta h_{\alpha\beta} = 0$. В $(1+1)$ -мерной квантовой теории поля тензор энергии-импульса обычно определяется как¹⁾

$$T_{\alpha\beta} = -\frac{2\pi}{\sqrt{h}} \frac{\delta S}{\delta h^{\alpha\beta}}, \quad (1.3.11)$$

так что уравнения связей — это просто равенства $T_{\alpha\beta} = 0$. Тензор энергии-импульса выглядит наиболее просто в терминах координат светового конуса для мировой поверхности $\sigma^\pm = (\tau \pm \sigma)$. В этих координатах $T_{++} = \partial_+ X^\mu \partial_+ X_\mu$, T_{--} получается из T_{++} заменой $+\leftrightarrow-$, а $T_{+-} = 0$. Здесь T_{+-} — это след двумерного тензора энергии-импульса, и тот факт, что он равен нулю, т. е., другими словами, что теория безмассового скалярного поля с действием (1.3.9) конформно инвариантна в $1+1$ -мерии, имеет далеко идущие последствия.

В классической теории уравнения связей довольно просты, и, как мы увидим в гл. 2, общие решения волновых уравнений и уравнений связей можно найти без каких-либо затруднений. В квантовой механике все намного сложнее. Последовательное квантомеханическое рассмотрение конформной калибровки

¹⁾ Здесь $h = -\det h_{\alpha\beta}$. Множитель 2π в (1.3.11) в теории поля отсутствует, но в теории струн он стал стандартным.

требует введения духов. На это усложнение мы постараемся закрыть глаза в настоящей вводной главе. Если пренебречь связями, то проквантовать свободную теорию, описываемую лагранжианом (1.3.9), разумеется, не составляет труда. Но учесть связи намного сложнее. Уравнения связей означают, что физическое состояние $|\varphi\rangle$ должно удовлетворять условию $T_{\alpha\beta}|\varphi\rangle = 0$. Чтобы понять значение этого уравнения, необходимо вычислить коммутационные соотношения для $T_{\alpha\beta}$ при равных τ . Они оказываются следующими:

$$\begin{aligned} [T_{++}(\sigma), T_{++}(\sigma')] &= i(T_{++}(\sigma) + T_{++}(\sigma')) \delta'(\sigma - \sigma') + \\ &+ \frac{i}{24} (26 - D) \delta'''(\sigma - \sigma'); \end{aligned} \quad (1.3.12)$$

для T_{--} уравнение аналогично, а $[T_{++}, T_{--}] = 0$. Здесь D — число пространственно-временных координат (число компонент X^μ).

Первое слагаемое в правой части (1.3.12) возникло бы и в классической теории при вычислении скобок Пуассона: второе слагаемое, пропорциональное $(26 - D)\delta'''(\sigma - \sigma')$, появляется в квантовомеханических вычислениях из-за аномалии. Как мы увидим в гл. 3, для вычисления коэффициента, вошедшего в (1.3.12), необходимо последовательным образом включить в рассмотрение духи¹⁾. Из (1.3.12) непосредственно следует, что уравнения связей могут иметь смысл только в 26 измерениях. Физическое состояние $|\varphi\rangle$, удовлетворяющее условию $T_{++}|\varphi\rangle = 0$, автоматически обратится в нуль, если на него подействовать оператором в левой части (1.3.12) и первым слагаемым в правой части. Поэтому он должен также зануляться действием второго слагаемого в правой части (1.3.12). Но второе слагаемое в (1.3.12), являясь c -числом $(26 - D)\delta'''(\sigma - \sigma')$, ничего не может занулить, если только D не равно 26; это — единственный случай, когда имеются физические состояния. Именно по этой причине только в 26-мерии имеют смысл модель Венециано для открытых струн и соответствующая модель Шапиро — Вирасоро для замкнутых струн.

Кроме локальной репараметризационной инвариантности мировой поверхности струны, эта теория также обладает инвариантностью относительно глобальных (независящих от σ, τ) преобразований $X^\mu \rightarrow \Lambda^\mu_\nu X^\nu + b^\mu$ (где Λ — постоянная ортогональная матрица, а b — постоянный вектор). Для муравья, живущего на струне, эти преобразования являются просто преобра-

¹⁾ В формализме без духов ограничение, связанное с тем, что размерность равна 26, возникает не так, как здесь, а по-другому. Это объясняется в гл. 2.

зованиями внутренних симметрий 26 свободных, безмассовых квантовых полей, распространяющихся на струне, но для наблюдателя в пространстве-времени они — преобразования из группы Пуанкаре. Так как теория пуанкаре-инвариантна, гильбертово пространство состояний является пространством унитарного представления группы Пуанкаре. Это означает, что состояния частиц будут помечаться значениями их массы и спина. Так как мы имеем дело со струной, которая может свободно осциллировать и имеет бесконечное число гармоник, как и любая другая струна, то у нас будет появляться бесконечное число состояний частиц.

Для бозонной струны, которую мы уже обсуждали, основным состоянием является, к сожалению, тахион с квадратом массы (в случае замкнутых струн) $m^2 = -8$ (в единицах, где $T = 1/\alpha'$). Это является, как станет ясно из систематического рассмотрения в гл. 2, результатом тщательного учета уравнений связи. Первый возбужденный уровень более привлекателен, он соответствует безмассовым частицам. Точнее, обнаруживаемые безмассовые частицы — это частицы со спином два, которые можно постараться связать с гравитационным полем $g_{\mu\nu}$, со скалярной частицей, известной как «дилатон», и с дополнительным состоянием, которое преобразуется как антисимметричный тензор ранга 2 группы $SO(24)$. (Эта группа появляется в связи с тем, что она является малой группой безмассовой частицы в 26-мерии.) Все эти частицы чрезвычайно важны; гравитацией мотивировалась идея «дуальных моделей всего сущего», вакуумное среднее дилатона, как оказалось, определяет постоянную тонкой структуры, а антисимметричный тензор (или скорее его суперструнный родственник) играет особую роль в процессе сокращения аномалий. Среди более высоких возбуждений имеется бесконечная совокупность массивных состояний, включающая в себя все большие массы и более высокие спины; например, второй возбужденный уровень содержит частицы с $m^2 = +8$ и со спином вплоть до четырех. Этот спектр возбужденных состояний простирается до бесконечности, что является обязательным свойством спектра протяженного объекта с бесконечным числом гармоник.

Так же, как и бозонная точечная частица, бозонная струна имеет свои суперсимметричные обобщения. Таковыми являются суперсимметричные струнные или суперструнные теории, которыми мы в настоящей книге будем уделять основное внимание. Мы здесь только заметим, что в суперсимметричном случае тахион обязательно отсутствует, так как гамильтониан суперсимметричной теории положителен; наинизшие массовые уровни суперструнных теорий состоят из тех же безмассовых максвел-

ловских и эйнштейновских мультиплетов, которые появляются при квантовании соответствующих теорий точечных частиц. Например, в теории открытой суперструны имеются уровень безмассовых частиц, в точности соответствующий безмассовому

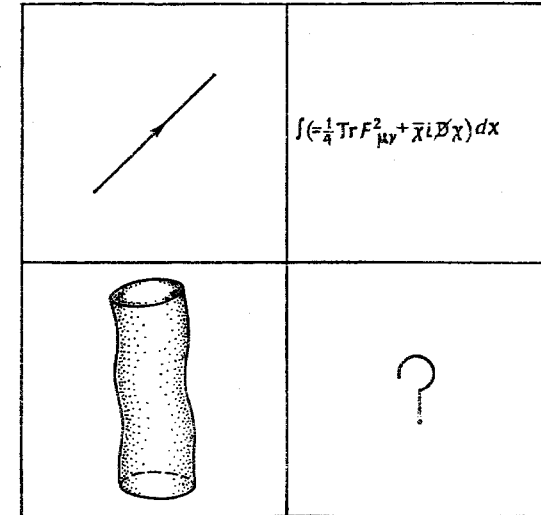


Рис. 1.4. На рисунке изображено то, что можно назвать «магическим квадратом» теории струн. В верхнем левом углу мы схематически изобразили световой луч в пространстве Минковского, соответствующий безмассовой суперчастице. Его нужно рассматривать как некий намек на суперсимметричную теорию Янга — Миллса (действие которой записано в верхнем правом углу) и супергравитацию. В нижнем левом углу показана минимальная поверхность в пространстве Минковского — классическая орбита струны. Это должно намекать на новый класс теорий, содержащих струнные обобщения уравнений Янга — Миллса и Эйнштейна. Хотя об этих теориях многое известно, в нижнем правом углу нарисован знак вопроса, чтобы подчеркнуть, что их концептуальные рамки все еще остаются неустановленными.

максвелловскому супермультиплету, и еще бесконечная совокупность массивных состояний.

Уравнения связей $T_{\alpha\beta}|\phi\rangle = 0$, как и уравнение Шрёдингера любой квантовой системы, линейны, в действительности они и играют роль уравнения Шрёдингера для струны. Обычно уравнение Шрёдингера исследуется как линейное уравнение. Но ранее мы видели, что в случае точечной частицы «правильнее» заняться поиском нелинейного обобщения уравнения Шрёдингера. Это приводит к красивейшим уравнениям физики: суперсимметричным уравнениям Янга — Миллса и уравнениям Эйнштейна.

Должны ли мы проделать все это со струной? Нужно ли искать нелинейную теорию, описывающую весь бесконечный набор струнных гармоник? Существует ли обобщение теории Янга — Миллса и общей теории относительности, связанное со струной таким же образом, каким они связаны с точечной частицей?

То, что такое обобщение существует, совершенно ясно; методом проб и ошибок оно было построено на протяжении почти двадцатилетних исследований по струнной теории. Загадочным на сегодняшний день является то, «почему» теория Янга — Миллса и общая теория относительности имеют такое обобщение. Понятие локальной калибровочной инвариантности теории Янга — Миллса и общей теории относительности основано на фундаментальных физических и математических концепциях: локальная симметрия, связность и кривизна, векторные расслоения и риманова геометрия. На самом деле исторически в случае общей теории относительности сначала появились именно концепции; Эйнштейн сначала установил концепции, на которых должна быть основана релятивистская теория гравитации, а затем построил и саму теорию. С теорией струн все произошло по-другому. Как мы уже вскользь упомянули в первом разделе, эта теория была первоначально предложена для совершенно других целей в безуспешном штурме проблемы сильных взаимодействий. Однако в конце концов стало ясно, что теорию струн следует вместо этого использовать для фундаментального обобщения общей теории относительности и теории Янга — Миллса. Но концепции, лежащие в основе этого обобщения, остаются в значительной степени невыясненными. В лучшем случае мы, возможно, только-только приподняли завесу. По этой причине, хотя нам многое известно о струнном обобщении теории Янга — Миллса и гравитации, на рис. 1.4 оно изображено знаком вопроса. Круг недостающих сейчас понятий, несомненно, в один прекрасный день окажет радикальное воздействие на физику и, возможно, на некоторые разделы математики.

1.4. Взаимодействия струн

До сих пор мы обсуждали теорию свободной струны. Настоящий раздел будет посвящен подробно введению в теорию с взаимодействием, или нелинейную теорию. Сначала вспомним, как рисуются фейнмановские диаграммы в теории поля. Скажем, для безмассового скалярного поля в n -мерном пространстве-времени стандартный пропагатор между пространственно-временными точками x и y равен $\langle y | \square^{-1} | x \rangle$. Здесь \square — даламбертиан, или волновой оператор: $\square = \eta^{\mu\nu} (\partial^2 / \partial x^\mu \partial x^\nu)$. Пропагатор, обратный к волновому оператору, может быть

представлен следующим образом:

$$\langle y | \square^{-1} | x \rangle = \int_0^\infty d\tau \langle y | e^{-\tau \square} | x \rangle. \quad (1.4.1)$$

Гамильтониан нерелятивистской частицы массы m и $n+1$ -мерном пространстве-времени равен $p^2/2m = \square/2m$; для $m = 1/2$ он просто равен \square . Таким образом, оператор $e^{-\tau \square}$ в правой

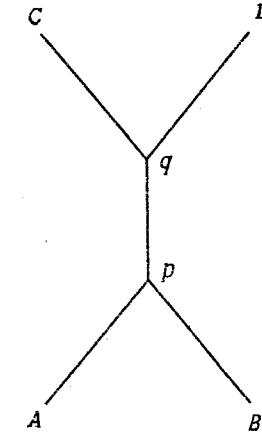


Рис. 1.5. Типичная фейнмановская диаграмма в квантовой теории поля. Четыре внешние частицы, появляющиеся в пространственно-временных точках A, B, C и D, участвуют в процессе рассеяния на уровне древесных диаграмм, взаимодействия происходят в точках p и q.

части (1.4.1) не что иное, как оператор, описывающий распространение нерелятивистской частицы в мнимом времени τ ; в этом случае имеет место известная формула с континуальным интегралом:

$$\langle y | \square^{-1} | x \rangle = \int_0^\infty d\tau \int_x^y Dx(t) \exp \left\{ -\frac{1}{4} \int_0^\tau dt \dot{x}^2 \right\}. \quad (1.4.2)$$

В этой формуле показатель экспоненты является как раз действием классической точечной частицы, а символ $\int_x^y Dx(t)$ означает интеграл по всевозможным путям $x(t)$, начинающимся в точке x в момент $t=0$ и оканчивающимся в точке y в момент $t=\tau$. Правую часть (1.4.2) интуитивно понять довольно просто. Мы интегрируем по произвольному положительному соб-

ственному времени τ частицы, распространяющейся из точки x в точку y , и по всем траекториям $x(t)$, по которым проходит частица в собственном времени τ из точки x в точку y .

Посмотрим теперь на типичную фейнмановскую диаграмму, изображенную на рис. 1.5. Вместо того чтобы вычислить эту диаграмму как обычно, в импульсном пространстве, давайте рассматривать ее в координатном пространстве, так что внешние частицы появляются в пространственно-временных точках A, B, C и D , а взаимодействия происходят в точках p и q . В соответствии с обычными правилами вычисления амплитуды из фейнмановской диаграммы каждая линия на рис. 1.5 соответствует пропагатору. Используя представление (1.4.2) для пропагатора, можно сказать, что каждая линия соответствует интегрированию по траектории частицы, распространяющейся в пространстве-времени между указанными точками. При вычислении выражения, соответствующего диаграмме, необходимо также интегрировать по координатам точек p и q и учесть определенные множители в вершинах, которые зависят от конкретной рассматриваемой теории. Основным моментом во всем этом является то, что фейнмановская диаграмма может рассматриваться как отражение подлинной истории частиц, распространяющихся в пространстве-времени и сливающихся и расщепляющихся в вершинах взаимодействия:

1.4.1. Расщепление струн

Попробуем сформулировать теперь аналог этого в струнной теории. Точно так же, как точечная частица может расщепиться на две частицы (см. рис. 1.6, *a*), струна может расщепиться на две струны; для замкнутой струны это изображено на рис. 1.6, *b*. Существенное различие заключается в том, что когда точечная частица расщепляется на две, имеется хорошо определенное лоренц-инвариантное понятие пространственно-временной точки, в которой это расщепление произошло. Такой точкой просто является вершина взаимодействия в фейнмановской диаграмме. Однако в случае расщепления струны на две нет хорошо определенного понятия, устанавливающего, когда и где это расщепление происходит. На рис. 1.6, *b* мы схематически изобразили поверхности постоянного времени в двух различных лоренцевских системах отсчета 1 и 2. В системе 1 расщепление произошло в точке, отмеченной черным кружочком. По отношению к этой точке в прошлом была только одна струна, а в будущем их уже две. В системе 2 точка, отмеченная черным кружочком, ничем особенным не выделяется. В этой системе точка, отмеченная белым кружочком, является точкой, где произошло взаимодействие.

Это различие имеет много последствий. Прежде всего, частично по этой причине существует большое количество квантовых теорий поля точечных частиц и лишь несколько струнных теорий. Так как диаграмма, изображенная на рис. 1.6, *a*, обладает лоренц-инвариантной вершиной взаимодействия, мы можем

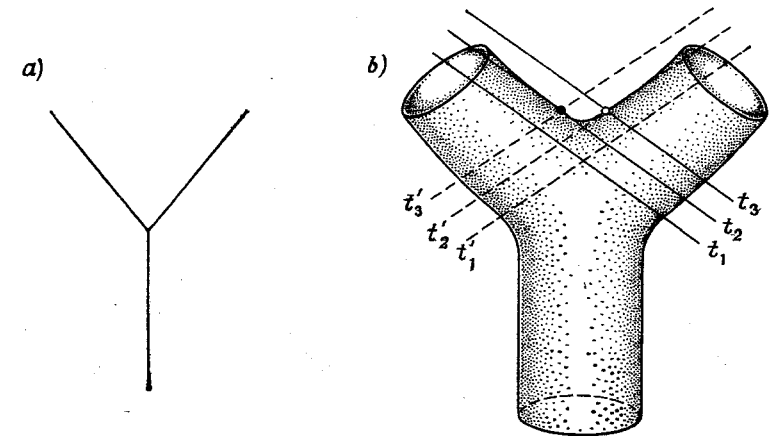


Рис. 1.6. Вершины взаимодействия в теории поля и в теории струн: на рис. *a* точечная частица расщепляется на две; на рис. *b* замкнутая струна расщепляется на две. На рис. *b* поверхности постоянного времени в двух различных лоренцевских системах отсчета 1 и 2 изображены сплошной и штриховой линиями соответственно.

приписать ей некоторый специальный множитель при определении фейнмановской амплитуды. Выбор этих множителей соответствует выбору той квантовой теории поля, которую предстоит изучить. С другой стороны, на рис. 1.6, *b* любая часть диаграммы локально выглядит как распространение свободной струны; и если мы однажды сформулировали правила распространения свободной струны, то никакого дополнительного выбора не остается. Нам все еще необходимо понять, почему для свободной струны имеется так мало возможностей; это следует из трудностей, возникающих при попытках проквантовать систему, описываемую действием (1.3.8) и его различными обобщениями. Но как только свободная теория сформулирована, вид взаимодействия уже однозначно определен по той простой причине, что на рис. 1.6, *b* нет точки, соответствующей лоренц-инвариантному взаимодействию.

С этим тесно связано эвристическое объяснение того факта, что струнные теории свободны от ультрафиолетовых расходимостей, которыми страдают квантовые теории поля точечных час-

тиц. На рис. 1.7 мы изобразили однопетлевую фейнмановскую диаграмму, которая в квантовой теории гравитации расходилась бы в ультрафиолетовой области, и соответствующую диаграмму замкнутой струны. Струнная диаграмма на рис. 1.7, *b* отличается от квантовополевой диаграммы на рис. 1.7, *a* тем, что каждая мировая линия или пропагатор точечной частицы заменены на мировую трубку распространяющейся замкнутой струны. Вклад от обеих диаграмм вычисляется интегрированием

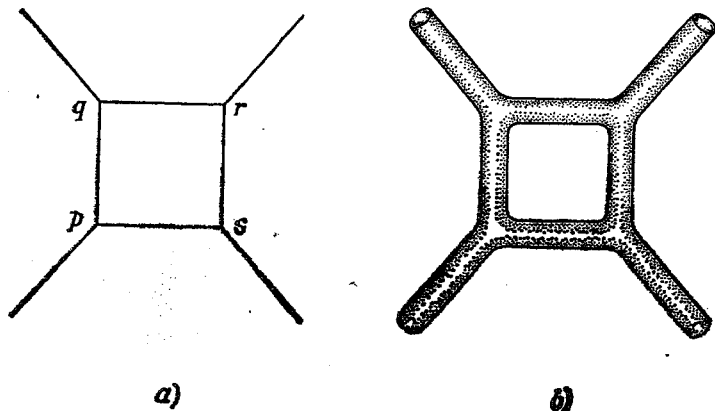


Рис. 1.7. Здесь схематически изображены: (а) однопетлевая фейнмановская диаграмма (точки взаимодействия обозначены через p , q , r и s) и (б) соответствующая струнная диаграмма для замкнутых струн.

по пространственно-временным траекториям распространяющихся точек или струн. До тех пор пока струны, составляющие диаграмму, изображенную на рис. 1.7, *b*, имеют очень маленький радиус, эту диаграмму можно свести приблизительно к диаграмме на рис. 1.7, *a*, демонстрируя тем самым возникновение полевой теории в виде длинноволнового предела струнной теории.

Почему в выражении, соответствующем диаграмме на рис. 1.7, *a*, имеются ультрафиолетовые расходимости, а в выражении, соответствующем диаграмме на рис. 1.7, *b*, их нет? Основное различие заключается в том, что диаграмма на рис. 1.7, *a* содержит хорошо определенные вершины взаимодействия, обозначенные буквами p , q , r и s . Ультрафиолетовые расходимости возникают по той причине, что при $p = q = r = s$ пропагаторы, соединяющие эти вершины, одновременно пропадают. На струнной диаграмме, изображенной на рис. 1.7, *b*, нет хорошо определенных аналогов вершин взаимодействия p , q , r и s квантовополевой диаграммы. Соответственно нет и аналога опасной

области $p = q = r = s$. Хотя этот факт несомненно не доказывает конечность диаграммы на рис. 1.7, *b*, которая может быть установлена только прямым вычислением при наличии необходимой для этого процедуры, он служит хорошим указанием на это.

Другим основным различием между квантовополевыми и струнными диаграммами является то, что струнных диаграмм

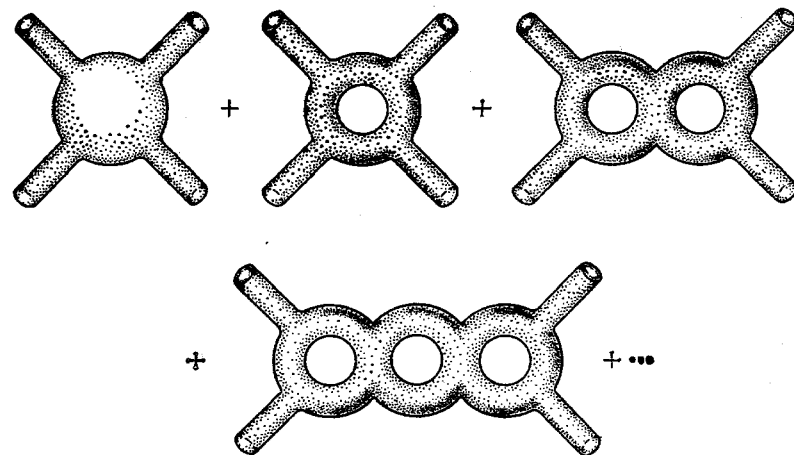


Рис. 1.8. Здесь мы схематически изобразили все диаграммы замкнутой струны, которые дают вклад в четырехчастичную амплитуду; в каждом порядке теории возмущений имеется одна и только одна диаграмма.

намного меньше. Каждой квантовополевой диаграмме сопоставляется диаграмма струнной теории, полученная превращением мировых линий в мировые трубки. Для замкнутых струн это изображено на рис. 1.9. Но при таком сопоставлении может оказаться, что несколько различных фейнмановских диаграмм приводят к одной и той же струнной диаграмме, как видно из этого рисунка. В теории ориентированных замкнутых струн на самом деле имеется одна и только одна фейнмановская диаграмма в любом рассматриваемом порядке теории возмущений, как это показано на рис. 1.8. Это соответствует тому факту, что двумерные ориентированные многообразия полностью специфицируются заданием числа ручек (или петель) и дырок (или внешних частиц). Классификация струнных диаграмм в теориях открытых или замкнутых неориентированных струн сложнее, но по-прежнему в этих теориях струнных диаграмм намного меньше, чем фейнмановских. Причина того, что струнная теория с небольшим числом диаграмм может воспроизвести при низких

энергиях полевою теорию с многими фейнмановскими диаграммами, состоит в том, что в различных пределах интегрирования по параметрам, характеризующим размеры и форму мировой поверхности струны, одна и та же струнная диаграмма может

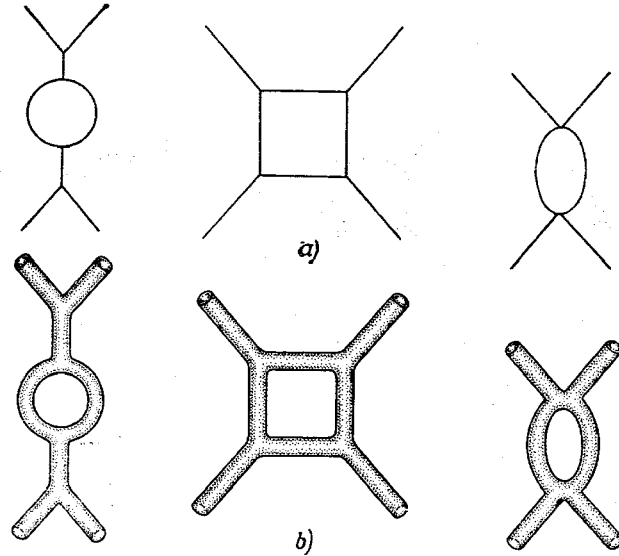


Рис. 1.9. Несколько различных теоретикополевых диаграмм могут стать изоморфными, превратившись в струнные диаграммы. На рис. *a* изображены различные фейнмановские диаграммы, которые в теории поля представляют собой однопетлевые поправки к четырехчастичной амплитуде, на рис. *b* изображены соответствующие диаграммы замкнутой струны. Все диаграммы замкнутой струны на рис. *b* имеют одну и ту же топологию, так что они представляют различные области интегрирования в выражении, соответствующем одной и той же струнной диаграмме.

приблизительно воспроизвести большое количество фейнмановских диаграмм. Например, однопетлевая диаграмма на рис. 1.8 сводится в различных пределах к диаграммам, изображенным на рис. 1.9.

1.4.2. Вершинные операторы

На первый взгляд, вычисление интеграла по мировым поверхностям струны, соответствующим одной из диаграмм на рис. 1.9, представляет собой довольно трудную задачу. Она становится разрешимой, если учесть инвариантность действия (1.3.8) относительно конформных преобразований, меняющих масштаб метрики мировой поверхности $h_{\alpha\beta} \rightarrow e^{\phi} h_{\alpha\beta}$. Подходящим выбором ϕ мировая поверхность на рис. 1.10, *a*, имеющая

трубки, уходящие в далекое прошлое и далекое будущее и соответствующие налетающим и уходящим струнам, может быть превращена в компактную поверхность, изображенную на рис. 1.10, *b*. В то же время дырки на мировой поверхности струны, соответствующие внешним состояниям, затягиваются, и внешние струнные состояния представляются в виде точек, как это указано на рис. 1.10, *b*.

Какой тип конформных преобразований метрики может привести к таким чудесам? Рассмотрим наипростейший случай мировой поверхности, с только одной налетающей струной и одной

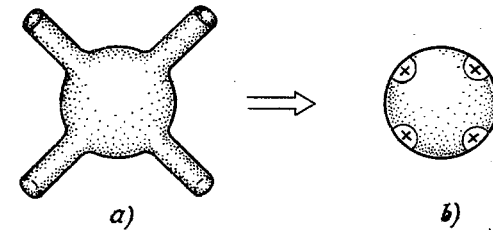


Рис. 1.10. Конформная инвариантность позволяет вычислять струнные диаграммы. Помимо всего прочего оказывается возможным компактифицировать мировую поверхность, затягивая отверстия, соответствующие налетающим и уходящим частицам. С помощью этой процедуры внешние струнные состояния, скажем на диаграмме, изображенной на рис. *a*, проецируются в точки, обозначенные \otimes на рис. *b*: в эти точки должны вставляться соответствующие локальные операторы.

уходящей, которая представляется в виде цилиндра с метрикой $ds^2 = dz^2 + d\varphi^2$, $-\infty < z < \infty$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, изображенного на рис. 1.11, *a*. Если мы положим $z = \ln r$, то $ds^2 = r^{-2}(dr^2 + r^2 d\varphi^2)$. Конформным преобразованием $ds^2 \rightarrow d\tilde{s}^2 = r^2 ds^2$ мы получим новую метрику $d\tilde{s}^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2$, в которой можно узнать метрику плоскости. Налетающая струна, которая была окружностью в далеком прошлом ($z = -\infty$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$), спроецировалась в точку, расположенную на конечном расстоянии ($r = 0$), как это показано на рис. 1.11, *b*, а уходящая струна спроецировалась в точку на бесконечности. Если мы хотим спроецировать и налетающие, и уходящие струны в точки на конечном расстоянии, необходимо, чтобы конформным множителем было не r^2 , а некоторая функция, которая ведет себя как r^2 при малых r и как r^{-2} при больших r . Если, например, мы изменим масштаб метрики ds^2 с помощью конформного множителя $r^2(1 + r^2/a^2)^{-2}$, то новая метрика $d\tilde{s}^2 = (dr^2 + r^2 d\varphi^2)/(1 + r^2/a^2)^2$ является стандартной метрикой на сфере. Налетающая и уходящая струны являются теперь точками, расположенными на конечном расстоянии, а именно южным и северным полюсами сферы, изобра-

женной на рис. 1.11, с. Для более сложных струнных диаграмм со многими внешними линиями конформный множитель e^{φ} можно подобрать так, чтобы каждая из них отобразилась в точку, расположенную на конечном расстоянии. Суть дела состоит в том, что для отображения данной налетающей или уходящей струны L в точку, расположенную на конечном расстоянии, важно только *асимптотическое* поведение e^{φ} на L , т. е. достаточно далеко на ней; асимптотическое поведение e^{φ} может быть выбрано независимо для каждой струны L . Мы более детально

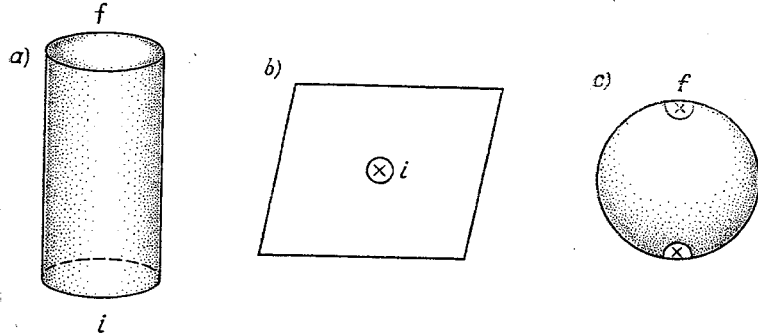


Рис. 1.11. Мировая поверхность с одной налетающей и одной уходящей струной (изображенная на рис. а) может быть описаным в тексте способом конформно отображена во многие другие фигуры. Ее можно отобразить в плоскость (рис. б), на которой налетающая струна появляется в начале координат, а уходящая струна — на бесконечности (не показано) или в сфере (рис. с), где налетающая и уходящая струны появляются в южном и северном полюсах.

обсудим конформные отображения струнных диаграмм в последующих главах и специально — в гл. 11.

Если мы конформно отобразим внешние струнные состояния в точки, расположенные на конечном расстоянии, их квантовые числа не будут просто утеряны. Для каждой точки, отмеченной знаком \otimes на рис. 1.10, в которую отобразилось внешнее струнное состояние, должен появиться некоторый локальный оператор с квантовыми числами этого струнного состояния. Таким образом, мы приходим к идее, что для каждого струнного состояния мы должны найти некоторый локальный оператор в $(1+1)$ -мерной квантовой теории поля, описывающий распространение струны. Локальный оператор, который при этом соответствует данному струнному состоянию $|\Lambda\rangle$, называется «вершинным оператором» для испускания и поглощения состояния $|\Lambda\rangle$. Эти вершинные операторы оказываются очень полезным инструментом.

Не претендуя на строгость, попытаемся просто угадать вид приемлемых вершинных операторов в случае замкнутых струн. Прежде всего для каждой частицы типа Λ в теории замкнутых струн найдем локальный оператор $W_{\Lambda}(\sigma, \tau)$, являющийся скаляром относительно репараметризации σ и τ (так как нет предпочтительной репараметризации, см. рис. 1.10) и имеющий те же лоренцевские квантовые числа, что и Λ ; W_{Λ} будет полиномом по X^{μ} и его производным. Например, если Λ является тахионом, имеющим спин нуль относительно 26 -мерных преобразований Лоренца, то можно просто взять $W = 1$. Если же Λ — гравитон G , то оператор W должен иметь спин два; минимальным оператором спина два был бы оператор $W_G^{\mu\nu} = \partial_{\alpha} X^{\mu} \partial^{\alpha} X^{\nu}$, соответствующий гравитону с поляризацией $\mu\nu$. Нормальное упорядочение для этого оператора и других рассматриваемых далее (таких как $e^{ik \cdot X}$) будет предполагаться и не будет указываться явно. Если Λ — безмассовый дилатон D , спин которого равен нулю, то необходимо вновь взять оператор с нулевым спином; минимальным оператором, ортогональным к тахионному оператору, является оператор $W_D \sim \partial_{\alpha} X_{\mu} \partial^{\alpha} X^{\mu}$.

Операторы W_{Λ} , которые мы только что определили, при преобразованиях Лоренца преобразуются должным образом, но нужно еще рассмотреть пространственно-временные трансляции. При глобальных преобразованиях $X^{\mu} \rightarrow X^{\mu} + a^{\mu}$, когда положение каждой струны сдвигается на a^{μ} , волновая функция внешнего состояния с импульсом k^{μ} умножается на $e^{ik \cdot a}$. Наипростейшим квантовым оператором, который при преобразованиях $X^{\mu} \rightarrow X^{\mu} + a^{\mu}$ приобретает такой множитель, является оператор $e^{ik \cdot X}$, поэтому мы постулируем присутствие этого оператора для испускания или поглощения струны с импульсом k^{μ} . Заметим к тому же, что точка, помеченная \otimes на рис. 1.10, в которую был вставлен данный вершинный оператор, на поверхности может появиться где угодно. Учитывая все эти факты, мы приходим к необходимости определить оператор

$$V_{\Lambda}(k) = \int d^2\sigma \sqrt{-h} W_{\Lambda}(\sigma, \tau) e^{ik \cdot X} \quad (1.4.3)$$

для описания испускания или поглощения струнного состояния типа Λ и с импульсом k^{μ} .

1.4.3. Применение вершинных операторов

Как эти операторы используются на практике? Из рис. 1.12 следует, что амплитуда рассеяния частиц типов $\Lambda_1, \Lambda_2, \dots, \Lambda_m$ и с импульсами k_1, k_2, \dots, k_m должна быть функциональным интегралом в $(1+1)$ -мерной квантовой теории поля, описываю-

щим распространение струны со вставками операторов V_{Δ} . Такая амплитуда имела бы вид (мы положили $T = 1/\pi$)

$$A(\Lambda_1, k_1; \Lambda_2; k_2; \dots; \Lambda_M, k_M) = \kappa^{M-2} \int DX(\sigma, \tau) Dh_{\alpha\beta}(\sigma, \tau) \times \exp - \left\{ \frac{1}{2\pi} \int d^2\sigma \sqrt{-h} h^{\alpha\beta} \partial_{\alpha} X^{\mu} \partial_{\beta} X_{\mu} \right\} \cdot \prod_{i=1}^M V_{\Delta_i}(k_i). \quad (1.4.4)$$

Здесь κ является константой взаимодействия, а символы DX^{μ} и $Dh_{\alpha\beta}$ обозначают функциональные меры на компактной мировой поверхности струны, изображенной на рис. 1.11. Мы требуем, чтобы для вычисления древесных диаграмм поверхность

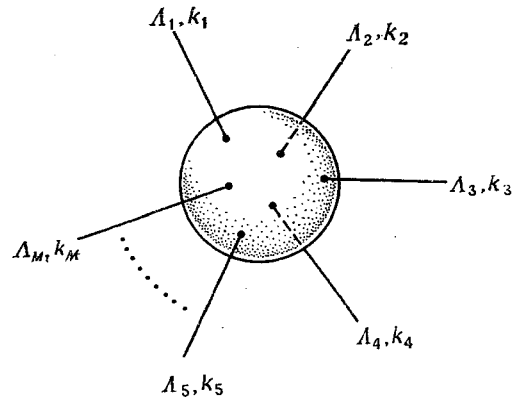


Рис. 1.12. Представление амплитуды рассеяния M внешних частиц типа $\Lambda_1, \Lambda_2, \dots, \Lambda_M$ с импульсами k_1, k_2, \dots, k_M .

была топологически эквивалентна сфере, однопетлевых диаграмм — тору, а n -петлевых диаграмм — поверхности с n ручками (часто называемой римановой поверхностью рода n).

Хотя можно дать строгое обоснование связи формулы (1.4.4) со струнной диаграммой типа той, что изображена на рис. 1.7, *b*, здесь мы этого делать не будем. (Это будет одной из наших задач в последующих главах, особенно в гл. 11.) Действительно, при первом знакомстве со струнной теорией читатель может просто считать формулу (1.4.4) *определением* того, что должно быть амплитудой рассеяния струн. В настоящее время мы, конечно, не знаем, какой формализм струнной теории является более фундаментальным, и в качестве отправной точки формулировка, связанная с вершинными операторами в (1.4.4), столь же хороша, как и любая другая.

Формула (1.4.4) должна казаться довольно необычной. В ней амплитуда рассеяния в 26-мерном пространстве-времени выражается через корреляционную функцию во вспомогательной $(1+1)$ -мерной квантовой теории поля. В соответствии со стандартным формализмом LSZ в квантовой теории поля корреляционные функции в $(1+1)$ -мерной теории поля могут быть непосредственно связаны с процессом рассеяния в $(1+1)$ -мерном мире. То, что они вместо этого могут интерпретироваться как амплитуды рассеяния в 26-мерии, является особенностью струнной теории. Это — одно из многих удивительных и все еще

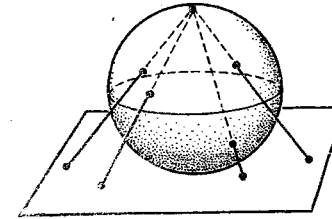


Рис. 1.13. Стереографическая проекция две-сферы S^2 на плоскость.

в значительной степени загадочных соотношений и аналогий между явлениями, происходящими на мировой поверхности струны и в пространстве времени.

На самом деле вычисление амплитуды по формуле (1.4.4) было бы безнадежной задачей, если бы не конформная инвариантность, о которой говорилось ранее. Симметрический (2×2) -тензор h имеет три независимые компоненты. Репараметризацией мировой поверхности можно исключить две из них. Как уже раньше отмечалось, локальным выбором параметров σ и τ можно сделать так, чтобы $h = e^{\varphi} h_0$, где h_0 — любая желаемая метрика на мировой поверхности струны. Согласно классической теореме Римана, это можно сделать и глобально в случае, если мировая поверхность является сферой, т. е. для древесных диаграмм. Мы сейчас сосредоточим наше внимание на этом случае, с тем чтобы вычислить древесные диаграммы явно.

Только что процитированная теорема утверждает, что выбором параметризации можно положить $h = e^{\varphi} h_0$, где h_0 , например, стандартная метрика на сфере S^2 . В действительности еще удобнее воспользоваться конформной инвариантностью и сделать стереографическую проекцию сферы на (x, y) -плоскость R^2 , как изображено на рис. 1.13. Таким образом, по существу мы можем взять $h^{\alpha\beta} = e^{\varphi} \delta^{\alpha\beta}$ (т. е. $ds^2 = e^{\varphi}(dx^2 + dy^2)$), где теперь x и y — координаты на плоскости. Более того, в силу конформ-

ной инвариантности множитель e^φ выпадает и формула (1.4.4) принимает более простой вид:

$$A = \kappa^{M-2} \int DX(x, y) \exp - \left\{ \frac{1}{2\pi} \int d^2x \partial_\alpha X_\mu \partial^\alpha X^\mu \right\} \prod_{i=1}^M V_{\Lambda_i}(k_i) = \kappa^{M-2} \left\langle \prod_{i=1}^M V_{\Lambda_i}(k_i) \right\rangle. \quad (1.4.5)$$

Важным моментом здесь является то, что мы теперь имеем дело со свободной теорией в плоском двумерном мире, поэтому можно надеяться, что нам удастся вычислить амплитуду (1.4.5).

При переходе от (1.4.4) к (1.4.5) интеграл по h исчез как-то сам собой. На самом же деле некоторые тонкости этой процедуры следовало бы отметить. Прежде всего необходимо спросить, действительно ли конформная инвариантность, которой мы воспользовались, чтобы убрать φ в величине $h = e^\varphi h_0$, имеет место или же появляется квантовая аномалия. Чтобы ответить на этот вопрос, важно учесть духи Фаддеева — Попова, возникающие при выборе калибровки $h = e^\varphi h_0$. Мы отложим этот технически несколько громоздкий анализ до гл. 3. Здесь же мы приведем только результат: конформная инвариантность, а значит, и вывод (1.4.5), имеет место тогда и только тогда, когда число измерений равно 26.

Более непосредственно нас заботит то, что выбор $ds^2 = e^\varphi(dx^2 + dy^2)$ не совсем однозначно фиксирует параметризацию. Такой вид h сохраняет возможность глобальных конформных преобразований мировой поверхности S^2 . Легче всего эти конформные преобразования записываются через $z = x + iy$. В терминах этой комплексной координаты метрика мировой поверхности имеет вид $ds^2 = e^\varphi dz d\bar{z}$. Если мы заменим координаты, переходя от z к некоторой аналитической функции $w(z)$, так что $dz = (\partial z / \partial w) dw$, метрика станет равной $ds^2 = e^\varphi |\partial z / \partial w|^2 dw d\bar{w}$, что по-прежнему соответствует конформной калибровке. Это те преобразования координат, которые допускаются выбором калибровки $ds^2 = e^\varphi(dx^2 + dy^2)$.

Таким образом, инфинитезимально остаточная калибровочная инвариантность — это инвариантность относительно преобразований $dz = \varepsilon(z)$, где $\varepsilon(z)$ — аналитическая функция от z . В действительности ε не является произвольной аналитической функцией от z , а подчиняется сильным ограничениям, причина которых сейчас будет сформулирована. Хотя мы сделали стереографическую проекцию на комплексную z -плоскость, мировой поверхностью струны первоначально была сфера S^2 , которую можно считать римановой сферой, состоящей из плоскости Z и «точки на бесконечности». Мы должны потребовать, чтобы ин-

финитезимальное координатное преобразование $dz = \varepsilon(z)$ не имело полюса в точке на бесконечности. Анализ удобно провести в терминах новой координаты $\bar{z} = 1/z$, когда точка на бесконечности является обычной точкой, а именно началом координат, $\bar{z} = 0$. Координатное преобразование $dz = \varepsilon(z)$ в новой координатной системе принимает вид $\delta\bar{z} = -\delta z / z^2 = -\varepsilon(z) / z^2$. Оно не сингулярно в точке $\bar{z} = 0$ тогда и только тогда, когда $\varepsilon(z) / z^2$ конечно при $z \rightarrow \infty$. Следовательно, функция должна быть квадратичным полиномом; преобразования остаточной симметрии, не устраняемой выбором конформной калибровки, инфинитезимально имеют вид $\delta z = a + bz + cz^2$, где a, b, c — три произвольных комплексных параметра. Эти преобразования генерируют группу, изоморфную группе $SL(2, C)$ комплексных (2×2) -матриц с единичным детерминантом. Эта подгруппа первоначальной группы репараметризационных преобразований остается группой инвариантности и после фиксации калибровки, которая привела нас к формуле (1.4.5), поэтому мы должны будем вскоре завершить фиксацию калибровки.

1.4.4. Вычисление амплитуды рассеяния

Вычислить амплитуду (1.4.5) в действительности нетрудно, когда все внешние частицы являются тахионами и $V_0 = \int d^2z e^{ik \cdot X}$. В этом случае формула (1.4.5) сводится к

$$A = \kappa^{M-2} \int \prod_{i=1}^M d^2z_i \cdot \left\langle \prod_{i=1}^M \exp \{ i k_i \cdot X(z_i) \} \right\rangle, \quad (1.4.6)$$

где $\langle \rangle$ означает среднее по отношению к гауссовой мере, определенной, как показано в (1.4.5), функциональным интегралом для свободного поля. Чтобы вычислить (1.4.6), напомним стандартную формулу для гауссовых интегралов (получаемую допущением показателя экспоненты до полного квадрата)

$$\left\langle \exp \left\{ \int id^2z J_\mu(z) X^\mu(z) \right\} \right\rangle = \exp \left\{ \frac{1}{4} \int d^2z d^2z' J_\mu(z) G(z, z') J^\mu(z') \right\}, \quad (1.4.7)$$

где $J_\mu(z)$ — произвольный источник, а $G(z, z')$ — пропагатор свободного поля X^μ . В (1.4.6) мы имеем дело со специальным случаем, когда $J^\mu(z) = \sum_{i=1}^M k_i^\mu \delta^2(z - z_i)$. Таким образом, (1.4.6) сводится к

$$A = \kappa^{M-2} \int \prod_{i=1}^M d^2z_i \prod_{i < j} \exp \left\{ \frac{1}{2} k_i \cdot k_j G(z_i, z_j) \right\}. \quad (1.4.8)$$

Из-за нормального упорядочения мы не включили в произведение в (1.4.8) члены с $i = j$. Что касается пропагатора в (1.4.8), то он является функцией Грина двумерного уравнения Лапласа

$$\Delta_2 G(z, z') = 2\pi \delta^2(z - z') \quad (1.4.9)$$

(Δ_2 — лапласиан по переменной z). Это уравнение имеет решение

$$G(z, z') = -2\pi \frac{d^2 q}{4\pi^2} \frac{e^{iq \cdot (z - z')}}{q^2} = \ln(\mu |z - z'|), \quad (1.4.10)$$

где μ — произвольный параметр инфракрасного обрезания, необходимого для того, чтобы не иметь проблем с расходимостью в точке $q = 0$ в (1.4.10). Поэтому из (1.4.8) мы получаем

$$A = \kappa^{M-2} \int \prod_j d^2 z_j \prod_{i < j} |z_i - z_j|^{k_i \cdot k_j / 2}, \quad (1.4.11)$$

где зависящий от μ множитель включен в неизвестную константу взаимодействия. (Точнее, зависимость от μ уничтожается аналогичной зависимостью, возникающей из-за нормального упорядочения, или, другими словами, из-за членов в (1.4.8), где $i = j$.)

Формула (1.4.11) очень близка к нашей конечной формуле для амплитуды рассеяния. Она выражает M -точечную амплитуду не в виде функционального интеграла, а в виде интеграла по конечному числу переменных, координатам z_i ($i = 1, \dots, M$) точек, в которых внешние струны входят в мировую поверхность. Однако интеграл (1.4.11) бесконечен. Причина этой бесконечности заключается в том, что как уже ранее отмечалось, фиксация калибровки, которую мы использовали для вывода (1.4.11), не полностью устраняет репараметризационную инвариантность, а сохраняет симметрию относительно преобразований $\delta z = a + bz + z^2$, где $z = x + iy$. Из-за того что остаточную инвариантность нам устранить не удалось, интеграл в (1.4.11) содержит в себе интеграл по бесконечному объему группы $SL(2, C)$. Фиксация оставшейся калибровочной инвариантности осуществляется просто. Три комплексных параметра группы $SL(2, C)$ можно воспользоваться, чтобы трем переменным z_i придать любые желаемые значения. Удобно (и общепринято) выбрать их так, чтобы $z_1 = 0$, $z_2 = 1$, $z_3 = \infty$. В пределе, когда $z_3 \rightarrow \infty$, члены $|z_3 - z_j|^{k_3 \cdot k_j / 2}$ в (1.4.11) можно отбросить. Это можно сделать по той причине, что при $|z_3| \rightarrow \infty$ эти члены становятся независимыми от z_j для $j \neq 3$, а также от импульсов, так как (с учетом закона сохранения импульса)

$$\prod_{j \neq 3} |z_3 - z_j|^{k_3 \cdot k_j / 2} = |z_3|^{-k_3^2 / 2} = |z_3|^{m^2 / 2}, \quad (1.4.12)$$

где m — квадрат массы основного состояния. (Как мы вскоре увидим, инвариантность относительно группы $SL(2, C)$ требует, чтобы $m^2 = -8$.) Мы просто отбросим этот множитель, так как он не зависит от внешних импульсов, точнее, он сокращается с минидетерминантом Фаддеева—Попова, который возникает при фиксации $SL(2, C)$ -калибровки. Таким образом, амплитуда рассеяния сводится к

$$A = \kappa^{M-2} \int \prod_{l=4}^M d^2 z_l \prod_{j=4}^m |z_j|^{k_1 \cdot k_j / 2} |1 - z_j|^{k_2 \cdot k_j / 2} \times \prod_{4 \leq i < j \leq M} |z_i - z_j|^{k_i \cdot k_j / 2}. \quad (1.4.13)$$

Для четырехточечной функции она принимает вид

$$A = \kappa^2 \int d^2 z_4 |z_4|^{k_1 \cdot k_4 / 2} |1 - z_4|^{k_2 \cdot k_4 / 2}. \quad (1.4.14)$$

Эта четырехточечная функция была впервые введена Вирасоро и обобщена Шапиро на случай M -точечной амплитуды.

1.4.5. Масса гравитона

Читатель немедленно заметит, что амплитуда (1.4.14) не является явно кроссингсимметричной, т. е. она не обладает никакой явной симметрией относительно перестановок импульсов k_1, \dots, k_4 . Можно проверить вручную, что (1.4.14) кроссингсимметрична тогда и только тогда, когда все импульсы внешних тахионных линий лежат на массовой оболочке, $k_j^2 = 8$, $j = 1, \dots, 4$. Это один из способов определения массы тахиона, и он приводит к тому же ответу, что и квантование струнного действия, которое мы изложили ранее. Более удовлетворительный способ понять этот важный момент — это заметить, что выражение для амплитуды (1.4.8), хотя и неприемлемо, так как оно содержит нежелательное интегрирование по многообразию группы $SL(2, C)$, явно кроссинг-симметрично. Существенным шагом при переходе от (1.4.8) к (1.4.14) была фиксация калибровки $SL(2, C)$, и амплитуда (1.4.8) будет кроссинг-симметрична, если эта $SL(2, C)$ -симметрия действительно имеет место. Чтобы убедиться в кроссинг-симметричности (1.4.14), мы должны быть уверены, что (по крайней мере на этом уровне) в $SL(2, C)$ -инвариантности нет никакой аномалии.

Один из аспектов $SL(2, C)$ -симметрии проявляется в том, что проинтегрированный вершинный оператор $V = \int d^2 \sigma e^{ik \cdot X(\sigma)}$

должен быть $SL(2, C)$ -инвариантным. В конце концов преобразование $SL(2, C)$ является специальным случаем репараметризации мировой поверхности, и оператор, описывающий испускание или поглощение струны где угодно на мировой поверхности, должен быть инвариантным относительно репараметризации. Частным случаем преобразования $SL(2, C)$ является глобальное изменение масштаба мировой поверхности $z \rightarrow tz$ (или инфинитезимально $\delta z = bz$). Так как мера интегрирования d^2z приобретает множитель t^2 при таком преобразовании, то V может быть инвариантным, если только $e^{ik \cdot X}$ преобразуется с множителем t^{-2} . Это фактически означает, что квантовополевой оператор $e^{ik \cdot X}$ должен быть оператором размерности два. На первый взгляд это кажется невозможным, так как глобальная масштабная инвариантность струнного действия (1.3.9) с фиксированной калибровкой требует безразмерности вектора X^μ ; в классической теории, если X безразмерен, то таковым должен быть и множитель $e^{ik \cdot X}$. Единственная надежда, которая остается, — это найти нужную квантовую аномальную размерность оператора $e^{ik \cdot X}$. Обнаружение аномальных размерностей в свободной теории поля довольно необычно, но оказывается, что для свободных бесспиновых полей в пространстве размерности $(1+1)$ они действительно появляются.

Самый быстрый способ определить аномальную размерность оператора $e^{ik \cdot X}$ — это изучить двухточечную функцию этого оператора. Вообще говоря, в масштабной инвариантной теории двухточечной функцией оператора Y размерности p является $\langle Y(z)Y(0) \rangle = C|z|^{-2p}$, где C — некоторая константа. Из нашего обсуждения, приведенного выше, следует, что двухточечной функцией оператора $e^{ik \cdot X}$ является $\langle e^{ik \cdot X}(z)e^{-ik \cdot X}(0) \rangle = |z|^{-k^2/2}$. Отсюда мы можем сделать вывод, что $e^{ik \cdot X}$ является оператором (аномальной) размерности $k^2/4$. Требуя, чтобы он имел размерность, равную двум, мы определяем квадрат массы тахиона $m^2 = -k^2 = -8$. Действительно, читатель легко может проверить, что M -точечная амплитуда (1.4.8) инвариантна относительно глобальных масштабных преобразований при условии, что $m^2 = -8$, а импульс сохраняется ($\sum k_i = 0$). Можно также установить, что при тех же условиях амплитуда в (1.4.8) обладает полной $SL(2, C)$ -инвариантностью.

То, что мы определили формулой (1.4.13), было амплитудой рассеяния n тахионов. Эта амплитуда имеет прекрасное ультрафиолетовое поведение, благодаря которому струнная теория и приобрела известность. Однако, вероятно, еще больший теоретический интерес представляет задача построения амплитуды рассеяния гравитонов со столь же прекрасным ультрафиолетовым поведением. Это построение можно провести аналогично.

Нужно просто заменить тахионный оператор $V = \int d^2\sigma e^{ik \cdot X}$ оператором гравитона $V^{\mu\nu} = \int d^2\sigma \partial_\alpha X^\mu \partial^\alpha X^\nu e^{ik \cdot X}$ и повторить все приведенные выше вычисления. Они окажутся намного сложнее, чем в тахионном случае (но значительно проще вычислений гравитон-гравитонного рассеяния в теории поля). Мы отложим вычисление амплитуды гравитон-гравитонного рассеяния до гл. 7, где такие вычисления будут проведены в еще более интересном случае суперструнных теорий, которые совершенно последовательны и не содержат тахионов. Здесь же мы только вычислим массу гравитона. Так же как и масса тахиона, она может быть определена из требования глобальной масштабной инвариантности проинтегрированного вершинного оператора. Это означает, что размерность оператора $W^{\mu\nu} = \partial_\alpha X^\mu \partial^\alpha X^\nu e^{ik \cdot X}$ должна быть равна двум. Отличие от тахионного случая заключается в том, что из-за наличия двух производных размерность $W^{\mu\nu}$ уже на классическом уровне равна двум, а поэтому в данном случае мы хотим, чтобы аномальная размерность $e^{ik \cdot X}$ была равна нулю. Так как этот оператор в действительности имеет аномальную размерность $k^2/4$, то требование нулевой аномальной размерности означает, что $k^2 = 0$ или, другими словами, что гравитон является безмассовой частицей. Это, несомненно, один из наиболее эффективных способов убедиться в том, что в струнной теории возникают безмассовые частицы спина два. Точно так же можно увидеть, что дилатон с оператором $V_D = \int d^2\sigma \partial_\alpha X_\mu \partial^\alpha X^\mu e^{ik \cdot X}$ или частица, описываемая антисимметричным тензором с оператором $V_A^{\mu\nu} = \int d^2\sigma \epsilon^{\alpha\beta} \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X^\nu e^{ik \cdot X}$, должны быть безмассовыми. Этим исчерпывается список безмассовых частиц (в теории замкнутой струны), так как нет больше подходящих операторов размерности два. Другие возможные вершинные операторы соответствуют частицам с положительным квадратом массы. Например, частица Y спина четыре с вершинным оператором $V_Y^{\mu\nu\lambda\rho} = \int d^2\sigma \partial_\alpha X^\mu \partial^\alpha X^\nu \partial_\beta X^\lambda \partial^\beta X^\rho e^{ik \cdot X}$ была бы массивной частицей с $m^2 = +8$.

1.5. Другие аспекты струнной теории

1.5.1. Гравитационные тождества Уорда

В приведенном выше обсуждении безмассовость гравитона появилась как некий сюрприз; исторически так оно и произошло. Ничто в этом обсуждении не позволяет думать, что взаи-

модействие гравитона будет калибровочно инвариантным, хотя можно догадаться, что оно окажется таковым просто по той причине, что одним из нескольких возможных способов построить последовательную теорию безмассовой частицы со спином два является использование свойства общей ковариантности¹⁾.

Действительно, нетрудно продемонстрировать появление тождеств Уорда, аналогичных тем, которые следуют из общей ковариантности в общековариантных полевых теориях.

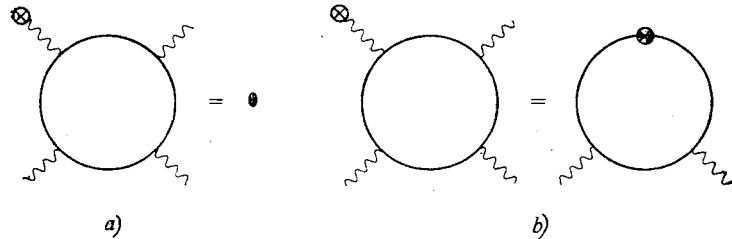


Рис. 1.14. Здесь изображена амплитуда рассеяния M калибровочных бозонов, один из которых (отмеченный \otimes) взят в состоянии с продольной поляризацией. В КЭД эта амплитуда (рис. а) просто обратилась бы в нуль, тогда как в неабелевой теории структура тождеств Уорда сложнее (рис. б).

Сначала вспомним, какова природа тождеств Уорда в теории поля. Рассмотрим M -точечную функцию $A_{\mu_1\mu_2\dots\mu_M}(k_1, k_2, \dots, k_M)$ для M внешних фотонов с поляризациями μ_1, \dots, μ_M и импульсами k_1, \dots, k_M в КЭД. Эта амплитуда обращается в нуль (даже вне массовой поверхности), если один из фотонов, отмеченных на рис. 1.14, имеет продольную поляризацию. Таким образом, $k^\mu A_{\mu_1\mu_2\dots\mu_M}(k_1, k_2, \dots, k_M) = 0$. Полезно вспомнить, как это доказывается. M -точечная амплитуда записывается через корреляционную функцию токов

$$A_{\mu_1\mu_2\dots\mu_M}(k_1, k_2, \dots, k_M) = \int d^4x^1 d^4x_2 \dots d^4x_M e^{i \sum k_i x_i} \times \langle T (J_{\mu_1}(x_1) J_{\mu_2}(x_2) \dots J_{\mu_M}(x_M)) \rangle, \quad (1.5.1)$$

¹⁾ Единственной другой возможностью, по-видимому, является теория безмассовой частицы со спином два с линейной калибровочной инвариантностью, в которой взаимодействие содержит только производные. Эта теория аналогична теории безмассового векторного мезона, который взаимодействует с нейтральными частицами только за счет взаимодействий с производной, таких как взаимодействия магнитных моментов. Теории с безмассовыми частицами спина два и со взаимодействиями, содержащими производные, только кажутся перенормируемыми и имеющими некоторые другие патологии, однако нет общей теоремы, гарантирующей, что не может быть последовательной теории этого типа.

где J_μ — электромагнитный ток, T обозначает временное упорядочение, а $\langle \dots \rangle$ — вакуумное среднее. Так как электромагнитный ток сохраняется, имеем

$$\langle T (\partial_{\mu_1} J^{\mu_1}(x_1) J_{\mu_2}(x_2) \dots J_{\mu_n}(x_n)) \rangle = 0. \quad (1.5.2)$$

Поскольку электромагнитный ток коммутирует с самим собой, производную можно вынести за знак T -произведения и записать

$$0 = \partial_{\mu_1} \langle T (J^{\mu_1}(x_1) J_{\mu_2}(x_2) \dots J_{\mu_n}(x_n)) \rangle. \quad (1.5.3)$$

Подставляя это уравнение в (1.5.1) и интегрируя выражение с ∂_{μ_1} по частям, мы приходим к тождеству Уорда

$$k^{\mu_1} A_{\mu_1\mu_2\dots\mu_n}(k_1, k_2, \dots, k_n) = 0. \quad (1.5.4)$$

В неабелевом случае структура тождеств Уорда сложнее. Грубо говоря, электромагнитный ток заменяется янг-миллсовскими токами J_μ^a , которые хотя по-прежнему сохраняются, но уже не коммутируют друг с другом. Следовательно, наше стремление вынести производную ∂_{μ_1} за знак T -произведения приведет к появлению новых членов, содержащих одновременно коммутаторы. Поэтому M -точечная функция с одним продольно поляризованным вектором вне массовой оболочки не равна нулю, а выражается через определенные нефизические ($M-1$)-точечные функции, в которых внешняя линия, соответствующая глюону с продольной поляризацией, схлопывается с одной из оставшихся, как это изображено на рис. 1.14. Требуется провести дальнейший анализ, чтобы показать, что на массовой оболочке эти ($M-1$)-точечные функции обращаются в нуль.

Теперь кратко изложим основные идеи того, как тождества Уорда возникают в струнной теории. Внешняя линия гравитона с импульсом k^μ и поляризацией $\zeta_{\mu\nu}$ была бы представлена в (1.4.5) вставкой вершинного оператора

$$V = \int dz d\bar{z} \zeta_{\mu\nu} \frac{\partial X^\mu}{\partial z} \frac{\partial X^\nu}{\partial \bar{z}} e^{ik \cdot X}. \quad (1.5.5)$$

(Здесь, так же как и в нашем предыдущем вычислении амплитуды рассеяния, мы сделали стереографическую проекцию мировой поверхности струны на комплексную плоскость z , поэтому мерой интегрирования является $dzd\bar{z}$.) Мы хотим показать, что амплитуда обращается в нуль, если $\zeta_{\mu\nu}$ — тензор продольной поляризации, $\zeta_{\mu\nu} = k_\mu \zeta_\nu + k_\nu \zeta_\mu$. Достаточно рассмотреть только случай, где тензор $\zeta_{\mu\nu}$ заменен на $k_\mu \zeta_\nu$, так как

другое слагаемое может быть рассмотрено аналогично. Положив $\xi_{\mu\nu} = k_m \xi_{\nu}$, мы получим

$$V = \int dz d\bar{z} k_\mu \xi_\nu \frac{\partial X^\mu}{\partial z} \frac{\partial X^\nu}{\partial \bar{z}} e^{ik \cdot X} = -i \int dz d\bar{z} \xi_\nu \frac{\partial X^\nu}{\partial \bar{z}} \frac{\partial e^{ik \cdot X}}{\partial z}. \quad (1.5.6)$$

Интегрированием по частям и отбрасыванием полной дивергенции (которая обращается в нуль, так как мы интегрируем в действительности по компактной мировой поверхности струны) эта формула сводится к формуле

$$V = +i \int dz d\bar{z} \frac{\partial^2 X^\nu}{\partial z \partial \bar{z}} \xi_\nu e^{ik \cdot X}. \quad (1.5.7)$$

Теперь полевое уравнение $(1+1)$ -мерной квантовой теории поля, описывающее распространение струны, имеет в используемой нами конформной калибровке простой вид: $\partial^2 X^\nu / \partial z \partial \bar{z} = 0$. Если бы теперь мы имели право воспользоваться уравнениями поля под знаком функционального интеграла (1.4.5), мы бы пришли к заключению, что $V=0$ для гравитона с продольной поляризацией. Использование уравнения движения под знаком функционального интеграла аналогично утверждению, что в КЭД $\langle \partial_{\mu_1} T(J^{\mu_1} J_{\mu_2} \dots J_{\mu_n}) \rangle = 0$, так как $\partial_{\mu} J^{\mu} = 0$. Хотя в КЭД это действительно справедливо, в теории Янга—Миллса и в струнной теории все не так просто. В частности, в струнной теории функциональный интеграл $\partial^2 X^\mu / \partial z \partial \bar{z}$ в подынтегральном выражении не равен нулю, а приводит к членам, содержащим одновременные коммутаторы, подобным тем, что появляются в тождествах Уорда в теории Янга—Миллса. В теории Янга—Миллса доказывается с помощью довольно сложных вычислений, что эти члены с одновременными коммутаторами обращаются в нуль, если импульсы всех других внешних линий лежат на массовой оболочке. В струнной теории к такому заключению можно прийти значительно быстрее. Члены, содержащие одновременные коммутаторы, не зависят от всего набора кинематических переменных, а только от некоторого поднабора (член с одновременным коммутатором, полученный схлопыванием двух внешних линий с импульсами, скажем, k_i и k_j , соответственно зависит от $k_i + k_j$, а не от k_i и k_j в отдельности). Амплитуда, зависящая только от поднабора кинематических переменных, не может иметь асимптотическое поведение типа реджевского, которое в струнной теории, как известно, имеют амплитуды рассеяния, взятые на массовой оболочке. Следовательно, члены с одновременными коммутаторами должны обращаться в нуль, когда импульсы всех внешних линий лежат на массовой оболочке. Аргумент, который мы только что привели,

обычно называется аргументом «сократившегося пропагатора» по причине, которая станет ясной позже, когда мы вновь вернемся к этому вопросу в гл. 7.

Отщепление продольных гравитонов является только одним из условий в общей теории относительности, которое следует из имеющейся общей ковариантности. Из общей теории относительности следует, что гравитон с поляризацией $\xi_{\mu\nu}$ и импульсом k^σ должен удовлетворять не только условию $k^2 = 0$, но и условиям $k^\mu \xi_{\mu\nu} = \xi_\mu^\lambda = 0$. Каким образом эти дополнительные условия возникают в струнной теории? Суть дела состоит в том, что, определяя размерность оператора $V = \int d^2\sigma \xi_{\mu\nu} (\partial X^\mu / \partial \sigma^\alpha) (\partial X^\nu / \partial \sigma_\alpha) e^{ik \cdot X}$, мы просто прибавили к размерности оператора $\xi_{\mu\nu} (\partial X^\mu / \partial \sigma^\alpha) (\partial X^\nu / \partial \sigma_\alpha)$ (равной двум) размерность оператора $e^{ik \cdot X}$ (равную $k^2/4$). В общем случае это было бы неверным. Размерность произведения $A(\sigma)B(\sigma)$ локальных операторов A и B в одной и той же точке σ не всегда есть сумма размерностей A и B из-за сингулярностей малых расстояний в произведении операторов $A(\sigma)B(\sigma)$, которые должны быть устранены нормальным упорядочением, с тем чтобы определить произведение AB . В случае вершинного оператора гравитона, когда $A = \xi_{\mu\nu} (\partial X^\mu / \partial \sigma^\alpha) (\partial X^\nu / \partial \sigma_\alpha)$, а $B = e^{ik \cdot X}$, оператор A не содержит неоднозначностей, связанных с нормальным упорядочением (которые не позволили бы ему иметь вполне определенную размерность, равную двум), если $\xi_\mu^\mu = 0$, и операторное произведение свободно от расходимостей, если $k^\mu \xi_{\mu\nu} = 0$. Если эти соотношения выполняются, то $\int d^2\sigma AB$ — вполне приемлемый вершинный оператор при условии, что $k^2 = 0$. Если же они не выполняются, то невозможно для любого k^2 построить конформно инвариантный вершинный оператор. Этот вывод вместе с нашим предыдущим обсуждением тождеств Уорда показывает, как (в рамках данного формализма) струнная теория воспроизводит условия, следующие из общей ковариантности в общей теории относительности.

1.5.2. Открытые струны

Оставим теперь замкнутые струны и посмотрим, как аналогичные идеи можно применить к открытым струнам. На рис. 1.15 мы изобразили три эквивалентных представления древесной диаграммы, описывающей рассеяние открытых струн. Особенно удобными являются рис. 1.15, *b* и *c*, на которых мировая поверхность отображена на диск или на верхнюю полуплоскость, а внешние струны представлены конечными точками на

границе. В этом формализме, так как внешняя открытая струна вставляется только на границу мировой поверхности, то эта вставка описывается оператором вида $V = \int d\tau \sqrt{h_{\tau\tau}} U(\tau)$, где τ — параметр на границе мировой поверхности. Инвариантность оператора V относительно конформного изменения масштаба метрики $h_{rr} \rightarrow e^\phi h_{rr}$ теперь требует, чтобы оператор $U(\tau)$ имел размерность один (а не два, как для замкнутых струн). Так же как и в случае замкнутых струн, запишем $U = \bar{W} \cdot e^{ik \cdot X}$ и попытаемся выбрать \bar{W} в виде полинома по вектору X^μ и его производным. Для частицы с нулевым спином можно взять $\bar{W} = 1$;

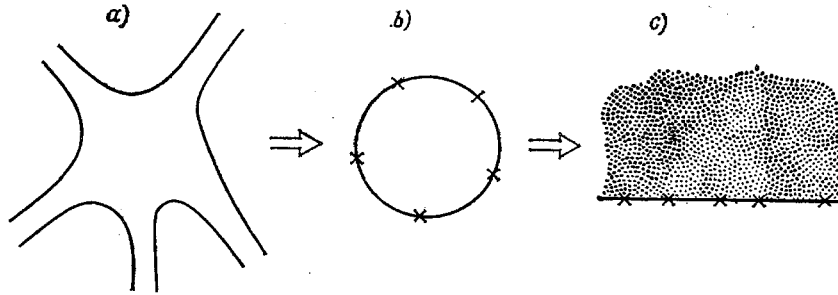


Рис. 1.15. На рис. *a* схематически изображена «планарная» мировая поверхность, соответствующая рассеянию открытых струн. Она может быть конформно отображена на диск (рис. *b*) или на верхнюю полуплоскость комплексной плоскости (рис. *c*). В любом из этих случаев внешние состояния открытых струн появляются как вставки на границе; на рис. *b* и *c* они обозначены \otimes .

это приводит к тому, что $k^2 = 2^1$), так что мы имеем дело с тахионом с квадратом массы -2 . Для частицы со спином единица мы попытаемся положить $\bar{W} = dX^\mu/d\tau$. Это приводит к требованию $k^2 = 0$, так что мы имеем дело с безмассовым «фотонем» со спином единица. Другие выборы соответствуют частицам с положительным квадратом массы.

¹⁾ Аномальная размерность оператора $e^{ik \cdot X}$, вставленного на границу мировой поверхности открытой струны, может быть определена из пропагатора, который мы вычисляем ниже в разд. 1.5.4, и равна $k^2/2$. Эта размерность в два раза больше аномальной размерности оператора $e^{ik \cdot X}$, рассматриваемого в качестве вершинного оператора для замкнутой струны и вставляемого на внутренние точки. Множитель два возникает из-за того, что сингулярность на малых расстояниях в пропагаторе $\langle X^\mu(\sigma) X^\nu(\sigma') \rangle$ в два раза сильнее, когда точки σ и σ' являются точками на границе, из-за вклада зеркальных зарядов. Это будет очевидным, когда в разд. 1.5.4 мы вычислим пропагатор на верхней полуплоскости.

Вычисление амплитуд рассеяния для открытых струн аналогично проведенному ранее вычислению амплитуд рассеяния для замкнутых струн. Например, чтобы вычислить M -точечную функцию для рассеяния тахионов, мировая поверхность конформно отображается в верхнюю полуплоскость, как это показано на рис. 1.15, *c*. Представляя тахион с импульсом k вставкой оператора $V(k) = \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{ik \cdot X}$ (где x пробегает всю вещественную ось), аналог формул (1.4.6) и (2.4.11) запишем в виде

$$A(k_1, k_2, \dots, k_M) = g^{M-2} \int dx_1 dx_2 \dots dx_M \left\langle \prod_{i=1}^M e^{ik_i \cdot X(x_i)} \right\rangle, \quad (1.5.8)$$

где g — константа взаимодействия. Как и в случае замкнутых струн, формула (1.5.8) нуждается в некоторой модификации, так как конформное отображение мировой поверхности на верхнюю полуплоскость не вполне однозначно. Группа остаточной симметрии состоит из конформных отображений верхней полуплоскости в себя. Эти преобразования генерируются соответствующими преобразованиями $dz = a + bz + cz^2$, где $z = x + jy$, а a , b и c теперь должны быть вещественными, чтобы граница верхней полуплоскости (вещественная ось) отображалась в саму себя. Такие преобразования образуют группу $SL(2, R)$ вещественных (2×2) -матриц с единичным детерминантом. Тремя вещественными параметрами этой группы можно воспользоваться для того, чтобы любым трем переменным интегрирования приписать определенные значения (в отличие от случая замкнутых струн, где и групповые параметры, и переменные интегрирования в интегральном представлении амплитуды рассеяния были комплексными).

1.5.3. Внутренние симметрии открытых струн

Прежде чем попытаться зафиксировать эту остаточную калибровочную инвариантность, выясним, что же является подходящей областью интегрирования в интервале по переменной x ; в формуле (1.5.8). Для замкнутых струн имеющаяся репараметризационная инвариантность не позволяла наложить естественные ограничения на то, куда на мировой поверхности струны должна быть вставлена внешняя замкнутая струна. Для открытых струн ситуация иная. M внешних открытых струн изображены на рис. 1.15, *b* в некотором порядке, скажем $1, 2, 3, \dots, M$. Поворотом мировой поверхности можно перевести последова-

тельность $1, 2, 3, \dots, M$ в последовательность, скажем, $2, 3, 4, \dots, M, 1$, но никакой репараметризацией нельзя перевести последовательность $1, 2, 3, \dots, M$ в последовательность, скажем, $2, 1, 3, \dots, M$. Так что циклический порядок, в котором появляются внешние струны, инвариантен относительно репараметризации, и имеет смысл постараться определить амплитуду,

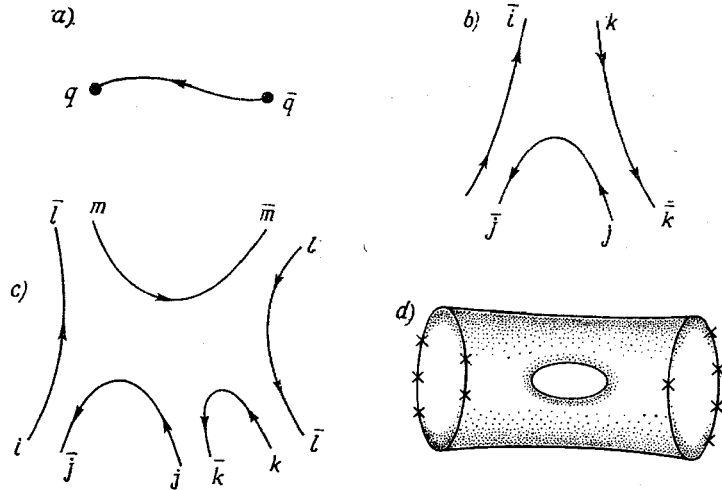


Рис. 1.16. Можно предположить, что ориентированная струна имеет «кварк» на одном конце и «антикварк» на другом, как это изображено на рис. *a*. Можно считать, что они преобразуются соответственно по представлениям n и \bar{n} группы симметрии $U(n)$. Когда открытые струны соединяются, необходимо, чтобы заряды кварков и антикварков подбирались так, как это показано на рис. *b*. Тогда теоретико-групповым множителем, связанным с общей планарной амплитудой открытой струны, схематически изображенной на рис. *c*, является $\text{tr}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_M)$. В более общей струнной диаграмме (рис. *d*) аналогичный множитель групповой теории приписан к каждой компоненте границы.

в которой интеграл в (1.5.8) берется только по значениям переменных x_i , соответствующим данному циклическому порядку.

Эта возможность связана с некоторыми очень интересными физическими интерпретациями. В отличие от замкнутой струны открытая струна имеет две специальные точки, а именно ее концы. Можно предположить, что открытая струна на своих концах несет «заряды». Например, в случае ориентированных открытых струн можно считать, что на одном конце струны имеется «кварк», а на другом — «антикварк». Введем группу симметрии $U(n)$, которая действует только на эти «кварки» и «антикварки» и не действует на какие-либо другие степени свободы.

Постулируем также, что «кварк» и «антикварк» преобразуются по представлениям n и \bar{n} группы $U(n)$ соответственно. Когда струны соединяются, мы требуем, чтобы заряды подбирались так, как это изображено на рис. 1.16, *b*. Тензорное произведение $n \otimes n$ является присоединенным представлением группы $U(n)$, так что открытая струна с «кварком» на одном конце и «антикварком» на другом преобразуется по этому представлению; ее $U(n)$ квантовых чисел могут быть поэтому установлены заданием генератора λ группы $U(n)$. Конкретно такой генератор — это $n \times n$ -матрица λ_i^j , i -й и j -й индексы которой соответствуют $U(n)$ состояниям кварка и антикварка соответственно. Если M внешних струн прикрепляются к диску в циклическом порядке $1, 2, 3, \dots, M$, то из правила, проиллюстрированного на рис. 1.16, *b*, следует, что «антикварковый» индекс каждой внешней струны должен сворачиваться с «кварковым» индексом следующей внешней струны; это приводит к тому, что с диаграммой, изображенной на рис. 1.16, *c* связывается теоретико-групповой множитель

$$(\lambda_1)^{i_1}_{i_2} (\lambda_2)^{i_2}_{i_3} \dots (\lambda_M)^{i_M}_{i_1} = \text{tr}(\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_M). \quad (1.5.9)$$

В более общей ситуации можно рассмотреть произвольную мировую поверхность струны, граница которой может иметь более одной компоненты, как это показано на рис. 1.16, *d*. Для каждой компоненты границы мы рассматриваем теоретико-групповой множитель $\text{tr}(\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_M)$, где произведение берется по всем открытым струнам, вставленным в компоненту границы. Этот множитель известен как множитель Чана — Патона. Замкнутые струны не имеют аналогов множителей Чана — Патона, хотя для таких струн более хитрым способом можно выявить наличие группы внутренней симметрии, что мы и обсудим в гл. 6.

1.5.4. Восстановление амплитуды Венециано

Вернувшись теперь к формуле (1.5.8), вычислим коэффициент теоретико-группового множителя $\text{tr}(\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_M)$, или, другими словами, амплитуду, соответствующую циклическому порядку $1, 2, 3, \dots, M$ внешних линий. Мы должны устранить остаточную репараметризационную симметрию $SL(2, R)$. Удобный способ сделать это — воспользоваться $SL(2, R)$ -инвариантностью и зафиксировать, например, координаты $x_1 = 0$, $x_{M-1} = 1$, $x_M = \infty$. Тогда для вычисления (1.5.8) необходимо только знать пропагатор свободного поля на верхней полуплоскости. Это можно легко определить с помощью метода изображений. На

всей плоскости, как было ранее найдено, пропагатор $G(z, z') = -\ln|z - z'|$; на верхней полуплоскости необходимо включить зеркальный заряд, чтобы пропагатор G удовлетворял такому граничному условию, когда его нормальная на вещественной оси производная обращается в нуль, т. е. для вещественных $z (= x + iy)$

$$\frac{\partial G(z, z')}{\partial y}, \text{ когда } y = 0. \quad (1.5.10)$$

Решением этого уравнения является $\bar{G}(z, z') = \ln|z - z'| + \ln|z - \bar{z}'|$, где \bar{z}' является точкой образа. (Если $z' = (x, y)$,

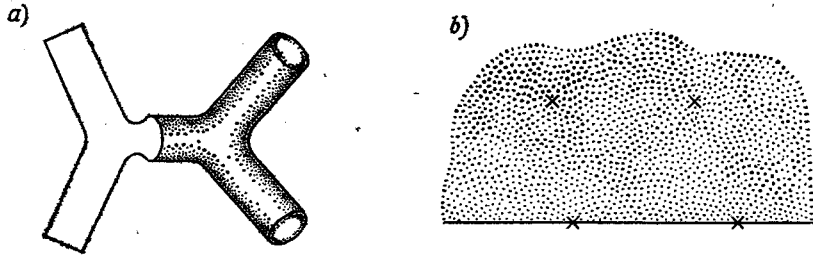


Рис. 1.17. На рис. *a* схематически изображена струнная диаграмма, в которой внешними частицами являются и замкнутые, и открытые струны. После конформного отображения, которое проецирует внешние струны в конечные точки, открытые струны представляются вершинными операторами, вставленными на границу мировой поверхности, а замкнутые струны представляются вершинными операторами, вставленными во внутреннюю часть полуплоскости (рис. *b*).

то $\bar{z}' = (x, -y)$.) То, что нам в действительности нужно в (1.5.8), так это пропагатор, определенный для двух точек, лежащих на вещественной оси, а в этом случае $\bar{G}(x, x') = 2\ln|x - x'|$. С учетом множителя 2 вычисление (1.5.8) дает

$$A = g^{M-2} \int_{0 < x_2 < x_3 < \dots < x_{M-2} < 1} dx_2 dx_3 \dots dx_{M-2} \quad (1.5.11)$$

$$\prod_{j=2}^{M-2} |x_j|^{k_1 \cdot k_j} |1 - x_j|^{k_2 \cdot k_j} \prod_{2 \leq l < m \leq M-2} |x_l - x_m|^{k_l \cdot k_m}.$$

Эта формула есть n -частичное обобщение Коба—Нильсена формулы для амплитуды Венециано. В случае четырехточечной функции она принимает более простой вид:

$$A = g^2 \int_0^1 dx x^{k_1 \cdot k_2} (1-x)^{k_2 \cdot k_3} = g^2 B\left(-\frac{s}{t} - 2, -\frac{t}{2} - 2\right), \quad (1.5.12)$$

что является первоначальной амплитудой Венециано.

В более общем случае мы можем вычислить амплитуду рассеяния и с открытыми, и с замкнутыми струнами в конечных и начальных состояниях. Например, на рис. 1.17, *a* мы изображили струнную диаграмму с внешними открытыми и замкнутыми струнами, которая может быть конформно отображена на верхнюю полуплоскость. В результате этого отображения внешние открытые струны представляются вершинными операторами, которые интегрируются по вещественной оси (взятые в некотором циклическом порядке), тогда как замкнутые струны представляются вершинными операторами, проинтегрированными по всей верхней полуплоскости. Эта ситуация изображена на рис. 1.17, *b*.

1.5.5. Сравнение с КХД

В настоящем рассмотрении мы просто «вытащили множители Чана—Патона из шляпы», отметив, что они не нарушают последовательность теории каким-либо очевидным образом. Однако исторически множители Чана—Патона сыграли важную роль в попытках интерпретировать струнную теорию как теорию адронов. Действительно, унитарная группа симметрии Чана—Патона интерпретировалась как группа, которую мы теперь называли бы «группой ароматов» сильных взаимодействий. Например, для трех «ароматов», т. е. если кварки на концах струны бывают трех типов (скажем, u , d и s), группой Чана—Патона является группа $U(3) \simeq SU(3) \times U(1)$. Здесь группа $SU(3)$ соответствует группе восьмеричного пути.

В рамках такой исторической интерпретации модели открытая струна соответствует мезону с кварком на одном конце и антикварком на другом. Струна—некая сила, удерживающая кварк и антикварк вместе. Конечно, в этой модели возникает несколько проблем. Во-первых, в ней имеются тахионы; во-вторых, введение явного нарушения симметрии $U(3)$ без патологий кажется невозможным; в третьих, существуют смущающие безмассовые частицы, не имеющие родственников в мире сильно-взаимодействующих частиц. К тому же, хотя мы можем попытаться проинтерпретировать множитель $U(1)$ в группе Чана—Патона $U(3) \simeq SU(3) \times U(1)$ как группу, связанную с барионным числом, это не удастся, так как в модели, к сожалению, отсутствуют барионы или фермионы любого типа. В 1971 г. Рамон сделал интересную попытку ввести в эту модель фермионы. Это, однако, привело не к теории сильных взаимодействий, а (после многих перипетий) к суперсимметрии, супергравитации и суперструнам.

Несмотря на многочисленные неудачные попытки рассматривать струнную теорию в качестве теории сильных взаимодей-

ствий, между теорией открытой струны и современными представлениями, согласно которым мезон является $q\bar{q}$ -парой, связанной трубкой хромомангнитного потока, имеется поразительное сходство. Поскольку открытие теории струн не было просто счастливой случайностью, эта аналогия является той причиной, по которой адронная физика привела к ее появлению. Классификация струнных диаграмм в терминах топологических характеристик мировых поверхностей имеет в КХД очень близкий аналог. Если обобщить цветовую группу КХД, переходя от $SU(3)$ к $SU(n)$, то можно утверждать, что в теории $SU(n)$

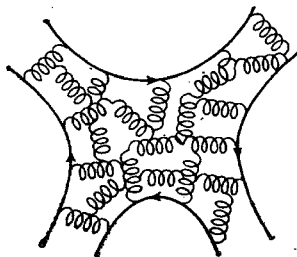


Рис. 1.18. Рассеяние мезонов в пределе больших n в КХД описывается «планарными» фейнмановскими диаграммами с кварками на границе. Описывая ароматное состояние мезона с матрицей ароматов λ_i , планарная амплитуда рассеяния M мезонов, взятых в циклическом порядке $1, 2, 3, \dots, M$, содержит спаривание каждого кварка с антикварком соседнего мезона, так что в нее входит множитель Чана — Патона $\text{tr}(\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_M)$.

должно иметь место разложение по степеням $1/n$, совершенно аналогичное топологическому разложению в теории струн. В пределе больших n в КХД появляются диаграммы типа тех, что изображены на рис. 1.18. До сих пор математическая структура $1/n$ -разложения в КХД, как и всех других подходов к количественному анализу ее динамических аспектов, остается невыясненной. Тем не менее остается надежда, что прогресс в струнной теории когда-нибудь прольет свет на структуру $1/n$ -разложения в КХД.

1.5.6. Унитарность и гравитация

Конечно, теория струн — необычный подход к формулировке релятивистской квантовой теории, и одним из следствий этого является то, что хотя правила, кратко нами сформулированные для вычисления амплитуд рассеяния, явно лоренц-инвариантны, не совсем очевидно, что выполняется свойство унитарности. Действительно, исследуя вопросы унитарности, можно столкнуться с неожиданностями. Среди них — ограничение,

связанное с необходимостью рассматривать 10 или 26 измерений, объяснение которому будет дано в последующих главах. Но одну неожиданность можно легко описать уже здесь.

Рассмотрим процесс струнного рассеяния со струнами $1, 2, 3, \dots, M$ в начальном состоянии и струнами $1', 2', 3', \dots, M'$ в конечном состоянии. Прежде чем постараться привести полное доказательство унитарности, нужно задаться вопросом, какие промежуточные состояния возникают в каждой струнной диаграмме, соответствующей реакции $1, 2, 3, \dots, M \rightarrow 1', 2', 3', \dots, M'$. Чтобы ответить на этот вопрос, нужно каким-то образом «разрезать» диаграмму, отделив начальные со-



Рис. 1.19. Если мировая поверхность замкнутой струны с топологией двасферы S^2 разрезана так, как это показано на рис. а, то промежуточное состояние содержит только одну замкнутую струну. Планарную диаграмму открытой струны (рис. б) можно разрезать так, что обнаружится только одна открытая струна.

стояния от конечных. Разрез означает выделение промежуточных состояний. Например, если «разрезать» древесную диаграмму для замкнутых струн, изображенную на рис. 1.19, а, чтобы отделить начальные состояния от конечных, то разрез будет представлять собой только одну окружность, так что промежуточным состоянием будет только одна замкнутая струна. Таким образом, единственными особенностями амплитуды, соответствующей этой диаграмме, будут полюсы, соответствующие единственной частице (замкнутой струне). Вот почему эта диаграмма называется древесной диаграммой. Точно так же, «разрез» диаграммы открытой струны, изображенной на рис. 1.19, б, выделяет только одну открытую струну, распространяющуюся в промежуточном состоянии. Конечно, эти эвристические изображения являются лишь отправной точкой в нашем обсуждении проблемы унитарности, к которой мы еще вернемся в гл. 7.

Прежде чем перейти к случаю, приводящему к более неожиданному ответу, обсудим вопросы, связанные с константами связи в струнных диаграммах. Пока что мы ввели произвольную константу связи g для взаимодействия трех замкнутых

струн и произвольную константу связи g для взаимодействия трех открытых струн. В приведенном выше обсуждении эти взаимодействия возникают как обобщение гравитационного и янг-миллсовского взаимодействий соответственно и оказываются независимыми друг от друга. Можно также рассмотреть процесс, изображенный на рис. 1.20, *a*, в котором замкнутая струна связывается с парой открытых струн. Назовем константу связи, соответствующую этому взаимодействию, κ' . В общей теории относительности $\kappa = \kappa'$, так как общая ковариантность требует, чтобы гравитон (замкнутая струна) взаимодействовал

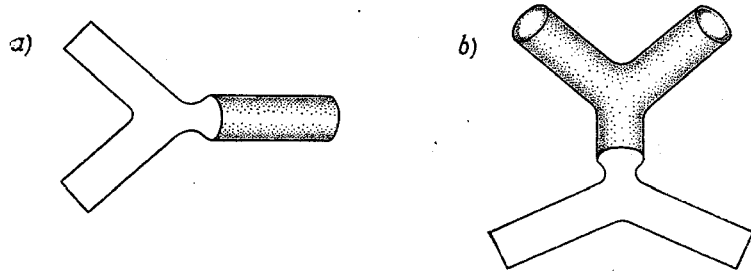


Рис. 1.20. Основные виды взаимодействия замкнутых и открытых струн схематически изображены на рис. *a*. Равенство константы взаимодействия трех замкнутых струн κ и константы взаимодействия замкнутой струны с двумя открытыми струнами κ' следует из рассмотрения диаграммы, изображенной на рис. *b*.

с тензором энергии-импульса универсальным образом независимо от того, дается ли последний в виде гравитонов (замкнутые струны) либо полей материи (открытые струны). Мы достаточно хорошо понимаем аналог общей ковариантности в струнной теории, чтобы в ее рамках привести подобные аргументы, но равенство $\kappa = \kappa'$ можно доказать из унитарности. Рассмотрим планарную диаграмму с двумя внешними открытыми струнами и двумя внешними замкнутыми струнами, изображенную на рис. 1.20, *b*. Эта диаграмма имеет полюс, соответствующий замкнутой струне, в одном канале, и полюс, соответствующий открытой струне, в перекрестном канале. Вычет в полюсе, соответствующем замкнутой струне, должен быть равен $\kappa\kappa'$, тогда как вычет в полюсе, соответствующем открытой струне, должен быть равен κ'^2 ; таким образом, мы вынуждены взять $\kappa = \kappa'$, как и должно быть в силу аналогии с общей теорией относительности.

Далее в теории поля частицы гравитационного и янг-миллсовского взаимодействий совершенно не зависят друг от друга, поэтому в теории поля не предполагается какая-либо связь

между константами связи замкнутых струн κ и открытых струн g . Именно в этом пункте рассмотрение вопроса унитарности приводит к неожиданности. Однопетлевая диаграмма с внешними открытыми струнами, изображенная на рис. 1.21, может быть разрезана совершенно неэквивалентными способами, с выделением в промежуточном состоянии либо пары открытых струн, либо только одной замкнутой струны. Таким образом, одна эта амплитуда имеет и двухчастичный разрез, изображенный на рис. 1.21, *a*, и одночастичный полюс, изображенный на рис. 1.21, *b*. Коэффициент при диаграмме с разрезом должен

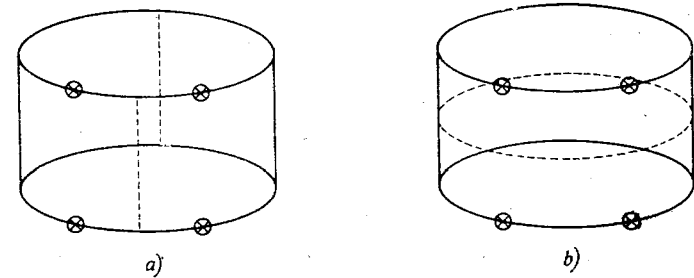


Рис. 1.21. Однопетлевую диаграмму открытой струны можно разрезать так, что в промежуточном состоянии обнаружатся две открытые струны (рис. *a*) или только одна замкнутая струна (рис. *b*).

быть равен g^4 , тогда как вычет в полюсе должен быть равен κ'^2 (или κ^2 , так как мы знаем, что они равны), так что из унитарности следует, что $\kappa \sim g^2$. Такая связь между гравитационным и янг-миллсовским взаимодействиями не имеет аналога в полевой теории точечных частиц.

Квантовая теория поля точечных частиц оказывается непоследовательной в присутствии гравитации; во всяком случае (за единственным исключением $(1+1)$ -мерных теорий распространяющихся струн!), прогресс в построении общековариантных квантовопольевых теорий, свободных от расходимостей, оказался незначительным. Сейчас мы уже знаем, что для струнной теории справедливо как раз обратное. Ввести в нее гравитацию не только возможно, но и необходимо. Теория струн, не описывающая гравитацию, должна быть теорией только открытых струн. На классическом уровне (уровне древесных диаграмм) с этой теорией все в порядке, но на однопетлевом уровне возникает гравитонный полюс. Гравитонный полюс, изображенный на рис. 1.21, *b*, означает, что на однопетлевом уровне не существует унитарной струнной теории без гравитации.

1.6. Заключение

Теория струн была изобретена как подход к проблеме сильных взаимодействий, но в указанной роли она оказалась не той теорией, которая нужна. Вместо этого теория струн привела к замечательному обобщению теории Янга—Миллса и гравитации. В частности, теории суперсимметричных струн или суперструн представляются совершенно свободными от непоследовательностей, которыми страдают квантовополевые теории гравитации.

В этой вводной главе мы постарались проследить за развитием некоторых идей, на которых основана теория струн, для простоты сосредоточивая наше внимание только на бозонном случае. В оставшейся части настоящей книги мы попытаемся дать систематическое изложение некоторых наиболее важных подходов к этой обширной теме.

Логические основы теоретико-струнного обобщения теории Янга—Миллса и теории относительности остаются покрытыми тайной. По этой и другим причинам будущие десятилетия, видимо, будут исключительно интересным временем интеллектуальных поисков.

2. Свободные бозонные струны

В теории струн, как и в других теориях, прежде чем пытаться описать взаимодействия, необходимо хорошо усвоить свободную теорию. При систематическом изложении теории струн в первую очередь нужно как следует понять распространение единичной свободной струны в пространстве-времени как на классическом, так и на квантовом уровнях. В данной главе мы начинаем с изучения бозонных струн. В ходе настоящего обсуждения бозонная струна будет рассматриваться с различных точек зрения в соответствии со многими формализмами, которые развивались на протяжении нескольких лет. Они включают в себя разнообразные подходы к ковариантному квантованию и квантованию на световом конусе. Каждый из них вносит важный вклад в общее понимание теории струн, так что действительно стоит познакомиться со всеми этими подходами.

2.1. Классическая бозонная струна

Может быть полезно, как это и было сделано во введении, начать с обсуждения точечных частиц. Поэтому рассмотрим движение точечной частицы массы m в фоновом гравитационном поле, т. е. в искривленном пространстве с римановой геометрией, описываемой метрическим тензором $g_{\mu\nu}(x)$. Предполагается, что метрика имеет $D-1$ положительное и одно отрицательное собственное значение; это соответствует сигнатуре Минковского D -мерного пространства-времени. Мы всегда будем пользоваться единицами, в которых $\hbar = c = 1$.

Принцип действия, описывающий движение массивной точечной частицы, хорошо известен и уже упоминался во введении. Действие просто пропорционально инвариантной длине мировой линии, т. е.

$$S = -m \int ds, \quad (2.1.1)$$

где инвариантный интервал, как обычно, дается формулой

$$ds^2 = -g_{\mu\nu}(x) dx^\mu dx^\nu. \quad (2.1.2)$$

Предположим, что классическая траектория описывается функцией $x^\mu(\tau)$, где τ — произвольный параметр, помечающий точки вдоль мировой линии. Тогда формулу (2.1.1) можно записать в виде

$$S = -m \int d\tau \sqrt{-\dot{x}^2}, \quad (2.1.3)$$

где

$$\dot{x}^2 \equiv g_{\mu\nu}(x) \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau}. \quad (2.1.4)$$

Действие (2.1.3) обладает очень важным свойством. Оно инвариантно относительно репараметризации $\tau \rightarrow \tilde{\tau}(\tau)$ траектории частицы. Формула (2.1.3) поэтому действительно характеризует мировую линию частицы, а не частный выбор координат. Однако квадратным корнем в этой формуле очень неудобно работать. К тому же она неприменима к безмассовым частицам. Чтобы обойти эти трудности, введем вспомогательную координату $e(\tau)$, которую можно проинтерпретировать как репер для одномерной геометрии мировой линии. С помощью реперной переменной $e(\tau)$ формула (2.1.1) может быть переписана в классической теории в эквивалентном виде

$$S = \frac{1}{2} \int (e^{-1} \dot{x}^2 - em^2) d\tau. \quad (2.1.5)$$

Если решить уравнение движения относительно e

$$\dot{x}^2 + e^2 m^2 = 0 \quad (2.1.6)$$

и подставить решение в (2.1.5), то действие (2.1.3) будет восстановлено. В данном виде симметрия, связанная с репараметризацией τ , может быть описана на инфинитезимальном уровне как инвариантность (2.1.5) относительно преобразований

$$\delta x = \xi \dot{x}, \quad (2.1.7)$$

$$\delta(e) = \frac{d}{d\tau} (\xi e), \quad (2.1.8)$$

где $\xi(\tau)$ — инфинитезимальный параметр с произвольной зависимостью от τ . Эта формулировка применима и в случае безмассовой частицы.

Репараметризационной инвариантностью можно воспользоваться, чтобы выбрать калибровку в следующем виде: $e = 1/m$. При таком выборе сопряженный импульс имеет простой вид:

$$p_\mu = mg_{\mu\nu} \dot{x}^\nu, \quad (2.1.9)$$

и уравнение движения получается как обычно. Однако уравнение (2.1.6) остается в качестве связи. Его можно интерпретировать как условие массовой поверхности, обобщенное на случай распространения в искривленном фоновом пространстве.

Тогда квантовомеханическое распространение точечных частиц можно было бы описать функциональными интегралами вида

$$\int Dx De e^{iS(x, e)}, \quad (2.1.10)$$

где по-прежнему нужно учитывать калибровочную симметрию действия (2.1.5). Взаимодействия частиц могли бы быть установлены правилами расщепления и слияния мировых линий, сходными с теми, которые обычно формулируются для построения фейнмановских диаграмм. Имеется много тем, которые здесь можно было бы развивать далее, но, наверное, изложенного будет достаточно для того, чтобы приступить к изучению струн.

2.1.1. Струнное действие и его симметрии

Действие точечной частицы можно обобщить на объекты более высокой размерности. В этой книге на самом деле нас интересуют струны, но, прежде чем заняться ими, отвлечемся на короткое время и рассмотрим вместо точечных частиц произвольные протяженные объекты. Если эти объекты являются n -мерными (случаи $n=0, 1, 2$ проиллюстрированы на рис. 2.1), то



Рис. 2.1. Теорию точечной частицы (а) можно обобщить на случай струны (b) или мембраны (c).

очевидным обобщением (2.1.1) является формула для инвариантного объема той части $n+1$ мерного пространства-времени, которую они заметают. Чтобы действие было безразмерным, коэффициент должен иметь размерность (масса) ^{$n+1$} . Можно использовать и другую формулировку без квадратного корня, в которой действие аналогично действию (2.1.5). Именно эта формулировка здесь нами и обсуждается. Так как мы описываем только бозонные степени свободы, внутренняя геометрия $(n+1)$ -мерного многообразия может быть описана метрикой

$h_{\alpha\beta}(\sigma)$. В частности, обобщением первого слагаемого в (2.1.5) является

$$S = -\frac{T}{2} \int d^{n+1}\sigma \sqrt{h} h^{\alpha\beta}(\sigma) g_{\mu\nu}(X) \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X^\nu, \quad (2.1.11)$$

где $\sigma^0 = \tau$, а пространственные координаты σ^i ($i = 1, 2, \dots, n$) описывают n -мерный объект. Матрица $h^{\alpha\beta}$ является обратной к матрице $h_{\alpha\beta}$, а h — абсолютная величина детерминанта $h_{\alpha\beta}$. Метрика $h_{\alpha\beta}$ имеет сигнатуру Минковского, так что одно из ее собственных значений отрицательно (временеподобно), а остальные n положительны (пространственноподобны). Функции $X^\mu(\sigma)$ отображают «мировое многообразие» (линию, поверхность, трубку...) в физическое пространство-время. Метрика $h_{\alpha\beta}(\sigma)$ описывает геометрию $(n+1)$ -мерного многообразия, а метрика $g_{\mu\nu}(x)$ — геометрию D -мерного пространства-времени. Конечно же, необходимо, чтобы $D \geq n+1$.

Формула (2.1.11) по своему характеру геометрическая; действие не зависит ни от какого конкретного выбора координат σ^α . Это очевидно из обычного исчисления общей теории относительности: $\sqrt{h} d^{n+1}\sigma$ — инвариантный элемент объема, а выражение $h^{\alpha\beta} \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X^\nu$ также инвариантно, так как тензорные индексы свернуты правильным образом. Важным свойством, позволившим в случае точечной частицы иметь осмысленную физическую интерпретацию, была возможность выбора калибровки, в которой метрика $h_{\alpha\beta}$ (соответствующая реперу e) исключается. Теперь в общем случае $h_{\alpha\beta}$ имеет $\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$ компонент и существуют $n+1$ независимых репараметризованных калибровочных инвариантностей. Таким образом, если этими инвариантностями воспользоваться, останутся еще $\frac{1}{2}n(n+1)$ компонент тензора h . Следовательно, при $n > 0$ h нельзя исключить просто за счет репараметризации мировой поверхности. Однако в специальном случае струны ($n=1$) существует еще одна локальная симметрия, которую тоже нужно учесть. В этом случае возможно локальное вейлевское изменение масштаба метрики

$$h_{\alpha\beta} \rightarrow \Lambda(\sigma) h_{\alpha\beta}, \quad (2.1.12)$$

при котором

$$\sqrt{h} h^{\alpha\beta} \rightarrow \Lambda^{\frac{1}{2}(n+1)-1} \sqrt{h} h^{\alpha\beta}. \quad (2.1.13)$$

Действие S инвариантно относительно этого преобразования при $n=1$. Поэтому в случае струн подсчет показывает, что с помощью этой дополнительной симметрии по-прежнему можно полностью устранить зависимость от $h_{\alpha\beta}$ калибровкой.

Вейлевская инвариантность или по крайней мере способность выбором калибровки устранить зависимость от тензора $h_{\alpha\beta}$ играют центральную роль в физике струн. Это одно из тех свойств, которое отличают струны от других объектов, например мембран. С мембранами и объектами еще более высокой размерности связана другая животрепещущая проблема, заключающаяся в следующем. Формула (2.1.11) определяет $(n+1)$ -мерную квантовую теорию поля, которая, если воспользоваться подсчетом степеней, перенормируема при $n=1$ и неперенормируема при $n > 1$. Придать при $n > 1$ смысл действию (2.1.11) как действию квантовой теории поля так же трудно, как и придать смысл общей теории относительности как квантовой теории. Поэтому мембраны или другие объекты более высокой размерности вряд ли могут рассматриваться как многообещающие для построения квантовой теории гравитации.

Далее мы будем рассматривать только струны ($n=1$). Параметр T имеет размерность (длина)⁻² или (масса)² и может отождествляться с натяжением струны. Он оказывается связанным с универсальным параметром наклона реджевской траектории (для открытых струн) соотношением

$$T = (2\pi\alpha')^{-1}. \quad (2.1.14)$$

Это будет установлено после квантования действия (2.1.11) и определения получающегося спектра.

2.1.2. Свободная струна в пространстве Минковского

Хотя формула (2.1.11) определяет действие для струны, расширяющейся в пространственно-временном многообразии общего вида, в данной главе мы сосредоточим наше внимание на случае плоского пространства Минковского. Ясное понимание этой ситуации является необходимой отправной точкой для последующих обобщений. Формула (2.1.11) в случае плоского пространства Минковского сводится к формуле

$$S = -\frac{T}{2} \int_M d^2\sigma \sqrt{h} h^{\alpha\beta}(\sigma) \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X_\mu. \quad (2.1.15)$$

В качестве области, в которой изменяется координата σ , можно для удобства выбрать область $0 \leq \sigma \leq \pi$. Даже в плоском пространстве к действию (2.1.15) могут быть добавлены дополнительные члены. Эти возможные члены, удовлетворяющие D -мерной пуанкаре-инвариантности и перенормируемости, основанной на подсчете степеней, в двумерной теории имеют вид

$$S_1 = \lambda \int d^2\sigma \sqrt{h} \quad (2.1.16)$$

и

$$S_2 = \frac{1}{2\pi} \int d^2\sigma \sqrt{h} R^{(2)}(h). \quad (2.1.17)$$

Первое выражение, S_1 , является двумерной «космологической постоянной». Оно не обладает вейлевской симметрией действия S и поэтому приводит к противоречивым классическим полевым уравнениям. В частности, взятие следа от уравнения для метрики $h_{\alpha\beta}$, полученного из действия $S + S_1$, приводит к равенству $h_{\alpha\beta} = 0$, что вряд ли приемлемо если $\lambda \neq 0$. В формуле для S_2 выражение $R^{(2)}(h)$ обозначает внутреннюю двумерную скалярную кривизну мировой поверхности, построенную с помощью метрики $h_{\alpha\beta}$. Хотя слагаемое S_2 играет важную роль при изучении взаимодействия струн, здесь оно несущественно, так как в двумерии комбинация $\sqrt{h} R^{(2)}(h)$ является полной производной. Поэтому член S_2 не дает вклада в классические полевые уравнения и неважен для рассматриваемой нами сейчас задачи квантования свободной струны.

Обратимся теперь к симметриям действия (2.1.15). Оно обладает указанными ранее локальными симметриями независимо от выбора искривленного фонового пространства. Это инвариантности относительно репараметризации, т. е. преобразований, при которых

$$\delta X^\mu = \xi^\alpha \partial_\alpha X^\mu, \quad (2.1.18)$$

$$\delta h^{\alpha\beta} = \xi^\gamma \partial_\gamma h^{\alpha\beta} - \partial_\gamma \xi^\alpha h^{\gamma\beta} - \partial_\gamma \xi^\beta h^{\alpha\gamma}, \quad (2.1.19)$$

$$\delta(\sqrt{h}) = \partial_\alpha (\xi^\alpha \sqrt{h}), \quad (2.1.20)$$

и вейлевского изменения масштаба, когда

$$\delta h^{\alpha\beta} = \Lambda h^{\alpha\beta}. \quad (2.1.21)$$

Кроме того, имеются глобальные симметрии, отражающие симметрию пространства, в котором струна распространяется. Для плоского пространства Минковского это просто пуанкаре-инвариантность, т. е. инвариантность относительно преобразований, при которых

$$\delta X^\mu = a_\nu^\mu X^\nu + b^\mu \quad (2.1.22)$$

и

$$\delta h^{\alpha\beta} = 0, \quad (2.1.23)$$

где $a_{\mu\nu} = \eta_{\mu\rho} a_\nu^\rho$ — антисимметричный тензор ($\eta_{\mu\rho}$ — метрический тензор пространства Минковского). Подчеркнем, что ξ^α и Λ являются произвольными (инфинитезимальными) функциями от σ^α , тогда как $a_{\mu\nu}$ и b^μ — константы.

2.1.3. Ковариантная фиксация калибровки и уравнения поля в классической теории

Двумерный тензор энергии — импульса определяется через вариационную производную от действия S по двумерной метрике $h^{\alpha\beta}$:

$$T_{\alpha\beta} = -\frac{2}{T} \frac{1}{\sqrt{h}} \frac{\delta S}{\delta h^{\alpha\beta}}. \quad (2.1.24)$$

Вычисляя вариационную производную, получаем

$$T_{\alpha\beta} = \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X_\mu - \frac{1}{2} h_{\alpha\beta} h^{\alpha\beta'} \partial_{\alpha'} X^\mu \partial_{\beta'} X_\mu. \quad (2.1.25)$$

Этот тензор автоматически оказывается бесследовым, $h^{\alpha\beta} T_{\alpha\beta} = 0$, из-за вейлевской симметрии. Из полевого уравнения $\delta S / \delta h^{\alpha\beta} = 0$ следует, что $T_{\alpha\beta} = 0$. Если мы определим тензор $G_{\alpha\beta} = \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X_\mu$ и положим $G = |\det G_{\alpha\beta}|$, то обращение $T_{\alpha\beta}$ в нуль приводит к тому, что

$$G_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} h_{\alpha\beta} h^{\alpha\beta'} G_{\alpha'\beta'}, \quad (2.1.26)$$

$$G = \frac{1}{4} h (h^{\alpha\beta} G_{\alpha\beta})^2, \quad (2.1.27)$$

и следовательно,

$$\frac{1}{2} \int_{\Sigma} d^2\sigma \sqrt{h} h^{\alpha\beta} G_{\alpha\beta} = \int_{\Sigma} d^2\sigma \sqrt{G}, \quad (2.1.28)$$

а это в точности совпадает с формулой для действия как площади области на мировой поверхности, что впервые предложил Намбу.

Последующий анализ струнной динамики и процедура квантования ускоряются удачным выбором калибровки. Используя три локальные симметрии (две репараметризации и вейлевское изменение масштаба), можно так выбрать три независимых элемента $h_{\alpha\beta}$, чтобы $h_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, где $\eta_{\alpha\beta}$ — двумерная метрика пространства Минковского. (В квантовой теории это требует более тщательного рассмотрения.) При таком выборе действие упрощается:

$$S = -\frac{T}{2} \int d^2\sigma \eta^{\alpha\beta} \partial_\alpha X \cdot \partial_\beta X. \quad (2.1.29)$$

Уравнение Эйлера — Лагранжа, выведенное из (2.1.29), — это просто свободное двумерное волновое уравнение

$$\square X^\mu \equiv \left(\frac{\partial^2}{\partial \sigma^2} - \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \right) X^\mu = 0. \quad (2.1.30)$$

В случае открытых струн уравнение (2.1.30) необходимо, но не достаточно для проверки того, что действие (2.1.29) инвариантно относительно вариации общего вида:

$$X^\mu \rightarrow X^\mu + \delta X^\mu. \quad (2.1.31)$$

Вариация действия (2.1.29) при вариации (2.1.31) содержит объемный член, пропорциональный левой части уравнения (2.1.30), а также «поверхностный член»

$$-T \int d\tau [X'_\mu \delta X^\mu|_{\sigma=\pi} - X'_\mu \delta X^\mu|_{\sigma=0}] = 0. \quad (2.1.32)$$

Обращение в нуль поверхностного члена приводит к граничному условию для открытой струны. Для замкнутых струн уравнение (2.1.30) и периодичность функции X необходимы и достаточны для стационарности действия (2.1.29).

Как обычно в двух измерениях, общее решение безмассового волнового уравнения может быть записано в виде суммы двух произвольных функций:

$$X^\mu(\sigma) = X_R^\mu(\sigma^-) + X_L^\mu(\sigma^+), \quad (2.1.33)$$

где

$$\sigma^- = \tau - \sigma, \quad (2.1.34)$$

$$\sigma^+ = \tau + \sigma. \quad (2.1.35)$$

Функция $X_R^\mu(\sigma^-)$ описывает моды струны, «движущиеся вправо», а функция $X_L^\mu(\sigma^+)$ — моды, «движущиеся влево». Удобно ввести «координаты светового конуса» на мировой поверхности σ^+ и σ^- , так как X_R и X_L являются функциями только σ^- и σ^+ соответственно. Производные, сопряженные к σ^\pm , определяются формулой

$$\partial_\pm = \frac{1}{2}(\partial_\tau \pm \partial_\sigma), \quad (2.1.36)$$

так что в координатах светового конуса метрический тензор мировой поверхности в пространстве Минковского принимает вид

$$\eta_{+-} = \eta_{-+} = -\frac{1}{2}, \quad \eta_{++} = \eta_{--} = 0, \quad (2.1.37)$$

а компонентами обратного тензора являются $\eta^{+-} = \eta^{-+} = -2$. В соответствии с этим индексы мировой поверхности опускаются и поднимаются по правилу $U^+ = -2U_-$, $U^- = -2U_+$.

Волновое уравнение (2.1.30) должно быть дополнено уравнениями связей $T_{\alpha\beta} = 0$. Обозначая производные по τ точками,

а по σ штрихами, эти уравнения можно записать так:

$$T_{10} = T_{01} = \dot{X} \cdot X' = 0, \quad (2.1.38)$$

$$T_{00} = T_{11} = \frac{1}{2}(\dot{X}^2 + X'^2) = 0. \quad (2.1.39)$$

Здесь $\dot{X} \cdot X'$, например, является краткой записью для $\dot{X}^\mu X'_\mu$. Если, воспользовавшись стандартными правилами тензорного анализа, записать тензор энергии-импульса мировой поверхности $T_{\alpha\beta}$ в координатной системе σ^\pm , то с помощью (2.1.38) и (2.1.39) получится, что

$$T_{++} = \frac{1}{2}(T_{00} + T_{01}) = \partial_+ X \cdot \partial_+ X \quad (2.1.40)$$

и

$$T_{--} = \frac{1}{2}(T_{00} - T_{01}) = \partial_- X \cdot \partial_- X. \quad (2.1.41)$$

Поэтому бесследовость тензора энергии — импульса, $\eta^{\alpha\beta} T_{\alpha\beta} = 0$, приводит к равенствам $T_{+-} = T_{-+} = 0$. Они эквивалентны равенствам (2.1.39): $T_{00} = T_{11}$. Используя приведенные выше формулы, можно установить, что из уравнений связей $T_{++} = T_{--} = 0$ следуют уравнения

$$\dot{X}_R^2 = \dot{X}_L^2 = 0. \quad (2.1.42)$$

В двумерной квантовой теории поля закон сохранения энергии-импульса в общем случае принимает вид уравнения $\partial_- T_{++} + \partial_+ T_{-+} = 0$ вместе с аналогичным уравнением, полученным заменой $- \leftrightarrow +$. В конформно-инвариантном случае $T_{+-} = 0$, и закон сохранения энергии-импульса сводится к уравнению

$$\partial_- T_{++} = 0. \quad (2.1.43)$$

Это очень сильное утверждение; оно соответствует утверждению о существовании бесконечного набора сохраняющихся величин. Пусть $f(x^+)$ — некоторая функция от x^+ (так что $\partial_- f = 0$). Тогда из равенства (2.1.43) следует, что ток $f T_{++}$ сохраняется, $\partial_- (f T_{++}) = 0$. Точно так же сохраняется и заряд $Q_f = \int d\sigma f(x^+) T_{++}$. Так как функция f произвольна, то этот заряд является бесконечным набором сохраняющихся величин. Это только в двух пространственно-временных измерениях конформная инвариантность таким способом приводит к бесконечному набору сохраняющихся величин. К сохраняющимся величинам, только что нами найденным, относятся и величины, производные от которых стоят в уравнениях связей (2.1.42). В силу того что они сохраняются, имеет смысл положить их равными

нулю; если они обращаются в нуль в некоторый момент времени, то они останутся такими же и во все последующие моменты.

Комментарий, который был приведен в конце предыдущего раздела, относится к любой двумерной конформно-инвариантной теории. В случае теории струны рассматриваемые сохраняющиеся величины соответствуют остаточной симметрии, которая присутствует и после фиксации калибровки. Как обычно, выбирая ковариантную калибровку $h^{\alpha\beta} = \eta^{\alpha\beta}$, мы полностью используем имеющуюся калибровочную свободу. Чтобы увидеть

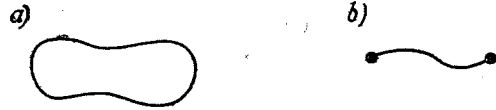


Рис. 2.2. Одномерное компактное многообразие может обладать двумя топологиями, соответствующие замкнутой (а) или открытой (б) струнам.

это, заметим (воспользовавшись (2.1.19) и (2.1.20)), что любая комбинация репараметризации и вейлевского изменения масштаба, для которой

$$\partial^{\alpha}\xi^{\beta} + \partial^{\beta}\xi^{\alpha} = \Lambda\eta^{\alpha\beta}, \quad (2.1.44)$$

сохраняет выбор калибровки. В терминах комбинации $\xi^{\pm} = (\xi^0 \pm \xi^1)$ это означает, что ξ^+ может быть произвольной функцией $\sigma^+ = (\tau + \sigma)$, а ξ^- — произвольной функцией $\sigma^- = (\tau - \sigma)$. Если считать, что репараметризация мировой поверхности $\delta\sigma^{\alpha} = \xi^{\alpha}$ генерируется оператором $V = \xi^{\alpha}\partial/\partial\sigma^{\alpha}$, то генераторами преобразований остаточной симметрии являются

$$V^+ = \xi^+(\sigma^+)\partial/\partial\sigma^+, \quad V^- = \xi^-(\sigma^-)\partial/\partial\sigma^-. \quad (2.1.45)$$

В следующем разделе эта остаточная симметрия будет использоваться для введения калибровки светового конуса. Взяв $\dot{\tau} \sim \xi^+$, мы установим, что сохраняющиеся заряды, найденные в предыдущем разделе, генерируются операторами (2.1.45). Эти операторы являются генераторами группы конформных преобразований двумерного пространства Минковского; только в двумерии конформная группа бесконечномерна.

Мы должны рассмотреть два типа граничных условий, соответствующих замкнутой и открытой струнам, изображенным на рис. 2.2. Замкнутые струны являются петлями без свободных концов, топологически эквивалентными окружности. Они изображены на рис. 2.2, а. Для них подходящим граничным

условием является периодичность по координатам

$$X^{\mu}(\tau, \sigma) = X^{\mu}(\tau, \sigma + \pi). \quad (2.1.46)$$

Общим решением уравнения (2.1.33), удовлетворяющим требованию периодичности, является

$$X_R^{\mu} = \frac{1}{2}x^{\mu} + \frac{1}{2}l^2 p^{\mu}(\tau - \sigma) + \frac{i}{2}l \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \alpha_n^{\mu} e^{-2in(\tau - \sigma)}, \quad (2.1.47)$$

$$X_L^{\mu} = \frac{1}{2}x^{\mu} + \frac{1}{2}l^2 p^{\mu}(\tau + \sigma) + \frac{i}{2}l \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \bar{\alpha}_n^{\mu} e^{-2in(\tau + \sigma)}, \quad (2.1.48)$$

где α_n^{μ} — компоненты Фурье, которые будут интерпретироваться как координаты осциллятора. В этих формулах была введена фундаментальная длина, обозначенная буквой l . Она связана с α' и с натяжением струны T (в единицах $\hbar = c = 1$) следующим образом:

$$l = \sqrt{2\alpha'} = 1/\sqrt{\pi T}. \quad (2.1.49)$$

В дальнейшем фундаментальная длина будет положена равной единице. Что же касается x^{μ} и p^{μ} , то они могут быть проинтерпретированы как положение центра масс и импульс струны. Нормировочные константы в (2.1.47) и (2.1.48) выбраны для удобства в дальнейшем. Отметим, что члены, линейные по σ , в сумме $X^{\mu} = X_L^{\mu} + X_R^{\mu}$ пропадают, так что граничное условие для замкнутой струны действительно выполняется. Требование вещественности функций X_R^{μ} и X_L^{μ} приводит к тому, что x^{μ} и p^{μ} являются вещественными, а коэффициент α_{-n}^{μ} — сопряженным к коэффициенту α_n^{μ} , т. е.

$$\alpha_{-n}^{\mu} = (\alpha_n^{\mu})^{\dagger}, \quad \bar{\alpha}_{-n}^{\mu} = (\bar{\alpha}_n^{\mu})^{\dagger}. \quad (2.1.50)$$

Также важно определить скобки Пуассона для α_n^{μ} . Чтобы сделать это, заметим, что скобки Пуассона для X^{μ} и \dot{X}^{μ} при равных временах τ , следующие из действия (2.1.29), имеют вид

$$[X^{\mu}(\sigma), X^{\nu}(\sigma')]_{\text{с.п.}} = [\dot{X}^{\mu}(\sigma), \dot{X}^{\nu}(\sigma')]_{\text{с.п.}} = 0, \quad (2.1.51)$$

$$[\dot{X}^{\mu}(\sigma), X^{\nu}(\sigma')]_{\text{с.п.}} = T^{-1}\delta(\sigma - \sigma')\eta^{\mu\nu}. \quad (2.1.52)$$

Подставляя в эти уравнения формулы (2.1.47) и (2.1.48), получаем скобки Пуассона для коэффициентов α_n^{μ} :

$$[\alpha_m^{\mu}, \alpha_n^{\nu}]_{\text{с.п.}} = [\bar{\alpha}_m^{\mu}, \bar{\alpha}_n^{\nu}]_{\text{с.п.}} = im\delta_{m+n}\eta^{\mu\nu}, \quad (2.1.53)$$

$$[\alpha_m^{\mu}, \bar{\alpha}_n^{\nu}]_{\text{с.п.}} = 0.$$

(Мнимая единица i исчезнет, как только мы заменим скобки Пуассона коммутаторами.) Таким образом, моды фурье-разложения α_n^μ при $n \neq 0$ являются координатами гармонического осциллятора, как и можно было бы ожидать, исходя из нашего опыта, связанного с другими теориями свободных полей, или даже из нашего опыта описания скрипичных струн. Формулы (2.1.53) остаются справедливыми и при $n=0$ или $m=0$, если воспользоваться удобным обозначением $\bar{\alpha}_0^\mu = \alpha_0^\mu = \frac{1}{2} l p^\mu$. Из (2.1.47), (2.1.48) и (2.1.52) получаем скобки Пуассона

$$[p^\mu, x^\nu]_{\text{с.п.}} = \eta^{\mu\nu}, \quad (2.1.54)$$

так что, как и следовало ожидать, положение центра масс и импульс струны являются канонически сопряженными величинами.

Для открытых струн, изображенных на рис. 2.2, *b*, анализ аналогичен, за тем исключением, что в этом случае необходимо определить правильные граничные условия на концах струны, $\sigma=0, \pi$. Требуя, чтобы граничные члены (2.1.32), возникающие при вариации действия, обращались в нуль, мы приходим к граничным условиям для открытой струны

$$X'^\mu = 0 \text{ для } \sigma=0 \text{ и } \sigma=\pi, \quad (2.1.55)$$

означающим, что нормальная производная от функции X^μ должна зануляться на концах струны. Это — «свободные граничные условия», препятствующие оттоку импульса через концы струны. Общее решение волнового уравнения с такими граничными условиями дается формулой

$$X^\mu(\sigma, \tau) = x^\mu + l^2 p^\mu \tau + il \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \alpha_n^\mu e^{-in\tau} \cos n\sigma. \quad (2.1.56)$$

Граничные условия для открытой струны вынуждают компоненты струны, движущиеся вправо и влево, комбинироваться в стоячие волны. В частности,

$$2\partial_\pm X^\mu = \dot{X}^\mu \pm X'^\mu = l \sum_{-\infty}^{\infty} \alpha_n^\mu e^{-in(\tau \pm \sigma)}, \quad (2.1.57)$$

где мы положили $\alpha_0^\mu = l p^\mu$.

Аналогичными формулами для замкнутых струн являются

$$\partial_- X_R^\mu = \dot{X}_R^\mu = l \sum_{-\infty}^{\infty} \alpha_n^\mu e^{-2in(\tau - \sigma)}, \quad (2.1.58)$$

$$\partial_+ X_L^\mu = \dot{X}_L^\mu = l \sum_{-\infty}^{\infty} \bar{\alpha}_n^\mu e^{-2in(\tau + \sigma)}. \quad (2.1.59)$$

Важное отличие в этом случае состоит в том, что моды, движущиеся вправо и влево, независимы. Кроме того, для замкнутой струны $\alpha_0^\mu = \bar{\alpha}_0^\mu = \frac{1}{2} l p^\mu$ и имеется дополнительный множитель два в показателях экспонент.

Перейдем теперь к описанию D -мерной пуанкаре-инвариантности. Так как преобразование Пуанкаре $\delta X^\mu = a_\nu^\mu X^\nu + b^\mu$ с точки зрения двумерной теории являются просто преобразованиями глобальной симметрии, то они связаны с сохраняющимися «нётеровскими токами». В теории поля существует стандартная процедура, известная как «нётеровский метод», для построения сохраняющегося тока J_α , связанного с преобразованиями глобальной симметрии: $\varphi(\sigma) \rightarrow \varphi(\sigma) + \varepsilon \delta \varphi(\sigma)$, где $\varphi(\sigma)$ — любое поле в теории, а ε — постоянный бесконечно малый параметр. Рассматривается также преобразование

$$\varphi(\sigma) \rightarrow \varphi(\sigma) + \varepsilon(\sigma) \delta \varphi(\sigma), \quad (2.1.60)$$

где ε — бесконечно малый параметр, *не* являющийся постоянным на мировой поверхности. Действие не инвариантно относительно таких преобразований для произвольной функции ε , так как рассматриваемая нами симметрия является только глобальной симметрией. Так как для постоянного ε оно было бы инвариантным, его вариация пропорциональна производной от ε и в общем виде выглядит так:

$$\delta S = \int d^2 \sigma J_\alpha \partial^\alpha \varepsilon, \quad (2.1.61)$$

где J_α — некоторый ток. Ток, определенный таким образом, всегда сохраняется, если выполнены уравнения движения. Действительно, выполнение уравнений движения означает, что действие стационарно при любой вариации, и в частности, при вариации вида (2.1.60). Итак, при выполнении уравнений движения вариация δS в формуле (2.1.61) равна нулю для любого ε . Это возможно, если только $\partial_\alpha J^\alpha = 0$.

Этот метод можно непосредственно применить к выводу выражений для сохраняющихся токов, связанных с преобразованиями Пуанкаре функции X^μ :

$$P_\alpha^\mu = T \partial_\alpha X^\mu, \quad (2.1.62)$$

$$J_\alpha^{\mu\nu} = T (X^\mu \partial_\alpha X^\nu - X^\nu \partial_\alpha X^\mu). \quad (2.1.63)$$

Здесь P_α — ток, связанный с трансляционной инвариантностью, тогда как ток $J_\alpha^{\mu\nu}$ связан с лоренц-инвариантностью. Сохранение тока означает, что

$$\partial_\alpha P^{\alpha\mu} = \partial_\alpha J^{\alpha\mu\nu} = 0. \quad (2.1.64)$$

Эти токи описывают плотность D -мерных импульса и углового момента на двумерной мировой поверхности. Импульс, протекающий через произвольный линейный сегмент на мировой поверхности $(d\sigma, d\tau)$, дается формулой

$$dP^\mu = P_\tau^\mu d\sigma + P_\sigma^\mu d\tau, \quad (2.1.65)$$

так что из граничных условий на концах открытой струны (2.1.32) действительно следует, что отток импульса из этих концов отсутствует. Аналогичное утверждение имеет место и для тока углового момента $J_a^{\mu\nu}$.

Полные сохраняющиеся импульс и угловой момент струны находятся интегрированием выражений (2.1.62) и (2.1.63) по σ при $\tau=0$. Например, полный импульс замкнутой струны дается формулой

$$P^\mu = T \int_0^\pi d\sigma \frac{dX^\mu(\sigma)}{d\tau} = \pi T (l\alpha_0^\mu + l\tilde{\alpha}_0^\mu) = p^\mu, \quad (2.1.66)$$

т. е. полный импульс струны совпадает с «импульсом» p^μ нулевой моды. Это имеет место также и для открытой струны. Формула для полного углового момента запишется в следующем виде:

$$J^{\mu\nu} = T \int_0^\pi d\sigma \left(X^\mu \frac{dX^\nu}{d\tau} - X^\nu \frac{dX^\mu}{d\tau} \right). \quad (2.1.67)$$

Подставляя разложение по модам, получим

$$J^{\mu\nu} = J^{\mu\nu} + E^{\mu\nu} \quad (2.1.68)$$

для открытых струн и

$$J^{\mu\nu} = l^{\mu\nu} + E^{\mu\nu} + \tilde{E}^{\mu\nu} \quad (2.1.69)$$

для замкнутых струн, где

$$l^{\mu\nu} = x^\mu p^\nu - x^\nu p^\mu, \quad (2.1.70)$$

а

$$E^{\mu\nu} = -i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (\alpha_{-n}^\mu \alpha_n^\nu - \alpha_{-n}^\nu \alpha_n^\mu) \quad (2.1.71)$$

и точно такое же выражение для $\tilde{E}^{\mu\nu}$ через моды $\tilde{\alpha}_n^\mu$. Хотя мы получили выражения для полных импульса и углового момента струны, проинтегрировав сохраняющиеся токи по σ при $\tau=0$, сохранение тока означает, что мы получили бы тот же

результат, интегрируя по любой пространственно-подобной кривой, которая только один раз пересекает мировую поверхность струны.

В качестве примера, демонстрирующего использование этих формул, докажем, что T действительно является натяжением струны. Рассмотрим замкнутую струну, которая в момент времени $t=0$ находится в покое и имеет форму окружности радиусом R в плоскости (x, y) , как это изображено на рис. 2.3, а. Пусть σ при $\tau=t=0$ пропорциональна длине дуги струны:

$$x = R \cos 2\sigma, \quad y = R \sin 2\sigma. \quad (2.1.72)$$

Тогда нетрудно увидеть, что уравнения движения (2.1.30) и уравнения связей (2.1.38) и (2.1.39) выполняются, если предположить, что $t=2R\tau$ около точки $\tau=t=0$. Из (2.1.62) следует,

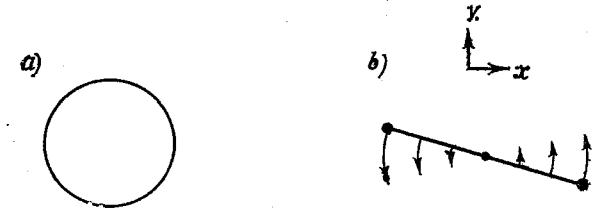


Рис. 2.3. На рис. а схематически изображена замкнутая струна радиуса R , находящаяся в начальный момент в состоянии покоя. На рис. б показана открытая струна, закручивающаяся в плоскости $x-y$.

что $p^0 = 2\pi RT$; это подтверждает, что T является энергией на единицу длины струны.

Другим примером служит доказательство того, что на классическом уровне $\alpha' = 1/(2\pi T)$ является наклоном реджевской траектории для открытых струн. Наклон реджевской траектории определяется как максимально возможный угловой момент на единицу квадрата энергии. Для открытых струн угловой момент на единицу квадрата энергии становится максимальным для струны, которая вращается, скажем, в плоскости (x, y) , как показано на рис. 2.3, б, в соответствии с формулой

$$x = A \cos \tau \cos \sigma, \quad y = A \sin \tau \cos \sigma, \quad t = A\tau. \quad (2.1.73)$$

Полезно доказать, что эта формула удовлетворяет уравнениям движения (2.1.30) и уравнениям связей (2.1.38) и (2.1.39). Убеждаясь с помощью (2.1.62) и (2.1.63), что энергия этой конфигурации равна πAT , а угловой момент $\pi A^2 T/2$, мы видим, что максимум углового момента на единицу квадрата энергии равен $1/(2\pi T)$, что подтверждает правильность интерпретации α' как наклона реджевской траектории. Далее, на концах струны вы-

полняется равенство $|\partial x/\partial t|^2 + |\partial y/\partial t|^2 = 1$, означающее, что они движутся со скоростью света (напомним, что в выбранных нами единицах $c = 1$). Этот факт является общим следствием граничного условия $X'^\mu = 0$ и уравнений связи.

Если от пространственно-временных понятий вернуться к объектам на мировой поверхности, то гамильтониан двумерной теории запишется так:

$$H = \int_0^\pi d\sigma (\dot{X} \cdot P_\tau - L) = \frac{T}{2} \int_0^\pi (\dot{X}^2 + X'^2) d\sigma. \quad (2.1.74)$$

Отсюда получаем, что

$$H = \frac{1}{2} \sum_{-\infty}^{\infty} \alpha_{-n} \cdot \alpha_n \quad (\text{открытые струны}), \quad (2.1.75)$$

$$H = \frac{1}{2} \sum_{-\infty}^{\infty} (\alpha_{-n} \cdot \alpha_n + \tilde{\alpha}_{-n} \cdot \tilde{\alpha}_n) \quad (\text{замкнутые струны}). \quad (2.1.76)$$

Гамильтониан генерирует (с помощью скобок Пуассона) эволюцию струны по τ . Он безразмерен, так как параметр τ был выбран безразмерным.

Рассмотрим теперь разложение по модам уравнений связи $T_{\alpha\beta} = 0$. Мы видели, что в случае замкнутой струны эти уравнения эквивалентны уравнениям $\dot{X}_R^2 = \dot{X}_L^2 = 0$. Используя разложения по модам (2.1.58) и (2.1.59), мы получаем для фурье-компонент левых частей этих уравнений (вычисленных при $\tau = 0$)

$$\begin{aligned} L_m &= \frac{T}{2} \int_0^\pi e^{-2im\sigma} T_{--} d\sigma = \\ &= \frac{T}{2} \int_0^\pi e^{-2im\sigma} \dot{X}_R^2 d\sigma = \frac{1}{2} \sum_{-\infty}^{\infty} \alpha_{m-n} \cdot \alpha_n, \end{aligned} \quad (2.1.77)$$

$$\begin{aligned} \tilde{L}_m &= \frac{T}{2} \int_0^\pi e^{2im\sigma} T_{++} d\sigma = \\ &= \frac{T}{2} \int_0^\pi e^{2im\sigma} \dot{X}_L^2 d\sigma = \frac{1}{2} \sum_{-\infty}^{\infty} \tilde{\alpha}_{m-n} \cdot \tilde{\alpha}_n. \end{aligned} \quad (2.1.78)$$

В случае открытых струн эти формулы нужно модифицировать, так как $e^{im\sigma}$ не являются ортогональными функциями на интервале $0 \leq \sigma \leq \pi$. Уравнения связей для открытой струны можно

записать в более удобной форме, если формально расширить области определения X_L и X_R (введенные в (2.1.33)) за пределы интервала $0 \leq \sigma \leq \pi$, положив $X_R(\sigma + \pi) = X_L(\sigma)$, $X_L(\sigma + \pi) = X_R(\sigma)$. Из граничных условий для открытой струны тогда следует, что X_R (или X_L) — это периодическая функция по σ с периодом 2π . Уравнения связей поэтому представляют собой обращение в нуль величины T_{++} для $-\pi \leq \sigma \leq \pi$, или, что то же самое, ее компонент Фурье

$$\begin{aligned} L_m &= T \int_0^\pi (e^{im\sigma} T_{++} + e^{-im\sigma} T_{--}) d\sigma = \\ &= \frac{T}{4} \int_{-\pi}^\pi e^{im\sigma} (\dot{X} + X')^2 d\sigma = \frac{1}{2} \sum_{-\infty}^{\infty} \alpha_{m-n} \cdot \alpha_n. \end{aligned} \quad (2.1.79)$$

Заметим в частности, что для открытых струн $H = L_0$, а для замкнутых $H = L_0 + \tilde{L}_0$. В случае замкнутых струн комбинация $L_0 - \tilde{L}_0$, которая должна обращаться в нуль в соответствии с уравнениями связей, не содержит импульс p^μ . Эта комбинация, которая генерирует повороты замкнутой струны $\sigma \rightarrow \sigma + \text{постоянная}$, будет играть важную роль в дальнейшем.

Струна в данном состоянии колебания имеет квадрат массы $M^2 = -p_\mu p^\mu$. Уравнение связи $L_0 = 0$ записывается в виде очень важного уравнения, определяющего M^2 через внутренние моды колебания струны. Этим уравнением является

$$M^2 = \frac{1}{\alpha'} \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{-n} \cdot \alpha_n \quad (2.1.80)$$

для открытых струн и

$$M^2 = \frac{2}{\alpha'} \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_{-n} \cdot \alpha_n + \tilde{\alpha}_{-n} \cdot \tilde{\alpha}_n) \quad (2.1.81)$$

для замкнутых струн. Уравнения (2.1.80) и (2.1.81) известны как условия массовой поверхности для открытых и замкнутых струн соответственно. Условие массовой поверхности является релятивистским аналогом уравнения, выражающего энергию, скажем, нерелятивистской скрипичной струны через координаты ее осцилляторов. В квантовой теории эти уравнения слегка модифицируются из-за эффектов, связанных с нормальным упорядочением. Из равенства $L_0 = \tilde{L}_0$ для замкнутых струн следует, что оба слагаемых в (2.1.76) и (2.1.81) дают одинаковый вклад.

Моды Фурье тензора энергии-импульса L_m и \tilde{L}_m называются операторами Вирасоро. Скобки Пуассона для операторов Вира-

соро могут быть непосредственно (хотя и несколько утомительным образом) вычислены с помощью скобок Пуассона для отдельных осцилляторов. Из определения оператора L_n получаем, что

$$[L_m, L_n]_{\text{С.П.}} = \frac{1}{4} \sum_{k, l} [\alpha_{m-k} \cdot \alpha_k, \alpha_{n-l} \cdot \alpha_l]_{\text{С.П.}} \quad (2.1.82)$$

Используя известное тождество $[AB, CD] = A[B, C]D + AC[B, D] + [A, C]DB + C[A, D]B$ и коммутационные соотношения для осцилляторов, его можно записать в виде

$$[L_m, L_n]_{\text{С.П.}} = \frac{i}{4} \sum_{k, l} (k\alpha_{m-k} \cdot \alpha_l \delta_{k+n-l} + k\alpha_{m-k} \cdot \alpha_{n-l} \delta_{k+l} + (m-k)\alpha_l \cdot \alpha_k \delta_{m-k+n-l} + (m-k)\alpha_{n-l} \cdot \alpha_k \delta_{m-k+l}), \quad (2.1.83)$$

где, как и прежде, δ_n равно 1, если $n=0$, и 0 в остальных случаях. Уравнение (2.1.83) сводится к

$$[L_m, L_n]_{\text{С.П.}} = \frac{i}{2} \sum_k k\alpha_{m-k} \cdot \alpha_{k+n} + \frac{i}{2} \sum_k (m-k)\alpha_{m-k+n} \cdot \alpha_k. \quad (2.1.84)$$

Заменой переменных $k \rightarrow k' = k+n$ в первой сумме уравнение (2.1.84) записывается в виде уравнения для алгебры Вирасоро:

$$[L_m, L_n]_{\text{С.П.}} = i(m-n)L_{m+n}. \quad (2.1.85)$$

Это очень важная формула. Ее модификацию за счет квантовых аномалий мы рассмотрим позже. Операторы L несомненно подчиняются той же алгебре. Алгебра Вирасоро (2.1.85) имеет очень простую интерпретацию. Пусть θ — обычная угловая переменная, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, которую мы будем рассматривать как переменную, параметризующую окружность S^1 . Инфинитезимальное общекоординатное преобразование окружности $\theta \rightarrow \theta + \alpha(\theta)$ генерировалось бы оператором $D_\alpha = i\alpha(\theta)d/d\theta$.

Полный базис таких «диффеоморфизмов» окружности образуют операторы

$$D_n = ie^{in\theta} \frac{d}{d\theta}. \quad (2.1.86)$$

Эти операторы, как легко убедиться, удовлетворяют алгебре Вирасоро (2.1.85). Таким образом, алгебра Вирасоро совпадает с алгеброй инфинитезимальных диффеоморфизмов окружности S^1 . Очевидную причину возникновения алгебры Вирасоро нетрудно понять, если заметить, что, заменив $e^{in\theta}$ на ξ^\pm , а $id/d\theta$ на $\partial/\partial\sigma^\pm$, что вместо формулы (2.1.86) получим формулу

(2.1.45) для генераторов остаточной симметрии, которая не устраняется условием конформной калибровки. Хотя переменные σ^\pm в (2.1.45) аргументы не являются угловыми переменными, они становятся таковыми при требовании выполнения уравнений движения, так как наши разложения по модам открытых и замкнутых струн содержат $\exp(in\sigma^\pm)$ только с целым n .

2.2. Квантование — старый ковариантный подход

Перейдем теперь к квантованию бозонной струнной теории. Это можно сделать многими различными способами. Если эти способы используются правильно, то все они эквивалентны. Однако связь между ними совсем нетривиальна, и каждый способ имеет свои определенные преимущества. Так что желательно со всеми этими способами ознакомиться. Обычно используются ковариантные подходы двух типов. Первый из них (и самый старый) основан на описании в терминах координат X^μ только с ограничениями на физическое пространство Фока, возникающими из-за уравнений связи Вирасоро. Эти ограничения аналогичны условию Гупта — Блейлера в электродинамике, в которой классическое уравнение связи $\partial_\mu A^\mu = 0$ заменяется требованием, чтобы положительно-частотные компоненты соответствующего квантового оператора аннулировали физическое фотонное состояние. Современный подход к ковариантному квантованию имеет более глубокую геометрическую основу. Он состоит во введении духов Фадеева — Попова, симметрии BRST и соответствующих токов. Эти методы будут рассмотрены в гл. 3.

2.2.1. Коммутационные соотношения и разложение по модам

Накладывая классическое условие фиксации калибровки в разд. 2.1.3, мы использовали репараметризационную инвариантность и симметрию относительно вейлевского изменения масштаба, чтобы приравнять метрику $h_{\alpha\beta}$ мировой поверхности к метрике $\eta_{\alpha\beta}$ плоского двумерного пространства Минковского. В квантовой теории к этой процедуре нужно относиться более осторожно. Симметрия вейлевского изменения масштаба ответственна за то, что след тензора энергии-импульса, полученного варьированием действия по $h^{\alpha\beta}$, равен нулю. Вообще говоря, квантовая теория приводит к аномалии в следе тензора $T_{\alpha\beta}$. Только при очень специальных обстоятельствах эта аномалия в квантовой теории пропадает. Исторически в первых попытках просто брали $h_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta}$, не беспокоясь об аномалиях. Однако последующий затем анализ показал (после значительных уси-

лей), что удовлетворительная теория возникает, если только на размерность пространства-времени и на массу основного состояния наложить определенные требования непротиворечивости. Описанный в разд. 2.3 способ квантования на световом конусе является очень «физическим» подходом, в котором начинают с того, что берут $h_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta}$, а затем налагают дополнительные калибровочные условия. Как мы увидим, это приводит к тем же ограничениям на массы и размерности пространства-времени. В альтернативном ковариантном подходе, который развивается в гл. 3, ограничения на D и a интерпретируются как условия устранения аномалий в следе тензора энергии-импульса.

Начиная с наиболее традиционного подхода, попробуем в квантовой теории положить $h_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta}$ и посмотрим, к чему это приведет. Ранее было показано, что в этой калибровке динамика классической струны описывается действием

$$S = -\frac{T}{2} \int d^2\sigma \partial^\alpha X \cdot \partial_\alpha X \quad (2.2.1)$$

с дополнительными условиями

$$(\dot{X} \pm X')^2 = 0, \quad (2.2.2)$$

соответствующими равенствам $T_{++} = T_{--} = 0$, и подходящими граничными условиями открытой или замкнутой струны. Импульсом, сопряженным к координате X^μ , является

$$P_\tau^\mu = T \dot{X}^\mu, \quad (2.2.3)$$

где τ — компонента тока импульсов, введенного в (2.1.62). Стандартный метод перехода от классической физики к квантовой состоит в замене скобок Пуассона коммутатором с помощью подстановки

$$[\dots]_{\text{с.п.}} \rightarrow -i[\dots]. \quad (2.2.4)$$

Теперь координату X^μ можно интерпретировать как квантовый оператор, для которого вместо соотношения (2.1.52) нужно написать канонические коммутационные соотношения при равных τ :

$$[P_\tau^\mu(\sigma, \tau), X^\nu(\sigma', \tau)] = -i\delta(\sigma - \sigma')\eta^{\mu\nu}, \quad (2.2.5)$$

$$[X^\mu(\sigma, \tau), X^\nu(\sigma', \tau)] = [P_\tau^\mu(\sigma, \tau), P_\tau^\nu(\sigma', \tau)] = 0. \quad (2.2.6)$$

Точно так же соотношения (2.1.53) и (2.1.54) заменяются одновременно коммутаторами

$$[x^\mu, p^\nu] = i\eta^{\mu\nu}, \quad (2.2.7)$$

а операторы α_m^μ и $\bar{\alpha}_m^\mu$ подчиняются коммутационным соотношениям

$$[\alpha_m^\mu, \alpha_n^\nu] = m\delta_{m+n}\eta^{\mu\nu}, \quad (2.2.8)$$

$$[\alpha_m^\mu, \bar{\alpha}_n^\nu] = 0, \quad (2.2.9)$$

$$[\bar{\alpha}_m^\mu, \bar{\alpha}_n^\nu] = m\delta_{m+n}\eta^{\mu\nu}. \quad (2.2.10)$$

Поэтому естественно операторы α_m с положительными и отрицательными m интерпретировать как соответственно повышающие и понижающие операторы гармонического осциллятора. Основное состояние осциллятора $|0\rangle$ определяется как состояние, которое аннулируется оператором α_m при $m > 0$. В действительности тот факт, что осцилляторы находятся в их основных состояниях, не полностью определяет состояние струны. Другая степень свободы описывается импульсом центра масс p^μ . Если мы пожелаем специально указать на состояние, которое аннулируется оператором α_m при $m > 0$, в котором импульс центра масс равен p^μ , то будем обозначать его $|0; p^\mu\rangle$.

Операторы α_m связаны с операторами гармонического осциллятора с общепринятой нормировкой следующим образом.

$$\alpha_m^\mu = \sqrt{m} \bar{a}_m^\mu, \quad m > 0, \quad (2.2.11)$$

$$\alpha_{-m}^\mu = \sqrt{m} a_m^{\mu+}, \quad m > 0. \quad (2.2.12)$$

Элементарный факт фундаментальной важности — то, что пространство Фока, построенное применением повышающих операторов $a_m^{\mu+}$ к основному состоянию $|0\rangle$, не является положительно определенным. Коммутаторы для временных компонент имеют непривычный знак минус, $[a_m^0, a_m^{0+}] = -1$, и поэтому состояние вида $a_m^{0+}|0\rangle$ имеет отрицательную норму, так как $\langle 0|a_m^0 a_m^{0+}|0\rangle = -1$. Физическое пространство допустимых состояний струны является подпространством полного пространства Фока; это подпространство выделяется определенными дополнительными условиями. Чтобы иметь разумную причинную теорию, необходимо обеспечить отсутствие в физическом подпространстве состояний с отрицательной нормой, которые обычно называются духами¹⁾.

Как было показано, дополнительные условия классической теории соответствуют обращению в нуль компонент тензора

¹⁾ Эти духи не нужно путать с духами BRST, с которыми мы познакомимся позже.

энергии-импульса T_{++} и T_{--} , фурье-моды которых являются операторами алгебры Вирасоро,

$$L_m = \frac{1}{2} \sum_{-\infty}^{\infty} \alpha_{m-n} \cdot \alpha_n, \quad (2.2.13)$$

с аналогичным выражением для L_m в случае замкнутых струн. В квантовой теории величины α_m являются операторами, так что нужно решить проблему неоднозначностей, связанных с упорядочением. Так как операторы α_{m-n} коммутируют с операторами α_n , кроме случая, когда $m=0$, такого типа неоднозначность возникает только в выражении для L_0 . В связи с тем что в настоящей момент у нас нет естественного способа решить проблему этой неоднозначности, просто *определим* оператор L_0 в виде нормально упорядоченного выражения

$$L_0 = \frac{1}{2} \alpha_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{-n} \cdot \alpha_n. \quad (2.2.14)$$

Так как в этой формуле могла бы присутствовать произвольная константа, мы должны добавить ко всем формулам, содержащим L_0 , константу, которую нужно еще определить. В классической теории важным примером наложения ограничений является требование обращения величины L_0 в нуль для всех допустимых движений струны. Как раз это условие приводило к формуле для массы. Самым наивным квантовомеханическим аналогом этого требования было бы утверждение о том, что L_0 должно аннулировать все физические состояния. Из-за неоднозначности, связанной с нормальным упорядочением, включим в это условие неопределенную константу и скажем, что физическое состояние $|\varphi\rangle$ должно удовлетворять уравнению

$$(L_0 - a) |\varphi\rangle = 0, \quad (2.2.15)$$

где постоянная a будет определена позже. Как уже было выяснено в классической теории, это уравнение определяет массу состояния струны в терминах ее внутренних колебаний. Действительно, записанное более явно в случае открытых струн (с $\alpha' = 1/2$) уравнение (2.2.15) означает, что

$$M^2 = -2a + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{-n} \cdot \alpha_n \quad (2.2.16)$$

и что квадрат массы основного состояния осциллятора равен $-2a$, а квадрат масс возбужденных состояний больше этой величины на любое число, делящееся на 2. Для замкнутой струны

из условий $(L_0 - a) |\varphi\rangle = (\bar{L}_0 - a) |\varphi\rangle = 0$ следует

$$M^2 = -8a + 8 \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{-n} \cdot \alpha_n = -8a + 8 \sum_{n=1}^{\infty} \bar{\alpha}_{-n} \cdot \bar{\alpha}_n. \quad (2.2.17)$$

Другое объяснение тому факту, что квадрат массы основного состояния для замкнутой струны в четыре раза больше квадрата массы открытой струны, было дано в гл. 1. Вычитая одно выражение из другого в формуле (2.2.17), или, что то же самое, налагая условие $(L_0 - \bar{L}_0) |\varphi\rangle = 0$, получим, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{-n} \cdot \alpha_n = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{\alpha}_{-n} \cdot \bar{\alpha}_n. \quad (2.2.18)$$

Из всех уравнений связи только это уравнение связывает моды струны, движущиеся влево, с модами струны, движущимися вправо. Физические состояния находятся независимым выбором осцилляторных состояний струны, движущихся влево и вправо и удовлетворяющих только одному этому ограничению.

Другие операторы L_m и \bar{L}_m соответствуют членам с определенной ненулевой частотой в T_{++} и T_{--} . Как и при рассмотрении электродинамики в рамках формализма Гупта — Блейлера, обращение в нуль этих членов в классической теории заменяется в квантовой на более слабое требование, а именно то, чтобы компоненты положительной четности уничтожали физические состояния, т. е.

$$L_m |\varphi\rangle = 0, \quad m = 1, 2, \dots \quad (2.2.19)$$

Этого уравнения достаточно для доказательства того, что и для положительных, и для отрицательных m при надлежащем выборе упорядочения матричные элементы операторов $L_m - a\delta_m$ между парой физических состояний обращаются в нуль. Чтобы убедиться в этом, предположим, что $|\varphi\rangle$ и $|\chi\rangle$ — два физических состояния, удовлетворяющие уравнениям (2.2.15) и (2.2.19). Рассмотрим выражение

$$\langle \chi | L_{n_1} L_{n_2} \dots L_{n_p} | \varphi \rangle. \quad (2.2.20)$$

(Если один из множителей в (2.2.20) имеет индекс $n_k = 0$, то соответствующий оператор L_0 должен быть заменен на $L_0 - a$.) Так как операторы L_n не коммутируют (и мы скоро найдем квантовую аномалию, которая приводит к c -числовому слагаемому в их коммутаторах), значение (2.2.20) зависит от того, в каком порядке они расположены. Однако если все операторы L_{n_k} с положительным n_k поместить вправо, а все операторы L_{n_k} с отрицательными n_k — влево, то выражение (2.2.20)

обратится в нуль в силу условий для физического состояния и свойства эрмитовости оператора $L_{-m} = L_m^\dagger$. Это — наикратчайший путь, по которому мы на квантовом уровне можем прийти к утверждению классической теории о том, что все величины L_n обращаются в нуль для допустимых классических движений струны. Аномальные коммутационные соотношения между L_n делают невозможным нахождение состояний, которые ими всеми аннулируются. Операторы углового момента

$$J^{\mu\nu} = x^\mu p^\nu - x^\nu p^\mu - i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (\alpha_{-n}^\mu \alpha_n^\nu - \alpha_{-n}^\nu \alpha_n^\mu) \quad (2.2.21)$$

не обладают однозначностями, связанными с упорядочением. Эти выражения были введены в формулах (2.1.67) — (2.1.71). Так как с упорядочением проблем нет, эти операторы могут быть однозначно интерпретированы как квантовые операторы. Не так трудно, используя канонические коммутационные соотношения, доказать, что операторы удовлетворяют соотношениям алгебры Пуанкаре

$$[p^\mu, p^\nu] = 0, \quad (2.2.22)$$

$$[p^\mu, J^{\rho\lambda}] = -i\eta^{\mu\nu} p^\rho + i\eta^{\mu\rho} p^\nu, \quad (2.2.23)$$

$$[J^{\mu\nu}, J^{\rho\lambda}] = -i\eta^{\nu\rho} J^{\mu\lambda} + i\eta^{\mu\rho} J^{\nu\lambda} + i\eta^{\nu\lambda} J^{\mu\rho} - i\eta^{\mu\lambda} J^{\nu\rho}. \quad (2.2.24)$$

Действительно, построение генераторов группы Пуанкаре из нетеровских токов гарантирует на классическом уровне выполнение соотношений алгебры Пуанкаре (конечно же, когда вместо коммутаторов выписываются скобки Пуассона), а при проверке этих соотношений в квантовой механике никаких реальных возможностей для аномалий не возникает. Так как $[L_n, J^{\mu\nu}] = 0$, то условия, которым подчиняются физические состояния, инварианты относительно преобразований Лоренца, и можно гарантировать, что физические состояния образуют лоренцевские мультиплеты.

2.2.2. Алгебра Вирасоро и физические состояния

Как уже было объяснено, пространство Фока, построенное с помощью осцилляторов α_m^μ (и $\bar{\alpha}_m^\mu$), не является положительно определенным из-за отрицательности компонент метрики в коммутационных соотношениях для временных компонент. Однако физические состояния соответствуют пространству, удовлетворяющему условиям Вирасоро $(L_m - a\delta_m) |\varphi\rangle = 0$ при $m \geq 0$. Так как эти условия находятся во взаимно однозначном соответствии с времениподобными осцилляторами, то их как раз достаточно

для того, чтобы не выводить за пределы положительно определенного пространства Фока. Чтобы убедиться в этом, заметим, что $L_m \sim p \cdot \alpha_m + \text{члены, квадратичные по осцилляторам}$. Если бы квадратичные члены отсутствовали, то условия на L_n (так как p^μ времениподобен, кроме случая нескольких низших состояний) приводили бы к выпадению времениподобных мод. Тогда в системе покоя физические состояния генерировались бы пространственными компонентами осцилляторов. Это показывает, что учет условий достаточен для отсутствия духов. Однако квадратичные члены играют важную роль, и истинная ситуация является куда более тонкой и интересной. Свободный от духов спектр возможен только при определенных значениях константы связи и размерности пространства-времени D . Для более тщательного исследования нам необходимо изучить алгебру операторов Вирасоро.

Мы уже получали вид алгебры Вирасоро в классической теории, а именно

$$[L_m, L_n] = (m - n) L_{m+n}. \quad (2.2.25)$$

Теперь вычислим всевозможные квантовомеханические поправки, которые могут появиться в соотношении (2.2.25). Ранее мы получили формулу (2.1.84) в результате последовательных шагов с соответствующими формулами, которые остаются справедливыми даже на квантовом уровне. Более того, до тех пор пока $m + n \neq 0$, процедура, позволившая перейти от (2.1.84) к (2.1.85), возможна и в квантовой механике, так что при $m + n \neq 0$ (2.1.85) не модифицируется. При $m + n = 0$ в (2.1.84) в каждой из двух бесконечных сумм на квантовом уровне имеются бесконечные неоднозначности, связанные с нормальным упорядочением. Так как каждая из этих двух бесконечных сумм плохо определена, то сдвигать переменную суммирования в одной из них с целью перехода к формуле (2.1.85) опасно. С другой стороны, так как всякая неоднозначность, связанная с нормальным упорядочением, которая может возникнуть в формуле (2.1.85) при $m + n = 0$, содержала бы только c -число, мы с гарантией можем написать, что

$$[L_m, L_n] = (m - n) L_{m+n} + A(m) \delta_{m+n}, \quad (2.2.26)$$

где $A(m)$ — зависящее от m c -число. Такая обобщенная алгебра известна как центральное расширение алгебры Вирасоро; c -числовой член называется аномальным числом этой алгебры. Из формулы (2.2.26) очевидно, что $A(m) = -A(-m)$ и $A(0) = 0$, так что достаточно определить $A(m)$ только для положительных m .

Непосредственно вычислить $A(m)$, исследуя нормальное упорядочение в двух бесконечных суммах в (2.1.84), неожиданно оказывается сложной задачей. Более простым и полезным является следующий способ. Используя тождество Якоби $0 = [L_k, [L_n, L_m]] + [L_n, [L_m, L_k]] + [L_m, [L_k, L_n]]$, мы получаем для $k + n + m = 0$, что

$$(n - m) A(k) + (m - k) A(n) + (k - n) A(m) = 0. \quad (2.2.27)$$

Положив в (2.2.27) $k = 1$, мы приходим к формуле

$$A(n + 1) = \frac{(n + 2) A(n) - (2n + 1) A(1)}{(n - 1)}. \quad (2.2.28)$$

Это рекуррентное соотношение достаточно для определения всех величин $A(n)$ через $A(1)$ и $A(2)$, так что общий вид $A(n)$ определяется через два неизвестных коэффициента. Фактически общим решением является

$$A(m) = c_3 m^3 + c_1 m, \quad (2.2.29)$$

где c_1 и c_3 суть константы. Можно, конечно, проверить, что эта формула удовлетворяет уравнению (2.2.27). Константу c_1 можно изменить, сдвигая определение L_0 на константу (операция, которая никак не нарушит алгебру Вирасоро). Сдвиг оператора L_0 на константу привел бы к сдвигу на константу a в формуле (2.2.15), так что инвариантный смысл имеет только связь между a и c_1 .

Коммутатор от операторов L_m и L_{-m} должен быть вычислен очень тщательно, чтобы правильно получить вклад аномалии. Самый простой и надежный способ определить c_1 и c_3 — вычислить среднее от $[L_m, L_{-m}]$ по надлежащему состоянию. Удобнее всего в качестве такого состояния выбрать основное состояние осциллятора $|0; 0\rangle$ с $p^\mu = 0$. Для $m = 1$ мы получаем

$$\langle 0; 0 | [L_1, L_{-1}] | 0; 0 \rangle = 0, \quad (2.2.30)$$

так как каждый член в L_1 или L_{-1} аннулирует основное состояние с нулевым импульсом. Но для $m = 2$ находим

$$\begin{aligned} \langle 0; 0 | [L_2, L_{-2}] | 0; 0 \rangle &= \langle 0; 0 | L_2 L_{-2} | 0; 0 \rangle = \\ &= \frac{1}{4} \langle 0; 0 | \alpha_1 \cdot \alpha_1 \alpha_{-1} \cdot \alpha_{-1} | 0; 0 \rangle \\ &= \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} \langle 0; 0 | \alpha_1^\mu \alpha_{-1}^\nu | 0; 0 \rangle = \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} \eta^{\mu\nu} = \frac{1}{2} D. \end{aligned} \quad (2.2.31)$$

Это уже достаточная информация для определения c_1 и c_3 , из которой следует, что

$$A(m) = \frac{1}{12} D (m^3 - m). \quad (2.2.32)$$

Заметим, что структура алгебры Вирасоро и аномалии та-

кова, что операторы L_1 , L_0 и L_{-1} генерируют замкнутую подалгебру без аномалии, изоморфную $SU(1, 1)$ или $SL(2, R)$.

Проведем теперь предварительное исследование условий, обеспечивающих отсутствие физических состояний с отрицательной нормой. В результате мы получим, что состояния с отрицательной нормой имеются, когда параметр a и размерность пространства-времени D принимают значения в определенных областях, и отсутствуют в противном случае. Чтобы выделить области значений параметров a и D , при которых в физическом гильбертовом пространстве нет состояний с отрицательной нормой, очень полезно рассмотреть состояния с нулевой нормой. Если менять значения параметров a и D так, чтобы они переходили из области значений, при которых физическое гильбертово пространство является положительно полуопределенным, в область значений, при которых оно содержит состояния с отрицательной нормой, то значениям на границе этих двух областей всегда соответствуют ситуации с дополнительными физическими состояниями нулевой нормы. Оказывается (по причинам, которые мы в дальнейшем обсудим), что эти дополнительные физические состояния нулевой нормы связаны с важными физическими принципами и что самым интересным является «критический» случай, когда физическое гильбертово пространство таково, что вот-вот начнут появляться духовые состояния.

Мы приведем обоснование для открытых струн, но ситуация с замкнутыми струнами почти тождественна, только число α -осцилляторов и условий Вирасоро в два раза больше. В самом деле, n -й массовый уровень замкнутой струны может быть выражен в виде тензорного произведения гильбертова пространства физических состояний, построенных с помощью осцилляторов, движущихся вправо, на гильбертово пространство физических состояний, построенных с помощью осцилляторов, движущихся влево, если игнорировать связь (2.2.18). Левые и правые физические пространства эквивалентны физическому пространству открытой струны, так что мы можем также искать состояния с отрицательной нормой и в этом случае.

Обозначим основное состояние открытой струны с импульсом k^μ через $|0; k\rangle$. Из условий массовой поверхности $L_0 = a$ следует, что $\alpha' k^2 = a$. Рассмотрим теперь состояния первого возбужденного уровня. Они определяются как состояния вида $\zeta \cdot \alpha_{-1} |0; k\rangle$, где $\zeta^\mu(k)$ — вектор поляризации, имеющий до учета калибровочных связей D независимых компонент. Условие массовой поверхности приводит теперь к равенству $\alpha' k^2 = a - 1$, а из дополнительного условия с L_1 следует, что $\zeta \cdot k = 0$. Это условие оставляет $D - 1$ допустимую поляризацию. Норма этих состояний определяется произведением $\zeta \cdot \zeta$. Если мы выберем

вектор k лежащим в плоскости $(0, 1)$, то $(D-2)$ состояний с (пространственноподобными) поляризациями, перпендикулярными к этой плоскости, имеют положительные нормы. Если, с другой стороны, a таково, что первое возбужденное состояние является тахионом с $k^2 > 0$, то k можно выбрать так, чтобы его временная компонента была равна нулю. Тогда ζ — времениподобный вектор и имеет отрицательную норму. Если $k^2 < 0$, то k можно выбрать так, что только временная компонента будет отличной от нуля, и ζ будет пространственноподобным вектором с положительной нормой. Наконец, если $k^2 = 0$, то ζ пропорционально k и имеет нулевую норму. Итак, мы получаем первое условие отсутствия духов

$$a \leq 1. \quad (2.2.33)$$

В предельном случае ($a = 1$) векторная частица является безмассовой, а скалярное основное состояние является тахионом. В этом случае дополнительное условие с L_1 соответствует ковариантному калибровочному условию $\partial_\mu A^\mu = 0$ в электродинамике. Как и при ковариантном квантовании Гупта — Блейлера в электродинамике, из этого условия следует, что имеются $D-2$ состояний с положительной нормой и поперечной поляризацией и одно состояние с продольной поляризацией $\zeta^\mu = k^\mu$ с нулевой нормой, и нужно еще показать, что состояния с нулевой нормой не принадлежат пространству, в котором действует S -матрица. В теории поля это следует из калибровочной инвариантности и сохранения тока, в струнной теории этот факт тоже можно доказать (и мы на самом деле один из подходов уже изложили, когда во введении обсуждали гравитационные тождества Уорда), но пока еще как следует непонятно, проявлением какой более глубокой структуры он является.

«Нулевое» состояние, соответствующее первому возбужденному уровню, которое возникло при $a = 1$, является лишь первым в бесконечном наборе таких состояний. Результат, полученный для первого возбужденного уровня, можно обобщить следующим образом. Произвольное состояние $|\varphi\rangle$ мы будем называть *физическим состоянием*, если оно удовлетворяет уравнениям связей $L_m|\varphi\rangle = 0$ при $m > 0$ и $(L_0 - a)|\varphi\rangle = 0$. Состояние $|\psi\rangle$, удовлетворяющее уравнению $(L_0 - a)|\psi\rangle = 0$, будет называться *шпурионным состоянием*, если оно ортогонально ко всем физическим состояниям, т. е.

$$\langle\varphi|\psi\rangle = 0 \quad (2.2.34)$$

для всех физических состояний $|\varphi\rangle$. Шпурионные состояния всегда можно записать в виде

$$|\psi\rangle = \sum_{n>0} L_{-n} |\chi_n\rangle, \quad (2.2.35)$$

где $|\chi_n\rangle$ — некоторое состояние, удовлетворяющее уравнению

$$(L_0 - a + n)|\chi_n\rangle = 0. \quad (2.2.36)$$

В действительности бесконечный ряд в (2.2.35) можно оборвать, так как L_{-n} для $n \geq 3$ можно представить в виде итерированных коммутаторов от операторов L_{-1} и L_{-2} ; например, $L_{-3} \sim [L_{-1}, L_{-2}]$. Так что шпурионное состояние можно просто записать как

$$|\psi\rangle = L_{-1}|\chi_1\rangle + L_{-2}|\chi_2\rangle, \quad (2.2.37)$$

где $|\chi_1\rangle$ и $|\chi_2\rangle$ удовлетворяют уравнению (2.2.36). Состояния вида (2.2.37) ортогональны физическим состояниям, так как

$$\langle\varphi|\psi\rangle = \sum_{m=1}^2 \langle\varphi|L_{-m}|\chi_m\rangle = \sum_{m=1}^2 \langle\chi_m|L_m|\varphi\rangle^* = 0. \quad (2.2.38)$$

Чтобы убедиться в том, что шпурионное состояние должно иметь вид (2.2.35) или (2.2.37), заметим, что если $|\psi\rangle$ — шпурионное состояние, то оператор $O = |\psi\rangle\langle\psi|$ должен аннулировать все физические состояния. Так как единственное ограничение на физические состояния общего вида состоит в том, что они должны аннулироваться операторами L_m при $m > 0$, то оператор O можно записать в виде

$$O = \sum_{n>0} X_{-n} L_n, \quad (2.2.39)$$

где X_{-n} — некоторые операторы. Если вспомнить, что $O = |\psi\rangle\langle\psi|$, то из (2.2.39) следует, что состояние $|\psi\rangle$ представимо в виде (2.2.35), где $\chi_n = X_{-n}^+ \psi$.

Особая ситуация возникает, когда состояние $|\psi\rangle$ и шпурионное, и физическое, т. е. когда

$$\langle\varphi|\psi\rangle = 0, \quad L_m|\psi\rangle = 0, \quad m > 0, \quad (L_0 - a)|\psi\rangle = 0. \quad (2.2.40)$$

Из (2.2.36) тогда следует, что это состояние имеет нулевую норму, так как

$$\langle\psi|\psi\rangle = \sum_{m>0} \langle\chi_m|L_m|\psi\rangle = 0. \quad (2.2.41)$$

Эти состояния ортогональны ко всем физическим состояниям, в том числе и к самим себе (и иногда называются «нулевыми» физическими состояниями).

Состояния такого типа можно построить, рассмотрев шпурионные состояния вида

$$|\psi\rangle = L_{-1}|\tilde{\chi}\rangle, \quad (2.2.42)$$

где $|\tilde{\chi}\rangle$ — произвольное состояние, удовлетворяющее уравнениям $L_m|\tilde{\chi}\rangle = 0$ при $m > 0$ и $(L_0 - a + 1)|\tilde{\chi}\rangle = 0$. В данном

случае $|\tilde{\chi}\rangle$ могло бы быть состоянием с нулевым импульсом $|0; 0\rangle$ или, скажем, любым физическим состоянием со сдвинутым надлежащим образом импульсом p^μ . К тому же состояние $|\psi\rangle$, будучи шпурионным, удовлетворяет также всем условиям физического состояния, кроме условия, содержащего L_1 . Действие оператора L_1 на $|\psi\rangle$ приводит к состоянию

$$L_1|\psi\rangle = L_1 L_{-1}|\tilde{\chi}\rangle = 2L_0|\tilde{\chi}\rangle, \quad (2.2.43)$$

которое обращается в нуль, если $a = 1$. В этом случае состояния $|\psi\rangle$ являются и шпурионными, и физическими и, следовательно, в соответствии с нашими общими утверждениями имеют нулевую норму. Очевидно, что, действуя таким образом оператором L_{-1} на произвольное состояние $|\tilde{\chi}\rangle$, можно получить бесконечное число состояний нулевой нормы. Самым простым примером является как раз рассмотренное ранее безмассовое векторное состояние, когда $|\tilde{\chi}\rangle = |0; k\rangle$.

Однако в случае пространства-времени $D = 26$ измерений число состояний с нулевой нормой увеличивается драматическим образом. Это обнаруживается, если рассмотреть шпурионные состояния, имеющие структуру

$$|\psi\rangle = (L_{-2} + \gamma L_{-1}^2)|\tilde{\chi}\rangle, \quad (2.2.44)$$

где теперь $a = 1$ и требуется, чтобы $L_m|\tilde{\chi}\rangle = 0$ при $m > 0$ и $(L_0 + 1)|\tilde{\chi}\rangle = 0$, так что $(L_0 - 1)|\psi\rangle = 0$. Чтобы $|\psi\rangle$ имело нулевую норму, оно должно быть физическим и, в частности, должно аннулировать действием операторов L_m при $m > 0$. Так как тот факт, что оно аннулируется операторами L_m при $m \geq 3$, тривиален, нужно ответить только на вопрос: можно ли наложить условия $L_1|\psi\rangle = L_2|\psi\rangle = 0$, воспользовавшись алгеброй Вирасоро с аномалией (2.2.32)? Эти условия приведут к уравнениям $3 - 2\gamma = 0$ и $D/2 - (4 + 6\gamma) = 0$, из которых получается, что $\gamma = 3/2$, а $D = 26$. Таким образом, при $D = 26$ (и $a = 1$) имеется намного больше состояний с нулевой нормой вида

$$(L_{-2} + \frac{3}{2} L_{-1}^2)|\tilde{\chi}\rangle. \quad (2.2.45)$$

В отличие от состояний с нулевой нормой первого бесконечного класса состояния типа (2.2.45) имеют нулевую норму тогда и только тогда, когда $D = 26$.

В качестве первого примера состояния вида (2.2.44) рассмотрим состояние

$$(L_{-2} + \frac{3}{2} L_{-1}^2)|0; p\rangle = \left[\frac{1}{2} \alpha_{-1} \cdot \alpha_{-1} + \frac{5}{2} p \cdot \alpha_{-2} + \frac{3}{2} (p \cdot \alpha_{-1})^2 \right] |0; p\rangle, \quad (2.2.46)$$

где $p^2 = 2$. Норма этого состояния равна $(D - 26)/2$, которая, как и должно быть, обращается в нуль при $D = 26$. Тот факт, что его норма при $D < 26$ становится отрицательной, не имеет значения, так как в этом случае оно не удовлетворяет условиям физического состояния.

Физические состояния с отрицательной нормой можно построить при $D > 26$. Примером может служить состояние вида

$$|\varphi\rangle = [c_1 \alpha_{-1} \cdot \alpha_{-1} + c_2 p \cdot \alpha_{-2} + c_3 (p \cdot \alpha_{-1})^2] |0; p\rangle, \quad (2.2.47)$$

где $p^2 = -2$, так что $(L_0 - 1)|\varphi\rangle = 0$. Такие состояния удовлетворяют условиям $L_1|\varphi\rangle = L_2|\varphi\rangle = 0$ при

$$c_2 = c_1 \frac{D-1}{5} \text{ и } c_3 = c_1 \frac{D+4}{10}. \quad (2.2.48)$$

В этом случае их норма

$$\langle\varphi|\varphi\rangle = \frac{2c_1^2}{25} (D-1)(26-D), \quad (2.2.49)$$

так что при $D > 26$ в физическом спектре обнаруживаются духи.

Общее правило, которое будет доказано позже, заключается в следующем: свободный от духов спектр получается при $a = 1$ и $D = 26$ или при $a \leq 1$ и $D \leq 25$. В первом случае имеется большое количество состояний с нулевой нормой, и физический спектр состоит из стольких распространяющихся мод, сколько их генерировалось бы 24 наборами α -осцилляторов, тогда как во втором случае число состояний с нулевой нормой намного меньше и физический спектр соответствует $D - 1$ набору осцилляторов. Можно сказать, что при $a = 1$, $D = 26$ струна имеет только поперечные возбуждения, а при $a \leq 1$ и $D \leq 25$ она обладает и продольными модами. Эти факты обнаружатся, когда мы будем доказывать теорему об отсутствии духов.

Изучая только свободную теорию в рамках рассматриваемого здесь формализма, невозможно доказать, что D должно быть равно 26. Причина этого состоит в том, что если в теории нет духов при $D = 26$, то, рассматривая подпространство состояний, являющихся основными состояниями для α_m^μ -осцилляторов при $\mu = 25^1$, мы воспроизведем физические состояния теории с $D = 25$, в которой также не должно быть духов²). Самое большое, что в рамках данного формализма можно было бы

¹) Напомним, что μ является пространственно-временным индексом, принимающим значения от 0 до 25.

²) Хотя произвольное усечение на случай с $D < 26$ не приводит к появлению духов в древесном приближении, на однопетлевом уровне возникают трудности с унитарностью. Именно по этой причине впервые была установлена необходимость ограничиться размерностью $D = 26$.

показать на древесном уровне, так это то, что случай $D = 26$ является наиболее естественным, а случай $D < 26$ оказывается произвольным усечением теории, которая в действительности является теорией в 26 измерениях. Первым признаком этого является обнаружение дополнительных состояний с нулевой нормой, которые возникают только при $D = 26$. Эти дополнительные состояния с нулевой нормой играют совершенно особую роль. Так же как и продольные моды безмассового векторного мезона, рассмотренные ранее, состояния с нулевой нормой не должны входить в пространство состояний, в котором действует S -матрица, в силу некоторого принципа, аналогичного калибровочной инвариантности в теории поля. Так что наличие при $D = 26$ дополнительных состояний с нулевой нормой говорит о том, что такая теория обладает расширенной калибровочной инвариантностью и изучение ее может представлять наибольший интерес. Точно так же существование бесконечного ряда состояний в случае, когда a в точности равно 1, говорит о том, что именно этот случай является наиболее интересным. Так что основным состоянием открытой струны мы в порядке рабочей гипотезы будем считать тахион с квадратом массы -2 , соответствующий выбору $a = 1$, а первым возбужденным состоянием — безмассовый векторный мезон. Существование этой безмассовой калибровочной частицы является одним из аспектов очень специальных свойств струнной теории в пространстве критической размерности.

2.2.3. Вершинные операторы

Как уже отмечалось во введении, в качестве основного взаимодействия открытых струн можно рассматривать процесс, в котором одна струна расщепляется на две или, наоборот, две струны сливаются в одну. Вообще говоря, мы можем рассмотреть струнное взаимодействие, изображенное на рис. 2.4, *a*, когда все три участвующие во взаимодействии струны лежат вне массовой поверхности. Однако больший интерес представляет случай, проиллюстрированный на рис. 2.4, *b*, когда одно из трех струнных состояний является физическим состоянием на массовой поверхности. На этом рисунке схематически изображен процесс $1 \rightarrow 1' + 2$, в котором струнное состояние 2 является собственным состоянием массового оператора. Состояния 1 и $1'$ могут быть, а могут и не быть собственными состояниями этого оператора. Само понятие собственного состояния массового оператора является квантовомеханическим, а не классическим понятием, и если во всех формулах восстановить константу Планка, то ширина собственного состояния массового оператора

и квадрат соответствующей массы будут порядка \hbar . Следовательно, в классическом пределе собственное состояние массового оператора струны в некотором смысле аналогично состоянию точечной частицы. В переходе $1 \rightarrow 1'$ с испусканием струны в состоянии 2 на массовой поверхности квантовое состояние $1'$ должно быть связано с квантовым состоянием 1 некоторым линейным преобразованием, зависящим от струнного состояния 2, — линейным, так как мы рассматриваем квантовую механику. Если состояние 2 подобно состоянию точечной частицы, естественно предположить, что струнное состояние $1'$ получается из

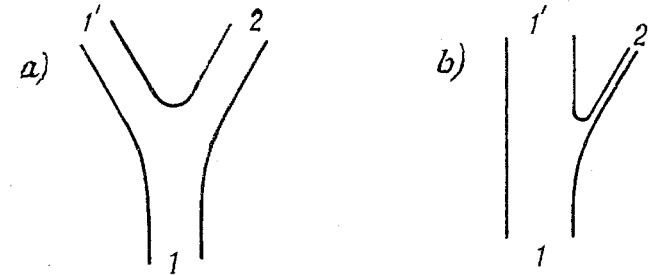


Рис. 2.4. Когда одна открытая струна расщепляется на две, как в случае *a*), все из них могут, вообще говоря, быть вне массовой поверхности. Если одна из струн в конечном состоянии находится на массовой поверхности, как в случае *b*), то она имеет ширину порядка \hbar и является в некотором смысле точечноподобной.

струнного состояния 1 действием локального оператора на конце струны, где возникло состояние 2. Этот локальный оператор обычно обозначается V_2 и называется вершинным оператором, приводящим к испусканию струны в состоянии 2 на массовой поверхности. Эти эвристические доводы позволяют предположить, что с каждым физическим состоянием $|\phi\rangle$ на массовой поверхности нужно связывать вершинный оператор V_ϕ с соответствующими свойствами. Подобные доводы, но несколько в другом аспекте, приводились в гл. 1. Здесь мы обсуждаем вершинные операторы не с целью анализа взаимодействий струн, которые будут рассматриваться в последующих главах, а для того, чтобы развить технику, позволяющую анализировать спектр физических состояний. Это обсуждение будет хорошим дополнением к тому, о чем говорилось в гл. 1. Для наших целей будет достаточным сосредоточить внимание только на открытых струнах, хотя вершинные операторы несомненно столь же важны и в теории замкнутых струн.

Рассмотрим локальный оператор $A(\sigma, \tau)$ в гильбертовом пространстве состояний открытой струны. Чтобы посмотреть, как

действует этот оператор на концах струны, положим $\sigma = 0$ (или $\sigma = \pi$) и будем для краткости вместо $A(0, \tau)$ писать $A(\tau)$. Так как оператор $L_0 - a$ является струнным гамильтонианом, мы имеем

$$A(\tau) = e^{i\tau L_0} A(0) e^{-i\tau L_0}. \quad (2.2.50)$$

Нас интересуют операторы $A(\tau)$, которые преобразуются в себя же, если генераторы преобразований принадлежат алгебре Вирасоро. Считается, что оператор $A(\tau)$ имеет конформную размерность J , если и только если при произвольной замене переменных $\tau \rightarrow \tau'(\tau)$ он преобразуется следующим образом:

$$A'(\tau') = \left(\frac{d\tau}{d\tau'} \right)^J A(\tau). \quad (2.2.51)$$

Определение, выраженное формулой (2.2.51), эквивалентно определению, использованному в разд. 1.4.5 (и в сноске в разд. 1.5.2), где размерность оператора устанавливалась из соответствующей двухточечной функции. В случае инфинитезимального преобразования

$$\tau \rightarrow \tau' = \tau + \varepsilon(\tau) \quad (2.2.52)$$

закон преобразования поля конформной размерности J имеет, таким образом, следующий вид:

$$\delta A(\tau) = -\varepsilon \frac{dA}{d\tau} - JA \frac{d\varepsilon}{d\tau}. \quad (2.2.53)$$

Преобразования (2.2.52) с $\varepsilon = -ie^{im\tau}$ генерируются операторами L_m , поэтому условие того, что оператор A имеет размерность J , можно записать и так:

$$[L_m, A(\tau)] = e^{im\tau} \left(-i \frac{d}{d\tau} + mJ \right) A(\tau). \quad (2.2.54)$$

Если оператор $A(\tau)$ представлен в виде разложения в ряд Фурье

$$A(\tau) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} A_m e^{-im\tau}, \quad (2.2.55)$$

то это условие переписывается в виде условия для мод Фурье

$$[L_m, A_n] = [m(J-1) - n] A_{m+n}. \quad (2.2.56)$$

Легко проверить, что это условие согласуется с коммутационными соотношениями алгебры Вирасоро и тождеством Якоби. В соответствии с этим определением координата струны $X^\mu(\tau)$, например, имеет размерность $J = 0$, а оператор импульса $\dot{X}^\mu(\tau)$ имеет $J = 1$. (Позже, когда будут обсуждаться духи Фаддеева —

Попова, мы увидим, что духовая координата c имеет $J = -1$, а антидух b имеет $J = 2$.) Про операторы, которые преобразуются в соответствии с (2.2.54) с некоторым определенным J , говорят, что они имеют определенную конформную размерность. Это те операторы, которые «хорошо» преобразуются под действием генераторов алгебры Вирасоро.

Операторы с определенной конформной размерностью являются в каком-то смысле специальными. Ни в коем случае не следует, что любой оператор может быть разложен в линейную комбинацию операторов определенной конформной размерности.

В рассматриваемой нами задаче анализа физических состояний польза от введения операторов определенной конформной размерности заключается в том, что эти операторы могут быть использованы для построения новых физических состояний из старых. В самом деле, если $|\varphi\rangle$ — физическое состояние, $(L_n - a\delta_n)|\varphi\rangle = 0$, $n \geq 0$, а оператор $A(\tau)$ имеет конформную размерность $J = 1$, то легко видеть, что $[L_m, A_0] = 0$, и, следовательно, состояние

$$|\varphi'\rangle = A_0 |\varphi\rangle \quad (2.2.57)$$

также является физическим. Так как вершинный оператор, связанный с испусканием струны в собственном состоянии массового оператора 2, должен непременно отображать физическое начальное состояние 1 в физическое конечное состояние 1', то из формулы (2.2.57) можно предположить, что вершинные операторы открытой струны должны быть операторами конформной размерности единица. Мы и в самом деле другим методом установили во введении, что вершинные операторы открытых струн являются локальными операторами размерности единица.

Вершинный оператор $V(k, 0, \tau) = V(k, \tau)$, описывающий испускание струны в момент времени τ и при $\sigma = 0$ в физическом состоянии с импульсом $-k^\mu$ или поглощение струны в физическом состоянии с импульсом $+k^\mu$, должен помимо всего прочего менять импульс того состояния, на которое он действует, на величину k^μ . Следовательно, его зависимость от координаты центра масс струны должна проявляться множителем $e^{ik \cdot x(\tau)}$, где

$$x^\mu(\tau) = x^\mu + p^\mu \tau \quad (2.2.58)$$

является координатой центра масс струны в момент времени τ . Очевидный способ это сделать в рамках теории струн — включить множитель $\exp[ik \cdot X(0, \tau)]$ в вершинный оператор $V(k, \tau)$. Конечно, совершенно естественно считать, что струна, поглощающая другую струну в собственном состоянии массового оператора с импульсом k^μ , при положении мировой поверхности

$(0, \tau)$ и при пространственно-временном положении $X^\mu(0, \tau)$ должна иметь волновую функцию, модифицированную домножением на $\exp[ik \cdot X(0, \tau)]$. Если состояние поглощенной или испущенной струны не имеет специфических квантовых чисел, за исключением его импульса, то в качестве вершинного оператора можно просто взять $V(k, \tau) = \exp[ik \cdot X(0, \tau)]$. На самом деле это выражение требует нормального упорядочения. Рассмотрим нормально упорядоченное выражение

$$V(k, \tau) =: e^{ik \cdot X(0, \tau)} := \exp\left(k \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_{-n}}{n} e^{in\tau}\right) \times \\ \times e^{ik \cdot x(\tau)} \exp\left(-k \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{n} e^{-in\tau}\right), \quad (2.2.59)$$

где $x^\mu(\tau)$ было определено в (2.2.58). Показатель в (2.2.59) отличается на бесконечную сумму $\alpha' k^2 \sum 1/n$ от показателя, который получился бы без нормального упорядочения. (Так что в специальном случае $k^2 = 0$ нормальное упорядочение не приводит к какому-либо эффекту.)

Мы хотим теперь вычислить конформную размерность оператора $V(k, \tau)$. Так как координата $X^\mu(\tau)$ имеет конформную размерность $J=0$, можно ожидать, что такие произведения, как $X^\mu(\tau)X^\nu(\tau)$ или более общие композитные операторы вида $f(X^\mu(\tau))$, также имеют нулевую конформную размерность. Действительно, из (2.2.56) можно наивно полагать, что если оператор $A_1(\tau)$ имеет конформную размерность J_1 , а оператор $A_2(\tau)$ — конформную размерность J_2 , то произведение этих операторов $A_1(\tau)A_2(\tau)$ имеет конформную размерность $J_1 + J_2$. Это на самом деле так всякий раз, когда оператор $A_1(\tau)A_2(\tau)$ однозначно и хорошо определен без какого-либо вычитания или перенормировки, отличной от той, которая необходима для определения операторов $A_1(\tau)$ и $A_2(\tau)$ в отдельности, или, другими словами, всякий раз, когда нет сингулярности на малых расстояниях в операторном произведении $A_1(\tau)A_2(\tau')$ при $\tau' \rightarrow \tau$. Действительно, типичные нормально упорядоченные произведения, такие как $:X^\mu(\tau)X_\mu(\tau):$, не имеют определенной конформной размерности. С другой стороны, оператор $V(k, \tau)$ в формуле (2.2.59) обязательно имеет определенную конформную размерность.

Конформная размерность оператора $V(k, \tau)$ может быть определена за счет непосредственных манипуляций с операторами осцилляторов при условии, что мы будем внимательно

следить за эффектами упорядочения. Чтобы вычислить коммутатор $[L_m, V(k, \tau)]$, мы сначала заметим, что

$$[\alpha_p^\mu, e^{k \cdot \alpha - n}] = p \delta_{p-n} k^\mu e^{k \cdot \alpha - n}. \quad (2.2.60)$$

Используя выражение $L_m = \frac{1}{2} \sum_q \alpha_{m-q} \cdot \alpha_q$, легко показать, что

$$[L_m e^{k \cdot \alpha - n}] = \frac{1}{2} \sum_q \{\alpha_{m-q} \cdot [\alpha_q, e^{k \cdot \alpha - n}] + \\ + [\alpha_{m-q}, e^{k \cdot \alpha - n}] \alpha_q\} = \frac{1}{2} n \{k \cdot \alpha_{m-n}, e^{k \cdot \alpha - n}\}. \quad (2.2.61)$$

Применяя это соотношение для вычисления коммутатора $[L_m, V]$ (где V дается формулой (2.2.59)), предположим, что $m > 0$ (при $m < 0$ выкладки аналогичны). Пренебрегая вопросами нормального упорядочения, легко увидеть, что вычисления приводят к формуле вида (2.2.54), где $J=0$ (и A заменено на V). Однако V определено как нормально упорядоченное выражение $: \exp[ik \cdot X] :$, а это означает, что его производная $dV/d\tau$ также автоматически нормально упорядочена. Если для вычисления коммутатора $[L_m, V]$ мы воспользуемся формулой (2.2.61), то получим выражение, не являющееся нормально упорядоченным. Из бесконечного числа членов, возникающих при вычислении (по одному для каждого сомножителя в бесконечном произведении (2.2.59)), некоторое конечное число их возникает не в нормально упорядоченной форме. В этих специфических членах понижающие операторы расположены левее повышающих операторов в V и они определяются формулой

$$\left(\frac{1}{2} \sum_{n=1}^m k \cdot \alpha_{m-n} e^{in\tau}\right) V(k, \tau). \quad (2.2.62)$$

Нормальное упорядочение этого выражения приводит к вкладу от коммутатора

$$\left[\frac{1}{2} \sum_{n=1}^m k \cdot \alpha_{m-n} e^{in\tau}, V(k, \tau)\right] = \\ = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^m k^2 e^{im\tau} V(k, \tau) = \\ = \frac{1}{2} m k^2 e^{im\tau} V(k, \tau). \quad (2.2.63)$$

Таким образом, мы имеем

$$[L_m, V(k, \tau)] = e^{im\tau} \left(-i \frac{d}{d\tau} + \frac{1}{2} m k^2\right) V(k, \tau). \quad (2.2.64)$$

В результате, сравнивая с (2.2.54), мы устанавливаем, что $J = k^2/2$. В гл. 1 мы нашли аномальную размерность оператора $\exp[ik \cdot X]$, вычислив его двухточечную функцию. Было получено, что $J = k^2/4$ для замкнутых струн и $J = k^2/2$ для вершинного оператора, вставленного на границе открытой струны. Вполне обнадеживающим выглядит тот факт, что значение $J = k^2/2$, которое мы здесь получили с помощью осцилляторных методов, согласуется с результатом, полученным ранее для открытых струн.

Вершинный оператор $V_0(k)$ является физическим вершинным оператором конформной размерности $J = 1$ при условии, что $k^2 = 2$. В этом случае он действительно является точным вершинным оператором для испускания тахиона в основном состоянии, квадрат массы которого M^2 мы предположительно взяли равным -2 .

Единственный случай, когда для определения $V(k, \tau)$ не нужно нормального упорядочения, — это случай $k^2 = 0$; тогда конформная размерность $J = 0$. Условие $k^2 = 0$ является правильным для безмассового векторного мезона, но размерность $J = 0$ является неправильной конформной размерностью для вершинного оператора. Так как конформная размерность производной $dX^\mu/d\tau$ равна единице, можно попытаться проинтерпретировать оператор

$$V_\zeta(k, \tau) = \zeta \cdot \frac{dX}{d\tau} \exp[ik \cdot X] \quad (2.2.65)$$

как вершинный оператор, описывающий испускание безмассового мезона с поляризацией $\zeta^\mu(k)$. В произведении операторов $\zeta \cdot dX/d\tau$ и $\exp[ik \cdot X]$ в (2.2.65) нет сингулярностей на малых расстояниях, поэтому V имеет размерность $J = 1$ при условии, что $k \cdot \zeta = 0$. Это ограничение на допустимые поляризации векторной частицы знакомо нам из электродинамики и возникало ранее при анализе спектра физических состояний. Его появление здесь иллюстрирует тот факт, что вершинные операторы конформной размерности единица находятся во взаимно однозначном соответствии с физическими состояниями. Вершинные операторы для других состояний спектра имеют более сложный вид. Для состояния с $\alpha' k^2 = -n$ характерен следующий вид вершинного оператора: $:f(\dot{X}, \ddot{X}, \dots) \exp[ik \cdot X]:$, где полное число производных по τ составляет n . Но чтобы получить $J = 1$, требуются дополнительные ограничения.

Вершинные операторы для состояний с нулевой нормой можно описать следующим образом. Предположим, что $W(k, \tau)$ является оператором конформной размерности 0, содержащим множитель $:\exp[ik \cdot X]:$. Тогда оператор $V(k, \tau) = -idW(k, \tau)/d\tau =$

$= [L_0, W(k, \tau)]$ имеет размерность $J = 1$, в чем читателю следует убедиться. Если взять оператор $W(k, \tau) = \exp[ik \cdot X]$ с $k^2 = 0$, например, то оператор $V(k, \tau)$ будет вершинным оператором для испускания безмассового векторного мезона с продольной поляризацией $\zeta^\mu = k^\mu$. Действительно, вершинные операторы вида $V(\tau) = -idW/d\tau$, где W имеет размерность $J = 0$, всегда описывают испускание состояний с нулевой нормой. Рискую слишком забежать вперед в нашем изложении, мы можем отметить, что причина, по которой состояния с нулевой нормой отделяются от остальных состояний, заключается в том, что так как V — полная производная по τ , то компонента с нулевой частотой V_0 , которая, как и в (2.2.57), отображает физические состояния снова в физические, обращается в нуль.

В качестве еще одной иллюстрации рассмотрим вершины, описывающие испускание частиц, находящихся в состояниях второго возбужденного уровня, когда $\alpha' k^2 = -1$. Множитель $V_0(k)$ имеет теперь размерность $J = -1$, и, следовательно, оператор

$$\zeta^{\mu\nu} \dot{X}_\mu \dot{X}_\nu : \exp[ik \cdot X] : \quad (2.2.66)$$

имеет $J = 1$ при условии, что в операторном произведении (2.2.66) нет сингулярностей на малых расстояниях. Так будет, если $k_\mu \zeta^{\mu\nu} = \text{tr} \zeta = 0$. А это в точности условия того, чтобы тензор $\zeta^{\mu\nu}(k)$ был тензором поляризации массивной частицы со спином два, т. е. симметричным бесследовым тензором группы $SO(D-1)$. Предположим, что на том же массовом уровне можно построить вершинные операторы $Y_{k, \eta} = \eta_\mu \ddot{X}^\mu \exp[ik \cdot X]$ для физических состояний спина единица и поляризации η_μ . Однако если $\eta_\mu k^\mu = 0$, то полная производная по τ

$$-i \frac{d}{d\tau} (\eta \cdot \dot{X} : e^{ik \cdot X} :) = (-i\eta \cdot \ddot{X} + \eta \cdot \dot{X} k \cdot \dot{X}) : e^{ik \cdot X} : \quad (2.2.67)$$

описывает испускание состояний $L_{-1} \eta \cdot \alpha_{-1} |0; k\rangle$ с нулевой нормой и отвечает $D-1$ возможной компоненте оператора Y . Поэтому эти компоненты оператора Y отличаются от выражений вида (2.2.66) только на полную производную, которая соответствует испусканию состояний с нулевой нормой. Остающаяся поляризация соответствует случаю $\eta_\mu = k_\mu$. Когда $D = 26$, это также не приводит к новым вершинам, описывающим испускание физических частиц, так как соответствует линейной комбинации испускания состояния вида (2.2.66) и состояния нулевой нормы $(L_{-2} + \frac{3}{2} L_{-1}^2) |0; k\rangle$. Поэтому с учетом всего вышеизложенного на втором возбужденном массовом уровне в 26-мерии единственным подходящим вершинным оператором открытой

струны является оператор (2.2.66), описывающий испускание или поглощение массивной частицы «спина два», т. е. частицы, поле которой преобразуется как бесследовый тензор второго ранга группы $SO(25)$.

2.3. Квантование в калибровке светового конуса

В разд. 2.2 рассматривалось квантование свободных бозонных струн в ковариантной калибровке $h_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta}$, когда в качестве дополнительных условий на физические состояния накладываются условия Вирасоро. Однако, как мы уже отмечали, после наложения условия $h_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta}$ все еще имеется остаточная калибровочная симметрия, которой можно воспользоваться для последующих выборов специальных калибровок. Выбрав особую нековариантную калибровку, фактически можно разрешить уравнения связей Вирасоро и сформулировать теорию в фоковом пространстве, построенном только для физических степеней свободы. Этот формализм, в чем-то аналогичный формализму с унитарной калибровкой в спонтанно нарушенных калибровочных теориях, впервые был развит Годдардом, Голдстоуном, Ребби и Торном в 1973 г.

Формализм светового конуса, хотя и не является явно ковариантным, очевидным образом свободен от духов. Доказав его эквивалентность ковариантному формализму, который явно ковариантен, но очевидным образом содержит духи, мы получим доказательство теоремы об отсутствии духов. Формализм светового конуса следует здесь рассмотреть еще и по многим другим причинам. Исторически именно в рамках квантования в калибровке светового конуса впервые было окончательно установлено, что дуальные модели являются теориями струн. Картина, основанная на формализме светового конуса, очень «физична», и в его рамках можно провести многие вычисления и понять необходимость выбора $a = 1$ и $D = 26$.

2.3.1. Калибровка светового конуса и алгебра группы Лоренца

Напомним, что в ковариантной калибровке $h_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta}$ координаты струны, на которую наложены граничные условия открытой струны, разлагаются по модам в виде

$$X^\mu(\sigma, \tau) = x^\mu + p^\mu \tau + i \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \alpha_n^\mu e^{-in\tau} \cos n\sigma \quad (2.3.1)$$

и удовлетворяют вспомогательным условиям Вирасоро $T_{++} = T_{--} = 0$. Кроме того, из (2.1.44) и (2.1.45) следовало, что

в этом случае имеется еще остаточная калибровочная симметрия. Мы хотим воспользоваться этой остаточной симметрией, чтобы наложить дополнительное калибровочное условие, которое будет нековариантным, но очень удобным. Начнем с введения пространственно-временных координат на световом конусе:

$$X^+ = (X^0 + X^{D-1})/\sqrt{2}, \quad X^- = (X^0 - X^{D-1})/\sqrt{2}. \quad (2.3.2)$$

Хотя они очень похожи на конусные координаты σ^\pm , введенные ранее на мировой поверхности струны, между этими координатами имеется большая разница. В пространстве-времени у нас имеется всего D координат, и в формулах (2.3.2) мы выделили две из них, а именно X^0 и X^{D-1} , произвольным и нековариантным образом. На мировой поверхности же с самого начала имеются только две координаты, и в определении σ^\pm нет какого-либо произвола. В координатной системе, в которой D -пространственно-временными координатами являются X^\pm и остальные (поперечные) пространственно-временные координаты X^i , $i = 1, \dots, D-2$, ненулевые компоненты метрики Минковского суть $\eta_{ij} = 1$, $\eta_{-+} = \eta_{+-} = -1$. В этих координатах компонентами вектора V^μ являются

$$V^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}} (V^0 \pm V^{D-1}) \quad (2.3.3)$$

и V^i , $i = 1, \dots, D-2$. Скалярное произведение двух векторов запишется в виде

$$V \cdot W = V^i W^i - V^+ W^- - V^- W^+. \quad (2.3.4)$$

Поднятие и опускание индексов осуществляется в соответствии с правилами $V^+ = -V_-$, $V^- = -V_+$ и $V^i = V_i$.

Какого упрощения можно достичь, если воспользоваться остаточной калибровочной симметрией? В терминах σ^\pm остаточная инвариантность соответствует возможности осуществлять произвольные репараметризации

$$\sigma^+ \rightarrow \tilde{\sigma}^+(\sigma^+), \quad \sigma^- \rightarrow \tilde{\sigma}^-(\sigma^-). \quad (2.3.5)$$

Для замкнутых струн σ^+ и σ^- преобразуются независимо, тогда как для открытых струн они связаны граничными условиями. В этом случае параметры $\tau = (1/2)(\sigma^+ + \sigma^-)$ и $\sigma = (1/2)(\sigma^+ - \sigma^-)$ преобразуются в

$$\begin{aligned} \tilde{\tau} &= \frac{1}{2} [\tilde{\sigma}^+(\tau + \sigma) + \tilde{\sigma}^-(\tau - \sigma)], \\ \tilde{\sigma} &= \frac{1}{2} [\tilde{\sigma}^+(\tau + \sigma) - \tilde{\sigma}^-(\tau - \sigma)]. \end{aligned} \quad (2.3.6)$$

Из первого уравнения в (2.3.6) следует, что $\bar{\tau}$ может быть произвольным решением свободного безмассового волнового уравнения

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \sigma^2} - \frac{\partial^2}{\partial \tau^2}\right) \bar{\tau} = 0. \quad (2.3.7)$$

С другой стороны, если $\bar{\tau}$ выбран, параметр $\bar{\sigma}$ в (2.3.6) полностью определен (за исключением возможности сделать постоянные сдвиги параметра σ в случае замкнутых струн). Какой способ является единственным для выбора решения τ свободного безмассового волнового уравнения? С этим уравнением мы ранее уже несомненно встречались; именно такому уравнению (в конформной калибровке) удовлетворяют пространственно-временные координаты $X^\mu(\sigma, \tau)$. Таким образом, наша калибровочная свобода в точности соответствует тому факту, что при желании можно сделать такую репараметризацию, чтобы $\bar{\tau}$ был равен одной из компонент вектора X^μ . Калибровка светового конуса соответствует выбору $\bar{\tau} = X^+ / p^+ + \text{const}$. Обычно это выражается утверждением о том, что в калибровке светового конуса

$$X^+(\sigma, \tau) = x^+ + p^+ \tau. \quad (2.3.8)$$

В классическом описании это соответствует тому, что все осцилляторные коэффициенты α_n^+ при $n \neq 0$ берутся равными нулю. Компонента X^+ координат струны соответствует временной координате, как это видно в системе отсчета, в которой струна движется с бесконечным импульсом. Этот выбор калибровки имеет то принципиальное преимущество, что каждая точка на струне берется при одном и том же значении времени (так как X^+ не зависит от σ). После фиксации $X^+(\sigma, \tau)$ в соответствии с (2.3.8) условия Вирасоро $(\dot{X} \pm X')^2 = 0$ принимают вид

$$(\dot{X}^- \pm X'^-) = (\dot{X}^i \pm X'^i)^2 / 2p^+. \quad (2.3.9)$$

Это уравнение можно решить и выразить X^- через X^i (с неизвестной постоянной интегрирования), так что фактически в калибровке светового конуса компоненты X^+ и X^- можно исключить, оставляя только поперечные осцилляторы X^i . Вспоминая разложение по модам компоненты X^- ,

$$X^- = x^- + p^- \tau + i \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \alpha_n^- e^{-in\tau} \cos n\sigma, \quad (2.3.10)$$

можно убедиться в том, что явным решением уравнения (2.3.9) является

$$\alpha_n^- = \frac{1}{p^+} \left(\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{D-2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} : \alpha'_{n-m} \alpha'_m : - a \delta_n \right), \quad (2.3.11)$$

где мы ввели, как и в случае ковариантного рассмотрения, неизвестную постоянную a , возникающую из-за нормального упорядочения в α_0^- . В калибровке светового конуса отождествление оператора α_0^- с оператором p^- является условием массовой поверхности. Действительно, при $n=0$ формула (2.3.11) переписывается в виде

$$M^2 = (2p^+ p^- - p^i p^i) = 2(N - a), \quad (2.3.12)$$

где

$$N = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{-n}^i \alpha_n^i. \quad (2.3.13)$$

Полученное условие является тем же самым условием массовой поверхности, которое было получено при ковариантном квантовании, за тем лишь исключением, что теперь только поперечные осцилляторы дают вклад в N . Величины $p^+ \alpha_n^-$ удовлетворяют алгебре Вирасоро

$$[p^+ \alpha_m^-, p^+ \alpha_n^-] = (m - n) p^+ \alpha_{m+n}^- + \left[\frac{D-2}{12} (m^3 - m) + 2am \right] \delta_{m+n}. \quad (2.3.14)$$

Проведенное вычисление в точности аналогично вычислению соотношений алгебры Вирасоро в формализме ковариантного квантования.

Поэтому эти формулы являются основными при квантовании на световом конусе. Теперь мы хотим выяснить, является ли теория действительно лоренц-инвариантной в этой калибровке. Можно наивно предположить, что она должна быть таковой, так как вроде бы мы получили ее фиксацией калибровки из исходной лоренц-инвариантной теории. Если с теорией не все благополучно при некоторых значениях a и D , то это будет проявляться в отсутствии лоренц-инвариантности в калибровке светового конуса, где она не содержится явно.

В калибровке светового конуса все струнные возбуждения генерируются поперечными осцилляторами α_n^i . Так, например, первым возбужденным состоянием является состояние $\alpha_{-1}^i |0; p\rangle$, преобразующееся по векторному (с $D-2$ компонентами) представлению группы вращений поперечных осцилляторов $SO(D-2)$. В общем случае при преобразованиях из группы

Лоренца поперечно поляризованный вектор приобретает продольные компоненты, если только он не описывает безмассовую частицу. Это является констанцией того хорошо известного факта, что «спин» массивной частицы фиксируется неприводимыми представлениями группы $SO(D-1)$, тогда как безмассовая частица соответствует неприводимому представлению группы $SO(D-2)$. (В случае фермионов нужно использовать накрывающие группы $\text{spin}(D-1)$ и $\text{spin}(D-2)$.) Таким образом, становится понятным, что выбор калибровки светового конуса не может привести к лоренц-инвариантной струнной теории, если только векторное состояние $\alpha_{-1}^i |0; p\rangle$ не является состоянием безмассовой частицы, т. е. параметр a должен быть равен 1.

Обратимся теперь к более трудной проблеме: понять, почему необходимо налагать ограничения на размерность пространства-времени D . Сначала мы воспользуемся эвристическими соображениями, основанными на только что полученной информации о том, что для лоренц-инвариантности a должно быть равно 1. Попробуем непосредственно вычислить константу нормального упорядочения a . Такая константа появляется в формуле

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{D-2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_{-n}^i \alpha_n^i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{D-2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} : \alpha_{-n}^i \alpha_n^i : + \frac{D-2}{2} \sum_{n=1}^{\infty} n. \quad (2.3.15)$$

Вторая сумма в (2.3.15) несомненно расходится, и ее нужно регуляризовать. Одним из методов регуляризации (2.3.15), который используется в аналогичных проблемах, связанных с нормальным упорядочением в теории поля, является метод «регуляризации с помощью дзета-функции». Рассматривается сумма более общего вида:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}. \quad (2.3.16)$$

При $\text{Re } s > 1$ эта сумма сходится к функции, известной как дзета-функция Римана $\zeta(s)$. Дзета-функция имеет единственное аналитическое продолжение в точку $s = -1$, где $\zeta(-1) = -1/12$. Подставляя это «значение» $\sum_{n=1}^{\infty} n$ в (2.3.15), мы получаем для константы нормального упорядочения в L_0 значение

$$-\frac{D-2}{24}. \quad (2.3.17)$$

Так как уже известно, что для лоренц-инвариантности константа a должна быть равна 1, то размерность D должна быть

равна 26. Исползованный метод регуляризации с помощью дзета-функции может показаться довольно формальным, но в гл. 11 мы получим такой же ответ, применив более «физический» метод регуляризации энергии нулевых колебаний.

Из вышеизложенного, хотя может быть и несколько эвристически, следует, что для лоренц-инвариантности формализма светового конуса требуется, чтобы $D = 26$, а $a = 1$. Теперь мы приведем строгое доказательство того, что эти условия являются необходимыми и достаточными для лоренц-инвариантности, проведя систематическое исследование генераторов $J^{\mu\nu}$ группы Лоренца. Их явный вид приводился ранее:

$$\begin{aligned} J^{\mu\nu} &= l^{\mu\nu} + E^{\mu\nu}, \\ l^{\mu\nu} &= x^\mu p^\nu - x^\nu p^\mu, \end{aligned} \quad (2.3.18)$$

$$E^{\mu\nu} = -i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (\alpha_{-n}^\mu \alpha_n^\nu - \alpha_{-n}^\nu \alpha_n^\mu).$$

Ясно, что в калибровке светового конуса эффект лоренцевых преобразований координат должен быть довольно трудно уловимым, так как сам выбор калибровки не является лоренц-инвариантным. Некоторые из этих преобразований поворачивают направление «+» в другие направления, поэтому нужно сделать репараметризацию (т. е. калибровочное преобразование) в преобразованной системе, с тем чтобы восстановить калибровочное условие. Мы будем называть это «компенсирующей» репараметризацией. Преобразования, меняющие X^+ , а следовательно, и калибровочное условие, — это преобразования, генерируемые J^{+-} и J^{i-} . Они потенциально могут приводить к аномалии; требование отсутствия этой аномалии и налагает ограничения на a и на D . Остальные лоренцевы генераторы — это те, которые связаны с поперечными компонентами и которые порождают подгруппу $SO(D-2)$, т. е. симметрию формализма на световом конусе.

Рассмотрим сначала общее выражение для инфинитезимального лоренцева преобразования координат в классической теории, допускающего произвольную репараметризацию $\xi^\alpha(\sigma, \tau)$. Тогда

$$\delta X^\mu(\sigma, \tau) = a_\nu^\mu X^\nu(\sigma, \tau) + \xi^\alpha(\sigma, \tau) \partial_\alpha X^\mu(\sigma, \tau), \quad (2.3.19)$$

где ξ^α — одна из репараметризаций, согласованных с калибровочным условием $h_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta}$. Это означает, что ξ^α удовлетворяет условию (2.1.44). С другой стороны, мы хотим, чтобы калибро-

вочное условие (2.3.8) преобразовывалось в соответствии с правилом

$$\delta X^+ = a_v^+ x^v + a_v^+ p^v \tau, \quad (2.3.20)$$

чтобы оно сохранилось в новой координатной системе. Рассматривая компоненту «+» в (2.3.19) и сравнивая ее с (2.3.20), мы можем определить вид компенсирующей репараметризации ξ^α . Это приводит к условию

$$a_v^+ X^v + \xi^0 p^+ = a_v^+ (x^v + p^v \tau) = a_v^+ x^v(\tau), \quad (2.3.21)$$

так что

$$\xi^0 = \frac{a_v^+}{p^+} (x^v(\tau) - X^v(\sigma, \tau)). \quad (2.3.22)$$

Две компоненты вектора ξ^α связаны соотношением (2.1.44), поэтому

$$\xi^1 = \int_0^\sigma d\sigma' \frac{\partial \xi^0}{\partial \tau}. \quad (2.3.23)$$

Подставляя эти (линейные по координатам) выражения для ξ^α в (2.3.19), мы получаем вид преобразований Лоренца с учетом нековариантного условия фиксации калибровки. Важным новым моментом при этом является то, что преобразования, содержащие a_i^+ , действуют нелинейно на поперечные координаты, так как в правой части (2.3.19) имеются члены, квадратичные по поперечным координатам. В квантовой теории из-за таких билинейных членов возникают непростые вопросы, связанные с нормальным упорядочением, что и является потенциальным источником аномалий в алгебре группы Лоренца.

Поэтому важно проверить, что операторы (2.3.18) действительно являются генераторами алгебры (2.2.24) группы Лоренца. Большинство коммутаторов можно сразу же вычислить и проверить, что ответ получается правильным при любых D . Однако, как уже отмечалось в предыдущем абзаце, преобразования операторов J^{i-} требуют более осторожного подхода. В частности, коммутатор $[J^{i-}, J^{j-}]$, который должен обращаться в нуль в лоренц-инвариантной теории, приводит к аномалии, если только не налагать определенных ограничений.

В калибровке светового конуса мы имеем $E^{\mu+} = E^{+\mu} = 0$. С другой стороны, E^{i-} кубичен по поперечным осцилляторам, когда вместо E^{i-} подставляется его разложение по α_n^- в теории с калибровкой светового конуса. В результате коммутатор $[J^{i-}, J^{j-}]$ может содержать члены, в которые входят произведения четырех или двух осцилляторов. (Так как коммутатор

$[J^{i-}, J^{j-}]$ преобразуется нетривиальным образом при действии группы вращений поперечных компонент, просто c -числового члена без осцилляторов быть не может.) Члены в $[J^{i-}, J^{j-}]$, содержащие четыре осциллятора, те же самые, что и в классической теории, и они пропадают по той простой причине, что в этой теории аномалии безусловно отсутствуют. Итак, если аномальный член и возникает, то он должен быть квадратичным по осцилляторам и в действительности может быть представлен только в виде

$$[J^{i-}, J^{j-}] = -\frac{1}{(p^+)^2} \sum_{m=1}^{\infty} \Delta_m (\alpha_{-m}^i \alpha_m^j - \alpha_m^i \alpha_{-m}^j), \quad (2.3.24)$$

где коэффициенты Δ_m являются c -числами.

Вычисление Δ_m производится следующим образом. Используя коммутационные соотношения

$$[x^-, 1/p^+] = i(p^+)^{-2} \quad (2.3.25)$$

и определяя $E^j = p^+ E^{j-}$ так, что

$$[x^j, E^j] = -iE^{jj}, \quad (2.3.26)$$

получим

$$[J^{i-}, J^{j-}] = -(p^+)^{-2} C^{ij}, \quad (2.3.27)$$

где

$$C^{ij} = 2ip^+ \alpha_0^- E^{ij} - [E^i, E^j] - iE^i p^j + iE^j p^i. \quad (2.3.28)$$

Сравнивая теперь полученные соотношения с (2.3.24), мы видим, что коэффициенты Δ_m можно найти, если вычислить матричные элементы C^{ij} , так как

$$\langle 0 | \alpha_m^k C^{ij} \alpha_{-m}^l | 0 \rangle = m^2 (\delta^{ik} \delta^{jl} - \delta^{jk} \delta^{il}) \Delta_m. \quad (2.3.29)$$

Воспользовавшись коммутационными соотношениями для осцилляторов

$$[\alpha_m^i, \alpha_n^j] = m \delta^{ij} \delta_{m+n}, \quad [\alpha_m^i, \alpha_n^-] = m \alpha_{m+n}^i / p^+, \quad (2.3.30)$$

найдем, что

$$\begin{aligned} \langle 0 | \alpha_m^k C^{ij} \alpha_{-m}^l | 0 \rangle = \langle 0 | \left\{ 2m(m-1) \delta^{ik} \delta^{jl} + m p^j p^k \delta^{il} - \right. \\ \left. - m p^j p^l \delta^{ik} + \left(m \sum_{n=1}^m \frac{1}{n} \alpha_{m-n}^k \alpha_n^i - \delta^{ik} p^+ \alpha_m^- \right) \times \right. \\ \left. \times \left(p^+ \alpha_{-m}^- \delta^{il} - m \sum_{n=1}^m \frac{1}{n} \alpha_{-n}^j \alpha_{n-m}^l \right) \right\} | 0 \rangle - (i \leftrightarrow j). \quad (2.3.31) \end{aligned}$$

Теперь с помощью соотношения

$$(p^+)^2 \langle 0 | \alpha_m^- \alpha_{-m}^- | 0 \rangle = \frac{D-2}{12} (m^3 - m) + 2am, \quad (2.3.32)$$

следующего из (2.3.14), и тождеств

$$p^+ \langle 0 | \alpha_m^- \sum_{n=1}^m \frac{1}{n} \alpha_{-n}^j \alpha_{n-m}^i | 0 \rangle = p^j p^i + \delta^{ij} m(m-1)/2, \quad (2.3.33)$$

$$\begin{aligned} \langle 0 | \sum_{n=1}^m \frac{1}{n} \alpha_{m-n}^k \alpha_n^i \sum_{p=1}^m \frac{1}{p} \alpha_{-p}^j \alpha_{p-m}^l | 0 \rangle - (i \leftrightarrow j) = \\ = (m-1) (\delta^{il} \delta^{jk} - \delta^{il} \delta^{ik}) \end{aligned} \quad (2.3.34)$$

получаем, что

$$\Delta_m = m \left(\frac{26-D}{12} \right) + \frac{1}{m} \left(\frac{D-26}{12} + 2(1-a) \right). \quad (2.3.35)$$

Требование $\Delta_m = 0$, как и ожидалось, приводит к тому, что $D = 26$, а $a = 1$.

2.3.2. Построение поперечных физических состояний

На классическом уровне связь между ковариантной формулировкой и формулировкой в калибровке светового конуса совершенно ясна, калибровка светового конуса возникает при более полной спецификации конформной калибровки. На квантовом уровне связь между этими двумя формулировками совсем не очевидна, и нашей следующей задачей будет как раз прояснение этого вопроса.

Вернемся опять к ковариантному квантованию, изложенному в разд. 2.2. Там были сформулированы условия Вирасоро, которым должны подчиняться физические состояния, но мы не смогли тогда привести общее описание этих состояний. Теперь наша задача — заполнить этот пробел и явным образом построить все физические возбужденные состояния. Помимо всего прочего, это позволит нам установить связь с калибровкой светового конуса и (так как такой формализм не содержит духов) доказать теорему об отсутствии духов для ковариантного формализма.

Подход, которому мы будем следовать, был впервые сформулирован Дель Гьюдаисом, Ди Веккия и Фубини (ДДФ). Они построили набор операторов, которые коммутируют с операторами Вирасоро и которые, действуя последовательно на основное состояние, порождают все физические возбужденные состояния. Эти операторы образуют замкнутую алгебру, называемую «алгеброй, порождающей спектр». В конструкции ДДФ, кото-

рая описывается ниже, вводятся «операторы, порождающие спектр» A_n^i , где индекс i принимает $D-2$ значения в соответствии с количеством поперечных компонент вектора в пространстве-времени, а n — произвольное целое число. Эти операторы находятся во взаимно однозначном соответствии с поперечными компонентами вектора α_n^μ и описывают поперечные моды струны. Условия Вирасоро налагают одно ограничение для каждого значения n , поэтому можно предположить, что алгебра, порождающая спектр, содержит $D-1$ оператор для каждого значения n . Отсутствующие в этой алгебре продольные операторы A_n^- также появляются в теории и будут описаны в следующем подразделе.

Пусть $|0; p_0\rangle$ обозначает основное тахионное состояние спектра бозонной открытой струны. Возьмем $a = 1$, так что в этом состоянии $p_0^2 = 2$. Допустим, что тахион находится в некотором состоянии движения, описываемом импульсом с $p_0^+ = 1$, $p_0^- = -1$ и $p_0^i = 0$. Такой выбор удовлетворяет условию нахождения на массовой поверхности $p_0^2 = 2$. Введем нуль-вектор k_0^μ с компонентами $k_0^- = -1$ и $k_0^+ = k_0^i = 0$. Таким образом, $k_0 \cdot p_0 = 1$. Нам будет удобно исследовать только состояния, обладающие тем свойством, что если масса удовлетворяет уравнению $\alpha' M^2 = N - 1$, то импульс состояния должен быть равным $p^\mu = p_0^\mu - N k_0^\mu$. Такие состояния мы будем называть «допустимыми» состояниями. Любое физическое состояние может быть преобразованиями Лоренца превращено в конфигурацию с вышеуказанным свойством, так что если мы как следует разберемся с «допустимыми» состояниями, то хорошо поймем и ситуацию с физическими состояниями, в которых $p^i = 0$ и $p^+ = 1$. Все остальные состояния можно получить преобразованием Лоренца.

Безмассовый вершинный оператор $V_{\xi}(k, \tau)$, определенный в (2.2.65), играет основную роль при построении алгебры, порождающей спектр. Он является периодической функцией от τ с периодом 2π , за исключением множителя $\exp(ik \cdot p\tau)$, возникающего из-за члена $p^\mu \tau$ в разложении координаты $X^\mu(0, \tau)$. Если рассматривать вершинный оператор, соответствующий безмассовой векторной частице, только с $k^\mu = nk_0^\mu$, где n — целое, то при его действии на «допустимые» состояния получается, что $k \cdot p$ является целым числом и множитель $\exp(ik \cdot p\tau)$ также является периодическим по τ . В этом случае вершинный оператор, соответствующий поперечной поляризации, имеет вид

$$V^i(nk_0, \tau) = \dot{X}^i(\tau) e^{inX^+(\tau)}. \quad (2.3.36)$$

Так как этот оператор периодичен в «допустимом» подпространстве, можно однозначно определить фурье-компоненты

$$A_n^i = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} V'(nk_0, \tau) d\tau. \quad (2.3.37)$$

Эти операторы и являются операторами ДДФ.

Операторы ДДФ имеют два важных свойства. Они коммутируют с L_n и подчиняются простой алгебре. Наличие первого свойства доказывается очень просто. Из определения конформной размерности следует, что если $V(\tau)$ имеет размерность $J = 1$, то

$$[L_m, V(\tau)] = -i \frac{d}{d\tau} (e^{im\tau} V(\tau)). \quad (2.3.38)$$

Таким образом, $[L_m, A_n^i] = 0$, как нам того и хотелось, при условии, что кинематическая ситуация ограничена указанным выше способом и подынтегральное выражение в (2.3.37) является периодическим. Непосредственно из условия, содержащего L_0 , вытекает, что $[N, A_n^i] = -nA_n^i$. Отсюда следует, что произвольное состояние вида

$$A_{-n_1}^{i_1} A_{-n_2}^{i_2} \dots A_{-n_m}^{i_m} |0; p_0\rangle \quad (2.3.39)$$

удовлетворяет условиям Вирасоро и для него $N = \sum_i n_i$. Чтобы определить алгебру операторов A_n^i , нам необходимо знать коммутаторы операторов $\dot{X}^i(\tau)$ при *неравных* τ . Используя разложение по модам¹⁾

$$\dot{X}^i(\tau) = \sum_{-\infty}^{\infty} \alpha_m^i e^{-im\tau}, \quad (2.3.40)$$

находим, что

$$[\dot{X}^i(\tau_1), \dot{X}^j(\tau_2)] = 2\pi i \delta^{ij} \delta'(\tau_1 - \tau_2). \quad (2.3.41)$$

Теперь, используя (2.3.36) и (2.3.41) и замечая, что оператор X^+ коммутирует с самим собой и с оператором X^i (даже при *неравных* τ), мы можем легко вычислить коммутаторы операторов

¹⁾ Напомним, что для любого оператора A выражение $A(\tau)$ является сокращенной записью выражения $A(0, \tau)$.

A_n^i , получая

$$\begin{aligned} [A_m^i, A_n^j] &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} d\tau_1 d\tau_2 [\dot{X}^i(\tau_1), \dot{X}^j(\tau_2)] \exp(imX^+(\tau_1) + \\ &+ inX^+(\tau_2)) = \frac{m}{2\pi} \delta_{ij} \int_0^{2\pi} d\tau \dot{X}^+(\tau) \exp(i(m+n)X^+(\tau)) = \\ &= m\delta_{ij}\delta_{m+n}. \end{aligned} \quad (2.3.42)$$

На последнем этапе было использовано, что $p^+ = 1$. Видно, что эта алгебра тождественна алгебре поперечных осцилляторов A_m^i . Операторы A_n^i , так же как и поперечные осцилляторы, обладают свойством вещественности, $A_n^{i\dagger} = A_{-n}^i$, и тем свойством, что $A_n^i |0; p_0\rangle = 0$, $n > 0$. Эти факты обеспечивают то, что все физические состояния (2.3.39), полученные действием операторов ДДФ на основное состояние, являются состояниями с положительной нормой, точно так же как состояния, полученные в калибровке светового конуса действием поперечных осцилляторов на состояние тахиона. Мы назовем состояния (2.3.39), полученные действием операторов A_m^i , «состояниями ДДФ». Конечно, нам известно, что при $D > 26$ в физическом подпространстве имеются состояния с духами, поэтому для произвольного D должно быть так, что операторы A_n^i не генерируют весь спектр физических состояний.

2.3.3. Теорема об отсутствии духов и алгебра, порождающая спектр

Полное пространство состояний, порожденных модами D -мерного осциллятора, содержит и нежелательные духовые состояния. Мы уже знакомы с тем, как строится подпространство «поперечных» состояний, удовлетворяющих условию физического состояния и имеющих положительную норму, а именно состояний ДДФ. Из изоморфизма между алгеброй операторов A_m^i и алгеброй поперечных осцилляторов ясно, что размерность этого подпространства соответствует размерности пространства, в котором действуют $(D-2)$ -мерные осцилляторы. Наша задача теперь — установить природу состояний, принадлежащих ортогональному дополнению этого подпространства. Мы фактически покажем, что состояния ДДФ в 26-мерии при $a=1$ по существу представляют собой всю совокупность физических состояний, доказав тем самым отсутствие в этом случае физических состояний с отрицательной нормой. Это было впервые сде-

лано Брауэром, а также Годдаром и Торном; ниже мы приведем упрощенное доказательство, предложенное недавно Торном. Отсутствие духов при $D < 26$ и $a \leq 1$ является простым следствием результата, полученного при $D = 26$ и $a = 1$ (хотя непосредственное построение полного базиса физических состояний является более затруднительным).

Мы по-прежнему рассмотрим кинематические конфигурации, использованные нами при обсуждении операторов ДДФ; среди «допустимых» состояний нет духов, то лоренц-инвариантность ковариантного формализма обеспечивает их отсутствие в физическом гильбертовом пространстве. Пусть F является пространством состояний ДДФ. Состояние ДДФ общего вида будет обозначаться через $|f\rangle$. Определим операторы

$$K_m = k_0 \cdot \alpha_m \quad (2.3.43)$$

(k_0 — светоподобный вектор, который мы ввели при построении состояний ДДФ). Легко видеть, что эти операторы удовлетворяют коммутационным соотношениям

$$[K_m, L_n] = mK_{m+n}, \quad [K_m, K_n] = 0. \quad (2.3.44)$$

Если $|f\rangle$ является состоянием ДДФ, то нетрудно убедиться в том, что

$$K_n |f\rangle = 0, \quad n > 0. \quad (2.3.45)$$

Теперь мы хотим рассмотреть состояния, полученные действием на ДДФ-состояние $|f\rangle$ цепочки операторов L_{-n} и K_{-m} . Определим состояние

$$|\{\lambda, \mu\}, f\rangle = L_{-1}^{\lambda_1} L_{-2}^{\lambda_2} \dots L_{-m}^{\lambda_m} K_{-1}^{\mu_1} \dots K_{-m}^{\mu_m} |f\rangle. \quad (2.3.46)$$

Удобно ввести величину

$$\sum r\lambda_r + \sum s\mu_s = P. \quad (2.3.47)$$

В (2.3.46) мы выбрали такой порядок операторов L_{-r} , что r возрастает слева направо. Этот выбор является произвольным, но важно придерживаться некоторой договоренности, так как операторы L друг с другом не коммутируют. По той же причине все операторы K были расположены правее операторов L . Мы хотим теперь показать, что для любого P эти состояния являются линейно независимыми. Следуя современной трактовке, предложенной Торном, рассмотрим скалярные произведения состояний с данным значением P :

$$\mathcal{M}_{\{\lambda, \mu\}; \{\lambda', \mu'\}}^P = \langle f | K_n^{\lambda_n} \dots K_1^{\lambda_1} L_{-1}^{\lambda'_1} \dots L_{-m}^{\lambda'_m} K_{-1}^{\mu'_1} \dots K_{-m}^{\mu'_m} |f\rangle, \quad (2.3.48)$$

где $\sum r\lambda_r + \sum s\mu_s = \sum r\lambda'_r + \sum s\mu'_s = P$. Эта матрица является функцией только значений операторов K_0 и L_0 на состоянии $|f\rangle$ (где $K_0 = k_0 \cdot \alpha_0 \neq 0$). Если мы сможем показать, что детерминант матрицы (2.3.48) отличен от нуля, то из этого факта будет следовать, что состояния (2.3.46) с данным значением P линейно независимы.

При $P = 1$ мы находим, что

$$\mathcal{M}^1 = \begin{pmatrix} 2L_0 & K_0 \\ K_0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.3.49)$$

а детерминант этой матрицы есть $-K_0^2 \neq 0$. Общее доказательство того, что матрица \mathcal{M}^P имеет ненулевой детерминант для любого P , зависит от возможности найти естественный способ так расположить строки и столбцы, чтобы матрица имела нули под своей побочной диагональю (диагональю из верхнего правого угла в нижний левый) и ненулевые элементы вдоль нее. Тогда детерминант дается (с точностью до знака) произведением этих элементов. Так как это элементарное наблюдение может показаться странным, запишем явно матрицу 4×4 с нулями под побочной диагональю общего вида:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 0 & 0 \\ a_{41} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.3.50)$$

Ясно, что детерминант этой матрицы является произведением элементов на побочной диагонали и отличен от нуля, если все они не равны нулю. Таким образом, мы сможем доказать, что матрица \mathcal{M}^P имеет ненулевой детерминант, если покажем, что подходящим подбором состояний матрицу \mathcal{M}^P можно привести к общему виду (2.3.50). Проиллюстрируем на примере матрицы на уровне 2, т. е. когда $P = 2$, как срабатывает правильный подбор состояний. В этом случае таким подбором состояний $|\{\lambda, \mu\}, f\rangle$ являются состояния, полученные с помощью операторов

$$L_{-1}^2, L_{-2}, L_{-1}K_{-1}, K_{-2}, K_{-1}^2. \quad (2.3.51)$$

Вычисляя скалярное произведение (2.3.48), мы коммутируем операторы L и K , пронося их друг через друга. Однако в этом процессе число операторов K никогда не может быть уменьшено. Чтобы операторы K не аннулировали сопряженные конечные состояния, должно быть достаточное количество операторов

ров L для превращения всех операторов K в множители K_0 , так как матричный элемент

$$\langle f' | K_{\mu_1} K_{\mu_2} \dots K_{\mu_k} | f \rangle \quad (2.3.52)$$

(где $|f\rangle$ и $|f'\rangle$ являются состояниями ДДФ) всегда обращается в нуль, кроме случая, когда $\mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_k = 0$. Легко видеть, что систематизация состояний в соответствии с (2.3.51) приводит к матрице скалярных произведений общего вида (2.3.50). Обобщение подбора (2.3.51) для более высоких массовых уровней осуществляется следующим образом. Напомним, что $\{\mu\}$ или $\{\lambda\}$ обозначают цепочки операторов K или L соответственно. Определим сначала отношения порядка между двумя цепочками операторов L :

$$\begin{aligned} \{\lambda\} > \{\lambda'\}, \text{ если } \sum r\lambda_r > \sum r\lambda'_r, \\ \text{или } \sum r\lambda_r = \sum r\lambda'_r \text{ и } \lambda_1 > \lambda'_1, \\ \text{или } \sum r\lambda_r = \sum r\lambda'_r \text{ и } \lambda_1 = \lambda'_1, \lambda_2 > \lambda'_2 \text{ и т. д.} \end{aligned} \quad (2.3.53)$$

(λ_1, λ_2 и т. д. определены в (2.3.48)). Теперь мы хотим сформулировать правила комбинирования наборов $\{\lambda, \mu\}$ операторов L и K . Подходящим правилом является следующее:

$$\begin{aligned} \{\lambda, \mu\} < \{\lambda', \mu'\}, \text{ если } \{\lambda\} < \{\lambda'\} \\ \text{или } \{\lambda\} = \{\lambda'\} \text{ и } \{\mu\} > \{\mu'\}. \end{aligned} \quad (2.3.54)$$

Нетрудно видеть, что примеры, которые приводились ранее, являются специальными случаями этого правила и оно всегда приводит к желаемой форме матрицы \mathcal{M}^P с нулевыми элементами под побочной диагональю и с величинами K_0^P вдоль нее.

Это вычисление является чисто алгебраическим, независящим от представления операторов L_{-n} и K_{-n} . Тот факт, что матрица \mathcal{M} является невырожденной, зависит решающим образом от присутствия операторов K_{-n} . Матрица, соответствующая состояниям, построенным с помощью только операторов L_{-n} , имеет детерминант (детерминант Каца), который может быть сингулярным.

Пусть теперь $|f\rangle$ и $|g\rangle$ — два различных состояния ДДФ, такие, что $\langle f | g \rangle = 0$. Предположим, что $|f\rangle$ и $|g\rangle$ являются собственными состояниями оператора L_0 . Пусть $|\tilde{f}\rangle = |\{\lambda, \mu\}, f\rangle$ и $|\tilde{g}\rangle = |\{\lambda', \mu'\}, g\rangle$ — состояния, полученные из $|f\rangle$ и $|g\rangle$ действием на них цепочек операторов L и K . Тогда мы утверждаем, что

$$\langle \tilde{f} | \tilde{g} \rangle = 0. \quad (2.3.55)$$

Действительно, записывая состояния $|\tilde{f}\rangle$ и $|\tilde{g}\rangle$ в явном виде (как в (2.3.48)) и перемещая операторы L_{-n} и K_{-n} влево, а L_n и K_n вправо (при $n > 0$), получим, что левая часть (2.3.55) сведется к кратному скалярного произведения $\langle f | g \rangle$, которое, по нашему предположению, обращается в нуль.

Теперь мы утверждаем, что состояния (2.3.46), где $|f\rangle$ пробегает по всем состояниям ДДФ, а $\{\lambda, \mu\}$ — по всем цепочкам операторов L и K , линейно независимы. Это действительно так: ведь мы доказали, что всевозможные состояния, полученные из ортогональных состояний $|f\rangle$, являются ортогональными друг к другу, и показали, исследуя детерминант матрицы \mathcal{M} , что всевозможные состояния, полученные из данного $|f\rangle$, линейно независимы.

Тот факт, что состояния (2.3.46) являются линейно независимыми, может показаться довольно техническим, но на самом деле он лежит в основе удивительно мощного метода.

Из определения (2.3.46) следует, что каждое состояние в фокковом пространстве бозонной струны может быть выражено как линейная комбинация состояний вида (2.3.46). Убедиться в этом довольно просто. Любое состояние в пространстве Фока может быть записано в виде

$$\prod_{\rho=0}^{25} \prod_{n=1}^{\infty} (\alpha_{-n}^{\rho})^{\varepsilon_{n,\rho}} \cdot |0\rangle. \quad (2.3.56)$$

Хотя полное число состояний в пространстве Фока бесконечно, имеется лишь конечное число состояний с данным собственным значением оператора

$$N = \sum_{\rho=0}^{25} \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{-n}^{\rho} \alpha_{n\rho}. \quad (2.3.57)$$

Состояния в (2.3.56) обязательно линейно независимы и являются N собственными состояниями с собственным значением

$$\langle N \rangle = \sum_{n,\rho} n \varepsilon_{n,\rho}. \quad (2.3.58)$$

Произвольное состояние (2.3.46) в явном виде выражается формулой

$$\prod_{n=1}^{\infty} L_{-n}^{\lambda_n} \cdot K_{-n}^{\mu_n} \cdot \prod_{i=1}^{24} (A_{-n}^i)^{\beta_{n,i}} |0\rangle \quad (2.3.59)$$

для некоторых λ_n, μ_n и $\beta_{n,i}$. Состояния в (2.3.59) вновь являются N собственными состояниями с собственным значением

$$\langle N \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} n \left(\lambda_n + \mu_n + \sum_i \beta_{n,i} \right). \quad (2.3.60)$$

Из сравнения (2.3.58) с (2.3.60) следует, что число состояний вида (2.3.56) с данным N в точности совпадает с числом состояний (2.3.46) с тем же N , так как комбинаторика 26 чисел ϵ та же, что и комбинаторика одного λ , одного μ и 24 чисел β . Так как состояния (2.3.46) линейно независимы и их такое же число (на каждом массовом уровне), что и состояний (2.3.56), они должны образовывать базис гильбертова пространства.

Мы теперь воспользуемся этим результатом для доказательства теоремы об отсутствии духов, после того как изложим еще один или два вспомогательных приема. Пусть S является пространством шпурионных состояний. Согласно обсуждению, проведенному нами ранее, шпурионное состояние подобно состоянию $|s\rangle$, которое может быть записано в виде

$$|s\rangle = L_{-1}|\chi_1\rangle + L_{-2}|\chi_2\rangle \quad (2.3.61)$$

для некоторых $|\chi_1\rangle$ и $|\chi_2\rangle$. Ясно, что состояние $|s\rangle$ можно было бы записать и как

$$|s\rangle = L_{-1}|\chi'_1\rangle + \tilde{L}_{-2}|\chi'_2\rangle, \quad (2.3.62)$$

где

$$\tilde{L}_{-2} = L_{-2} + \frac{3}{2}L_{-1}^2. \quad (2.3.63)$$

Напомним, что это как раз та комбинация, которая возникла при построении состояний нулевой нормы в (2.2.45). Преимущество использования \tilde{L}_{-2} вместо L_{-2} станет очевидным позднее.

Пусть K — пространство всех состояний вида

$$\prod_{n=1}^{\infty} K_n^{\mu_n} \cdot |f\rangle, \quad (2.3.64)$$

где $|f\rangle$ — состояние ДДФ. Каждое состояние типа (2.3.46) либо содержит в своем разложении некоторое число операторов L и поэтому является шпурионным, либо не содержит операторов L и поэтому принадлежит пространству K . Так как состояния (2.3.46) образуют базис в пространстве Фока, то мы получаем, что любое состояние $|\phi\rangle$ в этом пространстве можно записать в виде

$$|\phi\rangle = |s\rangle + |k\rangle, \quad (2.3.65)$$

где $|s\rangle$ является шпурионным состоянием, а $|k\rangle$ принадлежит пространству K . Более того, это представление является единственным, так как состояния (2.3.46) линейно независимы. Поэтому если $|\phi\rangle$ является собственным состоянием оператора L_0 ,

то $|s\rangle$ и $|k\rangle$ также являются его собственными состояниями с тем же собственным значением; в частности, если

$$(L_0 - 1)|\phi\rangle = 0, \quad (2.3.66)$$

то

$$(L_0 - 1)|s\rangle = (L_0 - 1)|k\rangle = 0. \quad (2.3.67)$$

Предположим теперь, что $|\phi\rangle$ является физическим состоянием и поэтому удовлетворяет условиям

$$L_m|\phi\rangle = 0, \quad m = 1, 2, 3 \dots \quad (2.3.68)$$

и уравнению (2.3.66). Записывая состояние $|\phi\rangle$ в виде (2.3.65), где состояния $|s\rangle$ и $|k\rangle$ удовлетворяют уравнению (2.3.66), мы покажем теперь, что состояния $|s\rangle$ и $|k\rangle$ являются физическими, т. е.

$$L_m|s\rangle = L_m|k\rangle = 0, \quad m = 1, 2, 3. \quad (2.3.69)$$

Равенства (2.3.69) достаточно доказать для $m = 1$ и $m = 2$, так как операторы L_m при $m > 2$ могут быть получены повторной коммутацией операторов L_1 и L_2 . У нас есть еще представление

$$|s\rangle = L_{-1}|\chi_1\rangle + \tilde{L}_{-2}|\chi_2\rangle \quad (2.3.70)$$

для некоторых $|\chi_1\rangle$ и $|\chi_2\rangle$. Из уравнения (2.3.67) следует, что

$$0 = L_0|\chi_1\rangle = (L_0 + 1)|\chi_2\rangle. \quad (2.3.71)$$

Для доказательства (2.3.69) при $m = 1$ заметим, что из (2.3.65) и (2.3.68) следует равенство

$$0 = L_1|s\rangle + L_1|k\rangle. \quad (2.3.72)$$

Более подробно можно записать

$$L_1|s\rangle = L_1(L_{-1}|\chi_1\rangle + \tilde{L}_{-2}|\chi_2\rangle), \quad (2.3.73)$$

$$L_1|k\rangle = L_1 \prod_n K_n^{\mu_n} |f\rangle, \quad (2.3.74)$$

где $|\chi_1\rangle$ и $|\chi_2\rangle$ удовлетворяют условиям (2.3.71), а $|f\rangle$ является состоянием ДДФ. Воспользовавшись коммутационными соотношениями $[L_1, L_{-1}] = 2L_0$, $[L_1, L_{-2}] = 3L_{-1}$ и условиями (2.3.71), мы получаем из (2.3.73), что $L_1|s\rangle$ является шпурионным состоянием,

$$L_1|s\rangle = L_{-1}|\eta_1\rangle + \tilde{L}_{-2}|\eta_2\rangle \quad (2.3.75)$$

для некоторых η_i . Из (2.3.74), того факта, что состояния ДДФ являются физическими ($L_1|f\rangle = 0$), и из равенства $[L_m, K_n] = K_{m+n}$ также следует, что $L_1|k\rangle$ принадлежит пространству K . Таким образом, уравнение (2.3.72) означает, что сумма шпури-

онного состояния $(L_1|s\rangle)$ и состояния в $K(L_1|k\rangle)$ равна нулю. А так как состояния (2.3.46) линейно независимы, это невозможно, если только

$$L_1|s\rangle = L_1|k\rangle = 0, \quad (2.3.76)$$

что мы и хотели показать.

Для завершения доказательства того, что состояния $|s\rangle$ и $|k\rangle$ в (2.3.65) являются физическими, если таковым является состояние $|\varphi\rangle$, нужно повторить рассуждения, которые привели нас к равенствам (2.3.76), и показать, что при тех же предположениях

$$\tilde{L}_2|s\rangle = \tilde{L}_2|k\rangle = 0. \quad (2.3.77)$$

Вывод равенств (2.3.76) можно непосредственно обобщить с тем, чтобы вывести равенства (2.3.77), и мы оставляем читателю сделать это в качестве упражнения. Отметим однако, что в процессе вывода ему встретится коммутатор $[L_2, L_{-2}]$, зависящий от D из-за аномалии Вирасоро. Это единственное место во всем выводе, в котором возникнет зависимость от D . Читатель должен суметь доказать равенства (2.3.77) при $D = 26$.

Теперь уже можно доказать теорему об отсутствии духов. В разложении (2.3.65) физического состояния $|\varphi\rangle$ общего вида нам известно, что состояние $|s\rangle$ является и физическим, и шпурионным. Мы знаем из нашего предыдущего рассмотрения шпурионных состояний, что состояние, являющееся и физическим, и шпурионным, имеет нулевую норму и ортогонально ко всем физическим состояниям, так что $\langle s|s\rangle = \langle k|s\rangle = 0$. Следовательно,

$$\langle \varphi|\varphi\rangle = \langle k|k\rangle, \quad (2.3.78)$$

но можно легко показать, что состояние $|k\rangle$ имеет неотрицательную норму. Возвращаясь к (2.3.64), мы видим, что состояние общего вида в пространстве K может быть записано

$$|k\rangle = |f\rangle + \sum_{\alpha} \prod' K_{-n}^{\mu_n, \alpha} |f_{\alpha}\rangle, \quad (2.3.79)$$

где $|f_{\alpha}\rangle$ является состоянием ДДФ, а штрих в \prod' означает, что не все числа μ_n, α равны нулю. Запишем (2.3.79) в сокращенном виде:

$$|k\rangle = |f\rangle + |\tilde{k}\rangle. \quad (2.3.80)$$

Из элементарных свойств операторов K и состояний ДДФ следует, что $\langle \tilde{k}|\tilde{k}\rangle = \langle f|\tilde{k}\rangle = 0$. Поэтому $\langle k|k\rangle = \langle f|f\rangle \geq 0$ (где $\langle f|f\rangle = 0$ тогда и только тогда, когда $|f\rangle = 0$). С учетом (2.3.78) это завершает доказательство того, что физическое состояние $|\varphi\rangle$

имеет неотрицательную норму. В физическом гильбертовом пространстве духи отсутствуют.

На самом деле можно доказать и более сильное утверждение. Используя коммутатор $[L_m, K_n] = -nK_{m+n}$ и тот факт, что операторы L_m при $m > 0$ аннулируют состояния ДДФ $|f\rangle$ и $|f_{\alpha}\rangle$, нетрудно показать, что если состояние $|k\rangle$ в (2.3.79) является физическим, то $|\tilde{k}\rangle = 0$ и $|k\rangle = |f\rangle$. Таким образом, мы наконец установили, что физическое состояние общего вида может быть записано в виде

$$|\varphi\rangle = |f\rangle + |s\rangle, \quad (2.3.81)$$

где $|f\rangle$ — состояние ДДФ, а $|s\rangle$ — шпурионное физическое состояние. Это утверждение является сильным вариантом теоремы об отсутствии духов. На первый взгляд появление здесь шпурионного физического состояния $|s\rangle$ может показаться неприятным, но на самом деле оно тесно связано с той причиной, по которой теория струн действительно является интересной. Преобразование $|f\rangle \rightarrow |f\rangle + |s\rangle$ является теоретикострунным аналогом калибровочного преобразования.

Теорема об отсутствии духов легко обобщается на случай $D < 26$, так как тогда физическое пространство является просто подпространством 26-мерного пространства, в котором выполняется равенство

$$\alpha_m^i |\varphi\rangle = 0, \quad i = D, \dots, 25 \quad (2.3.82)$$

при $m > 0$. Однако только в 26-мерном пространстве имеется достаточное число нуль-состояний для состояний ДДФ (т. е. физических состояний $|f\rangle$), чтобы образовать полный базис физических состояний. При $D < 26$ можно отказаться от условия на массу основного состояния, считая (формально), что k_0^i отличен от нуля, когда $i = D, \dots, 25$. (Так как в этих размерностях возбуждения отсутствуют, это не испортит хороших свойств k_0 .) В результате масса основного состояния будет сдвинута, так что

$$a = 1 - \sum_{i=D}^{25} (k^i)^2 \leq 1. \quad (2.3.83)$$

В низших размерностях физические состояния не являются чисто поперечными.

Фактически мы можем явно построить операторы, которые создают эти физические «продольные» состояния из поперечных, и увидеть, что они приводят к состояниям с нулевой нормой при $D = 26$. Это конкретное представление для всех $D = 1$ физических мод было развито Брауэром в его доказательстве

теоремы об отсутствии духов. Мы опишем этот подход только кратко, без той степени подробности, которой мы придерживались выше.

Естественно обобщить операторы ДДФ так, чтобы они имели не $D-2$, а D компонент, рассматривая (2.3.36), где поперечный индекс заменен на «+» или «-». Компонента «+» оказывается тривиальной, так как

$$A_n^+ = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \dot{X}^+ e^{inX^+} d\tau = \delta_n \quad (2.3.84)$$

в той специальной кинематической конфигурации, которую мы выбрали для рассмотрения. Компонента «-» является интегралом от $V^-(nk_0, \tau)$, где

$$V^-(nk_0, \tau) =: \dot{X}^- e^{inX^+}: \quad (2.3.85)$$

не имеет конформной размерности $J=1$ из-за нормального упорядочения. Вместо этого из вычислений следует, что

$$[L_m, V^-(nk_0, \tau)] = e^{im\tau} \left(-i \frac{d}{d\tau} + m\right) V^-(nk_0, \tau) + \frac{1}{2} nm^2 e^{im\tau} e^{inX^+}. \quad (2.3.86)$$

Второе слагаемое в этом выражении имеет то же происхождение, что и аномальная размерность $k^2/2$ вершинного оператора: $\exp(ik \cdot X)$. Действительно, коммутирование нормально упорядоченного выражения с L_m приводит к выражению, в отдельных членах которого повышающие операторы стоят правее соответствующих понижающих операторов. Коммутирование их с целью получения нормально упорядоченного выражения приводит к последнему члену в (2.3.86).

Первое слагаемое в (2.3.86) имеет правильный вид оператора с конформным спином $J=1$. Наличие второго слагаемого означает, что оператор V^- не может быть использован для создания физических состояний. Однако такое положение можно исправить добавлением еще одного слагаемого. Оказывается, что это слагаемое содержит специальную комбинацию осцилляторов, которая на первый взгляд может показаться плохо определенной, но в действительности это не так. Частью произведения $k \cdot \dot{X}$, содержащей нулевую моду для допустимых кинематических конфигураций, является $k \cdot p = nk_0 \cdot p = n$. Поэтому для случая $n \neq 0$ (который нам только и нужен) $\log(k \cdot \dot{X}) = \log\left(n + \sum_{q \neq 0} k \cdot \alpha_q\right) = \log n + \frac{1}{n} \sum_{q \neq 0} k \cdot \alpha_q + \dots$ имеет хорошо определенное разложение в ряд общего вида:

$$\log n + \text{осцилляторы члены}. \quad (2.3.87)$$

Формула, позволяющая устранить в (2.3.86) последний член, имеет вид

$$\left[L_m, i \frac{d}{d\tau} \log(k \cdot \dot{X})\right] = e^{im\tau} \left(-i \frac{d}{d\tau} + m\right) i \frac{d}{d\tau} \log(k \cdot \dot{X}) - m^2 e^{im\tau}. \quad (2.3.88)$$

Поэтому комбинация

$$\tilde{V}^\mu(k, \tau) =: \dot{X}^\mu e^{ik \cdot X}: + \frac{i}{2} k^\mu \frac{d}{d\tau} (\log k \cdot \dot{X}) e^{ik \cdot X} \quad (2.3.89)$$

имеет конформную размерность $J=1$. Так как единственной отличной от нуля компонентой вектора k^μ является $k^- = -n$, то формула (2.3.89) сводится к (2.3.36) при $\mu = i$. При $\mu = -$ из нее следует, что

$$\tilde{V}^-(nk_0, \tau) =: \dot{X}^- e^{inX^+}: - \frac{1}{2} in \frac{d}{d\tau} (\log \dot{X}^+) e^{inX^+}, \quad (2.3.90)$$

и, следовательно, оператор

$$A_n^- = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\tau \tilde{V}^-(nk_0, \tau) \quad (2.3.91)$$

может быть использован для построения физических состояний. Заметим, что $A_0^- = p^-$.

Эти операторы вместе с операторами A_n^i образуют набор из $D-1$ операторов для каждого значения n и фактически составляют полную алгебру, порождающую спектр. Алгебра этих операторов имеет следующий вид:

$$[A_m^i, A_n^i] = m\delta^{ij}\delta_{m+n}, \quad (2.3.92)$$

$$[A_m^-, A_n^i] = -nA_{m+n}^i, \quad (2.3.93)$$

$$[A_m^-, A_n^-] = (m-n)A_{m+n}^- + 2m^3\delta_{m+n}. \quad (2.3.94)$$

Вместе с операторами Вирасоро L_m операторы, порождающие спектр, A_m^i и A_m^- , генерируют все состояния фокова пространства струны. Соответствие между операторами A_m и α_m можно усмотреть в определенных выше формулах, из которых очевидным образом следует, что

$$A_{-n}^i = \alpha_{-n}^i + \dots, \quad A_{-n}^- = k \cdot \alpha_{-n} + \dots, \quad L_{-n} = p \cdot \alpha_{-n} + \dots, \quad (2.3.95)$$

где $+\dots$ означает члены, содержащие более чем одну осцилляторную моду. Это дает все основания предполагать, что на каждом массовом уровне имеется обратимое преобразование состояний, полученных с помощью операторов, порождающих

спектр, и операторов Вирасоро, в состоянии, полученные с помощью операторов α_m^μ .

Теперь можно рассмотреть пространство физических состояний, представленных в явном виде, с тем чтобы проиллюстрировать факт отсутствия состояний с отрицательной нормой. В самом деле, действуя на физические состояния с положительной нормой, операторы A_n^i порождают состояния с положительной нормой. Оператор A_n^- требует особого рассмотрения. Вместо оператора A_n^- можно столь же успешно работать с оператором

$$\tilde{A}_n^- = A_n^- - \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{D-2} : A_m^i A_{n-m}^i :, \quad (2.3.96)$$

так как он имеет то преимущество, что коммутирует с операторами A_m^i . Таким образом, наше утверждение о том, что операторы A_n^- и A_k^i порождают физический спектр, означает, что произвольное физическое состояние $|\psi\rangle$ может быть записано в виде

$$|\psi\rangle = A_{k_1}^{i_1} A_{k_2}^{i_2} \dots A_{k_r}^{i_r} \tilde{A}_{n_1}^- \tilde{A}_{n_2}^- \dots \tilde{A}_{n_p}^- |0\rangle. \quad (2.3.97)$$

Чтобы расположить операторы, генерирующие спектр, в удобном порядке, приведенном в формуле (2.3.97), можно воспользоваться коммутационными соотношениями между операторами A_n^i и \tilde{A}_n^- .

Операторы \tilde{A}_n^- удовлетворяют алгебре Вирасоро, которую можно извлечь из алгебры операторов α_n^- (2.3.14) вместе с (2.3.93) и (2.3.94):

$$[\tilde{A}_m^-, \tilde{A}_n^-] = (m-n) \tilde{A}_{m+n}^- + \frac{26-D}{12} m^3 \delta_{m+n}. \quad (2.3.98)$$

Если нам удастся показать, что состояния вида

$$|\chi\rangle = \tilde{A}_{n_1}^- \dots \tilde{A}_{n_k}^- |0\rangle \quad (2.3.99)$$

всегда имеют неотрицательную норму, то последующее действие на них операторов A_n^i , как это имеет место в формуле (2.3.97), всегда будет приводить к состояниям с неотрицательной нормой, что вновь будет доказательством теоремы об отсутствии духов. Так как

$$\tilde{A}_n^- |0\rangle = 0, \quad n \geq 0, \quad (2.3.100)$$

можно (после перемещения всех операторов \tilde{A}_n^- с $n \geq 0$ вправо) предположить, что в (2.3.99) $n_i < 0$. Для вычислений нормы

состояния $|\chi\rangle$ запишем

$$\langle \chi | \chi \rangle = \langle 0 | \tilde{A}_{-n_k}^- \dots \tilde{A}_{-n_1}^- \tilde{A}_{n_1}^- \dots \tilde{A}_{n_k}^- | 0 \rangle. \quad (2.3.101)$$

Используя (2.3.98) для перемещения операторов $\tilde{A}_{-n_i}^-$ вправо, где они в конце концов аннулируют состояние $|0\rangle$, мы видим, что при $D=26$ все состояния в (2.3.101) имеют нулевую норму (за исключением только случая, когда $k=0$; тогда $|\chi\rangle = |0\rangle$ и его норма равна 1). Это наблюдение лежит в основе доказательства Брауэра теоремы об отсутствии духов при $D=26$. При $D \neq 26$ норму (2.3.101) по-прежнему можно вычислить, используя (2.3.98) и (2.3.100). Получается, что все состояния вида $\langle \chi |$ имеют положительную норму при $D < 26$, а при $D > 26$ норма некоторых из них отрицательна.

2.3.4. Анализ спектра

При $a=1$ и $D=26$ основное состояние открытой бозонной струны $|0; p\rangle$ является тахионом с $\alpha' M^2 = -1$, а первое возбужденное состояние $\alpha_{-1}^i |0; p\rangle$ — безмассовой векторной частицей с 24 независимыми поперечными поляризациями. Чтобы лучше понять, что значит иметь дело со струной, полезно рассмотреть также происходящее на некоторых более высоких уровнях.

Описание струнных состояний в калибровке светового конуса обладает тем преимуществом, что мы работаем только с физическими состояниями — элементами гильбертова пространства с явно положительно определенным скалярным произведением.

Недостатком же такого описания является представление состояний в виде мультиплетов группы $SO(D-2)$, группы вращений поперечных компонент, хотя из приведенного выше для случая $D=26$ доказательства лоренц-инвариантности следует, что массивные уровни в действительности составляют полные мультиплеты группы $SO(D-1)$. Можно было бы установить, каким образом мультиплеты группы $SO(24)$ собираются в мультиплеты группы $SO(25)$, исследуя их переходы друг в друга при соответствующих преобразованиях Лоренца. Это, однако, довольно утомительно, и проще (по крайней мере для нескольких первых уровней) заметить, что возникающие мультиплеты группы $SO(24)$ соответствуют однозначным расщеплениям мультиплетов группы $SO(25)$.

Рассмотрим сначала состояния открытой струны. Единственным состоянием с $\alpha' M^2 = -1$ является тахон (основное состояние), а единственными состояниями с $\alpha' M^2 = 0$ — состояния, соответствующие 24 поляризациям безмассового векторного бо-

зона. С этими состояниями мы уже достаточно хорошо знакомы. Первые состояния с положительным M^2 возникают при $\alpha' M^2 = 1$, и ими являются соответственно $D-2$ и $\frac{1}{2}(D-2)(D-1)$ состояний вида

$$\alpha_{-2}^i |0; p\rangle \text{ и } \alpha_{-1}^i \alpha_{-1}^i |0; p\rangle. \quad (2.3.102)$$

Их общее число, $\frac{1}{2}(D-2)(D+1)$, является размерностью симметричного бесследового представления, \square , группы $SO(D-1)$, что и должно быть поэтому исчерпывающим ответом. Такое представление хочется назвать представлением «спин-2». Действительно, это как раз то представление, с которым мы имели дело в разд. 2.2.3, когда строили вершинный оператор для выбранного массового уровня.

Для уровня $\alpha' M^2 = 2$ возможными состояниями являются

$$\alpha_{-3}^i |0\rangle, \alpha_{-2}^i \alpha_{-1}^i |0\rangle \text{ и } \alpha_{-1}^i \alpha_{-1}^i \alpha_{-1}^k |0\rangle; \quad (2.3.103)$$

всего таких состояний $24 + 576 + 2600 = 3200$. Из них можно скомбинировать пространства представлений $\square\square$ (2900) и \mathbb{P} (300) группы $SO(25)$. Аналогично при $\alpha' M^2 = 3$ получаем представления $\square\square\square$ (20150), \mathbb{P}^2 (5175), \square (324), \cdot (1); всего 25 650 состояний. Стоит отметить тот факт, что максимальный «спин» массы M определяется формулой $n = \alpha' M^2 + 1$. Представление в виде симметричных бесследовых тензоров ранга n строится из частей $\alpha_{-1}^i \dots \alpha_{-1}^i |0\rangle$ плюс остальные члены, необходимые для заполнения мультиплета группы $SO(25)$. Ясно, что при разложении на члены подгруппы $SO(3)$ получится один член спина n в обычном смысле, и это единственное состояние с наивысшим спином на этом массовом уровне. Таким образом, имеет место неравенство

$$J \leq \alpha' M^2 + 1. \quad (2.3.104)$$

Мы уже выводили это соотношение на классическом уровне в разд. 2.1.3, оно же по существу встречалось нам и во введении при анализе полюсов модели Венециано. Это неравенство имеет, в сущности, тот же вид, что и неравенство, возникающее в теории черных дыр, и этот факт является одним из многочисленных заманчивых совпадений свойств массивных состояний струны и черных дыр.

Спектр состояний замкнутой струны легко выводится из спектра состояний открытой струны. Здесь, наконец, мы имеем

возможность насладиться плодами своего труда, поскольку именно среди замкнутых струн мы обнаружим гравитон — безмассовую частицу спина два. Замкнутые струны в калибровке светового конуса описываются двумя наборами поперечных осцилляторов, $\{\alpha_n^i\}$ и $\{\tilde{\alpha}_n^i\}$, соответствующих движениям влево и вправо. Кроме того, имеется ограничение $L_0 = \tilde{L}_0$, упоминавшееся ранее, из которого следует, что должно быть одинаковое число возбуждений для движений влево и вправо, т. е.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{-n}^i \alpha_n^i = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{\alpha}_{-n}^i \tilde{\alpha}_n^i. \quad (2.3.105)$$

Таким образом, мультиплет состояний замкнутой струны с $\alpha' M^2 = 4(N-1)$ определяется тензорным произведением состояний открытой струны с $\alpha' M^2 = 4(N-1)$ на самих себя.

Например, основное состояние является скалярным тахионом с $\alpha' M^2 = -4$. Следующий уровень представляет собой множество безмассовых состояний вида

$$|\Omega^{ij}\rangle = \alpha_{-1}^i \tilde{\alpha}_{-1}^j |0\rangle \quad (2.3.106)$$

с квантовыми числами группы $SO(24)$, соответствующими тензорному произведению состояния безмассового вектора группы $SO(24)$ из мод, движущихся влево, на состояние, соответствующее безмассовому вектору группы $SO(24)$ из мод, движущихся вправо. Часть состояния $|\Omega^{ij}\rangle$, симметричная и бесследовая по индексам i и j , преобразуется под действием группы $SO(24)$ как состояние безмассовой частицы со спином два, т. е. гравитон. Член, соответствующий следу $\delta_{ij} |\Omega^{ij}\rangle$, является безмассовой скалярной частицей, обычно называемой дилатоном. Наконец, антисимметричная часть $|\Omega^{ij}\rangle \rightarrow |\Omega^{ji}\rangle$ преобразуется под действием группы $SO(24)$ как антисимметричный тензор второго ранга. У всех этих частиц есть эквиваленты в суперсимметричной струнной теории, и каждая из них играет фундаментальную роль. Можно и дальше продолжить описание состояний замкнутой струны с положительным квадратом массы, взяв соответствующие тензорные произведения гильбертовых пространств открытых струн, движущихся влево и вправо. Например, уровень $\alpha' M^2 = 4$ соответствует представлению, которое получается при разложении произведения $\square \times \square$.

Спектр, описанный выше, является спектром ориентированных замкнутых струн — спектром «расширенной модели Шапиро — Вирасоро». При желании его можно сузить, рассматривая состояния, соответствующие неориентированным струнам. С физической точки зрения ориентированная струна — это струна, имеющая внутреннюю «стрелку», как изображено на рис. 2.5, а,

тогда как неориентированная струна никаким направлением не обладает, как показано на рис. 2.5, *b*. С математической точки зрения неориентированная струна — это струна, квантовый волновой функционал которой $\Psi(X^\mu(\sigma))$ инвариантен относительно замены $\sigma \rightarrow -\sigma$. На квантовый волновой функционал ориентированной замкнутой струны такое ограничение не налагается. Так как на наши струнные волновые функционалы ограничения, связанные с заменой $\sigma \rightarrow -\sigma$, не налагались, то это означает, что мы рассматривали ориентированные замкнутые струны, хотя явно это не указывалось. Теперь обсудим альтернативный случай неориентированных замкнутых струн. Так как замена $\sigma \rightarrow -\sigma$ приводит к тому, что осцилляторы, движущиеся

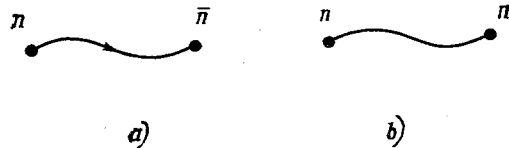


Рис. 2.5. Ориентированные и неориентированные открытые струны. Струна имеет ориентацию (рис. *a*), если заряды на ее концах различны (как в КХД с обычной калибровочной группой $SU(n)$), тогда как струна не имеет ориентации (рис. *b*), если заряды на ее концах одинаковы, как в калибровочной теории с калибровочной группой $SO(n)$ или $Sp(n)$. Для замкнутой струны понятие ориентации также является важным, хотя и более абстрактным.

влево и вправо, α_m и $\tilde{\alpha}_m$, меняются местами, то состояние $|\Psi\rangle$ неориентированной замкнутой струны должно быть симметрично относительно перестановки двух наборов этих осцилляторов. Таким образом, только симметричные произведения мультиплетов состояний открытой струны можно использовать для описания состояний неориентированных замкнутых струн. Например, для безмассового состояния член, являющийся антисимметричным тензором, следует отбросить, а члены, соответствующие гравитону и дилатону, сохранить. Спектр неориентированных замкнутых струн — это спектр «ограниченной модели Шапиро — Вирасоро».

2.3.5. Асимптотические формулы для плотности уровней

Исследуем теперь асимптотическое поведение плотности уровня для очень высоких возбужденных состояний. Этот подраздел не является полностью замкнутым, и читатель при желании может вернуться к нему после прочтения приложения к гл. 8, посвященного модулярным функциям.

Полное число состояний открытой струны с $\alpha' M^2 = n - 1$, обозначаемое через d_n , удобно определять как коэффициент при w^n в выражении

$$\text{tr } w^N, \quad (2.3.107)$$

где N является оператором числа частиц

$$N = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{-n} \cdot \alpha_n. \quad (2.3.108)$$

Так как мы хотим учитывать только физические состояния, осцилляторы в (2.3.108) являются только поперечными осцилляторами α_n^i , $i = 1, \dots, 24$. Объектом, который вычисляется намного легче, чем отдельные коэффициенты d_n , является производящая функция

$$G(w) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n w^n = \text{tr } w^N. \quad (2.3.109)$$

Она находится с помощью элементарных методов квантовой статистической механики. Действительно,

$$\text{tr } w^N = \prod_{n=1}^{\infty} \text{tr } w^{\alpha_{-n} \cdot \alpha_n} = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - w^n)^{-24} = [f(w)]^{-24}, \quad (2.3.110)$$

где функция

$$f(w) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - w^n) \quad (2.3.111)$$

известна как классическая статистическая сумма; она появляется во многих проблемах аддитивной или комбинаторной теории чисел.

Чтобы оценить асимптотическую плотность состояний, нам необходимо знать поведение функции $f(w)$ при $w \rightarrow 1$. Грубую оценку можно сделать, воспользовавшись равенствами

$$\begin{aligned} f(w) &= \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} \ln(1 - w^n)\right) = \\ &= \exp\left(-\sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{w^{mn}}{m}\right) = \exp\left(-\sum_{m=1}^{\infty} \frac{w^m}{m(1 - w^m)}\right) \sim \\ &\sim \exp\left(-\frac{1}{1-w} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2}\right) \sim \exp\left(-\frac{\pi^2}{6(1-w)}\right). \end{aligned} \quad (2.3.112)$$

Более точную оценку можно получить, если заметить, что, заменив w на $e^{2\pi i\tau}$, мы сделаем функцию $f(w)$ тесно связанной с эта-функцией Дедекинда:

$$\eta(\tau) = e^{i\pi\tau/12} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - e^{2\pi in\tau}). \quad (2.3.113)$$

Для этой функции имеет место формула модулярного преобразования

$$\eta(-1/\tau) = (-i\tau)^{1/2} \eta(\tau) \quad (2.3.114)$$

(которая будет выведена в приложении к гл. 8 в контексте вычислений петлевых диаграмм). Применяя ее к функциям $f(w)$, мы получим формулу Харди — Рамануджана

$$f(w) = \left(\frac{-2\pi}{\log w} \right)^{1/2} w^{-1/24} q^{1/12} f(q^2), \quad (2.3.115)$$

где

$$q = \exp \left(\frac{2\pi^2}{\log w} \right). \quad (2.3.116)$$

Эта связь позволяет вывести асимптотическую формулу для $w \rightarrow 1$ (или $q \rightarrow 0$)

$$f(w) \sim A(1-w)^{-1/2} \exp \left(-\frac{\pi^2}{6(1-w)} \right). \quad (2.3.117)$$

Получив асимптотическую формулу для $f(w)$, а следовательно, и для производящей функции $G(w) = [f(w)]^{-24}$, мы теперь вернемся назад и определим интересующее нас с самого начала поведение коэффициентов d_n при больших n . Коэффициент d_n может быть выделен из функции $G(w) = \sum d_n w^n$ с помощью контурного интеграла вдоль окружности малого радиуса вокруг начала координат:

$$d_n = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{G(w)}{w^{n+1}} dw. \quad (2.3.118)$$

При больших n , воспользовавшись асимптотическим разложением функции $f(w)$, этот интеграл можно оценить с помощью метода седловой точки. Функция $G(w)$ быстро стремится к нулю при $w \rightarrow 1$, тогда как при очень большом n и $w < 1$ величина w^{n+1} очень мала. Следовательно, для больших n по переменной w имеется четко определенная седловая точка в окрестности 1. Действительно, множитель

$$\exp \left[-\frac{4\pi^2}{\ln w} - (n+1) \ln w \right] \quad (2.3.119)$$

стационарен при $\ln w \sim -2\pi/\sqrt{n+1}$. Поэтому [мы получаем, что при $n \rightarrow \infty$

$$d_n \sim (\text{const}) n^{-27/4} \exp(4\pi/\sqrt{n}). \quad (2.3.120)$$

Используя $n \sim \alpha' m^2$, можно найти асимптотическое поведение плотности уровней как функции массы

$$\rho(m) \sim m^{-25/2} \exp(m/m_0), \quad (2.3.121)$$

где

$$m_0 = \frac{1}{4\pi} (\alpha')^{-1/2}. \quad (2.3.122)$$

Плотность уровней так быстро растет с увеличением массы, что статическая сумма $\text{tr} e^{-\beta H}$ свободной теории не может быть определена при температурах выше максимальной $T = m_0$. Это привело к гипотезе о наличии некоего фазового перехода около этой температуры. Однако развить такую гипотезу слишком далеко не удастся, так как мы имеем дело с системой, включающей гравитацию. Понятие температуры и идея о фазовых переходах в действительности справедливы только тогда, когда макроскопическая система рассматривается в существенно бесконечном объеме. Такой предел не существует в системе, включающей гравитацию, так как в присутствии гравитации любой статистический ансамбль с ненулевой энергией на единицу объема в пределе бесконечного объема находится внутри своего шварцшильдовского радиуса и нестабилен относительно гравитационного коллапса. (Даже в нерелятивистской теории такая система всегда подвержена нестабильности Джинса, которая играет решающую роль в теории формирования звезд и галактик.) Таким образом, при наличии гравитации нет стабильного термодинамического ансамбля и сами понятия температуры и фазовых переходов не определены. С практической точки зрения это нас особенно не беспокоит, так как мы имеем дело с температурами, настолько малыми по сравнению с планковским масштабом, что для нас температура и статистическая механика являются хорошими приближенными понятиями. Однако при энергиях порядка $(\alpha')^{-1/2}$ понятие температуры, по-видимому, утрачивает свой смысл, и то, что происходит в теории струн на таких масштабах, вряд ли можно понять в терминах термодинамики.

2.4. Резюме

Классическая теория струн может быть последовательно сформулирована в пространстве-времени любой размерности, но квантование, приводящее к спектру, свободному от духов, тре-

бует, чтобы $D \leq 26$. Кроме того, интерсепт ведущей траектории Редже должен удовлетворять условию $a \leq 1$. В специальном случае $D = 26$ и $a = 1$ в спектр дают вклад только поперечные степени свободы, а большое количество состояний с нулевой нормой из него выпадает. Это говорит о наличии в теории очень широкой калибровочной инвариантности. Эти результаты были получены в рамках различных ковариантных и нековариантных подходов, которые будут нами использоваться в дальнейшем изложении.

Замкнутые струны описываются за счет удвоения степеней свободы открытых струн. Два набора мод в этом случае независимы, и единственным условием, которое их связывает, является равенство $L_0 = \bar{L}_0$. Замкнутые струны особенно важны, так как в их спектр входит безмассовый гравитон.

3. Современное ковариантное квантование

Как подробно обсуждалось в гл. 2, распространение струны в объемлющем пространстве-времени описывается двумерной полевой теорией. Эта двумерная теория обладает локальной репараметризационной инвариантностью. В гл. 2 мы ее проквантовали каноническими методами, используя одновременные коммутаторы, связи и гильбертово пространство физических состояний. Альтернативным подходом к проблеме квантования полевых теорий является метод функциональных интегралов. Опыт, приобретенный при изучении обычной калибровочной теории поля в четырехмерном пространстве-времени, подсказывает нам, что квантование методом функциональных интегралов является особенно естественным в случае систем с локальными симметриями и позволяет получить много результатов, к которым трудно прийти каким-либо другим способом. Поэтому естественно рассмотреть квантование свободной струны, используя те же методы, которые обычно применяются при квантовании любой другой калибровочно-инвариантной теории. Такая точка зрения была предложена Поляковым в 1981 г., хотя использование функциональных интегралов для квантования струнных действий с фиксированной калибровкой восходит к начальному этапу развития струнной теории.

3.1. Ковариантное квантование методом функциональных интегралов

Действие свободной полевой теории

$$S_0[X] = -\frac{1}{2\pi} \int d^2\sigma \partial^\alpha X^\mu \partial_\alpha X_\mu, \quad (3.1.1)$$

будучи дополнено связями, описывает распространение свободной струны. Оно является частным случаем действия

$$S[h, X] = -\frac{1}{2\pi} \int d^2\sigma \sqrt{-h} h^{\alpha\beta} \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X_\mu, \quad (3.1.2)$$

в котором фиксирована калибровка. Естественно проквантовать теорию с действием (3.1.2) теми же методами, которые используются при квантовании любой другой калибровочно-инвариантной теории, начав с функционального интеграла

$$Z = \int Dh(\sigma) DX(\sigma) e^{-S[h, X]}. \quad (3.1.3)$$

К этому выражению мы применим современную технику Фаддеева — Попова для интерпретации статистической суммы калибровочной теории.

3.1.1. Духи Фаддеева — Попова

Символ $\int Dh(\sigma)$ обозначает интеграл по трем независимым компонентам $h_{++}(\sigma)$, $h_{--}(\sigma)$, $h_{+-}(\sigma)$. Необходимо определить точную меру, которая должна использоваться в этом интеграле; при этом могут возникнуть аномалии, поскольку нельзя удовлетворительным образом определить меру так, чтобы сохранить все явные симметрии выражения (3.1.3). Так как имеются три калибровочные инвариантности, две репараметризации и вейлевская масштабная инвариантность, желательно выбрать калибровочное сечение таким образом, чтобы он соответствовал определенному выбору для каждой из трех функций $h_{\alpha\beta}(\sigma)$. Мы хотим наложить обычное калибровочное условие¹⁾

$$h_{\alpha\beta} = e^{\varphi} \eta_{\alpha\beta}, \quad (3.1.4)$$

которое в координатах светового конуса означает, что

$$0 = h_{++} = h_{--}. \quad (3.1.5)$$

При репараметризации мировой поверхности $\sigma^+ \rightarrow \sigma^+ + \xi^+$, $\sigma^- \rightarrow \sigma^- + \xi^-$ калибровочные условия (3.1.5) преобразуются следующим образом:

$$\delta h_{++} = 2\nabla_+ \xi_+, \quad \delta h_{--} = 2\nabla_- \xi_-. \quad (3.1.6)$$

(Это равносильно формуле, знакомой нам из общей теории относительности, для преобразования метрического тензора при инфинитезимальных координатных преобразованиях: $\delta h_{\alpha\beta} = -\nabla_\alpha \xi_\beta - \nabla_\beta \xi_\alpha$. Здесь ∇ — ковариантная производная со связностью Кристоффеля, так что $\nabla_\alpha \xi_\beta = \partial_\alpha \xi_\beta - \Gamma_{\alpha\gamma}^\beta \xi_\gamma$.) Процедура наложения калибровочного условия в функциональном интеграле, таком, как (3.1.3), хорошо известна. Пусть G — группа

¹⁾ Это — некоторое упрощение; глобальные свойства будут обсуждаться позже.

репараметризаций мировой поверхности струны Σ , и пусть Dg обозначает меру по групповому многообразию. Пусть h^g обозначает метрику, в которую преобразуется метрика h при репараметризации g . Тогда основной формулой, с помощью которой осуществляются манипуляции в функциональном интеграле, является тождество

$$1 = \int Dg(\sigma) \delta(h_{++}^g) \delta(h_{--}^g) \det(\delta h_{++}^g / \delta g) \det(\delta h_{--}^g / \delta g). \quad (3.1.7)$$

Множители $\det(\delta h_{++}^g / \delta g)$, $\det(\delta h_{--}^g / \delta g)$ — это обычные [детерминанты, возникающие при фиксации калибровки и необходимые для того, чтобы интеграл действительно был равен единице. Следующий шаг при фиксации калибровки в функциональном интеграле — вставка «1» в виде (3.1.7) в функциональный интеграл (3.1.3). Это приводит к

$$Z = \int Dg(\sigma) \int Dh(\sigma) DX(\sigma) e^{-S[h, X]} \delta(h_{++}^g) \delta(h_{--}^g) \times \\ \times \det(\delta h_{++}^g / \delta g) \det(\delta h_{--}^g / \delta g). \quad (3.1.8)$$

Так как действие S репараметризационно инвариантно, $S[h, X] = S[h^g, X]$, подынтегральное выражение в (3.1.8) зависит от h и g только через комбинацию h^g . Поэтому мы сделаем замену переменных интегрирования g и h на g и $h' = h^g$ и выделим интеграл $\int Dg$, который теперь дает вклад в виде бесконечного мультипликативного множителя. Таким образом мы приходим к функциональному интегралу с фиксированной калибровкой:

$$Z = \int Dh'(\sigma) DX(\sigma) e^{-S[h', X]} \delta(h'_{++}) \delta(h'_{--}) \times \\ \times \det(\delta h'_{++} / \delta g) / \det(\delta h'_{--} / \delta g). \quad (3.1.9)$$

Распорядиться дельта-функциями в (3.1.9) довольно просто, они означают, что интеграл $\int Dh'$ сводится к интегралу по h'_{+-} или, что то же самое, по φ , определенному в (3.1.4). С детерминантами в (3.1.9) разобраться труднее. Обычно их представляют в виде интегралов по антикоммутирующим «духам и антидухам». Необходимые формулы могут быть получены из выражений (3.1.6) для $\delta h'_{++} / \delta g = \delta h'_{++} / \delta \xi_+$ и $\delta h'_{--} / \delta g = \delta h'_{--} / \delta \xi_-$. Действительно, имеют место равенство

$$\delta h'_{++}(\sigma) / \delta \xi_+(\sigma') = 2\nabla_+ \delta(\sigma - \sigma') \quad (3.1.10)$$

и аналогичное с заменой $+$ на $-$. Дельта-функция в (3.1.10) не что иное, как тождественный оператор в координатном про-

странстве, и именно ∇_+ (и ∇_-) является тем оператором, детерминант которого нужно знать для вычисления (3.1.9). Поэтому для представления первого детерминанта в (3.1.9) мы вводим антикоммутирующие «дух» c^- и «антидух» b_{--} и записываем¹⁾

$$\det(\delta h'_{++}/\delta g) = \int Dc^-(\sigma) Db_{--}(\sigma) \exp\left\{-\frac{1}{\pi} \int d^2\sigma c^- \nabla_+ b_{--}\right\}. \quad (3.1.11)$$

Второй детерминант в (3.1.9) также представляется в виде интеграла по духу c^+ и антидуху b_{++} :

$$\det(\delta h'_{--}/\delta g) = \int Dc^+(\sigma) Db_{++}(\sigma) \exp\left\{-\frac{1}{\pi} \int d^2\sigma c^+ \nabla_- b_{++}\right\}. \quad (3.1.12)$$

Используя дельта-функции в (3.1.9) для выражения h через конформный множитель φ , определенный в (3.1.4), мы получаем для функционального интеграла с фиксированной калибровкой

$$Z = \int D\varphi(\sigma) \int DX(\sigma) Dc(\sigma) Db(\sigma) \exp\{-S(X, b, c)\}, \quad (3.1.13)$$

где теперь действие S содержит кроме действия свободного поля (3.1.1) еще и духовые члены, определенные в (3.1.11) и (3.1.12).

Далее нужно обсудить интеграл по $D\varphi$ в (3.1.13). Формально подынтегральное выражение в (3.1.13) не зависит от φ , так что интеграл по $D\varphi$ приводил бы просто к несущественному общему множителю. На самом же деле из-за трудностей с регуляризацией интеграл по $D\varphi$ определяется только в 26-мерии, где происходит сокращение конформных аномалий. Однако для обоснования этого утверждения необходимо развить определенные методы, чего пока еще мы не сделали. Поэтому пока просто предположим, что интеграл по $D\varphi$ можно отбросить, и исследуем получившуюся теорию, содержащую духи. Сначала мы показываем, что именно в 26-мерии c -числовые аномалии в алгебре Вирасоро сокращаются, если учесть вклад духов. Затем в разд. 3.2.3 мы демонстрируем, что это эквивалентно отсутствию взаимодействия для поля φ в 26-мерном случае. Интересно, что интеграл (3.1.13) физически осмыслен, даже если зависимость от φ не пропадает. Этой возможностью мотивировались некоторые очень остроумные предложения, но она так и осталась до конца невыясненной. Во всяком случае, для суперструнного объ-

¹⁾ Интегралы по антикоммутирующим (грассмановым) координатам, называемые интегралами Березина, обсуждаются в разд. 1.2.

единения выбор критической размерности, в которой зависимости от φ нет, является более предпочтительным, так как большинство предложений выйти за рамки критической размерности приводит, по-видимому, к потере безмассовых частиц, присутствующих в критической размерности. В этой книге мы не будем заниматься анализом теории струн в пространстве некритической размерности.

3.1.2. Комплексное тензорное исчисление на мировой поверхности

Прежде чем попытаться понять теорию с духами, полезно вывести формулы римановой геометрии с двумерной метрикой, взятой в конформном виде: $h_{\alpha\beta} = e^\varphi \eta_{\alpha\beta}$. Удобно, хотя и не обязательно, воспользоваться в настоящем обсуждении языком евклидовой теории, рассматривая мировую поверхность струны с метрикой евклидовой сигнатуры. Переход от формул с евклидовой сигнатурой к формулам с сигнатурой Минковского и наоборот очевиден. Хотя для целей, преследуемых нами в настоящий момент, это в действительности несущественно, похоже, что евклидова картина важна в некоторых дальнейших разработках, так как она приводит к теории римановых поверхностей и комплексному анализу. Более глубокое изложение математических основ такого подхода будет дано в гл. 15.

На мировой поверхности, метрика которой (по крайней мере локально) взята в виде $ds^2 = e^\varphi(d\sigma^2 + d\tau^2)$, естественно ввести комплексную координату $z = \tau + i\sigma$ и сопряженную к ней координату $\bar{z} = \tau - i\sigma$. Используя мировую поверхность с метрикой Минковского, мы ранее уже обращались к переменным z и \bar{z} , обозначая их σ^\pm . В системе координат z, \bar{z} компонентами вектора являются

$$t_\pm = t_0 \pm it_1. \quad (3.1.14)$$

Далее, компоненты градиента $\partial/\partial\sigma^\alpha$ имеют теперь следующий вид:

$$\partial_\pm = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial\tau} \mp i \frac{\partial}{\partial\sigma} \right). \quad (3.1.15)$$

Компонентами метрического тензора являются $h_{++} = h_{--} = 0$ и $h_{+-} = h_{-+} = \frac{1}{2} e^\varphi$. Элемент инвариантной длины дается выражением

$$ds^2 = e^\varphi dz d\bar{z}, \quad (3.1.16)$$

а поднятие и опускание индексов осуществляется в соответствии с правилом

$$t_+ = \frac{1}{2} e^{\varphi} t^-, \quad (3.1.17)$$

$$t_- = \frac{1}{2} e^{\varphi} t^+. \quad (3.1.18)$$

Замена координат $z \rightarrow z' = f(z)$, где f — голоморфная функция от z , сохраняет конформно плоский вид метрики. Она просто приводит к переходу

$$\rho \rightarrow \rho' = \left| \frac{dz'}{dz} \right|^{-2} \rho, \quad (3.1.19)$$

где $\rho = e^{\varphi}$. В общем случае тензор с n_u верхними и n_l нижними голоморфными индексами и \bar{n}_u верхними и \bar{n}_l нижними антиголоморфными индексами преобразуется в соответствии с правилом

$$t \rightarrow t' = \left(\frac{dz'}{dz} \right)^{n_u - n_l} \left(\frac{d\bar{z}'}{d\bar{z}} \right)^{\bar{n}_u - \bar{n}_l} t. \quad (3.1.20)$$

Величины $n_l - n_u$ ($\bar{n}_l - \bar{n}_u$) называются голоморфной (антиголоморфной) конформной размерностью тензора t . Прилагательные «голоморфная» и «антиголоморфная» обычно могут опускаться, что не приводит к какой-либо путанице.

Определим ковариантные производные тензоров, используя обычным образом связность Кристоффеля

$$\Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma} = \frac{1}{2} h^{\gamma\delta} (\partial_{\alpha} h_{\beta\delta} + \partial_{\beta} h_{\alpha\delta} - \partial_{\delta} h_{\alpha\beta}). \quad (3.1.21)$$

Тензор римановой кривизны традиционно определяется как

$$R_{\alpha\beta\rho}^{\gamma} = \partial_{\rho} \Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma} + \Gamma_{\alpha\beta}^{\epsilon} \Gamma_{\rho\epsilon}^{\gamma} - (\beta \leftrightarrow \rho). \quad (3.1.22)$$

Отличными от нуля компонентами связности Кристоффеля для конформно плоской метрики являются только

$$\Gamma_{++}^{+} = \partial_+ \varphi, \quad (3.1.23)$$

$$\Gamma_{--}^{-} = \partial_- \varphi. \quad (3.1.24)$$

Поэтому, например, для тензора с n верхними или нижними индексами «+» имеем

$$\nabla_- t_{++\dots+} = \partial_- t_{++\dots+}, \quad (3.1.25)$$

$$\nabla_+ t_{++\dots+} = (\partial_+ - n \partial_+ \varphi) t_{++\dots+}, \quad (3.1.26)$$

$$\nabla_- t^{++\dots+} = \partial_- t^{++\dots+}, \quad (3.1.27)$$

$$\nabla_+ t^{++\dots+} = (\partial_+ + n \partial_+ \varphi) t^{++\dots+}. \quad (3.1.28)$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} [\nabla_-, \nabla_+] t_{++\dots+} &= [\partial_-, \partial_+ - n \partial_+ \log \rho] t_{++\dots+} = \\ &= -n (\partial_+ \partial_- \log \rho) t_{++\dots+} = \\ &= n \rho R^{(2)} t_{++\dots+}. \end{aligned} \quad (3.1.29)$$

Из этих равенств мы выводим формулу двумерной скалярной кривизны для конформно плоской метрики:

$$R^{(2)} = -\frac{1}{\rho} \partial_+ \partial_- \varphi. \quad (3.1.30)$$

Рассмотрим теперь действие Фаддеева — Попова для духов и антидухов c и b , которые были введены в предыдущем разделе. Запишем это действие в виде, который имеет смысл для любой метрики мировой поверхности, не обязательно взятой в конформной калибровке. Духовые поля c^+ и c^- могут интерпретироваться как компоненты векторного поля c^{α} . Антидуховые поля b_{++} и b_{--} могут интерпретироваться как компоненты симметричного бесследового тензора $b_{\alpha\beta}$. (И наоборот, симметричный тензор общего вида имеет компоненты b_{++} , b_{--} и b_{+-} , но b_{+-} обращается в нуль для бесследового симметричного тензора.) Действие духов может быть теперь записано в виде

$$S_g = -\frac{i}{2\pi} \int d^2\sigma \sqrt{h} h^{\alpha\beta} c^{\gamma} \nabla_{\alpha} b_{\beta\gamma}, \quad (3.1.31)$$

где духовое поле c^{α} является контравариантным вектором, а антидуховое поле $b_{\alpha\beta}$ является ковариантным симметрическим бесследовым тензором. Духовые поля b и c являются антикоммутирующими (т. е. грассмановыми) величинами.

Как уже указывалось в разд. 1.3.3, тензор энергии-импульса мировой поверхности определяется как

$$T_{\alpha\beta} = -\frac{2\pi}{\sqrt{h}} \frac{\delta S}{\delta h^{\alpha\beta}}. \quad (3.1.32)$$

Используя эту формулу для того, чтобы найти вклад духов, нужно быть внимательным и учесть связность Кристоффеля в (3.1.31). Необходимо также не забыть про бесследовость тензора $b_{\beta\gamma}$. Прделав тщательно все выкладки, мы получим вклад духов в тензор энергии-импульса

$$T_{\alpha\beta}^{(c)} = -i \left[\frac{1}{2} c^{\gamma} \nabla_{(\alpha} b_{\beta)\gamma} + (\nabla_{\alpha} c^{\gamma}) b_{\beta\gamma} - \text{след} \right]. \quad (3.1.33)$$

Скобки означают симметризацию находящихся в них нижних индексов. Будучи бесследовым и симметричным, тензор $T_{\alpha\beta}$ в комплексном базисе, описанном выше, имеет отличными от

нуля только компоненты T_{++} и T_{--} . То же самое относится и к $b_{\alpha\beta}$. Например,

$$T_{++}^{(c)} = -i \left[\frac{1}{2} c^+ \partial_+ b_{++} + (\partial_+ c^+) b_{++} \right]. \quad (3.1.34)$$

Заметим также, что в конформной калибровке действие S_g упрощается:

$$S_{FP} = \frac{i}{\pi} \int (c^+ \partial_- b_{++} + c^- \partial_+ b_{--}) d^2\sigma. \quad (3.1.35)$$

Эта формула действительно совпадает с формулой для действия Фаддеева—Попова, определенного в предыдущем разделе. (Проверяя это, читатель должен воспользоваться правилами (3.1.17) и (3.1.18) для поднятия и опускания индексов.)

3.1.3. Квантование духов

Из формулы (3.1.35) для действия духов S_{FP} следует, что b и c являются сопряженными степенями свободы с простыми каноническими антикоммутиационными соотношениями

$$\{b_{++}(\sigma, \tau), c^+(\sigma', \tau)\} = 2\pi\delta(\sigma - \sigma'), \quad (3.1.36)$$

$$\{b_{--}(\sigma, \tau), c^-(\sigma', \tau)\} = 2\pi\delta(\sigma - \sigma'). \quad (3.1.37)$$

В конформной калибровке их уравнения движения имеют вид

$$\partial_- c^+ = \partial_- b_{++} = 0, \quad (3.1.38)$$

$$\partial_+ c^- = \partial_+ b_{--} = 0, \quad (3.1.39)$$

где b_{++} является полем, сопряженным к c^+ , а b_{--} — к c^- . Из граничных условий для открытой струны следует, что на концах струны $c^+ = c^-$, поэтому

$$c^+ = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{-in(\tau+\sigma)}, \quad (3.1.40)$$

$$c^- = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{-in(\tau-\sigma)}. \quad (3.1.41)$$

Аналогично, из этих условий следует, что на концах $b_{++} = b_{--}$, поэтому

$$b_{++} = \sum_{-\infty}^{\infty} b_n e^{-in(\tau+\sigma)}, \quad (3.1.42)$$

$$b_{--} = \sum_{-\infty}^{\infty} b_n e^{-in(\tau-\sigma)}. \quad (3.1.43)$$

(Символ b_n для духовых мод не следует путать с символом для антикоммутирующих мод бозонного сектора суперструн, которые вводятся в следующей главе.) Антикоммутиационные соотношения, записанные через моды, выглядят так:

$$\{c_m, b_n\} = \delta_{m+n}, \quad (3.1.44)$$

$$\{c_m, c_n\} = \{b_m, b_n\} = 0. \quad (3.1.45)$$

Для замкнутых струн граничным условием является периодичность по σ , так что c^+ и c^- имеют независимые разложения по модам (как это было в случае координат X , движущихся вправо и влево):

$$c^+ = \sqrt{2} \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{-2in(\tau+\sigma)}, \quad (3.1.46)$$

$$c^- = \sqrt{2} \sum_{-\infty}^{\infty} \tilde{c}_n e^{-2in(\tau-\sigma)}. \quad (3.1.47)$$

Аналогично, координаты b_{++} и b_{--} включают моды b_n и \tilde{b}_n . В эти формулы b и c входят симметрично, несмотря на присутствие полей c^- и b_{--} , которые выглядят как антисимметричные тензорные структуры. Они входят симметрично, так как на плоской мировой поверхности в лагранжиане духов поля b и c появляются симметрично. На искривленной мировой поверхности это не так, что видно из нашей формулы (3.1.31) для действия духов на такой поверхности. Подобным же образом b и c не входят симметрично в тензор энергии-импульса мировой поверхности, так как он выводится варьированием по метрике мировой поверхности; даже на плоской мировой поверхности поля b и c входят в тензор энергии-импульса по-разному, так как на искривленной мировой поверхности они распространялись бы по-разному. Во все формулы, отражающие более глубокие аспекты теории, поля b и c входят совершенно различно. Действительно, это, например, видно из формул (3.1.33) и (3.1.34) для тензора энергии-импульса мировой поверхности:

$$T_{++}^{(c)} = -i \left[\frac{1}{2} c^+ \partial_+ b_{++} + \partial_+ c^+ b_{++} \right], \quad (3.1.48)$$

$$T_{--}^{(c)} = -i \left[\frac{1}{2} c^- \partial_- b_{--} + \partial_- c^- b_{--} \right].$$

Подставляя вместо T_{++} и T_{--} их разложения по модам и выделяя моды Фурье $L_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\sigma e^{im\sigma} T_{++}$ (для открытой струны), мы получаем генераторы Вирасоро

$$L_m^{(c)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} [m(J-1) - n] b_{m+n} c_{-n}, \quad (3.1.49)$$

где $J=2$ является конформной размерностью антидуха (тогда как дух c имеет конформную размерность $J=-1$). Мы оставили в формуле свободный параметр J , а не сделали подстановку $J=2$, так как в дальнейшем нам будет интересно проанализировать систему, в которой b и c заменены на антикоммутирующие поля спина J и $1-J$. Как обычно, при $m=0$ в формуле (3.1.49) нужно произвести нормальное упорядочение. Конечно, для замкнутых струн имеется еще второй набор духовых генераторов Вирасоро. Операторы $L_m^{(c)}$ удовлетворяют коммутационным соотношениям обычной алгебры Вирасоро

$$[L_m^{(c)}, L_n^{(c)}] = (m-n)L_{m+n}^{(c)} + A^c(m)\delta_{m+n} \quad (3.1.50)$$

с аномальным членом

$$A^c(m) = \frac{1}{12}[1-3k^2]m^3 + \frac{1}{6}m, \quad (3.1.51)$$

где $k=2J-1$, что для $J=2$ дает

$$A^c(m) = \frac{1}{6}(m-13m^3). \quad (3.1.52)$$

Как и в гл. 2, наиболее легкий и безошибочный способ определить аномалию — это вычислить некоторые специальные матричные элементы:

$$\begin{aligned} A^c(1) &= \langle 0 | L_1^{(c)}, L_{-1}^{(c)} | 0 \rangle = \langle 0 | L_1^{(c)} L_{-1}^{(c)} | 0 \rangle = \\ &= \langle 0 | (b_1 c_0 + 2b_0 c_1) (-b_{-1} c_0 - 2b_0 c_{-1}) | 0 \rangle = \\ &= -2 \langle 0 | (c_0 b_0 + b_0 c_0) | 0 \rangle = -2. \end{aligned} \quad (3.1.53)$$

Имея разложение по модам (3.1.49) операторов алгебры Вирасоро, можно непосредственно вычислить коммутационные соотношения операторов $L_m^{(c)}$ с операторами b и c и определить, насколько духи и антидухи являются различными. Например, для открытых струн выражения, взятые при $\sigma=0$,

$$c(\tau) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{-in\tau} \quad (3.1.54)$$

и

$$b(\tau) = \sum_{-\infty}^{\infty} b_n e^{-in\tau}, \quad (3.1.55)$$

имеют конформную размерность $J=-1$ и $J=+2$ соответственно, так как

$$[L_m^{(c)}, b_n] = (m-n)b_{m+n}, \quad (3.1.56)$$

$$[L_m^{(c)}, c_n] = -(2m+n)c_{m+n}. \quad (3.1.57)$$

Конформные размерности операторов c и b согласуются с теми значениями размерностей, которые мы им приписали бы на основе определенной ранее классификации различных типов голоморфных тензоров. В действительности это является общим правилом.

Определим полные генераторы Вирасоро, соответствующие $S_0 + S_{gh}$, формулой

$$L_m = L_m^{(a)} + L_m^{(c)} - a\delta_m. \quad (3.1.58)$$

Заметим, что мы сделали сдвиг в том определении L_0 , которое использовалось ранее, так что нулевая связь имеет теперь вид $L_0=0$. Аномалия с учетом вклада от духов и полей материи дается выражением

$$A(m) = \frac{D}{12}(m^3 - m) + \frac{1}{6}(m - 13m^3) + 2am. \quad (3.1.59)$$

Оно обращается в нуль тогда и только тогда, когда $D=26$, а $a=1$, что является еще одним способом получить эти магические значения. Только при этих значениях теория действительно конформно инвариантна.

3.2. Квантование BRST

Включение духов привело нас к генераторам Вирасоро, удовлетворяющим коммутационным соотношениям $[L_m, L_n] = (m-n)L_{m+n}$ наивной алгебры без аномалий. Отсутствие аномалий означает, например, что уравнения связей можно использовать более непосредственным образом; целесообразен поиск состояний $|\chi\rangle$, удовлетворяющих уравнению $L_n|\chi\rangle=0$ для всех n . Однако включение духов создает и новые проблемы. Каким же образом должны определяться физические состояния теперь, когда мы работаем в значительно более широком пространстве Фока, содержащем как духовые и антидуховые возбуждения, так и возбуждения координат X^μ ? Ответ на этот вопрос дает процедура BRST-квантования.

Впервые BRST-квантование было введено при рассмотрении проблемы квантования теории Янга—Миллса как некоторая полезная процедура для доказательства перенормируемости неабелевых калибровочных теорий в четырехмерии. Было найдено, что после фиксации янг-миллсовской калибровочной инвариантности имеется глобальная фермионная симметрия и эта ненарушенная симметрия является полезным инструментом при анализе структуры возможных контрчленов. Мы увидим, что по довольно сходным причинам BRST-квантование оказывается полезным и в теории струн, помогая понять ситуацию с действием, в котором фиксирована калибровка.

Для наших целей в настоящем разделе эта мотивировка изучения BRST-квантования является достаточной, но полезно отметить, что в действительности BRST-квантование в теории струн имеет намного более важное значение. Фактически в случае теории струн само выражение «BRST-квантование» должно восприниматься с некоторыми изменениями. Теория Янга — Миллса, как и почти любая физическая теория, является теорией, в которой формулировка основных принципов заканчивается после того, как получено линейное уравнение Шрёдингера — после этого остается только его изучение. Однако в струнной теории, как это подробно обсуждалось в гл. 1, все обстоит по-другому. В этой теории после квантования свободной струны основная цель — изучить взаимодействия струн, или в каком-то смысле ввести нелинейности в линейное уравнение Шрёдингера. В то время как другие калибровочные теории изучаются как нечто вполне замкнутое, квантовая теория свободной струны представляет собой способ изобретения еще находящейся в процессе разработки значительно более богатой и претендующей на большую теорию. Но нам нет необходимости касаться здесь таких высоких материй. Перед нами стоит сложная техническая проблема идентификации физических состояний в «большом» пространстве Фока, содержащем возбуждения как координат X^μ , так и духов и антидухов; мы увидим, что BRST-квантование приводит к элегантному решению этой проблемы.

3.2.1. Построение BRST-заряда

Рассмотрим некоторую физическую систему с операторами симметрии K_i , которые образуют замкнутую алгебру Ли

$$[K_i, K_j] = f_{ij}^k K_k, \quad (3.2.1)$$

где f_{ij}^k являются структурными константами алгебры G . BRST-квантование предполагает введение «антидухов» b_i , преобразующихся по присоединенному представлению алгебры G , и «духов» c^i , преобразующихся по представлению, дуальному к присоединенному¹⁾. Они удовлетворяют антикоммутационным

¹⁾ В хорошо знакомом нам случае компактных алгебр Ли присоединенное и дуальное к нему представления совпадают. В общем же случае это не так. Сказать, что духи c^i преобразуются по представлению, дуальному к присоединенному, — это замысловатый способ сказать, что они несут контрвариантный индекс алгебры Ли, тогда как b_j несут ковариантный. Алгебра Вирасоро является типичным примером, в котором нет инвариантного способа поднятия и опускания индексов алгебры Ли, так что c^i и b_j под действием алгебры Вирасоро преобразуются по-разному; мы уже видели, что они имеют соответственно конформные спины -1 и 2 . Вообще говоря, J дуально к $1 - J$.

соотношениям

$$\{c^i, b_j\} = \delta_j^i. \quad (3.2.2)$$

Духовое число U определяется формулой

$$U = \sum_i c^i b_i. \quad (3.2.3)$$

(В случае бесконечномерных алгебр Ли, чтобы придать смысл оператору U , необходимо вычесть константу, возникающую из нормального упорядочения. Мы временно не будем этого делать, чтобы быть в согласии с математической литературой. Заметим, что собственными состояниями оператора U являются целые, пробегающие значения от 0 до n , где n — размерность алгебры Ли G .) Затем вводится оператор

$$Q = c^i K_i - \frac{1}{2} f_{ij}^k c^i c^j b_k. \quad (3.2.4)$$

Этот оператор известен физикам как BRST-оператор, а для математиков он является оператором, с помощью которого вычисляется когомология алгебры Ли G со значениями в представлении, которое определяется операторами K_i . Основным свойством оператора Q является то, что

$$Q^2 = 0. \quad (3.2.5)$$

Для доказательства этого равенства нужно воспользоваться коммутационными соотношениями (3.2.1) и тождеством

$$f_{ij}^m f_{mk}^l + f_{jk}^m f_{mi}^l + f_{ki}^m f_{mj}^l = 0, \quad (3.2.6)$$

которое следует из (3.2.1), если воспользоваться тождеством Якоби.

Пусть C^k — гильбертово пространство состояний с духовым числом $U = k$. Говорят, что состояние χ в C^k является BRST-инвариантным, если

$$Q\chi = 0. \quad (3.2.7)$$

Имеется тривиальный способ нахождения BRST-инвариантных состояний; в силу (3.2.5) любое состояние вида $\chi = Q\lambda$ является инвариантным. Состояние λ должно обязательно иметь духовое число, равное $k - 1$, так как из вида оператора Q следует, что он меняет духовое число любого состояния, на которое он действует, на $+1$. Интересными решениями уравнения (3.2.7) являются те решения, которые не могут быть записаны в виде $\chi = Q\lambda$. Два решения χ и χ' уравнения (3.2.7) мы будем считать эквивалентными, если $\chi - \chi'$ является тривиальным решением (3.2.7) в том смысле, что

$$\chi - \chi' = Q\lambda \quad (3.2.8)$$

для некоторого λ . Классы эквивалентности решений уравнения (3.2.7) с духовым числом n , где два решения считаются эквивалентными в соответствии с приведенным только что определением, образуют то, что в математической литературе называется бы n -й кохомологической группой алгебры Ли G со значениями в представлении R , определяемом матрицами K_i . Ее общепринято обозначать $H^n(G; R)$. Классы эквивалентности называются классами кохомологий.

Особый интерес представляют BRST-инвариантные состояния с нулевым духовым числом. Из вида оператора духового числа U следует, что состояние χ с нулевым духовым числом должно уничтожаться всеми операторами b_k , так что, действуя на такое состояние, второе слагаемое в Q обращается в нуль; действительно, для такого состояния

$$Q\chi = \sum_i c^i K_i \chi, \quad (3.2.9)$$

Состояние, которое уничтожается оператором b_i , не может уничтожаться каким бы то ни было оператором c^i , так что условие $Q\chi = 0$ эквивалентно условию

$$K_i \chi = 0, \quad i = 1, \dots, n. \quad (3.2.10)$$

Таким образом, состояние χ с нулевым духовым числом BRST-инвариантно тогда и только тогда, когда оно G -инвариантно. С другой стороны, состояние с нулевым духовым числом невозможно записать в виде $\chi = Q\lambda$, так как нет состояний с духовым числом -1 . Следовательно, состояния с нулевым духовым числом, удовлетворяющие (3.2.10), не что иное, как классы кохомологий нулевого духового числа. Итак, группа кохомологий $H^0(G; R)$ совпадает с пространством G -инвариантных состояний с нулевым духовым числом. Конечно, состояние с нулевым духовым числом является состоянием, которое аннулируется операторами уничтожения духов b_i и, следовательно, никаких духов не содержит.

Это более или менее то, что нам нужно. Нахождение BRST-инвариантных состояний с нулевым духовым числом является способом выделения G -инвариантных состояний, не содержащих духов. Такой способ решения проблемы можно было бы применить и для физических систем с конечным числом степеней свободы, хотя в этом случае он оказался бы, мягко говоря, слишком громоздким. В струнной же теории этот подход действительно очень полезен.

Многое из того, о чем говорилось выше, можно аналогичным образом осуществить и в случае бесконечномерной алгебры Ли,

такой как алгебра Вирасоро. Отличий будет немного. Уравнение $Q^2 = 0$ может быть подвержено аномалии, поэтому оно требует тщательной проверки. Кроме того, оператор духового числа U содержит постоянную, возникшую в результате нормального упорядочения. Из-за этого, хотя и разумно ожидать, что физические состояния струны являются классами BRST-кохомологий χ (по модулю калибровочного преобразования $\chi \rightarrow \chi + Q\lambda$) с некоторым определенным духовым числом, было бы наивным предполагать, что это духовое число равно нулю; духовое число физических состояний является постоянной нормального упорядочения, которая зависит от выбранной физической системы.

Выберем теперь в качестве G алгебру Вирасоро и попытаемся реализовать программу BRST. Генераторам Вирасоро L_m (где m — произвольное целое число) мы должны поставить в соответствие духи c_m и антидухи b_n , это в точности те фурье-моды, с которыми мы имели дело ранее в процессе квантования духов. BRST-оператором является

$$Q = \sum_{-\infty}^{\infty} L_{-m}^{(a)} c_m - \frac{1}{2} \sum_{-\infty}^{\infty} (m-n) : c_{-m} c_{-n} b_{m+n} : - a c_0, \quad (3.2.11)$$

где мы воспользовались явным видом структурных констант алгебры Вирасоро. Сравнивая эту формулу с выражениями для операторов L_m , выведенных ранее для полей материи и духов, получим, что Q можно записать в виде

$$Q = \sum_{-\infty}^{\infty} : \left(L_{-m}^{(a)} + \frac{1}{2} L_{-m}^{(c)} - a \delta_m \right) c_m :. \quad (3.2.12)$$

Аналогично, оператор духового числа равен

$$U = \sum_{-\infty}^{\infty} : c_{-m} b_m : , \quad (3.2.13)$$

где теперь необходимо произвести нормальное упорядочение. Конечно, для замкнутых струн мы добавили бы к этим формулам еще и вклад от второго набора, т. е. от движущихся влево духов и осцилляторов¹⁾.

¹⁾ Множитель $1/2$ перед оператором $L^{(c)}$ в (3.1.12) может вызвать удивление, но он является следствием вычислений, приводящих к формуле (3.2.11). Множитель $1/2$ нужен не только для выполнения равенства $Q^2 = 0$, но и для многих других формул в теории, таких, как $L_m = \{Q, b_m\}$, где $L_m = L_m^{(a)} + L_m^{(c)} - a \delta_m$.

Важным свойством физической системы, которое не следует из общих рассуждений, является то, что BRST-оператор Q и оператор числа духов U могут быть получены в виде интегралов от сохраняющихся зарядовых плотностей. BRST-ток определяется как

$$J_+^B = 2c^+ \left(T_{++}^{(a)} + \frac{1}{2} T_{++}^{(c)} \right), \quad (3.2.14)$$

а J_-^B получается заменой $- \leftrightarrow +$. $T_{++}^{(c)}$ дается формулой (3.1.48), а $T_{++}^{(a)} = (\partial_+ X)^2$, что было получено в разд. 2.1.3. Ток духового числа определяется формулой

$$J_+ = c^+ b_{++}, \quad (3.2.15)$$

где вновь J_- определяется заменой $- \leftrightarrow +$. Легко увидеть (из уравнений движения для b и c и закона сохранения тензора энергии-импульса на мировой поверхности), что эти токи сохраняются,

$$\partial_- J_+^B = \partial_- J_+ = 0, \quad (3.2.16)$$

и что соответствующие сохраняющиеся заряды действительно являются BRST-зарядом

$$Q = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi d\sigma (J_+^B + J_-^B) \quad (3.2.17)$$

и оператором духового числа

$$U = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi d\sigma (J_+ + J_-). \quad (3.2.18)$$

Точнее, эти формулы сводятся к полученным ранее только в случае открытых струн. В случае же замкнутых струн при написании формул (3.2.17) и (3.2.18) нужно учитывать моды, движущиеся и вправо, и влево.

Осуществим теперь нормальное упорядочение в определении $L_0^{(a)}$ и во втором слагаемом в Q . Возникающие при этом неоднозначности могут быть включены в член, линейный по c_0 , с неопределенным коэффициентом a . Из предыдущего рассмотрения следует, что на классическом уровне $Q^2 = 0$, но сейчас нам хотелось бы знать, выполняется ли это равенство на квантовом уровне. Чтобы исследовать этот вопрос, заметим, что из (3.2.11) и (3.2.12) следует равенство

$$Q^2 = \frac{1}{2} \{Q, Q\} = \frac{1}{2} \sum_{-\infty}^{\infty} ([L_m, L_n] - (m-n) L_{m+n}) c_{-m} c_{-n}, \quad (3.2.19)$$

где L_m дается формулой (3.1.58). Поэтому $Q^2 = 0$ для $D = 26$ и $a = 1$ как следствие обращения в нуль аномалии $A(m)$ в (3.1.59).

Можно продемонстрировать и обратное, а именно то, что из равенства $Q^2 = 0$ следует отсутствие аномалий алгебры Вирасоро. Для этого сначала заметим, что полные генераторы алгебры Вирасоро (3.1.58) даются формулой

$$L_m = \{Q, b_m\}, \quad (3.2.20)$$

которую читателю следует проверить. Кроме того,

$$[L_m, Q] = [\{Q, b_m\}, Q] = 0, \quad (3.2.21)$$

что является следствием равенства $Q^2 = 0$. Таким же образом показывается, что алгебра Вирасоро полных генераторов замыкается без всякого аномального члена:

$$\begin{aligned} [L_m, L_n] &= [L_m, \{Q, b_n\}] = \{Q, [L_m, b_n]\} = \\ &= (m-n) \{Q, b_{m+n}\} = (m-n) L_{m+n}. \end{aligned} \quad (3.2.22)$$

Определим BRST-преобразование произвольной физической величины Y выражением

$$\delta Y = [\lambda Q, Y], \quad (3.2.23)$$

где λ — постоянный грассманов параметр. Можно показать, что имеют место формулы

$$\delta X^\mu = \lambda c^+ \partial_+ X^\mu + \lambda c^- \partial_- X^\mu, \quad (3.2.24)$$

$$\delta c^+ = \lambda c^+ \partial_+ c^+, \quad (3.2.25)$$

$$\delta b_{++} = 2i\lambda T_{++}, \quad (3.2.26)$$

$$\delta T_{++} = 0 \quad (3.2.27)$$

и аналогичные, где сделана замена $+ \leftrightarrow -$. Оператор $T_{++} = T_{++}^{(a)} + T_{++}^{(c)}$ является полным тензором энергии-импульса. Легко видеть, что квадрат этого преобразования равен нулю и что это соответствует инвариантности действия с фиксированной калибровкой.

Исследуем теперь вопрос о нормальном упорядочении в операторе духового числа

$$U = \frac{1}{2} (c_0 b_0 - b_0 c_0) + \sum_{n=1}^{\infty} (c_{-n} b_n - b_{-n} c_n). \quad (3.2.28)$$

Мы выделили духовые и антидуховые нулевые моды c_0 и b_0 , требующие специального рассмотрения, так как нет очевидного и естественного способа их упорядочить.

Оба оператора, c_0 и b_0 , в действительности коммутируют с гамильтонианом, поэтому основное состояние вырождено. Это является следствием того факта, что основное состояние должно быть элементом пространства представления этих операторов. В самом деле, c_0 и b_0 удовлетворяют антикоммутиационным соотношениям $c_0^2 = b_0^2 = 0$ и $\{c_0, b_0\} = 1$. Для построения неприводимого представления этих соотношений необходимы два состояния, которые можно назвать $|\uparrow\rangle$ и $|\downarrow\rangle$; их можно подобрать таким образом, что они будут аннулироваться операторами c_0 и b_0 соответственно. Тогда должны выполняться равенства

$$c_0|\downarrow\rangle = |\uparrow\rangle, \quad b_0|\uparrow\rangle = |\downarrow\rangle. \quad (3.2.29)$$

Чему равны «духовые числа» U_\downarrow и U_\uparrow состояний $|\uparrow\rangle$ и $|\downarrow\rangle$? Из (3.2.29) очевидно, что $U_\uparrow = U_\downarrow + 1$, но это соотношение не фиксирует значения U_\uparrow и U_\downarrow в отдельности, которые на самом деле зависят от постоянной нормального упорядочения в определении оператора U . Наиболее симметричным выбором является $U_\downarrow = -1/2$; $U_\uparrow = +1/2$. Он как раз соответствует тому правилу нормального упорядочения, которое используется в формуле (3.2.28). В каком-то смысле это правило довольно специфично, так как из него следует, что все собственные состояния оператора духового числа являются полупелыми. Тем не менее этот выбор представляется наиболее естественным; например, именно такой выбор делает калибровочно инвариантную струнную полевую теорию наиболее простой, хотя в настоящей книге эта тема не будет затрагиваться.

Теперь мы надеемся, что физические состояния могут быть охарактеризованы как классы BRST-когомологий с определенным духовым числом. Поскольку мы считаем, что физические состояния не обязательно содержат духовые возбуждения, должно быть возможным (после некоторого преобразования $\psi \rightarrow \psi + Q\lambda$) представить физическое состояние ψ в таком виде, когда волновая функция духов пропорциональна одному из двух основных состояний $|\uparrow\rangle$ или $|\downarrow\rangle$. Следовательно, духовое число физического состояния может быть равно $\pm 1/2$. Выбор одной из этих двух возможностей не является просто вопросом договоренности, так как духи и антидухи входят в теорию несимметричным образом. Например, они имеют конформные размерности -1 и 2 . Правильным оказывается выбор, когда физические состояния имеют духовое число $-1/2$. Действительно, пусть χ — состояние, которое аннулируется операторами уничтожения духов и антидухов:

$$c_n|\chi\rangle = b_n|\chi\rangle = 0, \quad n > 0. \quad (3.2.30)$$

Мы можем думать, что такое состояние «не содержит ни духов, ни антидухов». Предположим к тому же, что состояние χ имеет духовое число $-1/2$, поэтому аннулируется оператором b_0 . Для состояния такого вида условие BRST-инвариантности сводится к

$$0 = Q|\chi\rangle = \left(c_0(L_0^{(a)} - 1) + \sum_{n>0} c_{-n}L_n^{(a)} \right) |\chi\rangle, \quad (3.2.31)$$

так что единственное условие $Q|\chi\rangle = 0$ воспроизводит все условия, налагаемые на физическое состояние в более старом формализме ковариантного квантования. Если же мы выберем состояние $|\chi\rangle$ с духовым числом $+1/2$ (так что оно аннулируется оператором c_0 , а не b_0), то первое слагаемое в правой части (3.2.31) пропадет и мы не получим всех условий, налагаемых на физическое состояние¹⁾. Если мы найдем состояние χ , удовлетворяющее и (3.2.30), и (3.2.31), то может ли оно быть записано в виде $\chi = Q\lambda$ для некоторого λ ? Легко видеть, что это потребовало бы выполнения равенства

$$\chi = \sum_{n>0} L_{-n}^{(a)} |\lambda_n\rangle \quad (3.2.32)$$

для некоторых состояний $|\lambda_n\rangle$. Отсюда в свою очередь следовало бы, что состояние χ имеет нулевую норму, так как в силу (3.2.31)

$$\langle \chi | \chi \rangle = \left\langle \sum_{n>0} L_{-n} \lambda_n | \chi \right\rangle = \sum_{n>0} \langle \lambda_n | L_n | \chi \rangle = 0. \quad (3.2.33)$$

Фактически такие состояния являются в точности физическими шпурионными состояниями, которые обсуждались в гл. 2. Таким образом, мы показали, что состояния, удовлетворяющие традиционным условиям физичности в теории бозонной струны, приводят к классам когомологий BRST с духовым числом $-1/2$ и что физическое состояние как класс когомологий является тривиальным (т. е. может быть записано в виде $Q\lambda$ для некоторого λ) тогда и только тогда, когда оно является, говоря прежним языком, состоянием с нулевой нормой. Итак, мы приходим к заключению, что *физические состояния в теории бозонной струны являются классами когомологий BRST с духовым числом $-1/2$* . На самом деле, чтобы завершить доказательство, нужно установить и обратное этому утверждение. Мы хотим показать, что BRST-инвариантное состояние χ с духовым числом $-1/2$ может быть записано в виде $\chi = \chi' + Q\lambda$, где χ' удовлетворяет условию (3.2.30) и поэтому соответствует физическому

¹⁾ В нефизическом случае конечного пространственно-временного объема (и только в этом случае) недостающие условия воспроизводятся, если рассмотреть инвариантность относительно преобразования $\chi \rightarrow \chi + Q|\lambda\rangle$.

состоянию старого подхода, погруженному в расширенное фоково пространство описанным выше способом. Хотя довольно очевидно, что это действительно так, по-настоящему полного и компактного доказательства к моменту написания этой книги, похоже, не появилось, и мы не будем пытаться его здесь доказывать.

3.2.2. Ковариантное вычисление аномалии Вирасоро

В данном разделе мы опишем альтернативный способ вычисления аномалии Вирасоро, который приводит к многим полезным следствиям. Напомним общий вид коммутационных соотношений алгебры Вирасоро:

$$[L_m, L_n] = (m - n) L_{m+n} + (am^3 + bm) \delta_{m+n}. \quad (3.2.34)$$

Из двух аномальных коэффициентов a и b в действительности только a имеет инвариантное значение; b можно исключить сдвигом константы нормального упорядочения, которая входит в L_0 . Мы хотим теперь показать, как вычислить a , используя методы, которые можно назвать методами на мировой поверхности, в отличие от разложений по модам, которые использовались в гл. 2.

Рассмотрим конформно инвариантную свободную теорию бозонного поля на мировой поверхности, в качестве которой мы возьмем всю комплексную плоскость:

$$S_B = -\frac{1}{2\pi} \int d^2\sigma \partial_a \phi \partial^a \phi. \quad (3.2.35)$$

До сих пор бозонными полями, представляющими для нас интерес, всегда были пространственно-временные координаты $X^\mu(\sigma)$, но сейчас, имея в виду дальнейшее развитие теории, мы обозначаем бозонное поле в (3.2.35) нейтральным обозначением ϕ . По этим же причинам нами выводятся несколько формул, которые непосредственно понадобятся в последующих разделах. Пропагатором поля ϕ является

$$\begin{aligned} \langle \phi(\sigma) \phi(\sigma') \rangle &= \pi \int \frac{d^2k}{4\pi^2} \frac{e^{ik \cdot (\sigma - \sigma')}}{k^2} = \\ &= -\frac{1}{2} \ln(|\sigma - \sigma'| \mu), \end{aligned} \quad (3.2.36)$$

где μ — инфракрасное обрезание, которое будет опускаться во всех соответствующих формулах. Это выражение возникало в разд. 1.4.4. Если ввести переменные $\sigma^\pm = \tau \pm \sigma$, то поле ϕ будет удовлетворять свободному волновому уравнению

$$0 = \partial_+ \partial_- \phi. \quad (3.2.37)$$

Это означает, что ϕ можно разложить на две части:

$$\phi(\sigma^+, \sigma^-) = \frac{1}{2} \phi^+(\sigma^+) + \frac{1}{2} \phi^-(\sigma^-). \quad (3.2.38)$$

В разложении (3.2.38) есть некоторая неоднозначность: к ϕ^+ мы можем добавить произвольную константу и вычесть ее из ϕ^- . Мы обсуждаем сейчас формулировку квантовой теории поля с действием (3.2.35) на плоскости, и в пределе бесконечного объема неоднозначность, связанная с нулевыми модами в (3.2.38), не приводит к каким-либо последствиям. Однако вскоре она окажется важной, когда мы будем обсуждать бозонизацию в конечном объеме. Явные формулы для ϕ^+ и ϕ^- могут быть легко получены. В самом деле,

$$\begin{aligned} \phi^+(\sigma, \tau) &= \phi(\sigma, \tau) - \int_{\sigma}^{\infty} d\sigma' \frac{\partial \phi}{\partial \tau}, \\ \phi^-(\sigma, \tau) &= \phi(\sigma, \tau) + \int_{\sigma}^{\infty} d\sigma' \frac{\partial \phi}{\partial \tau}. \end{aligned} \quad (3.2.39)$$

Уравнения (3.2.39) очевидным образом удовлетворяют соотношению (3.2.38), а уравнение $(\partial_\tau \mp \partial_\sigma) \phi^\pm = 0$ легко проверить, воспользовавшись уравнением движения $(\partial_\tau^2 - \partial_\sigma^2) \phi = 0$.

Так как ϕ^+ является функцией только σ^+ , а ϕ^- — функцией только σ^- , двухточечная функция $\langle \phi^+ \phi^- \rangle$ должна обращаться в нуль, тогда как $\langle \phi^+ \phi^+ \rangle$ должна быть функцией только σ^+ , а $\langle \phi^- \phi^- \rangle$ — функцией только σ^- . Записав (3.2.36) в виде

$$\begin{aligned} \langle (\phi^+(\sigma^+) + \phi^-(\sigma^-)) \cdot (\phi^+(\sigma'^+) + \phi^-(\sigma'^-)) \rangle &= \\ &= -\ln((\sigma^+ - \sigma'^+) (\sigma^- - \sigma'^-) \mu^2), \end{aligned} \quad (3.2.40)$$

мы получаем достаточно информации для того, чтобы выделить отдельные куски:

$$\begin{aligned} \langle \phi^+(\sigma^+) \phi^+(\sigma'^+) \rangle &= -\ln[(\sigma^+ - \sigma'^+) \mu], \\ \langle \phi^-(\sigma^-) \phi^-(\sigma'^-) \rangle &= -\ln[(\sigma^- - \sigma'^-) \mu]. \end{aligned} \quad (3.2.41)$$

Это, конечно, можно проверить с помощью (3.2.39).

Обратимся теперь к объекту, который нас особенно интересует, — тензору энергии-импульса мировой поверхности, для которого имеем

$$T_{++}(\sigma^+) = \partial_+ \phi \partial_+ \phi = \frac{1}{4} \partial_+ \phi^+ \partial_+ \phi^+; \quad (3.2.42)$$

формула для T_{--} аналогична. Тензор энергии-импульса удовлетворяет уравнению

$$0 = \partial_- T_{++}. \quad (3.2.43)$$

Чтобы вычислить аномалию Вирасоро, воспользуемся приемом, хорошо известным в алгебре токов. Рассмотрим упорядоченную по времени (точнее, упорядоченную по τ) двухточечную функцию $\langle T(T_{++}(\sigma^+)T_{++}(\sigma'^+)) \rangle$. Она не сохраняется, а удовлетворяет соотношению (подобному тождеству Уорда)

$$\begin{aligned} \partial_- \langle T(T_{++}(\sigma, \tau)T_{++}(\sigma', \tau')) \rangle = \\ = \frac{1}{2} \delta(\tau - \tau') \langle [T_{++}(\sigma, \tau), T_{++}(\sigma', \tau')] \rangle, \end{aligned} \quad (3.2.44)$$

которое возникает (как это обычно и бывает в алгебре токов) из-за того, что, внося производную ∂_- под знак T -произведения, мы получаем коммутатор значений при равных временах.

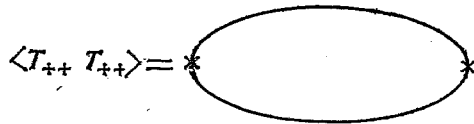


Рис. 3.1. В теории свободного поля двухточечная функция тензора энергии-импульса дается простой однопетлевой диаграммой.

Взяв среднее от коммутатора $[T_{++}(\sigma), T_{++}(\sigma')]$ в правой части уравнения (3.2.44) выделяет его c -числовую часть, являющуюся аномалией Вирасоро. Поэтому аномалию Вирасоро можно найти, вычислив выражение в левой части тождества (3.2.44). В теории свободного поля двухточечной функции с тензором энергии-импульса соответствует простая однопетлевая диаграмма, изображенная на рис. 3.1. Чтобы вычислить выражение, соответствующее этой диаграмме, в координатном представлении, нет необходимости интегрировать, оно равно просто произведению различных пропагаторов. Используя (3.2.41) и (3.2.42), мы получим

$$\langle T(T_{++}(\sigma^+)T_{++}(\sigma'^+)) \rangle = \frac{1}{8} (\sigma^+ - \sigma'^+)^{-4}. \quad (3.2.45)$$

В левую часть уравнения (3.2.44) входит производная

$$\partial_- [(\sigma^+ - \sigma'^+)^{-4}]. \quad (3.2.46)$$

На первый взгляд может показаться, что она обращается в нуль, но на самом деле мы должны учесть, что

$$\partial_- \frac{1}{\sigma^+} = i\pi \delta^2(\sigma); \quad (3.2.47)$$

следовательно,

$$\begin{aligned} \partial_- (\sigma^+ - \sigma'^+)^{-4} &= -\frac{1}{6} \frac{\partial^3}{\partial \sigma^3} \partial_- (\sigma^+ - \sigma'^+)^{-1} \\ &= -\frac{i\pi}{6} \frac{\partial^3}{\partial \sigma^3} \delta^2(\sigma - \sigma'). \end{aligned} \quad (3.2.48)$$

Таким образом, (3.2.44) и (3.2.45) соответствуют аномальной части коммутатора значений оператора тензора энергии-импульса при равных временах:

$$[T_{++}(\sigma, \tau), T_{++}(\sigma', \tau)]_A = -i \frac{\pi}{24} \delta'''(\sigma - \sigma'). \quad (3.2.49)$$

Индекс A в $[\ , \]_A$ означает, что мы вычислили только аномальную, c -числовую часть коммутатора.

Это вычисление было проведено для свободной теории поля на плоскости, но аномалия (3.2.49) определяется поведением свободного поля на малых расстояниях, так что (3.2.49) остается одинаково справедливым и для теории, сформулированной на мировой поверхности, скажем, замкнутой струны. В этом случае генераторы Вирасоро определяются как моменты преобразования Фурье тензора T_{++} :

$$L_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi d\sigma e^{2in\sigma} T_{++}(\sigma), \quad (3.2.50)$$

а формула (3.2.49) дает численное значение очень важного коэффициента a в (3.2.34), а именно

$$a = 1/12, \quad (3.2.51)$$

что согласуется с результатом вычислений, проведенных ранее.

Одним из достоинств этого вычисления является то, что оно показывает в каком-то смысле неизбежность аномалии Вирасоро. Зависимость от $(\sigma^+ - \sigma'^+)^{-4}$ в (3.2.45) определяется только масштабной инвариантностью и имеет место в любой конформно инвариантной теории в пространстве $1+1$ измерений. Только коэффициент при $(\sigma^+ - \sigma'^+)^{-4}$ может быть другим в другой конформно инвариантной теории. Этот коэффициент должен быть положительным в любой теории, в которой рассматриваются только физические степени свободы, так как двухточечная функция эрмитова оператора T_{++} должна быть положительной. Только включение духов может привести к исчезновению аномалии Вирасоро.

Чтобы увидеть, как это происходит, рассмотрим конформно инвариантную теорию поля, описывающую духи. Достаточно

сосредоточить внимание только на модах, движущихся вправо:

$$S = \frac{i}{\pi} \int d^2\sigma c^+ \partial_- b_{++}. \quad (3.2.52)$$

Двухточечная функция равна

$$\begin{aligned} \langle c^+(\sigma) b_{++}(\sigma') \rangle &= \frac{1}{2\pi} \int d^2k e^{ik \cdot (\sigma - \sigma')} / k_- = \\ &= \frac{i}{\pi} \partial_+ \int d^2k e^{ik \cdot (\sigma^+ - \sigma'^+)} / k^2 = - \frac{i}{\sigma^+ - \sigma'^+}. \end{aligned} \quad (3.2.53)$$

Тензор энергии-импульса нельзя однозначно определить из вида действия на плоской мировой поверхности (3.2.52), так как в действительности тензор

$$T_{++}^k = - \frac{i}{4} [(\partial_+ c^+ \cdot b_{++} - c^+ \partial_+ b_{++}) + k \partial_+ (c^+ b_{++})] \quad (3.2.54)$$

сохраняется для любого k . (Операторы энергии и импульса, построенные из T_{++} , не зависят от k , так как член в (3.2.54), зависящий от k , является полной производной.) Наше исследование духового действия на искривленной мировой поверхности показало, что правильным значением для k является $k = 3$, но мы оставим пока k свободным параметром, так как в дальнейшем нам встретятся системы с другими значениями k . Моды Фурье тензора (3.2.54) совпадают с (3.1.49), если положить

$$J = \frac{k+1}{2}. \quad (3.2.55)$$

Симметричное рассмотрение b и c свелось бы к взятию $k = 0$. В этом случае поля b и c при масштабах и конформных преобразованиях преобразуются как обычные фермионные поля конформной размерности $1/2$. Введение ненулевого k приводит к сдвигу коммутатора любого поля Z с тензором T_{++} на величину, линейную по k . Мы уже вычислили, что при $k = 3$ оператор b_{++} имеет конформную размерность 2, а оператор c — конформную размерность -1 . В более общем случае из-за явной линейности по k конформная размерность оператора b равна $(1+k)/2$, а оператора c равна $(1-k)/2$. Этот результат является частным случаем еще более общего утверждения. Напомним, что током духового числа является оператор $J_+ = c^+ b_{++}$. Зависящая от k часть тензора (3.2.54) совпадает в точности с производной от тока духового числа, и благодаря этому зависящая от k часть конформной размерности любого физического поля Z зависит только от духового числа поля Z . Итак, пусть $d(Z)$ — конформная размерность поля Z при $k = 0$, и пусть $g(Z)$ является его духовым числом. Тогда конформная

размерность $d_k(Z)$ поля Z при произвольном k равна

$$d_k(Z) = d(Z) - kg(Z)/2. \quad (3.2.56)$$

Заинтересованному читателю предлагается проверить это утверждение, воспользовавшись определением конформной размерности и тем фактом, что зависящий от k член в (3.2.54) является производной от духового тока. Для данного обсуждения уравнение (3.2.56) несущественно, но оно будет играть определенную роль при построении ковариантного фермионного вершинного оператора в гл. 7.

Заметим, что в (3.2.54) b_{++} и c^+ являются различными антикоммутирующими переменными. Если положить $b_{++} = c^+$, с тем чтобы получить систему только с одной антикоммутирующей переменной, то независимая от k часть в (3.2.54) по-прежнему будет иметь смысл, а содержащая k часть обратится в нуль в силу статистики Ферми.

Вернувшись к формуле (3.2.54), можно непосредственно воспользоваться видом пропагатора для вычисления двухточечной функции тензора энергии-импульса. Это предполагает вычисление выражения, соответствующего однопетлевой диаграмме типа той, что изображена на рис. 3.1. В результате получаем

$$\langle T(T_{++}^k(\sigma) T_{++}^k(\sigma')) \rangle = \frac{1}{8} (1 - 3k^2) (\sigma^+ - \sigma'^+)^{-4}. \quad (3.2.57)$$

Положив $k = 3$ и сравнив эту формулу с (3.2.45), мы видим, что введение духов приводит к исчезновению аномалии Вирасоро для 26 бозонов. Вот почему критическая размерность модели Венециано равна 26. Зависимость от k в (3.2.57) совпадает с таковой в формуле (3.1.51), если мы положим, что $k = 2J - 1$. Причина этого совпадения станет более очевидной в следующем разделе.

Суперконформные духи, с которыми мы встретимся в следующей главе, имеют $k = 2$, так что на первый взгляд из формул (3.2.57) и (3.2.45) следует, что они дают такой же вклад в аномалию, что и -11 бозонов. На самом же деле эти духи являются коммутирующими полями в отличие от антикоммутирующих полей b и c ; изменение статистики приведет к знаку минус, и, как будет показано, суперконформные духи имеют ту же аномалию, что и $+11$ бозонов.

3.2.3. Аномалии Вирасоро, конформные и гравитационные аномалии

В конце разд. 3.1.1, анализируя интегрирование по $D\varphi$ в (3.1.13), мы заявили, что при $D = 26$ это интегрирование можно опустить, так как в этом случае имеет место инвариант-

ность относительно вейлевского изменения масштаба. В данном разделе мы докажем это утверждение и продемонстрируем, что вейлевское изменение масштаба метрики справедливо тогда, когда аномалия Вирасоро исчезает, что, как мы знаем, происходит в точности при $D = 26$. Используемые при этом ключевые идеи учитывают свойства конформно инвариантных теорий в двух измерениях, и мы в иллюстративных целях рассмотрим теорию свободных фермионов. В ходе исследования мы столкнемся с новым видом аномалии — гравитационной аномалией, которая будет интересовать нас в дальнейшем в главах 10 и 13.

Рассмотрим вещественный движущийся вправо майорановский фермион ψ_+ с действием

$$S = \frac{i}{\pi} \int d^2\sigma \psi_+ \partial_- \psi_+. \quad (3.2.58)$$

Тогда двухточечная функция тензора энергии-импульса дается формулой (3.2.57), где нужно положить $k = 0$ и разделить на два, так как мы имеем только одну моду ψ_+ вместо пары b, c^1):

$$\langle T_{++}(\sigma^+) T_{++}(\sigma'^+) \rangle = \frac{1}{16} (\sigma^+ - \sigma'^+)^{-4}. \quad (3.2.59)$$

В этом разделе удобнее работать в импульсном пространстве. На первый взгляд может показаться, что осуществить фурье-преобразование правой части уравнения (3.2.59) сложно. Однако с помощью (3.2.48) это делается довольно просто, если заметить, что в импульсном пространстве $\partial_- = ip_-$, $\partial_+ = ip_+$ и что фурье-образом $\delta^2(\sigma - \sigma')$ является 1. Следовательно, в импульсном пространстве вместо (3.2.59) можно написать

$$\langle T_{++}(p) T_{++}(-p) \rangle = -\frac{\pi}{96} \frac{p_+^3}{p_-}. \quad (3.2.60)$$

Раньше мы уже рассматривали уравнение (3.2.59) на плоской мировой поверхности и интерпретировали его как свидетельство наличия c -числовой аномалии в коммутаторе оператора T_{++} с самим собой. Теперь же выясним значение (3.2.59) и (3.2.60) для теории фермионов, распространяющихся на искривленной мировой поверхности. Достаточно учитывать отличие от метрики плоской мировой поверхности только в первом порядке, так что мы положим

$$h_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + f_{\alpha\beta}, \quad (3.2.61)$$

¹⁾ В этом разделе используется евклидова сигнатура на мировой поверхности, так что мы опускаем символ T -упорядочения.

где $f_{\alpha\beta}$ — возмущение в метрике, которое мы будем рассматривать в наименьшем порядке. Это сделать нетрудно. Взаимодействие материи с гравитационным полем дается формулой

$$\Delta I = \frac{1}{2\pi} \int d^2\sigma f^{\alpha\beta} T_{\alpha\beta}. \quad (3.2.62)$$

Для простой системы (3.2.58) единственной отличной от нуля компонентой тензора $T_{\alpha\beta}$ оказывается T_{++} , так что взаимодействие имеет вид

$$f^{++} T_{++} / 2\pi. \quad (3.2.63)$$

Мы хотим вычислить среднее от фермионного тензора энергии — импульса в гравитационном поле. С учетом (3.2.63) это можно сделать, исходя из (3.2.60):

$$\langle T_{++}(p) \rangle = -\frac{1}{96} \frac{p_+^3}{p_-} f^{++}(p). \quad (3.2.64)$$

Теперь нужно проверить фундаментальный физический принцип — закон сохранения тензора энергии-импульса. Мы предполагаем, что в фоновом гравитационном поле выполняется равенство

$$\langle D^{\alpha} T_{\alpha\beta} \rangle = 0. \quad (3.2.65)$$

В рассматриваемом случае, так как единственной отличной от нуля компонентой тензора T является T_{++} и так как в наименьшем порядке по гравитационному полю ковариантную производную можно заменить на обычную, уравнение (3.2.65) сводится к уравнению $\langle \partial_- T_{++} \rangle = 0$. В импульсном пространстве оно запишется как $p_- \langle T_{++} \rangle = 0$, что очевидным образом не выполняется. Вместо этого мы имеем аномальную формулу

$$p_- \langle T_{++} \rangle = -\frac{1}{96} p_+^3 f^{++}(p) = -\frac{1}{24} p_+^3 f_{--}. \quad (3.2.66)$$

Вновь мы видим почти неизбежность появления аномалии в двумерии. Формальное утверждение о том, что левая часть равенства должна обращаться в нуль, не может быть правильным, если только $\langle T_{++} \rangle = 0$, что означало бы отсутствие всякого взаимодействия с гравитацией. Несохранение энергии-импульса (3.2.66) при взаимодействии киральных фермионов с гравитацией называется гравитационной аномалией. Это означает, что в двумерии теория киральных фермионов, взаимодействующих с гравитацией, является бессмысленной, если только не вводить дополнительные степени свободы для устранения аномалии.

Заметим, что правая часть формулы (3.2.66) является полиномом по импульсу и поэтому выражает $\langle \partial_- T_{++} \rangle$ как локаль-

ный функционал по f_{--} . Это является общим свойством аномалий; аномалии можно считать эффектами ультрафиолетового поведения (хотя есть и другие способы их рассмотрения), так что они должны быть локальными выражениями. Хотя выражения в формуле (3.2.66) являются локальными, выражения в формуле (3.2.64), из которой она получается, таковыми не являются (из-за сингулярности $1/p_-$). Так что никаким способом не удастся добавлением к (3.2.64) локального члена устранить аномалию в (3.2.66). Только доказав это, можно быть уверенным, что в теории имеется аномалия. Там, где добавлением (3.2.64) локального члена можно добиться сохранения энергии-импульса, представляется физически разумным это сделать.

Рассмотрим теперь теорию как с фермионами ψ_- , движущимися влево, так и с фермионами ψ_+ , движущимися вправо. Действием для ψ_- является

$$S' = \frac{i}{\pi} \int d^2\sigma \psi_- \partial_+ \psi_- . \quad (3.2.67)$$

Аналог уравнения (3.2.64) запишется теперь в виде

$$\begin{aligned} \langle T_{++} \rangle &= -\frac{1}{24} \frac{p_+^3}{p_-} f_{--}, \\ \langle T_{--} \rangle &= -\frac{1}{24} \frac{p_-^3}{p_+} f_{++}. \end{aligned} \quad (3.2.68)$$

На первый взгляд кажется, что ситуация не улучшилась, так как (3.2.66) принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} \langle p_- T_{++} \rangle &= -\frac{1}{24} p_+^3 f_{--}, \\ \langle p_+ T_{--} \rangle &= -\frac{1}{24} p_-^3 f_{++}. \end{aligned} \quad (3.2.69)$$

Однако между (3.2.69) и (3.2.66) имеется огромное различие. В случае (3.2.69) аномальное нарушение закона сохранения энергии-импульса можно устранить, добавляя локальные контрчлены к (3.2.68) и записывая уравнения

$$\begin{aligned} \langle T_{++} \rangle &= -\frac{1}{24} \frac{p_+}{p_-} (p_+^2 f_{--} - 2p_+ p_- f_{+-} + p_-^2 f_{++}), \\ \langle T_{+-} \rangle &= \frac{1}{24} (p_+^2 f_{--} - 2p_+ p_- f_{+-} + p_-^2 f_{++}), \\ \langle T_{--} \rangle &= -\frac{1}{24} \frac{p_-}{p_+} (p_+^2 f_{--} - 2p_+ p_- f_{+-} + p_-^2 f_{++}). \end{aligned} \quad (3.2.70)$$

Закон сохранения энергии-импульса теперь выполняется:

$$\langle p_- T_{++} \rangle + \langle p_+ T_{+-} \rangle = \langle p_+ T_{--} \rangle + \langle p_- T_{+-} \rangle = 0. \quad (3.2.71)$$

Таким образом, в двумерную теорию, описываемую суммой действий (3.2.58) и (3.2.67), в которой имеются фермионы, движущиеся вправо и влево, можно непротиворечивым образом ввести взаимодействие с гравитацией. Однако из вида уравнений (3.2.70) вытекают важнейшие следствия. Хотя формально действия (3.2.58) и (3.2.67) инвариантны относительно вейлевского масштабного преобразования метрики, что соответствует теории с $T_{+-} = 0$, на самом деле к тому моменту, когда нам удастся удовлетворить закон сохранения энергии-импульса (более фундаментальный физический принцип, чем бесследовость тензора энергии-импульса), обнаруживается, что след тензора энергии-импульса отличен от нуля, а его значение в низшем порядке по f определяется вторым уравнением в (3.2.70). Это уравнение в действительности является приближением формулы

$$T_{+-} = -\frac{1}{3} R^{(2)}, \quad (3.2.72)$$

где $R^{(2)}$ — скалярная кривизна мировой поверхности струны.

Таким образом, мы приходим к выводу, что теория безмассовых фермионов, взаимодействующих с гравитацией, имеет смысл (закон сохранения энергии-импульса выполняется), но на квантовом уровне эта теория не обладает вейлевской инвариантностью, которая, по-видимому, присутствует в классическом лагранжиане.

В действительности этот вывод применим к гораздо более общей ситуации, чем к конкретному рассмотренному нами случаю. Рассмотрим двумерную теорию общего вида, обладающую масштабной инвариантностью на плоской мировой поверхности; тогда $T_{+-} = 0$ и выполняются равенства

$$\begin{aligned} \langle T_{++}(p) T_{++}(-p) \rangle &= -\frac{c}{96} \frac{p_+^3}{p_-}, \\ \langle T_{--}(p) T_{--}(-p) \rangle &= -\frac{d}{96} \frac{p_-^3}{p_+} \end{aligned} \quad (3.2.73)$$

при некоторых константах c и d . Из нашего обсуждения в предыдущем разделе мы знаем, что c и d могут интерпретироваться как аномалии Вирасоро мод, движущихся вправо и влево соответственно. Связывая эту теорию с искривленной мировой поверхностью, мы получим, что закон сохранения энергии-импульса нарушается, если $c \neq d$. Если $c = d$, то отсутствует вей-

левская инвариантность и имеется аномалия вида (3.2.72), если $c = d \neq 0$.

Рассматривая с этой точки зрения модель Венециано, мы получим, что (с учетом духов) в этой модели $c = d = (D - 26)$ в пространстве-времени любой размерности D и тензор энергии-импульса мировой поверхности сохраняется, даже если эта поверхность является искривленной. Однако след этого тензора равен нулю только при $D = 26$, когда $c = d = 0$; но это как раз тот случай, когда имеет место вейлевская инвариантность, используемая для устранения интеграла по $D\varphi$ в (3.1.13).

3.2.4. Бозонизация духовых координат

Духовыми уравнениями движения, выведенными из действия (3.2.52), являются

$$\partial_- c^+ = \partial_- b_{++} = 0. \quad (3.2.74)$$

Они имеют тот же вид, что и уравнение, которому удовлетворяет поле φ^+ ,

$$\partial_- \varphi^+ = 0. \quad (3.2.75)$$

Тогда возникает вопрос, можно ли выразить антикоммутирующие переменные, такие как c^+ и b_{++} , через движущийся вправо бозон φ^+ .

Фермионная свободная теория поля в значительной степени определяется двухточечной функцией

$$\langle c^+(\sigma^+) b_{++}(\sigma'^+) \rangle = \frac{1}{(\sigma^+ - \sigma'^+)}. \quad (3.2.76)$$

Можно ли найти такие операторы в бозонной теории, которые приводили бы к этой двухточечной функции? Пусть оператор

$$D_t(\sigma^+) = \mu^{t^2/2} : e^{it\varphi^+(\sigma^+)} :, \quad (3.2.77)$$

где μ — инфракрасное обрезание, присутствующее в (3.2.41). С помощью (3.2.41), рассуждая так же, как это было сделано во введении при вычислении среднего от произведения, мы получим для двухточечной функции операторов D_t

$$\langle D_t(\sigma^+) D_{-t}(\sigma'^+) \rangle = (\sigma^+ - \sigma'^+)^{-t^2}. \quad (3.2.78)$$

Инфракрасное обрезание μ в этой формуле отсутствует. Сравнение (3.2.78) с (3.2.76) позволяет нам попытаться идентифицировать

$$c^+(\sigma^+) \sim : e^{i\varphi^+(\sigma^+)} :, \quad b_{++}(\sigma^+) \sim : e^{-i\varphi^+(\sigma^+)} :. \quad (3.2.79)$$

Мы вскоре приведем дополнительные аргументы в пользу такой идентификации¹⁾. Если обозначить конформную размерность оператора D_t через d_t , то из формулы (3.2.78)

$$d_t + d_{-t} = t^2. \quad (3.2.80)$$

В гл. 7 нам понадобится обобщение уравнения (3.2.78), а именно

$$\langle D_{t_n}(\sigma_1^+) \dots D_{t_n}(\sigma_n^+) \rangle = \mu^{(\sum_{j=1}^n t_j)^2/2} \prod_{1 \leq i < j \leq n} (\sigma_i^+ - \sigma_j^+)^{t_i t_j}. \quad (3.2.81)$$

Функция в правой части (3.2.81) обращается в нуль при $\mu \rightarrow 0$, кроме случая $\sum t_j = 0$. Это отражает тот факт, что функция в левой части (3.2.81) инвариантна относительно замены $\varphi^+ \rightarrow \varphi^+ + \text{константа}$ только в случае $\sum t_j = 0$. Симметрия относительно замены $\varphi^+ \rightarrow \varphi^+ + \text{константа}$ является непрерывной симметрией свободной бозонной теории, а непрерывная симметрия в квантовой теории поля в пространстве размерности $1+1$ не может быть спонтанно нарушена. Эта симметрия и предсказывает обращение в нуль выражений в (3.2.81), за исключением только случая, когда $\sum t_j = 0$. Мы и удерживали в формулах инфракрасное обрезание μ до этого момента, с тем чтобы объяснить, почему все наблюдаемые, неинвариантные относительно добавления к φ^+ произвольной константы, обращаются в нуль. Такие наблюдаемые всегда оказываются независимыми от обрезания, тогда как все другие наблюдаемые обращаются в нуль при $\mu \rightarrow 0$. В дальнейшем мы ограничимся рассмотрением только наблюдаемых, инвариантных относительно сдвига в φ^+ на произвольную константу, и соответственно опустим μ во всех уравнениях. Предпринятая в (3.2.79) попытка идентификации показывает, что при сдвиге $\varphi^+ \rightarrow \varphi^+ + a$, $c \rightarrow ce^{ia}$, тогда как $b \rightarrow be^{-ia}$; это позволяет предположить, что симметрия относительно сдвига в φ^+ может интерпретироваться как симметрия, связанная с фермионным числом. В последующем обсуждении это предположение будет подтверждено.

Чтобы убедиться окончательно в правильности (3.2.79), мы покажем, что бозонные операторы, указанные в (3.2.79), удовлетворяют правильным фермионным антикоммутационным соотношениям. Типичным соотношением, которое нам хочется установить, является антикоммутатор, взятый при равных τ :

$$\{c^+(\sigma, \tau), c^+(\sigma', \tau)\} = 0. \quad (3.2.82)$$

¹⁾ Духи удовлетворяют уравнениям $\langle cc \rangle = \langle bb \rangle = 0$. Этому уравнению соответствует равенство $\lim_{\mu \rightarrow 0} \langle D_1 D_1 \rangle = \lim_{\mu \rightarrow 0} \langle D_{-1} D_{-1} \rangle = 0$.

С этой целью исследуем произведение

$$D_1(\sigma, \tau) D_1(\sigma', \tau) = e^{i\Phi(\sigma, \tau)} \exp\left(-i \int_0^\infty d\tilde{\sigma} \partial_\tau \Phi\right) e^{i\Phi(\sigma', \tau)} \exp\left(-i \int_{\sigma'}^\infty d\tilde{\sigma}' \partial_\tau \Phi\right), \quad (3.2.83)$$

где мы воспользовались явной формулой для Φ^+ , приведенной в (3.2.39). Осуществляя в (3.2.83) перестановки с тем, чтобы переместить оператор Φ влево, а оператор $\partial_\tau \Phi$ вправо с помощью хорошо известной формулы $e^A e^B = e^B e^A e^{[A, B]}$, справедливой, если коммутатор $[A, B]$ является c -числом, и используя канонические коммутационные соотношения для Φ и $\partial_\tau \Phi$, получим

$$D_1(\sigma, \tau) D_1(\sigma', \tau) = e^{i\pi\theta(\sigma' - \sigma)} e^{i\Phi(\sigma, \tau)} e^{i\Phi(\sigma', \tau)} \times \exp\left(-i \int_0^\infty d\tilde{\sigma} \partial_\tau \Phi\right) \exp\left(-i \int_{\sigma'}^\infty d\tilde{\sigma}' \partial_\tau \Phi\right). \quad (3.2.84)$$

Здесь $\theta(x)$ равна $+1$ для положительных x и 0 в остальных случаях. Антиккоммутатор $\{D_1(\sigma, \tau), D_1(\sigma', \tau)\}$ обращается в нуль, так как фазовый фактор в правой части (3.2.84) является нечетной функцией разности $\sigma - \sigma'$. Мы предлагаем заинтересованному читателю исследовать и другие антикоммутаторы, которые подразумеваются при идентификации (3.2.79).

Мы хотим найти теперь бозонную формулу для тока духового числа. Напомним, что током духового числа является $J_+ = c^+ b_{++}$, или, точнее,

$$J_+(\sigma^+) = \lim_{\sigma'^+ \rightarrow \sigma^+} \left[c^+(\sigma^+) b_{++}(\sigma'^+) + \frac{i}{\sigma^+ - \sigma'^+} \right]. \quad (3.2.85)$$

В терминах бозонных переменных этот ток принимает вид

$$J_+(\sigma^+) = \lim_{\sigma'^+ \rightarrow \sigma^+} \left[: e^{i\Phi^+(\sigma^+)} : : e^{-i\Phi^+(\sigma'^+)} : + \frac{i}{\sigma^+ - \sigma'^+} \right]. \quad (3.2.86)$$

Чтобы перейти к пределу $\sigma' \rightarrow \sigma$, разложим

$$e^{-i\Phi^+(\sigma'^+)} = e^{-i\Phi^+(\sigma^+)} (1 - i(\sigma'^+ - \sigma^+) \partial_+ \Phi^+). \quad (3.2.87)$$

Подстановка в (3.2.87) первого слагаемого в правой части (3.2.87) приводит к c -числу, которое нужно отбросить из-за нормального упорядочения. Кажется, что второе слагаемое в правой части (3.2.87) обращается в нуль при $\sigma' \rightarrow \sigma$, но это не так, оно в точности сокращается, поскольку произведение $: e^{i\Phi^+(\sigma^+)} :$

и $: e^{-i\Phi^+(\sigma'^+)} :$ на малых расстояниях имеет особенность, пропорциональную $(\sigma^+ - \sigma'^+)^{-1}$. На самом деле взятие предела (3.2.86) дает

$$J_+ = \partial_+ \Phi^+, \quad (3.2.88)$$

что и представляет собой бозонизированное выражение для тока духового числа. Используя канонические коммутационные соотношения, можно убедиться, что

$$[J_+(\sigma, \tau), \Phi^+(\sigma', \tau)] = -i\pi\delta(\sigma - \sigma') \quad (3.2.89)$$

и это подтверждает высказанное ранее утверждение о том, что симметрия относительно сдвига на константу в Φ^+ соответствует духовому числу.

Обратимся теперь к исследованию тензора энергии-импульса в терминах бозонных переменных. Теория духов обладает (только на плоской мировой поверхности) симметрией относительно «духового сопряжения» $b \leftrightarrow c$. Духовой ток $J_+ = c^+ b_{++}$ является нечетной величиной относительно духового сопряжения. Поэтому, учитывая формулу (3.2.88) (или приводящие к ней формулы (3.2.79)), мы должны интерпретировать духовое сопряжение как замену $\Phi \rightarrow -\Phi$. В предыдущем разделе было определено однопараметрическое семейство тензоров энергии-импульса (3.2.54), отличающихся друг от друга на производную от духового тока. Соответствующее однопараметрическое семейство тензоров энергии-импульса в терминах бозонных переменных имеет вид

$$T_{++}^k = \frac{1}{4} \partial_+ \Phi^+ \partial_+ \Phi^+ - \frac{1}{8} ik \partial_+^2 \Phi^+. \quad (3.2.90)$$

В частности, единственным выбором, инвариантным относительно духового сопряжения, является выбор $k = 0$. Воспользовавшись формулами предыдущего раздела, читатель может легко доказать, что аномалия Вирасоро тензора T_{++}^k пропорциональна $(1 - 3k^2)$, как и было в фермионных переменных.

При $k = 0$ операторы D_i и D_{-i} связаны друг с другом духовым сопряжением и должны иметь одну и ту же конформную размерность. Используя (3.2.80), можно таким образом найти, что конформная размерность оператора D_i при $k = 0$ равна $t^2/2$. Что же получается при $k \neq 0$? Духовое число оператора D_i равно t , если учесть идентификацию, сделанную нами для духового числа в терминах бозонных переменных, так что конформная размерность D_i при произвольном k определяется через ее значения при $k = 0$ с помощью формулы (3.2.56)

$$d_i(k) = t^2/2 - kt/2. \quad (3.2.91)$$

Эта формула играет важнейшую роль при построении фермионного вершинного оператора для суперструн.

Так же как и при фермионном описании, существование однопараметрического семейства тензора энергии-импульса логически должно соответствовать существованию однопараметрического семейства взаимодействий свободного поля φ на искривленной мировой поверхности ($R^{(2)}$ — ее скалярная кривизна). Соответствующими действиями этого семейства являются:

$$S_k = -\frac{1}{2\pi} \int d^2\sigma \sqrt{h} \left(\partial_\alpha \varphi \partial^\alpha \varphi - \frac{i}{2} k R^{(2)} \varphi \right). \quad (3.2.92)$$

На плоской мировой поверхности действие (3.2.92) не зависит от k . Однако, проварьировав по метрике мировой поверхности, с тем чтобы вывести выражение для тензора энергии-импульса и затем приравняв эту метрику к $\eta_{\alpha\beta}$, можно получить тензор энергии-импульса (3.2.90), зависящий от k . Мы предлагаем читателю проверить это.

Важной особенностью действия (3.2.92) является сохранение духового числа ((3.2.92) инвариантно относительно замены $\varphi \rightarrow \varphi + \text{const}$) только при $k = 0$. Нарушение сохранения духового числа на искривленной мировой поверхности можно непосредственно установить из формулы (3.2.92); в рамках фермионного описания это значительно менее очевидно и требует рассмотрения аномалий в однопетлевых диаграммах на искривленной мировой поверхности. С другой стороны, в рамках фермионного описания нарушение сохранения духового числа на искривленной мировой поверхности проявляется в том, что на компактной мировой поверхности поля b и c имеют различное число нормируемых нулевых мод; это будет обсуждаться для случая $k = 3$ в следующем разделе.

Мы уже рассматривали бозонизацию фермионов для действия (3.2.92), сформулированного для бесконечного объема в пространстве размерности $1+1$. Однако во многих приложениях важно исследовать бозонизацию фермионов, распространяющихся по окружности. Если рассмотреть свободную теорию с действием (3.2.92) в конечной области одномерного пространства $0 \leq \sigma \leq 2\pi$ с хорошо знакомыми нам периодическими граничными условиями¹⁾, то поле φ^+ имеет обычное разложение по нормальным модам, которое нами подробно обсуждалось:

$$\varphi^+(\sigma) = \varphi_0 + \sigma p_0 + i \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \varphi_n e^{-in\sigma}. \quad (3.2.93)$$

¹⁾ В настоящей книге теория замкнутой струны периодична с периодом 2π , а теория открытой струны после удвоения интервала становится эффективно периодичной с периодом 2π . Здесь мы следуем второму соглашению.

Здесь $[\rho_0, \varphi_0] = -i$, а $[\varphi_n, \varphi_m] = n\delta_{n+m}$. Заметим, что ρ_0 является оператором духового числа, который сдвигает поле φ на константу. Можно спросить, является ли бозонизация фермионов справедливой не только в бесконечном объеме, но и на окружности. Ответ на этот вопрос оказывается довольно непростым и приводит к многочисленным следствиям. Как и в случае бесконечного объема, попробуем определить операторы

$$c^+(\sigma) = : e^{i\varphi^+(\sigma)} :, \quad b_{++}(\sigma) = : e^{-i\varphi^+(\sigma)} :. \quad (3.2.94)$$

Нужно точно установить, что должно означать нормальное упорядочение. Правильным оказывается следующий рецепт:

$$c^+(\sigma) = \exp\left(-\sum_{n < 0} \frac{1}{n} e^{-in\sigma} \varphi_n\right) e^{i\varphi_0} e^{i\sigma(p_0 + 1/2)} \exp\left(-\sum_{n > 0} \frac{1}{n} e^{-in\sigma} \varphi_n\right), \quad (3.2.95)$$

$$b_{++}(\sigma) = \exp\left(\sum_{n < 0} \frac{1}{n} e^{-in\sigma} \varphi_n\right) e^{-i\varphi_0} e^{-i\sigma(p_0 + 1/2)} \exp\left(\sum_{n > 0} \frac{1}{n} e^{-in\sigma} \varphi_n\right). \quad (3.2.96)$$

Терпеливый читатель должен суметь, рассматривая для каждой отдельной моды тождество $e^A e^B = e^B e^A e^{[A, B]}$, доказать, что определенные этими формулами операторы c^+ и b_{++} , действительно удовлетворяют правильным антикоммутационным соотношениям. Тот факт, что в формулы (3.2.95) и (3.2.96) входит сумма $p_0 + 1/2$, а не просто p_0 , может показаться странным, но так действительно должно быть для правильного соответствия между статистиками Бозе и Ферми. Таким образом, из периодичности $c^+(\sigma + 2\pi) = c^+(\sigma)$, $b_{++}(\sigma + 2\pi) = b_{++}(\sigma)$ следует, что оператор духового числа p_0 в (3.2.95) и (3.2.96) должен иметь полуцелые собственные значения, что согласуется с полученным ранее утверждением о том, что духовые числа состояний открытой бозонной струны действительно должны быть полуцелыми.

Требование, чтобы оператор p_0 имел полуцелые собственные значения, имеет интересную «физическую» интерпретацию. Так как p_0 является величиной, канонически сопряженной к координате нулевой моды φ_0 (поэтому $p_0 = -i\partial_{\varphi_0}$), наличие у оператора p_0 только полуцелых собственных значений означает, что φ_0 является угловой переменной, для которой φ_0 и $\varphi_0 + 2\pi$ физически эквивалентны, а квантовый волновой функционал Ψ удовлетворяет условию $\Psi(\varphi_0 + 2\pi) = -\Psi(\varphi_0)$ (остальные переменные мы не выписываем). Действительно, из вида разложения по модам (3.2.93) следует, что, когда мы добавляем константу к φ_0 , все квантовое поле $\varphi(\sigma)$ сдвигается на эту константу, так что это поведение можно было бы выразить и не

прибегая к разложению по модам, а утверждая, что точный квантовый волновой функционал удовлетворяет условию $\Psi(\varphi(\sigma)) = -\Psi(\varphi(\sigma) + 2\pi)$.

Важнейшим моментом здесь является дискретность значений p_0 . Этот факт более фундаментален, чем то, что эти значения являются полуцелыми, а не целыми. При бозонизации фермионной теории в конечном объеме получающееся бозонное поле является угловой переменной, принимающей значения на окружности от 0 до 2π . На самом деле, когда осуществляется бозонизация не просто одной пары антикоммутирующих полей b_{++} и c^+ , а n таких пар, нужно ввести n бозе-полей φ^a , $a = 1, \dots, n$, и, как будет обсуждаться в гл. 6, в этом случае можно сформулировать несколько очень важных обобщений утверждения, приведенного выше.

Требует комментария и другой, хотя и менее фундаментальный факт — наличие знака минус в условии $\Psi(\varphi(\sigma) + 2\pi) = -\Psi(\varphi(\sigma))$. Знак минус возникает из требования полуцелости собственных значений оператора p_0 , необходимого для того, чтобы операторы $c^+(\sigma)$ и $b_{++}(\sigma)$ удовлетворяли правильным граничным условиям для духовых координат, а именно $c^+(\sigma + 2\pi) = c^+(\sigma)$, $b_{++}(\sigma + 2\pi) = b_{++}(\sigma)$. Если рассматривать фермионные поля с противоположными граничными условиями $c^+(\sigma + 2\pi) = -c^+(\sigma)$, $b_{++}(\sigma + 2\pi) = -b_{++}(\sigma)$, то в (3.2.96) и (3.2.95) потребуются, чтобы оператор p_0 имел целые собственные значения, так чтобы бозонизированный волновой функционал удовлетворял противоположному условию $\Psi(\varphi(\sigma) + 2\pi) = +\Psi(\varphi(\sigma))$.

Способность бозонизировать фермионы на окружности приводит к некоторым интересным следствиям. В терминах φ^+ гамильтониан $H = \int_0^{2\pi} d\sigma T_{++}$ свободной полевой теории имеет вид

$$H = p_0^2/2 + \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{-n}\varphi_n - 1/24, \quad (3.2.97)$$

куда мы включили постоянную нормального упорядочения, значение которой явилось одним из результатов нашего исследования процедуры квантования струны. Оператор духового числа равен

$$U = p_0. \quad (3.2.98)$$

Из элементарной квантовой статистической механики известно, как записать статистическую сумму такой свободной полевой

теории:

$$\text{tr } e^{-\beta H} = e^{\beta/24} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\beta(n+1/2)^2/2} \prod_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(1 - e^{-\beta m})}. \quad (3.2.99)$$

Полезно вычислить не просто $\text{tr } e^{-\beta H}$, а более общее выражение $\text{tr } e^{-\beta H} e^{i\theta U}$. Положив $q = e^{-\beta}$, для этого выражения мы получаем

$$\text{tr } q^H e^{i\theta U} = q^{-1/24} \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{(n+1/2)^2/2} e^{i\theta(n+1/2)} \prod_{m=1}^{\infty} \frac{1}{1 - q^m}. \quad (3.2.100)$$

Что же получится, если мы выразим H и U не через бозоны, а через фермионы? В этом случае

$$H = \sum_{n=1}^{\infty} n(b_{-n}c_n + c_{-n}b_n) + x \quad (3.2.101)$$

(конечно, нулевые моды b_0 и c_0 в H не входят), где x является неизвестной постоянной нормального упорядочения, а оператор U , как и в (3.2.28), имеет вид

$$U = \frac{1}{2}(c_0b_0 - b_0c_0) + \sum_{n=1}^{\infty} (c_{-n}b_n - b_{-n}c_n). \quad (3.2.102)$$

Воспользовавшись стандартными методами квантовой статистической механики и формулами (3.2.100) и (3.1.102), мы получим

$$\text{tr } q^H e^{i\theta U} = q^x 2 \cos(\theta/2) \prod_{n=1}^{\infty} (1 + q^n e^{i\theta}) (1 + q^n e^{-i\theta}). \quad (3.2.103)$$

Не является очевидным то, что при любых значениях x соотношения (3.2.100) и (3.2.103) совпадают, но теорема Якоби утверждает, что это действительно так, если $x = 1/12$. В самом деле, формула Якоби для тройного произведения

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{(n+1/2)^2/2} e^{i(n+1/2)\theta} = 2q^{1/8} \cos(\theta/2) \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n)(1 + q^n e^{i\theta})(1 + q^n e^{-i\theta}) \quad (3.2.104)$$

равносильна эквивалентности формул (3.2.100) и (3.2.103) при $x = 1/12$. В приложении 8.A мы найдем применение формуле (3.2.104), которая была доказана Якоби при изучении эллиптических функций.

Другой интересный результат проведенного исследования заключается в следующем. Мы установили, что если p_0 является полуцелым, то бозонный гамильтониан (3.2.97) эквивалентен

гамильтониану с двумя антикоммутирующими степенями свободы b и c , удовлетворяющими *периодическим* граничным условиям в $b(\sigma + 2\pi) = b(\sigma)$, $c(\sigma + 2\pi) = c(\sigma)$. Энергия основного состояния гамильтониана (3.2.97) с полуцелыми p_0 равна $(1/2)^3 - 1/24 = 1/12$. Итак, мы видим, что постоянная нормального упорядочения двух антикоммутирующих функций равна $1/12$, так что для одной антикоммутирующей степени свободы (майорановского фермиона) эта постоянная должна быть равна

$$e_+^F = +1/24. \quad (3.2.105)$$

С другой стороны, если мы в формуле (3.2.97) возьмем p_0 целым, то на основании проведенного выше анализа теория с гамильтонианом (3.2.97) будет эквивалентна теории с двумя антикоммутирующими полями b и c , удовлетворяющими *антипериодическим* граничным условиям $b(\sigma + 2\pi) = -b(\sigma)$, $c(\sigma + 2\pi) = -c(\sigma)$. В случае целого p_0 энергия основного состояния гамильтониана (3.2.97) равна $-1/24$, и мы приходим к выводу, что постоянная нормального упорядочения фермионов, удовлетворяющих антипериодическим граничным условиям, равна

$$e_-^F = -1/48 \quad (3.2.106)$$

для каждого (майорановского) поля. Что же касается бозонов, то из гл. 2 мы знаем, что постоянная нормального упорядочения бозонов с периодическими граничными условиями равна

$$e_+^B = -1/24. \quad (3.2.107)$$

Можно рассмотреть и более общие граничные условия, но в настоящей книге эти граничные условия нам чаще всего будут нужны. Полученные выше результаты могут показаться несколько эвристическими. Но в следующей главе мы их получим методами, которые, возможно, являются более строгими. Эти же результаты можно получить, рассматривая дзета-функции, как и было сделано для e_+^B в разд. 2.3.1.

3.3. Глобальные свойства мировой поверхности струны

До сих пор, обсуждая бозонную струну, мы пользовались тем фактом, что всегда с помощью репараметризационной инвариантности и вейлевского изменения масштаба можно привести метрику мировой поверхности к любой наперед заданной форме. Действительно, преобразования репараметризации зависят от двух, а преобразование вейлевского изменения масштаба — от одной произвольной функции; поэтому этих калибровочных преобразований достаточно, чтобы занулить три независимые компоненты метрики мировой поверхности. Такой простой

подсчет степеней свободы нас до сих пор вполне устраивал, но при более глубоком изучении теории важную роль играют глобальные свойства мировой поверхности. В данном разделе приводится элементарное описание некоторых из них.

Мы сосредоточим внимание главным образом на теории ориентированных замкнутых струн. В этом случае анализ выглядит наиболее элегантно. Мировой поверхностью n -петлевой диаграммы замкнутой струны, вроде той, что изображена на рис. 3.2, является сфера с n ручками. Древесные диаграммы

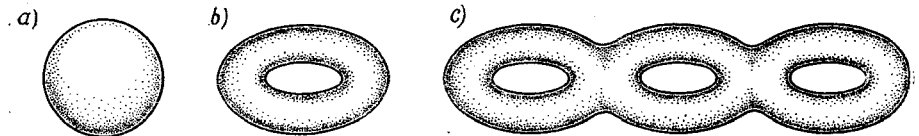


Рис. 3.2. Диаграммы мировой поверхности в теории замкнутых ориентированных струн: (а) древесная, (б) однопетлевая, (с) многопетлевая.

соответствуют мировой поверхности, не имеющей ручек и топологически эквивалентной обычной сфере, как на рис. 3.2, а, тогда как однопетлевые диаграммы соответствуют тору, изображенному на рис. 3.2, б, многопетлевые диаграммы приводят к поверхности с n ручками, изображенной на рис. 3.2, с. Сфера с n ручками известна как риманова поверхность рода n .

Для древесных диаграмм (в случае поверхностей рода 0) можно пользоваться теоремой Римана, утверждающей, что с помощью диффеоморфизма и вейлевского изменения масштаба можно метрику *глобально* привести к стандартной форме. Пусть, скажем, h_0 — метрика на сфере S , тогда *любая* другая метрика с точностью до диффеоморфизма имеет вид $h = e^{\mathcal{Q}} h_0$. Хотя этой теореме более века, на самом деле ее простое и полное доказательство отсутствует¹⁾.

Мы говорим, что две метрики на римановой поверхности конформно эквивалентны, если они связаны друг с другом репараметризацией и вейлевским изменением масштаба. Теорема Римана гласит, что любые две метрики на S^2 конформно эквивалентны.

Обратимся теперь к однопетлевому случаю, т. е. рассмотрим поверхность рода 1. Здесь жизнь намного интереснее. Поверх-

¹⁾ Демонстрируя отсутствие антидуховых нулевых мод, можно, как мы увидим, показать, что метрика, полученная произвольной *инфинитезимальной* деформацией стандартной метрики, связана с ней диффеоморфизмом и вейлевским изменением масштаба, однако намного труднее доказать, что это справедливо для тех деформаций метрики, которые не обязательно являются инфинитезимальными.

ность рода 1 является обычным тором. Утверждение о том, что любые две метрики глобально эквивалентны с точностью до диффеоморфизма плюс вейлевского изменения масштаба, на торе уже несправедливо. Два тора, схематически изображенные



Рис. 3.3. Два конформно-неэквивалентных тора.

на рис. 3.3, не могут быть связаны такими преобразованиями. Чтобы описать это различие аналитически (а не эвристически), заметим, что тор может быть построен следующим образом. Рассмотрим комплексную плоскость z и возьмем на ней два комплексных числа λ_1 и λ_2 , такие, что число

$$\tau = \lambda_2/\lambda_1 \quad (3.3.1)$$

не является вещественным¹⁾. Поменяв при необходимости λ_1 и λ_2 местами, можно считать, что $\text{Im } \tau > 0$, так что τ определяет точку в верхней полуплоскости. Затем определим тор, осуществляя идентификацию

$$z \approx z + n\lambda_1 + m\lambda_2 \quad (3.3.2)$$

для произвольных целых n и m , как показано на рис. 3.4. Этот тор наследует плоскую метрику z плоскости, и мы хотим знать,

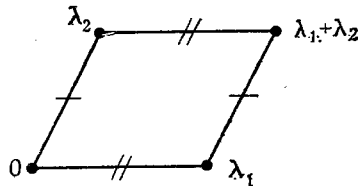


Рис. 3.4. Тор может быть построен идентификацией одинаково помеченных отрезков прямых на комплексной Z -плоскости.

эквивалентны ли относительно диффеоморфизмов плюс вейлевских изменений масштаба торы, определенные при различных значениях величин λ_1 и λ_2 .

Совершенно очевидно, что только отношение $\tau = \lambda_2/\lambda_1$ может быть инвариантным относительно диффеоморфизма плюс

¹⁾ Обозначение τ для указанного отношения является общепринятым, и мы сохраним его, надеясь, что читатель не будет путать параметр τ , определенный в (3.3.1), с координатой на мировой поверхности струны.

вейлевского изменения масштаба, что обычно называется конформной инвариантностью. Действительно, комплексная растяжка переменной

$$z \rightarrow z' = kz, \quad (3.3.3)$$

где k — комплексное отличное от нуля число, меняет метрику тора только на константу $|k|^2$, которую можно включить в конформное изменение масштаба. Преобразование (3.3.3) растягивает величины λ_1 и λ_2 , оставляя их отношение τ неизменным. Таким образом, только τ может быть конформно инвариантным.

То, что τ является конформным инвариантом, который не может меняться при диффеоморфизмах и вейлевских изменениях масштаба, не совсем верно. Пусть a , b , c и d — четыре целых числа, удовлетворяющие условию $ad - bc = 1$, или, другими словами, такие, что детерминант матрицы

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad (3.3.4)$$

равен единице. Такие матрицы с целочисленными элементами и с детерминантом, равным единице, образуют группу, называемую модулярной группой $SL(2, Z)$. В утверждении о том, что эти матрицы образуют группу, несколько нетривиальным моментом является утверждение, что матрица (3.3.4) имеет обратную с целочисленными матричными элементами, а именно матрицу

$$\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}. \quad (3.3.5)$$

Предположим, что мы преобразуем λ_1 и λ_2 с помощью элемента группы $SL(2, Z)$:

$$\begin{pmatrix} \lambda'_2 \\ \lambda'_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_2 \\ \lambda_1 \end{pmatrix}. \quad (3.3.6)$$

Тогда тор, определенный соотношением

$$z \approx z + n'\lambda'_1 + m'\lambda'_2, \quad (3.3.7)$$

является в точности таким же, что и тор, определенный соотношением (3.3.2); действительно, (3.3.2) может быть превращено в (3.3.7) преобразованием n и m с помощью матрицы (3.3.5).

Тот факт, что соотношения (3.3.2) и (3.3.7) определяют эквивалентные торы, означает инвариантность конформной структуры тора относительно действия на τ определенного преобразо-

вания из модулярной группы; сравнивая (3.3.2) и (3.3.7), мы можем определить это преобразование следующим образом:

$$\tau \rightarrow (\alpha\tau + b)/(c\tau + d). \quad (3.3.8)$$

Комплексное число τ , дополненное условием эквивалентности (3.3.8), является единственной характеристикой метрики на торе, которая не может быть включена в диффеоморфизм плюс вейлевское изменение масштаба, хотя исчерпывающее доказательство этого утверждения лежит вне рамок настоящей книги.

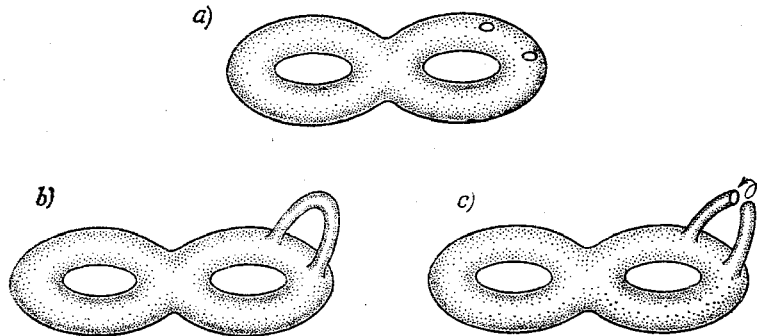


Рис. 3.5. Добавление ручки к поверхности рода g , с тем чтобы сделать ее поверхностью рода $g+1$, можно осуществить в несколько стадий. Сначала делаются два отверстия, как на рис. *a*, затем они связываются трубкой заданной длины и с углом перекручивания, как на рис. *b*). Цель рис. *c*) — продемонстрировать, откуда возникает угол перекручивания. Мы вклеили две полутрубки в два отверстия; чтобы завершить построение, мы должны склеить вместе концы этих трубок, но при этом возникает неоднозначный относительный угол.

Теперь в более сжатом виде обсудим случай поверхности рода $g > 1$. Рассмотрим ситуацию, когда к поверхности Σ рода g добавляется ручка, с тем чтобы сделать ее поверхностью рода $g+1$. Грубо говоря, нужно сначала сделать на поверхности Σ два отверстия, как это показано на рис. 3.5, *b*. Затем эти два отверстия нужно соединить трубкой, изображенной на рис. 3.5, *c*, которая может иметь произвольную длину и может быть перекручена на произвольный угол, как это показано на рис. 3.5, *c*. Для того чтобы определить положение одного из этих отверстий, нужны два вещественных параметра или один комплексный. В общей сложности, переходя от поверхности рода g к поверхности рода $g+1$, мы вводим шесть новых вещественных параметров (четыре для определения положения двух отверстий, а также длина ручки и угол ее перекручивания) или три комплексных. Если мы обозначим число конформно инвариантных комплексных параметров, необходимых для описания

поверхности Σ рода g , через B_g , то из эвристических соображений следует, что

$$B_{g+1} = B_g + 3. \quad (3.3.9)$$

На самом деле соотношение (3.3.9) справедливо только для $g \geq 2$, так как поверхности рода нуль и единица обладают непрерывной симметрией и при $g=0$ или $g=1$ выбор положений отверстий на рис. 3.5 оказывается инвариантно не важным. Истинное значение величины B_g при $g \geq 2$ равно $(3g-3)$. Эвристически мотивировка этого значения заключается в следующем. Поверхность рода нуль обладает достаточной симметрией для того, чтобы положение обоих отверстий, изображенных на рис. 3.5, было несущественным, так что при переходе от поверхности рода нуль к поверхности рода один добавляется только один комплексный параметр (или два вещественных параметра: длина и кручение). Следовательно, $B_1 = B_0 + 1 = 1$. Поверхность рода один (в той формулировке, которая была дана выше) в качестве непрерывной симметрии имеет только симметрию относительно трансляций плоскости z . Этого достаточно для перемещения одного отверстия, скажем, в начало координат, но положение второго отверстия (а также параметры, связанные с длиной и кручением) инвариантны, так что $B_2 = B_1 + 2 = 3$. В остальных случаях поверхность рода g не обладает непрерывными симметриями, так что соотношение (3.3.9) выполняется и приводит к формуле $B_g = 3g - 3$.

Мы рассмотрим еще один аспект глобальной геометрии мировой поверхности струны. При выполнении функционального интегрирования с фиксированой калибровкой, включающего духи, возникает вопрос: могут ли c^+ и b_{++} иметь нормируемые нулевые моды на мировой поверхности струны? Соответствующие уравнения суть

$$\nabla_- c^+ = 0, \quad \nabla_+ c^- = 0 \quad (3.3.10)$$

и

$$\nabla_- b_{++} = 0, \quad \nabla_+ b_{--} = 0. \quad (3.3.11)$$

При обсуждении этих уравнений важно вспомнить закон преобразования метрики при инфинитезимальной репараметризации $\sigma^\alpha \rightarrow \sigma^\alpha + \xi^\alpha$; как $\nu \Delta$ (3.1.6), это

$$\delta h_{++} = 2\nabla_+ \xi_+, \quad \delta h_{--} = 2\nabla_- \xi_-. \quad (3.3.12)$$

Сравнивая (3.3.12) с (3.3.10), мы видим, что нулевая мода оператора c является генератором преобразований «конформной симметрии» репараметризационной инвариантности мировой поверхности струны, т. е. преобразований, при которых метрика

изменяется только на кратную ей самой. Такое изменение, конечно, можно включить в вейлевское изменение масштаба.

На уровне древесных диаграмм, когда мировая поверхность является сферой, можно осуществить стереографическую проекцию на комплексную плоскость. Если положить $z = \tau + i\sigma$, $\bar{z} = \tau - i\sigma$, то уравнение, скажем, для функции c^+ примет вид

$$\frac{\partial c^+}{\partial \bar{z}} = 0, \quad (3.3.13)$$

так что c^+ должна быть аналитически функцией от z . По причинам, которые были объяснены в конце разд. 1.4.3, для того чтобы преобразование конформной симметрии, генерируемое оператором $c^+\partial_z$, имело полюс на бесконечности, $c^+(z)$ должна возрастать на бесконечности не быстрее, чем z^2 . Таким образом, существуют три допустимых решения уравнения (3.3.13), а именно $c^+ = 1$, $c^+ = z$ и $c^+ = z^2$. Как читатель легко может проверить, соответствующие конформные преобразования $c^+(z)\partial_z$ генерируют замкнутую алгебру Ли. Эта алгебра Ли является алгеброй Ли трехпараметрической группы $SL(2, C)$.

Чтобы проанализировать нулевые моды духов для поверхностей более высокого рода, заметим, что из уравнения для c^+ в (3.3.10) следует

$$0 = \nabla_+ \nabla_- c^+ = \frac{1}{2} (\nabla_+ \nabla_- + \nabla_- \nabla_+) e^+ + \frac{R^{(2)}}{2} c^+, \quad (3.3.14)$$

где $R^{(2)}$ — скалярная кривизна поверхности. Умножая это уравнение на c^{+*} и интегрируя по мировой поверхности, получим

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\Sigma} c^{+*} (\nabla_+ \nabla_- + \nabla_- \nabla_+) c^+ = \\ &= - \int_{\Sigma} (|\nabla_- c^+|^2 + |\nabla_+ c^+|^2 - R^{(2)} |c^+|^2). \end{aligned} \quad (3.3.15)$$

В случае тора с его плоской метрикой последний член в (3.3.15) выпадает. Этот факт означает, что c^+ является ковариантной постоянной и тем самым (так как тор является плоским) настоящей постоянной. Итак, на поверхности рода один имеется в точности одна нормируемая духовая нулевая мода, а именно $c^+ = 1$. Соответственно, единственной конформной симметрией тора является симметрия относительно трансляций $z \rightarrow z + a$ с комплексным a . Можно показать, что на поверхности Σ рода более чем один задается метрика со всюду отрицательной скалярной кривизной, и, следовательно, из (3.3.15) получаем, что в этом случае $c^+ = 0$; на поверхности рода более чем один нет

нормируемых духовых нулевых мод. Если обозначить число духовых нулевых мод на поверхности рода g через C_g , то $C_0 = 3$, $C_1 = 1$, а $C_g = 0$ при $g \geq 2$.

Обратимся теперь к антидуховым нулевым модам. Прежде чем обсуждать значение уравнений (3.3.11), рассмотрим следующий вопрос. Мы уже установили выше на качественном уровне, что на поверхности рода g при $g > 0$ имеются конформно неэквивалентные метрики. Дадим теперь этому факту количественное обоснование. Выбрав фоновую метрику $h_{\alpha\beta}$, посмотрим, можно ли произвольное возмущение $\delta h_{\alpha\beta}$ метрики $h_{\alpha\beta}$ включить в репараметризацию плюс вейлевское изменение масштаба. Если работать в локальной координатной системе на мировой поверхности Σ , в которой $h_{++} = h_{--} = 0$, $h_{+-} = e^\Phi$, то очевидно, что δh_{+-} можно включить в вейлевское изменение масштаба; весь вопрос в том, могут ли δh_{++} и δh_{--} быть включены в диффеоморфизм. Так как δh_{--} является комплексным сопряжением δh_{++} , мы можем рассмотреть только второе возмущение. Анализ уравнения (3.3.12) показывает, что δh_{++} можно включить в диффеоморфизм, если и только если имеется глобально определенная функция ξ_+ , такая, что $\delta h_{++} = 2\nabla_+ \xi_+$. Если это не выполняется, то

$$S = \int_{\Sigma} |\delta h_{++} - 2\nabla_+ \xi_+|^2 \quad (3.3.16)$$

отлично от нуля для всех ξ_+ . Если даже мы не можем выбрать ξ_+ так, чтобы (3.3.16) обращалось в нуль, мы несомненно можем выбрать ξ_+ так, чтобы это выражение было минимально. Вариационное уравнение, возникающее при минимизации (3.3.16) по ξ_+ , имеет вид

$$\nabla_- (\delta h_{++} - 2\nabla_+ \xi_+) = 0. \quad (3.3.17)$$

Положив $b_{++} = \delta h_{++} - 2\nabla_+ \xi_+$, мы обнаруживаем, что уравнение (3.3.17) превращается в уравнение (3.3.11) для антидуховых нулевых мод. В самом деле, антидуховые нулевые моды находятся во взаимно однозначном соответствии с теми δh_{++} , для которых (3.3.16) не может обращаться в нуль, или, другими словами, с деформациями метрики поверхности Σ , которые не могут быть включены в репараметризацию плюс вейлевское изменение масштаба. Таким образом, число антидуховых нулевых мод на поверхности рода g является числом, которое мы раньше обозначили через B_g , т. е. $B_0 = 0$, $B_1 = 1$, $B_g = 3g - 3$ при $g \geq 2$. Эти значения при $g = 0$ и $g = 1$ могут быть проверены непосредственным рассмотрением уравнений (3.3.11). Действитель-

но, для $g=0$, сделав стереографическую проекцию на плоскость, мы вместо (3.3.11) получим уравнение

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} b_{++} = 0, \quad (3.3.18)$$

так что поле b_{++} должно быть аналитической функцией от z . Однако исследование (3.3.11) показывает, что мы должны потребовать, чтобы $b_{++} \rightarrow 0$ при $z \rightarrow 0$, что невозможно для аналитической функции, поэтому b_{++} не имеет нормируемых нулевых мод. Для рода один из уравнения (3.3.11) следует, что поле b_{++} (как и c^+) должно быть ковариантно постоянным, и, следовательно, оно является постоянным, так что имеется в точности одна антидуховая нулевая мода в этом случае.

Хотя поведение B_g и C_g как функций от g при малых g несколько нарушает общее правило, стоит отметить, что разность

$$\Delta_g = C_g - B_g = -3(g - 1) \quad (3.3.19)$$

ведет себя ровнее. В действительности эта разность определяется классической теоремой, известной как теорема Римана — Роха, современное обобщение которой — теорема об индексе Атьи — Зингера — будет обсуждаться в гл. 14.

Конформно инвариантные параметры, определяющие метрику римановой поверхности рода g , известны как модули этой поверхности. Пространство этих параметров называется пространством модулей. Интегралы по мировым поверхностям струн, соответствующим петлевым диаграммам, включают в себя также интегралы по пространству модулей, которые в зависимости от формализма входят тем или иным образом. В формализмах, в которых присутствуют духи, при получении правильной меры интегрирования в интегралах по пространству модулей важную роль играют их нулевые моды, потому что, как мы видели, нулевые моды b и c связаны соответственно с инфинитезимальными деформациями модулей и ненарушенными симметриями, остающимися после процедуры фиксации калибровки. Модулярная группа $SL(2, Z)$, которую мы определили на однопетлевом уровне, обобщается и на случай многих петель.

Если не принимать во внимание дискретную группу эквивалентности относительно группы $SL(2, Z)$, то конформная структура поверхности рода один определялась бы точкой τ в верхней полуплоскости комплексной плоскости z . Верхняя полуплоскость называется пространством Техмёллера поверхности рода один, тогда как его фактор-пространство, полученное факторизацией по группе $SL(2, Z)$ (т. е. идентификацией значений τ , связанных элементами из группы $SL(2, Z)$) является истинным пространством модулей. Это имеет аналог и в случае многопет-

левых поверхностей; существует сравнительно простое пространство Техмёллера, описывающее конформную структуру поверхности с точностью до определенных дискретных эквивалентностей, тогда как пространство модулей, которое учитывает эти дискретные эквивалентности, описать намного труднее. Во многих подходах к проблеме многопетлевых диаграмм интегрирование по пространству Техмёллера возникает естественно и модулярная инвариантность не является очевидной. Однако для приемлемой теории модулярную инвариантность необходимо

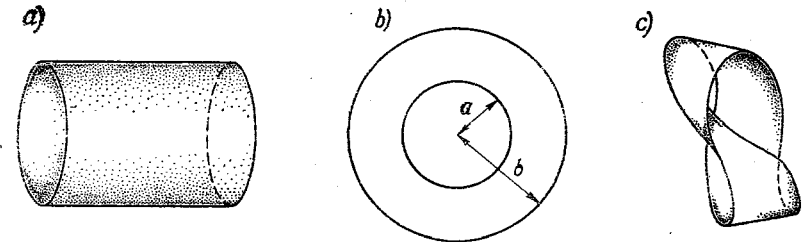


Рис. 3.6. Наипростейшей однопетлевой мировой поверхностью открытой струны является цилиндр (рис. а). Его всегда можно конформно отобразить на стандартное кольцо в комплексной плоскости, как показано на рис. б. Другой однопетлевой мировой поверхностью струны является перекрученный цилиндр, или лента Мёбиуса (рис. с), которую можно рассмотреть аналогично.

учитывать, так как (например, в однопетлевом случае) поверхности, описываемые значениями τ , которые связаны друг с другом элементами из группы $SL(2, Z)$, являются на самом деле «теми же» поверхностями с точностью до репараметризации и модулярная инвариантность является одним из аспектов репараметризационной инвариантности.

В данной книге мы подробно опишем однопетлевые интегралы, а наиболее эффективный подход к многопетлевым диаграммам все еще находится в стадии активной разработки, и здесь мы не будем его касаться.

Наше рассмотрение имеет свой аналог для открытых струн и мировых поверхностей с границей. Например, на однопетлевом уровне для открытых струн мы имеем дело с мировой поверхностью, которая топологически является цилиндром, как показано на рис. 3.6, а. Согласно классическим теоремам, любая метрика на цилиндре конформно эквивалентна стандартной плоской метрике на кольце $a \leq |z| \leq b$ в комплексной плоскости z для некоторых a и b , как показано на рис. 3.6, б. Какая из границ цилиндра соответствует внешней границе кольца, а какая — внутренней, является вопросом соглашения, так как обе гра-

ницы кольца меняются местами конформным преобразованием комплексной плоскости $z \rightarrow ab/z$ (которое приводит только к несущественному вейлевскому изменению масштаба метрики). Сделаем замену $z \rightarrow z/b$, мы можем положить $b = 1$, так что конформная структура кольца описывается отношением $x = a/b$, которое является вещественным параметром, изменяющимся от 0 до 1, и интеграл по этому параметру должен появляться в однопетлевом интеграле для открытых струн. Аналогичный параметр возникает и для другой мировой поверхности, соответствующей однопетлевой диаграмме и показанной на рис. 3.6, с.

3.4. Струны в фоновых полях

3.4.1. Введение фоновой пространственно-временной метрики

До сих пор мы рассматривали распространение струны в плоском 26-мерном пространстве Минковского. В этом случае действие имеет вид

$$S_0 = -\frac{1}{2\pi} \int d^2\sigma \sqrt{-h} h^{ab} \partial_a X^\mu \partial_b X^\nu \eta_{\mu\nu}, \quad (3.4.1)$$

где h_{ab} — метрика мировой поверхности, которая считается динамической переменной, а $\eta_{\mu\nu}$ — пространственно-временная метрика Минковского. В настоящем разделе мы хотим рассмотреть распространение струны не на плоском пространстве Минковского, а на некотором более общем 26-мерном многообразии M с метрическим тензором $g_{\mu\nu}$. Очевидным обобщением формулы (3.4.1) будет формула, в которой метрика Минковского $\eta_{\mu\nu}$ заменена на $g_{\mu\nu}$:

$$S = -\frac{1}{2\pi} \int d^2\sigma \sqrt{-h} h^{ab} \partial_a X^\mu \partial_b X^\nu g_{\mu\nu}(X^0). \quad (3.4.2)$$

Формула (3.4.2) является столь естественным обобщением формулы (3.4.1), что вряд ли нуждается в специальном выводе, хотя поучительно рассмотреть следующее. Предположим, что пространственно-временной метрикой является

$$g_{\mu\nu}(X^0) = \eta_{\mu\nu} + f_{\mu\nu}(X^0), \quad (3.4.3)$$

где f , рассматриваемая нами как возмущение, описывает отличие от пространства Минковского. Функциональный интеграл, соответствующий (3.4.1), равен

$$Z_0 = \int DX^\mu Dh_{ab} e^{-S_0}, \quad (3.4.4)$$

тогда как интеграл, соответствующий (3.4.2), имеет вид

$$\begin{aligned} Z &= \int DX^\mu Dh_{ab} e^{-S} = \\ &= \int DX^\mu Dh_{ab} e^{-S_0} \left(1 + \frac{1}{2\pi} \int d^2\sigma \sqrt{-h} h^{ab} \partial_a X^\mu \partial_b X^\nu f_{\mu\nu}(X^0) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2\pi} \int d^2\sigma \sqrt{-h} h^{ab} \partial_a X^\mu \partial_b X^\nu f_{\mu\nu}(X^0) \right]^2 + \dots \right). \end{aligned} \quad (3.4.5)$$

Здесь

$$V = \frac{1}{2\pi} \int d^2\sigma \sqrt{-h} h^{ab} \partial_a X^\mu \partial_b X^\nu f_{\mu\nu}(X^0) \quad (3.4.6)$$

является вершинным оператором, соответствующим испусканию гравитона с волновой функцией $f_{\mu\nu}(X^0)$. (До сих пор мы рассматривали гравитоны, волновая функция которых была плоской волной $f_{\mu\nu}(X^0) = \xi_{\mu\nu} e^{ikX}$, однако нет никаких причин не рассматривать волновую функцию, являющуюся суперпозицией плоских волн общего вида.) Вставка оператора V в функциональный интеграл Z_0 , выраженный формулой (3.4.4) и записанный в пространстве Минковского, позволила бы описать взаимодействие струн с внешним гравитоном с волновой функцией $f_{\mu\nu}$. Вставка оператора e^V в (3.4.4) позволила бы описать взаимодействие с когерентным состоянием гравитонов с этой волновой функцией, что в точности соответствует распространению струны в пространстве-времени с метрикой $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + f_{\mu\nu}$.

Мы хотим рассмотреть теперь некоторые простые свойства действия (3.4.2). Оба действия (3.4.1) и (3.4.2) являются действиями двумерных квантовых теорий поля, но между ними имеется существенная разница. Действие (3.4.1) становится действием свободной теории поля в конформной калибровке

$$h_{ab} = \eta_{ab}, \quad (3.4.7)$$

а действие (3.4.2) — нет. В этой калибровке действие (3.4.2) сводится к

$$S' = -\frac{1}{4\pi\alpha'} \int d^2\sigma \partial_a X^\mu \partial^a X^\nu g_{\mu\nu}(X^0). \quad (3.4.8)$$

Это выражение является действием нетривиальной квантовопольевой модели, известной как нелинейная сигма-модель. Мы восстановили зависимость от α' ; в предшествующих формулах был сделан обычный выбор: $\alpha' = 1/2$.

Конечно, как и в случае рассмотрения струны в плоском пространстве Минковского, теорию с действием (3.4.8) нужно дополнить условиями Вирасоро

$$T_{ab} = 0, \quad (3.4.9)$$

сопряженными к условию выбора калибровки (3.4.7). Формально действие (3.4.8) инвариантно относительно изменений масштаба или конформных отображений переменной σ (что является отражением основной вейлевской инвариантности в действии (3.4.2)), так что на классическом уровне мы имеем

$$T_{+-} = 0, \quad (3.4.10)$$

так же как это было в случае струны, распространяющейся в плоском пространстве. С учетом уравнения (3.4.10) у нас остаются только два набора условий Вирасоро

$$T_{++} = T_{--} = 0, \quad (3.4.11)$$

и их (в критической размерности) достаточно, чтобы устранить моды с отрицательной нормой, но по-прежнему рассматривать содержательную теорию. Если в уравнении (3.4.10), полученном в классической теории, при квантовании появляется аномалия, то к (3.4.11) нужно добавить дополнительное условие Вирасоро $T_{+-} = 0$. Это условие, не имеющее своего аналога в пределе плоского пространства, конечно, привело бы к некоторым рассогласованностям.

Даже в случае плоского пространства Минковского ($g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$), где действие (3.4.8) сводится к действию свободной теории поля, было обнаружено, что в T_{+-} может быть аномалия, если мировая поверхность струны искривлена. Мы нашли, что эта аномалия, возникающая при $D \neq 26$, имеет вид $T_{+-} \sim R^{(2)}$, где $R^{(2)}$ — скалярная кривизна мировой поверхности. Это относительно нестрашный (хотя и неприятный) вид аномалии; если действие (3.4.8) сформулировано на мировой поверхности с данной геометрией, то $R^{(2)}$ является определенной c -числовой функцией координат мировой поверхности σ и τ , так что конформная аномалия, которая нам встретилась в разд. 3.2.2, является только c -числом. В случае когда $g_{\mu\nu} \neq \eta_{\mu\nu}$ и (3.4.8) описывает нелинейную теорию со взаимодействиями, мы столкнемся с более серьезной операторной аномалией в T_{+-} .

3.4.2. Вейлевская инвариантность

В зависимости от вида тензора $g_{\mu\nu}$ масштабная инвариантность действия (3.4.8) нарушается, поэтому не существует способа регуляризовать (3.4.8), сохраняя при этом масштабную или конформную инвариантность мировой поверхности. Регуляризация Паули—Вилларса (вычитающая из петель вклад от массивного регуляризирующего поля), несомненно, нарушает

масштабную инвариантность. Выражение в (3.4.8) можно регуляризовать с помощью размерной регуляризации, но она тоже нарушает масштабную инвариантность, так как двумерная сигма-модель с действием (3.4.8) масштабно инвариантна только в двумерии. Мы будем пользоваться размерной регуляризацией.

Нарушение масштабной инвариантности в квантовой теории поля обычно описывается в терминах β -функции. В зависимости от формализма, используемого для определения β -функции, она возникает тем или иным способом из ультрафиолетовых расходимостей фейнмановских диаграмм. В струнной теории бета-функция и ультрафиолетовые расходимости в действительности не являются основными предметами изучения; здесь главное выяснить, будет ли действие (3.4.8) обладать вейлевской инвариантностью, если его определить на искривленной мировой поверхности. Однако на самом деле эти вопросы внутренне связаны друг с другом. Из вейлевской инвариантности следует глобальная инвариантность, из которой в свою очередь следует равенство нулю бета-функции, а следовательно, и ультрафиолетовая конечность (с точностью до возможной перенормировки волновой функции). Исторически уравнение Калана—Симанзика впервые было выведено при изучении тождества Уорда, связанного со следом тензора энергии-импульса, или, другими словами, тождества Уорда, связанного с вейлевскими преобразованиями.

Так как вычисления, связанные с доказательством конечности и с наличием вейлевской инвариантности, по существу эквивалентны, было бы излишним приводить в однопетлевом приближении каждое из них. Поскольку в струнной теории центральным вопросом является вопрос о вейлевской инвариантности, а не о конечности, наш подход заключается в тщательном вычислении возможного нарушения вейлевской инвариантности и выяснении при этом вопроса о конечности лишь настолько, насколько это необходимо для прослеживания связи между этими двумя вычислениями. (Наше обсуждение вопроса о конечности будет неполным, так как мы не будем заниматься перенормировкой волновой функции.) Удобнее будет сначала рассмотреть вопрос о конечности, а затем о вейлевской инвариантности, но до этого необходимо провести некоторую предварительную работу.

Сначала обсудим, что является параметром разложения в наших однопетлевых вычислениях. Глядя на (3.4.8), мы видим, что в пределе очень малых α' действие становится большим, а квантовые поправки — малыми. Квантовомеханическая теория возмущений — это разложение по степеням α' . Есть и другой эквивалентный способ прийти к такому выводу. Заметим, что из

(3.4.8) следует, что если мы сделаем растяжку пространственно-временной метрики

$$g_{\mu\nu} \rightarrow t^2 g_{\mu\nu}, \quad (3.4.12)$$

то большие t будут соответствовать малым α' . Так как при (3.4.12) все длины на многообразии \mathbf{M} растянутся в t раз, то предел больших t — это предел, в котором размер многообразия \mathbf{M} в единицах α' становится очень большим. Безразмерным параметром разложения является отношение $\sqrt{\alpha'}/r$, где r — характеристическая длина, или «радиус» многообразия \mathbf{M} . Мы выберем калибровку

$$h_{\alpha\beta} = e^{2\varphi} \eta_{\alpha\beta}. \quad (3.4.13)$$

Для вычисления величин, возникающих из-за возможного нарушения вейлевской симметрии, требуется регуляризация, которую можно ввести, работая в пространстве $2 + \epsilon$ измерений. Вставляя (3.4.13) в (3.4.2), мы получаем

$$\tilde{S} = -\frac{1}{2\pi} \int d^{2+\epsilon} \sigma e^{\epsilon\varphi} \partial_\alpha X^\mu \partial^\alpha X^\nu g_{\mu\nu}(X^0). \quad (3.4.14)$$

Нам хотелось бы выяснить, исчезает ли зависимость от φ в пределе $\epsilon \rightarrow 0$. В ходе выяснения мы увидим (по крайней мере на уровне однопетлевых диаграмм), что это условие связано с требованием ультрафиолетовой конечности теории. При исчерпывающем рассмотрении нам также следует исследовать вопрос о возможном нарушении инвариантности относительно двумерной репараметризации, появляющемся из-за аномалий двумерной гравитации (как это было при изучении струи в плоском пространстве-времени в разд. 3.2.3), так как регуляризация (3.4.13) не является инвариантной относительно координатных преобразований.

При рассмотрении действия (3.4.8) как действия в квантовой теории поля, где квантовым полем является $X^\mu(\sigma, \tau)$, первым шагом является выделение его вакуумного среднего (назовем его X_0^μ) и разложение квантового поля в окрестности этого среднего. Итак,

$$X^\mu(\sigma, \tau) = X_0^\mu + x^\mu(\sigma, \tau), \quad (3.4.15)$$

где x^μ — квантовая флуктуация. В приложениях более общего характера этого «метода фонового поля» в качестве классического фонового поля X_0^μ берется любая функция переменных σ и τ , удовлетворяющая классическим полевым уравнениям, а не решение в виде постоянной, которое мы здесь выбрали. Мы разложим метрический тензор около значения $X^\mu = X_0^\mu$. Это разложение в общем виде будет выглядеть сложным и громоздким.

Но мы заметим, что (3.4.8) является «геометрическим» выражением, инвариантным относительно переопределения полевых переменных

$$X^\mu \rightarrow \tilde{X}^\mu(X^0), \quad (3.4.16)$$

которое нужно дополнить подходящим преобразованием метрического тензора $g_{\mu\nu}$ пространства-времени. Сделав при необходимости такое переопределение полевых переменных, можно предположить, что координаты X^μ на пространственно-временном многообразии \mathbf{M} являются локально инерциальными координатами в точке X_0^μ . В таких координатах метрика $g_{\mu\nu}(X^0)$ эквивалентна метрике Минковского $\eta_{\mu\nu}$ в точке $X^\mu = X_0^\mu$ и отличается

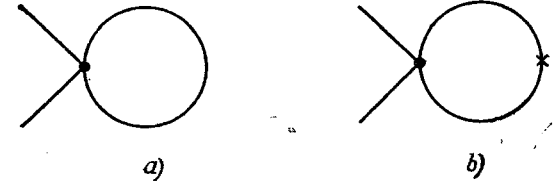


Рис. 3.7. Однопетлевой контрчлен в нелинейной сигма-модели появляется из диаграммы, изображенной на рис. а). При проверке вейлевской инвариантности в описанном формализме мы встречаемся еще и с диаграммой, изображенной на рис. б), где крестик обозначает вставку кинетического члена с коэффициентом $\epsilon\varphi$.

от нее только в порядке $(x^\mu)^2$. Члены более высокого порядка нельзя за счет переопределения поля обратить в нуль, но их можно упростить, выбирая координаты, называемые нормальными римановыми координатами. В этих координатах имеет место разложение

$$g_{\mu\nu}(X^0) = \eta_{\mu\nu} - \frac{1}{3} R_{\mu\lambda\nu\kappa}(X_0^0) x^\lambda x^\kappa - \frac{1}{6} D_\rho R_{\mu\lambda\nu\kappa} x^\rho x^\lambda x^\kappa + O((x^\mu)^4), \quad (3.4.17)$$

где $R_{\mu\lambda\nu\kappa}(X_0^0)$ — тензор Римана многообразия \mathbf{M} в точке X_0^0 . Если так выбрать полевые переменные и воспользоваться разложением $e^{\epsilon\varphi} = 1 + \epsilon\varphi + \dots$, действие (3.4.14) принимает вид

$$\tilde{S} = -\frac{1}{2\pi} \int d^{2+\epsilon} \sigma \left[(\partial_\alpha x^\mu \partial^\alpha x^\nu) (1 + \epsilon\varphi) \eta_{\mu\nu} - \frac{1}{3} R_{\mu\lambda\nu\kappa}(X_0^0) x^\lambda x^\kappa \partial_\alpha x^\mu \partial^\alpha x^\nu (1 + \epsilon\varphi) + O(x^5) \right]. \quad (3.4.18)$$

Разложение по степеням $\sqrt{\alpha'}/r$ эквивалентно разложению по степеням x в (3.4.18), так как, например, тензор кривизны многообразия \mathbf{M} является величиной порядка $1/r^2$. Таким образом,

контрчлен низшего порядка в точности получается спариванием двух x^μ , которое появляется в четвертом члене в (3.4.16), соответствующая диаграмма Фейнмана схематически изображена на рис. 3.7, а. В размерной регуляризации полюсы возникают только из-за логарифмически расходящихся интегралов. Спаривание $\langle x^\lambda x^\kappa \rangle$ приводит к логарифмически расходящемуся интегралу, тогда как спаривание $\langle \partial x^\mu \partial x^\nu \rangle$ приводит к квадратично расходящемуся интегралу, который при размерной регуляризации отбрасывается¹⁾. Логарифмическая расходимость в $2 + \varepsilon$ измерениях имеет вид

$$\langle x^\lambda(\sigma) x^\kappa(\sigma') \rangle_{\sigma \rightarrow \sigma'} = \pi \eta^{\lambda\kappa} \lim_{\sigma \rightarrow \sigma'} \int \frac{d^{2+\varepsilon} k}{(2\pi)^{2+\varepsilon}} \frac{e^{ik \cdot (\sigma - \sigma')}}{k^2} \sim \frac{\eta^{\lambda\kappa}}{2\varepsilon}. \quad (3.4.19)$$

Поэтому в однопетлевом эффективном действии, выведенном в теории, определяемой действием (3.4.18), имеются ε -полюсы. Точно так же, как наличие этих полюсов приводит к отличиям от нуля β -функциям, оно может привести к зависимости от φ , выживающей в пределе $\varepsilon \rightarrow 0$. Например, матричные элементы оператора

$$W = x^\lambda x^\kappa \partial_\alpha x^\mu \partial^\alpha x^\nu R_{\mu\lambda\nu\kappa}(X_0^0) \quad (3.4.20)$$

имеют полюс при $\varepsilon \rightarrow 0$. Этот полюс появляется из-за спаривания $\langle x^\lambda x^\kappa \rangle$, определенного формулой (3.4.19), и при

$$W \rightarrow W' = W - \frac{1}{2\varepsilon} \partial_\alpha x^\mu \partial^\alpha x^\nu R_{\mu\nu}(X_0^0). \quad (3.4.21)$$

Здесь $R_{\mu\nu}(X_0^0)$ — тензор Риччи многообразия \mathbf{M} , определенный через тензор Римана: $R_{\mu\nu} = R_{\mu\lambda\nu}^\lambda$. Подстановка (3.4.21) в (3.4.18) приводит при $\varepsilon \rightarrow 0$ к зависящему от φ члену

$$- \frac{1}{12\pi} \int d^2\sigma \varphi(\sigma) \partial_\alpha x^\mu \partial^\alpha x^\nu R_{\mu\nu}(X_0^0). \quad (3.4.22)$$

Однако кинетический член в (3.4.18) также приводит в пределе $\varepsilon \rightarrow 0$ к другим зависящим от φ слагаемым в однопетлевом эффективном действии. Например, легко убедиться в том, что имеется и другой однопетлевой вклад в эффективное действие, квадратичный по x^μ , как это проиллюстрировано на рис. 3.7, б. Это слагаемое является конечным, зависящим от φ членом благодаря полюсу $1/\varepsilon$, который в точности сокращается с множителем ε в зависящем от φ слагаемом, появившемся из-за кинетического члена.

¹⁾ Этот квадратично расходящийся интеграл имеет важное значение с физической точки зрения, что можно обнаружить при тщательном рассмотрении инфракрасных расходимостей. Его существование связано с возможностью добавить к (3.4.8) члены со взаимодействиями, не содержащими производные; эти взаимодействия соответствуют среднему значению тахионного поля.

тического члена. Зависимость от суммы двух слагаемых, которым соответствуют диаграммы, изображенные на рис. 3.7, исчезает. Кроме того, имеются еще диаграммы типа той, что изображена на рис. 3.7, б, с величинами $x^\mu \partial_\alpha x^\nu$ и $\partial_\alpha x^\mu \partial^\alpha x^\nu$ на внешних линиях, пропорциональными $\partial^\alpha \varphi$. После интегрирования по частям (и отбрасывания членов, пропорциональных величине $\partial_\alpha \partial^\alpha x^\mu$, обращаемой в нуль за счет управлений движения наименьшего порядка) эти члены приводят в перенормированном эффективном действии к выражению, явно зависящему от φ и вновь пропорциональному (3.4.22). С тем чтобы получить правильное выражение в пределе $\varepsilon \rightarrow 0$, все еще необходимо перенормировать ε -полюсные члены, зависящие от φ и входящие в эффективное действие. Такие полюсные члены возникают как из-за однопетлевой диаграммы, изображенной на рис. 3.7, а, так и из-за аналогичной ей однопетлевой диаграммы, но с четырьмя внешними полями x^μ . Член второго типа дает вклад в перенормировку слагаемого в (3.4.18), содержащего $R_{\mu\lambda\nu\kappa}(X_0^0)$. Важным свойством нелинейных сигма-моделей является то, что эти две бесконечности можно включить в перенормировку волновой функции

$$x^\mu \rightarrow x^\mu + \frac{1}{6\varepsilon} R_\nu^\mu(X_0^0) x^\nu + O(x^2) \quad (3.4.23)$$

и перенормировку пространственно-временной матрицы

$$g_{\mu\nu} \rightarrow g_{\mu\nu} - \frac{1}{2\varepsilon} R_{\mu\nu}(X_0^0). \quad (3.4.24)$$

Сделав эти подстановки в (3.4.18), мы восстановим члены с коэффициентом $\varepsilon\varphi$, учитывая при этом сокращение множителей ε полюсами¹⁾. Собирая вместе все вклады, зависящие от φ , мы приходим к эффективному действию, которое может быть записано в этом порядке (и при $D = 26$) в виде

$$\hat{S} = - \frac{1}{4\pi} \int d^2\sigma \varphi R_{\mu\nu}(X^0) \partial_\alpha X^\mu \partial^\alpha X^\nu, \quad (3.4.25)$$

где X^μ дается формулой (3.4.15). Таким образом, в этом порядке действие (3.4.2) приводит к вейль-инвариантной (независимой от φ) квантовой теории, если и только если

$$R_{\mu\nu}(X^0) = 0. \quad (3.4.26)$$

¹⁾ Далее для уничтожения любых гравитационных аномалий, которые появляются на однопетлевом уровне, необходимо добавить локальные контрчлены. Такие аномалии вычисляются в значительной степени подобно тому, как это делалось в разд. 3.2.3, рассмотрением однопетлевых поправок к $\langle h^{\mu\nu} h^{\rho\sigma} \rangle$. В результате получаются члены, независимые от фонового поля, которые в 26-мерии уничтожаются за счет вклада от духов.

Перенормировка метрики в (3.4.24) означает, что существует однопетлевой бета-функционал, который задается формулой

$$\beta_{\mu\nu}(X^p) = -\frac{1}{2\pi} R_{\mu\nu}(X^p). \quad (3.4.27)$$

Понятие бета-функционала может показаться непривычным, но в действительности в нем нет ничего странного. Известно, что в теории с n константами взаимодействия имеется n бета-функций, по одной на каждое взаимодействие. Эти бета-функции имеют те же индексы, которые используются для обозначения взаимодействий. Аналогично, в теории, в которой имеется функционал взаимодействия $g_{\mu\nu}(X^p)$, являющийся непрерывным бесконечным множеством взаимодействий, будет существовать бета-функционал $\beta_{\mu\nu}(X^p)$, зависящий от того же числа степеней свободы, которые входят во взаимодействие. Из (3.4.27) условием обращения в нуль однопетлевого бета-функционала или, что то же самое, условием зануления независящих от φ однопетлевых контрчленов ((3.4.23) и (3.4.24)) в эффективном действии является равенство $R_{\mu\nu}(X^p) = 0$. Как уже ранее отмечалось, к такому же условию приводит требование вейлевской инвариантности (независимости от φ) эффективного действия. Эти два утверждения связаны, если учесть тот факт, что β -функция является следом тензора энергии-импульса.

Эта взаимосвязь между вейлевской инвариантностью и обращением в нуль бета-функции имеет место в значительно более общей ситуации, хотя наши вычисления на однопетлевом уровне, возможно, и сделали ее вполне очевидной. Более систематическое исследование такой взаимосвязи, пригодное для вычислений на многопетлевом уровне, предполагало бы использование метода фонового поля, обобщенного на случай, когда X_0^μ является непостоянным решением общего вида классических полевых уравнений¹⁾.

3.4.3. Конформная инвариантность и уравнения движения

Найденные нами уравнения, а именно $R_{\mu\nu} = 0$, являются известными уравнениями Эйнштейна в вакууме. Случайно ли это, что уравнения Эйнштейна возникли таким образом?

При изучении физической теории единственными уравнениями, которые мы имеем право налагать, являются уравнения движения — или, на квантовом уровне, уравнения для миними-

¹⁾ Более полное изложение этого вопроса дано в статьях Фрадкина и Цейтлина, приведенных в библиографии или, например, в работе Hull, C. M. and Townsend, P. K. (1986), "Finiteness and conformal invariance in non-linear sigma models", Nucl. Phys. B274, 349.

зации квантового эффективного потенциала. С другой стороны, для того чтобы действие (3.4.2) имело смысл в струнной теории, требуется вейлевская инвариантность или обращение в нуль бета-функции. Условие обращения в нуль бета-функции совершенно необходимо в струнной теории (на классическом уровне, как мы вскоре увидим), и, чтобы иметь разумную физическую интерпретацию, оно должно совпадать с уравнениями движения. Поэтому позднее мы должны облегченно вздохнуть, обнаружив, что условие (3.4.26) обращения в нуль низшего порядка β -функций разумно интерпретировать как длинноволновое приближение уравнения движения гравитационного поля. Уравнение (3.4.26) должно иметь такую интерпретацию, чтобы струнная теория имела смысл. Бета-функция (или результат нарушения вейлевской инвариантности), которую мы вычислили, зависит только от поведения на малых расстояниях квантовой теории поля с действием (3.4.2). Такое же поведение на малых расстояниях имело бы место на римановой поверхности любой топологии. Когда действие (3.4.2) обладает вейлевской инвариантностью, мы можем вычислить функциональный интеграл с этим действием, взятым на римановой сфере (что соответствует древесным диаграммам или классическому приближению в теории струн) и на поверхностях более высокого рода (что соответствует квантовым поправкам). Это заставляет предполагать, что наличие вейлевской инвариантности у действия (3.4.2) следует интерпретировать как условие нахождения классического решения теории струн (вейль-инвариантный функциональный интеграл на римановой поверхности), около которого мы потом осуществляем разложение, чтобы вычислить квантовые поправки.

Попытаемся теперь привести более прямые аргументы в пользу того, что требование вейлевской инвариантности действия (3.4.2) соответствует нахождению классического решения. Рассмотрим произвольную физическую теорию с полями Φ^k , $k = 1, \dots$. Мы опишем вакуумное состояние (по крайней мере в рамках теории возмущений), выбирая вакуумное среднее

$$\Phi_0^k = \langle \Phi^k \rangle \quad (3.4.28)$$

и записывая

$$\Phi^k = \Phi_0^k + \varphi^k, \quad (3.4.29)$$

где φ^k — квантовая флуктуация. Затем для вычисления амплитуд рассеяния

$$A_n = \langle \varphi^{k_1} \varphi^{k_2} \dots \varphi^{k_n} \rangle \quad (3.4.30)$$

вычисляются вакуумные средние произведения полей φ^k . В теории струн каждому полю φ^k соответствует вершинный оператор V^k . Свойства этих операторов обсуждались в гл. 1 и

разд. 2.2.3. Тогда аналогом амплитуды (3.4.30) в теории струн является амплитуда

$$\hat{A}_n = \langle V^{k_1} V^{k_2} \dots V^{k_n} \rangle. \quad (3.4.31)$$

Несмотря на формальное сходство амплитуд (3.4.30) и (3.4.31), между ними имеется существенное различие: среднее в (3.4.30) вычисляется в пространстве-времени, тогда как в (3.4.31) оно вычисляется на мировой поверхности струны.

При $n \geq 4$ (3.4.30) и (3.4.31) описывают амплитуды рассеяния, при $n = 3$ — поправки к вершинам, а при $n = 2$ они описывают сдвиги массы. Что же они описывают при $n = 1$? В теории поля среднее A_n при $n = 1$ имеет чрезвычайно важное значение. Его обращение в нуль, т. е. равенство

$$\langle \varphi^k \rangle = 0, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (3.4.32)$$

говорит о том, что состояние, взятое в качестве кандидата на вакуумное состояние, около которого мы осуществляем разложение и в котором среднее значение квантовых полей Φ^k равно Φ_0^k , является решением классических уравнений поля (или, на квантовом уровне, экстремумом эффективного потенциала). Аналогия между (3.4.30) и (3.4.31) показывает, что соответствующее утверждение должно иметь место и в теории струн. Классическое решение (или экстремум) эффективного потенциала в теории струн должно находиться из условия

$$\langle V \rangle = 0, \quad (3.4.33)$$

где V — вершинный оператор, соответствующий любому физическому состоянию.

Мы попытаемся теперь объяснить, почему возникает уравнение Эйнштейна в (3.4.26), и ответить на более общий вопрос: почему конформная инвариантность мировой поверхности связана с уравнениями движения? В частности, мы докажем, что на уровне древесных диаграмм в теории струн равенство (3.4.33) является следствием конформной инвариантности мировой поверхности. Это доказательство состоит из отдельных положений, которые справедливы только на уровне древесных диаграмм теории струн, и поэтому оно конкретно означает, что конформно инвариантная нелинейная сигма-модель (3.4.2) или (3.4.8) соответствует решению теории струн на классическом уровне. Идея очень проста. В случае, например, замкнутых струн мировая поверхность на классическом уровне является сферой, которая может быть стереографически спроецирована на плоскость $x-y$. Вычисляя (3.4.33), мы можем предположить, что вершинный оператор V вставляется на плоскости в точке

$x = y = 0$. Конформная инвариантность действия (3.4.8) означает, в частности, инвариантность относительно масштабных преобразований

$$x \rightarrow \lambda x, \quad y \rightarrow \lambda y. \quad (3.4.34)$$

Физический вершинный оператор V замкнутой струны имеет размерность два (как было установлено в разд. 1.4.5), и поэтому в результате (3.4.34) он преобразуется следующим образом:

$$V \rightarrow \lambda^{-2} V. \quad (3.4.35)$$

Итак, инвариантность относительно преобразований (3.4.34) приводит к тому, что

$$\langle V \rangle = \langle \lambda^{-2} V \rangle, \quad (3.4.36)$$

из которого следует равенство $\langle V \rangle = 0$, что мы и хотели доказать.

Некоторые моменты в этом доказательстве нуждаются в комментариях. Прежде всего, все вершинные операторы в (3.4.31) являются вершинными операторами физических состояний на массовой поверхности. Похоже, что в теории струн действительно нет ни одного естественного продолжения за массовую поверхность вакуумного среднего (3.4.31), т. е. такого, которое могло бы сравниться по элегантности и простоте с формулой на массовой поверхности. В равенстве (3.4.32) и в его предполагаемом аналоге (3.4.33), соответствующем теории струн, операторы φ^k и V несомненно должны вычисляться при нулевых импульсах. Нулевой импульс лежит на массовой поверхности только для безмассовых частиц. Поэтому может показаться, что в равенстве (3.4.33) мы нашли разумный способ проверки уравнений движения в теории струн только в случае безмассовых внешних состояний.

Решение этой проблемы довольно поучительно. Что получится, если мы попытаемся в квантовой теории поля провести разложение около неправильно установленного вакуума, для которого равенство (3.4.32) не выполняется? В этом случае вставки в фейнмановские диаграммы головастиков, как это схематически изображено на рис. 3.8, *a*, приводят к вкладу, отличному от нуля. Головастики соответствуют сдвигу в средних значениях полей Φ^k , и суммирование вкладов от них сдвигает неправильное вакуумное состояние в правильное, если поблизости такое имеется. Головастик, соответствующий частице Φ с массой M^2 , пропорционален

$$\frac{g}{M^2}, \quad (3.4.37)$$

где g — константа взаимодействия в процессе испускания частицы ϕ , а множитель $1/M^2$ получается из пропагатора $1/(k^2 + M^2)$ этой частицы, вычисленного при $k^0 = 0$, — значении, которое соответствует головастику. Если взаимодействие слабое (для сильного взаимодействия разложение в окрестностях классического решения вряд ли будет полезным), вклад от головастиков мал при любом отличном от нуля M . Пока вклады от них малы, головастики хотя и доставляют неприятности, но эти неприятности проявляются просто в малом сдвиге в правильное вакуумное состояние и поэтому безвредны.

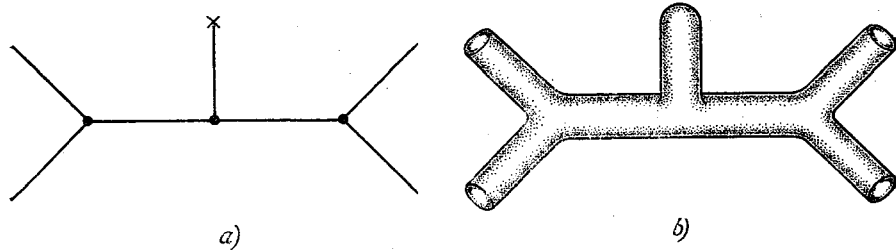


Рис. 3.8. Вставка «головастика» в фейнмановскую диаграмму схематически изображена на рис. *a*). В теории струн такие головастики автоматически учитываются в любом вычислении, как это показано на рис. *b*), так как добавление вставки головастика в диаграмму распространяющейся струны не меняет ее топологии.

Что же происходит в теории струн? В процессе любого вычисления происходит автоматическое суммирование по всем возможным головастикам, так как (см. рис. 3.8, *b*), добавляя головастик к диаграмме, мы не меняем ее топологию. Как мы только что видели, вклад головастиков от массивных частиц мал (в режиме слабых взаимодействий, где теория возмущений имеет смысл). В теории струн на самом деле нет необходимости проверять, удовлетворяются ли уравнения движения для массивных состояний, так как даже если они не удовлетворяются, то это просто приводит к небольшому несущественному сдвигу вакуумного состояния, возникающему из-за вклада от головастиков, которые всегда автоматически учитываются в любом вычислении. Теория струн уходит своими корнями в S -матричный подход, и это соответствует тому, что в ней нет простого способа задать вопрос, не требующий ответа, вроде вопроса о том, удовлетворяются ли уравнения движения для массивных частиц. С другой стороны, головастики безмассовых частиц всегда опасны, и соответственно существует хороший способ, а именно использующий (3.4.33), чтобы их изучить.

Почему приведенное выше доказательство ограничено *уровнем древесных диаграмм* теории струн? Главным в этом доказательстве является существование на римановой сфере или на плоскости x - y преобразования (3.4.34), которое является конформным преобразованием (изменение, которое оно индуцирует в метрике мировой поверхности, может быть включено в вейлевское изменение масштаба), а не изометрией. Для диаграмм замкнутой струны, отличных от сферы, аналога этому нет. На торе, например, или на многообразии RP^2 (которое возникает в случае неориентированных струн и будет обсуждаться в гл. 8) единственными конформными преобразованиями являются постоянные сдвиги, которые не приводят к нетривиальному закону скейлинга (3.4.36), использованному в доказательстве. Для поверхностей более высокого рода конформные преобразования вообще отсутствуют.

Что происходит, если включить в рассмотрение и открытые струны? На уровне *древесных* диаграмм мировой поверхностью для открытых струн является диск, который может быть конформно отображен в верхнюю полуплоскость плоскости x - y . Вершинный оператор открытой струны вставляется на границе верхней полуплоскости, скажем в точке $x = y = 0$. В теории только открытых струн соображения, основанные на масштабных преобразованиях (3.4.34), приводят к тому, что так же, как и в случае замкнутых струн, из конформной инвариантности следует обращение в нуль вкладов от головастиков с тем единственным отличием, что поскольку конформная размерность вершинных операторов открытых струн равна единице, то множитель λ^{-2} в (3.4.35) и (3.4.36) нужно заменить на λ^{-1} .

Все обстоит иначе, если имеет место взаимодействие открытых и замкнутых струн. Например, вершинный оператор замкнутой струны вставлялся бы на верхней полуплоскости во внутреннюю точку, скажем $x = 0$, $y \neq 0$. При взаимодействии вершинного оператора замкнутой струны с открытой струной (в верхней полуплоскости), а не с замкнутой струной (во всей плоскости) условие (3.4.37) заменяется на условие

$$\langle V(\lambda y) \rangle = \langle \lambda^{-2} V(y) \rangle. \quad (3.4.38)$$

Из него не следует равенство нулю вклада от головастика, а вытекает только то, что $\langle V(y) \rangle$ пропорционально y^{-2} . Таким образом, головастики замкнутых струн могут давать вклад, отличный от нуля, на верхней полуплоскости, на торе, на RP^2 , а фактически на любой мировой поверхности, за исключением плоскости (или римановой сферы). Такие головастики будут нам часто встречаться в гл. 8—10.

Требуется еще один комментарий. Вершинные операторы и гравитона, и дилатона имеют вид

$$V = \xi_{\mu\nu} \partial_\alpha X^\mu \partial^\alpha X^\nu e^{ik \cdot X}, \quad (3.4.39)$$

где $k^2 = 0$. Тензор поляризации $\xi_{\mu\nu}$ симметричен и удовлетворяет условию

$$k^\mu \xi_{\mu\nu} = 0, \quad (3.4.40)$$

для того чтобы оператор (3.4.39) имел правильную конформную размерность. В случае гравитона тензор $\xi_{\mu\nu}$ является бесследовым, потому что, как будет показано ниже, след этого тензора описывает частицы со спином нуль. Заметим, что тензор поляризации $\xi_{\mu\nu}$ определяется с точностью до преобразования

$$\xi_{\mu\nu} \rightarrow \xi_{\mu\nu} + \varepsilon_\mu \bar{k}_\nu + \varepsilon_\nu \bar{k}_\mu, \quad (3.4.41)$$

где ε_μ — произвольный вектор, удовлетворяющий условию $\varepsilon \cdot k = 0$, которое сохраняет равенство (3.4.40). Такое изменение тензора поляризации соответствует введению продольно поляризованного гравитона, который не участвует в физических процессах (как объясняется в разд. 7.2.2) вследствие калибровочной инвариантности на массовой поверхности.

В случае дилатона можно предположить, что $\xi_{\mu\nu} \sim \eta_{\mu\nu}$, но тогда равенство (3.4.40) не будет выполняться. Эту трудность можно обойти, взяв тензор поляризации в виде

$$\xi_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} - k_\mu \bar{k}_\nu - \bar{k}_\mu k_\nu, \quad (3.4.42)$$

где \bar{k}_μ — произвольный вектор, удовлетворяющий условиям $\bar{k} \cdot \bar{k} = 0$ и $k \cdot \bar{k} = 1$. Последние два слагаемых в (3.4.42) соответствуют продольным составляющим, которые также не участвуют в физических процессах. За исключением случая $k^\mu = 0$, условия, которым подчиняются поля, описывающие гравитон и дилатон, различны, поэтому различными являются соответствующие им вершинные операторы. Однако если равенство (3.4.33) выполняется, то мы имеем как раз случай $k^\mu = 0$, в котором соотношения (3.4.40) и (3.4.42) совместны. Поэтому мы не располагаем достаточным количеством вершинных операторов, чтобы проверить независимо уравнения движения для всех компонент гравитационного поля и поля дилатона. В результате мы по существу проверили (3.4.33) для головастиков всех безмассовых полей, за исключением одного. Недавно с помощью тождества Бьянки было показано, что одно «отсутствующее» уравнение эквивалентно требованию того, чтобы аномалия Вира-соро s имела правильное значение. Сам факт появления одного

из уравнений не совсем из тех же условий, из которых появились остальные, довольно любопытен, и, возможно, его значение в полном объеме пока еще не выяснено

3.4.4. Поправки к общей теории относительности, вытекающие из теории струн

Теперь совершенно ясно, по крайней мере теоретически, как вывести поправки к общей теории относительности, вытекающие из теории струн. Уравнение Эйнштейна $R_{\mu\nu} = 0$ соответствует обращению в нуль однопетлевой бета-функции (3.4.27), а поправки к нему можно найти, вычисляя поправки к однопетлевой бета-функции. С учетом одно- и двухпетлевого вклада β -функция имеет вид

$$\beta_{\mu\nu}(X^0) = -\frac{1}{4\pi} \left(R_{\mu\nu} + \frac{\alpha'}{2} R_{\mu\kappa\lambda\tau} R_{\nu}^{\kappa\lambda\tau} \right). \quad (3.4.43)$$

Вычисление второго члена в (3.4.43) является весьма нетривиальной задачей. Однако должно быть очевидным, что так как константы взаимодействия в (3.4.8) пропорциональны (в нормальных римановых координатах) тензору Римана и его производным, то n -петлевая бета-функция дается выражением, содержащим члены приблизительно того вида, который приведен в формуле (3.4.43).

Таким образом, второй член является «струнной» поправкой к общей теории относительности, которая обращается в нуль при $\alpha' \rightarrow 0$, или, что эквивалентно, когда радиус многообразия M становится очень большим по сравнению с корнем квадратным из α' .

3.4.5. Включение других мод

Перейдем теперь к более систематическому изучению бозонной струны в фоновом поле, включая все безмассовые состояния замкнутой струны (а не только гравитон) в качестве части фона. Соответствующими полями замкнутой струны являются антисимметрический тензор $B_{\mu\nu}(X^0)$, поле дилатона $\Phi(X^0)$, а также гравитационное поле $g_{\mu\nu}(X^0)$.

Запишем наиболее общее действие для поля $X^\mu(\sigma, \tau)$, которое инвариантно относительно репараметризации мировой поверхности струны, а также перенормируемо в соответствии с правилом счета степеней; второе условие означает, что в каждом члене действия должны быть в точности две производные, взятые на мировой поверхности. Одним из возможных членов является уже изученное нами действие

$$S_1 = -\frac{1}{4\pi\alpha'} \int d^2\sigma \sqrt{-h} h^{\alpha\beta} \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X^\nu g_{\mu\nu}(X^0). \quad (3.4.44)$$

Оно включает эффекты 26-мерной гравитации. Второй член

$$S_2 = -\frac{1}{4\pi\alpha'} \int d^2\sigma \varepsilon^{\alpha\beta} \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X^\nu B_{\mu\nu}(X^0), \quad (3.4.45)$$

в котором используется антисимметричный тензор ¹⁾ $\varepsilon^{\alpha\beta}$ мировой поверхности, позволяет учесть эффекты антисимметричного тензорного поля $B_{\mu\nu}$ в σ -моделях. Множитель α' , который обычно берется равным $1/2$, необходим для того, чтобы сделать действия (3.4.44) и (3.4.45) безразмерными, так как X^μ имеет размерность длины. Заметим, что подынтегральное выражение в (3.4.45) при калибровочных преобразованиях

$$\delta B_{\mu\nu} = \partial_\mu \Lambda_\nu - \partial_\nu \Lambda_\mu \quad (3.4.46)$$

изменяется на полную производную. Мы критически проанализируем этот факт в глобальном контексте в гл. 14. Нам нужно еще найти способ включить в σ -модель поле дилатона Φ . На первый взгляд нет явного выражения, не связанного с (3.4.44), которым можно было бы воспользоваться для этой цели. Само построение дилатонного действия оказывается довольно необычным. Скаляр Риччи $R^{(2)}$ содержит две производные от метрики мировой поверхности h , поэтому на первый взгляд кажется, что двумерное действие Эйнштейна — Гильберта

$$\chi = \frac{1}{4\pi} \int d^2\sigma \sqrt{h} R^{(2)} \quad (3.4.47)$$

является перенормируемым и репараметризационно инвариантным выражением, которое можно было бы рассматривать в теории на мировой поверхности. Однако это иллюзия, так как (3.4.47) на самом деле является топологическим инвариантом, который не приводит к какой-либо динамике двумерной метрики h . Чтобы убедиться в том, что действие (3.4.47) действительно является топологическим инвариантом, заметим прежде всего, что в пространстве любой размерности тензор Римана $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$ удовлетворяет условию

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = -R_{\beta\alpha\gamma\delta} = -R_{\alpha\beta\delta\gamma}. \quad (3.4.48)$$

В двумерии антисимметричный тензор второго ранга должен быть пропорциональным тензору $\varepsilon_{\alpha\beta}$, так что $R_{\alpha\beta\gamma\delta}^{(2)}$ пропорционален $R^{(2)}$. Поэтому

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta}^{(2)} = (h_{\alpha\gamma}h_{\beta\delta} - h_{\beta\gamma}h_{\alpha\delta}) R^{(2)}/2. \quad (3.4.49)$$

¹⁾ $\varepsilon^{\alpha\beta}$ принимает значения $\varepsilon^{01} = -\varepsilon^{10} = 1$, $\varepsilon^{00} = \varepsilon^{11} = 0$. В действительности это плотность тензора, так как $\varepsilon^{\alpha\beta}/\sqrt{h}$ преобразуется как тензор.

Свертывая (3.4.49) с тензором $h^{\beta\delta}$, получаем в двумерии

$$R_{\alpha\gamma}^{(2)} - \frac{1}{2} h_{\alpha\gamma} R^{(2)} = 0. \quad (3.4.50)$$

С другой стороны, в пространстве любого числа измерений вариация действия (3.4.47) при инфинитезимальном варьировании метрического тензора равна

$$\int d^n\sigma \sqrt{h} \delta h^{\alpha\beta} \left(R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} h_{\alpha\beta} R \right), \quad (3.4.51)$$

что в силу (3.4.50) в двумерии обращается в нуль. Это не означает, что в двумерном пространстве действие (3.4.47) зануляется. Это означает, что действие (3.4.47), будучи инвариантным относительно произвольных вариаций метрики мировой поверхности, зависит только от топологии мировой поверхности струны. Как будет установлено в разд. 12.5.3, стандартный результат состоит в том, что если мировая поверхность струны является компактной римановой поверхностью рода g , то

$$\chi = 2(1 - g). \quad (3.4.52)$$

Величина χ известна как эйлерова характеристика двумерного многообразия.

Будучи топологическим инвариантом мировой поверхности, действие (3.4.47) фактически не влияет на динамику σ -модели. Однако, используя безразмерность скалярных полей в двумерии, мы можем обобщить действие (3.4.47) до более общего перенормируемого действия

$$S_3 = \frac{1}{4\pi} \int d^2\sigma \sqrt{h} \Phi(X^0) R^{(2)}. \quad (3.4.53)$$

Это оказывается правильным способом включения 26-мерного поля дилатона в сигма-модель.

Рассмотрим теперь сигма-модель с действием $S = S_1 + S_2 + S_3$ и проверим, является ли оно конформно инвариантным. Для этого выберем метрику мировой поверхности в следующем виде:

$$h_{\alpha\beta} = e^\varphi \eta_{\alpha\beta}. \quad (3.4.54)$$

Работая в пространстве $2 + \varepsilon$ измерений, вычислим зависимость эффективного действия от φ и посмотрим, обращается ли оно в нуль в пределе $\varepsilon \rightarrow 0$: Условия вейлевской инвариантности

в двумерии выполняются, если в низшем нетривиальном приближении имеют место равенства

$$0 = R_{\mu\nu} + \frac{1}{4} H_{\mu}^{\lambda\rho} H_{\nu\lambda\rho} - 2D_{\mu}D_{\nu}\Phi, \\ 0 = D_{\lambda}H_{\mu\nu}^{\lambda} - 2(D_{\lambda}\Phi)H_{\mu\nu}^{\lambda}, \quad (3.4.55)$$

$$0 = 4(D_{\mu}\Phi)^2 - 4D_{\mu}D^{\mu}\Phi + R + \frac{1}{12} H_{\mu\nu\rho}H^{\mu\nu\rho},$$

где тензор

$$H_{\mu\nu\rho} = \partial_{\mu}B_{\nu\rho} + \partial_{\rho}B_{\mu\nu} + \partial_{\nu}B_{\rho\mu} \quad (3.4.56)$$

является антисимметричным тензором напряженности поля третьего ранга, инвариантным при «калибровочных преобразованиях» $\delta B_{\mu\nu} = \partial_{\mu}\Lambda_{\nu} - \partial_{\nu}\Lambda_{\mu}$. (Ковариантные производные в пространстве D измерений обозначаются через D_{μ} , а на мировой поверхности — через ∇_{α} .) Если не ограничиваться пространством размерности $D = 26$, то в третьем равенстве в (3.4.55) имеется дополнительный член $(D - 26)/3\alpha'$.

Мы не будем приводить вычислений, чтобы получить равенства (3.4.55); эти вычисления аналогичны выполненным ранее для чисто гравитационного случая, хотя и намного сложнее. Стоит, однако, обратить внимание на одну тонкость. Хотя S_1 и S_2 в том виде, в каком они определены выше, на классическом уровне вейль-инвариантны, действие S_3 таким свойством не обладает. Тогда какой же смысл при обсуждении вейлевской инвариантности добавлять действие S_3 к действиям S_1 и S_2 ? Причина, по которой это имеет смысл по крайней мере на техническом уровне, состоит в том, что по соображениям размерности S_1 и S_2 пропорциональны $1/\alpha'$, а действие S_3 — нет. Так как ряд теории возмущений — это в действительности ряд по степеням α' , то действие S_3 должно рассматриваться как величина порядка α' по сравнению с действиями S_1 и S_2 . С учетом этого логично сравнить эффект действия S_3 в классической теории с квантовыми эффектами, к которым приводят действия S_1 и S_2 . Такое сравнение и нужно провести для того, чтобы вывести первое уравнение в (3.4.55). В последнее уравнение в (3.4.55) дают вклад однопетлевые диаграммы, построенные из действия S_3 , и *двухпетлевые* диаграммы, построенные из действия S_3 , и *двухпетлевые* диаграммы, построенные из действия S_1 и S_2 ; все эти вклады являются величинами одного и того же порядка по α' .

Решающей проверкой всего этого подхода является то, что равенства (3.4.55) должны иметь разумную физическую интерпретацию. На самом деле легко можно убедиться в том, что они являются уравнениями Эйлера — Лагранжа в теории

с 26-мерным действием

$$S_{26} = -\frac{1}{2\alpha'^2} \int d^{26}x \sqrt{g} e^{-2\Phi} \left(R - 4D_{\mu}\Phi D^{\mu}\Phi + \frac{1}{12} H_{\mu\nu\rho}H^{\mu\nu\rho} \right). \quad (3.4.57)$$

Таким образом, формула (3.4.57) описывает длинноволновый предел взаимодействий безмассовых мод замкнутой бозонной струны. При желании гравитационное действие в (3.4.57) можно привести к виду $\int d^{26}x \sqrt{g} R$, а не $\int d^{26}x \sqrt{g} e^{-2\Phi} R$, включив соответствующую степень множителя $e^{-\Phi}$ в определение пространственно-временной метрики $g_{\mu\nu}$. Поправки к (3.4.57), возникающие в теории струн, можно найти, как и в чисто гравитационном случае, вычисляя поправки более высокого порядка теории возмущений в сигма-модели.

Мы обсудили члены взаимодействия в сигма-модели с двумя производными на мировой поверхности, которые соответствуют вершинным операторам безмассовых полей. Можно также постараться включить и другие операторы в лагранжиан сигма-модели. Особенно просто включить в лагранжиан член взаимодействия без производных $S(X^{\mu})$, где S — некоторая скалярная функция. Так как вершинный оператор тахиона $e^{ik \cdot x}$ не содержит производных, включение взаимодействий без производных соответствует тому, что среднее тахионного поля будет отлично от нуля. В бозонной сигма-модели довольно естественно это сделать, а фактически, по-видимому, неестественно не сделать этого. Вычисляя в однопетлевом приближении бета-функцию, даже в чисто гравитационном случае мы столкнулись с квадратичными расходимостями, которые нами были проигнорированы на том основании, что в размерной регуляризации они не важны. Наличие квадратичных расходимостей в действительности отражает тот факт, что в сигма-модель можно было бы включить взаимодействие без производных нулевой размерности.

3.4.6. Среднее дилатона и константа взаимодействия струн

Формализм, с помощью которого мы в данном разделе изучали распространение струн в фоновых полях, позволяет понять много такого, что труднодоступно для понимания при других подходах. Здесь мы приведем лишь один пример, в котором результат удобнее всего получить, рассуждая на языке сигма-модели.

Если рассматривается рассеяние гравитонов в теории бозонной замкнутой струны (или, в сущности, рассеяние любых ее мод), то в каждой вершине взаимодействия должен быть мно-

житель, являющийся константой гравитационного взаимодействия. Древесная диаграмма с M внешними гравитонами содержит $M - 2$ вершины, как изображено на рис. 3.9, *a*, а каждая

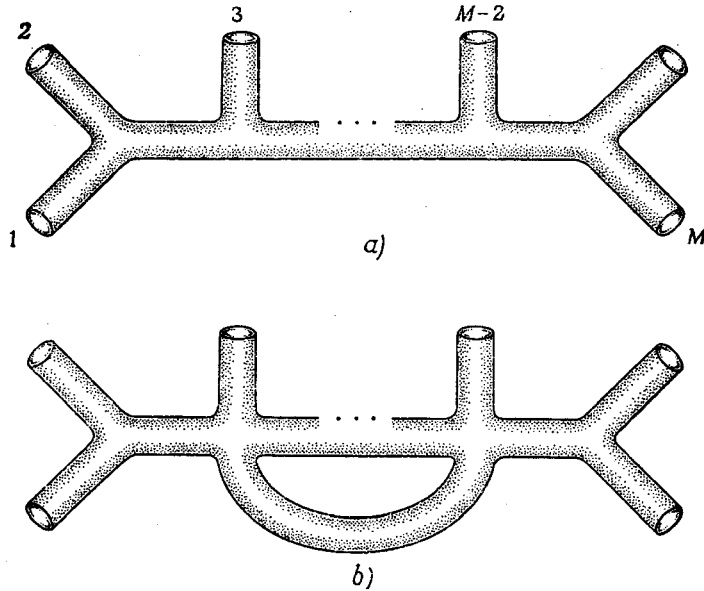


Рис. 3.9. Амплитуда рассеяния M гравитонов на уровне древесных диаграмм (рис. *a*) пропорциональна κ^{M-2} . Как показано на рис. *b*), каждая петля добавляет дополнительный множитель κ^2 .

петля добавляет еще две, см. рис. 3.9, *b*. Таким образом, петлевая диаграмма общего вида пропорциональна

$$\kappa^M \cdot \kappa^{-2(1-g)}, \quad (3.4.58)$$

где M — число внешних вершинных операторов, а g — род римановой поверхности, равный числу петель. Множитель κ^M можно включить в нормировку внешних вершинных операторов; просто вместо V мы будем пользоваться операторами κV в качестве вершинных операторов для испускания струнного состояния. Сосредоточимся теперь на интерпретации множителя $\kappa^{-2(1-g)}$, зависящего от количества петель. При обычном построении струнной бозонной теории кроме константы κ , которая в 26-мерии имеет размерность (длина)¹², в нее также входит параметр α' размерности (длина)². Поэтому на первый взгляд может показаться, что теория замкнутой бозонной струны содержит произвольный фундаментальный безразмерный параметр

$\alpha'/\kappa^{1/6}$. Мы были бы весьма разочарованы, если бы согласование квантовой механики и теории гравитации привело к необходимости ввести еще одну фундаментальную безразмерную константу. К счастью, это не так. Вернемся к сигма-модели с действием $S = S_1 + S_2 + S_3$, которую мы рассмотрели в предыдущем разделе. Статистическая сумма представляется в виде функционального интеграла по поверхности рода g

$$Z_g = \kappa^{-2(1-g)} \int DX^\mu Dhe^{-S}. \quad (3.4.59)$$

Здесь мы специально выделили множитель $\kappa^{-2(1-g)}$, который, по-видимому, необходим, если учесть (3.4.58).

Чтобы понять, почему в теории бозонной замкнутой струны нет фундаментального струнного параметра, нужно обратить внимание на относительно простую зависимость в формуле (3.4.59) от поля дилатона Φ . Возвращаясь к формулам (3.4.47), (3.4.52) и (3.4.53), мы видим, что при сдвиге

$$\Phi \rightarrow \Phi + a \quad (3.4.60)$$

(где a — произвольная константа) действие сигма-модели изменяется следующим образом:

$$S \rightarrow S + 2a(1-g). \quad (3.4.61)$$

В формуле (3.4.59) такое изменение действия эквивалентно перепределению константы гравитационного взаимодействия

$$\kappa \rightarrow e^{-a}\kappa. \quad (3.4.62)$$

Так что постоянную κ можно включить в сдвиг вакуумного среднего поля Φ , т. е. κ не является фундаментальным параметром теории.

Полученный результат можно также проверить, используя низкоэнергетическое эффективное действие (3.4.57). Хотя в (3.4.57) константа гравитационного взаимодействия κ появляется в виде свободного параметра, на самом деле ее можно включить в сдвиг значения поля Φ . (Это не приведет к изменению значения α' , так как α' не входит в S_3 .) Вместо однопараметрического семейства теорий, различающихся значениями фундаментального безразмерного параметра $\alpha'/\kappa^{1/6}$, в качестве теории бозонной струны мы имеем одну-единственную теорию, в которой на уровне древесных диаграмм имеется однопараметрическое семейство вакуумных состояний, различающихся вакуумными средними безмассового скалярного поля Φ .

Изложенное в этом разделе можно обобщить и на случай суперсимметричной теории струн, исследуя вместо рассмотренной здесь бозонной сигма-модели суперсимметричную нелиней-

ную сигма-модель, хотя мы и не будем это делать в настоящей книге. Суперсимметричные теории струн также не имеют фундаментального безразмерного параметра, в чем мы убедились в гл. 13, рассматривая низкоэнергетический предел. В гл. 14 мы кратко обсудим интересный пример физической проблемы (содержащий аксионы и инстантоны на мировой поверхности), когда сигма-модельный подход к теории струн приводит к важным результатам, получить которые другими путями довольно затруднительно. Имеется много других подобных примеров.

3.5. Резюме

Ковариантное квантование методом функциональных интегралов, использующее духи Фаддеева—Попова в действии с фиксированной калибровкой и BRST-симметрию, первоначально было развито для исследования теории Янга—Миллса. В настоящей главе мы убедились в том, что эта же самая техника может быть эффективно и плодотворно применена и в теории струн. В частности, нам удалось получить новые направления разработки многих тем, впервые введенных в гл. 2. Изучая в следующей главе суперструны, мы увидим, что и для них можно построить аналогичные конструкции при условии, что $D = 10$. Этот формализм лежит в основе современных исследований, в которых предпринимаются попытки сформулировать теорию в терминах действия, зависящего от функциональных струнных полей и обладающего очень широкой калибровочной симметрией.

Мы также обсудили динамику струны в присутствии фоновых полей с учетом нетривиальной геометрии пространства-времени. Требуя, чтобы двумерная теория мировой поверхности была конформно инвариантной также и на квантовом уровне, когда аномалии в следе двумерного тензора энергии-импульса должны обращаться в нуль, мы установили, что фоновые поля должны удовлетворять полевым уравнениям самой струнной теории. Это приводит к хитроумной самосогласованности между фоновыми полями, определяющими динамику струны, и динамикой струны, решения которой определяют возможные фоновые поля. Понимание этой связи, которая, несомненно, чрезвычайно важна, все еще находится в состоянии развития.

4. Суперсимметрия мировой поверхности в теории струн

Теория бозонной струны, изложенная в гл. 2 и 3, несмотря на все ее замечательные свойства, обладает рядом недостатков. Наиболее очевидными из них являются отсутствие фермионов и существование тахионов. Возможно, последнее обстоятельство указывает на то, что вакуум был определен неправильно, и имеется какой-то другой стабильный вакуум (как и в теории Хиггса), который не приводит к появлению тахионов. Несмотря на значительные многолетние усилия, этот вопрос все еще остается нерешенным. Другой путь, который оказался более плодотворным,—попытаться сформулировать еще одну теорию струн. Прогресс в этом направлении связан с введением внутренних степеней свободы, распространяющихся вдоль струны.

Конкретная теория струн, рассматриваемая в настоящей главе, основана на введении суперсимметрии мировой поверхности, связывающей пространственно-временные координаты $X^\mu(\sigma, \tau)$ с их фермионными партнерами $\psi^\mu(\sigma, \tau)$. Последние являются двухкомпонентными спинорами мировой поверхности. Мы покажем, что принцип действия с суперсимметрией $N = 1$ приводит к последовательной теории струн с критической размерностью $D = 10$. Усечение спектра способом, предложенным Глиози, Шерком и Оливом, придает суперсимметрии с размерностью $D = 10$ пространственно-временной смысл, причем как с одним, так и с двумя майорано-вейлевскими суперзарядами ($N = 1$ или $N = 2$) в зависимости от выбора граничных условий.

Ввиду чрезвычайно богатой и удивительной структуры, возникающей из-за введения суперсимметрии мировой поверхности с $N = 1$, естественно рассмотреть обобщения, основанные на расширении суперсимметрии. Этот вопрос кратко исследуется в разд. 4.5, где показывается, что суперсимметрия мировой поверхности с $N = 2$ приводит к теории струн с критической размерностью $D = 2$. Начав с суперсимметрии при $N = 4$, мы приходим к еще более разочарывающему результату — отрицательной критической размерности.

Существует еще одна возможность построить новые теории струн, которая связана с тем наблюдением, что в последовательные теории замкнутых струн можно вводить независимо моды, движущиеся влево, и моды, движущиеся вправо. Это позволяет использовать для каждой из них разные схемы. В частности, взяв для мод, движущихся вправо, моды суперструны при $D = 10$, а для мод, движущихся влево, моды бозонной струны при $D = 26$, мы получаем гетеротическую струну. Этот вопрос будет детально исследован в гл. 6.

4.1. Классическая теория

Напомним, что действие бозонной струны в конформной калибровке имеет вид

$$S = -\frac{1}{2\pi} \int d^2\sigma \partial_\alpha X_\mu \partial^\alpha X^\mu. \quad (4.1.1)$$

Это действие свободной полевой теории в двумерии. Векторы $X^\mu(\sigma, \tau)$, $\mu = 0, 1, \dots, D-1$, являются координатами струны, распространяющейся в D -мерном пространстве-времени. Если мы хотим обобщить теорию бозонной струны, то действие (4.1.1) можно заменить на действие более общей двумерной полевой теории. При этом самой простой возможностью является та, в которой более общая теория могла бы снова быть свободной полевой теорией¹⁾. Таким образом, мы приходим к идее о необходимости введения в (4.1.1) дополнительных свободных полей. Физически они соответствовали бы внутренним степеням свободы, которые могут свободно распространяться вдоль струны. Можно исследовать различные варианты. Например, можно постараться ввести свободные фермионные поля $\psi_A(\sigma, \tau)$. (Прописные буквы A, B, C обозначают индексы спиноров мировой поверхности. В двумерии спинорный индекс A принимает два значения, если рассматриваются обе киральности.) Если следовать таким путем, нужно определить, должен ли фермион ψ быть дираковским или майорановским и должен ли он нести дополнительные квантовые числа. Имеется удивительно немного вариантов, которые приводят к интересным теориям. Один из них сводится к введению D -мультиплетов майорановских фермионов $\psi_A^\mu(\sigma, \tau)$, преобразующихся по векторному представлению

¹⁾ Может показаться странным, что мы стараемся обобщать действие (4.1.1), а не репараметризационно инвариантный лагранжиан, из которого оно получается выбором конформной калибровки. Оказывается, что, используя (4.1.1), легче догадаться, каким образом осуществить обобщение. Поняв ключевые моменты этого обобщения, мы сможем вернуться назад и найти соответствующий репараметризационно инвариантный лагранжиан.

группы Лоренца $SO(D-1, 1)$. Рассмотрим поэтому лагранжиан

$$S = -\frac{1}{2\pi} \int d^2\sigma \{ \partial_\alpha X^\mu \partial^\alpha X_\mu - i \bar{\psi}^\mu \rho^\alpha \partial_\alpha \psi_\mu \}. \quad (4.1.2)$$

Здесь символ ρ^α представляет двумерные матрицы Дирака (символы γ^μ и Γ^μ резервируются для четырехмерных и D -мерных пространственно-временных гамма-матриц). Удобен базис

$$\rho^0 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \rho^1 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.1.3)$$

Эти матрицы удовлетворяют условию

$$\{ \rho^\alpha, \rho^\beta \} = -2\eta^{\alpha\beta}. \quad (4.1.4)$$

Компоненты спинора ψ в этом базисе будут обозначаться через ψ_\pm :

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_- \\ \psi_+ \end{pmatrix}. \quad (4.1.5)$$

Мы выбрали матрицы ρ^α чисто мнимыми, так что оператор $i\rho^\alpha \partial_\alpha$ является вещественным, и имеет смысл потребовать в этом представлении алгебры Дирака, чтобы компоненты спинора мировой поверхности ψ^μ были вещественными. Такой двухкомпонентный вещественный спинор известен как майорановский спинор. Символ $\bar{\psi}$, как обычно, означает произведение $\psi^\dagger \rho^0$.

Майорановские спиноры удовлетворяют набору важных тождеств, которые не выполняются для дираковских спиноров. Например, для майорановских спиноров χ равно просто $\chi^T \rho^0$; нет необходимости брать комплексное (или эрмитово) сопряжение от χ , так как оно вещественно. Поэтому $\bar{\chi} \psi$ совпадает с $\rho_{AB}^0 \chi_A \psi_B$. Так как ρ^0 — антисимметричная матрица, последнее выражение симметрично по χ и ψ , если они являются антикоммутирующими переменными, так что в этом случае

$$\bar{\chi} \psi = \bar{\psi} \chi. \quad (4.1.6)$$

Такие манипуляции являются типичными для работы с майорановскими фермионами в двумерии.

Несколько моментов в действии (4.1.2) могут вызвать недоумение. Прежде всего введение антикоммутирующего поля ψ^μ , преобразующегося как *вектор*, т. е. бозонное представление группы $SO(D-1, 1)$, кажется несколько противоречащим интуиции. Этот выбор означает, что ψ с пространственно-временной точки зрения отображает бозоны в бозоны, а фермионы в фермионы. Хотя это и может противоречить интуиции, все же

не вступает в конфликт с теоремой о связи спина и статистики. Наоборот, (4.1.2) является действием двумерной теории поля, а не теории поля, определенной в пространстве-времени, и ψ_A^μ преобразуется как спинор при преобразованиях двумерной мировой поверхности в полном согласии с обычной связью спина и статистики¹⁾. Группа Лоренца $SO(D-1, 1)$ является просто группой внутренней симметрии (в рамках подхода мировой поверхности), и из теоремы о связи спина и статистики ничего не следует относительно того, должны ли антикоммутирующие поля преобразовываться как векторы или как спиноры при преобразованиях из группы внутренней симметрии. Приписывание лоренцевых квантовых чисел полю ψ , хотя и не приводит к парадоксам, все же выглядит странно, и мы позже вновь вернемся к этому вопросу.

На самом деле имеется более насущная проблема, с которой мы сталкиваемся, пытаясь понять действие (4.1.2) как действие двумерной квантовой теории поля. Напомним, что коммутационными соотношениями бозонных координат при равных τ являются соотношения $[X^\mu(\sigma), X^\nu(\sigma')] = i\pi\eta^{\mu\nu}\delta(\sigma - \sigma')$. Лоренцева метрика $\eta^{\mu\nu}$ не является положительной, и по этой причине осцилляторы $X^0(\sigma)$ в (4.1.1) порождают моды с неправильной метрикой, или «духи». К счастью, алгебра симметрии действия (4.1.1) является бесконечномерной алгеброй Вирасоро, которой можно воспользоваться для устранения духов в пространстве критической размерности $D=26$. Чтобы придать смысл действию (4.1.2), мы должны столкнуться с совершенно аналогичным вопросом для фермионов. Из (4.1.2) можно вывести коммутационные соотношения при равных τ для фермионов:

$$\{\psi_A^\mu(\sigma), \psi_B^\nu(\sigma')\} = \pi\eta^{\mu\nu}\delta_{AB}\delta(\sigma - \sigma'). \quad (4.1.7)$$

Это антикоммутационное соотношение является квантовым аналогом скобок Пуассона для грассмановых переменных. Знакомая нам проблема предстает по-новому. Поскольку $\eta^{00} = -1$, «временеподобные» фермионы $\psi_A^0(\sigma)$ порождают состояния с неправильной метрикой, так же как это делали «временеподобные» бозоны $X^0(\sigma)$. Условия Вирасоро, добавленные к (4.1.2), могут, как и в чисто бозонной модели, быть достаточными для устранения мод с неправильной метрикой, порожденных

¹⁾ Говоря точнее, в размерности $1+1$ понятие спина не определено, но существует двумерная группа Лоренца (или локальная группа Лоренца в случае общековариантной теории), и имеет смысл выяснить, как двумерное поле преобразуется под действием этой группы. Теорема о связи спина со статистикой утверждает, что в локальной квантовой теории поля в двух измерениях антикоммутирующие поля должны иметь полуцелые лоренцевы квантовые числа.

компонентой $X^0(\sigma)$, но, чтобы решить аналогичную проблему для $\psi_A^0(\sigma)$, мы должны найти новую симметрию и новые связи, которые могут сделать для фермионов то же, что условия Вирасоро делают для бозонов. Оказывается, что этот шаг можно осуществить. Новая симметрия является суперсимметрией, или, точнее, суперконформной симметрией. Выяснилось, что отсюда вытекает множество результатов.

4.1.1. Глобальная суперсимметрия мировой поверхности

Новая симметрия свободной теории поля с действием (4.1.2) на первый взгляд может показаться неожиданной, но в действительности продемонстрировать ее не представляет особого труда. Пусть ε является постоянным (т. е. независимым от σ и τ) антикоммутирующим инфинитезимальным майорановским спинором. Действие S в (4.1.2) инвариантно относительно инфинитезимальных преобразований

$$\begin{aligned} \delta X^\mu &= \bar{\varepsilon}\psi^\mu, \\ \delta\psi^\mu &= -i\rho^\alpha\partial_\alpha X^\mu\varepsilon, \end{aligned} \quad (4.1.8)$$

где ε — постоянный антикоммутирующий спинор. Эти преобразования перемешивают бозонные и фермионные координаты и получили название суперсимметричных преобразований.

Основной алгебраический факт, относящийся к суперсимметрии, состоит в том, что коммутатор двух преобразований суперсимметрии дает пространственную трансляцию. В данном контексте «пространственная трансляция» означает трансляцию мировой поверхности струны. Чтобы явно в этом убедиться, рассмотрим соотношение

$$[\delta_1, \delta_2]X^\mu = \delta_1(\bar{\varepsilon}_2\psi^\mu) - (1 \leftrightarrow 2) = a^\alpha\partial_\alpha X^\mu, \quad (4.1.9)$$

где

$$a^\alpha = 2i\bar{\varepsilon}_1\rho^\alpha\varepsilon_2. \quad (4.1.10)$$

Здесь важно, что для майорановских фермионов в $1+1$ измерениях $\bar{\varepsilon}_1\rho^\alpha\varepsilon_2 = -\bar{\varepsilon}_2\rho^\alpha\varepsilon_1$. Читателю предлагается проверить, что аналогично

$$[\delta_1, \delta_2]\psi^\mu = a^\alpha\partial_\alpha\psi^\mu. \quad (4.1.11)$$

Здесь необходимо воспользоваться тем фактом, что ψ удовлетворяет уравнению Дирака, выведенному из действия (4.1.2), а именно $\rho^\alpha\partial_\alpha\psi = 0$. В следующем подразделе мы переформулируем теорию в таком виде, в котором алгебра суперсимметрии замыкается и без использования уравнений движения.

Используя формулу (4.1.2) и следующие за ней формулы (4.1.8) закона преобразования суперсимметрии, можно вывести формулу для супертока и тензора энергии-импульса. Эффективный способ сделать это основан на методе Нётер, описанном в разд. 2.1.3, и заключается в следующем. Рассмотрим, например, преобразование суперсимметрии (4.1.8). Если ϵ является постоянной величиной, то оно оставляет действие S неизменным. Если же ϵ не является константой, то преобразование (4.1.8) меняет действие и его вариация имеет следующий общий вид:

$$\delta S = \frac{2}{\pi} \int d^2\sigma (\partial_\alpha \bar{\epsilon}) J^\alpha. \quad (4.1.12)$$

Величина J^α является тогда сохраняющимся нётеровским током, как это было объяснено в разд. 2.1.3. Эта процедура, примененная в преобразованиях (4.1.8), приводит к формуле для супертока

$$J_\alpha = \frac{1}{2} \rho^\beta \rho_\alpha \psi^\mu \partial_\beta X_\mu \quad (4.1.13)$$

(где выбрана удобная в дальнейшем нормировка). Она же, примененная к трансляции $\delta\sigma^\alpha = \text{const}$, приводит к формуле для тензора энергии-импульса:

$$T_{\alpha\beta} = \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X_\mu + \frac{i}{4} \bar{\psi}^\mu \rho_\alpha \partial_\beta \psi_\mu + \frac{i}{4} \bar{\psi}^\mu \rho_\beta \partial_\alpha \psi_\mu - (\text{след}). \quad (4.1.14)$$

Читателю настоятельно рекомендуется проверить с помощью уравнений движения, что токи (4.1.13) и (4.1.14) действительно сохраняются. Тензор энергии-импульса является бесследовым, совсем как в чисто бозонной теории, так что в компонентах светового конуса $T_{+-} = T_{-+} = 0$. Некоторые компоненты супертока тоже обращаются в нуль, так как они удовлетворяют аналогичному условию

$$\rho^\alpha J_\alpha = 0 \quad (4.1.15)$$

вследствие тождества $\rho^\alpha \rho^\beta \rho_\alpha = 0$, которое выполняется в двумерии.

4.1.2. Суперпространство

Действие (4.1.2) является действием двумерной теории поля, сформулированной в обычном двумерном пространстве Σ , т. е. на мировой поверхности струны. Суперсимметрию можно сделать явной, если рассмотреть теорию в двумерном суперпространстве $\bar{\Sigma}$, в котором к координатам мировой поверхности σ^α добавляются еще две грассмановы координаты θ^A , образующие двухкомпонентный майорановский спинор. Антиккоммутирующие

координаты сначала могут показаться странными, но в действительности ими не так трудно пользоваться. Произвольной функцией Y^μ в суперпространстве была бы функция

$$Y^\mu(\sigma, \theta) = X^\mu(\sigma) + \bar{\theta} \psi^\mu(\sigma) + \frac{1}{2} \bar{\theta} \theta B^\mu(\sigma), \quad (4.1.16)$$

зависящая произвольным образом и от бозонных, и от фермионных координат суперпространства. Такая функция называется суперполем. Выражение (4.1.16) является полным степенным рядом по степеням θ , так как из антикоммутирующих свойств переменных θ следует, что любое их произведение, содержащее более двух сомножителей, обращается в нуль. Суперполе Y^μ объединяет поля X^μ и ψ^μ с новым полем B^μ , полезность которого на первый взгляд может быть неочевидной.

Начнем с объяснения того, как суперпространство делает суперсимметрию явной. Суперсимметрия в суперпространстве представляется генератором

$$Q_A = \frac{\partial}{\partial \theta^A} + i(\rho^A \theta)_A \partial_\alpha. \quad (4.1.17)$$

Часто оказывается удобным ввести произвольный антикоммутирующий параметр ϵ_A — инфинитезимальный параметр преобразования суперсимметрии, и работать не с Q_A , а с $\bar{\epsilon} Q$. Последний генерирует преобразование

$$\begin{aligned} \delta \theta^A &= [\bar{\epsilon} Q, \theta^A] = \epsilon^A, \\ \delta \sigma^\alpha &= [\bar{\epsilon} Q, \sigma^\alpha] = i \bar{\epsilon} \rho^\alpha \theta \end{aligned} \quad (4.1.18)$$

координат суперпространства. Таким путем преобразования суперсимметрии реализуются в суперпространстве как «геометрические» преобразования. Суперзаряд Q также может быть использован для определения преобразований координат в соответствии с тем, что

$$\delta Y^\mu = [\bar{\epsilon} Q, Y^\mu] = \bar{\epsilon} Q Y^\mu. \quad (4.1.19)$$

Так как

$$[\bar{\epsilon}_1 Q, \bar{\epsilon}_2 Q] = -2i \bar{\epsilon}_1 \rho^\alpha \epsilon_2 \partial_\alpha, \quad (4.1.20)$$

то очевидно, что и без использования уравнений движения

$$[\delta_1, \delta_2] Y^\mu = -a^\alpha \partial_\alpha Y^\mu, \quad (4.1.21)$$

где a^α определено в (4.1.10). Раскладывая (4.1.19) по компонентам и используя двумерные соотношения Фирца

$$\theta_A \bar{\theta}_B = -\frac{1}{2} \delta_{AB} \bar{\theta}_C \theta_C, \quad (4.1.22)$$

получим

$$\begin{aligned}\delta X^\mu &= \bar{\epsilon}\psi^\mu, \\ \delta\psi^\mu &= -i\rho^\alpha\epsilon\partial_\alpha X^\mu + B^\mu\epsilon, \\ \delta B^\mu &= -i\bar{\epsilon}\rho^\alpha\partial_\alpha\psi^\mu.\end{aligned}\quad (4.1.23)$$

Эти формулы сведутся к формулам преобразования (4.1.8), если положить $B^\mu = \rho^\alpha\partial_\alpha\psi^\mu = 0$, что соответствует тому факту, что в нашей первоначальной формулировке поле B^μ отсутствовало, а $\rho^\alpha\partial_\alpha\psi^\mu$ в силу уравнения поля было равно нулю. Из-за той роли, которую играет вспомогательное поле B^μ , замыкание алгебры суперсимметрии в этом случае достигается без использования уравнений движения.

Пусть теперь Y_1, \dots, Y_k — некоторые суперполя. Их закон преобразования при преобразованиях суперсимметрии имеет вид $\delta Y_k = \bar{\epsilon}QY_k$. Любое произведение таких суперполей преобразуется аналогично. Например,

$$\delta(Y_1Y_2) = \bar{\epsilon}Q(Y_1Y_2). \quad (4.1.24)$$

Это происходит из-за того, что оператор $\bar{\epsilon}Q$, будучи дифференциальным оператором первого порядка в суперпространстве, удовлетворяет правилу Лейбница

$$\bar{\epsilon}Q(Y_1Y_2) = \bar{\epsilon}Q(Y_1)Y_2 + Y_1\bar{\epsilon}Q(Y_2), \quad (4.1.25)$$

характерному для такого типа операторов первого порядка. Такое свойство оператора является гарантией того, что если Y_1 и Y_2 преобразуются как суперполя, то, как видно из (4.1.24), так же будет преобразовываться произведение Y_1Y_2 . Этот результат не должен удивлять. Суперполе является просто функцией в суперпространстве, и естественно, что произведение двух функций Y_1 и Y_2 снова является такой же функцией.

Мы хотели бы научиться, используя суперпространство, записывать лагранжиан, инвариантный относительно преобразований суперсимметрии (4.1.23). Для этого нам прежде всего необходим оператор производной, инвариантный относительно преобразований суперсимметрии. Им является оператор

$$D = \frac{\partial}{\partial\theta} - i\rho^\alpha\theta\partial_\alpha. \quad (4.1.26)$$

Этот оператор известен как ковариантная производная в суперпространстве. Его основные свойства состоят в том, что он антикоммутирует с Q ,

$$\{D_A, Q_B\} = 0, \quad (4.1.27)$$

и удовлетворяет условиям

$$\{D_A, \bar{D}_B\} = 2i(\rho^\alpha)_{AB}\partial_\alpha \quad (4.1.28)$$

или

$$\{D_A, D_B\} = 2i(\rho^\alpha\rho^0)_{AB}\partial_\alpha. \quad (4.1.29)$$

Ковариантная производная в суперпространстве оказывается полезной при построении лагранжианов по следующей причине. Равенство (4.1.27) является гарантией того, что если объем преобразуется при преобразованиях суперсимметрии как $\delta Y = \bar{\epsilon}QY$, то его ковариантная производная $D_A Y$ преобразуется таким же образом. Следовательно, ковариантная производная суперполя снова является суперполем. Это позволяет нам записать суперсимметричный лагранжиан, содержащий производные, — как, разумеется, и все интересные лагранжианы.

Другим существенным моментом при построении действия, инвариантного относительно преобразований суперсимметрии, является то, что нужно иметь меру интегрирования в суперпространстве. Естественный выбор — интеграл по «всему» суперпространству

$$\int d^2\sigma d^2\theta, \quad (4.1.30)$$

где фермионное интегрирование $d^2\theta$ является стандартным интегралом Березина для фермионов. Интеграл Березина определяется так, что интеграл по антикоммутирующим координатам от функции общего вида равен¹⁾

$$\int d^2\theta (a + \theta^1 b_1 + \theta^2 b_2 + \theta^1\theta^2 c) = c. \quad (4.1.31)$$

Другими словами, интегрирование выделяет коэффициент при $\theta^1\theta^2$. Отсюда следует, что (так как $\bar{\theta}\theta = \theta\rho^0\theta = -2i\theta^1\theta^2$)

$$\int d^2\theta\bar{\theta}\theta = -2i. \quad (4.1.32)$$

Как и обычные интегралы по бозонным переменным, интеграл Березина обладает тем свойством, что можно интегрировать по частям:

$$\int d^2\theta \frac{\partial V}{\partial\theta^A} = 0 \quad (4.1.33)$$

для любого V . Равенство (4.1.33) выполняется в силу того, что производная по θ убирает одну из двух тет в подынтегральном

¹⁾ Обсуждая функциональный интеграл по антикоммутирующим духовым координатам в разд. 3.1.1, мы на самом деле уже пользовались бесконечномерными интегралами Березина.

выражении, что приводит к интегралу, который в соответствии с правилами Березина обращается в нуль.

Основным свойством интеграла (4.1.30) является его инвариантность относительно преобразований суперсимметрии в следующем смысле. Пусть Y — произвольное суперполе, и пусть

$$S = \int d^2\sigma d^2\theta Y. \quad (4.1.34)$$

Тогда S инвариантно относительно преобразований суперсимметрии $\delta Y = \bar{\epsilon} Q Y$. Это объясняется тем, что, записывая

$$\delta S = \int d^2\sigma d^2\theta \bar{\epsilon} Q Y \quad (4.1.35)$$

и записывая оператор Q в явном виде, мы находим, что (4.1.35) обращается в нуль, если проинтегрировать по частям. Под «интегрированием по частям» мы имеем, конечно, в виду равенство (4.1.33), а также обычное интегрирование по частям в обычных интегралах по бозонным переменным. Итак, мы выяснили, каким образом писать суперсимметричные лагранжианы. Для всякого суперполя Y действие S инвариантно относительно суперсимметрии. Суперполе Y в свою очередь может быть построено как некоторое произведение элементарных суперполей и их ковариантных производных.

Вернемся теперь к нашей первоначальной проблеме, в которой элементарные суперполя являются D -мультиплетом, преобразующимся по векторному представлению группы $SO(D-1, 1)$. Мы уже знаем, как построить для этого суперполя бесконечное число суперсимметричных лагранжианов. Особый интерес представляет действие

$$S = \frac{i}{4\pi} \int d^2\sigma d^2\theta \bar{D}Y^\mu DY_\mu. \quad (4.1.36)$$

Чтобы вычислить интегралы по θ в явном виде, сначала заметим, что

$$DY^\mu = \psi^\mu + \theta B^\mu - i\rho^\alpha \theta \partial_\alpha X^\mu + \frac{i}{2} \bar{\theta} \theta \rho^\alpha \partial_\alpha \psi^\mu, \quad (4.1.37)$$

$$\bar{D}Y^\mu = \bar{\psi}^\mu + B^\mu \bar{\theta} + i\partial_\alpha X^\mu \bar{\theta} \rho^\alpha - \frac{i}{2} \bar{\theta} \theta \partial_\alpha \bar{\psi}^\mu \rho^\alpha, \quad (4.1.38)$$

где мы воспользовались соотношением (4.1.22). Таким образом, $\bar{D}Y^\mu DY_\mu$ содержит следующие слагаемые, квадратичные по θ :

$$\begin{aligned} & \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X_\mu \bar{\theta} \rho^\alpha \rho^\beta \theta + B^\mu B_\mu \bar{\theta} \theta + \frac{i}{2} (\bar{\psi}^\mu \rho^\alpha \partial_\alpha \psi_\mu - \partial_\alpha \bar{\psi}^\mu \rho^\alpha \psi_\mu) \bar{\theta} \theta = \\ & = (-\partial^\alpha X^\mu \partial_\alpha X_\mu + i\bar{\psi}^\mu \rho^\alpha \partial_\alpha \psi_\mu + B^\mu B_\mu) \bar{\theta} \theta. \end{aligned} \quad (4.1.39)$$

Используя правило интегрирования (4.1.32), мы можем разложить действие по компонентам:

$$S'_0 = -\frac{1}{2\pi} \int d^2\sigma (\partial_\alpha X^\mu \partial^\alpha X_\mu - i\bar{\psi}^\mu \rho^\alpha \partial_\alpha \psi_\mu - B^\mu B_\mu). \quad (4.1.40)$$

Уравнения движения, полученные из этого действия, гласят, что $B^\mu = 0$, так что вполне законно положить B^μ равным нулю и забыть об этом поле. Таким путем мы вновь вернемся к действию (4.1.2), с которого начали, но с одним существенным отличием: теперь мы намного лучше понимаем, почему (4.1.2) инвариантно относительно преобразований суперсимметрии.

Вспомним теперь о первоначальной цели, которую мы ставили, начав поиски новой суперсимметрии. Чтобы действие (4.1.2) с его времениподобными фермионами ψ^0 , обладающими неправильной метрикой, приводило к приемлемой теории, оно должно обладать более широкой симметрией, позволяющей исключить нежелательные моды. Обнаружение суперсимметрии у действия (4.1.2) или (4.1.40), несомненно, является шагом в правильном направлении, но он приводит к необходимости работать с алгеброй бесконечнокомпонентной симметрии.

4.1.3. Уравнения связей

Алгебру с требуемой бесконечнокомпонентной симметрией не так трудно найти. Единственными преобразованиями симметрии, с которыми мы до сих пор имели дело, были преобразования глобальной суперсимметрии (4.1.8) с постоянным параметром суперсимметрии ϵ . Постоянные трансляции координат мировой поверхности также неявно присутствовали в этом обсуждении, так как коммутатор двух генераторов глобальной суперсимметрии Q_A является трансляцией. Указанные трансляции суть трансляции координат мировой поверхности σ и τ . Но в теории бозонной струны трансляции σ и τ генерируются операторами L_0 и \bar{L}_0 , т. е. двумя генераторами Вирасоро. Точно так же, как L_0 и \bar{L}_0 генерируют лишь небольшую подалгебру алгебры бесконечномерной симметрии теории бозонной струны, операторы Q_A генерируют алгебру, которую мы должны расширить до алгебры бесконечнокомпонентной «суперсимметрии».

Уравнение движения для фермионов, выведенное из (4.1.2), является просто двумерным уравнением Дирака $\rho^\alpha \partial_\alpha \psi = 0$, к которому нужно добавить граничные условия, что будет обсуждаться ниже. Это уравнение в базисе, в котором матрицы ρ^α имеют вид (4.1.3), разбивается на два несвязанных друг с дру-

гом уравнения, одно для верхних, а другое — для нижних компонент спинора ψ^μ :

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial\sigma} + \frac{\partial}{\partial\tau}\right)\psi_-^\mu &= 0, \\ \left(\frac{\partial}{\partial\sigma} - \frac{\partial}{\partial\tau}\right)\psi_+^\mu &= 0. \end{aligned} \quad (4.1.41)$$

Таким образом, ψ_- и ψ_+ описывают моды, движущиеся вправо и влево соответственно. Двумерное уравнение Дирака можно записать в таком виде, что станет вполне наглядной несвязанность компонент ψ_+ и ψ_- , а также в виде уравнений движения (4.1.41), если ввести на мировой поверхности координаты светового конуса $\sigma^\pm = \tau \pm \sigma$ и $\partial_\pm = \frac{1}{2}(\partial_\tau \pm \partial_\sigma)$. Фермионная часть действия, выраженная через эти переменные, оказывается равной

$$S_F = \frac{i}{\pi} \int d^2\sigma (\psi_- \partial_+ \psi_- + \psi_+ \partial_- \psi_+) \quad (4.1.42)$$

(где индекс μ опущен). Из формулы (4.1.42) становится очевидным, что мы могли бы положить, скажем, компоненту ψ_+ равной нулю и обсуждать двумерный лагранжиан, содержащий только моды, движущиеся вправо. Двумерный оператор киральности $\bar{\rho} = \rho^0 \rho^1$ в качестве своих собственных состояний имеет компоненты ψ_\pm (точнее, $\bar{\rho}\psi_\pm = \mp\psi_\pm$), так что, положив $\psi_+ = 0$, мы будем работать только со спинорным полем положительной киральности¹⁾.

Уравнение (4.1.41) и бозонное уравнение $0 = \partial^2 X^\mu / \partial\sigma^\alpha \partial\sigma_\alpha$ можно записать так, что станет намного очевиднее, почему возможна симметрия между бозонами и фермионами:

$$\begin{aligned} 0 &= \partial_+ \psi_-^\mu = \partial_+ (\partial_- X^\mu), \\ 0 &= \partial_- \psi_+^\mu = \partial_- (\partial_+ X^\mu). \end{aligned} \quad (4.1.43)$$

Следовательно, ψ_-^μ и $\partial_- X^\mu$ являются функциями только σ^- , тогда как ψ_+^μ и $\partial_+ X^\mu$ являются функциями только σ^+ . Суперсимметрия — это симметрия между ψ_-^μ и $\partial_- X^\mu$ (или между ψ_+^μ и $\partial_+ X^\mu$), которые удовлетворяют одному и тому же уравнению.

¹⁾ Грубой аналогией этого поля было бы поле двухкомпонентного нейтрино в четырехмерии, но между этими двумя случаями имеется существенное различие. В четырехмерии частицы, *CPT*-сопряженной к нейтринно, является антинейтрино, имеющее противоположную киральность, но в двумерии *CPT*-преобразование отображает компоненту ψ_- в саму себя и допускает теорию, в которой просто нет фермиона противоположной киральности.

В силу того что моды с положительной и отрицательной киральностями оказываются независимыми, ток суперсимметрии мировой поверхности и тензор энергии-импульса должны упроститься, если их записать через эти моды. В самом деле, если мы запишем суперток $J_{\alpha A}$ из (4.1.13) через его компоненты светового конуса J_{+A} и J_{-A} (где \pm помечают компоненты светового конуса вектора, а A является спинорным индексом), то J_{+A} и J_{-A} являются двухкомпонентными спинорами. Однако фактически в силу (4.1.15) только спинорная компонента тока J_{+A} с положительной киральностью и спинорная компонента тока J_{-A} с отрицательной киральностью отличны от нуля. Удобно обозначать отличные от нуля спинорные компоненты токов J_{+A} и J_{-A} просто как J_+ и J_- :

$$\begin{aligned} J_+ &= \psi_+^\mu \partial_+ X_\mu, \\ J_- &= \psi_-^\mu \partial_- X_\mu. \end{aligned} \quad (4.1.44)$$

Они, конечно, сохраняются,

$$0 = \partial_- J_+ = \partial_+ J_-, \quad (4.1.45)$$

но какая же алгебра ими генерируется? Используя (анти)коммутаторы при равных τ ,

$$\begin{aligned} \{\psi_+^\mu(\sigma), \psi_+^\nu(\sigma')\} &= \{\psi_-^\mu(\sigma), \psi_-^\nu(\sigma')\} = \pi \eta^{\mu\nu} \delta(\sigma - \sigma'), \\ [\partial_\pm X^\mu(\sigma), \partial_\pm X^\nu(\sigma')] &= \pm i \frac{\pi}{2} \eta^{\mu\nu} \delta'(\sigma - \sigma'), \\ \{\psi_+^\mu, \psi_-^\nu\} &= [\partial_+ X^\mu, \partial_- X^\nu] = 0, \end{aligned} \quad (4.1.46)$$

можно легко найти антикоммутаторы

$$\begin{aligned} \{J_+(\sigma), J_+(\sigma')\} &= \pi \delta(\sigma - \sigma') T_{++}(\sigma), \\ \{J_-(\sigma), J_-(\sigma')\} &= \pi \delta(\sigma - \sigma') T_{--}(\sigma), \\ \{J_+(\sigma), J_-(\sigma')\} &= 0. \end{aligned} \quad (4.1.47)$$

Точнее, соотношения (4.1.47) возникают из формальных манипуляций или скобок Пуассона; в квантовомеханическом описании появляется аномальный член, который мы рассмотрим позже. Здесь T_{++} и T_{--} являются конусными компонентами тензора энергии-импульса:

$$\begin{aligned} T_{++} &= \partial_+ X^\mu \partial_+ X_\mu + \frac{i}{2} \psi_+^\mu \partial_+ \psi_{+\mu}, \\ T_{--} &= \partial_- X^\mu \partial_- X_\mu + \frac{i}{2} \psi_-^\mu \partial_- \psi_{-\mu}. \end{aligned} \quad (4.1.48)$$

Мы хотим теперь сформулировать уравнения связей, которые позволяют одинаковым образом исключить времениподобные

компоненты полей ψ^μ и X^μ . Напомним, что в бозонном случае времениподобные компоненты вектора X^μ исключались (в 26-мерии!) с помощью условий Вирасоро $T_{++} = T_{--} = 0$. Естественно стремиться повторить этот успех и здесь. Но в силу алгебры (4.1.47) мы вряд ли можем ожидать, что T_{++} и T_{--} могут быть приравнены нулю без одновременного приравнивания нулю токов J_+ и J_- . Таким образом, мы должны возлагать наши надежды на суперусловия Вирасоро

$$0 = J_+ = J_- = T_{++} = T_{--}. \quad (4.1.49)$$

Конечно, имеется большая разница между этой догадкой и нашим более систематическим обсуждением в случае бозонной теории. Действительно, в бозонном случае мы вывели условия Вирасоро как уравнения связей, которые возникают из-за фиксации калибровки в калибровочно инвариантном лагранжиане. В суперсимметричном случае мы просто постулировали равенства (4.1.49). Суперусловия Вирасоро (4.1.49) могут быть выведены систематически фиксацией калибровки в соответствующем лагранжиане двумерной супергравитации, но обсуждение, необходимое для этого, намного сложнее, чем в бозонном случае. Читателю, желающему ознакомиться с систематическим выводом равенств (4.1.49), предлагается сразу перейти в разделе 4.3.5 (который можно читать независимо от материала, изложенного ниже). Здесь же мы примем равенства (4.1.49) как правдоподобные и проанализируем содержание получающейся в результате теории.

4.1.4. Граничные условия и разложения по модам

Прежде всего мы должны проанализировать возможные граничные условия и посмотреть, что же представляет собой теория без связей. Это также сложнее сделать, чем в чисто бозонном случае.

Пространственно-временная координата X^μ удовлетворяет тому же самому уравнению, что и в теории бозонной струны. Возможные граничные условия соответствуют открытым или замкнутым струнам, и получающиеся в результате разложения по нормальным модам остаются полностью теми же, что и раньше, поэтому нет необходимости их здесь повторять. В случае фермионных координат при варьировании лагранжиана с целью получения уравнений Эйлера — Лагранжа появляются поверхностные члены. Для обращения в нуль этих членов необходимо, чтобы на каждом конце открытой струны занулялось выражение $\psi_+ \delta\psi_+ - \psi_- \delta\psi_-$. Этого можно достичь, взяв на каждом конце $\psi_+ = \pm \psi_-$ (и, следовательно, $\delta\psi_+ = \pm \delta\psi_-$). Знаки

полей ψ_- и ψ_+ относительно друг друга — это вопрос соглашения, так что без потери общности положим

$$\psi_+^\mu(0, \tau) = \psi_-^\mu(0, \tau). \quad (4.1.50)$$

Относительный знак на другом конце теперь становится осмысленным, и нужно рассмотреть обе возможности. В первом случае (граничные условия Рамона (R))

$$\psi_+^\mu(\pi, \tau) = \psi_-^\mu(\pi, \tau), \quad (4.1.51)$$

и разложение по модам решения уравнения Дирака принимает вид

$$\psi_-^\mu(\sigma, \tau) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} d_n^\mu e^{-in(\tau - \sigma)}, \quad (4.1.52)$$

$$\psi_+^\mu(\sigma, \tau) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} d_n^\mu e^{-in(\tau + \sigma)}, \quad (4.1.53)$$

где суммы берутся по всем целым n . Во втором случае (граничные условия Неве — Шварца (NS)) выбирают

$$\psi_+^\mu(\pi, \tau) = -\psi_-^\mu(\pi, \tau), \quad (4.1.54)$$

так что разложение по модам имеет вид

$$\psi_-^\mu(\sigma, \tau) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{r \in \mathbb{Z} + 1/2} b_r^\mu e^{-ir(\tau - \sigma)}, \quad (4.1.55)$$

$$\psi_+^\mu(\sigma, \tau) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{r \in \mathbb{Z} + 1/2} b_r^\mu e^{-ir(\tau + \sigma)}, \quad (4.1.56)$$

где теперь суммы берутся по всем полуцелым r . Мы всегда используем символ m и n для обозначения целых чисел, а r или s для полуцелых, так что $r - 1/2$ или $s - 1/2$ являются целыми. Как будет объяснено в следующем разделе, граничное условие (4.1.51) и целые моды подходят для описания струнных состояний, которые являются пространственно-временными фермионами, тогда как граничное условие (4.1.54) и полуцелые числа связаны с бозонными состояниями. Конечно, эти бозонные состояния отличаются от состояний струнной бозонной теории в гл. 2.

Для замкнутых струн поверхностные члены обращаются в нуль, когда граничные условия являются периодическими или антипериодическими для каждой компоненты ψ в отдельности. Таким образом, мы можем иметь

$$\psi_-^\mu = \sum d_n^\mu e^{-2in(\tau - \sigma)} \quad (4.1.57)$$

или

$$\psi_-^\mu = \sum b_r^\mu e^{-2ir(\tau-\sigma)} \quad (4.1.58)$$

и

$$\psi_+^\mu = \sum \tilde{d}_n^\mu e^{-2in(\tau+\sigma)} \quad (4.1.59)$$

или

$$\psi_+^\mu = \sum \tilde{b}_r^\mu e^{-2ir(\tau+\sigma)}. \quad (4.1.60)$$

В соответствии с различным выбором пар мод, движущихся влево и вправо, имеются четыре разных сектора замкнутой струны, которые будем называть секторами NS—NS, NS—R, R—NS, R—R. Как будет объяснено ниже, в первом и последнем случаях описываются состояния замкнутой струны, являющиеся бозонами, а двух других случаях — фермионами.

Супероператоры Вирасоро определяются модами операторов $T_{\alpha\beta}$ и J_α . Для открытых струн имеется один независимый набор операторов L_m , определенных точно так же, как и в гл. 2, линейной комбинацией

$$L_m = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi d\sigma \{e^{im\sigma} T_{++} + e^{-im\sigma} T_{--}\} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^\pi d\sigma e^{im\sigma} T_{++}. \quad (4.1.61)$$

Фермионные генераторы нашей алгебры мы определим формулой

$$F_m = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \int_0^\pi d\sigma \{e^{im\sigma} J_+ + e^{-im\sigma} J_-\} = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \int_{-\pi}^\pi d\sigma e^{im\sigma} J_+ \quad (4.1.62)$$

в случае граничных условий Рамона и формулой

$$G_r = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \int_0^\pi d\sigma \{e^{ir\sigma} J_+ + e^{-ir\sigma} J_-\} = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \int_{-\pi}^\pi d\sigma e^{ir\sigma} J_+ \quad (4.1.63)$$

в случае граничных условий Нёве — Шварца. В теории замкнутых струн имеются два набора супергенераторов Вирасоро. Один дается модами операторов T_{++} и J_+ , а другой — модами операторов T_{--} и J_- . В классической струнной теории все эти выражения должны просто обращаться в нуль. В квантовой теории, как и в случае теории бозонной струны, имеются различные возможности для работы с ними. Мы обсудим эти возможности в следующих разделах.

4.2. Квантование — старый ковариантный подход

В этом разделе мы опишем квантование суперструны, используя технику, примененную в разд. 2.2 для квантования бозонной струны. Суперсвязи Вирасоро на физические состояния налагаются и анализируются по существу точно так же, как раньше налагались и анализировались связи Вирасоро. Единственной новой чертой является наличие двух секторов, бозонного и фермионного, которые необходимо изучать по отдельности. В конечном счете спектр должен обрезаться условиями GSO, которые мы еще не объяснили, и два этих сектора оказываются связанными пространственно-временной суперсимметрией. Этот факт скрыт очень глубоко, и объяснить его — крайне нетривиальная задача в рамках формализма, описанного в этой главе.

4.2.1. Коммутационные соотношения и разложения по модам

В ковариантной калибровке (изложенной в разд. 4.3.5) динамика координат $X^\mu(\sigma, \tau)$ и $\psi^\mu(\sigma, \tau)$ определяется свободными двумерным уравнением Клейна — Гордона и уравнением Дирака, к которым нужно добавить еще и определенные уравнения связей. Квантование этих координат — это просто квантование свободной двумерной теории поля. Анализ координат X^μ не меняется по сравнению с гл. 2, где было установлено, что

$$[\dot{X}^\mu(\sigma, \tau), X^\nu(\sigma', \tau)] = -i\pi\delta(\sigma - \sigma')\eta^{\mu\nu}. \quad (4.2.1)$$

Это приводит к коммутационным соотношениям для коэффициентов Фурье

$$[\alpha_m^\mu, \alpha_n^\nu] = m\delta_{m+n}\eta^{\mu\nu}. \quad (4.2.2)$$

Операторы α_m^μ представляют собой коэффициенты разложения по модам либо открытой, либо замкнутой струны. В последнем случае имеется и второй набор операторов, обозначаемых $\tilde{\alpha}_m^\mu$.

Так же легко провести квантование фермионных координат. Канонические антикоммутационные соотношения для координат $\psi_A^\mu(\sigma, \tau)$ суть

$$\{\psi_A^\mu(\sigma, \tau), \psi_B^\nu(\sigma', \tau)\} = \pi\delta(\sigma - \sigma')\eta^{\mu\nu}\delta_{AB}. \quad (4.2.3)$$

Отсюда следует, что моды b_r^μ или d_n^μ , введенные в разд. 4.1.4, удовлетворяют соотношениям

$$\{b_r^\mu, b_s^\nu\} = \eta^{\mu\nu}\delta_{n+s}, \quad (4.2.4)$$

$$\{d_m^\mu, d_n^\nu\} = \eta^{\mu\nu}\delta_{m+n}. \quad (4.2.5)$$

В дальнейшем мы рассмотрим единственный набор мод α_m^μ и b_r^μ или соответственно α_m^μ и d_m^μ , который используется для описания открытых струн или для сектора с модами, движущимися вправо, в случае замкнутых струн. Включить в рассмотрение осцилляторы с тильдами, являющиеся модами замкнутой струны, движущимися влево, достаточно просто, но мы не будем это делать явно каждый раз, поскольку такие вычисления были бы довольно утомительными.

Напомним, что имеются два различных типа струнных состояний, соответствующих условиям $\psi_1(\pi, \tau) = \pm \psi_2(\pi, \tau)$ в случае открытой струны. Знак плюс приводит к d -осцилляторам, являющимся модами с целыми индексами, а знак минус — к b -осцилляторам, являющимся модами с полуцелыми индексами. Часть уравнения связи Вирасоро, отвечающая нулевой частоте, дает условие пребывания на массовой поверхности:

$$\alpha' M^2 = N + \text{постоянная} \quad (4.2.6)$$

Постоянная возникает в результате нормального упорядочения, которое будет описано позже, а

$$N = N^a + N^d \quad (4.2.7)$$

или

$$N = N^a + N^b, \quad (4.2.8)$$

где

$$N^a = \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_{-m} \cdot \alpha_m, \quad (4.2.9)$$

$$N^a = \sum_{m=1}^{\infty} m d_{-m} \cdot d_m, \quad (4.2.10)$$

$$N^b = \sum_{r=1/2}^{\infty} r b_{-r} \cdot b_r. \quad (4.2.11)$$

Состояние с наименьшим квадратом массы соответствует основному состоянию пространства Фока

$$\alpha_m^\mu |0\rangle = d_m^\mu |0\rangle = 0, \quad m > 0, \quad (4.2.12)$$

или

$$\alpha_m^\mu |0\rangle = b_r^\mu |0\rangle = 0, \quad m, r > 0. \quad (4.2.13)$$

Возбуждения, полученные действием повышающих операторов α_{-m}^μ или d_{-m}^μ , соответствуют повышению собственного значения $\alpha' M^2$ на m единиц. Аналогично действие b_{-r}^μ повышает $\alpha' M^2$ на r единиц.

Заметим, что в случае с полуцелыми модами можно выбрать единственное невырожденное основное состояние, которое поэтому можно считать состоянием со спином нуль. В случае с целыми модами этого сделать нельзя из-за операторов d_0^μ . Операторы d_0^μ подчиняются алгебре

$$\{d_0^\mu, d_0^\nu\} = \eta^{\mu\nu} \quad (4.2.14)$$

и коммутируют с оператором M^2 . Эта алгебра совпадает с алгеброй Дирака, так что с точностью до нормировки нулевые моды d_0^μ являются матрицами Дирака. Если потребовать, чтобы матрицы Дирака удовлетворяли соотношению $\{\Gamma^\mu, \Gamma^\nu\} = -2\eta^{\mu\nu}$, то

$$\Gamma^\mu = i\sqrt{2} d_0^\mu \quad (4.2.15)$$

при нашем выборе знака и метрики.

Состояния на каждом массовом уровне должны преобразовываться по представлениям алгебры (4.2.14), и это должно быть справедливым, в частности, для основного состояния в пространстве Фока. На самом деле оно обязано преобразовываться по неприводимому представлению алгебры (4.2.14), так как нет никаких других нулевых мод, которые могли бы привести к вырождению. Теория представлений алгебры Клиффорда (4.2.14) хорошо известна. Ее неприводимые представления соответствуют спинорам группы $SO(1, 9)$. Поэтому граничные условия, которые приводят к осцилляторам d , являющимся модами с целыми индексами, должны приводить, как и утверждалось ранее, к фермионным струнам. Секторы со спинорами мировой поверхности, являющимися модами с целыми или полуцелыми индексами, обычно называются фермионным (или R) или бозонным (или NS) секторами соответственно. Бозонный сектор суперструн, конечно, не следует путать с бозонными струнами, которые рассматривались в гл. 2 и 3. В описание первых входят b -осцилляторы, а в описание вторых — нет.

Как и в бозонном случае, плотности импульса и углового момента вдоль струны представимы в виде нётеровых токов, связанных с глобальными симметриями $X^\mu \rightarrow a_\nu^\mu X^\nu + b^\mu$, $\psi^\mu \rightarrow a_\nu^\mu \psi^\nu$. Мы получаем (положив $T = 1/\pi$)

$$P_\alpha^\mu = \frac{1}{\pi} \partial_\alpha X^\mu, \quad (4.2.16)$$

$$J_\alpha^{\mu\nu} = \frac{1}{\pi} (X^\mu \partial_\alpha X^\nu - X^\nu \partial_\alpha X^\mu + i\bar{\psi}^\mu \rho_\alpha \psi^\nu).$$

Явные формулы для лоренцевых генераторов, выраженных через разложения по модам, можно найти подстановкой в (4.2.16)

вместо $X^\mu(\sigma, \tau)$ и $\psi^\mu(\sigma, \tau)$ их разложений по модам. Сохраняющиеся заряды даются формулами

$$J^{\mu\nu} = \int_0^\pi J_\tau^{\mu\nu} d\sigma = l^{\mu\nu} + E^{\mu\nu} + K^{\mu\nu}, \quad (4.2.17)$$

где

$$l^{\mu\nu} = x^\mu p^\nu - x^\nu p^\mu \quad (4.2.18)$$

и

$$E^{\mu\nu} = -i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (\alpha_{-n}^\mu \alpha_n^\nu - \alpha_{-n}^\nu \alpha_n^\mu), \quad (4.2.19)$$

как это и было в теории бозонной струны. Имеется также вклад от фермионных мод:

$$K^{\mu\nu} = -i \sum_{r=1/2}^{\infty} (b_{-r}^\mu b_r^\nu - b_{-r}^\nu b_r^\mu), \quad (\text{NS}) \quad (4.2.20)$$

$$K^{\mu\nu} = -i \frac{1}{2} [d_0^\mu, d_0^\nu] - i \sum_{n=1}^{\infty} (d_{-n}^\mu d_n^\nu - d_{-n}^\nu d_n^\mu). \quad (\text{R}) \quad (4.2.21)$$

Строя $J^{\mu\nu}$, мы просто складываем некоторое число коммутирующих представлений алгебры Лоренца, так что сумма очевидным образом должна удовлетворять той же самой алгебре.

4.2.2. Супералгебра Вирасоро и физические состояния

В разд. 4.1.4 мы определили обобщенные связи Вирасоро L_m и F_m или G_r как фурье-моды от операторов T_{++} и J_+ соответственно. Подставляя непосредственно разложения по модам операторов $X^\mu(\sigma, \tau)$ и $\psi^\mu(\sigma, \tau)$, мы получаем явные выражения через различные осцилляторы. Операторы Вирасоро принимают вид

$$L_m = L_m^{(a)} + L_m^{(b)}, \quad (\text{NS}) \quad (4.2.22)$$

$$L_m = L_m^{(a)} + L_m^{(d)}, \quad (\text{R}) \quad (4.2.23)$$

где

$$L_m^{(a)} = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} : \alpha_{-n} \cdot \alpha_{m+n} : , \quad (4.2.24)$$

как и раньше, а

$$L_m^{(b)} = \frac{1}{2} \sum_{r=-\infty}^{\infty} \left(r + \frac{1}{2} m \right) : b_{-r} \cdot b_{m+r} : , \quad (4.2.25)$$

$$L_m^{(d)} = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(n + \frac{1}{2} m \right) : d_{-n} \cdot d_{m+n} : . \quad (4.2.26)$$

Во всех случаях нормальное упорядочение требуется только при $m=0$. Для фермионных генераторов мы получаем

$$G_r = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_{-n} \cdot b_{r+n}, \quad (\text{NS}) \quad (4.2.27)$$

$$F_m = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_{-n} \cdot \alpha_{m+n}. \quad (\text{R}) \quad (4.2.28)$$

Супералгебра Вирасоро в бозонном (или NS) секторе задается формулами

$$[L_m, L_n] = (m-n) L_{m+n} + A(m) \delta_{m+n},$$

$$[L_m, G_r] = \left(\frac{1}{2} m - r \right) G_{m+r}, \quad (4.2.29)$$

$$\{G_r, G_s\} = 2L_{r+s} + B(m) \delta_{r+s}.$$

Здесь $A(m)$ и $B(r)$ являются c -числовыми аномальными членами, аналогичными тем, которые возникали в бозонной теории. За исключением аномальных членов, соотношения (4.2.29) легко вычисляются канонически; например, последнее уравнение в (4.2.29) просто соответствует фурье-модам соотношений (4.1.47). Можно привести аргументы, подобные тем, которые приводились в бозонном случае, в пользу того, что аномальные члены должны быть c -числами. Как и в бозонном случае, их проще всего найти, вычисляя средние по основному состоянию в пространстве Фока. Мы получим, что

$$A(m) = \frac{1}{8} D (m^3 - m), \quad (4.2.30)$$

$$B(r) = \frac{1}{2} D \left(r^2 - \frac{1}{4} \right).$$

В аномалию $A(m)$ две трети вклада дают α -осцилляторы и одну треть — b -осцилляторы. В фермионном (R) секторе получается очень похожая алгебра

$$[L_m, L_n] = (m-n) L_{m+n} + A(m) \delta_{m+n},$$

$$[L_m, F_n] = \left(\frac{1}{2} m - n \right) F_{m+n}, \quad (4.2.31)$$

$$\{F_m, F_n\} = 2L_{m+n} + B(m) \delta_{m+n},$$

где теперь аномалиями служат

$$\begin{aligned} A(m) &= \frac{1}{8} Dm^3, \\ B(m) &= \frac{1}{2} Dm^2. \end{aligned} \quad (4.2.32)$$

При желании можно устранить расхождение между выражениями (4.2.30) и (4.2.32), переопределив L_0 сдвигом ее на константу. Мы считаем принятые здесь определения достаточно удобными.

Заметим, что в секторе NS пять генераторов $L_1, L_0, L_{-1}, G_{1/2}, G_{-1/2}$ образуют замкнутую супералгебру. Эта алгебра известна как алгебра $OSp(1|2)$, и ниже мы обсудим ее подробнее. Ситуация в фермионном секторе совершенно иная. Как только мы добавим к операторам L_1, L_0, L_{-1} оператор F_0 , получится вся бесконечномерная алгебра.

В старом ковариантном подходе уравнения связей вводятся в квантовую теорию требованием, чтобы их положительно-частотные компоненты аннулировали физические состояния. Поэтому, поступая так же, как это было сделано в разд. 2.2.2, мы потребуем, чтобы физическое состояние $|\varphi\rangle$ удовлетворяло следующим условиям:

$$G_r|\varphi\rangle = 0, \quad r > 0, \quad (4.2.33)$$

$$L_n|\varphi\rangle = 0, \quad n > 0, \quad (4.2.34)$$

$$(L_0 - a)|\varphi\rangle = 0, \quad (4.2.35)$$

где a — постоянная, которую нужно найти. Весь бесконечный набор условий в (4.2.33) и (4.2.34) следует из двух специальных условий $G_{1/2}|\varphi\rangle = G_{3/2}|\varphi\rangle = 0$, если воспользоваться алгеброй (4.2.29).

Теперь мы хотим определить очень важные в теории значения величин a и D . Вспомним, каким образом в гл. 2 решался вопрос с духами в теории бозонной струны. Для значений a и D из определенной области духи существуют, а для значений из оставшейся области они отсутствуют. Когда a и D принимают значения на границе этих двух областей, в теории имеются дополнительные состояния с нулевой нормой (которые близки к тому, чтобы стать духами). Нахождение дополнительных состояний с нулевой нормой при специальных значениях a и D может помочь нам выделить область тех их значений, при которых духи отсутствуют; что более существенно, эти состояния очень важны с физической точки зрения, так как они связаны с калибровочными инвариантностями, и граничные значения a

и D , при которых появляются состояния с нулевой нормой, действительно представляются интересными.

Поэтому начнем изучение физических состояний, как и в разд. 2.2.2, с поиска специальных значений a и D , при которых появляются состояния нулевой нормы, отсутствовавшие при формулировке теории. Основное состояние $|0; k\rangle$ находится на массовой поверхности для $k^2/2 = a$, поэтому возбужденное состояние $G_{-1/2}|0; k\rangle$ находится на массовой поверхности при $k^2/2 = a - 1/2$. С другой стороны, если $a = 1/2$, то это состояние удовлетворяет условию физического состояния $G_{1/2}|\varphi\rangle = 0$ и является состоянием с нулевой нормой, $\langle\varphi|\varphi\rangle = 0$. Оно имеет отрицательную норму, если a больше чем $1/2$. Так что $a = 1/2$ является как раз нужным значением a , аналогичным значению $a = 1$ в теории бозонной струны. Это опять приводит к тому, что основное состояние является скалярным тахионом, а первое возбужденное состояние ($b_{-1/2}^\mu|0\rangle$) — безмассовой векторной частицей. Выбору $a = 1/2$ соответствует бесконечное семейство физических состояний с нулевой нормой, которые определяются как $G_{-1/2}|\bar{\varphi}\rangle$, где состояние $|\bar{\varphi}\rangle$ таково, что $G_{1/2}|\bar{\varphi}\rangle = G_{3/2}|\bar{\varphi}\rangle = L_0|\bar{\varphi}\rangle = 0$.

Попробуем теперь найти критическую размерность, построив второе семейство состояний с нулевой нормой вида

$$|\varphi\rangle = (G_{-3/2} + \lambda G_{-1/2} L_{-1})|\bar{\varphi}\rangle, \quad (4.2.36)$$

где

$$G_{1/2}|\bar{\varphi}\rangle = G_{3/2}|\bar{\varphi}\rangle = (L_0 + 1)|\bar{\varphi}\rangle = 0. \quad (4.2.37)$$

Воспользовавшись супералгеброй Вирасоро, легко показать, что

$$G_{1/2}|\varphi\rangle = (2 - \lambda)L_{-1}|\bar{\varphi}\rangle, \quad (4.2.38)$$

$$G_{3/2}|\varphi\rangle = (D - 2 - 4\lambda)|\bar{\varphi}\rangle. \quad (4.2.39)$$

Таким образом, φ — состояние с нулевой нормой при $\lambda = 2$ и $D = 10$. Поэтому число десять является критической размерностью. Мы покажем, что эта размерность играет роль, совершенно аналогичную той, которую играет размерность $D = 26$ в теории бозонной струны. В частности, распространяющиеся физические состояния могут быть поставлены в соответствие состояниям в пространстве Фока, построенным с помощью восьми поперечных компонент мод α_m^μ и b_r^μ .

Обратимся теперь к фермионному сектору. Вновь требуется, чтобы физическое состояние обращалось в нуль при действии на него положительно-частотной компоненты оператора связи

$$F_n|\psi\rangle = L_n|\psi\rangle = 0, \quad n > 0. \quad (4.2.40)$$

Кроме того, нулевая мода связи приводит к волновому уравнению

$$(F_0 - \mu)|\psi\rangle = 0. \quad (4.2.41)$$

Мы ввели произвольную константу μ в это обобщенное уравнение Дирака. Она пропорциональна массе фермионного основного состояния. Так как $F_0^2 = L_0$, из (4.2.41) следует, что

$$(L_0 - \mu^2)|\psi\rangle = 0. \quad (4.2.42)$$

При переходе от классической теории к квантовой в операторе F_0 не появляется неоднозначность, связанная с нормальным упорядочением, так что довольно трудно увидеть, каким образом может возникнуть отличное от нуля число μ при некотором разумном изменении смысла фермионного оператора. В самом деле, так как F_0 является антикоммутирующим оператором, добавление к нему (коммутирующего) c -числа выглядело бы крайне неестественным. Наш поиск состояния с нулевой нормой немедленно подтверждает, что такой способ действия не является предпочтительным, так как состояние $|\psi\rangle = F_0|\tilde{\psi}\rangle$ имеет нулевую норму при $L_0|\tilde{\psi}\rangle = F_1|\tilde{\psi}\rangle = 0$ (L_0 и F_1 приводят к бесконечному набору условий), но только на массовой оболочке при $\mu = 0$. Поэтому это — первое семейство фермионных состояний нулевой нормы. Второй набор может быть записан в виде

$$|\psi\rangle = F_0 F_{-1}|\tilde{\psi}\rangle, \quad (4.2.43)$$

где

$$F_1|\tilde{\psi}\rangle = (L_0 + 1)|\tilde{\psi}\rangle = 0. \quad (4.2.44)$$

Отсюда очевидным образом следует, что $F_0|\psi\rangle = 0$. Состояние является физическим состоянием с нулевой нормой, если оно аннулируется оператором L_1 . Проведя несложное вычисление, получаем

$$L_1|\psi\rangle = \left(\frac{1}{4}D - \frac{5}{2}\right)|\tilde{\psi}\rangle; \quad (4.2.45)$$

таким образом, $D = 10$ и для критической размерности в фермионном секторе.

4.2.3. Вершинные операторы, описывающие испускание бозонов

В теории суперструн, как и в теории бозонных струн, для того чтобы построить операторы физических состояний, образующих алгебру, порождающую спектр, можно воспользоваться вершинными операторами. (Конечно, они полезны и для явного

построения амплитуд.) Можно рассмотреть три случая. Первый случай — это испускание специфического бозонного состояния на массовой поверхности из бозонной струны, второй — испускание такого состояния из фермионной струны. Третий случай — это испускание физического фермионного состояния на массовой поверхности из бозонной струны, которая превращается в фермионную струну, и наоборот. Последний случай затрагивает намного более сложные вопросы и требует привлечения более сложной математики, чем первые два. Кроме того, его не нужно рассматривать при построении алгебры, порождающей спектр, которая используется для доказательства теоремы об отсутствии духов. Дело в том, что для доказательства этой теоремы достаточно доказать, что духи отсутствуют и в бозонном, и в фермионном секторах по отдельности; нет необходимости рассматривать оператор, который преобразует бозоны в фермионы и наоборот. Оператор, описывающий испускание фермионов, обладал бы этим свойством. Однако вершина, в которой испускается фермион, важна и по другим причинам, и мы обсудим ее в гл. 7.

Начнем с рассмотрения процесса испускания бозона из бозонного состояния. В разд. 2.2.3 мы установили, что физический вершинный оператор должен иметь конформную размерность $J = 1$ для того, чтобы его компонента с нулевым импульсом отображала физические состояния снова в физические. Этим результатом без каких-либо изменений можно воспользоваться и при решении данной проблемы, но теперь история на этом не кончается. Чтобы отображать физические состояния снова в физические, оператор должен еще правильно коммутировать с операторами G_r . Взяв в качестве кандидата вершинный оператор $V \equiv V(\tau = 0)$, предположим, что существует другой оператор W , такой, что для каждого $r \in \mathbb{Z} + 1/2$

$$V(0) = [G_r, W(0)]. \quad (4.2.46)$$

Заметим, что мы ограничиваем возможности выбора оператора W , требуя, чтобы оператор V был независимым от r . Это условие приемлемо, когда W является бозонным оператором (на мировой поверхности), но когда W — фермионный оператор, его необходимо заменить антикоммутатором. Так как

$$G_r^2 = L_{2r}, \quad (4.2.47)$$

мы получаем

$$\{G_r, V(0)\} = [L_{2r}, W(0)]. \quad (4.2.48)$$

Используя определения

$$V(\tau) = e^{iL_0\tau}V(0)e^{-iL_0\tau} \quad (4.2.49)$$

и определение оператора с конформным спином J ,

$$[L_m, V(\tau)] = e^{im\tau} \left(-i \frac{d}{d\tau} + mJ \right) V(\tau), \quad (4.2.50)$$

легко показать, что V имеет конформную размерность $J = 1$ тогда и только тогда, когда W имеет конформную размерность $J = 1/2$.

В качестве первого простого примера рассмотрим оператор

$$W(0) = : e^{ik \cdot X(0)} :. \quad (4.2.51)$$

Это выражение имеет конформную размерность $J = 1/2$ при $k^2 = 1$, что является условием массовой поверхности для основного тахионного состояния в бозонном секторе. Соответствующий вершинный оператор имеет вид

$$V(0) = [G_r, W(0)] = k \cdot \psi(0) : e^{ik \cdot X(0)} : , \quad (4.2.52)$$

или

$$V(\tau) = k \cdot \psi(\tau) : e^{ik \cdot X(\tau)} : ,$$

где

$$\psi^\mu(\tau) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{-\infty}^{\infty} b_r^\mu e^{-ir\tau}. \quad (4.2.53)$$

Очевидно, что вершинный оператор в (4.2.52) имеет размерность $J = 1$, так как каждый сомножитель имеет размерность $J = 1/2$ и они коммутируют. Таким образом, V является подходящим вершинным оператором для испускания тахионного основного состояния (называемого «пионом» в первых статьях по данной тематике).

Первое возбужденное состояние соответствует безмассовой векторной частице (с поляризацией ξ^μ и импульсом k^μ) и представляет собой состояние $\xi \cdot b_{-1/2} |0; k\rangle$ в пространстве Фока. Из вспомогательного условия, содержащего оператор $G_{1/2}$, следует, что для того, чтобы это состояние было физическим, должно выполняться равенство $\xi \cdot k = 0$. Чтобы построить вершинный оператор, соответствующий испусканию этого состояния, рассмотрим оператор

$$W_1(0) = \xi \cdot \psi(0) e^{ik \cdot X(0)}. \quad (4.2.54)$$

При $k^2 = 0$ этот оператор имеет размерность $J = 1/2$, что и требуется. Соответствующий вершинный оператор

$$V_1 = \{G_r, W_1\} = (\xi \cdot \dot{X}(0) - \xi \cdot \psi(0) k \cdot \psi(0)) e^{ik \cdot X(0)}, \quad (4.2.55)$$

как и должно быть, не зависит от r . Операторное произведение в этом выражении хорошо определено, так как $\xi \cdot k = 0$.

Поэтому V_1 имеет размерность $J = 1$ и удовлетворяет всем требованиям, которым должен удовлетворять вершинный оператор, описывающий испускание физической частицы. Калибровочная инвариантность оператора V_1 может быть продемонстрирована, если ξ^μ заменить на k^μ и заметить, что в этом случае члены с ψ выпадают и остается только полная производная.

Можно различать два типа состояний и вершин в зависимости от того, четное или нечетное число возбуждений ψ они содержат. Если W является бозонным оператором на мировой поверхности (т. е. четным по ψ оператором), то коммутатор $[G_r, W]$ приводит к фермионному вершинному оператору V , как это получилось в (4.2.52). Если, с другой стороны, W является фермионным оператором на мировой поверхности, то антикоммутатор $\{G_r, W\}$ приводит к бозонному оператору V , как в (4.2.55). Струнные состояния, испускание и поглощение которых описываются фермионными вершинами V , соответствуют состояниям из пространства Фока с четным числом возбуждений b -осциллятора и называются состояниями «нечетной G -четности». Те же состояния, которые ассоциируются с бозонными вершинами V , соответствуют состояниям пространства Фока с нечетным числом возбуждений b -осциллятора и называются состояниями «четной G -четности». (Эти названия произошли из адронной интерпретации теории.) Мы покажем в гл. 7, что для бозонных древесных диаграмм число G является мультипликативно сохраняющимся квантовым числом. Там же будет показано, что данное описание состояний с помощью пространства Фока (называемое F_2) можно заменить другим описанием (называемым F_1), при котором соответствие между G -четностью и числом возбуждений b -осциллятора заменяется на более естественное.

Может показаться странным, что испускания бозонов могут быть описаны фермионными операторами. Однако рассматриваемые операторы являются фермионными только в смысле двумерной мировой поверхности, а не смысле D -мерного пространства-времени. На самом деле по определенным причинам, которые будут изложены ниже, состояния нечетной четности обязательно приводят к противоречиям, и мы вынуждены обрезать спектр, ограничившись только сектором с состояниями четной G -четности. Это, в частности, имеет то преимущество, что тахион исключается из спектра.

Испускания бозонов из фермионной (R) струны могут быть описаны по существу теми же уравнениями, которыми описываются их испускания из бозонной (NS) струны. Различие граничных условий, которое отличает струны R от струн NS, не может повлиять на локальный вид вершинного оператора.

От этих граничных условий зависит только, по каким модам, полнотелым, как в (4.2.53), или по целым в соответствии с

$$\psi^\mu(\tau) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{-\infty}^{\infty} a_{n\mu}^\mu e^{-in\tau}, \quad (4.2.56)$$

должен разлагаться оператор $\psi(\tau)$. Конечно, в формулах, связывающих V с W , операторы G , бозонного сектора необходимо заменить операторами F_m фермионного сектора. Мы увидим в гл. 7, что древесные амплитуды, описывающие фермионную струну с множеством испущенных бозонов, могут быть вычислены либо с помощью пропагатора L_0^{-1} (обобщающего пропагатор Клейна—Гордона) и вершин типа V , либо с помощью пропагатора F_0^{-1} (обобщающего пропагатор Дирака) и вершин типа W . Для чисто бозонных деревьев нет аналога второго варианта, так что необходимо всегда пользоваться частицами типа V .

4.3. Квантование в калибровке светового конуса

Здесь мы хотим повторить для суперструн тот анализ, который был проделан в разд. 2.3 для бозонных струн. Сначала мы проквантуем теорию в калибровке светового конуса, в которой явно отсутствуют духи (но которая не является явно ковариантной), и покажем, что теория лоренц-инвариантна, если $D = 10$, а $\alpha = 1/2$. Далее будет показано, что явно ковариантный (но не явно свободный от духов) формализм фактически эквивалентен формализму на световом конусе и поэтому свободен от духов. Это вновь предполагает использование вершины, описывающей испускание безмассового бозона, и определенных продольных операторов для получения физического спектра. Затем мы перейдем к вопросам, которые не имеют бозонного аналога; первое свидетельство существования пространственно-временной суперсимметрии будет обсуждаться в разд. 4.3.3.

4.3.1. Калибровка светового конуса

В бозонной теории, изложенной в гл. 2, мы видели, что даже в теории с ковариантной калибровкой $h_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta}$ имеются остаточные калибровочные инвариантности, которые позволяют сделать последующие выборы калибровок, в частности калибровки светового конуса. Модель RNS в том виде, в каком мы ее до сих пор обсуждали, является в действительности вариантом с фиксированной калибровкой для модели, обладающей суперсимметрией мировой поверхности и сформулированной ниже в разд. 4.3.5.

В гл. 2 мы видели, что репараметризационная инвариантность теории бозонной струны позволяет наложить дополнительное калибровочное условие — калибровку светового конуса. Здесь мы обсудим аналогичную формулировку в калибровке светового конуса для модели RNS. Это обсуждение будет в какой-то мере построено на догадках, так как систематическое изложение локальной суперсимметрии мировой поверхности мы отложим до разд. 4.3.5.

Напомним, что в теории бозонной струны остаточная репараметризационная инвариантность, сохраняющая выбор ковариантной калибровки, была как раз достаточна для того, чтобы калибровочным преобразованием устранить плюсовые компоненты всех ненулевых мод осцилляторов, так что

$$X^+(\sigma, \tau) = x^+ + p^+\tau. \quad (4.3.1)$$

Такие рассуждения проходят до тех пор, пока X^+ удовлетворяет двумерному волновому уравнению, так что им можно с тем же успехом воспользоваться и в данном контексте. Однако теперь остается еще свобода сделать преобразования локальной суперсимметрии, сохраняющие выбор калибровки. Эти преобразования как раз оказываются достаточными для того, чтобы калибровочными преобразованиями полностью устранить ψ^+ , так что мы можем выбрать калибровку

$$\psi^+ = 0. \quad (4.3.2)$$

Чтобы убедиться в непротиворечивости такого выбора, заметим, что при преобразовании глобальной суперсимметрии

$$\delta X^+ = \bar{\epsilon} \psi^+ = 0, \quad (4.3.3)$$

так как $\psi^+ = 0$, поэтому калибровочное условие на X^+ не меняется в результате такого преобразования.

Для начала сосредоточим наше внимание на секторе открытой бозонной струны и определим $\psi^\mu(\sigma^\pm) = \psi_+^\mu(\sigma^+)$ для $\sigma > 0$ и $\psi^\mu(\sigma^-)$ для $\sigma < 0$ (напоминая, что $\sigma^\pm = (\tau \pm \sigma)$, а $\partial_\pm = (\partial_\tau \pm \partial_\sigma)/2$). Разложение оператора $\psi^\mu(\tau)$ по модам дано в (4.2.53). Соответствующие разложения для замкнутых струн содержат моды с двойными экспонентами. Разложения оператора X^μ приводились в разд. 2.1.2 (в частности, $\partial_+ X^\mu =$

$$= \frac{1}{2} \sum_{-\infty}^{\infty} a_{n\mu}^\mu e^{-in(\tau+\sigma)}). \text{ Вспомогательные связи, означающие об-}$$

ращение в нуль операторов J_α и $T_{\alpha\beta}$, принимают вид

$$\psi \cdot \partial_+ X = 0 \quad (4.3.4)$$

и

$$(\partial_+ X)^2 + \frac{i}{2} \psi \partial_+ \psi = 0. \quad (4.3.5)$$

Выбрав калибровочные условия $\partial_+ X^+ = \frac{1}{2} p^+$ и $\psi^+ = 0$, эти уравнения можно решить для компонент светового конуса ψ^- и $\partial_+ X^-$:

$$\partial_+ X^- = \frac{1}{p^+} \left(\partial_+ X^i \partial_+ X^i + \frac{i}{2} \psi^i \partial_+ \psi^i \right), \quad (4.3.6)$$

$$\psi^- = \frac{2}{p^+} \psi^i \partial_+ X^i. \quad (4.3.7)$$

Через фурье-моды эти решения записываются следующим образом:

$$\alpha_n^- = \frac{1}{2p^+} \sum_{i=1}^{D-2} \left(\sum_{-\infty}^{\infty} : \alpha_{n-m}^i \alpha_m^i : + \frac{1}{2p^+} \sum_{-\infty}^{\infty} (r - n/2) : b_{n-r}^i b_r^i : \right) - \frac{\alpha \delta_n}{2p^+}, \quad (4.3.8)$$

$$b_r^- = \frac{1}{p^+} \sum_{i=1}^{D-2} \sum_{-\infty}^{\infty} \alpha_{r-s}^i b_s^i : \quad (4.3.9)$$

Как обычно, для моды α_0^- требуется нормальное упорядочение. Из сравнения с формулами разд. 4.2.2 очевидно, что $p^+ \alpha_n^-$ и $p^+ b_r^-$ удовлетворяют супералгебре Вирасоро с аномальными членами

$$A(m) = \frac{D-2}{8} (m^3 - m) + 2am, \quad (4.3.10)$$

$$B(r) = \frac{D-2}{2} (r^2 - 1/4) + 2a. \quad (4.3.11)$$

В общем случае калибровка светового конуса несовместима с квантовой структурой теории. На самом деле, требуя, чтобы в этой калибровке удовлетворялась лоренцева алгебра, можно вывести ограничения на размерность пространства-времени и на параметр a точно так же, как это было сделано в теории

бозонной струны. Подставляя в ковариантные формулы (4.2.19) и (4.2.20) вместо α_n^\pm и b_r^\pm их выражения, мы получим

$$E^{+\mu} = K^{+\mu} = 0, \quad (4.3.12)$$

$$E^{i-} = -i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (\alpha_{-n}^i \alpha_n^- - \alpha_{-n}^- \alpha_n^i), \quad (4.3.13)$$

$$K^{i-} = \frac{1}{p^+} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{j=1}^{D-2} K_{-n}^{ij} \alpha_n^j, \quad (4.3.14)$$

где

$$K_m^{ij} = -\frac{i}{2} \sum_{-\infty}^{\infty} (b_{m-r}^i b_r^j - b_{m-r}^j b_r^i), \quad (4.3.15)$$

а α_n^- дается формулой (4.3.8). Как и в теории бозонной струны, легко проверить, что генераторы группы Лоренца

$$J^{\mu\nu} = l^{\mu\nu} + E^{\mu\nu} + K^{\mu\nu} \quad (4.3.16)$$

удовлетворяют всем соотношениям обычной лоренцевой алгебры, за исключением равенства с коммутатором $[J^{i-}, J^{j-}]$, который должен обращаться в нуль.

Для доказательства того, что $[J^{i-}, J^{j-}] = 0$, в основном требуются те же самые методы, которые использовались в разд. 2.3.1 для теории бозонной струны в калибровке светового конуса. Вновь гарантируется сокращение четверных по осцилляторам членов как следствие лоренцевой инвариантности в классической теории. Нужно внимательно вычислить только члены, квадратичные по осцилляторам. Определив $L^{\mu\nu} = l^{\mu\nu} + E^{\mu\nu}$, мы имеем $J^{i-} = L^{i-} + K^{i-}$. Процедура, идентичная той, что была использована в разд. 2.3.1, теперь дает

$$[L^{i-}, L^{j-}] = - (p^+)^{-2} \sum_{m=1}^{\infty} \Delta_m (\alpha_{-m}^i \alpha_m^j - \alpha_{-m}^j \alpha_m^i), \quad (4.3.17)$$

где

$$\Delta_m = m \left(\frac{D-2}{8} \right) + \frac{1}{m} \left(2a - \frac{D-2}{8} \right). \quad (4.3.18)$$

Отличие от предыдущего результата связано с тем, что в коммутаторе $[\alpha_m^-, \alpha_n^-]$ изменился аномальный член. Чтобы завершить вычисление, воспользуемся тождествами

$$[K_m^{ij}, \alpha_n^-] = m K_{m+n}^{ij} \quad (4.3.19)$$

$$[K_m^{ij}, K_n^{kl}] = -i(K_{m+n}^{il}\delta^{jk} - K_{m+n}^{jl}\delta^{ik} - K_{m+n}^{ik}\delta^{jl} + K_{m+n}^{jk}\delta^{il}) + m(\delta^{ik}\delta^{jl} - \delta^{il}\delta^{jk})\delta_{m+n} \quad (4.3.20)$$

и выведем равенство

$$[K^{i-}, K^{j-}] + [L^{i-}, K^{j-}] + [K^{i-}, L^{j-}] = (p^+)^{-2} \sum_{m=1}^{\infty} m(\alpha_{-m}^i \alpha_m^j - \alpha_{-m}^j \alpha_m^i). \quad (4.3.21)$$

Объединяя эти результаты, мы видим, что лоренцева алгебра удовлетворяется, если только $D = 10$, а $a = 1/2$.

4.3.2. Теорема об отсутствии духов и алгебра, порождающая спектр

Доказательство теоремы об отсутствии духов основано на расширении аналогичного доказательства из бозонной теории. Ввиду того что в бозонном и фермионном секторах эти доказательства почти в точности идентичны, мы, чтобы не повторяться, рассмотрим только бозонный сектор. Как и в нашем обсуждении бозонной теории, изложенном в гл. 2, мы еще к тому же построим операторы, порождающие спектр теории.

Начнем, как и в разд. 2.3.2, с построения операторов ДДФ, которые описывают физические поперечные возбуждения. Там мы рассмотрели вершинный оператор безмассовой векторной частицы с поперечной поляризацией, где выходящим импульсом является nk_0^μ , а вершинный оператор должен действовать на состояния с импульсом $p^\mu = p_0^\mu - Nk_0^\mu$. Импульсы k_0 и p_0 определяются так, что $k_0^- = p_0^- = -1$, $p_0^+ = 1$, $k_0^+ = k_0^i = p_0^i = 0$. Кроме того, n и N являются целыми. В силу (4.2.55) подходящим оператором является

$$V^i(nk_0, \tau) = [\dot{X}^i(\tau) - \psi^i(\tau) k \cdot \psi(\tau)] e^{inX^+(\tau)}. \quad (4.3.22)$$

Тогда, как и раньше, операторы

$$A_n^i = \langle V^i(nk_0, \tau) \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\tau V^i(n, k_0, \tau) \quad (4.3.23)$$

удовлетворяют равенству $[L_m, A_n^i] = 0$, если они действуют на состояния с импульсом p^μ , на которых они корректно определены. В случае суперструн также необходимо, чтобы оператор A_n^i коммутировал с G_r , если он должен отображать физические состояния в физические, чтобы его можно было включить

в алгебру, порождающую спектр. Это устанавливается с помощью (4.2.48) и того факта, что W имеет конформную размерность $1/2$, откуда следует, что

$$[G_r, V^i(nk_0, \tau)] = e^{-ir\tau} [L_{2r}, W^i(nk_0, \tau)] = e^{ir\tau} \left(-i \frac{d}{d\tau} + r \right) W^i(nk_0, \tau). \quad (4.3.24)$$

Тогда

$$[G_r, A_n^i] = -i \left\langle \frac{d}{d\tau} (e^{ir\tau} W^i(nk_0, \tau)) \right\rangle = 0, \quad (4.3.25)$$

так что A_n^i может принадлежать алгебре, порождающей спектр. Эти операторы, как и в теории бозонной струны, находятся во взаимно однозначном соответствии с поперечными осцилляторами α_n^i . Однако теперь нам нужны дополнительные поперечные фермионные операторы B_r^i , которые соответствовали бы осцилляторам b_r^i .

Можно построить поперечные операторы B_r^i , которые годятся для того, чтобы включить их в алгебру, порождающую спектр, даже несмотря на то, что соответствующий вершинный оператор отсутствует. При этом используются формулы

$$Z^i(k) = -2\psi^i k \cdot \psi(k \cdot \dot{X})^{-1/2} e^{ik \cdot X}, \quad (4.3.26)$$

$$Y^i(k) = [G_r, Z^i(k)] = \left\{ \psi^i(k \cdot X)^{1/2} - \dot{X}^i k \cdot \psi(k \cdot \dot{X})^{-1/2} - \frac{i}{4} \psi^i k \cdot \psi k \cdot \psi(k \cdot \dot{X})^{-3/2} \right\} e^{ik \cdot X}, \quad (4.3.27)$$

$$B_r^i = \langle Y^i(rk_0, \tau) \rangle. \quad (4.3.28)$$

Необычные дробные степени приводят к корректно определенным выражениям в данном контексте по причинам, изложенным в разд. 2.3.3. Этот оператор удовлетворяет соотношению

$$\{G_r, B_s^i\} = 0, \quad (4.3.29)$$

как и требовалось, так как $Z^i(k)$ имеет размерность $J = 1/2$ при $k^2 = 0$.

Алгебра операторов A_n^i и B_r^i может быть выведена с помощью тех же приемов, которые были использованы в разд. 2.3.2. Получается, что

$$\begin{aligned} [A_m^i, A_n^j] &= m\delta^{ij}\delta_{m+n}, \\ [A_n^i, B_r^j] &= 0, \\ \{B_r^i, B_s^j\} &= \delta^{ij}\delta_{r+s}. \end{aligned} \quad (4.3.30)$$

Таким образом, эта алгебра изоморфна алгебре поперечных осцилляторов a_n^i и b_r^i и приводит к явно положительному пространству Фока.

Состояния ДДФ являются состояниями, получающимися в результате действия операторов ДДФ на основное состояние произвольного уровня. Состояния, образующие ортогональный базис в пространстве состояний ДДФ, обозначаемые через $|f\rangle$, удовлетворяют тем же условиям, что и в бозонной теории, а именно

$$L_m |f\rangle = 0, \quad K_m |f\rangle = 0, \quad m > 0 \quad (4.3.31)$$

(где $K_m = k_0 \cdot \alpha_m$ для $m > 0$), а также фермионным условиям

$$G_r |f\rangle = 0, \quad H_r |f\rangle = 0. \quad (4.3.32)$$

Операторы H_r определяются следующим образом:

$$H_r = k_0 \cdot b_m \sim b_m^+. \quad (4.3.33)$$

То, что H_r аннулируют состояния ДДФ, очевидно из того факта, что операторы ДДФ не содержат никаких степеней оператора b_m^- .

Мы можем теперь выразить полный базис состояний в объединенном пространстве Фока всех бозонных и фермионных осцилляторов сектора NS через базис, образованный бозонными и фермионными состояниями ДДФ и их ортогональным дополнением. Этот базис составляют состояния, образованные действием произвольных степеней операторов L_{-m} , K_{-m} (определенных в разд. 2.3.3), G_{-r} и H_{-r} . Произвольное состояние этого типа имеет вид

$$G_{-1/2}^{\epsilon_1} G_{-3/2}^{\epsilon_2} \dots G_{-r}^{\epsilon_r} L_{-1}^{\lambda_1} \dots L_{-n}^{\lambda_n} H_{-1/2}^{\delta_1} \dots H_{-s}^{\delta_s} K_{-1}^{\mu_1} \dots K_{-m}^{\mu_m} |f\rangle, \quad (4.3.34)$$

где $|f\rangle$ является произвольным состоянием ДДФ. Фермионные числа заполнения ϵ_r и δ_s равны нулю или единице, а

$$\sum i\epsilon_i + \sum j\lambda_j + \sum k\delta_k + \sum l\mu_l = P > 0. \quad (4.3.35)$$

Число P является номером уровня над уровнем состояния ДДФ $|f\rangle$. Как и в разд. 2.3.3, такие состояния линейно независимы для любого выбора $|f\rangle$, если матрица \mathcal{M}^P их скалярных произведений имеет для любого выбора P отличный от нуля детерминант. Это вновь можно продемонстрировать простым продолжением рассуждений, проведенных для бозонной теории. В результате произвольное состояние в гильбертовом пространстве

может быть записано в виде

$$|\Phi\rangle = |s\rangle + |k\rangle, \quad (4.3.36)$$

где $|s\rangle$ является шпурионным состоянием, а $|k\rangle$ — состоянием вида

$$|k\rangle = \prod_{s=1/2}^{\infty} H_{-s}^{\delta_s} \prod_{m=1}^{\infty} K_{-m}^{\lambda_m} |f\rangle. \quad (4.3.37)$$

Следующий шаг в доказательстве теоремы об отсутствии духов состоит в демонстрации того, что в случае пространства критической размерности произвольное шпурионное состояние $|s\rangle$, удовлетворяющее условию $L_0 = 1/2$, отображается при действии калибровок L_m и G_r ($m, r > 0$) в другое шпурионное состояние. Доказательство вновь аналогично тому, что было в разд. 2.3.3, и на этот раз начинается с рассмотрения действия оператора $G_{1/2}$ и $G_{3/2} = G_{3/2} + 2L_1 G_{1/2}$ на шпурионное состояние. Только если $L_0 = 1/2$, а $D = 10$, эти операторы, подействовав на шпурионное состояние, дают в результате другое шпурионное состояние. Ввиду того что все высшие моды G_r , так же как и моды L_m при $m > 0$, могут быть построены с помощью последовательного применения $G_{1/2}$ и $G_{3/2}$, то состояние $|s\rangle$ является состоянием с нулевой нормой, а состояние $|k\rangle$ должно быть состоянием ДДФ. Отсюда, как и в разд. 2.3.3, следует теорема об отсутствии духов.

Чтобы завершить описание алгебры, порождающей спектр, нужно еще построить продольные операторы A_m^- и B_r^- . Построение этих операторов алгебры, порождающей спектр, основано на тех же принципах, которые использовались в разд. 2.3.3. Однако алгебраические вычисления довольно утомительны, а выражения громоздки, так что мы приведем только результаты.

Полная алгебра, порождающая спектр, дается соотношениями (4.3.30) и соотношениями

$$[A_m^-, A_n^+] = -n A_{m+n}^+, \quad (4.3.38)$$

$$[A_m^-, B_r^+] = -\left(\frac{1}{2} m + r\right) B_{m+r}^+, \quad (4.3.39)$$

$$[A_m^-, A_n^-] = (m - n) A_{m+n}^- + m^3 \delta_{m+n}, \quad (4.3.40)$$

$$[B_r^-, A_n^+] = -n B_{r+n}^+, \quad (4.3.41)$$

$$\{B_r^-, B_s^+\} = A_{r+s}^+, \quad (4.3.42)$$

$$\{B_r^-, B_s^-\} = 2A_{r+s}^- + 4r^2 \delta_{r+s}, \quad (4.3.43)$$

$$[A_m^-, B_r^-] = \left(\frac{1}{2} m - r\right) B_{m+r}^-. \quad (4.3.44)$$

Можно доказать с помощью тех же рассуждений, которые были использованы в разд. 2.3.3, что эти операторы порождают весь физический спектр. Важной особенностью этой алгебры является тот факт, что коммутационные соотношения операторов A_m^- и B_r^- аналогичны соотношениям для операторов L_m и G_r и отличаются от них только видом аномальных членов. Заметим, что эта алгебра совпадает с алгеброй операторов в калибровке светового конуса $\alpha_m^i, p^+ \alpha_m^-, b_r^i, p^+ b_r^-$, ее аномалии согласованы с аномалиями в (4.3.10) и (4.3.11) при $D=10$ и $a=1/2$, т. е. при тех же условиях, которые необходимы для лоренц-инвариантности. Если сделать растяжку компонент «+» векторов k^μ и p^μ на $1/\gamma$, а компонент «-» на γ , что соответствует продольному бусту, то алгебра, порождающая спектр, не изменится. В пределе $\gamma \rightarrow 0$ операторы $A_m^i, A_m^-/p^+, B_r^i, B_r^-/p^+$ сводятся к осцилляторным выражениям $\alpha_m^i, \alpha_m^-, b_r^i, b_r^-$, приведенным в разд. 4.3.1. Это объясняет, почему аномалии согласуются, если лоренцева алгебра удовлетворена.

Как и в бозонной теории, удобно определить операторы

$$\begin{aligned} \tilde{A}_m^- &= A_m^- - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^8 \sum_{n=-\infty}^{\infty} : A_{m-n}^i A_n^i : - \\ &- \frac{1}{2} \sum_{i=1}^8 \sum_{r=-\infty}^{\infty} \left(r - \frac{1}{2} m \right) : B_{m-r}^i B_r^i : + \frac{1}{2} \delta_m, \end{aligned} \quad (4.3.45)$$

$$\tilde{B}_r^- = B_r^- - \sum_{i=1}^8 \sum_{n=-\infty}^{\infty} B_{r-n}^i A_n^i, \quad (4.3.46)$$

которые (анти)коммутируют с поперечными операторами ДДФ. Тогда физическое подпространство пространства Фока можно отождествить с подпространством явно положительно определенного гильбертова пространства при $a=1/2$ и $D \leq 10$. При $D=10$ операторы \tilde{A}_m^- и \tilde{B}_r^- порождают физические состояния нулевой нормы, ортогональные к каждому состоянию физического спектра. Поэтому они описывают состояния, которые выпадают из физического спектра, всецело построенного с помощью поперечных операторов ДДФ A_m^i и B_r^i .

При $D > 10$ спектр не содержит духов. Например, пара состояний $B_{-3/2}^- |0; p_0\rangle$ и $\sum_{i=1}^{D-2} A_{-1}^i, B_{-1/2}^- |0; p_0\rangle$ приводит к матрице их скалярных произведений $\begin{pmatrix} 8 & D-2 \\ D-2 & D-2 \end{pmatrix}$ с детерминантом $(D-2)(10-D)$. Таким образом, при $D > 10$ одна линейная комбинация описывает духовое состояние.

4.3.3 Условие GSO

Рассматриваемая выше модель RNS является непоследовательной квантовой теорией даже при $D=10$ и $a=1/2$ (или $a=0$ в фермионном секторе), если не наложить дополнительных условий. Спектр должен обрезаться очень специфическим приемом, который был впервые предложен Глиозици, Шерком и Оливом (GSO).

Существует несколько аргументов в пользу необходимости обрезания спектра. Во-первых, в теории имеется тахион, который мы хотели бы исключить. Теория стала бы намного привлекательнее, если на состояния наложить дополнительное ограничение, позволяющее исключить некоторые из них, в том числе и тахион, и оставить безмассовые частицы, которые нас в действительности и интересуют.

Во-вторых, хотя явного противоречия с теоремой о связи спина со статистикой нет, некоторое беспокойство вызывают антикоммутирующие операторы ψ^μ , отображающие бозоны в бозоны. Итак, пусть $|\phi\rangle$ — бозонное состояние, которое мы считаем «хорошим»; предположим, что это безмассовый векторный мезон. Тогда $\psi^\mu |\phi\rangle$ является состоянием с целым спином, которое тем не менее получено из состояния $|\phi\rangle$ действием на него антикоммутирующего оператора — ситуация не совсем естественная. В более общем случае рассмотрим состояние

$$\psi^{\mu_1}(\sigma_1) \psi^{\mu_2}(\sigma_2) \dots \psi^{\mu_n}(\sigma_n) |\phi\rangle. \quad (4.3.47)$$

При любом n это состояние является бозонным, так как все ψ^μ являются бозонными операторами. При четных n ничего необычного здесь нет, так как произведение n антикоммутирующих операторов ψ^{μ_k} коммутирует. Но, рассматривая состояния (4.3.47) при нечетном n , мы приходим к ощущению, что не все благополучно. У нас возникает желание отбросить состояния (4.3.47) с нечетным n , оставляя состояния только с четным n . Формально этого можно добиться введением квантового числа, называемого $(-1)^F$ (исторически оно было названо G -четностью в стремлении применить струнную теорию к сильным взаимодействиям), для которого ферми-поля ψ^μ являются нечетными, а бозе-поля X^μ — четными. Это свойство характеризует оператор $(-1)^F$ только с точностью до знака. Мы зафиксируем знак, считая, что для безмассового вектора $(-1)^F = +1$. Тогда для состояния общего вида (4.3.47) $(-1)^F = (-1)^n$. Удержание состояний только с четным n и является удержанием только состояний, для которых $(-1)^F = +1$. Это и есть проекция GSO.

Третьим очень важным преимуществом проекции GSO является то, что она приводит к суперсимметричной теории (в смысле суперсимметрии в десятимерном пространстве в отличие от уже имеющейся двумерной суперсимметрии). Мы увидим свидетельство тому в настоящей главе, а полное доказательство будет дано в следующей главе. Суперсимметрия пространства-времени делает теорию элегантной и привлекательной, и уже только поэтому проекция GSO достойна внимания. Более того, изучая спектр, мы установим, что в числе частиц, описываемых теорией, имеются безмассовые частицы со спином $3/2$. Мы думаем, что при включении взаимодействия теория вряд ли останется последовательной, если только безмассовые частицы со спином $3/2$ не будут взаимодействовать с сохраняющимися токами. Соответствующий сохраняющийся заряд имел бы спин $1/2$ и был бы суперсимметричным зарядом. Таким образом, следует ожидать, что при включении взаимодействия проекция GSO (или некоторая другая модификация, которая либо исключает безмассовые частицы со спином $3/2$, либо приводит к суперсимметрии пространства-времени) необходима для получения последовательной теории. Почему это действительно так, мы установим в гл. 9.

В оставшейся части этого подраздела мы приведем косвенное доказательство того, что модель RNS с проекцией GSO является суперсимметричной теорией в десятимерном пространстве. Но сначала необходимо дать некоторые предварительные сведения.

Мы уже знаем, что безмассовые состояния открытой струны состоят из вектора и спинора. Вектор описывается состоянием $b_{-1/2}^\mu |0; k\rangle$ в пространстве Фока. Безмассовый спинор соответствует решению с наименьшей массой уравнения $F_0 |\psi_0\rangle = 0$. Такое состояние описывается выражением $|a; k\rangle u^a(k)$, где $u^a(k)$ является спинором, удовлетворяющим безмассовому уравнению Дирака. (Так как основное состояние в R-секторе является спинором, мы обозначим его как $|a; k\rangle$, где a является спинорным индексом, а k — импульсом.) Необходимое условие суперсимметричности теории состоит в том, что эта пара состояний должна образовывать суперсимметричный мультиплет. (Ненарушенная суперсимметрия требует, чтобы каждый массовый уровень образовывал супермультиплет.) Векторное поле A^μ при $D = 10$ имеет десять компонент, но только восемь поперечных компонент описывают независимо распространяющиеся моды. Таким образом, суперсимметрия требует, чтобы безмассовые спиноры также имели восемь распространяющихся мод. В общем случае можно предполагать, что спинор в десятимерии

имеет $2^{D/2} = 32$ комплексных компонент¹⁾. Однако ниже мы покажем, что можно одновременно наложить майорановские и вейлевские ограничения, каждое из которых уменьшает число компонент в два раза, сводя тем самым их полное число к 16 вещественным компонентам. Эти оставшиеся 16 компонент должны по-прежнему удовлетворять уравнению Дирака $\Gamma \cdot \partial \chi = 0$, чтобы описывать распространяющиеся физические степени свободы. Это линейное уравнение связывает одну половину компонент с другой половиной, которые в свою очередь удовлетворяют уравнению Клейна — Гордона. Таким образом, как всегда, число распространяющихся мод, которые описываются спинорами, удовлетворяющими уравнению Дирака, в точности равно половине числа спинорных компонент. Получается, что майорано-вейлевский спинор при $D = 10$ описывает восемь распространяющихся мод, т. е. такое их число, которое необходимо для образования супермультиплета вместе с вектором A_μ .

Рассмотрим сначала условие Майораны. Оно является просто условием вещественности, наложенным на фермионное поле. Безмассовым уравнением Дирака является уравнение $0 = \Gamma^\mu \partial_\mu \psi$. Если матрицы Дирака Γ^μ можно выбрать так, чтобы они были все вещественными или все мнимыми, то тогда имеет смысл потребовать, чтобы спинор ψ был вещественным. Представление гамма-матриц, в котором они все вещественные или все мнимые, называется майорановским представлением, а вещественные спиноры — майорановскими спинорами.

Мы построим представление алгебры Дирака при $D = 10$, в котором все гамма-матрицы являются мнимыми. В таком представлении матрица Γ_0 обязательно является антисимметричной, а остальные девять матриц Γ — симметричными. Так как в данной книге наиболее важным является случай $D = 10$, только его мы и обсуждаем подробно. Однако заметим, не приводя доказательства, что майорановские фермионы возможны только тогда, когда размерность пространства-времени D равна 2, 3 или 4 (по модулю 8).

Из десяти матриц Γ_μ мы можем выделить восемь матриц, связанных с «поперечными» направлениями. Они образуют алгебру Клиффорда для подалгебры $SO(8)$ алгебры $SO(1,9)$, — лоренцевой алгебры при $D = 10$. Детали построения алгебры Клиффорда для алгебры $SO(8)$ приведены в приложении 5.B, которое замкнуто и к которому можно обращаться для консультаций по этому вопросу. В нем построены восемь вещественных

¹⁾ Подробное описание того, как строятся спинорные представления группы $SO(D)$ будет дано в приложении 5.A, где, в частности, показано, что для четного D такое представление имеет размерность $2^{D/2}$.

симметричных 16×16 -матриц γ^i , удовлетворяющих антикоммутационным соотношениям $\{\gamma^i, \gamma^j\} = 2\delta^{ij}$. Мы хотим теперь воспользоваться ими для построения десяти мнимых 32×32 -матриц, удовлетворяющих антикоммутационным соотношениям $\{\Gamma^\mu, \Gamma^\nu\} = -2\eta^{\mu\nu}$. (Гамма-матрицы алгебры $SO(8)$ размера 16×16 обозначаются строчной буквой γ , а гамма-матрицы алгебры $SO(1,9)$ размера 32×32 — прописной буквой Γ .) Мы строим 32×32 -матрицы как тензорные произведения 2×2 -матриц Паули и 16×16 -матриц. А именно, мы положим

$$\begin{aligned}\Gamma^0 &= \sigma_2 \otimes 1_{16}, \\ \Gamma^i &= i\sigma_1 \otimes \gamma^i, \quad i = 1, \dots, 8, \\ \Gamma^9 &= i\sigma_3 \otimes 1_{16}.\end{aligned}\quad (4.3.48)$$

Здесь 1_{16} является единичной матрицей размера 16×16 . В обычном представлении, в котором матрицы σ_1 и σ_3 являются вещественными, а σ_2 — мнимой, становится очевидным, что, как мы и хотели, матрицы Γ^μ являются мнимыми. Это свидетельствует о том, что майорановские условия возможны в десятимерии.

Обратимся теперь ко второму важному условию, которое может быть наложено на спиноры, — вейлевскому условию. Всякий раз, когда D четно, можно определить матрицу, аналогичную матрице γ_5 в четырехмерии, которая может быть использована для определения киральности спиноров. При $D = 10$ мы введем матрицу

$$\Gamma_{11} = \Gamma^0 \Gamma^1 \dots \Gamma^9, \quad (4.3.49)$$

которая удовлетворяет соотношениям $\{\Gamma_{11}, \Gamma^\mu\} = 0$ и $(\Gamma_{11})^2 = 1$. Чтобы доказать последнее уравнение, необходимо внимательно подсчитать знаки минус. Девять из них возникают из-за квадрата пространственных гамма-матриц, а 45 — из-за антикоммутирования матриц, необходимых для того, чтобы одинаковые матрицы поставить рядом. Таким образом, полное число знаков минус четно. Спиноры ψ , для которых $\Gamma_{11}\psi = +\psi$ или $\Gamma_{11}\psi = -\psi$, называются соответственно спинорами положительной или отрицательной киральности. Операторы $(1 \pm \Gamma_{11})/2$ являются операторами киральной проекции, они проецируют на спиноры с определенной киральностью. Ограничение спинорами той или иной киральности называется вейлевским условием.

В приведенном выше майорановском представлении, где все десять матриц Γ^μ являются мнимыми, очевидно, что матрица Γ_{11} является вещественной. Поэтому для вещественного спинора χ две составляющие определенной киральности $\frac{1}{2}(1 \pm \Gamma_{11})\chi$ также являются вещественными. Это означает, что майорановское и

вейлевское условия совместимы. Можно потребовать, чтобы спинорное поле ψ было вейлевским спинором, скажем положительной киральности, а также вещественным (майорановским) спинором. Эта ситуация отличается от той, которая имеется в случае $D = 4$, где можно определить и майорановские, и вейлевские спиноры, но соответствующие условия несовместимы, так как матрица γ_5 является мнимой в майорановском представлении. В общем случае майорановское и вейлевское условия совместимы для размерностей $D = 2$ (по модулю 8). Спинор определенной киральности, который к тому же удовлетворяет майорановскому условию, называется майорано-вейлевским спинором.

Майорано-вейлевский спинор при $D = 10$ имеет 16 вещественных компонент. (Мы начали с 32 комплексных компонент, майорановское условие сделало их вещественными, а вейлевское условие позволило исключить половину из них.) Как мы уже отмечали, из уравнения Дирака $\Gamma \cdot \partial \chi = 0$ следует, что восемь из них могут быть связаны с остальными восьмью. Таким образом, у χ имеются в точности восемь независимых распространяющихся степеней свободы, нужных как раз для того, чтобы образовать супермультиплет с вектором A^μ . Приписывая каждому из них индексы, соответствующие присоединенному представлению полупростой группы Ли, мы получаем янг-милловский супермультиплет. Соответствующая лагранжева теория поля описывается в приложении 4.А.

Только что нами было установлено, что безмассовые фермионы при $D = 10$ должны быть одновременно и майорановскими, и вейлевскими. Этим обеспечивается то, что безмассовый сектор образует суперсимметричный мультиплет. Вейлевское условие означает, что спинор основного состояния является собственным состоянием матрицы Γ_{11} . Для обобщения этого условия на случай произвольной фермионной массы необходимо ввести оператор

$$\bar{\Gamma} = \Gamma_{11} (-1)^{\sum_{n=1}^{\infty} d_{-n} \cdot d_n}, \quad (4.3.50)$$

обладающий свойством

$$\{\bar{\Gamma}, d_n^\mu\} = 0, \quad (4.3.51)$$

так как множитель Γ_{11} антикоммутирует с $d_n^\mu \sim \Gamma^\mu$, а другой множитель в $\bar{\Gamma}$ антикоммутирует с модами d_n^μ , имеющими индекс $n \neq 0$. Так как поле ψ^μ линейно по d_n^μ , имеет место равенство

$$\{\bar{\Gamma}, \psi^\mu(\sigma, \tau)\} = 0. \quad (4.3.52)$$

Именно оператор $\bar{\Gamma}$ играет в R-секторе роль оператора $(-1)^F$, который мы с меньшими усилиями определили в секторе NS. Поэтому условие GSO для физического фермионного состояния принимает вид

$$\bar{\Gamma}|\psi\rangle = |\psi\rangle. \quad (4.3.53)$$

Оно в точности соответствует условию четной G -четности

$$G|\varphi\rangle = |\varphi\rangle, \quad (4.3.54)$$

где

$$G = -(-1)^{\sum_{r=1/2}^{\infty} b_{-r} \cdot b_r} \quad (4.3.55)$$

для физических бозонов. Операторы $\bar{\Gamma}$ и G представляют оператор $(-1)^F$ в фермионном и бозонном секторах соответственно.

Для основного фермионного состояния оператор $(-1)^F$ сводится к Γ_{11} , оператору киральности, и проекция GSO означает удержание только безмассовых фермионов положительной киральности в смысле десятимерного пространства. Любое состояние в секторе Рамона может быть построено следующим образом:

$$d_{-m}^{i_1} d_{-m_2}^{i_2} \dots |\alpha\rangle, \quad (4.3.56)$$

где соответствующее произведение операторов мод (возможно, содержащее и операторы нулевых мод) действует на безмассовое состояние положительной киральности, и $\bar{\Gamma} = (-1)^F$. Для такого состояния $(-1)^F$ равно $(-1)^n$, где n является числом операторов фермионных мод в (4.3.56).

На первый взгляд кажется, что из условия, наложенного на массивные фермионы, следует, что они тоже являются вейлевскими, что невозможно. Вейлевские спиноры не могут быть элементами массивных спинорных представлений группы Лоренца, так как матрица Γ_{11} не антикоммутирует с матрицей $i\Gamma \cdot \partial + m$. Однако в теории струн равенство $\{\bar{\Gamma}, F_0\} = 0$ является точным, а не приближенным, справедливым только для безмассовых состояний, так что проекция GSO может быть сделана даже для массивных уровней. Чтобы подробно познакомиться с тем, как это делается, рассмотрим первый возбужденный фермионный уровень. В калибровке светового конуса возможными состояниями являются $\alpha_{-1}^i |0\rangle u_1$ и $\alpha_{-1}^i |0\rangle u_2$, где из условия с $\bar{\Gamma}$ следует, что u_1 и u_2 являются майорано-вейлевскими спинорами с противоположной киральностью:

$$\Gamma_{11} u_1 = u_1, \quad (4.3.57)$$

$$\Gamma_{11} u_2 = -u_2. \quad (4.3.58)$$

Объединив эти два спинора, мы получаем майорановский спинор, который образует неприводимое массивное представление группы Лоренца.

Необходимым условием для суперсимметрии является то, что на каждом массовом уровне должно быть одинаковое число бозонных и фермионных состояний. Для безмассовых состояний это следует из (4.3.53). Вейлевская проекция оставляет восемь физических безмассовых фермионных состояний, столько же, сколько имеется распространяющихся мод безмассового вектора. Посмотрим теперь, сколько бозонных и фермионных состояний находится на каждом из возбужденных массовых уровней. Это является комбинаторной проблемой, аналогичной той, которая решалась для бозонных струн в разд. 2.3.5. Там мы видели, что вырождения определяются выражением $\text{tr } w^N$. По существу этот результат лишь с незначительными модификациями справедлив и теперь. В бозонном секторе нам необходимо учесть проекцию, связанную с G -четностью, и тот факт, что безмассовый уровень содержит $1/2$ единицы возбуждения. В итоге число состояний с $\alpha' M^2 = n$ дается коэффициентом $d_{\text{NS}}(n)$ в разложении

$$f_{\text{NS}}(w) = \sum_{n=0}^{\infty} d_{\text{NS}}(n) w^n = \frac{1}{\sqrt{w}} \text{tr} \left[\frac{1}{2} (1 + G) w^N \right], \quad (4.3.59)$$

$$N = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{-n}^i \alpha_n^i + \sum_{r=1/2}^{\infty} r b_{-r}^i b_r^i. \quad (4.3.60)$$

(Напомним, что оператор G совпадает с оператором $(-1)^F$.) Процедура вычисления следа является непосредственным обобщением примера, рассмотренного в разд. 2.3.5 для бозонной теории. Новой чертой является множитель, представляющий со-

бой след от b_r^i -мод, $\text{tr } w^{\sum_r b_{-r}^i b_r^i}$. Так как каждое фермионное состояние либо заполнено, либо не заполнено, этот множитель приводит для каждой моды просто к выражению $(1 + w^r)$. Присутствие оператора G в $\text{tr } G w^N$ меняет знаки заполненных состояний, приводя на каждом уровне к выражению $(1 - w^r)$. Поэтому в результате для полного следа получаем

$$f_{\text{NS}}(w) = \frac{1}{2\sqrt{w}} \left[\prod_{m=1}^{\infty} \left(\frac{1+w^{m-1/2}}{1-w^m} \right)^8 - \prod_{m=1}^{\infty} \left(\frac{1-w^{m-1/2}}{1-w^m} \right)^8 \right]. \quad (4.3.61)$$

Вырожденность фермионных уровней находится аналогичным способом с помощью формулы

$$f_{\text{R}}(w) = \sum_{n=1}^{\infty} d_{\text{R}}(n) w^n = \text{tr} \frac{1}{2} (1 + \bar{\Gamma}) w^N = 8 \text{tr } w^N, \quad (4.3.62)$$

где

$$N = \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_{-n}^i \alpha_n^i + n d_{-n}^i d_n^i). \quad (4.3.63)$$

Множитель 8 возникает из-за вырожденности основного состояния и из-за учета проекции $\bar{\Gamma} = 1$ для каждого массового уровня. (Она просто устраняет половину состояний, которые иначе присутствовали бы.) В формуле для $f_R(\omega)$ нет множителя, содержащего $\sqrt{\omega}$, так как основное состояние безмассового фермиона соответствует случаю, когда $N = 0$. Взятие следа приводит к формуле

$$f_R(\omega) = 8 \prod_{m=1}^{\infty} \left(\frac{1 + \omega^m}{1 - \omega^m} \right)^8. \quad (4.3.64)$$

Теперь мы можем задаться вопросом, действительно ли на каждом массовом уровне имеется одинаковое число бозонов и фермионов. В этом случае выполнялось бы тождество

$$f_{NS}(\omega) = f_R(\omega) = F(\omega). \quad (4.3.65)$$

Знаменательно, что это тождество было впервые доказано в 1829 г. Якоби, который назвал ее «довольно непонятной формулой» (aequatio identica satis abstrusa). Читатель должен поверить, что каждое выражение имеет следующее разложение:

$$F(\omega) = 8(1 + 16\omega + 144\omega^2 + \dots). \quad (4.3.66)$$

Это наблюдение, конечно же, не может служить доказательством суперсимметрии, но вселяет большую надежду. Само доказательство будет изложено в следующей главе.

4.3.4. Локально суперсимметричная форма действия

До сих пор теория суперструн излагалась в рамках формализма с суперсимметрией мировой поверхности, но нам хотелось бы подвести под нее более прочную логическую основу. Вместо того чтобы просто постулировать суперусловия Вирасоро, мы хотим вывести их в виде связей, возникающих вследствие фиксации калибровки в калибровочно инвариантном лагранжиане. Для бозонной струны условия Вирасоро возникли вследствие фиксации калибровки в лагранжиане с двумерной общей ковариантностью; для суперсимметричных струн суперусловия Вирасоро должны появляться в результате фиксации калибровки в двумерном лагранжиане, обладающем как локальной суперсимметрией, так и общей ковариантностью. Это

означает, что мы должны преодолеть ряд технических трудностей. Необходимо выяснить, каким образом вводятся спиноры на искривленной мировой поверхности, и сформулировать теорию двумерной супергравитации.

Ввести фермионы в общую теорию относительности не так просто. Причина этого заключается в том, что общековариантные преобразования (в D -мерии) преобразуют бозе-поля преобразованиями из группы $GL(D, R)$ (где $GL(D, R)$ — группа обратимых вещественных $D \times D$ -матриц), а эта группа не имеет спинорного представления. Спинорное представление есть у группы Лоренца, поэтому известно, как спиноры должны преобразовываться при преобразованиях Лоренца. Однако совсем не ясно, как они должны преобразовываться при общековариантных преобразованиях (называемых также диффеоморфизмами), не являющихся преобразованиями Лоренца. Этот вопрос обсуждается в учебниках по общей теории относительности, и мы сможем подробнее изложить его в гл. 12, где понятие спиноров в общей теории относительности будет использоваться для того, чтобы ознакомить читателя с определенными геометрическими и топологическими идеями. Здесь же мы, преследуя лишь прагматические цели, попытаемся дать некоторое введение, достаточное для наших потребностей в данном разделе.

Рассмотрим спиноры на D -мерном многообразии M . Из принципа эквивалентности следует, что в каждой точке многообразия существует инерциальная система отсчета. В этой системе отсчета преобразования Лоренца вполне осмысленны. Можно считать, что они действуют на (плоском) касательном к многообразию пространстве, построенном в рассматриваемой точке. В локальной инерциальной системе отсчета мы вводим базис e_{μ}^m , $m = 0, \dots, D - 1$, ортогональных касательных векторов. Итак, для каждого m e_{μ}^m является касательным вектором; μ является векторным индексом этого вектора (касательного к многообразию M), тогда как m является его номером. Конечно, такой выбор несколько произволен: если мы подействуем преобразованием Лоренца на индекс m , то «репер» e_{μ}^m преобразуется в новый, но столь же подходящий базис касательных векторов. Эти вопросы более основательно рассматриваются в гл. 12. Индекс μ вектора e_{μ}^m преобразуется как любой другой векторный индекс при диффеоморфизмах многообразия M . Так как лоренцев индекс m является просто номером касательного вектора e_{μ}^m , то относительно этого индекса при диффеоморфизмах многообразия M вектор e_{μ}^m преобразуется как скаляр. Но из-за того, что в каждой пространственно-временной точке выбор базиса e_{μ}^m является произвольным, мы вправе осуществить

локальные $SO(D-1, 1)$ -преобразования, действующие на «локальный лоренцев индекс» m .

Преимущество введения репера заключается в том, что группа Лоренца $SO(D-1, 1)$ допускает спинорные представления. Таким образом, спинорные индексы должны рассматриваться как локальные лоренцевы индексы. Говоря, что e_μ^m являются ортонормированными касательными векторами, мы имеем в виду то, что метрический тензор многообразия $g_{\mu\nu}$ и метрика Минковского η_{mn} касательного пространства связаны соотношениями

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu} &= \eta_{mn} e_\mu^m e_\nu^n, \\ \eta^{mn} &= g^{\mu\nu} e_\mu^m e_\nu^n. \end{aligned} \quad (4.3.67)$$

Мы воспользовались символами e_μ^m для обозначения обратного репера, а $e = \sqrt{g}$ — для его детерминанта. Репер имеет на $\frac{1}{2}D(D-1)$ больше компонент, чем тензор $g_{\mu\nu}$, и соответствует его антисимметричной части. Однако в то же время появляется много дополнительных локальных симметрий, соответствующих локальным преобразованиям Лоренца, так что число распространяющихся мод остается неизменным. Локальная лоренцева симметрия очень похожа на обычную янг-миллсовскую симметрию. По аналогии с янг-миллсовским потенциалом (или связностью) A_μ нужно ввести спиновую связность ω_μ^{mn} , калибровочное поле для локальных лоренцевых преобразований. При инфинитезимальном лоренцевом преобразовании, которое описывается параметром $\Theta^{mn} = -\Theta^{nm}$, вариация спиновой связности равна

$$\delta\omega_\mu^{mn} = \partial_\mu \Theta^{mn} + [\omega_\mu, \Theta]^{mn} = (D_\mu \Theta)^{mn}. \quad (4.3.68)$$

Мы вводим гамма-матрицы Γ^m , которые удовлетворяют стандартной дираковской алгебре $\{\Gamma^m, \Gamma^n\} = -2\eta^{mn}$. Правила, по которым при лоренцевом преобразовании преобразуется спинор ψ , даются формулой

$$\delta\psi = -\frac{1}{4} \Theta^{mn} \Gamma_{mn} \psi, \quad (4.3.69)$$

где обозначение Γ_{mn} используется для полностью антисимметризованного произведения матриц $\Gamma_m \Gamma_n \Gamma_p \dots$. В частности, $\Gamma_{mn} = \frac{1}{2} [\Gamma_m, \Gamma_n]$. Ковариантная производная спинора определяется формулой

$$D_\mu \psi = \left(\partial_\mu + \frac{1}{4} \omega_\mu^{mn} \Gamma_{mn} \right) \psi. \quad (4.3.70)$$

Основное значение такой ковариантной производной состоит в том, что закон преобразования $D_\mu \psi$ не содержит производных от параметра Θ , и поэтому ковариантная производная преобразуется как тензор указанного типа.

В искривленном пространстве мы вводим гамма-матрицы

$$\Gamma^\mu(x) = e_\mu^m(x) \Gamma^m. \quad (4.3.71)$$

Действие для спинора (дираковского или майорановского) в гравитационном фоновом поле имеет вид

$$S_\psi = \frac{i}{2} \int dx e \bar{\psi} \Gamma^\mu D_\mu \psi. \quad (4.3.72)$$

Очень полезно в качестве упражнения показать, что оно инвариантно относительно и общековариантных, и локальных лоренцевых преобразований.

До сих пор мы ничего не говорили о том, чем должна быть спиновая связность, за исключением того, что она преобразуется как калибровочное поле при лоренцевых преобразованиях. При желании можно рассмотреть теорию, в которой спиновая связность является просто новым распространяющимся полем. Однако если мы хотим обсуждать стандартную общую теорию относительности, то спиновая связность не должна быть новым произвольно построенным объектом, а должна определяться (с точностью до локальных лоренцевых преобразований) метрикой. Как же ее нужно определить? В общей теории относительности метрический тензор является ковариантно постоянным, а формула (4.3.67) показывает, что репер есть нечто вроде корня квадратного из метрики; поэтому естественно потребовать, чтобы репер был ковариантно постоянным. Действительно, если ковариантная производная репера не равна нулю, то она будет величиной, которая не имеет аналога в стандартной общей теории относительности. Следовательно, мы потребуем, чтобы

$$D_\mu e_\nu^m = \partial_\mu e_\nu^m + \omega_\mu^{mn} e_\nu^n - \Gamma_{\mu\nu}^{\rho} e_\rho^m = 0. \quad (4.3.73)$$

Подсчитывая количество уравнений и неизвестных, мы видим, что эти уравнения однозначно определяют спиновую связность. Требование ортонормальности (или, что эквивалентно, выполнение равенств (4.3.67)) также определяет репер с точностью до лоренцевых преобразований; поэтому, вводя репер и спиновую связность, мы не меняем содержание общей теории относительности. Тензор кривизны Римана может быть определен как напряженность поля Янга — Миллса, построенного из спиновой связности, т. е.

$$R_{\mu\nu}^{mn} = \partial_\mu \omega_\nu^{mn} - \partial_\nu \omega_\mu^{mn} + [\omega_\mu, \omega_\nu]^{mn}. \quad (4.3.74)$$

В самом деле, правая сторона формулы (4.3.74) является тензором, определяемым не более чем двумя производными от метрики (так как спиновая связность с помощью равенства (4.3.73) неявно выражается через метрику), так что он должен быть тензором Римана. Конечно, это можно проверить и непосредственно.

В качестве нетривиального примера применения реперного формализма кратко обсудим ($N = 1$)-супергравитацию в четырехмерии. В эту теорию кроме репера и спиновой связности входит также поле Рариты — Швингера $\chi_{A\mu}$ со спинорным индексом A и векторным индексом μ . Действие дается формулой

$$S = \int d^4x e \left\{ -\frac{1}{2\kappa^2} R - \frac{i}{2} \bar{\chi}_\mu \gamma^{\mu\nu\sigma} D_\nu \chi_\sigma \right\}, \quad (4.3.75)$$

где $R = e^\mu_{\nu} e^\nu_{\rho} R^{\mu\nu\rho\sigma}$ является скаляром кривизны, а κ — гравитационной константой взаимодействия (планковской длиной), квадрат которой пропорционален ньютоновской константе. Матрицы Дирака в четырехмерии записываются строчными буквами (γ^μ и т. д.). Приведенное выше действие обладает общей ковариантностью и локальной лоренцевой инвариантностью. Менее очевиден тот факт, что оно обладает еще локальной суперсимметрией. Преобразования суперсимметрии, относительно которых оно инвариантно, суть

$$\delta\chi_\mu = \frac{1}{\kappa} D_\mu \epsilon, \quad (4.3.76)$$

$$\delta e_\mu^m = -\frac{i}{2} \kappa \bar{\epsilon} \gamma^m \chi_\mu. \quad (4.3.77)$$

Понятно, что спиновая связность ω_μ^{mn} должна определяться как решение соответствующего классического уравнения поля (которое является просто алгебраическим). Это приводит к добавке, билинейной по полям χ_μ , к обычному выражению, получающемуся при решении уравнения (4.3.73). Для доказательства суперсимметрии нет необходимости знать, как преобразуется ω , так как ее вариация умножается на левую часть ее же полевого уравнения, которая равна нулю.

Только что описанная теория была первой предложенной теорией супергравитации; ее открытие послужило началом новой области исследований, которая вместе с другими направлениями сыграла важную роль в развитии теории суперструн. И сейчас исследование супергравитации является обширной областью, имеющей много различных граней. Мы здесь не будем обсуждать те из них, которые непосредственно не связаны с теорией суперструн, и даже некоторые из связанных с ней.

4.3.5. Суперструнное действие и его симметрии

Для того чтобы вывести связи, которые должны сопровождать действие с фиксированной калибровкой (4.1.2), необходимо сформулировать более фундаментальный принцип действия. Из аналогии с бозонным случаем ясно, что при этом желательно иметь инвариантность относительно репараметризации. Однако схема, в которой суперусловия Вирасоро могут возникать как калибровочные условия, требует в то же время наличия локальной суперсимметрии. Необходимость в локальной суперсимметрии следует из того факта, что коммутатор двух преобразований суперсимметрии приводит к трансляции мировой поверхности в действии с фиксированной калибровкой. Это означает, что кроме физических координат $X^\mu(\sigma, \tau)$ и $\psi^\mu(\sigma, \tau)$ мы должны еще включить в рассмотрение «диад» $e_\alpha^a(\sigma, \tau)$ и поле Рариты — Швингера $\chi_{A\alpha}(\sigma, \tau)$ (двухкомпонентный майорановский спинор и вектор мировой поверхности).

Репараметризационная инвариантность на мировой поверхности (двумерная общековариантная инвариантность) и двумерная локальная лоренцева инвариантность обеспечиваются заменой действия (4.1.2) на действие

$$S_2 = -\frac{1}{2\pi} \int d^2\sigma e \{ \bar{h}^{\alpha\beta} \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X_\mu - i \bar{\psi}^\mu \rho^\alpha \nabla_\alpha \psi_\mu \}. \quad (4.3.78)$$

Используя ферми-статистику, можно показать, что спиновая связность не дает вклада в спинорный член, поэтому ∇_α мы можем заменить на ∂_α . В этом проявляется особенность майорановских спиноров в двумерии. Действие S_2 все еще не обладает локальной суперсимметрией. При преобразованиях (4.1.23) с функцией ϵ , зависящей от σ и τ , на которую не наложено никаких ограничений, получается вариация, пропорциональная интегралу $\int (\nabla_\sigma \bar{\epsilon}) J^\alpha d^2\sigma$, где J^α является супертоком, введенным в разд. 4.1.1:

$$J^\alpha = \frac{1}{2} \rho^\beta \rho^\alpha \psi^\mu \partial_\beta X_\mu. \quad (4.3.79)$$

Дальнейшее построение теперь осуществляется «нётеровским методом». Введем суперсимметричное калибровочное поле χ_α (гравитино) с преобразованием суперсимметрии

$$\delta\chi_\alpha = \nabla_\alpha \epsilon. \quad (4.3.80)$$

(Здесь α является векторным индексом, поле χ_α имеет еще спинорный индекс, который явно не выписывается.) Полученная

выше вариация может быть скомпенсирована варьированием поля χ_α в члене

$$S_3 = -\frac{1}{\pi} \int d^2\sigma e \bar{\chi}_\alpha \rho^\beta \rho^\alpha \psi^\mu \partial_\beta X_\mu. \quad (4.3.81)$$

Однако вариация координаты X_μ в этом выражении приводит к дополнительному члену с $\nabla \epsilon$ вида

$$\bar{\chi}_\alpha \rho^\beta \rho^\alpha \psi^\mu \bar{\psi}_\mu \nabla_\beta \epsilon = -\frac{1}{2} \bar{\psi}_\mu \psi^\mu \bar{\chi}_\alpha \rho^\beta \rho^\alpha \nabla_\beta \epsilon. \quad (4.3.82)$$

Это слагаемое может быть компенсировано добавлением к действию другого члена вида

$$S_4 = -\frac{1}{4\pi} \int d^2\sigma e \bar{\psi}_\mu \psi^\mu \bar{\chi}_\alpha \rho^\beta \rho^\alpha \chi_\beta. \quad (4.3.83)$$

Полное действие $S = S_2 + S_3 + S_4$ теперь инвариантно относительно преобразований локальной суперсимметрии

$$\begin{aligned} \delta X^\mu &= \bar{\epsilon} \psi^\mu, & \delta \psi^\mu &= -i \rho^\alpha \epsilon (\partial_\alpha X^\mu - \bar{\psi}^\mu \chi_\alpha), \\ \delta e_\alpha^a &= -2i \bar{\epsilon} \rho^\alpha \chi_\alpha, & \delta \chi_\alpha &= \nabla_\alpha \epsilon. \end{aligned} \quad (4.3.84)$$

В полученном результате стоит отметить несколько моментов. Прежде всего в отличие от теории супергравитации с $D > 2$ поля e_α^a и χ_α не имеют кинетических членов. К найденному действию можно было бы добавить действие Эйнштейна — Гильберта $\sim \int e R d^2\sigma$, являющееся топологическим инвариантом (пропорциональным эйлеровой характеристике). Однако это не повлияет на классическую теорию. У гравитино вообще отсутствует кинетический член. Выражение $\chi_\alpha \rho^{\alpha\beta} \nabla_\beta \chi_\gamma$ просто обращается в нуль, так как в двумерии нет антисимметричного тензора третьего ранга. Коммутатор двух преобразований суперсимметрии приводит к комбинации преобразований других локальных симметрий с коэффициентами, зависящими от полей, как это обычно бывает в теориях супергравитации. Даже для этого нужно воспользоваться уравнениями движения для ферми-полей. Формулировку в терминах суперпространства из разд. 4.1.1 можно обобщить и на этот случай, получив замыкание алгебры вне массовой оболочки. Однако описание того, как это срабатывает, завело бы нас слишком далеко, особенно если учесть, что такая формулировка не требуется для остальной части нашего изложения.

Кроме описанных выше симметрий действие S имеет еще две локальные симметрии. Одна из них является расширением локальной вейлевой (или конформной) симметрии, с которой

мы уже встречались в теории бозонной струны. Вейлевскими преобразованиями, оставляющими действие S инвариантным, являются

$$\begin{aligned} \delta X^\mu &= 0, & \delta \psi^\mu &= -\frac{1}{2} \Lambda \psi^\mu, \\ \delta e_\alpha^a &= \Lambda e_\alpha^a, & \delta \chi_\alpha &= \frac{1}{2} \Lambda \chi_\alpha. \end{aligned} \quad (4.3.85)$$

Существует и другая локальная фермионная симметрия, которая отвечает преобразованиям

$$\begin{aligned} \delta \chi_\alpha &= i \rho_\alpha \eta, \\ \delta e_\alpha^a &= \delta \psi^\mu = \delta X^\mu = 0, \end{aligned} \quad (4.3.86)$$

где η — произвольный майорановский спинор. Для доказательства этого утверждения необходимо воспользоваться тождеством $\rho^\alpha \rho_\beta \rho_\alpha = 0$, которое выполняется в двумерии. Из всех этих симметрий вместе следует, что действие S является действием «суперконформной» теории. В теории бозонной струны конформная симметрия после ковариантной фиксации калибровки привела к алгебре связей Вирасоро. В данном случае мы получаем суперсимметричное расширение той алгебры.

Конформные и суперконформные теории супергравитации были построены в четырехмерии. В этом случае действие обязательно содержит члены R^2 , которые приводят к множеству патологий, таким как распространение духов и связанные с ним эффекты. К счастью, эти проблемы не возникают в конформно инвариантных теориях мировой поверхности с $D = 2$. (Они также не появляются в десятимерной физике!)

Наконец теперь мы можем привести последовательный вывод уравнений суперсвязей Вирасоро, формулируя выбор ковариантных калибровок, которые приводят к простым полевым уравнениям и условиям связей, точно так же как мы поступали в случае теории бозонных струн в разд. 2.1.3. Сначала анализ будет проведен для классической теории, а затем в следующем разделе он вновь будет рассмотрен в контексте квантовой теории.

Имеется всего четыре локальные бозонные симметрии: две репараметризационные инвариантности мировой поверхности, одна локальная лоренцева симметрия и одна симметрия относительно изменения масштаба. Локально они могут быть использованы для приведения калибровочными преобразованиями диады к стандартному виду $e_\alpha^a = \delta_\alpha^a$. Аналогично две суперсимметрии (ϵ) и две суперконформные симметрии (η) могут быть локально использованы, чтобы четыре компоненты χ_α прирав-

нять нулю. В этой калибровке действие упрощается до глобально суперсимметричного действия (4.1.2), и уравнения движения являются просто уравнения

$$\partial^\alpha \partial_\alpha X^\mu = 0, \quad (4.3.87)$$

$$\rho^\alpha \partial_\alpha \psi^\mu = 0. \quad (4.3.88)$$

К ним нужно добавить уравнения движения полей e_α^a и χ_α , полученные в калибровке $e_\alpha^a = \delta_\alpha^a$, $\chi_\alpha = 0$. Этими уравнениями являются обращения в нуль тензора энергии-импульса и супертока на мировой поверхности:

$$J_\alpha \equiv -\frac{\pi}{2e} \frac{\delta S}{\delta \chi^\alpha} = \frac{1}{2} \rho^\beta \rho_\alpha \psi^\mu \partial_\beta X_\mu = 0, \quad (4.3.89)$$

$$T_{\alpha\beta} = \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X_\mu + \frac{i}{2} \bar{\psi}^\mu \rho_{(\alpha} \partial_{\beta)} \psi_\mu - (\text{след}) = 0. \quad (4.3.90)$$

Эти условия представляют собой суперсвязи Вирасоро, в конце концов выведенные на основе имеющейся калибровочной поверхности.

4.4. Современное ковариантное квантование

Проквантовать суперструну RNS можно с помощью той же техники, что была использована в разд. 2.4 для бозонной струны. Правда, при этом присутствие в теории спинорных полей приведет к появлению бозонных духов, ассоциированных с локальной суперсимметрией на мировой поверхности, в дополнение к обычным. При правильном включении этих духов полная супералгебра Вирасоро будет свободна от аномалий при правильном выборе размерности и массы основного состояния. Поскольку все построение аналогично уже описанному случаю бозонной струны, наше изложение будет предельно кратким.

4.4.1. Духи Фаддеева — Попова

Мы показали в разд. 3.1.1, что функциональный интеграл по пространству метрик $h_{\alpha\beta}$ можно заменить на интеграл по конформному фактору φ и параметрам репараметризации ξ^α . Такая возможность возникала постольку, поскольку любая данная метрика могла быть получена из некоторой фиксированной метрики с помощью преобразований локального растяжения и замены переменных. Но для мировых поверхностей рода $g > 0$ получить таким способом все возможные метрики не удастся. Вместо этого множество метрик разбивается на классы эквивалентности, которым отвечают точки некоторого конечномер-

ного пространства, пространства Тейхмюллера. Однако всеми этими сложностями можно пренебречь, коль скоро мы не собираемся реально вычислять интегралы по поверхностям рода $g > 0$, а всего лишь намерены ввести духовые координаты и BRST-заряд и подсчитать критическую размерность.

В гл. 3, зафиксировав локальную репараметризационную инвариантность, мы были вынуждены ввести антикоммутирующие духовые координаты $b_{\alpha\beta}$ и c^β с конформной размерностью 2 и -1 соответственно. В случае суперструн эти координаты тоже присутствуют, но кроме них появляются дополнительные духи, связанные с локальной суперсимметрией на мировой поверхности. Сейчас мы выведем действие для этих духов, но несколько иным, чем для бозонных струн, способом. На классическом уровне утверждение, что поле χ_α может быть откалибровано, означает, что его всегда можно представить в виде

$$\chi_\alpha = i\rho_\alpha \eta + \nabla_\alpha \varepsilon, \quad (4.4.1)$$

и при разумно выбранных граничных условиях это представление однозначно. Поэтому в функциональном интеграле мы можем сделать замену переменных, перейдя от χ_α к η и ε . После такой замены можно опустить интегралы по η и ε , поскольку они являются параметрами преобразования симметрии и действие от них явно не зависит. (Вообще говоря, это — несколько упрощенное рассуждение: в теории могут быть и другие поля, преобразующиеся нетривиально при преобразованиях с параметрами η и ε , но и более строгое рассуждение приводит к тому же ответу.) Однако делать отсюда вывод, что двумерная супергравитация вообще не реагирует на присутствие в действии поля гравитино χ_α , было бы неверно. Переход от χ_α к η и ε приводит к появлению некоего якобиана, который, как и раньше, может быть представлен в виде функционального интеграла по духовым полям.

Чтобы надлежащим образом ввести духовые поля, нам придется сделать некоторое отступление и обсудить само понятие «спина» 1+1-мерных полей. Интересующая нас группа Лоренца — это $SO(1, 1)$ или $SO(2)$ в евклидовой формулировке; для определенности мы будем рассматривать именно евклидов случай. У $SO(2)$ есть всего один генератор, который мы обозначим буквой \mathcal{W} , и ее представления специфицируются заданием собственного значения \mathcal{W} , оно-то и является «спином». Сейчас мы интересуемся представлениями с целыми или полуцелыми значениями \mathcal{W} . Например, поле гравитино $\chi_{\alpha A}$ имеет векторный индекс α , соответствующий значению спина ± 1 , и спинорный индекс A (как правило, мы его опускали), соответствующий спину $\pm 1/2$, а значит, в сумме $\chi_{\alpha A}$ имеет четыре компоненты со спи-

нами ± 1 и $\pm 1/2$, т. е. $3/2$, $1/2$, $-1/2$ и $-3/2$. Калибровочные параметры η и ε в (4.4.1) — это двухкомпонентные спиноры со спином $\pm 1/2$, а оператор дифференцирования ∇_α — вектор, компоненты которого несут спин ± 1 . Удобно принять следующее временное соглашение: для произвольного поля V обозначим V_q его компоненту со спином q . Оператор дифференцирования ∇_α , например, будет иметь компоненты ∇_1 и ∇_{-1} . В этих обозначениях можно более развернуто записать (4.4.1) в виде

$$\begin{aligned}\delta\chi_{3/2} &= \nabla_1 \varepsilon_{1/2}, \\ \delta\chi_{1/2} &= \nabla_1 \varepsilon_{-1/2} + \eta_{1/2}, \\ \delta\chi_{-1/2} &= \nabla_{-1} \varepsilon_{1/2} + \eta_{-1/2}, \\ \delta\chi_{-3/2} &= \nabla_{-1} \varepsilon_{-1/2}.\end{aligned}\quad (4.4.2)$$

Отметим, что параметр η появляется только во втором и в третьем равенстве, причем без производных; следовательно, никакого нетривиального якобиана при замене $\chi_{\pm 1/2}$ на $\eta_{\pm 1/2}$ не возникает. Можно даже вообще убрать второе и третье равенства из (4.4.2), поскольку для нас существенны только первое и четвертое. Якобиан, возникающий при переходе от $\chi_{3/2}$ к $\varepsilon_{1/2}$, — это

$$J_{3/2} = \det^{-1} \nabla_1^{1/2 \rightarrow 3/2}, \quad (4.4.3)$$

где верхний индекс у $\nabla_1^{1/2 \rightarrow 3/2}$ указывает, что мы рассматриваем оператор ∇_1 как действующий из пространства полей со спином $1/2$ в поля со спином $3/2$. Чтобы записать этот якобиан как функциональный интеграл, введем поля $\gamma_{1/2}$ и $\beta_{-3/2}$ (индекс указывает спин!) и запишем

$$J_{3/2} = \int D\gamma_{1/2} D\beta_{-3/2} \exp - \left(\frac{1}{\pi} \int d^2\sigma \beta_{-3/2} \nabla_1 \gamma_{1/2} \right). \quad (4.4.4)$$

Здесь γ и β должны быть коммутирующими полями, поскольку они являются духами для фермионной симметрии или, иначе аргументируя, потому что в (4.4.3) стоит \det^{-1} . (Однако сама эта -1 появляется именно потому, что χ и ε антикоммутируют.) Аналогично замена переменных $\chi_{-3/2}$ на $\varepsilon_{-1/2}$ дает якобиан, который можно представить в виде

$$J_{-3/2} = \int D\gamma_{-1/2} D\beta_{3/2} \exp - \left(\frac{1}{\pi} \int d^2\sigma \beta_{3/2} \nabla_{-1} \gamma_{-1/2} \right), \quad (4.4.5)$$

где $\gamma_{-1/2}$ и $\beta_{3/2}$ — новые коммутирующие духи. Поля γ и β называются суперконформными духами.

Пара полей $\gamma_{\pm 1/2}$ образует двухкомпонентный спинор γ_A , а пара $\beta_{\pm 3/2}$ — вектор-спинор $\beta_{\alpha A}$, подчиняющийся дополнительному условию

$$\rho^{\alpha B} \beta_{\alpha B} = 0. \quad (4.4.6)$$

(Действительно, левая часть (4.4.6) представляет собой спинор, компоненты которого имеют спин $\pm 1/2$, поэтому соответствующие компоненты β зануляются.) Духовое действие, выписанное в (4.4.5) и (4.4.4), можно представить и в ковариантном виде:

$$S_{FP} = - \frac{i}{2\pi} \int d^2\sigma e h^{\alpha\beta} \bar{\gamma} \nabla_\alpha \beta_\beta. \quad (4.4.7)$$

В калибровке $h_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta}$ из уравнений движения следует, что $\beta_{3/2}$ и $\gamma_{-1/2}$ — это правые, а вторая пара — левые поля.

Ограничиваясь только правыми компонентами и опуская индексы $3/2$ и $-1/2$ у $\beta_{3/2}$ и $\gamma_{-1/2}$, мы можем выписать (варьируя (4.4.7) по метрике мировой поверхности) тензор энергии-импульса для суперконформных духов в виде

$$T_{++} = \frac{i}{2} \gamma \partial_+ \beta + \frac{3i}{2} \beta \partial_+ \gamma, \quad (4.4.8)$$

а ток духового числа для системы $\beta - \gamma$ будет просто

$$J_+^{gh} = \beta \gamma. \quad (4.4.9)$$

Формула (4.4.8) соответствует $k=2$ в обозначениях разд. 3.2.2.

Введем разложение по модам

$$\gamma(\tau) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{-\infty}^{\infty} \gamma_n e^{-2in\tau}, \quad (4.4.10)$$

$$\beta(\tau) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{-\infty}^{\infty} \beta_n e^{-2in\tau}; \quad (4.4.11)$$

тогда из действия S_{FP} вытекают для мод следующие перестановочные соотношения:

$$[\gamma_m, \beta_n] = \delta_{m+n}, \quad (4.4.12)$$

$$[\gamma_m, \gamma_n] = [B_m, B_n] = 0. \quad (4.4.13)$$

Здесь мы приняли номенклатуру, в которой γ эрмитово, а β — антиэрмитово поле. При желании можно и переопределить β , домножив его на i . В выписанном нами разложении индексы у γ_m и β_m принимают целые значения — выбор, отвечающий фермионному сектору суперструны. В бозонном секторе для γ и β , индексы надо брать полуцелыми.

Вклад духов в генераторы супералгебры Вирасоро прямо следует из формул для T_{++} и J_+ , и, собирая все вместе, мы получаем

$$L_m^{gh} = \sum (m+n) : b_{-n} c_n : + \sum \left(\frac{1}{2} m + n \right) : \beta_{-n} \gamma_n : \quad (4.4.14)$$

и

$$F_m^{gh} = -2 \sum b_{-n} \gamma_{m+n} + \sum \left(\frac{1}{2} n - m \right) c_{-n} \beta_{m+n}. \quad (4.4.15)$$

Нетрудно проверить, что из формулы для L_m^{gh} действительно вытекает, что конформные размерности c и b суть -1 и 2 , а γ и β суть $-1/2$ и $3/2$. В антикоммутаторе

$$\{F_m^{gh}, F_n^{gh}\} = 2L_{m+n}^{gh} + B^{gh}(m) \delta_{m+n} \quad (4.4.16)$$

появляется аномалия

$$B^{gh}(m) = -5m^2. \quad (4.4.17)$$

С другой стороны, в разд. 4.2.2 мы установили, что вклад α - и d -осцилляторов равен

$$B^{\alpha, d}(m) = \frac{1}{2} D m^2 + 2a. \quad (4.4.18)$$

Таким образом, аномалия сокращается при $D=10$ и $a=0$. Вследствие тождества Якоби она сократится и в $[L_m, L_n]$. В бозонном секторе соответствующие формулы будут иметь вид

$$B^{gh}(r) = \frac{1}{4} - 5r^2, \quad (4.4.19)$$

$$B^{\alpha, d}(r) = \frac{1}{2} D \left(r^2 - \frac{1}{4} \right) + 2a, \quad (4.4.20)$$

так что сумма обращается в нуль при $D=10$ и $a=1/2$.

4.4.2. BRST-симметрия

Описанное в разд. 3.2.1 общее правило, которое позволяет по заданным структурным константам алгебры связей выписать нильпотентный BRST-заряд, применимо и к градуированным алгебрам. Применяя этот рецепт к супералгебре Вирасоро, мы получаем

$$\begin{aligned} Q = & \sum (L_{-n}^{\alpha, d} c_n + F_{-n}^{\alpha, d} \gamma_n) - \\ & - \frac{1}{2} \sum (m-n) : c_{-m} c_{-n} b_{m+n} : + \\ & + \sum \left(\frac{3}{2} n + m \right) : c_{-n} \beta_{-m} \gamma_{m+n} : - \\ & - \sum \gamma_{-m} \gamma_{-n} b_{m+n} - a c_0. \end{aligned} \quad (4.4.21)$$

Как и раньше, член $a c_0$ связан с неопределенностью, возникающей при необходимости нормально упорядочивать классическую формулу.

С помощью довольно нудных вычислений, которые вполне повторяют то, что было в бозонном случае, можно показать, что $Q^2=0$, если $D=10$ и $a=0$. В качестве простой проверки этого факта укажем, что

$$\{Q, b_n\} = L_n = L_n^{\alpha, d} + L_n^{gh}, \quad (4.4.22)$$

$$\{Q, \beta_n\} = F_n = F_n^{\alpha, d} + F_n^{gh}. \quad (4.4.23)$$

Таким образом, отсутствие аномалий в алгебре L_n и F_n согласуется с нильпотентностью заряда Q . В бозонном секторе все эти рассуждения повторяются после замены $F_m \rightarrow G_r$, $\gamma_m \rightarrow \gamma_r$, $\beta_m \rightarrow \beta_r$, $a=0 \rightarrow a=1/2$. В фермионном секторе есть ряд специфических трудностей, связанных с наличием у γ и β нулевых мод, которые приводят к бесконечнократному вырождению основного состояния в фоковом пространстве. Такое вырождение имеет довольно существенные последствия, но, к сожалению, прояснение этого вопроса выходит за рамки данной книги.

4.4.3. Ковариантное вычисление аномалии в алгебре Вирасоро

В этом разделе мы, буквально следуя описанной в разд. 3.2.2 «бозонной» логике, опишем ковариантное вычисление аномалии Вирасоро. Все обсуждение будет предельно простым, поскольку все необходимые формулы уже были получены: в разд. 3.2.2 и в следующем за ним разделе, посвященном бозонизации.

В рассматриваемой нами теории имеются: десять бозонов X^μ , десять фермионов ψ^μ , конформные духи b и c и суперконформные духи β и γ . В разд. 3.2.2 мы показали, что для пары антикоммутирующих степеней свободы (там была взята пара b и c) можно построить однопараметрическое семейство тензоров энергии-импульса; параметр мы обозначили буквой k . Пара таких степеней свободы дает в вейлевскую аномалию такой же вклад, как $(1-3k^2)$ бозонов X^μ . Поля ψ^μ — это десять антикоммутирующих степеней свободы, и (что видно либо из того факта, что их конформный спин равен $1/2$, либо из сравнения их тензора энергии-импульса с тензорами из разд. 3.2.2) для этих полей $k=0$. Следовательно, они вносят в аномалию Вирасоро столько же, сколько пять полей X^μ . С другой стороны, для системы $b-c$ имеем $k=3$, и ее вклад равен вкладу -26 бозонов. Что же можно сказать о суперконформных духах γ и β ? Сравнивая

опять-таки их тензор энергии-импульса с формулой из разд. 3.2.2 (или принимая во внимание их конформную размерность), мы видим, что для них $k=2$. На первый взгляд отсюда должно следовать, что их конформная аномалия должна совпадать с аномалией $(1-3\cdot 2^2)=-11$ обычных бозонов. Однако нельзя забывать, что суперконформные духи — это *коммутирующие*, а не антикоммутирующие, как в разд. 3.2.2, степени свободы. Поэтому при вычислении однопетлевой диаграммы для $\langle T_{++}T_{++} \rangle$, которая и определяет аномалию, мы потеряем теперь существенный во всех выкладках разд. 3.2.2 знак минус, идущий просто от ферми-статистики, и получим в итоге вклад $+11$, а не -11 бозонов. Итак, полная конформная аномалия будет равна $10+5-26+11=0$, что еще раз доказывает факт сокращения аномалии в десятимерии.

4.5. Расширенная суперсимметрия на мировой поверхности

Обобщив бозонную струну до системы с $(N=1)$ -суперсимметрией на мировой поверхности, мы получили теорию струн, обладающую пространственно-временной суперсимметрией в $D=10$. Вдохновленные этим успехом, мы, естественно, должны двинуться дальше и посмотреть, чего же можно достичь, отталкиваясь от теории с расширенной суперсимметрией на мировой поверхности? В теории струн мы фактически должны потребовать суперконформной симметрии, чтобы все гравитационно-подобные поля, необходимые для локальных калибровочных симметрий, выпали в подходящей калибровке из классических уравнений движения. Это требование весьма существенно сужает произвол в выборе возможных теорий. Хотя существует множество суперсимметричных теорий с $D=2$, которые легко выводятся посредством редукции из теорий с размерностью $D>2$, они в большинстве своем не обладают нужными нам конформными симметриями. Есть только два варианта, пригодных для теории струн. Один из них имеет на мировой поверхности $(N=2)$ -суперсимметрию, а для другого $N=4$. В этом разделе мы вкратце рассмотрим оба варианта и придем к заключению, что физически интересных теорий из них, по-видимому, получить нельзя, хотя с математической точки зрения это вполне интересные структуры, которые могут оказаться и не лишены смысла. Мы, естественно, не будем описывать их столь же подробно, как теории, физический смысл которых более очевиден, но нам представляется уместным известить читателя об их существовании.

4.5.1. Теория с $N=2$

Напомним, что при $N=1$ суперконформная группа симметрий описывалась бесконечномерной алгеброй, причем в бозонных (NS) секторах, как правом, так и левом, эта алгебра содержит подалгебру $OSp(1,2)$. При переходе к $N=2$ теории подалгебра расширяется до $OSp(2,2)$, откуда вытекает, что в число бозонных генераторов помимо $Sp(2) \approx SU(1,1)$ войдут также и генераторы $SO(2) \approx U(1)$. Фермионные же генераторы образуют $SO(2)$ -дублет, или комплексное представление группы $U(1)$.

Соответствующее $N=2$ суперсимметричное действие в фиксированной калибровке содержит вдобавок к обычным координатам $X^\mu(\sigma, \tau)$ бозонные координаты $Y^\mu(\sigma, \tau)$ и $SO(2)$ -дублет фермионных координат $\psi_i^\mu(\sigma, \tau)$, $i=1, 2$:

$$S = -\frac{1}{2\pi} \int d^2\sigma \{ \partial_\alpha X^\mu \partial^\alpha X_\mu + \partial_\alpha Y^\mu \partial^\alpha Y_\mu - i \bar{\psi}_i^\mu \rho^\alpha \partial_\alpha \psi_{\mu i} \}. \quad (4.5.1)$$

Оно обладает очевидной $SO(2)$ -симметрией относительно преобразований, вращающих друг в друга ψ_1 и ψ_2 и оставляющих X и Y неподвижными. Суперзаряд тоже является $SO(2)$ -дублетом, что прямо вытекает из закона преобразования

$$\delta X = \bar{\epsilon}_i \psi_i, \quad (4.5.2)$$

$$\delta Y = \epsilon_{ij} \bar{\epsilon}_i \psi_j, \quad (4.5.3)$$

$$\delta \psi_i = -i \rho^\alpha \partial_\alpha X \epsilon_i + i \epsilon_{ij} \rho^\alpha \partial_\alpha Y \epsilon_j. \quad (4.5.4)$$

Здесь ϵ_{ij} — антисимметричный тензор с $\epsilon_{12}=1$. Как обычно, это действие должно быть дополнено соответствующей системой связей.

Индекс $\mu=0, \dots, D-1$ нумерует направления в пространстве-времени, а $X^\mu(\sigma, \tau)$ задает вложение мировой поверхности в это пространство-время. Однако с чисто математической точки зрения координаты Y^μ входят в формулу в точности так же; спрашивается, какова же их интерпретация? Лоренцева симметрия действия S определенно исчерпывается группой $SO(D-1,1)$, так что описывать какие-то дополнительные измерения переменные Y в обычном смысле никак не могут, и возможно, что вопрос их интерпретации представляет собой действительно важную и до сих пор не распутанную проблему.

Однако мы оставим в стороне эти вопросы интерпретации и продолжим наш формальный математический анализ. Более компактно действие (4.5.1) можно записать, используя комплексные координаты $Z^\mu = X^\mu + iY^\mu$ и $\psi^\mu = \psi_1^\mu + i\psi_2^\mu$. Последние

представляют собой в точности дираковский спинор в $D = 2$. Итак,

$$S = -\frac{1}{2\pi} \int d^2\sigma \{ \partial_\alpha Z \partial^\alpha \bar{Z} - i \bar{\psi} \rho^\alpha \partial_\alpha \psi \}, \quad (4.5.5)$$

где мы опустили пространственно-временной индекс μ . Глобальные преобразования ($N = 2$)-суперсимметрии можно записать через дираковский параметр $\varepsilon = \varepsilon_1 + i\varepsilon_2$ следующим образом:

$$\begin{aligned} \delta Z &= \bar{\varepsilon} \psi, \\ \delta \psi &= -i \rho^\alpha \varepsilon \partial_\alpha Z. \end{aligned} \quad (4.5.6)$$

Теперь мы собираемся переписать наше действие в репараметризационно инвариантном виде. Для этого нам потребуется мультиплет супергравитационных координат, включающий в себя: диаду e_α^a , дираковское гравитино χ_α и калибровочное векторное поле A_α , необходимое для локализации $SO(2)$ -симметрии. В результате мы получаем

$$\begin{aligned} S = & -\frac{1}{2\pi} \int d^2\sigma e \{ h^{ab} \partial_\alpha Z \partial_\beta \bar{Z} - i \bar{\psi} \rho^\alpha \overleftrightarrow{\partial}_\alpha \psi + A_\alpha \bar{\psi} \rho^\alpha \psi + \\ & + \left(\partial_\alpha Z - \frac{1}{2} \bar{\chi}_\alpha \psi \right) \bar{\psi} \rho^\beta \rho^\alpha \chi_\beta + \left(\partial_\alpha \bar{Z} - \frac{1}{2} \bar{\psi} \chi_\alpha \right) \bar{\chi}_\beta \rho^\alpha \rho^\beta \psi \}. \end{aligned} \quad (4.5.7)$$

Заметим, что ни у самого поля A_α , ни у его партнеров e_α^a и χ_α нет кинетического члена. Действительно, A_α входит только в одно слагаемое — в то, где оно явно выписано. Его уравнение движения — это всего лишь выражение того факта, что $SO(2)$ -ток равен нулю: $\bar{\psi} \rho^\alpha \psi = 0$ в дополнение к условиям $T_{\alpha\beta} = J_{\alpha i} = 0$, следующим из уравнений движения для полей e_α^a и χ_α .

Помимо локальной репараметризационной инвариантности, лоренц-инвариантности и суперсимметрии в действии (4.5.7) есть еще несколько других локальных симметрий. Это обычная вейлевская масштабная симметрия,

$$\begin{aligned} \delta e_\alpha^a &= \Lambda e_\alpha^a, & \delta \psi &= -\frac{1}{2} \Lambda \psi, \\ \delta Z^\mu &= \delta A_\alpha = 0, & \delta \chi_\alpha &= \frac{1}{2} \Lambda \chi_\alpha, \end{aligned} \quad (4.5.8)$$

и ($N = 2$)-суперконформная симметрия:

$$\begin{aligned} \delta \chi_\alpha &= i \rho_\alpha \eta, \\ \delta A_\alpha &= \frac{1}{2} (\bar{\chi}_\beta \rho_\alpha \rho^\beta \eta + \bar{\eta} \rho^\beta \rho_\alpha \chi_\beta). \end{aligned} \quad (4.5.9)$$

Кроме того, есть еще и локальная $SO(2)$ -симметрия, которая калибруется полем A_α :

$$\begin{aligned} \delta \psi &= i \Sigma \psi, & \delta A_\alpha &= \partial_\alpha \Sigma, \\ \delta \chi_\alpha &= i \Sigma \chi_\alpha, & \delta e_\alpha^a &= \delta Z^\mu = 0. \end{aligned} \quad (4.5.10)$$

У этой симметрии есть и киральный партнер:

$$\begin{aligned} \delta \psi &= i \Sigma' \bar{\rho} \psi, & \delta A_\alpha &= \varepsilon_\alpha^\beta \partial_\beta \Sigma', \\ \delta \chi_\alpha &= -i \Sigma' \bar{\rho} \chi_\alpha, & \delta e_\alpha^a &= \delta Z^\mu = 0, \end{aligned} \quad (4.5.11)$$

тоже являющийся локальной симметрией (как и раньше, здесь $\bar{\rho} = \rho_0 \rho_1$). Из существования пары локальных калибровочных симметрий следует, что как автодуальная, так и антиавтодуальная компоненты A_α , т. е. A_\pm , действуют как независимые калибровочные поля левой и правой локальной группы $SO(2)$. В целом же полного набора локальных симметрий теории достаточно, чтобы откалибровать все компоненты полей e_α^a , χ_α и A_α .

Рассмотрим теперь возникающую при квантовании этой струны супералгебру связей Вирасоро. При этом мы ограничимся рассмотрением бозонного сектора открытой струны. Моды, соответствующие координате Z^μ , — это комплексные осцилляторы α_m^μ , удовлетворяющие алгебре

$$\begin{aligned} [\alpha_m^\mu, \bar{\alpha}_n^\nu] &= m \delta_{m+n} \eta^{\mu\nu}, \\ [\alpha_m^\mu, \alpha_n^\nu] &= [\bar{\alpha}_m^\mu, \bar{\alpha}_n^\nu] = 0. \end{aligned} \quad (4.5.12)$$

Соответственно для бозонных граничных условий дираковские поля ψ_i^μ разлагаются по комплексным осцилляторам с полуцелыми индексами b_r^μ и алгеброй

$$\begin{aligned} \{b_r^\mu, \bar{b}_s^\nu\} &= \delta_{r+s} \eta^{\mu\nu}, \\ \{b_r^\mu, b_s^\nu\} &= \{\bar{b}_r^\mu, \bar{b}_s^\nu\} = 0. \end{aligned} \quad (4.5.13)$$

В этих переменных фурье-компоненты тензора энергии-импульса имеют вид

$$L_n = \sum : \alpha_{-m} \bar{\alpha}_{n+m} : + \sum \left(r + \frac{n}{2} \right) : b_{-r} \bar{b}_{n+r} : , \quad (4.5.14)$$

моды супертока J суть

$$G_r = \sum b_s \cdot \alpha_{r-s}, \quad (4.5.15)$$

$$\bar{G}_r = \sum \bar{b}_s \cdot \bar{\alpha}_{r-s}, \quad (4.5.16)$$

а моды $SO(2)$ -тока даются формулой

$$T_n = \sum : b_r \cdot \bar{b}_{n-r} : \quad (4.5.17)$$

Операторы T_m образуют алгебру

$$[T_m, T_n] = mD\delta_{m+n} \quad (4.5.18)$$

это абелева «алгебра Каца — Муди» для группы $SO(2)$. Мы будем исследовать алгебры Каца — Муди (или аффинные алгебры Ли, как их часто называют) в гл. 6, где бесконечномерные алгебры такого типа будут играть важную роль. $SO(2)$ -ток имеет конформную размерность $J = 1$, так что

$$[L_m, T_n] = -nT_{m+n} \quad (4.5.19)$$

$SO(2)$ -заряды супертока равны ± 1 , и поэтому

$$[T_m, G_r] = G_{m+r}, \quad (4.5.20)$$

$$[T_m, \bar{G}_r] = -\bar{G}_{m+r}. \quad (4.5.21)$$

Поскольку по сравнению со случаем $N = 1$ число бозонных и фермионных координат удвоилось, то соответственно удваивается и значение аномалии в алгебре Вирасоро:

$$[L_m, L_n] = (m - n)L_{m+n} + \frac{1}{4}D(m^3 - m)\delta_{m+n}. \quad (4.5.22)$$

Поскольку операторов с зарядом два в теории нет, то

$$\{G_r, G_s\} = \{\bar{G}_r, \bar{G}_s\} = 0. \quad (4.5.23)$$

По-видимому, наиболее интересная скобка во всей алгебре — это

$$\{G_r, \bar{G}_s\} = L_{r+s} + \frac{1}{2}(r - s)T_{r+s} + \frac{1}{2}D\left(r^2 - \frac{1}{4}\right)\delta_{r+s}. \quad (4.5.24)$$

Как и в предыдущих струнных теориях, физические состояния должны удовлетворять условиям связи

$$L_n|\varphi\rangle = T_n|\varphi\rangle = 0, \quad n > 0, \quad (4.5.25)$$

$$G_r|\varphi\rangle = \bar{G}_r|\varphi\rangle = 0, \quad r > 0, \quad (4.5.26)$$

$$(L_0 - a)|\varphi\rangle = 0, \quad (4.5.27)$$

$$T_0|\varphi\rangle = 0. \quad (4.5.28)$$

Из последнего уравнения следует, что все состояния с ненулевым $U(1)$ -зарядом — нефизические; это можно интерпретировать как своего рода $U(1)$ -конфайнмент. Найдем теперь выделенные значения a и D , рассматривая физические состояния с нулевой нормой.

Рассмотрим состояние вида $|\varphi\rangle = G_{-1/2}|\bar{\varphi}\rangle$, где

$$(T_0 + 1)|\bar{\varphi}\rangle = 0, \quad (4.5.29)$$

$$G_r|\bar{\varphi}\rangle = \bar{G}_r|\bar{\varphi}\rangle, \quad r > 0. \quad (4.5.30)$$

Это состояние имеет нулевую норму и является физическим, если оно аннигилируется оператором $\bar{G}_{1/2}$:

$$\bar{G}_{1/2}|\varphi\rangle = \left(L_0 - \frac{1}{2}T_0\right)|\bar{\varphi}\rangle = \left(L_0 + \frac{1}{2}\right)|\bar{\varphi}\rangle, \quad (4.5.31)$$

что обращается в нуль при $L_0|\varphi\rangle = 0$. Таким образом, выделенное значение $a = 0$, что в свою очередь означает, что основное состояние — это безмассовый скаляр. Итак, без какой-либо апелляции к условиям типа GSO-проекции мы получили спектр, свободный от тахионов.

Построим теперь состояния с нулевой нормой, которые определяют нам критическую размерность. Положим

$$|\varphi\rangle = (T_{-1} + \lambda_1 L_{-1} + \lambda_2 G_{-1/2} \bar{G}_{-1/2})|\bar{\varphi}\rangle, \quad (4.5.32)$$

где

$$T_0|\bar{\varphi}\rangle = (L_0 + 1)|\bar{\varphi}\rangle = 0, \quad (4.5.33)$$

$$G_r|\bar{\varphi}\rangle = \bar{G}_r|\bar{\varphi}\rangle = 0, \quad r > 0. \quad (4.5.34)$$

Используя расширенную супералгебру Вирасоро, мы непосредственно получаем

$$G_{1/2}|\varphi\rangle = (-1 + \lambda_1 + \lambda_2)G_{-1/2}|\bar{\varphi}\rangle, \quad (4.5.35)$$

$$\bar{G}_{1/2}|\varphi\rangle = (1 + \lambda_1)\bar{G}_{-1/2}|\bar{\varphi}\rangle, \quad (4.5.36)$$

$$T_1|\varphi\rangle = (D - \lambda_2)|\bar{\varphi}\rangle. \quad (4.5.37)$$

Отсюда следует, что для $\lambda_1 = -1$ и $\lambda_2 = 2$ состояние $|\varphi\rangle$ имеет нулевую норму и является физическим при $D = 2$. Это и есть критическая размерность нашей теории. Легко показать, что при $D > 2$ обязательно появятся духовые состояния.

Утверждение о том, что критическая размерность теории равна двум, буквально означает, что в конусной калибровке поперечных мод не остается совсем и безмассовое скалярное основное состояние будет единственной распространяющейся степенью свободы во всей теории (по крайней мере в этом секторе). Однако недавно было указано на некоторые тонкие моменты в самой процедуре квантования этой теории, и возможно, что сделанное утверждение нуждается в пересмотре. Если же все-таки верно, что в теории имеется одна-единственная скалярная мода, то эта мода должна быть элементом некоторой

локальной квантовой теории поля, однако до сих пор неизвестно, что это за теория. Кроме того, неясно, какой фермион, если таковой существует, должен сопутствовать нашему «скаляр».

Подведем итог. $N=2$ -расширение суперструны привело нас к двумерной теории с очень высокой степенью симметрии и к интересному обобщению супералгебры Вирасоро. Похоже на то, что эту теорию невозможно интерпретировать в стандартном струнном духе, поскольку ее критическая размерность $D=2$ исключает возможность существования поперечных струнных возбуждений. Возможно, что эта теория относится к физике каким-то совершенно другим и пока неизвестным способом.

4.5.2. Теория с $N=4$

Струнная теория с $N=4$ имеет еще более богатую математическую структуру и еще более скудный физический выход. Локальная группа $SO(2)$ заменяется на группу $SU(2)$, в теории есть четыре локальные суперсимметрии и суперконформные симметрии. Физические координаты состоят из четырех переменных типа X^μ и четырех майорановских спиноров ψ^μ . Первые являются $SU(2)$ -синглетами, а вторые образуют пару $SU(2)$ -дублетов.

Как и раньше, нетрудно выписать действие и преобразования симметрии, однако все это мы пропускаем и сразу переходим к алгебре связей. Аномалия Вирасоро претерпевает еще одно удвоение:

$$[L_m, L_n] = (m-n)L_{m+n} + \frac{1}{2}D(m^3 - m)\delta_{m+n}. \quad (4.5.38)$$

Локальная алгебра $SU(2)$ порождает алгебру Каца — Му迪:

$$[\bar{T}_m^a, T_n^b] = i\epsilon_{abc}T_{m+n}^c + 2Dm\delta_{m+n}\delta_{ab}. \quad (4.5.39)$$

Есть четыре оператора типа G_r^α , преобразующиеся как пара $SU(2)$ -дублетов. Так,

$$[T_m^a, G_r^\alpha] = \frac{1}{2}\lambda_{\alpha\beta}^a G_{m+r}^\beta, \quad (4.5.40)$$

где, используя матрицы Паули τ^a , можно выразить λ^a в виде

$$\lambda^a = \begin{pmatrix} \tau^a & 0 \\ 0 & \tau^a \end{pmatrix}. \quad (4.5.41)$$

Наиболее интересная скобка — это

$$\{G_r^\alpha, G_s^\beta\} = 2\delta^{\alpha\beta}L_{r+s} - 2(r-s)\lambda_{\alpha\beta}^a T_{r+s}^a + 2D\left(r^2 - \frac{1}{4}\right)\delta^{\alpha\beta}\delta_{r+s}. \quad (4.5.42)$$

Все операторные тождества могут быть получены из явного представления через осцилляторы α и b более или менее очевидным образом, и поэтому все тождества Якоби безусловно должны выполняться.

Эта схема приводит нас к отрицательной критической размерности ($D=-2$), и потому не представляется возможным разумно интерпретировать ее в рамках струнной теории.

4.6. Резюме

Мы обобщили струнное действие так, что в него вошли суперпартнеры пространственно-временных координат $X^\mu(\sigma, \tau)$, а именно майорановские фермионы $\psi^\mu(\sigma, \tau)$. Добавив еще и поля двумерной супергравитации, мы получили формулировку с локальной суперконформной симметрией. При выборе ковариантной калибровки в теории возникают связи, соответствующие обращению в нуль двумерного тензора энергии-импульса и тока, отвечающего суперсимметрии.

Операторы связей образуют бесконечномерную градуированную алгебру, называемую супералгеброй Вирасоро. В десятимерном пространстве спектр поперечных состояний, отвечающий этой системе связей, оказывается свободным от духов, и только в этой размерности квантование в конусной калибровке приводит к лоренц-инвариантной квантовой теории.

Для фермионных координат $\psi^\mu(\sigma, \tau)$ имеются две возможности выбора граничных условий. При одном выборе моды нумеруются целочисленным индексом и описывают пространственно-временные фермионы, при другом — индекс становится полуцелым числом, а состояния струны — пространственно-временными бозонами. Если спроектировать спектр на подпространство с четным фермионным (на мировой поверхности) числом, то спектр становится свободным от тахионов, и, более того, бозонов и фермионов на каждом массовом уровне становится поровну и естественно возникает мысль, что теория обладает пространственно-временной суперсимметрией. Однако в подходе данной главы это свойство выглядит довольно малоубедительно; мы докажем его в следующей главе, используя другую формулировку теории.

Приложение 4.А. Суперсимметричные теории Янга—Миллса

Низкоэнергетической аппроксимацией для открытой суперструны служит суперсимметричная теория Янга — Миллса. Такие теории описываются действием вида

$$S = \int d^Dx \left(-\frac{1}{4}F^2 + \frac{i}{2}\bar{\psi}\Gamma \cdot D\psi \right), \quad (4.A.1)$$

где $F_{\mu\nu}$ — тензор напряженности поля для неабелева вектор-потенциала A_μ :

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g f_{bc}^a A_\mu^b A_\nu^c. \quad (4.A.2)$$

Как поле A_μ^a , так и ψ^a лежат в присоединенном представлении полупростой группы Ли. Символ D обозначает янг-миллсовскую ковариантную производную:

$$(D_\mu \psi)^a = \partial_\mu \psi^a + g f_{bc}^a A_\mu^b \psi^c. \quad (4.A.3)$$

Число физических фермионных мод, описываемых спинорным полем ψ , есть некоторая степень двойки; она зависит от размерности пространства-времени и типа спинора (дираковский, майорановский, вейлевский и т. д.). Действительно, как мы увидим в приложении 5.A, именно такова размерность спинорных представлений для групп $SO(n)$. Векторное же поле A_μ описывает $D-2$ физических мод в соответствии с числом различных поперечных поляризаций. В суперсимметричной теории число бозонных и фермионных физических мод должно быть одинаково; следовательно, условие суперсимметричности минимального, не содержащего никаких дополнительных полей лагранжиана (4.A.1) означает, что $D-2$ должно быть степенью двойки. Простейшие случаи, когда это условие выполняется, — это $D=3, 4, 6$ и 10 , и именно эти случаи оказываются наиболее интересными.

У майорановского спинора в $D=3$ есть одна физическая мода, у майорановского спинора в $D=4$ — две, у вейлевского спинора в $D=6$ — четыре и у майорано-вейлевского спинора в $D=10$ — восемь. В каждом из этих случаев указанное число компонент совпадает с $D-2$, и минимальный лагранжиан может быть суперсимметричным. При $D > 10$ число спинорных компонент намного превосходит число векторных, и суперсимметричных теорий Янга — Миллса там вообще не существует.

Суперпреобразование, относительно которых инвариантно (4.A.1), имеют вид

$$\begin{aligned} \delta A_\mu^a &= \frac{i}{2} \bar{\epsilon} \Gamma_\mu \psi^a, \\ \delta \psi^a &= -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a \Gamma^{\mu\nu} \epsilon. \end{aligned} \quad (4.A.4)$$

Если подставить (4.A.4) в (4.A.1), то члены, пропорциональные $\epsilon \psi$, сократятся в любой размерности.

Более сложно обстоит дело с членами, пропорциональными $\epsilon \psi^3$. Подставив вариацию поля A в ковариантную производную, мы получим слагаемое вида

$$f_{abc} \bar{\epsilon} \Gamma_\mu \psi^a \bar{\psi}^b \Gamma^\mu \psi^c. \quad (4.A.5)$$

Поскольку во всей вариации действия это единственный член, содержащий сразу три ψ , то суперсимметрия может иметь место, только если он сам по себе обращается в нуль. Удивительно, но факт, что используя полную антисимметрию f_{abc} , можно доказать, что именно для перечисленных выше четырех типов спиноров (при $D=3, 4, 6$ и 10) так и происходит.

Мы докажем это свойство для крайне важного для нас случая майорано-вейлевских спиноров в $D=10$. Итак, нам надо показать, что выражение (здесь мы воспользовались антисимметрией f_{abc} и опустили собственно спиноры)

$$(\Gamma^0 \Gamma^\mu)_{mn} (\Gamma^0 \Gamma_\mu)_{pq} + (\Gamma^0 \Gamma^\mu)_{mp} (\Gamma^0 \Gamma_\mu)_{qn} + (\Gamma^0 \Gamma^\mu)_{mq} (\Gamma^0 \Gamma_\mu)_{np} \quad (4.A.6)$$

обращается в нуль. При этом мы можем считать, что все спинорные индексы m, n, p и q имеют определенную, скажем положительную, киральность, хотя проекционные операторы явно не выписаны, поскольку спиноры в (4.A.5) — вейлевские. Еще отметим, что матрица $\Gamma^0 \Gamma_{mn}^\mu$ симметрична, а второе и третье слагаемые меняются местами при перестановке $m \leftrightarrow n$, так что все выражение в целом является m, n -симметричным.

Для доказательства рассмотрим все выражение (4.A.6) как матрицу с индексами m и n , а на p и q не будем обращать внимания, чего, впрочем, можно достичь и прямо, умножив все выражение на антикоммутирующие спиноры ψ_1^p и ψ_2^q . Тогда оно запишется в виде

$$(\Gamma^\mu)_{mn} \bar{\psi}_1 \Gamma_\mu \psi_2 + (\Gamma^\mu \psi_1)_m (\bar{\psi}_2 \Gamma_\mu)_n - (\Gamma^\mu \psi_2)_m (\bar{\psi}_1 \Gamma_\mu)_n. \quad (4.A.7)$$

Произвольную матрицу M_{mn} можно разложить по полной системе $(\Gamma_{\mu_1 \dots \mu_k})_{mn}$, где $k=0, 1, \dots, 10$, и кратчайший способ доказательства состоит в том, чтобы продемонстрировать обращение в нуль для каждого члена разложения в отдельности. Прежде всего заметим, что все члены с четным k обращаются в нуль в силу условия вейлевского проектирования. Далее, тождество

$$\Gamma_{\mu_1 \dots \mu_k} = \pm \frac{1}{(10-k)!} \epsilon_{\mu_1 \dots \mu_{10}} \Gamma^{\mu_{k+1} \dots \mu_{10}} \Gamma_{11} \quad (4.A.8)$$

в совокупности с тем фактом, что Γ_{11} можно опустить для вейлевских спиноров, позволяет утверждать, что можно ограничиться рассмотрением членов лишь с $k \leq 5$. Кроме того, тензор $\Gamma_{\mu_1 \dots \mu_k}$ разлагается на автодуальную и антиавтодуальную части, и только одна из них может давать ненулевой вклад. Еще заметим, что матрицы $\Gamma^0 \Gamma_\mu$ и $\Gamma^0 \Gamma_{\mu_1 \dots \mu_5}$ симметричны, а $\Gamma^0 \Gamma_{\mu_1 \mu_2 \mu_3}$ антисимметрична. Таким образом, нам остается лишь рассмот-

реть члены с $k=1$ и с $k=5$. В качестве проверки этого подсчета заметим, что симметричная матрица 16×16 имеет

$$\frac{16 \cdot 17}{2} = 10 + \frac{1}{2} \cdot \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{5!} = 136 \quad (4.A.9)$$

компонент.

Умножая (4.A.7) на $(\Gamma_\rho)_{nm}$ и свертывая индексы, получаем

$$\begin{aligned} \text{tr}(\Gamma^\mu \Gamma_\rho) \bar{\psi}_1 \Gamma_\mu \psi_2 - \bar{\psi}_2 \Gamma_\mu \Gamma_\rho \Gamma^\mu \psi_1 + \bar{\psi}_1 \Gamma_\mu \Gamma_\rho \Gamma^\mu \psi_2 = \\ = -16 \psi_1 \Gamma_\rho \psi_2 + 8 \bar{\psi}_2 \Gamma_\rho \psi_1 + 8 \bar{\psi}_1 \Gamma_\rho \psi_2 = 0, \end{aligned} \quad (4.A.10)$$

откуда вытекает, что Γ_ρ -часть отсутствует. Повторяя ту же процедуру для $(\Gamma_{\rho_1 \dots \rho_k})_{nm}$, имеем

$$- \bar{\psi}_2 \Gamma_\mu \Gamma_{\rho_1 \dots \rho_k} \Gamma^\mu \psi_1 + \bar{\psi}_1 \Gamma_\mu \Gamma_{\rho_1 \dots \rho_k} \Gamma^\mu \psi_2 = 2 \bar{\psi}_1 \Gamma_\mu \Gamma_{\rho_1 \dots \rho_k} \Gamma^\mu \psi_2. \quad (4.A.11)$$

Однако в D -мерии

$$\Gamma_\mu \Gamma_{\rho_1 \dots \rho_k} \Gamma^\mu = (-1)^{k+1} (D - 2k) \Gamma_{\rho_1 \dots \rho_k}. \quad (4.A.12)$$

Положив $D=10$ и $k=5$, мы видим, что (4.A.11) обращается в нуль, что и завершает доказательство.

5. Пространственно-временная суперсимметрия в теории струн

В описании суперструн, данном в четвертой главе, имеется один вопиющий дефект: понять, откуда возникает пространственно-временная суперсимметрия, чрезвычайно трудно. Мы берем один набор граничных условий и получаем струну-бозон, другой набор — и получаем струну-фермион, потом раз — и возникают преобразования, связывающие состояния этих двух струн! Эта симметрия совершенно необходима, как мы уже убедились, для того, чтоб иметь согласованное взаимодействие поля гравитино, содержащегося в безмассовом мультиплете замкнутой струны. Кроме того, мы показали, что, наложив условия GSO, мы получаем на любом массовом уровне по одинаковому числу бозонов и фермионов, как этого требует линейная суперсимметрия.

В этой главе мы опишем формализм, который приводит нас к той же теории, но так, что суперсимметрия становится явной. Мы начнем с построения на мировой поверхности ковариантного действия, обладающего пространственно-временной суперсимметрией. Ковариантное квантование этого действия оказывается довольно затруднительным, однако его можно проквантовать в конусной калибровке. Хотя получающийся формализм не обладает явной лоренц-инвариантностью, в размерности $D=10$ она может быть установлена. Суперсимметрия очевидна, условия GSO автоматически встраиваются с самого начала так, что никакого усечения не требуется; бозоны и фермионы оказываются в едином фокковском пространстве.

5.1. Классическая теория

Мы начнем с классической теории явно суперсимметричного действия суперструны. Симметрии этого действия устроены довольно хитро, и прежде чем начинать квантование, в них надо разобраться. Важная роль отводится здесь новой локальной (на мировой поверхности) фермионной симметрии. Хотя она без-

условно связана с обычной суперсимметрией, но все же это не суперсимметрия. Чтобы продемонстрировать, как она работает, мы кратко опишем сначала суперчастицу, систему гораздо более простую, а потому и легче поддающуюся детальному анализу.

5.1.1 Суперчастица

Напомним, что в разд. 1.3.1 и 2.1.1 мы описывали релятивистскую частицу массы m действием на мировой линии

$$S = \frac{1}{2} \int (e^{-1} \dot{x}^2 - em^2) d\tau. \quad (5.1.1)$$

Дополнительную координату e можно отождествить с квадратным корнем из одномерной метрики. Важное свойство этой формулы — существование гладкого предела при $m \rightarrow 0$. Обобщая (5.5.1) на суперчастицу, мы сразу положим $m = 0$, поскольку для дальнейшего обобщения на суперструну массовый член несуществен.

Действие (5.1.1) инвариантно не только относительно локальных репараметризаций вида $\tau \rightarrow f(\tau)$, но и относительно глобальных трансляций из пространственно-временной группы Пуанкаре, которые генерируются преобразованиями

$$\delta x^\mu = a^\mu + b_\nu^\mu x^\nu, \quad (5.1.2)$$

$$\delta e = 0, \quad (5.1.3)$$

где $b_{\mu\nu}$ антисимметричны.

В гл. 4 мы организовали явную суперсимметрию на мировой поверхности, добавив к двумерным координатам σ и τ фермионные координаты. Пространственно-временную суперсимметрию мы получим тем же приемом: расширяя пространство Минковского, имеющее чисто «бозонные» координаты x^μ , до суперпространства с дополнительными фермионными координатами; чтоб получить N суперсимметрий, мы вводим N антикоммутирующих спинорных координат $\theta^{Aa}(\tau)$, $A = 1, 2, \dots, N$. Индекс a — это индекс пространственно-временного спинора в D -мерном пространстве. Для дираковского спинора общего вида $a = 1, \dots, 2^{D/2}$. Однако, как правило, нас будут интересовать спиноры, удовлетворяющие майорановским и вейлевским дополнительным условиям, о чем говорилось в разд. 4.3.3.

В суперпространстве суперсимметрия реализуется стандартным образом. Если ввести бесконечно малые грасмановы параметры ε^A , т. е. спиноры того же типа, что и соответствующие

координаты θ^A , то преобразования задаются следующими формулами:

$$\begin{aligned} \delta \theta^A &= \varepsilon^A, & \delta x^\mu &= i\varepsilon^A \Gamma^\mu \theta^A, \\ \delta \bar{\theta}^A &= \bar{\varepsilon}^A, & \delta e &= 0. \end{aligned} \quad (5.1.4)$$

Спинор ε^A постоянный, т. е. не зависящий от τ . Как эти, так и дальнейшие формулы мы будем писать в виде, приспособленном для майорановских спиноров.

Теперь мы можем обобщить понятие обычной бозонной точечной частицы, движущейся в пространстве Минковского, до суперчастицы, движущейся в суперпространстве. Можно написать много различных действий, поскольку и $\dot{x}^\mu - i\dot{\theta}^\mu \Gamma^\mu \theta^A$, и $\dot{\theta}^{Aa}$ инвариантны относительно преобразований суперсимметрии, и из них можно построить разнообразные лоренц-инвариантные лагранжианы. Простейшее и наиболее непосредственное обобщение формулы (5.1.1) использует первый инвариант, что дает

$$S = \frac{1}{2} \int e^{-1} (\dot{x}^\mu - i\dot{\theta}^A \Gamma^\mu \theta^A)^2 d\tau. \quad (5.1.5)$$

Это выражение обладает очевидной лоренц-инвариантностью и суперсимметрией, а следовательно, и полной супер-пуанкаре-инвариантностью. Из него следуют уравнения движения

$$p^2 = 0, \quad \dot{p}^\mu = 0, \quad \Gamma \cdot p \dot{\theta} = 0, \quad (5.1.6)$$

где мы ввели определение

$$p^\mu = \dot{x}^\mu - i\dot{\theta}^A \Gamma^\mu \theta^A. \quad (5.1.7)$$

Поскольку $(\Gamma \cdot p)^2 = -p^2 = 0$, то половина собственных значений матрицы $\Gamma \cdot p$ нулевые; кроме того, θ всегда входит с множителем $\Gamma \cdot p$. Поэтому половина компонент θ в нашей теории отщепляется! Причиной тому далеко не очевидная дополнительная симметрия действия (5.1.5). К описанию этой новой локальной фермионной симметрии мы и переходим.

Пусть $\chi^{Aa}(\tau)$ обозначает N бесконечно малых спинорных грасмановых параметров. (Система индексов здесь такая же, как и у ε^{Aa} , с тем лишь отличием, что χ^{Aa} могут зависеть от τ .)

Рассмотрим преобразование

$$\delta \theta^A = i\Gamma \cdot p \chi^A, \quad (5.1.8)$$

$$\delta x^\mu = i\bar{\theta}^A \Gamma^\mu \delta \theta^A, \quad (5.1.9)$$

$$\delta e = 4e \dot{\theta}^A \chi^A. \quad (5.1.10)$$

Заметим, что в соотношении между δx и $\delta \theta$ здесь взят знак, противоположный соответствующему знаку в ε -преобразова-

ниях. Покажем, что эти преобразования действительно будут симметрией действия (5.1.5). Доказательство инвариантности S начинается с формулы

$$\delta p^\mu = 2i\dot{\theta}^A \Gamma^\mu \delta\theta^A, \quad (5.1.11)$$

Таким образом,

$$\delta p^2 = 4i\dot{\theta}^A \Gamma \cdot p \delta\theta^A = 4p^2 \dot{\theta}^A \kappa^A. \quad (5.1.12)$$

Следовательно, $e^{-1}p^2$ инвариантно, если

$$\delta e^{-1} = -4e^{-1} \dot{\theta}^A \kappa^A, \quad (5.1.13)$$

что эквивалентно формуле (5.1.10).

κ -преобразования не совпадают ни с обычной суперсимметрией на мировой линии, ни с пространственно-временной суперсимметрией. В самом деле, действие вовсе не содержит спинов на мировой линии. Чтобы разобраться с этими преобразованиями, рассмотрим алгебру, которая получается при коммутации двух κ -преобразований.

Пусть δ_1 и δ_2 обозначают κ -вариации с параметрами κ_1 и κ_2 соответственно. Тогда

$$\begin{aligned} [\delta_1, \delta_2] \theta^A &= i\Gamma^\mu \kappa_2^A \delta_1 p_\mu - (1 \leftrightarrow 2) = \\ &= -2i\Gamma_\mu \kappa_2^A \dot{\theta}^B \Gamma^\mu \Gamma \cdot p \kappa_1^B - (1 \leftrightarrow 2) = \\ &= (2i\Gamma_\mu \kappa_2^A \dot{\theta}^B \Gamma \cdot p \Gamma^\mu \kappa_1^B + 4i\Gamma \cdot p \kappa_2^A \dot{\theta}^B \kappa_1^B) - (1 \leftrightarrow 2). \end{aligned} \quad (5.1.14)$$

Здесь мы столкнулись с симметрией, алгебра которой не замыкается вне массовой поверхности, поскольку в действии отсутствуют необходимые для этого вспомогательные координаты. Поэтому, чтобы замкнуть алгебру, необходимо использовать уравнения движения. Уравнение $\Gamma \cdot p\theta = 0$ уничтожает первое слагаемое в последней строке (5.1.14), и остается

$$[\delta_1, \delta_2] \theta^A = i\Gamma \cdot p \kappa^A + (\text{член, пропорциональный уравнениям движения}), \quad (5.1.15)$$

где мы положили

$$\kappa^A = 4\kappa_2^A \dot{\theta}^B \kappa_1^B - (1 \leftrightarrow 2). \quad (5.1.16)$$

Таким образом, коммутатор двух κ -преобразований — это опять κ -преобразование! Этот довольно странный результат стал возможен лишь потому, что на массовой поверхности нет никакого сохраняющегося заряда, ассоциированного с κ -симметрией. Те сохраняющиеся величины, которые можно было бы надеяться

вывести из κ -инвариантности, все обращаются на массовой поверхности в нуль. Структурные «константы» на самом деле оказываются не константами, а функциями координат, в точности как в супергравитации.

У действия (5.1.5) есть еще одна локальная симметрия. Эта симметрия бозонная, и ее преобразования задаются скалярным параметром $\lambda(\tau)$:

$$\begin{aligned} \delta\theta^A &= \lambda\dot{\theta}^A, \\ \delta x^\mu &= i\dot{\theta}^A \Gamma^\mu \delta\theta^A, \\ \delta e &= 0. \end{aligned} \quad (5.1.17)$$

Для θ закон преобразования тот же, что и при ξ -репараметризациях, однако для других координат формулы другие. Для теории на массовой поверхности эта симметрия не дает ничего сверх того, что следует из ξ - и κ -симметрий.

Задача квантования действия суперчастицы нетривиальна, поскольку в фазовом пространстве у системы есть связь

$$\pi_\theta^A = i\Gamma \cdot \pi_x \theta^A, \quad (5.1.18)$$

где π_x и π_θ^A — импульсы, сопряженные координатам x и θ . Правила скобок Дирака приводят к настолько сложным выражениям, что их практически невозможно распутать, не разрушив лоренц-инвариантности уравнений. То же самое происходит и с суперструной, которой мы будем заниматься дальше. Вот почему мы будем работать в конусной калибровке.

5.1.2. Суперсимметричное действие струны

Взяв действие для бозонной струны из гл. 2,

$$S_{\text{bos}} = -\frac{1}{2\pi} \int d^2\sigma \sqrt{-h} h^{\alpha\beta} \partial_\alpha X \cdot \partial_\beta X, \quad (5.1.19)$$

и действие для суперчастицы из предыдущего раздела, нетрудно выдвинуть очевидного кандидата на роль суперсимметричного действия суперструны:

$$S_1 = -\frac{1}{2\pi} \int d^2\sigma \sqrt{-h} h^{\alpha\beta} \Pi_\alpha \cdot \Pi_\beta, \quad (5.1.20)$$

где

$$\Pi_\alpha^\mu = \partial_\alpha X^\mu - i\dot{\theta}^A \Gamma^\mu \partial_\alpha \theta^A. \quad (5.1.21)$$

Локальная репараметризационная инвариантность и N -суперсимметрия этого выражения очевидны. Однако это не то действие, которое мы ищем. При таком обобщении потерялась ло-

кальная κ -симметрия. В результате переменные θ описывают в два раза больше степеней свободы, чем нужно. Кроме того, уравнения движения образуют сложную нелинейную и поэтому совершенно неподдающуюся анализу систему. К счастью, имеется возможность добавить к действию второе слагаемое S_2 ($S = S_1 + S_2$) так, что полное действие будет обладать локальной κ -симметрией. Половина компонент θ в результате опять отщепляется, и появляется возможность полностью решить уравнения движения, по крайней мере в некоторой специальной калибровке.

В отличие от случая суперчастицы конструкция, которая восстанавливает κ -симметрию, работает не для всех N . Нам придется положить $N \leq 2$, т. е. суперсимметрий будет не больше двух. В дальнейших формулах у нас будет две координаты θ^1 и θ^2 , что соответствует случаю $N = 2$. Случаи $N = 1$ или $N = 0$ можно будет получить, положив одну или две из θ равными нулю. Дополнительное слагаемое, которое надо ввести для получения суперсимметричного действия суперструны, имеет следующий вид:

$$S_2 = \frac{1}{\pi} \int d^2\sigma \left\{ -i \varepsilon^{\alpha\beta} \partial_\alpha X^\mu (\bar{\theta}^1 \Gamma_\mu \partial_\beta \theta^1 - \bar{\theta}^2 \Gamma_\mu \partial_\beta \theta^2) + \varepsilon^{\alpha\beta} \bar{\theta}^1 \Gamma^\mu \partial_\alpha \theta^1 \bar{\theta}^2 \Gamma_\mu \partial_\beta \theta^2 \right\}. \quad (5.1.22)$$

Альтернирующий символ $\varepsilon^{\alpha\beta}$ является тензорной плотностью, и поэтому здесь нет множителя \sqrt{h} . Как видно из формулы, S_2 полностью независимо от $h^{\alpha\beta}$. По этой причине оно и не дает вклада в тензор энергии-импульса $T_{\alpha\beta}$.

Довольно сложно устроенное слагаемое S_2 обладает, однако, очевидными глобальной лоренцевой и локальной репараметризационной инвариантностями. Для проверки его глобальной суперсимметрии ($N = 2$) уже требуется некоторая работа. А именно, рассмотрим преобразования $\delta\theta^A = \varepsilon^A$ и $\delta X^\mu = i \bar{\varepsilon}^A \Gamma^\mu \theta^A$, где ε^A не зависит ни от σ , ни от τ . Если относительные коэффициенты двух слагаемых в (5.1.22) выбраны указанным способом, то при подстановке вариаций часть членов тривиальным образом уничтожают друг друга. Члены типа

$$\varepsilon^{\alpha\beta} \partial_\alpha X^\mu \bar{\varepsilon}^1 \Gamma_\mu \partial_\beta \theta^1 \quad (5.1.23)$$

являются полными производными, и ими можно пренебречь. В итоге остается лишь слагаемое, пропорциональное

$$A = \varepsilon^{\alpha\beta} \bar{\varepsilon}^1 \Gamma^\mu \partial_\alpha \theta^1 \bar{\theta}^1 \Gamma_\mu \partial_\beta \theta^1, \quad (5.1.24)$$

и еще одно, полученное заменой 1 на 2. Чтоб исследовать это выражение, распишем его в компонентах (опуская верхние индексы):

$$A = \bar{\varepsilon} \Gamma^\mu \dot{\theta} \bar{\theta} \Gamma_\mu \theta' - \bar{\varepsilon} \Gamma^\mu \theta' \bar{\theta} \Gamma_\mu \dot{\theta} = A_1 + A_2, \quad (5.1.25)$$

где

$$A_1 = \frac{2}{3} [\bar{\varepsilon} \Gamma^\mu \dot{\theta} \bar{\theta} \Gamma_\mu \theta' + \bar{\varepsilon} \Gamma^\mu \theta' \bar{\theta} \Gamma_\mu \dot{\theta} + \bar{\varepsilon} \Gamma^\mu \theta \bar{\theta}' \Gamma_\mu \dot{\theta}], \quad (5.1.26)$$

$$A_2 = \frac{1}{3} [\bar{\varepsilon} \Gamma^\mu \dot{\theta} \bar{\theta} \Gamma_\mu \theta' + \bar{\varepsilon} \Gamma^\mu \theta' \bar{\theta} \Gamma_\mu \dot{\theta} - 2 \bar{\varepsilon} \Gamma^\mu \theta \bar{\theta}' \Gamma_\mu \dot{\theta}] = \frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial \tau} [\varepsilon \Gamma^\mu \theta \bar{\theta} \Gamma_\mu \theta'] - \frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial \sigma} [\varepsilon \Gamma^\mu \theta \bar{\theta} \Gamma_\mu \dot{\theta}]. \quad (5.1.27)$$

A_2 оказывается полной производной, и им можно пренебречь. В результате остается A_1 , которое мы перепишем в виде

$$A_1 = 2 \bar{\varepsilon} \Gamma_\mu \psi_1 \bar{\psi}_2 \Gamma^\mu \psi_3. \quad (5.1.28)$$

Скобки означают, что произведение спиноров $(\psi_1, \psi_2, \psi_3) = (\theta, \theta', \dot{\theta})$ антисимметризовано. Это выражение имеет в точности ту же структуру, что и выражение, возникавшее у нас при исследовании суперпреобразований в суперсимметричной теории Янга — Миллса и приведенное в приложении 4.А.

Там мы установили, что есть четыре способа обратить его в нуль. Ясно, что этот вывод справедлив и в нашем случае. Итак, S_2 будет суперсимметрично, только если реализуется один из четырех вариантов:

- (i) $D = 3$ и θ — майорановский спинор;
- (ii) $D = 4$ и θ — майорановский или вейлевский спинор;
- (iii) $D = 6$ и θ — вейлевский спинор;
- (iv) $D = 10$ и θ — майорано-вейлевский спинор.

Итак, классическая теория суперструн (в данном формализме) существует лишь в четырех указанных выше случаях¹⁾. Соответствующее утверждение для бозонных струн звучит иначе, классическая теория существует в любой размерности. Такая ситуация, однако, не должна нас удивлять, ведь хорошо известно, что суперсимметрия налагает ограничения на D уже на классическом уровне. Дальнейшее квантовое исследование выделит нам, конечно же, случай $D = 10$.

¹⁾ Когда θ оказывается вейлевским, но не майорановским, $\bar{\theta} \Gamma^\mu \partial_\alpha \theta$ следует явно заменить на $(\bar{\theta} \Gamma^\mu \partial_\alpha \theta - \partial_\alpha \bar{\theta} \Gamma^\mu \theta)/2$.

5.1.3. Локальная фермионная симметрия

Мы показали, что в размерностях $D = 3, 4, 6$ или 10 при подходящем выборе типов спиноров действие S_2 будет обладать симметриями действия S_1 , т. е. глобальной супер-Пуанкаре инвариантностью и локальной репараметризационной инвариантностью.

Теперь мы собираемся продемонстрировать, что $S_1 + S_2$ имеет и локальную фермионную симметрию — симметрию, которой ни у S_1 , ни у S_2 нет. В случае суперчастицы одно из преобразований этой симметрии имело вид $\delta\theta^A = i\Gamma \cdot p \kappa^A$. Аналог p^μ для струны — это Π_α^μ в формуле (5.1.21). Поэтому, чтобы получить формулу, ковариантную на мировой поверхности, надо приписать параметру κ индекс так, чтобы он стал вектором на мировой поверхности. Для суперсимметричных теорий это совершенно нестандартная ситуация. С двумерной точки зрения мы получили теорию, в которой вообще нет никаких спиноров, а параметры локальных фермионных симметрий ведут себя как векторы. Фермионные величины, конечно, же окажутся спинорами, но в D -мерном пространстве.

Бесконечно малые параметры κ несут в результате по три индекса: $\kappa^{A\alpha a}$. Индекс $A = 1, 2$ соответствует номеру переменной θ^A . Для случая $N = 1$ его значение можно фиксировать. Индекс $\alpha = 0, 1$ — это индекс вектора мировой поверхности, а a — индекс D -мерного спинора, соответствующий одному из четырех возможных типов. В большинстве формул спинорный индекс a будет опущен. Векторное представление в размерности два приводимо (поскольку группа Лоренца оказывается абелевой, ее неприводимые представления одномерны). Разложение вектора на две компоненты, которые можно назвать автодуальной и антиавтодуальной, делается обычно с помощью тензорных проекторов

$$P_{\pm}^{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (h^{\alpha\beta} \pm \varepsilon^{\alpha\beta} / \sqrt{h}), \quad (5.1.29)$$

которые удовлетворяют стандартным требованиям

$$P_{\pm}^{\alpha\beta} h_{\beta\gamma} P_{\pm}^{\gamma\delta} = P_{\pm}^{\alpha\delta}, \quad (5.1.30)$$

$$P_{\pm}^{\alpha\beta} h_{\beta\gamma} P_{\mp}^{\gamma\delta} = 0. \quad (5.1.31)$$

Параметры κ^A выбираются антиавтодуальными при $A = 1$ и автодуальными при $A = 2$. Таким образом,

$$\kappa^{1\alpha} = P_{-}^{\alpha\beta} \kappa_{\beta}^1, \quad (5.1.32)$$

$$\kappa^{2\alpha} = P_{+}^{\alpha\beta} \kappa_{\beta}^2. \quad (5.1.33)$$

В дальнейшем станет ясно, что $A = 1$ отвечает модам и симметриям правого, а $A = 2$ — модам и симметриям левого секторов.

Положим по аналогии с суперчастицей

$$\delta\theta^A = 2i\Gamma \cdot \Pi_\alpha \kappa^{A\alpha}, \quad (5.1.34)$$

$$\delta X^\mu = i\bar{\theta}^A \Gamma^\mu \delta\theta^A, \quad (5.1.35)$$

а $\delta h_{\alpha\beta}$ оставим пока неопределенной. Тогда

$$\delta L_1 = -\sqrt{h} h^{\alpha\beta} \Pi_\alpha \cdot \delta \Pi_\beta - \frac{1}{2} \delta(\sqrt{h} h^{\alpha\beta}) \Pi_\alpha \cdot \Pi_\beta, \quad (5.1.36)$$

где

$$\delta \Pi_\alpha^\mu = 2i\partial_\alpha \bar{\theta}^A \Gamma^\mu \delta\theta^A. \quad (5.1.37)$$

Лагранжиан L_2 можно переписать в следующем виде:

$$L_2 = -i\varepsilon^{\alpha\beta} \Pi_\alpha^\mu (\bar{\theta}^1 \Gamma_\mu \partial_\beta \theta^1 - \bar{\theta}^2 \Gamma_\mu \partial_\beta \theta^2) + \text{члены с } \theta. \quad (5.1.38)$$

Если в члене типа $\Pi\theta^2$ в L_2 явно проварьировать θ и прибавить к полученному результату первое слагаемое из δL_1 , то эта сумма в точности уничтожится вторым слагаемым из δL_1 , если положить

$$\delta_\kappa(\sqrt{h} h^{\alpha\beta}) = -16\sqrt{h} (P_{-}^{\alpha\gamma} \kappa^{1\beta} \partial_\gamma \theta^1 + P_{+}^{\alpha\gamma} \kappa^{2\beta} \partial_\gamma \theta^2). \quad (5.1.39)$$

Поскольку матрица $\sqrt{h} h^{\alpha\beta}$ симметрична и унимодулярна, то правая часть в (5.1.39) должна быть симметричной и бесследовой. То, что это действительно так, видно из автодуальности κ^1 и κ^2 , а также из тождеств

$$P_{+}^{\alpha\gamma} P_{+}^{\beta\delta} = P_{+}^{\beta\gamma} P_{+}^{\alpha\delta}. \quad (5.1.40)$$

Отметим, что эта конструкция фиксирует относительный коэффициент, связывающий L_1 и L_2 . (Можно изменить только знак у L_2 , что отвечает просто замене θ^1 на θ^2 .)

Для доказательства локальной κ -симметрии остается еще рассмотреть вариацию Π_α^μ и членов с θ^4 в (5.1.38). Большинство членов в этой вариации взаимно уничтожается, и в итоге остается

$$2\bar{\theta}^1 \Gamma_\mu \theta^{1'} \bar{\theta}^1 \Gamma^\mu \delta\theta^1 - 2\bar{\theta}^1 \Gamma_\mu \dot{\theta}^1 \bar{\theta}^{1'} \Gamma^\mu \delta\theta^1 - 2\bar{\theta}^1 \Gamma_\mu \delta\theta^1 \dot{\theta}^1 \Gamma^\mu \theta^{1'} + \\ + \text{аналогичные члены с } \theta^2. \quad (5.1.41)$$

Именно эта комбинация обращается в нуль для тех четырех типов спиноров, что мы перечислили выше. Итак, локальная κ -симметрия может быть обеспечена именно в тех случаях, когда существует глобальная ε -инвариантность.

Помимо локальной репараметризационной и фермионной симметрий у действия $S_1 + S_2$ есть еще одна локальная бозонная симметрия. Можно обнаружить эту симметрию, рассматривая, например, алгебру κ -преобразований. Действительно, для ее замкнутости необходимы дополнительные бозонные преобразования с параметром λ_α :

$$\begin{aligned}\delta\theta^1 &= \sqrt{\hbar} P_-^{\alpha\beta} \partial_\beta \theta^1 \lambda_\alpha, \\ \delta\theta^2 &= \sqrt{\hbar} P_+^{\alpha\beta} \partial_\beta \theta^2 \lambda_\alpha, \\ \delta X^\mu &= i\theta^A \Gamma^\mu \partial\theta^A, \\ \delta(\sqrt{\hbar} h^{\alpha\beta}) &= 0.\end{aligned}\quad (5.1.42)$$

В доказательстве инвариантности $S_1 + S_2$ относительно этих преобразований используются примерно те же приемы, что и при проверке локальной κ -инвариантности.

Уравнения движения для суперсимметричного действия суперструны имеют вид

$$\begin{aligned}\Pi_\alpha \cdot \Pi_\beta &= \frac{1}{2} h_{\alpha\beta} h^{\gamma\delta} \Pi_\gamma \cdot \Pi_\delta, \\ \Gamma \cdot \Pi_\alpha P_-^{\alpha\beta} \partial_\beta \theta^1 &= 0, \\ \Gamma \cdot \Pi_\alpha P_+^{\alpha\beta} \partial_\beta \theta^2 &= 0, \\ \partial_\alpha [\sqrt{\hbar} (h^{\alpha\beta} \partial_\beta X^\mu - 2iP_-^{\alpha\beta} \bar{\theta}^1 \Gamma^\mu \partial_\beta \theta^1 - 2iP_+^{\alpha\beta} \bar{\theta}^2 \Gamma^\mu \partial_\beta \theta^2)] &= 0.\end{aligned}\quad (5.1.43)$$

Первое уравнение — это условие $T_{\alpha\beta} = 0$. Вообще говоря, это сложная нелинейная система, но, как мы покажем в дальнейшем, в калибровке светового конуса она вырождается в систему простых уравнений свободной теории.

В случае точечной частицы суперсимметричное действие, содержащее N координат θ , обладало явной глобальной $SO(N)$ -инвариантностью, отвечающей вращениям в пространстве этих координат. Обобщение на суперструну удалось нам только в случаях $N = 0, 1$ и 2 . Однако ни в одном из этих случаев нет вращательной симметрии. Для $N = 2$ соответствующая $SO(2)$ -симметрия явно нарушается членом S_2 . Это явление имеет далеко идущие последствия. В частности, именно из-за него $U(1)$ -симметрия десятимерной 11В супергравитации (смотри разд. 13.5.2) разрушается в суперструне.

5.1.4. Суперструны типа I и типа II

Как мы уже говорили, в десятимерном пространстве (10 — это критическая размерность для теории суперструн) координаты θ в суперструнном действии должны быть майорано-вей-

левскими спинорами. Это означает, в частности, что как у θ^1 , так и у θ^2 должна быть определенная киральность. Что именно считать правым, а что левым — это вопрос соглашения, тем не менее две физически различные ситуации остаются: θ^1 и θ^2 могут иметь либо противоположную, либо совпадающую киральность. Для замкнутой струны есть лишь одно граничное условие — условие периодичности по σ , и поскольку оно вовсе не связывает θ^1 и θ^2 , его можно наложить в каждом из этих двух случаев. Для открытой струны, однако, ситуация иная; как мы покажем в разд. 5.2.1, на концах струны θ^1 и θ^2 должны быть приравнены. Поскольку правозакрученный спинор с левозакрученным совпасть не может, то единственно возможной остается ситуация, когда θ^1 и θ^2 имеют одинаковую киральность.

Теория суперструн, основанная на открытых суперструнах, называется теорией суперструн типа I. В разд. 5.2.1 будет показано, что граничные условия открытой струны оставляют для числа суперсимметрий единственную возможность: $N = 1$; этим частично и объясняется название «типа I». В теорию открытых струн можно ввести янг-милсовские квантовые числа, поместив на концах струны соответствующие заряды, причем калибровочной группой может быть любая классическая группа. Детали этого метода, известного как метод Чана — Патона, будут даны в разд. 6.1.1. В классической теории взаимодействующих открытых струн (на уровне древесных диаграмм) выбор группы ничем не ограничен. Однако в квантовой теории условия самосогласованности, рассмотренные в гл. 10, однозначным образом выделяют группу $SO(32)$. Мы установим в разд. 6.1.1, что в случаях ортогональных или симплектических групп струна является неориентируемой. Таким образом, единственная теория суперструны типа I, непротиворечивая с квантовомеханической точки зрения, основана на группе $SO(32)$ и описывает взаимодействие неориентированных открытых и замкнутых струн. Замкнутые струны появляются в квантовой теории, поскольку, как будет объяснено в гл. 8, необходимо допустить возможность склеивания концов у открытой струны, что и приводит к появлению замкнутых струн. По янг-милсовской группе замкнутые струны должны быть синглетами, поскольку у них нет свободных концов.

Рассмотрим теперь теории, основанные исключительно на замкнутых суперструнах. Если θ^1 и θ^2 имеют противоположные киральности, то в получающейся теории с необходимостью возникают ориентированные струны, поскольку θ^1 описывает моды, движущиеся по струне в одну сторону, а θ^2 — в другую. В этой теории имеются две сохраняющиеся $D = 10$ суперсимметрии

противоположной киральности. (Формула $\delta\theta^A = \varepsilon^A$ показывает, что киральность суперзаряда полностью определяется киральностью соответствующей координаты θ .) Теории с двумя сохраняющимися суперзарядами противоположной киральности называются теориями типа IIА. Как мы увидим, эти теории оказываются лево-право симметричными (не киральными). В них нет возможности введения янг-миллсовской группы.

Остается еще возможность строить теорию замкнутых суперструн, исходя из двух координат θ с одинаковой киральностью. В этом случае можно выбрать из двух вариантов: либо симметризовать правые и левые моды, что приводит к теории неориентированных замкнутых струн, либо оставить все как есть, т. е. рассматривать теорию ориентированных замкнутых струн. В первом случае мы возвращаемся в сектор замкнутых струн теории с группой $SO(32)$. Как уже говорилось, условия согласования требуют в этом случае включения также открытых $SO(32)$ -струн, и в итоге мы получаем теорию суперструн типа I. Если дополнительных ограничений не вводить, т. е. прямо работать с теорией замкнутых ориентированных струн, то у нас возникают две пространственно-временные суперсимметрии одинаковой киральности. Такая теория называется теорией суперструн типа IIВ. Она очевидным образом не обладает лево-правой симметрией, т. е. киральна. Доказательство квантовомеханической самосогласованности теории суперструн типа IIВ мы проведем в гл. 13. В этой теории также нет возможности ввести янг-миллсовскую группу.

Имеется, однако, еще одна возможность построения суперсимметричной теории струн. Она основана на использовании не двух, а только одной грасмановой координаты θ . В результате мы приходим к теории гетеротических струн, которая обсуждается в следующей главе.

5.2. Квантование

Структура гамильтоновых связей у суперсимметричного действия суперструны такова, что процедура квантования оказывается чрезвычайно сложной, если не вовсе невыполнимой, и мы отложим ее обсуждение до разд. 5.4. К счастью, теория очень легко и изящно квантуется в калибровке светового конуса, которой мы сейчас и будем заниматься. В результате мы придем к формализму, который в сравнении с другими подходами значительно упрощает вычисление многих амплитуд. Несколько примеров таких вычислений мы приведем в последующих главах.

5.2.1 Калибровка светового конуса

Для определенности мы будем считать в дальнейшем, что $D = 10$ и что спиноры θ^1 и θ^2 — маорано-вейлевские. С несущественными изменениями этот анализ можно применить и к случаям $D = 3, 4$ или 6 при условии, что выбраны соответствующие спиноры. Однако в этих размерностях перестает обращаться в нуль коммутатор $[J^{i-}, J^{j-}]$ из алгебры группы Лоренца. Как мы выяснили в разд. 5.1.4, при $D = 10$ и двух спинорных координатах θ имеются две физически неэквивалентные возможности: киральности θ^1 и θ^2 могут либо совпадать, либо быть противоположными.

Набору локальных инвариантностей (репараметризационной, вейлевской и фермионной κ -симметрии) отвечает соответствующий набор калибровок. В частности, если этому не препятствуют аномалии квантовой теории, мы можем воспользоваться первой инвариантностью, чтобы положить $h_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta}$, как это обычно и делается. Мы пренебрегаем пока глобальными эффектами, которые могут появиться в петлевых диаграммах. Однако уравнения движения при этом не линеаризуются, как это происходило с действиями из предыдущих глав. Необходимо еще использовать остаточную репараметризационную инвариантность и κ -симметрию и фиксировать калибровку светового конуса следующими условиями. Во-первых, используя κ -симметрию, мы можем наложить условие

$$\Gamma^+\theta^1 = \Gamma^+\theta^2 = 0. \quad (5.2.1)$$

Сюда входят конусные компоненты десятимерных гамма-матриц

$$\Gamma^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}} (\Gamma^0 \pm \Gamma^9). \quad (5.2.2)$$

Матрицы Γ^+ и Γ^- нильпотентны, т. е.

$$(\Gamma^+)^2 = (\Gamma^-)^2 = 0, \quad (5.2.3)$$

но их сумма невырождена. Следовательно, ровно половина их собственных значений должна быть нулями. Поэтому калибровка (5.2.1) равносильна условию обращения в нуль половины компонент θ . Как раз столько компонент должны отщепляться вследствие локальной κ -симметрии. Теперь уравнения движения для X^+ и X^i , полученные из (5.1.43), превращаются просто в свободные волновые уравнения, и, как и в бозонной теории, мы можем использовать оставшуюся конформную инвариантность, чтобы наложить условие

$$X^+(\sigma, \tau) = x^+ + p^+\tau. \quad (5.2.4)$$

Это означает, что все моды α_n^+ с $n \neq 0$ считаются равными нулю, в точности как в разд. 2.3.3. В гл. 4 мы установили, что спинор общего вида в десятимерии имеет 32 компонента. Условие Майораны делает эти компоненты вещественными, а условие Вейля обращает половину из них в нуль, оставляя тем самым 16 вещественных компонент. Условие калибровки светового конуса уменьшает их число еще вдвое, и в итоге мы получаем всего восемь вещественных компонент. Единственная симметрия, которая явно остается в калибровке светового конуса, — это вращательная инвариантность в восьми поперечных измерениях. Поэтому восемь компонент, которые выживают у каждой θ , можно рассматривать как восьмимерное спинорное представление поперечной группы $SO(8)$, или, более точно, ее накрывающей группы $spin(8)$. Алгебра Ли для группы $SO(8) = D_4$ имеет ранг 4, и отвечающая ей диаграмма Дынкина обладает дополнительной симметрией, называемой триальностью, которая описывается группой автоморфизмов из шести элементов. Эти автоморфизмы осуществляют перестановки между неэквивалентными неприводимыми представлениями одинаковой размерности. Например, имеются три восьмимерных неприводимых представления. Одно — это фундаментальное векторное представление 8_v , которое очевидным образом вещественно. Два других — это спинорные представления 8_s и 8_c . Они тоже вещественны, что прямо следует из триальности. Для индексов представления 8_v мы будем использовать буквы i, j, k (например, X^i), для индексов 8_s — a, b, c и $\dot{a}, \dot{b}, \dot{c}$ — для индексов 8_c . (Во всех этих случаях верхние и нижние индексы эквивалентны.) Подробности относительно свойств групп $SO(2n)$, и, в частности, группы $SO(8)$, можно найти в приложении 5.A.

Обозначив восемь остающихся в калибровке светового конуса компонент θ буквой S , мы получаем

$$\sqrt{p^+} \theta^1 \rightarrow S^{1\dot{a}} \quad \text{или} \quad S^{1\dot{a}}, \quad (5.2.5)$$

$$\sqrt{p^+} \theta^2 \rightarrow S^{2\dot{a}} \quad \text{или} \quad S^{2\dot{a}}. \quad (5.2.6)$$

Вопрос о том, какое из двух представлений, 8_s или 8_c , возникает в данном конкретном случае, решается в зависимости от того, какую киральность имеет в десятимерии соответствующая θ . Можно принять соглашение, что S^1 будет типа 8_s . Тогда для теорий типа I и IIB S^2 тоже будет принадлежать к 8_s , а для теории типа IIA — к 8_c . При выписывании явных формул мы будем использовать обозначения $S^{1\dot{a}}$ и $S^{2\dot{a}}$, как это должно быть в первом случае, но и вторую возможность следует иметь в виду.

В калибровке светового конуса уравнения движения (5.1.43) замечательно упрощаются. Важно осознать, что из $\Gamma^+\theta = 0$ следует зануление $\theta\Gamma^+\partial_\alpha\theta$, кроме $\mu = -$. Для $\mu = +$ этот факт очевиден, а для $\mu = i$ достаточно вставить единицу в виде $1 = (\Gamma^+\Gamma^- + \Gamma^-\Gamma^+)/2$ и заметить, что оба члена дают нуль, поскольку Γ^+ умножается на θ либо слева, либо справа. Окончательно мы получаем

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial\sigma^2} - \frac{\partial^2}{\partial\tau^2}\right) X^i = 0, \quad (5.2.7)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial\tau} + \frac{\partial}{\partial\sigma}\right) S^{1\dot{a}} = 0, \quad (5.2.8)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial\tau} - \frac{\partial}{\partial\sigma}\right) S^{2\dot{a}} = 0. \quad (5.2.9)$$

Эти уравнения совершенно идентичны уравнениям, которые получаются для X^i, ψ_-^i и ψ_+^i , если рассмотреть конусную версию формализма четвертой главы. Единственное отличие состоит в том, что теперь фермионные координаты принадлежат не к векторному, а к спинорному представлению группы $spin(8)$. В силу свойства триальности эти уравнения во многом изоморфны, но есть у них и принципиальные отличия.

Приведенные выше уравнения движения для струны в калибровке светового конуса (индекс l . с.) можно вывести из действия (здесь мы явно включили натяжение струны)

$$S_{l.c.} = -\frac{1}{2} \int d^2\sigma \left(T \partial_\alpha X^i \partial^\alpha X^i - \frac{i}{\pi} \bar{S}^a \rho^\alpha \partial_\alpha S^a \right), \quad (5.2.10)$$

где мы объединили $S^{1\dot{a}}$ и $S^{2\dot{a}}$ в один двухкомпонентный майорановский спинор на мировой поверхности и обозначили его S^a . Если же брать $S^{1\dot{a}}$ и $S^{2\dot{a}}$ по отдельности, то их можно рассматривать как майорано-вейлевские спиноры на мировой поверхности, описывающие соответственно правый и левый секторы. Заметим, что произошло нечто довольно удивительное. В ковариантном действии разд. 5.1.2 переменные $\theta^{A\dot{a}}$ преобразовывались как мировые скаляры; теперь, после того как была фиксирована калибровка светового конуса, оставшиеся ненулевые компоненты превратились в мировые спиноры!

Координаты X^i , входящие в (5.2.10), квантуются так же, как и в предыдущих главах. Координаты $S^{A\dot{a}}$ имеют следующие антиперестановочные соотношения:

$$\{S^{A\dot{a}}(\sigma, \tau), S^{B\dot{b}}(\sigma', \tau)\} = \pi \delta^{ab} \delta^{AB} \delta(\sigma - \sigma'). \quad (5.2.11)$$

Чтобы выписать для S явное разложение по модам, необходимо еще задать граничные условия. Для открытой струны

это означает, что так же, как мы поступали с переменными ψ в разд. 4.1, мы должны связать значения S^1 и S^2 на концах струны. Если при этом мы будем настаивать на том, чтобы граничные условия сохранили ненарушенной хотя бы одну из суперсимметрий действия, то у координат S должна быть нулевая мода. А это означает, что у нас нет больше той свободы в относительных знаках на двух концах струны, которую мы имели в разд. 4.1; пространственно-временная суперсимметрия сохраняется только тогда, когда оба знака совпадают. Удобно положить

$$S^{1a}(0, \tau) = S^{2a}(0, \tau), \quad (5.2.12)$$

$$S^{1a}(\pi, \tau) = S^{2a}(\pi, \tau). \quad (5.2.13)$$

Из формулы для глобальных суперпреобразований, $\delta\theta^A = \varepsilon^A$, мы видим, что при таком выборе параметры ε^1 и ε^2 должны совпадать, что сокращает тем самым число суперсимметрий до единицы: $N = 1$. Отсюда и происходит название «типа I». Кроме того, S^1 и S^2 должны принадлежать к одному и тому же представлению группы $\text{spin}(8)$. Если бы в (5.2.13) мы ввели такой же минус, как в бозонной суперструне четвертой главы, то суперсимметрия была бы полностью разрушена. Однако при некоторых весьма специальных обстоятельствах и такой выбор может привести к интересным теориям¹⁾.

Из (5.2.10) для открытой струны следуют формулы разложения на моды

$$S^{1a}(\sigma, \tau) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{-\infty}^{\infty} S_n^a e^{-in(\tau-\sigma)}, \quad (5.2.14)$$

$$S^{2a}(\sigma, \tau) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{-\infty}^{\infty} S_n^a e^{-in(\tau+\sigma)}. \quad (5.2.15)$$

Из условия вещественности следует, что

$$S_{-m}^a = (S_m^a)^\dagger. \quad (5.2.16)$$

Канонические антиперестановочные соотношения, выраженные через коэффициенты разложения, принимают вид

$$\{S_m^a, S_n^b\} = \delta^{ab} \delta_{m+n}. \quad (5.2.17)$$

Для замкнутой струны, как обычно, единственным граничным условием является условие периодичности

$$S^{Aa}(\sigma, \tau) = S^{Aa}(\sigma + \pi, \tau), \quad (5.2.18)$$

¹⁾ В гл. 9 мы рассмотрим одну теорию такого типа, а именно $SO(16) \times SO(16)$ -теорию, у которой нет пространственно-временной суперсимметрии.

и разложение по модам принимает вид

$$S^{1a}(\sigma, \tau) = \sum S_n^a e^{-2in(\tau-\sigma)}, \quad (5.2.19)$$

$$S^{2a}(\sigma, \tau) = \sum \tilde{S}_n^a e^{-2in(\tau+\sigma)}, \quad (5.2.20)$$

где моды левого и правого секторов независимы. Если S^1 и S^2 принадлежат к различным представлениям ($\mathfrak{8}_s$ и $\mathfrak{8}_c$), то мы получаем суперструны типа IIA, которые с необходимостью ориентированы. В противном случае мы получаем суперструны типа IIB, если они ориентированы, или суперструны типа I, если ориентации нет.

Эквивалентность двух способов описания суперструн, т. е. того, что предложен в настоящей главе, и способа из гл. 4, можно установить следующими рассуждениями. Действие в калибровке светового конуса (5.2.10) можно связать с «конусным» действием (здесь опять $T = 1/\pi$)

$$S'_{l.c.} = -\frac{1}{2\pi} \int d^2\sigma (\partial_\alpha X^i \partial^\alpha X^i - i\bar{\psi}^i \rho^\alpha \partial_\alpha \psi^i) \quad (5.2.21)$$

из гл. 4. В первом случае спинор на мировой поверхности S^a принадлежит к представлению $\mathfrak{8}_s$ группы $\text{spin}(8)$, во втором случае ψ — тоже спинор на мировой поверхности, но принадлежащий к представлению $\mathfrak{8}_v$ той же группы. Причем это различие отнюдь не вопрос обозначений, а вполне содержательный факт, поскольку в обоих случаях X^i принадлежат к одному и тому же представлению $\mathfrak{8}_v$.

Чтобы увидеть связь между двумя теориями в калибровке светового конуса, надо сначала бозонизовать фермионы ψ^i , а потом обратно их фермионизовать. Начнем с того, что введем четыре вещественных скалярных поля¹⁾:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \varepsilon^{\alpha\beta} \partial_\beta \varphi_1 &= \bar{\psi}^1 \rho^\alpha \psi^2, \\ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \varepsilon^{\alpha\beta} \partial_\beta \varphi_2 &= \bar{\psi}^3 \rho^\alpha \psi^4, \\ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \varepsilon^{\alpha\beta} \partial_\beta \varphi_3 &= \bar{\psi}^5 \rho^\alpha \psi^6, \\ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \varepsilon^{\alpha\beta} \partial_\beta \varphi_4 &= \bar{\psi}^7 \rho^\alpha \psi^8. \end{aligned} \quad (5.2.22)$$

¹⁾ В третьей главе мы описали процедуру бозонизации и показали, что в бозонных переменных фермионный ток J^μ имеет вид производной скалярного поля. Эти формулы были получены в голоморфных или конусных координатах; в произвольной координатной системе их аналогом будет $J^\mu \sim \varepsilon^{\mu\nu} \partial_\nu \varphi$; эта величина с очевидностью сохраняется.

Затем составим из этих полей комбинации

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= \frac{1}{2} (\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4), \\ \sigma_2 &= \frac{1}{2} (\varphi_1 + \varphi_2 - \varphi_3 - \varphi_4), \\ \sigma_3 &= \frac{1}{2} (\varphi_1 - \varphi_2 + \varphi_3 - \varphi_4), \\ \sigma_4 &= \frac{1}{2} (\varphi_1 - \varphi_2 - \varphi_3 + \varphi_4).\end{aligned}\quad (5.2.23)$$

И наконец, фермионизуем эти поля, введя восемь майорановских фермионов по формулам

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{\pi}} \varepsilon^{\alpha\beta} \partial_\beta \sigma_1 &= \bar{S}^1 \rho^\alpha S^2, \\ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \varepsilon^{\alpha\beta} \partial_\beta \sigma_2 &= \bar{S}^3 \rho^\alpha S_4, \\ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \varepsilon^{\alpha\beta} \partial_\beta \sigma_3 &= \bar{S}^5 \rho^\alpha S^6, \\ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \varepsilon^{\alpha\beta} \partial_\beta \sigma_4 &= \bar{S}^7 \rho^\alpha S^8.\end{aligned}\quad (5.2.24)$$

Групповая структура группы $SO(8)$ или $\text{spin}(8)$ в этих формулах видна довольно плохо. Из всех генераторов группы $SO(8)$ в явном виде присутствуют только четыре, отвечающие токам, использованным в формуле (5.2.22). Они коммутируют друг с другом и образуют на самом деле максимальный коммутирующий набор генераторов $SO(8)$. Такой набор генераторов называется картановской подалгеброй. Относительно картановской подалгебры фермионы S^a , определенные в (5.2.24), имеют полуцелые квантовые числа из-за наличия множителей $1/2$ в (5.2.23) и преобразуются как $SO(8)$ -спиноры. Кроме того, они преобразуются по представлению 8_s , тогда как представление 8_c можно получить, поменяв некоторые знаки в (5.2.24). Строгое доказательство этого утверждения можно получить, рассматривая явные формулы бозонизации $\psi \sim e^{i\varphi^\dagger}$, приведенные в гл. 3, однако здесь мы не будем этим заниматься, а будем рассматривать приведенные выше формулы как наглядную иллюстрацию связи между двумя разными подходами. Обсуждение свойства триальности в приложении 5.A значительно прояснит смысл отдельных элементов нашей конструкции.

Надо отметить одну чрезвычайно важную тонкость. В бесконечном объеме бозонизацию фермионов можно осуществить без особых осложнений, но в конечном объеме (например, на

струне) возникают разнообразные трудности, с некоторыми из которых мы встречались в гл. 3. В частности, бозонизация и последующая обратная фермионизация вносят изменения в граничные условия для фермионов, и в результате лагранжианы в (5.2.10) и (5.2.21) почти, но не вполне эквивалентны, причем это различие имеет фундаментальное значение. Как мы установили при исследовании представлений алгебр для S^a и ψ^i , лагранжиан (5.2.10) автоматически составляет из бозонов и фермионов супермультиплеты. Но для лагранжиана (5.2.21) мы должны выбрать одни граничные условия, чтобы получить при квантовании фермионы, и другие — чтобы получить бозоны. Но, кроме этого, спектр в каждом секторе еще необходимо обрезать до подпространства с $(-1)^F = +1$.

5.2.2. Супералгебра Пуанкаре

В рассматриваемой здесь формулировке суперсимметрию можно описать довольно просто, и это одно из преимуществ такого подхода по сравнению с формализмом гл. 4. Для упрощения дальнейших рассуждений мы опустим индекс A , что отвечает открытым струнам или одному из секторов (правому или левому) замкнутых струн. Чтобы увидеть, как работает суперсимметрия в калибровке светового конуса, напомним, что в законе преобразования для ковариантного действия в разд. 5.1.2 была формула $\delta\theta = \varepsilon$. При таком преобразовании калибровочное условие $\Gamma^+\theta = 0$ не сохраняется, если только не потребовать $\Gamma^+\varepsilon = 0$. В последнем случае $\bar{\varepsilon}\Gamma^i\theta = 0$, в чем можно убедиться, повторяя предыдущие рассуждения. Следовательно, в обозначениях группы $\text{spin}(8)$ эти восемь суперпреобразований будут иметь вид

$$\delta S^a = \sqrt{2p^+} \eta^a, \quad (5.2.25)$$

$$\delta X^i = 0. \quad (5.2.26)$$

Очевидно, что действие в калибровке (5.2.10) инвариантно относительно этих преобразований. Множитель $\sqrt{2p^+}$ введен для удобства последующих выкладок.

Восемь других компонент суперпреобразований отвечают $\Gamma^+\varepsilon \neq 0$. Они соответствуют спинору ε^a представления 8_c . Чтобы сохранить условие $\Gamma^+\theta = 0$, необходимо сочетать ε -преобразование с κ -преобразованием

$$\delta\theta = \varepsilon + 2i\Gamma \cdot \Pi_\alpha \kappa^a, \quad (5.2.27)$$

где κ выражается через ε так, чтобы правая часть занулялась под действием Γ^+ . В результате мы получаем следующее пре-

образование (опять в обозначениях $\text{spin}(8)$):

$$\delta S^a = -i\rho \cdot \partial X^i \gamma_{aa}^i \varepsilon^a \sqrt{2\rho^+}, \quad (5.2.28)$$

$$\delta X^i = \gamma_{aa}^i \varepsilon^a S^a \sqrt{2\rho^+}. \quad (5.2.29)$$

Коэффициенты Клебша—Гордона γ_{aa}^i связывают три неэквивалентных восьмимерных представления. Явные формулы и свойства этих коэффициентов приведены в приложении 5.В. Для проверки этих формул читатель может прямо убедиться, что относительно таких преобразований действие (5.2.10) инвариантно. Преобразования (5.2.29) выглядят как преобразования суперсимметрии в двумерной теории поля. При такой интерпретации ε^a становятся параметрами, отвечающими восьми двумерным суперзарядам.

Антикоммутатор двух преобразований суперсимметрии есть пространственно-временная трансляция, и в калибровке светового конуса она интерпретируется как комбинация трансляций на мировой поверхности и в поперечном направлении. В этом можно убедиться, рассмотрев действие двух последовательных преобразований (с параметрами $\eta^{(1)a}$, $\varepsilon^{(1)a}$ и $\eta^{(2)a}$, $\varepsilon^{(2)a}$) на координаты. Результат для коммутатора имеет вид

$$[\delta_1, \delta_2] X^i = \xi^a \partial_a X^i + a^i, \quad (5.2.30)$$

$$[\delta_1, \delta_2] S^a = \xi^a \partial_a S^a, \quad (5.2.31)$$

причем здесь мы воспользовались уравнением движения $\rho \cdot \partial S^a = 0$. Параметры ξ^a связаны с антикоммутатором двух ε -преобразований и задают трансляции в направлениях σ и τ по формуле

$$\xi^a = -2i\varepsilon^{(1)} \rho^a \varepsilon^{(2)}. \quad (5.2.32)$$

Сдвиг поперечных координат задается параметрами a^i :

$$a^i = \sqrt{2} \eta^{(2)} \gamma^i \varepsilon^{(1)} - \sqrt{2} \eta^{(1)} \gamma^i \varepsilon^{(2)}. \quad (5.2.33)$$

Из теоремы Нётер следует существование сохраняющихся зарядов для η^a - и ε^a -суперпреобразований; их можно найти, обобщая процедуру, использованную во второй главе для получения зарядов группы Пуанкаре. Можно и сразу найти ответ, увидев из формул (5.2.25) и (5.2.26), что η^a -преобразования генерируются оператором

$$Q^a = (2\rho^+)^{1/2} S_0^a, \quad (5.2.34)$$

а генераторы ε^a -преобразований (5.2.28) и (5.2.29) суть

$$Q^a = (\rho^+)^{-1/2} \gamma_{aa}^i \sum_{-\infty}^{\infty} S_{-n}^a \alpha_n^i. \quad (5.2.35)$$

Эти 16 зарядов представляют собой компоненты ковариантного майорано-вейлевского спинора, удовлетворяющего алгебре $\{Q, Q\} \sim (1 \pm \Gamma_{11}) \Gamma \cdot p$. В обозначениях группы $\text{spin}(8)$ уравнение расщепляется на три, а именно

$$\{Q^a, Q^b\} = 2\rho^+ \delta^{ab}, \quad (5.2.36)$$

$$\{Q^a, Q^i\} = \sqrt{2} \gamma_{aa}^i \rho^i, \quad (5.2.37)$$

$$\{Q^i, Q^j\} = 2H \delta^{ij}, \quad (5.2.38)$$

где

$$H = \frac{1}{2\rho^+} ((p^i)^2 + 2N) \quad (5.2.39)$$

есть гамильтониан в калибровке светового конуса, причем

$$N = \sum_{m=1}^{\infty} (\alpha_{-m}^i \alpha_m^i + m S_{-m}^a S_m^a). \quad (5.2.40)$$

Нормальное упорядочение не меняет этой формулы (в точности как в R-секторе RNS-модели), поскольку энергии нулевых колебаний α и S взаимно уничтожаются. Условие массовой поверхности записывается просто: $H = p^-$. Заметим, что Q^a — это квадратный корень из ρ^+ , а Q^i — из H .

Рассмотрим теперь, что происходит с генераторами группы Лоренца. При ковариантных лоренцевых вращениях, генерируемых $b_{\mu\nu} J^{\mu\nu}$, соответствующие вариации спинора θ пропорциональны $b_{\mu\nu} \gamma^{\mu\nu} \theta$. Такое преобразование сохраняет калибровочное условие $\gamma^+ \theta = 0$ для J^{+i} , J^{ij} и J^{+-} , но не для J^{i-} . В этом случае в правильное преобразование должны войти ξ - и χ -преобразования, которые и восстанавливают калибровку. В результате для всех генераторов, кроме J^{i-} , мы получаем очевидные выражения, которые возникают при прямой подстановке калибровочного условия в соответствующие нётеровы заряды, отвечающие ковариантному действию. В целом же ответ напоминает то, что мы получали в предыдущих главах:

$$J^{\mu\nu} = i^{\mu\nu} + E^{\mu\nu} + K^{\mu\nu}, \quad (5.2.41)$$

где

$$i^{\mu\nu} = x^\mu p^\nu - x^\nu p^\mu, \quad (5.2.42)$$

и

$$\Sigma^{\mu\nu} = -i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (\alpha_{-n}^\mu \alpha_n^\nu - \alpha_{-n}^\nu \alpha_n^\mu). \quad (5.2.43)$$

При вычислении $\Sigma^{\mu\nu}$ необходимо учесть, что $\alpha_n^+ = 0$ (следовательно, $E^{\mu+} = 0$); кроме того, действуя как в гл. 2, мы можем разрешить связи Вирасоро для координаты $X^-(\sigma, \tau)$, что дает

$$\alpha_n^- = \frac{1}{2p^+} \sum_{-\infty}^{\infty} \left(\alpha_{n-m}^i \alpha_m^i + \left(m - \frac{n}{2}\right) S_{n-m}^a S_m^a \right). \quad (5.2.44)$$

В частности, $\alpha_0^- = H$. Генераторы $K^{\mu\nu}$ задаются формулами

$$\begin{aligned} K^{\mu+} &= 0, \\ K^{ij} &= K_0^{ij}, \\ K^{i-} &= \frac{1}{p^+} \sum_{-\infty}^{\infty} K_{-n}^{ij} \alpha_n^i, \end{aligned} \quad (5.2.45)$$

$$K_n^{ij} = -\frac{i}{4} \sum_{-\infty}^{\infty} S_{n-m}^a \gamma_{ab}^{ij} S_m^b.$$

Алгебра операторов α_n^- и K_n^{ij} в точности совпадает с соответствующей алгеброй четвертой главы, но в фермионном секторе участвуют осцилляторы a_n^i , а не S_n^a . Причину такого совпадения можно уяснить, используя понятие триальности, описанное в приложении 5.A. Используя результаты гл. 4, мы получаем $[J^{i-}, J^{j-}] = 0$, что и доказывает лоренц-инвариантность в размерности $D = 10$, и мы можем теперь перейти к описанию полной супералгебры Пуанкаре. Поскольку мы уже вычислили антикоммутатор двух суперобразований, то все, что остается сделать, — это выяснить, действительно ли суперзаряды преобразуются при лоренцевых преобразованиях как компоненты спинора в размерности $D = 10$. Вычисления здесь достаточно просты. Например,

$$\begin{aligned} [J^{i-}, Q^a] &= -i\sqrt{2p^+} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \alpha_{-n}^i [\alpha_n^-, S_0^a] + \sqrt{\frac{2}{p^+}} \sum \alpha_{-n}^i [K_n^{ij}, S_0^a] = \\ &= \frac{i}{\sqrt{2p^+}} \sum_{-\infty}^{\infty} (\gamma^i \gamma^j S_{-n})^a \alpha_n^i = \frac{i}{\sqrt{2}} \gamma_{aa}^i Q^a. \end{aligned} \quad (5.2.46)$$

В теориях типа II имеются два набора суперзарядов. В интегральной форме получаются следующие выражения для теории

типа IIB:

$$p^i = \int_0^\pi d\tau P_\tau^i(\sigma, \tau), \quad (5.2.47)$$

$$H = \frac{1}{2\pi p^+} \int d\sigma [\pi^2 (P_\tau^i)^2 + (X'^i)^2 - iS^1 S^{1'} + iS^2 S^{2'}], \quad (5.2.48)$$

$$Q_A^a = \frac{1}{\pi} (2p^+)^{1/2} \int_0^\pi d\sigma S_A^a, \quad (5.2.49)$$

$$Q_1^a = \frac{1}{\pi} (p^+)^{-1/2} \int_0^\pi d\sigma (\gamma^i S_1)^a (\pi P_\tau^i - X'^i), \quad (5.2.50)$$

$$Q_2^a = \frac{1}{\pi} (p^+)^{-1/2} \int_0^\pi d\sigma (\gamma^i S_2)^a (\pi P_\tau^i + X'^i), \quad (5.2.51)$$

где

$$P_\tau^i(\sigma, \tau) = \frac{1}{\pi} \dot{X}^i(\sigma, \tau) = -i \frac{\delta}{\delta X^i(\sigma, \tau)}. \quad (5.2.52)$$

Аналогичные выражения существуют и для $J^{\mu\nu}$.

5.3. Анализ спектра

Исследуем спектр физических состояний, возникающий в описанных выше теориях. Как и прежде, в разд. 2.3.4, мы будем работать в конусном описании, что позволит нам подсчитывать число степеней свободы прямо, не заботясь о связях. Однако даже и в таком подходе можно следовать различными путями. В частности, можно использовать RNS-формулировку из разд. 4.3.2, а можно — и явно суперсимметричное описание в обозначениях группы $\text{spin}(8)$ из этой главы. В этом разделе мы рассмотрим обе возможности, но в основном будем заниматься формулировкой $\text{spin}(8)$. В гл. 11 мы опишем конусную формулировку, использующую координаты, принадлежащие к представлениям $SU(4) \times U(1)$ -подгруппы $\text{spin}(8)$; такая формулировка удобна для вычислений методом функциональных интегралов.

5.3.1. Открытые суперструны

Граничные условия открытой струны оставляют по одному набору бозонных и фермионных мод, отвечающих стоячим колебаниям на струне. Кроме того, они ограничивают возможную суперсимметрию до $N = 1$. На концах открытой струны

можно поместить заряды, отвечающие группе внутренней симметрии, посредством процедуры, описанной в первой главе, и мы продолжим ее исследование в гл. 6. Там мы покажем, что в результате для ориентированных струн возникают группы $U(n)$, а для неориентированных — группы $SO(n)$ или $USp(n)$. В обоих случаях безмассовые состояния оказываются в присоединенном представлении соответствующих групп. Однако в этом разделе мы будем опускать квантовые числа, связанные с этими группами.

Мы начнем с анализа безмассового сектора, который в силу отсутствия тахионов представляет собой основное состояние рассматриваемого спектра. Как показано в разд. 4.3.2, RNS-струна в калибровке светового конуса содержит восемь безмассовых бозонов, которые образуют поперечный вектор $b^i_{-1/2}|0\rangle$, а безмассовые фермионы описываются 16-компонентным майорановейлевским спинором $u(p)$, необходимым для представления алгебры матриц Дирака. Однако если выполнено уравнение Дирака $\gamma \cdot p u = 0$, то лишь половина фермионных степеней свободы, отвечающая, например, представлению 8_c группы $spin(8)$, реально распространяется. Таким образом, остается в точности по восемь бозонных и фермионных мод, что буквально соответствует спектру десятимерной суперсимметричной теории Янга — Миллса.

Рассмотрим еще раз безмассовый спектр, возникающий в суперсимметричной формулировке. Основное состояние должно задавать представление алгебры $\{S_0^a, S_0^b\} = \delta^{ab}$ в обозначениях группы $spin(8)$. Вследствие триальности (см. приложение 5.A) этого можно добиться, действуя в точности так, как мы действуем в приложении 5.B, представляя алгебру Клиффорда:

$$S_0^a \sim \begin{pmatrix} 0 & \gamma_{ia}^a \\ \gamma_{ia}^a & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.3.1)$$

При таком выборе пространство представления оказывается прямой суммой $8_v + 8_c$, образующих полный супермультиплет, который в RNS-струне собирался из двух независимых секторов. Найдем теперь фоковское представление для этого 16-мерного мультиплета безмассовых основных состояний.

В этом мультиплете, который мы обозначим $|\varphi_0\rangle$, содержится восемь бозонных состояний $|i\rangle$, преобразующихся по представлению 8_v группы $spin(8)$, и восемь фермионных состояний $|\dot{a}\rangle$, преобразующихся по представлению 8_c . Они нормированы следующим образом:

$$\langle i | j \rangle = \delta_{ij}, \quad \langle \dot{a} | \dot{b} \rangle = \delta_{ab}; \quad (5.3.2)$$

единичный оператор в пространстве представления S_0^a есть

$$I = |i\rangle\langle i| + |\dot{a}\rangle\langle \dot{a}|. \quad (5.3.3)$$

Для дальнейшего анализа свойств операторов S_0 полезно иметь в виду «тождество Фирца»

$$S_0^a S_0^b = \frac{1}{2} \{S_0^a, S_0^b\} + \frac{1}{2} [S_0^a, S_0^b] = \frac{1}{2} \delta^{ab} + \frac{1}{16} S_0^c \gamma_{ca}^{ij} S_0^d \gamma_{db}^{ij}, \quad (5.3.4)$$

которое можно проверить, например, умножив обе части на γ_{ba}^{kl} и воспользовавшись свойствами матриц γ_{ab} , приведенными в приложении 5.B. Отметим, что единственный (не считая δ^{ij}) независимый тензор, который можно построить из двух операторов S_0 , — это тензор

$$R_0^{ij} = \frac{1}{4} S_0^a \gamma_{ab}^{ij} S_0^b. \quad (5.3.5)$$

Он представляет собой часть оператора iK_0^{ij} (см. формулу (5.2.45)), отвечающую нулевым модам, и, следовательно, удовлетворяет перестановочным соотношениям

$$[R_0^{ij}, R_0^{kl}] = \delta^{il} R_0^{jk} - \delta^{ik} R_0^{jl} + \delta^{jk} R_0^{il} - \delta^{jl} R_0^{ik}. \quad (5.3.6)$$

Сравнивая эту формулу с аналогичной формулой для K_0^{ij} , приведенной в разд. 4.3.1, мы видим, что $-iR_0^{ij}$ — это оператор, вращающий спин состояния, но не меняющий числа возбужденных мод. В частности, безмассовое векторное состояние должно преобразовываться по формуле

$$R_0^{ij} |k\rangle = \delta^{ik} |j\rangle - \delta^{jk} |i\rangle, \quad (5.3.7)$$

а безмассовое спинорное — по формуле

$$R_0^{ij} |\dot{a}\rangle = -\frac{1}{2} \gamma_{ab}^{ij} |\dot{b}\rangle. \quad (5.3.8)$$

Тот факт, что оператор S_0^a отображает состояния $\langle i|$ и $|\dot{a}\rangle$ друг в друга, записывается в следующем виде:

$$\begin{aligned} S_0^a |\dot{a}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \gamma_{aa}^i |i\rangle, \\ S_0^a |i\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \gamma_{aa}^i |\dot{a}\rangle. \end{aligned} \quad (5.3.9)$$

Чтобы проверить нормировку в этих формулах, надо подействовать на обе части оператором S_0^b и с помощью (5.3.4) сравнить результат с (5.3.7) и (5.3.8).

Удобно сопоставить каждому из этих состояний физическую волновую функцию. В конусных координатах 16-компонентный

майорано-вейлевский спинор представляется в виде $(u^a, u^{\dot{a}})$. Как показано в приложении 5.В, уравнение Дирака в этом базисе записывается в импульсном представлении следующим образом:

$$\begin{aligned} k^+ u^a + \gamma_{a\dot{a}}^i k^i u^{\dot{a}} &= 0, \\ k^- u^{\dot{a}} + \gamma_{\dot{a}a}^i k^i u^a &= 0. \end{aligned} \quad (5.3.10)$$

Поскольку в конусных координатах $k^+ = i\partial/\partial\bar{x}$ не есть производная по времени, то первое из этих уравнений представляет собой связь, которая позволяет выразить u^a через $u^{\dot{a}}$:

$$u^a = -\frac{1}{k^+} \gamma_{a\dot{a}}^i k^i u^{\dot{a}}. \quad (5.3.11)$$

Таким образом, восьми физическим степеням свободы соответствует восемь компонент $u^{\dot{a}}$, которые удовлетворяют уравнению, получающемуся после исключения u^a , а именно просто уравнению Клейна — Гордона $k^2 = 0$. Состояние $|u\rangle$ определяется формулой

$$|u\rangle = |\dot{a}\rangle u^{\dot{a}}(k)/\sqrt{k^+}. \quad (5.3.12)$$

Волновая функция для векторного состояния есть просто вектор поляризации $\zeta^\mu(k)$, который удовлетворяет физическим условиям $k^2 = 0$ и уравнению

$$\zeta^\mu(k) k_\mu = 0. \quad (5.3.13)$$

Соответственно в калибровке светового конуса получаем

$$\zeta^+ = 0. \quad (5.3.14)$$

Равенство (5.3.13) представляет собой условие связи, позволяющее выразить ζ^- через восемь независимых переменных ζ^i :

$$\zeta^- = \zeta^i(k) k^i/k^+. \quad (5.3.15)$$

Эта формула соответствует утверждению о том, что в янг-миллсовском вектор-потенциале лишь поперечные степени свободы являются независимыми. Векторное состояние задается формулой

$$|\zeta\rangle = |i\rangle \zeta^i(k). \quad (5.3.16)$$

Из приложения 4.4 мы знаем, как при преобразованиях суперсимметрии преобразуются безмассовые поля в суперсимметричной теории Янга — Миллса. Преобразования суперсимметрии физической волновой функции отвечает свободный линеаризованный предел в этих преобразованиях. При этом следует иметь в виду, что, рассматривая преобразования в калибровке

светового конуса, нужно добавить еще компенсирующее калибровочное преобразование, которое обеспечивает выполнение условия $A^+ = 0$ в преобразованной системе. В том же приложении 4.А мы нашли явный вид линеаризованных преобразований суперсимметрии Янга — Миллса; с учетом компенсирующего калибровочного преобразования с параметром $\Lambda(x)$ они записываются следующим образом:

$$\delta A^\mu = \frac{i}{2} \bar{\epsilon} \Gamma^\mu \psi + \partial^\mu \Lambda, \quad (5.3.17)$$

$$\delta \psi = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} \Gamma^{\mu\nu} \epsilon. \quad (5.3.18)$$

Из условия $\delta A^+ = 0$ находим, что

$$\Lambda = -\frac{1}{2p^+} \bar{\epsilon} \Gamma^+ \psi, \quad (5.3.19)$$

и в результате преобразования суперсимметрии для поперечных компонент A^i приобретают вид

$$\delta A^i = \frac{i}{2} \bar{\epsilon} \Gamma^i \psi - i \frac{p^i}{2p^+} \bar{\epsilon} \Gamma^+ \psi, \quad (5.3.20)$$

а линеаризованные преобразования ψ остаются прежними. Чтобы перевести эти формулы на язык восьмикомпонентных $SO(8)$ -обозначений, мы должны разбить шестнадцатикомпонентный майорано-вейлевский спинор ϵ на два «куска» η^a и $\epsilon^{\dot{a}}$ в соответствии с формулами

$$\frac{1}{2} \Gamma^+ \Gamma^- \epsilon \sim \eta^a, \quad \frac{1}{2} \Gamma^- \Gamma^+ \epsilon \sim \epsilon^{\dot{a}}, \quad (5.3.21)$$

где знак \sim указывает, что общая нормировка остается произвольной. Аналогичным образом разделяется на принадлежащие $SO(8)$ составляющие $(\psi^a$ и $\psi^{\dot{a}})$ спинор ψ . Соотношения

$$\bar{\epsilon} \Gamma^+ = \epsilon \Gamma^- \Gamma^+ / \sqrt{2}, \quad \bar{\epsilon} \Gamma^- = \epsilon \Gamma^+ \Gamma^- / \sqrt{2} \quad (5.3.22)$$

позволяют без труда произвести соответствующее разбиение на принадлежащие $SO(8)$ составляющие в формулах (5.3.20) и (5.3.18). Закон преобразования ζ и u возникает при отождествлении $\zeta \sim A$ и $u \sim \psi$; здесь мы пренебрегаем тем обстоятельством, что спинорная волновая функция u представляет собой обычное число, а не элемент грасмановой алгебры, как ψ .

Можно вывести эти преобразования и другим способом, а именно рассматривая реализацию суперсимметрии на состояниях безмассового мультиплета $|u\rangle$ и $|\zeta\rangle$. Для этого придется

воспользоваться выведенными ранее формулами для нулевых мод суперзарядов:

$$Q^a = (2p^+)^{1/2} S_0^a, \quad (5.3.23)$$

$$Q^{\dot{a}} = (p^+)^{-1/2} \gamma_{a\dot{a}}^i p^i S_0^a. \quad (5.3.24)$$

Тогда для η -преобразований, определенных формулами (5.2.25) и (5.2.26), мы получаем

$$\begin{aligned} \eta^a Q^a |u\rangle &= \eta^a (2k^+)^{1/2} S_0^a | \dot{a} \rangle u^{\dot{a}}(k) / \sqrt{k^+} = \\ &= \eta^a \gamma_{a\dot{a}}^i |i\rangle u^{\dot{a}}(k) = | \tilde{\xi} \rangle \end{aligned} \quad (5.3.25)$$

и

$$\begin{aligned} \eta^a Q^a | \xi \rangle &= \eta^a (2k^+)^{1/2} S_0^a |i\rangle \xi^i(k) = \\ &= \eta^a (k^+)^{1/2} \cdot \gamma_{a\dot{a}}^i | \dot{a} \rangle \xi^i(k) = | \tilde{u} \rangle. \end{aligned} \quad (5.3.26)$$

В этих формулах через $\tilde{\xi}$ и \tilde{u} обозначены волновые функции, возникающие при η^a -суперобразованиях из u^a и ξ^i соответственно. Они задаются выражениями

$$\tilde{\xi}^i = \gamma_{a\dot{a}}^i \eta^a u^{\dot{a}}(k) \quad (5.3.27)$$

и

$$\tilde{u}^{\dot{a}} = \eta^a k^+ \gamma_{a\dot{a}}^i \xi^i(k), \quad (5.3.28)$$

которые совпадают с тем, что мы только что получили из вариаций янг-миллсовских полей. Аналогично для ε -суперпреобразований, генерируемых посредством $Q^{\dot{a}}$, имеем

$$\varepsilon^{\dot{a}} Q^{\dot{a}} | \xi \rangle = | \tilde{u} \rangle, \quad (5.3.29)$$

$$\varepsilon^{\dot{a}} Q^{\dot{a}} |u\rangle = | \tilde{\xi} \rangle, \quad (5.3.30)$$

где преобразованные волновые функции заданы формулами

$$\tilde{u}^{\dot{a}} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\varepsilon \gamma_{ij})^{\dot{a}} k^i \xi^j + \frac{1}{\sqrt{2}} \varepsilon^{\dot{a}} \xi^i k^i \quad (5.3.31)$$

и

$$\tilde{\xi}^i = \frac{1}{\sqrt{2}} \varepsilon^{\dot{a}} \gamma_{a\dot{a}}^i u^{\dot{a}} + \frac{\sqrt{2}}{k^+} \varepsilon^{\dot{a}} u^{\dot{a}} k^i. \quad (5.3.32)$$

Эти выражения опять-таки совпадают с тем, что было получено в теории Янга — Миллса.

Рассмотрим теперь массивную часть спектра суперструны. Простейший способ получить возбужденные массивные состояния открытой суперструны — это подействовать операторами α_{-n}^i и S_{-n}^a на основное состояние $|\varphi_0\rangle$. На каждом таком уровне

мы получаем столько же фермионов, сколько их возникало при RNS-описании. Фермионы составляют половину состояний каждого уровня, и их число очевидным образом совпадает с числом состояний, полученных применением операторов α_{-n}^i и d_{-n}^i к восьмикомпонентному основному состоянию. Число бозонов явно совпадает с числом фермионов и таким образом тоже согласуется с требованиями, налагаемыми условиями GSO на спектр. Однако теперь мы можем быть уверенными в том, что располагаем полным супермультиплетом, поскольку конструкция разд. 5.2.2 дает нам явную реализацию алгебры суперпреобразований на физическом спектре.

Физические состояния первого возбужденного уровня суть

$$\alpha_{-1}^i |\varphi_0\rangle, S_{-1}^a |\varphi_0\rangle; \quad (5.3.33)$$

они описывают по 128 бозонных и фермионных мод. Не составляет труда представить эти состояния в виде мультиплетов $\text{spin}(9)$, как и должно происходить с массивными возбуждениями. Возникающие здесь представления группы $\text{spin}(9)$ — это $44 + 84$ (отвечающие схеме Юнга $\square + \square$) для бозонов и 128-мультиплет «спина 3/2» для фермионов. Этот набор в точности соответствует спектру 11-мерной супергравитации, что, впрочем, и неудивительно, поскольку массивные мультиплеты в D -мерии классифицируются так же, как безмассовые в размерности $D + 1$.

Спектр второго возбужденного уровня содержит ($\alpha' M^2 = 2$) состояния

$$\begin{aligned} \alpha_{-2}^i |\varphi_0\rangle, S_{-2}^a |\varphi_0\rangle, \alpha_{-1}^i \alpha_{-1}^j |\varphi_0\rangle, \\ S_{-1}^a S_{-1}^b |\varphi_0\rangle, \alpha_{-1}^i S_{-1}^a |\varphi_0\rangle, \end{aligned} \quad (5.3.34)$$

описывающие в сумме 2304 моды. Чтобы представить его в обозримом виде, лучше всего воспользоваться номенклатурой мультиплетов группы $\text{spin}(9)$ вида

$$9 \otimes (44 + 84 + 128). \quad (5.3.35)$$

Это неприводимый массивный $N = 1$ супермультиплет с максимальным спином 3 (поскольку 9 содержит «спин 1», а 44 — «спин 2»). Отметим, что любой неприводимый супермультиплет может быть представлен как тензорное произведение некоторого фундаментального супермультиплета на неприводимое спинорное представление. В рассматриваемом случае $(44 + 84 + 128)$ как раз и является фундаментальным массивным супер-

мультиплетом. На третьем возбужденном уровне имеется 15 360 состояний, собирающихся в два супермультиплета в соответствии с формулой

$$(44 + 16) \otimes (44 + 84 + 128). \quad (5.3.36)$$

Асимптотически полное число супермультиплетов массы M есть экспоненциально растущая функция M . Это становится очевидным, если учесть, что общая степень вырождения растет экспоненциально, тогда как размер максимального супермультиплета на уровне n растет лишь полиномиально.

Для вычисления асимптотической плотности состояний можно использовать технику, развитую в разд. 2.3.5. В нашем случае коэффициенты вырождения d_n определяются из формулы

$$\sum_{n=0}^{\infty} d_n w^n = \text{tr } w^N = 16 \prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+w^n}{1-w^n} \right)^8, \quad (5.3.37)$$

где N — сумма операторов числа частиц для мод α_n^i и S_n^a , см. формулу (5.2.40), а след берется по обоим наборам осцилляторов. (Подчеркнем, что здесь стоит именно «след», а не «суперслед», который отличается дополнительным множителем $(-1)^F$, дающим общий знак минус для вклада фермионов. В суперсимметричной теории суперслед очевидным образом обращается в нуль.) Фактор $\prod (1-w^n)^{-8}$ — это вклад бозонов, возникающий в точности так же, как в бозонной струне. При $n > 0$ фермионные состояния, образующие базис для S_n^a , могут быть либо пустыми, либо заполненными, что дает вклад $(1+w)^n$ на каждую моду, и мы получаем бесконечное произведение, стоящее в числителе. Множитель 16 учитывает вырождение вакуумного состояния. Используя тот же прием, что и в разд. 2.3.5, можно найти собственно асимптотику для плотности состояний. В нашем случае асимптотическое поведение (5.3.37) определяется из разложения $\exp(\sum \ln(1-w^n)(1+w^n)^{-1})$ при $w \rightarrow 1$, что дает

$$16 \prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+w^n}{1-w^n} \right)^8 \sim \exp\left(\frac{2\pi^2}{1-w}\right). \quad (5.3.38)$$

Можно получить более точную оценку, включающую и префактор, с помощью обобщения формулы Харди — Рамануджана

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+w^n}{1-w^n} \right)^{-1} = \theta_4(0|w) = \left(-\frac{\ln w}{\pi}\right)^{-1/2} \theta_2(0|e^{\pi/\ln w}), \quad (5.3.39)$$

где θ_4 и θ_2 суть тэта-функции Якоби. Как определения этих функций, так и их трансформационные свойства при отображении $w \rightarrow \exp(\pi/\ln w)$ обсуждаются при вычислении петлевых диаграмм в приложении 8.A. Повторяя приведенные в разд. 2.3.5 рассуждения, основанные на контурном интегрировании, мы получаем

$$d_n \sim n^{-11/4} \exp(\pi\sqrt{8n}) \quad (5.3.40)$$

при $n \rightarrow \infty$ или

$$\rho(m) \sim m^{-9/2} \exp(m/m_0) \quad (5.3.41)$$

при $m \rightarrow \infty$, где

$$m_0 = (\pi\sqrt{8\alpha'})^{-1}. \quad (5.3.42)$$

5.3.2. Замкнутые суперструны

Для описания замкнутых суперструн необходимы два набора осцилляторных мод — один для правого сектора, один для левого. Спектр безмассовых состояний описывается, например, прямым произведением $|\phi_0\rangle \times |\bar{\phi}_0\rangle$. Все теории при этом делятся на две группы в зависимости от того, будут ли исходные майорано-вейлевские спиноры иметь одинаковые или противоположные киральности. Если киральности спиноров не совпадают, то никакой дополнительной симметризации провести нельзя и безмассовый мультиплет содержит $16 \times 16 = 256$ мод. В обозначениях группы $\text{spin}(8)$ он представляется в виде тензорного произведения двух янг-миллсовских супермультиплетов противоположной киральности:

$$(8_v + 8_c) \otimes (8_v + 8_s) = (1 + 28 + 35_v + 8_v + 56_v)_B + (8_s + 8_c + 56_s + 56_c)_F, \quad (5.3.43)$$

где индексы B и F указывают на бозонные и фермионные состояния соответственно. Полученный состав частиц отвечает IIA-супергравитации в $D=10$. Именно такой некиральный мультиплет получается при тривиальной размерной редукции супергравитации в $D=11$.

Если теперь оба спинора имеют совпадающую киральность, но не наложено никаких дополнительных ограничений, то мы опять-таки получаем 256 мод. Однако представление в обозначениях группы $\text{spin}(8)$ будет теперь иным: мы получаем тензорное произведение двух янг-миллсовских супермультиплетов одинаковой киральности:

$$(8_v + 8_c) \otimes (8_v + 8_c) = (1 + 28 + 35_v + 1 + 28 + 35_c)_B + (8_s + 8_s + 56_s + 56_s)_f. \quad (5.3.44)$$

Такой набор частиц отвечает IIB-супергравитации в $D = 10$, и его нельзя получить размерной редукцией какой-либо теории в старшей размерности. 35_v представляет гравитон, а 35_c представляет автодуальный антисимметричный тензор четвертого ранга.

Однако в рассматриваемом случае, когда киральности спинов совпадают, можно наложить дополнительное условие симметричности, т. е. оставить лишь те члены, которые инвариантны относительно перестановки $|\phi_0\rangle$ и $|\tilde{\phi}_0\rangle$. Это соответствует градуированной симметризации тензорного произведения двух янг-миллсовских супермультиплетов

$$\begin{aligned} [(8_v + 8_c) \times (8_v + 8_c)]_{\text{град. симм}} &= \\ &= (8_v \times 8_v)_{\text{симм.}} + (8_v \times 8_c) + (8_c \times 8_c)_{\text{антисимм.}} = \\ &= (1 + 28 + 35_v)_B + (8_s + 56_s)_F. \end{aligned} \quad (5.3.45)$$

Такой состав частиц отвечает киральной супергравитации типа I в $D = 10$.

Рассматривая массивные состояния замкнутой струны, важно учесть, что левых и правых возбуждений должно быть поровну ($L_0 = \tilde{L}_0$). Это условие обеспечивает независимость струнных переменных от выбора начала отсчета по переменной σ . Таким образом, и для массивных уровней остается в силе то правило, которое мы вывели при рассмотрении безмассовых уровней. А именно, состояния замкнутой струны, образующие n -й массивный уровень, представимы в виде тензорного произведения состояний n -го уровня открытой струны на себя. Это утверждение справедливо даже для теорий типа II, которые вовсе не содержат открытых струн. (Они их не содержат по той причине, что в таких теориях есть два гравитона, которые должны взаимодействовать с двумя супертоками, а мультиплеты открытой струны обладают лишь $(N=1)$ -суперсимметрией.) Заметим, что поскольку массивные мультиплеты для открытых струн некиральны, то между массивными мультиплетами теорий типа IIA и IIB не будет никакой разницы. Спектры этих теорий отличаются только на безмассовом уровне. Таким образом, какую бы теорию мы ни рассматривали, на первом возбужденном уровне будет $(256)^2$ состояний, задаваемых формулой

$$(44 + 84 + 128) \otimes (44 + 84 + 128). \quad (5.3.46)$$

Каждый из множителей представляет собой массивный $(N=1)$ -супермультиплет, а значит, все произведение в целом является $(N=2)$ -мультиплетом, причем каждая из суперсимметрий действует только на свой сомножитель. Иными словами, один супер-

заряд связан с правыми модами, а другой — с левыми. Что касается струн типа I, то здесь необходимо учесть еще градуированную симметризацию, и в результате остается $1/2 (256)^2$ состояний. Такие мультиплеты обладают лишь одной суперсимметрией, которую генерирует сумма двух суперзарядов $(N=2)$ -теории.

Формулу для асимптотической плотности состояний замкнутой струны можно вывести прямо из аналогичной формулы для открытой струны. При этом множителем два, на который отличаются плотности для струн типа I и II, можно пренебречь, поскольку мы не следим за столь тонкими различиями. Если в открытой струне на уровне $\alpha' m^2 = n$ имеется d_n состояний, то в замкнутой их будет $(d_n)^2$ при $\alpha' m^2 = 4n$. Таким образом,

$$d_n^{cl} = (d_n^{op})^2 \sim n^{-11/2} \exp(4\pi\sqrt{2}n) \quad (5.3.47)$$

при $n \rightarrow \infty$, откуда следует, что

$$\rho^{cl}(m) \sim m^{-10} \exp(m/m_0) \quad (5.3.48)$$

при $m \rightarrow \infty$, где

$$m_0 = (\pi\sqrt{8\alpha'})^{-1}. \quad (5.3.49)$$

Отметим, что критическая температура m_0 как в замкнутом, так и в открытых секторах суперструн типа I одинакова, однако из-за различия степеней m в предэкспоненте открытая струна имеет большее количество состояний в асимптотике.

5.4. Некоторые замечания о ковариантном квантовании

Препятствия, возникающие на пути ковариантного квантования суперсимметричного действия суперструн, радикально отличаются от всего того, с чем мы встречались во второй и четвертой главах. Из действия следует сложная система связей, перепутывающих канонические координаты и импульсы, и приходится обращаться к развитому Дираком формализму квантования гамильтоновых систем со связями.

Чтобы воспользоваться дираковской процедурой, необходимо разделить все связи на два класса: на связи первого рода и связи второго рода. К связям первого рода относятся те, что образуют замкнутую алгебру. К этому типу относятся рассмотренные в предыдущих главах связи Вирасоро и супер-Вирасоро, и мы сформулировали два возможных пути учета этих связей с явным сохранением ковариантности. «Старый» способ заключается в том, чтобы интерпретировать связи как дополнительные условия, налагаемые на векторы фоковского пространства стру-

ны. В «современном» подходе вводятся поля духов Фаддеева — Попова и определяется BRST-заряд. Обе эти конструкции применимы, как правило, для связей первого рода. Связями второго рода называются связи, не образующие замкнутой алгебры. При появлении связей второго рода дираковская процедура предписывает произвести замену скобок Пуассона (коммутаторов) на модифицированные выражения, называемые скобками Дирака.

У суперсимметричного действия суперструны имеются связи как первого, так и второго рода. Связи второго рода появляются из-за того, что грассманы импульсы P_θ^A , сопряженные координатам θ^A в (5.1.20) (5.1.22), не являются независимыми переменными в фазовом пространстве. Это можно усмотреть прямо из определения

$$P_\theta^A = \frac{\delta S}{\delta \theta^A} \quad (5.4.1)$$

которое выражает импульсы как функции X^μ , P^μ , θ^A и их σ -производных. Более того, можно показать, что половина фермионных связей относится к первому роду и вместе с $T_{\alpha\beta}$ образует расширение алгебры Вирасоро. Вторая же половина фермионных связей является связями второго рода. Если игнорировать этот факт и попытаться, пользуясь формальными правилами, построить скобки Дирака, то возникают сингулярные выражения, содержащие знаменатели, обращающиеся в нуль на уравнениях движения. Если не обращать на это внимания и продолжать двигаться дальше, то возникает интересная алгебраическая структура, однако неясно, какой смысл можно придать получающимся формулам и можно ли вообще придать им какой-либо смысл. Тогда представляется разумным аккуратно разделить связи по родам и определить скобки Дирака по стандартным формулам для связей второго рода. Однако новая трудность заключается в том, что невозможно произвести желаемое разделение явно ковариантным образом. Вся система связей образует 16-компонентный объект, соответствующий майорано-вейлевскому спинору, но поскольку в $D = 10$ нет восьмерных представлений, необходимо редуцировать явную симметрию, например до поперечной группы $sp(8)$. Последовательное выполнение такой программы действительно позволяет получить достаточно строгим образом калибровку светового конуса, описанную в разд. 5.2.1, но ничем не может помочь в деле ковариантного квантования.

Какой из всего этого можно сделать вывод? Существует несколько различных точек зрения, причем каждая из них имеет своих приверженцев среди специалистов в этой области. Одна точка зрения заключается в том, что калибровка светового

конуса является в высшей степени подходящей и естественной и не следует стремиться к явной ковариантности. Однако потеря явной ковариантности кажется не способствующей более глубокому пониманию фундаментальных принципов струнной теории. Альтернативная позиция сводится к тому, что надо пользоваться RNS-формализмом, поскольку именно он допускает ковариантное квантование. Однако в этом подходе чрезвычайно трудно описать пространственно-временную суперсимметрию, которая является не менее фундаментальной составляющей супергруппы Пуанкаре, чем группа Лоренца. Следует отметить, что за последнее время в развитии RNS-формализма был достигнут существенный прогресс.

Идеальным вариантом была бы такая модификация или reinterpretация суперсимметричного действия суперструны, которая позволила бы провести квантование так, чтобы полная супер-пуанкаре-инвариантность оставалась явной симметрией. Такое действие могло бы послужить базой для формулировки полевой теории суперструны, которая обладала бы общекоординатной инвариантностью в суперпространстве (или, возможно, ее бесконечным расширением, адекватным теории струн). Может оказаться, что найти суперполеву формулировку для суперструны вне массовой поверхности будет даже проще, чем сделать это для суперсимметричной теории Янга — Миллса при $D = 10$, где такое описание также пока что отсутствует. Во всяком случае, в последней теории, возможно, требуется бесконечное количество вспомогательных полей для достижения явной суперсимметрии (замкнутости алгебры вне массовой поверхности), и в струнном контексте эта идея не выглядит совсем уж неестественно. Некоторые предложения в этом направлении уже сделаны, хотя пока что рано судить, насколько они будут успешны.

5.5. Резюме

Итак, мы построили ковариантное действие для суперструны, которое обладает явной пространственно-временной суперсимметрией. Помимо обычной репараметризационной инвариантности у этого действия есть еще чрезвычайно специфическая локальная фермионная симметрия. В ковариантной калибровке мы получаем сложную систему связей как первого, так и второго рода, распутать которую можно только ценой потери явной ковариантности. Таким образом, пока не будет найдена какая-то подходящая модификация основных формул, ковариантное квантование невозможно.

В калибровке светового конуса уравнения для фермионных координат сводятся к уравнениям свободного двумерного фер-

мионного поля. При этом фермионные координаты оказываются принадлежащими представлению 8_s поперечной группы вращений $\text{spin}(8)$ в отличие от фермионов из четвертой главы, которые в калибровке светового конуса принадлежат к представлению 8_v (векторному). С помощью процедуры бозонизации и обратной фермионизации удалось установить эквивалентность двух этих формулировок. Чтобы осознать нетривиальность этого результата, надо учесть, что сама алгебра 8_s спиноров автоматически приводит к мультиплету 10-мерной суперсимметрии, а чтобы получить этот же спектр из спиноров 8_v , пришлось использовать два типа граничных условий и в каждом из секторов, и в бозонном, и в фермионном, оставить в спектре лишь состояния с четным фермионным числом по фермионам мировой поверхности.

Формализм этой главы, который позволяет единым образом описывать бозоны и фермионы и автоматически учитывать условие GSO, позволяет существенно упростить многие вычисления, и мы будем широко использовать его в дальнейших главах.

Приложение 5.А. Свойства групп $SO(2n)$

Результаты этой главы существенно основываются на некоторых свойствах группы $SO(8)$. Кроме того, в дальнейших главах нам потребуются свойства групп $SO(16)$ и $SO(32)$; поэтому мы сделаем в настоящем приложении общую сводку существенных для нас свойств групп $SO(2n)$. Заметим, что, говоря об этих группах, подчас желательно проводить различие между собственно группой вращений в $2n$ измерениях, $SO(2n)$, и различными «накрывающими группами».

Напомним, что группа $SU(2)$ является накрывающей для $SO(3)$ и имеет представления (с полуцелым спином), в которых вращением на 2π отвечает умножение на -1 . Это значит, что группу $SO(3)$ можно отождествить с факторпространством $SU(2)/Z_2$, в котором элементы центра группы $SU(2)$, а именно диагональные (2×2) -матрицы 1 и -1 , считаются совпадающими. Эти группы отличаются топологически: $SU(2)$ односвязна, а $SO(3)$ — нет. Соответственно все представления $SU(2)$ разбиваются на два класса (с целым и полуцелым спином), и лишь представления с целым спином являются представлениями собственно $SO(3)$.

В общем случае, для группы $SO(2n)$, ситуация похожа, но лишь отчасти. Центр односвязной накрывающей группы $\text{spin}(2n)$ состоит из четырех элементов, и, как мы в дальнейшем покажем, все ее представления разбиваются на четыре класса эквивалентности. В картановской классификации эти группы

называются группами серии D_n . Разные накрывающие группы отличаются лишь своей глобальной топологией, в окрестности же единицы они совпадают, поэтому между ними нет никакого различия на уровне алгебр Ли.

Как сама группа $SO(2n)$, так и различные ее накрывающие имеют ранг n . Это значит, что максимальное число коммутирующих генераторов, отвечающих любой из этих групп, равно n . Если обозначить J_{kl} генераторы $SO(2n)$, имеющие ненулевые элементы вида $(J_{kl})_{mp} = \delta_{km}\delta_{lp} - \delta_{kp}\delta_{lm}$, то естественно в качестве n коммутирующих генераторов выбрать $W_k = J_{2k-1, 2k}$, $k = 1, \dots, n$. Каждый из W_k производит вращение в плоскости $(2k-1, 2k)$. Максимальный набор коммутирующих генераторов называется картановской подалгеброй, и, следовательно, W_k образуют картановскую подалгебру для группы $SO(2n)$. Поскольку эти коммутирующие операторы могут быть диагонализированы одновременно, то в любом неприводимом представлении естественно выбирать базис из общих собственных векторов W_k . Если теперь вообразить, что W_k определяют направления в некотором n -мерном векторном пространстве, называемом пространством весов, то каждому базисному состоянию можно сопоставить вектор в этом пространстве, компоненты которого есть значения W_k на выбранном состоянии. Такой вектор называется весовым вектором или просто весом. Нередко оказывается, что представление удобнее всего задавать, описывая отвечающий ему набор весов. Это хорошо известно тем, кто занимается физикой элементарных частиц, на примере группы $SU(3)$, где третья компонента изоспина I_3 и гиперзаряд традиционно выбираются для того, чтобы метить веса.

Если обозначить n -компонентный вектор $(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ с единицей на i -м месте через u_i , то векторы $\pm u_i$, где $i = 1, 2, \dots, n$, опишут нам $2n$ весов фундаментального представления, в чем читатель может без труда самостоятельно убедиться. Более того, u_i образуют базис в пространстве весов, и, следовательно, веса любого представления группы $SO(2n)$ можно разложить по u_i . Например, в $n(2n-1)$ -мерном присоединенном представлении те $2n(n-1)$ генератора, которые не входят в картановскую подалгебру, могут быть представлены набором весов $\pm u_i \pm u_j$ ($i \neq j$), что тоже нетрудно проверить. Весовые векторы присоединенного представления называются корневыми. Заметим, что квадрат модуля корневого вектора равен единице для весов фундаментального представления $\pm u_i$ и двум для весов присоединенного представления $\pm u_i \pm u_j$; этот факт пригодится нам в дальнейшем. Среди всех корней можно выбрать ровно n «простых положительных» корней, образующих базис и обладающих тем свойством, что все остальные

корни разлагаются по ним с целыми коэффициентами, причем эти коэффициенты либо все неотрицательны, либо все неположительны. Для группы $SO(2N)$ система простых положительных корней дается формулами $e_1 = u_1 - u_2$, $e_2 = u_2 - u_3$, ..., $e_{n-1} = u_{n-1} - u_n$ и $e_n = u_{n+1} + u_n$.

Группы $SO(2n)$ относятся к числу групп с «простыми связями»; это значит, что все ее корни имеют равную длину. В этих случаях удобно выбирать нормировку как в предыдущем абзаце, т. е. так, чтобы квадрат длины корней был равен двум.



Рис. 5.1. а) — схема Дынкина для группы $SO(2n)$; б) — схема Дынкина для группы $SO(8)$ симметрична относительно перестановок трех внешних линий.

Далее определяется $(n \times n)$ -матрица A_{ij} , называемая матрицей Картана,

$$A_{ij} = \frac{2e_i \cdot e_j}{e_i \cdot e_i} = e_i \cdot e_j, \quad (5.A.1)$$

где e_i — простые положительные корни. Диагональные элементы матрицы Картана очевидным образом равны двум; что же касается остальных ее элементов, то для алгебр рассматриваемого типа они равны 0 или -1 .

Определим теперь «схему Дынкина». Она состоит из n точек, представляющих простые корни, и линий, изображающих углы между корнями. В нашем случае правила построения схем Дынкина особенно просты: точки, представляющие ортогональные корни e_i и e_j , не соединяются, а между точками, отвечающими корням e_i и e_j с $e_i \cdot e_j = -1$, проводится сплошная односторонняя линия. Выше мы описали, как выбирать простые положительные корни для группы $SO(2n)$, и, как легко видеть, им отвечает схема Дынкина, изображенная на рис. 5.1, а. При произвольном n эта схема зеркально симметрична относительно горизонтальной плоскости, перпендикулярной плоскости рисунка, но при $n = 4$ появляется дополнительная симметрия. Схема Дынкина для группы $SO(8)$, представленная на рис. 5.1, б, инвариантна относительно действия шестизначной группы произвольных перестановок трех внешних линий. В теории простых групп Ли доказывается общее утверждение, что всякая алгебра Ли однозначно восстанавливается по своей схеме Дынкина и, следовательно, автоморфизмы (симметрии) схемы Дынкина

порождают соответствующие автоморфизмы алгебры Ли¹⁾. Описанная выше зеркальная симметрия схем Дынкина для $SO(2n)$ соответствует преобразованию «четности», при котором $x_k \rightarrow -x_k$ для любого элемента фундаментального $2n$ -мерного представления группы $SO(2n)$. Эта симметрия, в частности, меняет местами представления положительной и отрицательной киральности, которые мы опишем чуть позже. Дополнительная симметрия, которой обладает схема Дынкина для $SO(8)$, указывает на существование дополнительных автоморфизмов, меняющих местами такие представления, которые не связываются никакими симметриями никаких других групп $SO(2n)$. И действительно, оказывается, что эта симметрия, называемая триальностью, связывает спинорное и векторное представления $SO(8)$. Ниже мы попытаемся дать замкнутое, но неполное и нестрогое изложение этого факта, не апеллирующее к понятию схем Дынкина.

Начнем с явного описания конструкции спинорного представления группы $SO(2n)$. Для этого нам понадобится вспомогательная система, обладающая лишь $U(n)$ -симметрией. А именно, введем n фермионных операторов рождения b_i^* , $i = 1, \dots, n$, и соответствующих операторов уничтожения b_i , $j = 1, \dots, n$, удовлетворяющих обычным антиперестановочным соотношениям

$$\{b^i, b^k\} = \{b_i^*, b_k^*\} = 0; \quad \{b^i, b_j^*\} = \delta_j^i. \quad (5.A.2)$$

Очевидно, что эта система может быть представлена в гильбертовом пространстве размерности 2^n . В этом пространстве имеется «фоковский вакуум» $|\Omega\rangle$, который аннулируется всеми операторами уничтожения, и состояния вида $|\Omega_j\rangle = b_j^*|\Omega\rangle$, $|\Omega_{j_1 j_2}\rangle = b_{j_1}^* b_{j_2}^*|\Omega\rangle$ и т. д. В общем случае мы будем обозначать $|\Omega_{j_1 j_2 \dots j_k}\rangle$ состояние, полученное действием на фоковский вакуум произведения k операторов рождения $b_{j_1}^* \dots b_{j_k}^*$. Описанная система явно обладает $U(n)$ -симметрией, относительно которой, например, b^i и b_k^* преобразуются как n и \bar{n} соответственно; генераторы группы $U(n)$ — это $[b^i, b_j^*]/2$.

Менее тривиальным является тот факт, что на самом деле эта система обладает и естественной $SO(2n)$ -симметрией (точнее, $\text{spin}(2n)$ -симметрией, поскольку квантовые числа, отвечающие группе $SO(2n)$, оказываются полуцелыми). А именно, оп-

¹⁾ Эти автоморфизмы являются внешними, т. е. не могут быть заданы каким-либо элементом самой алгебры Ли.

ределим «гамма-матрицы» γ_k , $k = 1, \dots, 2n$, следующими формулами:

$$\begin{aligned} \gamma_k &= (b^k + b_k^*), \quad k = 1, \dots, n, \\ \gamma_k &= (b^{k-n} - b_{k-n}^*)/i, \quad k = n+1, \dots, 2n. \end{aligned} \quad (5.A.3)$$

Нетрудно проверить, что они удовлетворяют дираковским антикоммутационным соотношениям

$$\{\gamma_k, \gamma_l\} = 2\delta_{kl}, \quad (5.A.4)$$

и в результате оказывается, что комбинация

$$\sigma_{kl} = [\gamma_k, \gamma_l]/4 \quad (5.A.5)$$

удовлетворяет перестановочным соотношениям генераторов группы

$$[\sigma_{kl}, \sigma_{jm}] = \delta_{lj}\delta_{km} \pm \text{перестановки}. \quad (5.A.6)$$

Итак, мы построили $2n$ -мерное представление группы $SO(2n)$, называемое спинорным представлением. Однако оно не является вполне неприводимым. Оператор

$$\bar{\gamma} = i^{n(2n-1)} \gamma_1 \gamma_2 \dots \gamma_{2n} \quad (5.A.7)$$

коммутирует со всеми генераторами $SO(2n)$ (фазовый множитель $i^{n(2n-1)}$ введен для того, чтобы выполнялось условие $\bar{\gamma}^2 = 1$). Спинорные состояния с $\bar{\gamma} = +1$ или $\bar{\gamma} = -1$ называются соответственно спинорами положительной или отрицательной киральности. Нехитрые манипуляции с операторами рождения и уничтожения показывают, что каждое из этих представлений действительно неприводимо. Итак, мы видим, что у группы $SO(2n)$ есть два неприводимых 2^{n-1} -мерных представления S_{\pm} , одно с положительной, а другое с отрицательной киральностью. Более того, фермионные операторы рождения b_k^* антикоммутируют с оператором $\bar{\gamma}$ и, следовательно, меняют киральность. Таким образом, если вакуум $|\Omega\rangle$ имеет положительную киральность, то $SO(2n)$ -спиноры с положительной киральностью получают действием на вакуум $|\Omega\rangle$ четного числа операторов рождения

$$S_+ = \bigoplus_{k \text{ четное}} |\Omega_{j_1 \dots j_k}\rangle, \quad (5.A.8)$$

а спиноры с отрицательной киральностью — действием на него нечетного числа операторов рождения.

Определим теперь веса спинорного представления. В качестве картановских генераторов можно взять n коммутирующих операторов

$$W_k = [b^k, b_k^*]/2, \quad k = 1, \dots, n. \quad (5.A.9)$$

Очевидно, что собственные значения W_k равны $\pm 1/2$, и, следовательно, векторы $1/2(\pm 1, \pm 1, \dots, \pm 1)$ будут весами нашего 2^n -мерного спинорного представления. Знак на каждом месте выбирается независимо и соответствует тому, заполнен ли k -й фермионный уровень или нет. Как видно из описания оператора $\bar{\gamma}$, веса представления будут равны $(\pm 1, \pm 1, \dots, \pm 1)/2$ (с четным числом плюсов для одной киральности и с нечетным — для другой), причем квадрат длины любого веса равен $n/4$. Теперь легко увидеть, чем выделяется случай $n=4$, соответствующий группе $\text{spin}(8)$. Именно в этом случае квадраты длин спинорных и векторных $(\pm u_i)$ весов совпадают, и, следовательно, только в этом случае между спинорным и векторным представлениями группы $\text{spin}(2n)$ может возникнуть симметрия. Это и есть тот самый случай, когда схема Дынкина обладает дополнительной симметрией, а именно симметрией между спинорами и векторами. Можно явно написать преобразование в пространстве весов, переводящее векторы в спиноры:

$$\begin{aligned} u_1 &\rightarrow (u_1 + u_2 + u_3 + u_4)/2, \\ u_2 &\rightarrow (u_1 + u_2 - u_3 - u_4)/2, \\ u_3 &\rightarrow (u_1 - u_2 + u_3 - u_4)/2, \\ u_4 &\rightarrow (u_1 - u_2 - u_3 + u_4)/2. \end{aligned} \quad (5.A.10)$$

Это преобразование в действительности является автоморфизмом алгебры Ли группы $SO(8)$, так что оно представляет собой ортогональное вращение в пространстве весов, сохраняющее длины и углы; оно переставляет местами 24 ненулевых веса присоединенного представления. Более того, именно это преобразование мы использовали в разд. 5.2.1 для бозонизации и рефермионизации, когда устанавливали связь между фермионами, являющимися пространственно-временными векторами и спинорами. Если прибавить к преобразованию (5.A.10) преобразование «четности», которое является автоморфизмом для любой группы $SO(2n)$, то мы получим ту самую шестиэлементную «триальность», о которой говорилось выше.

Объясним теперь кратко, каким образом все представления разбиваются на классы эквивалентности и почему у группы $\text{spin}(2n)$ имеется ровно четыре таких класса. Как мы видели, состояния в неприводимом представлении могут быть описаны своими весами, т. е. наборами точек в n -мерном пространстве весов. Рассмотрим множество всевозможных весов всевозможных представлений. Они образуют решетку, которая называется решеткой весов и обозначается Λ_w . Рассмотрим теперь решетку, составленную из линейных комбинаций весов одного лишь присоединенного представления, причем с целочисленными коэф-

фициентами. Ясно, что эта решетка, называемая решеткой корней Λ_R , будет подрешеткой решетки весов Λ_W .

Мы говорим, что два представления принадлежат к одному классу эквивалентности тогда и только тогда, когда их весовые векторы отличаются на вектор из решетки корней. Четыре представления, которые мы описали в случае группы $\text{spin}(2n)$ (фундаментальное, присоединенное и два спинорных), принадлежат к различным классам. В этом легко убедиться, рассматривая приведенные выше весовые векторы. Чтобы убедиться в отсутствии каких-либо других классов, необходимо прибегнуть к гораздо более изощренному анализу, и здесь мы ограничимся лишь его наброском. Для этого мы привлечем один факт из теории алгебры Ли. Теорема гласит, что если простые корни (у алгебры с простыми связями) нормированы так, что $e_i \cdot e_i = 2$, а именно этой нормировкой мы пользовались, то эта решетка весов дуальна решетке корней. Это означает, что она порождается набором базисных векторов e_i^* , $i = 1, \dots, n$, таких, что $e_i^* \cdot e_j = \delta_{ij}$. В этой ситуации число классов эквивалентности вычисляется просто как отношение объема единичной клетки в решетке корней к объему соответствующей клетки в решетке весов, поскольку если два весовых вектора попадают в одну клетку решетки корней, то очевидно, что они не могут отличаться на корневой вектор. Итак, все, что нужно сделать, — это вычислить два указанных объема. Нетрудно видеть, что детерминант матрицы Картана $A_{ij} = e_i \cdot e_j$ равен квадрату объема единичной клетки в решетке весов Λ_R . Аналогично, детерминант обратной матрицы равен квадрату объема единичной клетки в решетке $\Lambda_R^* = \Lambda_W$. Таким образом, мы видим, что $\det A_{ij}$ равен отношению двух объемов и, следовательно, числу классов эквивалентности. Взяв приведенные выше явные формулы для простых корней группы $SO(2n)$, нетрудно показать, что $\det A = 4$. Следовательно, четыре описанных выше представления действительно перечисляют все четыре класса эквивалентности. Просто заметим без дополнительных объяснений, что алгебры с простыми связями имеют еще лишь группы $SU(n)$ (их представления разбиваются на n классов эквивалентности) и исключительные группы E_n , у которых число классов равно $9 - n$.

Приложение 5.В. Алгебра Клиффорда для группы $\text{spin}(8)$

В построении матриц Дирака для группы $\text{spin}(8)$ с необходимостью участвует алгебра Клиффорда, порожденная восемью антикоммутирующими матрицами. Поскольку эти матрицы играют в теории довольно существенную роль (из них, например,

удобно строить десятимерные матрицы Дирака), то в этом приложении мы опишем их явно.

Дираковские матрицы для группы $\text{spin}(8)$ — это шестнадцатимерные матрицы, отвечающие приводимому представлению $8_s + 8_c$ группы $\text{spin}(8)$. Их можно записать в блочном виде

$$\gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \gamma_{aa}^i \\ \gamma_{bb}^i & 0 \end{pmatrix}, \quad (5.В.1)$$

где через γ_{aa}^i обозначена транспонированная матрица γ_{aa}^i . Условия $\{\gamma^i, \gamma^j\} = 2\delta^{ij}$ будут выполнены, если удовлетворяются соотношения

$$\gamma_{aa}^i \gamma_{bb}^j + \gamma_{aa}^j \gamma_{bb}^i = 2\delta^{ij} \delta_{ab}, \quad i, j = 1 \dots 8, \quad (5.В.2)$$

и аналогичные с перестановкой индексов с точками и без. Эти соотношения выполнены, в частности, для семейства матриц γ_{aa}^i , составленных из блоков 2×2 ,

$$\begin{aligned} \gamma^1 &= \varepsilon \times \varepsilon \times \varepsilon, & \gamma^2 &= 1 \times \tau_1 \times \varepsilon, \\ \gamma^3 &= 1 \times \tau_3 \times \varepsilon, & \gamma^4 &= \tau_1 \times \varepsilon \times 1, \\ \gamma^5 &= \tau_3 \times \varepsilon \times 1, & \gamma^6 &= \varepsilon \times 1 \times \tau_1, \\ \gamma^7 &= \varepsilon \times 1 \times \tau_3, & \gamma^8 &= 1 \times 1 \times 1, \end{aligned} \quad (5.В.3)$$

где $\varepsilon = i\tau_2$, а τ_i — матрицы Паули. Мы полагаем

$$\gamma_{ab}^{ij} = \frac{1}{2} (\gamma_{aa}^i \gamma_{bb}^j - \gamma_{aa}^j \gamma_{bb}^i) \quad (5.В.4)$$

и аналогично для матриц γ_{ab}^{ij} .

Использованные в гл. 4 майорано-вейлевские спиноры можно легко интерпретировать на языке описанных выше матриц. Напомним, что майорановские спиноры в $D = 10$ имеют 32 вещественные компоненты (в майорановском базисе), но условие Вейля $\Gamma_{11}\lambda = \lambda$ сокращает число компонент вдвое. По поперечной подгруппе $SO(8)$ группы $SO(9, 1)$ остающиеся 16 компонент классифицируются как $8_s + 8_c$. Это значит, что матрицы Дирака в выбранном базисе можно выразить через матрицы γ^i , определенные формулой 5.В.1, по крайней мере восемь «поперечных» матриц. В качестве девятой матрицы, антикоммутирующей со всеми восемью предыдущими, можно взять $\gamma^9 = \gamma^1 \gamma^2 \dots \gamma^8 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Однако десятой антикоммутирующей матрицы среди матриц 16×16 нет. Такой вывод вполне разу-

мен, поскольку в рассматриваемом нами подпространстве $\Gamma_{11} = 1$ произведение всех десяти матриц Дирака обязано равняться единице. Поэтому уравнения Дирака для майорано-вейлевских спиноров $(\lambda_s^a, \lambda_c^a)$ расщепляются на два восьмикомпонентных уравнения:

$$\begin{aligned} (\partial_0 + \partial_9) \lambda_s^a + \gamma_{aa}^i \partial_i \lambda_c^a &= 0, \\ (\partial_0 - \partial_9) \lambda_c^a + \gamma_{aa}^i \partial_i \lambda_s^a &= 0. \end{aligned} \quad (5.B.5)$$

Для майорано-вейлевских спиноров противоположной киральности надо поменять знаки в $\partial_0 \pm \partial_9$.

6. Неабелева калибровочная симметрия

Чтобы теория суперструн действительно могла описывать физическую реальность, в этой теории должны найти себе место не только общекоординатная инвариантность и локальная суперсимметрия, но и локальная калибровочная симметрия, лежащая, как известно, в основе всех других взаимодействий. Совершенно ясно, что калибровочная симметрия гораздо нужнее, чем какая-то локальная суперсимметрия! Одна из возможностей включить ее состоит в том, что в десятимерном мире вообще нет никаких калибровочных симметрий, а появляются они лишь в процессе редукции к четырем измерениям. Однако такая схема, которая, по-видимому, с неизбежностью возникает при попытках описывать реальность суперструнами типа II, наталкивается на огромные трудности. Мы частично обсудим этот круг вопросов в гл. 14.

Более перспективной оказывается схема, в которой калибровочные симметрии присутствуют сразу в десятимерном мире. В этой схеме процедура компактификации из десяти измерений в четыре выступает как составная часть первого шага нарушения симметрии. В данной главе мы исследуем способы введения калибровочных симметрий в $D = 10$, а компактификацию и нарушение симметрии отложим до следующих глав.

Известны две принципиально отличающиеся процедуры введения калибровочной симметрии. Следуя первой, кратко описанной в разд. 1.5.3, надо поместить заряды, отвечающие группе внутренней симметрии, на концах открытой струны; во второй же, напротив, они распределяются по всей замкнутой струне. Второй путь прямо ведет нас к гетеротическим струнам, которые обладают рядом существенных преимуществ по сравнению с другими теориями. Можно даже утверждать, что если среди известных на сегодняшний день струнных теорий действительно содержится правильная, то она почти с необходимостью должна быть теорией гетеротических струн $E_8 \times E_8$. В этой главе мы обсудим оба способа введения калибровочных взаимодействий,

однако предпочтение будет отдано второму, который приводит к гетеротическим струнам.

6.1. Открытые струны

В разд. 1.5.3 мы уже обсуждали, как можно учесть неабелевы калибровочные симметрии, поместив заряды на концах открытой струны. Наш интерес к этой теме был связан с той ролью, которую она сыграла в истории адронной интерпретации струны. Сейчас мы вернемся к ней и уточним ряд моментов, которые остались в разд. 1.5.3 неразъясненными.

Очевидно, что помещать заряды на концах открытых струн можно лишь в тех теориях струн, где такие струны действительно имеются. Среди суперсимметричных теорий струн открытые струны содержит только теория типа I. Теория типа II, обладающая суперсимметрией $N=2$, с открытыми струнами связана быть не может, поскольку открытые струны имеют суперсимметрию не более чем с $N=1$. По другим, но связанным с этой причиной невозможны открытые струны и в гетеротической теории, которая будет описана в настоящей главе. Если калибровочные квантовые числа введены с помощью зарядов на концах струн, то даже в теории типа I замкнутые струны оказываются нейтральными.

6.1.1. Метод Чана — Патона

В 1969 г. Чаном и Патонам был сформулирован способ введения калибровочной симметрии $U(2)$ или $U(3)$ в сектор открытых струн в бозонной теории струн. Собственно говоря, сами авторы ставили задачу включения в теорию только глобальных симметрий, однако на самом деле появление в спектре открытой струны безмассовых калибровочных мезонов (что до конца осознано в то время не было) указывает на то, что в последовательности сформулированной теории струн введенные ими квантовые числа отвечают калибровочной симметрии. Обобщение метода Чана — Патона на произвольные группы $U(n)$ совершенно очевидно, что же касается других классических групп, $SO(n)$ и $USp(n)$, то их можно включить, если рассмотреть неориентируемые струны вместо ориентированных, которым по феноменологическим соображениям отдавалось предпочтение на ранних этапах развития дуальных моделей. Такое обобщение вполне уместно, поскольку, как мы объяснили в четвертой главе, суперструны типа I должны быть неориентируемыми.

Начнем с того, что рассмотрим полупростую группу Ли G и некоторое ее представление R , которое может быть как комп-

лексным, так и вещественным ($R \neq \bar{R}$ или $R = \bar{R}$). Обозначим через n размерность представления R . Предположим, что, как показано на рис. 6.1, на одном конце струны имеется «кварк», преобразующийся по представлению R , а на другом — «антикварк», преобразующийся по представлению \bar{R} ¹⁾. И у кварка, и у антикварка имеется по n состояний, что дает в итоге n^2 вариантов. Если R комплексное, то на струне возникает естественная ориентация, как на рис. 6.1, а, если же R вещественное, то струна может быть неориентируемой, как на рис. 6.1, б.

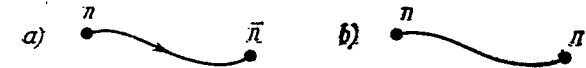


Рис. 6.1. Открытая струна, на концах которой помещены «кварк» и «антикварк», преобразующиеся относительно группы внутренней симметрии неким дополнительным образом. Если кварки лежат в комплексном представлении, как на рис. а), то мы обозначаем это стрелкой, изображающей направление внутренней ориентации струны; если представление вещественно, как на рис. б), то никакой стрелки не ставится.

Исследуем теперь вопрос о квантовых числах различных массовых уровней открытой струны, снабженной такими зарядами. В гл. 2 мы установили, что $X^i(\sigma, \tau)$ имеет следующее разложение по модам:

$$X^i(\sigma, \tau) = x^i + p^i \tau + i \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \alpha_n^i e^{-in\tau} \cos n\sigma. \quad (6.1.1)$$

Параметр σ меняется от $\sigma=0$ до $\sigma=\pi$ вдоль струны. Представим теперь, что мы переименовали концы струны и параметризовали ее в обратном направлении. Тогда предыдущая формула заменится на

$$X^i(\pi - \sigma, \tau) = x^i + p^i \tau + i \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} (-1)^n \alpha_n^i e^{-in\tau} \cos n\sigma. \quad (6.1.2)$$

Следовательно, обращению направления параметризации соответствует замена $\alpha_n^i \rightarrow (-1)^n \alpha_n^i$. (Аналогичное утверждение имеет место и для фермионных координат суперструны вне зависимости от того, используется ли формализм гл. 4 или гл. 5.) Когда факторов Чана — Патона нет, то состояние струны $|\Lambda\rangle$ — это просто вектор в гильбертовом пространстве осцилляторов. Представим теперь, что на концах струны имеются кварк a и антикварк \bar{b} , где a и \bar{b} — это n -значные «метки», ассоциированные с представлениями R и \bar{R} группы G . Тогда состояние

¹⁾ Слова «кварк» и «антикварк» лишь указывают на наличие некоторых квантовых чисел. Присутствие настоящей массы или спина на концах струны сделало бы совершенно неприменимым весь анализ предыдущих глав.

$|\Lambda\rangle$ тоже будет нести эти метки, т. е. запишется в виде $|\Lambda; a, \bar{b}\rangle$, причем первая метка относится к концу струны, параметризованному как $\sigma = 0$, а вторая — к $\sigma = \pi$.

Теперь естественно поставить вопрос, будут ли все n^2 состояний $|\Lambda; a, \bar{b}\rangle$ присутствовать в спектре или же необходимо ввести какие-то ограничения. Один из способов исследовать этот вопрос — это рассмотреть спектр безмассовых векторных частиц. В любой последовательной теории безмассовые векторные мезоны лежат в присоединенном представлении калибровочной группы, которая должна быть с точностью до возможных $U(1)$ -факторов компактной полупростой группой Ли. Действительно, в следующей главе мы убедимся, что «трехвекторное» взаимодействие открытых струн в точности совпадает с янг-миллсовским. (Правда, точным это утверждение оказывается лишь для суперструны типа I, в открытой бозонной струне оно верно лишь с точностью до $O(\alpha')$). Следовательно, если $(\Lambda; a, \bar{b})$ описывает безмассовый вектор, то все квантовые числа, отвечающие комбинации $a\bar{b}$, должны поместиться в присоединенном представлении. В случае когда a и \bar{b} пробегают представления n и \bar{n} группы $U(n)$ соответственно, это выполнено автоматически, поскольку для $U(n)$ представление $n \times \bar{n}$ является присоединенным. Однако для других важных групп произведение $R \times \bar{R}$ оказывается больше пространства присоединенного представления и необходимо попытаться наложить какие-то дополнительные ограничения. Реально известно только одно подходящее ограничение. В том случае, когда представления R и \bar{R} эквивалентны и соответственно нет реальных различий между концами струны, можно потребовать, чтобы квантовая волновая функция струны была инвариантна относительно обращения $\sigma \rightarrow \pi - \sigma$. Формально это означает, что

$$|\Lambda(\alpha_n^i; b, a) = \varepsilon |\Lambda((-1)^n \alpha_n^i; a, b), \quad (6.1.3)$$

где фаза ε может быть равна ± 1 . Здесь мы использовали полученную выше информацию о том, что при замене $\sigma \rightarrow \pi - \sigma$ осцилляторы преобразуются как $\alpha_n^i \rightarrow (-1)^n \alpha_n^i$. Заметим, что в формуле (6.1.3) мы написали ab вместо $a\bar{b}$. Сделано это не случайно, а чтобы подчеркнуть, что сама симметрия, устанавливаемая этой формулой, имеет смысл только в том случае, когда представления для зарядов на обоих концах струны действительно эквивалентны. Струны, удовлетворяющие условию (6.1.3), называются неориентируемыми. Если вспомнить выражение оператора числа частиц N через осцилляторы, то (6.1.3) можно переписать в виде

$$|\Lambda; ab) = \pm (-1)^{N-N_0} |\Lambda; ba), \quad (6.1.4)$$

где N_0 есть собственное значение N для безмассовых состояний. Здесь мы воспользовались тем, что $N = n$ для осциллятора α_n^i .

Рассмотрим в качестве примера группу $SO(n)$ и будем считать, что оба представления R и \bar{R} совпадают с фундаментальным n -мерным представлением. Присоединенному представлению в этом случае соответствуют антисимметричные матрицы, и, следовательно, безмассовые векторные состояния будут удовлетворять (6.1.3) со знаком минус. В случае бозонных струн $(-1)^N$ равно -1 для безмассовых векторов, поэтому мы должны положить $\varepsilon = 1$; для суперструн $(-1)^N$ равно соответственно $+1$, поэтому там $\varepsilon = -1$. В любом случае, если мы будем называть уровни четными или нечетными в зависимости от того, четно или нечетно значение $\alpha'^2 M^2$ для состояний этих уровней, то струнные состояния четных уровней будут преобразовываться относительно $SO(N)$ как антисимметричные $(n \times n)$ -матрицы, а нечетных уровней — как симметричные. Еще один заслуживающий внимания случай — это группа $USp(n)$ и R, \bar{R} , совпадающие с фундаментальным представлением $Sp(n)$. Здесь присоединенное представление — это симметричная часть $R \times R$, и соответственно мы должны положить $\varepsilon = -1$ для бозонных струн и $\varepsilon = +1$ для суперсимметричных. Квантовые числа четных и нечетных массовых уровней будут теперь равны соответственно симметричной и антисимметричной частям $R \times R$.

Представляется, что двумя только что приведенными примерами исчерпываются фактически все разумные варианты, и вот почему. Как мы уже говорили, чтобы получить самосогласованную калибровочную теорию, необходимо потребовать, чтобы безмассовые векторные частицы принадлежали именно присоединенному представлению некоторой группы G . Обозначим λ_{ab}^i , $i = 1, 2, \dots, \dim G$, антиэрмитовы $(n \times n)$ -матрицы, представляющие алгебру Ли группы G . В общем случае они образуют собственное подмножество множества всех антиэрмитовых матриц. Исключительными случаями, когда в алгебре участвуют все матрицы, будут лишь группы $U(n)$ и $SO(n)$ для комплексных и вещественных матричных элементов соответственно. Если же мы хотим, чтобы калибровочная группа была, скажем, собственной подгруппой в $U(n)$, тогда λ^i не могут составлять всех антиэрмитовых $(n \times n)$ -матриц и возникает естественный вопрос, можно ли ввести самосогласованным образом соответствующие дополнительные ограничения. Однако здесь мы можем легко войти в конфликт с требованиями унитарности. А именно, в произвольной древесной амплитуде имеются безмассовые полюса, и необходимо убедиться, что эти полюса отвечают лишь тем состояниям, которые принадлежат присоеди-

ненному представлению группы G . В обычной теории Янга — Миллса это требование всегда выполнено только потому; что коммутатор $[\lambda^i, \lambda^j]$ есть линейная комбинация λ^k . Причем это всегда верно для любых G и R просто потому, что совокупность всех λ образует соответствующую алгебру. Для суперструны же типа I имеется дополнительное условие, которое и ограничивает возможный выбор как G , так и R .

Чтобы объяснить, каким образом возникает это условие, напомним некоторые общие свойства M -частичной древесной амплитуды для открытой струны, упомянутые в гл. 1. Пусть $A(1, 2, \dots, M)$ отвечает некоторой M -частичной диаграмме рассеяния открытых струн, которые *не несут* никаких групповых квантовых чисел. Эти амплитуды A циклически симметричны относительно перестановок M линий, в некоторых случаях — с точностью до знака. Если групповые квантовые числа частиц описываются матрицами $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_M$, то полная древесная амплитуда задается формулой

$$T(1, 2, \dots, M) = \sum \text{tr}(\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_M) A(1, 2, \dots, M), \quad (6.1.5)$$

где сумма идет по всем $(M-1)!$ циклически неэквивалентным перестановкам внешних линий. Отметим, что мы вовсе не утверждаем, что формулу (6.1.5) надо принимать на веру, но на сегодняшний день никакой другой более или менее последовательной схемы найти не удалось.

Все полюсы примитивной амплитуды $A(1, \dots, M)$ лежат в каналах, отвечающих заданной циклической последовательности внешних линий, а вычеты в этих полюсах обладают некоторыми довольно простыми свойствами факторизации. А именно, в пределе $s \rightarrow m^2$ можно символически записать

$$A(1, \dots, M) \sim \frac{1}{m^2 - s} \sum_X A(1, 2, \dots, P, X) A(X, P+1, \dots, M), \quad (6.1.6)$$

где $s = -(k_1 + k_2 + \dots + k_P)^2$, а X пробегает множество всех состояний спектра с заданной массой m , как это изображено на рис. 6.2, а. Пока что не проводилось доказательства такого поведения, но мы займемся этим в следующей главе. Однако свойство факторизации (6.1.6) представляет собой условие унитарности и, следовательно, должно выполняться, если мы хотим получить осмысленную теорию. Если же теперь мы хотим доказать унитарность в теории, включающей групповые факторы (естественно, предполагая, что унитарность имела место до их включения), то нам необходимо показать что свойство

факторизации (6.1.6) продолжает выполняться и с учетом λ -матриц. Именно отсюда и получаются условия на матрицы λ .

В полной амплитуде $T(1, 2, \dots, M)$ есть еще ряд членов, которые тоже дают вклад типа (6.1.6) в вычет данного полюса X . Эти члены генерируются примитивной амплитудой $A(P, P-1, \dots, 1, P+1, \dots, M)$, что представлено на рис. 6.2, б. Кроме этого, можно взять все M линий в обратном порядке, и

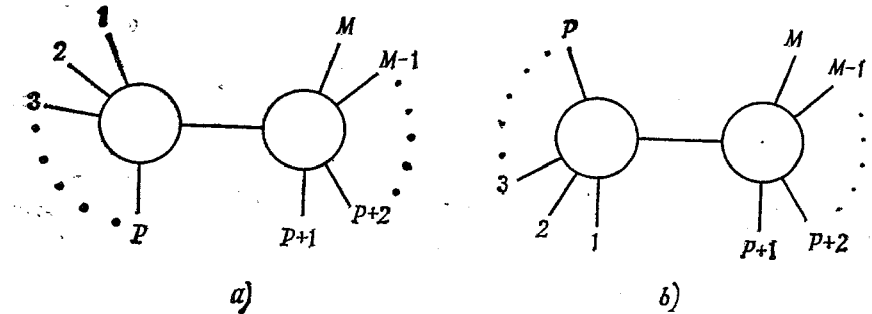


Рис. 6.2. У примитивной амплитуды $A(1, \dots, M)$ есть полюс по инвариантной переменной $S = -(k_1 + k_2 + \dots + k_P)^2$, вычет в котором представим в виде произведения двух других примитивных амплитуд, как это представлено на рис. а). Другая примитивная амплитуда, но имеющая полюс с таким же вычетом, изображена на рис. б).

в итоге, используя (6.1.5), мы получаем для полной суммы вычетов полюса X в выражении T

$$\begin{aligned} & \text{tr}(\lambda_1 \dots \lambda_P \lambda_{P+1} \dots \lambda_M) A(1, \dots, P, X) A(X, P+1, \dots, M) + \\ & + \text{tr}(\lambda_P \dots \lambda_1 \lambda_{P+1} \dots \lambda_M) A(P, \dots, 1, X) A(X, P+1, \dots, M) + \\ & + \text{tr}(\lambda_1 \dots \lambda_P \lambda_M \dots \lambda_{P+1}) A(1, \dots, P, X) A(X, M, \dots, P+1) + \\ & + \text{tr}(\lambda_P \dots \lambda_1 \lambda_M \dots \lambda_{P+1}) A(P, \dots, 1, X) A(X, M, \dots, P+1). \end{aligned} \quad (6.1.7)$$

Для того чтобы сравнить друг с другом эти четыре слагаемых и вывести какие-то ограничения матрицы λ , необходимо как-то связать возникающие A -факторы. А именно, мы примем правило, связывающее выражение вида $A(1, 2, \dots, N)$ с тем, что получается при изменении порядка импульсов на обратный, т. е. с $A(N, \dots, 2, 1)$. Оба они отвечают одной и той же мировой поверхности, но просто рассматриваемой с разных сторон, и поэтому результирующие амплитуды совпадают с точностью до знака, зависящего от выбора ϵ в (6.1.4). Итак,

$$A(1, \dots, N) = \prod_{i=1}^N (\epsilon (-1)^{N_i}) A(N, \dots, 1), \quad (6.1.8)$$

где N_i — квадрат массы i -й струны. Например, для N безмассовых векторных частиц получаем фазу $(-1)^N$.

Предположим теперь, что как всем M внешним линиям, так и промежуточному полюсу X отвечают безмассовые векторные частицы. Тогда, поскольку

$$A(1, \dots, P, X) = (-1)^{P+1} A(X, P, \dots, 1) \quad (6.1.9)$$

и аналогично для других факторов, то сумму всех слагаемых в (6.1.7) можно привести к выражению

$$\begin{aligned} & \text{tr} [(\lambda_1 \dots \lambda_P - (-1)^P \lambda_P \dots \lambda_1) \times \\ & \quad \times (\lambda_{P+1} \dots \lambda_M - (-1)^{M-P} \lambda_M \dots \lambda_{P+1})] \times \\ & \quad \times A(1, \dots, P, X) A(X, P+1, \dots, M). \end{aligned} \quad (6.1.10)$$

Комбинацию, стоящую под знаком следа в этом выражении, надо теперь разложить на два множителя, каждый из которых будет отвечать своему фактору A . Конкретно мы хотим записать

$$\begin{aligned} & \text{tr} [(\lambda_1 \dots \lambda_P - (-1)^P \lambda_P \dots \lambda_1) \times \\ & \quad \times (\lambda_{P+1} \dots \lambda_M - (-1)^{M-P} \lambda_M \dots \lambda_{P+1})] = \\ & = \sum_{\alpha} \text{tr} [(\lambda_1 \dots \lambda_P - (-1)^P \lambda_P \dots \lambda_1) \lambda_{\alpha}] \times \\ & \quad \times \text{tr} [\lambda_{\alpha}^T (\lambda_{P+1} \dots \lambda_M - (-1)^{M-P} \lambda_M \dots \lambda_{P+1})]. \end{aligned} \quad (6.1.11)$$

Это имеет место, если λ_{α} образуют полную систему $(n \times n)$ -матриц с условием нормировки $\text{tr} (\lambda_{\alpha} \lambda_{\beta}^T) = \delta_{\alpha\beta}$. Однако если матрицы вида $\lambda = \lambda_1 \dots \lambda_P - (-1)^P \lambda_P \dots \lambda_1$ образуют лишь некоторое подпространство в пространстве всех матриц размера $n \times n$, то вопрос о выполнении (6.1.11) требует более тонкого анализа. Например, если $\lambda_1, \dots, \lambda_P$ — произвольные вещественные антисимметричные матрицы (отвечающие генераторам группы $SO(n)$), то и рассматриваемые комбинации λ будут антисимметричны, и соответственно матрицы λ_{α} тоже достаточно брать антисимметричными.

Главное требование самосогласованности, вытекающее из условия унитарности, заключается в том, что квантовые числа безмассовых векторных частиц, отвечающих полюсам в амплитуде T , должны соответствовать присоединенному представлению той группы, которую мы ввели для внешних частиц. И вообще всякое промежуточное состояние, отвечающее полюсу в T , должно по своим квантовым числам попадать в спектр внешних частиц. Соответственно и каждый из двух факторов в формуле

для вычета должен описывать амплитуду T для соответствующей половины разрезанной диаграммы.

Условие самосогласованности будет выполнено, если все матрицы вида

$$\lambda = \lambda_1 \dots \lambda_P - (-1)^P \lambda_P \dots \lambda_1 \quad (6.1.12)$$

будут принадлежать к алгебре матриц λ^i . В частности, при $P = 2$ это значит, что $[\lambda_1, \lambda_2]$ принадлежит этой алгебре. Это условно верно просто потому, что λ порождают представление нашей группы симметрии. Напротив, условия, возникающие при $P > 2$, нетривиальны и существенно ограничивают возможности выбора групп и представлений, к которым могут принадлежать λ -матрицы.

6.1.2. Допустимые калибровочные группы и представления

Нетрудно найти общее решение полученных выше условий. Обозначим через L_a линейное пространство антиэрмитовых матриц λ_i , замкнутое относительно операции взятия коммутатора, что мы будем символически записывать как $[\lambda, \lambda] = \lambda$. Кроме того, беря антикоммутаторы, мы можем получить эрмитовы матрицы μ , $\{\lambda, \lambda\} = \mu$; такие матрицы описывают возможные квантовые числа нечетных массовых уровней. Более того, буквально повторяя приведенные выше рассуждения, можно убедиться, что множество всех возможных матриц μ описывается формулой

$$\mu = \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_P + (-1)^P \lambda_P \dots \lambda_2 \lambda_1. \quad (6.1.13)$$

Это множество образует линейное пространство L_h , замкнутое относительно операции антикоммутирования: $\{\mu, \mu\} = \mu$.

Рассмотрим теперь пространство L , образованное всеми матрицами ρ , которые представимы как вещественные линейные комбинации элементов из L_a и L_h , иными словами, пространство матриц вида $\rho = a\mu + b\lambda$ с вещественными коэффициентами a и b . Приведенные выше условия выполняются тогда и только тогда, когда пространство L замкнуто относительно умножения, т. е. $\rho_1 \rho_2 \in L$ для всех $\rho_1, \rho_2 \in L$. Таким образом, не только L_a должно быть алгеброй Ли, но и L обязано быть некоторой алгеброй. Если алгебра L задана, то легко восстановить L_a и L_h как ее эрмитову и антиэрмитову части. Итак, вопрос сводится к тому, какие L допустимы и к каким алгебрам Ли они приводят. Общее решение этой задачи дается теоремой Веддербёрна, однако, прежде чем ее формулировать, рассмотрим, к чему приводит аналогичная теорема в варианте с комплексными коэффициентами. В этом случае теорема утверждает, что

единственными неприводимыми комплексными алгебрами, замкнутыми относительно умножения, являются матричные алгебры групп $GL(n, C)$. Этот результат становится существенным, если в исходной алгебре содержится $i = \sqrt{-1}$. В этом случае антиэрмитовы матрицы λ генерируют алгебру Ли группы $U(n)$. Важно подчеркнуть, что для справедливости теоремы требуется вся $U(n)$ целиком, включая фактор $U(1)$, а не только $SU(n)$.

Если в исходной алгебре i не содержится, то она должна совпадать с вещественной формой $GL(n, C)$. Из той же теоремы Веддербёрна (и из анализа, проведенного применительно к теории струн Маркусом и Сагнотти) мы знаем, что существуют только две такие вещественные формы, при которых L_n оказываются алгебрами Ли. Первая — это $GL(n, R)$, ее антиэрмитова часть дает $SO(n)$ в качестве алгебры L_n . Вторая вещественная форма — это $U^*(2n)$ (вещественная версия $U(2n)$, которая называется некомпактной), и ее антиэрмитова часть дает соответственно $USp(2n)$ (алгебру матриц размера $n \times n$ с кватернионными коэффициентами). В итоге все возможные решения сводятся к $(n \times n)$ -матрицам с вещественными, комплексными или кватернионными элементами. Очевидно, что в каждом из этих случаев мы получаем алгебру матриц, замкнутую относительно умножения.

Из всего этого анализа следует, что метод Чана — Патона охватывает только классические алгебры Ли. Ввести с его помощью исключительные алгебры, такие как E_8 , не представляется возможным. Более того, во всех случаях приходится ограничиваться фундаментальным представлением. Это представление вещественно для $SO(n)$, псевдовещественно для $USp(2n)$ и комплексно для $U(n)$. Таким образом мы получаем неориентированные струны в двух первых случаях и ориентированные струны — во втором.

Существуют, однако, простые аргументы, показывающие, что для суперструн выбор группы $U(n)$ ведет к противоречиям на однопетлевом уровне (собственно анализ диаграмм будет проведен в дальнейшем). Некоторые непланарные однопетлевые диаграммы описывают переходы, при которых концы открытой струны смыкаются и она переходит в замкнутую, о чем уже говорилось в разд. 1.5.6. Поскольку струна с группой $U(n)$ ориентирована, то и возникающая замкнутая струна будет ориентированной. Но, как было показано в разд. 5.3.2, ориентированная замкнутая суперструна обладает $(N=2)$ -суперсимметрией (неориентированная — только $N=1$). Таким образом, в частности, появляется мультиплет супергравитации. Это же касается состояний открытой струны, то они содержат исключительно $(N=1)$ -супермультиплеты. Однако известно, что после-

довательно ввести взаимодействие $(N=2)$ -супергравитации с $(N=1)$ -материей невозможно; следовательно, теория с группой $U(n)$ будет аномальной. Эти рассуждения оставляют нам в качестве допустимых групп любую из $SO(n)$ или $USp(2n)$, но в дальнейшем, привлекая более тонкие аргументы, мы обнаружим, что приемлема лишь группа $SO(32)$.

Интересно отметить, что возможны ситуации, когда калибровочные группы совпадают, а сами теории различны. Например, состояния на четных массовых уровнях в $SO(3)$ - и $USp(2)$ -теориях совпадают, но на нечетных уровнях эрмитовы $GL(3, R)$ -матрицы описывают представления $5+1$, в то время как эрмитовы $GL(1, H)$ -матрицы содержат только синглет. Аналогичным образом возникает различие в парах: $SO(2)$ и $U(1)$, $SO(4)$ и $USp(2) \times USp(2)$, $SO(5)$ и $USp(4)$.

В следующих разделах мы обсудим совсем другой способ введения калибровочных взаимодействий. Мы найдем другой способ включения группы $SO(32)$ и, что существенно, убедимся, что и группа $E_8 \times E_8$ допустима.

6.2. Алгебра токов на мировой поверхности струны

Мы убедились, что на концах открытой струны можно помещать заряды (которые мы называли «кварками»). Вопрос: можно ли придумать еще какое-то место для зарядов? В открытой струне есть только две выделенные точки — это ее концы, в замкнутой струне выделенных точек нет вообще. А это значит, что если мы не размещаем заряды на концах открытой струны, то следует проявить «демократизм» и представить себе, что заряды вообще никак не локализованы, но распределены вдоль всей струны.

Каким образом можно ввести непрерывное распределение заряда? Вернемся к действию для бозонной струны и запишем его в конформной калибровке:

$$S = -\frac{1}{2\pi} \int d^2\sigma \partial_\alpha X_\mu \partial^\alpha X^\mu. \quad (6.2.1)$$

В гл. 4, исследуя возможные обобщения этого действия, мы ввели распределенные по струне фермионные степени свободы ψ^μ . Мы положили, что ψ^μ принадлежат векторному представлению группы $SO(1, 9)$ и не несут никаких дополнительных квантовых чисел. Однако, если мы собираемся ввести группу внутренней симметрии, можно поступить ровно наоборот: ввести фермионы, которые являются лоренцевыми синглетами, но несут какие-то внутренние квантовые числа. Например, выбрав n вещественных майорановских фермионов λ^A , $A = 1, \dots, n$, мы

можем написать

$$S = -\frac{1}{2\pi} \int d^2\sigma (\partial_\alpha X_\mu \partial^\alpha X^\mu - i\bar{\lambda}^A \rho^\alpha \partial_\alpha \lambda^A). \quad (6.2.2)$$

У формулы (6.2.2) есть очевидная симметрия $SO(n)$ по индексу A , но на самом деле ее глобальная симметрия гораздо шире. Если переписать (6.2.2), явно указывая правые и левые моды λ_\pm^A , то мы получим

$$S = -\frac{1}{2\pi} \int d^2\sigma (\partial_\alpha X_\mu \partial^\alpha X^\mu - 2i\lambda_-^A \partial_+ \lambda_-^A - 2i\lambda_+^A \partial_- \lambda_+^A). \quad (6.2.3)$$

Ясно, что действие (6.2.3) инвариантно относительно $SO(n)$ -вращений правых и левых мод по отдельности и обладает, следовательно, глобальной симметрией $SO(n)_L \times SO(n)_R$. При желании мы могли бы вовсе убрать из (6.2.3) правые или левые моды и получить в результате систему, скажем, с n левыми майорановскими фермионами и симметрией $SO(n)_L$.

Естественно спросить, будет ли выражение (6.2.3) осмысленным в теории струн. Вопросы самосогласованности здесь настолько деликатны, что на первый взгляд трудно поверить в разумность такого действия. Однако, хотя на самом деле некоторые детали такой проверки (6.2.3) требуют очень тонкого анализа, нетрудно увидеть, что большинство этих трудностей вполне преодолимо, если не гнаться особенно за строгостью. Ключом к решению нашей задачи оказывается разобранный в разд. 3.2.4 идея бозон-фермионной эквивалентности в двумерии. Возможность бозонировать фермионы означает, что по крайней мере в пределе бесконечного объема два майорановских фермиона в размерности $1+1$ эквивалентны одному вещественному бозону. Правда, в теории струн мы, как правило, имеем дело с $(1+1)$ -мерной квантовой теорией поля, но не в бесконечном объеме, а на конечном интервале или на окружности. Однако, как мы имели возможность убедиться в гл. 3, бозонизация имеет место (при выполнении соответствующих условий) и в этом случае. Итак, мы видим, что при наличии некоторых дополнительных условий действие (6.2.3) отвечает некоторой чисто бозонной теории. Будем считать, что n четно, например, $n = 2d$. Тогда $2d$ майорановских фермионов эквивалентны d вещественным бозонам ϕ^i , $i = 1, \dots, d$, и мы можем переписать (6.2.3) в виде

$$\tilde{S} = -\frac{1}{2\pi} \int d^2\sigma (\partial_\alpha X_\mu \partial^\alpha X^\mu + \partial_\alpha \phi^i \partial^\alpha \phi^i). \quad (6.2.4)$$

В этой формуле уже участвуют только свободные бозоны, $D+d$ штук, в точности как в модели Венециано в конформной калиб-

ровке. Таким образом, мы можем утверждать, что самосогласованность теории может быть достигнута в той или иной степени, если суммарная размерность $D+d$ равна 26, т. е. критической размерности модели Венециано. (Полное решение вопроса зависит, конечно же, от того, в какой степени те требования, которые позволяют отождествить (6.2.4) с (6.2.3), совместны с остальными требованиями теории струн.) Например, если по каким-то причинам мы выбираем $D=10$, то необходимо положить $n=32$; это значит, что вполне резонно стремиться получить из (6.2.4) десятимерную теорию струн с внутренней симметрией $SO(32) \times SO(32)$.

Может возникнуть вопрос, в чем заключается разница между X^μ и ϕ^i в (6.2.4)? Почему, собственно говоря, (6.2.4) не обладает полной лоренцевой симметрией $SO(D+d-1, 1)$, позволяющей переводить друг в друга X^μ и ϕ^i ? Как получается, что у (6.2.4) вместо этого оказывается лоренцева симметрия лишь вида $SO(D-1, 1)$ и внутренняя симметрия $SO(2d) \times SO(2d)$? Действительно, откуда берется в (6.2.4) такая большая группа, как $SO(2d) \times SO(2d)$? Каким образом естественная симметрия $SO(d)$ для системы d свободных бозонов ϕ^i разрастается до $SO(2d) \times SO(2d)$? Ответ на все эти вопросы заключается в том, что, как это ни удивительно, система из d свободных бозонов может обладать симметрией $SO(2d) \times SO(2d)$. Для реализации этой возможности необходимо наложить на нулевые моды этих бозонов в высшей степени специальные дополнительные условия, с которыми мы впервые столкнулись в разд. 3.2.4. Именно эти специальные условия ограничат группу Лоренца до $SO(D-1, 1)$, и в следующем разделе мы существенно проясним все эти вопросы.

Полезно, прежде чем погружаться в исследование (6.2.3) и (6.2.4), взглянуть на них с несколько более абстрактной точки зрения. Например, рассматривая действие (6.2.3), можно естественным образом определить фермионный ток как ток левых частиц (заменяв σ^+ на σ^-):

$$J_+^a(\sigma) = \frac{1}{2\pi} T_{AB}^a \lambda_+^A(\sigma) \lambda_+^B(\sigma). \quad (6.2.5)$$

Чтобы избежать путаницы с фермионными полями, мы обозначили $(n \times n)$ -матричное представление генераторов символом T^a вместо λ^a . Они образуют алгебру

$$[T^a, T^b] = if^{abc} T^c \quad (6.2.6)$$

и соответственно удовлетворяют перестановочным соотношениям

$$[J_+^a(\sigma), J_+^b(\sigma')] = if^{abc} J_+^c(\sigma) \delta(\sigma - \sigma') + \frac{ik}{4\pi} \delta^{ab} \delta'(\sigma - \sigma'). \quad (6.2.7)$$

Первый член возникает стандартным каноническим образом, а что касается второго, называемого швингеровским членом, то он представляет собой c -числовую аномалию, которая может быть вычислена из диаграммы рис. 6.3. Это вычисление очень просто, оно буквально повторяет вычисление аномалии в алгебре Вирасоро в разд. 3.2.2¹⁾.

Алгебра Ли (6.2.7) носит название центрального расширения аффинной алгебры Ли $\widehat{SO}(n)$; центральное расширение означает наличие швингеровского члена. Заметим, что для любой конечномерной алгебры Ли G мы можем определить, следуя формуле (6.2.7), соответствующую аффинную алгебру \mathcal{G} . Вычисляя диаграмму рис. 6.3, мы обнаружим, что если токи (6.2.5)

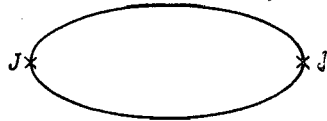


Рис. 6.3. Диаграмма, из которой находится значение c -числовой аномалии в коммутаторе фермионных токов в размерности $1 + 1$.

строятся из одного n -мультиплета фермионов в фундаментальном представлении группы $SO(n)$, то $k = 1$.

Вообще говоря, мы можем ввести свободные фермионы, принадлежащие не фундаментальному, а какому-то другому вещественному представлению R группы $SO(n)^2$. Определенные по формуле (6.2.5) токи будут подчиняться перестановочным соотношениям аффинной алгебры Ли (6.2.7), но с некоторым другим значением k . И действительно, вычисляя k с помощью диаграммы рис. 6.3, где два тока образуют простую петлю, мы получим чисто групповой фактор, равный $\text{tr}_R T^a T^b$, т. е. следу произведения двух генераторов в представлении R . Следовательно, k пропорционально этому следу. Чтобы сформулировать утверждение точно, введем следующие обозначения: T — некий генератор $SO(n)$, а tr_R и tr_F — операция взятия следа соответственно в R представлении и в фундаментальном представлении группы $SO(n)$. Обозначим через k_F значение k для фундаментального представления F (которое является n -компонентным вектором

¹⁾ В частности, при вычислении рис. 6.3 не надо брать никаких интегралов, проще всего работать в координатном представлении, где диаграмме соответствует просто произведение двух фермионных пропагаторов.

²⁾ Мы можем ограничиться рассмотрением только вещественных представлений, поскольку требование эрмитовости (и $SO(n)$ -инвариантности) фермионного действия все равно заставит нас расширить любое комплексное или псевдовещественное представление, добавив к нему соответствующее сопряженное.

по $SO(n)$) и через k_R — его значение для любого другого представления R . Тогда

$$k_R/k_F = \text{tr}_R T^2 / \text{tr}_F T^2. \quad (6.2.8)$$

В формуле (6.2.7) мы выбрали нормировку так, что $k = 1$ в фундаментальном представлении. В зависимости от выбора представления R , необязательно неприводимого, k может принимать любые целые положительные значения¹⁾. Можно получить, например, $k = n$, если считать, что R содержит n «ароматов», т. е. n штук фундаментальных представлений группы $SO(n)$.

Интересно отметить, что вне зависимости от выбора представления в (6.2.5) k всегда будет целым; это свойство имеет чрезвычайно глубокий смысл с точки зрения теории аффинных алгебр Ли. «Хорошие» представления²⁾ появляются у алгебры (6.2.7) только в том случае, если k правильно квантован, и это утверждение верно не только для $\widehat{SO}(n)$, но и для всякой аффинной алгебры Ли \mathcal{G} , основанной на произвольной конечномерной алгебре Ли G . Коэффициент k в (6.2.7) квантуется у любой G , от нее зависит лишь, какие именно будут «кванты». К сожалению, попытка объяснить, почему для «хороших» представлений k обязан квантоваться, увела бы нас слишком далеко в сторону.

В случае группы $SO(n)$ из общей теории следует, что k может быть произвольным неотрицательным целым числом и, более того, система из n свободных фермионов, дающая $k = 1$, является в некотором смысле минимальной или фундаментальной моделью. Представим себе, однако, что мы собираемся рассмотреть другую, например исключительную группу. Собственно говоря, нас будет больше всего интересовать исключительная группа E_8 . Ее свойства частично собраны в приложении 6.А, а частично будут возникать по ходу дела в следующих разделах. Сейчас лишь укажем, что все представления E_8 вещественны и размерность наименьшего нетривиального представления равна 248. Поскольку это 248-мерное представление (которое на самом деле является присоединенным представлением) вещественно, то это значит, что мы можем определить E_8 как

¹⁾ То, что отношение (6.2.8) всегда является целым числом, представляет собой факт жизни в теории групп, и его легко проверить на простых примерах. Есть и исключение: можно получить полуцелое значение при $n = 3$, взяв $SO(3)$ -спинор в количестве двух экземпляров; два экземпляра нужны потому, что один спинор — это псевдовещественный, а не вещественный объект.

²⁾ Технически, «хорошие» представления — это так называемые интегрируемые представления старшего веса. Это почти унитарные представления в гильбертовом пространстве, у которых ограничена снизу энергия, связанная с определяемыми в дальнейшем генераторами алгебры Вирасоро.

группу, действующую в пространстве 248 свободных майорановских $(1+1)$ -мерных фермионов. Это дает минимальное значение k , которое можно получить в результате «прямолинейной» реализации E_8 в терминах свободных фермионов¹⁾.

Такая реализация \widehat{E}_8 на свободных фермионах не дает в отличие от случая $\widehat{SO}(n)$ минимального возможного значения k . В той нормировке, которая дает целочисленные значения k в произвольной теории, для реализации E_8 на 248 свободных фермионах мы получаем $k=30$. Спрашивается: каким же образом построить минимальную теорию с $k=1$?

Ответ на этот вопрос необходим нам для самых что ни на есть практических целей, а вовсе не только для повышения общего культурного уровня. Прежде всего нас интересует алгебра токов (6.2.7) для случая группы E_8 , поскольку если провести аналогию с нашими предыдущими рассуждениями о группах $SO(n)$, то любая система, реализующая эту алгебру токов, — это потенциальная возможность ввести группу E_8 в теорию струн. Те 248 свободных фермионов, из которых устроена наша прямолинейная реализация E_8 , были бы эквивалентны в бесконечном объеме (и даже в конечном, если проявить аккуратность с граничными условиями) 124 вещественным бозонам. Поскольку 124 — это гораздо больше, чем критическая размерность модели Венециано, то невозможно получить вместо 26-мерной модели Венециано теорию в меньшем количестве измерений, но обладающую E_8 -симметрией, реализованной с помощью 124 вещественных бозонов или 248 майорановских фермионов. Необходимо найти способ реализовать E_8 в системе с меньшим числом степеней свободы.

Ключ к решению этой задачи лежит во вводной части этого раздела, там, где мы обсуждали $SO(n)$ -симметрию для четных n , т. е. для $n=2d$. Там мы убедились, что минимальная ($k=1$) теория имеет как вполне банальную реализацию (6.2.3) в терминах n свободных фермионов, так и менее очевидную — (6.2.4), включающую лишь $d=n/2$ свободных бозонов (детали этой конструкции мы пока что не исследовали). Пока объектом нашего внимания являются лишь группы $SO(n)$, несомненно, что формула (6.2.3) оказывается гораздо проще, чем (6.2.4), но, когда перед нами стоит задача включения в теорию струн других групп, таких как исключительные, положение радикально меняется. Оказывается, что для некоторых исключительных групп (а именно для E_6 , E_7 и E_8 , но не для G_2 и F_4) гораздо

¹⁾ Мы употребили здесь слово «прямолинейная», поскольку скоро мы убедимся, что есть еще и непрямолинейный способ реализовать E_8 , который требует лишь 16 фермионов и приводит к значительно меньшему значению k .

легче получить реализацию минимальной алгебры токов с $k=1$, используя именно (6.2.4), а не (6.2.3). Таким образом, одна из наших насущнейших задач — это разобраться во всех тонкостях формулы (6.2.4) для различных групп Ли, помня при этом, что наиболее интересным приложением будет, конечно же, $E_8 \times E_8$. Кроме того, мы увидим, как E_8 описывается на языке фермионов (при $k=1$), для чего, впрочем, тоже потребуются весьма детальное исследование.

Тот факт, что задание на мировой поверхности струны алгебры токов представляет собой весьма многообещающий способ включения внутренних симметрий в теорию струн, можно объяснить и еще одним, совершенно другим способом. А именно, представим себе, что мы построили *какое-то* представление аффинной алгебры Ли (6.2.7). Тогда мы можем определить (например, для замкнутых струн)

$$T_{++}(\sigma) = \frac{\pi^2}{\beta} \sum_a J_+^a(\sigma) J_+^a(\sigma) = 2 \sum L_n e^{-2in\sigma}, \quad (6.2.9)$$

где $\beta = k + (1/2)c_2$, а c_2 — квадратичный оператор Казимира в присоединенном представлении, задаваемый формулой

$$f^{acdf} f^{bcd} = c_2 \delta^{ab}. \quad (6.2.10)$$

Можно проверить, используя алгебру (6.2.7), что эти операторы образуют алгебру Вирасоро:

$$[L_m, L_n] = (m-n) L_{m+n} + \frac{c}{12} (m^3 - m) \delta_{m+n}, \quad (6.2.11)$$

где

$$c = \frac{2k \dim G}{c_2 + 2k}. \quad (6.2.12)$$

Хотя увидеть, что коммутатор (6.2.11) имеет указанную структуру, относительно просто, используя аффинную алгебру Ли (6.2.7) и определение (6.2.9), но, чтобы получить правильные значения коэффициентов, надо как следует позаботиться о регуляризации операторного произведения в (6.2.9). Читатель может самостоятельно попробовать провести проверку в абелевом случае, где c_2 обращается в нуль.

Причина, по которой уравнение (6.2.11) представляется нам столь многообещающим, заключается в том, что алгебре Вирасоро отводится в теории струн чрезвычайно важная роль. Например, квантование k означает, что и параметр c , участвующий в (6.2.11), тоже квантуется; в частности, для группы E_8 (у которой $c_2=60$) минимальному значению $k=1$ соответ-

ствуем $c = 8$, т. е. реализация алгебры токов E_8 с тем же значением аномалии в алгебре Вирасоро, что и восемь свободных бозонов. Отсюда можно предположить, что так же, как группа $SO(2d)$ может быть реализована с помощью лишь d штук свободных бозонов, E_8 может быть реализована с помощью восьми штук. Сейчас эта гипотеза может выглядеть не слишком правдоподобной, но, как мы увидим в дальнейшем, она верна.

6.3. Гетеротическая струна

Прежде чем всерьез углубляться в поиски более общих представлений алгебры токов, рассмотрим возможные применения в теории струн той конструкции, которая была описана в предыдущем разделе. Одну возможность уже представляют формулы (6.2.3) и (6.2.4): n измерений в модели Венециано можно заменить на алгебру правых и левых токов с $c = n$. Основным недостатком этой схемы заключается в том (хотя она и действительно представляет собой способ включения неабелевой калибровочной симметрии в модель Венециано), что она наследует из модели Венециано оба ее основных дефекта: тахион и отсутствие фермионов. Действие (6.2.4) — это и есть модель Венециано (более точно, сектор, отвечающий замкнутой струне Шапиро — Вирасоро, в модели Венециано) с той лишь разницей, что на поля ϕ^i наложены некоторые специальные, пока еще необсуждавшиеся, дополнительные условия.

Совершенно иные возможности открываются, если начать с одной из описанных в предыдущих главах суперструнных теорий и заменить алгеброй правых и левых токов часть пространственно-временных координат. Оказывается, что таким приемом можно ввести в теорию неабелевы симметрии, но только глобальные, а не калибровочные.

И наконец, еще один вариант, предложенный Гроссом, Харви, Мартиником и Ромом, основывается на использовании того факта, что в теории замкнутых струн правые и левые моды существуют по отдельности. Таким образом, открывается возможность представить себе теорию замкнутой струны, в которой левые и правые моды были бы двух совершенно разных типов. Чтобы включить в теорию пространственно-временную суперсимметрию (а это позволяет единым махом обеспечить как отсутствие тахиона, так и присутствие фермионов), надо в качестве правых мод взять моды одной из суперструн, описанных в предыдущих главах. Чтобы включить калибровочные степени свободы, надо в качестве левых мод взять подходящую алгебру токов. Такая гибридизация двух типов мод получила наименование «гетерозиса». Пример конструкции такого типа дает нам

следующее действие:

$$S = -\frac{1}{2\pi} \int d^2\sigma \left(\sum_{\mu=0}^9 (\partial_\alpha X^\mu \partial^\alpha X_\mu - 2i\psi_-^\mu \partial_+ \psi_{\mu-}) - 2i \sum_{A=1}^n \lambda_+^A \partial_- \lambda_+^A \right). \quad (6.3.1)$$

Здесь ψ^μ , $\mu = 0, \dots, 9$, преобразуются по векторному представлению группы Лоренца, а λ^A , $A = 1, \dots, n$, — лоренцевы синглеты, несущие некоторые квантовые числа. Как ψ^μ , так и λ^A — это майорано-вейлевские фермионы.

Правые моды состоят из ψ_-^μ и правой части X^μ . Вместе они в точности составляют набор правых мод для одной из моделей типа II и, следовательно, имеют критическую размерность, равную десяти; вот почему мы положили $D = 10$ в (6.3.1). X^μ и ψ_-^μ связаны преобразованиями суперсимметрии, в точности такими же, как в гл. 4. Конкретная формула имеет вид

$$\delta X^\mu = i\epsilon\psi_-^\mu, \quad \delta\psi_-^\mu = \epsilon\partial_- X^\mu \quad (6.3.2)$$

и отличается от того, что было написано в гл. 4, только тем, что генератор суперсимметрии ϵ имеет компоненту лишь с положительной киральностью. Присутствие этой симметрии требует введения при квантовании коммутирующих духов. Однако теперь их будет в два раза меньше, останутся лишь моды $v_{3/2}$ и $u_{-1/2}$, связанные с генератором суперсимметрии, имеющим положительную киральность. После того как духи введены, мы можем в точности, как в разд. 4.4.3, проверить, что критическая размерность для правого сектора действительно равна десяти. Мы могли бы, конечно, даже не упоминать о духах, а использовать для определения критической размерности правого сектора любой из множества способов, описанных в гл. 4, или можно было бы заменить в (6.3.1) ψ_-^μ на эквивалентную систему конусных переменных по рецепту гл. 5. Заметим, что правый сектор будет обладать и пространственно-временной суперсимметрией, если произвести в нем GSO-проекцию.

С другой стороны, левый сектор составляет левые моды X^μ и поля λ^A . Поскольку никакой левой суперсимметрии нет, то единственными духами будут обычные репараметризационные духи, столько, сколько требуется, чтобы погасить вклад 26 бозонов. Поскольку X^μ в (6.3.1) есть только десять штук, то остаток вирасоровской аномалии должен быть погашен посредством λ^A , а так как два майорановских или один дираковский фермион дают в вирасоровскую аномалию столько же, сколько один бозон (в этом мы убедились, исследуя процедуру бозонизации

фермионов), то в (6.3.1) нам необходимо иметь 32 штуки λ^A . Таким образом, если все λ^A удовлетворяют одним и тем же граничным условиям, то они реализуют симметрию $SO(32)$. При дальнейшем анализе мы обнаружим появление в теории безмассового калибровочного мезона группы $SO(32)$, и, следовательно, у нас действительно имеется калибровочная симметрия $SO(32)$. Существует и другая, более привлекательная возможность, когда не все λ^A удовлетворяют одним и тем же граничным условиям и вместо $SO(32)$ можно получить симметрию $E_8 \times E_8$. В дальнейшем эта возможность тоже будет рассмотрена.

Вместо того чтобы вводить в (6.3.1) 32 экземпляра λ^A , мы могли бы ввести любую алгебру токов с $c = 16$, и это обстоятельство дает нам еще один повод к поискам более общих реализаций алгебры токов.

6.3.1. Теория с группой $SO(32)$

Чтобы избежать, хотя и временно, анализа некоторых трудностей, возникающих при построении алгебры токов $E_8 \times E_8$, мы начнем с детального описания $SO(32)$ -теории, хотя, конечно, для нас гораздо важнее теория $E_8 \times E_8$. Мы опишем спектр низколежащих состояний, который появляется при квантовании действия (6.3.1) в том случае, когда граничные условия для всех 32 λ^A одинаковы, т. е. когда группа симметрии есть $SO(32)$. При этом мы будем относительно кратки, поскольку собственно квантование как правых, так и левых мод уже было проведено в предыдущих главах.

В точности как в RNS-модели, фермионные координаты могут подчиняться либо периодическим, либо антипериодическим граничным условиям. Соответственно можно построить два фокских пространства, и свойства обоих пространств мы будем использовать. Ясно, что если бы мы собирались нарушить $SO(32)$ -симметрию, то число вариантов было бы значительно больше: одни фермионы можно было бы взять периодическими, а другие — антипериодическими. Мы же будем рассматривать $SO(32)$ -симметричный вариант и соответственно ограничимся только двумя указанными секторами, сохраняющими нашу группу.

Периодический сектор, который мы будем обозначать буквой P , представляет собой аналог рамоновского сектора, описанного в гл. 4. Для него

$$\lambda^A(\tau) = \sum_{-\infty}^{\infty} \lambda_n^A e^{-2in\tau}, \quad (6.3.3)$$

где $n \in Z$, и выполняются следующие канонические антиперестановочные соотношения:

$$\{\lambda_m^A, \lambda_n^B\} = \delta^{AB} \delta_{m+n}. \quad (6.3.4)$$

Антипериодический сектор, обозначаемый A , представляет аналог NS-сектора суперструны. Он описывается аналогично в терминах мод λ_r^A , но с $r \in Z + 1/2$ и с антикоммутаторами

$$\{\lambda_r^A, \lambda_s^B\} = \delta^{AB} \delta_{r+s}. \quad (6.3.5)$$

Когда раньше мы исследовали замкнутые струны, то обнаружили, что необходимо вводить два набора операторов Виросоро L_m и \tilde{L}_m , для правых и левых мод по отдельности. При этом мы требовали, чтобы физические состояния удовлетворяли условиям $L_m |\Omega\rangle = \tilde{L}_m |\Omega\rangle$ для $m > 0$, а при $m = 0$ мы требовали

$$(L_0 - a) |\Omega\rangle = (\tilde{L}_0 - \tilde{a}) |\Omega\rangle = 0. \quad (6.3.6)$$

Здесь a (и \tilde{a}) — константа, связанная с нормальным упорядочением, возникающая в процессе замыкания лоренцевой алгебры. L_0 (или \tilde{L}_0) представляются в виде $p^2/8 + N$ (или $p^2/8 + \tilde{N}$), где N и \tilde{N} составлены из осцилляторов. В правом секторе для описания фермионных степеней свободы мы воспользуемся поперечными переменными, описанными в пятой главе. Таким образом, в поперечных модах мы получаем

$$N = \sum_1^{\infty} (\alpha_{-n} \cdot \alpha_n + n S_{-n}^a S_n^a). \quad (6.3.7)$$

(Эквивалентная формула через моды ψ^μ выписана в гл. 4.) С другой стороны, для левых мод

$$\tilde{N} = \sum_1^{\infty} (\tilde{\alpha}_{-n} \cdot \tilde{\alpha}_n + n \lambda_{-n}^A \lambda_n^A) \quad (6.3.8)$$

в секторе P , и аналогично

$$\tilde{N} = \sum_1^{\infty} \tilde{\alpha}_{-n} \cdot \tilde{\alpha}_n + \sum_{1/2}^{\infty} r \lambda_{-r}^A \lambda_r^A \quad (6.3.9)$$

в секторе A .

Теперь нам предстоит определить значения констант a и \tilde{a} в (6.3.6). Для первой константы ответ тривиален: вследствие суперсимметрии $a = 0$, в точности как в гл. 5; что же касается \tilde{a} , то для ее вычисления надо воспользоваться некоторыми результатами из глав 2, 3, 4. А именно, мы можем использовать информацию о вкладе каждой из интересующих нас мод в кон-

станту нормального упорядочения; в гл. 2 мы установили, что каждая физическая бозонная координата вносит по $1/24$, а в конце разд. 3.2.4 вычислили, что фермионные координаты с полуцелыми индексами дают по $1/48$, а с целыми — по $-1/24$. Последний результат был получен несколько иным образом и в гл. 4. Сбрав вместе все эти вклады, мы получаем значения \tilde{a} в двух рассматриваемых секторах:

$$\begin{aligned}\tilde{a}_A &= \frac{8}{24} + \frac{32}{48} = 1, \\ \tilde{a}_P &= \frac{8}{24} - \frac{32}{24} = -1.\end{aligned}\quad (6.3.10)$$

Поскольку $a = 0$, то первое уравнение в (6.3.6) представляет собой условие массовой поверхности

$$p^2 = -8N, \quad (6.3.11)$$

из которого немедленно следует отсутствие тахионов (поскольку оператор N неотрицательный), что, впрочем, и следовало ожидать в суперсимметричной теории. Комбинируя уравнения (6.3.6), мы получаем в секторе A

$$\frac{1}{4}(\text{масса})^2 = N + \tilde{N} - 1, \quad (6.3.12)$$

причем $N = \tilde{N} - 1$, а в секторе P

$$\frac{1}{4}(\text{масса})^2 = N + \tilde{N} + 1, \quad (6.3.13)$$

где $N = \tilde{N} + 1$. Поскольку в соответствии с (6.3.11) для безмассовых состояний $N = 0$, то мы приходим к выводу, что безмассовые состояния в секторе A должны иметь $\tilde{N} = 1$, а в секторе P $\tilde{N} = -1$. Но оператор \tilde{N} — это неотрицательно определенный оператор, а значит, в секторе P нет вообще безмассовых состояний и можно ограничиться рассмотрением только сектора A .

Пространство безмассовых частиц представляет собой тензорное произведение пространства, порожденного правыми модами с $\tilde{N} = 0$, и пространства, порожденного левыми модами с $\tilde{N} = 1$ (в секторе A). Состояния правых мод с $\tilde{N} = 0$ образуют в точности мультиплет $D = 10$ суперсимметричной теории Янга — Миллса, совсем как в случае открытых суперструн в гл. 5, и записываются следующим образом:

$$|i\rangle_R \text{ и } |\dot{a}\rangle_R. \quad (6.3.14)$$

Относительно группы $\text{spin}(8)$ бозоны классифицируются как 8_v , а фермионы — как 8_c . Для левых мод с $\tilde{N} = 1$ имеются две возможности. Во-первых,

$$\tilde{a}_{-1}^i |0\rangle. \quad (6.3.15)$$

Очевидно, что эти состояния образуют $SO(32)$ -синглет. В (6.3.15) имеется восемь поперечных физических состояний, относительно поперечной группы вращений они преобразуются как вектор. Вторая возможность — это

$$\lambda_{-1/2}^A \lambda_{-1/2}^B |0\rangle. \quad (6.3.16)$$

Эти состояния, напротив, образуют синглет по группе Лоренца, а по $SO(32)$ лежат в присоединенном представлении (антисимметричные тензоры второго ранга). Тензорное произведение мультиплета суперсимметричной теории Янга — Миллса (6.3.14) на восемь состояний (6.3.15) дает нам 16×8 состояний мультиплета ($N = 1$)-супергравитации. А именно, в бозонном секторе

$$|i\rangle_R \otimes \tilde{a}_{-1}^i |0\rangle_L \quad (6.3.17)$$

— это 64 состояния, распадающиеся на симметричный бесследовый тензор (гравитон), антисимметричный тензор и скаляр. Аналогично, в фермионном секторе

$$|\dot{a}\rangle_R \otimes \tilde{a}_{-1}^i |0\rangle_L \quad (6.3.18)$$

— это 64 состояния, образованные гравитино $\chi_i^{\dot{a}}$, удовлетворяющим

$$\gamma_{\dot{a}\dot{a}}^i \chi_i^{\dot{a}} = 0, \quad (6.3.19)$$

а потому имеющих 56 независимых компонент, и восьмикомпонентным спинором λ_a , соответствующим свертке $\gamma_{\dot{a}\dot{a}}^i |\dot{a}\rangle_R \otimes \tilde{a}_{-1}^i |0\rangle$. Тензорное произведение состояний (6.3.14) на $32 \cdot 31/2 = 496$ состояний из (6.3.16) дает $16 \cdot 496$ состояний мультиплета суперсимметричной теории Янга — Миллса с группой $SO(32)$. Заметим, что безмассовые состояния с спином единица сами собой попали в присоединенное представление калибровочной группы, хотя а priori это вовсе не следовало из нашей конструкции. Мы же знаем из возникающей в низкоэнергетическом пределе теории Янга — Миллса, что присоединенное представление — это то самое представление, которое необходимо для получения осмысленной теории со взаимодействием.

Выше мы описали два типа граничных условий для фермионов, совместных с $SO(32)$ -симметрией, — сектор P и сектор A .

Сектор P не дал никакого вклада в спектр безмассовых частиц, что может навести на мысль о возможности и вовсе сбросить его со счетов как малоинтересный объект. Однако когда в гл. 9 мы будем исследовать петлевые диаграммы, то станет ясно, что для выполнения условий унитарности сектор P необходим в не меньшей степени, чем сектор A , а чуть ниже, в разд. 6.4, мы предложим альтернативную конструкцию теории, в которой оба сектора автоматически участвуют совместно. Таким образом, чтобы быть готовыми к подобному повороту событий, мы будем учитывать оба (P и A) сектора нашей модели.

При рассмотрении сектора A (сектора с безмассовыми частицами) мы видим, что условие $N = \tilde{N} - 1$ имеет довольно интересное следствие. Собственные значения оператора N , определенного в (6.3.7), могут быть только целыми, а собственные значения \tilde{N} — как целыми, так и полуцелыми. Причем полуцелые значения \tilde{N} получаются тогда, когда на основное состояние действует нечетное количество осцилляторов λ^A . Эти значения не дают никакого вклада в физический спектр, поскольку в правом секторе невозможно найти ни одного состояния, удовлетворяющего равенству $N = \tilde{N} - 1$. Таким образом, условие $N = \tilde{N} - 1$ фактически исключает все состояния, порожденные нечетным числом осцилляторов λ^A , что поразительно напоминает операцию GSO-проектирования, которая, как мы знаем, обеспечивает пространственно-временную суперсимметрию. Естественно ожидать, что GSO-проекция необходима и в секторе P . И действительно, в гл. 9 мы обнаружим, что именно этого требует от нас условие унитарности на однопетлевом уровне. Кроме того, мы убедимся, что GSO-подобное проектирование автоматически возникает (как в P , так и в A секторе) в альтернативной конструкции разд. 6.4. В секторе P условие GSO-подобного проектирования можно сформулировать, потребовав, чтобы физические состояния отвечали собственному значению $+1$ оператора $(-1)^F$, который антикоммутирует со всеми λ^A . Этот оператор равен

$$(-1)^F = \bar{\lambda}_0 (-1) \prod_1^{\infty} \lambda_{-n}^A \lambda_n^A, \quad (6.3.20)$$

где

$$\bar{\lambda}_0 = \lambda_0^1 \lambda_0^2 \dots \lambda_0^{32} \quad (6.3.21)$$

— произведение фермионных нулевых мод.

Рассмотрим теперь спектр первого возбужденного уровня. Состояния на этом уровне можно порождать двумя разными способами. Если для описания левых мод используется сектор A , то необходимо взять $N = 1$ и $\tilde{N} = 2$, а если сектор P , то

$N = 1$, $\tilde{N} = 0$. Что же касается правого сектора, то в любом случае он будет представлен мультиплетом $N = 1$ открытой суперструны, который, как мы убедились в гл. 5, соответствует супермультиплету $D = 10$, разлагающемуся по группе $\text{spin}(9)$ как $(44 + 84)_B + 128_F$. Его состояния будут тензорно умножаться на состояния, порожденные осцилляторами левого сектора. Вот все возможные состояния в секторе A с $\tilde{N} = 2$:

$$\begin{aligned} & \alpha_{-2}^i |0\rangle, \quad \alpha_{-1}^i \alpha_{-1}^j |0\rangle, \quad \alpha_{-1}^i \lambda_{-1/2}^A \lambda_{-1/2}^B |0\rangle, \\ & \lambda_{-1/2}^A \lambda_{-3/2}^B |0\rangle, \quad \lambda_{-1/2}^A \lambda_{-1/2}^B \lambda_{-1/2}^C \lambda_{-1/2}^D |0\rangle. \end{aligned} \quad (6.3.22)$$

Единственное допустимое состояние с $\tilde{N} = 0$ в секторе P — это спинор $|a\rangle$ группы $\text{spin}(32)$, удовлетворяющий GSO-подобному условию $\bar{\lambda}_0 |a\rangle = |a\rangle$ (его аналог в пространственно-временном контексте — условие Вейля). Размерность этого представления равна 2^{15} , что само по себе число немалое, а вместе секторы A и P дают 73 764 состояния! Умножив тензорно этот набор на 256 возбуждений правого сектора, мы получим в итоге 18 883 584 состояния на первом возбужденном уровне гетеротической струны. Поскольку преобразования суперсимметрии действуют лишь в правом секторе, то сама конструкция гарантирует нам, что эти состояния образуют супермультиплет. Аналогично можно утверждать, что они образуют некий мультиплет и по группе $\text{spin}(32)$, поскольку эта группа действует лишь на состоянии левого сектора.

Как мы показали в приложении 5.A, все представления группы $\text{spin}(2n)$ разбиваются на четыре класса эквивалентности. В описанной выше конструкции состояния сектора A всегда содержат четное число λ -осцилляторов, и, следовательно, им отвечают тензорные представления, причем с тензорами лишь четного ранга. Все такие представления принадлежат к тому же классу эквивалентности, что и присоединенное представление. В секторе P на первом возбужденном уровне мы получили одно из двух фундаментальных спинорных представлений. Тот факт, что все остальные допустимые состояния можно породить, действуя лишь четным числом λ -мод (чтобы обеспечить $(-1)^F = 1$), означает, что и все остальные состояния в этом секторе, возникающие на высших массовых уровнях, будут принадлежать к тому же классу эквивалентности. В итоге мы видим, что в полный спектр нашей теории входят лишь два из четырех возможных классов эквивалентности представлений группы $\text{spin}(32)$. Именно эта ситуация имеется в виду, когда говорится, что истинная группа симметрии теории — это $\text{spin}(32)/Z_2$, а не, скажем, $\text{spin}(32)$ или $SO(32)$.

6.3.2. Теория $E_8 \times E_8$

Итак, мы описали основные элементы конструкции гетеротических струн. Физическое пространство представлено в виде тензорного произведения двух секторов, причем моды правого сектора оказались ответственными за суперсимметрию, а моды левого — за калибровочную инвариантность. При этом суперсимметрия обеспечила отсутствие тахионов. Теперь перед нами стоит следующая задача: понять, каким образом можно распорядиться этой структурой, чтобы получить вместо $SO(32)$ более интересную и несколько непривычную калибровочную группу — $E_8 \times E_8$.

Строя теорию $\text{spin}(32)/Z_2$, мы приписывали всем 32 компонентам поля λ^A одни и те же граничные условия, либо A , либо P , руководствуясь при этом заботой о сохранении симметрии. Если же теперь мы решим, что $SO(32)$ можно нарушать, то это ограничение снимется, и мы сможем часть λ^A подчинить одним граничным условиям, а остаток — другим. На первый взгляд здесь возникает просто пугающее количество возможностей и, более того, представляется, что все они приводят к потере симметрии в той или иной степени. Однако теперь мы покажем, что большая часть этих вариантов несовместима с условием $N = \bar{N} - 1$, но все же одна, и довольно привлекательная, возможность существует. Причем никакой потери симметрии при этом реально не происходит, хотя часть симметрии $\text{spin}(32)/Z_2$ действительно пропадает, но эти потери компенсируются новым, совершенно неожиданным образом. Конкретнее, мы получим группу симметрии $E_8 \times E_8$, которая в некотором смысле столь же велика, как и $SO(32)$ (обе имеют по 496 генераторов), но гораздо более интересна.

Представим себе, что мы строим теорию с некоторой группой, меньшей чем $\text{spin}(32)$, например $\text{spin}(n) \times \text{spin}(32 - n)$. Естественно, что мы разобьем 32 левых фермиона на две группы по n и $32 - n$ штук соответственно. Если ожидаемая калибровочная симметрия должна быть всего лишь $SO(n) \times SO(32 - n)$, то нет никаких оснований подчинять обе группы одним и тем же граничным условиям и мы можем независимо помещать каждую из них либо в сектор P , либо в сектор A . В результате возникают четыре комбинированных сектора, которые мы обозначим как AA , AP , PA и PP , где первая метка указывает граничные условия для n компонент λ , а вторая — для оставшихся $32 - n$ компонент. Соответственно у нас будет и четыре различных значения для константы нормального упорядочения \bar{a} , входящей в формулу $N = \bar{N} - \bar{a}$. Вычислить эти значения можно по правилам, описанным в разд. 6.3.1. Если вспомнить, что

вклад одного бозона в эту константу равен $+1/24$, одного периодического фермиона $-1/24$ и одного антипериодического фермиона $+1/48$, то мы получим

$$\bar{a}_{AA} = \frac{8}{24} + \frac{n}{48} + \frac{32-n}{48} = 1, \quad (6.3.23)$$

$$\bar{a}_{AP} = \frac{8}{24} + \frac{n}{48} - \frac{32-n}{24} = \frac{n}{16} - 1, \quad (6.3.24)$$

$$\bar{a}_{PA} = \frac{8}{24} + \frac{32-n}{48} - \frac{n}{24} = 1 - \frac{n}{16}, \quad (6.3.25)$$

$$\bar{a}_{PP} = \frac{8}{24} - \frac{n}{24} - \frac{32-n}{24} = -1. \quad (6.3.26)$$

Эти формулы начинают работать, как только мы вспомним, что N может принимать лишь целые значения. Значения \bar{N} в секторе P тоже целые, а в секторе A они целые для состояний с четным числом фермионов мировой поверхности и полуцелые для остальных состояний. Если n не делится на восемь, то физических состояний в секторах AP и PA нет вообще, и если оба этих сектора отбросить, т. е. оставить только секторы AA и PP , в которых все 32 фермиона λ^A имеют одинаковые граничные условия, то мы вернемся к только что рассмотренной теории $\text{spin}(32)/Z_2$. Для n , кратных восьми, есть, в сущности, только три возможности: (i) $n = 32$ или 0, (ii) $n = 16$, (iii) $n = 8$ или 24. В случаях (i) и (ii) мы получаем для всех четырех \bar{a} целые значения, а в случае (iii) значения \bar{a}_{AP} и \bar{a}_{PA} оказываются полуцелыми. В случае (i) мы опять получаем в точности теорию $\text{spin}(32)/Z_2$; в случае (ii) — теорию с группой $\text{spin}(16) \times \text{spin}(16)$, а случай (iii) может привести к теории $\text{spin}(24) \times \text{spin}(8)$. Самым интересным оказывается вариант (ii), который мы и будем в дальнейшем рассматривать. Что же касается случая (iii), то эта теория страдает от разнообразных однопетлевых аномалий, и ею мы вообще не будем заниматься.

Итак, в случае (ii) мы можем независимо назначать граничные условия либо типа A , либо типа P для каждой из 16 координат λ независимо. Соответствующая алгебра токов, как мы уже говорили, будет иметь вид алгебры токов для теории $\text{spin}(16) \times \text{spin}(16)$, и это, собственно говоря, и есть вся симметрия, на которую мы имели основания рассчитывать. Калибровочные мезоны для группы $\text{spin}(16) \times \text{spin}(16)$ появляются в секторе AA описанной выше конструкции. Поскольку $\bar{a} = 1$ в секторе AA , то безмассовые левые состояния порождаются (в точности как в теории $\text{spin}(32)/Z_2$) действием пары осцилляторов $\lambda_{-1/2}^A$ на основное состояние, причем каждый осцилля-

тор вносит по $+1/R$ в собственное значение \tilde{N} . Возникающие состояния имеют вид

$$\lambda_{-1/2}^A \lambda_{-1/2}^B |\Omega\rangle. \quad (6.3.27)$$

По группе $\text{spin}(16) \times \text{spin}(16)$ они классифицируются так:

$$\begin{aligned} (120, 1) & \text{ для } A, B = 1, \dots, 16, \\ (1, 120) & \text{ для } A, B = 17, \dots, 32, \\ (16, 16) & \text{ для } A = 1, \dots, 16, B = 17, \dots, 32. \end{aligned} \quad (6.3.28)$$

Здесь **16** и **120** обозначают соответственно векторное и присоединенное представления группы $SO(16)$. Если собрать вместе все эти 496 состояний с указанным выше содержанием по группе $\text{spin}(16) \times \text{spin}(16)$, то они образуют присоединенное представление для $\text{spin}(32)$, и возникает неприятная мысль: а не открываем ли мы еще одну теорию с калибровочной группой $\text{spin}(32)$? Однако именно здесь нас поджидает приятный сюрприз. Поскольку и в AP -, и в PA -секторах константы нормального упорядочения равны нулю, то из этих секторов появляются дополнительные безмассовые состояния! Действительно, безмассовые левые состояния в обоих случаях — это состояния с $\tilde{N} = 0$. В результате квантования фермионных нулевых мод все состояния в секторе PA (или AP) станут преобразовываться как спиноры по первой (или второй) группе $\text{spin}(16)$, в точности так, как это случилось для рамоновского сектора в гл. 4. Итак, если обозначить два спинорных представления группы $\text{spin}(16)$ как 128 и $128'$, то безмассовые левые состояния в секторах PA и AP примут следующий вид:

$$\begin{aligned} PA: & (128, 1) \oplus (128', 1), \\ AP: & (1, 128) \oplus (1, 128'). \end{aligned} \quad (6.3.29)$$

Однако когда левые безмассовые состояния из (6.3.28) и (6.3.29) тензорно умножаются на безмассовые состояния из правого сектора, то они породят суперсимметричные янг-миллсовские мультиплеты, и если мы действительно ожидаем получить осмысленную теорию, то они должны образовывать алгебру Ли. Однако такой алгебры Ли, которая бы имела по группе $\text{spin}(16) \times \text{spin}(16)$ такой состав, как этого требуют формулы (6.3.28) и (6.3.29), в природе не существует, и единственный выход — это найти опять какое-то правило проектирования, которое позволит исключить лишние состояния.

Необходимая нам проекция представляет собой вариант проекции GSO. Заметим, однако, что когда 32 фермиона на мировой поверхности разбиты на две группы по 16 штук, а именно

в такой ситуации мы и находимся, то появляются два возможных кандидата на роль оператора $(-1)^F$, который используется в GSO-проекции. Мы можем определить один оператор $(-1)^{F_1}$, который будет антикоммутировать с первыми шестнадцатью осцилляторами λ^A и коммутировать с остальными, и второй оператор $(-1)^{F_2}$ с прямо противоположными свойствами. Тогда GSO-подобная проекция, которая выделит нам из (6.3.28) и (6.3.29) алгебру Ли, сведется к тому, что мы оставим те и только те состояния, которые инвариантны как относительно $(-1)^{F_1}$, так и относительно $(-1)^{F_2}$. Если мы постулируем, что основное состояние $|0\rangle_L$ в секторе AA четно относительно обоих операторов ($(-1)^{F_1}$ и $(-1)^{F_2}$), то нетрудно увидеть, какие именно состояния в (6.3.29) будут удовлетворять условию GSO-подобной проекции. Интересующие нас состояния должны быть просто порождены действием $|0\rangle_L$ двух фермионов, принадлежащих к одной и той же группе, либо к первым $16\lambda^A$, либо ко вторым, и в итоге выживут состояния, преобразующиеся как

$$(120, 1) \oplus (1, 120). \quad (6.3.30)$$

Что же касается (6.3.29), то мультиплеты каждой пары, и в AP -, и в PA -секторе, будут иметь противоположные собственные значения оператора $(-1)^F$, и, следовательно, из каждой пары будет выживать по одному мультиплету; какой именно мультиплет останется — это роли не играет, поскольку различие между представлениями 128 и $128'$ группы $\text{spin}(16)$ — исключительно вопрос соглашения. Фиксировав некое соглашение, мы можем утверждать, что состояния из (6.3.29), остающиеся после проектирования, преобразуются как

$$(128, 1) \oplus (1, 128). \quad (6.3.31)$$

В приложении 6.A показано, что сумма представлений $120 \oplus 128$ группы $\text{spin}(16)$ образует алгебру Ли исключительной группы E_8 , а значит, вместе наборы (6.3.30) и (6.3.31) отвечают группе $E_8 \times E_8$. В гл. 9 мы увидим, что введенная нами GSO-подобная проекция вытекает из требования унитарности, но пока что удовлетворимся тем, что (хотя мы не смогли совсем устранить (6.3.29)) это единственный способ спроектировать (6.3.28) и (6.3.29) так, чтобы получить в результате алгебру Ли.

В том виде, в каком она сейчас представлена, наша теория обладает очевидной алгеброй токов с группой $\text{spin}(16) \times \text{spin}(16)$, и нигде не видно, что на самом деле это группа $E_8 \times E_8$. Однако, если наша теория действительно имеет смысл, такая алгебра обязана существовать! Действительно, наличие безмассовых калибровочных бозонов группы $E_8 \times E_8$ означает,

что в теории имеется симметрия $E_8 \times E_8$, а любая теория с такой симметрией, имеющая алгебру токов $\text{spin}(16) \times \text{spin}(16)$, должна иметь и алгебру токов $E_8 \times E_8$. Однако явно построить дополнительные сохраняющиеся токи для расширенной группы $E_8 \times E_8$ довольно трудно, и лишь в конце разд. 7.3 мы предъявим соответствующую конструкцию. Далее в этой главе мы предложим альтернативный способ построения теории, где возникновение алгебры токов $E_8 \times E_8$ будет продемонстрировано явно.

На первом возбужденном уровне имеется колоссальное количество допустимых состояний, причем все они группируются в мультиплеты $E_8 \times E_8$. 256 правых мод с $N=1$ могут тензорно умножаться на состояния $|a; b\rangle$ из сектора PP с $\tilde{N}=0$, на AP -состояния с $\tilde{N}=1$

$$\alpha_{-1}^i |0; a\rangle, \lambda_{-1/2}^A \lambda_{-1/2}^B |0; a\rangle, \tilde{\lambda}_{-1}^A |0; \dot{a}\rangle \quad (6.3.32)$$

или на PA -состояния

$$\alpha_{-1}^i |a; 0\rangle, \tilde{\lambda}_{-1/2}^A \tilde{\lambda}_{-1/2}^B |a; 0\rangle, \lambda_{-1}^A |\dot{a}; 0\rangle. \quad (6.3.33)$$

Точечные спинорные индексы отмечают спиноры противоположной киральности. Иными словами, $\tilde{\psi}|a\rangle = |a\rangle$, в то время как $\tilde{\psi}|\dot{a}\rangle = -|\dot{a}\rangle$. И наконец, необходимо включить AA -состояния с $\tilde{N}=2$:

$$\begin{aligned} \alpha_{-2}^i |0\rangle, \alpha_{-1}^i \alpha_{-1}^j |0\rangle, \alpha_{-1}^i \lambda_{-1/2}^A \lambda_{-1/2}^B |0\rangle, \alpha_{-1}^i \tilde{\lambda}_{-1/2}^A \tilde{\lambda}_{-1/2}^B |0\rangle, \\ \lambda_{-1/2}^A \lambda_{-1/2}^B \lambda_{-1/2}^C \lambda_{-1/2}^D |0\rangle, \tilde{\lambda}_{-1/2}^A \tilde{\lambda}_{-1/2}^B \tilde{\lambda}_{-1/2}^C \tilde{\lambda}_{-1/2}^D |0\rangle, \\ \lambda_{-1/2}^A \lambda_{-3/2}^B |0\rangle, \tilde{\lambda}_{-1/2}^A \tilde{\lambda}_{-3/2}^B |0\rangle, \lambda_{-1/2}^A \lambda_{-1/2}^B \tilde{\lambda}_{-1/2}^C \tilde{\lambda}_{-1/2}^D |0\rangle. \end{aligned} \quad (6.3.34)$$

Все вместе это дает 73 764 моды, в точности как в теории с группой $\text{spin}(32)/Z_2$. Несколько позже мы покажем, что и число частиц на каждом массовом уровне в обеих теориях гетеротической струны совпадает.

6.4. Компактификация на торы

Простота рассмотренной нами фермионной конструкции алгебры токов является ее несомненным достоинством, но, к сожалению, есть в ней и существенные недостатки. Конструкция $E_8 \times E_8$ мультиплета выглядит несколько искусственно, а доказательство симметрии $E_8 \times E_8$ неполно (недостающие ключевые моменты этого доказательства будут объяснены в конце разд. 7.3). Теперь же мы приступаем к обсуждению «бозонной»

реализации алгебры токов, которая хотя и требует некоторой дополнительной подготовки, но открывает перед нами гораздо более простой путь к достижению симметрии E_8 .

Напомним, что действию (6.3.1) отвечает теория, имеющая нетривиальную алгебру токов в левом секторе. Однако сейчас мы начнем наше обсуждение бозонной реализации алгебры токов с теории (фактически с действием (6.2.4)), в которой такая алгебра имеется как в правом, так и в левом секторах. Подобный выбор продиктован тем обстоятельством, что некоторые из получаемых нами формул имеют и более широкое приложение к вопросу о компактификации в теории струн, и, кроме того, часть важных для нас структур гораздо проще осознать, отталкиваясь от лево-право симметричной теории. Итак, мы начнем с рассмотрения модели Венециано, но не в M^{26} (26-мерное пространство Минковского), а в $M^{25} \times S^1$, где S^1 обозначает окружность. Такой выбор представляет собой частный случай «компактификации» из 26 измерений в $26-d$. Мы будем стремиться к тому, чтобы рассмотреть d торических бозонов как координаты ϕ^i в (6.2.4) и показать, что при правильном выборе способа описания действительно возникает неабелева группа симметрии.

После того как этот предварительный этап будет пройден, мы перейдем к собственно интересующей нас задаче: к бозонизованному описанию гетеротической струны. В этой конструкции 32 координаты левых фермионов заменятся на 16 бозонных координат. Вместе с десятью левыми бозонами десятимерной струны они составят ровно 26 координат, на которые можно смотреть как на 26 свободных бозонов модели Венециано. С другой стороны, правый сектор составит суперсимметричные моды: 10 бозонов и (в RNS-подходе) 10 фермионов, в точности как это было в разд. 6.3. Следовательно, при таком описании на гетеротическую струну можно смотреть как на гибрид левой бозонной струны с правой фермионной струной, где 16 лишних бозонных координат левого сектора компактифицируются на некоторый 16-мерный тор, порождая при этом симметрию $E_8 \times E_8$ или $SO(32)$.

В рамках этой конструкции проще понять причину возникновения симметрии $E_8 \times E_8$, чем в фермионной картине. Кроме того, в ней содержатся первые намеки на то, почему некоторые построения предыдущего раздела играют особую роль. В частности, мы обнаружим, что две построенные нами суперсимметричные теории соответствуют двум единственно возможным четным автодуальным решеткам в 16 измерениях. Хотя в рамках обсуждения, проводимого в настоящей главе, все эти свойства выглядят не более чем некоторым курьезом, позднее,

в гл. 9, мы убедимся, что они имеют первостепенную важность в вопросе о самосогласованности однопетлевых диаграмм.

6.4.1. Компактификация на окружность

Начнем с простейшего примера, демонстрирующего, как возникает неабелева симметрия при компактификации на тор. Рассмотрим бозонную замкнутую струну в $D = 26$ и предположим, что одно из ее пространственных измерений компактифицировано в окружность. Для соответствующей координаты мы положим $x \equiv x + 2\pi Rn$, где R — радиус окружности, а n — произвольное целое число. Наиболее общая конфигурация, удовлетворяющая двумерному волновому уравнению и граничным условиям замкнутой струны, имеет вид

$$X(\sigma, \tau) = x + p\tau + 2L\sigma + \frac{i}{2} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} [\alpha_n e^{-2in(\tau-\sigma)} + \tilde{\alpha}_n e^{-2in(\tau+\sigma)}], \quad (6.4.1)$$

где

$$p = \frac{m}{R}, \quad L = nR. \quad (6.4.2)$$

Целое число m нумерует разрешенные собственные значения импульса, оно должно быть целым, чтобы квантовомеханическая волновая функция e^{ipx} была однозначна (инвариантна относительно $x \rightarrow x + 2\pi R$). Число n указывает, сколько раз струна обернулась вокруг окружности. Когда это «число намотки» n отлично от нуля, $X(\sigma, \tau)$ описывает солитонное струнное состояние. У таких состояний нет никакого аналога в некомпактифицированном случае, поскольку при $R \rightarrow \infty$ их энергия неограниченно растет. Ясно, что подобные состояния существуют всегда, когда топология пространства допускает существование нестягиваемых замкнутых кривых, т. е. когда его фундаментальная группа π_1 отлична от нуля.

Разложение по модам (6.4.1) можно представить в виде суммы правой и левой волн:

$$X(\sigma, \tau) = X_R(\tau - \sigma) + X_L(\tau + \sigma), \quad (6.4.3)$$

$$X_R(\tau - \sigma) = x_R + \left(\frac{p}{2} - L\right)(\tau - \sigma) + \frac{i}{2} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \alpha_n e^{-2in(\tau-\sigma)}, \quad (6.4.4)$$

$$X_L(\tau + \sigma) = x_L + \left(\frac{p}{2} + L\right)(\tau + \sigma) + \frac{i}{2} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \tilde{\alpha}_n e^{-2in(\tau+\sigma)}. \quad (6.4.5)$$

При этом часть условий Вирасоро $T_{++} = T_{--} = 0$, соответствующая нулевым частотам, запишется в виде $L_0 = \tilde{L}_0 = 0$, где

$$\begin{aligned} L_0 &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} p - L \right)^2 + N + (p_\mu)^2/8, \\ \tilde{L}_0 &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} p + L \right)^2 + \tilde{N} + (p_\mu)^2/8. \end{aligned} \quad (6.4.6)$$

Отсюда следует, что

$$\frac{1}{4} (\text{масса})^2 = N + \tilde{N} - 2 + \frac{m^2}{4R^2} + n^2 R^2 \quad (6.4.7)$$

и

$$N - \tilde{N} = pL = mn, \quad (6.4.8)$$

где

$$N = \sum (\alpha_{-n}^\mu \alpha_{n\mu} + \alpha_{-n} \alpha_n), \quad (6.4.9)$$

$$\tilde{N} = \sum (-\tilde{\alpha}_{-n}^\mu \tilde{\alpha}_{n\mu} + \tilde{\alpha}_{-n} \tilde{\alpha}_n). \quad (6.4.10)$$

Два последних члена в массовой формуле (6.4.7) — это вклад внутреннего импульса и энергии намотки в 25-мерную массу. В формулах для N и \tilde{N} , α_n^μ и $\tilde{\alpha}_n^\mu$ относятся к первым 25 измерениям, а α_n и $\tilde{\alpha}_n$ — к компактифицированному 26-му. Поскольку сдвиг σ на некое σ_0 генерируется унитарным оператором

$$U(\sigma_0) = \exp[2i(N - \tilde{N} - pL)\sigma_0], \quad (6.4.11)$$

то из уравнения для $N - \tilde{N}$ следует, что физика не зависит от выбора начала отсчета по координате σ .

Обозначим $|m, n\rangle$ основное состояние в фоковском пространстве, имеющее внутренний импульс m/R и собственное значение числа намотки, равное n ; при этом 25-вектор импульса p^μ явно не указан. Построим теперь безмассовые векторные состояния. Два состояния можно представить в виде

$$(\alpha_{-1}^\mu \tilde{\alpha}_{-1} \pm \alpha_{-1} \tilde{\alpha}_{-1}^\mu) |0; 0\rangle, \quad (6.4.12)$$

поскольку у этих состояний $N = \tilde{N} = 1$ и $p = L = 0$. Если мы считаем, что струна ориентированная, то ее безмассовый спектр в $D = 26$ содержит гравитон $g_{\mu\nu}$, антисимметричный тензор $B_{\mu\nu}$ и скаляр, и оба выписанных вектора появляются из разложения $g_{\mu\nu}$ и $B_{\mu\nu}$ относительно 25-мерной группы Лоренца. Если струна неориентирована, то в спектре нет поля $B_{\mu\nu}$, и соответственно лишь симметричная комбинация в (6.4.12) будет физической.

Можно построить безмассовые векторы и другим способом: взыв состояния с p , $L \neq 0$. Для нулевой массы условие $L_0 = \tilde{L}_0 = 1$ дает

$$2N - 2 + \left(\frac{p}{2} - L\right)^2 = 0, \quad (6.4.13)$$

$$2\tilde{N} - 2 + \left(\frac{p}{2} + L\right)^2 = 0. \quad (6.4.14)$$

При $L = p/2$ и $p^2 = 2$ у этих уравнений есть решение $N = 1$ и $\tilde{N} = 0$. Поскольку $pL = mn = 1$, то отсюда с необходимостью следует $m = n = \pm 1$, что возможно только при $R^2 = 1/2 = \alpha'$. Таким образом, для этого специального значения радиуса существуют еще четыре безмассовых вектора следующего вида:

$$\alpha_{-1}^{\mu} | \pm 1, \pm 1 \rangle, \quad \tilde{\alpha}_{-1}^{\mu} | \pm 1, \mp 1 \rangle. \quad (6.4.15)$$

Заметим, что из требований физической самосогласованности следует, что безмассовые векторы должны взаимодействовать с сохраняющимися токами, а это значит, что при только что найденном значении радиуса, когда появляются дополнительные безмассовые векторы, теория должна обладать дополнительной калибровочной симметрией. В этой гипотетической «большой» группе есть очевидная подгруппа $U(1)_L \times U(1)_R$, которая генерируется теми безмассовыми бозонами, которые есть в теории вне зависимости от значения радиуса, причем соответствующие квантовые числа суть m и n . Из счета состояний и устройства квантовых чисел группы $U(1)_L \times U(1)_R$ видно, что большая калибровочная группа, возникающая при специальном выборе радиуса, есть $SU(2)_L \times SU(2)_R$.

Нетрудно увидеть, каким образом собираются в $(SU(2) \times SU(2))$ -мультиплеты некоторые из низколежащих состояний. Например, есть девять состояний, отвечающих безмассовым скалярам:

$$\begin{aligned} \alpha_{-1} \tilde{\alpha}_{-1} | 0, 0 \rangle, \quad | \pm 2, 0 \rangle, \quad | 0, \pm 2 \rangle, \\ \alpha_{-1} | \pm 1, \pm 1 \rangle, \quad \tilde{\alpha}_{-1} | \pm 1, \mp 1 \rangle, \end{aligned} \quad (6.4.16)$$

которые образуют представление (3, 3) группы $SU(2) \times SU(2)$.

Для неориентированных замкнутых струн вместо симметрии $SU(2)_L \times SU(2)_R$ будет возникать только лишь диагональная группа $SU(2)$. Соответственно из девяти скаляров, перечисленных в (6.4.16), останется только шесть, распадающихся на (1 + 5) по диагональной группе $SU(2)$.

6.4.2. Фермионизация

Появление расширенной калибровочной симметрии при некоторых специальных значениях радиуса представляется

довольно удивительным. Однако уже не первый раз мы сталкиваемся с тем фактом, что стоит превратить скалярное поле в угловую переменную с «правильным» периодом, как начинают происходить неожиданности. Обсуждая бозонизацию фермионов в гл. 3, мы уже видели, что для правильного осуществления такой процедуры в конечном объеме необходимо на роль бозонов взять скалярные поля, отвечающие определенному радиусу.

Оказывается, что между двумя этими явлениями существует прямая связь, причем эта связь позволяет легко объяснить, откуда при удачном выборе радиуса появляется дополнительная калибровочная симметрия. Рассмотрим, например, левый сектор для $SU(2)_L \times SU(2)_R$. Предположим, что нам желательно расширить симметрию от $SU(2)_L$ до $SO(4)_L$. Нетривиальная связь возникает из-за того, что группа $SO(4)_L$ изоморфна произведению $SU(2)_L \times SU(2)'_L$ двух левых групп $SU(2)$. Действуя как в разд. 6.3, мы можем реализовать группу $SO(4)_L$ с помощью четырех левых фермионов:

$$S = \frac{i}{\pi} \int d^2\sigma \sum_{i=1}^4 \psi_+^i \partial_- \psi_+^i. \quad (6.4.17)$$

С другой стороны, эти фермионы можно бозонизовать и описывать парой левых скалярных полей φ_1^+ и φ_2^+ , удовлетворяющих уравнениям

$$\partial_+ \varphi_1^+ = \psi_1^+ \psi_2^+, \quad \partial_+ \varphi_2^+ = \psi_3^+ \psi_4^+, \quad (6.4.18)$$

причем, следуя результатам гл. 3, мы должны считать как φ_1^+ , так и φ_2^+ угловыми переменными с определенным периодом.

Теперь заметим, что токи $\psi_1^+ \psi_2^+$ и $\psi_3^+ \psi_4^+$ в (6.4.18) представляют собой линейные комбинации токов $SU(2)_L$ и $SU(2)'_L$. А именно, разложение группы $SO(4)_L$ на $SU(2) \times SU(2)'_L$ соответствует разложению фермионных токов $J_{ij}^+ = \psi_i^+ \psi_j^+$ на автодуальную и антиавтодуальную части: $J_{ij}^+ \pm \epsilon_{ijkl} J_{kl}^+$. Двум линейным комбинациям $\psi_1^+ \psi_2^+ \pm \psi_3^+ \psi_4^+$ (автодуальной и антиавтодуальной) отвечают соответственные генераторы групп $SU(2)_L$ и $SU(2)'_L$.

Если ввести новые бозонные поля σ_1^+ и σ_2^+ по формулам

$$\sigma_1^+ = (\varphi_1^+ + \varphi_2^+)/2, \quad \sigma_2^+ = (\varphi_1^+ - \varphi_2^+)/2, \quad (6.4.19)$$

то σ_i^+ и будут изображать бозонизованные генераторы групп $SU(2)_L$ и $SU(2)'_L$:

$$\begin{aligned}\partial_+ \sigma_1^+ &= \frac{1}{2} (\psi_1^+ \psi_2^+ + \psi_3^+ \psi_4^+), \\ \partial_+ \sigma_2^+ &= \frac{1}{2} (\psi_1^+ \psi_2^+ - \psi_3^+ \psi_4^+).\end{aligned}\quad (6.4.20)$$

Из формул (6.4.20) видно, что производная σ_1^+ является $SU(2)_L$ -током и, следовательно, коммутирует со всей группой $SU(2)'_L$; более того, и само поле σ_1^+ тоже обладает этим свойством. Поскольку σ_1^+ коммутирует с $SU(2)'_L$, то оно описывает только степени свободы группы $SU(2)_L$. По тем же причинам σ_2^+ связано лишь с группой $SU(2)'_L$. Таким образом, мы показали, что один левый бозон σ_1^+ может описывать всю симметрию $SU(2)_L$, если он является периодической функцией с правильным периодом, что вполне согласуется с предшествующим анализом.

Переход от (6.4.18) к (6.4.19) разительно напоминает то преобразование, посредством которого мы в гл. 5 связали друг с другом две различные конусные формулировки суперструн. Действительно, с общей точки зрения наша процедура выглядит следующим образом. Если некоторая группа Ли G имеет ранг d , то у нее есть d штук коммутирующих генераторов T_1, T_2, \dots, T_d . Они порождают подгруппу $U(1)^d$ группы G , называемую максимальным тором. В некоторых случаях можно реализовать симметрию G , введя d штук левых скаляров, которые распространяются на максимальном торе этой группы. (Или же $(G \times G)$ -симметрию можно реализовать с помощью d скаляров, имеющих как правые, так и левые компоненты и распространяющихся на том же максимальном торе.) Например, группа $SU(2)$ имеет ранг единица, ее максимальный тор — это окружность, и $SU(2)$ -симметрию можно организовать, взяв только одно скалярное поле. Группы $SO(4)$ и $SO(8)$ имеют ранги два и четыре соответственно и требуют введения либо двух, либо четырех скалярных полей. Поскольку эти периодические поля «живут» на максимальных торах рассматриваемых групп, то любое «естественное» преобразование этих торов является симметрией для указанных скалярных полей. Переходу от (6.4.18) к (6.4.19) как раз и соответствует преобразование максимального тора группы $SO(4)$, которое задает разложение $SO(4)$ в $SU(2) \times SU(2)$, а манипуляциям гл. 5 соответствуют (о чем вкратце упоминалось в приложении 5.A) преобразования максимального тора, порожденные триальностью.

Группы, которые допускают реализацию в терминах скалярных полей, распространяющихся на максимальных торах, принадлежат к так называемым группам с простыми связями, у которых все корневые векторы имеют равную длину; это группы $SU(N)$, $SO(2N)$ и E_6, E_7 и E_8 . Поскольку группа $SO(2N)$ достаточно ясно описывается и на языке свободных фермионов, то формализм бозонов на максимальном торе пригодится нам для исследования остальных, в особенности исключительных групп.

6.4.3. Гетеротическая струна в бозонизованном виде

Займемся теперь обобщением описанной выше конструкции, чтобы получить вместо $SU(2)_L \times SU(2)_R$ те группы симметрии, которые возникают в теориях суперсимметричной гетеротической струны, а именно $\text{spin}(32)/Z_2$ или $E_8 \times E_8$. Для достижения этой цели мы заменим использованные ранее 32 координаты λ на 16 левых бозонных координат и покажем, что, компактифицируя эти координаты на тор подходящего размера и формы, мы сможем воспроизвести все предыдущие результаты. Найти правильный тор — это значит найти граничные условия для бозонных координат, корректно описывающих процедуру бозонизации заданного набора фермионов с заданными граничными условиями. Однако мы не будем следовать дедуктивному методу; оказывается, что гораздо проще сразу построить некий специальный тор, а потом проверить, что он приводит к нужной группе симметрии и правильно воспроизводит спектр частиц.

Предположим, что 16 из 26 левых бозонных координат компактифицированы, и выпишем для них разложение по модам в виде

$$X_L^I = x_L^I + \rho_L^I (\tau + \sigma) + \frac{i}{2} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \tilde{\alpha}_n^I e^{-2in(\tau + \sigma)}, \quad (6.4.21)$$

где $I = 1, 2, \dots, 16$. Вдобавок к этим координатам у нас имеются стандартные моды для правого сектора суперструны: α_n^i и S_n^a (мы пользуемся калибровкой светового конуса), где $i = 1, \dots, 8$ — это индексы представления 8_v поперечной пространственно-временной группы, а $a = 1, \dots, 8$ — представления 8_s соответственно. Естественно, присутствуют и обычные левые моды $\tilde{\alpha}_n^i$.

Попытка проквантовать систему $X_L^I(\tau + \sigma)$ изолированно, без включения мод $X_R^I(\tau - \sigma)$, наталкивается, однако, на некоторую довольно неожиданную трудность. У системы только левых

переменных в фазовом пространстве появляются связи, поскольку сопряженный импульс X пропорционален X' , и для квантования надо использовать скобку Дирака. Более быстрый путь к ответу заключается в следующем. Если присутствуют как правые, так и левые моды, то выполняется стандартное перестановочное соотношение

$$[x^I, p^J] = i\delta^{IJ}. \quad (6.4.22)$$

Если мы теперь запишем $x^I = x_L^I + x_R^I$, $p^I = p_L^I + p_R^I$, где левые моды x_L^I , p_L^I обязаны коммутировать с правыми модами x_R^I , p_R^I , то из (6.4.22) следует

$$[x_L^I, p_L^I] = \frac{i}{2} \delta^{II} = [x_R^I, p_R^I], \quad (6.4.23)$$

причем множитель $1/2$ для дальнейшего весьма существен. Вследствие такого коммутатора оператор

$$V_0(K, \tau + \sigma) =: e^{2iK \cdot X_L(\tau + \sigma)} \quad (6.4.24)$$

удовлетворяет равенству

$$[p_L^I, V_0(K)] = K^I V_0(k). \quad (6.4.25)$$

Вектор p_L^I представляет собой аналог величины $p/2 + L$, введенной в разд. 6.4.1. Напомним, что там мы имели дело с левыми модами, для которых $p_L = p/2 + L$, и правыми модами с $p_R = p/2 - L$. Теперь мы предполагаем, что 16 компактифицированным координатам вообще не соответствует никаких правых мод, а это значит, что числа намотки и импульсы связываются между собой соотношением $p^I/2 - L^I = 0$.

Условие компактификации 16 левых координат на некий тор T^{16} означает, что все точки, координаты которых отличаются на векторы периода, надо отождествить, что естественно описывать следующим образом. Начнем с 16-мерного евклидова пространства R^{16} . В этом пространстве введем 16 независимых векторов e_i^I , $i = 1, \dots, 16$, и определим решетку Γ как совокупность точек вида $q^I = \pi \sum n_i e_i^I$ с целыми коэффициентами n^i . (Множитель π упростит дальнейшие формулы.) Зададим тор $T^{16} = R^{16}/\Gamma$. Точка на торе — это множество всех точек x^I в R^{16} , связанных отношением эквивалентности

$$x^I \approx x^I + \pi \sum_{i=1}^{16} n_i e_i^I = x^I + 2\pi L^I. \quad (6.4.26)$$

Введем метрический тензор

$$g_{ij} = \sum_{I=1}^{16} e_i^I e_j^I \quad (6.4.27)$$

в R^{16} . Как мы увидим, наиболее интересен тот случай, когда матрица g_{ij} составлена из целых чисел, причем $g_{ii} = 2$.

Из перестановочных соотношений видно, что $p_L^I \sim \sim - (i/2) \partial/\partial x_L^I$. Следуя идеям Калуцы — Клейна, мы будем считать допустимыми лишь те значения импульсов K^I , при которых формула $\exp(2iK \cdot x)$ задает однозначную функцию на торе, что эквивалентно следующему условию: $K^I e_i^I$ — целое число при любых $i = 1, \dots, 16$. Векторы K^I , удовлетворяющие этому условию, образуют некоторую решетку $\tilde{\Gamma}$, называемую дуальной решеткой решетки Γ . Всегда существуют 16 векторов e_i^{*I} , таких, что

$$\sum_{I=1}^{16} e_i^{*I} e_j^I = \delta_{ij}, \quad (6.4.28)$$

определяемых этим условием однозначно. Линейные комбинации e_i^{*I} с целыми коэффициентами и образуют дуальную решетку $\tilde{\Gamma}$, а все допустимые импульсы могут быть представлены в виде

$$K^I = \sum_{i=1}^{16} m_i e_i^{*I}. \quad (6.4.29)$$

Соотношение $K^I = 2L^I$, следующее из $K = p/2 + L$ и $p/2 - L = 0$ (эти условия учитывают тот факт, что у x^I есть только левые компоненты), примет теперь вид

$$K^I = \sum_{i=1}^{16} m_i e_i^{*I} = \sum_{i=1}^{16} n_i e_i^I. \quad (6.4.30)$$

До сих пор мы не налагали никаких ограничений (кроме линейной независимости) на наши 16 векторов e_i^I ; соответственно не было никаких ограничений и на матричные элементы g_{ij} . Для произвольных e_i^I условие (6.4.30) представляет собой очень сильное ограничение. Действительно, в (6.4.30) утверждается, что один и тот же вектор K^I принадлежит как решетке Γ , порожденной векторами e_i^I , так и решетке $\tilde{\Gamma}$, которая генерируется набором e_i^{*I} . Каждая из этих решеток описывает дискретное множество точек в R^{16} , и в общем случае (при произвольных e_i^I) эти два множества имеют единственную общую точку — начало координат. Следовательно, в случае общего положения удовлетворяющие условию (6.4.30) импульсы K^I просто обращаются в нуль.

Однако допущение, что в движении струны отсутствуют нулевые моды, физически совершенно неудовлетворительно, и мы приходим к выводу, что теория с произвольными e_i^l не может быть последовательной. В гл. 9 при исследовании модулярной инвариантности мы обнаружим истинную причину этой непоследовательности, а пока что двинемся дальше и попытаемся выяснить, нет ли возможности предотвратить столь разрушительное действие условия (6.4.30).

Поставим вопрос: при каких условиях в пересечении двух решеток — Γ и ее дуальной $\tilde{\Gamma}$ — лежит достаточно много точек? Оказывается, что такое удивительное явление действительно имеет место, когда все матричные элементы g_{ij} метрики g , определенной формулой (6.4.27), являются целыми числами; решетка с таким свойством называется *целой*.

В этом случае все скалярные произведения $(e_i, e_j) = e_i^l e_j^l$ для $1 \leq i, j \leq 16$ будут целыми, а значит, и сами векторы e_i^l будут принадлежать дуальной решетке. Соответственно и вся порожденная ими решетка Γ будет лежать в $\tilde{\Gamma}$, и условие (6.4.30) будет выполнено для любого K^l , принадлежащего Γ .

Требование, чтобы решетка Γ была целой решеткой, приводит к очень жестким ограничениям на радиусы тора T^{16} , на который компактифицируются 16 дополнительных левых бозонов, но на самом деле мы собираемся ужесточить их еще больше. А именно, из условия целостности решетки Γ еще вовсе не следует, что она совпадает с $\tilde{\Gamma}$, она может быть и собственной подрешеткой. Мы же потребуем, чтобы обе решетки совпадали, в этом случае решетка Γ носит название автодуальной решетки.

Сюда же относится еще одно важное понятие. Если диагональные элементы метрики g_{ii} четны, то Γ называется *четной* решеткой. Рассмотрим произвольный решеточный вектор $v^l = \sum n_i e_i^l$ (n_i целые). Квадрат длины этого вектора равен $(v, v) = \sum_{ij} n_i n_j g_{ij} = \sum n_i^2 g_{ii} + 2 \sum_{i < j} n_i n_j g_{ij}$, и он будет четным числом, если все g_{ij} четны; таким образом, можно сказать, что четная решетка — это такая решетка, что квадрат длины любого решеточного вектора есть четное число.

Как обычно, левый и правый секторы связаны условием $L_0 = \tilde{L}_0 + 1$, обеспечивающим инвариантность относительно постоянных сдвигов параметра σ . На языке мод это условие принимает вид

$$N = \tilde{N} - 1 + \frac{1}{2} \sum_l (p_L^l)^2, \quad (6.4.31)$$

где N — оператор числа частиц для суперструны, и

$$\tilde{N} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^{\infty} \tilde{\alpha}_{-n}^i \tilde{\alpha}_n^i + \sum_{l=1}^{16} \tilde{\alpha}_{-n}^l \tilde{\alpha}_n^l \right). \quad (6.4.32)$$

Формула для массового оператора имеет вид

$$\frac{1}{4} (\text{масса})^2 = 2N. \quad (6.4.33)$$

Поскольку собственные значения N , и \tilde{N} целые, то квадраты длин векторов K^l , являющихся собственными значениями операторов p_L^l , должны быть четными, и если решетка Γ и целая, и четная, то это, очевидно, выполнено. Что будет, если Γ не является четной? Если Γ целая, но нечетная решетка, то множество точек $\sum n_i e_i^l \in \Gamma$, имеющих четный квадрат длины, образует некую подрешетку Γ' . Поскольку из (6.4.33) следует, что импульсы должны принадлежать Γ' (а не просто Γ , как следует из (6.4.30)), мы можем провести все построение, прямо начиная с решетки Γ' . Итак, впредь мы будем считать Γ четной и целой решеткой.

Как мы уже отмечали выше при исследовании фермионного подхода, условие (6.4.33) в силу неотрицательности N обеспечивает спектр, свободный от тахионов. Факт этот совершенно не банален, поскольку в теории бозонной струны — а именно она была использована для описания левого сектора — спектр реально содержит тахион.

Обсудим теперь калибровочные симметрии полученной теории. Состояния, отвечающие безмассовым векторным частицам, строятся как тензорные произведения правых $SO(1, 9)$ -векторов с $N=0$ на левые лоренцевы скаляры, удовлетворяющие $\tilde{N} + \frac{1}{2} (p_L)^2 = 1$. Всегда вне зависимости от выбранных значений радиусов можно задать шестнадцать левых скаляров как $\tilde{\alpha}_{-1}^l |0\rangle$. Эти состояния как раз соответствуют набору векторных калибровочных полей, появляющихся при редукции Калуцы — Клейна, связанных с группой $[U(1)]^{16}$ — группой изометрии тора T , и их появление совершенно неудивительно. Напомним, однако, что в разд. 6.4.1 нам удалось за счет специального выбора радиуса расширить калибровочную группу с $U(1) \times U(1)$ до $SU(2) \times SU(2)$. Аналогичное явление имеет место и в нашей задаче: калибровочная группа может быть расширена, если в решетке Γ содержатся векторы, имеющие квадрат длины, равный двум. Если в решетке найдутся узлы с $K^2 = 2$, то ассоциированные с ними состояния $|K\rangle$ будут описывать скаляры и дополнительные безмассовые векторные поля окажутся во

взаимно однозначном соответствии с этими узлами. Тут и вступает в игру заранее приготовленная нами четная целая решетка Γ : если, например, квадрат длины базисных векторов e_i^i равен двум. (это минимальное возможное значение в такой решетке), то, положив $K^i = e_i^i$ (для каждого i), мы как раз получим безмассовое векторное состояние $|K^i\rangle$.

В этой книге нам уже приходилось однажды сталкиваться с четными целыми решетками. Напомним, что в приложении 5.А мы описали решетки корней и решетки весов групп $SO(2n)$. При этом мы обнаружили, что корни (ненулевые веса присоединенного представления) как раз имеют квадрат длины, равный двум, т. е. решетка корней — это четная целая решетка. Однако

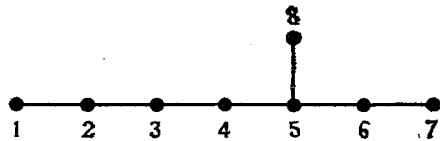


Рис. 6.4. Схема Дынкина для группы E_8 .

автодуальной решетке корней для группы $SO(2n)$ не будет: помимо весов присоединенного представления в дуальную решетку попадают еще и весовые векторы других представлений.

Вообще говоря, на любой четной решетке точки с квадратом длины, равным двум (в совокупности называемые Λ_2), являются ненулевыми корнями некоторой алгебры Ли G^1). Для только что описанной конструкции это означает, что в теории струн калибровочные поля, соответствующие безмассовым векторным мезонам, ассоциированным с такими точками, будут преобразовываться по некоторой группе, изоморфной G . Поскольку при этом мы получаем ровно 16 штук левых бозонов, то, вообще говоря, мы можем прийти к совершенно произвольной группе Ли с простыми связями²⁾ ранга 16. На первый взгляд мы при этом оказываемся перед необозримым множеством возможностей.

Условие, которое позволяет радикально ограничить этот произвол, — это условие автодуальности решетки Γ . Выше мы уже

¹⁾ Мы докажем это чуть позже, в разд. 6.4.4, построив замкнутую алгебру Ли вершинных операторов, соответствующих точкам произвольной целой решетки, имеющим квадрат длины, равный двум.

²⁾ Вот список конечномерных алгебр Ли, обладающих этим свойством: $SO(2N)$, $SU(N)$, E_8 , E_7 и E_6 . Общая длина ненулевых корней в таких алгебрах традиционно выбирается равной $\sqrt{2}$.

видели, что для левых бозонов, которые должны иметь одинаковые числа намотки и импульсы, требование автодуальности Γ выглядит вполне естественно. (Для автодуальной Γ условие (6.4.30) не налагает никаких ограничений.) Однако доказать необходимость этого условия мы не могли, и в этом положении мы будем оставаться вплоть до гл. 9, где будет развита концепция модулярной инвариантности. Поэтому пока что мы придем на веру тот факт, что решетка Γ должна быть четной автодуальной решеткой, и рассмотрим его возможные следствия. В математике решетки такого типа активно используются в теории чисел и потому прекрасно исследованы. Четные автодуальные решетки (с евклидовой сигнатурой) существуют только в размерностях, кратных восьми. В размерности 8 существует только одна такая решетка, Γ_8 , т. е. решетка корней исключительной группы E_8 . В этом случае матрица $g_{ij} = e_i \cdot e_j$ — это матрица Картана для E_8 , и в базисе простых положительных корней она имеет вид

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad (6.4.34)$$

что соответствует схеме Дынкина, изображенной на рис. 6.4. (Краткое описание схем Дынкина было в приложении 5.А.)

В размерности 16 имеются две автодуальные решетки, а именно произведение $\Gamma_8 \times \Gamma_8$ двух экземпляров решетки Γ_8 и решетка, обозначаемая Γ_{16} , которая содержит решетку корней группы $SO(32)$ в качестве подрешетки. В теории струны первый вариант приводит к калибровочной группе $E_8 \times E_8$, а второй — к $SO(32)$. Обе эти теории, построенные с помощью решеток, и $E_8 \times E_8$, и $SO(32)$, полностью совпадают с теми двумя теориями, которые были построены с помощью фермионного формализма в разд. 6.3. Например, в решетке Γ_{16} помимо решетки корней группы $SO(32)$ содержатся веса, ассоциированные с одним из двух спинорных классов эквивалентности, описанных в приложении 5.А. Таким образом, набор представле-

ний, содержащийся в Γ_{16} , соответствует группе $\text{spin}(32)/Z_2$, что как раз и утверждалось в разд. 6.3.1. Далее в этом разделе мы еще вернемся к решеткам Γ_8 и Γ_{16} .

6.4.4. Представление вершинными операторами

Теперь мы вполне готовы к тому, чтобы довести до конца построение бозонного представления алгебры токов, что в свою очередь позволит нам наконец полностью разобраться с калибровочной симметрией в теории $E_8 \times E_8$.

В рамках фермионной конструкции гетеротической струны нам удалось без большого труда явно доказать наличие в теории $SO(32)$ или $SO(16) \times SO(16)$ симметрий, но появление группы $E_8 \times E_8$ оставалось довольно загадочным. В бозонной же формулировке мы обнаружили, что левые координаты компактифицируются на максимальный тор группы $E_8 \times E_8$, а сопряженные импульсы соответственно оказываются лежащими на решетке $\Gamma_8 \times \Gamma_8$. Естественно предположить, что именно в таком подходе нам наконец удастся «поймать» нашу симметрию, и именно этому занятию мы посвятим этот раздел¹⁾.

Наш стратегический план заключается в следующем: мы явно представим генераторы группы на языке вершинных операторов, а потом проверим, что они действительно удовлетворяют правильным перестановочным соотношениям. Если же при этом окажется (а так оно, конечно же, и будет), что построенные генераторы коммутируют с оператором квадрата массы, то мы получим искомое доказательство симметричности теории, поскольку тогда набор состояний на каждом массовом уровне будет образовывать пространство представления рассматриваемой группы.

Начнем с того, что сделаем несколько общих замечаний относительно устройства алгебр Ли с простыми связями. Для группы ранга d прежде всего выделим максимальную коммутативную подгруппу $[U(1)]^d$, отвечающую так называемой картановской подалгебре. Обозначим ее коммутирующие генераторы H_I :

$$[H_I, H_J] = 0. \quad (6.4.35)$$

Собственные значения H_I (для любого состояния в любом представлении) соответствуют точкам в d -мерном «пространстве

¹⁾ Основная конструкция была предложена Френкелем, Кацем и Сигалом на основе предшествующих работ Леповского и Вилсона. Для физиков она была адаптирована Годдардом и Оливом. Для некоторых частных случаев она была ранее описана Гальперном (его как раз интересовали приложения к теории струн) и Бэнксом, Хорном и Ньюбергером и другими.

весов» R^d ; оставшимся $n - d$ генераторам (n — размерность группы) отвечают корневые векторы $K \in R^d$; для рассматриваемых групп все они имеют один и тот же квадрат модуля, и если положить его равным двум, они порождают четную целую решетку Γ . Эти генераторы мы будем обозначать E_K . Они являются «заряженными» в том смысле, что они сдвигают собственные значения H_I на K_I . Таким образом,

$$[H_I, E_K] = K_I E_K. \quad (6.4.36)$$

Чтобы закончить описание алгебры Ли в этом базисе, необходимо еще предъявить правила коммутации E_K и $E_{K'}$. Если коммутатор отличен от нуля, то его полный заряд должен быть равен $K + K'$, а поскольку $K + K'$ принадлежит четной решетке Γ , то для $(K + K')^2$ возможны только значения 0, 2, 4, 6, 8. Однако ни одно из чисел 4, 6, 8 (они получаются при $K \cdot K' \geq 0$) не может соответствовать заряду никакого генератора, поскольку в нашей алгебре квадрат длины любого корня равен в точности двум. Итак, мы с необходимостью получаем

$$[E_K, E_{K'}] = 0, \text{ если } K \cdot K' \geq 0. \quad (6.4.37)$$

Единственная возможность для коммутатора $[E_K, E_{K'}]$ не обратиться в нуль — это когда в алгебре Ли есть оператор $E_{K+K'}$ с «зарядом» $K + K'$. Если такой корень действительно имеется, то мы получаем

$$[E_K, E_{K'}] = \varepsilon(K, K') E_{K+K'}, \text{ если } K \cdot K' = -1. \quad (6.4.38)$$

При соответствующей нормировке E_K коэффициенты $\varepsilon(K, K')$ могут быть выбраны равными ± 1 . Для интересующих нас случаев явная конструкция $\varepsilon(K, K')$ приведена в разд. 6.4.5. Последний вариант, который остается рассмотреть, — это $K + K' = 0$, т. е. коммутатор, имеющий нулевой заряд. Наиболее общий вид правой части будет даваться здесь линейной комбинацией генераторов картановской подалгебры, и при соответствующей нормировке мы получаем

$$[E_K, E_{K'}] = \sum_I K'_I H_I, \text{ если } K + K' = 0. \quad (6.4.39)$$

Эта формула также будет воспроизведена в дальнейшей конструкции.

Пусть дана четная целая решетка Γ ; теперь наша задача — построить алгебру операторов, удовлетворяющих приведенным

¹⁾ Такой корень, если он существует, всегда определяется однозначно; общий факт из теории алгебр Ли состоит в том, что никакие два генератора, не лежащие в картановской подалгебре, не могут иметь одинаковых зарядов.

выше перестановочным соотношениям, причем операторы E_K должны соответствовать точкам с квадратом модуля, равным двум. В случае успеха этой программы мы, естественно, получим и доказательства для ряда утверждений, сформулированных выше. В качестве первого шага естественно принять следующую схему включения корневых векторов: пусть операторы E_K содержат множитель $\exp[2iK \cdot x_L]$, а

$$H^I = p_L^I. \quad (6.4.40)$$

Этих двух условий вполне достаточно, чтобы удовлетворить (6.4.35) и (6.4.36), и, кроме того, они не противоречат свойствам коммутатора $[E_K, E_{K'}]$. Итак, остается закончить описание операторов, но именно этот шаг оказывается весьма нетривиальным.

Присутствие в E_K множителя $\exp(2iK \cdot x_L)$ наводит на мысль, что будет полезно рассмотреть струнный вершинный оператор

$$V_0(K, z) =: \exp[2iK \cdot X_L(z)] : , \quad (6.4.41)$$

где

$$z = \exp[2i(\tau + \sigma)]. \quad (6.4.42)$$

Действительно, в теории струн выражение $\exp(2iK \cdot x_L)$ выглядит довольно искусственно, если его не обобщить как в (6.4.41). На языке мод вершинный оператор записывается следующим образом:

$$V_0(K, z) = \exp(2iK \cdot x_L + K \cdot p_L \ln z) \times \\ \times \exp\left(\sum_1^{\infty} \frac{1}{n} K \cdot \tilde{\alpha}_{-n} z^n\right) \exp\left(-\sum_1^{\infty} \frac{1}{n} K \cdot \tilde{\alpha}_n z^{-n}\right). \quad (6.4.43)$$

Его конформная размерность равна $K^2/2$, и, следовательно, для интересующего нас случая $K \in \Lambda_2$ мы получаем $J = 1$. Однако операторы $V_0(K, z)$ не коммутируют с \tilde{L}_0 и явно зависят от z и потому сами по себе никак не могут являться решением нашей задачи. Очевидный способ избавиться от этих двух недостатков — это выделить из V_0 нулевую моду

$$A_K = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi V_0(K, z) d\tau = \oint \frac{dz}{2\pi iz} V_0(K, z). \quad (6.4.44)$$

Здесь мы воспользовались тем обстоятельством, что, когда τ пробегает значения от 0 до π , координата z в (6.4.42) проходит единичную окружность в комплексной плоскости в направлении против часовой стрелки. Очевидно, что радиус окружности можно свободно варьировать как в ту, так и в другую сторону, пока

не встретится первая сингулярность. Само по себе наше выражение не содержит никаких явных сингулярностей, но необходимо помнить, что мы имеем дело с оператором и сингулярности могут появляться после умножения его на некие другие операторы. В дальнейшем это свойство окажется для нас очень существенным.

Для того чтобы интеграл в (6.4.44) был корректно определен, необходимо потребовать, чтобы у $V_0(K, z)$ не было существенной особенности в начале координат. В этом случае, если какие-то существенно особые точки и начнут появляться из операторных произведений, мы всегда сможем взять достаточно малый радиус и подынтегральное выражение будет однозначной функцией. К счастью, именно в такой ситуации мы и находимся: собственные значения p_L принадлежат решетке Γ , а для любого $p_L \in \Gamma$ $p_L \cdot K$ есть целое число. Таким образом, для любых допустимых p_L никакой существенно особой точки при $z = 0$ у $V_0(K, z)$ нет, и вдоль контура достаточно малого радиуса подынтегральное выражение будет вполне однозначным. Из того факта, что при $K \in \Lambda_2$ у $V_0(K, z)$ будет $J = 1$, немедленно вытекает, что

$$[\tilde{L}_n, V_0(K, z)] = z \frac{d}{dz} (z^n V_0(K, z)). \quad (6.4.45)$$

Таким образом,

$$[\tilde{L}_n, A_K] = \oint \frac{dz}{2\pi i} \frac{d}{dz} (z^n V_0(K, z)) = 0. \quad (6.4.46)$$

Отсюда следует, что операторы A_K отображают физические состояния в физические состояния.

Операторы A_K оказываются очень удачными кандидатами на роль генераторов E_K . В них не хватает лишь сравнительно простого дополнительного множителя. Чтобы разобраться во всей этой механике, необходимо прежде всего исследовать алгебру самих A_K . При умножении пары таких операторов, естественно, перемножаются и вертексы¹⁾ $V_0(K, z)$ и $V_0(K', \omega)$, стоящие в подынтегральных выражениях, а при $z = \omega$ это операторное произведение, конечно же, сингулярно. Чтобы явно увидеть эту сингулярность, удобно привести все произведение к нормальной форме. Делается это с помощью известной формулы $\exp A \cdot \exp B = \exp B \cdot \exp A \cdot \exp[A, B]$, справедливой во

¹⁾ Вертекс и вершинный оператор — это синонимы, мы будем пользоваться то одним, то другим в зависимости от контекста. — *Прим. перев.*

всех случаях, когда $[A, B]$ является c -числом. Член $[A, B]$ содержит

$$-K \cdot K' \sum_1^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{w}{z}\right)^n = K \cdot K' \ln(1 - w/z) \quad (6.4.47)$$

от α -осцилляторных слагаемых и

$$-\frac{1}{2} K \cdot K' \ln(w/z) \quad (6.4.48)$$

от нулевых мод. Собрав все это вместе, мы видим, что

$$V_0(K, z) V_0(K', w) = (wz)^{-K \cdot K'/2} (z - w)^{K \cdot K'} \times \\ \times : \exp[2iK \cdot X(z) + 2iK' \cdot X(w)] :. \quad (6.4.49)$$

Однако эта формула справедлива только при $|\omega| < |z|$, в противном случае бесконечный ряд, дающий степень $z - w$, расходится.

Если использовать теперь формулу (6.4.49) для вычисления произведения $A_K A_{K'}$, то необходимо позаботиться, чтобы радиус контура интегрирования у $A_K (|z|)$ был больше соответствующего радиуса для $A_{K'} (|\omega|)$, иначе мы столкнемся с плохо определенным выражением. Если изменить порядок сомножителей в произведении на противоположный, то результат будет отличаться в двух отношениях. Во-первых, поскольку теперь A_K будет справа от $A_{K'}$, то контуры надо выбрать так, чтобы $|\omega| > |z|$. Во-вторых, множитель $(z - w)^{K \cdot K'}$ заменится на $(w - z)^{K \cdot K'}$, что, однако, не приводит ни к каким сложностям с разрезами, а лишь выкидывает множитель $(-1)^{K \cdot K'}$, так как $K \cdot K'$ всегда целое. Теперь мы видим, какая комбинация операторов дает удачное сочетание контуров интегрирования:

$$A_K A_{K'} - (-1)^{K \cdot K'} A_{K'} A_K = \\ = \oint \frac{dw}{2\pi i w} \oint \frac{dz}{2\pi i z} (z - w)^{K \cdot K'} (wz)^{-K \cdot K'/2} \times \\ \times : \exp[2iK \cdot X(z) + 2iK' \cdot X(w)] :. \quad (6.4.50)$$

В первом слагаемом в (6.4.50) контуры выбираются так, чтобы $|z| > |\omega|$, а во втором — так, чтобы $|z| < |\omega|$; они изображены на рис. 6.5, а. В разности z -контуры подбираются так, что остается лишь один контур, окружающий лишь те сингулярности, что заключены между двумя этими окружностями. Поскольку у нас имеется лишь одна потенциально сингулярная

точка при $z = w$, то в итоге мы получаем z -контур вокруг точки w , как это указано в (6.4.50) и на рис. 6.5, б.

Как мы выяснили ранее, произведение $K \cdot K'$ может принимать лишь целые значения, причем лежащие в интервале от -2 до 2 , и, следовательно, результат интегрирования по z будет отличен от нуля лишь при $K \cdot K' = -1$ или -2 . (В противном случае точка $z = w$ будет регулярной.) Оба этих интеграла

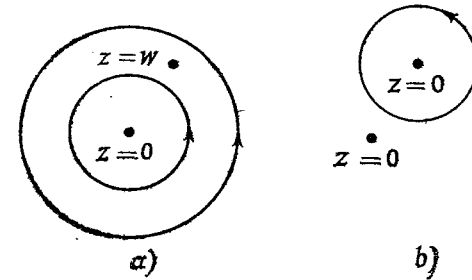


Рис. 6.5. Контуры z -интегрирования для $A_K A_{K'}$ и $A_{K'} A_K$ выбираются так, чтобы точка w лежала соответственно вовне или внутри контура, рис. а). Таким образом, разности отвечает контур вокруг единственной потенциально сингулярной точки $z = w$, рис. б).

легко вычисляются по формуле Коши. При $K \cdot K' = -1$ сумма $K + K' \in \Lambda_2$, полюс оказывается простым и мы немедленно получаем

$$A_K A_{K'} - (-1)^{K \cdot K'} A_{K'} A_K = A_{K+K'} \quad \text{для } K \cdot K' = -1. \quad (6.4.51)$$

При вычислении этого вычета мы воспользовались тем, что

$$\frac{1}{z} (wz)^{-K \cdot K'/2} \rightarrow 1. \quad (6.4.52)$$

Случай $K \cdot K' = -2$ тоже не представляет труда, поскольку здесь $K + K' = 0$. Собственно вычет дается тогда выражением

$$\frac{\partial}{\partial z} \left\{ \frac{1}{z} (wz)^{-K \cdot K'/2} : \exp[2iK \cdot X(z) + 2iK' \cdot X(w)] : \right\} \quad (6.4.53)$$

при $z = w$, а если учесть $K \cdot K' = -2$ и $K + K' = 0$, то остается просто

$$w \frac{\partial}{\partial w} (2iK \cdot X(w)). \quad (6.4.54)$$

Интегрирование по w сводится к выделению из этого выражения константного члена разложения в ряд Лорана, т. е.

$$w \frac{\partial}{\partial w} (K \cdot p_L \ln w) = K \cdot p_L. \quad (6.4.55)$$

Подставляя сюда $p_L^i = H^i$, мы получаем

$$A_K A_{K'} - (-1)^{K \cdot K'} A_{K'} A_K = \sum K^i H_i \quad \text{для } K \cdot K' = -2. \quad (6.4.56)$$

В целом построенные нами операторы A_K удовлетворяют нужной алгебре, однако имеется одно существенное отличие: при нечетных $K \cdot K'$ в формуле (6.4.51) вместо коммутаторов появляются антикоммутаторы. На первый взгляд отсюда можно заключить, что мы просто столкнулись с градуированной алгеброй Ли (как в суперсимметрии), но это не так. То правило, которое указывает нам, с чем именно, т. е. с коммутатором или антикоммутатором, мы имеем дело, не позволяет разделить все операторы на два класса (четные и нечетные), но, напротив, довольно специальным образом зависит от соотношения их индексов. Чтобы эта система коммутаторов и антикоммутаторов действительно превратилась в искомую алгебру Ли и мы могли получить настоящие генераторы E_K , необходимо домножить A_K на некоторые «коциклы».

Поставим в соответствие каждому корню $K \in \Lambda_2$ алгебры Ли G по генератору

$$E_K = A_K c_K, \quad (6.4.57)$$

где c_K — некоторый поправочный множитель, который мы подберем так, чтобы соотношения (6.4.51) превратились в настоящие коммутаторы. При каждом K этот множитель c_K будет зависеть от оператора импульса p_L и не будет содержать зависимости ни от каких других осцилляторов. Таким образом, мы можем рассматривать c_K как оператор умножения на функцию от импульса. Как следует из алгебры (6.4.51), для того чтобы перестановочные соотношения для A_K перешли в коммутаторы для E_K , необходимо потребовать выполнения для $c_K(p)$ следующего соотношения:

$$c_K(p - K') c_{K'}(p) = (-1)^{K \cdot K'} c_{K'}(p - K) c_K(p). \quad (6.4.58)$$

Для приведения (6.4.51) к коммутаторному виду этого условия вполне достаточно, но чтобы получить замкнутую систему коммутаторов (в правой части (6.4.51) должны стоять те же операторы, что и в левой), необходимо еще потребовать, чтобы произведение двух c_K опять-таки было неким c_K . Итак, мы полагаем

$$c_K(p - K) c_{K'}(p) = \varepsilon(K, K') c_{K+K'}(p), \quad (6.4.59)$$

где множитель $\varepsilon(K, K')$ равен ± 1 . Действительно, как видно из (6.4.51), эти ε можно отождествить с множителями, появляющимися в правой части (6.4.38), а значит, в случае успеха в поиске $c_K(p)$ с указанными свойствами мы еще и докажем, что

для любой алгебры Ли с простыми связями верна формула (6.4.38) (а также предыдущие формулы). Ограничения на $\varepsilon(K, K')$ мы можем получить, вычисляя двумя разными способами с помощью (6.4.59) произведение $(c_K c_{K'}) c_{K''} = c_K \cdot (c_{K'} c_{K''})$. Итак:

$$\begin{aligned} c_K(p - K' - K'') [c_{K'}(p - K'') c_{K''}(p)] &= \\ &= \varepsilon(K', K'') c_K(p - K' - K'') c_{K'+K''}(p) = \\ &= \varepsilon(K', K'') \varepsilon(K, K' + K'') c_{K+K'+K''}(p), \end{aligned} \quad (6.4.60)$$

но, с другой стороны,

$$\begin{aligned} [c_K(p - K' - K'') c_{K'}(p - K'')] c_{K''}(p) &= \\ &= \varepsilon(K, K') c_{K+K'}(p - K'') c_{K''}(p) = \\ &= \varepsilon(K, K') \varepsilon(K + K', K'') c_{K+K'+K''}(p). \end{aligned} \quad (6.4.61)$$

Итак, мы должны потребовать для ε выполнения условия

$$\varepsilon(K, K') \varepsilon(K + K', K'') = \varepsilon(K', K'') \varepsilon(K, K' + K''), \quad (6.4.62)$$

означающего, что ε является Z_2 -значным два-коциклом.

Все, что остается сделать для доказательства симметрии, — это предъявить явную конструкцию c и ε . К этой задаче мы и переходим.

6.4.5. Формулы для коциклов

Теперь мы знаем, как строятся генераторы, отвечающие некоторой группе симметрии G . Картановская подалгебра представляется внутренними импульсами $H^i = p_L^i$, а операторы $E_K = A_K c_K$ ассоциируются с корнями $K \in \Lambda_2$. Множители $c_K(p)$ зависят от оператора импульса p_L^i (для простоты мы будем записывать его как p), но никак не связаны с осцилляторами других, ненулевых частот. Однако наше доказательство остается неполным до тех пор, пока мы не установим существование операторов $c_K(p)$, удовлетворяющих фундаментальному соотношению

$$c_K(p - K') c_{K'}(p) = \varepsilon(K, K') c_{K+K'}(p), \quad (6.4.63)$$

и в этом разделе мы предъявим их явную конструкцию.

В теории гетеротической струны левые импульсы, связанные с 16 компактифицированными измерениями, лежат в узлах одной из двух автодуальных четных решеток $\Gamma_8 \times \Gamma_8$ или Γ_{16} . Обозначим e_i^l базисные векторы этих решеток. Тогда внутренние импульсы можно записать в виде

$$K^l = \sum_{i=1}^{16} m_i e_i^l, \quad (6.4.64)$$

где m_i — произвольные целые числа.

Дальнейшая конструкция существенно зависит от выбранного нами способа упорядочения этих 16 базисных векторов. Определим операцию упорядоченного перемножения *:

$$K * K' = \sum_{i>j} m_i m'_j e_i e_j. \quad (6.4.65)$$

Такое произведение всегда будет целым числом. Положим теперь

$$c_K(p) = (-1)^{p * K}. \quad (6.4.66)$$

Легко видеть, что при таком определении мы легко удовлетворим (6.4.63), если

$$\varepsilon(K, K') = (-1)^{K * K'}. \quad (6.4.67)$$

При этом будет автоматически выполнено и условие два-цикла (6.4.62).

В данной конкретной конструкции имеются еще специальные соотношения

$$\begin{aligned} \varepsilon(K, K') \varepsilon(K', K) &= (-1)^{K * K'}, \\ \varepsilon(K, 0) &= \varepsilon(0, K) = 1, \\ c_K(p) c_{K'}(p) &= c_{K+K'}(p). \end{aligned} \quad (6.4.68)$$

Во всем этом есть определенная доля неоднозначности, но любые два решения фундаментальных соотношений эквивалентны.

6.4.6. Полная алгебра токов

В разд. 6.4.4 и 6.4.5 мы явно описали построение генераторов глобальной симметрии $E_8 \times E_8$ в теории гетеротической струны. Эти заряды оказались распределенными по всей длине струны, и, следовательно, можно определить соответствующие плотности для каждого из этих зарядов. Набор этих плотностей образует алгебру Каца — Муди, называемую аффинной алгеброй $E_8 \times E_8$. Абстрактное описание этой алгебры уже встречалось нам в разд. 6.2, где мы обнаружили, что левые токи должны образовывать алгебру следующего вида:

$$[J_+^a(\sigma) J_+^b(\sigma')] = i f^{abc} J_+^c(\sigma) \delta(\sigma - \sigma') + \frac{k}{4\pi} \delta^{ab} \delta'(\sigma - \sigma'). \quad (6.4.69)$$

В разд. 6.2 мы описали фермионные представления для аффинных алгебр $SO(2d)$ при $k=1$. Для группы $E_8 \times E_8$ мы смогли явно представить, используя 32 фермионные координаты, лишь ее подалгебру $SO(16) \times SO(16)$, но обнаружили, что если это

представление допускает расширение до полной аффинной алгебры $E_8 \times E_8$, то мы получим правильное значение аномалии ($c=16$) в алгебре Вирасоро.

Вся конструкция генераторов группы $E_8 \times E_8$, описанная в предыдущих разделах, основана на использовании 16 левых бозонных координат. Их вклад в аномалию алгебры Вирасоро в точности равен вкладу 32 фермионных координат: $c=16$, и, следовательно, в силу единственности представления эти два способа описания теории должны быть полностью эквивалентны. Замечательно то, что теперь нам удалось получить исчерпывающее описание полной алгебры, а не только ее подалгебры $SO(16) \times SO(16)$. Более того, из предыдущих формул легко извлечь и явные выражения для самих токов. С элементами картановской подалгебры ассоциированы токи

$$H^I(\sigma) = \frac{1}{\pi} \dot{X}_L^I(\sigma) = \frac{1}{\pi} \left(p_L^I + \sum_{n \neq 0} \tilde{\alpha}_n^I e^{-2in\sigma} \right), \quad (6.4.70)$$

а с генераторами $E_K = A_K c_K$ — токи

$$E_K(\sigma) = \frac{1}{\pi} V(K, z) c_K, \quad (6.4.71)$$

где $z = \exp(2i\sigma)$. То, что эти токи образуют аффинную алгебру $E_8 \times E_8$ с $k=1$, следует прямо из построения.

6.4.7. Решетки для групп E_8 и $\text{spin}(32)/Z_2$

Решетки Γ_8 и Γ_{16} играют в теории очень важную роль, поэтому представляется уместным дать их явное описание.

Начнем с группы E_8 . Эта группа с простыми связями имеет ранг восемь и размерность 248. Следовательно, в ее решетке корней имеется 240 корней с квадратом длины, равным двум. Эти корни могут быть выражены через восемь ортонормированных векторов u_i :

$$\pm u_i \pm u_j, \quad i \neq j, \quad i, j = 1, 2, \dots, 8, \quad (6.4.72)$$

$$\frac{1}{2} (\pm u_1 \pm u_2 \dots \pm u_8), \quad \text{число знаков «+» четно.} \quad (6.4.73)$$

112 корней в (6.4.72) образуют систему корней для подалгебры $\text{spin}(16)$ алгебры E_8 , а 128 корней в (6.4.73) описывают веса одного из спинорных представлений $\text{spin}(16)$. Вместе взятые, они описывают E_8 , поскольку ее разложение относительно максимальной подалгебры $\text{spin}(16)$ как раз имеет вид $248 = 120 + 128$ (см. приложение 6.A). Решетка Γ_8 — это решетка, порожденная

денная этой системой корней. Легко видеть, что она будет четной целой решеткой. Чтобы проверить ее автодуальность, нам надо показать, что если для любого вектора e из Γ_8 произведение (v, e) является целым числом, то v будет линейной комбинацией векторов Γ_8 с целыми коэффициентами. Запишем: $v = \sum v_i u_i$, где v_i — искомые вещественные числа. Выберем $e = u_i \pm u_j$; тогда условие, состоящее в том, что $(v, e) = v_i \pm v_j$ является целым при любых i и j (и при любом выборе знака), означает, что все v_i должны быть целыми или полуцелыми. Рассмотрим произведение (v, e_0) при $e_0 = (1/2, 1/2, \dots, 1/2)$, получаем, что $\sum v_i$ должна быть четной. Если v_i целые и их сумма четная, то $v = \sum v_i u_i$ есть линейная комбинация корневых векторов $u_i \pm u_j$ с целыми коэффициентами. Если v_i полуцелые с четной суммой, то $v_i - e_0$ целые с опять-таки четной суммой, так что v получается сложением e_0 и некоторого количества корней вида $u_i \pm u_j$. В итоге мы доказали, что любой вектор, имеющий целое скалярное произведение с каждым из корней E_8 , есть линейная комбинация тех же корней; иными словами, мы доказали, что решетка корней Γ_8 группы E_8 автодуальна.

Решетка Γ_{16} описывается с помощью аналогичной конструкции. Рассмотрим веса

$$\pm u_i \pm u_j, \quad i, j = 1, 2, \dots, 16, \quad (6.4.74)$$

$$\frac{1}{2}(\pm u_1 \pm u_2 \dots \pm u_{16}), \text{ число знаков «+» четно.} \quad (6.4.75)$$

480 весов в (6.4.74) образуют систему корней для группы $\text{spin}(32)$, а 2^{15} весов в (6.4.75) являются весами спинорного представления $\text{spin}(32)$. Порожденная этими представлениями решетка содержит все точки, отвечающие двум классам эквивалентности, и является автодуальной, что нетрудно проверить, буквально повторяя предыдущие рассуждения. Поскольку представления группы $\text{spin}(2n)$ разбиваются на четыре класса эквивалентности (присоединенное, векторное, спинорное и спинорное), то надо выбрать два из них, причем таким образом, чтоб совпадали объемы единичных клеток исходной и дуальной к ней решеток. Действительно, условие автодуальности будет выполнено, если мы возьмем класс, соответствующий присоединенному представлению (т. е. решетку корней) и один из двух классов, отвечающих спинорному представлению группы $\text{spin}(16n)$ при $n = 1, 2, \dots$. В случае $n = 1$ мы получаем Γ_8 , а при $n = 2$ имеем Γ_{16} . И только в случае $n = 1$ добавленные спинорные веса действительно приводят к расширению алгебры Ли.

6.4.8. Спектр гетеротической струны

В рамках фермионного описания мы уже исследовали спектр низколежащих состояний в теориях гетеротической струны. В этом разделе мы детально рассмотрим спектр первого возбужденного уровня, используя бозонную формулировку. Кроме того, мы вычислим число состояний на произвольном уровне и убедимся, что результат совпадает с аналогичным результатом, полученным на фермионном языке.

Каждое состояние с компактифицированным левым импульсом K дает вклад, равный $K^2/2$, в $(\text{масса})^2/4$. Таким образом, чтобы найти степень вырождения, надо подсчитать, сколько векторов данной длины имеется в решетке. Эту информацию принято записывать с помощью тэта-функции решетки Γ , которая определяется формулой

$$\Theta_{\Gamma}(\tau) = \sum_{w \in \Gamma} e^{\pi i \tau |w|^2}, \quad (6.4.76)$$

где суммирование идет по всем узлам (весам) w решетки. Для четной решетки этот ряд можно переписать в виде

$$\Theta_{\Gamma}(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n e^{2\pi i n \tau}, \quad (6.4.77)$$

здесь d_n — число узлов w решетки, таких что $w \cdot w = 2n$. Итак, степени вырождения оказываются коэффициентами при соответствующих частотах в разложении (6.4.76).

В разд. 3.2.4 мы определили модулярную группу как группу преобразований

$$\tau \rightarrow \tau' = \frac{a\tau + b}{c\tau + d}, \quad (6.4.78)$$

где $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, Z)$, матричные элементы a, b, c и d целые и $ad - bc = 1$. Функция $G(\tau)$ называется модулярной формой веса $2k$, если

$$G(\tau') = (c\tau + d)^{2k} G(\tau) \quad (6.4.79)$$

для любого преобразования из модулярной группы. Тэта-функция четной автодуальной решетки в d измерениях является модулярной формой веса $d/2$. (Подробнее о модулярных формах говорится в приложении 6.В, а доказательство того, что тэта-функция автодуальной решетки — это модулярная форма веса $d/2$, приведено в приложении 9.В).

В силу теоремы единственности, приведенной в приложении 6.В, существует в точности одна модулярная форма веса четыре (с точностью до нормировки), и, следовательно, тэта-функция для решетки E_8 дается выражением

$$\begin{aligned} \Theta_{\Gamma_8} &= 1 + 240 \sum_{m=1}^{\infty} \sigma_3(m) e^{2\pi i m \tau} = \\ &= 1 + 240 e^{2\pi i \tau} + 9 \cdot 240 e^{4\pi i \tau} + \dots, \end{aligned} \quad (6.4.80)$$

представляющим собой модулярную форму веса четыре. Коэффициенты $\sigma_a(m)$ определены в приложении 6.В. Поскольку существует единственная модулярная форма веса восемь (см. приложение 6.В), то тэта-функции для решеток $\Gamma_8 \times \Gamma_8$ и Γ_{16} совпадают:

$$\begin{aligned} \Theta_{\Gamma_{16}} &= \Theta_{\Gamma_8 \times \Gamma_8} = (\Theta_{\Gamma_8})^2 = 1 + 480 \sum_{m=1}^{\infty} \sigma_7(m) e^{2\pi i m \tau} + \\ &= 1 + 480 e^{2\pi i \tau} + 129 \cdot 480 e^{4\pi i \tau} + \dots \end{aligned} \quad (6.4.81)$$

Из того факта, что две решетки имеют одну и ту же тэта-функцию, следует, что число состояний на каждом массовом уровне в обеих теориях гетеротической струны тоже будет одинаково. Перейдем теперь к вычислению собственно степени вырождения.

Как мы видели в разд. 5.3.1, число правых мод суперструны на массовом уровне N дается коэффициентами $d_R(N)$, где

$$\sum_{N=1}^{\infty} d_R(N) x^N = 16 \prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+x^n}{1-x^n} \right)^8. \quad (6.4.82)$$

Для левых бозонных мод, компактифицированных на $\Gamma_8 \times \Gamma_8$ или на Γ_{16} , коэффициенты вырождения массового уровня N при условии

$$\tilde{N} + \frac{1}{2} p_L^2 - 1 = N \quad (6.4.83)$$

определяются из формулы

$$\sum_{N=-1}^{\infty} d_L(N) x^N = \frac{1}{x} \left(1 + 480 \sum_{m=1}^{\infty} \sigma_7(m) x^m \right) \prod_{m=1}^{\infty} (1-x^m)^{-24}. \quad (6.4.84)$$

Множитель $1/x$ в (6.4.84) отвечает слагаемому -1 в (6.4.83), второй множитель есть Θ_{Γ_8} , а последний — это функция распределения для 24 бозонных координат. Число состояний гетеротической струны на массовом уровне N дается произведением

$$d(N) = d_R(N) d_L(N), \quad (6.4.85)$$

возникающим при тензорном перемножении мод правого и левого секторов. Например,

$$d(0) = 16 \cdot [480 + 24] \quad (6.4.86)$$

перечисляет $16 \cdot 8$ состояний мультиплетта супергравитации и $16 \cdot 496$ состояний мультиплетта суперсимметричной теории Янга—Миллса в присоединенном представлении групп $E_8 \times E_8$ или $\text{spin}(32)/Z_2$.

Асимптотическая плотность состояний вычисляется тем же способом, что и в разд. 5.3. А именно,

$$d(n) \sim n^{-11/2} \exp[(\sqrt{2} + 2) 2\pi \sqrt{n}], \quad (6.4.87)$$

откуда для массовой плотности получаем

$$\rho(m) \sim m^{-10} \exp(m/m_0), \quad (6.4.88)$$

где

$$m_0 = [(2 + \sqrt{2}) \pi \sqrt{\alpha'}]^{-1}. \quad (6.4.89)$$

Данное нами раньше доказательство эквивалентности двух описаний гетеротической струны, бозонного и фермионного, было несколько абстрактным: мы получили его просто как следствие из теоремы единственности для алгебры токов; теперь же мы можем провести независимую проверку этого факта, сравнивая число состояний данного массового уровня в одном и другом подходе. Вклад восьми дополнительных измерений, компактифицированных на тор группы E_8 , в статистическую сумму есть

$$\text{ch}(\hat{E}_8) = \left[1 + 240 \sum_1^{\infty} \sigma_3(n) x^n \right] \prod_1^{\infty} (1-x^m)^{-8}, \quad (6.4.90)$$

где первый множитель, тэта-функция решетки, генерируется нулевыми модами, а бесконечное произведение порождается всеми остальными, т. е. ненулевыми осцилляторами. Эта функция носит название характеристической функции \hat{E}_8 в базисном представлении. Соответствующая формула в фермионной картине, где взяты, естественно, только состояния с четным фермионным числом и просуммирован вклад обоих секторов A и P , имеет вид

$$\begin{aligned} \text{ch}(\hat{E}_8) &= \frac{1}{2} \left[\prod_1^{\infty} (1-x^{n-1/2})^{16} + \prod_1^{\infty} (1+x^{n-1/2})^{16} \right] + \\ &+ 128x \prod_1^{\infty} (1+x^n)^{16}. \end{aligned} \quad (6.4.91)$$

Тот факт, что эти два выражения равны, представляет собой аналог тождества Якоби, которое служило нам в разд. 4.3.3 для доказательства суперсимметрии. И действительно, имеет место равенство

$$\begin{aligned} \text{ch}(\widehat{SO}(32)) &= \left(1 + 480 \sum_1^{\infty} \sigma_7(n) x^n\right) \prod_1^{\infty} (1 - x^n)^{-16} = \\ &= \frac{1}{2} \left[\prod_1^{\infty} (1 - x^{n-1/2})^{32} + \prod_1^{\infty} (1 + x^{n-1/2})^{32} \right] + 2^{15} x^2 \prod_1^{\infty} (1 + x^n)^{32}, \end{aligned} \quad (6.4.92)$$

а кроме того,

$$\text{ch}(\widehat{SO}(32)) = \text{ch}(\widehat{E}_8 \times \widehat{E}_8) = [\text{ch}(\widehat{E}_8)]^2. \quad (6.4.93)$$

Доказательство этого утверждения основывается на одной теореме из теории модулярных форм, приведенной в приложении 6.В.

В предыдущем разделе мы уже описали спектр безмассовых состояний гетеротической струны на бозонизованном языке, рассмотрим теперь первый возбужденный уровень $N=1$. 256 правых мод представляются как

$$(44, 1) \oplus (84, 1) \oplus (128, 1). \quad (6.4.94)$$

Первое число в скобках относится к группе $\text{spin}(9)$ (это «спин»), а второе — к $E_8 \times E_8$, или $\text{spin}(32)/Z_2$, и этот мультиплет был подробно описан в разд. 5.3.1. Левых мод с $N=1$ имеется всего 73 764, и записываются они следующим образом:

$$(44, 1) \oplus (9, 496) \oplus (1, 69256). \quad (6.4.95)$$

Приведем их явную конструкцию. Массивный тензор $(44, 1)$ составлен из

$$\bar{\alpha}_{-1}^i \bar{\alpha}_{-1}^j |0\rangle, \quad \bar{\sigma}_{-2}^i |0\rangle. \quad (6.4.96)$$

Массивные векторы $(9, 496)$ разлагаются относительно $SO(8)$ на $(8, 496) \oplus (1, 496)$. Состояния $(8, 496)$ суть

$$\bar{\alpha}_{-1}^i \bar{\alpha}_{-1}^j |0\rangle, \quad \bar{\alpha}_{-1}^i |K\rangle, \quad (6.4.97)$$

где $K^2=0$. Остающиеся $(1, 496)$ состояются из $\bar{\alpha}_{-2}^i |0\rangle$ и 480 состояний $|K\rangle$ с $K^2=4$. Поскольку в решетке имеется всего 61 920 узлов с $K^2=4$, то свободными остаются еще 61 440 штук, которые вместе с 136 состояниями вида

$$\bar{\alpha}_{-1}^i \alpha_{-1}^j |0\rangle \quad (6.4.98)$$

и 7680 состояниями вида

$$\bar{\alpha}_{-1}^i |K\rangle, \quad K^2=2, \quad (6.4.99)$$

и образуют $(1, 69256)$.

По группе $E_8 \times E_8$ этот мультиплет разлагается как

$$69256 = (248, 248) \oplus 2(1, 1) \oplus (3875, 1) \oplus (1, 3875), \quad (6.4.100)$$

а по группе $\text{spin}(32)$ — как

$$69256 = 2^{15} \oplus 35960 \oplus 527 \oplus 1. \quad (6.4.101)$$

Мультиплет 35 960 представляет собой антисимметричный тензор четвертого ранга, а мультиплет 527 — симметричный бесследовый тензор второго ранга. Перемножив тензорно правые и левые моды, получаем всего

$$256 \times 73764 = 18883584 \quad (6.4.102)$$

состояния на первом возбужденном уровне гетеротической струны! На этом уровне спиноры $\text{spin}(32)/Z_2$ должны быть абсолютно стабильны, что представляет собой довольно интересное предсказание в такой теории.

6.5. Резюме

В этой главе мы описали два метода введения калибровочных симметрий в струнных теориях. Метод Чана — Патона, который восходит ко временам возникновения дуальных моделей, состоит в помещении «зарядов» на концах открытой струны. Им можно воспользоваться в случае любой классической группы, сопоставляя испускаемым струнам матрицы из фундаментального представления. Однако в случае исключительных групп он неприменим. В гл. 10 мы еще покажем, что единственная возможность получить для суперструны типа I теорию, свободную от аномалий, — это фиксировать в качестве калибровочной группы группу $SO(32)$.

Второй метод введения калибровочной симметрии основан на представлении о том, что заряд может быть распределен вдоль всей замкнутой струны. Соответствующие плотности образуют алгебру Каца — Муди, которую можно рассматривать как двумерную алгебру токов. Симметрии такого типа можно описывать как на языке бозонов, так и на языке фермионов. В бозонном варианте вводятся дополнительные измерения, которые компактифицируются так, чтобы образовать в итоге максимальный тор соответствующей алгебры Ли. Сами генераторы, образующие полную алгебру токов, можно представить в виде вершинных операторов с помощью конструкции Френкеля, Каца

и Сигала. В теории гетеротической струны необходимо потребовать, чтобы импульсы, канонически сопряженные к координатам тора, образовывали автодуальную 16-мерную решетку, что выделяет в качестве единственно допустимых групп группы $E_8 \times E_8$ и $\text{spin}(32)/Z_2$.

Приложение 6.A. Некоторые сведения о группе E_8

Цель настоящего приложения — дать элементарную сводку некоторых избранных свойств как самой исключительной группы E_8 , так и некоторых ее подгрупп. Среди всех конечномерных исключительных алгебр Ли алгебра группы E_8 является самой обширной — все остальные оказываются ее подалгебрами. Хотя, построив представление вершинными операторами, мы явно описали алгебру E_8 и тем самым доказали, что она действительно существует, но стоит дать ее прямое и возможно более наглядное описание.

Мы собираемся построить алгебру Ли группы E_8 , отталкиваясь от подалгебры $SO(16)$. Генераторы алгебры $SO(16)$ — это операторы J_{ij} (так как $J_{ij} = -J_{ji}$, то всего их имеется $16 \cdot 15/2 = 120$ штук), удовлетворяющие следующим перестановочным соотношениям:

$$[J_{ij}, J_{kl}] = J_{il}\delta_{jk} - J_{jl}\delta_{ik} - J_{ik}\delta_{jl} + J_{jk}\delta_{il}. \quad (6.A.1)$$

К ним мы добавим операторы Q_α , преобразующиеся по $SO(16)$ как спиноры положительной киральности. Размерность этого представления, как мы знаем из приложения 5.A, равна $2^7 = 128$, и, следовательно, возникающая алгебра Ли, если нам действительно удастся ее построить, будет иметь размерность $120 + 128 = 248$. Утверждение, что Q_α преобразуются по $SO(16)$ как спиноры, означает, что¹⁾

$$[J_{ij}, Q_\alpha] = (\sigma_{ij})_{\alpha\beta} Q_\beta, \quad (6.A.2)$$

и чтобы полностью описать 248-элементную алгебру Ли, которую мы пытаемся построить, надо задать еще и коммутаторы

¹⁾ Как и в приложении 5.A, гамма-матрицы обозначаются γ^i , $i = 1, \dots, 16$, а генераторы $SO(16)$ в спинорном представлении — как $\sigma_{ij} = [\gamma_i, \gamma_j]/4$. Оператор киральности есть $\gamma = \gamma_1 \gamma_2 \dots \gamma_{16}$. Кроме того, мы определяем антисимметризованные произведения n гамма-матриц: $\gamma_{i_1 i_2 \dots i_n} = (\gamma_{i_1} \gamma_{i_2} \dots \gamma_{i_n} \pm \text{перестановки})/n!$; отсюда $\gamma_{i_1 i_2} = 2\sigma_{i_1 i_2}$. Подобно $SO(8)$ гамма-матрицам, построенным в предыдущей главе, гамма-матрицы для $SO(16)$ тоже можно выбрать вещественными; действительно, их можно конструировать так же, как в случае $SO(8)$. Аналогично и спиноры положительной киральности Q_α можно выбрать вещественными, значит, нет нужды различать Q_α и \bar{Q}_α . В противном случае нам для получения вещественной алгебры Ли пришлось бы добавить еще и спиноры \bar{Q}_α .

$[Q_\alpha, Q_\beta]$. (Подчеркнем — наша цель построить алгебру, а не супералгебру Ли, поэтому нам нужны коммутаторы, а не антикоммутаторы!) Из свойств группы $SO(16)$ они определяются однозначно с точностью до коэффициента:

$$[Q_\alpha, Q_\beta] = (\sigma_{ij})_{\alpha\beta} J_{ij}. \quad (6.A.3)$$

Хотя устройство группы $SO(16)$ не запрещает нам домножить правую часть (6.A.3) на произвольную константу, но этот множитель может быть тривиально поглощен за счет перерастяжки Q_α , поскольку предыдущие формулы нормировку Q_α не фиксируют. Таким образом, если алгебра Ли с указанным составом по группе $SO(16)$ действительно существует, то она должна задаваться формулами (6.A.1), (6.A.2) и (6.A.3), и только этими формулами.

Чтобы определить, могут ли эти формулы действительно задавать алгебру Ли, надо в первую очередь проверить возможность выполнения тождеств Якоби. Заметим, что значительная часть этих тождеств дополнительной проверки не требует. Действительно, тождество для трех J всего лишь утверждает, что $SO(16)$ является алгеброй Ли, тождество JJQ означает, что спиноры действительно образуют представление группы $SO(16)$, а тождество QQJ можно свести к тождеству для QQQ с помощью (6.A.3). Итак, мы видим, что критическим пунктом для всей конструкции оказывается следующее тождество Якоби:

$$[[Q_\alpha, Q_\beta], Q_\gamma] + [[Q_\beta, Q_\gamma], Q_\alpha] + [[Q_\gamma, Q_\alpha], Q_\beta] = 0.$$

Используя (6.A.3), мы можем явно выписать это тождество, выполнение которого является необходимым условием существования алгебры Ли группы E_8 с заданным составом по группе $SO(16)$:

$$(\sigma_{ij})_{\alpha\beta} (\sigma_{ij})_{\gamma\delta} + (\sigma_{ij})_{\beta\gamma} (\sigma_{ij})_{\alpha\delta} + (\sigma_{ij})_{\gamma\alpha} (\sigma_{ij})_{\beta\delta} = 0. \quad (6.A.4)$$

При этом, конечно, нам надо доказывать это тождество лишь при тех значениях индексов α, β и γ , которые отвечают спинорам одной и той же киральности. Имеется поразительное сходство между этим тождеством и тем, которое понадобилось нам в приложении 4.A для доказательства существования суперсимметричной теории Янга — Миллса, и это не случайность; одна из задач, стоящих перед нами в этом приложении, помимо собственно описания некоторых полезных свойств группы E_8 , заключается в том, чтобы подчеркнуть аналогию между E_8 и суперсимметричными системами.

Для доказательства (6.A.4) заметим, что произведение любых двух спиноров можно разложить по полной системе мат-

риц Дирака, а следовательно, (6.A.4) будет иметь место, если мы докажем, что оно выполняется после свертки с $(\gamma_{k_1 k_2 \dots k_n})_{\alpha\beta}$ для любого n и всевозможных k_1, k_2, \dots, k_n . Поскольку α и β имеют одинаковую киральность, то можно ограничиться только четными n , а так как (6.A.3) по α и β антисимметрично, то реально нужны лишь те значения n , при которых $(\gamma_{k_1 k_2 \dots k_n})_{\alpha\beta}$ тоже антисимметрично по этим индексам, и, используя простейшие свойства γ матриц, мы получаем $n = 2, 6, 10$ или 14 . Если, кроме того, во-первых, учесть тождество $\gamma_{i_1 \dots i_k} = \epsilon_{i_1 \dots i_{16}} \times \times \gamma_{i_{k+1} \dots i_{16}} \cdot \bar{\gamma}/(16 - k)!$, а во-вторых, тот факт, что можно пренебречь оператором $\bar{\gamma}$, если он действует на положительно-киральные спинорные индексы, то видно, что достаточно проверить лишь случаи $n = 2$ и $n = 6$. (Почему существенны только $n = 2$ и $n = 6$, можно понять и из совершенно других соображений: заметим, что в антисимметричной комбинации Q_α и Q_β имеется

$$\frac{128 \cdot 127}{2} = \frac{16 \cdot 15}{2} + \frac{16 \cdot 15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11}{6!} \quad (6.A.5)$$

независимых членов. Два числа, стоящие в правой части (6.A.5), — это как раз число независимых компонент $\gamma_{i_1 i_2 \dots i_k}$ для $k = 2$ и $k = 6$ соответственно.)

Свертывая (6.A.3) с $\gamma_{i_1 i_2}$ или, что эквивалентно, с $\sigma_{i_1 i_2}$, получаем

$$(\text{tr}_+ \sigma_{kl} \sigma_{ij}) \cdot (\sigma_{ij})_{\gamma\delta} - 2(\sigma_{ij} \sigma_{kl} \sigma_{ij})_{\gamma\delta}, \quad (6.A.6)$$

где tr_+ обозначает след в пространстве спиноров с положительной киральностью. То, что это выражение обращается в нуль (для $SO(16)$), следует из обычной дираковской алгебры. (Слагаемые в (6.A.6) равны соответственно $\mp 256(\sigma_{kl})_{\gamma\delta}$.) Следующая свертка с $\gamma_{i_1 \dots i_6}$ дает

$$-2(\sigma_{jk} \gamma_{i_1 \dots i_6} \sigma_{jk})_{\gamma\delta}, \quad (6.A.7)$$

что опять-таки обращается в нуль для $SO(16)$ с помощью простейших алгебраических манипуляций с гамма-матрицами. Итак, мы завершили наше элементарное построение алгебры Ли, известной как алгебра группы E_8 .

В точности так же, как суперсимметричные теории Янга — Миллса с минимальным набором полей существуют в нескольких измерениях: 3, 4, 6 и 10, из которых 10 является просто максимальным, есть не одна, а несколько возможностей построить алгебру Ли, добавляя вещественные спиноры к присоединенному представлению $SO(N)$. Помимо варианта $N = 16$,

который приводит нас к E_8 , можно взять $N = 9$ и $N = 8$. Добавив к тридцатишестимерному присоединенному представлению $SO(9)$ 16-компонентные спиноры и буквально повторяя описанную выше схему, мы получим алгебру Ли, известную как исключительная алгебра F_4 . Добавив к 28-мерному присоединенному представлению $SO(8)$ восьмикомпонентные спиноры положительной или отрицательной киральности, мы построим алгебру Ли группы $SO(9)$ в некотором новом базисе, который отличается от общепринятого (и более простого) преобразованием триальности группы $SO(8)$.

Теперь мы намереваемся описать некоторые подгруппы группы E_8 . В существовании по крайней мере одной подгруппы, $SO(16)$, мы уже убедились, а она, в свою очередь, содержит в качестве подгруппы $SO(10) \times SO(6)$. Легко видеть, что присоединенное представление $SO(16)$ разлагается относительно $SO(10) \times SO(6)$ как

$$(45, 1) \oplus (1, 15) \oplus (10, 6). \quad (6.A.8)$$

Два первых фактора — это присоединенные представления групп $SO(10)$ и $SO(16)$, а последний представляет собой произведение векторных представлений этих групп. Вопрос: как преобразуются относительно $SO(10) \times SO(6)$ спиноры группы $SO(16)$? Как мы установили в приложении 5.A, чтобы построить спинор $SO(16)$, надо ввести 16 гамма-матриц $\gamma_1 \dots \gamma_{16}$, и тогда первые десять матриц можно рассматривать как гамма-матрицы для $SO(10)$, а шесть оставшихся — как гамма-матрицы для $SO(6)$. Таким образом, спинор $SO(16)$ преобразуется как произведение спинора $SO(10)$ и спинора $SO(6)$. Что можно сказать об их киральности? Оператор киральности в $SO(16)$ — это $\bar{\gamma} = \gamma_1 \dots \gamma_{16}$, в $SO(10)$ — это $\gamma^{(10)} = \gamma_1 \dots \gamma_{10}$, а в $SO(6)$ — это $\gamma^{(6)} = \gamma_{11} \dots \gamma_{16}$. Очевидно, что

$$\bar{\gamma} = \gamma^{(10)} \cdot \gamma^{(6)}. \quad (6.A.9)$$

Таким образом, положительно-киральный спинор Q_α группы $SO(16)$ разбивается на части либо с $\gamma^{(10)} = \gamma^{(6)} = +1$, либо с $\gamma^{(10)} = \gamma^{(6)} = -1$. Кроме того, из приложения 5.A нам известны размерности киральных спиноров для $SO(10)$ и $SO(6)$ — это соответственно 16 и 4. Если теперь обозначить 16 и $\bar{16}$ положительно и отрицательно киральные спиноры $SO(10)$ и аналогично 4 и $\bar{4}$ для $SO(6)$, то можно записать $SO(10) \times SO(6)$ разложение 129-мультиплета группы $SO(16)$ в виде

$$128 = (16, 4) \oplus (\bar{16}, \bar{4}). \quad (6.A.10)$$

Формулы (6.A.8) и (6.A.10) и дают полное описание $SO(10) \times SO(6)$ -разложения присоединенного представления группы E_8 .

Теперь мы собираемся описать другую исключительную группу, группу E_6 , причем мы будем рассматривать ее как подгруппу в E_8 . Прежде всего заметим, что генераторы группы $SO(6)$ в представлении $\mathbf{4}$ — это комплексные эрмитовы матрицы 4×4 , которые в силу простоты алгебры Ли группы $SO(6)$ обязаны быть бесследовыми, а потому могут быть отождествлены с некоторыми генераторами группы $SU(4)$. Следовательно, алгебра Ли группы $SO(6)$ является подалгеброй в алгебре Ли группы $SU(4)$. Но поскольку число генераторов в этих двух алгебрах одинаково (оно равно 15), то алгебра $SO(6)$ не может быть собственной подалгеброй алгебры $SU(4)$ и эти алгебры обязаны совпадать¹⁾. Кроме того, из этого рассуждения видно, что фундаментальные представления $\mathbf{4}$ и $\bar{\mathbf{4}}$ группы $SU(4)$ будут соответственно положительно и отрицательно киральными спинорами по $SO(6)$. И наоборот, фундаментальное представление $\mathbf{6}$ группы $SO(6)$ будет по $SU(4)$ антисимметричным тензором второго ранга, имеющим как раз $4 \cdot 3/2 = 6$ компонент.

В приведенных выше рассуждениях мы могли бы, вместо того чтобы говорить о подалгебре $SO(10) \times SO(6)$ алгебры E_8 , выбрать подалгебру $SO(10) \times SU(4)$. $SU(4)$, в свою очередь, имеет подалгебру $U(1) \times SU(3)$. Если обозначить верхним индексом $U(1)$ -заряд, то $\mathbf{4}$ -мультиплет $SU(4)$ разложится относительно $U(1) \times SU(3)$ как $\mathbf{1}^3 \oplus \mathbf{3}^{-1}$. Представление $\mathbf{6}$ группы $SU(4)$ (являющееся, как мы только что выяснили, антисимметричным произведением двух представлений $\mathbf{4}$) преобразуется по $U(1) \times SU(3)$ как $\mathbf{3}^2 \oplus \bar{\mathbf{3}}^{-2}$, а присоединенное представление $SU(4)$ (классифицирующееся как $\mathbf{4} \otimes \bar{\mathbf{4}}$ после удаления синглета) разлагается как $\mathbf{8}^0 \oplus \mathbf{3}^{-4} \oplus \bar{\mathbf{3}}^4 \oplus \mathbf{1}^0$ по $SU(3)$ ($\mathbf{8}$ — это присоединенное представление $SU(3)$). Подставив теперь все это в формулы (6.A.8) и (6.A.10), мы получаем $SO(10) \times U(1) \times SU(3)$ -содержание присоединенного представления группы E_8 :

$$\begin{aligned} 248 = & ((\mathbf{45}, \mathbf{1})^0 \oplus (\mathbf{1}, \mathbf{1})^0 \oplus (\mathbf{16}, \mathbf{1})^3 \oplus (\bar{\mathbf{16}}, \mathbf{1})^{-3}) \\ & \oplus ((\bar{\mathbf{16}}, \mathbf{3})^{-1} \oplus (\mathbf{10}, \mathbf{3})^2 \oplus (\mathbf{1}, \mathbf{3})^{-4}) \\ & \oplus ((\bar{\mathbf{16}}, \bar{\mathbf{3}})^1 \oplus (\mathbf{10}, \bar{\mathbf{3}})^{-2} \oplus (\mathbf{1}, \bar{\mathbf{3}})^4) \oplus (\mathbf{1}, \mathbf{8})^0. \end{aligned} \quad (6.A.11)$$

Отметим теперь, что присоединенное представление $\mathbf{248}$ генераторов содержит $\mathbf{78}$, являющихся $SU(3)$ -синглетами. Поскольку

¹⁾ В этом также можно убедиться, построив схемы Дынкина для $SU(N)$ и $SO(N)$ и заметив, что для $SU(4)$ и $SO(6)$ они совпадают.

коммутатор двух $SU(3)$ -синглетов тоже должен быть синглетом, то мы видим, что эти $\mathbf{78}$ генераторов образуют некую подалгебру в E_8 ; это и есть алгебра Ли исключительной группы E_6 . Очевидно, что у E_6 максимальной подалгеброй будет $SO(10) \times U(1)$, причем присоединенное представление E_6 разлагается по этой подалгебре как

$$\mathbf{78} = \mathbf{45}^0 \oplus \mathbf{16}^3 \oplus \bar{\mathbf{16}}^{-3} \oplus \mathbf{1}^0. \quad (6.A.12)$$

Более того, в (6.A.11) участвуют $\mathbf{27}$ триплетов $SU(3)$. Под действием E_6 эти триплеты должны отображаться в себя, а значит, у E_6 должно быть $\mathbf{27}$ -мерное представление со следующим $SO(10) \times U(1)$ содержанием:

$$\mathbf{27} = \mathbf{16}^{-1} \oplus \mathbf{10}^2 \oplus \mathbf{1}^{-4}. \quad (6.A.13)$$

В качестве проверки заметим, что $\mathbf{16} \cdot (-1) + \mathbf{10} \cdot 2 + \mathbf{1} \cdot (-4) = 0$, т. е. след генератора $U(1)$ в $\mathbf{27}$ -мультиплете группы E_6 равен нулю. Это согласуется с общим утверждением, что у простой алгебры Ли след любого генератора и в любом представлении есть нуль. (Отсюда также следует, что представление $\mathbf{27}$ неприводимо; действительно, если убрать из (6.A.13) хотя бы один член, то след $U(1)$ станет отличен от нуля.) Представлению $\mathbf{27}$ комплексно сопряжено еще одно представление группы E_6 :

$$\bar{\mathbf{27}} = \bar{\mathbf{16}}^1 \oplus \mathbf{10}^{-2} \oplus \mathbf{1}^4. \quad (6.A.14)$$

Очевидно, что наборы (6.A.13) и (6.A.14) не изоморфны, а значит, $\mathbf{27}$ и $\bar{\mathbf{27}}$ — это два комплексных, не эквивалентных своим сопряженным представлений E_6 . Из всех исключительных алгебр Ли алгебра E_6 является единственной, имеющей комплексные представления. Если вернуться к формуле (6.A.11), то можно получить следующую формулу для разложения присоединенного представления E_8 относительно $E_6 \times SU(3)$:

$$\mathbf{248} = (\mathbf{78}, \mathbf{1}) \oplus (\mathbf{1}, \mathbf{8}) \oplus (\mathbf{27}, \mathbf{3}) \oplus (\bar{\mathbf{27}}, \bar{\mathbf{3}}). \quad (6.A.15)$$

Выделив вместо $SU(3)$ подгруппу $SU(2)$ и действуя вполне аналогичным образом, мы пришли бы к еще одной исключительной алгебре, E_7 , имеющей $\mathbf{133}$ генератора, но подробно останавливаться на этом мы не будем. Кроме E_6 , E_7 и E_8 есть еще две исключительные алгебры Ли — F_4 и G_2 . Что касается F_4 , то мы уже отмечали, что ее можно построить, отталкиваясь от $SO(9)$ и добавляя спиноры, т. е. буквально повторяя путь от $SO(16)$ к E_8 . Эту $SO(9)$ -конструкцию можно очевидным образом вложить в $SO(16)$ -конструкцию, и в результате мы получим естественное вложение F_4 в E_8 . При этом группа G_2 возни-

кает как коммутирующая с F_4 подгруппа, т. е. так же, как в вышеописанной конструкции E_8 возникала как коммутирующая с $SU(3)$ подгруппа в E_8 . Таким образом, E_8 содержит подгруппу $G_2 \times F_4$. (Есть множество других и, возможно, более простых способов описания G_2 . Она является группой симметрии таблицы умножения для октонионов; она, кроме того, является подгруппой группы $SO(7)$, оставляющей неподвижным некоторый элемент спинорного представления.)

Мы закончим этот раздел кратким перечислением некоторых других максимальных подгрупп в E_8 и в E_6 . У E_8 имеется максимальная подгруппа $SU(5) \times SU(5)$, порождающая разложение

$$248 = (24, 1) \oplus (1, 24) \oplus (5, \bar{10}) \oplus (10, 5) \oplus (\bar{5}, 10) \oplus (\bar{10}, \bar{5}). \quad (6.A.16)$$

У E_6 есть максимальная подгруппа $SU(6) \times SU(2)$, дающая соответственно

$$\begin{aligned} 78 &= (35, 1) \oplus (1, 3) \oplus (20, 2), \\ 27 &= (\bar{15}, 1) \oplus (6, 2). \end{aligned} \quad (6.A.17)$$

Здесь через 2 обозначено фундаментальное, а через 3 — присоединенное представление $SU(2)$. 6 — это фундаментальное представление $SU(6)$, $\bar{15}$ — антисимметричное произведение двух представлений $\bar{6}$, 35 — присоединенное представление и 20 — антисимметричный самодуальный тензор третьего ранга. У E_6 есть еще максимальная подгруппа $SU(3) \times SU(3) \times SU(3)$, которая будет играть некоторую роль в гл. 16. Она порождает разложение

$$\begin{aligned} 78 &= (8, 1, 1) \oplus (1, 8, 1) \oplus (1, 1, 8) \oplus (3, 3, 3) \oplus (\bar{3}, \bar{3}, \bar{3}), \\ 27 &= (3, \bar{3}, 1) \oplus (1, 3, \bar{3}) \oplus (\bar{3}, 1, 3). \end{aligned} \quad (6.A.18)$$

Все эти подгруппы и соответствующие им разложения можно получить (проявив некоторое терпение), действуя примерно так же, как мы действовали выше. Например, чтобы получить формулу (6.A.18), следует фиксировать в $SO(10) \subseteq E_6$ максимальную подгруппу $SU(3) \times U(1) \times SU(2) \times SU(2)$ (представление 10 группы $SO(10)$ разлагается как $(3, 1, 1)^1 \oplus (\bar{3}, 1, 1)^{-1} \oplus (1, 2, 2)^0$). Воспользовавшись (6.A.12) для разложения 78 мультиплета E_6 , получаем 16 генераторов, коммутирующих с $SU(3)$, а из их $U(1) \times SU(2) \times SU(2)$ -содержания увидим, что они порождают $SU(3) \times SU(3)$, и не без некоторого усилия получим формулу (6.A.18).

¹⁾ Эта подгруппа используется в $SO(10)$ -моделях великого объединения.

Приложение 6.В. Модулярные формы

В разд. 3.3 мы ввели понятие модулярного преобразования как

$$\tau \rightarrow \tau' = \frac{a\tau + b}{cd + d}, \quad (6.B.1)$$

где a, b, c и d — целые числа и $ad - bc = 1$. Такая совокупность преобразований образует группу, называемую модулярной группой и изоморфную группе $SL(2, Z)$. Функция $G(\tau)$ называется модулярной формой веса $2k$, если

$$G(\tau') = (c\tau + d)^{2k} G(\tau) \quad (6.B.2)$$

для любого преобразования из модулярной группы. Модулярные формы играют фундаментальную роль в теории чисел, однако обсуждение этого вопроса завело бы нас, к сожалению, слишком далеко в сторону. Примеры модулярных форм веса $2k$ дают нам ряды Эйзенштейна:

$$G_{2k}(\tau) = \sum_{(m, n) \neq (0, 0)} (m + n\tau)^{-2k}, \quad (6.B.3)$$

которые сходятся при $k = 2, 3, \dots$. То, что (6.B.3) действительно определяет модулярную форму, можно доказать довольно легко. Идея доказательства основывается на том факте, что сумму в (6.B.3) можно рассматривать как сумму по всем узлам решетки в комплексной плоскости, которая определяется (как именно — описано в разд. 3.3) значением комплексного параметра τ . Модулярные преобразования отображают эту решетку саму на себя (это свойство и послужило поводом для введения такой группы в разд. 3.3), вследствие чего закон преобразования (6.B.3) и оказывается столь простым. Основная теорема теории модулярных форм утверждает, что любая голоморфная модулярная форма веса $2k$ может быть представлена в виде полинома по G_4 и G_6 ¹⁾. Поскольку веса модулярных форм при умножении складываются, то единственная модулярная форма веса восемь — это G_4^2 . Наименьший вес, при котором имеются хотя бы две независимые модулярные формы, равен 12, соответствующие две формы — это G_4^3 и G_6^2 .

Функцию G_{2k} можно переписать в другом виде:

$$G_{2k}(\tau) = 2\zeta(2k) \left[1 + c_{2k} \sum_{m=1}^{\infty} \sigma_{2k-1}(m) e^{2\pi i m \tau} \right], \quad (6.B.4)$$

¹⁾ Доказательство этой теоремы довольно просто. Доступное изложение можно найти в книге: Ж. П. Серр, «Курс арифметики». — М.: Мир, 1972.

где ζ — дзета-функция Римана

$$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-z}, \quad (6.B.5)$$

$$c_{2k} = \frac{-(2\pi i)^{2k}}{(2k-1)! \zeta(2k)} \quad (6.B.6)$$

и

$$\sigma_{\alpha}(k) = \sum_{d|k} d^{\alpha}. \quad (6.B.7)$$

Сумма в (6.B.7) идет по всем целым положительным дивизорам k . Отсюда $\sigma_{\alpha}(1) = 1$; $\sigma_{\alpha}(2) = 1 + 2^{\alpha}$ и т. д., а вот несколько первых значений c_{2k} : $c_4 = 240$, $c_6 = -504$ и $c_8 = 480$.

Можно показать, что тэта-функция любой целой автодуальной решетки в d -мерии есть модулярная форма веса $d/2$, что будет доказано в приложении 9.B. В силу теоремы единственности для модулярных форм тэта-функция решетки E_8 должна быть пропорциональна G_4 , а так как член, отвечающий нулевой частоте, равен единице, то коэффициент пропорциональности фиксируется, и мы получаем

$$\Theta_{E_8} = 1 + 240 \sum_{m=1}^{\infty} \sigma_3(m) e^{2\pi i m \tau}, \quad (6.B.8)$$

т. е. модулярную форму веса четыре. Поскольку для веса восемь существует единственная модулярная форма, равная G_4^2 или G_8 , то решетки $\Gamma_8 \times \Gamma_8$ и Γ_{16} должны иметь одну и ту же тэта-функцию:

$$\begin{aligned} \Theta_{\Gamma_{16}} &= \Theta_{\Gamma_8 \times \Gamma_8} = (\Theta_{E_8})^2 = 1 + 480 \sum_{m=1}^{\infty} \sigma_7(m) e^{2\pi i m \tau} = \\ &= \left(1 + 240 \sum_{m=1}^{\infty} \sigma_3(m) e^{2\pi i m \tau} \right)^2. \end{aligned} \quad (6.B.9)$$

7. Древесные амплитуды

Во вводной главе мы уже вкратце описывали, как происходит взаимодействие струн. Мы показали, что струнные фейнмановские диаграммы соответствуют мировым поверхностям, в которых кодируются вся пространственно-временная история струны, последовательность ее разрывов и склеек. После аналитического продолжения к евклидовой метрике все диаграммы могут быть расклассифицированы в соответствии с их топологией. Порядок любой данной диаграммы в теории возмущений определяется числом ручек у поверхности (в теории, содержащей открытые струны, еще и числом дырок) и количеством внешних линий. Для любого заданного процесса лидирующий член дается древесным приближением. Коль скоро нам известно древесное приближение (соответствующее самосогласованной классической теории поля), вся квантовая теория может быть в принципе восстановлена по унитарности (по модулю возможного появления таких параметров, как, например, угол θ , которые, естественно, не проявляются в теории возмущений). Сама же квантовая теория будет согласованной, если она позволит получить конечные матричные элементы для S -матрицы, удовлетворяющие требованиям унитарности, причинности и т. д. На практике все эти вопросы рассматриваются в контексте теории возмущений, которая в первую очередь проверяется на перенормируемость и отсутствие аномалий, разрушающих калибровочные симметрии.

В древесном приближении амплитуда рассеяния M состояний замкнутой струны, лежащих на массовой поверхности, описывается мировой поверхностью, топологически эквивалентной сфере, на которой имеется M отмеченных точек z_i , изображающих внешние частицы, что представлено на рис. 7.1, а. В общем случае надо интегрировать по всем различным, с точностью до конформной эквивалентности, геометриям данной топологии и значениям переменных z_i . Но, как было установлено в разд. 1.4.3, любая метрика на сфере конформно эквивалентна

стандартной сферической метрике, а сама сфера (после удаления одной точки она стереографически проектируется на плоскость) инвариантна относительно действия $SL(2, C)$ -подгруппы конформной группы. Следовательно, на уровне древесных диаграмм нет нужды интегрировать по метрикам и можно произвольно фиксировать на сфере любые три точки из набора z_i . В такой диаграмме нет никакого естественного способа упорядочения частиц, и поскольку в данном порядке эта диаграмма

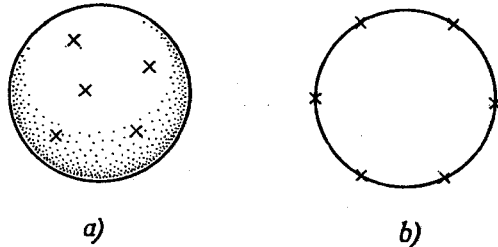


Рис. 7.1. Конфигурация мировой поверхности, отвечающей древесным диаграммам замкнутой (а) и открытой (б) струн.

является единственной, она должна быть симметрична по тождественным бозонам и антисимметрична по тождественным фермионам.

Напротив, мировая поверхность открытой струны обязательно имеет границу, и точки, изображающие испускание некоторого состояния открытой струны, лежат на этой границе. При этом становится существенным вопрос о циклическом упорядочении точек, лежащих на связанном куске границы. Например, в гл. 1 и подробнее в разд. 6.1 мы убедились, что для включения симметрии Янга — Миллса необходимо просуммировать по всем циклически неэквивалентным способам упорядочения с определенными теоретико-групповыми весами. Диаграмма, соответствующая древесному приближению, — это диск; она изображена на рис. 7.1, а и имеет связную границу, а это значит, что необходимо указывать циклический порядок всей совокупности внешних состояний. Древесная амплитуда «смешанного» процесса, в котором участвуют и состояния замкнутых струн, изобразится поверхностью с дополнительными внутренними точками, ассоциированными с этими струнами.

Цель настоящей главы — дать явное и по возможности подробное описание древесных амплитуд. В основном мы будем пользоваться «старым» операторным подходом, представляющим собой действительно эффективный способ вычислений. По сравнению с формализмом гл. 1 в операторном подходе

некоторые свойства амплитуд такие, например, как унитарность, видны гораздо лучше, за что, правда, приходится платить потерей наглядности при обсуждении других свойств, таких, как, например, кроссинг-симметрия. Но в общем оба этих метода очень тесно связаны друг с другом; как мы увидим в дальнейшем, операторный подход дает нам явный рецепт построения мировой поверхности из ее простейших элементов. Последнее обстоятельство является центральным пунктом в развитии еще одного, совершенно нового способа описания взаимодействия, который будет предложен в гл. 11.

7.1. Открытые бозонные струны

Сегодняшнее понимание теории струн еще не достигло того уровня, когда можно было бы выписать лагранжиан и, следуя стандартным предписаниям, вывести из него совокупность правил построения фейнмановских диаграмм, полностью задающих петлевое разложение всей квантовой теории¹⁾. В первой главе мы предложили один весьма естественный способ определения струнных амплитуд как суммы по всевозможным различным, с точностью до конформной эквивалентности, внутренним геометриям мировых поверхностей и показали, что таким образом возникают хорошо определенные древесные амплитуды. Здесь мы собираемся описать другой подход, который, впрочем, приводит к тем же результатам. Подход этот восходит к самым первым шагам развития дуальных теорий. Его основная идея состоит в том, чтобы сформулировать некоторую разумную совокупность правил построения диаграмм из некоторых вершин и пропагаторов и далее показать, что получающиеся амплитуды рассеяния будут удовлетворять всем тем свойствам, которые необходимы для получения осмысленной квантовой теории. Судя по внешнему виду этих правил, можно было бы ожидать, что они выводятся из некоторого лагранжиана, хотя сам этот лагранжиан никому точно не известен. Оказывается, что такие «правила игры» дают удовлетворительный результат только для лежащих на массовой поверхности матричных элементов S -матрицы, и именно это обстоятельство делает крайне затруднительной любую попытку двинуться задним ходом, т. е. вывести некоторое действие струнной теории поля, которое и породит эти диаграммы. Нетривиальным оказывается и обобщение этой техники на петлевые диаграммы. Однако в том операторном подходе, который нам предстоит сейчас сформулировать, будет явная

¹⁾ В этом направлении уже был достигнут определенный прогресс, но в данной книге мы не будем пытаться обозревать эти результаты.

унитарность, особенно на древесном и однопетлевом уровне, где вся эта техника работает особенно эффективно. В данном разделе мы рассмотрим древесные амплитуды для рассеяния открытых струн.

7.1.1. Структура древесных амплитуд

Основные ингредиенты для построения фейнмановских диаграмм — это пропагаторы и вершины взаимодействия; их мы сейчас по очереди и рассмотрим. Стандартный фейнмановский пропагатор для обычного скалярного бозонного поля ϕ с массой m^2 , удовлетворяющего уравнению Клейна — Гордона $(\square + m^2)\phi = 0$, есть просто $(\square + m^2)^{-1}$, т. е. оператор, обратный оператору Клейна — Гордона. Ближайший аналог уравнению Клейна — Гордона в теории струны есть условие массовой поверхности $(L_0 - 1)|\phi\rangle = 0$, на которое можно смотреть как на бесконечномерное обобщение этого уравнения. Таким образом, правдоподобной гипотезой для струнного пропагатора (опуская обычный множитель $-ie$) будет

$$\Delta = (L_0 - 1)^{-1} = \int_0^1 z^{L_0 - 2} dz. \quad (7.1.1)$$

Следующим базисным элементом фейнмановских диаграмм является вершина взаимодействия. Любую струнную диаграмму древесного или однопетлевого уровня можно представить в таком виде, чтобы с каждой вершиной была связана по крайней мере одна внешняя частица, как на рис. 7.2, а и 7.2, б¹⁾, и в отличие от внутренних линий эти внешние линии соответствуют физическим состояниям струны, лежащим на массовой поверхности. Итак, мы должны найти вершину взаимодействия или «вершинный оператор», изображающий испускание или поглощение внешнего состояния из внутренней линии. Некоторые свойства таких «вершинных операторов» мы обсуждали на качественном уровне в первой главе; мы говорили там, в частности, о том, почему естественно ожидать, что в квантовой теории поля, управляющей движением струн, эти операторы будут локальными объектами. Некоторые чисто математические свойства вершинных операторов уже обсуждались в разд. 2.2.3, причем в виде, хорошо приспособленном к развиваемому сейчас

¹⁾ В любой диаграмме, содержащей более одной петли, есть по крайней мере одна вершина, соединяющая три внутренние линии, как это показано на рис. 7.2, с.

формализму. Любому физическому состоянию из спектра открытой струны, имеющему импульс k^μ , сопоставляется вершинный оператор:

$$V_\Lambda(k, \tau) = e^{i\tau L_0} V_\Lambda(k, 0) e^{-i\tau L_0}, \quad (7.1.2)$$

описывающий испускание состояния Λ из $\sigma = 0$ конца открытой струны в момент собственного времени τ . Удобно положить

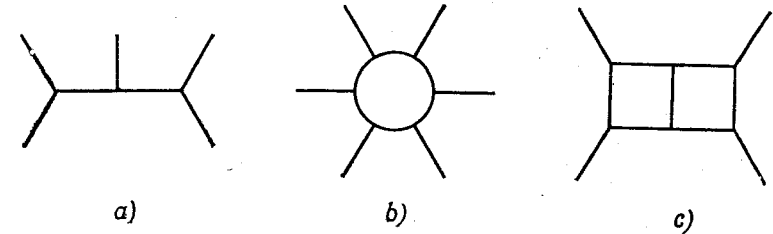


Рис. 7.2. Для построения древесных (а) или однопетлевых (б) амплитуд на массовой поверхности достаточно иметь вершину, описывающую испускание внешней частицы из внутренней линии. В двухпетлевой диаграмме, рис. с), мы впервые сталкиваемся с вершиной, в которой все три сходящиеся линии — внутренние; в теории струн такие вершины представляют собой неизмеримо более сложные объекты.

$z = e^{i\tau}$. Вершинный оператор в (7.1.2) должен иметь конформную размерность $J = 1$, т. е.

$$[L_m, V_\Lambda(k, z)] = \left(z^{m+1} \frac{d}{dz} + mz^m \right) V_\Lambda(k, z). \quad (7.1.3)$$

Сами вершинные операторы строятся как нормально упорядоченные выражения из поля

$$X^\mu(z) = x^\mu - ip^\mu \ln z + i \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \alpha_n^\mu z^{-n} \quad (7.1.4)$$

и его производных. (На протяжении всей этой главы мы будем считать наклон реджевской траектории $\alpha' = 1/2$.) Вот формула для тахионного вертекса:

$$V_0(k, z) = : e^{ikX(z)} :, \quad (7.1.5)$$

где $k^2 = 2$. Удобно записать этот вертекс в виде $V_0 = Z_0 W_0$, где оператор Z_0 содержит только нулевые моды,

$$Z_0 = \exp(ik \cdot x + k \cdot p \ln z) = e^{ikx} z^{k \cdot p + 1} = z^{k \cdot p - 1} e^{ik \cdot x}, \quad (7.1.6)$$

а W_0 — все остальное:

$$W_0 = \exp\left(k \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \alpha_{-n} z^n\right) \exp\left(-k \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \alpha_n z^{-n}\right) \quad (7.1.7)$$

(такое выражение мы будем называть нормально упорядоченным). Аналогично вершинный оператор для безмассовой векторной частицы с импульсом k^μ и поляризацией $\zeta^\mu(k)$ есть

$$V(\zeta, k, z) = \zeta \cdot \dot{X}(z) e^{ik \cdot X(z)}. \quad (7.1.8)$$

Здесь необходимо положить $k^2 = \zeta \cdot k = 0$, и тогда нормальное упорядочение становится несущественным. Точкой обозначено дифференцирование по $\tau = -i \ln z$.

Структура диаграмм в обычной теории возмущений (для точечных частиц) наводит на мысль, что M -частичная древесная амплитуда для открытой струны задается последовательностью

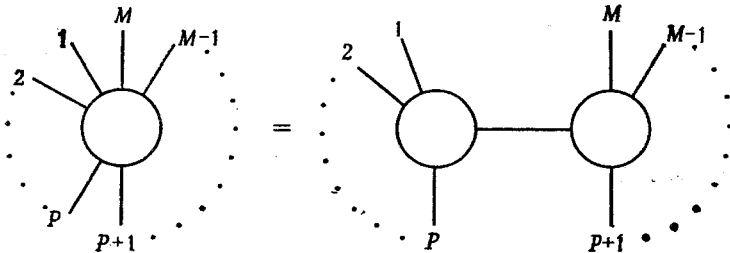


Рис. 7.3. Из условия древесной унитарности вытекает, что M -частичная амплитуда для набора $1, 2, 3, \dots, M$ в канале $1, 2, 3, \dots, P \rightarrow P+1, \dots, M$ должна иметь вычет, представимый в виде произведения древесных амплитуд для наборов $1, 2, 3, \dots, P$ и $P+1, \dots, M$.

вершинных операторов и пропагаторов в соответствии со следующей простой формулой:

$$A_M = g^{M-2} \langle \varphi_1 | V_2(k_2) \Delta V_3(k_3) \dots \Delta V_{M-1}(k_{M-1}) | \varphi_M \rangle. \quad (7.1.9)$$

Эта формула — попытка найти струнный аналог древесной фейнмановской диаграмме рис. 7.2, а, где роль вершин взаимодействия на массовой поверхности играют вершинные операторы. Ценность этой формулы прежде всего в том, что некоторые из свойств, обеспечивающих унитарность теории на древесном уровне, начинают выполняться совершенно очевидным образом. В формуле (7.1.9) есть очевидные полюса, которые появляются просто из полюсов пропагаторов. А поскольку сами пропагаторы — это операторы, обратные к $(L_0 - 1)$, их полюса отвечают состояниям с $L_0 - 1 = 0$, иными словами, состояниям на массовой поверхности. Из унитарности вытекают еще и следующие требования. Для любого M -частичного процесса с частицами $1, 2, 3, \dots, M$ вычет в полюсе, отвечающем подпроцессу $1, 2, 3, \dots, P \rightarrow (P+1) \dots, M$, должен факторизоваться на произведение двух древесных амплитуд подпроцессов $1, 2, 3, \dots, P$ и $X(P+1) \dots, M$, как изображено на рис. 7.3. Более тонкое

требование, тоже вытекающее из унитарности, состоит в том, что «временеподобные» состояния, лежащие на массовой поверхности (имеющие отрицательную норму), не должны давать вклада в (7.1.9), и мы покажем, что это требование выполнено в силу основного свойства вершинных операторов (7.1.3). Еще одно свойство амплитуды, которое в (7.1.9) прямо не просматривается, состоит в том, что она обладает полюсами и по другим подпроцессам, таким, как $2, 3 \dots, P \rightarrow (P+1) \dots, M$. Ясно, что фактическая симметричность нашего выражения относительно циклических перестановок внешних частиц есть не что

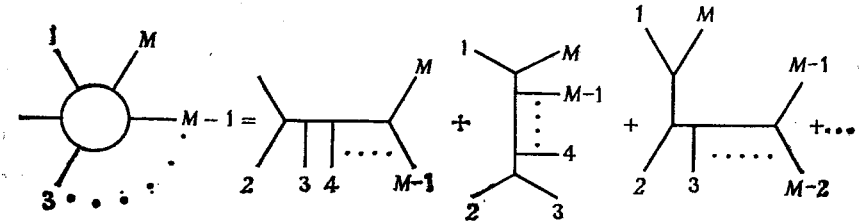


Рис. 7.4. В теории поля древесная амплитуда для M частиц $1, 2, 3, \dots, M$ представляется в виде суммы целого набора фейнмановских диаграмм, отвечающих полюсам в различных частных каналах.

иное, как свойство дуальности — одно из свойств, из-за которых теория струн вызывает особый интерес. Мы обсудим дуальность позднее в этой главе.

Формула (7.1.9) возникла у нас как теоретико-струнное обобщение древесной диаграммы рис. 7.2, а, но в обычной теории поля наряду с этой диаграммой имеется и еще целое семейство различных диаграмм с полюсами в других каналах, как на рис. 7.4. На первый взгляд представлялось бы естественным искать струнного обобщения и для всех этих диаграмм тоже, но именно здесь нас поджидает сюрприз, причем не случайный, а связанный с одним из основных свойств теории струн. Хотя формула (7.1.9) получена как обобщение одной-единственной фейнмановской диаграммы рис. 7.2, а, она на самом деле соответствует сразу всему вышеуказанному семейству обычных диаграмм. Этой формулой и исчерпывается древесная амплитуда в теории струн. Фактически именно с поисков формулы, обладающей свойством дуальности, и началась теория струн; об этом мы говорили в первой главе.

Чтобы пролить некоторый свет на источники возникновения дуальности, а заодно и установить более тесную связь с тем формализмом, который использовался для описания древесных амплитуд в гл. 1, необходимо сделать небольшое отступление. Для определенности положим, что как начальное, так и конеч-

ное состояния в (7.1.9) являются тахионами с импульсами k_1 и k_M соответственно. На первый взгляд может показаться, что для вычисления (7.1.9) необходимо иметь явный вид волновых функций этих двух состояний, но хотя такой способ действий вполне разумен и в некоторых вычислениях мы действительно используем представление волновых функций в виде фоковских векторов, можно воспользоваться и фейнмановским функциональным интегралом, который дает всем известный альтернативный способ описания низколежащих состояний квантовой

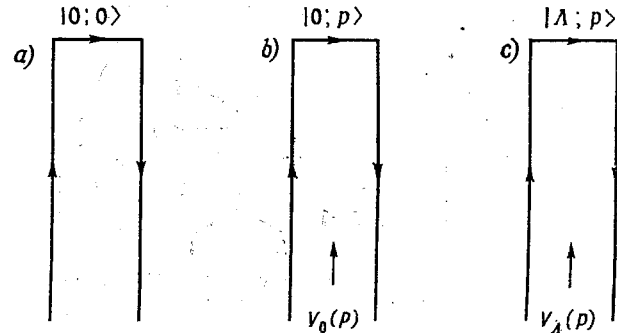


Рис. 7.5. Волновая функция основного состояния открытой струны (тахиона с нулевым импульсом) $|0; 0\rangle$ представляется в виде фейнмановского функционального интеграла по полубесконечной полосе, рис. а). Если же мы интересуемся нижним состоянием с импульсом k , т.е. $|k\rangle$, то надо вставить в далеком прошлом некоторый оператор, несущий этот импульс k ; естественный выбор — это вершинный оператор тахиона $V_0(k)$, рис. б). В общем случае волновую функцию любого физического состояния $|\Lambda; k\rangle$ можно получить, поместив в далеком прошлом на полубесконечной полосе оператор $V_\Lambda(k)$, рис. с).

системы. Так, волновую функцию основного состояния $|0, 0\rangle$ (напомним, что $|0; k\rangle$ — это тахивон с импульсом k) можно представить в виде функционального интеграла по полубесконечной полосе, изображенной на рис. 7.5, а. Как это часто бывает удобным при работе с функциональным интегралом, мы сделаем на мировой поверхности виковский поворот так, чтобы интерпретировать полосу на рисунке как часть евклидовой мировой поверхности с положительной сигнатурой. Если нас интересует волновая функция какого-то другого состояния, то необходимо поместить в «далеком прошлом» некоторый оператор, несущий квантовые числа желаемого состояния. В частности, чтобы получить тахивон $|0; k\rangle$, в далеком прошлом вставляется (как на рис. 7.5, б) простейший оператор, способный нести импульс k^μ , это и есть вершинный оператор тахиона: $V_0(k) = :e^{ikx}$. В общем случае, представленном на рис. 7.5, с, любое физическое состояние $|\Lambda; k\rangle$

может быть получено вставкой в далеком прошлом соответствующего оператора — вершинного оператора $V_\Lambda(k)$. Итак,

$$|\Lambda; k\rangle = \lim_{\tau \rightarrow +i\infty} e^{-i\tau} V_\Lambda(k, \tau) |0; 0\rangle. \quad (7.1.10)$$

Мы написали здесь $\tau \rightarrow +i\infty$, чтобы еще раз подчеркнуть, что функциональный интеграл в (7.1.10) берется по евклидовой мировой поверхности мнимого τ . Таким же образом, представляя конечное состояние как функциональный интеграл по полубесконечной полосе, простирающейся до $\tau = -i\infty$, мы получаем формулу типа (7.1.10):

$$\langle \Lambda; k | = \lim_{\tau \rightarrow -i\infty} e^{i\tau} \langle 0; 0 | V_\Lambda(k, \tau). \quad (7.1.11)$$

В дальнейшем эти две формулы будут нам весьма полезны. Дополнительные факторы $z^{-1} = e^{-i\tau}$ и $z = e^{i\tau}$ в (7.1.10) и (7.1.11) необходимы для компенсации тех факторов, которые возникают из

$$Z_0 |0; 0\rangle = e^{ik \cdot x} z^{k \cdot p + 1} |0; 0\rangle = z |0; k\rangle \quad (7.1.12)$$

и

$$\langle 0; 0 | Z_0 = \langle 0; 0 | z^{k \cdot p - 1} e^{ik \cdot x} = \frac{1}{z} \langle 0; k |. \quad (7.1.13)$$

Мы приглашаем читателя проверить (7.1.10) и (7.1.11) для тахионов, т.е., взяв явную формулу (7.1.7), получить (7.1.10) при $z \rightarrow 0$ или (7.1.11) при $z \rightarrow \infty$. В формулах (7.1.10) и (7.1.11) мы явно выписывали множитель i только для того, чтобы особо обратить на него внимание читателя; далее мы будем работать с переменной $\tau' = -i\tau$.

Кроме начального и конечного состояний и вершинных операторов в формулу (7.1.9) входят еще и пропагаторы

$$\Delta = (L_0 - 1)^{-1} = \int_0^\infty d\tau e^{-\tau(L_0 - 1)}. \quad (7.1.14)$$

Поскольку $L_0 - 1$ — это «гамильтониан» струны, то оператор $e^{-\tau(L_0 - 1)}$ описывает распространение открытой струны в течение мнимого времени τ , что порождает полосу шириной π и длиной τ , изображенную на рис. 7.6, а. Собирая всю эту информацию воедино, мы видим (рис. 7.6, б), что формуле (7.1.9) реально соответствует интеграл по бесконечной полосе шириной π , имеющей следующую дополнительную структуру. В полосу вставлено M вершинных операторов, причем по одному оператору вставлено в бесконечно удаленном прошлом и будущем,

и эти операторы соответствуют начальному и конечному состояниям, а $M-2$ операторов вставлено в конечные моменты времени $0, \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{M-1}$ и по переменным τ_k ведется интегрирование. С помощью простого конформного отображения эту

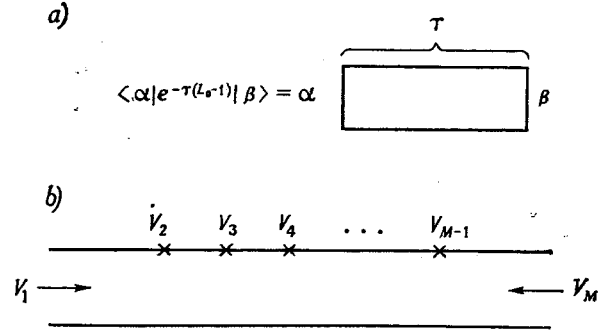


Рис. 7.6. Пропагатор $(L_0 - 1)^{-1} = \int d\tau e^{-\tau(L_0-1)}$ описывает распространение струны на расстояние τ в мнимом времени и тем самым порождает полосу шириной π и длиной τ , рис. а). Дерево же $\langle 1 | V_2(L_0 - 1)^{-1} V_3 \dots V_{M-1} | M \rangle$ представляется тогда в виде интеграла по бесконечной полосе, где полубесконечные куски слева и справа соответствуют начальному и конечному состояниям $|M\rangle$ и $\langle 1|$, рис. б).

конструкцию можно привести к такому виду, где уже не будут выделены «начальное» и «конечное» состояния $|1\rangle$ и $|M\rangle$. Действительно, замена $u = \sigma + i\tau$ на $v = e^{iu}$ отображает полосу

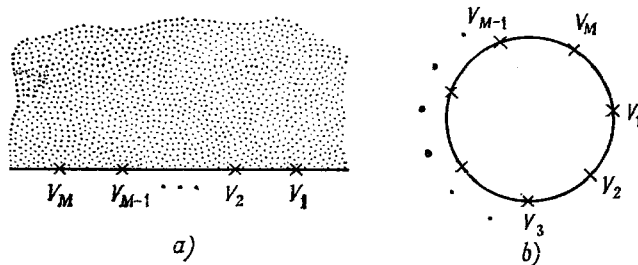


Рис. 7.7. Бесконечную полосу рис. 7.6 можно конформно отобразить на верхнюю полуплоскость, рис. а), или на единичный круг, рис. б).

рис. 7.6, б на верхнюю полуплоскость, а еще одно отображение $w = (v - i)/(v + i)$ переводит верхнюю полуплоскость плоскости v в единичный круг в плоскости w . Причем вследствие конформной инвариантности оба этих отображения являются симметриями теории. (У конформной инвариантности могут быть,

конечно же, аномалии, так что необходимо проверять эту симметрию явным вычислением, как и сделано ниже.) Оба этих отображения схематически представлены на рис. 7.7. При отображении на верхнюю полуплоскость вершинные операторы оказываются на вещественной оси, как показано на рис. 7.7, а, а при отображении на единичный круг они оказываются на его границе (рис. 7.7, б). Заметим, что именно о таких картинках, как рис. 7.7, мы и говорили в гл. 1. Ценность этого наблюдения заключается в том, что теперь мы можем утверждать, что явно циклически симметричное выражение рис. 7.7, б эквивалентно формуле (7.1.9), о которой мы знаем, что по крайней мере в одном канале она имеет правильные полюсы.

7.1.2. Отщепление духовых состояний

Покажем теперь, что полюсами в формуле (7.1.9), которую для удобства мы здесь выпишем еще раз,

$$A_M = g^{M-2} \langle \Phi_1 | V_2(k_2) \Delta V_3(k_3) \dots \Delta V_{M-1}(k_{M-1}) | \Phi_M \rangle, \quad (7.1.15)$$

могут быть только физические состояния с положительной нормой, а не духи или еще какие-нибудь нефизические состояния. Поскольку A_M призвана описывать амплитуды только физических состояний, то как внешние состояния $\langle \Phi_1 |, | \Phi_M \rangle$, так и $M-2$ вершинных оператора V_i должны удовлетворять условию массовой поверхности $(L_0 - 1) | \Phi \rangle = 0$ и дополнительным условиям Вирасоро $L_n | \Phi \rangle = 0$ при $n > 0$. Наша цель — доказать, что теми же свойствами обладают физические состояния, возникающие как полюсы в (7.1.15). Рассмотрим некоторый отдельный пропагатор Δ в (7.1.15). Поскольку $L_0 = \frac{1}{2} p^2 + N$,

а собственные значения N равны $0, 1, 2, \dots$, то полюсы появляются лишь при тех значениях p^2 , которые отвечают физическим значениям массы. При любом заданном значении массы вычет у Δ будет единичным оператором в этом массовом секторе, и его можно представить в виде $\sum_i | \psi_i \rangle \langle \psi_i |$, где $| \psi_i \rangle$ суть ортонормированные состояния (число их конечно), которые порождают этот сектор. Наше основное требование теперь можно сформулировать так: только те состояния $| \psi_i \rangle$, которые удовлетворяют условию физичности $L_n | \Phi \rangle = 0$ при $n < 0$, дают вклад в вычет. Заметим, что нет нужды беспокоиться относительно условия с L_0 ; ясно, что только состояния, для которых выполнено это условие, и могут давать вклады в полюсы!

Заметим, что нам вовсе не нужно доказывать, что произвольное состояние

$$| \alpha \rangle = V_N \Delta V_{N+1} \dots \Delta V_{M-1} | \Phi_M \rangle \quad (7.1.16)$$

удовлетворяет условию $L_m|\alpha\rangle = 0$, $m > 0$. Только те $|\alpha\rangle$, которые лежат на массовой поверхности (аннигилируются оператором $L_0 - 1$), способны давать вклад в вычет в полюсах (7.1.15) и соответственно должны обращаться в нуль операторами L_m , $m > 0$. Если обозначить P_k оператор проектирования на состояния с $L_0 = k$, то нам придется доказывать, что состояния $|\beta\rangle$, определенные формулой

$$|\beta\rangle = P_1|\alpha\rangle, \quad (7.1.17)$$

удовлетворяют условию $L_m|\beta\rangle = 0$, $m > 0$. Поскольку $[L_0, L_m] = -mL_m$, то $L_m P_1 = P_{1-m} L_m$, и, следовательно, нам надо показать, что

$$P_{1-m} L_m |\alpha\rangle = 0, \quad m > 0. \quad (7.1.18)$$

Поскольку $P_{1-m}(-L_0 - m + 1) = 0$, то (7.1.18) эквивалентно

$$P_{1-m}(L_m - L_0 - m + 1)|\alpha\rangle = 0, \quad m > 0, \quad (7.1.19)$$

и (подставив определение α) мы видим, что утверждение будет доказано, коль скоро мы установим, что

$$(L_m - L_0 - m + 1)V_N \Delta \dots V_{M-1}|\phi_M\rangle = 0 \text{ для } m > 0. \quad (7.1.20)$$

Сейчас мы убедимся, что такой способ постановки задачи оказывается весьма эффективным.

Поскольку для вершинных операторов конформная размерность $J = 1$, то из определения, данного в разд. 2.2.3, следует, что они удовлетворяют (7.1.3), откуда мы получаем (вычитая уравнение с $m = 0$ и положив $z = 1$)

$$(L_m - L_0 - m + 1)V(1) = V(1)(L_m - L_0 + 1). \quad (7.1.21)$$

С помощью коммутационных соотношений алгебры Вирасоро нетрудно показать, что

$$(L_m - L_0 + 1) \frac{1}{L_0 - 1} = \frac{1}{L_0 + m - 1} (L_m - L_0 - m + 1). \quad (7.1.22)$$

Из (7.1.21) и (7.1.22), вместе взятых, вытекает

$$[(L_m - L_0 - m + 1), V_N \Delta] = 0. \quad (7.1.23)$$

Таким образом, множитель $L_m - L_0 - m + 1$ в (7.1.20) можно шаг за шагом двигать направо до тех пор, пока мы не придем к выражению $(L_m - L_0 + 1)|\phi_M\rangle$, которое обращается в нуль в силу физичности вектора $|\phi_M\rangle$, что и доказывает (7.1.20).

Еще один способ сформулировать тот факт, что в процессе рассеяния рождаются только физические состояния с положительной нормой, — это сказать, что если состояние $|\phi_1\rangle$

ортогонально всем физическим состояниям, то амплитуда (7.1.15) обращается в нуль. В разд. 2.2.2 мы назвали состояние, ортогональное всему физическому подпространству, шпурионным и показали, что любое шпурионное состояние может быть представлено в виде

$$|\psi\rangle = \sum_{m=1}^{\infty} L_{-m} |\chi_m\rangle, \quad (7.1.24)$$

где

$$(L_0 - 1 + m)|\chi_m\rangle = 0, \quad (7.1.25)$$

так что $(L_0 - 1)|\psi\rangle = 0$. Поскольку физическое подпространство было определено как совокупность фоковских векторов, удовлетворяющих условиям Вирасоро, то оно аннигилируется любым оператором вида $\sum_1^{\infty} X_n L_n$. Таким образом, если ϕ_1 имеет структуру (7.1.24), то (7.1.15) обращается в нуль.

7.1.3. Циклическая симметрия

Свойство дуальности, которым обладает формула (7.1.15), никакого аналога в обычной теории поля (для точечной частицы) не имеет, и связано это с тем, что истинное число каналов, по которым амплитуда имеет полюсы, гораздо больше, чем можно было заключить, ограничиваясь лишь теми каналами, пропагаторы которых входят в (7.1.15) явно. Эти дополнительные полюсы возникают тогда, когда бесконечные суммы, неявно присутствующие в операторных произведениях, начинают расходиться, и именно они обеспечивают замечательное свойство циклической симметрии A_M относительно перестановок M внешних частиц: $(1 \ 2 \ \dots \ M) \rightarrow (M \ 1 \ \dots \ M-1)$. Не будь этой симметрии, тот факт, что наша мировая поверхность конформно эквивалентна кругу, где M частиц сидят на границе в заданном циклическом порядке, выглядел бы совершеннейшим парадоксом. Итак, наша следующая задача — доказательство циклической симметрии. Как только это будет проделано, мы сможем утверждать, что унитарность выполнена во всех, а не только в рассмотренных выше каналах. Тот факт, что струнная диаграмма обладает полюсами сразу в нескольких пересекающихся каналах, делает совершенно нетривиальной задачу об установлении соответствия между теорией струн и теми обычными (точечными) теориями, которые мы получаем в низкоэнергетическом пределе. Он же объясняет и радикальную разницу между числом струнных и обычных диаграмм. Особенно впечатляющей эта разница выглядит в теории ориен-

тированных замкнутых струн, как мы обнаружили в гл. 1: в каждом порядке теории возмущений там имеется по единственной диаграмме.

На эвристическом уровне мы уже обсуждали как циклическую симметрию, так и дуальность, теперь же мы конкретизируем нашу дискуссию с целью показать, что возникающая мера интегрирования действительно обладает всеми необходимыми нам свойствами. Начнем с того, что попытаемся несколько преобразовать выражение (7.1.15). Подставляя определения (7.1.1) и (7.1.2) и пользуясь $(L_0 - 1)|\Phi_1\rangle = (L_0 - 1)|\Phi_M\rangle = 0$, мы получаем

$$\begin{aligned} A_M &= g^{M-2} \int_0^1 \frac{dz_3 \dots dz_{M-1}}{z_3 \dots z_{M-1}} \langle \Phi_1 | V(k_2, 1) V(k_3, z_3) \dots \\ &\quad \dots V(k_{M-1}, z_3 \dots z_{M-1}) | \Phi_M \rangle = \\ &= g^{M-2} \int_0^1 \left(\prod_{i=3}^{M-1} \theta(y_{i-1} - y_i) \frac{dy_i}{y_i} \right) \langle \Phi_1 | V(k_2, y_2) V(k_3, y_3) \dots \\ &\quad \dots V(k_{M-1}, y_{M-1}) | \Phi_M \rangle, \quad (7.1.26) \end{aligned}$$

где $y_2 = 1$ и сделана замена переменных

$$y_i = z_3 z_4 \dots z_i \quad i = 3, \dots, M-1. \quad (7.1.27)$$

Поскольку $0 < z_i < 1$, то $y_{i-1} > y_i$, что и учтено с помощью тэта-функций $\theta(y_{i-1} - y_i)$. Пока что M частиц входят в выражение для амплитуды несимметрично, и следующий шаг заключается в подстановке

$$|\Phi_M\rangle = \lim_{y_M \rightarrow 0} y_M^{-1} V(k_M, y_M) |0; 0\rangle \quad (7.1.28)$$

и

$$\langle \Phi_1 | = \lim_{y_1 \rightarrow \infty} \langle 0; 0 | y_1 V(k_1, y_1), \quad (7.1.29)$$

где $|0; 0\rangle$ отвечает основному состоянию с нулевым импульсом в фоковском представлении. Из этих формул следует равенство

$$\begin{aligned} \langle \Phi_1 | V(k_2, y_2) \dots V(k_{M-1}, y_{M-1}) | \Phi_M \rangle = \\ = \frac{y_1}{y_M} \langle 0; 0 | V(k_1, y_1) V(k_2, y_2) \dots V(k_M, y_M) | 0; 0 \rangle \quad (7.1.30) \end{aligned}$$

в пределе $y_1 \rightarrow \infty$ и $y_M \rightarrow 0$.

Сделаем небольшое отступление и обсудим свойства состояния $|0; 0\rangle$ (основного состояния в фоковском представлении, имеющего нулевой импульс). Это состояние в некотором смысле представляет собой вакуум, или основное состояние двумерной квантовой теории поля, описывающей распространение

открытой бозонной струны. Причина, по которой мы до сих пор воздерживались от обсуждения свойств этого состояния, заключается в той нетрадиционной (сравнительно с другими двумерными квантовыми теориями поля) физической интерпретации, которую мы даем теории свободной струны. Состояние $|0; 0\rangle$ не является «физическим состоянием», поскольку оно не аннигилируется оператором $L_0 - 1$ (вместо этого оно аннигилируется оператором L_0), но однозначно выделяется другим, в некотором смысле не менее важным требованием. Во всем фоковском пространстве $|0; 0\rangle$ — это единственное состояние, аннигилируемое генераторами L_{-1} , L_0 и L_1 свободной от аномалий группы $SL(2, R)$. Хотя $SL(2, R)$ представляет собой всего лишь конечномерную подалгебру всей бесконечномерной алгебры Вирасоро, но роль ее чрезвычайно существенна. Дело в том, что эта подалгебра не затрагивается появлением аномалии (центрального заряда) в алгебре Вирасоро, а значит, остается истинной симметрией теории, т. е. аннигилирует вакуум. Если смотреть на свободную струну просто как на некоторую двумерную теорию поля с удивительно большой группой симметрии, тогда именно состояние $|0; 0\rangle$ должно играть роль вакуума, а свободная от аномалий и не меняющая вакуум группа $SL(2, R)$ — роль ненарушенной группы симметрии. Однако в любом случае именно на $SL(2, R)$ основаны доказательства всех простейших свойств древесных бозонных амплитуд, тех свойств, которые далеко не очевидны из более элементарных соображений.

Бесконечно малый сдвиг, генерируемый любым L_m , — это y^{m+1} , что можно видеть прямо из формулы (7.1.3), которую мы здесь для удобства выпишем еще раз:

$$[L_m, V_\Lambda(k, y)] = \left(y^{m+1} \frac{d}{dy} + m y^m \right) V_\Lambda(k, y). \quad (7.1.31)$$

В правой части (7.1.31) присутствуют два слагаемых: первое слагаемое $y^{m+1} d/dy$, общее для всех полей вне зависимости от их конформной размерности, и второе слагаемое $m y^m$, напротив, своим присутствием обязанное именно конформной размерности $J=1$ вершинного оператора. Произвольное преобразование группы $SL(2, R)$ можно записать в виде

$$y \rightarrow y' = y + \lambda_{-1} + \lambda_0 y + \lambda_1 y^2, \quad (7.1.32)$$

где λ_m — некие малые параметры. Конечные преобразования получаются, как обычно, экспоненцированием L_m :

$$\begin{aligned} e^{\lambda_1 L_1}: y \rightarrow y' &= \frac{y}{1 - \lambda_1 y}, \\ e^{\lambda_0 L_0}: y \rightarrow y' &= e^{\lambda_0} y, \\ e^{\lambda_{-1} L_{-1}}: y \rightarrow y' &= y + \lambda_{-1}, \end{aligned} \quad (7.1.33)$$

где λ_m теперь суть конечные параметры. Собирая эти три формулы вместе, получаем общий вид преобразования $SL(2, R)$:

$$y \rightarrow y' = \frac{ay + b}{cy + d}. \quad (7.1.34)$$

Заметим, что, хотя в формуле (7.1.34) фигурируют четыре параметра, реально их число на единицу меньше: от одного из них можно избавиться за счет общей перерастяжки. Общепринятый способ нормировки — это положить $ad - bc = 1$; тогда матрица $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ будет принадлежать группе $SL(2, R)$, состоящей из всех вещественных (2×2) -матриц с детерминантом, равным единице.

Сделаем небольшое отступление, чтобы объяснить, «почему» вещественные матрицы размера 2×2 могут естественным, но нелинейным образом действовать на одну вещественную же переменную y . Очевидно, что (2×2) -матрицы из $SL(2, R)$ действуют на двумерном вещественном векторном пространстве:

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}. \quad (7.1.35)$$

Положив $y = v_1/v_2$, мы получаем для y закон преобразования (7.1.34).

Подгруппа $SL(2, R)$ конформной группы носит название «группы Мёбиуса» или «проективной группы». Читатель может самостоятельно убедиться в том, что трехпараметрическое семейство преобразований (7.1.34) действительно генерируется операторами из (7.1.33). Из вещественности a, b, c и d очевидным образом следует, что преобразование (7.1.34) переводит вещественную ось в себя. Нетрудно проверить и другое, менее очевидное свойство этой группы. А именно, если мы аналитически продолжим y на всю комплексную плоскость, то $SL(2, R)$ будут отображать верхнюю y -полуплоскость опять-таки в себя. Более того, можно определить $SL(2, R)$ как группу таких взаимно однозначных отображений $y \rightarrow \tilde{y}$ верхней полуплоскости на себя, что \tilde{y} зависит от y только аналитически. Все преобразования $y \rightarrow \tilde{y}$ с аналитическими и однозначными (в интересующей нас области) функциями — это конформные преобразования, а те из них, которые отображают на себя верхнюю полуплоскость, образуют подгруппу всей конформной группы, она-то и есть группа Мёбиуса $SL(2, R)$.

Именно по этой причине группа $SL(2, R)$ (и $SL(2, C)$, которая точно таким же образом появляется в теории замкнутой струны) и возникла в гл. 1. Действительно, нашей исходной

точкой было действие, обладающее двумерной общекоординатной инвариантностью, затем мы выбрали координатную систему так, что метрика приняла форму $ds^2 = e^\varphi |dy|^2$. Такая координатная система фиксируется далеко не однозначно, поскольку при конформном отображении $y \rightarrow \tilde{y}$ метрика переходит в $ds^2 = e^\varphi |dy/d\tilde{y}|^2 \cdot |d\tilde{y}|^2$, иными словами, сохраняет исходную форму. Вот почему при ковариантном квантовании группа $SL(2, R)$ всплывает как «группа симметрии вакуума». Напомним, что сами конформные отображения мировой поверхности струны на себя были в первой главе лишь остатком исходной общекоординатной инвариантности, выжившим после фиксации конформной калибровки. Эта остаточная симметрия, в свою очередь, фиксировалась с помощью процедуры Фаддеева — Попова.

Вернемся к нашим древесным амплитудам. Внимательное изучение формул (7.1.33) показывает, что при $n = 1, 0, -1$ переменные y и $y' = e^{\lambda L_n} y$ связаны следующим соотношением:

$$\left(\frac{y'}{y}\right)^{n+1} = (cy + d)^{-2} = (a - cy')^2. \quad (7.1.36)$$

В качестве проверки этой формулы достаточно заметить, что каждое из трех выражений равно: 1 при $n = -1$, e^λ при $n = 0$ и $(1 - \lambda y)^{-2}$ при $n = 1$. Таким образом, экспоненцируя (7.1.31), получим

$$e^{\lambda L_n} y^n V(k, y) e^{-\lambda L_n} = (y')^n V(k, y'), \quad (7.1.37)$$

и деля обе части этого равенства на y^{n+1} , выводим, что для любого $SL(2, R)$ -преобразования выполняется

$$\Lambda(T) \frac{V(k, y)}{y} \Lambda^{-1}(T) = (a - cy')^2 \frac{V(k, y')}{y'}. \quad (7.1.38)$$

Учитывая еще $SL(2, R)$ -инвариантность вакуума,

$$\Lambda(T) |0; 0\rangle = |0; 0\rangle, \quad (7.1.39)$$

мы получаем, что при проективном преобразовании выражение

$$I_M(k, y) = \langle 0; 0 | \frac{V(k_1, y_1)}{y_1} \dots \frac{V(k_M, y_M)}{y_M} | 0; 0 \rangle \quad (7.1.40)$$

преобразуется в

$$I_M(k, y) = I_M(k, y') \prod_{i=1}^M (a - cy'_i)^2; \quad (7.1.41)$$

естественно, что все M штук y_i подвергаются одному и тому же преобразованию из $SL(2, R)$. Формулу (7.1.41) часто выражают в форме следующего утверждения: I_M преобразуется от-

носителю $SL(2, R)$ как величина, имеющая вес 2 относительно группы Мёбиуса.

M -частичную древесную амплитуду можно представить в виде

$$A_M = g^{M-2} \int d\mu_M(y) I_M(k, y), \quad (7.1.42)$$

где $d\mu_M(y)$ — взятая из предыдущих формул мера интегрирования по y_i , за исключением тех степеней y_i , которые поглотились I_M . Теперь мы попробуем переписать эту меру в виде, несколько более симметричном, чем она представлена в (7.1.26).

Начнем с того, что рассмотрим преобразование одноединственного дифференциала dy_i . Как видно из (7.1.34), он преобразуется следующим образом:

$$dy'_i = d \left(\frac{ay_i + b}{cy_i + d} \right) = \frac{(ad - bc) dy_i}{(cy_i + d)^2} = \frac{dy_i}{(cy_i + d)^2}, \quad (7.1.43)$$

или

$$dy_i = \frac{dy'_i}{(a - cy'_i)^2}, \quad (7.1.44)$$

и первым кандидатом на роль «правильной» меры сразу оказывается комбинация $d\mu_M(y) = \prod dy_i$. Это выражение немедленно приводит нас к проективно инвариантному результату, но все же реально стоящая в (7.1.42) мера несколько иная. Есть несколько обстоятельств, которые оказываются упущенными в наивном выражении. Во-первых, координаты y_i соответствуют точкам, расставленным в определенном порядке на границе мировой поверхности струны, и это легко учесть, добавив в наивное выражение для «правильной» меры произведение тэта-функций $\prod \theta(y_{i-1} - y_i)$. Более тонких рассуждений требует тот факт, что именно вследствие проективной инвариантности, интегрируя с весом $\prod dy_i$, мы интегрируем по всем проективно эквивалентным конфигурациям, и в результате возникает бесконечный множитель, равный объему некомпактной группы $SL(2, R)$. Единственный способ избавиться от этого множителя — это вести интегрирование, выбирая ровно по одному элементу из каждого класса эквивалентности. Эта ситуация вполне аналогична тому, с чем мы встречаемся в теории Янга — Миллса, где, интегрируя по вектор-потенциалу, мы должны сократить бесконечный множитель, порождаемый вкладом калибровочно эквивалентных конфигураций.

Поскольку у группы дробно-линейных преобразований есть три параметра (три разных λ в (7.1.32)), всегда существует $SL(2, R)$ -преобразование, отображающее любые три переменные y_i (обозначим их y_A, y_B и y_C) на любые три фиксированные

точки y_A^0, y_B^0 и y_C^0 , и бесконечный множитель, равный объему группы, не будет возникать, если мы просто не будем интегрировать по y_A, y_B и y_C . Однако при этом необходимо учесть аналог детерминанта Фаддеева — Попова, который будет сокращать множитель $\prod (a - cy'_i)^2$ из (7.1.44) для координат, по которым мы решили не интегрировать. Этот детерминант есть не что иное, как якобиан преобразования от y_A, y_B и y_C к λ_{-1}, λ_0 и λ_1 . Из определения (7.1.32) видно, что он равен

$$\frac{\partial(y_A, y_B, y_C)}{\partial(\lambda_{-1}, \lambda_0, \lambda_1)} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ y_A & y_B & y_C \\ y_A^2 & y_B^2 & y_C^2 \end{vmatrix}. \quad (7.1.45)$$

Он сразу вычисляется, и мы получаем $(y_A - y_B)(y_A - y_C)(y_B - y_C)$. Легко видеть, что он преобразуется как раз требуемым образом, поскольку

$$y_A - y_B = \frac{y'_A - y'_B}{(a - cy'_A)(a - cy'_B)}. \quad (7.1.46)$$

Подводя итог, мы видим, что необходимый нам элемент объема, имеющий тот же закон преобразования, что и наш первый кандидат $\prod dy_i$, задается формулой

$$d\mu_M(y) = \delta(y_A - y_A^0) \delta(y_B - y_B^0) \delta(y_C - y_C^0) \times \\ \times (y_A - y_B)(y_A - y_C)(y_B - y_C) \prod_{i=2}^M \theta(y_{i-1} - y_i) \prod_{j=1}^M dy_j. \quad (7.1.47)$$

Итак, наша цель достигнута. Выражение (7.1.47) и есть та правильная мера, которая стояла в предыдущих формулах; например, (7.1.26) соответствует выбору $y_1^0 \rightarrow \infty, y_2^0 \rightarrow 1, y_M^0 \rightarrow 0$. Чего мы достигли — так это понимания того замечательного факта, что (7.1.47) возникает из некоторого вполне симметричного по всем переменным выражения в результате процедуры «фиксации калибровки», родственной процедуре Фаддеева — Попова, причем конкретный выбор этой калибровки полностью находится в наших руках.

Вернемся к вопросу о циклической симметрии амплитуд. Любое преобразование группы $SL(2, R)$ монотонно отображает вещественную ось на себя с сохранением циклического порядка переменных y_i . При этом можно найти такое преобразование, чтобы вершинный оператор, стоящий «последним» на вещественной оси, отобразился в $y = +\infty$, и тогда, пройдя через точку $y = -\infty$, он окажется «первым» в преобразованной цепочке

вершинных операторов. Фактически это все, что требуется для доказательства необходимой для унитарности циклической симметрии, если еще мы сможем показать, что

$$V(1)V(2)\dots V(M) = V(M)V(1)\dots V(M-1). \quad (7.1.48)$$

Тогда формула (7.1.41) будет верна и для тех $SL(2, R)$ -преобразований, которые порождают циклические перестановки. Для

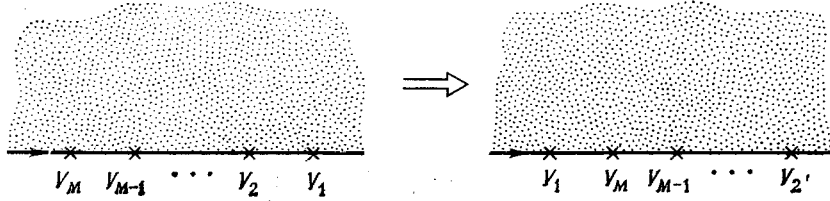


Рис. 7.8. Преобразование $SL(2, R)$ может превратить вершинный оператор, стоящий «последним» в цепочке из M вертексов, в «первый».

определенности мы рассмотрим случай, когда вершинные операторы — это операторы испускания тахиона, само же утверждение является вполне общим. Ключевую роль будет играть тождество

$$V_0(k_1, y_1)V_0(k_2, y_2) = V_0(k_2, y_2)V_0(k_1, y_1)\exp[\pi i k_1 \cdot k_2 \varepsilon(y_1 - y_2)], \quad (7.1.49)$$

где $\varepsilon(x)$ равно $+1$ при $x > 0$ и -1 при $x < 0$. Одно из возможных доказательств содержится в приложении 7.A, другое доказательство основано на общеизвестном тождестве

$$e^A e^B = e^B e^A e^{[A, B]}, \quad (7.1.50)$$

верном для любого c -числового коммутатора $[A, B]$; иными словами, нам необходимо установить, что

$$[ik_1 \cdot X(y_1), ik_2 \cdot X(y_2)] = \pi i k_1 \cdot k_2 \varepsilon(y_1 - y_2). \quad (7.1.51)$$

Само по себе определение этого коммутатора оказывается делом довольно деликатным, но если продифференцировать обе части по y_1 , то мы приходим к вполне однозначной и легко проверяемой формуле. Константа интегрирования определяется затем из требования нечетности коммутатора относительно перестановки y_1 и y_2 . Из (7.1.50) и (7.1.51) уже без труда получается соотношение (7.1.49), которое, кстати, верно и для других вершинных операторов, а (7.1.49) — это именно то, что

нужно для вывода формулы (7.1.48). Действительно протаскивая $V(M)$ через все остальные вершинные операторы при условии $y_1 > y_2 > \dots > y_M$, мы получаем (с помощью закона сохранения импульса и условия массовой поверхности) фазовый множитель

$$\exp\left[\pi i k_M \cdot \sum_1^{M-1} k_i\right] = \exp(-\pi i k_M^2) = 1. \quad (7.1.52)$$

Таким образом, доказательство циклической симметрии амплитуд можно считать законченным.

7.1.4. Примеры

Начнем с простейших примеров — вершин взаимодействия для трех частиц, лежащих на массовой поверхности. Мы по очереди будем подставлять в формулу (7.1.15) всевозможные комбинации тахионов и безмассовых векторных бозонов, опуская при этом очевидную дельта-функцию закона сохранения импульса. Для трех тахионов результат очевиден:

$$g\langle 0; k_1 | V_0(k_2) | 0; k_3 \rangle = g. \quad (7.1.53)$$

Для двух тахионов и одного безмассового вектора мы имеем

$$\begin{aligned} g\langle 0; k_1 | V(\xi, k_2) | 0; k_3 \rangle &= g\langle 0; k_1 | \xi \cdot \dot{X}(1) V_0(k_2) | 0; k_3 \rangle = \\ &= g\xi \cdot k_3 = g\xi \cdot (k_3 - k_1)/2. \end{aligned} \quad (7.1.54)$$

В последнем равенстве мы воспользовались тем обстоятельством, что $\xi \cdot k_2 = 0$, и законом сохранения импульса $k_1 + k_2 + k_3 = 0$. Заметим, что этот результат имеет правильную структуру вершины взаимодействия безмассового векторного поля с заряженным скалярным; он, в частности, калибровочно инвариантен, т. е. обращается в нуль при $\xi = k_2$ (импульсы, естественно, считаются лежащими на массовой поверхности и удовлетворяющими закону сохранения). Из доказанного нами свойства циклической симметрии следует, что тот же результат мы получим, поместив вектор в одну из обкладок:

$$g\langle 0; k_3 | V_0(k_1) \xi \cdot \alpha_{-1} | 0; k_2 \rangle = -g\xi \cdot k_1 = g\xi \cdot k_3. \quad (7.1.55)$$

Для двух безмассовых векторов и одного тахиона получаем (поместив векторы на концах)

$$\begin{aligned} g &= \langle 0; k_1 | \xi_1 \cdot \alpha_1 V_0(k_2) \xi_3 \cdot \alpha_{-1} | 0; k_3 \rangle = \\ &= g\langle 0; k_1 | \xi_1 \cdot \alpha_1 e^{k_2 \cdot \alpha_{-1}} e^{-k_2 \cdot \alpha_1} \xi_3 \cdot \alpha_{-1} | 0; k_3 \rangle = \\ &= g(\xi_1 \cdot \xi_3 - \xi_1 \cdot k_2 \xi_3 \cdot k_2). \end{aligned} \quad (7.1.56)$$

Нетрудно проверить, что этот результат калибровочно инвариантен (обращается в нуль, если ξ_1 заменить на k_1 или ξ_3 — на k_3) при $k_1^2 = k_3^2 = 0$, $k_2^2 = 2$, $\xi_1 \cdot k_1 = \xi_3 \cdot k_3 = 0$.

Рассмотрим теперь случай трех безмассовых векторов. Мы имеем

$$\begin{aligned} g\langle 0; k_1 | \xi_1 \cdot \alpha_1 V(\xi_2 \cdot k_2) \xi_3 \cdot \alpha_{-1} | 0; k_3 \rangle &= \\ &= g\langle 0; k_1 | \xi_1 \cdot \alpha_1 \xi_2 \cdot (\alpha_{-1} + \rho + \alpha_1) e^{k_2 \cdot \alpha_{-1}} e^{-k_2 \cdot \alpha_1} \xi_3 \cdot \alpha_{-1} | 0; k_3 \rangle = \\ &= g[\xi_1 \cdot k_2 \xi_2 \cdot \xi_3 + \xi_2 \cdot k_3 \xi_3 \cdot \xi_1 + \\ &+ \xi_3 \cdot k_1 \xi_1 \cdot \xi_2 + \xi_1 \cdot k_2 \xi_2 \cdot k_3 \xi_3 \cdot k_1] = g \xi_1^\mu \xi_2^\nu \xi_3^\rho t_{\mu\nu\rho}, \end{aligned} \quad (7.1.57)$$

где

$$t_{\mu\nu\rho} = k_{2\mu} \eta_{\nu\rho} + k_{3\nu} \eta_{\rho\mu} + k_{1\rho} \eta_{\mu\nu} + k_{2\mu} k_{3\nu} k_{1\rho}. \quad (7.1.58)$$

Поскольку эта вершина полностью антисимметрична по всем трем внешним линиям, то, суммируя по всем циклическим перестановкам, мы будем получать нуль, за исключением того случая, когда она умножается на теоретико-групповой фактор $\text{tr}(\lambda^a \lambda^b \lambda^c) \sim f^{abc}$. Вот почему эта вершина будет реально присутствовать только в неабелевых теориях. При этом первые три члена в (7.1.57) соответствуют стандартному кубическому взаимодействию, возникающему из янг-миллсовского действия $\text{tr} F^2$, а последний член представляет собой поправку порядка $O(\alpha')$, которая соответствует добавлению к низкоэнергетическому действию члена типа $\text{tr}(F_\mu^\nu F_\nu^\rho F_\rho^\mu)$.

В качестве следующего примера рассмотрим четырехтахионную амплитуду, задающуюся выражением

$$\begin{aligned} A_4 &= g^2 \langle 0; k_1 | V_0(k_2) \Delta V(k_3) | 0; k_4 \rangle = \\ &= g^2 \int_0^1 \frac{dx}{x} \langle 0; k_1 | V_0(k_2, 1) V_0(k_3, x) | 0; k_4 \rangle. \end{aligned} \quad (7.1.59)$$

Среднее по нулевым модам легко вычисляется с помощью (7.1.6), и мы получаем

$$x^{k_3 \cdot k_4 + 1} = x^{-s/2 - 1}, \quad (7.1.60)$$

где $s = -(k_3 + k_4)^2$. Та часть подынтегрального выражения, которая содержит ненулевые моды, вычисляется с помощью

описанного в приложении 7.А метода когерентных состояний следующим образом:

$$\begin{aligned} \langle 0 | \exp\left(-k_2 \cdot \sum_1^\infty \frac{\alpha_n}{n}\right) x^{\sum_1^\infty \alpha_{-n} \alpha_n} \exp\left(k_3 \cdot \sum \frac{\alpha_{-n}}{n}\right) | 0 \rangle &= \\ &= \prod_{n=1}^\infty \prod_{\mu=0}^{D-1} \langle 0 | \exp\left(-k_{2\mu} \frac{\alpha_n^\mu}{\sqrt{n}}\right) x^{n \dot{\alpha}_\mu^\dagger \alpha_n^\mu} \exp\left(k_3^\mu \frac{a_{n\mu}^\dagger}{\sqrt{n}}\right) | 0 \rangle = \\ &= \prod_{n\mu} \exp\left(-k_{2\mu} k_3^\mu \frac{x^n}{n}\right) = (1-x)^{k_2 \cdot k_3} = (1-x)^{-\frac{1}{2}t-2}. \end{aligned} \quad (7.1.61)$$

Собирая все вместе, получаем

$$\begin{aligned} A_4 &= g^2 \int_0^1 x^{-\frac{1}{2}s-2} (1-x)^{-\frac{1}{2}t-2} dx = \\ &= g^2 B\left(-\frac{1}{2}s-1, -\frac{1}{2}t-1\right) = g^2 B(-\alpha(s), -\alpha(t)), \end{aligned} \quad (7.1.62)$$

где B — это бета-функция Эйлера,

$$B(a, b) = \int_0^1 x^{a-1} (1-x)^{b-1} dx = \frac{\Gamma(a) \Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}, \quad (7.1.63)$$

а $\alpha(s) = 1 + s/2$. Таким образом, мы воспроизвели амплитуду Венециано. Асимптотическое поведение этой амплитуды было описано в разд. 1.1.2.

Рассмотрим обобщение этого результата на случай древесной амплитуды процесса с M тахионами. Для быстрого получения ответа стоит исходить из более симметричной формулировки (7.1.40), (7.1.42) и (7.1.47). Собственно M -тахионная корреляционная функция подробно вычисляется в приложении 7.А, и результат выглядит следующим образом:

$$\langle 0 | V_0(k_1, y_1) \dots V_0(k_M, y_M) | 0 \rangle = y_1 y_2 \dots y_M \prod_{i < j} (y_i - y_j)^{k_i \cdot k_j}. \quad (7.1.64)$$

Заметим, что в гл. 1 мы уже выводили эту же формулу с помощью функционального интеграла. Таким образом,

$$I_M(k, y) = \prod_{i < j} (y_i - y_j)^{k_i \cdot k_j}, \quad (7.1.65)$$

что дает при подстановке в (7.1.42) формулу Коба — Нильсена:

$$A_M = g^{M-2} (y_A^0 - y_B^0) (y_A^0 - y_C^0) (y_B^0 - y_C^0) \times \\ \times \int_{-\infty}^{\infty} dy_1 dy_2 \dots dy_M \delta(y_A - y_A^0) \delta(y_B - y_B^0) \delta(y_C - y_C^0) \times \\ \times \prod_{i=1}^M \theta(y_{i-1} - y_i) \prod_{i < j} (y_i - y_j)^{k_i \cdot k_j}. \quad (7.1.66)$$

В качестве еще одного и последнего примера рассмотрим древесную амплитуду с M векторными частицами. В этом случае вершинный оператор $V(\xi, k, z)$ в (7.1.8) содержит дополнительный фактор $\xi \cdot \tilde{X}(z)$, и его удобно учесть следующим образом: вставим вместо него выражение $\exp(\xi \cdot \tilde{X})$, а закончив вычисление, удержим в результате только линейную по ξ часть. Если мы так сделаем, то вся осцилляторная алгебра опять упадет на произведение отдельных факторов (по фактору на каждый осциллятор), что делает вычисление сравнительно простым. В результате такой подстановки появляются эффективные вершинные операторы вида $V = \exp(ikX + \xi \cdot \tilde{X})$, причем нормальное упорядочение здесь несущественно, поскольку $k^2 = k \xi = 0$ и членами порядка ξ^2 мы пренебрегаем. Корреляционные функции операторов такого сорта вычисляются с помощью формул, приведенных все в том же приложении 7.A, а именно:

$$\left\langle \frac{V(\xi_1, k_1, y_1)}{y_1} \dots \frac{V(\xi_M, k_M, y_M)}{y_M} \right\rangle = \\ = \exp \sum_{i < j} \left(k_i \cdot k_j \log(y_i - y_j) + \frac{\xi_i \cdot \xi_j}{(y_i - y_j)^2} - \frac{k_i \cdot \xi_j}{y_i - y_j} + \frac{\xi_i \cdot \xi_j}{y_i - y_j} \right). \quad (7.1.67)$$

Таким образом, окончательный ответ выглядит как

$$A_M = g^{M-2} \int d\mu_M(y) F_M(\xi, k, y) I_M(k, y), \quad (7.1.68)$$

где $d\mu_M(y)$ и I_M задаются формулами (7.1.47) и (7.1.65), а F_M — это линейная по векторам поляризации часть функции

$$\exp \sum_{i \neq j} \left(\frac{1}{2} \frac{\xi_i \cdot \xi_j}{(y_i - y_j)^2} - \frac{k_i \cdot k_j}{y_i - y_j} \right). \quad (7.1.69)$$

В частности, при $M=3$ ответ совпадает с формулой (7.1.57).

7.1.5. Калибровочная инвариантность на уровне древесных диаграмм

Теперь мы обсудим вопрос о том, что можно считать аналогом калибровочной инвариантности для древесных процессов в теории открытых струн. Напомним, что для безмассовых внешних состояний этот вопрос уже обсуждался в разд. 1.5.1.

В разд. 7.1.2 мы продемонстрировали, что в древесных диаграммах шпурионные состояния отщепляются, если все остальные состояния — физические. Среди всех шпурионных состояний особого внимания заслуживают так называемые состояния с нулевой нормой. Эти состояния, о которых мы впервые упоминали в разд. 2.2.2, помимо того, что являются шпурионными, удовлетворяют одновременно условиям физического состояния, и, как было показано в том же разд. 2.2.2, пара условий, шпурионность плюс физичность, приводят к тому, что норма состояния оказывается равной нулю. Именно отщепление состояний с нулевой нормой в струнной теории и связано с калибровочной инвариантностью. Вот, например, типичное состояние с нулевой нормой: это безмассовый векторный мезон, имеющий чисто продольную поляризацию $\xi^\mu = k^\mu$. Отщепление такого состояния соответствует калибровочной инвариантности, хорошо знакомой нам по теории Янга — Миллса, т. е. инвариантности амплитуд относительно сдвига $\xi^\mu \rightarrow \xi^\mu + \epsilon k^\mu$.

Чтобы прочувствовать, как именно происходит отщепление состояний с нулевой нормой, заметим, что амплитуда рассеяния, содержащая такие состояния, вычисляется в точности так же, как и любая другая обычная амплитуда. В частности, с любым состоянием, удовлетворяющим условиям Вирасоро, ассоциируется вершинный оператор конформной размерности $J=1$, вне зависимости от того, нулевая ли у этого состояния норма или нет. Однако если в A_M входит хотя бы один вершинный оператор, порождающий состояние с нулевой нормой, то такая амплитуда должна обращаться в нуль. Факт этот прямо вытекает из уже доказанных утверждений, надо лишь скомбинировать результаты предыдущих разделов: свойство циклической симметрии позволяет представить A_M в виде (7.1.15), причем так, что состояние с нулевой нормой окажется в одной из обкладок, а тогда из доказательства теоремы об отщеплении шпурионных состояний следует, что это выражение обращается в нуль.

Хотя эта аргументация вполне убедительна, полезно продемонстрировать свойство отщепления и еще одним способом, который не опирается явно на циклическую симметрию. В качестве типичного примера состояния с нулевой нормой возьмем опять продольно поляризованный безмассовый векторный мезон.

Как мы установили в разд. 2.2.2, испускание такого состояния описывается оператором

$$V(k, \tau) = -i \frac{d}{d\tau} (e^{ik \cdot X(\tau)}) = k \cdot \dot{X} e^{ik \cdot X(\tau)}. \quad (7.1.70)$$

Соответствующее состояние в фоковском пространстве получается с помощью конструкции в (6.21) и равно $k \cdot \alpha_{-1} |0; k\rangle = L_{-1} |0; k\rangle$. Его норма с очевидностью равна нулю в силу условия $k^2 = 0$. Нам безусловно необходимо, чтобы состояния такого типа не давали вкладов в физические процессы, поскольку факт отщепления таких состояний есть не что иное, как утверждение о калибровочной инвариантности на массовой поверхности.

Докажем, что в древесных амплитудах продольные безмассовые векторы отщепляются. Как мы уже знаем, это утверждение верно, когда интересующее нас состояние представлено в виде одного из «концов» дерева, теперь же мы будем считать, что оно испускается где-то посередине. Без каких-либо дополнительных усложнений мы можем провести наши рассуждения для целого класса вершин, куда, конечно же, попадает продольный безмассовый вектор в качестве частного случая. Итак, предположим, что $V_Z(k, \tau) = -i \frac{d}{d\tau} W(k, \tau)$, где W — произвольный оператор конформной размерности $J = 0$, так что $J = 1$ у V_Z . Для таких операторов «уравнение Шрёдингера» принимает вид

$$V_Z = -i \frac{d}{d\tau} W = [L_0, W] = [L_0 - 1, W]. \quad (7.1.71)$$

Подставив это выражение вместо одной из вершин в формулу для древесной амплитуды, мы обнаружим, что сопутствующий W фактор $L_0 - 1$ или сократится с соседним пропагатором, или аннигилирует одно из двух состояний, $\langle \phi_1 |$ или $|\phi_M\rangle$, на концах дерева. Но любое слагаемое с сокращенным пропагатором будет голоморфной функцией инвариантной мандельштамовской переменной ($s = -p^2$) соответствующего канала, поскольку именно пропагатор является источником возможных сингулярностей. С другой стороны, как было показано в гл. 1, древесная амплитуда имеет реджевскую асимптотику, что в сочетании с предыдущим утверждением приводит нас к следующему выводу: существуют такие области значений инвариантных энергетических переменных, в которых рассматриваемое слагаемое аналитично и обращается в нуль при $|s| \rightarrow \infty$. Отсюда по стандартной теореме ТФКП следует, что амплитуда должна быть тождественно равна нулю во всей этой области, а следовательно, в силу аналитичности она должна быть нулем везде.

Еще один способ прийти к тому же выводу основан на том, что при $\tau \rightarrow 0$ операторное разложение для пары вертексов имеет вид

$$V_1(k_1, \tau) V_2(k_2, 0) \sim \tau^{k_1 \cdot k_2 - n} f(\tau), \quad (7.1.72)$$

где n — некоторое целое число, а $f(\tau)$ аналитична при $\tau = 0$. Когда пропагатор оказывается сокращенным, то два соседних вершинных оператора перемножаются при совпадающих временах τ и правая часть (7.1.72) становится плохо определенной. Но поскольку при $k_1 \cdot k_2 > n$ она обращается в нуль для $\tau = 0$, то единственная разумная интерпретация, согласованная с требованием аналитичности, заключается в том, чтобы считать все произведение равным нулю и при всех остальных значениях $k_1 \cdot k_2$.

Тот факт, что, сократив пропагатор, мы получаем выражение, равное нулю, часто используется в струнных вычислениях и иногда называется «принципом сокращенного пропагатора». Вообще говоря, на теорию струн можно смотреть как на теорию поля с необычайно большой группой калибровочной симметрии; с этой точки зрения отщепление состояний с нулевой нормой можно трактовать как утверждение о том, что древесные амплитуды на массовой поверхности сохраняют эту калибровочную инвариантность. Но так же, как и в теории точечных частиц, инвариантность в теории струн может нарушаться на уровне одной петли вследствие эффектов, известных как аномалии. Этот круг вопросов мы детально обсудим в гл. 10. Заметим, что если применять метод сокращенного пропагатора без должной осторожности в нерегуляризованных расходящихся выражениях, то легко получить и ошибочные результаты, что, например, и происходит для некоторых петлевых диаграмм в теории открытых струн.

7.1.6. Оператор твиста

При построении амплитуды A_M мы пользовались вершинными операторами, описывающими испускание частиц с того края мировой поверхности, который соответствует $\sigma = 0$. Однако нет никаких оснований считать, что этот край чем-нибудь лучше другого, $\sigma = \pi$, откуда частицы могут испускаться с тем же успехом. В этом случае вершинные операторы надо строить из поля $X(\sigma = \pi, \tau)$, а не из $X(\sigma = 0, \tau)$, или же можно ввести «оператор твиста» Ω , отображающий σ на $\pi - \sigma$, т. е. обладающий свойством

$$V(\sigma = \pi) = \Omega V(\sigma = 0) \Omega^{-1}. \quad (7.1.73)$$

Очевидно, что необходимо потребовать $\Omega^2 = 1$, поскольку твист, выполненный дважды, эквивалентен отсутствию твиста вообще. Замена $\sigma = 0$ на $\sigma = \pi$ в граничных условиях открытой струны приводит к умножению каждого осциллятора α_n (как, впрочем, и S_n в случае суперструны) на фазу $(-1)^n$, что достигается введением оператора

$$\Omega = \pm (-1)^N, \quad (7.1.74)$$

где N — обычный оператор числа частиц (для бозонной струны он равен $\sum_1^\infty \alpha_{-n} \cdot \alpha_n$). Общая фаза у Ω условием (7.1.73) не определяется, и нужны дополнительные соображения. Для бозонной струны правильным выбором будет знак плюс, поскольку

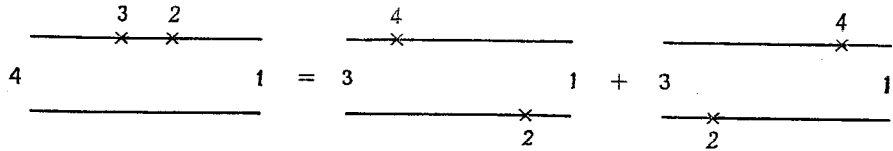


Рис. 7.9. Тождество с оператором твиста для четырехточечной амплитуды. Из рисунка видно, что когда частицы испускаются из противоположных краев мировой поверхности, то два разных способа упорядочения по времени вершинных операторов отвечают одному и тому же циклическому упорядочению всех четырех частиц.

состояния с четным N являются четными относительно зарядового сопряжения (C) и соответственно состояния с нечетным N являются C -нечетными. В суперструне (в суперсимметричной формулировке) ситуация обратная, там выбирается знак минус.

В качестве иллюстрации действия оператора твиста рассмотрим четырехтахсионную амплитуду. Рис. 7.9 наводит на мысль о возможности следующего тождества:

$$\langle 1 | V(2) \Delta V(3) | 4 \rangle = \langle 1 | V(2) \Delta \Omega V(4) | 3 \rangle + \langle 1 | V(4) \Delta \Omega V(2) | 3 \rangle. \quad (7.1.75)$$

Два члена в правой части соответствуют двум возможным способам упорядочения по «времени» τ моментов испускания частиц № 2 и № 4, причем оба они соответствуют мировой поверхности с одним и тем же циклическим порядком частиц. Поэтому имеет смысл предположить, что в сумме они действительно дают левую часть.

Левая часть (7.1.75) уже вычислялась, и было показано, что она равна

$$g^2 \int_0^1 y^{-2-s/2} (1-y)^{k_2 \cdot k_3} dy = g^2 B(-\alpha(s), -\alpha(t)), \quad (7.1.76)$$

где $s = -(k_1 + k_2)^2$ и $t = -(k_2 + k_3)^2$. Оба слагаемых в правой части легко вычисляются с помощью описанной в разд. 7.1.4 техники; оказывается, что эффект твиста сводится к замене $1-y$ на $1+y$. Первое слагаемое в правой части дает

$$g^2 \int_0^1 x^{-2-s/2} (1+x)^{k_2 \cdot k_3} dx = g^2 \int_0^{1/2} y^{-2-s/2} (1-y)^{k_2 \cdot k_3} dy; \quad (7.1.77)$$

тут сделана замена переменных $y = x/(x+1)$. Второе же слагаемое дает интеграл от $1/2$ до 1 , и в сумме мы получаем ровно (7.1.76), что и следовало ожидать.

При вычислении древесных амплитуд введение оператора твиста есть лишь вопрос удобства, прямой необходимости в его существовании нет. Даже для однопетлевых диаграмм без него можно обойтись, если мировая поверхность ориентируема, мы можем использовать вершины $V(0)$ для одной границы, а $V(\pi)$ — для другой. Однако на том же однопетлевом уровне для неориентированной струны мы сталкиваемся с мировой поверхностью, имеющей топологию листа Мёбиуса, и тут обойтись без оператора твиста становится почти невозможно.

7.2. Замкнутые бозонные струны

Древесной диаграмме замкнутой струны соответствует мировая поверхность, имеющая топологию сферы. Более того, с помощью подходящего конформного преобразования можно добиться, чтобы и геометрически эта поверхность была нормальной сферой, которую, в свою очередь, можно отобразить стереографической проекцией на комплексную плоскость. Разделение в теории замкнутой струны левых и правых мод, что мы неоднократно подчеркивали в предыдущих главах, приводит к тесной связи между амплитудами замкнутой струны и параметрами амплитуд открытой. И если общий вид древесной амплитуды в открытой струне — это $\int dy f(y)$, где y обозначает набор существенных переменных, то в замкнутой струне мы будем получать соответственно $\int d^2 z f_R(z) \bar{f}_L(\bar{z})$, где $f_R(z)$ и $\bar{f}_L(\bar{z})$ суть выражения такого же типа, что и $f(y)$, связанные по отдельности с левыми и правыми модами. Интегрирование же будет проводиться по всей комплексной плоскости.

7.2.1. Построение древесных амплитуд

Рассматривая замкнутые струны в разд. 2.3.1, мы установили, что координата струны $X^\mu(\sigma, \tau)$ распадается на сумму координат правого и левого секторов $X_R^\mu(\tau - \sigma) + X_L^\mu(\tau + \sigma)$

и что каждое из этих слагаемых разлагается по своей системе осцилляторов $\{\alpha_m^\mu\}$ и $\{\tilde{\alpha}_m^\mu\}$. Поскольку каждый такой набор осцилляторов, взятый сам по себе, задает фоковское пространство открытой струны, то фоковские состояния замкнутой струны можно описывать как прямое произведение состояний открытой. Дополнительно следует ввести только одно ограничение: $L_0 = \tilde{L}_0$ (чуть позже мы к нему еще вернемся), из которого следует, что оба сектора дают одинаковые вклады в значение массы. В случае неориентированной струны необходимо еще провести симметризацию по обоим секторам.

В качестве правдоподобной рабочей гипотезы примем, что оператор испускания основного состояния замкнутой струны представляется в виде $:\exp(ik \cdot X):$, в точности как в случае открытых струн. Можно утверждать, что, как и для открытых струн, тахионное состояние замкнутой струны обладает единственным квантовым числом — импульсом, который естественным образом входит в оператор $V = :\exp(ik \cdot X):$. Поскольку $X = X_L + X_R$, где X_R и X_L построены по отдельности из правых и левых мод и соответственно друг с другом коммутируют, то наш кандидат на роль вершинного оператора распадается на два множителя,

$$V(\sigma, \tau) = \tilde{V}_R(\tau - \sigma) V_L(\tau + \sigma), \quad (7.2.1)$$

причем каждый из сомножителей устроен в точности как оператор испускания открытой струны:

$$V_L = e^{ik \cdot X_L}, \quad \tilde{V}_R = e^{ik \cdot X_R}. \quad (7.2.2)$$

При этом важно не упускать из виду, что, как отмечалось в разд. 2.1.3, для замкнутых струн

$$\alpha_0^\mu = \tilde{\alpha}_0^\mu = \frac{1}{2} p^\mu \quad (7.2.3)$$

в отличие от случая открытых струн, где $\alpha_0^\mu = p^\mu$ и нет множителя $1/2$. Смысл этого множителя — показать, что хотя V_L и \tilde{V}_R в (7.2.2) и построены как тахионные операторы открытой струны, но приписываемый им импульс есть $(1/2)p^\mu$, а не p^μ . Вот таким образом полный импульс струны распределяется поровну между правыми и левыми модами.

Естественный вопрос: будет ли факторизация типа (7.2.1) неким общим правилом или же она специфична для тахионов? Напомним, что фоковское пространство замкнутой струны легко строится как тензорное произведение фоковских пространств двух открытых струн — правого и левого секторов. Представляется вполне естественным строить и остальные вершинные

операторы для замкнутой струны в виде произведений вершинных операторов правого и левого секторов, как в (7.2.1). Такие операторы будут во взаимно однозначном соответствии с элементами фоковского пространства замкнутой струны, и, более того, легко видеть, что они будут обладать всеми необходимыми физическими свойствами вершинных операторов. Например, если V_L и \tilde{V}_R — это левый и правый вершинный операторы с конформными размерностями единица, то их произведение $V_L \tilde{V}_R$ будет иметь общую конформную размерность два, что, как мы убедились в гл. 1, и есть правильная размерность для вершинного оператора замкнутой струны.

Существенное отличие замкнутой струны состоит в том, что состояния могут испускаться из любой внутренней точки мировой поверхности, а вовсе не только из точек границы, как в открытой струне. С физической точки зрения вершинный оператор

$$V(k, \tau, \sigma) = V_R\left(\frac{1}{2}k, \tau - \sigma\right) V_L\left(\frac{1}{2}k, \tau + \sigma\right) \quad (7.2.4)$$

описывает эмиссию из точки с координатами τ и σ . Однако то, к чему мы стремимся в операторном формализме, — это полная амплитуда процесса, содержащего испускание частицы в момент τ , вне зависимости от того, при каком именно значении σ она была испущена. Таким образом, мы определяем вершинный оператор для замкнутой струны как суперпозицию операторов со всеми возможными σ :

$$\begin{aligned} V^{cl}(k, \tau) &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi d\sigma V_R\left(\frac{1}{2}k, \tau - \sigma\right) V_L\left(\frac{1}{2}k, \tau + \sigma\right) = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi d\sigma e^{-2i\sigma(L_0 - \tilde{L}_0)} V_R\left(\frac{1}{2}k, \tau\right) V_L\left(\frac{1}{2}k, \tau\right) e^{2i\sigma(L_0 - \tilde{L}_0)}. \end{aligned} \quad (7.2.5)$$

Продолжая действовать в том же духе, как и в случае открытых струн, определим пропагатор

$$\Delta = \frac{1}{2}(L_0 + \tilde{L}_0 - 2)^{-1} = \frac{1}{2} \int_0^1 \rho^{L_0 + \tilde{L}_0 - 3} d\rho \quad (7.2.6)$$

и дреvesную амплитуду

$$A_M = k^{M-2} \langle \Phi_1 | V_2 V_3 \dots V_{M-1} | \Phi_M \rangle + \text{перестановки вершин}. \quad (7.2.7)$$

Эти формулы очень похожи на формулы для открытой струны и тоже обладают тем замечательным свойством, что унитар-

ность (по крайней мере в явно указанных каналах) очевидна. Но есть в них и весьма существенное отличие: мы не можем корректно определить какой-либо способ упорядочения $M-2$ испускаемых частиц, и полная амплитуда явно содержит сумму по всем возможным перестановкам отвечающих им вертексов. Поскольку, кроме того, вертексы интегрируются по всем возможным значениям σ (в результате формула становится инвариантной относительно «твистинга» любого пропагатора), то в сумме (7.2.7) оказываются учтенными все возможные способы расстановки всех M штук внешних состояний. Это обстоятельство не случайно, а связано с еще одним чрезвычайно важным свойством, тоже не имеющим аналога в теории открытых струн, а именно условием $(L_0 - \tilde{L}_0)|\varphi\rangle = 0$, которое налагается на физические состояния $|\varphi\rangle$. Те состояния замкнутой струны, которые распространяются пропагатором (7.2.6), не обязательно этому условию удовлетворяют, но довольно легко так модифицировать формулу (7.2.6), чтобы пропагатор аннигилировался оператором

$$\Delta = \int_0^1 d\rho \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{4\pi} \rho^{L_0 + \tilde{L}_0 - 3} e^{i\varphi(L_0 - \tilde{L}_0)}. \quad (7.2.8)$$

Поскольку как начальное, так и конечное состояния в (7.2.7) тоже аннигилируются этим оператором, а вертексы с $L_0 - \tilde{L}_0$ коммутируют (из-за присутствия интеграла по σ), то модификация (7.2.8) значения амплитуды не меняет, но все дальнейшие наши рассуждения станут значительно проще. Можно, например, опустить интегрирования по σ в вершинных операторах (7.2.5); удобно ввести комплексную переменную

$$z = \rho e^{i\varphi} \quad (7.2.9)$$

и записать пропагатор (7.2.8) в виде

$$\Delta = \frac{1}{4\pi} \int_{|z| \leq 1} \frac{dz d\bar{z}}{z\bar{z}} z^{L_0 - 1} \bar{z}^{\tilde{L}_0 - 1}. \quad (7.2.10)$$

7.2.2. Примеры

Особенно просто формула (7.2.7) работает при вычислении трехточечной функции. Будем представлять состояния замкнутой струны φ как произведения левого состояния λ и правого ρ . Тогда вершинный оператор факторизуется из произведения левого и правого вертексов

$$V_2(k_2) \equiv V(\varphi_2, k_2) = V_R(\rho_2, \frac{1}{2}k_2) V_L(\lambda_2, \frac{1}{2}k_2), \quad (7.2.11)$$

взятых при $\tau = 0$ (или $z = 1$). Поскольку для начального и конечного состояний $L_0 = \tilde{L}_0$, то интеграл в (7.2.5) можно опустить. Обкладки тоже можно представить в виде произведения левых и правых,

$$\langle \varphi_1 | = \langle \rho_1 |_R \otimes \langle \lambda_1 |_L, \quad | \varphi_3 \rangle = | \rho_3 \rangle_R \otimes | \lambda_3 \rangle_L, \quad (7.2.12)$$

и в результате мы получаем

$$A_3^{cl}(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) = A_3^{op}(\rho_1, \rho_2, \rho_3) \times A_3^{op}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3), \quad (7.2.13)$$

т. е. просто произведение двух амплитуд открытой струны, связанных с левым и правым секторами. В каждой из них, естественно, подразумевается, что состояния ρ_i и λ_i несут импульс $(1/2)k_i$. Например, трехгравитонная вершина через трехфотонные вершины открытой струны выражается формулой

$$A_3 = \kappa \xi_1^{\mu\mu'} \xi_2^{\nu\nu'} \xi_3^{\rho\rho'} t_{\mu\nu\rho} (k/2) t_{\mu'\nu'\rho'} (k/2), \quad (7.2.14)$$

где $t_{\mu\nu\rho}$ — тензор из (7.1.58). Тензор поляризации гравитона $\xi^{\mu\nu}(k)$ симметричный, бесследовый и удовлетворяет условию $\kappa_\mu \xi^{\mu\nu} = 0$. Из тех же формул нетрудно получить и амплитуды для безмассового антисимметричного тензора и дилатона. Поскольку $t_{\mu\nu\rho}$ содержит поправки порядка $O(\alpha')$, то и трехгравитонная вершина (7.2.14) будет содержать поправки $O(\alpha')$ и $O(\alpha'^2)$ к соответствующей вершине теории относительности; они отвечают некоторым специальным членам типа R^2 и R^3 в эффективном действии.

Вернемся к евклидовой метрике на мировой поверхности и перепишем подынтегральное выражение в (7.2.5) в терминах комплексных переменных, введенных в (7.2.9). Полная амплитуда представляет собой сумму членов с различным упорядочением испускаемых частиц. В каждом из этих членов пропагаторы представлены как интегралы по переменной z в области $|z| \leq 1$. Когда все эти члены соберутся вместе, то в результате мы получим выражение, содержащее набор независимых z -интегралов, причем каждый из них будет интегрироваться по всей комплексной плоскости. В качестве простой иллюстрации этого утверждения рассмотрим две дреvesные диаграммы, дающие вклад в четырехточечную амплитуду с внешними тахионами, расположенными, как на рис. 7.10. Амплитуда записывается в виде

$$A_4 = \kappa^2 \langle k_1 | V_2(k_2) \Delta V_3(k_3) | k_4 \rangle + \kappa^2 \langle k_1 | V_3(k_3) \Delta V_2(k_2) | k_4 \rangle. \quad (7.2.15)$$

С помощью интегрального представления (7.2.10) мы можем передвинуть в первом слагаемом множителе $z^{L_0} \bar{z}^{\tilde{L}_0}$ из Δ направо,

поскольку

$$V(k, z, \bar{z}) = z^{L_0} \bar{z}^{\bar{L}_0} V(k, 1) z^{-L_0} \bar{z}^{-\bar{L}_0} = V_R\left(\frac{1}{2}k, z\right) V_L\left(\frac{1}{2}k, \bar{z}\right). \quad (7.2.16)$$

Во втором же слагаемом в правой части (7.2.15) эти множители можно сдвинуть влево. В итоге мы получаем

$$A_4 = \frac{\kappa^2}{4\pi} \int_{|z| \leq 1} \frac{d^2z}{|z|^2} \langle k_1 | V_2(k_2, 1, 1) V_3(k_3, z, \bar{z}) | k_4 \rangle + \\ + \frac{\kappa^2}{4\pi} \int_{|z| \geq 1} \frac{d^2z}{|z|^2} \langle k_1 | V_3(k_3, z, \bar{z}) V_2(k_2, 1, 1) | k_4 \rangle, \quad (7.2.17)$$

где во втором члене мы сделали замену переменных $z \rightarrow 1/\bar{z}$. Очевидно, что эти два слагаемых можно собрать в единое выражение, где интегрирование будет вестись по всей комплексной

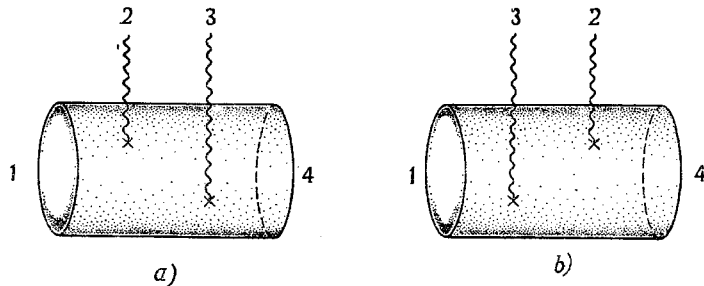


Рис. 7.10. Две диаграммы, дающие вклад в четырехчастичную древесную амплитуду для замкнутой струны. Рис. а) отвечает пропагатору в z -канале, рис. б) — пропагатору в u -канале, а их сумма дает полную кроссинг-симметричную амплитуду.

плоскости z , если принять соглашение, что вершинные операторы упорядочиваются по возрастанию модуля их аргументов.

Обобщением этого примера будет случай M частиц, где $M - 3$ переменные независимо интегрируются каждая по своей полной комплексной плоскости. Такую амплитуду можно переписать в явно симметричном виде, пользуясь теми же приемами, что применялись в случае открытой струны в предыдущем разделе. Для этого, в частности, надо представить конечные состояния как результат вставки на мировую поверхность некоторых вершинных операторов в бесконечный момент времени τ . Произвольная M -частичная древесная амплитуда имеет вид

$$A_M = 4\pi \left(\frac{\kappa}{4\pi}\right)^{M-2} \int d\mu_M(z) I_M^R\left(\frac{1}{2}k, z\right) I_M^L\left(\frac{1}{2}k, \bar{z}\right), \quad (7.2.18)$$

где

$$I_M^R\left(\frac{1}{2}k, z\right) = \langle 0 | T \left\{ V_R\left(\frac{1}{2}k_1, z_1\right) \dots V_R\left(\frac{1}{2}k_M, z_M\right) \right\} | 0 \rangle / (\prod z_i), \quad (7.2.19)$$

$$I_M^L\left(\frac{1}{2}k, \bar{z}\right) = \langle 0 | T \left\{ V_L\left(\frac{1}{2}k_1, \bar{z}_1\right) \dots V_L\left(\frac{1}{2}k_M, \bar{z}_M\right) \right\} | 0 \rangle / (\prod z_i), \quad (7.2.20)$$

Символ « T упорядочения» означает, что все множители V расставлены так, что $|z| = \rho$ убывает при переходе к каждому следующему V , а возникающие при этом всевозможные расстановки операторов как раз и соответствуют сумме по всем перестановкам в (7.1.73). Взятые по отдельности, члены с различным упорядочением по $|z|$ никакого инвариантного смысла не имеют, осмысленной является лишь вся полная сумма.

Теперь, чтобы разобраться с понятием дуальности, нам необходимо обсудить оставшуюся в теории симметрию, которая для замкнутой струны играет ту же роль, что $SL(2, R)$ для открытой. При квантовании струны в гамильтоновой картине, использованной во второй главе, когда метрика на мировой поверхности имеет сигнатуру $(- +)$, вакуум $|0; 0\rangle$, т. е. основное состояние с нулевым импульсом, инвариантен относительно шестипараметрической группы $SL(2, R) \times SL(2, R)$; первый из этих факторов генерируется посредством L_1, L_0, L_{-1} , а второй посредством $\bar{L}_1, \bar{L}_0, \bar{L}_{-1}$. Однако при вычислении струнных амплитуд рассеяния гораздо удобнее выбирать на мировой поверхности метрику с сигнатурой $(+ +)$. Это как раз та самая метрика, которая естественно, без всякого дополнительного вмешательства, появилась в приведенных выше формулах. Однако при выборе евклидовой метрики группа $SL(2, R) \times SL(2, R)$ заменяется на группу $SL(2, C)$, состоящую из всех комплексных матриц размера 2×2 с единичным детерминантом. Обе эти группы, $SL(2, C)$ и $SL(2, R) \times SL(2, R)$, имеют вещественную размерность шесть и довольно тесно связаны друг с другом, но все же это совершенно разные группы.

Поскольку мировая поверхность замкнутой струны представляет собой сферу, которую можно конформно отобразить на комплексную плоскость, то искомая симметрия замкнутой струны должна совпадать с группой конформных преобразований расширенной комплексной плоскости (е присоединенной бесконечно удаленной точкой). Для того чтобы уяснить себе, почему этой группой будет именно группа $SL(2, C)$, заметим, что любую комплексную матрицу размера 2×2 можно рассматривать как

оператор в двумерном комплексном векторном пространстве:

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}. \quad (7.2.21)$$

По виду эта формула совпадает с формулой (7.1.35), но теперь уже все переменные комплексные, поскольку мы рассматриваем группу $SL(2, C)$, а не $SL(2, R)$. В точности так же, как и при обсуждении формулы (7.1.35), мы вводим переменную $z = v_1/v_2$ и видим, что она преобразуется по правилу

$$z \rightarrow \frac{az + b}{cz + d}. \quad (7.2.22)$$

Таким образом, мы заключаем, что группа $SL(2, C)$ действует как группа конформных отображений z -плоскости (включая бесконечно удаленную точку) в себя. Из-за комплексности параметров число степеней свободы для $SL(2, C)$ в два раза больше, чем для $SL(2, R)$; это соответствует удвоению числа степеней свободы при переходе от открытых струн к замкнутым¹⁾.

Хотя сама $SL(2, C)$ и не разлагается на произведение двух групп симметрии отдельно для правых и отдельно для левых мод, сами эти моды во многих формулах расщепляются. Например, из (7.1.41) следует

$$\begin{aligned} I_M^R\left(\frac{1}{2}k, z\right) &= I_M^R\left(\frac{1}{2}k, z'\right) \prod_i (a - cz'_i)^2, \\ I_M^L\left(\frac{1}{2}k, \bar{z}\right) &= I_M^L\left(\frac{1}{2}k, \bar{z}'\right) \prod_i (\bar{a} - \bar{c}\bar{z}'_i)^2. \end{aligned} \quad (7.2.23)$$

В переводе на обычный язык эти формулы утверждают, что I_M^R и I_M^L имеют по группе Мёбиуса веса (2,0) и (0,2) соответственно, так что все произведение $I_M^L I_M^R$ имеет вес (2,2) относительно преобразований $SL(2, C)$.

Так же, как и в случае открытых струн, мы собираемся представить теперь меру интегрирования в более симметричном виде. Для начала попытаемся представить себе, как может выглядеть мера, обладающая всеми необходимыми свойствами, а затем проверим правильность полученного ответа, показав, что при подходящем выборе параметров он приведет к виду (7.2.7), т. е. к формуле, которую мы считаем «правильной» в

¹⁾ В гл. 15 мы проинтерпретируем входящие в эти формулы переменные v_1 и v_2 как однородные координаты на CP^1 ; формула $z = v_1/v_2$ будет задавать тогда стереографическую проекцию CP^1 (с выколотой «точкой на бесконечности», т. е. $v_2 = 0$) на плоскость z .

том смысле, что она обладает явной унитарностью (по крайней мере в очевидном канале). Действуя таким образом, мы получим (так же, как и в случае открытых струн) более общее и более симметричное, чем в (7.2.7), описание меры.

Очевидно, что искомая мера не может содержать полных (по всей комплексной плоскости) интегралов по всем z_i ; необходимо ввести какие-то ограничения, в противном случае в формулу опять войдет бесконечный множитель, пропорциональный объему группы $SL(2, C)$. Эту задачу естественно решить уже один раз использованным приемом, т. е. фиксировать три произвольные координаты (обозначим их z_A, z_B, z_C) с помощью симметрии $SL(2, C)$, положив их равными z_A^0, z_B^0, z_C^0 соответственно. Число условий получится вдвое больше, чем для открытых струн, поскольку z теперь комплексные, но, поскольку и число параметров теперь равно шести, а не трем, то нужное отображение всегда найдется. Кроме того, для получения $SL(2, C)$ -инвариантной амплитуды мера должна преобразовываться следующим образом:

$$d\mu_M(z) = d\mu_M(z') \prod_{i=1}^M |a - cz'_i|^{-4}. \quad (7.2.24)$$

С помощью тех же выкладок, которые были описаны в случае открытых струн, мы легко убеждаемся в том, что разумно выбрать

$$\begin{aligned} d\mu_M(z) &= |z_A - z_B|^2 |z_A - z_C|^2 |z_B - z_C|^2 \times \\ &\times \delta^2(z_A - z_A^0) \delta^2(z_B - z_B^0) \delta^2(z_C - z_C^0) \prod_{i=1}^M d^2z_i \end{aligned} \quad (7.2.25)$$

с произвольно фиксированными индексами A, B и C и значениями координат z_A^0, z_B^0, z_C^0 . Операторная формула (7.2.7) отвечает специальному выбору $z_1^0 = \infty, z_2^0 = 1$ и $z_M^0 = 0$. Угловая (фазовая) часть интегрирования по z обеспечивает выполнение условий $L_0 = \bar{L}_0$ во всех полюсах. Это прямо следует из наличия в (7.2.5) интеграла по σ , который гарантирует отсутствие какой-либо выделенной точки на поверхности струны.

В качестве частного примера рассмотрим амплитуду рассеяния M тахионов замкнутой струны. В используемых нами единицах ($\alpha' = 1/2$ для открытых струн) главная траектория Редже для замкнутой струны есть $\alpha(s) = 2 + s/4$. Это описывает безмассовое состояние, отвечающее тахиону, в теории с $\alpha(s) = 0$ при $k^2 = -s = 8$. Аналогично имеется состояние со спином два для $\alpha(s) = 2$, у которого $k^2 = 0$, и оно соответствует безмас-

совому гравитону. Для получения амплитуды надо просто отождествить и I_M^R , и I_M^L с I_M из теории открытых струн, что дает

$$A_M = 4\pi \left(\frac{\kappa}{4\pi}\right)^{M-2} \int d\mu_M(z) \prod_{i<l} |z_i - z_l|^{k_i \cdot k_l / 2}. \quad (7.2.26)$$

В частности, положив $z_1 = \infty$, $z_2 = 1$, $z_3 = z$ и $z_4 = 0$, мы получаем при $M = 4$

$$A_4 = \frac{\kappa^2}{4\pi} \int |z|^{k_1 \cdot k_4 / 2} |1 - z|^{k_2 \cdot k_3 / 2} d^2z. \quad (7.2.27)$$

Интегралы такого типа вычисляются в явном виде подстановкой представления

$$|z|^{-A} = \frac{1}{\Gamma(A/2)} \int_0^\infty t^{A/2} \exp(-t|z|^2) dt \quad (7.2.28)$$

и аналогично для $|1 - z|^{-B}$. После такой подстановки интеграл по z становится гауссовым и легко берется. Остающиеся интегралы по t берется с помощью формулы (7.1.63) для бета-функции Эйлера. А именно,

$$\begin{aligned} I &= \int |z|^{-A} |1 - z|^{-B} d^2z = \\ &= \frac{1}{\Gamma(A/2) \Gamma(B/2)} \int_0^\infty t^{A/2-1} u^{B/2-1} dt du \times \\ &\times \int_{-\infty}^\infty dx dy \exp\{-t(x^2 + y^2) - u[(1-x)^2 + y^2]\} = \\ &= \frac{\pi}{\Gamma(A/2) \Gamma(B/2)} \int_0^\infty \frac{dt du}{t+u} t^{A/2-1} u^{B/2-1} \exp\left(-\frac{tu}{t+u}\right) = \\ &= \pi \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}(A+B)-1\right)}{\Gamma(A/2) \Gamma(B/2)} \int_0^1 \lambda^{-A/2} (1-\lambda)^{-B/2} d\lambda = \\ &= B\left(1 - \frac{A}{2}, 1 - \frac{B}{2}, \frac{A+B}{2} - 1\right), \end{aligned} \quad (7.2.29)$$

где

$$B(a, b, c) = \pi \frac{\Gamma(a) \Gamma(b) \Gamma(c)}{\Gamma(a+b) \Gamma(b+c) \Gamma(c+a)}. \quad (7.2.30)$$

Применяя эти формулы для вычисления (7.2.27), учтем, что

$$k_3 \cdot k_4 = -\frac{1}{2}s - 8, \quad k_2 \cdot k_3 = -\frac{1}{2}t - 8 \quad (7.2.31)$$

и

$$s + t + u = \sum m_i^2 = -32, \quad (7.2.32)$$

и в результате

$$A_4 = \frac{\kappa^2}{4\pi} B\left(-\frac{1}{2}\alpha(s), -\frac{1}{2}\alpha(t), -\frac{1}{2}\alpha(u)\right), \quad (7.2.33)$$

т. е. мы получили формулу Вирасоро. Напомним, что траектории Редже имеют вид $\alpha(s) = s/4 + 2$ и удовлетворяют тождеству $\alpha(s) + \alpha(t) + \alpha(u) = -2$.

Эта формула явно кроссинг-симметрична, и нетрудно проверить, что при $\alpha(s)$, $\alpha(t)$, $\alpha(u) = 0, 2, \dots$ у нее имеются полюсы, соответствующие основному тахионному состоянию (при $s = -8$, $t = -8$ или $u = -8$) и бесконечной серии возбужденных состояний. Асимптотическое поведение этой амплитуды при высоких энергиях ($s \rightarrow \infty$ и t фиксировано) легко получить из формулы Стирлинга (которая обсуждалась в гл. 1 в связи с формулой Венециано для открытых струн)

$$\Gamma(a) \sim \sqrt{2\pi} a^{a-1/2} e^{-a}. \quad (7.2.34)$$

При $|a| \rightarrow \infty$ эта формула справедлива для любого направления в комплексной a плоскости, за исключением отрицательной вещественной оси. Применяя ее к (7.2.33) при $|s| \rightarrow \infty$, $u \sim -s$ и фиксированном t , получаем реджевское поведение:

$$A_4 \sim \frac{\kappa^2}{4} e^{-i\pi\alpha(t)/2} \frac{\Gamma(-\alpha(t)/2)}{\Gamma(1+\alpha(t)/2)} \left(\frac{s}{8}\right)^{\alpha(t)} \quad (7.2.35)$$

при s , сколь угодно мало удаленных от вещественной оси. Для физических, т. е. вещественных положительных значений s , этот древесный результат следует интерпретировать так же, как и в модели Венециано, в смысле среднего значения, поскольку на вещественной оси амплитуда все же имеет полюсы. При учете петлевых эффектов эти полюсы сдвигаются с вещественной оси.

Вопрос о калибровочной инвариантности амплитуд замкнутой струны упирается опять-таки в вопрос об отщеплении состояний с нулевой нормой в древесных диаграммах. Рассмотрим, например, диаграмму с продольно поляризованным гравитоном с импульсом k^μ (отождествим его с частицей № 2 на рис. 7.10). Произвольный продольно поляризованный тензор можно представить в виде линейной комбинации членов типа $\xi^{\mu\nu} = k^\mu \xi^\nu$,

где $k^2 = 0$ и $\xi \cdot k = 0$. Соответственно вертекс, описывающий испускание продольно поляризованного гравитона, имеет вид

$$V(k, \tau) = \frac{1}{\pi} \int d\sigma k_\mu \dot{X}_R^\mu(\tau - \sigma) \xi_\nu \dot{X}_L^\nu(\tau + \sigma) e^{ik \cdot X_R(\tau - \sigma)} e^{ik \cdot X_L(\tau + \sigma)} = \\ = -\frac{i}{\pi} \int d\sigma \frac{d}{d\tau} (e^{ik \cdot X_R(\tau - \sigma)}) \xi_\nu \dot{X}_L^\nu(\tau + \sigma) e^{ik \cdot X_L(\tau + \sigma)}. \quad (7.2.36)$$

Будучи вставлена в любую из диаграмм рис. 7.10, производная по τ сокращает пропагатор в точности так же, как и в случае амплитуды открытой струны. Однако для каждой из диаграмм в отдельности результат остается ненулевым из-за наличия второго вертекса, который, хотя и берется при том же значении τ , но отличается значением σ , а в определении вертексов входят независимые интегрирования по всем значениям σ . Но в полной комбинации диаграмм рис. 7.10, a и b интегралы по σ все же сокращаются всюду, за исключением окрестности сингулярной точки, когда положения двух вертексов на мировой поверхности совпадают. Здесь же необходимо вспомнить, что, как мы установили в (7.1.72), произведение двух вертексов в совпадающих точках есть сингулярная величина, и единственный способ придать ей разумное значение — это положить ее равной нулю. Такой способ рассуждений обобщается и на древесные диаграммы с произвольным числом внешних линий.

7.2.3. Связь с древесными диаграммами для открытых струн

Соотношение между трехчастичными вершинами в открытой и замкнутой струнах

$$A_3^{cl} \sim A_{3R} A_{3L}, \quad (7.2.37)$$

указанное нами в (7.2.14), обобщается и на случай M -частичных амплитуд. При этом самое наивное предположение, заключающееся в том, чтобы положить просто $A_{MR} A_{ML}$ для данного циклического упорядочения, оказывается, естественно, неверным, поскольку такая амплитуда будет всего лишь циклически симметрична, но в общем случае она не будет обладать всей необходимой симметрией. Только в случае $M=3$ оказывается, что полная симметрия A_{3R} и A_{3L} для тахионов (или антисимметрия для фотонов и т. д.) приводит к полной симметрии у A_3^{cl} .

Чтобы построить аналог (7.2.37) в четырехтахионном случае, заметим, что

$$B(a, b) B(b, c) = \frac{1}{\pi} \Gamma(b) \Gamma(a+c) B(a, b, c). \quad (7.2.38)$$

Отсюда, используя $a + b + c = 1$ и стандартную формулу $\Gamma(b)\Gamma(1-b) = \pi/\sin \pi b$, мы получаем

$$B(a, b, c) = \sin \pi b B(a, b) B(b, c), \quad (7.2.39)$$

что позволяет написать для четырехтахионной амплитуды

$$A_4^{cl}(s, t, u) \sim (\sin \pi t/8) A_4^{op}(s/4, t/4) A_4^{op}(t/4, u/4). \quad (7.2.40)$$

Появление такой формулы отнюдь не случайность, а, напротив, частный случай некоего общего соотношения.

Четырехчастичная амплитуда, описывающая рассеяние произвольных возбужденных состояний, отличается от (7.2.27) присутствием в подынтегральном выражении дополнительной полиномиальной зависимости от z и \bar{z} , причем в соответствующие коэффициенты входят внешние импульсы и тензоры поляризации. Иными словами, в общем случае следует рассматривать выражения вида

$$I(n_1, n_2, n_3, n_4) = \\ = \int d^2 z z^{k_1 \cdot k_4/4 + n_1} (1-z)^{k_2 \cdot k_3/4 + n_2} (\bar{z})^{k_3 \cdot k_4/4 + n_3} (1-\bar{z})^{k_2 \cdot k_1/4 + n_4}. \quad (7.2.41)$$

Записав $z = x + iy$ и продеформировав контур интегрирования по y , можно представить все это выражение как интеграл, в котором z и \bar{z} рассматриваются как независимые вещественные переменные, меняющиеся от $-\infty$ до ∞ . При этом важно правильно выбирать ветви в подынтегральном выражении. Контуры интегрирования по η и χ (так мы обозначили вещественные переменные, соответствующие z и \bar{z}) могут проходить как снизу, так и сверху точек ветвления в 0 и 1 в зависимости от того, будут ли значения другой переменной меньше 0, между 0 и 1 или больше 1.

Следующий шаг состоит в том, чтобы деформировать контура так, чтобы они окружали разрезы и можно было заменить подынтегральные выражения на соответствующие качки. Все это требует определенной аккуратности, и мы опустим здесь детали, приведя лишь окончательный ответ:

$$I(n_1, n_2, n_3, n_4) = -\sin(\pi k_2 \cdot k_3/4) \int_0^1 d\xi \xi^{k_3 \cdot k_4/4 + n_1} (1-\xi)^{k_2 \cdot k_1/4 + n_2} \times \\ \times \int_1^\infty d\eta \eta^{k_3 \cdot k_4/4 + n_3} (1-\eta)^{k_2 \cdot k_1/4 + n_4}. \quad (7.2.42)$$

Это в точности есть произведение трех ожидаемых факторов: $\sin(\pi t/8)$ на $(s-t)$ -канальную и на $(t-u)$ -канальную амплитуды открытой струны. В частности, положив все n равными

нулю, мы немедленно воспроизведем только что полученную четырехтахсионную амплитуду.

Отталкиваясь от формулы (7.2.42), можно обобщить (7.2.40) на другие четырехчастичные процессы. Например, четырехграви-тонная амплитуда связана с четырехфотонными соотношением

$$A_4^{\mu\nu\rho\sigma\lambda\lambda'} \sim (\sin \pi t/8) A_4^{\mu\nu\lambda\lambda'}(s/4, t/4) A^{\nu\rho\lambda\lambda'}(t/4, u/4). \quad (7.2.43)$$

Для M -частичных функций аналогичное соотношение имеет следующий вид:

$$A_M^{cl} \sim \sum_{P, P'} e^{i\pi F(P, P')} A_M^{op}(P) \bar{A}_M^{op}(P'), \quad (7.2.44)$$

где P и P' указывают на выбранный способ циклического упорядочения M внешних линий, A_M^{op} и \bar{A}_M^{op} суть M -частичные древесные амплитуды открытой струны, ассоциированные с левыми и правыми модами (вообще говоря, они не обязаны совпадать) со стандартной заменой $k \rightarrow k/2$, а $F(P, P')$ — некоторые подходящие фазовые множители. Заметим, что число неэквивалентных слагаемых быстро растет с ростом M . Если при $M=4$ есть только одно слагаемое, а при $M=5$ — два, то при $M=6$ их уже 12 штук. Связи подобного рода имеют место во всех теориях замкнутых струн; например, амплитуды гетеротической струны связаны с произведениями древесных амплитуд открытой суперструны и открытой бозонной струны, — обстоятельство, которое мы используем в дальнейшем.

7.3. Суперструны в формулировке RNS

В конструкции суперструнных амплитуд участвует ряд совершенно новых элементов по сравнению с описанным в предыдущих разделах случае бозонной струны. Некоторые вычисления проще всего делать в ковариантной RNS-формулировке разд. 4.2, другие — используя явно суперсимметричное конусное квантование разд. 5.2. Мы начнем с обсуждения ковариантной формулировки RNS.

7.3.1. Амплитуды открытой струны в бозонном секторе

Среди всех возможных типов суперструнных амплитуд при $D=10$ именно амплитуды в бозонном секторе суперструны RNS более всего напоминают амплитуды в теории $D=26$ бозонной струны. Но даже здесь появляется целый ряд новых вопросов, связанных с наличием в теории калибровочных

G -симметрий, порожденных суперсимметрией на мировой поверхности струны. В точности как и в 26-мерном случае, мы можем определить древесную амплитуду формулой

$$A_M = g^{M-2} \langle \varphi_1 | V(2) \Delta V(3) \dots \Delta V(M-1) | \varphi_M \rangle \quad (7.3.1)$$

и показать, что при подходяще определенных V , Δ и $|\varphi\rangle$ она будет удовлетворять требованиям древесной унитарности и циклической симметрии. В нашем случае условие древесной унитарности означает, что связанные с полюсами промежуточные состояния должны удовлетворять не только обычным дополнительным условиям, ассоциированным с вирасоровскими генераторами L_n , но еще и тем условиям, которые порождаются суперконформными генераторами G_r . Кроме того, в нашем анализе будет участвовать и еще одно новое понятие, вовсе не имеющее аналогов случаю бозонных струн. Описывая в гл. 4 фоксовское пространство состояний суперструны, мы воспользовались тем способом, который представлялся нам наиболее естественным, но оказывается, однако, что существуют и другие, эквивалентные способы описания теории, известные под названием других «картин». Более того, само доказательство циклической симметрии древесной бозонной амплитуды (7.3.1) требует подключения двух различных картин, обозначаемых F_1 и F_2 , эквивалентность которых, естественно, тоже надо доказывать. F_1 -картина удобнее для демонстрации циклической симметрии, в то время как F_2 -картина лучше подходит для доказательства того, что все полюсы действительно соответствуют физическим состояниям.

Та формулировка бозонного сектора суперструн, которая содержится в гл. 4, использует картину, обычно обозначаемую как F_2 . В этой картине волновое уравнение ее $(L_0 - 1/2) |\varphi\rangle = 0$, а дополнительные условия для физических состояний суть $G_r |\varphi\rangle = 0$ при $r > 0$. (Отсюда следует и $L_n |\varphi\rangle = 0$ при $n > 0$.) По аналогии с конструкцией разд. 7.1.1 естественно в таком подходе определить пропагатор как

$$\Delta = \left(L_0 - \frac{1}{2} \right)^{-1}. \quad (7.3.2)$$

Если, кроме того, мы потребуем, чтобы вершинные операторы физических состояний имели конформную размерность $J=1$, тогда, в точности повторяя предыдущие рассуждения, мы можем заключить, что промежуточные полюсы удовлетворяют условиям для L_n . Однако условия, порожденные операторами G_r , более сильные, а значит, на физические вертексы надо налагать дополнительные ограничения. Возможный вариант был предложен в разд. 4.2.3, где мы ввели физические вертексы для построения алгебры порождающий спектр, которая в свою оче-

редь использовалась при доказательстве теоремы об отсутствии духов. Сами же дополнительные ограничения заключались в том, что должен существовать некоторый оператор W конформной размерности $J = 1/2$, такой, что V представим в виде

$$V = \{G_r, W\} \quad (7.3.3)$$

для всех r . Отсюда прямо следует, что V имеет размерность $J = 1$, так что условия для L_n несомненно выполняются. Для испускания G -четных состояний (удовлетворяющих условию GSO) оператор W будет фермионом на мировой поверхности, а V — соответственно бозоном. С другой стороны, для G -нечетных состояний W — бозон, а V — фермион, так что антикоммутатор в (7.3.3) надо заменить на антикоммутатор. Поскольку $G_r^2 = L_{2r}$, то из (7.3.3) следует, что

$$[G_r, V] = [L_{2r}, W], \quad (7.3.4)$$

а из $V = [G_r, W]$ — что

$$\{G_r, V\} = [L_{2r}, W]. \quad (7.3.5)$$

Для доказательства древесной унитарности необходимо показать, что шпурионные состояния не дают вклада в физическое дерево, т. е.

$$\langle \tilde{\varphi} | G_r V(2) \Delta V(3) \dots \Delta V(M-1) | \varphi_M \rangle = 0, \quad r > 0, \quad (7.3.6)$$

где состояние $\langle \tilde{\varphi} |$ аннигилируется оператором $L_0 - 1/2 + r$, а в остальном произвольно. Для доказательства мы будем перетаскивать G_r направо. При этом в коммутаторном слагаемом мы заменим $[L_{2r}, W]$ на

$$\left(L_{2r} - L_0 - r + \frac{1}{2} \right) W - W \left(L_{2r} - L_0 + \frac{1}{2} \right) = 0, \quad (7.3.7)$$

что возможно в силу условия массовой поверхности для $\langle \tilde{\varphi} |$ и принципа сокращенного пропагатора. Обращение же комбинации (7.3.7) в нуль прямо следует из условия, что W имеет размерность $J = 1/2$. Следующий шаг состоит в том, чтобы перенести G_r через пропагатор с помощью формулы

$$G_r \frac{1}{L_0 - 1/2} = \frac{1}{L_0 + r - 1/2} G_r. \quad (7.3.8)$$

Далее можно в точности таким же образом перетаскивать G_r последовательно через следующий вертекс и следующий пропагатор и так далее, пока он в конце концов не аннигилирует состояние $|\varphi_M\rangle$.

Трудности с картиной F_2 начинаются в тот момент, когда мы переходим к доказательству циклической симметрии амплитуд. Дело в том, что в этой картине формулы типа (7.1.28) и (7.1.29) уже несправедливы, их аналогами будут

$$|\varphi_M\rangle = \lim_{y_M \rightarrow 0} y_M^{-1/2} W(k_M, y_M) |0; 0\rangle \quad (7.3.9)$$

и

$$\langle \varphi_1 | = \lim_{y_1 \rightarrow \infty} \langle 0; 0 | y_1^{1/2} W(k_1, y_1), \quad (7.3.10)$$

а значит, вместо (7.1.30) мы получаем выражение, в котором $M-2$ состояния представлены операторами V , а два оставшихся — операторами W . Ясно, что для доказательства циклической симметрии желательно иметь выражение, в котором все M внешних состояний задаются одними и теми же операторами V , и именно в этом заключается переход в картине F_1 (эта картина была открыта первой).

Тот факт, что вместо y_1 и y_M^{-1} , стоящих в формулах (7.1.28) и (7.1.29), у нас появились $y_1^{1/2}$ и $y_M^{-1/2}$, есть прямое следствие того обстоятельства, что от вертексов V с конформной размерностью $J = 1$ мы перешли к вертексам W с $J = 1/2$. Это рассуждение можно проиллюстрировать на примере тахионного вершинного оператора $W =: e^{ik \cdot X}$; где фактор Z_0 , определенный в (7.1.6), оказывается равным

$$Z_0 = e^{ikx + k \cdot p \ln z} = e^{ik \cdot x} z^{k \cdot p + 1/2} = z^{k \cdot p - 1/2} e^{ik \cdot x}, \quad (7.3.11)$$

поскольку теперь $k^2 = 1$, а не $k^2 = 2$, как было раньше. В результате теперь мы имеем

$$Z_0 |0; 0\rangle = z^{-1/2} |0; k\rangle \quad (7.3.12)$$

и

$$\langle 0; 0 | Z_0 = \langle 0; k | z^{1/2}, \quad (7.3.13)$$

что легко позволяет убедиться в правильности формул (7.3.9) и (7.3.10) для тахионов.

7.3.2. Картина F_1

Чтобы продвинуться в понимании формализма F_1 , начнем со следующего замечания: для любого физического состояния картины F_2 имеет место тождество

$$\langle \varphi | G_{1/2} G_{-1/2} = \langle \varphi |, \quad (7.3.14)$$

поскольку $G_{1/2} G_{-1/2} = 2L_0 - G_{-1/2} G_{1/2}$ и $\langle \varphi | G_{-1/2} = \langle \varphi | (L_0 - 1/2) = 0$. Таким образом, древесную амплитуду (7.3.1) можно переписать в виде

$$A_M = g^{M-2} \langle \varphi_1 | G_{1/2} G_{-1/2} V(2) \Delta \dots V(M-1) | \varphi_M \rangle. \quad (7.3.15)$$

Далее перенесем оператор $G_{-1/2}$ направо до упора, используя те же самые соображения, что и при доказательстве унитарности. Действуя таким образом, мы получим альтернативную форму записи амплитуды:

$$A_M = g^{M-2} \langle \bar{\varphi}_1 | V(2) \tilde{\Delta} V(3) \dots \tilde{\Delta} V(M-1) | \bar{\varphi}_M \rangle, \quad (7.3.16)$$

где

$$| \bar{\varphi} \rangle = G_{-1/2} | \varphi \rangle \quad (7.3.17)$$

и

$$\tilde{\Delta} = (L_0 - 1)^{-1}. \quad (7.3.18)$$

Последняя формула есть прямое следствие (7.3.8). Равенство (7.3.16) и есть амплитуда в картине F_1 . Состояние $| \bar{\varphi} \rangle$ в (7.3.17) — это вектор фоковского пространства в картине F_1 , соответствующий фоковскому же вектору $| \varphi \rangle$ в картине F_2 . Поскольку роль F_1 -пропагатора играет теперь $\tilde{\Delta}$, то волновое уравнение будет иметь тот же вид $(L_0 - 1) | \bar{\varphi} \rangle = 0$, что и в теории бозонных струн.

Важно отметить, что физическое состояние $| \bar{\varphi} \rangle$ в картине F_1 не аннигилируется оператором $G_{1/2}$. Действительно,

$$G_{1/2} | \bar{\varphi} \rangle = G_{1/2} G_{-1/2} | \varphi \rangle = (2L_0 - G_{-1/2} G_{1/2}) | \varphi \rangle = | \varphi \rangle. \quad (7.3.19)$$

Из этого равенства и формулы (7.3.17) видно, как переходить при описании состояний из одной картины в другую и обратно. Заметим еще, что операторы G_r при $r \geq 3/2$ действительно аннигилируют состояния картины F_1 , поскольку

$$G_r | \bar{\varphi} \rangle = G_r G_{-1/2} | \varphi \rangle = (2L_{r-1/2} - G_{-1/2} G_r) | \varphi \rangle = 0, \quad (7.3.20)$$

когда $r \geq 3/2$.

Связь между состояниями картин F_1 и F_2 можно интерпретировать еще и следующим образом. С каждым физическим состоянием можно ассоциировать как вершинный оператор W с $J = 1/2$, так и оператор V с $J = 1$, определяемый формулой $V = \{G_r, W\}$ или $V = [G_r, W]$. При этом состояния в картине F_2 строятся с помощью оператора W по правилам (7.3.9) и (7.3.10). Состояния же в картине F_1 , с другой стороны, строятся по тем же формулам, что и в бозонной теории, а именно

$$| \bar{\varphi}_M \rangle = G_{-1/2} \lim_{y_M \rightarrow 0} y_M^{-1/2} W(y_M) | 0; 0 \rangle = \lim_{y_M \rightarrow 0} y_M^{-1} V(k_M, y_M) | 0; 0 \rangle, \quad (7.3.21)$$

$$| \bar{\varphi}_1 \rangle = \lim_{y_1 \rightarrow \infty} \langle 0; 0 | y_1^{1/2} W(y_1) G_{1/2} = \lim_{y_1 \rightarrow \infty} \langle 0; 0 | y_1 V(k_1, y_1), \quad (7.3.22)$$

где мы использовали тот факт, что $G_{1/2}$ и $G_{-1/2}$ аннигилируют вакуум. В результате мы приходим к $SL(2, R)$ -инвариантной формуле

$$A_M = g^{M-2} \int d\mu_M(y) (\Pi y_i)^{-1} \langle 0; 0 | V(k_1, y_1) \dots V(k_M, y_M) | 0; 0 \rangle, \quad (7.3.23)$$

совсем как в разд. 7.1.3. Ясно, что и доказательство циклической симметрии будет такое же, как в этом разделе. Заметим, что формула (7.3.23) фактически обладает большей симметрией, чем просто $SL(2, R)$. Истинной симметрией будет расширение до супералгебры $OSp(1|2)$, порождаемой генераторами $L_0, L_{\pm 1}, G_{\pm 1/2}$, поскольку именно этот набор генераторов аннигилирует теперь вакуум $| 0; 0 \rangle$.

Состояния из картины F_1 , которые обращаются в нуль под действием операторов G_r с $r \geq 1/2$ и одновременно удовлетворяют соответствующему F_1 условию массовой поверхности $(L_0 - 1) | \bar{\varphi} \rangle = 0$, образуют новый класс шпурионных состояний, не имеющих прототипов в картине F_2 . (Соответствующее F_2 состояние, построенное по (7.3.19), есть просто нуль.) Например, основное состояние в фоковском пространстве картины F_1 в точности соответствует тахиону с $k^2 = 2$ в бозонной струне. (Тахион с $k^2 = 1$ выглядит в картине F_1 как $G_{-1/2} | 0; k \rangle = k \cdot b_{-1/2} | 0; k \rangle$.) В то время как в бозонной струне тахион с $k^2 = 2$ является физическим состоянием, это не так в теории суперструн, и в том, что он действительно отщепляется в деревьях, где все остальные состояния физические, можно убедиться, поступив с ним так же, как и с любым другим шпурионным состоянием. А именно, рассмотрим древесную амплитуду в картине F_1 , т. е. формулу (7.3.16). Предположим, что $| \bar{\varphi}_M \rangle$ — это шпурионное состояние, аннигилируемое оператором $G_{1/2}$. То, что такое дерево обращается в нуль, становится очевидным после того, как мы представим по (7.3.17) $\langle \bar{\varphi}_1 | = \langle \varphi_1 | G_{1/2}$, а затем перетащим $G_{1/2}$ направо, пока он не подействует на $| \bar{\varphi}_M \rangle$ и не даст нуль.

Подведем итог. Мы установили эквивалентность двух картин, F_1 и F_2 , и показали, каким образом одна картина переводится в другую. F_2 мы использовали для демонстрации того факта, что древесные амплитуды обладают только физическими полюсами в каналах, пропагаторы которых входят в амплитуду явно, и, кроме того, установили, что вычеты в этих полюсах представляют собой древесные амплитуды такого же типа, как это и требуется унитарностью. В картине F_1 , напротив, мы смогли получить для древесных амплитуд явно $SL(2, R)$ -инвариантную формулу, что, в свою очередь, позволило установить свойство циклической симметрии, перенося на рассматриваемый

случай всю аргументацию из теории бозонной струны. Это распространяет доказательство, полученное путем факторизации, на все каналы.

7.3.3. Примеры

Вершинный оператор, описывающий испускание тахиона, есть $W_T = :e^{ik \cdot X}:$, так что

$$V_T(k) = [G_r, :e^{ik \cdot X}:] = k \cdot \psi : e^{ik \cdot X} :. \quad (7.3.24)$$

Условие массовой поверхности тахиона $k^2 = 1$ обеспечивает нам $J = 1/2$ для W_T . Но хотя этот оператор и удовлетворяет всем супервирасоровским дополнительным условиям, он все же не является физическим, поскольку испускаемое состояние G -нечетно и, следовательно, нарушает условие GSO. Правильный, действительно физический бозонный вертекс должен быть бозонным же оператором, а V_T таковым не является. Первым физическим бозонным состоянием с правильной G -четностью в спектре суперструны будет безмассовый вектор. Соответствующий ему вертекс, а он уже использовался в гл. 4 при построении алгебры, порождающей спектр, имеет вид

$$V(\zeta, k) = \{G_r, \zeta \cdot \psi e^{ik \cdot X}\} = (\zeta \cdot \dot{X} - \zeta \cdot \psi k \cdot \psi) e^{ik \cdot X}. \quad (7.3.25)$$

Как обычно, мы требуем $k^2 = \zeta \cdot k = 0$.

Опишем теперь несколько явных примеров древесных амплитуд. В качестве неплохой разминки стоит вычислить M -тахионную амплитуду, хотя она и описывает состояния, которых просто нет в том варианте теории, который мы реально собираемся исследовать. На заре возникновения модели RNS, прежде чем была осознана важность условия GSO и пространственно-временной суперсимметрии, именно эта амплитуда была первой амплитудой, вычисленной в теории. Тогда считалось, что тахион — это просто π -мезон с «несколько неправильной» массой.

Удобный для дальнейших вычислений прием — это экспоненцировать префактор $k \cdot \psi$, так что разные системы осцилляторов опять начнут расщепляться. Поскольку переменная ψ фермионная, то в показателе ее надо домножать на фермионный же параметр, что и приводит нас к представлению

$$\frac{1}{\sqrt{y}} V_T(y) = \int d\theta \exp \{ ik \cdot X(y) + \theta k \cdot \psi(y) / \sqrt{y} \}, \quad (7.3.26)$$

где θ — грасманово число и подразумевается нормальное упорядочение. Множитель $1/\sqrt{y}$ связан с тем, что

$$\langle 0 | \frac{\psi^\mu(y_i)}{\sqrt{y_i}} \frac{\psi^\nu(y_j)}{\sqrt{y_j}} | 0 \rangle = \frac{1}{y_i - y_j} \eta^{\mu\nu}. \quad (7.3.27)$$

Фактически именно из этих соображений некоторые авторы включают дополнительный фактор вида y^{-J} в определение любого оператора с конформной размерностью J , однако, чтобы не расходиться с обозначениями в подавляющем большинстве имеющейся литературы, мы так поступать не будем.

По сути, фигурирующий в (7.3.26) показатель есть не что иное, как $ik \cdot Y(y, \theta)$, где Y — введенное в разд. 4.1.2 поле в суперпространстве. Все отличие заключается в том малосущественном обстоятельстве, что переменные ψ и θ в разд. 4.1.2 были двухкомпонентными майорановскими спинорами, в то время как сейчас, после наложения граничных условий открытой струны, у них осталось лишь по одной компоненте. Вообще говоря, мы могли бы выводить все формулы этого раздела, сразу систематически используя суперпространственный подход, но, стараясь сделать изложение как можно более простым, мы стали работать с компонентами. Замечательно, что даже при таком способе действий мы, как видно из (7.3.26), самым естественным образом пришли к выражению, имеющему в точности суперпространственную структуру!

Из формулы (7.3.27) и корреляционной функции

$$\langle 0 | X^\mu(y_i) X^\nu(y_j) | 0 \rangle = -\eta^{\mu\nu} \ln(y_i - y_j) \lambda, \quad (7.3.28)$$

выведенной в приложении 7.A, мы получаем следующее выражение для полной корреляционной функции двух вертексов:

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{V_T(y_i) V_T(y_j)}{\sqrt{y_i} \sqrt{y_j}} \right\rangle &= \int d\theta_i d\theta_j \exp \left\{ k_i \cdot k_j (\ln(y_i - y_j) - \frac{\theta_i \theta_j}{y_i - y_j}) \right\} = \\ &= \int d\theta_i d\theta_j \exp \{ k_i \cdot k_j \ln(y_i - y_j - \theta_i \theta_j) \}. \end{aligned} \quad (7.3.29)$$

Во втором равенстве мы воспользовались тем обстоятельством, что любая функция грасмановых переменных может быть по ним не более чем линейна. Обобщая эту формулу на случай M частиц, можно показать, опять-таки с помощью формул из приложения 7.A, что M -тахионная амплитуда имеет вид

$$A_M = \int d\mu_M(y) I_M(k, y), \quad (7.3.30)$$

где

$$\begin{aligned} I_M(k, y) &= \langle 0 | \frac{V(k_1, y_1)}{y_1} \dots \frac{V(k_M, y_M)}{y_M} | 0 \rangle = \\ &= (\Pi y_i)^{1/2} \int (\Pi d\theta_i) \prod_{i < j} (y_i - y_j - \theta_i \theta_j)^{k_i \cdot k_j}. \end{aligned} \quad (7.3.31)$$

Поскольку подынтегральное выражение содержит четное число переменных θ_i , то амплитуда отлична от нуля, только если M четно, что находится в согласии с понятием мультипликативно-сохраняющегося квантового числа, отвечающего « G -четности». I_M инвариантно относительно преобразований суперсимметрии на мировой поверхности

$$\delta y_i = \theta_i \varepsilon, \quad \delta \theta_i = \varepsilon, \quad (7.3.32)$$

поскольку сама комбинация $y_i - y_j - \theta_i \theta_j$ суперинвариантна (как, впрочем, и комбинация $\theta_i - \theta_j$, которая в этой формуле не встречается). Эти преобразования генерируются оператором $G_{-1/2}$. Есть еще и фермионные преобразования

$$\delta y_i = y_i \theta_i \eta, \quad \delta \theta_i = y_i \eta, \quad (7.3.33)$$

генерируемые $G_{1/2}$, относительно которых $d_{\mu M} \cdot I_M$ тоже инвариантно, что прямо следует из замкнутости алгебры $OSp(1|2)$.

Рассмотрим теперь более содержательный случай, когда рассеивается M безмассовых векторных частиц. Поскольку безмассовый вектор удовлетворяет условиям GSO, то такой процесс уже имеет прямое отношение к физике. Представив опять вершинные операторы в виде экспонент, линейных по всем осцилляторам, мы получим формулы вполне обозримого уровня сложности и легко считаемые. Для вертекса $V(\xi, k)$ из (7.3.25) такое представление имеет вид

$$\begin{aligned} & \frac{1}{y} V(\xi, k, y) = \\ & = \int d\varphi d\theta \exp(ik \cdot X + \theta \varphi \xi \cdot \dot{X}/y + \theta k \cdot \psi/\sqrt{y} - \varphi \xi \cdot \psi/\sqrt{y}). \end{aligned} \quad (7.3.34)$$

Точка, как обычно, обозначает производную по времени $\tau (d/d\tau = i y d/dy)$, и введены две дополнительные грасмановы переменные. Переменная θ — это обычная суперкоордината на мировой поверхности, а у φ , к сожалению, наглядной интерпретации нет.

Дальнейшее вычисление амплитуды производится с помощью тождеств

$$\langle 0 | X^\mu(y_i) \dot{X}^\nu(y_j) / y_j | 0 \rangle = \frac{i}{y_i - y_j} \eta^{\mu\nu}, \quad (7.3.35)$$

$$\langle 0 | \frac{\dot{X}^\mu(y_i) \dot{X}^\nu(y_j)}{y_i y_j} | 0 \rangle = \frac{1}{(y_i - y_j)^2} \eta^{\mu\nu} \quad (7.3.36)$$

из приложения 7.A и (7.3.27), (7.3.28). С помощью всех этих корреляторов подынтегральное выражение в (7.3.23) приводится к виду

$$\begin{aligned} \langle 0 | \frac{V(\xi_1, k_1, y_1)}{y_1} \dots \frac{V(\xi_M, k_M, y_M)}{y_M} | 0 \rangle = \\ = \int (\Pi d\theta_i) \prod_{i < j} (y_i - y_j - \theta_i \theta_j)^{k_i \cdot k_j} F_M(\xi, k, y, \theta), \end{aligned} \quad (7.3.37)$$

где

$$\begin{aligned} F_M = \int (\Pi d\varphi_i) \prod_{i < j} \exp \left[\frac{(\theta_i - \theta_j)(\varphi_i \xi_i \cdot k_j + \varphi_j \xi_j \cdot k_i)}{y_i - y_j} - \right. \\ \left. - \frac{\varphi_i \varphi_j \xi_i \cdot \xi_j}{y_i - y_j} - \frac{\theta_i \theta_j \varphi_i \varphi_j \xi_i \cdot \xi_j}{(y_i - y_j)^2} \right]. \end{aligned} \quad (7.3.38)$$

Можно переписать это выражение и несколько иначе:

$$F_M = \int (\Pi d\varphi_i) \prod_{\text{все } (i, j)} \exp \left[\frac{(\theta_i - \theta_j) \varphi_i \xi_i \cdot k_j - \frac{1}{2} \varphi_i \varphi_j \xi_i \cdot \xi_j}{y_i - y_j - \theta_i \theta_j} \right], \quad (7.3.39)$$

так что суперсимметрия на мировой поверхности станет явной.

Явное вычисление интегралов по θ и φ , хотя и не содержит принципиальных трудностей, но приводит к чрезвычайно сложной комбинаторике. Кроме того, в получающихся формулах происходят еще некоторые неожиданные взаимные сокращения, представляющие собой не что иное, как напоминание о существовании эквивалентной F_2 -формулировки, в которой два из множителей V/y заменяются на W/\sqrt{y} . Простейший пример, иллюстрирующий это высказывание, дает нам трехвекторная вершина, при вычислении которой мы обнаружили, что члены типа $(k \cdot \xi)^3$ в (7.1.57) и (7.1.58) взаимно уничтожаются, и в итоге остается

$$A_3 = g k_2 \cdot \xi_1 \xi_2 \cdot \xi_3 + \text{перестановки}. \quad (7.3.40)$$

Интересно отметить, что эта формула в отличие от случая бозонной струны содержит в себе сразу, без каких-либо поправок порядка $O(\alpha')$, правильную вершину для теории Янга — Миллса. Что же касается амплитуды с $M=4$, то ее мы рассмотрим в разд. 7.4.2.

7.3.4. Древесные амплитуды с одной фермионной линией

Есть еще один класс древесных амплитуд в струне RNS, которые могут быть описаны без привлечения довольно сложного понятия вершины испускания фермиона. Это амплитуды с толь-

ко двумя внешними фермионами и произвольным количеством M внешних бозонов; их можно представить в виде диаграмм с распространяющейся от $+\infty$ до $-\infty$ фермионной струной и бозонами, испускаемыми из той или иной границы мировой поверхности, что представлено на рис. 7.11, а. Для простоты мы детально рассмотрим лишь тот вариант, когда все частицы испускаются из одного и того же конца струны, например при

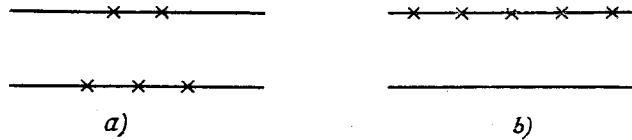


Рис. 7.11. Испускание бозонов из фермионной струны, рис. а); на рис. б) все бозоны испускаются из одного и того же края мировой поверхности.

$\sigma=0$, как изображено на рис. 7.11, б, но и общий случай нетрудно описать с помощью вершинных операторов с $\sigma=\pi$, как объяснялось в разд. 7.1.6.

Древесная амплитуда для двух фермионов и M бозонов дается формулой

$$A_{2, M} = \langle \psi_1 | W_1 S W_2 \dots S W_M | \psi_2 \rangle, \quad (7.3.41)$$

где $|\psi_1\rangle$ и $|\psi_2\rangle$ — фермионные физические состояния, удовлетворяющие условиям $F_n |\psi\rangle = 0$ при $n \geq 0$. Операторы W изображают испускание бозонных состояний из фермионной струны. Пропагатор S представляет собой очевидное обобщение дираковского пропагатора для частиц со спином $1/2$. А именно, поскольку волновое уравнение в нашей теории есть $F_0 |\psi\rangle = 0$, мы положим

$$S = F_0^{-1} = F_0 / L_0. \quad (7.3.42)$$

Для того чтобы проверить древесную унитарность в фермионных каналах, нам надо убедиться, что все промежуточные фермионные полюсы удовлетворяют дополнительным условиям с операторами F_n или L_n . (Для состояний, аннигилируемых оператором F_0 , эти два набора эквивалентны, поскольку $\{F_0, F_n\} = 2L_n$ и $\{F_0, L_n\} = -(n/2)F_n$.)

Как и в (7.3.3), удобно определить вспомогательные вершинные операторы

$$V = \{F_n, W\}. \quad (7.3.43)$$

Как и раньше, мы потребуем, чтобы W имел конформную размерность $J=1/2$, а V не зависел от n , что позволяет утверждать, что V имеет конформную размерность $J=1$. Дело здесь

не ограничивается одной лишь аналогией. Вся разница между бозонным и фермионным секторами суперструны заключена в граничных условиях, т. е. в относительных значениях $\psi(\sigma, \tau)$ в точках $\sigma=0$ и $\sigma=\pi$. С другой стороны, процесс испускания частицы существенно локализован, он связан с некоторым частным значением σ и не должен зависеть от глобальных эффектов. Сходство между двумя этими струнами можно сделать еще более наглядным, если с помощью (7.3.42) и (7.3.43) несколько преобразовать формулу (7.3.41). Начнем с пропагатора между W_1 и W_2 и прокоммутируем F_0 , стоящее в числителе, справа. В коммутаторном слагаемом W_2 заменится на V_2 (по формуле (7.3.43)), а во втором слагаемом будет содержаться фактор $F_0 S = 1$, заключенный между W_2 и W_3 , и оно обратится в нуль в силу принципа сокращенного пропагатора. Это рассуждение можно повторять еще и еще для следующих пропагаторов до тех пор, пока мы не придем к формуле

$$A_{2, M} = \langle \psi_1 | W_1 \Delta V_2 \dots \Delta V_M | \psi_2 \rangle, \quad (7.3.44)$$

где $\Delta = L_0^{-1}$. Отметим, однако, что даже в такой записи одна из бозонных вершин все же будет представляться оператором W , а не V . Если бы мы попытались и этот W заменить на V , то получили бы нуль, к чему мы, естественно, вовсе не стремимся. В том, что это действительно так, легко убедиться, если вставить оператор F_0 между $\langle \psi_1 |$ и W_1 . С одной стороны, это выражение будет равно нулю в силу волнового уравнения для $\langle \psi_1 |$, а с другой стороны, перенося этот оператор вправо, мы как раз и получим формулу с W_1 , замененным на V_1 .

Вопрос о циклической симметрии амплитуды, как, впрочем, и исследование унитарности в бозонных каналах, уже с необходимостью приводит нас к задаче о вершинном операторе, описывающем испускание фермиона. Без этого оператора мы не можем воспользоваться ни одним из аргументов, использованных при выводе этих свойств в теории бозонной струны.

7.3.5. Вершина испускания фермиона

Построив операторы, которые описывают испускание и поглощение бозонов, естественно сделать следующий шаг и задаться вопросом о том, как выглядят соответствующие операторы для фермионов. Более того, приведенные в первой главе качественные соображения явно указывают на то, что должны существовать операторы, описывающие испускание и поглощение *любого* состояния. И тем не менее задача построения «фермионно-эмиссионной вершины» в RNS-струне сталкивается со

значительными трудностями. Можно по-разному объяснять причину возникновения этих трудностей, но все эти объяснения на самом деле тесно связаны друг с другом. Простейшее объяснение состоит в том, что любое физическое фермионное состояние должно представлять собой спинор по группе Лоренца $SO(1, 9)$, а значит, должен быть спинором и фермионный вершинный оператор. Но в модели RNS элементарные поля $X^\mu(\sigma, \tau)$ и $\psi^\mu(\sigma, \tau)$ преобразуются как лоренцевы векторы! Построить фермионный оператор из векторных — это безусловно не банальная задача, и на первый взгляд она представляется почти неразрешимой. Очевидно, что конструкции типа $e^{ik \cdot X}$, умноженный на некий полином по элементарным полям, эту задачу не решают.

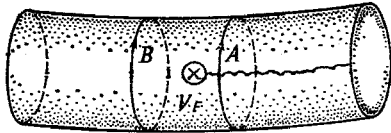


Рис. 7.12. Схематическое изображение мировой поверхности замкнутой струны с помещенным на нее фермионным вершинным оператором V_F . Перед самой точкой вставки V_F и сразу после нее поверхность разрезана, линии разреза — две окружности A и B. Если при обходе вдоль A RNS-фермион ψ^μ ведет себя как периодическая функция, то на B он будет антипериодичен, и наоборот. Это следует интерпретировать как появление разреза для поля ψ^μ : при переходе через разрез ψ^μ меняет знак, а началом разреза служит точка, в которую вставлен V_F .

Можно посмотреть на проблему с несколько другой стороны и заметить, что процесс испускания фермиона должен сопровождаться превращением фермионов в бозоны и бозонов в фермионы. Но в модели RNS бозоны и фермионы отвечают соответственно состояниям, для которых $\psi^\mu(\sigma + \pi) = +\psi^\mu(\sigma)$, и состояниям с $\psi^\mu(\sigma + \pi) = -\psi^\mu(\sigma)$. Таким образом, фермионный вершинный оператор V_F , превращающий фермионы в бозоны и наоборот, должен менять граничные условия поля ψ^μ ! Более точно это можно описать, сказав, что оператор V_F порождает для поля ψ^μ некий разрез, как это изображено на рис. 7.12. На этом рисунке мы схематически представили ситуацию, когда разрез начинается в точке, где вставлен оператор V_F , и продолжается в «будущее» (направо на рисунке). Если теперь вся антипериодичность ψ^μ возникает из-за смены знака при переходе через разрез, то тогда на нашем рисунке состояние на струне A будет фермионом (ψ^μ периодично), а состояние на струне B — бозоном (ψ^μ антипериодично). Так же как трудно сразу представить себе, чтобы пространственно-временной

спинор был построен из векторов X^μ и ψ^μ , совершенно не ясно, как построить оператор, способный порождать или уничтожать описанный разрез.

Здесь мы несколько прервем наше изложение, чтобы прояснить одно обстоятельство, которое на первый взгляд может вызвать известное недоумение. Поскольку фермионное поле $\psi^\mu(\sigma, \tau)$ периодически в фермионном секторе и антипериодично в бозонном, то может возникнуть ощущение, что оператор, порождающий разрез для поля ψ^μ , должен быть вершиной испускания бозона! Цель рис. 7.13 — прояснить этот пункт. На этом

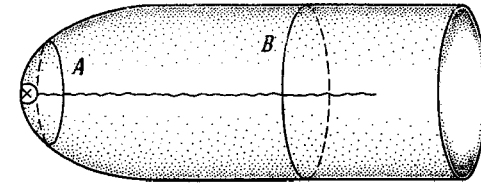


Рис. 7.13. Цель этого рисунка — прояснить сущность состояния, порождаемого фермионным вершинным оператором; место вставки этого оператора обозначено меткой \otimes .

рисунке фермионный вершинный оператор V_F вставлен в конец сигарообразной мировой поверхности, «разрез» для поля ψ^μ исходит из точки вставки вершинного оператора. Если мы параллельно перенесем поле ψ^μ вдоль некоторой малой петли (на рисунке она обозначена буквой A), которая охватывает вершинный оператор, то оно поменяет знак, поскольку петля пересекает разрез. Однако установить, будет ли порожденное таким образом состояние бозоном или фермионом, мы можем, только канонически проквантовав нашу модель, а для этого нам нужно «разрезать» мировую поверхность в той области, где она представляет собой нормальный плоский цилиндр, как это принято в каноническом формализме. Таким образом, правильнее будет рассматривать результат параллельного переноса не вдоль кривой A, а вдоль другой кривой, обозначенной на рисунке буквой B. «Совершив путешествие» по кривой B, поле ψ^μ получит множитель -1 при пересечении разреза, но, кроме этого, еще один множитель, равный -1 , от интегрирования спин-связности вдоль этой кривой. То, что спин-связность дает в точности множитель -1 при параллельном переносе вдоль B, можно строго доказать с помощью теоремы Гаусса — Боне, но здесь мы не будем проводить этого доказательства. Итак, благодаря наличию двух -1 наше поле ψ^μ оказывается инвариантным при парал-

лельном переносе вдоль кривой B . Иными словами, оно удовлетворяет периодическим граничным условиям, а это значит, что объект, который мы называли оператором испускания фермиона, действительно порождает фермионы. Верно и обратное: если бы заменили вершину испускания фермиона на рис. 7.13 вершиной испускания бозона, то смогли бы набрать только одну -1 , от спин-связности, и тем самым убедились бы в том, что вертексы, которыми мы пользовались раньше для описания бозонов, действительно порождают бозоны.

Попытки построить в начале 70-х годов удовлетворительный фермионный вершинный оператор имели лишь частичный успех. Операторы, которые преобразовывались как пространственно-временные фермионы, действительно были построены, но формулы получились не очень понятные. Более того, конформная размерность этих операторов оказалась равной не единице, как это должно быть у вершинного оператора, а $5/8$, и скоро мы увидим, откуда берется это странное число. Поскольку эти гипотетические вершинные операторы не обладали правильной конформной размерностью, с ними и нельзя было работать с помощью стандартных приемов. Пришлось выдумать некую специальную и малодоступную технику проектирования на пространство физических состояний на каждом этапе вычислений. Была, правда, высказана гипотеза, что проблема может быть решена за счет правильного учета духов Фаддеева — Попова, но было совершенно неясно, как это реально сделать. Окончательное решение было получено лишь в фундаментальной работе Фридана, Мартиника и Шенкера (FMS), а также в работе Книжника. Здесь мы кратко остановимся на некоторых идеях этой работы, хотя и не будем обсуждать операцию «смены картины» по FMS.

Основной прием, который позволяет значительно упростить всю конструкцию, состоит в использовании введенной в разд. 3.2.4 процедуры бозонизации фермионов. Занимаясь построением оператора, который преобразуется как $SO(1, 9)$ -спинор и порождает разрез для RNS-поля ψ^μ , мы можем ограничиться, скажем, только правыми модами замкнутой струны. Поэтому начнем с того, что рассмотрим пару кривых RNS-фермионов ψ^1, ψ^2 . Их кинетическая энергия имеет вид

$$\int (\psi^1 \partial_+ \psi^1 + \psi^2 \partial_+ \psi^2) d^2 \sigma = \int \psi^{1+i2} \partial_+ \psi^{1-i2} d^2 \sigma, \quad (7.3.45)$$

где обозначено $\psi^{1\pm i2} = \psi^1 \pm i\psi^2$. Новые переменные $\psi^{1\pm i2}$ мы ввели потому, что в них кинетическая энергия приобретает тот же вид, что и для системы духов, $c-\partial_+ b_-$, обсуждавшейся в гл. 3, и, следовательно, мы можем позаимствовать формулы

бозонизации из разд. 3.2.4. Введя правый бозон ϕ , мы получаем

$$\begin{aligned} \psi^{1+i2} &= e^{i\phi}, \\ \psi^{1-i2} &= e^{-i\phi}. \end{aligned} \quad (7.3.46)$$

В нашей модели RNS преобразование $\psi^2 \rightarrow -\psi^2$ меняет места $\psi^{1\pm i2}$, поэтому на языке разд. 3.2.2 мы можем сказать, что тензор энергии-импульса отвечает $k=0$. В разд. 3.2.4 было показано, что операторы

$$D_t = e^{it\phi} \quad (7.3.47)$$

имеют конформную размерность, равную

$$d_t = t^2/2 - kt/2. \quad (7.3.48)$$

Значит, при $k=0$ конформная размерность операторов $D_{\pm 1/2}$ будет $1/8$. Кроме этого, мы хотим, чтобы операторы $D_{\pm 1/2}$ порождали разрез для полей ψ^1, ψ^2 . И действительно, это прямо

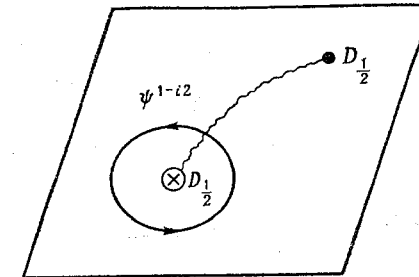


Рис. 7.14. Корреляционная функция $\langle D_{1/2}, D_{1/2}, \psi^{1-i2} \rangle$ меняет знак, когда мы проносим поле ψ^{1-i2} вдоль малого замкнутого контура, окружающего одно из D ; это значит, что D порождают разрезы для поля ψ .

следует из уравнений для корреляционных функций, приведенных в разд. 3.2.4. Трехточечная корреляционная функция $\langle D_{1/2} D_{1/2} D_{-1} \rangle$ есть (вместо D_{-1} мы пишем ψ^{1-i2})

$$\begin{aligned} \langle D_{1/2}(\sigma_1^-) D_{1/2}(\sigma_2^-) \psi^{1-i2}(\sigma_3^-) \rangle &= \\ &= (\sigma_1^- - \sigma_3^-)^{-1/2} (\sigma_2^- - \sigma_3^-)^{-1/2} (\sigma_1^- - \sigma_2^-)^{1/4}. \end{aligned} \quad (7.3.49)$$

Заметим, что корневые точки ветвления располагаются при $\sigma_3^- = \sigma_1^-$ и $\sigma_3^- = \sigma_2^-$. Наличие этих точек означает, что когда элементарный фермион $\psi^{1-i2}(\sigma_3^-)$ находится в поле оператора $D_{1/2}(\sigma_1^-)$, то он становится двузначным: при каждом обходе аргумента σ_3^- по малой петле вокруг точки σ_1^- (см. рис. 7.14) его поле меняет знак. Можно рассмотреть и другие корреля-

ционные функции, в которые входят вместе D и ψ , и в точности таким же образом убедиться, что $D_{\pm 1/2}$ действительно порождает разрез для $\psi^{1 \pm i2}$. По аналогии с тем, что происходит в двумерной модели Изинга, операторы, порождающие разрезы, часто называют «спиновыми операторами». Поскольку размерность $D_{\pm 1/2}$ равна $1/8$ (для данной системы с $k=0$), то значит, мы выяснили, что спиновый оператор пары обычных майорановских фермионов имеет размерность $1/8$.

Теперь мы двинемся дальше и вместо одной пары фермионов $\psi^{1,2}$ рассмотрим десять правых фермионов модели RNS. Удобно работать в евклидовом пространстве, так что вместо группы Лоренца $SO(1, 9)$ у нас будет группа $SO(10)$, а в такой сигнатуре естественно перенумеровать RNS-фермионы как ψ^μ , $\mu = 1, \dots, 10$ ¹⁾. Чтобы бозонизовать ψ^μ , надо ввести пять правых бозонов φ_i , $i = 1, \dots, 5$, определяемых из формул

$$\begin{aligned} \psi^{1 \pm i2} &= e^{\pm i\varphi_1}, & \psi^{3 \pm i4} &= e^{\pm i\varphi_2}, & \psi^{5 \pm i6} &= e^{\pm i\varphi_3}, \\ \psi^{7 \pm i8} &= e^{\pm i\varphi_4}, & \psi^{9 \pm i10} &= e^{\pm i\varphi_5}. \end{aligned} \quad (7.3.50)$$

Эти φ_k связаны с генераторами картоновской подалгебры $SO(10)$ (мы уже не раз сталкивались с примерами такой связи в тексте глав 5 и 6, а также в приложении 5.A):

$$\begin{aligned} J_{12} &= i\partial_- \varphi_1, & J_{34} &= i\partial_- \varphi_2, & J_{56} &= i\partial_- \varphi_3, \\ J_{78} &= i\partial_- \varphi_4, & J_{9,10} &= i\partial_- \varphi_5. \end{aligned} \quad (7.3.51)$$

(Как и в приложении 5.A, J_{kl} обозначает операторы, генерирующие вращения в плоскости kl .) По каждому φ_m строятся «спиновые операторы»

$$D_{\pm 1/2}^m = e^{\pm i\varphi_m/2}, \quad (7.3.52)$$

которые порождают разрезы для пары ψ^μ (фактически для ψ^{2m-1} и для ψ^{2m}). Если мы хотим организовать одним оператором разрез сразу для всех ψ^μ , то надо перемножить спиновые операторы всех пяти типов. Итак, мы полагаем

$$\Theta_\alpha = D_{\pm 1/2}^1 D_{\pm 1/2}^2 \dots D_{\pm 1/2}^5. \quad (7.3.53)$$

Индекс α в (7.3.53) указывает конкретный выбор знаков у всех $\pm 1/2$. Мы можем независимо выбирать знак на пяти позициях в формуле (7.3.53), так что всего мы получаем $2^5 = 32$ «спиновых оператора» Θ_α . Поскольку $32 = 16 + 16$ — это как раз размерность спинорного представления группы $SO(10)$, то естественно предположить, что Θ_α будет и на самом деле преобра-

зовываться как спинор $SO(10)$. И действительно, сравнивая явный вид картановских генераторов в (7.3.51) с определением спиновых операторов в (7.3.52) и (7.3.53), мы убеждаемся, что (из-за наличия множителей $1/2$ в показателях формул (7.3.52)) Θ_α имеют веса $(\pm 1/2, \pm 1, 2, \dots, \pm 1/2)$, а как мы знаем из приложения 5.A, это как раз и есть веса спинорного представления группы $SO(10)$. Мы будем считать, что это наблюдение является достаточным аргументом в пользу того, что Θ_α есть спинор группы $SO(10)$.¹⁾

Итак, мы проделали немалый путь в поисках удовлетворительного вершинного оператора для фермионов. Мы нашли операторы, которые преобразуются как спиноры и генерируют разрезы для полей ψ^μ . Но, к сожалению, конформная размерность Θ_α не позволяет прямо отождествить их с искомыми операторами. Поскольку в определение Θ_α по формуле (7.3.53) входит пять независимых сомножителей размерности $1/8$, то мы получаем для Θ_α размерность $5/8$. Но необходимая нам правильная размерность есть 1 , следовательно, необходимо добыть недостающие $3/8$ из какого-то другого источника.

Чтобы обосновать догадку о том, каким может быть источник, напомним характер общей аргументации, которая привела нас в разд. 1.4.2 к выводу о существовании вершинных операторов для любых внешних частиц. В основе всего рассуждения лежала конформная инвариантность: с помощью некоторого конформного отображения всегда можно перевести внешнюю струну в какую-то конечную точку, и тогда в этой точке должен появиться локальный оператор. Однако в строгом смысле конформная инвариантность имеет место лишь в том случае, когда в формулировке струнной теории участвуют духи — тогда она полностью устраняется конформная аномалия. Значит, если мы принимаем аргументы, убеждающие нас в существовании вершинных операторов, то надо признать, что эти операторы живут в расширенном гильбертовом пространстве, включающем и духи.

Несомненно, однако, что мы прекрасно описывали бозонные вершинные операторы, нисколько не заботясь о духах; следовательно, если духи и действительно играют какую-то важную

¹⁾ Вот набросок полного доказательства. В спинорном описании $SO(10)$ -токи — это в точности $J_{ij} = \psi_i \psi_j$. Поскольку в формулах (7.3.50) ψ_i выражены через бозонные переменные φ_k , то и $SO(10)$ -токи можно выразить через бозоны; в результате возникают формулы, очень похожие на те, что появлялись в гл. 6 при описании бозонного представления для E_8 . Описав все в терминах бозонных переменных, можно затем легко подсчитать коммутаторы $SO(10)$ -зарядов $Q_{ij} = \oint J_{ij}$ с Θ_α и показать, что Θ_α преобразуются по $SO(10)$ как спиноры.

¹⁾ Таким образом, в настоящем обсуждении времениподобная мода ψ^0 будет заменена на пространственноподобную моду ψ^{10} .

роль в фермионных вертексах, то это должно объясняться чем-то специфичным для фермионов. Ключ к разгадке находится, если вспомнить о суперконформных духах $\gamma_{\pm 1/2}$ и $\beta_{\pm 3/2}$ (индексы указывают спин по группе Лоренца на мировой поверхности и объяснялись в разд. 4.4.1), которые возникают при квантовании исходной локально суперсимметричной теории в фиксированной калибровке, приводящей нас к стандартной модели RNS. В частности, поле $\beta_{\pm 3/2}$ имеет квантовые числа супертока $J \sim \sim \partial X^\mu \psi_\mu$ этой исходной модели, а квантовые числа $\gamma_{\pm 1/2}$ те же, за исключением сдвинутого спина. Мы же строим фермионный оператор, который порождает разрез для ψ^μ , но не для X^μ . В результате должен появиться разрез и у супертока J и, следовательно, у суперконформных антидухов $\beta_{\pm 3/2}$ и духов $\gamma_{\pm 1/2}$. Никакого аналога для бозонных вертексов у этого рассуждения нет, но именно оно дает нам основания ожидать, что в конструкции фермионного вертекса духам отводится существенная роль.

Итак, наша ближайшая цель — определить спиновые операторы, способные породить разрез для суперконформных духов γ, β . Действие для этой системы очень похоже на действие для дираковских фермионов. Правые моды, например, описываются формулой

$$S = -\frac{1}{\pi} \int d^2\sigma (\gamma_{+1/2} \nabla_{+1} \beta_{-3/2}). \quad (7.3.54)$$

Поэтому можно предположить, что спиновые операторы для этой системы строятся тем же способом, что и для полей ψ^μ . Однако тут мы сталкиваемся с рядом довольно тонких моментов (они были успешно преодолены FMS). Эти тонкости возникают потому, что γ и β в (7.3.54) являются *коммутирующими* полями, и, значит, речь теперь пойдет о «бозонизации бозонов», что, естественно, не может не внести во всю конструкцию существенно новых понятий. В нашем дальнейшем изложении мы попытаемся максимально все упростить и по возможности обойтись без введения наиболее тонких и трудных для понимания новых объектов, хотя возможно, что именно они могут оказаться чрезвычайно существенными для дальнейшего развития теории струн.

Начнем с того, что сделаем несколько наблюдений, которые в равной мере могли бы послужить и исходной точкой для построения обычной бозонизации в гл. 3. Такую альтернативную точку зрения стоит выработать, поскольку наша прежняя стратегия состояла в том, что мы в разд. 3.2.4 начинали с построения антикоммутирующих полей из бозонных переменных, что для данной задачи, где сами γ и β являются уже коммутирующими,

а не антикоммутирующими полями, представляется совершенно бесполезным. Соответственно и большинство бозонизационных формул в нашем случае уже не будут верны, но некоторые из них, те, что имеют в своей основе сравнительно простые и очевидные соображения, все же продолжают выполняться, их мы и попытаемся сейчас выделить. В частности, имеются формулы, куда входит ток духового числа $J_- = \gamma_{+1/2} \beta_{-3/2}$. Сам этот ток имеет нулевое духовое число, и если пользоваться

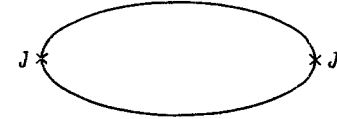


Рис. 7.15. Однопетлевая диаграмма, дающая вклад в аномалию коммутатора двух токов.

скобками Пуассона, то мы обнаружим, что сам с собой он коммутирует. Однако на квантовом уровне, так же как и в фермионном случае, имеется швингеровская аномалия, появляющаяся из однопетлевой диаграммы рис. 7.15, так что он удовлетворяет одновременным перестановочным соотношениям

$$[J_-(\sigma), J_-(\sigma')] = -\frac{i}{2\pi} \delta'(\sigma - \sigma'). \quad (7.3.55)$$

В фермионном случае мы рассматривали эту аномалию в гл. 6, но для коммутирующих полей γ и β имеется одно существенное отличие. Знак минус, который идет для диаграммы типа рис. 7.15 от замкнутой фермионной петли, в нашем случае отсутствует, и знак швингеровского члена будет противоположен обычному знаку.

С точностью до этого минуса коммутатор в (7.3.55) очень похож на формулу канонических перестановочных соотношений для правых бозонов, с которой мы уже встречались, например в гл. 3. Неприводимое представление этих соотношений единственно, и значит, мы можем (в точности как в фермионном случае) выразить ток J_- через правый бозон ρ^- :

$$J_- = i\partial_- \rho^-. \quad (7.3.56)$$

Поскольку швингеровский член в правой части (7.3.55) имеет неправильный знак, то, стало быть, ρ^- является правым сектором некоего бозона ρ , кинетическая энергия которого тоже имеет неправильный знак:

$$S = \frac{1}{2\pi} \int d^2\sigma \partial_\alpha \rho \partial^\alpha \rho = \frac{1}{2\pi} \int d^2\sigma [(\partial_\sigma \rho)^2 - (\partial_{\bar{\sigma}} \rho)^2]. \quad (7.3.57)$$

Теперь можно прямо вычислить из (7.3.57) канонический коммутатор для $\partial_- \rho^-$ и убедиться, что ток, определенный по (7.3.56), действительно имеет перестановки (7.3.55). Таким образом, мы показали, что формула (7.3.56) имеет место и для «бозонизации бозонов», с той лишь разницей, что у кинетической энергии поля ρ должен быть неправильный знак. Этот неправильный знак просто отражает тот факт, что вычисленная по диаграмме рис. 7.15 двухточечная функция для тока J_- имеет знак, противоположный стандартному. Иными словами, если мы хотим, чтобы формула (7.3.56) имела место, пропагатор бозона ρ^- должен иметь «неправильный» знак.

Рассмотрим теперь операторы

$$\Sigma_t = e^{it\rho^-}. \quad (7.3.58)$$

Двухточечная функция имеет вид

$$\langle \Sigma_t(\sigma^-) \Sigma_{-t}(\sigma'^-) \rangle = (\sigma^- - \sigma'^-)^2. \quad (7.3.59)$$

Показатель в правой части будет теперь не $-t^2$, как в разд. 3.2.4, а $+t^2$, поскольку пропагатор ρ^- имеет необычный знак. Если обозначить через d_t размерность Σ_t , то мы видим из (7.3.59), что

$$d_t + d_{-t} = -t^2. \quad (7.3.60)$$

Если воспользоваться тензором энергии-импульса, в котором β и γ участвуют симметрично ($k=0$ в обозначениях разд. 3.2.2), то на d_t и d_{-t} будет приходиться поровну, т. е. $t^2/2$. Повторяя аргументацию разд. 3.2.4 при произвольном k с точностью до измененного знака, получаем общую формулу

$$d_t(k) = -t^2/2 + kt/2. \quad (7.3.61)$$

Причем, как мы видели в разд. 4.4.1, для суперконформных гостей $k=2$.

В точности как и в обычной бозонизации, спиновые операторы, порождающие разрез для элементарных фермионов γ и β , суть просто $\Sigma_{\pm 1/2}$. В этом можно легко убедиться, рассмотрев корреляционные функции, в которых наряду с γ и β ¹⁾ есть и $\Sigma_{\pm 1/2}$, но мы не будем этого делать, поскольку наше утверждение выглядит и так достаточно правдоподобно. Размерности этих спиновых операторов мы получаем из формулы (7.3.61): для $\Sigma_{+1/2}$ и $\Sigma_{-1/2}$ они равны соответственно $3/8$ и $-5/8$.

¹⁾ Вся информация, которая в принципе нужна для вычисления таких корреляционных функций, содержится в (7.3.56): проинтегрировав эту формулу, мы выражаем ρ^- через J_- и далее через γ и β .

Духовый спиновый оператор $\Sigma_{+1/2}$ размерности $3/8$ и есть как раз тот объект, которого нам не хватало для полного определения фермионного вершинного оператора V_F . Действительно, рассматривая испускание безмассового фермиона, описываемого спинором u^α и импульсом k^μ , мы можем образовать вершинный оператор

$$V_F(u^\alpha; k^\mu) = \Sigma_{+1/2} \cdot \bar{u}^\alpha \Theta_\alpha \cdot e^{ik \cdot X}. \quad (7.3.62)$$

Более точно, это вершинный оператор испускания безмассового фермионного состояния открытой струны. Для замкнутой струны надо умножить (7.3.62) на подходящий вершинный оператор, построенный из мод второго сектора. Кроме того, если мы собираемся вводить GSO-проекцию, то надо брать спинор u^α только одной определенной киральности.

Можно поинтересоваться, есть ли какое-нибудь полезное применение у второго спинового оператора, у $\Sigma_{-1/2}$? Действительно, поскольку его размерность равна $-5/8$, то комбинация $\Sigma_{-1/2} \Theta_\alpha \cdot e^{ik \cdot X}$ просто безразмерна, и, следовательно, можно построить новый вершинный оператор размерности единица, если умножить ее на подходящий оператор такой размерности, например на вертекс безмассового бозона. В результате мы получаем новую вершину испускания фермиона:

$$V'_F(u^\alpha; k^\mu) = \Sigma_{-1/2} \cdot \bar{u} \Gamma_\mu \Theta \cdot (\partial_- X^\mu + i\psi_-^\mu \psi_-^\nu k_\nu) e^{ik \cdot X}. \quad (7.3.63)$$

На первый взгляд может показаться довольно странным, что есть сразу несколько кандидатов на одну и ту же роль фермионного вертекса, но при некотором размышлении факт этот не кажется таким уж странным. Возможность выбора между (7.3.62) и (7.3.63) вполне аналогична возможности выбора между двумя разными «картинами», с которой мы уже сталкивались раньше при описании бозонных вертексов в модели RNS. И действительно, исследовав более детально систему суперконформных гостей, FMS нашли общую причину возникновения в этой модели различных «картин», но углубляться в эту тему мы сейчас не будем.

Все, чего нам пока удалось добиться в приведенном выше рассуждении — это лишь поверхностно затронуть тему. Очевидно, что следующим необходимым шагом должно быть доказательство того факта, что вершинные операторы (7.3.62) и (7.3.63), которые столь существенно зависят от суперконформных гостей, действительно обеспечивают отщепление как этих гостей, так и временноподобных состояний с отрицательной нормой, которые, довольно неудачно, тоже принято именовать «гостями». Эти последние представляют собой тот единственный

сорт духов, о котором мы должны были заботиться при исследовании бозонных вертексов, поскольку мы пользовались формализмом, при котором настоящие духи в эти вертексы не входят. Напомним, что в разделах 3.2 и 4.4.2 мы установили, что физические состояния в теории струн могут быть довольно изящно охарактеризованы как состояния, аннигилируемые BRST-зарядом Q . Чтобы убедиться, что вертексы (7.3.62) и (7.3.63) не приводят к перемешиванию физических состояний с теми или иными духами, надо показать, что эти операторы коммутируют (с точностью до полной производной) с зарядом Q . Тогда, действуя на физическое (Q -инвариантное) состояние проинтегрированным вершинным оператором, мы опять-таки получим физическое (Q -инвариантное) состояние. Хотя показать, что проинтегрированная форма (7.3.62) коммутирует с BRST-зарядом, не так уж и трудно, но все же для этого необходимо воспользоваться некоторыми дополнительными техническими приемами, описывать которые мы здесь не будем. Что же касается формулы (7.3.63) с небольшими модификациями (добавка мультидухового слагаемого), то и про нее можно доказать, что она коммутирует с Q . Собственно вычисление амплитуд рассеяния, в которых участвуют вершинные операторы (7.3.62) и (7.3.63), опять-таки требует использования дополнительных технических приемов, не обсуждающихся в этой книге. Для того, чтобы полностью развить эту тему, необходимо исследовать целый ряд дополнительных вопросов, изложение которых интересующийся читатель может найти в оригинальной литературе.

Небезынтересно спросить себя, а что же произойдет с ковариантным формализмом, основы которого мы только что описали, если убрать духовый спектр и перейти в калибровку светового конуса? В этом случае можно вообще позабыть про спиновые операторы духов $\Sigma_{+1/2}$ в (7.3.62), и, кроме того, можно опустить одну пару координат ψ^μ , скажем, ψ^8 и ψ^9 . Это значит, что в калибровке светового конуса спиновый оператор элементарных фермионов Θ_α будет произведением лишь четырех, а не пяти сомножителей, и его размерность будет равна $4 \cdot 1/8 = 1/2$. Это число заслуживает самого пристального внимания, поскольку представляет собой не что иное, как правильную каноническую размерность для канонического фермионного поля в размерности $1 + 1$. Более того, оставшиеся Θ_α преобразуются как спиноры группы $SO(8)$, а не $SO(10)$. Из 16 компонент Θ_α восемь имеют положительную киральность — это в точности те восемь элементарных спинорных полей, с которыми мы столкнулись, исследуя калибровку светового конуса в суперсимметричном описании суперструны. Фактически мы уже сталкивались с отвечающим $SO(8)$ усечением формулы (7.3.53), когда

в конце разд. 5.2.1 обсуждали соответствие между явно суперсимметричной формулировкой суперструны и старым конусным формализмом.

В качестве еще одного интересного приложения рассмотрим 16 левых фермионов λ_i , $i = 1, \dots, 16$. Очевидно, что из них можно построить сохраняющиеся токи $J_{ij} = \lambda_i \lambda_j$, генерирующие группу $SO(16)$. Важно, что эти токи имеют конформную размерность, равную единице и, следовательно, сохраняющиеся заряды $Q_{ij} = \oint J_{ij}$ будут конформно инвариантны. Если же провести бозонизацию, то этим 16-ти λ будут соответствовать восемь бозонов φ_m , $m = 1, \dots, 8$, и можно построить соответствующие спиновые операторы $D_{\pm 1/2}^m$, $m = 1, \dots, 8$. Произведения этих спиновых операторов

$$\Theta \sim \prod_m D_{\pm 1/2}^m \quad (7.3.64)$$

преобразуются как спиноры $SO(16)$, и все Θ имеют конформную размерность $8 \cdot (1/8) = 1$. Значит, благодаря тому, что мы взяли именно 16 штук λ , операторы Θ имеют правильную размерность сохраняющихся токов. Соответственно сохраняются и заряды

$$\tilde{Q} = \oint \Theta, \quad (7.3.65)$$

которые (при соответствующей GSO-подобной проекции) расширяют очевидную симметрию $SO(16)$ нашей системы до большей группы E_8 . Именно эти Θ и были тем ингредиентом, которого не хватало нам в разд. 6.3.2 для того, чтобы собрать полную алгебру токов E_8 при фермионном описании гетеротической струны.

7.4. Суперструна в суперсимметричной формулировке

В RNS-описании пространственно-временная суперсимметрия суперструны довольно глубоко спрятана, и именно здесь построение вершинных операторов для фермионов оказывается неким хитроумным упражнением, описанным в предыдущем разделе. С другой стороны, во всех вычислениях, основанных на суперсимметричной формулировке, бозоны и фермионы выступают совершенно равноправно, что позволяет строить явно суперсимметричные амплитуды. Ради этого, собственно говоря, и развивался весь этот «новый» подход. Однако за все приходится платить, в том числе за явную суперсимметрию и за сравнительно легкое включение фермионов. Как мы выяснили в гл. 5, наше явно суперсимметричное действие сравнительно легко квантуется

ся только в калибровке светового конуса, а значит, только в этой калибровке достигается столь желанная нам ясность вычислений.

7.4.1. Вертексы для безмассовых частиц

В этом разделе мы получим вершинные операторы для безмассовых состояний открытой струны (вектора и спинора). Заметим, что работая в калибровке светового конуса, мы можем использовать формализм вершинных операторов только в том случае, когда импульсы испускаемых частиц, k_r^\pm , удовлетворяют условию $k_r^+ = 0$. Для нескольких первых состояний, имеющих достаточно малый спин, отсюда не вытекает никаких реальных ограничений, поскольку эти условия легко выполняются, если мы предполагаем лоренц-инвариантность теории, за счет соответствующего выбора лоренцевской системы координат. Что же касается вообще вершинных операторов для конусной калибровки, описывающих струны в произвольных состояниях, без каких-либо ограничений на импульсы, то такие операторы будут построены в гл. 11. Результаты этого раздела понадобятся нам не только для вычисления амплитуд в струнах типа I и II, где они будут использованы без каких-либо дополнительных модификаций, но также и для построения амплитуд в гетеротической струне — там мы применим их к описанию правого сектора.

В гл. 5 мы показали, что квантование явно суперсимметричного действия в калибровке светового конуса приводит нас к двум системам осцилляторных мод, обозначенных α_n^i и S_n^a . Моды α_n^i участвуют в разложении поперечных пространственных координат $X^i(\sigma, \tau)$ и удовлетворяют обычным перестановочным соотношениям

$$[\alpha_m^i, \alpha_n^j] = m\delta_{m+n}\delta^{ij}. \quad (7.4.1)$$

Моды S_n^a — это моды восьми компонент $\theta^a(\sigma, \tau)$, выживающих в калибровке светового конуса; их перестановки имеют вид

$$\{S_m^a, S_n^b\} = \delta_{m+n}\delta^{ab}. \quad (7.4.2)$$

Соответственно, α_n^i преобразуются как 8_v по поперечной группе $\text{spin}(8)$, а S_n^a — как 8_s . 16 суперзарядов лежат в представлениях 8_s и 8_c и задаются формулами

$$Q^a = (2p^+)^{1/2} S_0^a, \quad (7.4.3)$$

$$Q^a = (p^+)^{-1/2} \gamma_{aa}^i \sum_{-\infty}^{\infty} S_{-n}^a \alpha_n^i. \quad (7.4.4)$$

Матрицы γ_{aa}^i , позволяющие инвариантным образом связать три 8-мультиплета группы $\text{spin}(8)$, были описаны в приложении 5.В.

Итак, наша задача — построить вершинные операторы, которые описывают испускание состояний $|u\rangle$ и $|\xi\rangle$, связанных преобразованиями суперсимметрии. Особенно простой вид искомые формулы принимают в том случае, если мы введем кинематическое ограничение $k^+ = 0$. Основные трудности, возникающие при использовании произвольной кинематической конфигурации в теории струн при выборе калибровки светового конуса, происходят от того, что в формулу для любого вершинного оператора непременно входит фактор $\exp(ik \cdot X(\tau))$. А в этой калибровке X^- представляет собой квадратичную форму по координатам X^i , и вычисление экспоненты сопряжено со всеми обычными проблемами нормального упорядочения. Как мы установим в гл. 11, есть способ преодоления этих трудностей; он состоит в том, чтобы ввести для каждой струны отдельное фоковское пространство. Можно, конечно, воспользоваться и описанным выше ковариантным формализмом. Однако в целом ряде случаев гораздо удобнее пользоваться описываемыми ниже сравнительно простыми вершинными операторами, в которых гораздо проще вычисляются древесные, как, впрочем, и однопетлевые диаграммы.¹⁾

Прежде чем приступить к определению самих вертексов, нам придется разобрать некоторые чисто кинематические тонкости. Для основного состояния из условия массовой поверхности

$$(k^i)^2 = 2k^+k^- \quad (7.4.5)$$

и условий $k^+ = 0$, k^- конечно, прямо следует, что $(k^i)^2 = 0$, а значит, необходимо допустить у k^i комплексные значения, иначе все они тождественно обратятся в нуль. Кроме того, независимыми будут лишь семь из восьми k^i , и роль недостающего импульса будет играть k^- , поскольку его значение из (7.4.5) не определяется. Аналогично, восемь независимых компонент имеет и вектор поляризации основного векторного состояния ξ^μ , удовлетворяющий условию $\xi^- = \xi^i/k^+$. При $k^+ = 0$ удобно положить $\xi^i k^i = 0$ — это одно соотношение между поперечными компонентами, оставляющее ξ^- восьмой независимой компонентой.

1) Вершинные операторы в произвольной системе отсчета можно получить из приведенных здесь операторов, действуя на них соответствующим преобразованием Лоренца, используя приведенное в разд. 5.2.2 представление $J^{\mu\nu}$ в калибровке светового конуса. При этом естественно предполагается, что теория лоренц-инвариантна.

Как мы видели в приложении 5.B, компоненты безмассового спинора связаны условиями

$$u^a = -\frac{1}{k^+} \gamma_{aa}^i k^i u^{\dot{a}}. \quad (7.4.6)$$

Когда $k^+ = 0$, удобно положить

$$\gamma_{aa}^i k^i u^{\dot{a}} = 0, \quad (7.4.7)$$

так что u^a оказывается конечной величиной. С другой стороны, из (7.4.7) следует, что у $u^{\dot{a}}$ есть только четыре независимые компоненты (вместо восьми), однако при этом есть четыре независимые компоненты у u^a , которые никак не определяются набором $u^{\dot{a}}$.

Мы обозначим вертекс, описывающий испускание основного бозонного состояния с поляризацией ζ^i и импульсом k^μ (при $k^+ = 0$), как $V_B(k, \zeta)$, причем испускание может происходить как из фермионной, так и из бозонной линии. Обозначим $V_F(k, u)$ вертекс безмассового фермиона с волновой функцией u^a и импульсом k^μ . Этот вертекс тоже будет обслуживать обе возможности, и когда фермионная линия находится слева от него, и когда справа. Сейчас мы покажем, что эти вертексы имеют следующий вид:

$$V_B(\zeta, k) = \zeta \cdot B e^{ik \cdot X} = (\zeta^i B^i - \zeta^- B^+) e^{ik \cdot X}, \quad (7.4.8)$$

$$V_F(u, k) = u F e^{ik \cdot X} = (u^a F^a + u^{\dot{a}} F^{\dot{a}}) e^{ik \cdot X}. \quad (7.4.9)$$

Ключом к определению B^i и $F^{\dot{a}}$ является требование, чтобы они переходили друг в друга при преобразовании суперсимметрии. Поскольку вертексы зависят от волновых функций, то преобразованные вертексы должны соответственно зависеть от преобразованных же волновых функций, закон преобразования которых описан в разд. 5.3.1. Иными словами, мы потребуем, чтобы

$$[\eta^a Q^a, V_F(u, k)] \approx V_B(\tilde{\zeta}, k), \quad (7.4.10)$$

$$[\eta^a Q^a, V_B(\zeta, k)] \approx V_F(\tilde{u}, k), \quad (7.4.11)$$

$$[e^{\dot{a}} Q^{\dot{a}}, V_F(\tilde{u}, k)] \approx V_B(\tilde{\zeta}, k), \quad (7.4.12)$$

$$[e^{\dot{a}}, Q^{\dot{a}}, V_B(\tilde{\zeta}, k)] \approx V_F(\tilde{u}, k). \quad (7.4.13)$$

формулы для преобразованных волновых функций $\tilde{\zeta}^i$, $\tilde{u}^{\dot{a}}$, $\tilde{\zeta}^i$ и $\tilde{u}^{\dot{a}}$ приведены в разд. 5.3.1 для кинематически произвольной конфигурации, и прежде чем переходить к специальному случаю $k^+ = 0$, из них же можно получить выражения для

преобразованных ζ^- и u^a . Символ \approx означает, что мы требуем равенства только для матричных элементов на массовой поверхности, или, иными словами, мы допускаем появление членов, являющихся полными производными по τ . Они дают нулевой вклад в матричные элементы и несущественны в дреvesных амплитудах в силу принципа сокращенного пропагатора. Следует отметить и сам факт, что требования глобальной суперсимметрии называется достаточно для полного и однозначного определения структуры вершинных операторов.

Решение уравнений (7.4.10)–(7.4.13) дается следующими формулами:

$$B^+ = p^+, \quad (7.4.14)$$

$$B^i = \dot{X}^i - R^{ij} k^j, \quad (7.4.15)$$

$$F^{\dot{a}} = (2p^+)^{-1/2} \left[(\gamma \cdot \dot{X} S)^{\dot{a}} + \frac{1}{3} : (\gamma^i S)^{\dot{a}} R^{ij} : k^j \right], \quad (7.4.16)$$

$$F^a = (p^+/2)^{1/2} S^a, \quad (7.4.17)$$

где R^{ij} определяется как

$$R^{ij}(\tau) = iK^{ij}(\tau) = \frac{1}{4} \gamma_{ab}^i S^a(\tau) S^b(\tau). \quad (7.4.18)$$

R^{ij} представляет собой обобщение R_0^{ij} из разд. 5.3.1 и обладает простыми перестановками с угловым моментом (но с аномальным членом), так как это верно для $K^{ij}(\tau)$. Символ $:$: указывает на нормальное упорядочение мод S_n . Для доказательства того факта, что приведенные выше формулы действительно решают систему (7.4.10)–(7.4.13), надо использовать формулы суперпреобразований координат S и X , приведенные в разд. 5.2.1. Начнем с того, что подставим формулы (7.4.8) и (7.4.15) для V_B в коммутатор в левой части (7.4.11):

$$[e^{\dot{a}} Q^{\dot{a}}, \zeta \cdot B e^{ik \cdot X}] = \frac{1}{\sqrt{p^+}} \left(\zeta^i B^i \varepsilon \gamma^i k^i S - i \varepsilon \gamma^i \zeta^i S - \frac{1}{2} \varepsilon \gamma^k \dot{X}^k \gamma^{ij} S \zeta^i k^j \right) e^{ik \cdot X}. \quad (7.4.19)$$

Первое слагаемое в правой части идет от вариации $e^{ik \cdot X}$, а второе и третье — из вариации $\zeta^i B^i$ (B^+ не преобразуется). Из свойств γ матриц следует, что

$$\gamma^k \dot{X}^k \gamma^{ij} = 2\dot{X}^i \gamma^j - 2\dot{X}^j \gamma^i + \gamma^{ij} \gamma^k \dot{X}^k, \quad (7.4.20)$$

и (7.4.19) можно переписать в виде

$$\frac{1}{\sqrt{p^+}} \left(\zeta \cdot B \varepsilon \gamma^i k^i S - \varepsilon \gamma^i k^i S \dot{X}^i - \frac{1}{2} \varepsilon \gamma^{ij} \gamma^k \dot{X}^k S \zeta^i k^j \right) e^{ik \cdot X} - \frac{d}{d\tau} \left(\frac{i}{\sqrt{p^+}} \varepsilon \gamma^i \zeta^i S e^{ik \cdot X} \right) + \sqrt{p^+} \varepsilon \gamma^i \zeta^i S k^- e^{ik \cdot X}. \quad (7.4.21)$$

Опустив полную производную по τ и подставив явное выражение для $\zeta \cdot B$, мы получаем

$$V_F(\tilde{u}, k) = \frac{1}{\sqrt{p^+}} \left(-\frac{1}{4} : \varepsilon \gamma \cdot k S S \gamma^{ij} S : - \frac{1}{2} \varepsilon \gamma^{ij} \gamma \cdot \dot{X} S \right) \zeta^i k^j e^{ik \cdot X} - \frac{1}{\sqrt{p^+}} \zeta^- B^+ \varepsilon \gamma^i k^i S e^{ik \cdot X} + \sqrt{p^+} \varepsilon \gamma^i \zeta^i S k^- e^{ik \cdot X}. \quad (7.4.22)$$

Член типа S^3 в этой формуле можно преобразовать, используя тождества Фирца, а именно

$$: S^a S^b : = \frac{1}{16} S \gamma^{ij} S \gamma_{ab}^{ij}. \quad (7.4.23)$$

Подставив в (7.4.22) и положив

$$\tilde{u}^{\dot{a}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} (\varepsilon \gamma^{ij})^{\dot{a}} k^i \zeta^j + \frac{1}{\sqrt{2}} \varepsilon^{\dot{a}} \zeta^i k^i, \quad (7.4.24)$$

$$\tilde{u}^a = \lim_{k^+ \rightarrow 0} -\frac{k^i}{k^+} (\gamma^i u)^a, \quad (7.4.25)$$

мы получаем выражение для $V_F(\tilde{u}, k)$ в форме (7.4.9), где $F^{\dot{a}}$ и F^a определяются формулами (7.4.16) и (7.4.17). Тот факт, что член типа S^3 следует нормально упорядочивать, вытекает из более детального анализа перестановочных соотношений на языке разложения $S^a(\tau)$ по модам.

Примерно так же доказывается, что V_F переходит в V_B при ε -суперпреобразованиях (7.4.12).

Переходя к η^a -суперпреобразованиям, прежде всего рассмотрим (7.4.10)

$$\begin{aligned} & [\eta^a Q^a, (u^{\dot{a}} F^{\dot{a}} + u^a F^a) e^{ik \cdot X}] = \\ & = u^{\dot{a}} \left((\gamma^i \dot{X}^i \eta)^{\dot{a}} + \frac{1}{12} (\gamma^i \eta)^{\dot{a}} S \gamma^{ij} S k^j + \frac{1}{6} : (\gamma^i S)^{\dot{a}} \eta \gamma^{ij} S : k^j \right) e^{ik \cdot X} - \\ & - p^+ u^a \eta^a e^{ik \cdot X} = (\tilde{\zeta}^i B^i - \tilde{\zeta}^- B^+) e^{ik \cdot X} = V_B(\tilde{\zeta}, k). \end{aligned} \quad (7.4.26)$$

На последнем шаге мы воспользовались отождествлением $\tilde{\zeta}^i = \gamma_{ab} \eta^a u^{\dot{a}}$ из разд. 5.3.1. Кроме того, мы учли равенство $\tilde{\zeta}^- = -\eta^a u^a$, которое следует из явных выражений для ζ^- и u^a через ζ^i и $u^{\dot{a}}$ соответственно. Последний из коммутаторов, (7.4.11), мы здесь явно проверять не будем.

Хотя построенные нами вершинные операторы применимы лишь в специальной нековариантной калибровке, да еще при некоторых кинематических ограничениях, все же с их помощью целый ряд процессов просчитывается значительно проще, чем в других подходах. Особенно хорошо это будет видно в гл. 9,

где они будут использованы для вычисления нескольких однопетлевых амплитуд. Ниже, чтобы избежать появления неоправданно длинных формул, мы будем рассматривать внешние состояния с нулевой компонентой вектора поляризации ζ^- . При таком выборе из V_B выпадает слагаемое B^+ . При этом получающиеся выражения достаточно полны и содержат все члены, необходимые для восстановления ковариантных амплитуд.

Вычислим еще раз вершину взаимодействия трех безмассовых векторных состояний, теперь в суперсимметричной формулировке. Она дается выражением

$$A_3 = g \langle \zeta_1, k_1 | V_B(\zeta_2, k_2) | \zeta_3, k_3 \rangle. \quad (7.4.27)$$

Нетривиальный вклад дают только нулевые моды, что и объясняет отсутствие поправок порядка $O(\alpha')$ к чисто янг-миллсовскому результату. Действительно

$$\begin{aligned} A_3 &= g \langle \zeta_1, k_1 | (\zeta_2 \cdot p - R^{ij} \zeta_2^i k_2^j) e^{ik_2 \cdot X} | \zeta_3, k_3 \rangle = \\ &= -g \delta(k_1 + k_2 + k_3) \langle \zeta_1 | (\zeta_2 \cdot k_1 + R_0^{ij} \zeta_2^i k_2^j) | \zeta_3 \rangle, \end{aligned} \quad (7.4.28)$$

где $R_0^{ij} = \frac{1}{4} \gamma_{ab}^{ij} S_0^a S_0^b$ — оператор спиральности для нулевых мод, определенный в разд. 5.3.1. Из $|\zeta\rangle = |i\rangle \zeta^i$ и формул для R_0^{ij} из разд. 5.3.1 получаем

$$\begin{aligned} \langle \zeta_1 | \zeta_3 \rangle &= \zeta_1 \cdot \zeta_3, \\ \langle \zeta_1 | R_0^{ij} | \zeta_3 \rangle &= \zeta_1^i \zeta_3^j - \zeta_3^i \zeta_1^j. \end{aligned} \quad (7.4.29)$$

Учитывая еще условие физического состояния $\zeta_r \cdot k_r = 0$ (и опуская δ -функцию), имеем в итоге

$$A_3 = g (\zeta_1 \cdot k_2 \zeta_2 \cdot \zeta_3 + \zeta_2 \cdot k_3 \zeta_3 \cdot \zeta_1 + \zeta_3 \cdot k_1 \zeta_1 \cdot \zeta_2) \quad (7.4.30)$$

в полном соответствии с обычной теорией Янга — Миллса и нашим предыдущим результатом (7.3.40). Отметим, что одно из этих трех слагаемых возникает из части \dot{X}^i выражения для B^i , а два других — из его части — $R^{ij} k^j$, что дает независимую проверку правильности их относительной нормировки.

Вершину взаимодействия для безмассового вектора и двух безмассовых фермионов можно получить, подставив в (7.4.27) вместо конечных состояний $\langle \zeta_1 |$ и $| \zeta_3 \rangle$ фермионные состояния $\langle u_1 |$ и $| u_3 \rangle$. При этом нам надо будет воспользоваться приведенным в разд. 5.3.1 выражением для действия R_0^{ij} на $| u \rangle$. Похожим способом вычисляются и вершины, в которые входят фермионные вертексы V_F , и мы получаем возможность вычислить одну и ту же вершину взаимодействия (вектор-фермион-

фермион) двумя разными способами. Как и следовало ожидать, оба результата совпадают и равны

$$g\langle u_1, k_1 | V_F(u_2, k_2) | \zeta_3, k_3 \rangle = -g\langle u_2, k_2 | V_B(\zeta, k_3) | u_1, k_1 \rangle = \\ = -2g\bar{u}_1 \Gamma \cdot \zeta u_2. \quad (7.4.31)$$

Мы снова приводим результат в ковариантных обозначениях группы $\text{spin}(9, 1)$, так как он полностью определяется по поперечному $\text{spin}(8)$ выражению.

Вершинные операторы для безмассовых векторных частиц (7.3.25) и (7.4.8) обладают поразительным сходством; оно становится еще более прозрачным, если в ковариантной формуле (7.3.25) ограничиться только поперечными импульсами и поляризациями. Тогда префакторы у $\exp(ik \cdot X)$ можно в обоих случаях представить в виде

$$B^i = \dot{X}^i - R^{ij} k^j, \quad (7.4.32)$$

где при одном описании

$$R^{ij} = \psi^{[i} \psi^{j]}, \quad (7.4.33)$$

а при другом

$$R^{ij} = \frac{1}{4} \gamma_{ab}^{ij} S^a S^b. \quad (7.4.34)$$

Оба эти выражения удовлетворяют одним и тем же перестановочным соотношениям и даже имеют совпадающие аномалии (аффинные $SO(8)$). Понять этот факт можно, если вспомнить о преобразованиях триальности в алгебре $SO(8)$, описанных в приложении 5.A. В одном описании мы основываемся на операторах ψ^i из представления 8_v , в другом — на операторах S^a из 8_s , а преобразование $SO(8)$ триальности, переводящее 8_v в 8_s , превращает (7.4.33) в (7.4.34). Именно потому, что эти два семейства вершинных операторов связаны преобразованием триальности, они и приводят к совпадающим амплитудам для рассеяния безмассовых бозонов.

7.4.2. Деревья для открытых струн

С помощью введенных в предыдущем разделе вертексов можно вычислить древесные диаграммы, причем сама процедура вычисления по сути мало отличается от того, что мы уже проделывали раньше. M -частичная древесная амплитуда задается формулой

$$A_M = g^{M-2} \langle \phi_1 | V_2 \Delta V_3 \dots \Delta V_{M-1} | \phi_M \rangle, \quad (7.4.35)$$

где теперь пропагатор имеет вид

$$\Delta = \left(\frac{1}{2} p^2 + N \right)^{-1} \quad (7.4.36)$$

и

$$N = \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_{-n}^i \alpha_n^i + n S_{-n}^a S_n^a). \quad (7.4.37)$$

Каждую вершину в этой формуле можно выбрать равной либо V_B , либо V_F ; соответственно она будет описывать испускание безмассовой векторной или спинорной частицы. Аналогично обстоит дело и с состояниями $\langle \phi_1 |$ и $| \phi_M \rangle$: они могут быть и вектором $| \zeta \rangle$, и спинором $| u \rangle$. Поскольку все построение выполнялось в физической калибровке светового конуса, то древесная унитарность очевидна: фоковское пространство описывает только физические степени свободы, и в вычетах не может появиться никаких шпурионных состояний.

Однако свойство циклической симметрии в этом подходе выглядит несколько более проблематично. С одной стороны, стремясь к максимальному упрощению формул, мы потребовали, чтобы у всех частиц, отвечающих вертексам $V_2 \dots V_{M-1}$, импульс удовлетворял условию $k^+ = 0$. С другой стороны, если потребовать выполнения аналогичного условия и для $| \phi_M \rangle$, $\langle \phi_1 |$, то некоторые формулы становятся плохо определенными, а это значит, что прежде, чем мы получим возможность сравнивать исходное выражение с тем, что получается в результате циклической перестановки, необходимо перейти к более общим формулам. Фактически, когда мы описываем струну в калибровке светового конуса, амплитуда A_M представляется в виде целого набора разных диаграмм, отвечающих различному упорядочению по τ . Вклад каждой такой диаграммы — это некоторый интеграл, причем подынтегральные выражения у всех диаграмм одинаковы, отличаются лишь области интегрирования, а полная область интегрирования, необходимая для циклической симметрии и описанная в предыдущих разделах, появляется в результате сложения всех отдельных областей. Границы между этими областями контролируются значениями переменных k^+ у различных состояний. При $k^+ \rightarrow 0$ некоторые области стягиваются до нуля, и поскольку в (7.4.35) $k_2^+, \dots, k_{M-1}^+ = 0$, то эта формула действительно дает полную амплитуду.

Опишем теперь вычисление четырехточечных функций. Удобно действовать следующим образом: проделаем сначала все вычисления, не затрагивающие нулевых мод, не задавая при этом тип начального и конечного состояний (спиноры это или векторы), и лишь потом фиксируем конкретные безмассовые со-

стояния на концах дерева и проведем остальные вычисления для нулевых мод. Рассмотрим, например, дерево, в котором два состояния, № 2 и № 3, — это безмассовые векторные частицы с вершинными операторами V_B , описанными в предыдущем разделе. Мы начнем с вычисления среднего $\langle k_1 | V_B(\xi_2, k_2) \Delta V_B(\xi_3, k_3) | k_4 \rangle$, где под $\langle k_1 |$ и $| k_2 \rangle$ понимаются основные состояния относительно всех осцилляторов α_n и S_n с $n \neq 0$. Однако этот матричный элемент не содержит среднего по пространству мод S_0 и, следовательно, это выражение представляет собой оператор в указанном пространстве. Все, что нужно для счета — это описанная ранее техника работы с осцилляторами α , алгебра фермионных мод и следующее тождество:

$$\langle 0 | \sum_{m=1}^{\infty} S_m^a \sum_{n=1}^{\infty} S_{-n}^b x^n | 0 \rangle = \frac{x}{1-x} \delta^{ab}. \quad (7.4.38)$$

Окончательный результат имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \langle k_1 | V_B(\xi_2, k_2) \Delta V_B(\xi_3, k_3) | k_4 \rangle = & \\ = \frac{1}{2} g^2 (1 + t/2) \xi_2 \cdot \xi_3 B(1 - s/2, -1 - t/2) + & \\ + \frac{1}{2} g^2 [-k_1 \cdot \xi_2 k_4 \cdot \xi_3 + R_0^{ij} (\xi_2^i k_2^j k_3 \cdot k_4 - \xi_3^i k_3^j k_1 \cdot \xi_2) + & \\ + R_0^{ij} R_0^{kl} \xi_2^i k_2^j k_3^k k_3^l] B(-s/2, 1 - t/2) + & \\ + \frac{1}{2} g^2 [\xi_2 \cdot k_3 \xi_3 \cdot k_4 + \xi_2 \cdot k_1 \xi_3 \cdot k_2 + \xi_2 \cdot k_3 \xi_3 \cdot k_2 + & \\ + R_0^{ij} (-\xi_2^i k_2^j \xi_3 \cdot k_2 + \xi_3^i k_3^j \xi_2 \cdot k_3 + \xi_2 \cdot \xi_3 k_2^i k_3^j + & \\ + \xi_2^i \xi_3^j k_2 \cdot k_3 - k_2^i \xi_3^j \xi_2 \cdot k_3 - \xi_2^i k_3^j k_2 \cdot \xi_3)] B(1 - s/2, -t/2). \end{aligned} \quad (7.4.39)$$

Конкретные амплитуды мы получим, если обложим оператор в (7.4.39) либо парой безмассовых векторных состояний $\langle \xi_1 |$ и $| \xi_4 \rangle$, либо парой безмассовых спиноров $\langle u_1 |$ и $| u_4 \rangle$, типа тех, что описаны в разд. 5.3.1. Используя полученное в разд. 5.3.1 правило $R_0^{ij} | k \rangle = \delta^{ik} | i \rangle - \delta^{jk} | j \rangle$, мы можем получить вспомогательные тождества для четырехвекторного случая:

$$\begin{aligned} \langle \xi_1 | \xi_4 \rangle &= \xi_1 \cdot \xi_4, \\ \langle \xi_1 | R_0^{ij} | \xi_4 \rangle &= \xi_4^i \xi_1^j - \xi_1^i \xi_4^j, \\ \langle \xi_1 | R_0^{ij} R_0^{kl} | \xi_4 \rangle &= \xi_1^i \xi_4^k \delta^{jl} - \xi_1^i \xi_4^l \delta^{jk} - \xi_1^j \xi_4^k \delta^{il} + \xi_1^j \xi_4^l \delta^{ik}. \end{aligned} \quad (7.4.40)$$

С их помощью и проведя довольно очевидные, но весьма утомительные выкладки, мы получаем

$$A_4 = -\frac{1}{2} g^2 \frac{\Gamma(-s/2) \Gamma(-t/2)}{\Gamma(1-s/2-t/2)} K(\xi_1, k_1; \xi_2, k_2; \xi_3, k_3; \xi_4, k_4), \quad (7.4.41)$$

где кинематический фактор K задается формулой

$$\begin{aligned} K = & -\frac{1}{4} (st \xi_1 \cdot \xi_3 \xi_2 \cdot \xi_4 + su \xi_2 \cdot \xi_3 \xi_1 \cdot \xi_4 + tu \xi_1 \cdot \xi_2 \xi_3 \cdot \xi_4 + \\ & + \frac{1}{2} s (\xi_1 \cdot k_4 \xi_3 \cdot k_2 \xi_2 \cdot \xi_4 + \xi_2 \cdot k_3 \xi_4 \cdot k_1 \xi_1 \cdot \xi_3 + \\ & + \xi_1 \cdot k_3 \xi_4 \cdot k_2 \xi_2 \cdot \xi_3 + \xi_2 \cdot k_4 \xi_3 \cdot k_1 \xi_1 \cdot \xi_4 + \\ & + \frac{1}{2} t (\xi_2 \cdot k_1 \xi_4 \cdot k_3 \xi_3 \cdot \xi_1 + \xi_3 \cdot k_4 \xi_1 \cdot k_2 \xi_2 \cdot \xi_4 + \\ & + \xi_2 \cdot k_4 \xi_1 \cdot k_3 \xi_3 \cdot \xi_4 + \xi_3 \cdot k_1 \xi_4 \cdot k_2 \xi_2 \cdot \xi_1 + \\ & + \frac{1}{2} u (\xi_1 \cdot k_2 \xi_4 \cdot k_3 \xi_3 \cdot \xi_2 + \xi_3 \cdot k_4 \xi_2 \cdot k_1 \xi_1 \cdot \xi_4 + \\ & + \xi_1 \cdot k_4 \xi_2 \cdot k_3 \xi_3 \cdot \xi_4 + \xi_3 \cdot k_2 \xi_4 \cdot k_1 \xi_1 \cdot \xi_2). \end{aligned} \quad (7.4.42)$$

Как и прежде, если мы предположим, что теория лоренц-инвариантна, то можно забыть про кинематические ограничения, которые мы использовали для получения этого результата, и рассматривать ответ как некоторое ковариантное выражение, причем в данном случае такая ковариантизация однозначна. Коль скоро мы принимаем такую точку зрения, нам надо убедиться, что множитель K удовлетворяет требованию калибровочной инвариантности на массовой поверхности, т. е. он обращается в нуль, если хотя бы один из векторов поляризации заменить на соответствующий ему импульс. Легко убедиться, что это выполнено. Кроме того, K должен быть циклически симметричен по всем четырем внешним линиям, и это свойство тоже имеет место. Однако совершенно неожиданным выглядит тот факт, что на самом деле K полностью симметричен по всем четырем линиям. Позднее, когда мы будем строить амплитуды для замкнутой струны, это свойство окажется для нас довольно существенным, поскольку кинематический фактор в них тоже существует. На самом деле, как мы увидим в гл. 9, K может быть представлен как след в пространстве, порожденном модами оператора S_0 ,

$$K = \text{tr}_{S_0} (R_0^{i_1 i_2} R_0^{i_2 i_3} R_0^{i_3 i_4} R_0^{i_4 i_1}) k^{i_1} k^{i_2} k^{i_3} k^{i_4} k^{i_5} k^{i_6} k^{i_7} k^{i_8}, \quad (7.4.43)$$

в этом выражении симметрия очевидна. При вычислении петель такое представление возникает совершенно естественно, чего, к сожалению, нельзя утверждать, оставаясь на уровне древесных диаграмм.

Четырехчастичную амплитуду с фермионными внешними линиями тоже можно вычислить исходя из (7.4.35), причем слож-

ность вычисления оказывается примерно такой же. Во всех вариантах получим

$$A(1, 2, 3, 4) = -\frac{1}{2} g^2 \frac{\Gamma(-s/2) \Gamma(-t/2)}{\Gamma(1-s/2-t/2)} K(1, 2, 3, 4), \quad (7.4.44)$$

где K — подходящий кинематический фактор, задаваемый в четырехвекторном случае формулой (7.4.42). Амплитуда для дерева с фермионами на концах и бозонами посередине получается из (7.4.39) путем усреднения по состояниям $\langle u_1 |$ и $| u_4 \rangle$ с использованием формул $R_0^{ij} | \dot{a} \rangle = -\frac{1}{2} \gamma_{ab}^{ij} | \dot{b} \rangle$ и

$$\begin{aligned} \langle u_1 | u_4 \rangle &= (k_4^+)^{-1} u_1 u_4, \\ \langle u_1 | R_0^{ij} | u_4 \rangle &= \frac{1}{2} (k_4^+)^{-1} u_1 \gamma^{ij} u_4, \\ \langle u_1 | R_0^{ij} R_0^{kl} | u_4 \rangle &= \frac{1}{4} (k_4^+)^{-1} u_1 \gamma^{ij} \gamma^{kl} u_4. \end{aligned} \quad (7.4.45)$$

Записанный в ковариантном виде, окончательный результат выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} K(u_1, \xi_2, \xi_3, u_4) &= -\frac{1}{2} t \bar{u}_1 \Gamma \cdot \xi_2 \Gamma \cdot (k_3 + k_4) \Gamma \cdot \xi_3 u_4 + \\ &+ s (\bar{u}_1 \Gamma \cdot \xi_3 u_4 k_3 \cdot \xi_2 - \bar{u}_1 \Gamma \cdot \xi_2 u_4 k_2 \cdot \xi_3 - \bar{u}_1 \Gamma \cdot k_3 u_4 \xi_2 \cdot \xi_3). \end{aligned} \quad (7.4.46)$$

В двух других случаях мы получаем, вычисляя вполне аналогичным образом матричные элементы операторов $V_F V_B$ и $V_F V_F$,

$$\begin{aligned} K(u_1, \xi_2, u_3, \xi_4) &= \frac{1}{2} t \bar{u}_1 \Gamma \cdot \xi_2 \Gamma \cdot (k_3 + k_4) \Gamma \cdot \xi_4 u_3 + \\ &+ \frac{1}{2} s \bar{u}_1 \Gamma \cdot \xi_4 \Gamma (k_2 + k_3) \Gamma \cdot \xi_2 u_3 \end{aligned} \quad (7.4.47)$$

и

$$K(u_1, u_2, u_3, u_4) = -\frac{1}{2} s \bar{u}_2 \Gamma^\mu u_3 \bar{u}_1 \Gamma_\mu u_4 + \frac{1}{2} t \bar{u}_1 \Gamma^\mu u_2 \bar{u}_4 \Gamma_\mu u_3 \quad (7.4.48)$$

соответственно. Оба эти множителя полностью симметричны по бозонным и антисимметричны по фермионным линиям. Для доказательства этого факта надо использовать тождества Фирца для майорано-вейлевских спиноров в десятиметрии. Если положить

$$T_1(1234) = \bar{u}_1 \Gamma^\mu u_2 \bar{u}_3 \Gamma_\mu u_4, \quad (7.4.49)$$

$$T_3(1234) = \bar{u}_1 \Gamma^{\mu\nu\rho} u_2 \bar{u}_3 \Gamma_{\mu\nu\rho} u_4, \quad (7.4.50)$$

то эти тождества, которые доказываются с помощью примерно тех же выкладок, что и в приложении 4.A, принимают следующий вид:

$$T_1(1432) = -\frac{1}{2} T_1(1234) + \frac{1}{24} T_3(1234), \quad (7.4.51)$$

$$T_3(1432) = 18 T_1(1234) + \frac{1}{2} T_3(1234). \quad (7.4.52)$$

Таким образом, чисто бозонная симметрия (7.4.42) обобщается на весь супермультиплет именно так, как этого и следовало ожидать.

7.4.3. Деревья для замкнутой суперструны

Древесные амплитуды для замкнутых и открытых суперструн связаны друг с другом в точности таким же образом, как это описано для обычных струн в разд. 7.2.1 и 7.2.2. Рассмотрим, например, вершину для трех безмассовых открытых суперструн и обозначим ее

$$A_4^{op} = g \xi_1^A \xi_2^B \xi_3^C V_{ABC}(k_1, k_2, k_3), \quad (7.4.53)$$

где A, B, C — суперпространственные индексы, принимающие либо спинорные, либо векторные значения. В этой формуле собраны все возможные трехточечные вершины из предыдущего раздела. В этих обозначениях трехчастичная вершина для безмассовых состояний замкнутой струны запишется следующим образом:

$$A_3^{cl} = \kappa \xi_1^{AA'} \xi_2^{BB'} \xi_3^{CC'} V_{ABC} \left(\frac{1}{2} k_1, \frac{1}{2} k_2, \frac{1}{2} k_3 \right) V_{A'B'C'} \left(\frac{1}{2} k_1, \frac{1}{2} k_2, \frac{1}{2} k_3 \right). \quad (7.4.54)$$

Она описывает все возможные взаимодействия 256 безмассовых состояний. Число 256 определяется тем, что в калибровке светового конуса каждый из индексов A, A', \dots может принимать по 16 значений; в ковариантном описании это индексы десятимерного вектора или 16-компонентного майорано-вейлевского спинора. В теориях типа I и IIB индексы A, B, C и A', B', C' относятся к спинорам одинаковой киральности, а в теории типа IIA — противоположной. Кроме того, в теории типа I спектр ограничен до мультиплета супергравитации $N=1$ условием градуированной симметрии $\xi^{AA'}$, т. е. требованием антисимметричности, если оба индекса спинорные, и симметричности в противном случае.

Для четырех безмассовых частиц дерева строятся с помощью формулы (7.2.40). Полученные в предыдущем разделе четырехчастичные деревья открытой струны можно записать в следующем виде:

$$A_4^{op} = g^2 \zeta_1^{AA'} \zeta_2^{BB'} \zeta_3^{CC'} \zeta_4^{DD'} K_{ABCD} \frac{\Gamma(-s/2) \Gamma(-t/2)}{\Gamma(1+u/2)}, \quad (7.4.55)$$

где K_{ABCD} представляет собой все возможные варианты кинематических факторов, обозначавшихся буквой K в предыдущем разделе. Все эти факторы обладают полной градуированной симметрией относительно одновременных перестановок индексов и соответствующих импульсов. Для нахождения A_4^{cl} необходимо соотношение

$$\begin{aligned} C(s, t, u) &= \left(\sin \frac{\pi t}{8} \right) \frac{\Gamma(-s/8) \Gamma(-t/8)}{\Gamma(1-s/8-t/8)} \times \frac{\Gamma(-t/8) \Gamma(-u/8)}{\Gamma(1-t/8-u/8)} = \\ &= -\pi \frac{\Gamma(-s/8) \Gamma(-t/8) \Gamma(-u/8)}{\Gamma(1+s/8) \Gamma(1+t/8) \Gamma(1+u/8)}, \end{aligned} \quad (7.4.56)$$

которое выводится с помощью тождества $\Gamma(a) \Gamma(1-a) \sin \pi a = \pi$. Через функцию $C(s, t, u)$ амплитуда выражается следующим образом:

$$A_4^{cl} = \kappa^2 \zeta_1^{AA'} \zeta_2^{BB'} \zeta_3^{CC'} \zeta_4^{DD'} K_{ABCD} (k/2) K_{A'B'C'D'} (k/2) C(s, t, u). \quad (7.4.57)$$

Поскольку K и C полностью симметричны по всем четырем линиям, то и сама A_4^{cl} обладает искомой полной градуированной симметрией.

7.4.4. Деревья гетеротической струны

Гетеротическая струна — это замкнутая струна, у которой правый сектор суперсимметричен, а левый — чисто бозонный. Кроме того, эта теория обладает группой симметрии $E_8 \times E_8$ или $\text{spin}(32)/Z_2$, как это описано в разд. 6.3. Эта симметрия может быть введена либо посредством компактификации 16 левых измерений на соответствующий тор, либо с помощью 32 фермионных степеней свободы, аналогичных фермионам RNS-суперструны.

В левом секторе безмассовые степени свободы описываются одним десятимерным вектором и 496 скалярами, лежащими в присоединенном представлении калибровочной группы. Тензорное произведение векторного состояния на безмассовые правые моды образует мультиплет $N=1$, $D=10$ супергравитации, и мы начнем с того, что рассмотрим амплитуды, в которых участвуют эти состояния. Все эти состояния можно расклассифициро-

вать по значениям тензоров поляризации и спиноров $\zeta^{A\mu}$, где A — это индекс по правому супермультиплету (векторный и спинорный, как в разд. 7.4.3), а μ — векторный индекс, ассоциированный с левыми модами. В этих обозначениях кубические вершины для супергравитационного мультиплета запишутся в виде

$$A_3 = \kappa^2 \zeta_1^{A\mu} \zeta_2^{B\nu} \zeta_3^{C\rho} V_{ABC} \left(\frac{1}{2} k \right) t_{\mu\nu\rho} \left(\frac{1}{2} k \right), \quad (7.4.58)$$

где V_{ABC} — введенные в разд. 7.4.3 вершины, а $t_{\mu\nu\rho}$ задается формулой (7.1.58). Напомним, что только $t_{\mu\nu\rho}$, но не V_{ABC} , содержит поправки порядка $O(\alpha')$ к вершинам обычной минимальной теории Янга — Миллса. В результате A_3 будет содержать поправки порядка $O(\alpha')$ к вершинам взаимодействия минимальной $N=1$, $D=10$ супергравитации. В эффективном действии эти поправки будут представляться, в частности, членами типа R^2 .

С помощью (7.2.40) можно вычислить и четырехчастичные деревья для состояний, принадлежащих к мультиплету супергравитации. Для этого сначала надо вычислить четырехвекторное дерево из бозонной струны, которое получается из (7.1.68) при $M=4$:

$$A_4^{bos} = g^2 \zeta_1^{\mu_1 \nu_1 \rho_1 \lambda_1} \zeta_2^{\mu_2 \nu_2 \rho_2 \lambda_2} \zeta_3^{\mu_3 \nu_3 \rho_3 \lambda_3} \zeta_4^{\mu_4 \nu_4 \rho_4 \lambda_4} K_{\mu\nu\rho\lambda}^{bos} (k) \frac{\Gamma(-s/2) \Gamma(-t/2)}{\Gamma(1+u/2)}. \quad (7.4.59)$$

Здесь кинематический фактор $K_{\mu\nu\rho\lambda}^{bos} (k)$ полностью симметричен по всем четырем линиям, в точности как (7.4.42), однако явно выписывать его довольно утомительно, поскольку в нем в два раза больше членов, чем в (7.4.42). Четырехчастичное дерево записывается через этот фактор и K_{ABCD} , определенный формулой (7.4.55), следующим образом:

$$A_4 = \kappa^2 \zeta_1^{A\mu} \zeta_2^{B\nu} \zeta_3^{C\rho} \zeta_4^{D\lambda} K_{ABCD} (k/2) K_{\mu\nu\rho\lambda}^{bos} (k/2) C(s, t, u). \quad (7.4.60)$$

Здесь $C(s, t, u)$ задается формулой (7.4.56).

Безмассовые спектры для суперструны типа I и гетеротической струны совпадают, и можно сравнить амплитуды (7.4.58) и (7.4.60) с амплитудами (7.4.54) и (7.4.57) для соответствующих состояний. В обоих случаях главные члены в разложении по степеням α' совпадают с вершинами и деревьями из минимальной $D=10$, $N=1$ супергравитации (подробнее она будет описана в гл. 13). Однако члены, зависящие от α' , уже совпадать не будут. Например, (7.4.54) от α' не зависит, а (7.4.58) линейна по α' . Еще более существенной становится эта разница для M -частичных деревьев при $M > 3$. Отсюда следует вывод, что хотя лидирующие члены в обоих случаях и представляют собой одну и ту же теорию супергравитации, описанную в

разд. 13.1, но все же полные полевые теории будут совершенно различны.

Рассмотрим теперь несколько вершин и амплитуд для состояний, несущих нетривиальные квантовые числа. Правые суперструнные моды будут описываться так же, как и прежде, но в левом секторе нам надо описывать теперь моды, принадлежащие к присоединенному представлению калибровочной группы. Если описывать калибровочные степени свободы на бозонном языке, то 496 безмассовых мод разбиваются на две группы. Шестнадцать мод попарно коммутируют и принадлежат к картановской подалгебре, а остальные 480 несут заряды K^I с $K \cdot K = 2$; для мод из картановской подалгебры $K^I = 0$. Из-за такой разницы в способе описания этих двух групп состояний полная группа симметрии оказывается не совсем явной.

Амплитуды для состояний из картановской подалгебры получаются заменой пространственно-временных индексов на теоретико-групповые, т. е.

$$K_{\mu\nu\rho\lambda} \rightarrow K_{IJKL}. \quad (7.4.61)$$

Поскольку в нашем случае все внутренние импульсы равны нулю, то исчезающие слагаемые возникают только тогда, когда I, J, K, L связаны не с импульсами, а с дельтами Кронекера. Поэтому t_{IJK} зануляются, и вместо $K_{\mu\nu\rho\lambda}^{bos}(k/2)$ в (7.4.60) надо подставлять

$$K_{IJKL}(k/2) \sim \frac{tu}{1+s/8} \delta_{IJ} \delta_{KL} + \frac{su}{1+t/8} \delta_{IL} \delta_{JK} + \frac{st}{1+u/8} \delta_{IK} \delta_{JL} \quad (7.4.62)$$

для описания рассеяния четырех супер-янг-миллсовских состояний, связанных с картановской подалгеброй. В низкоэнергетическом точечном пределе эта амплитуда обращается в нуль, что согласуется с тем фактом, что в обычной теории Янга — Миллса нейтральным частицам в древесном приближении отвечают нулевые амплитуды.

Рассмотрим теперь рассеяние заряженных частиц, т. е. амплитуды с участием тех состояний, которые ассоциированы с 480 генераторами, не принадлежащими к картановской подалгебре. Эти состояния можно рассматривать как обобщение левых тахионов в том смысле, что тахионное условие массовой поверхности $k_L^2 = 2$ для левого 26-импульса $k_L = (1/2)(k^M, K^I)$ выполняется за счет $k^2 = 0, K^2 = 2$. В отличие от обычных тахионов ($k^2 = 8, K^2 = 0$), для которых, как это показано в разд. 6.3.1, не может быть выполнено условие $L_0 = \bar{L}_0 - 1$, эти состояния существенны для физического спектра. Амплитуды с участием таких заряженных частиц описываются функциями, у которых вклад левых мод описывается многотаксионной

амплитудой обычной бозонной теории, но с описанными выше импульсами ($k^2 = 0, K^2 = 2$). Кроме того, необходимо учесть еще вклад коциклов вершинных операторов. Например, трехчастичная вершина для трех таких левых мод есть

$$\varepsilon(K) = \langle K_1 | V_L(K_2) | K_3 \rangle, \quad (7.4.63)$$

где

$$V_L(K_2) = c_{K_2}(P) e^{2iK_2 \cdot X}. \quad (7.4.64)$$

Выбирая коциклы

$$c_K(P) = (-1)^{P \cdot K} \quad (7.4.65)$$

как в разд. 6.4.5, мы получаем просто

$$\varepsilon(K) = (-1)^{K_3 \cdot K_2}. \quad (7.4.66)$$

Поскольку $K_1 + K_2 + K_3 = 0$ и $K_i^2 = 2$, то, следовательно, ε будет полностью антисимметрична относительно перестановок трех координат K . Поэтому вершинный оператор для трех заряженных частиц

$$A_3 = \kappa_{\zeta_1 \zeta_2 \zeta_3}^{A_1 B_1 C_1} \varepsilon(K) V_{ABC} \left(\frac{1}{2} k \right) \quad (7.4.67)$$

будет иметь правильную симметрию в соответствии с выбранным типом статистики (Бозе или Ферми). При этом коэффициенты $\varepsilon(K)$ представляют собой структурные константы для трех заряженных частиц в базисе, где они полностью антисимметричны.

Примерно из тех же соображений находится амплитуда для четырех заряженных частиц. По аналогии с мандельштамовскими переменными s, t, u , удобно ввести решеточные инварианты

$$S = -(K_1 + K_2)^2, \quad T = -(K_2 + K_3)^2, \quad U = -(K_1 + K_3)^2. \quad (7.4.68)$$

Из кинематических условий $\sum K_i = 0, K_i^2 = 2$ следует $S + T + U = -8$, и единственно допустимыми для S, T и U оказываются значения $-8, -6, -4, -2, 0$. Например, если $K_1 = -K_2 = -K_3 = -K_4$, то $S = -8$ и $T = U = 0$. Четырехтаксионная амплитуда с импульсами k_L — это

$$B(-1 - s/8 - S/2, -1 - t/8 - T/2) = \frac{\Gamma(1 - s/8 - S/2) \Gamma(-1 - t/8 - T/2)}{\Gamma(2 + u/8 + U/2)}. \quad (7.4.69)$$

Объединяя ее с древесной амплитудой для четырех открытых суперструн, получаем окончательную формулу для четырех заряженных состояний гетеротической струны:

$$A_4 \sim \zeta_{\zeta_1 \zeta_2 \zeta_3 \zeta_4}^{A_1 B_1 C_1 D_1} K_{ABCD}(k/2) \varepsilon(K) D(k, K), \quad (7.4.70)$$

где

$$D(k, K) = \pi \frac{\Gamma(-1-s/8-S/2) \Gamma(-1-t/8-T/2) \Gamma(-1-u/8-U/2)}{\Gamma(1+s/8) \Gamma(1+t/8) \Gamma(1+u/8)}, \quad (7.4.71)$$

а коцикл задается формулой

$$\varepsilon(K) = c_{K_1}(K_1 + K_2) c_{K_2}(K_1) (-1)^{U/2} = \\ = (-1)^{K_1 * K_3 + K_3 * K_2 + K_2 * K_1}. \quad (7.4.72)$$

Этот множитель полностью симметричен по всем K_i . Поразительно красиво и изящно выглядит это замысловатое переплетение динамических переменных и теоретико-групповых координат!

Все формулы для четырехчастичных амплитуд, и для заряженных частиц (формула (7.4.70)), и для нейтральных (формулы (7.4.60) и (7.4.62)), можно объединить в единой формуле, имеющей к тому же и более привычный вид. Для этого сопоставим внешним частицам матрицы T^a , где индекс a пробегает 496 значений (по числу генераторов групп $E_8 \times E_8$ или $SO(32)$). Для группы $SO(32)$ можно взять в качестве T^a матрицы размера 32×32 (фундаментальное представление), но в случае $E_8 \times E_8$ такие матрицы способны описать лишь подгруппу $SO(16) \times SO(16)$, но не всю группу в целом. Поэтому здесь необходимо использовать матрицы размера 496×496 (присоединенное представление). Включив в определение операции tr дополнительный множитель $1/30$, можно согласовать нормировку следов матриц в этом представлении и в 32-мерном представлении для подгруппы $SO(16) \times SO(16)$.

При вычислении амплитуды рассеяния мы можем описывать теоретико-групповые степени свободы с помощью алгебры токов (см. разд. 6.2). В частности, входящий в амплитуду матричный элемент

$$\langle T_1 | V(T_2) y^{N-2} V(T_3) | T_4 \rangle = \langle 0 | T_1 \cdot Q_1 T_2 \cdot Q y^{N-2} T_3 \cdot Q T_4 \cdot Q_{-1} | 0 \rangle, \quad (7.4.73)$$

де $Q = \sum_{-\infty}^{\infty} Q_n$, находится, если воспользоваться рядом соотношений из этой алгебры, приведенных в разд. 6.2. Мы будем записывать амплитуду в виде

$$A_4 = \kappa^2 \tau_{5_1}^{A_1} \tau_{5_2}^{B_1} \tau_{5_3}^{C_1} \tau_{5_4}^{D_1} K_{ABCD} (k/2) C(s, t, u) G(k, T) \quad (7.4.74)$$

(где в случае четырех заряженных состояний $C(s, t, u) G(k, T) = \varepsilon(K) D(k, K)$). Подстановка в формулу для четырехчастичной

амплитуды гетеротической струны дает

$$G(k, T) = s \cdot \text{tr}(T_1 T_4 T_2 T_3) + t \text{tr}(T_1 T_3 T_4 T_2) + u \text{tr}(T_1 T_2 T_3 T_4) + \\ + \frac{1}{32} \left[\frac{tu}{1+s/8} \text{tr}(T_1 T_2) \text{tr}(T_3 T_4) + \frac{su}{1+t/8} \text{tr}(T_1 T_4) \text{tr}(T_2 T_3) + \right. \\ \left. + \frac{st}{1+u/8} \text{tr}(T_1 T_3) \text{tr}(T_2 T_4) \right]. \quad (7.4.75)$$

Если все четыре состояния нейтральны, то четыре T_i будут коммутировать друг с другом, и вследствие условия $s+t+u=0$ три первых слагаемых в G пропадут. Таким образом, в этом случае наш ответ совпадает с (7.4.62).

Можно поставить вопрос о вытекающих из этой формулы следствиях для эффективной низкоэнергетической теории обычных частиц. Для этого надо воспользоваться приближением $C(s, t, u) \sim (stu)^{-1}$ при $\alpha' s, \alpha' t, \alpha' u \ll 1$, и мы получаем следующие s -канальные полюсы для $C \cdot G$:

$$A_4 \sim \kappa^2 \frac{8}{s} \left[\frac{1}{t} \text{tr}(T_1 T_2 T_3 T_4) + \frac{1}{u} \text{tr}(T_1 T_3 T_4 T_2) + \frac{1}{32} \text{tr}(T_1 T_2) \text{tr}(T_3 T_4) \right]. \quad (7.4.76)$$

Два первых слагаемых соответствуют обмену состояниями из мультиплетта супертеории Янга—Миллса, лежащими в присоединенном представлении, а последнее слагаемое — обмену синглетным состоянием из мультиплетта супергравитации. Восстановив из размерных соображений соответствующие степени α' и сравнивая значения вычетов, отсюда можно вывести соотношение $\kappa^2 = \alpha' g_{YM}^2/2$, справедливое в теории гетеротической струны¹⁾.

В сущности с помощью той же самой техники можно построить амплитуды, в которых перемешаны частицы сразу трех типов: из гравитационного сектора, нейтральные и заряженные. Как и прежде, вычисление амплитуд с более чем четырьмя внешними линиями принципиальных трудностей не содержит, но явные формулы могут оказаться совершенно неудобоваримыми. Истинной целью подобных вычислений может быть лишь желание глубже понять структуру самой теории, а также убедиться, что выписанным формальным выражениям действительно соответствуют корректно определенные математические величины.

¹⁾ Когда шесть измерений компактифицируются на пространство с характерным объемом V , то эффективные четырехмерные константы связи будут $\kappa_4 \sim \kappa/\sqrt{V}$ и $g_4 \sim g/\sqrt{V}$. Если предположить, что $g_4 \sim 1$, а κ_4 описывает гравитационное взаимодействие с константой порядка ньютоновской, то мы видим, что α' должна быть порядка квадрата планковской длины (10^{-33} — 10^{32} см).

7.5. Резюме

Мы описали метод вычисления S -матричных элементов в дреvesном приближении для любой из известных теорий струн и рассмотрели ряд примеров. Все амплитуды представлялись в виде средних от произведений вершинных операторов. Эти формулы представляют собой прямое обобщение правил Фейнмана для обычных полевых теорий с одной, но весьма существенной оговоркой: никаких лагранжианов, из которых бы следовали эти правила, предъявлено не было. Источником нашей уверенности в правильности этих формул служило то обстоятельство, что они обладали свойством факторизации, необходимым для унитарности на дреvesном уровне, и имели реджевскую асимптотику.

При рассмотрении дреvesных амплитуд открытой струны фундаментальную роль играла группа $SL(2, R)$, состоящая из взаимно однозначных конформных отображений верхней полуплоскости на себя. Генераторы этой группы, образующие подалгебру в алгебре Вирасоро, не меняют вакуумное состояние. Соответственно, группа $SL(2, C)$, т. е. группа конформных взаимно однозначных отображений на себя всей расширенной (включая бесконечно удаленную точку) комплексной плоскости, играет ту же роль для амплитуд замкнутой струны. Чтобы избежать появления бесконечного фактора, равного объему этих групп, необходимо фиксировать на мировой поверхности координаты испускания любых трех частиц. В операторной конструкции автоматически заложен вполне конкретный выбор этих точек ($Z_1 = \infty, Z_2 = 1, Z_n = 0$).

Диаграммы для открытой струны циклически симметричны по всем внешним линиям, и чтобы получить полную амплитуду, необходимо просуммировать с подходящими теоретико-групповыми коэффициентами по всем циклически неэквивалентным перестановкам. Напротив, диаграммы для замкнутых струн полностью симметричны по всем внешним линиям, что не оставляет возможности для включения каких-либо групповых факторов. Формулы для амплитуд замкнутой струны устроены почти как прямое произведение двух амплитуд открытой струны, причем один фактор связан с правыми, а другой — с левыми модами. В частности, в каждом из двух секторов действует по одному $SL(2, R)$ -фактору, и (например) бозонные вершинные операторы имеют конформную размерность (1,1).

Все результаты этой главы можно получить и рядом других способов: с помощью континуального интеграла, описанного в гл. 1, функциональными методами гл. 11 или из струнной теории поля в калибровке светового конуса. Можно надеяться, что

в конечном счете существует и ковариантная полевая формулировка или какой-то подходящий ее эквивалент.

Приложение 7.A. Метод когерентных состояний и корреляционные функции

В этом приложении мы докажем (7.1.64) и еще несколько близких к ней формул. Как будет ясно внимательному читателю, рассматриваемые здесь соотношения весьма похожи на те, с которыми мы встречались в разд. 3.2.4 при обсуждении процедуры бозонизации.

Начнем с тождества, которое справедливо для любой пары операторов A и B , линейных по операторам рождения и уничтожения гармонического осциллятора:

$$\langle : e^A :: e^B : \rangle = e^{\langle AB \rangle}. \quad (7.A.1)$$

Здесь $\langle \dots \rangle$ — это сокращенная запись среднего по основному состоянию $\langle 0 | \dots | 0 \rangle$. Если есть не один, а много гармонических осцилляторов, то из условия линейности следует, что как правая, так и левая части этого тождества распадаются на произведение факторов, каждый из которых связан только с одним осциллятором. Таким образом, достаточно доказать эту формулу для случая одного осциллятора, т. е., положив $A = c_1 a^\dagger + c_2 a$ и $B = c_3 a^\dagger + c_4 a$, мы должны убедиться в том, что

$$\langle 0 | e^{c_2 a} e^{c_1 a^\dagger} e^{c_4 a} e^{c_3 a^\dagger} | 0 \rangle = e^{c_2 c_3}. \quad (7.A.2)$$

Легко доказать тождество (7.A.2) с помощью совершенно элементарных рассуждений, однако вместо этого мы опишем технику, в основе которой лежит понятие когерентного состояния и которая пригодится нам и в последующих главах. Определим когерентное состояние $|\lambda\rangle$ формулой

$$|\lambda\rangle = \exp(\lambda a^\dagger) | 0 \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{\sqrt{n!}} | n \rangle, \quad (7.A.3)$$

где $|n\rangle$ — нормированный вектор из обычного базиса чисел заполнения: $a^\dagger a | n \rangle = n | n \rangle$ и $\langle m | n \rangle = \delta_{mn}$. Заметим, в частности, что $|0\rangle = |0\rangle$. Когерентные состояния являются собственными векторами понижающего оператора a ,

$$a |\lambda\rangle = \lambda |\lambda\rangle, \quad (7.A.4)$$

что легко проверить с помощью $[a, a^\dagger] = 1$. Кроме того,

$$e^{\lambda_1 a} | \lambda_2 \rangle = e^{\lambda_1 \lambda_2} | \lambda_2 \rangle, \quad (7.A.5)$$

и следовательно,

$$(\mu | \lambda) = (0 | e^{\mu^* a} | \lambda) = e^{\mu^* \lambda}. \quad (7.A.6)$$

Из этой формулы прямо вытекает искомое равенство (7.A.2).
Еще одно полезное тождество — это

$$z^{a^\dagger a} | \lambda \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda z)^n}{\sqrt{n!}} | n \rangle = | \lambda z \rangle; \quad (7.A.7)$$

оно прямо следует из определения $| \lambda \rangle$.

Напомним, что

$$X^\mu(y) = x^\mu - ip^\mu \log y + i \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \alpha_n^\mu y^{-n}, \quad (7.A.8)$$

а часть тахионного вершинного оператора, связанная с ненулевыми модами, это

$$W_0(k, y) = \exp\left(k \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \alpha_{-n} y^n\right) \exp\left(-k \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \alpha_n y^{-n}\right). \quad (7.A.9)$$

И, следовательно, соответствующая часть корреляционной функции произведения двух вертексов равна

$$\langle W_0(k_1, y_1) W_0(k_2, y_2) \rangle = (1 - y_2/y_1)^{k_1 \cdot k_2}. \quad (7.A.10)$$

Простейший способ получить эту формулу — воспользоваться (7.A.1) и тождеством

$$\begin{aligned} \left\langle \left(\sum_1^{\infty} \frac{\alpha_n^\mu}{n} y_1^{-n} \right) \left(\sum_1^{\infty} \frac{\alpha_{-n}^\nu}{n} y_2^n \right) \right\rangle &= \eta^{\mu\nu} \sum_1^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{y_2}{y_1} \right)^n = \\ &= -\eta^{\mu\nu} \log(1 - y_2/y_1), \end{aligned} \quad (7.A.11)$$

справедливым при $|y_2| < |y_1|$.

Формула (7.A.1) допускает обобщение

$$\langle : e^{A_1} :: e^{A_2} :: \dots :: e^{A_M} : \rangle = \exp \left[\sum_{i < j} \langle A_i A_j \rangle \right], \quad (7.A.12)$$

в чем нетрудно убедиться с помощью только что описанного метода когерентных состояний, и следовательно, обобщением (7.A.10) будет

$$\langle W_0(k_1, y_1) \dots W(k_M, y_M) \rangle = \prod_{i < j} (1 - y_j/y_i)^{k_i \cdot k_j}. \quad (7.A.13)$$

Рассмотрим теперь вклад нулевых мод. Для случая тахионных вертексов он имеет вид

$$\begin{aligned} \langle Z_0(k_1, y_1) Z_0(k_2, y_2) \dots Z_0(k_M, y_M) \rangle &= \\ &= \left(\prod y_i \right) \langle e^{ik_1 \cdot x} y_1^{k_1 \cdot p} e^{ik_2 \cdot x} y_2^{k_2 \cdot p} \dots e^{ik_M \cdot x} y_M^{k_M \cdot p} \rangle. \end{aligned} \quad (7.A.14)$$

Но

$$\begin{aligned} e^{ik_M \cdot x} y_M^{k_M \cdot p} | 0 \rangle &= | k_M \rangle, \\ e^{ik_{M-1} \cdot x} y_{M-1}^{k_{M-1} \cdot p} | k_M \rangle &= y_{M-1}^{k_{M-1} \cdot k_M} | k_{M-1} + k_M \rangle \end{aligned} \quad (7.A.15)$$

и так далее. В итоге получаем

$$\langle Z_0(1) \dots Z(M) \rangle = \left(\prod y_i \right) \prod_{i < j} y_i^{k_i \cdot k_j}. \quad (7.A.16)$$

Объединив эту формулу с формулой (7.A.13), получаем

$$\left\langle \frac{V_0(k_1, y_1)}{y_1} \frac{V_0(k_2, y_2)}{y_2} \dots \frac{V_0(k_M, y_M)}{y_M} \right\rangle = \prod_{i < j} (y_i - y_j)^{k_i \cdot k_j}, \quad (7.A.17)$$

что и утверждалось в (7.1.73).

Тот факт, что в правую часть (7.A.17) входят лишь разности $y_i - y_j$, можно понять следующим образом. Утверждение, что конформная размерность $V(y)$ равна единице, означает (поскольку $\partial/\partial\tau = iy\partial/\partial y$), что

$$[L_m, V(y)] = y^m \left(y \frac{d}{dy} + m \right) V(y) = y \frac{d}{dy} [y^m V(y)]. \quad (7.A.18)$$

В частности, при $m = -1$

$$[L_{-1}, V(y)/y] = \frac{d}{dy} [V(y)/y]. \quad (7.A.19)$$

Следовательно, при общем преобразовании L_{-1} имеем

$$\frac{V(y_i)}{y_i} \rightarrow e^{\lambda L_{-1}} \frac{V(y_i)}{y_i} e^{-\lambda L_{-1}} = \frac{V(y_i + \lambda)}{y_i + \lambda}. \quad (7.A.20)$$

При этом корреляционная функция (7.A.17) не меняется в силу $SL(2, R)$ -инвариантности вакуума, а это значит, что окончательный результат может зависеть только от разностей $y_i - y_j$, если для вертексов $J = 1$.

Рассмотрим теперь, что произойдет при перестановке двух соседних вершинных операторов $V(i)$ и $V(i+1)$ в (7.A.17). С формальной точки зрения, весь эффект сведется к замене $(y_i - y_{i+1})^{k_i \cdot k_{i+1}}$ на $(y_{i+1} - y_i)^{k_i \cdot k_{i+1}}$ в правой части. Однако тут имеется одно затруднение: суммируемые при этом ряды, такие

как в (7.A.11), сходятся лишь при $|y_i| > |y_{i+1}|$ в первом случае и при $|y_{i+1}| > |y_i|$ — во втором. Чтобы придать всей формуле точный смысл, необходимо параллельно с перестановкой операторов сделать аналитическое продолжение функции $(y_i - y_{i+1})^{k_i \cdot k_{i+1}}$ из области $y_i > y_{i+1}$ в $y_i < y_{i+1}$. При этом мы должны решить, с какой стороны обходить особую точку при $y_i = y_{i+1}$. Мы примем, что

$$(y_i - y_{i+1})^{k_i \cdot k_{i+1}} \rightarrow e^{i\pi k_i \cdot k_{i+1}} (y_i - y_{i+1})^{k_i \cdot k_{i+1}}. \quad (7.A.21)$$

Иногда полагают

$$\langle X^\mu(y_1) X^\nu(y_2) \rangle = -\eta^{\mu\nu} \log(y_1 - y_2) \lambda \quad (7.A.22)$$

в качестве обобщения (7.A.11), учитывающего и вклад нулевых мод. Здесь λ — некий параметр инфракрасного обрезания, который сокращается во всех действительно хорошо определенных формулах. Формулу (7.A.22) лучше всего рассматривать как мнемоническое правило для вывода (7.A.17) из (7.A.12). В этом же смысле производные (7.A.22) задают корреляционные функции для производных \dot{X}^μ . Например (обозначая точкой производную по τ и имея в виду, что $\partial/\partial\tau = iy\partial/\partial y$),

$$\left\langle \frac{\dot{X}^\mu(y_1)}{y_1} X^\nu(y_2) \right\rangle = -\frac{i\eta^{\mu\nu}}{y_1 - y_2}, \quad (7.A.23)$$

$$\left\langle \frac{\dot{X}^\mu(y_1)}{y_1} \frac{\dot{X}^\nu(y_2)}{y_2} \right\rangle = \frac{\eta^{\mu\nu}}{(y_1 - y_2)^2}. \quad (7.A.24)$$

Для доказательства (7.1.49) необходима формула, несколько более общая, чем (7.A.1), а именно

$$: e^A : : e^B : = : e^{A+B} : e^{(AB)}. \quad (7.A.24)$$

Ее нетрудно доказать с помощью тех же формул для когерентных состояний. Поскольку все выражение, как и прежде, распадается на множители, отвечающие отдельным осцилляторам, то достаточно ограничиться рассмотрением одной моды. С помощью этой формулы мы можем записать

$$V_0(k_1, y_1) V_0(k_2, y_2) = : V_0(k_1, y_1) V_0(k_2, y_2) : e^{-\langle k_1 \cdot X(y_1), k_2 \cdot X(y_2) \rangle}, \quad (7.A.25)$$

и аналогично при замене $1 \leftrightarrow 2$. Но поскольку

$$: V_0(k_1, y_1) V_0(k_2, y_2) : = : V_0(k_2, y_2) V_0(k_1, y_1) :, \quad (7.A.26)$$

то

$$V_0(k_1, y_1) V_0(k_2, y_2) = V_0(k_2, y_2) V_0(k_1, y_1) e^{-\langle [k_1 \cdot X(y_1), k_2 \cdot X(y_2)] \rangle}. \quad (7.A.27)$$

Показатель в (7.A.27) определяется так:

$$\begin{aligned} C(y_1, y_2) &= [X(y_1), X(y_2)] = \\ &= \log(y_1/y_2) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} [(y_1/y_2)^n - (y_2/y_1)^n] = \\ &= \log(y_1/y_2) - \log(1 - y_1/y_2) + \log(1 - y_2/y_1) = \\ &= \log(-1) = i\pi(1 + 2K), \end{aligned} \quad (7.A.28)$$

где K — целое число. Чтобы явно вычислить K , расположим обе точки y_1, y_2 в разных местах на единичной окружности, так что оба ряда будут сходящимися. Тогда все фазы определяются, коль скоро мы фиксируем определенную ветвь логарифма. Выбрав ветвь, для которой мнимая часть заключена между $-i\pi$ и $+i\pi$, получаем

$$C(y_1, y_2) = i\pi e(\arg y_1 - \arg y_2). \quad (7.A.29)$$

Если теперь обратно спроектировать точки с единичной окружности на вещественную прямую, то мы получаем формулу (7.1.49):

$$V_0(k_1, y_1) V_0(k_2, y_2) = V_0(k_2, y_2) V_0(k_1, y_1) \exp[\pi i k_1 \cdot k_2 e(y_1 - y_2)]. \quad (7.A.30)$$