

АКАДЕМИЯ НАУК СССР  
ОРДЕНА ЛЕНИНА ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ ИМЕНИ А. Ф. ИОФЕ

Д. А. ВАРШАЛОВИЧ, А. Н. МОСКАЛЕВ, В. К. ХЕРСОНСКИЙ

# КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ УГЛОВОГО МОМЕНТА

АППАРАТ НЕПРИВОДИМЫХ ТЕНЗОРОВ  
СФЕРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ  
*3nj*-СИМВОЛЫ



ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»  
ЛЕНИНГРАДСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ  
ЛЕНИНГРАД · 1975

**Квантовая теория углового момента.** Варшалович Д. А. Москалев А. Н., Херсонский В. К. Изд-во «Наука», Ленингр. отд., Л., 1975, 1 — 439.

Книга представляет собой справочное издание по квантовой теории углового момента и аппарату неприводимых тензоров. Она содержит как основные результаты теории, так и обширный материал, необходимый для практических расчетов. Детально обсуждаются различные математические свойства  $D$ -функций Вигнера, спиноров, сферических функций и шаровых тензоров, коэффициентов Клебша—Гордана,  $6j$ - и  $9j$ -символов, а также различные суммы и интегралы от произведений этих функций. Даны алгебраические и численные таблицы. Книга предназначена для специалистов, работающих в области атомной, молекулярной и ядерной физики, квантовой химии, кинетики, физики плазмы и квантовой оптики и радиофизики. Она может быть полезна также для студентов старших курсов физических специальностей. Библ. — 130 назв. рис. — 16, табл. — 78.

Ответственный редактор  
Д. А. ВАРШАЛОВИЧ

---

# ПРЕДИСЛОВИЕ

---

Эта книга посвящена одному из основных разделов квантовой механики — теории углового момента и аппарату неприводимых тензоров. Исходные идеи теории были высказаны М. Борном, В. Гайзенбергом, П. Иорданом, П. Дираком и В. Паули. Однако математический аппарат в его современном виде разработан Е. Вигнером и Дж. Рака, которые применили к задачам квантовой механики методы теории групп. Этот аппарат оказался весьма универсальным и в настоящее время широко используется не только в атомной и молекулярной физике, но и в теории ядра и элементарных частиц.

Укажем круг основных задач, при решении которых успешно используется эта теория, — расчет атомной, молекулярной, ядерной структур; вычисление энергии основных и возбужденных состояний; определение тонкого и сверхтонкого расщеплений уровней различных квантовомеханических систем; вычисление вероятностей радиационных переходов и расчет сечений различных процессов, включая упругое и неупругое рассеяния, всевозможные распады и реакции (химические и ядерные); определение угловых распределений и поляризации частиц.

В настоящее время этот аппарат находит все более широкое применение в решении практических задач в связи с развитием таких областей, как квантовая химия, кинетика, физика плазмы, квантовая оптика, радиофизика и астрофизика.

Основные идеи и выводы теории углового момента изложены в книгах М. Роуза [31], А. Эдмондса [16], У. Фано и Дж. Рака [18], А. П. Юдаса, И. Б. Левинсона, В. В. Ванагаса [44], А. П. Юдаса и А. А. Бандзайтиса [45], Д. Бринка и Дж. Сэчлера [9]. Однако значительное число формул и соотношений, необходимых для практических расчетов, не вошло в эти книги, а разбросано по разным изданиям, приведено в виде приложений к статьям, посвященным совсем другим вопросам, так что найти их довольно трудно. Еще большая трудность в использовании результатов работ состоит в том, что каждый автор применяет свою систему фаз, исходных определений и обозначений.

Авторы данной книги ставили целью собрать и представить в единой системе фаз и определений обширный материал по квантовой теории углового момента. Поэтому в книгу включены не только основные результаты теории, но и многочисленные формулы и соотношения, необходимые для практической работы.

Настоящее издание носит справочный характер. Это определяет лаконичный характер изложения материала. Большая часть приведенных формул и соотношений дается без доказательств. Подробный их вывод можно найти в литературе, список которой помещен в конце книги. Он разделен на три части: в первой указаны книги и обзоры, во второй — статьи по отдельным вопросам, в третьей — таблицы. В книге принята следующая рубрикация: глава, параграф, пункт. Многие главы можно читать независимо от остальных. Параграфы имеют двойную нумерацию, первое число означает номер главы, второе — номер параграфа. Сквозная нумерация формул ведется в пределах одного параграфа. При ссылке на формулу этого же параграфа указывается только ее номер, например (3), (27), на формулы из другого параграфа — номер главы, параграфа и формулы, например 4.2 (17). Аналогичная система принята при ссылках на отдельные пункты, например 4.2.5. Для удобства в конце книги приведен список всех используемых обозначений с указанием страницы, где дано определение соответствующих величин.

Авторы полагают, что широкий круг специалистов найдет здесь немало нового и полезного для своей работы. Материал сформулирован и расположен так, что им смогут пользоваться также лица, менее знакомые с теорией.

---

# ВВЕДЕНИЕ

---

Величины, описывающие физическую систему, удобно классифицировать по характеру их преобразований при повороте и инверсии системы координат в трехмерном пространстве, т. е. по отношению к преобразованиям группы  $R_3$  трехмерных вращений и группы инверсии  $P_3$ , являющихся подгруппами  $O_3$  — полной ортогональной группы преобразований трехмерного пространства. Такая классификация существенно упрощает вычисление различных физических величин (средних значений энергии, электрических и магнитных мультипольных моментов, вероятностей переходов и т. д.).

Трансформационные свойства величин относительно преобразований группы  $R_3$  проявляются либо при поворотах самой физической системы относительно фиксированных координатных осей, либо при повороте координатных осей, связанных с системой отсчета, при неподвижной физической системе.

Преобразование инверсии  $P_3$  определяет поведение различных величин при переходе из правой системы координат в левую или обратно.

Существует большой класс физических величин, которые по своей природе являются инвариантными относительно преобразования системы координат. В частности, все свойства замкнутой физической системы не должны зависеть от поворотов системы отсчета. Этот факт является проявлением изотропии физического пространства. Как следствие этого фундаментального свойства пространства интегралом движения такой физической системы будет ее полный угловой момент  $J$  (момент количества движения).

Аналогичная ситуация имеет место в отношении инверсии системы координат. За исключением процессов, обусловленных слабым  $\beta$ -распадным взаимодействием, описание всех процессов — атомных, молекулярных и ядерных — не зависит от того, используется правая или левая система координат. Как следствие такой зеркальной симметрии, состояния атомов, молекул, ядер и элементарных частиц можно характеризовать определенной четностью.

Точнее говоря, квантовая система характеризуется набором четырех коммутирующих операторов: гамильтонианом  $\hat{H}$ , оператором квадрата углового момента  $\hat{J}^2$ , оператором его проекции на произвольно выбранную ось квантования  $\hat{J}_z$  и оператором четности  $\hat{P}$ , которые и определяют ее волновую функцию  $\Psi_{\epsilon\pi\alpha jm}(r)$  в соответствии с системой четырех уравнений

$$\begin{aligned}\hat{H}\Psi_{\epsilon\pi\alpha jm}(r) &= \epsilon\Psi_{\epsilon\pi\alpha jm}(r), \\ \hat{P}\Psi_{\epsilon\pi\alpha jm}(r) &= \pi\Psi_{\epsilon\pi\alpha jm}(r), \\ \hat{J}^2\Psi_{\epsilon\pi\alpha jm}(r) &= j(j+1)\Psi_{\epsilon\pi\alpha jm}(r), \\ \hat{J}_z\Psi_{\epsilon\pi\alpha jm}(r) &= m\Psi_{\epsilon\pi\alpha jm}(r).\end{aligned}$$

Индексом  $\alpha$  обозначена совокупность всех остальных квантовых чисел, соответствующих внутренним степеням свободы,  $r$  представляет совокупность всех аргументов функции.

Величины  $\epsilon$ ,  $\pi$ ,  $j$ ,  $m$  будут интегралами движения не только замкнутой системы, но и системы, находящейся во внешнем поле, обладающем центральной симметрией. Даже в случае нецентральных полей  $\epsilon\pi jm$ -представление оказывается весьма удобным для практических вычислений.



Каждому из значений  $\epsilon\pi aj$  отвечает  $(2j+1)$  функция, соответствующая различным значениям квантового числа  $m$ . Они описывают состояния системы, различающиеся лишь ориентацией в пространстве.

При повороте системы координат  $(2j+1)$  функции  $\Psi_{\epsilon\pi ajm}(r)$  с различными  $m$  преобразуются линейно друг через друга, не затрагивая функций с другими значениями квантовых чисел:

$$\Psi_{\epsilon\pi ajm'}(r') = \sum_m \Psi_{\epsilon\pi ajm}(r) D_{mm'}^j(\alpha, \beta, \gamma),$$

где коэффициенты преобразования  $D_{mm'}^j(\alpha, \beta, \gamma)$  являются элементами матрицы конечного вращения в  $j$ -представлении. Эти матричные элементы представляют собой функции углов Эйлера  $\alpha, \beta, \gamma$ , определяющих поворот системы координат. Они называются обобщенными сферическими функциями или  $D$ -функциями Вигнера.

Если система с угловым моментом  $j$  и его проекцией  $m$  состоит из двух подсистем с моментами  $j_1$  и  $j_2$ , то ее волновая функция  $\Psi_{j_1 j_2 jm}$  может быть построена из волновых функций подсистем по формуле

$$\Psi_{j_1 j_2 jm}(r_1, r_2) = \sum_{m_1, m_2} C_{j_1 m_1 j_2 m_2}^{jm} \Psi_{j_1 m_1}(r_1) \Psi_{j_2 m_2}(r_2).$$

Величины  $C_{j_1 m_1 j_2 m_2}^{jm}$ , называемые коэффициентами векторного сложения (коэффициентами Клебша—Гордана), играют важную роль в квантовой механике. С их помощью можно построить волновые функции сложных систем (ядер, атомов, молекул). Однако при этом возможны различные схемы связи угловых моментов. Преобразование волновых функций при переходе от одной схемы связи к другой осуществляется с помощью  $6j$ -,  $9j$ - и других  $3nj$ -символов.

Волновые функции  $\Psi_{jm}$  являются частными случаями неприводимых тензоров. Понятие неприводимого тензора одно из основных в теории углового момента. Неприводимым тензорам ранга  $\lambda$  называется совокупность любых  $(2\lambda+1)$  величин  $\mathfrak{M}_{\lambda\mu}$ , преобразующихся при повороте системы координат по закону

$$\mathfrak{M}_{\lambda\mu} = \sum_{\mu'} \mathfrak{M}_{\lambda\mu'} D_{\mu'\mu}^{\lambda}(\alpha, \beta, \gamma).$$

Многие физические величины сами являются неприводимыми тензорами. Например, энергия — тензор нулевого ранга (скаляр), спин и магнитный момент — тензор первого ранга (вектор), квадрупольный момент — тензор второго ранга и т. д. В общем случае любые физические величины и соответствующие им операторы могут быть представлены в виде линейной комбинации неприводимых тензоров (мультипольное разложение).

Использование неприводимых тензоров для описания физических величин существенно облегчает задачу вычисления матричных элементов, т. е. выражений типа

$$\langle \epsilon' \pi' a' j' m' | \hat{\mathfrak{M}}_{\lambda\mu} | \epsilon \pi a j m \rangle = \int \Psi_{\epsilon' \pi' a' j' m'}^*(r) \hat{\mathfrak{M}}_{\lambda\mu} \Psi_{\epsilon \pi a j m}(r) dr,$$

где интегрирование понимается в обобщенном смысле — интегрирование по всем непрерывным переменным и суммирование по дискретным переменным.

Согласно теореме Вигнера-Эккарта, вся зависимость таких матричных элементов от ориентации системы координат, т. е. от индексов  $m, m', \mu$ , определяется коэффициентом Клебша-Гордана

$$\langle \epsilon' \pi' a' j' m' | \hat{\mathfrak{M}}_{\lambda\mu} | \epsilon \pi a j m \rangle = C_{j m \lambda \mu}^{j' m'} \langle \epsilon' \pi' a' j' || \hat{\mathfrak{M}}_{\lambda} || \epsilon \pi a j \rangle.$$

Инвариантный множитель  $\langle \epsilon' \pi' a' j' || \hat{\mathfrak{M}}_{\lambda} || \epsilon \pi a j \rangle$  называется приведенным матричным элементом. Теорема Вигнера-Эккарта позволяет свести задачи вычисления вероятностей процессов, угловых распределений, поляризаций и т. д. к вычислению стандартных сумм произведений коэффициентов векторного сложения.

Все это делает аппарат квантовой теории углового момента универсальным и чрезвычайно удобным для проведения различных практических расчетов.

# ЭЛЕМЕНТЫ ВЕКТОРНОГО И ТЕНЗОРНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

Теория угловых моментов и неприводимых тензоров, по существу, является развитием классического векторного и тензорного исчисления. В настоящей главе приведены определения и основные соотношения векторного и тензорного исчисления, используемые в последующих главах. Подробное изложение этих вопросов имеется в книгах [11, 34, 35].

## 1.1. СИСТЕМЫ КООРДИНАТ. ОРТЫ

В квантовой теории углового момента широко используются декартовы, сферические и циклические координаты.

### 1. Декартовы координаты

В декартовой системе координат положение точки в пространстве определяется заданием трех чисел  $x, y, z$ , т. е. трех расстояний до координатных плоскостей (рис. 1.1). Радиус-вектор данной точки  $\mathbf{r}$  может быть записан в виде

$$\mathbf{r} = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z. \quad (1)$$

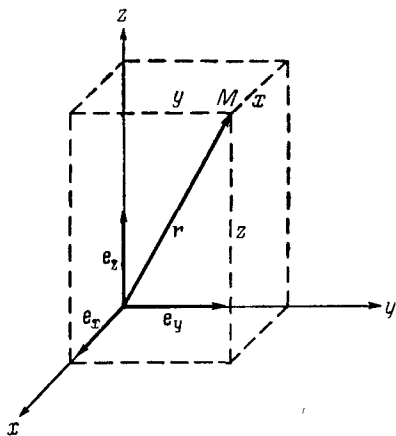


Рис. 1.1. Декартова система координат.

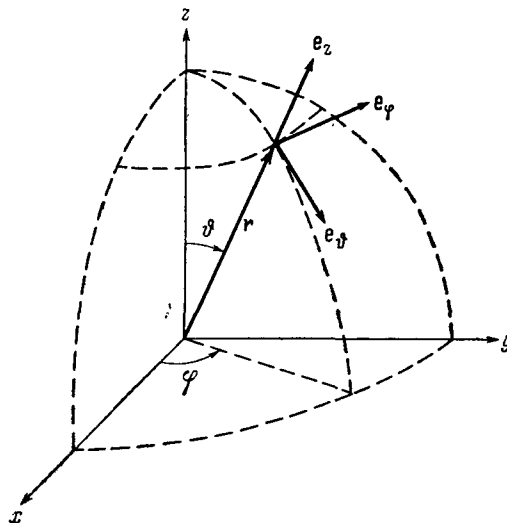


Рис. 1.2. Сферическая система координат.

Ковариантные декартовы орты  $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$  образуют вещественный ортонормированный базис

$$\mathbf{e}_i \mathbf{e}_k = \delta_{ik}, \quad (i, k = x, y, z), \quad (2)$$

$$\mathbf{e}_i^* = \mathbf{e}_i, \quad (i = x, y, z). \quad (3)$$

Контравариантные декартовы орты  $\mathbf{e}^i$  ( $i = x, y, z$ ) совпадают с ковариантными

$$\mathbf{e}^i = \mathbf{e}_i. \quad (4)$$

В дальнейшем будет использоваться только *правая система координат*. В правой системе координат

$$[\mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_k] = \varepsilon_{ikl} \mathbf{e}_l, \quad (i, k, l = x, y, z), \quad (5)$$

$$\varepsilon_{ikl} = [\mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_k] \cdot \mathbf{e}_l. \quad (6)$$

В развернутой записи

$$[\mathbf{e}_x \times \mathbf{e}_y] = \mathbf{e}_z, \quad [\mathbf{e}_y \times \mathbf{e}_z] = \mathbf{e}_x, \quad [\mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_x] = \mathbf{e}_y. \quad (7)$$

## 2. Сферические координаты

В сферической системе координат положение точки в пространстве определяется величинами  $r$ ,  $\vartheta$ ,  $\varphi$ , где  $r$  — длина радиуса-вектора,  $\vartheta$  — полярный угол,  $\varphi$  — азимутальный угол (рис. 1.2). Углы  $\vartheta$  и  $\varphi$  называются *сферическими углами* вектора  $\mathbf{r}$ . Декартовы и сферические координаты связаны соотношениями

$$\begin{aligned} x &= r \sin \vartheta \cos \varphi, & r &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, & 0 &\leq r < \infty, \\ y &= r \sin \vartheta \sin \varphi, & \vartheta &= \arccos \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, & 0 &\leq \vartheta \leq \pi, \\ z &= r \cos \vartheta, & \varphi &= \arccos \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \left(\operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x}\right), & 0 &\leq \varphi < 2\pi. \end{aligned} \quad (8)$$

Радиус-вектор  $\mathbf{r}$  записывается в виде

$$\mathbf{r} = r \mathbf{e}_r. \quad (9)$$

*Ковариантные сферические орты*  $\mathbf{e}_r$ ,  $\mathbf{e}_\vartheta$ ,  $\mathbf{e}_\varphi$  изображены на рис. 1.2. Они образуют вещественный ортонормированный базис

$$\mathbf{e}_a \mathbf{e}_\beta = \delta_{a\beta}, \quad (a, \beta = r, \vartheta, \varphi), \quad (10)$$

$$\mathbf{e}_a^* = \mathbf{e}_a, \quad (a = r, \vartheta, \varphi). \quad (11)$$

*Контравариантные сферические орты*  $\mathbf{e}^r$ ,  $\mathbf{e}^\vartheta$ ,  $\mathbf{e}^\varphi$  совпадают с ковариантными

$$\mathbf{e}^a = \mathbf{e}_a \quad (a = r, \vartheta, \varphi). \quad (12)$$

Орты  $\mathbf{e}_r$ ,  $\mathbf{e}_\vartheta$ ,  $\mathbf{e}_\varphi$  образуют правую систему

$$[\mathbf{e}_r \times \mathbf{e}_\vartheta] = \mathbf{e}_\varphi, \quad [\mathbf{e}_\vartheta \times \mathbf{e}_\varphi] = \mathbf{e}_r, \quad [\mathbf{e}_\varphi \times \mathbf{e}_r] = \mathbf{e}_\vartheta. \quad (13)$$

Сферические орты  $\mathbf{e}_r$ ,  $\mathbf{e}_\vartheta$  и  $\mathbf{e}_\varphi$  в отличие от декартовых ортов зависят от углов  $\vartheta$ ,  $\varphi$ , что необходимо учитывать при дифференцировании векторов.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} \mathbf{e}_r &= 0, & \frac{\partial}{\partial r} \mathbf{e}_\vartheta &= 0, & \frac{\partial}{\partial r} \mathbf{e}_\varphi &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial \vartheta} \mathbf{e}_r &= \mathbf{e}_\vartheta, & \frac{\partial}{\partial \vartheta} \mathbf{e}_\vartheta &= -\mathbf{e}_r, & \frac{\partial}{\partial \vartheta} \mathbf{e}_\varphi &= 0, \end{aligned} \quad (14)$$

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} \mathbf{e}_r = \mathbf{e}_\varphi \sin \vartheta, \quad \frac{\partial}{\partial \varphi} \mathbf{e}_\vartheta = \mathbf{e}_\varphi \cos \vartheta, \quad \frac{\partial}{\partial \varphi} \mathbf{e}_\varphi = -\mathbf{e}_r \sin \vartheta - \mathbf{e}_\vartheta \cos \vartheta.$$

Действие оператора  $\nabla$  (см. 1.3) на сферические орты дается формулами

$$(\nabla \cdot \mathbf{e}_r) = \frac{2}{r}, \quad (\nabla \cdot \mathbf{e}_\vartheta) = \frac{1}{r} \operatorname{ctg} \vartheta, \quad (\nabla \cdot \mathbf{e}_\varphi) = 0, \quad (15)$$

$$[\nabla \times \mathbf{e}_r] = 0, \quad [\nabla \times \mathbf{e}_\vartheta] = \frac{1}{r} \mathbf{e}_\varphi, \quad [\nabla \times \mathbf{e}_\varphi] = \frac{1}{r} \operatorname{ctg} \vartheta \mathbf{e}_r - \frac{1}{r} \mathbf{e}_\vartheta. \quad (16)$$

## 3. Циклические координаты

В теории угловых моментов широко используются циклические координаты.

*Ковариантные циклические координаты*  $x_\mu$ , где  $\mu = \pm 1, 0$ , определяются соотношениями

$$\begin{aligned} x_{+1} &= -\frac{1}{\sqrt{2}}(x + iy) = -\frac{1}{\sqrt{2}}r \sin \vartheta e^{i\varphi}, \\ x_0 &= z = r \cos \vartheta, \\ x_{-1} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(x - iy) = \frac{1}{\sqrt{2}}r \sin \vartheta e^{-i\varphi}. \end{aligned} \quad (17)$$

Контравариантные циклические координаты  $x^\mu$ , где  $\mu = \pm 1, 0$ , определяются следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} x^{+1} &= -\frac{1}{\sqrt{2}}(x - iy) = -\frac{1}{\sqrt{2}}r \sin \vartheta e^{-i\varphi}, \\ x^0 &= z = r \cos \vartheta, \\ x^{-1} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(x + iy) = \frac{1}{\sqrt{2}}r \sin \vartheta e^{i\varphi}. \end{aligned} \quad (18)$$

Связь между ковариантными и контравариантными циклическими координатами имеет вид

$$\begin{aligned} x^\mu &= (-1)^\mu x_{-\mu}, & x_\mu &= (-1)^\mu x^{-\mu}, & (\mu = \pm 1, 0), \\ x^\mu &= x_\mu^*, & x_\mu &= x^{\mu*}, \end{aligned} \quad (19)$$

Циклические ковариантные орты  $e_\mu$ , где  $\mu = \pm 1, 0$ , определяются соотношениями

$$\begin{aligned} e_{+1} &= -\frac{1}{\sqrt{2}}(e_x + ie_y), \\ e_0 &= e_z, \\ e_{-1} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(e_x - ie_y). \end{aligned} \quad (20)$$

Циклические контравариантные орты  $e^\mu$ , где  $\mu = \pm 1, 0$ , определяются следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} e^{+1} &= -\frac{1}{\sqrt{2}}(e_x - ie_y), \\ e^0 &= e_z, \\ e^{-1} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(e_x + ie_y). \end{aligned} \quad (21)$$

Ковариантные и контравариантные циклические орты связаны между собой так:

$$\begin{aligned} e^\mu &= (-1)^\mu e_{-\mu}, & e_\mu &= (-1)^\mu e^{-\mu}, & (\mu = \pm 1, 0), \\ e^\mu &= e_\mu^*, & e_\mu &= e^{\mu*}, \end{aligned} \quad (22)$$

Циклические орты образуют комплексный ортонормированный базис

$$e_\mu e^\nu = e_\mu e_\mu^* = \delta_{\mu\nu}, \quad (\mu, \nu = \pm 1, 0). \quad (23)$$

Векторные произведения циклических ортов выражаются через коэффициенты Клебша—Гордана (см. гл. 8)

$$\begin{aligned} e_\mu \times e_\nu &= i\sqrt{2} C_{\mu\nu}^{\lambda} e_\lambda, \\ e^\mu \times e^\nu &= -i\sqrt{2} C_{\mu\nu}^{\lambda} e^\lambda, \end{aligned} \quad (\mu, \nu, \lambda = \pm 1, 0), \quad (24)$$

Эти же формулы можно записать в виде, аналогичном (5):

$$\begin{aligned} e_\mu \times e_\nu &= -i\varepsilon_{\mu\nu\lambda} e_\lambda, \\ e^\mu \times e^\nu &= i\varepsilon_{\mu\nu\lambda} e^\lambda, \end{aligned} \quad (\mu, \nu, \lambda = \pm 1, 0), \quad (25)$$

где  $\varepsilon_{\mu\nu\lambda} = +1$ , если индексы  $\mu, \nu, \lambda$  образуют четную циклическую перестановку из  $+1, 0, -1$ ;  $\varepsilon_{\mu\nu\lambda} = -1$ , когда индексы  $\mu, \nu, \lambda$  образуют нечетную перестановку из  $+1, 0, -1$ ; и  $\varepsilon_{\mu\nu\lambda} = 0$ , если хотя бы два индекса равны.

В развернутой записи

$$\begin{aligned} e_{+1} \times e_0 &= ie_{+1}, & e_0 \times e_{-1} &= ie_{-1}, & e_{+1} \times e_{-1} &= ie_0, \\ e^0 \times e^{+1} &= ie^{+1}, & e^{-1} \times e^0 &= ie^{-1}, & e^{-1} \times e^{+1} &= ie^0. \end{aligned} \quad (26)$$

Циклические ковариантные и контравариантные компоненты (см. 1.2) ортов  $e_\mu$  и  $e^\mu$  даются формулами

$$\begin{aligned} [e_\mu]_\sigma &= (-1)^\sigma \delta_{\sigma-\mu}, & [e_\mu]^\sigma &= \delta_{\sigma\mu}, \\ [e^\mu]_\sigma &= \delta_{\sigma\mu}, & [e^\mu]^\sigma &= (-1)^\sigma \delta_{\sigma-\mu}. \end{aligned} \quad (27)$$

#### 4. Спиральные орты

Из сферических ортов  $e_r$ ,  $e_\vartheta$ ,  $e_\varphi$  тоже можно образовать циклические комбинации

$$\begin{aligned} e'_{+1} &= -\frac{1}{\sqrt{2}}(e_\vartheta + ie_\varphi), & e'^{+1} &= -\frac{1}{\sqrt{2}}(e_\vartheta - ie_\varphi), \\ e'_0 &= e_r, & e'^0 &= e_r, \\ e'_{-1} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(e_\vartheta - ie_\varphi), & e'^{-1} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(e_\vartheta + ie_\varphi). \end{aligned} \quad (28)$$

Орты  $e'_\mu$  ( $\mu = \pm 1, 0$ ) будем называть *ковариантными спиральными ортами*, а орты  $e'^\mu$  ( $\mu = \pm 1, 0$ ) — *контравариантными спиральными ортами* (терминология поясняется ниже в 6.3. 6).

Для спиральных ортов  $e'_\mu$  и  $e'^\mu$  справедливы те же формулы (22)—(26), что и для циклических ортов  $e_\mu$ ,  $e^\mu$ .

#### 5. Связь между различными ортами

а. Декартовы и сферические орты

$$\begin{aligned} e_x &= e_r \sin \vartheta \cos \varphi + e_\vartheta \cos \vartheta \cos \varphi - e_\varphi \sin \varphi, \\ e_y &= e_r \sin \vartheta \sin \varphi + e_\vartheta \cos \vartheta \sin \varphi + e_\varphi \cos \varphi, \\ e_z &= e_r \cos \vartheta - e_\vartheta \sin \vartheta. \end{aligned} \quad (29)$$

Декартовы и циклические орты

$$\begin{aligned} e_x &= \frac{1}{\sqrt{2}}(e_{-1} - e_{+1}) = \frac{1}{\sqrt{2}}(e^{-1} - e^{+1}), \\ e_y &= \frac{i}{\sqrt{2}}(e_{-1} + e_{+1}) = -\frac{i}{\sqrt{2}}(e^{-1} + e^{+1}), \\ e_z &= e_0 = e^0. \end{aligned} \quad (30)$$

Декартовы и спиральные ковариантные орты

$$\begin{aligned} e_x &= -e'_{+1} \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos \vartheta \cos \varphi + i \sin \varphi) + e'_0 \sin \vartheta \cos \varphi + e'_{-1} \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos \vartheta \cos \varphi - i \sin \varphi), \\ e_y &= -e'_{+1} \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos \vartheta \sin \varphi - i \cos \varphi) + e'_0 \sin \vartheta \sin \varphi + e'_{-1} \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos \vartheta \sin \varphi + i \cos \varphi), \\ e_z &= e'_{+1} \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \vartheta + e'_0 \cos \vartheta - e'_{-1} \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \vartheta. \end{aligned} \quad (31)$$

Декартовы и спиральные контравариантные орты

$$\begin{aligned} e_x &= -e'^{+1} \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos \vartheta \cos \varphi - i \sin \varphi) + e'^0 \sin \vartheta \cos \varphi + e'^{-1} \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos \vartheta \cos \varphi + i \sin \varphi), \\ e_y &= -e'^{+1} \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos \vartheta \sin \varphi + i \cos \varphi) + e'^0 \sin \vartheta \sin \varphi + e'^{-1} \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos \vartheta \sin \varphi - i \cos \varphi), \\ e_z &= e'^{+1} \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \vartheta + e'^0 \cos \vartheta - e'^{-1} \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \vartheta. \end{aligned} \quad (32)$$

б. Сферические и декартовы орты

$$\begin{aligned} e_r &= e_x \sin \vartheta \cos \varphi + e_y \sin \vartheta \sin \varphi + e_z \cos \vartheta, \\ e_\vartheta &= e_x \cos \vartheta \cos \varphi + e_y \cos \vartheta \sin \varphi - e_z \sin \vartheta, \\ e_\varphi &= -e_x \sin \varphi + e_y \cos \varphi. \end{aligned} \quad (33)$$

Сферические и циклические ковариантные орты

$$e_r = -e_{+1} \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \vartheta e^{-i\varphi} + e_0 \cos \vartheta + e_{-1} \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \vartheta e^{i\varphi},$$

$$\mathbf{e}_\vartheta = -\mathbf{e}_{+1} \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \vartheta e^{-i\varphi} - \mathbf{e}_0 \sin \vartheta + \mathbf{e}_{-1} \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \vartheta e^{i\varphi}, \quad (34)$$

$$\mathbf{e}_\varphi = \mathbf{e}_{+1} \frac{i}{\sqrt{2}} e^{-i\varphi} + \mathbf{e}_{-1} \frac{i}{\sqrt{2}} e^{i\varphi}.$$

Сферические и циклические контравариантные орты

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_r &= -\mathbf{e}^{+1} \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \vartheta e^{i\varphi} + \mathbf{e}^0 \cos \vartheta + \mathbf{e}^{-1} \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \vartheta e^{-i\varphi}, \\ \mathbf{e}_\vartheta &= -\mathbf{e}^{+1} \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \vartheta e^{i\varphi} - \mathbf{e}^0 \sin \vartheta + \mathbf{e}^{-1} \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \vartheta e^{-i\varphi}, \\ \mathbf{e}_\varphi &= -\mathbf{e}^{+1} \frac{i}{\sqrt{2}} e^{i\varphi} - \mathbf{e}^{-1} \frac{i}{\sqrt{2}} e^{-i\varphi}. \end{aligned} \quad (35)$$

Сферические и спиральные орты

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_r &= \mathbf{e}'_0 = \mathbf{e}'^0, \\ \mathbf{e}_\vartheta &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathbf{e}'_{-1} - \mathbf{e}'_{+1}) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathbf{e}'^{-1} - \mathbf{e}'^{+1}), \\ \mathbf{e}_\varphi &= \frac{i}{\sqrt{2}} (\mathbf{e}'_{-1} + \mathbf{e}'_{+1}) = -\frac{i}{\sqrt{2}} (\mathbf{e}'^{-1} + \mathbf{e}'^{+1}). \end{aligned} \quad (36)$$

в. Циклические и декартовы орты

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_{+1} &= -\frac{1}{\sqrt{2}} (\mathbf{e}_x + i\mathbf{e}_y), & \mathbf{e}^{+1} &= -\frac{1}{\sqrt{2}} (\mathbf{e}_x - i\mathbf{e}_y), \\ \mathbf{e}_0 &= \mathbf{e}_z, & \mathbf{e}^0 &= \mathbf{e}_z, \\ \mathbf{e}_{-1} &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathbf{e}_x - i\mathbf{e}_y), & \mathbf{e}^{-1} &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathbf{e}_x + i\mathbf{e}_y). \end{aligned} \quad (37)$$

Циклические ковариантные и сферические орты

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_{+1} &= -\mathbf{e}_r \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \vartheta e^{i\varphi} - \mathbf{e}_\vartheta \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \vartheta e^{i\varphi} - \mathbf{e}_\varphi \frac{i}{\sqrt{2}} e^{i\varphi}, \\ \mathbf{e}_0 &= \mathbf{e}_r \cos \vartheta - \mathbf{e}_\vartheta \sin \vartheta, \\ \mathbf{e}_{-1} &= \mathbf{e}_r \frac{i}{\sqrt{2}} \sin \vartheta e^{-i\varphi} + \mathbf{e}_\vartheta \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \vartheta e^{-i\varphi} - \mathbf{e}_\varphi \frac{i}{\sqrt{2}} e^{-i\varphi}. \end{aligned} \quad (38)$$

Циклические контравариантные и сферические орты

$$\begin{aligned} \mathbf{e}^{+1} &= -\mathbf{e}_r \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \vartheta e^{-i\varphi} - \mathbf{e}_\vartheta \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \vartheta e^{-i\varphi} + \mathbf{e}_\varphi \frac{i}{\sqrt{2}} e^{-i\varphi}, \\ \mathbf{e}^0 &= \mathbf{e}_r \cos \vartheta - \mathbf{e}_\vartheta \sin \vartheta, \\ \mathbf{e}^{-1} &= \mathbf{e}_r \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \vartheta e^{i\varphi} + \mathbf{e}_\vartheta \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \vartheta e^{i\varphi} + \mathbf{e}_\varphi \frac{i}{\sqrt{2}} e^{i\varphi}. \end{aligned} \quad (39)$$

Циклические ковариантные и контравариантные орты

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_{+1} &= -\mathbf{e}^{-1}, & \mathbf{e}^{+1} &= -\mathbf{e}_{-1}, \\ \mathbf{e}_0 &= \mathbf{e}^0, & \mathbf{e}^0 &= \mathbf{e}_0, \\ \mathbf{e}_{-1} &= -\mathbf{e}^{+1}, & \mathbf{e}^{-1} &= -\mathbf{e}_{+1}. \end{aligned} \quad (40)$$

Циклические ковариантные и спиральные ковариантные орты

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_{+1} &= \mathbf{e}'_{+1} \frac{1 + \cos \vartheta}{2} e^{i\varphi} - \mathbf{e}'_0 \frac{\sin \vartheta}{\sqrt{2}} e^{i\varphi} + \mathbf{e}'_{-1} \frac{1 - \cos \vartheta}{2} e^{i\varphi}, \\ \mathbf{e}_0 &= \mathbf{e}'_{+1} \frac{\sin \vartheta}{\sqrt{2}} + \mathbf{e}'_0 \cos \vartheta - \mathbf{e}'_{-1} \frac{\sin \vartheta}{\sqrt{2}}, \end{aligned} \quad (41)$$

$$\mathbf{e}_{-1} = \mathbf{e}'_{+1} \frac{1 - \cos \vartheta}{2} e^{-i\varphi} + \mathbf{e}'_0 \frac{\sin \vartheta}{\sqrt{2}} e^{-i\varphi} + \mathbf{e}'_{-1} \frac{1 + \cos \vartheta}{2} e^{-i\varphi}.$$

Циклические контравариантные и спиральные ковариантные орты

$$\begin{aligned} \mathbf{e}^{+1} &= -\mathbf{e}'_{+1} \frac{1 - \cos \vartheta}{2} e^{-i\varphi} - \mathbf{e}'_0 \frac{\sin \vartheta}{\sqrt{2}} e^{-i\varphi} - \mathbf{e}'_{-1} \frac{1 + \cos \vartheta}{2} e^{-i\varphi}, \\ \mathbf{e}^0 &= \mathbf{e}'_{+1} \frac{\sin \vartheta}{\sqrt{2}} + \mathbf{e}'_0 \cos \vartheta - \mathbf{e}'_{-1} \frac{\sin \vartheta}{\sqrt{2}}, \\ \mathbf{e}^{-1} &= -\mathbf{e}'_{+1} \frac{1 + \cos \vartheta}{2} e^{i\varphi} + \mathbf{e}'_0 \frac{\sin \vartheta}{\sqrt{2}} e^{i\varphi} - \mathbf{e}'_{-1} \frac{1 - \cos \vartheta}{2} e^{i\varphi}. \end{aligned} \quad (42)$$

Циклические ковариантные и спиральные контравариантные орты

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_{+1} &= -\mathbf{e}'_{+1} \frac{1 - \cos \vartheta}{2} e^{i\varphi} - \mathbf{e}'_0 \frac{\sin \vartheta}{\sqrt{2}} e^{i\varphi} - \mathbf{e}'_{-1} \frac{1 + \cos \vartheta}{2} e^{i\varphi}, \\ \mathbf{e}_0 &= \mathbf{e}'_{+1} \frac{\sin \vartheta}{\sqrt{2}} + \mathbf{e}'_0 \cos \vartheta - \mathbf{e}'_{-1} \frac{\sin \vartheta}{\sqrt{2}}, \\ \mathbf{e}_{-1} &= -\mathbf{e}'_{+1} \frac{1 + \cos \vartheta}{2} e^{-i\varphi} + \mathbf{e}'_0 \frac{\sin \vartheta}{\sqrt{2}} e^{-i\varphi} - \mathbf{e}'_{-1} \frac{1 - \cos \vartheta}{2} e^{-i\varphi}. \end{aligned} \quad (43)$$

Циклические контравариантные и спиральные контравариантные орты

$$\begin{aligned} \mathbf{e}^{+1} &= \mathbf{e}'_{+1} \frac{1 + \cos \vartheta}{2} e^{-i\varphi} - \mathbf{e}'_0 \frac{\sin \vartheta}{\sqrt{2}} e^{-i\varphi} + \mathbf{e}'_{-1} \frac{1 - \cos \vartheta}{2} e^{-i\varphi}, \\ \mathbf{e}^0 &= \mathbf{e}'_{+1} \frac{\sin \vartheta}{\sqrt{2}} + \mathbf{e}'_0 \cos \vartheta - \mathbf{e}'_{-1} \frac{\sin \vartheta}{\sqrt{2}}, \\ \mathbf{e}^{-1} &= \mathbf{e}'_{+1} \frac{1 - \cos \vartheta}{2} e^{i\varphi} + \mathbf{e}'_0 \frac{\sin \vartheta}{\sqrt{2}} e^{i\varphi} + \mathbf{e}'_{-1} \frac{1 + \cos \vartheta}{2} e^{i\varphi}. \end{aligned} \quad (44)$$

Формулы (41)—(44) могут быть записаны в компактном виде с помощью  $D$ -функций Вигнера (см. гл. 4)..

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_\mu &= \sum_\nu D_{\nu-\mu}^{1-\nu} (0, \vartheta, \varphi) \mathbf{e}'_\nu = \sum_\nu (-1)^\nu D_{\nu-\mu}^1 (0, \vartheta, \varphi) \mathbf{e}'_\nu, \\ \mathbf{e}^\mu &= (-1)^\mu \sum_\nu D_{-\nu\mu}^1 (0, \vartheta, \varphi) \mathbf{e}'_\nu = \sum_\nu (-1)^{\mu+\nu} D_{\nu\mu}^1 (0, \vartheta, \varphi) \mathbf{e}'_\nu, \end{aligned} \quad (45)$$

$$(\mu, \nu = \pm 1, 0).$$

г. Спиральные ковариантные и декартовы орты

$$\begin{aligned} \mathbf{e}'_{+1} &= -\mathbf{e}_x \frac{1}{\sqrt{2}} (\cos \vartheta \cos \varphi - i \sin \varphi) - \mathbf{e}_y \frac{1}{\sqrt{2}} (\cos \vartheta \sin \varphi + i \cos \varphi) + \mathbf{e}_z \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \vartheta, \\ \mathbf{e}'_0 &= \mathbf{e}_x \sin \vartheta \cos \varphi + \mathbf{e}_y \sin \vartheta \sin \varphi + \mathbf{e}_z \cos \vartheta, \\ \mathbf{e}'_{-1} &= \mathbf{e}_x \frac{1}{\sqrt{2}} (\cos \vartheta \cos \varphi + i \sin \varphi) + \mathbf{e}_y \frac{1}{\sqrt{2}} (\cos \vartheta \sin \varphi - i \cos \varphi) - \mathbf{e}_z \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \vartheta. \end{aligned} \quad (46)$$

Спиральные контравариантные и декартовы орты

$$\begin{aligned} \mathbf{e}'^{+1} &= -\mathbf{e}_x \frac{1}{\sqrt{2}} (\cos \vartheta \cos \varphi + i \sin \varphi) - \mathbf{e}_y \frac{1}{\sqrt{2}} (\cos \vartheta \sin \varphi - i \cos \varphi) + \mathbf{e}_z \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \vartheta, \\ \mathbf{e}'^0 &= \mathbf{e}_x \sin \vartheta \cos \varphi + \mathbf{e}_y \sin \vartheta \sin \varphi + \mathbf{e}_z \cos \vartheta, \\ \mathbf{e}'^{-1} &= \mathbf{e}_x \frac{1}{\sqrt{2}} (\cos \vartheta \cos \varphi - i \sin \varphi) + \mathbf{e}_y \frac{1}{\sqrt{2}} (\cos \vartheta \sin \varphi + i \cos \varphi) - \mathbf{e}_z \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \vartheta. \end{aligned} \quad (47)$$

## Спиральные и сферические орты

$$\begin{aligned}
\mathbf{e}'_{+1} &= -\frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_\vartheta + i\mathbf{e}_\varphi), & \mathbf{e}'_{+1} &= -\frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_\vartheta - i\mathbf{e}_\varphi), \\
\mathbf{e}'_0 &= \mathbf{e}_r, & \mathbf{e}'_0 &= \mathbf{e}_r, \\
\mathbf{e}'_{-1} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_\vartheta - i\mathbf{e}_\varphi), & \mathbf{e}'_{-1} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_\vartheta + i\mathbf{e}_\varphi).
\end{aligned} \tag{48}$$

## Спиральные ковариантные и циклические ковариантные орты

$$\begin{aligned}
\mathbf{e}'_{+1} &= \mathbf{e}_{+1} \frac{1 + \cos \vartheta}{2} e^{-i\varphi} + \mathbf{e}_0 \frac{\sin \vartheta}{\sqrt{2}} + \mathbf{e}_{-1} \frac{1 - \cos \vartheta}{2} e^{i\varphi}, \\
\mathbf{e}'_0 &= -\mathbf{e}_{+1} \frac{\sin \vartheta}{\sqrt{2}} e^{-i\varphi} + \mathbf{e}_0 \cos \vartheta + \mathbf{e}_{-1} \frac{\sin \vartheta}{\sqrt{2}} e^{i\varphi}, \\
\mathbf{e}'_{-1} &= \mathbf{e}_{+1} \frac{1 - \cos \vartheta}{2} e^{-i\varphi} - \mathbf{e}_0 \frac{\sin \vartheta}{\sqrt{2}} + \mathbf{e}_{-1} \frac{1 + \cos \vartheta}{2} e^{i\varphi}.
\end{aligned} \tag{49}$$

## Спиральные контравариантные и циклические ковариантные орты

$$\begin{aligned}
\mathbf{e}'_{+1} &= -\mathbf{e}_{+1} \frac{1 - \cos \vartheta}{2} e^{-i\varphi} + \mathbf{e}_0 \frac{\sin \vartheta}{\sqrt{2}} - \mathbf{e}_{-1} \frac{1 + \cos \vartheta}{2} e^{i\varphi}, \\
\mathbf{e}'_0 &= -\mathbf{e}_{+1} \frac{\sin \vartheta}{\sqrt{2}} e^{-i\varphi} + \mathbf{e}_0 \cos \vartheta + \mathbf{e}_{-1} \frac{\sin \vartheta}{\sqrt{2}} e^{i\varphi}, \\
\mathbf{e}'_{-1} &= -\mathbf{e}_{+1} \frac{1 + \cos \vartheta}{2} e^{-i\varphi} - \mathbf{e}_0 \frac{\sin \vartheta}{\sqrt{2}} - \mathbf{e}_{-1} \frac{1 - \cos \vartheta}{2} e^{i\varphi}.
\end{aligned} \tag{50}$$

## Спиральные ковариантные и циклические контравариантные орты

$$\begin{aligned}
\mathbf{e}'_{+1} &= -\mathbf{e}^{+1} \frac{1 - \cos \vartheta}{2} e^{i\varphi} + \mathbf{e}^0 \frac{\sin \vartheta}{\sqrt{2}} - \mathbf{e}^{-1} \frac{1 + \cos \vartheta}{2} e^{-i\varphi}, \\
\mathbf{e}'_0 &= -\mathbf{e}^{+1} \frac{\sin \vartheta}{\sqrt{2}} e^{i\varphi} + \mathbf{e}^0 \cos \vartheta + \mathbf{e}^{-1} \frac{\sin \vartheta}{\sqrt{2}} e^{-i\varphi}, \\
\mathbf{e}'_{-1} &= -\mathbf{e}^{+1} \frac{1 + \cos \vartheta}{2} e^{i\varphi} - \mathbf{e}^0 \frac{\sin \vartheta}{\sqrt{2}} - \mathbf{e}^{-1} \frac{1 - \cos \vartheta}{2} e^{-i\varphi}.
\end{aligned} \tag{51}$$

## Спиральные контравариантные и циклические контравариантные орты

$$\begin{aligned}
\mathbf{e}'_{+1} &= \mathbf{e}^{+1} \frac{1 + \cos \vartheta}{2} e^{i\varphi} + \mathbf{e}^0 \frac{\sin \vartheta}{\sqrt{2}} + \mathbf{e}^{-1} \frac{1 - \cos \vartheta}{2} e^{-i\varphi}, \\
\mathbf{e}'_0 &= -\mathbf{e}^{+1} \frac{\sin \vartheta}{\sqrt{2}} e^{i\varphi} + \mathbf{e}^0 \cos \vartheta + \mathbf{e}^{-1} \frac{\sin \vartheta}{\sqrt{2}} e^{-i\varphi}, \\
\mathbf{e}'_{-1} &= \mathbf{e}^{+1} \frac{1 - \cos \vartheta}{2} e^{i\varphi} - \mathbf{e}^0 \frac{\sin \vartheta}{\sqrt{2}} + \mathbf{e}^{-1} \frac{1 + \cos \vartheta}{2} e^{-i\varphi}.
\end{aligned} \tag{52}$$

[ Формулы (49)—(52) могут быть записаны в компактном виде с помощью  $D$ -функций Вигнера (см. гл. 4).

$$\begin{aligned}
\mathbf{e}'_\mu &= \sum_\nu D_{\nu\mu}^1(\varphi, \vartheta, 0) \mathbf{e}_\nu = \sum_\nu (-1)^\nu D_{-\nu\mu}^1(\varphi, \vartheta, 0) \mathbf{e}^\nu, \\
\mathbf{e}'^\mu &= \sum_\nu (-1)^\mu D_{\nu-\mu}^1(\varphi, \vartheta, 0) \mathbf{e}_\nu = \sum_\nu (-1)^{\mu+\nu} D_{-\nu-\mu}^1(\varphi, \vartheta, 0) \mathbf{e}^\nu,
\end{aligned} \tag{53}$$

$$(\mu, \nu = \pm 1, 0).$$

## Спиральные ковариантные и контравариантные орты

$$\begin{aligned}
\mathbf{e}'_{+1} &= -\mathbf{e}'^{-1}, & \mathbf{e}'_{+1} &= -\mathbf{e}'_{-1}, \\
\mathbf{e}'_0 &= \mathbf{e}'^0, & \mathbf{e}'_0 &= \mathbf{e}'_0, \\
\mathbf{e}'_{-1} &= -\mathbf{e}'^{+1}, & \mathbf{e}'_{-1} &= -\mathbf{e}'_{+1}.
\end{aligned} \tag{54}$$



## 1. 2. ВЕКТОРЫ, ТЕНЗОРЫ

Векторами и тензорами называются величины, компоненты которых определенным образом преобразуются при поворотах системы координат. Закон преобразования декартовых компонент векторов и тензоров рассмотрен ниже в 1.4 (формулы (46)—(51)), закон преобразования циклических компонент векторов и неприводимых тензоров обсуждается в гл. 3.

## 1. Компоненты векторов

Всякий вектор может быть разложен по базисным ортам, т. е. представлен в виде

$$\mathbf{A} = \sum_{\alpha} A^{\alpha} \mathbf{e}_{\alpha} = \sum_{\alpha} A_{\alpha} \mathbf{e}^{\alpha}. \quad (1)$$

Величины  $A_{\alpha}$  называются *ковариантными компонентами* вектора, а  $A^{\alpha}$  — *контравариантными компонентами*.

$$A_{\alpha} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{e}_{\alpha}, \quad A^{\alpha} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{e}^{\alpha}. \quad (2)$$

В декартовых координатах

$$\mathbf{A} = A_x \mathbf{e}_x + A_y \mathbf{e}_y + A_z \mathbf{e}_z = A^x \mathbf{e}_x + A^y \mathbf{e}_y + A^z \mathbf{e}_z. \quad (3)$$

Ковариантные декартовы компоненты векторов не отличаются от контравариантных.

В сферических координатах

$$\mathbf{A} = A_r \mathbf{e}_r + A_{\theta} \mathbf{e}_{\theta} + A_{\varphi} \mathbf{e}_{\varphi} = A^r \mathbf{e}_r + A^{\theta} \mathbf{e}_{\theta} + A^{\varphi} \mathbf{e}_{\varphi}. \quad (4)$$

Ковариантные сферические компоненты векторов не отличаются от контравариантных.

В циклических координатах

$$\mathbf{A} = A^{+1} \mathbf{e}_{+1} + A^0 \mathbf{e}_0 + A^{-1} \mathbf{e}_{-1} = A_{+1} \mathbf{e}^{+1} + A_0 \mathbf{e}^0 + A_{-1} \mathbf{e}^{-1}. \quad (5)$$

Ковариантные и контравариантные циклические компоненты векторов связаны соотношениями

$$A_{\mu} = (-1)^{\mu} A^{-\mu}, \quad A^{\mu} = (-1)^{\mu} A_{-\mu}, \quad (\mu = \pm 1, 0). \quad (6)$$

Если  $\mathbf{A}$  — вещественный вектор, т. е.  $\mathbf{A}^* = \mathbf{A}$ , то

$$A_{\mu}^* = A^{\mu}, \quad A^{\mu*} = A_{\mu}, \quad (\mu = \pm 1, 0). \quad (7)$$

Если  $\mathbf{A}$  — комплексный вектор, то

$$A_{\mu}^* = (A^*)_{\mu}, \quad A^{\mu*} = (A^*)_{\mu}, \quad (\mu = \pm 1, 0). \quad (8)$$

Разложение вещественного вектора  $\mathbf{A}$  по циклическим ортам

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \sum_{\mu} A_{\mu} \mathbf{e}^{\mu} = \sum_{\mu} A^{\mu} \mathbf{e}_{\mu} = \sum_{\mu} A_{\mu}^* \mathbf{e}^{\mu*} = \sum_{\mu} A^{\mu*} \mathbf{e}_{\mu}^* = \\ &= \sum_{\mu} A_{\mu} \mathbf{e}_{\mu}^* = \sum_{\mu} A_{\mu}^* \mathbf{e}_{\mu} = \sum_{\mu} A^{\mu} \mathbf{e}^{\mu*} = \sum_{\mu} A^{\mu*} \mathbf{e}^{\mu} = \\ &= \sum_{\mu} (-1)^{\mu} A_{-\mu} \mathbf{e}_{\mu} = \sum_{\mu} (-1)^{\mu} A^{-\mu} \mathbf{e}^{\mu}. \end{aligned} \quad (9)$$

Разложение произвольного вектора  $\mathbf{A}$  по спиральным ортам

$$\mathbf{A} = A'^{+1} \mathbf{e}'_{+1} + A'^0 \mathbf{e}'_0 + A'^{-1} \mathbf{e}'_{-1} = A'_{+1} \mathbf{e}'^{+1} + A'_0 \mathbf{e}'^0 + A'_{-1} \mathbf{e}'^{-1}. \quad (10)$$

Для спиральных компонент векторов справедливы те же формулы (6)—(9), что и для циклических.

Связь между компонентами векторов в различных системах координат такая же, как связь между соответствующими ортами. Она дается формулами 1.1 (29)—1.1 (54), в которых следует произвести замену  $\mathbf{e}_{\alpha} \rightarrow A_{\alpha}$  и  $\mathbf{e}^{\alpha} \rightarrow A^{\alpha}$ . В частности,

$$\begin{aligned} A_{+1} &= -A^{-1} = -\frac{1}{\sqrt{2}} (A_x + iA_y), & A_x &= \frac{1}{\sqrt{2}} (A_{-1} - A_{+1}) = \frac{1}{\sqrt{2}} (A^{-1} - A^{+1}), \\ A_0 &= A^0 = A_z, & A_y &= \frac{i}{\sqrt{2}} (A_{-1} + A_{+1}) = \frac{-i}{\sqrt{2}} (A^{-1} + A^{+1}), \\ A_{-1} &= -A^{+1} = \frac{1}{\sqrt{2}} (A_x - iA_y), & A_x &= A_0 = A^0. \end{aligned} \quad (11)$$

Матричная форма записи соотношений между декартовыми, циклическими контравариантными и сферическими компонентами векторов дана в табл. 1.1 и 1.2.

ТАБЛИЦА 1.1  
МАТРИЧНАЯ ФОРМА СВЯЗИ МЕЖДУ КОМПОНЕНТАМИ ВЕКТОРОВ

Декартовы координаты	Циклические координаты	Сферические координаты
$\mathbf{A} = A_x \mathbf{e}_x + A_y \mathbf{e}_y + A_z \mathbf{e}_z$ Связь с циклическими компонентами	$\mathbf{A} = A^{+1} \mathbf{e}_{+1} + A^0 \mathbf{e}_0 + A^{-1} \mathbf{e}_{-1}$ Связь с декартовыми компонентами	$\mathbf{A} = A_r \mathbf{e}_r + A_\vartheta \mathbf{e}_\vartheta + A_\varphi \mathbf{e}_\varphi$ Связь с декартовыми компонентами
$\begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} = M(x, y, z \leftarrow +1, 0, -1) \begin{pmatrix} A^{+1} \\ A^0 \\ A^{-1} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} A^{+1} \\ A^0 \\ A^{-1} \end{pmatrix} = M(+1, 0, -1 \leftarrow x, y, z) \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} A_r \\ A_\vartheta \\ A_\varphi \end{pmatrix} = M(r, \vartheta, \varphi \leftarrow x, y, z) \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix}$
Связь со сферическими компонентами	Связь со сферическими компонентами	Связь с циклическими компонентами
$\begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} = M(x, y, z \leftarrow r, \vartheta, \varphi) \begin{pmatrix} A_r \\ A_\vartheta \\ A_\varphi \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} A^{+1} \\ A^0 \\ A^{-1} \end{pmatrix} = M(+1, 0, -1 \leftarrow r, \vartheta, \varphi) \begin{pmatrix} A_r \\ A_\vartheta \\ A_\varphi \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} A_r \\ A_\vartheta \\ A_\varphi \end{pmatrix} = M(r, \vartheta, \varphi \leftarrow +1, 0, -1) \begin{pmatrix} A^{+1} \\ A^0 \\ A^{-1} \end{pmatrix}$

ТАБЛИЦА 1.2

МАТРИЦЫ, СВЯЗЫВАЮЩИЕ ДЕКАРТОВЫ, ЦИКЛИЧЕСКИЕ КОНТРАВАРИАНТНЫЕ И СФЕРИЧЕСКИЕ КОМПОНЕНТЫ ВЕКТОРОВ

$M(x, y, z \leftarrow +1, 0, -1)$ $\begin{matrix} & +1 & 0 & -1 \\ x & \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{i}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{i}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ y \\ z \end{matrix}$	$M(+1, 0, -1 \leftarrow x, y, z)$ $\begin{matrix} & x & y & z \\ +1 & \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{i}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{i}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix} \\ 0 \\ -1 \end{matrix}$
$M(x, y, z \leftarrow r, \vartheta, \varphi)$ $\begin{matrix} & r & \vartheta & \varphi \\ x & \begin{pmatrix} \sin \vartheta \cos \varphi & \cos \vartheta \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \vartheta \sin \varphi & \cos \vartheta \sin \varphi & \cos \varphi \\ z & \cos \vartheta & -\sin \vartheta & 0 \end{pmatrix} \\ y \\ z \end{matrix}$	$M(r, \vartheta, \varphi \leftarrow x, y, z)$ $\begin{matrix} & x & y & z \\ r & \begin{pmatrix} \sin \vartheta \cos \varphi & \sin \vartheta \sin \varphi & \cos \vartheta \\ \vartheta & \cos \vartheta \cos \varphi & \cos \vartheta \sin \varphi & -\sin \vartheta \\ \varphi & -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \end{pmatrix} \\ \vartheta \\ \varphi \end{matrix}$
$M(+1, 0, -1 \leftarrow r, \vartheta, \varphi)$ $\begin{matrix} & r & \vartheta & \varphi \\ +1 & \begin{pmatrix} -\frac{\sin \vartheta}{\sqrt{2}} e^{-i\varphi} & -\frac{\cos \vartheta}{\sqrt{2}} e^{-i\varphi} & \frac{i}{\sqrt{2}} e^{-i\varphi} \\ 0 & \cos \vartheta & -\sin \vartheta & 0 \\ -1 & \frac{\sin \vartheta}{\sqrt{2}} e^{i\varphi} & \frac{\cos \vartheta}{\sqrt{2}} e^{i\varphi} & \frac{i}{\sqrt{2}} e^{i\varphi} \end{pmatrix} \\ 0 \\ -1 \end{matrix}$	$M(r, \vartheta, \varphi \leftarrow +1, 0, -1)$ $\begin{matrix} & +1 & 0 & -1 \\ r & \begin{pmatrix} -\frac{\sin \vartheta}{\sqrt{2}} e^{i\varphi} & \cos \vartheta & \frac{\sin \vartheta}{\sqrt{2}} e^{-i\varphi} \\ \vartheta & -\frac{\cos \vartheta}{\sqrt{2}} e^{i\varphi} & -\sin \vartheta & \frac{\cos \vartheta}{\sqrt{2}} e^{-i\varphi} \\ \varphi & -\frac{i}{\sqrt{2}} e^{i\varphi} & 0 & -\frac{i}{\sqrt{2}} e^{-i\varphi} \end{pmatrix} \\ \vartheta \\ \varphi \end{matrix}$

Циклические компоненты вещественного вектора  $\mathbf{A}$ , не зависящего от спиновых переменных и не содержащего дифференциальных операций, имеют вид

$$\begin{aligned} A_{\pm 1} &= \mp |\mathbf{A}| \frac{\sin \vartheta}{\sqrt{2}} e^{\pm i\varphi}, & A^{\pm 1} &= \mp |\mathbf{A}| \frac{\sin \vartheta}{\sqrt{2}} e^{\mp i\varphi}, \\ A_0 &= |\mathbf{A}| \cos \vartheta, & A^0 &= |\mathbf{A}| \cos \vartheta, \end{aligned} \quad (12)$$

где  $\vartheta$ ,  $\varphi$  — сферические углы вектора  $\mathbf{A}$ .

Формулы (12) могут быть записаны через сферические функции (см. гл. 5):

$$\begin{aligned} A_{\mu} &= \sqrt{\frac{4\pi}{3}} |\mathbf{A}| Y_{1\mu}(\vartheta, \varphi), \\ A^{\mu} &= \sqrt{\frac{4\pi}{3}} |\mathbf{A}| Y_{1\mu}^*(\vartheta, \varphi), \end{aligned} \quad (\mu = \pm 1, 0). \quad (13)$$

Выражение для декартовых компонент вектора  $\mathbf{A}$  через сферические функции имеет вид

$$\begin{aligned} A_x &= \sqrt{\frac{2\pi}{3}} |\mathbf{A}| \{Y_{1-1}(\vartheta, \varphi) - Y_{1+1}(\vartheta, \varphi)\}, \\ A_y &= i \sqrt{\frac{2\pi}{3}} |\mathbf{A}| \{Y_{1-1}(\vartheta, \varphi) + Y_{1+1}(\vartheta, \varphi)\}, \\ A_z &= \sqrt{\frac{4\pi}{3}} |\mathbf{A}| Y_{10}(\vartheta, \varphi). \end{aligned} \quad (14)$$

## 2. Скалярное произведение векторов

В произвольных координатах скалярное произведение векторов  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$  определяется формулой

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \sum_{\alpha} A_{\alpha} B^{\alpha} = \sum_{\alpha} A^{\alpha} B_{\alpha}. \quad (15)$$

В декартовых координатах

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z. \quad (16)$$

В сферических координатах

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_r B_r + A_{\vartheta} B_{\vartheta} + A_{\varphi} B_{\varphi}. \quad (17)$$

Формула (17) справедлива, если векторы  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$  не являются дифференциальными операторами, так как сферические орты зависят от углов  $\vartheta$ ,  $\varphi$  (см. 1.1).

В циклических координатах

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \sum_{\mu} A^{\mu} B_{\mu} = \sum_{\mu} A_{\mu} B^{\mu} = \sum_{\mu} (-1)^{\mu} A_{\mu} B_{-\mu} = \sum_{\mu} (-1)^{\mu} A^{\mu} B^{-\mu}, \quad (\mu = \pm 1, 0). \quad (18)$$

В раскрытом виде

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = -A_{+1} B_{-1} + A_0 B_0 - A_{-1} B_{+1}. \quad (19)$$

Выражение для скалярного произведения через спиральные компоненты векторов имеет вид, аналогичный (18)—(19). Скалярное произведение векторов не меняется при повороте системы координат.

## 3. Векторное произведение векторов

В декартовых координатах

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = \sum_{i=x,y,z} [\mathbf{A} \times \mathbf{B}]_i \mathbf{e}_i, \quad (20)$$

где

$$\begin{aligned} [\mathbf{A} \times \mathbf{B}]_x &= A_y B_z - A_z B_y, \\ [\mathbf{A} \times \mathbf{B}]_y &= A_z B_x - A_x B_z, \\ [\mathbf{A} \times \mathbf{B}]_z &= A_x B_y - A_y B_x. \end{aligned} \quad (21)$$

Формула (21) может быть записана в компактном виде

$$[\mathbf{A} \times \mathbf{B}]_i = \sum_{kl} \varepsilon_{ikl} A_k B_l, \quad (i, k, l = x, y, z). \quad (22)$$

В сферических координатах

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_r & \mathbf{e}_\vartheta & \mathbf{e}_\varphi \\ A_r & A_\vartheta & A_\varphi \\ B_r & B_\vartheta & B_\varphi \end{vmatrix} = \sum_{\alpha=r, \vartheta, \varphi} [\mathbf{A} \times \mathbf{B}]_\alpha \mathbf{e}_\alpha, \quad (23)$$

где

$$\begin{aligned} [\mathbf{A} \times \mathbf{B}]_r &= A_\vartheta B_\varphi - A_\varphi B_\vartheta, \\ [\mathbf{A} \times \mathbf{B}]_\vartheta &= A_\varphi B_r - A_r B_\varphi, \\ [\mathbf{A} \times \mathbf{B}]_\varphi &= A_r B_\vartheta - A_\vartheta B_r. \end{aligned} \quad (24)$$

Формула (24) справедлива, если  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$  не являются дифференциальными операторами.

В циклических координатах

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = i \begin{vmatrix} \mathbf{e}_{+1} & \mathbf{e}_0 & \mathbf{e}_{-1} \\ A_{+1} & A_0 & A_{-1} \\ B_{+1} & B_0 & B_{-1} \end{vmatrix} = -i \begin{vmatrix} \mathbf{e}^{+1} & \mathbf{e}^0 & \mathbf{e}^{-1} \\ A^{+1} & A^0 & A^{-1} \\ B^{+1} & B^0 & B^{-1} \end{vmatrix} = \sum_{\mu=\pm 1, 0} [\mathbf{A} \times \mathbf{B}]_\mu \mathbf{e}^\mu = \sum_{\mu=\pm 1, 0} [\mathbf{A} \times \mathbf{B}]^\mu \mathbf{e}_\mu, \quad (25)$$

где

$$\begin{aligned} [\mathbf{A} \times \mathbf{B}]_{+1} &= i(A_0 B_{+1} - A_{+1} B_0) = i(A^{-1} B^0 - A^0 B^{-1}), \\ [\mathbf{A} \times \mathbf{B}]_0 &= i(A_{-1} B_{+1} - A_{+1} B_{-1}) = i(A^{+1} B^{-1} - A^{-1} B^{+1}), \\ [\mathbf{A} \times \mathbf{B}]_{-1} &= i(A_{-1} B_0 - A_0 B_{-1}) = i(A^0 B^{+1} - A^{+1} B^0). \end{aligned} \quad (26)$$

$$\begin{aligned} [\mathbf{A} \times \mathbf{B}]^{+1} &= i(A_0 B_{-1} - A_{-1} B_0) = i(A^{+1} B^0 - A^0 B^{+1}), \\ [\mathbf{A} \times \mathbf{B}]^0 &= i(A_{-1} B_{+1} - A_{+1} B_{-1}) = i(A^{+1} B^{-1} - A^{-1} B^{+1}), \\ [\mathbf{A} \times \mathbf{B}]^{-1} &= i(A_{+1} B_0 - A_0 B_{+1}) = i(A^0 B^{-1} - A^{-1} B^0). \end{aligned} \quad (27)$$

Формулы (26)—(27) могут быть записаны в компактном виде через коэффициенты Клебша—Гордана (см. гл. 8):

$$\begin{aligned} [\mathbf{A} \times \mathbf{B}]_\mu &= -i\sqrt{2} \sum_{\nu\lambda} C_{\nu\lambda\mu}^{1\mu} A_\nu B_\lambda, \\ [\mathbf{A} \times \mathbf{B}]^\mu &= i\sqrt{2} \sum_{\nu\lambda} C_{\nu\lambda\mu}^{1\mu} A^\nu B^\lambda, \end{aligned} \quad (\mu, \nu, \lambda = \pm 1, 0). \quad (28)$$

Для спиральных компонент векторного произведения тоже справедливы формулы (25)—(28).

#### 4. Произведения трех и более векторов

$$\mathbf{A} \cdot [\mathbf{B} \times \mathbf{C}] = \mathbf{B} \cdot [\mathbf{C} \times \mathbf{A}] = \mathbf{C} \cdot [\mathbf{A} \times \mathbf{B}] = -\mathbf{A} \cdot [\mathbf{C} \times \mathbf{B}] = -\mathbf{B} \cdot [\mathbf{A} \times \mathbf{C}] = -\mathbf{C} \cdot [\mathbf{B} \times \mathbf{A}], \quad (29)$$

$$\mathbf{A} \times [\mathbf{B} \times \mathbf{C}] = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}), \quad (30)$$

$$[\mathbf{A} \times \mathbf{B}] \cdot [\mathbf{C} \times \mathbf{D}] = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})(\mathbf{B} \cdot \mathbf{D}) - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{D})(\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}), \quad (31)$$

$$[\mathbf{A} \times \mathbf{B}] \times [\mathbf{C} \times \mathbf{D}] = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot [\mathbf{C} \times \mathbf{D}]) - \mathbf{A}(\mathbf{B} \cdot [\mathbf{C} \times \mathbf{D}]) = \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot [\mathbf{B} \times \mathbf{D}]) - \mathbf{D}(\mathbf{A} \cdot [\mathbf{B} \times \mathbf{C}]). \quad (32)$$

$$\begin{aligned} (\mathbf{A} \cdot [\mathbf{B} \times \mathbf{C}])(\mathbf{a} \cdot [\mathbf{b} \times \mathbf{c}]) &= \begin{vmatrix} \mathbf{A} \cdot \mathbf{a} & \mathbf{A} \cdot \mathbf{b} & \mathbf{A} \cdot \mathbf{c} \\ \mathbf{B} \cdot \mathbf{a} & \mathbf{B} \cdot \mathbf{b} & \mathbf{B} \cdot \mathbf{c} \\ \mathbf{C} \cdot \mathbf{a} & \mathbf{C} \cdot \mathbf{b} & \mathbf{C} \cdot \mathbf{c} \end{vmatrix} = \\ &= (\mathbf{A} \cdot \mathbf{a})(\mathbf{B} \cdot \mathbf{b})(\mathbf{C} \cdot \mathbf{c}) - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{a})(\mathbf{B} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{C} \cdot \mathbf{b}) - (\mathbf{B} \cdot \mathbf{b})(\mathbf{A} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{C} \cdot \mathbf{a}) - \\ &- (\mathbf{C} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{A} \cdot \mathbf{b})(\mathbf{B} \cdot \mathbf{a}) + (\mathbf{A} \cdot \mathbf{b})(\mathbf{B} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{C} \cdot \mathbf{a}) + (\mathbf{A} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{B} \cdot \mathbf{a})(\mathbf{C} \cdot \mathbf{b}). \end{aligned} \quad (33)$$

#### 5. Тензоры $\delta_{ik}$ и $\varepsilon_{ikl}$

Наиболее употребительными декартовыми тензорами являются симметричный тензор второго ранга  $\delta_{ik}$  и полностью антисимметричный тензор третьего ранга  $\varepsilon_{ikl}$ .

Тензор  $\delta_{ik}$  называется  $\delta$ -символом Кронекера. Он определяется формулой

$$\delta_{ik} = \begin{cases} 1, & i = k, \\ 0, & i \neq k, \end{cases} \quad (i, k = x, y, z). \quad (34)$$

Компоненты тензора  $\delta_{ik}$  не меняются при повороте системы координат и при ее инверсии.

Тензор (точнее псевдотензор)  $\varepsilon_{ikl}$  называется также *тензором Леви—Чивита*. Он антисимметричен по отношению к перестановке любой пары индексов. Поэтому компонента  $\varepsilon_{ikl}$  равна нулю, если среди  $i, k, l$  есть хотя бы два одинаковых индекса. Отличны от нуля только компоненты, все индексы которых различны. Компоненты тензора  $\varepsilon_{ikl}$  имеют вид

$$\begin{aligned}\varepsilon_{iit} &= 0, \quad (i = x, y, z) \quad (3 \text{ компоненты}), \\ \varepsilon_{iik} &= \varepsilon_{iki} = \varepsilon_{kii} = 0, \quad (i, k = x, y, z) \quad (18 \text{ компонент}), \\ \varepsilon_{xyz} &= \varepsilon_{yzx} = \varepsilon_{zxy} = -\varepsilon_{xzy} = -\varepsilon_{yxz} = -\varepsilon_{zyx} = 1 \quad (6 \text{ компонент}).\end{aligned}\quad (35)$$

Компоненты тензора  $\varepsilon_{ikl}$  не меняются при повороте системы координат и при ее инверсии.

Тензор  $\varepsilon_{ikl}$  обладает следующими свойствами. Произведение двух тензоров  $\varepsilon_{ikl}$  и  $\varepsilon_{rst}$  выражается через определитель

$$\varepsilon_{ikl}\varepsilon_{rst} = \begin{vmatrix} \delta_{ir} & \delta_{is} & \delta_{it} \\ \delta_{kr} & \delta_{ks} & \delta_{kt} \\ \delta_{lr} & \delta_{ls} & \delta_{lt} \end{vmatrix} = \delta_{ir}\delta_{ks}\delta_{lt} + \delta_{is}\delta_{kt}\delta_{lr} + \delta_{it}\delta_{kr}\delta_{ls} - \delta_{ir}\delta_{kt}\delta_{ls} - \delta_{is}\delta_{kr}\delta_{lt} - \delta_{it}\delta_{ks}\delta_{lr}.\quad (36)$$

Сумма по одной паре индексов

$$\sum_i \varepsilon_{ikl}\varepsilon_{ist} = \begin{vmatrix} \delta_{ks} & \delta_{kt} \\ \delta_{ls} & \delta_{lt} \end{vmatrix} = \delta_{ks}\delta_{lt} - \delta_{kt}\delta_{ls}.\quad (37)$$

Сумма по двум парам индексов

$$\sum_{i, k} \varepsilon_{ikl}\varepsilon_{ikt} = 2\delta_{lt}.\quad (38)$$

Сумма по трем парам индексов

$$\sum_{i, k, l} \varepsilon_{ikl}\varepsilon_{ikl} = 6.\quad (39)$$

Для произвольной  $3 \times 3$  матрицы  $(A_{ik})$ ,  $(i, k = x, y, z)$  справедливо соотношение

$$\sum_{i, k, l} A_{xi}A_{yk}A_{zl}\varepsilon_{ikl} = \det \| A_{ik} \| = \begin{vmatrix} A_{xx} & A_{xy} & A_{xz} \\ A_{yx} & A_{yy} & A_{yz} \\ A_{zx} & A_{zy} & A_{zz} \end{vmatrix}.\quad (40)$$

### 1.3. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ОПЕРАЦИИ

#### 1. Оператор $\nabla$

*Оператор Гамильтона  $\nabla$  (набла)* является векторным дифференциальным оператором. Декартовы компоненты оператора  $\nabla$

$$\nabla_x = \frac{\partial}{\partial x}, \quad \nabla_y = \frac{\partial}{\partial y}, \quad \nabla_z = \frac{\partial}{\partial z}.\quad (1)$$

Они выражаются через сферические координаты по формулам

$$\begin{aligned}\nabla_x &= \sin \vartheta \cos \varphi \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos \vartheta \cos \varphi}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial \vartheta} - \frac{\sin \varphi}{r \sin \vartheta} \cdot \frac{\partial}{\partial \varphi}, \\ \nabla_y &= \sin \vartheta \sin \varphi \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos \vartheta \sin \varphi}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial \vartheta} + \frac{\cos \varphi}{r \sin \vartheta} \cdot \frac{\partial}{\partial \varphi}, \\ \nabla_z &= \cos \vartheta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin \vartheta}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial \vartheta}.\end{aligned}\quad (2)$$

Разложение оператора  $\nabla$  по циклическим ортам

$$\nabla = \sum_{\mu} (-1)^{\mu} \mathbf{e}_{\mu} \nabla_{-\mu} = -\mathbf{e}_{+1} \nabla_{-1} + \mathbf{e}_0 \nabla_0 - \mathbf{e}_{-1} \nabla_{+1},\quad (3)$$

где циклические компоненты оператора  $\nabla$  даются формулами

$$\begin{aligned}\nabla_{+1} &= -\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right), \\ \nabla_0 &= \frac{\partial}{\partial z}, \\ \nabla_{-1} &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right).\end{aligned}\quad (4)$$

В сферических координатах циклические компоненты  $\nabla$  выражаются следующим образом:

$$\begin{aligned}\nabla_{+1} &= -\frac{e^{i\varphi}}{\sqrt{2}}\left\{\sin\vartheta\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos\vartheta}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial\vartheta} + \frac{i}{r\sin\vartheta}\cdot\frac{\partial}{\partial\varphi}\right\}, \\ \nabla_0 &= \cos\vartheta\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin\vartheta}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial\vartheta}, \\ \nabla_{-1} &= \frac{e^{-i\varphi}}{\sqrt{2}}\left\{\sin\vartheta\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos\vartheta}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial\vartheta} - \frac{i}{r\sin\vartheta}\cdot\frac{\partial}{\partial\varphi}\right\}.\end{aligned}\quad (5)$$

Разложение оператора  $\nabla$  по сферическим ортам имеет вид

$$\nabla = \mathbf{e}_r\nabla_r + \mathbf{e}_\vartheta\nabla_\vartheta + \mathbf{e}_\varphi\nabla_\varphi, \quad (6)$$

где

$$\nabla_r = \frac{\partial}{\partial r}, \quad \nabla_\vartheta = \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial\vartheta}, \quad \nabla_\varphi = \frac{1}{r\sin\vartheta}\cdot\frac{\partial}{\partial\varphi}. \quad (7)$$

В формуле (6) существен порядок сомножителей, так как сами орты  $\mathbf{e}_r$ ,  $\mathbf{e}_\vartheta$ ,  $\mathbf{e}_\varphi$  зависят от углов  $\vartheta$ ,  $\varphi$ . Оператор  $\nabla$  может быть записан в виде

$$\nabla = \mathbf{n}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\nabla_\Omega, \quad (8)$$

где  $\nabla_\Omega$  — угловая часть оператора  $\nabla$ ,  $\mathbf{n} \equiv \mathbf{r}/r$  — орт со сферическими углами  $\vartheta$ ,  $\varphi$ . Оператор  $\nabla_\Omega$  действует только на переменные  $\vartheta$ ,  $\varphi$ . В сферических координатах он имеет всего две составляющие

$$(\nabla_\Omega)_\vartheta = \frac{\partial}{\partial\vartheta}, \quad (\nabla_\Omega)_\varphi = \frac{1}{\sin\vartheta}\cdot\frac{\partial}{\partial\varphi}. \quad (9)$$

Оператор  $\nabla_\Omega$  может быть представлен как

$$\nabla_\Omega = -in \times \hat{\mathbf{L}}, \quad (10)$$

где  $\hat{\mathbf{L}}$  — оператор орбитального углового момента (см. 2.2).

## 2. Оператор Лапласа

Оператор Лапласа  $\Delta$  является скалярным дифференциальным оператором

$$\Delta = \nabla^2. \quad (11)$$

В декартовых координатах  $\Delta$  имеет вид

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \quad (12)$$

В сферических координатах

$$\Delta = \frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left\{r^2\frac{\partial}{\partial r}\right\} + \frac{1}{r^2\sin\vartheta}\cdot\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left\{\sin\vartheta\frac{\partial}{\partial\vartheta}\right\} + \frac{1}{r^2\sin^2\vartheta}\cdot\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}. \quad (13)$$

Оператор  $\Delta$  может быть записан в виде

$$\Delta = \frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left\{r^2\frac{\partial}{\partial r}\right\} + \frac{1}{r^2}\Delta_\Omega, \quad (14)$$

где  $\Delta_{\vartheta}$  — угловая часть оператора Лапласа

$$\Delta_{\vartheta} = \nabla_{\vartheta}^2 = \frac{1}{\sin \vartheta} \cdot \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left\{ \sin \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} \right\} + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}. \quad (15)$$

Угловая часть оператора Лапласа выражается через оператор орбитального углового момента  $\hat{L}$  по формуле

$$\Delta_{\vartheta} = -\hat{L}^2. \quad (16)$$

### 3. Дифференциальные операции со скалярами и векторами

*Градиент скалярной функции*  $\Phi(\mathbf{r})$  является вектором, выражающимся через оператор  $\nabla$  по формуле

$$\text{grad } \Phi(\mathbf{r}) = \nabla \Phi(\mathbf{r}). \quad (17)$$

Компоненты вектора градиента в различных координатах могут быть получены с помощью формул (1)—(7) для компонент оператора  $\nabla$ . Если  $\Phi$  зависит только от  $r = |\mathbf{r}|$  (центральное поле), то

$$\nabla \Phi(r) = \mathbf{n} \frac{d\Phi(r)}{dr}, \quad (18)$$

где  $\mathbf{n} = \mathbf{r}/r$ .

*Производная по направлению*, заданному единичным вектором  $\mathbf{u}$ , от скалярной функции  $\Phi(\mathbf{r})$  — скалярная величина, связанная с оператором  $\nabla$  формулой

$$\frac{d}{ds} \Phi(\mathbf{r}) = (\mathbf{u} \cdot \nabla) \Phi(\mathbf{r}). \quad (19)$$

*Дивергенция векторного поля*  $\mathbf{A}(\mathbf{r})$  является скалярной величиной — скалярным произведением оператора  $\nabla$  и вектора  $\mathbf{A}$ .

$$\text{div } \mathbf{A} = \nabla \cdot \mathbf{A}. \quad (20)$$

Выражение для дивергенции через декартовы компоненты вектора

$$\text{div } \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} = \sum_{i=x,y,z} \frac{\partial A_i}{\partial x_i}. \quad (21)$$

В циклических компонентах формула для дивергенции имеет вид

$$\text{div } \mathbf{A} = -\nabla_{+1} A_{-1} + \nabla_0 A_0 - \nabla_{-1} A_{+1} = \sum_{\mu=\pm 1, 0} (-1)^\mu \nabla_\mu A_{-\mu}, \quad (22)$$

где циклические компоненты  $\nabla_\mu$  даются формулами (4)—(5). В сферических компонентах дивергенция выражается следующим образом:

$$\text{div } \mathbf{A} = \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial}{\partial r} (r^2 A_r) + \frac{1}{r \sin \vartheta} \cdot \frac{\partial}{\partial \vartheta} (\sin \vartheta A_\vartheta) + \frac{1}{r \sin \vartheta} \cdot \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi}. \quad (23)$$

*Ротор векторного поля*  $\mathbf{A}(\mathbf{r})$  является вектором — векторным произведением оператора  $\nabla$  и вектора  $\mathbf{A}$ .

$$\text{rot } \mathbf{A} = \nabla \times \mathbf{A}. \quad (24)$$

Декартовы компоненты ротора даются формулами

$$\begin{aligned} [\text{rot } \mathbf{A}]_x &= \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}, \\ [\text{rot } \mathbf{A}]_y &= \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}, \\ [\text{rot } \mathbf{A}]_z &= \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \end{aligned} \quad (25)$$

или в компактной записи

$$[\text{rot } \mathbf{A}]_i = \sum_{kl} \varepsilon_{ikl} \frac{\partial A_l}{\partial x_k}, \quad (i, k, l = x, y, z). \quad (26)$$

Ротор может быть записан также в виде определителя

$$\text{rot } \mathbf{A} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}. \quad (27)$$

Циклические ковариантные компоненты ротора даются формулами

$$\begin{aligned} [\text{rot } \mathbf{A}]_{+1} &= i(\nabla_0 A_{+1} - \nabla_{+1} A_0), \\ [\text{rot } \mathbf{A}]_0 &= i(\nabla_{-1} A_{+1} - \nabla_{+1} A_{-1}), \\ [\text{rot } \mathbf{A}]_{-1} &= i(\nabla_{-1} A_0 - \nabla_0 A_{-1}) \end{aligned} \quad (28)$$

или в компактной записи через коэффициенты Клебша—Гордана

$$[\text{rot } \mathbf{A}]_\mu = -i\sqrt{2} \sum_{\nu\lambda} C_{\nu\lambda\mu}^{11} \nabla_\nu A_\lambda, \quad (\mu, \nu, \lambda = \pm 1, 0). \quad (29)$$

Ротор может быть представлен в виде определителя

$$\text{rot } \mathbf{A} = i \begin{vmatrix} \mathbf{e}_{+1} & \mathbf{e}_0 & \mathbf{e}_{-1} \\ \nabla_{+1} & \nabla_0 & \nabla_{-1} \\ A_{+1} & A_0 & A_{-1} \end{vmatrix}. \quad (30)$$

Сферические составляющие ротора

$$\begin{aligned} [\text{rot } \mathbf{A}]_r &= \frac{1}{r \sin \vartheta} \cdot \frac{\partial}{\partial \vartheta} (\sin \vartheta A_\varphi) - \frac{1}{r \sin \vartheta} \cdot \frac{\partial A_\vartheta}{\partial \varphi}, \\ [\text{rot } \mathbf{A}]_\vartheta &= \frac{1}{r \sin \vartheta} \cdot \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} (r A_\varphi), \\ [\text{rot } \mathbf{A}]_\varphi &= \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} (r A_\vartheta) - \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial A_r}{\partial \vartheta}. \end{aligned} \quad (31)$$

Краткая сводка формул, приведенных выше, дается в табл. 1.3.

Дифференциальные операции второго порядка

$$\text{div grad } \Phi = \nabla \cdot (\nabla \Phi) = \Delta \Phi, \quad (32)$$

$$\text{rot grad } \Phi = \nabla \times (\nabla \Phi) = 0, \quad (33)$$

$$\text{div rot } \mathbf{A} = \nabla \cdot [\nabla \times \mathbf{A}] = 0, \quad (34)$$

$$\text{rot rot } \mathbf{A} = \nabla \times [\nabla \times \mathbf{A}] = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{A}) - \Delta \mathbf{A} = \text{grad div } \mathbf{A} - \Delta \mathbf{A}. \quad (35)$$

#### 1.4. ПОВОРОТЫ СИСТЕМЫ КООРДИНАТ

Произвольный поворот координатной системы относительно начала координат полностью определяется заданием трех вещественных параметров. В качестве параметров, характеризующих поворот, наиболее часто употребляются углы Эйлера  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ . Среди других наборов параметров, служащих для описания поворота системы координат, широко применяются следующие:

- направление оси поворота  $\mathbf{n}$  ( $\Theta$ ,  $\Phi$ ) (2 параметра) и величина угла поворота  $\omega$  (1 параметр),
- параметры Кэли—Клейна.

### 1. Характеристика поворотов с помощью углов Эйлера

Произвольный поворот системы координат  $S \{x, y, z\} \rightarrow S' \{x', y', z'\}$  может быть получен с помощью трех последовательных поворотов вокруг координатных осей (рис. 1.3)

$$\mathbf{A} \begin{cases} \text{а — поворот вокруг оси } z \text{ на угол } \alpha \ (0 \leq \alpha < 2\pi), \\ \text{б — поворот вокруг новой оси } y_1 \text{ на угол } \beta \ (0 \leq \beta \leq \pi), \\ \text{в — поворот вокруг новой оси } z_2 = z' \text{ на угол } \gamma \ (0 \leq \gamma < 2\pi). \end{cases}$$



ТАБЛИЦА 1.3

	Декартовы координаты	Циклические координаты	Сферические координаты
$r$	$e_x x + e_y y + e_z z$	$-e_{+1} x_{-1} + e_0 x_0 - e_{-1} x_{+1}$	$e_r r$
$dr$	$e_x dx + e_y dy + e_z dz$	$-e_{+1} dx_{-1} + e_0 dx_0 - e_{-1} dx_{+1}$	$e_r dr + e_\vartheta r d\vartheta + e_\varphi r \sin \vartheta d\varphi$
$ds^2$	$dx^2 + dy^2 + dz^2$	$-2dx_{+1} dx_{-1} + dx_0 dx_0$	$dr^2 + r^2 d\vartheta^2 + r^2 \sin^2 \vartheta d\varphi^2$
$dV$	$dx dy dz$	$id x_{+1} dx_0 dx_{-1}$	$r^2 \sin \vartheta dr d\vartheta d\varphi$
$\nabla \Phi$	$e_x \frac{\partial \Phi}{\partial x} + e_y \frac{\partial \Phi}{\partial y} + e_z \frac{\partial \Phi}{\partial z}$	$-e_{+1} \nabla_{-1} \Phi + e_0 \nabla_0 \Phi - e_{-1} \nabla_{+1} \Phi$	$e_r \frac{\partial \Phi}{\partial r} + e_\vartheta \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \vartheta} + e_\varphi \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi}$
$(\nabla \cdot A)$	$\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$	$-\nabla_{+1} A_{-1} + \nabla_0 A_0 - \nabla_{-1} A_{+1}$	$\frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial}{\partial r} (r^2 A_r) + \frac{1}{r \sin \vartheta} \cdot \frac{\partial}{\partial \vartheta} (A_\vartheta \sin \vartheta) + \frac{1}{r \sin \vartheta} \cdot \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi}$
$[\nabla \times A]$	$\begin{vmatrix} e_x & e_y & e_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}$	$i \begin{vmatrix} e_{+1} & e_0 & e_{-1} \\ \nabla_{+1} & \nabla_0 & \nabla_{-1} \\ A_{+1} & A_0 & A_{-1} \end{vmatrix}$	$e_r \frac{1}{r \sin \vartheta} \left[ \frac{\partial}{\partial \vartheta} (A_\varphi \sin \vartheta) - \frac{\partial A_\vartheta}{\partial \varphi} \right] + e_\vartheta \frac{1}{r} \left[ \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial r} (r A_\varphi) \right] + e_\varphi \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial}{\partial r} (r A_\vartheta) - \frac{\partial A_r}{\partial \vartheta} \right]$
$\Delta \Phi$	$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}$	$-2\nabla_{+1} \nabla_{-1} \Phi + \nabla_0 \nabla_0 \Phi$	$\frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \cdot \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left( \sin \vartheta \frac{\partial \Phi}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \cdot \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2}$

Этот же поворот системы координат  $S \{x, y, z\} \rightarrow S' \{x', y', z'\}$  может быть получен с помощью другой последовательности поворотов (рис. 1.4)

- В  $\begin{cases} \alpha - \text{поворот вокруг оси } z \text{ на угол } \gamma \ (0 \leq \gamma < 2\pi), \\ \beta - \text{поворот вокруг старой оси } y \text{ на угол } \beta \ (0 \leq \beta \leq \pi), \\ \gamma - \text{поворот вокруг старой оси } z \text{ на угол } \alpha \ (0 \leq \alpha < 2\pi). \end{cases}$

Углы  $\alpha, \beta, \gamma$  здесь такие же, как и в первом случае.

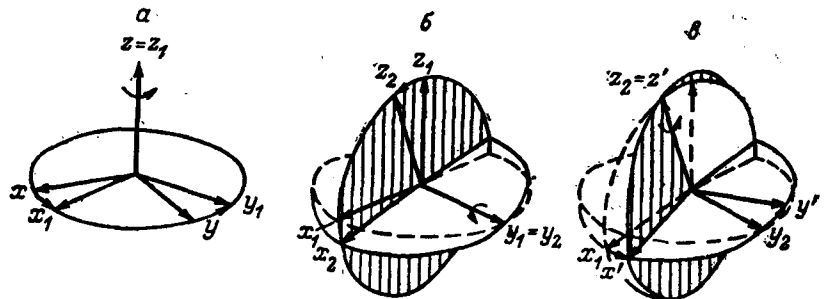


Рис. 1.3. Последовательность поворотов системы координат по схеме А.

Относительная ориентация исходных  $S \{x, y, z\}$  и новых  $S' \{x', y', z'\}$  координатных осей, получившаяся в результате поворота с помощью любого из двух указанных способов, показана на рис. 1.5.

Углы  $\alpha, \beta, \gamma$  называются углами Эйлера. Они полностью характеризуют поворот системы координат. Обратный поворот, переводящий систему координат  $S' \{x', y', z'\}$  в систему  $S \{x, y, z\}$ , описывается углами Эйлера  $-\gamma, -\beta, -\alpha$  или, что эквивалентно, углами  $\pi - \gamma, \beta, -\pi - \alpha$ . Иногда произвольный поворот системы координат получают с помощью другой последовательности вращений:

- поворот вокруг оси  $z$  на угол  $\alpha'$ .
- поворот вокруг новой оси  $x_1$  на угол  $\beta'$ .
- поворот вокруг новой оси  $z_2 = z'$  на угол  $\gamma'$ .

Углы  $\alpha'$ ,  $\beta'$ ,  $\gamma'$  описывают тот же поворот системы координат, что и углы Эйлера  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ , если

$$\alpha' = \alpha + \frac{\pi}{2}, \quad \beta' = \beta, \quad \gamma' = \gamma - \frac{\pi}{2}. \quad (1)$$

При повороте системы координат длина векторов остается постоянной, но меняются, вообще говоря, сферические углы  $\vartheta$ ,  $\varphi$ , определяющие направление этих векторов относительно координат-

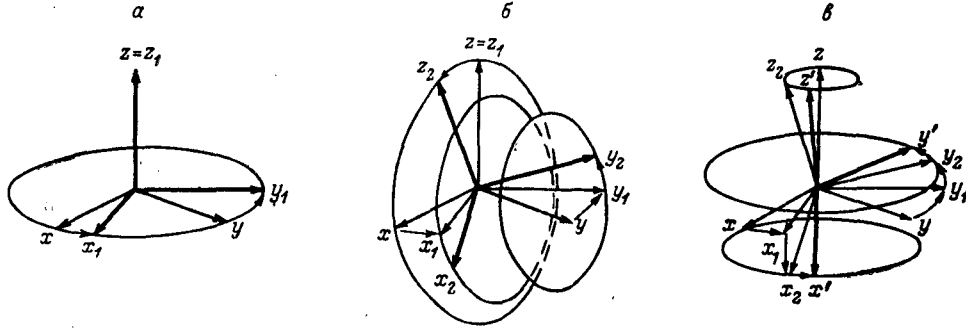


Рис. 1.4. Последовательность поворотов системы координат по схеме В.

ных осей. Связь углов  $\vartheta$ ,  $\varphi$  и  $\vartheta'$ ,  $\varphi'$ , характеризующих направление произвольного вектора в исходной  $S \{x, y, z\}$  и повернутой  $S' \{x', y', z'\}$  системах координат, дается формулами

$$\begin{aligned} \cos \vartheta' &= \cos \vartheta \cos \beta + \sin \vartheta \sin \beta \cos (\varphi - \alpha), \\ \operatorname{ctg} (\varphi' + \gamma) &= \operatorname{ctg} (\varphi - \alpha) \cos \beta - \frac{\operatorname{ctg} \vartheta \sin \beta}{\sin (\varphi - \alpha)}. \end{aligned} \quad (2)$$

Обратные соотношения имеют вид

$$\begin{aligned} \cos \vartheta &= \cos \vartheta' \cos \beta - \sin \vartheta' \sin \beta \cos (\varphi' + \gamma), \\ \operatorname{ctg} (\varphi - \alpha) &= \operatorname{ctg} (\varphi' + \gamma) \cos \beta + \frac{\operatorname{ctg} \vartheta' \sin \beta}{\sin (\varphi' + \gamma)}. \end{aligned} \quad (3)$$

## 2. Характеристика поворотов с помощью направления оси поворота и угла поворота

Произвольный поворот системы координат  $S \{x, y, z\} \rightarrow S' \{x', y', z'\}$  может быть получен с помощью одного поворота на угол  $\omega$  ( $0 \leq \omega \leq \pi$ ) вокруг оси, направление которой  $\mathbf{n}$  не совпадает, вообще говоря, с осями координат и характеризуется сферическими углами  $\Theta$ ,  $\Phi$  ( $0 \leq \Theta \leq \pi$ ,  $0 \leq \Phi < 2\pi$ ), одинаковыми в системах  $S \{x, y, z\}$  и  $S' \{x', y', z'\}$  (рис. 1.6).

Углы  $\omega$ ,  $\Theta$ ,  $\Phi$  полностью определяют относительную ориентацию исходных  $S \{x, y, z\}$  и новых  $S' \{x', y', z'\}$  координатных осей. Поворот на углы  $-\omega$ ,  $\pi - \Theta$ ,  $\pi + \Phi$  эквивалентен повороту на углы  $\omega$ ,  $\Theta$ ,  $\Phi$ . Обратный поворот, переводящий систему координат  $S' \{x', y', z'\}$  в  $S \{x, y, z\}$ , описывается углами  $-\omega$ ,  $\Theta$ ,  $\Phi$  или, что эквивалентно, углами  $\omega$ ,  $\pi - \Theta$ ,  $\pi + \Phi$ .

Направляющие косинусы орта  $\mathbf{n}$  ( $\Theta$ ,  $\Phi$ ) одинаковы в исходной системе  $S \{x, y, z\}$  и новой системе  $S' \{x', y', z'\}$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_x &= \mathbf{n} \cdot \mathbf{e}'_x = \sin \Theta \cos \Phi, \\ \mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_y &= \mathbf{n} \cdot \mathbf{e}'_y = \sin \Theta \sin \Phi, \\ \mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_z &= \mathbf{n} \cdot \mathbf{e}'_z = \cos \Theta. \end{aligned} \quad (4)$$

Для векторов, направление которых не совпадает с направлением  $\mathbf{n}$ , сферические углы  $\vartheta$ ,  $\varphi$  меняются при повороте системы координат. Связь углов  $\vartheta$ ,  $\varphi$  и  $\vartheta'$ ,  $\varphi'$ , характеризующих направление произвольного вектора в исходной  $S \{x, y, z\}$  и повернутой  $S' \{x', y', z'\}$  системах координат, дается формулами

$$\begin{aligned} \cos \vartheta' &= \cos \vartheta (\cos \omega \sin^2 \Theta + \cos^2 \Theta) + \sin \vartheta \sin \Theta [(1 - \cos \omega) \cos \Theta \cos (\varphi - \Phi) + \sin \omega \sin (\varphi - \Phi)], \\ \operatorname{ctg} (\varphi' - \Phi) &= \frac{\cos (\varphi - \Phi) [\cos \omega \cos^2 \Theta + \sin^2 \Theta] - \sin (\varphi - \Phi) \sin \omega \cos \Theta - \operatorname{ctg} \vartheta (\cos \omega - 1) \sin \Theta \cos \Theta}{\cos (\varphi - \Phi) \sin \omega \cos \Theta + \sin (\varphi - \Phi) \cos \omega - \operatorname{ctg} \vartheta \sin \omega \sin \Theta}. \end{aligned} \quad (5)$$

Обратные соотношения имеют вид

$$\cos \vartheta = \cos \vartheta' (\cos \omega \sin^2 \theta + \cos^2 \theta) + \sin \vartheta' \sin \theta [(1 - \cos \omega) \cos \theta \cos (\varphi' - \Phi) - \sin \omega \sin (\varphi' - \Phi)], \quad (6)$$

$$\operatorname{ctg} (\varphi - \Phi) = - \frac{\cos (\varphi' - \Phi) [\cos \omega \cos^2 \theta + \sin^2 \theta] + \sin (\varphi' - \Phi) \sin \omega \cos \theta - \operatorname{ctg} \vartheta' (\cos \omega - 1) \sin \theta \cos \theta}{\cos (\varphi' - \Phi) \sin \omega \cos \theta - \sin (\varphi' - \Phi) \cos \omega - \operatorname{ctg} \vartheta' \sin \omega \sin \theta}.$$

Использование параметров  $\omega$ ,  $\mathbf{n}$  ( $\theta$ ,  $\Phi$ ) для описания поворотов позволяет записать формулы преобразования радиус-вектора  $\mathbf{r}$  в компактном векторном виде (см. 1.4.6)

$$\begin{aligned} \mathbf{r}' &= \mathbf{r} \cos \omega + \mathbf{n} (\mathbf{n} \mathbf{r}) (1 - \cos \omega) + [\mathbf{n} \times \mathbf{r}] \sin \omega, \\ \mathbf{r} &= \mathbf{r}' \cos \omega + \mathbf{n} (\mathbf{n} \mathbf{r}') (1 - \cos \omega) - [\mathbf{n} \times \mathbf{r}'] \sin \omega. \end{aligned} \quad (7)$$

Формулы (5) и (6) получаются при проектировании (7) на координатные оси.

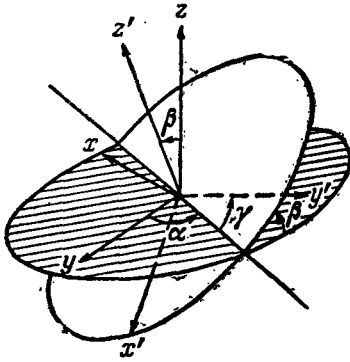


Рис. 1.5. Углы Эйлера  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ .

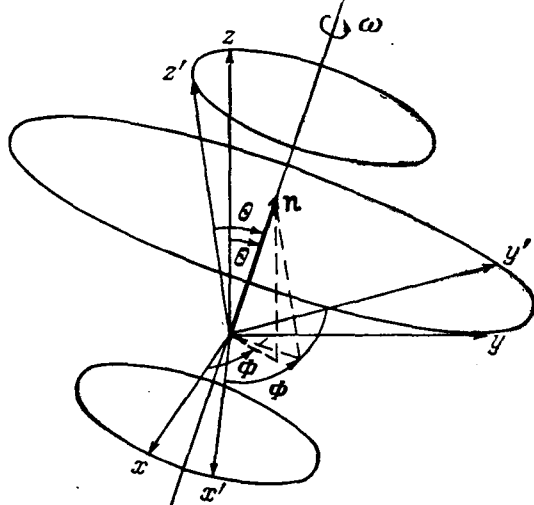


Рис. 1.6. Поворот системы координат на угол  $\omega$  вокруг оси  $\mathbf{n}$  ( $\theta$ ,  $\Phi$ ).

### 3. Характеристика поворотов с помощью унитарных матриц размерности $2 \times 2$ . Параметры Кэли—Клейна

Радиус-вектору произвольной точки  $\mathbf{r} = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z = \sum x_i \mathbf{e}_i$ , можно сопоставить эрмитовскую матрицу  $X$  размерности  $2 \times 2$ :

$$X = X^\dagger = \begin{pmatrix} z & x + iy \\ x - iy & -z \end{pmatrix} = \sum_{i=x,y,z} x_i \delta_i, \quad (8)$$

где  $\delta_i$  ( $i=x, y, z$ ) — транспонированные матрицы Паули (2.5 (4)). При этом

$$-\det X = \mathbf{r}^2 = x^2 + y^2 + z^2.$$

Повороту системы координат  $S \{x, y, z\} \rightarrow S' \{x', y', z'\}$  соответствует унитарное преобразование, переводящее матрицу  $X$  в матрицу  $X'$ :

$$X' = UXU^{-1}. \quad (9)$$

Матрица  $U$ , осуществляющая это преобразование, имеет размерность  $2 \times 2$ . Она унитарна и имеет определитель, равный единице:

$$U^\dagger = U^{-1}, \quad \det U = 1. \quad (10)$$

Унитарность матрицы  $U$  следует из вещественности радиуса-вектора  $\mathbf{r}$ , а условие  $\det U = 1$  обеспечивает сохранение длины радиуса-вектора при повороте системы координат.

В силу условий (10), матрица  $U$  имеет вид

$$U = \begin{pmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{pmatrix}, \quad (11)$$

где  $a$  и  $b$  — комплексные числа, удовлетворяющие условию

$$|a|^2 + |b|^2 = 1. \quad (12)$$

Таким образом, матрица  $U$  зависит от трех вещественных параметров. Величины  $a$  и  $b$  называются *параметрами Кэли—Клейна*. Они однозначно характеризуют поворот системы координат.

Обратное утверждение несправедливо, так как параметры  $-a$  и  $-b$  описывают тот же поворот, что и  $a$ ,  $b$ . Обратному повороту системы координат  $S' \{x', y', z'\} \rightarrow S \{x, y, z\}$  соответствует матрица

$$U^{-1} = U^+ = \begin{pmatrix} a^* & -b \\ b^* & a \end{pmatrix}. \quad (13)$$

Параметры Кэли—Клейна допускают и другую интерпретацию поворота системы координат. Рассмотрим сферу единичного диаметра с центром в начале координат. Каждой точке на этой сфере с координатами  $x, y, z$  (причем  $x^2 + y^2 + z^2 = \frac{1}{4}$ ) можно сопоставить точку на комплексной плоскости  $\zeta = \xi + i\eta$ , являющуюся *стереографической проекцией* точки  $x, y, z$  (рис. 1.7).

Величина  $\zeta$  связана с координатами  $x, y, z$  соотношением

$$\zeta = \frac{x + iy}{\frac{1}{2} - z} = \frac{\frac{1}{2} + z}{x - iy}. \quad (14)$$

Рис. 1.7. Стереографическая проекция точки на сфере.

Повороту системы координат, при котором координаты точки на сфере  $x, y, z$  переходят в  $x', y', z'$ , соответствует дробно-линейное преобразование в плоскости комплексной переменной

$$\zeta' = \frac{a\zeta + b}{-b^*\zeta + a^*}. \quad (15)$$

Коэффициентами этого дробно-линейного преобразования являются параметры Кэли—Клейна  $a, b$ .

#### 4. Связь между различными способами описания поворотов системы координат

а. Связь углов  $\omega, \Theta, \Phi$  с углами Эйлера  $\alpha, \beta, \gamma$

Углы  $\omega, \Theta, \Phi$  выражаются через углы Эйлера  $\alpha, \beta, \gamma$  по формулам

$$\cos \frac{\omega}{2} = \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\alpha + \gamma}{2},$$

$$\operatorname{tg} \Theta = \frac{\operatorname{tg} \frac{\beta}{2}}{\sin \frac{\alpha + \gamma}{2}}, \quad (16)$$

$$\Phi = \frac{\pi}{2} + \frac{\alpha - \gamma}{2}.$$

Обратные соотношения имеют вид

$$\begin{aligned}\sin \frac{\beta}{2} &= \sin \theta \sin \frac{\omega}{2}, \\ \operatorname{tg} \frac{\alpha + \gamma}{2} &= \cos \theta \operatorname{tg} \frac{\omega}{2}, \\ \frac{\alpha - \gamma}{2} &= \Phi - \frac{\pi}{2}.\end{aligned}\quad (17)$$

При переходе от переменных  $\alpha, \beta, \gamma$  к переменным  $\omega, \theta, \Phi$  и наоборот полезны следующие соотношения:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \alpha}{\partial \omega} &= \frac{\partial \gamma}{\partial \omega} = \frac{\cos \theta}{2 \cos^2 \frac{\beta}{2}}, & \frac{\partial \beta}{\partial \omega} &= \frac{\sin^2 \theta \sin \omega}{\sin \beta}, \\ \frac{\partial \alpha}{\partial \theta} &= \frac{\partial \gamma}{\partial \theta} = -\frac{1}{2} \operatorname{tg} \theta \sin (\alpha + \gamma), & \frac{\partial \beta}{\partial \theta} &= \frac{2 \sin 2\theta \sin^2 \frac{\omega}{2}}{\sin \beta}, \\ \frac{\partial \alpha}{\partial \Phi} &= -\frac{\partial \gamma}{\partial \Phi} = 1, & \frac{\partial \beta}{\partial \Phi} &= 0, \\ \frac{\partial \omega}{\partial \alpha} &= \frac{\partial \omega}{\partial \gamma} = \cos \theta, & \frac{\partial \omega}{\partial \beta} &= \frac{\operatorname{tg} \frac{\beta}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\omega}{2}}, \\ \frac{\partial \theta}{\partial \alpha} &= \frac{\partial \theta}{\partial \gamma} = -\frac{\sin \theta}{2 \operatorname{tg} \frac{\omega}{2}}, & \frac{\partial \theta}{\partial \beta} &= \frac{\cos \theta \sin \theta}{\sin \beta}, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha} &= -\frac{\partial \Phi}{\partial \gamma} = \frac{1}{2}, & \frac{\partial \Phi}{\partial \beta} &= 0.\end{aligned}\quad (18)$$

Якобиан преобразования

$$\left\| \frac{\partial (\alpha, \beta, \gamma)}{\partial (\omega, \theta, \Phi)} \right\| = \left\| \frac{\partial (\omega, \theta, \Phi)}{\partial (\alpha, \beta, \gamma)} \right\|^{-1} = \frac{4 \sin \theta}{\sin \beta} \sin^2 \frac{\omega}{2}.\quad (19)$$

Элемент объема группы трехмерных вращений

$$dR \equiv \sin \beta d\alpha d\beta d\gamma = 4 \sin^2 \frac{\omega}{2} d\omega \sin \theta d\theta d\Phi.\quad (20)$$

Полный объем группы трехмерных вращений

$$\int dR = \int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^{\pi} \sin \beta d\beta \int_0^{2\pi} d\gamma = 4 \int_0^{\pi} \sin^2 \frac{\omega}{2} d\omega \int_0^{\pi} \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\Phi = 8\pi^2.\quad (21)$$

б. Связь параметров Кэли—Клейна  $a, b$  с углами Эйлера  $\alpha, \beta, \gamma$

Параметры  $a, b$  выражаются через углы Эйлера  $\alpha, \beta, \gamma$  по формулам

$$\begin{aligned}a &= \cos \frac{\beta}{2} e^{-i \frac{\alpha + \gamma}{2}}, \\ b &= \sin \frac{\beta}{2} e^{i \frac{\alpha - \gamma}{2}}.\end{aligned}\quad (22)$$

Обратные соотношения имеют вид

$$\begin{aligned}\cos \beta &= |a|^2 - |b|^2, \quad \cos \frac{\beta}{2} = |a|, \quad \sin \frac{\beta}{2} = |b|, \\ \operatorname{ctg} \frac{\alpha + \gamma}{2} &= -\frac{\operatorname{Re} a}{\operatorname{Im} a}, \quad \operatorname{ctg} \frac{\alpha - \gamma}{2} = \frac{\operatorname{Re} b}{\operatorname{Im} b}.\end{aligned}\quad (23)$$

Параметры  $a$  и  $b$  выражаются через  $D$ -функции Вигнера (см. гл. 4):

$$a = D_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}^{1/2}(a, \beta, \gamma), \quad b = D_{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}}^{1/2}(a, \beta, \gamma). \quad (25)$$

При этом унитарная матрица  $U$ , согласно (11), совпадает с транспонированной матрицей поворота  $\hat{D}^{1/2}(a, \beta, \gamma)$  для спиновых функций частиц со спином  $1/2$  (см. 2.5 (32)).

в. Связь параметров Кэли—Клейна  $a, b$  с углами  $\omega, \Theta, \Phi$

Параметры Кэли—Клейна  $a, b$  выражаются через углы  $\omega, \Theta, \Phi$  следующим образом:

$$\begin{aligned} a &= \cos \frac{\omega}{2} - i \sin \frac{\omega}{2} \cos \Theta, \\ b &= -i \sin \frac{\omega}{2} \sin \Theta e^{i\Phi}. \end{aligned} \quad (26)$$

Обратные соотношения имеют вид

$$\begin{aligned} \cos \omega &= 2(\operatorname{Re} a)^2 - 1, \quad \cos \frac{\omega}{2} = \operatorname{Re} a, \\ \cos \Theta &= -\frac{\operatorname{Im} a}{\sqrt{1 - (\operatorname{Re} a)^2}}, \\ \operatorname{ctg} \Phi &= -\frac{\operatorname{Im} b}{\operatorname{Re} b}. \end{aligned} \quad (27)$$

Унитарная матрица  $U$ , согласно (11), совпадает с транспонированной матрицей поворота  $\hat{U}^{1/2}(\omega; \Theta, \Phi)$  для спиновых функций частиц со спином  $1/2$  (см. 2.5 (36)).

## 5. Оператор поворота

Преобразование различных квантовомеханических величин при повороте системы координат определяется действием на них оператора поворота  $\hat{D}(a, \beta, \gamma)$  или  $\hat{U}(\omega, \Theta, \Phi)$ .

Волновые функции (векторы состояний)  $\Psi'$  и операторы  $O'$  в повернутой системе координат выражаются через соответствующие величины  $\Psi, O$  в исходной системе координат по формулам

$$\Psi' = \hat{D}(a, \beta, \gamma) \Psi, \quad O' = \hat{D}(a, \beta, \gamma) O [\hat{D}(a, \beta, \gamma)]^{-1}, \quad (28)$$

$$\Psi' = \hat{U}(\omega; \Theta, \Phi) \Psi, \quad O' = \hat{U}(\omega, \Theta, \Phi) O [U(\omega; \Theta, \Phi)]^{-1}. \quad (29)$$

Если в качестве параметров, характеризующих поворот, выбраны углы Эйлера  $\alpha, \beta, \gamma$ , то оператор поворота  $\hat{D}(a, \beta, \gamma)$  может быть записан в виде

$$\hat{D}(a, \beta, \gamma) = e^{-i\gamma \hat{J}_z'} e^{-i\beta \hat{J}_y} e^{-i\alpha \hat{J}_z}, \quad (30)$$

или в эквивалентном виде

$$\hat{D}(a, \beta, \gamma) = e^{-i\alpha \hat{J}_z} e^{-i\beta \hat{J}_y} e^{-i\gamma \hat{J}_z}. \quad (31)$$

Здесь  $\hat{J}_i$  — проекция оператора полного момента количества движения (см. гл. 2) на ось  $i$ . Эквивалентность (30) и (31) следует из того, что, согласно (28),

$$\begin{aligned} e^{-i\beta \hat{J}_y} \hat{J}_x e^{i\beta \hat{J}_y} &= \hat{D}(a, 0, 0) e^{-i\beta \hat{J}_y} [\hat{D}(a, 0, 0)]^{-1} = e^{-i\alpha \hat{J}_z} e^{-i\beta \hat{J}_y} e^{i\alpha \hat{J}_z}, \\ e^{-i\gamma \hat{J}_z'} \hat{J}_x e^{i\gamma \hat{J}_z'} &= \hat{D}(a, \beta, 0) e^{-i\gamma \hat{J}_z} [\hat{D}(a, \beta, 0)]^{-1} = e^{-i\alpha \hat{J}_z} e^{-i\beta \hat{J}_y} e^{-i\gamma \hat{J}_z} e^{i\beta \hat{J}_y} e^{i\alpha \hat{J}_z}. \end{aligned} \quad (32)$$

Если в качестве параметров, характеризующих поворот системы координат, выбраны направления оси поворота  $\mathbf{n}$  ( $\Theta, \Phi$ ) и угол поворота  $\omega$ , то оператор поворота  $\hat{U}$  может быть записан в виде

$$\hat{U}(\omega; \Theta, \Phi) = e^{-i\omega \mathbf{n} \cdot \hat{\mathbf{J}}}, \quad (33)$$

где  $\hat{\mathbf{J}}$  — оператор полного момента количества движения (гл. 2). Заметим, что  $\hat{D}(a, \beta, \gamma) \equiv \hat{U}(\omega; \Theta, \Phi)$ .

Оператор поворота, записанный в виде (30), (31) или (33), является унитарным оператором

$$\begin{aligned} \hat{D}^+(a, \beta, \gamma) &= [\hat{D}(a, \beta, \gamma)]^{-1} = \hat{D}(\pi - \gamma, \beta, -\pi - \alpha) = \hat{D}(-\gamma, -\beta, -\alpha), \\ \hat{U}^+(\omega; \Theta, \Phi) &= [\hat{U}(\omega; \Theta, \Phi)]^{-1} = \hat{U}(\omega; \pi - \Theta, \pi + \Phi) = \hat{U}(-\omega; \Theta, \Phi). \end{aligned} \quad (34)$$

Матричными элементами оператора  $\hat{D}$  между состояниями с определенными значениями полного момента и его проекции на ось  $z$  являются  $D$ -функции Вигнера (см. гл. 4).

$$\langle J'M' | \hat{D}(\alpha, \beta, \gamma) | JM \rangle = \delta_{JJ'} D_{M'M}^J(\alpha, \beta, \gamma). \quad (35)$$

Матричными элементами оператора  $\hat{D}$  между состояниями, волновые функции которых — декартовы орты  $e_i$  ( $i = x, y, z$ ), являются коэффициенты матрицы поворота  $a_{ik}$  (см. 1.4.6):

$$\langle e_i | \hat{D}(\alpha, \beta, \gamma) | e_k \rangle = a_{ik}, \quad (i, k = x, y, z). \quad (36)$$

Действие оператора поворота на различные волновые функции и операторы квантовомеханических величин рассмотрено в главах 3, 5—7.

## 6. Преобразование векторов и тензоров при повороте системы координат. Матрица поворота $a$

Произвольный вектор  $\mathbf{A}$  может быть записан в виде столбца

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix}, \quad (37)$$

где  $A_x$ ,  $A_y$  и  $A_z$  — декартовы компоненты вектора  $\mathbf{A}$ . В этом представлении декартовы орты  $e_x$ ,  $e_y$ ,  $e_z$  имеют вид

$$e_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (38)$$

Действие оператора поворота на векторы, записанные в таком виде, эквивалентно действию некоторой матрицы  $a$  размерности  $3 \times 3$ , которая является одним из представлений оператора поворота

$$a = \begin{pmatrix} a_{xx} & a_{xy} & a_{xz} \\ a_{yx} & a_{yy} & a_{yz} \\ a_{zx} & a_{zy} & a_{zz} \end{pmatrix}. \quad (39)$$

Матрица  $a$  является вещественной, унитарной и ортогональной. Вещественность матрицы  $a$  означает

$$a^* = a, \quad a_{ik}^* = a_{ik}, \quad (i, k = x, y, z). \quad (40)$$

Унитарность матрицы  $a$

$$a^+ a = a a^+ = 1 \quad (41)$$

наряду с ее вещественностью  $a^* = a$  приводит к условию ортогональности

$$\bar{a} a = a \bar{a} = 1, \quad (42)$$

где  $\bar{a}$  — матрица, полученная из  $a$  транспонированием. Формула (42) означает, что коэффициенты  $a_{ik}$  удовлетворяют шести независимым условиям

$$\sum_i a_{ik} a_{il} = \delta_{kl}, \quad (i, k, l = x, y, z), \quad (43)$$

или эквивалентным им условиям

$$\sum_k a_{ik} a_{lk} = \delta_{il}, \quad (i, k, l = x, y, z). \quad (44)$$

Условия (43) или (44) приводят к тому, что только 3 из 9 коэффициентов  $a_{ik}$  являются независимыми. Это согласуется с тем, что произвольный поворот системы координат полностью характеризуется тремя вещественными параметрами.

Определитель матрицы  $a$  равен 1:

$$\det a = \begin{vmatrix} a_{xx} & a_{xy} & a_{xz} \\ a_{yx} & a_{yy} & a_{yz} \\ a_{zx} & a_{zy} & a_{zz} \end{vmatrix} = 1. \quad (45)$$

Связь декартовых ортов  $e'_i$  повернутой системы координат  $S'$  с ортами  $e_k$  исходной системы координат  $S$  дается формулой

$$e'_i = a e_i = \sum_k a_{ki} e_k. \quad (i, k = x, y, z). \quad (46)$$

Закон преобразования декартовых компонент вектора выражается следующим образом:

$$A'_i = \sum_k a_{ik} A_k, \quad (i, k = x, y, z). \quad (47)$$

Здесь  $A_k$  — компоненты вектора  $\mathbf{A}$  в исходной системе координат,  $A'_i$  — компоненты этого же вектора в повернутой системе координат. Условия (43) и (44) обеспечивают сохранение длины вектора  $\mathbf{A}$  при повороте.

Для декартовых компонент тензора  $n$ -го ранга ( $n$  — целое) закон преобразования имеет вид

$$A'_{i_1 i_2 \dots i_n} = \sum_{k_1 k_2 \dots k_n} a_{i_1 k_1} a_{i_2 k_2} \dots a_{i_n k_n} A_{k_1 k_2 \dots k_n}. \quad (48)$$

Обратное преобразование, соответствующее повороту  $S' \rightarrow S$ , осуществляется с помощью транспонированной матрицы  $\tilde{a} = a^{-1}$ . Формулы, обратные (46) — (48), выражающие величины в исходной системе координат  $S$  через те же величины в повернутой системе координат  $S'$ , записываются как

$$e_k = \sum_i a_{ki} e'_i, \quad (i, k = x, y, z). \quad (49)$$

$$A_k = \sum_i a_{ik} A'_i, \quad (i, k = x, y, z), \quad (50)$$

$$A_{k_1 k_2 \dots k_n} = \sum_{i_1 i_2 \dots i_n} a_{i_1 k_1} a_{i_2 k_2} \dots a_{i_n k_n} A'_{i_1 i_2 \dots i_n}, \quad (i_1, k_1, i_2, k_2, \dots, i_n, k_n = x, y, z). \quad (51)$$

Элементы матрицы поворота  $a_{ik}$  могут быть вычислены по формуле

$$a_{ik} = e_i e'_k, \quad (i, k = x, y, z). \quad (52)$$

Таким образом, коэффициенты  $a_{ik}$  являются косинусами углов между ортами исходной и повернутой систем координат. Эквивалентное определение  $a_{ik}$  через компоненты радиус-вектора  $\mathbf{r}$  в исходной и повернутой системах координат имеет вид

$$a_{ik} = \frac{\partial x'_i}{\partial x_k} = \frac{\partial x_k}{\partial x'_i}, \quad (x'_i, x_k = x, y, z). \quad (53)$$

Матрица поворота  $a$  выражается через углы Эйлера по формуле

$$a = \begin{pmatrix} \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma - \sin \alpha \sin \gamma & -\cos \alpha \cos \beta \sin \gamma - \sin \alpha \cos \gamma & \cos \alpha \sin \beta \\ \sin \alpha \cos \beta \cos \gamma + \cos \alpha \sin \gamma & -\sin \alpha \cos \beta \sin \gamma + \cos \alpha \cos \gamma & \sin \alpha \sin \beta \\ -\sin \beta \cos \gamma & \sin \beta \sin \gamma & \cos \beta \end{pmatrix}. \quad (54)$$

Обратная матрица  $a^{-1}$  получается из (54) транспонированием или, что эквивалентно, заменой углов Эйлера  $\alpha, \beta, \gamma \rightarrow -\gamma, -\beta, -\alpha$ . Выражение матрицы поворота  $a$  через углы  $\Theta, \Phi$ , характеризующие направление оси вращения, и угол поворота  $\omega$  имеет следующий вид:

$$a = \begin{pmatrix} (1 - \cos \omega) \sin^2 \Theta \cos^2 \Phi + \cos \omega \\ (1 - \cos \omega) \sin^2 \Theta \cos \Phi \sin \Phi + \sin \omega \cos \Theta \\ (1 - \cos \omega) \sin \Theta \cos \Theta \cos \Phi - \sin \omega \sin \Theta \sin \Phi \\ (1 - \cos \omega) \sin^2 \Theta \cos \Phi \sin \Phi - \sin \omega \cos \Theta & (1 - \cos \omega) \sin \Theta \cos \Theta \cos \Phi + \sin \omega \sin \Theta \sin \Phi \\ (1 - \cos \omega) \sin^2 \Theta \sin^2 \Phi + \cos \omega & (1 - \cos \omega) \sin \Theta \cos \Theta \sin \Phi - \sin \omega \sin \Theta \cos \Phi \\ (1 - \cos \omega) \sin \Theta \cos \Theta \sin \Phi + \sin \omega \sin \Theta \cos \Phi & (1 - \cos \omega) \cos^2 \Theta + \cos \omega \end{pmatrix}. \quad (55)$$

Формулу (55) можно написать и как разложение

$$a = \cos \omega \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + (1 - \cos \omega) \begin{pmatrix} n_x^2 & n_x n_y & n_x n_z \\ n_y n_x & n_y^2 & n_y n_z \\ n_z n_x & n_z n_y & n_z^2 \end{pmatrix} + \sin \omega \begin{pmatrix} 0 & -n_z & n_y \\ n_x & 0 & -n_x \\ -n_y & n_x & 0 \end{pmatrix}, \quad (56)$$



где  $n_x, n_y, n_z$  — проекции орта  $\mathbf{n}$ , характеризующего направление оси поворота (4). Из (56) получается следующее выражение для матричных элементов  $a_{ik}$ :

$$a_{ik} = \cos \omega \delta_{ik} + (1 - \cos \omega) n_i n_k - \sin \omega \varepsilon_{ikl} n_l, \quad (i, k, l = x, y, z). \quad (57)$$

Обратная матрица  $a^{-1}$  получается из (55) и (56) транспонированием, а также, что эквивалентно, заменой  $\omega, \Theta, \Phi \rightarrow -\omega, \Theta, \Phi$  или  $\omega, \Theta, \Phi \rightarrow \omega, \pi - \Theta, \pi + \Phi$ . Формулы, обратные (57), позволяющие выразить углы  $\omega, \Theta, \Phi$  через матричные элементы  $a_{ik}$ , имеют вид

$$\begin{aligned} \cos \omega &= \frac{1}{2} [\text{Sp } a - 1] = \frac{1}{2} (a_{xx} + a_{yy} + a_{zz} - 1), \\ n_x \sin \omega &\equiv \sin \omega \sin \Theta \cos \Phi = \frac{1}{2} (a_{zy} - a_{yz}), \\ n_y \sin \omega &\equiv \sin \omega \sin \Theta \sin \Phi = \frac{1}{2} (a_{xz} - a_{zx}), \\ n_z \sin \omega &\equiv \sin \omega \cos \Theta = \frac{1}{2} (a_{yx} - a_{xy}), \\ n_i \sin \omega &= -\frac{1}{2} \sum_{kl} \varepsilon_{ikl} a_{kl}, \quad (i, k, l = x, y, z). \end{aligned} \quad (58)$$

Выражение матрицы поворота  $a$  через параметры Кэли—Клейна  $a, b$ :

$$a = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(a^2 - b^2 + a^{*2} - b^{*2}) & \frac{i}{2}(-a^2 + b^2 + a^{*2} - b^{*2}) & ab^* + a^*b \\ \frac{i}{2}(a^2 + b^2 - a^{*2} - b^{*2}) & \frac{1}{2}(a^2 + b^2 + a^{*2} + b^{*2}) & i(ab^* - a^*b) \\ -(ab + a^*b^*) & i(ab - a^*b^*) & aa^* - bb^* \end{pmatrix}. \quad (59)$$

Отметим, что параметрам  $a, b$  и  $-a, -b$  соответствует одна и та же матрица поворота.

#### Частные случаи матрицы поворота $a$

а. Поворот на угол  $\Psi$  вокруг оси  $x$ :

$$a_x(\Psi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \Psi & -\sin \Psi \\ 0 & \sin \Psi & \cos \Psi \end{pmatrix}. \quad (60)$$

б. Поворот на угол  $\Psi$  вокруг оси  $y$ :

$$a_y(\Psi) = \begin{pmatrix} \cos \Psi & 0 & \sin \Psi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \Psi & 0 & \cos \Psi \end{pmatrix}. \quad (61)$$

в. Поворот на угол  $\Psi$  вокруг оси  $z$ :

$$a_z(\Psi) = \begin{pmatrix} \cos \Psi & -\sin \Psi & 0 \\ \sin \Psi & \cos \Psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (62)$$

В случае поворота, характеризуемого углами Эйлера  $\alpha, \beta, \gamma$ , матрица поворота в соответствии с формулой (31) может быть представлена в виде

$$a = a_n(\omega) = a_x(\alpha) a_y(\beta) a_z(\gamma). \quad (63)$$

Формула (63) является частным случаем сложения поворотов системы координат (см. 1.4.7).

### 7. Сложение поворотов

Рассмотрим два последовательных поворота системы координат. Пусть первый поворот переводит систему  $S \{x, y, z\}$  в  $S' \{x', y', z'\}$ , а второй — систему  $S' \{x', y', z'\}$  в  $S'' \{x'', y'', z''\}$ . Выразим параметры, характеризующие результирующий поворот  $S \{x, y, z\} \rightarrow S'' \{x'', y'', z''\}$ , через параметры, характеризующие повороты  $S \{x, y, z\} \rightarrow S' \{x', y', z'\}$  и  $S' \{x', y', z'\} \rightarrow S'' \{x'', y'', z''\}$ .

## а. Описание поворотов с помощью углов Эйлера

Пусть оба поворота производятся по схеме  $B$  (стр. 21), первый поворот  $S\{x, y, z\} \rightarrow S'\{x', y', z'\}$  характеризуется углами Эйлера  $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ , второй  $S'\{x', y', z'\} \rightarrow S''\{x'', y'', z''\}$  — углами Эйлера  $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ , а результирующий поворот  $S\{x, y, z\} \rightarrow S''\{x'', y'', z''\}$  — углами Эйлера  $\alpha, \beta, \gamma$ . Углы результирующего поворота  $\alpha, \beta, \gamma$ , также как углы первого поворота  $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$  и второго поворота  $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ , отсчитываются от положения исходной системы координат  $S\{x, y, z\}$ .

Оператор результирующего поворота имеет вид

$$\hat{D}(\alpha, \beta, \gamma) = \hat{D}(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2) \hat{D}(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1) \quad (64)$$

или в развернутой записи

$$e^{-i\alpha\hat{J}_z} e^{-i\beta\hat{J}_y} e^{-i\gamma\hat{J}_z} = e^{-i\alpha_2\hat{J}_z} e^{-i\beta_2\hat{J}_y} e^{-i\gamma_2\hat{J}_z} e^{-i\alpha_1\hat{J}_z} e^{-i\beta_1\hat{J}_y} e^{-i\gamma_1\hat{J}_z}. \quad (65)$$

В формуле (65)  $\hat{J}_i$  является проекцией оператора полного момента на ось  $i$  исходной системы координат  $S\{x, y, z\}$ . Углы результирующего поворота  $\alpha, \beta, \gamma$  выражаются через углы  $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$  и  $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$  по формулам

$$\begin{aligned} \operatorname{ctg}(\alpha - \alpha_2) &= \cos \beta_2 \operatorname{ctg}(\alpha_1 + \gamma_2) + \operatorname{ctg} \beta_1 \frac{\sin \beta_2}{\sin(\alpha_1 + \gamma_2)}, \\ \cos \beta &= \cos \beta_1 \cos \beta_2 - \sin \beta_1 \sin \beta_2 \cos(\alpha_1 + \gamma_2), \\ \operatorname{ctg}(\gamma - \gamma_1) &= \cos \beta_1 \operatorname{ctg}(\alpha_1 + \gamma_2) + \operatorname{ctg} \beta_2 \frac{\sin \beta_1}{\sin(\alpha_1 + \gamma_2)}. \end{aligned} \quad (66)$$

При вычислении углов результирующего поворота оказываются полезными также следующие соотношения:

$$\frac{\sin(\alpha - \alpha_2)}{\sin \beta_1} = \frac{\sin(\gamma - \gamma_1)}{\sin \beta_2} = \frac{\sin(\alpha_1 + \gamma_2)}{\sin \beta}, \quad (67)$$

$$\begin{aligned} \cos \beta_1 &= \cos \beta \cos \beta_2 + \sin \beta \sin \beta_2 \cos(\alpha - \alpha_2), \\ \cos \beta_2 &= \cos \beta \cos \beta_1 + \sin \beta \sin \beta_1 \cos(\gamma - \gamma_1), \\ \cos \beta &= \cos \beta_1 \cos \beta_2 - \sin \beta_1 \sin \beta_2 \cos(\alpha_1 + \gamma_2), \end{aligned} \quad (68)$$

$$\begin{aligned} \cos(\gamma - \gamma_1) &= \cos(\alpha_1 + \gamma_2) \cos(\alpha - \alpha_2) + \sin(\alpha_1 + \gamma_2) \sin(\alpha - \alpha_2) \cos \beta_2, \\ \cos(\alpha - \alpha_2) &= \cos(\alpha_1 + \gamma_2) \cos(\gamma - \gamma_1) + \sin(\alpha_1 + \gamma_2) \sin(\gamma - \gamma_1) \cos \beta_1, \\ \cos(\alpha_1 + \gamma_2) &= \cos(\gamma - \gamma_1) \cos(\alpha - \alpha_2) - \sin(\gamma - \gamma_1) \sin(\alpha - \alpha_2) \cos \beta. \end{aligned} \quad (69)$$

$$\begin{aligned} \frac{\operatorname{tg} \frac{\beta - \beta_1}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\beta + \beta_1}{2}} &= \frac{\operatorname{tg} \frac{\alpha_1 + \gamma_2 + \alpha - \alpha_2}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\alpha_1 + \gamma_2 - \alpha + \alpha_2}{2}}, \\ \frac{\operatorname{tg} \frac{\beta - \beta_2}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\beta + \beta_2}{2}} &= \frac{\operatorname{tg} \frac{\alpha_1 + \gamma_2 + \gamma - \gamma_1}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\alpha_1 + \gamma_2 - \gamma + \gamma_1}{2}}, \\ \frac{\operatorname{tg} \frac{\beta_1 - \beta_2}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\beta_1 + \beta_2}{2}} &= \frac{\operatorname{tg} \frac{\alpha - \alpha_2 + \gamma - \gamma_1}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\alpha - \alpha_2 - \gamma + \gamma_1}{2}}. \end{aligned} \quad (70)$$

Формулы (67)—(70) допускают простое истолкование в терминах геометрии на сфере. Каждый поворот можно полностью охарактеризовать, указав на сфере точку, через которую проходит новая ось  $z'$ , и направление орта оси  $x'$ , лежащего в плоскости, касательной к сфере в данной точке. Определение углов результирующего поворота в этом случае сводится к построению соответствующего сферического треугольника (рис. 1.8). Соотношения (67)—(70) являются формулами синусов, косинусов и тангенсов для сферического треугольника.

Другое выражение для углов результирующего поворота получается в том случае, когда повороты производятся по схеме  $B$  (стр. 21), но углы Эйлера  $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ , характеризующие второй поворот  $S'\{x', y', z'\} \rightarrow S''\{x'', y'', z''\}$ , отсчитываются от положения системы  $S'\{x', y', z'\}$ , а не исходной системы  $S$ . В этом случае оператор результирующего поворота имеет вид

$$\hat{D}(\alpha, \beta, \gamma) = \hat{D}'(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2) \hat{D}(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1), \quad (71)$$

где штрих означает, что оператор второго поворота отнесен к системе координат  $S' \{x', y', z'\}$ . Согласно формуле (28), оператор  $\hat{D}'$  связан с оператором в исходной системе координат соотношением

$$\hat{D}'(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2) = \hat{D}(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1) \hat{D}(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2) [\hat{D}(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)]^{-1}. \quad (72)$$

Подставляя это выражение в (71), получим

$$\hat{D}(\alpha, \beta, \gamma) = \hat{D}(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1) \hat{D}(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2), \quad (73)$$

т. е. оператор результирующего поворота отличается от (64) порядком сомножителей. Таким образом, при подобном способе описания последовательных поворотов, углы Эйлера результирующего поворота  $\alpha, \beta, \gamma$  будут даваться формулами (66)—(70), в которых нужно произвести замену индексов  $1 \rightleftharpoons 2$ . Наконец, если последовательные повороты производятся по схеме А (стр. 20), т. е. каждый поворот совершается вокруг соответствующей новой оси, то оператор результирующего поворота имеет вид (73). В этом случае углы Эйлера результирующего поворота  $\alpha, \beta, \gamma$  также даются формулами (66)—(70), в которых произведена замена индексов  $1 \rightleftharpoons 2$ .

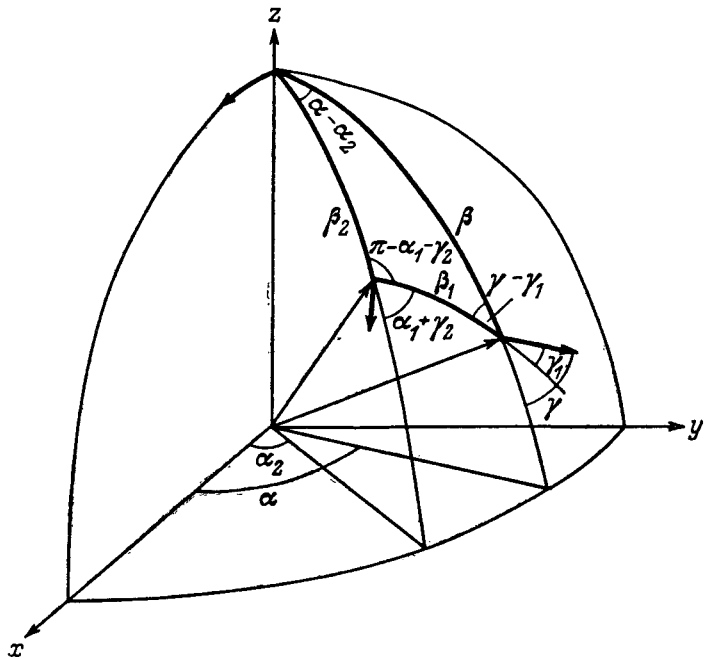


Рис. 1.8. Сложение поворотов в терминах сферической геометрии.

б. Описание поворотов заданием оси поворота  $\mathbf{n}(\Theta, \Phi)$  и угла поворота  $\omega$

Пусть первый поворот  $S\{x, y, z\} \rightarrow S'\{x', y', z'\}$  производится вокруг оси  $\mathbf{n}_1$  на угол  $\omega_1$ , а второй поворот  $S'\{x', y', z'\} \rightarrow S''\{x'', y'', z''\}$  вокруг оси  $\mathbf{n}_2$  на угол  $\omega_2$ .

Результирующий поворот  $S\{x, y, z\} \rightarrow S''\{x'', y'', z''\}$  можно рассматривать как один поворот вокруг оси  $\mathbf{n}$  на угол  $\omega$ . Оператор результирующего поворота имеет вид

$$e^{-i\omega\mathbf{n} \cdot \hat{\mathbf{J}}} = e^{-i\omega_2\mathbf{n}_2 \cdot \hat{\mathbf{J}}} e^{-i\omega_1\mathbf{n}_1 \cdot \hat{\mathbf{J}}}. \quad (74)$$

Угол результирующего поворота  $\omega$  и направление оси результирующего поворота  $\mathbf{n}$  даются формулами

$$\cos \frac{\omega}{2} = \cos \frac{\omega_1}{2} \cos \frac{\omega_2}{2} - (\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2) \sin \frac{\omega_1}{2} \sin \frac{\omega_2}{2}, \quad (75)$$

$$\mathbf{n} \sin \frac{\omega}{2} = \mathbf{n}_1 \sin \frac{\omega_1}{2} \cos \frac{\omega_2}{2} + \mathbf{n}_2 \sin \frac{\omega_2}{2} \cos \frac{\omega_1}{2} - [\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2] \sin \frac{\omega_1}{2} \sin \frac{\omega_2}{2}.$$

Из (75) видно, что результирующий поворот не зависит от порядка, в котором производились оба поворота, (т. е. операторы поворотов коммутируют) тогда и только тогда, когда  $\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2 = 0$ , т. е. оси обоих поворотов параллельны или антипараллельны. В этом случае

$$\omega = \omega_1 \pm \omega_2.$$

Если направление осей поворота  $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2$ , и  $\mathbf{n}$  задано сферическими углами  $\Theta_1, \Phi_1, \Theta_2, \Phi_2$  и  $\Theta, \Phi$  соответственно, причем сферические углы отсчитываются от положения исходной системы координат  $S\{x, y, z\}$ , то

$$\cos \frac{\omega}{2} = \cos \frac{\omega_1}{2} \cos \frac{\omega_2}{2} - \sin \frac{\omega_1}{2} \sin \frac{\omega_2}{2} [\cos \Theta_1 \cos \Theta_2 + \sin \Theta_1 \sin \Theta_2 \cos (\Phi_1 - \Phi_2)],$$

$$\sin \frac{\omega}{2} \cos \Theta = \sin \frac{\omega_1}{2} \cos \frac{\omega_2}{2} \cos \Theta_1 + \sin \frac{\omega_2}{2} \cos \frac{\omega_1}{2} \cos \Theta_2 +$$

$$+ \sin \frac{\omega_1}{2} \sin \frac{\omega_2}{2} \sin \Theta_1 \sin \Theta_2 \sin (\Phi_1 - \Phi_2), \quad (76)$$

$$\operatorname{ctg} \Phi = \frac{\sin \Theta_1 \left( \operatorname{ctg} \frac{\omega_2}{2} \cos \Phi_1 - \cos \Theta_2 \sin \Phi_1 \right) + \sin \Theta_2 \left( \operatorname{ctg} \frac{\omega_1}{2} \cos \Phi_2 + \cos \Theta_1 \sin \Phi_2 \right)}{\sin \Theta_1 \left( \operatorname{ctg} \frac{\omega_2}{2} \sin \Phi_1 + \cos \Theta_2 \cos \Phi_1 \right) + \sin \Theta_2 \left( \operatorname{ctg} \frac{\omega_1}{2} \sin \Phi_2 - \cos \Theta_1 \cos \Phi_2 \right)}.$$

Если направление осей поворота  $\mathbf{n}_1$  и  $\mathbf{n}$  задано сферическими углами  $\Theta_1, \Phi_1$  и  $\Theta, \Phi$  в исходной системе координат  $S \{x, y, z\}$ , а направление оси второго поворота  $\mathbf{n}_2$  задано сферическими углами  $\Theta_2, \Phi_2$  в промежуточной системе координат  $S' \{x', y', z'\}$ , то углы  $\omega, \Theta, \Phi$  результирующего поворота будут даваться формулами (76), в которых нужно произвести замену индексов  $1 \rightleftharpoons 2$ , аналогично тому, как это имело место при задании поворотов с помощью углов Эйлера.

в. Описание поворотов с помощью параметров Кэли—Клейна

Пусть первый поворот  $S \{x, y, z\} \rightarrow S' \{x', y', z'\}$  характеризуется параметрами Кэли—Клейна  $a_1, b_1$  (1.4.3), а второй поворот  $S' \{x', y', z'\} \rightarrow S'' \{x'', y'', z''\}$  — параметрами  $a_2, b_2$ . Результирующий поворот  $S \{x, y, z\} \rightarrow S'' \{x'', y'', z''\}$  характеризуется параметрами  $a, b$ , где

$$\begin{aligned} a &= a_1 a_2 - b_1^* b_2, \\ b &= a_1^* b_2 + b_1 a_2. \end{aligned} \quad (77)$$

Матрица  $U$  (14), описывающая результирующий поворот, является произведением матриц, описывающих первый и второй повороты:

$$U(a, b) = U(a_2, b_2) U(a_1, b_1). \quad (78)$$

г. Теорема сложения для матрицы поворота  $a$

Произведем два последовательных поворота системы координат  $S \{x, y, z\} \rightarrow S' \{x', y', z'\} \rightarrow S'' \{x'', y'', z''\}$ . Матрица  $a$ , осуществляющая преобразование декартовых компонент векторов и тензоров (см. 1.4.6) и соответствующая результирующему повороту  $S \{x, y, z\} \rightarrow S'' \{x'', y'', z''\}$ , является произведением матриц  $a(1)$  и  $a(2)$ , соответствующих первому и второму повороту. Порядок сомножителей  $a(1)$  и  $a(2)$  зависит от способа отсчета углов, характеризующих повороты. Если все эти углы отсчитываются от положения исходной системы координат  $S \{x, y, z\}$ , т. е. оператор результирующего поворота дается формулой (64), то

$$a = a(2) a(1) \quad (79)$$

или в матричном виде

$$a_{ik} = \sum_l a_{il}(2) a_{lk}(1), \quad (i, k, l = x, y, z). \quad (80)$$

Выражение матриц поворота через углы, определяющие повороты, дается формулами (54) и (55). При этом углы, описывающие результирующий поворот, выражаются через углы, характеризующие первый и второй повороты, по формулам (66) и (76). Если углы, характеризующие первый поворот  $S \rightarrow S'$  и результирующий поворот  $S \rightarrow S''$ , отсчитываются от положения исходной системы координат  $S \{x, y, z\}$ , а углы, характеризующие второй поворот  $S' \rightarrow S''$ , отсчитываются от положения промежуточной системы координат  $S' \{x', y', z'\}$ , т. е. если оператор результирующего поворота дается формулой (73), то

$$a = a(1) a(2) \quad (81)$$

или в матричном виде

$$a_{ik} = \sum_l a_{il}(1) a_{lk}(2), \quad (i, k, l = x, y, z). \quad (82)$$

При этом связь углов, описывающих результирующий поворот, с углами, соответствующими первому и второму поворотам, дается формулами (66) и (76), в которых нужно произвести замену индексов  $1 \rightleftharpoons 2$ .

# ОПЕРАТОРЫ УГЛОВЫХ МОМЕНТОВ

## 2.1. ОПЕРАТОР ПОЛНОГО УГЛОВОГО МОМЕНТА

### 1. Определение

Оператором полного углового момента количества движения  $\hat{\mathbf{J}}$  в квантовой механике называется псевдовекторный оператор, осуществляющий преобразование волновых функций (векторов состояний) и квантовомеханических операторов при бесконечно малом повороте системы координат (формулы (1) и (2)).

Изменение произвольной волновой функции  $\Psi$  при повороте системы координат на бесконечно малый угол  $\delta\omega$  вокруг оси  $\mathbf{n}$  можно представить в виде

$$\Psi \rightarrow \Psi' = (1 - i\delta\omega \mathbf{n} \cdot \hat{\mathbf{J}}) \Psi. \quad (1)$$

Оператор  $\hat{\mathbf{J}}$ , входящий в это выражение, называется оператором полного углового момента.

Преобразование квантовомеханического оператора  $\hat{O}$  при бесконечно малом повороте имеет вид

$$\hat{O} \rightarrow \hat{O}' = \hat{O} - i\delta\omega \mathbf{n} \cdot [\hat{\mathbf{J}}, \hat{O}]. \quad (2)$$

Оператор поворота системы координат на конечный угол также выражается через оператор полного углового момента (см. формулы 1.4 (29), 1.4 (30), 1.4 (32)). Оператор полного момента  $\hat{\mathbf{J}}$  является эрмитовским оператором

$$\hat{\mathbf{J}}^\dagger = \hat{\mathbf{J}}. \quad (3)$$

Для декартовых и циклических компонент оператора  $\hat{\mathbf{J}}$  условие эрмитовости имеет вид

$$(\hat{J}_i)^\dagger = \hat{J}_i, \quad (i = x, y, z); \quad (\hat{J}_\mu)^\dagger = \hat{J}^\mu = (-1)^\mu \hat{J}_{-\mu}, \quad (\mu = \pm 1, 0). \quad (4)$$

Собственными функциями операторов  $\hat{\mathbf{J}}^2$  и  $\hat{J}_z$  являются шаровые тензоры (см. гл. 7).

### 2. Коммутационные соотношения

Из определения оператора полного углового момента (1) и формул для сложения поворотов (см. 1.4.7) можно получить коммутационные соотношения, которым удовлетворяет оператор  $\hat{\mathbf{J}}$ . Эти коммутационные соотношения могут быть записаны в виде

$$[(\mathbf{a} \cdot \hat{\mathbf{J}}), (\mathbf{b} \cdot \hat{\mathbf{J}})] = i \cdot [\mathbf{a} \times \mathbf{b}] \cdot \hat{\mathbf{J}}, \quad (5)$$

где  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  — произвольные постоянные векторы. Коммутационные соотношения для оператора полного момента можно также записать в символическом виде

$$[\hat{\mathbf{J}} \times \hat{\mathbf{J}}] = i\hat{\mathbf{J}}. \quad (6)$$

Декартовы компоненты оператора  $\hat{\mathbf{J}}$  удовлетворяют коммутационным соотношениям

$$[\hat{J}_i, \hat{J}_k] = i\epsilon_{ikl}\hat{J}_l, \quad [\hat{\mathbf{J}}^2, \hat{J}_i] = 0 \quad (i, k, l = x, y, z). \quad (7)$$

Соотношения (7) можно получить из (5), выбирая в качестве векторов  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  декартовы орты:  $\mathbf{a} = \mathbf{e}_i$ ,  $\mathbf{b} = \mathbf{e}_k$  ( $i, k = x, y, z$ ).

В развернутой записи соотношения (7) имеют вид

$$\begin{aligned} [\hat{J}_x, \hat{J}_x] = [\hat{J}_y, \hat{J}_y] = [\hat{J}_z, \hat{J}_z] = 0, \\ [\hat{J}_x, \hat{J}_y] = -[\hat{J}_y, \hat{J}_x] = i\hat{J}_z, \quad [\hat{J}_x, \hat{J}_z] = -[\hat{J}_z, \hat{J}_x] = -i\hat{J}_y, \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} [\hat{J}_y, \hat{J}_z] &= -[\hat{J}_z, \hat{J}_y] = i\hat{J}_x, \\ [\hat{J}^2, \hat{J}_x] &= [\hat{J}^2, \hat{J}_y] = [\hat{J}^2, \hat{J}_z] = 0. \end{aligned}$$

Оператор квадрата полного момента  $\hat{J}^2$  выражается через декартовы компоненты  $\hat{J}_i$ , ( $i=x, y, z$ ) по формуле

$$\hat{J}^2 = \sum_i \hat{J}_i^2 = \hat{J}_x^2 + \hat{J}_y^2 + \hat{J}_z^2. \quad (9)$$

Циклические ковариантные компоненты оператора  $\hat{J}$  удовлетворяют коммутационным соотношениям

$$[\hat{J}_\mu, \hat{J}_\nu] = -\sqrt{2} C_{\mu\nu\lambda}^{\pm 1} \hat{J}_\lambda, \quad [\hat{J}^2, \hat{J}_\mu] = 0, \quad (\mu, \nu, \lambda = \pm 1, 0). \quad (10)$$

Соотношения (10) можно получить из (5), выбирая в качестве векторов  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  циклические ковариантные орты:  $\mathbf{a} = \mathbf{e}_\mu$ ,  $\mathbf{b} = \mathbf{e}_\nu$ , ( $\mu, \nu = \pm 1, 0$ ). В развернутой записи соотношения (10) имеют вид

$$\begin{aligned} [\hat{J}_{+1}, \hat{J}_{+1}] &= [\hat{J}_0, \hat{J}_0] = [\hat{J}_{-1}, \hat{J}_{-1}] = 0, \\ [\hat{J}_{+1}, \hat{J}_0] &= -[\hat{J}_0, \hat{J}_{+1}] = -\hat{J}_{+1}, \quad [\hat{J}_{+1}, \hat{J}_{-1}] = -[\hat{J}_{-1}, \hat{J}_{+1}] = -\hat{J}_0, \\ [\hat{J}_0, \hat{J}_{-1}] &= -[\hat{J}_{-1}, \hat{J}_0] = -\hat{J}_{-1}, \\ [\hat{J}^2, \hat{J}_{+1}] &= [\hat{J}^2, \hat{J}_0] = [\hat{J}^2, \hat{J}_{-1}] = 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Для контравариантных циклических компонент оператора  $\hat{J}$  коммутационные соотношения записываются следующим образом:

$$[\hat{J}^\mu, \hat{J}^\nu] = \sqrt{2} C_{\mu\nu\lambda}^{\pm 1} \hat{J}^\lambda, \quad [\hat{J}^2, \hat{J}^\mu] = 0, \quad (\mu, \nu, \lambda = \pm 1, 0), \quad (12)$$

или в развернутом виде

$$\begin{aligned} [\hat{J}^{+1}, \hat{J}^{+1}] &= [\hat{J}^0, \hat{J}^0] = [\hat{J}^{-1}, \hat{J}^{-1}] = 0, \\ [\hat{J}^{+1}, \hat{J}^0] &= -[\hat{J}^0, \hat{J}^{+1}] = \hat{J}^{+1}, \quad [\hat{J}^{+1}, \hat{J}^{-1}] = -[\hat{J}^{-1}, \hat{J}^{+1}] = \hat{J}^0, \\ [\hat{J}^0, \hat{J}^{-1}] &= -[\hat{J}^{-1}, \hat{J}^0] = \hat{J}^{-1}, \\ [\hat{J}^2, \hat{J}^{+1}] &= [\hat{J}^2, \hat{J}^0] = [\hat{J}^2, \hat{J}^{-1}] = 0. \end{aligned} \quad (13)$$

Оператор квадрата полного момента  $\hat{J}^2$  выражается через циклические компоненты  $\hat{J}_\mu$ , ( $\mu = \pm 1, 0$ ) по формуле

$$\hat{J}^2 = \sum_{\mu} (-1)^\mu \hat{J}_{-\mu} \hat{J}_\mu = -\hat{J}_{+1} \hat{J}_{-1} + \hat{J}_0 \hat{J}_0 - \hat{J}_{-1} \hat{J}_{+1} = \hat{J}_0^2 - \hat{J}_0 - 2\hat{J}_{+1} \hat{J}_{-1} = \hat{J}_0^2 + \hat{J}_0 - 2\hat{J}_{-1} \hat{J}_{+1}. \quad (14)$$

### 3. Инверсия координат. Обращение времени

Оператор полного момента  $\hat{J}$  является аксиальным вектором и не меняется при инверсии координат ( $\mathbf{r} \rightarrow -\mathbf{r}$ ).

$$\begin{aligned} \hat{P}_r \hat{J}_i \hat{P}_r^{-1} &= \hat{J}_i, \quad (i = x, y, z), \\ \hat{P}_r \hat{J}_\mu \hat{P}_r^{-1} &= \hat{J}_\mu, \quad (\mu = \pm 1, 0). \end{aligned} \quad (15)$$

При обращении времени ( $t \rightarrow -t$ ) оператор полного момента  $\hat{J}$  меняет знак:

$$\begin{aligned} \hat{P}_t \hat{J}_i \hat{P}_t^{-1} &= -\hat{J}_i, \quad (i = x, y, z), \\ \hat{P}_t \hat{J}_\mu \hat{P}_t^{-1} &= -\hat{J}_\mu, \quad (\mu = \pm 1, 0). \end{aligned} \quad (16)$$

В (15) и (16)  $\hat{P}_r$  и  $\hat{P}_t$  являются операторами инверсии координат и обращения времени соответственно.

### 4. Полный угловой момент системы. Орбитальный и спиновый моменты

Полный угловой момент  $\hat{J}$  системы, состоящий из  $N$  подсистем с угловыми моментами  $\hat{J}(1)$ ,  $\hat{J}(2)$ , ...,  $\hat{J}(N)$ , представляется в виде векторной суммы

$$\hat{J} = \sum_{n=1}^N \hat{J}(n). \quad (17)$$

Для такой системы справедливы следующие коммутационные соотношения:

$$[\hat{J}_i(n), \hat{J}_k(n')] = i\delta_{nm'}\varepsilon_{ikl}\hat{J}_l(n),$$

$$[\hat{J}_i, \hat{J}_k(n)] = i\varepsilon_{ikl}\hat{J}_l(n), \quad (i, k, l = x, y, z), \quad (18)$$

$$[\hat{J}_\mu(n), \hat{J}_\nu(n')] = -\sqrt{2}\delta_{nm'}C_{\mu 1\nu}^{\lambda} \hat{J}_\lambda(n),$$

$$[\hat{J}_\mu, \hat{J}_\nu(n)] = -\sqrt{2}C_{\mu 1\nu}^{\lambda} \hat{J}_\lambda(n), \quad (\mu, \nu, \lambda = \pm 1, 0). \quad (19)$$

Частным случаем (17) является представление оператора полного момента в виде суммы операторов орбитального момента  $\hat{\mathbf{L}}$  и спинного момента  $\hat{\mathbf{S}}$ .

$$\hat{\mathbf{J}} = \hat{\mathbf{L}} + \hat{\mathbf{S}}. \quad (20)$$

Свойства операторов  $\hat{\mathbf{L}}$  и  $\hat{\mathbf{S}}$  рассмотрены ниже (2.2 и 2.3). Коммутационные соотношения операторов орбитального момента  $\hat{\mathbf{L}}$  и полного момента  $\hat{\mathbf{J}}$ :

$$[\hat{J}_i, \hat{L}_k] = i\varepsilon_{ikl}\hat{L}_l, \quad (i, k, l = x, y, z),$$

$$[\hat{J}_\mu, \hat{L}_\nu] = -\sqrt{2}C_{\mu 1\nu}^{\lambda} \hat{L}_\lambda, \quad (\mu, \nu, \lambda = \pm 1, 0). \quad (21)$$

В развернутой записи соотношения (21) имеют вид

$$[\hat{J}_x, \hat{L}_x] = [\hat{J}_y, \hat{L}_y] = [\hat{J}_z, \hat{L}_z] = 0,$$

$$[\hat{J}_x, \hat{L}_y] = -[\hat{J}_y, \hat{L}_x] = i\hat{L}_z, \quad [\hat{J}_x, \hat{L}_z] = -[\hat{J}_z, \hat{L}_x] = -i\hat{L}_y,$$

$$[\hat{J}_y, \hat{L}_z] = -[\hat{J}_z, \hat{L}_y] = i\hat{L}_x, \quad (22)$$

$$[\hat{J}_{+1}, \hat{L}_{+1}] = [\hat{J}_0, \hat{L}_0] = [\hat{J}_{-1}, \hat{L}_{-1}] = 0,$$

$$[\hat{J}_{+1}, \hat{L}_0] = -[\hat{J}_0, \hat{L}_{+1}] = -\hat{L}_{+1}, \quad [\hat{J}_{+1}, \hat{L}_{-1}] = -[\hat{J}_{-1}, \hat{L}_{+1}] = -\hat{L}_0,$$

$$[\hat{J}_0, \hat{L}_{-1}] = -[\hat{J}_{-1}, \hat{L}_0] = -\hat{L}_{-1}. \quad (23)$$

Коммутационные соотношения между операторами спинного момента  $\hat{\mathbf{S}}$  и полного момента  $\hat{\mathbf{J}}$  получаются из (21)–(23) заменой момента  $\hat{\mathbf{L}} \rightarrow \hat{\mathbf{S}}$ . Операторы орбитального момента  $\hat{\mathbf{L}}$  и спинного момента  $\hat{\mathbf{S}}$  коммутируют между собой:

$$[\hat{L}_i, \hat{S}_k] = 0, \quad (i, k = x, y, z),$$

$$[\hat{L}_\mu, \hat{S}_\nu] = 0, \quad (\mu, \nu = \pm 1, 0). \quad (24)$$

## 2.2 ОПЕРАТОР ОРБИТАЛЬНОГО МОМЕНТА

### 1. Определение

В классической механике орбитальный момент количества движения частицы  $\mathbf{L}$  дается формулой

$$\mathbf{L} = [\mathbf{r} \times \mathbf{p}], \quad (1)$$

где  $\mathbf{r}$  — радиус-вектор положения частицы,  $\mathbf{p}$  — ее импульс.

В квантовой механике оператор орбитального момента количества движения частицы  $\hat{\mathbf{L}}$  получается из соотношения (1) заменой  $\mathbf{r} \rightarrow \hat{\mathbf{r}}$  и  $\mathbf{p} \rightarrow \hat{\mathbf{p}}$ , где  $\hat{\mathbf{r}}$  и  $\hat{\mathbf{p}}$  — операторы координат и импульса частицы.

В координатном представлении  $\hat{\mathbf{r}} = \mathbf{r}$ ,  $\hat{\mathbf{p}} = -i\nabla$ ,

$$\hat{\mathbf{L}} = -i[\mathbf{r} \times \nabla]. \quad (2)$$

В импульсном представлении  $\hat{\mathbf{r}} = i\nabla_{\mathbf{p}}$ ,  $\hat{\mathbf{p}} = \mathbf{p}$ ,

$$\hat{\mathbf{L}} = -i[\mathbf{p} \times \nabla_{\mathbf{p}}]. \quad (3)$$

Приведенные ниже формулы справедливы как в координатном, так и в импульсном представлении. В формулах для явного вида  $\hat{\mathbf{L}}$  (см. 2.2.3) для перехода в импульсное представление нужно произвести замену  $\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{p}$ ,  $\nabla \equiv \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \rightarrow \nabla_{\mathbf{p}} \equiv \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}}$ .

Оператор  $\hat{\mathbf{L}}$  является эрмитовым, чисто мнимым оператором

$$\hat{\mathbf{L}}^+ = \hat{\mathbf{L}}, \quad \hat{\mathbf{L}}^* = -\hat{\mathbf{L}}. \quad (4)$$

Для декартовых компонент оператора  $\hat{\mathbf{L}}$  соотношения (4) принимают вид

$$\hat{L}_i^+ = \hat{L}_i, \quad \hat{L}_i^* = -\hat{L}_i, \quad (i = x, y, z). \quad (5)$$

Для циклических компонент оператора соотношения (4) имеют вид

$$\begin{aligned} (\hat{L}_\mu)^+ &= (-1)^\mu (\hat{L}^+)_{-\mu} = (-1)^\mu \hat{L}_{-\mu}, \\ (\hat{L}_\mu)^* &= (-1)^\mu (\hat{L}^*)_{-\mu} = (-1)^{\mu+1} \hat{L}_{-\mu}, \end{aligned} \quad (\mu = \pm 1, 0). \quad (6)$$

Оператор орбитального момента  $\hat{\mathbf{L}}$  осуществляет преобразование скалярных (бесспиновых) волновых функций при повороте системы координат. В случае поворота системы координат на бесконечно малый угол  $\delta\omega$  вокруг оси  $\mathbf{n}$  вектор  $\mathbf{r}$  переходит в  $\mathbf{r} + \delta\mathbf{r}$ , где  $\delta\mathbf{r} = -\delta\omega[\mathbf{n} \times \mathbf{r}]$ , а скалярные волновые функции преобразуются по формуле

$$\Psi(\mathbf{r}) \rightarrow \Psi(\mathbf{r} + \delta\mathbf{r}) = (1 + \delta\mathbf{r} \cdot \nabla) \Psi(\mathbf{r}) = (1 - i\delta\omega\mathbf{n} \cdot \hat{\mathbf{L}}) \Psi(\mathbf{r}). \quad (7)$$

В случае поворота системы на конечный угол  $\omega$  вокруг оси  $\mathbf{n}$  скалярные функции преобразуются с помощью оператора  $e^{-i\omega\mathbf{n} \cdot \hat{\mathbf{L}}}$ , который является частным случаем оператора поворота 1.5 (32). Собственными функциями операторов  $\hat{\mathbf{L}}^2$  и  $\hat{L}_z$  являются сферические функции  $Y_{lm}(\vartheta, \varphi)$  (глава 5), зависящие от сферических углов  $\vartheta, \varphi$ .

## 2. Коммутационные соотношения

Оператор орбитального момента  $\hat{\mathbf{L}}$  удовлетворяет тем же коммутационным соотношениям, что и оператор полного момента  $\hat{\mathbf{J}}$ . Соответствующие формулы для коммутаторов получаются из формул 2.1 (5) — 2.1 (14) заменой  $\hat{\mathbf{J}} \rightarrow \hat{\mathbf{L}}$ .

Коммутационные соотношения оператора  $\hat{\mathbf{L}}$  с операторами координат  $\hat{\mathbf{r}}$  и импульса  $\hat{\mathbf{p}}$  имеют следующий вид.

Декартовы компоненты

$$[\hat{L}_i, \hat{x}_k] = i\varepsilon_{ikl}x_l, \quad (i, k, l = x, y, z). \quad (8)$$

$$[\hat{L}_i, \hat{p}_k] = i\varepsilon_{ikl}p_l,$$

При этом сами операторы  $\hat{\mathbf{r}}$  и  $\hat{\mathbf{p}}$  удовлетворяют коммутационным соотношениям

$$[\hat{x}_i, \hat{x}_k] = 0, \quad [\hat{p}_i, \hat{p}_k] = 0, \quad [\hat{x}_i, \hat{p}_k] = i\delta_{ik}, \quad (i, k = x, y, z). \quad (9)$$

Циклические компоненты

$$[\hat{L}_\mu, \hat{x}_\nu] = -\sqrt{2} C_{\mu 1 \nu}^{\lambda} \hat{x}_\lambda, \quad (\mu, \nu, \lambda = \pm 1, 0). \quad (10)$$

$$[\hat{L}_\mu, \hat{p}_\nu] = -\sqrt{2} C_{\mu 1 \nu}^{\lambda} \hat{p}_\lambda,$$

Для циклических компонент операторов  $\hat{\mathbf{r}}$  и  $\hat{\mathbf{p}}$  коммутационные соотношения имеют вид

$$[\hat{x}_\mu, \hat{x}_\nu] = 0, \quad [\hat{p}_\mu, \hat{p}_\nu] = 0, \quad [\hat{x}_\mu, \hat{p}_\nu] = i\delta_{\mu-\nu} (-1)^\mu, \quad (\mu, \nu = \pm 1, 0). \quad (11)$$

Формулы (8) и (10) являются отражением векторного характера операторов  $\hat{\mathbf{r}}$  и  $\hat{\mathbf{p}}$ .

Коммутационные соотношения для квадрата орбитального момента

$$\begin{aligned} [\hat{\mathbf{L}}^2, \hat{\mathbf{r}}] &= i [\hat{\mathbf{r}} \times \hat{\mathbf{L}}] - i [\hat{\mathbf{L}} \times \hat{\mathbf{r}}], \\ [\hat{\mathbf{L}}^2, \hat{\mathbf{p}}] &= i [\hat{\mathbf{p}} \times \hat{\mathbf{L}}] - i [\hat{\mathbf{L}} \times \hat{\mathbf{p}}]. \end{aligned} \quad (12)$$

Операторы  $\hat{\mathbf{r}}^2$  и  $\hat{\mathbf{p}}^2$  коммутируют с оператором  $\hat{\mathbf{L}}$ :

$$[\hat{\mathbf{L}}, \hat{\mathbf{r}}^2] = 0, \quad [\hat{\mathbf{L}}, \hat{\mathbf{p}}^2] = 0.$$

Коммутационные соотношения для оператора  $\hat{\mathbf{L}}$  и операторов полного момента  $\hat{\mathbf{J}}$  и спинового момента  $\hat{\mathbf{S}}$  были рассмотрены ранее (формулы 2.1. (21)—2.1. (24)).



### 3. Явный вид оператора

Декартовы компоненты оператора  $\hat{\mathbf{L}}$  даются формулами

$$\hat{L}_x = -i \left( y \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial y} \right), \quad \hat{L}_y = -i \left( z \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial z} \right), \quad \hat{L}_z = -i \left( x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right). \quad (13)$$

В компактной записи формулы (13) имеют вид

$$\hat{L}_i = -i \sum_{k,l} \varepsilon_{ikl} x_k \frac{\partial}{\partial x_l}, \quad (i, k, l = x, y, z). \quad (14)$$

Декартовы компоненты оператора  $\hat{\mathbf{L}}$  выражаются через сферические углы  $\vartheta$ ,  $\varphi$  по формулам

$$\begin{aligned} \hat{L}_x &= i \left( \sin \varphi \frac{\partial}{\partial \vartheta} + \operatorname{ctg} \vartheta \cos \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} \right), \\ \hat{L}_y &= i \left( -\cos \varphi \frac{\partial}{\partial \vartheta} + \operatorname{ctg} \vartheta \sin \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} \right), \\ \hat{L}_z &= -i \frac{\partial}{\partial \varphi}. \end{aligned} \quad (15)$$

Циклические компоненты оператора  $\hat{\mathbf{L}}$

$$\begin{aligned} \hat{L}_{+1} &= x_0 \nabla_{+1} - x_{+1} \nabla_0, \\ \hat{L}_0 &= x_{-1} \nabla_{+1} - x_{+1} \nabla_{-1}, \\ \hat{L}_{-1} &= x_{-1} \nabla_0 - x_0 \nabla_{-1}. \end{aligned} \quad (16)$$

В компактной записи формула (16) имеет вид

$$\hat{L}_\mu = -\sqrt{2} \sum_{\nu, \lambda} C_{1,1,\lambda}^{1,\mu} x_\nu \nabla_\lambda, \quad (\mu, \nu, \lambda = \pm 1, 0). \quad (17)$$

Циклические компоненты оператора  $\hat{\mathbf{L}}$  выражаются через сферические углы  $\vartheta$ ,  $\varphi$  по формулам

$$\begin{aligned} \hat{L}_{+1} &= -\frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\varphi} \left\{ \frac{\partial}{\partial \vartheta} + i \operatorname{ctg} \vartheta \frac{\partial}{\partial \varphi} \right\}, \\ \hat{L}_0 &= -i \frac{\partial}{\partial \varphi}, \\ \hat{L}_{-1} &= -\frac{1}{\sqrt{2}} e^{-i\varphi} \left\{ \frac{\partial}{\partial \vartheta} - i \operatorname{ctg} \vartheta \frac{\partial}{\partial \varphi} \right\}. \end{aligned} \quad (18)$$

Сферические компоненты оператора  $\hat{\mathbf{L}}$

$$\hat{L}_r = 0, \quad \hat{L}_\vartheta = \frac{i}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \varphi}, \quad \hat{L}_\varphi = -i \frac{\partial}{\partial \vartheta}. \quad (19)$$

Оператор квадрата орбитального момента  $\hat{\mathbf{L}}^2$  выражается через компоненты оператора  $\hat{\mathbf{L}}$  по формуле

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{L}}^2 &= \sum_i \hat{L}_i^2 = \hat{L}_x^2 + \hat{L}_y^2 + \hat{L}_z^2, \\ \hat{\mathbf{L}}^2 &= \sum_\mu (-1)^\mu \hat{L}_\mu \hat{L}_{-\mu} = -\hat{L}_{+1} \hat{L}_{-1} + \hat{L}_0 \hat{L}_0 - \hat{L}_{-1} \hat{L}_{+1}. \end{aligned} \quad (20)$$

Оператор  $\hat{\mathbf{L}}^2$  имеет вид

$$\hat{\mathbf{L}}^2 = -\left[ \frac{1}{\sin \vartheta} \cdot \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left( \sin \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right]. \quad (21)$$

Он совпадает с точностью до знака с угловой частью оператора Лапласа 1.3. (15)

$$\hat{\mathbf{L}}^2 = -\Delta_\Omega. \quad (22)$$

Оператор  $\hat{\mathbf{L}}^2$  является эрмитовским вещественным оператором

$$(\hat{\mathbf{L}}^2)^+ = (\hat{\mathbf{L}}^2)^* = \hat{\mathbf{L}}^2. \quad (23)$$

Представление орбитального момента  $\hat{\mathbf{L}}$  в виде дифференциального оператора является только одним из возможных представлений. Наряду с ним используется также представление оператора  $\hat{\mathbf{L}}$  в виде набора трех матриц (по числу компонент вектора  $\hat{\mathbf{L}}$ ). Матричные элементы оператора орбитального момента  $\hat{\mathbf{L}}$  приведены в главе 13.

### 2.3 ОПЕРАТОР СПИНОВОГО МОМЕНТА

#### 1. Определение

Оператор спинового момента частицы  $\hat{\mathbf{S}}$  принято представлять в виде трех (по числу компонент вектора  $\hat{\mathbf{S}}$ ) квадратных матриц размерности  $(2S+1) \times (2S+1)$ , где  $S$  — значение спина частицы. Эти матрицы действуют на спиновые функции (см. гл. 6) и удовлетворяют между собой тем же коммутационным соотношениям, что и компоненты оператора полного углового момента (2.1). Оператор спина  $\hat{\mathbf{S}}$  является эрмитовским оператором

$$\hat{\mathbf{S}}^+ = \hat{\mathbf{S}}. \quad (1)$$

Для декартовых компонент оператора  $\hat{\mathbf{S}}$  условие эрмитовости (1) имеет вид

$$(\hat{S}_i)^+ = \hat{S}_i, \quad (i = x, y, z), \quad (2)$$

а для циклических компонент

$$(\hat{S}_\mu)^+ = (-1)^\mu \hat{S}_{-\mu}, \quad (\mu = \pm 1, 0). \quad (3)$$

Поведение оператора  $\hat{\mathbf{S}}$  при комплексном сопряжении зависит от представления, в котором он записывается (см., например, 2.6.2). Собственными функциями операторов  $\hat{\mathbf{S}}^2$  и  $\hat{S}_z$  являются спиновые функции  $\chi_{SmS}$  (см. гл. 6), зависящие от спиновой переменной  $\sigma$ , имеющие  $(2S+1)$  компоненту и описывающие поляризационное состояние частицы.

#### 2. Коммутационные соотношения

Коммутационные соотношения для оператора спина  $\hat{\mathbf{S}}$  даются формулами 2.1 (5)—2.1 (14), если в этих формулах произвести замену  $\hat{\mathbf{J}} \rightarrow \hat{\mathbf{S}}$ . Коммутационные соотношения между оператором спина  $\hat{\mathbf{S}}$  и орбитального момента  $\hat{\mathbf{L}}$  были рассмотрены выше в разделе 2.1.4. Оператор спина  $\hat{\mathbf{S}}$  коммутирует с оператором координат частицы  $\hat{\mathbf{r}}$  и импульса  $\hat{\mathbf{p}}$ .

$$[\hat{S}_i, \hat{x}_k] = 0, \quad [\hat{S}_i, \hat{p}_k] = 0, \quad (i, k = x, y, z), \quad (4)$$

$$[\hat{S}_\mu, \hat{x}_\nu] = 0, \quad [\hat{S}_\mu, \hat{p}_\nu] = 0, \quad (\mu, \nu = \pm 1, 0). \quad (5)$$

#### 3. Явный вид

Циклические компоненты оператора спина  $\hat{\mathbf{S}}$  могут быть выражены через базисные спиновые функции  $\chi_{Sm}$  (глава 6) по формуле

$$\hat{S}_\mu = \sqrt{S(S+1)} \sum_{m, m'} C_{Sm1\mu}^{Sm'} \chi_{Sm'} \chi_{Sm}^+, \quad (\mu = \pm 1, 0). \quad (6)$$

Декартовы компоненты оператора спина  $\hat{\mathbf{S}}$  могут быть получены из (6) с помощью соотношений

$$\hat{S}_x = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{S}_{-1} - \hat{S}_{+1}), \quad \hat{S}_y = \frac{i}{\sqrt{2}} (\hat{S}_{-1} + \hat{S}_{+1}), \quad \hat{S}_z = \hat{S}_0. \quad (7)$$

Формулы (6) и (7) не зависят от выбора представления для спиновых функций, а явный вид спиновых матриц зависит от него. В случае произвольного спина  $S$  проще всего написать явный вид спиновых матриц в представлении циклического базиса. В этом представлении базисные спиновые функции  $\chi_{Sm}$  имеют вид

$$\chi_{Sm}(\sigma) = \delta_{m\sigma}, \quad (m, \sigma = -S, -S+1, \dots, S-1, S), \quad (8)$$

а матричные элементы спиновых матриц даются формулой

$$(\hat{S}_\mu)_{\sigma\sigma'} = \sqrt{S(S+1)} C_{S\sigma1\mu}^{S\sigma'}, \quad (\sigma, \sigma' = -S, -S+1, \dots, S-1, S). \quad (9)$$

При этом расположение элементов в матрицах соответствует следующей нумерации строк и столбцов:

$$A = \begin{pmatrix} A_{SS} & \dots & A_{S-S} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{-SS} & \dots & A_{-S-S} \end{pmatrix}. \quad (10)$$

Явный вид спиновых матриц в частных случаях спина  $1/2$  и  $1$  приведен ниже в 2.5 и 2.6.

#### 4. Шпур от произведений спиновых матриц

Вычисление шпуров от произведений декартовых компонент спиновых матриц для произвольного спина  $S$  производится по следующим формулам (где  $i, k, l$  и т. д. принимают значения  $x, y, z$ ):

$$\begin{aligned} \text{Sp} \{ \hat{S}_i \} &= 0, \\ \text{Sp} \{ \hat{S}_i \hat{S}_k \} &= \frac{S(S+1)(2S+1)}{3} \delta_{ik}, \\ \text{Sp} \{ \hat{S}_i \hat{S}_k \hat{S}_l \} &= i \frac{S(S+1)(2S+1)}{6} \epsilon_{ikl}, \\ \text{Sp} \{ \hat{S}_i \hat{S}_k \hat{S}_l \hat{S}_j \} &= \frac{S(S+1)(2S+1)}{15} \left\{ \left[ S(S+1) + \frac{1}{2} \right] (\delta_{ik} \delta_{lj} + \delta_{ij} \delta_{kl}) + [S(S+1) - 2] \delta_{il} \delta_{kj} \right\}. \end{aligned} \quad (11)$$

Для циклических компонент оператора спина  $\hat{S}$  имеют место следующие соотношения ( $\mu, \nu, \lambda$  и т. д. принимают значения  $\pm 1, 0$ ):

$$\begin{aligned} \text{Sp} \{ \hat{S}_\mu \} &= 0, \\ \text{Sp} \{ \hat{S}_\mu \hat{S}_\nu \} &= \frac{S(S+1)(2S+1)}{3} (-1)^\mu \delta_{\mu-\nu}, \\ \text{Sp} \{ \hat{S}_\mu \hat{S}_\nu \hat{S}_\lambda \} &= - \frac{S(S+1)(2S+1)}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \mu & \nu & \lambda \end{pmatrix} = \frac{S(S+1)(2S+1)}{3\sqrt{2}} (-1)^{1+\lambda} C_{1\mu\lambda}^{\nu}, \\ \text{Sp} \{ \hat{S}_\mu \hat{S}_\nu \hat{S}_\lambda \hat{S}_\rho \} &= \frac{S(S+1)(2S+1)}{15} \left\{ \left[ S(S+1) + \frac{1}{2} \right] (-1)^{\mu+\lambda} (\delta_{\mu-\nu} \delta_{\lambda-\rho} + \delta_{\mu-\rho} \delta_{\nu-\lambda}) + \right. \\ &\quad \left. + [S(S+1) - 2] (-1)^{\mu+\nu} \delta_{\mu-\lambda} \delta_{\nu-\rho} \right\}. \end{aligned} \quad (12)$$

### 2.4. ПОЛЯРИЗАЦИОННЫЕ ОПЕРАТОРЫ

#### 1. Определение

При описании поляризационного, т. е. спинового состояния частиц широко используются так называемые поляризационные операторы. Поляризационными операторами  $\hat{T}_{LM}(S)$  (где  $M = -L, -L+1, \dots, L-1, L$ , а  $L = 0, 1, \dots, 2S$ ;  $L$  и  $M$  — целые) называются матрицы, которые действуют на спиновые функции (см. гл. 6), имеют размерность  $(2S+1) \times (2S+1)$  и преобразуются при поворотах системы координат по представлению  $D^L$ , т. е. являются неприводимыми тензорами ранга  $L$  (см. гл. 3). Для того чтобы  $\hat{T}_{LM}(S)$  при поворотах системы координат преобразовывались должным образом, необходимо, чтобы они удовлетворяли следующим коммутационным соотношениям с циклическими компонентами спина  $\hat{S}_\mu$  ( $\mu = \pm 1, 0$ ):

$$[\hat{S}_\mu, \hat{T}_{LM}(S)] = \sqrt{L(L+1)} C_{LM\mu}^{LM+\mu} \hat{T}_{LM+\mu}(S). \quad (1)$$

Нормировку поляризационных операторов выберем так, чтобы

$$\text{Sp} \{ \hat{T}_{LM}^+(S) \hat{T}_{L'M'}(S) \} = \delta_{LL'} \delta_{MM'}, \quad (2)$$

а фазовые множители —

$$\hat{T}_{LM}^+(S) = (-1)^M \hat{T}_{L-M}(S). \quad (3)$$

Условия (1)—(3) однозначно определяют вид поляризационных операторов. Совокупность поляризационных операторов  $\hat{T}_{LM}(S)$  при  $-L \leq M \leq L$ ,  $0 \leq L \leq 2S$  образует полную систему, состоящую из  $\sum_{L=0}^{2S} (2L+1) = (2S+1)^2$  линейно независимых квадратных матриц размерности  $(2S+1) \cdot (2S+1)$ .

## 2. ЯВНЫЙ ВИД

Поляризационные операторы  $\hat{T}_{LM}(S)$  могут быть построены из произведений спиновых матриц по формуле

$$\hat{T}_{LM}(S) = N_L(S) (\hat{S} \cdot \nabla)^L \{r^L Y_{LM}(\vartheta, \varphi)\}, \quad (4)$$

где  $\hat{S}$  — оператор спина,  $N_L(S)$  — нормировочный множитель

$$N_L(S) = \frac{2^L}{L!} \left[ \frac{4\pi (2S-L)!}{(2S+L+1)!} \right]^{1/2}. \quad (5)$$

Заметим, что величины  $\hat{T}_{LM}(S)$  не зависят от  $\mathbf{r}$ , хотя вектор  $\mathbf{r}$  и фигурирует в правой части формулы (4). Операторы  $\hat{T}_{LM}(S)$  могут быть выражены через базисные спиновые функции  $\chi_{Sm}$  (глава 6):

$$\hat{T}_{LM}(S) = \sqrt{\frac{2L+1}{2S+1}} \sum_{m, m'} C_{Sm' LM}^{Sm'} \chi_{Sm'} \chi_{Sm}^\dagger. \quad (6)$$

Обратное разложение имеет вид

$$\chi_{Sm'} \chi_{Sm}^\dagger = \sum_L \sqrt{\frac{2L+1}{2S+1}} C_{Sm' LM}^{Sm'} \hat{T}_{LM}(S). \quad (7)$$

Явный вид матриц  $\hat{T}_{LM}(S)$  зависит от выбора представления для спиновых функций. В частности, в представлении циклического базиса матричные элементы  $\hat{T}_{LM}(S)$  даются формулой

$$[\hat{T}_{LM}(S)]_{\sigma'\sigma} = \sqrt{\frac{2L+1}{2S+1}} C_{S\sigma' LM}^{S\sigma}, \quad (\sigma, \sigma' = -S, -S+1, \dots, S). \quad (8)$$

При  $L=0$  операторы  $\hat{T}_{LM}(S)$  пропорциональны единичной матрице размерности  $(2S+1) \times (2S+1)$

$$\hat{T}_{00}(S) = \frac{1}{\sqrt{2S+1}} \mathbf{I}. \quad (9)$$

При  $L=1$  операторы  $\hat{T}_{LM}(S)$  пропорциональны циклическим компонентам оператора спина

$$\hat{T}_{1M}(S) = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{S(S+1)(2S+1)}} \hat{S}_M, \quad (M = \pm 1, 0). \quad (10)$$

Поляризационные операторы для спина  $S=1$  рассмотрены в 2.6.

## 3. Поведение $\hat{T}_{LM}(S)$ при преобразованиях системы координат

### а. Инверсия системы координат ( $\mathbf{r} \rightarrow -\mathbf{r}$ )

Поляризационные операторы  $\hat{T}_{LM}(S)$  не меняются при инверсии системы координат

$$\hat{P}_r \hat{T}_{LM}(S) \hat{P}_r^{-1} = \hat{T}_{LM}(S). \quad (11)$$

### б. Поворот системы координат

При повороте системы координат, характеризуемом углами Эйлера  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ , поляризационные операторы преобразуются по формуле

$$\hat{T}'_{LM'}(S) = \hat{D}(\alpha, \beta, \gamma) \hat{T}_{LM}(S) [\hat{D}(\alpha, \beta, \gamma)]^{-1} = \sum_M D_{MM'}^L(\alpha, \beta, \gamma) \hat{T}_{LM}(S), \quad (12)$$

где  $\hat{D}(\alpha, \beta, \gamma)$  — оператор поворота (см. 1.4.5),  $D_{MM'}^L$  —  $D$ -функции Вигнера (гл. 4).

#### 4. Разложение по поляризационным операторам

Как отмечалось выше (2.4.1), поляризационные операторы  $\hat{T}_{LM}(S)$  образуют полную систему линейно независимых матриц. Произвольная квадратная матрица  $\hat{A}$  размерности  $(2S+1) \times (2S+1)$ , где  $S$  — целое или полуцелое число, может быть разложена по поляризационным операторам  $\hat{T}_{LM}(S)$ , т. е. представлена в виде сумм

$$\hat{A} = \sum_{L=0}^{2S} \sum_{M=-L}^L A_{LM} \hat{T}_{LM}(S), \quad (13)$$

где коэффициенты разложения  $A_{LM}$  даются формулой

$$A_{LM} = \text{Sp} \{ \hat{T}_{LM}^+(S) \hat{A} \}. \quad (14)$$

Если  $\hat{A}$  — эрмитовская матрица, т. е.  $\hat{A}^+ = \hat{A}$ , то

$$A_{LM}^* = (-1)^M A_{L-M}. \quad (15)$$

Ниже рассмотрены некоторые примеры таких разложений.

##### а. Разложение Клебша—Гордана для поляризационных операторов

Произведение двух поляризационных операторов  $\hat{T}_{L_1 M_1}(S)$  и  $\hat{T}_{L_2 M_2}(S)$  может быть представлено в виде суммы Клебша—Гордана

$$\hat{T}_{L_1 M_1}(S) \hat{T}_{L_2 M_2}(S) = \sum_L (-1)^{2S+L} \sqrt{(2L_1+1)(2L_2+1)} \begin{Bmatrix} L_1 & L_2 & L \\ S & S & S \end{Bmatrix} C_{L_1 M_1 L_2 M_2}^{LM} \hat{T}_{LM}(S). \quad (16)$$

##### б. Разложение оператора поворота

Если интересоваться только преобразованием спиновых функций и спиновых операторов при повороте системы координат, то в общих формулах для оператора поворота 1.4. (31) и 1.4. (33) можно заменить оператор полного момента  $\hat{\mathbf{J}}$  на оператор спина  $\hat{\mathbf{S}}$ . Такой модифицированный оператор поворота будем отмечать индексом  $S$  наверху. Если поворот системы координат описывается с помощью углов Эйлера  $\alpha, \beta, \gamma$ , то для оператора поворота  $\hat{D}^S(\alpha, \beta, \gamma)$  имеет место следующее разложение:

$$\hat{D}^S(\alpha, \beta, \gamma) \equiv e^{-i\alpha \hat{S}_z} e^{-i\beta \hat{S}_y} e^{-i\gamma \hat{S}_z} = \sum_{L, M, m, m'} \frac{2L+1}{2S+1} C_{S m' L M}^{S m} D_{m m'}^S(\alpha, \beta, \gamma) \hat{T}_{LM}(S). \quad (17)$$

В том случае, когда поворот описывается с помощью направления оси поворота  $\mathbf{n}(\Theta, \Phi)$  и угла поворота  $\omega$ , разложение оператора поворота  $\hat{U}^S(\omega; \Theta, \Phi)$  имеет вид

$$\hat{U}^S(\omega; \Theta, \Phi) \equiv e^{i\omega \mathbf{n} \cdot \hat{\mathbf{S}}} = 2\sqrt{\pi} \sum_{L=0}^{2S} \frac{(-i)^L}{\sqrt{2S+1}} \chi_L^S(\omega) \sum_{M=-L}^L Y_{LM}^*(\Theta, \Phi) \hat{T}_{LM}(S), \quad (18)$$

где функции  $\chi_L^S(\omega)$  — обобщенные характеры (см. 4.15).

#### 5. Коммутаторы и антикоммутаторы

Поляризационные операторы удовлетворяют следующим коммутационным соотношениям:

$$[\hat{T}_{L_1 M_1}(S), \hat{T}_{L_2 M_2}(S)] = \sqrt{(2L_1+1)(2L_2+1)} \sum_{L_3} (-1)^{2S+L_3} [1 - (-1)^{L_1+L_2+L_3}] \begin{Bmatrix} L_1 & L_2 & L_3 \\ S & S & S \end{Bmatrix} C_{L_1 M_1 L_2 M_2}^{L_3 M_3} \hat{T}_{L_3 M_3}(S), \quad (19)$$

$$\{\hat{T}_{L_1 M_1}(S), \hat{T}_{L_2 M_2}(S)\} = \sqrt{(2L_1+1)(2L_2+1)} \sum_{L_3} (-1)^{2S+L_3} [1 + (-1)^{L_1+L_2+L_3}] \begin{Bmatrix} L_1 & L_2 & L_3 \\ S & S & S \end{Bmatrix} C_{L_1 M_1 L_2 M_2}^{L_3 M_3} \hat{T}_{L_3 M_3}(S). \quad (20)$$

Соотношение (1) является частным случаем формулы (19) при  $L_1 = 1$ .

## 6. Вычисление следа от произведений поляризационных операторов

$$\text{Sp} \{ \hat{T}_{LM}(S) \} = \sqrt{2S+1} \delta_{L0} \delta_{M0}, \quad (21)$$

$$\text{Sp} \{ \hat{T}_{L_1 M_1}(S) \hat{T}_{L_2 M_2}(S) \} = (-1)^{M_1} \delta_{L_1 L_2} \delta_{M_1 - M_2}, \quad (22)$$

$$\text{Sp} \{ \hat{T}_{L_1 M_1}(S) \hat{T}_{L_2 M_2}(S) \hat{T}_{L_3 M_3}(S) \} = (-1)^{2S+L_3+M_3} \sqrt{(2L_1+1)(2L_2+1)} C_{L_1 M_1 L_2 M_2}^{L_3 - M_3} \begin{Bmatrix} L_1 & L_2 & L_3 \\ S & S & S \end{Bmatrix}. \quad (23)$$

В общем случае

$$\begin{aligned} \text{Sp} \{ \hat{T}_{L_1 M_1}(S) \hat{T}_{L_2 M_2}(S) \dots \hat{T}_{L_n M_n}(S) \} &= \frac{[(2L_1+1)(2L_2+1) \dots (2L_n+1)]^{1/2}}{(2S+1)^{n/2}} \times \\ &\times \delta_{M_1+M_2+M_3+\dots+M_n, 0} \sum_m C_{L_1 M_1 S m}^{S m+\mu_1} C_{L_2 M_2 S m+\mu_2}^{S m+\mu_2} \dots C_{L_n M_n S m+\mu_n-1}^{S m}, \end{aligned} \quad (24)$$

где

$$\mu_k = \sum_{i=1}^k M_i.$$

### 2.5 СПИНОВЫЕ МАТРИЦЫ ДЛЯ СПИНА $S=1/2$

#### 1. ЯВНЫЙ ВИД

В случае спина  $S=1/2$  оператор спина  $\hat{S}$  представляет собой набор трех квадратных матриц размерности  $2 \times 2$ .

Декартовы компоненты оператора спина  $\hat{S}$  в представлении циклического базиса выражаются следующим образом:

$$\hat{S}_x = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{S}_y = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{S}_z = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Циклические компоненты оператора спина имеют вид

$$\hat{S}_{+1} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{S}_0 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \hat{S}_{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Кроме спиновых матриц, рассматривается также единичная матрица

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Вместо оператора спина  $\hat{S}$  широко применяется матрица Паули  $\hat{\sigma}$ , связанная с  $\hat{S}$  соотношением

$$\hat{S} = \frac{1}{2} \hat{\sigma}. \quad (4)$$

Из формул (1) и (2) следует, что спиновые матрицы обладают следующими свойствами:

$$\hat{S}_i^2 = \hat{S}_i, \quad (i = x, y, z), \quad (5)$$

$$\hat{S}_\mu^+ = (-1)^\mu \hat{S}_{-\mu}, \quad (\mu = \pm 1, 0), \quad (6)$$

$$\hat{S}_x^* = \hat{S}_x, \quad \hat{S}_y^* = -\hat{S}_y, \quad \hat{S}_z^* = \hat{S}_z, \quad (7)$$

$$\hat{S}_\mu^* = \hat{S}_\mu, \quad (\mu = \pm 1, 0). \quad (8)$$

## 2. Коммутаторы и антикоммутаторы

Декартовы компоненты оператора спина удовлетворяют соотношениям

$$[\hat{S}_i, \hat{S}_k] = i \varepsilon_{ikl} \hat{S}_l, \quad \{\hat{S}_i, \hat{S}_k\} = \frac{1}{2} \delta_{ik} I, \quad (i, k, l = x, y, z). \quad (9)$$

Для циклических компонент эти соотношения имеют вид

$$[\hat{S}_\mu, \hat{S}_\nu] = -\sqrt{2} C_{1\mu 1\nu}^{1\lambda} \hat{S}_\lambda, \quad \{\hat{S}_\mu, \hat{S}_\nu\} = \frac{1}{2} (-1)^\mu \delta_{\mu-\nu} I, \quad (\mu, \nu, \lambda = \pm 1, 0). \quad (10)$$

### 3. Произведение спиновых матриц

Четыре матрицы  $\hat{S}_x$ ,  $\hat{S}_y$ ,  $\hat{S}_z$  и  $\hat{I}$  (или  $\hat{S}_{+1}$ ,  $\hat{S}_0$ ,  $\hat{S}_{-1}$  и  $\hat{I}$ ) образуют полный набор двумерных квадратных матриц, по которым может быть разложена любая функция, содержащая оператор спина ( $S=1/2$ ). В частности, произведения спиновых матриц могут быть представлены в виде суммы спиновых матриц и  $\hat{I}$ . Произведения декартовых компонент (индексы  $i, k, l$  и т. д. принимают значения  $x, y, z$ )

$$\hat{S}_i \hat{S}_k = \frac{1}{4} \delta_{ik} \hat{I} + \frac{i}{2} \varepsilon_{ikl} \hat{S}_l, \quad (11)$$

$$\hat{S}_i \hat{S}_k \hat{S}_l = \frac{i}{8} \varepsilon_{ikl} \hat{I} + \frac{1}{4} (\hat{S}_i \delta_{kl} - \hat{S}_k \delta_{il} + \hat{S}_l \delta_{ik}), \quad (12)$$

$$\hat{S}_i \hat{S}_k \hat{S}_l \hat{S}_j = \frac{1}{16} (\delta_{ik} \delta_{lj} - \delta_{il} \delta_{kj} + \delta_{ij} \delta_{kl}) \hat{I} + \frac{i}{8} (\delta_{ik} \varepsilon_{ljm} - \delta_{il} \varepsilon_{kjm} + \delta_{ij} \varepsilon_{klm} + \delta_{kl} \varepsilon_{ijm} - \delta_{kj} \varepsilon_{ilm} + \delta_{lj} \varepsilon_{ikm}) \hat{S}_m. \quad (13)$$

Формула (11) в подробной записи имеет вид

$$\hat{S}_x^2 = \hat{S}_y^2 = \hat{S}_z^2 = \frac{1}{4} \hat{I},$$

$$\hat{S}_x \hat{S}_y = -\hat{S}_y \hat{S}_x = \frac{i}{2} \hat{S}_z, \quad \hat{S}_y \hat{S}_z = -\hat{S}_z \hat{S}_y = \frac{i}{2} \hat{S}_x, \quad (14)$$

$$\hat{S}_z \hat{S}_x = -\hat{S}_x \hat{S}_z = \frac{i}{2} \hat{S}_y.$$

Произведение циклических компонент

$$\hat{S}_{+1} \hat{S}_{+1} = 0, \quad \hat{S}_0 \hat{S}_0 = \frac{1}{4} \hat{I}, \quad \hat{S}_{-1} \hat{S}_{-1} = 0$$

$$\hat{S}_{+1} \hat{S}_{-1} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = -\frac{1}{4} \hat{I} - \frac{1}{2} \hat{S}_0,$$

$$\hat{S}_{-1} \hat{S}_{+1} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{4} \hat{I} + \frac{1}{2} \hat{S}_0, \quad (15)$$

$$\hat{S}_{+1} \hat{S}_0 = -\frac{1}{2} \hat{S}_{+1}, \quad \hat{S}_{-1} \hat{S}_0 = \frac{1}{2} \hat{S}_{-1},$$

$$\hat{S}_0 \hat{S}_{+1} = \frac{1}{2} \hat{S}_{+1}, \quad \hat{S}_0 \hat{S}_{-1} = -\frac{1}{2} \hat{S}_{-1}.$$

$$\hat{S}_\mu \hat{S}_\nu = \frac{1}{4} (-1)^\mu \delta_{\mu\nu} \hat{I} - \frac{1}{\sqrt{2}} C_{1\mu 1\nu}^1 \hat{S}_\lambda, \quad (\mu, \nu, \lambda = \pm 1, 0), \quad (\hat{S}_{+1})^n = 0, \quad (\hat{S}_{-1})^n = 0, \quad (n=2, 3, \dots), \quad (16)$$

$$(\hat{S}_0)^{2n} = \left(\frac{1}{4}\right)^n \hat{I}, \quad (\hat{S}_0)^{2n+1} = \left(\frac{1}{4}\right)^n \hat{S}_0, \quad (n=0, 1, 2, \dots), \quad (17)$$

$$\hat{S} \cdot \hat{S} = \hat{S}^2 = \hat{S}_x^2 + \hat{S}_y^2 + \hat{S}_z^2 = -\hat{S}_{+1} \hat{S}_{-1} + \hat{S}_0 \hat{S}_0 - \hat{S}_{-1} \hat{S}_{+1} = \frac{3}{4} \hat{I}. \quad (18)$$

Произведения операторов  $\hat{S}$  и векторов  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$ , коммутирующих с  $\hat{S}$ :

$$\hat{S} \cdot (\hat{S} \cdot \mathbf{a}) = \frac{1}{4} \hat{I} \mathbf{a} - \frac{i}{2} [\hat{S} \times \mathbf{a}], \quad (19)$$

$$(\hat{S} \cdot [\hat{S} \times \mathbf{a}]) = ([\hat{S} \times \hat{S}] \cdot \mathbf{a}) = i (\hat{S} \cdot \mathbf{a}), \quad (20)$$

$$[\hat{S} \times [\hat{S} \times \mathbf{a}]] = -\frac{1}{2} \hat{I} \mathbf{a} + \frac{i}{2} [\hat{S} \times \mathbf{a}], \quad (21)$$

$$(\hat{S} \cdot \mathbf{a}) (\hat{S} \cdot \mathbf{b}) = \frac{1}{4} (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \hat{I} + \frac{i}{2} (\hat{S} \cdot [\mathbf{a} \times \mathbf{b}]), \quad (22)$$

$$([\hat{S} \times \mathbf{a}] \cdot [\hat{S} \times \mathbf{b}]) = \frac{1}{2} (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \hat{I} + \frac{i}{2} (\hat{S} \cdot [\mathbf{a} \times \mathbf{b}]), \quad (23)$$

$$(\hat{\mathbf{S}} \cdot \mathbf{a}) [\hat{\mathbf{S}} \times \mathbf{b}] = \frac{1}{4} [\mathbf{a} \times \mathbf{b}] I + \frac{i}{2} \{(\hat{\mathbf{S}} \cdot \mathbf{b}) \mathbf{a} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \hat{\mathbf{S}}\}, \quad (24)$$

$$[(\hat{\mathbf{S}} \times \mathbf{a}) \times (\hat{\mathbf{S}} \times \mathbf{b})] = \frac{1}{4} [\mathbf{a} \times \mathbf{b}] I + \frac{i}{2} \{(\hat{\mathbf{S}} \cdot \mathbf{b}) \mathbf{a} + (\hat{\mathbf{S}} \cdot \mathbf{a}) \mathbf{b}\}. \quad (25)$$

Если  $\mathbf{n}$  — единичный вектор ( $\mathbf{n}^2 = 1$ ), то

$$(\hat{\mathbf{S}} \cdot \mathbf{n})^{2k} = \left(\frac{1}{4}\right)^k I, \quad (\hat{\mathbf{S}} \cdot \mathbf{n})^{2k+1} = \left(\frac{1}{4}\right)^k (\hat{\mathbf{S}} \cdot \mathbf{n}), \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (26)$$

#### 4. Функции от спиновых матриц

$$e^{a\hat{S}_i} = I \operatorname{ch} \frac{a}{2} + 2\hat{S}_i \operatorname{sh} \frac{a}{2}, \quad (27)$$

$$\operatorname{ch}(a\hat{S}_i) = I \operatorname{ch} \frac{a}{2}, \quad \operatorname{sh}(a\hat{S}_i) = 2\hat{S}_i \operatorname{sh} \frac{a}{2}, \quad (28)$$

$$e^{a\hat{S}_{+1}} = I + a\hat{S}_{+1}, \quad e^{a\hat{S}_0} = I \operatorname{ch} \frac{a}{2} + 2\hat{S}_0 \operatorname{sh} \frac{a}{2}, \quad e^{a\hat{S}_{-1}} = I + a\hat{S}_{-1}. \quad (29)$$

$$\operatorname{ch}(a\hat{S}_{+1}) = I, \quad \operatorname{ch}(a\hat{S}_0) = I \operatorname{ch} \frac{a}{2}, \quad \operatorname{ch}(a\hat{S}_{-1}) = I, \quad (30)$$

$$\operatorname{sh}(a\hat{S}_{+1}) = a\hat{S}_{+1}, \quad \operatorname{sh}(a\hat{S}_0) = 2\hat{S}_0 \operatorname{sh} \frac{a}{2}, \quad \operatorname{sh}(a\hat{S}_{-1}) = a\hat{S}_{-1}. \quad (31)$$

#### 5. Операторы поворота системы координат

а. При повороте системы координат, характеризуемом углами Эйлера  $\alpha, \beta, \gamma$ , спиновые функции и спиновые матрицы в случае  $S = \frac{1}{2}$  преобразуются с помощью оператора поворота  $\hat{D}^{1/2}(\alpha, \beta, \gamma)$ , являющегося частным случаем выражения 1.4. (31):

$$\hat{D}^{1/2}(\alpha, \beta, \gamma) = e^{-i\alpha\hat{S}_z} \cdot e^{-i\beta\hat{S}_y} \cdot e^{-i\gamma\hat{S}_z} = \begin{pmatrix} \cos \frac{\beta}{2} e^{-i\frac{\alpha+\gamma}{2}} & -\sin \frac{\beta}{2} e^{-i\frac{\alpha-\gamma}{2}} \\ \sin \frac{\beta}{2} e^{i\frac{\alpha-\gamma}{2}} & \cos \frac{\beta}{2} e^{i\frac{\alpha+\gamma}{2}} \end{pmatrix}. \quad (32)$$

Обратная матрица

$$\begin{aligned} [\hat{D}^{1/2}(\alpha, \beta, \gamma)]^{-1} &= [\hat{D}^{1/2}(\alpha, \beta, \gamma)]^+ = \hat{D}^{1/2}(\pi - \gamma, \beta, -\pi - \alpha) = \hat{D}^{1/2}(-\gamma, -\beta, -\alpha) = \\ &= \begin{pmatrix} \cos \frac{\beta}{2} e^{i\frac{\alpha+\gamma}{2}} & \sin \frac{\beta}{2} e^{-i\frac{\alpha-\gamma}{2}} \\ -\sin \frac{\beta}{2} e^{i\frac{\alpha-\gamma}{2}} & \cos \frac{\beta}{2} e^{-i\frac{\alpha+\gamma}{2}} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (33)$$

Матричные элементы оператора  $\hat{D}^{1/2}(\alpha, \beta, \gamma)$  являются  $D$ -функциями Вигнера  $D_{M'M'}^{1/2}(\alpha, \beta, \gamma)$  (гл. 4). Разложение оператора  $\hat{D}^{1/2}(\alpha, \beta, \gamma)$  по спиновым матрицам имеет вид

$$\hat{D}^{1/2}(\alpha, \beta, \gamma) = \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\alpha+\gamma}{2} I + 2i \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\alpha-\gamma}{2} \hat{S}_x - 2i \sin \frac{\beta}{2} \cos \frac{\alpha-\gamma}{2} \hat{S}_y - 2i \cos \frac{\beta}{2} \sin \frac{\alpha+\gamma}{2} \hat{S}_z, \quad (34)$$

$$\hat{D}^{1/2}(\alpha, \beta, \gamma) = \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\alpha+\gamma}{2} I + \sqrt{2} \sin \frac{\beta}{2} e^{-i\frac{\alpha-\gamma}{2}} \hat{S}_{+1} - 2i \cos \frac{\beta}{2} \sin \frac{\alpha+\gamma}{2} \hat{S}_0 + \sqrt{2} \sin \frac{\beta}{2} e^{i\frac{\alpha-\gamma}{2}} \hat{S}_{-1}. \quad (35)$$

б. При повороте системы координат, характеризуемом направлением оси поворота  $\mathbf{n}(\Theta, \Phi)$  и углом поворота  $\omega$ , спиновые функции и спиновые матрицы в случае  $S = 1/2$  преобразуются с помощью оператора поворота  $\hat{U}^{1/2}(\omega; \Theta, \Phi)$ , являющегося частным случаем 1.4. (33):

$$\hat{U}^{1/2}(\omega; \Theta, \Phi) = e^{-i\omega\mathbf{n} \cdot \hat{\mathbf{S}}} = \begin{pmatrix} \cos \frac{\omega}{2} - i \sin \frac{\omega}{2} \cos \Theta & -i \sin \frac{\omega}{2} \sin \Theta e^{-i\Phi} \\ -i \sin \frac{\omega}{2} \sin \Theta e^{i\Phi} & \cos \frac{\omega}{2} + i \sin \frac{\omega}{2} \cos \Theta \end{pmatrix}. \quad (36)$$



Обратная матрица

$$[U^{1/2}(\omega; \Theta, \Phi)]^{-1} = [U^{1/2}(\omega; \Theta, \Phi)]^+ = U^{1/2}(\omega; \pi - \Theta, \pi + \Phi) = U^{1/2}(-\omega; \Theta, \Phi) =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos \frac{\omega}{2} + i \sin \frac{\omega}{2} \cos \Theta & i \sin \frac{\omega}{2} \sin \Theta e^{-i\Phi} \\ i \sin \frac{\omega}{2} \sin \Theta e^{i\Phi} & \cos \frac{\omega}{2} - i \sin \frac{\omega}{2} \cos \Theta \end{pmatrix}. \quad (37)$$

Разложение оператора  $U^{1/2}(\omega; \Theta, \Phi)$  по спиновым матрицам имеет вид

$$U^{1/2}(\omega; \Theta, \Phi) = e^{-i\omega n \cdot \hat{S}} = I \cos \frac{\omega}{2} - 2i (n \cdot \hat{S}) \sin \frac{\omega}{2}. \quad (38)$$

Углы  $\omega, \Theta, \Phi$  связаны с углами Эйлера  $\alpha, \beta, \gamma$  по формулам 1.4. (16) — 1.4. (17), причем

$$D^{1/2}(\alpha, \beta, \gamma) = U^{1/2}(\omega; \Theta, \Phi). \quad (39)$$

в. Действие оператора поворота  $D^{1/2}(\alpha, \beta, \gamma)$  на спиновые матрицы дается формулами

$$\hat{S}'_i \equiv D^{1/2}(\alpha, \beta, \gamma) \hat{S}_i [D^{1/2}(\alpha, \beta, \gamma)]^{-1} = \sum_k a_{ik} \hat{S}_k, \quad (i, k = x, y, z), \quad (40)$$

где  $a_{ik}$  — матрица поворота (раздел 1.4. 6).

$$\hat{S}'_\mu \equiv D^{1/2}(\alpha, \beta, \gamma) \hat{S}_\mu [D^{1/2}(\alpha, \beta, \gamma)]^{-1} = \sum_\nu D^1_{\nu\mu}(\alpha, \beta, \gamma) \hat{S}_\nu; \quad (41)$$

здесь  $D^1_{\nu\mu}$  —  $D$ -функции Вигнера (гл. 4).

## 6. Вычисление шпуров от произведений спиновых матриц ( $S=1/2$ )

Для декартовых компонент оператора спина имеют место соотношения ( $i, k, l$  и т. д. =  $x, y, z$ )

$$\begin{aligned} \text{Sp} \{ \hat{S}_i \} &= 0, \\ \text{Sp} \{ \hat{S}_i \hat{S}_k \} &= \frac{1}{2} \delta_{ik}, \\ \text{Sp} \{ \hat{S}_i \hat{S}_k \hat{S}_l \} &= \frac{i}{4} \varepsilon_{ikl}, \\ \text{Sp} \{ \hat{S}_i \hat{S}_k \hat{S}_l \hat{S}_j \} &= \frac{1}{8} (\delta_{ik} \delta_{lj} - \delta_{il} \delta_{kj} + \delta_{ij} \delta_{kl}), \\ \text{Sp} \{ \hat{S}_i \hat{S}_k \hat{S}_l \hat{S}_j \hat{S}_m \} &= \frac{i}{16} (\delta_{ik} \varepsilon_{l j m} + \delta_{jl} \varepsilon_{i k m} + \delta_{ml} \varepsilon_{i j k} + \delta_{jm} \varepsilon_{i k l}). \end{aligned} \quad (42)$$

При вычислении шпуров от произведений большого числа спиновых матриц удобно пользоваться формулой приведения. Обозначим

$$T_{i_1 i_2 \dots i_n} \equiv \text{Sp} \{ \hat{S}_{i_1} \hat{S}_{i_2} \dots \hat{S}_{i_n} \}, \quad (n \geq 3). \quad (43)$$

Тогда

$$T_{i_1 i_2 \dots i_n} = \frac{1}{4} \delta_{i_1 i_2} T_{i_3 i_4 \dots i_n} + \frac{i}{2} \varepsilon_{i_1 i_2 i_3} T_{i_4 i_5 \dots i_n}. \quad (44)$$

В случае четного  $n$ , можно пользоваться также формулой

$$T_{i_1 i_2 \dots i_n} = \frac{1}{4} \{ \delta_{i_1 i_2} T_{i_3 i_4 \dots i_n} - \delta_{i_1 i_3} T_{i_2 i_4 \dots i_n} + \dots + \delta_{i_1 i_n} T_{i_2 i_3 \dots i_{n-1}} \}. \quad (45)$$

Для циклических компонент оператора спина имеют место соотношения ( $\mu, \nu, \lambda$  и т. д. =  $\pm 1, 0$ )

$$\begin{aligned} \text{Sp} \{ \hat{S}_\mu \} &= 0, \\ \text{Sp} \{ \hat{S}_\mu \hat{S}_\nu \} &= \frac{1}{2} (-1)^{\mu\nu} \delta_{\mu-\nu}, \\ \text{Sp} \{ \hat{S}_\mu \hat{S}_\nu \hat{S}_\lambda \} &= -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \mu & \nu & \lambda \end{pmatrix} = (-1)^{1+\lambda} \frac{1}{2\sqrt{2}} C^1_{\mu\nu\lambda}, \end{aligned} \quad (46)$$

$$\text{Sp} \{ \hat{S}_\mu \hat{S}_\nu \hat{S}_\lambda \hat{S}_\rho \} = \frac{(-1)^\mu}{8} \{ (-1)^\lambda \delta_{\mu-\nu} \delta_{\lambda-\rho} - (-1)^\nu \delta_{\mu-\lambda} \delta_{\nu-\rho} + (-1)^\nu \delta_{\mu-\rho} \delta_{\nu-\lambda} \}.$$

Формула приведения для циклических компонент оператора спина имеет вид

$$T_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_n} = \frac{(-1)^{\mu_1}}{4} \delta_{\mu_1 - \mu_2} T_{\mu_3 \dots \mu_n} - \frac{1}{\sqrt{2}} C_{1\mu_1 \mu_2}^{1\mu} T_{\mu \mu_3 \dots \mu_n}, \quad (47)$$

где

$$T_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_n} \equiv \text{Sp} \{ \hat{S}_{\mu_1} \hat{S}_{\mu_2} \dots \hat{S}_{\mu_n} \}. \quad (48)$$

В случае четного  $n$  можно пользоваться также формулой

$$T_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_n} = \frac{(-1)^{\mu_1}}{4} \{ \delta_{\mu_1 - \mu_2} T_{\mu_3 \mu_4 \dots \mu_n} - \delta_{\mu_1 - \mu_3} T_{\mu_2 \mu_4 \dots \mu_n} + \dots + \delta_{\mu_1 - \mu_n} T_{\mu_2 \mu_3 \dots \mu_{n-1}} \}. \quad (49)$$

## 2.6. СПИНОВЫЕ МАТРИЦЫ И ПОЛЯРИЗАЦИОННЫЕ ОПЕРАТОРЫ ДЛЯ СПИНА $S=1$

### 1. Спин $S=1$

В этом случае оператор спина  $\hat{S}$  и поляризационные операторы  $\hat{T}_{LM}$  ( $L=0, 1, 2; -L \leq M \leq L$ ) являются квадратными матрицами размерности  $3 \times 3$ . Поляризационный оператор  $\hat{T}_{00}$  пропорционален единичной матрице:

$$\hat{T}_{00} = \frac{1}{\sqrt{3}} I, \quad (1)$$

где

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Поляризационные операторы  $\hat{T}_{1M}$  пропорциональны циклическим компонентам спиновых матриц  $\hat{S}_M$ :

$$\hat{T}_{1M} = \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{S}_M, \quad (M=0, \pm 1). \quad (3)$$

Операторы  $\hat{T}_{2M}$  ( $M=0, \pm 1, \pm 2$ ) выражаются через циклические компоненты спиновых матриц по формуле

$$\hat{T}_{2M} = \sum_{\mu, \nu} C_{1\mu 1\nu}^{2M} \hat{S}_\mu \hat{S}_\nu. \quad (4)$$

Поляризационные операторы  $\hat{T}_{2M}$  эквивалентны симметричному декартову тензору второго ранга  $\hat{Q}_{ik}$  со следом 0:

$$\hat{Q}_{ik} = \frac{1}{2} \left( \hat{S}_i \hat{S}_k + \hat{S}_k \hat{S}_i - \frac{4}{3} \delta_{ik} I \right), \quad (i, k = x, y, z), \quad (5)$$

$$\hat{Q}_{ik} = \hat{Q}_{ki}, \quad \sum_i \hat{Q}_{ii} = 0. \quad (6)$$

Тензор  $\hat{Q}_{ik}$  называется квадрупольным. Он имеет 5 линейно независимых компонент. Его компоненты связаны с компонентами  $\hat{T}_{2M}$  соотношениями

$$\begin{aligned} \hat{T}_{222} &= \frac{1}{2} (\hat{Q}_{xx} - \hat{Q}_{yy}, \pm 2i \hat{Q}_{xy}), \\ \hat{T}_{2\pm 1} &= \mp (\hat{Q}_{xz} \pm i \hat{Q}_{yz}), \\ \hat{T}_{20} &= \sqrt{\frac{3}{2}} \hat{Q}_{zz}. \end{aligned} \quad (7)$$

Обратные соотношения имеют вид

$$\begin{aligned}\hat{Q}_{xx} &= \frac{1}{2} (\hat{T}_{22} + \hat{T}_{2-2}) - \frac{1}{\sqrt{6}} \hat{T}_{20}, & \hat{Q}_{xy} = \hat{Q}_{yx} &= \frac{i}{2} (\hat{T}_{2-2} - \hat{T}_{22}), \\ \hat{Q}_{yy} &= -\frac{1}{2} (\hat{T}_{22} + \hat{T}_{2-2}) - \frac{1}{\sqrt{6}} \hat{T}_{20}, & \hat{Q}_{xz} = \hat{Q}_{zx} &= \frac{1}{2} (\hat{T}_{2-1} - \hat{T}_{21}), \\ \hat{Q}_{zz} &= \sqrt{\frac{2}{3}} \hat{T}_{20}, & \hat{Q}_{yz} = \hat{Q}_{zy} &= \frac{i}{2} (\hat{T}_{2-1} + \hat{T}_{21}).\end{aligned}\quad (8)$$

## 2. ЯВНЫЙ ВИД

Явный вид спиновых матриц и поляризационных операторов зависит от выбора представления для базисных спиновых функций (гл. 6). Наиболее часто употребляются представления циклического и декартового базисов.

### а. Представление циклического базиса

Декартовы компоненты оператора спина  $\hat{S}$

$$\hat{S}_x = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{S}_y = \frac{i}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{S}_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (9)$$

Циклические компоненты оператора спина  $\hat{S}$

$$\hat{S}_{+1} = -\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{S}_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \hat{S}_{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (10)$$

Порядок нумерации строк и столбцов указан в 2.3 (10).

Матричные элементы оператора спина  $\hat{S}_\mu$  в циклическом базисе даются формулой

$$(\hat{S}_\mu)_{\sigma'\sigma} = \sqrt{2} C_{1\sigma'1\mu}^{\pm\sigma}, \quad (\mu, \sigma, \sigma' = \pm 1, 0). \quad (11)$$

Спиновые матрицы в представлении циклического базиса удовлетворяют соотношениям

$$\hat{S}_i^\dagger = \hat{S}_i, \quad (i = x, y, z), \quad (12)$$

$$\hat{S}_x^* = \hat{S}_x, \quad \hat{S}_y^* = -\hat{S}_y, \quad \hat{S}_z^* = \hat{S}_z, \quad (13)$$

$$\hat{S}_\mu^* = \hat{S}_\mu, \quad \hat{S}_\mu^\dagger = (-1)^\mu \hat{S}_{-\mu} \quad (\mu = \pm 1, 0). \quad (14)$$

Квадрупольный тензор  $\hat{Q}_{ik}$  ( $i, k = x, y, z$ ) в представлении циклического базиса имеет вид

$$\begin{aligned}\hat{Q}_{xx} &= \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}, & \hat{Q}_{yy} &= \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -1 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & -1 \end{pmatrix}, & \hat{Q}_{zz} &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ \hat{Q}_{xy} = \hat{Q}_{yx} &= \frac{i}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \hat{Q}_{xz} = \hat{Q}_{zx} &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, & \hat{Q}_{yz} = \hat{Q}_{zy} &= \frac{i}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.\end{aligned}\quad (15)$$

Компоненты квадрупольного тензора  $\hat{Q}_{ik}$  в представлении циклического базиса удовлетворяют соотношениям

$$\hat{Q}_{ik}^\dagger = \hat{Q}_{ik}, \quad (i, k = x, y, z), \quad (16)$$

причем матрицы  $\hat{Q}_{xx}$ ,  $\hat{Q}_{yy}$ ,  $\hat{Q}_{zz}$ ,  $\hat{Q}_{xz}$ ,  $\hat{Q}_{zx}$  — вещественные, а матрицы  $\hat{Q}_{xy}$ ,  $\hat{Q}_{yx}$ ,  $\hat{Q}_{yz}$ ,  $\hat{Q}_{zy}$  — чисто мнимые. Поляризационные операторы  $\hat{T}_{LM}$  в представлении циклического базиса имеют вид

$$\hat{T}_{00} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (17)$$

$$\hat{T}_{1+1} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{T}_{10} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \hat{T}_{1-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (18)$$

$$\hat{T}_{2+2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{T}_{21} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{T}_{20} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\hat{T}_{2-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{T}_{2-2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (19)$$

Матричные элементы поляризационных операторов в циклическом базисе даются формулами

$$(\hat{T}_{LM})_{\sigma\sigma'} = \sqrt{\frac{2L+1}{3}} C_{1\sigma LM}^{1\sigma'} \quad (\sigma, \sigma' = \pm 1, 0; -L \leq M \leq L). \quad (20)$$

Поляризационные операторы  $\hat{T}_{LM}$  в представлении циклического базиса вещественны:

$$\hat{T}_{LM}^* = \hat{T}_{LM} \quad (21)$$

и удовлетворяют соотношениям

$$\hat{T}_{LM}^{\dagger} = (-1)^M \hat{T}_{L-M} \quad (22)$$

### б. Представление декартового базиса

Декартовы компоненты оператора спина  $\hat{S}$

$$\hat{S}_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{S}_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{S}_z = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (23)$$

Матричные элементы операторов  $\hat{S}_i$  в декартовом базисе можно записать следующим образом:

$$(\hat{S}_i)_{kl} = -i\epsilon_{ikl}, \quad (i, k, l = x, y, z). \quad (24)$$

Циклические компоненты оператора спина  $\hat{S}$

$$\hat{S}_{+1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & i \\ -1 & -i & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{S}_0 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{S}_{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -i \\ -1 & i & 0 \end{pmatrix}. \quad (25)$$

Спиновые матрицы в представлении декартового базиса удовлетворяют соотношениям

$$(\hat{S}_\mu)^{\dagger} = (-1)^\mu \hat{S}_{-\mu}, \quad \hat{S}_\mu^* = (-1)^{L+\mu} \hat{S}_{-\mu}, \quad (\mu = \pm 1, 0), \quad (26)$$

$$(\hat{S}_i)^{\dagger} = \hat{S}_i, \quad \hat{S}_i^* = -\hat{S}_i, \quad (i = x, y, z). \quad (27)$$

Квадрупольный тензор  $\hat{Q}_{ik}(t, k = x, y, z)$  в представлении декартового базиса имеет вид

$$\hat{Q}_{xx} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \hat{Q}_{yy} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \hat{Q}_{zz} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad (28)$$

$$\hat{Q}_{xy} = \hat{Q}_{yx} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{Q}_{xz} = \hat{Q}_{zx} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{Q}_{yz} = \hat{Q}_{zy} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Матричные элементы  $\hat{Q}_{ik}$  в декартовом базисе можно записать в виде

$$(\hat{Q}_{ik})_{lm} = -\frac{1}{2} (\delta_{il}\delta_{km} + \delta_{im}\delta_{kl} - \frac{2}{3} \delta_{ik}\delta_{lm}), \quad (i, k, l, m = x, y, z). \quad (29)$$

Матрицы  $\hat{Q}_{ik}$  в декартовом базисе эрмитовы и вещественны:

$$\hat{Q}_{ik}^{\dagger} = \hat{Q}_{ik}, \quad \hat{Q}_{ik}^* = \hat{Q}_{ik}, \quad (i, k = x, y, z). \quad (30)$$

Поляризаационные операторы  $\hat{T}_{LM}$  в представлении декартового базиса имеют вид

$$\hat{T}_{00} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (31)$$

$$\hat{T}_{1+1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & i \\ -1 & -i & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{T}_{10} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{T}_{1-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -i \\ -1 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad (32)$$

$$\hat{T}_{2+2} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & -i & 0 \\ -i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{T}_{2+1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & i \\ 1 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{T}_{20} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad (33)$$

$$\hat{T}_{2-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & i \\ -1 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{T}_{2-2} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & i & 0 \\ i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Поляризаационные операторы  $\hat{T}_{LM}$  в декартовом базисе удовлетворяют соотношениям

$$\hat{T}_{LM}^+ = (-1)^M \hat{T}_{LM}, \quad (34)$$

$$\hat{T}_{LM}^* = (-1)^{L+M} \hat{T}_{L-M}. \quad (35)$$

Переход от представления циклического базиса к представлению декартового базиса и обратно для спиновых поляризаационных операторов осуществляется при помощи унитарной матрицы  $U$ :

$$\hat{A} \text{ (циклический базис)} = U \hat{A} \text{ (декартовый базис)} U^{-1}, \quad (36)$$

$$\hat{A} \text{ (декартовый базис)} = U^{-1} \hat{A} \text{ (циклический базис)} U,$$

где  $\hat{A}$  — любой из спиновых или поляризаационных операторов (т. е.  $\hat{S}_i$ ,  $\hat{S}_\mu$ ,  $\hat{Q}_{ik}$ ,  $\hat{T}_{LM}$ ),

$$U = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{i}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{i}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix}, \quad U^{-1} = U^+ = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{i}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{i}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (37)$$

Матрица  $U$  совпадает с матрицей  $M(+1, 0, -1 \leftarrow x, y, z)$ , а матрица  $U^{-1}$  — с матрицей  $M(x, y, z, \leftarrow +1, 0, -1)$  (см. табл. 1.2).

Формулы, которые приведены во всех пунктах этого параграфа, кроме формул пункта 2, не зависят от выбора представления для спиновых и поляризаационных операторов, если не сделано специальных оговорок.

### 3. Произведения спиновых и поляризаационных матриц

В случае спина  $S=1$  9 матриц  $\hat{T}_{LM}$  ( $L=0, 1, 2$ ;  $-L \leq M \leq L$ ) или, что эквивалентно, матрицы  $\hat{I}$ ,  $\hat{S}$ ,  $\hat{Q}_{ik}$  образуют полный набор  $3 \times 3$  квадратных матриц, по которым может быть разложена любая функция, содержащая спиновые и поляризаационные операторы и, в частности, произведения спиновых и поляризаационных матриц.

Произведения декартовых компонент матриц  $\hat{S}$  и  $\hat{Q}_{ik}$  (индексы  $i, k, l$  и т. д. принимают значения  $x, y, z$ ):

$$a) \quad \hat{S}_i \hat{S}_k = \frac{2}{3} \delta_{ik} \hat{I} + \frac{i}{2} \epsilon_{ikl} \hat{S}_l + \hat{Q}_{ik}. \quad (38)$$

В частности,

$$\hat{S}^2 = \hat{S}_x^2 + \hat{S}_y^2 + \hat{S}_z^2 = 2\hat{I}, \quad (39)$$

$$[\hat{S}_i, \hat{S}_k] \equiv \hat{S}_i \hat{S}_k - \hat{S}_k \hat{S}_i = i \epsilon_{ikl} \hat{S}_l, \quad (40)$$

$$\{\hat{S}_i, \hat{S}_k\} \equiv \hat{S}_i \hat{S}_k + \hat{S}_k \hat{S}_i = \frac{4}{3} \delta_{ik} \hat{I} + 2\hat{Q}_{ik}. \quad (41)$$

б)

$$\hat{S}_i \hat{S}_k \hat{S}_l = \frac{i}{3} \varepsilon_{ikl} I + \frac{1}{2} (\delta_{ik} \hat{S}_l + \delta_{kl} \hat{S}_i) + \frac{i}{2} (\varepsilon_{ikm} \hat{Q}_{lm} + \varepsilon_{ilm} \hat{Q}_{km} + \varepsilon_{klm} \hat{Q}_{im}). \quad (42)$$

В частности,

$$\hat{S}_i \hat{S}_k \hat{S}_i = \delta_{ik} \hat{S}_i \quad (\text{суммирование по } i \text{ не производится}), \quad (43)$$

$$\sum_i \hat{S}_i \hat{S}_k \hat{S}_i = \hat{S}_k, \quad (44)$$

$$\hat{S}_i \hat{S}_k \hat{S}_k + \hat{S}_k \hat{S}_k \hat{S}_i = \hat{S}_i + \delta_{ik} \hat{S}_k \quad (\text{суммирование по } k \text{ не производится}), \quad (45)$$

$$\begin{aligned} \hat{S}_x \hat{S}_y \hat{S}_x + \hat{S}_y \hat{S}_z \hat{S}_x + \hat{S}_z \hat{S}_x \hat{S}_y &= iI, \\ \hat{S}_x \hat{S}_z \hat{S}_y + \hat{S}_z \hat{S}_y \hat{S}_x + \hat{S}_y \hat{S}_x \hat{S}_z &= -iI, \end{aligned} \quad (46)$$

$$\hat{S}_x \hat{S}_z \hat{S}_z = \hat{S}_y \hat{S}_y \hat{S}_x = \frac{1}{2} \hat{S}_x - i\hat{Q}_{yz}, \quad (47)$$

$$\hat{S}_x \hat{S}_y \hat{S}_y = \hat{S}_z \hat{S}_z \hat{S}_x = \frac{1}{2} \hat{S}_x + i\hat{Q}_{yz},$$

$$\hat{S}_y \hat{S}_x \hat{S}_x = \hat{S}_z \hat{S}_z \hat{S}_y = \frac{1}{2} \hat{S}_y - i\hat{Q}_{xz}, \quad (48)$$

$$\hat{S}_y \hat{S}_z \hat{S}_z = \hat{S}_x \hat{S}_x \hat{S}_y = \frac{1}{2} \hat{S}_y + i\hat{Q}_{xz},$$

$$\hat{S}_z \hat{S}_y \hat{S}_y = \hat{S}_x \hat{S}_x \hat{S}_z = \frac{1}{2} \hat{S}_z - i\hat{Q}_{xy}, \quad (49)$$

$$\hat{S}_z \hat{S}_x \hat{S}_x = \hat{S}_y \hat{S}_y \hat{S}_z = \frac{1}{2} \hat{S}_z + i\hat{Q}_{xy},$$

в)

$$\hat{S}_i^{2n} = \frac{2}{3} I + \hat{Q}_{ii}, \quad (n=1, 2, \dots), \quad \hat{S}_i^{2n+1} = \hat{S}_i, \quad (n=0, 1, 2, \dots). \quad (50)$$

В частности, если  $\mathbf{n}$  — единичный вектор,

$$(\hat{\mathbf{S}} \cdot \mathbf{n})^{2k} = \frac{2}{3} I + \sum_{i,l} n_i n_l \hat{Q}_{il}, \quad (k=1, 2, 3, \dots), \quad (51)$$

$$(\hat{\mathbf{S}} \cdot \mathbf{n})^{2k+1} = (\hat{\mathbf{S}} \cdot \mathbf{n}), \quad (k=0, 1, 2, \dots),$$

г)

$$\hat{Q}_{ik} \hat{S}_l = \frac{1}{4} (\delta_{il} \hat{S}_k + \delta_{kl} \hat{S}_i - \frac{2}{3} \delta_{ik} \hat{S}_l) + \frac{i}{2} (\varepsilon_{ilm} \hat{Q}_{km} + \varepsilon_{klm} \hat{Q}_{im}), \quad (52)$$

$$\hat{S}_i \hat{Q}_{kl} = \frac{1}{4} (\delta_{ik} \hat{S}_l + \delta_{il} \hat{S}_k - \frac{2}{3} \delta_{kl} \hat{S}_i) + \frac{i}{2} (\varepsilon_{ikm} \hat{Q}_{lm} + \varepsilon_{ilm} \hat{Q}_{km}). \quad (53)$$

д)

$$\begin{aligned} \hat{Q}_{ik} \hat{Q}_{lm} &= \frac{1}{6} (\delta_{il} \delta_{km} + \delta_{im} \delta_{kl} - \frac{2}{3} \delta_{ik} \delta_{lm}) I - \frac{1}{4} (\delta_{il} \hat{Q}_{km} + \delta_{im} \hat{Q}_{kl} + \delta_{km} \hat{Q}_{il} + \delta_{kl} \hat{Q}_{im} - \\ &- \frac{4}{3} \delta_{ik} \hat{Q}_{lm} - \frac{4}{3} \delta_{lm} \hat{Q}_{ik}) + \frac{i}{8} (\delta_{il} \varepsilon_{kmp} \hat{S}_p + \delta_{im} \varepsilon_{klp} \hat{S}_p + \delta_{kl} \varepsilon_{imp} \hat{S}_p + \delta_{km} \varepsilon_{ilp} \hat{S}_p). \end{aligned} \quad (54)$$

Произведение циклических компонент оператора спина  $\hat{\mathbf{S}}$  и поляризаационных операторов  $\hat{T}_{LM}$  ( $\mu, \nu = \pm 1, 0$ ):

$$\hat{S}_\mu \hat{S}_\nu = \frac{2}{3} (-1)^\mu \delta_{\mu-\nu} I - \frac{1}{\sqrt{2}} C_{1\mu 1\nu}^1 \hat{S}_\lambda + C_{1\mu 1\nu}^{2M} \hat{T}_{2M}. \quad (55)$$

В частности,

$$\hat{S}^2 = -\hat{S}_{+1}\hat{S}_{-1} + \hat{S}_0\hat{S}_0 - \hat{S}_{-1}\hat{S}_{+1} = 2I, \quad (56)$$

$$[\hat{S}_\mu, \hat{S}_\nu] \equiv \hat{S}_\mu\hat{S}_\nu - \hat{S}_\nu\hat{S}_\mu = -\sqrt{2} C_{1\mu\nu}^{\lambda} \hat{S}_\lambda, \quad (57)$$

$$\{\hat{S}_\mu, \hat{S}_\nu\} \equiv \hat{S}_\mu\hat{S}_\nu + \hat{S}_\nu\hat{S}_\mu = \frac{4}{3} (-1)^\mu \delta_{\mu-\nu} + 2C_{1\mu\nu}^{2M} \hat{T}_{2M}. \quad (58)$$

б)

$$\hat{S}_{\pm 1}^2 = \hat{T}_{2\pm 2}, \quad \hat{S}_{\pm 1}^3 = \hat{S}_{\pm 1}^4 = \hat{S}_{\pm 1}^5 = \dots = 0, \quad (59)$$

$$\hat{S}_0^2 = \frac{2}{3} I + \sqrt{\frac{2}{3}} \hat{T}_{20}, \quad (60)$$

$$\hat{S}_0^{2n} = \hat{S}_0^2, \quad (n=1, 2, \dots), \quad \hat{S}_0^{2n+1} = \hat{S}_0, \quad (n=0, 1, 2, \dots). \quad (61)$$

в)

$$\hat{T}_{L_1 M_1} \hat{T}_{L_2 M_2} = \sqrt{(2L_1+1)(2L_2+1)} \sum_L (-1)^L \begin{Bmatrix} L_1 & L_2 & L \\ 1 & 1 & 1 \end{Bmatrix} C_{L_1 M_1 L_2 M_2}^{LM} \hat{T}_{LM}. \quad (62)$$

В частности,

$$\hat{T}_{LM} \hat{T}_{00} = \hat{T}_{00} \hat{T}_{LM} = \frac{1}{\sqrt{3}} \hat{T}_{LM}, \quad (L=0, 1, 2; -L \leq M \leq L), \quad (63)$$

$$\hat{S}_\mu \hat{T}_{2M} = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{5}{3}} C_{1\mu 2M}^{1\nu} \hat{S}_\nu - \sqrt{\frac{3}{2}} C_{1\mu 2M}^{2N} \hat{T}_{2N}, \quad (64)$$

$$\hat{T}_{2M} \hat{S}_\mu = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{5}{3}} C_{1\mu 2M}^{1\nu} \hat{S}_\nu + \sqrt{\frac{3}{2}} C_{1\mu 2M}^{2N} \hat{T}_{2N}, \quad (65)$$

$$\hat{T}_{2M} \hat{T}_{2N} = (-1)^M \cdot \frac{1}{3} \delta_{M-N} I + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{5}{2}} C_{2M 2N}^{1\mu} \hat{S}_\mu + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{7}{3}} C_{2M 2N}^{2\Lambda} \hat{T}_{2\Lambda}. \quad (66)$$

#### 4. Функции от спиновых матриц

$$e^{a\hat{S}_i} = \frac{1}{3} (1 + 2 \operatorname{ch} a) I + \operatorname{sh} a \hat{S}_i + (\operatorname{ch} a - 1) \hat{Q}_{ii}, \quad (i=x, y, z, \text{ суммирование по } i \text{ не производится}), \quad (67)$$

$$\operatorname{ch}(a\hat{S}_i) = \frac{1}{3} (1 + 2 \operatorname{ch} a) I + (\operatorname{ch} a - 1) \hat{Q}_{ii}, \quad (68)$$

$$\operatorname{sh}(a\hat{S}_i) = \operatorname{sh} a \hat{S}_i. \quad (69)$$

$$e^{a\hat{S}_{+1}} = I + a\hat{S}_{+1} + \frac{a^2}{2} \hat{T}_{22}, \quad (70)$$

$$e^{a\hat{S}_0} = \frac{1}{3} (1 + 2 \operatorname{ch} a) I + \operatorname{sh} a \hat{S}_0 + \sqrt{\frac{2}{3}} (\operatorname{ch} a - 1) \hat{T}_{20}, \quad (71)$$

$$e^{a\hat{S}_{-1}} = I + a\hat{S}_{-1} + \frac{a^2}{2} \hat{T}_{2-2}, \quad (72)$$

$$\operatorname{sh}(a\hat{S}_{+1}) = a\hat{S}_{+1}, \quad \operatorname{sh}(a\hat{S}_0) = \operatorname{sh} a \hat{S}_0, \quad \operatorname{sh}(a\hat{S}_{-1}) = a\hat{S}_{-1}, \quad (73)$$

$$\operatorname{ch}(a\hat{S}_{+1}) = I + \frac{a^2}{2} \hat{T}_{22},$$

$$\operatorname{ch}(a\hat{S}_0) = \frac{1}{3} (1 + 2 \operatorname{ch} a) I + \sqrt{\frac{2}{3}} (\operatorname{ch} a - 1) \hat{T}_{20}, \quad (74)$$

$$\operatorname{ch}(a\hat{S}_{-1}) = I + \frac{a^2}{2} \hat{T}_{2-2}.$$

## 5. Операторы поворота системы координат

а. При повороте системы координат, характеризуемом углами Эйлера  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ , спиновые функции и спиновые матрицы в случае  $S=1$  преобразуются с помощью оператора поворота  $\hat{D}^1(\alpha; \beta, \gamma)$ , являющегося частным случаем выражения 1.4. (31):

$$\hat{D}^1(\alpha, \beta, \gamma) = e^{-i\alpha\hat{S}_x} e^{-i\beta\hat{S}_y} e^{-i\gamma\hat{S}_z}. \quad (75)$$

В представлении циклического базиса

$$\hat{D}^1(\alpha, \beta, \gamma) = \begin{pmatrix} \frac{1 + \cos \beta}{2} e^{-i(\alpha+\gamma)} - \frac{\sin \beta}{\sqrt{2}} e^{-i\alpha} \frac{1 - \cos \beta}{2} e^{i(\gamma-\alpha)} & & \\ \frac{\sin \beta}{\sqrt{2}} e^{-i\gamma} & \cos \beta & -\frac{\sin \beta}{\sqrt{2}} e^{i\gamma} \\ \frac{1 - \cos \beta}{2} e^{i(\alpha-\gamma)} & \frac{\sin \beta}{\sqrt{2}} e^{i\alpha} & \frac{1 + \cos \beta}{2} e^{i(\gamma+\alpha)} \end{pmatrix}. \quad (76)$$

Матричными элементами  $\hat{D}^1(\alpha, \beta, \gamma)$  в этом представлении являются  $D$ -функции Вигнера  $D_{MM'}^1(\alpha, \beta, \gamma)$  (см. гл. 4).

В представлении декартового базиса

$$\hat{D}^1(\alpha, \beta, \gamma) = \begin{pmatrix} \cos \beta \cos \alpha \cos \gamma - \sin \alpha \sin \gamma & -\cos \beta \cos \alpha \sin \gamma - \sin \alpha \cos \gamma & \sin \beta \cos \alpha \\ \cos \beta \sin \alpha \cos \gamma + \cos \alpha \sin \gamma & -\cos \beta \sin \alpha \sin \gamma + \cos \alpha \cos \gamma & \sin \beta \sin \alpha \\ -\sin \beta \cos \gamma & \sin \beta \sin \gamma & \cos \beta \end{pmatrix}. \quad (77)$$

Матричными элементами  $\hat{D}^1(\alpha, \beta, \gamma)$  в этом представлении являются коэффициенты матрицы поворота  $a_{ik}$  (см. 1.4.6). Обратный поворот системы координат осуществляется с помощью матрицы

$$[\hat{D}^1(\alpha, \beta, \gamma)]^{-1} = [\hat{D}^1(\alpha, \beta, \gamma)]^+ = \hat{D}^1(-\gamma, -\beta, -\alpha) = \hat{D}^1(\pi-\alpha; \beta, -\pi-\alpha). \quad (78)$$

б. При повороте системы координат, характеризуемом направлением оси поворота  $\mathbf{n}(\Theta, \Phi)$  и углом поворота  $\omega$ , спиновые функции и спиновые матрицы в случае  $S=1$  преобразуются с помощью оператора поворота  $\hat{U}^1(\omega; \Theta, \Phi)$ , являющегося частным случаем 1.4. (33):

$$\hat{U}^1(\omega; \Theta, \Phi) = e^{-i\omega \mathbf{n} \cdot \hat{\mathbf{S}}}. \quad (79)$$

В представлении циклического базиса

$$\hat{U}^1(\omega; \Theta, \Phi) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \cos \omega (1 + \cos^2 \Theta) - i \sin \omega \cos \Theta + \frac{1}{2} \sin^2 \Theta & & \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \Theta e^{i\Phi} [(\cos \omega - 1) \cos \Theta - i \sin \omega] & & \\ \frac{1}{2} (\cos \omega - 1) \sin^2 \Theta e^{i2\Phi} & & \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \Theta e^{-i\Phi} [(\cos \omega - 1) \cos \Theta - i \sin \omega] & \frac{1}{2} (\cos \omega - 1) \sin^2 \Theta e^{-i2\Phi} & \\ \cos \omega \sin^2 \Theta + \cos^2 \Theta & -\frac{1}{\sqrt{2}} \sin \Theta e^{-i\Phi} [(\cos \omega - 1) \cos \Theta + i \sin \omega] & \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \sin \Theta e^{i\Phi} [(\cos \omega - 1) \cos \Theta + i \sin \omega] & \frac{1}{2} \cos \omega (1 + \cos^2 \Theta) + i \sin \omega \cos \Theta + \frac{1}{2} \sin^2 \Theta & \end{pmatrix}. \quad (80)$$

В представлении декартового базиса

$$\hat{U}^1(\omega; \Theta, \Phi) = \begin{pmatrix} (1 - \cos \omega) \sin^2 \Theta \cos^2 \Phi + \cos \omega & & \\ (1 - \cos \omega) \sin^2 \Theta \cos \Phi \sin \Phi + \sin \omega \cos \Theta & & \\ (1 - \cos \omega) \sin \Theta \cos \Theta \cos \Phi - \sin \omega \sin \Theta \sin \Phi & & \\ (1 - \cos \omega) \sin^2 \Theta \cos \Phi \sin \Phi - \sin \omega \cos \Theta & (1 - \cos \omega) \sin \Theta \cos \Theta \cos \Phi + \sin \omega \sin \Theta \sin \Phi & \\ (1 - \cos \omega) \sin^2 \Theta \sin^2 \Phi + \cos \omega & (1 - \cos \omega) \sin \Theta \cos \Theta \sin \Phi - \sin \omega \sin \Theta \cos \Phi & \\ (1 - \cos \omega) \sin \Theta \cos \Theta \sin \Phi + \sin \omega \sin \Theta \cos \Phi & (1 - \cos \omega) \cos^2 \Theta + \cos \omega & \end{pmatrix}. \quad (81)$$



Обратное преобразование осуществляется с помощью матрицы

$$[\mathcal{U}^1(\omega; \Theta, \Phi)]^{-1} = [\mathcal{U}^1(\omega; \Theta, \Phi)]^+ = \mathcal{U}^1(-\omega; \Theta, \Phi) = \mathcal{U}^1(\omega; \pi - \Theta, \pi + \Phi). \quad (82)$$

Разложение оператора поворота  $\mathcal{U}^1(\omega; \Theta, \Phi)$  по спиновым матрицам и поляризационным операторам имеет вид

$$\mathcal{U}^1(\omega; \Theta, \Phi) = \frac{1}{3} (2 \cos \omega + 1) I - i \sin \omega (\mathbf{n} \cdot \hat{S}) + (\cos \omega - 1) \sum_{i, k} n_i n_k \hat{Q}_{ik} \quad (83)$$

(см. также 2.4. (17) и 2.4. (18)).

Углы  $\omega$ ,  $\Theta$ ,  $\Phi$  связаны с углами Эйлера  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  по формулам 1.4 (16), 1.4. (17), причем

$$\hat{D}^1(\alpha, \beta, \gamma) = \mathcal{U}^1(\omega; \Theta, \Phi). \quad (84)$$

в. Действие оператора поворота  $\hat{D}^1(\alpha, \beta, \gamma)$  на спиновые матрицы дается формулами

$$\hat{S}'_i \equiv \hat{D}^1(\alpha, \beta, \gamma) \hat{S}_i [\hat{D}^1(\alpha, \beta, \gamma)]^{-1} = \sum_k a_{ik} \hat{S}_k, \quad (85)$$

$$\hat{Q}'_{ik} \equiv \hat{D}^1(\alpha, \beta, \gamma) \hat{Q}_{ik} [\hat{D}^1(\alpha, \beta, \gamma)]^{-1} = \sum_{j, l} a_{ij} a_{kl} \hat{Q}_{jl}, \quad (86)$$

где  $a_{ik}$  — матрица поворота (см. 1.4.6), ( $i, k, j, l = x, y, z$ )

$$\hat{S}'_{\mu} \equiv \hat{D}^1(\alpha, \beta, \gamma) \hat{S}_{\mu} [\hat{D}^1(\alpha, \beta, \gamma)]^{-1} = \sum_{\nu} D^1_{\nu\mu}(\alpha, \beta, \gamma) \hat{S}_{\nu}, \quad (\mu, \nu = \pm 1, 0) \quad (87)$$

$$\hat{T}'_{LM} \equiv \hat{D}^1(\alpha, \beta, \gamma) \hat{T}_{LM} [\hat{D}^1(\alpha, \beta, \gamma)]^{-1} = \sum_{M'} D^L_{M'M}(\alpha, \beta, \gamma) \hat{T}_{LM'}, \quad (-L \leq M, M' \leq L), \quad (88)$$

где  $D^L_{M'M}(\alpha, \beta, \gamma)$  —  $D$ -функции Вигнера (см. гл. 4).

## 6. Вычисление шпуров от произведений спиновых матриц

Для декартовых компонент спиновых матриц  $\hat{S}_i$  и  $\hat{Q}_{ik}$  имеют место следующие соотношения ( $i, k, l$  и т. д. =  $x, y, z$ ):

$$\begin{aligned} \text{Sp} \{ \hat{S}_i \} &= 0, & \text{Sp} \{ \hat{Q}_{ik} \} &= 0, \\ \text{Sp} \{ \hat{S}_i \hat{S}_k \} &= 2\delta_{ik}, & \text{Sp} \{ \hat{S}_i \hat{Q}_{kl} \} &= 0, & \text{Sp} \{ \hat{Q}_{ik} \hat{S}_l \} &= 0, \\ \text{Sp} \{ \hat{S}_i \hat{S}_k \hat{S}_l \} &= i\epsilon_{ikl}, \\ \text{Sp} \{ \hat{Q}_{ik} \hat{Q}_{lm} \} &= \frac{1}{2} (\delta_{il} \delta_{km} + \delta_{im} \delta_{kl} - \frac{2}{3} \delta_{ik} \delta_{lm}), \\ \text{Sp} \{ \hat{S}_i \hat{S}_k \hat{S}_l \hat{S}_m \} &= \delta_{ik} \delta_{lm} + \delta_{im} \delta_{kl}. \end{aligned} \quad (89)$$

Для циклических компонент оператора спина  $\hat{S}_{\mu}$  имеют место соотношения ( $\mu, \nu, \lambda$  и т. д. =  $\pm 1, 0$ )

$$\begin{aligned} \text{Sp} \{ \hat{S}_{\mu} \} &= 0, \\ \text{Sp} \{ \hat{S}_{\mu} \hat{S}_{\nu} \} &= (-1)^{\mu} 2\delta_{\mu-\nu}, \\ \text{Sp} \{ \hat{S}_{\mu} \hat{S}_{\nu} \hat{S}_{\lambda} \} &= -\sqrt{6} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \mu & \nu & \lambda \end{pmatrix} = (-1)^{1+\lambda} \sqrt{2} C^1_{\mu\lambda}, \\ \text{Sp} \{ \hat{S}_{\mu} \hat{S}_{\nu} \hat{S}_{\lambda} \hat{S}_{\rho} \} &= (-1)^{\mu+\lambda} (\delta_{\mu-\nu} \delta_{\lambda-\rho} + \delta_{\mu-\rho} \delta_{\nu-\lambda}), \\ \text{Sp} \{ \hat{S}_{\mu_1} \hat{S}_{\mu_2} \dots \hat{S}_{\mu_n} \} &= 0, \text{ если } \mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_n \neq 0. \end{aligned} \quad (90)$$

Вычисление шпура от произведения поляризационных операторов  $\hat{T}_{LM}$  ( $L=0, 1, 2; -L \leq M \leq L$ ) производится по формулам 2.4. (21)–2.4. (24), в которых нужно положить  $S=1$ .

## НЕПРИВОДИМЫЕ ТЕНЗОРЫ

### 3.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ И СВОЙСТВА НЕПРИВОДИМЫХ ТЕНЗОРОВ

#### 1. Определение

В аппарате квантовой механики большую роль играют величины, называемые неприводимыми тензорами, которые при повороте системы координат преобразуются так же, как собственные функции оператора углового момента. *Неприводимым тензором ранга  $J$*  ( $J$  — целое или полуцелое) называется величина  $\mathfrak{M}_J$ , имеющая  $2J+1$  компонент  $\mathfrak{M}_{JM}$  (где  $M = -J, -J+1, \dots, J-1, J$ ), которые удовлетворяют следующим коммутационным соотношениям с циклическими компонентами оператора полного углового момента:

$$[\hat{J}_{\pm 1}, \mathfrak{M}_{JM}] = \mp \frac{1}{\sqrt{2}} e^{\pm i\delta} \sqrt{J(J+1) - M(M \pm 1)} \mathfrak{M}_{J, M \pm 1}, \quad (1)$$

$$[\hat{J}_0, \mathfrak{M}_{JM}] = M \mathfrak{M}_{JM}.$$

В компактной записи

$$[\hat{J}_\mu, \mathfrak{M}_{JM}] = e^{iM\delta} \sqrt{J(J+1)} C_{JM\mu}^{JM+\mu} \mathfrak{M}_{J, M+\mu}. \quad (2)$$

Из этих соотношений следует

$$[\hat{J}^2, \mathfrak{M}_{JM}] = J(J+1) \mathfrak{M}_{JM}. \quad (3)$$

Величина  $\delta$  в (1), определяющая относительные фазы различных компонент  $\mathfrak{M}_{JM}$ , произвольна. Положим ее равной нулю, т. е.  $e^{\pm i\delta} = 1$ , и выберем положительное значение квадратного корня. Линейные соотношения (1) определяют компоненты неприводимого тензора  $\mathfrak{M}_{JM}$  с точностью до произвольного скалярного множителя, общего для всех компонент, который может быть вещественным или комплексным числом, функцией или оператором. Общую фазу компонент тензоров  $\mathfrak{M}_{JM}$  в случае целого ранга  $J$  выбирают так, чтобы

$$(\mathfrak{M}_{JM})^* = (-1)^{-M} \overline{\mathfrak{M}}_{J, -M}. \quad (4)$$

Это совпадает с обычным выбором фаз у сферических функций (глава 5). Однако для квантовомеханических приложений иногда удобно переопределить неприводимые тензоры

$$\overline{\mathfrak{M}}_J = |i^J| \mathfrak{M}_J. \quad (5)$$

Тогда будет выполняться следующее соотношение

$$(\overline{\mathfrak{M}}_{JM})^* = (-1)^{J-M} \overline{\mathfrak{M}}_{J, -M}. \quad (6)$$

Выбор фазы (6) применяется для тензоров как целого, так и полуцелого ранга  $J$ . Такой выбор фазы для тензорных операторов и для волновых функций, описывающих начальное и конечное состояние  $|a\rangle$  и  $|b\rangle$  приводит к следующему соотношению для матричных элементов эрмитовых  $\overline{\mathfrak{M}}_J^* = \overline{\mathfrak{M}}_J$  операторов

$$\langle b | \overline{\mathfrak{M}}_{JM} | a \rangle = \langle a | (\overline{\mathfrak{M}}_{JM})^* | b \rangle^*. \quad (7)$$

## 2. Ковариантные и контравариантные компоненты

Произвольный неприводимый тензор  $\mathfrak{M}_J$  ранга  $J$  может быть разложен по полной системе единичных ортонормированных неприводимых тензоров  $e_{JM}$  ранга  $J$

$$e_J^M \cdot e_{J'M'} = \delta_{JJ'} \delta_{MM'}. \quad (8)$$

Тензоры  $e_{JM}$  могут быть сконструированы, например, из базисных спиновых функций. Разложение тензора  $\mathfrak{M}_J$  имеет вид

$$\mathfrak{M}_J = \sum_M e_J^M \cdot \mathfrak{M}_{JM} = \sum_M e_{JM} \cdot \mathfrak{M}_J^M. \quad (9)$$

Величины  $\mathfrak{M}_{JM}$  являются *ковариантными компонентами* тензора  $\mathfrak{M}_J$ , а величины  $\mathfrak{M}_J^M$  — *контравариантными компонентами*. Они связаны следующими соотношениями

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}_J^M &= (\mathfrak{M}_{JM})^* = (-1)^{-M} \mathfrak{M}_{J-M}, \\ \mathfrak{M}_{JM} &= (\mathfrak{M}_J^M)^* = (-1)^{J-M} \mathfrak{M}_{J-M}. \end{aligned} \quad (10)$$

## 3. Преобразование неприводимых тензоров при повороте системы координат

При повороте системы координат, определяемом углами Эйлера  $\alpha, \beta, \gamma$ , компоненты неприводимого тензора  $\mathfrak{M}_{JM}$  и  $\mathfrak{M}_J^M$  преобразуются линейно. Коэффициентами этого преобразования являются  $D$ -функции Вигнера (гл. 4).

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}_{JM}(X') &= \hat{D}(\alpha, \beta, \gamma) \mathfrak{M}_{JM}(X) [\hat{D}(\alpha, \beta, \gamma)]^{-1} = \sum_M \mathfrak{M}_{JM}(X) D_{MM'}^J(\alpha, \beta, \gamma), \\ \mathfrak{M}_J^M(X') &= \hat{D}(\alpha, \beta, \gamma) \mathfrak{M}_J^M(X) [\hat{D}(\alpha, \beta, \gamma)]^{-1} = \sum_M \mathfrak{M}_J^M(X) D_{MM'}^J(\alpha, \beta, \gamma). \end{aligned} \quad (11)$$

Здесь  $X$  и  $X'$  — совокупность всех аргументов тензора в исходной и повернутой системах координат соответственно.

## 4. Преобразование неприводимых тензоров при инверсии системы координат

Преобразование компонент неприводимого тензора при инверсии системы координат  $\mathbf{r} \rightarrow -\mathbf{r}$  позволяет в общем случае представить неприводимый тензор  $\mathfrak{M}_J$  целого ранга  $J$  в виде суммы двух тензоров, обладающих определенной четностью

$$\mathfrak{M}_J = \mathfrak{M}_J^{(+1)} + \mathfrak{M}_J^{(-1)}. \quad (12)$$

Тензоры  $\mathfrak{M}_J^{(\pm 1)}$  при инверсии системы координат преобразуются следующим образом:

$$\hat{P}_r \mathfrak{M}_J^{(\pi_J)} \hat{P}_r^{-1} = \pi_J \mathfrak{M}_J^{(\pi_J)}, \quad (\pi_J = \pm 1). \quad (13)$$

Тензор  $\mathfrak{M}_J^{(\pi_J)}$  с четностью  $\pi_J = (-1)^J$  называется истинным (или полярным) неприводимым тензором ранга  $J$ , а тензор  $\mathfrak{M}_J^{(\pi_J)}$  с четностью  $\pi_J = (-1)^{J+1}$  — неприводимым псевдотензором (или аксиальным тензором) ранга  $J$ . Соотношения (12) и (13) справедливы также для тензоров  $\mathfrak{M}_J$ .

## 5. Двойные тензоры

Двойным тензором  $W_{J_1 J_2}$  (1,2) рангов  $J_1$  и  $J_2$  называется величина, имеющая  $(2J_1 + 1)(2J_2 + 1)$  компонент  $W_{J_1 M_1 J_2 M_2}$  (1,2), зависящая от переменных, соответствующих двум подсистемам 1 и 2, и удовлетворяющая следующим коммутационным соотношениям:

$$[\hat{J}_{\pm 1}(1), W_{J_1 M_1 J_2 M_2}(1, 2)] = \mp \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{J_1(J_1 + 1) - M_1(M_1 \pm 1)} W_{J_1 M_1 \pm 1 J_2 M_2}(1, 2), \quad (14)$$

$$[\hat{J}_0(1), W_{J_1 M_1 J_2 M_2}(1, 2)] = M_1 W_{J_1 M_1 J_2 M_2}(1, 2), \quad (15)$$

$$[\hat{J}_{\pm 1}(2), W_{J_1 M_1 J_2 M_2}(1, 2)] = \mp \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{J_2(J_2 + 1) - M_2(M_2 \pm 1)} W_{J_1 M_1 J_2 M_2 \pm 1}(1, 2), \quad (16)$$

$$[\hat{J}_0(2), W_{J_1 M_1 J_2 M_2}(1, 2)] = M_2 W_{J_1 M_1 J_2 M_2}(1, 2). \quad (17)$$

Здесь  $\hat{J}(1)$  и  $\hat{J}(2)$  — операторы полного момента количества движения подсистем 1 и 2 соответственно.

При повороте подсистемы 1 или 2 двойной тензор  $W_{J_1 M_1 J_2 M_2}(1, 2)$  преобразуется по представлению  $D^{J_1}$  или  $D^{J_2}$  соответственно.

$$W_{J_1 M_1' J_2 M_2}(1', 2) = \sum_{M_1} W_{J_1 M_1 J_2 M_2}(1, 2) D_{M_1 M_1'}^{J_1}(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1), \quad (18)$$

$$W_{J_1 M_1 J_2 M_2'}(1, 2') = \sum_{M_2} W_{J_1 M_1 J_2 M_2}(1, 2) D_{M_2 M_2'}^{J_2}(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2). \quad (19)$$

## 6. Примеры неприводимых тензоров

Приведем некоторые примеры неприводимых тензоров, встречающихся в данной книге.

а. Операторы угловых моментов  $\hat{J}$ ,  $\hat{L}$ ,  $\hat{S}$  (гл. 2) являются неприводимыми тензорными операторами ранга 1.

б. Поляризаационные операторы  $\hat{T}_{LM}(S)$  (2.4) — неприводимые тензорные операторы ранга  $L$ .

в. Сферические функции  $Y_{lm}(\vartheta, \varphi)$  (гл. 5) — неприводимые тензоры ранга  $l$ .

г. Спиновые функции частицы со спином  $S$  (гл. 6) — неприводимые тензоры ранга  $S$ .

д. Шаровые тензоры  $Y_{JM}^{LS}(\vartheta, \varphi)$  (гл. 7) — неприводимые тензоры ранга  $J$ .

Для всех упомянутых выше величин справедливы результаты, приведенные в этой главе.

## 7. Неприводимое тензорное произведение

Неприводимое тензорное произведение  $\mathcal{L}_J$  ранга  $J$  двух неприводимых тензоров  $\mathfrak{M}_{J_1}$  и  $\mathfrak{N}_{J_2}$  рангов  $J_1$  и  $J_2$  определяется как величина, компоненты которой  $\mathcal{L}_{JM}$  выражаются через компоненты  $\mathfrak{M}_{J_1 M_1}$  и  $\mathfrak{N}_{J_2 M_2}$  по формуле

$$\mathcal{L}_{JM} = \sum_{M_1 M_2} C_{J_1 M_1 J_2 M_2}^{JM} \mathfrak{M}_{J_1 M_1} \mathfrak{N}_{J_2 M_2}. \quad (20)$$

Неприводимое тензорное произведение обозначается следующим образом:

$$\mathcal{L}_J \equiv \{\mathfrak{M}_{J_1} \otimes \mathfrak{N}_{J_2}\}_J. \quad (21)$$

Прямое произведение двух неприводимых тензоров  $\mathfrak{M}_{J_1}$  и  $\mathfrak{N}_{J_2}$  определяется как совокупность  $(2J_1 + 1)(2J_2 + 1)$  величин  $\mathfrak{M}_{J_1 M_1} \mathfrak{N}_{J_2 M_2}$ . Оно приводимо, т. е. может быть разбито на части, которые при поворотах системы координат преобразуются независимо друг от друга. Другими словами, прямое произведение может быть представлено в виде суммы неприводимых тензоров  $\mathcal{L}_{JM}$ .

$$\mathfrak{M}_{J_1 M_1} \mathfrak{N}_{J_2 M_2} = \sum_{J=|J_1-J_2|}^{J_1+J_2} C_{J_1 M_1 J_2 M_2}^{JM} \mathcal{L}_{JM}. \quad (22)$$

Существенно, что неприводимое тензорное произведение  $\mathcal{L}_{JM}$  удовлетворяет такому же соотношению (6), что и сомножители  $\mathfrak{M}_{J_1 M_1}$  и  $\mathfrak{N}_{J_2 M_2}$ .

$$(\mathcal{L}_{JM})^* = (-1)^{J-M} \mathcal{L}_{J-M}^{\dagger} \quad (\mathcal{L}_{JM} = \{\mathfrak{M}_{J_1} \otimes \mathfrak{N}_{J_2}\}_{JM}). \quad (23)$$

Это свойство является специфическим для тензоров типа  $\mathfrak{M}_J$ . Тензорное произведение  $\mathcal{L}_{JM}$  не удовлетворяет соотношению (4), которому удовлетворяют сомножители  $\mathfrak{M}_{J_1 M_1}$  и  $\mathfrak{N}_{J_2 M_2}$ .

Введем некоторые определения и обозначения, которые будут широко использоваться при рассмотрении произведений некоммутирующих тензорных операторов.

Коммутатор компонент двух неприводимых тензоров  $\mathfrak{R}_{J_1 M_1 J_2 M_2}$  определяется формулой

$$\mathfrak{R}_{J_1 M_1 J_2 M_2} \equiv [\mathfrak{M}_{J_1 M_1}, \mathfrak{N}_{J_2 M_2}] \equiv \mathfrak{M}_{J_1 M_1} \mathfrak{N}_{J_2 M_2} - \mathfrak{N}_{J_2 M_2} \mathfrak{M}_{J_1 M_1}. \quad (24)$$

Коммутатор неприводимого тензорного произведения  $\mathfrak{R}_{JM}^{J_1 J_2}$  дается формулой

$$\mathfrak{R}_{JM}^{J_1 J_2} \equiv \{\mathfrak{M}_{J_1} \otimes \mathfrak{N}_{J_2}\}_{JM} - (-1)^{J_1+J_2-J} \{\mathfrak{N}_{J_2} \otimes \mathfrak{M}_{J_1}\}_{JM}. \quad (25)$$

Величины  $\mathfrak{R}_{JM}^{J_1 J_2}$  сами являются компонентами неприводимого тензора. Они имеют вид

$$\mathfrak{R}_{JM}^{J_1 J_2} = \sum_{M_1 M_2} C_{J_1 M_1 J_2 M_2}^{JM} \mathfrak{R}_{J_1 M_1 J_2 M_2}. \quad (26)$$

Для коммутирующих тензоров

$$\{\mathfrak{M}_{J_1} \otimes \mathfrak{N}_{J_2}\}_{JM} = (-1)^{J_1+J_2-J} \{\mathfrak{N}_{J_2} \otimes \mathfrak{M}_{J_1}\}_{JM}. \quad (27)$$

Для некоммутирующих тензоров

$$\{\mathfrak{M}_{J_1} \otimes \mathfrak{N}_{J_2}\}_{JM} = (-1)^{J_1+J_2-J} \{\mathfrak{N}_{J_2} \otimes \mathfrak{M}_{J_1}\}_{JM} + \mathfrak{R}_{JM}^{J_1 J_2}. \quad (28)$$

Отсюда видно, в частности, что неприводимое тензорное произведение ранга  $I$  тензора  $\mathfrak{M}_J$  самого на себя равно нулю, если  $I = 2(J - n) - 1$  и компоненты тензора коммутируют, т. е.

$$\{\mathfrak{M}_J \otimes \mathfrak{M}_J\}_I = 0, \quad (29)$$

если  $I = 2J - 1, 2J - 3, \dots$  и  $\mathfrak{R}_{IM}^{JJ} = 0$

## 8. Скалярное произведение неприводимых тензоров

Скалярное произведение двух неприводимых тензоров  $\mathfrak{M}_J$  и  $\mathfrak{N}_J$  одинакового ранга  $J$  определяют следующим образом:

$$(\mathfrak{M}_J \cdot \mathfrak{N}_J) = \sum_M (-1)^{-M} \mathfrak{M}_{JM} \mathfrak{N}_{J-M} = \sum_M \mathfrak{M}_{JM} \mathfrak{N}_{JM}^* = \sum_M \mathfrak{M}_{JM} \mathfrak{N}_J^M. \quad (30)$$

Скалярное произведение двух неприводимых тензоров  $\tilde{\mathfrak{M}}_J$  и  $\tilde{\mathfrak{N}}_J$  определяется формулой

$$(\tilde{\mathfrak{M}}_J \cdot \tilde{\mathfrak{N}}_J) = \sum_M (-1)^{J-M} \tilde{\mathfrak{M}}_{JM} \tilde{\mathfrak{N}}_{J-M} = \sum_M \tilde{\mathfrak{M}}_{JM} \tilde{\mathfrak{N}}_{JM}^* = \sum_M \tilde{\mathfrak{M}}_{JM} \tilde{\mathfrak{N}}_{MJ}. \quad (31)$$

Заметим, что

$$(\mathfrak{M}_J \cdot \mathfrak{N}_J) = (-1)^{-J} (\tilde{\mathfrak{M}}_J \cdot \tilde{\mathfrak{N}}_J). \quad (32)$$

Скалярное произведение лишь множителем отличается от неприводимого произведения ранга 0, которое имеет вид

$$\{\mathfrak{M}_J \otimes \mathfrak{N}_J\}_{00} = \sum_{M_1 M_2} C_{J M_1 J M_2}^{00} \mathfrak{M}_{J M_1} \mathfrak{N}_{J M_2} = \frac{1}{\sqrt{2J+1}} \sum_M (-1)^{J-M} \mathfrak{M}_{JM} \mathfrak{N}_{J-M}, \quad (33)$$

$$\{\tilde{\mathfrak{M}}_J \otimes \tilde{\mathfrak{N}}_J\}_{00} = \sum_{M_1 M_2} C_{J M_1 J M_2}^{00} \tilde{\mathfrak{M}}_{J M_1} \tilde{\mathfrak{N}}_{J M_2} = \frac{1}{\sqrt{2J+1}} \sum_M (-1)^{J-M} \tilde{\mathfrak{M}}_{JM} \tilde{\mathfrak{N}}_{J-M}. \quad (34)$$

Связь между скалярным и тензорным произведениями ранга 0 дается формулами

$$\begin{aligned} (\mathfrak{M}_J \cdot \mathfrak{N}_J) &= (-1)^{-J} \sqrt{2J+1} \{\mathfrak{M}_J \otimes \mathfrak{N}_J\}_{00}, \\ (\tilde{\mathfrak{M}}_J \cdot \tilde{\mathfrak{N}}_J) &= \sqrt{2J+1} \{\tilde{\mathfrak{M}}_J \otimes \tilde{\mathfrak{N}}_J\}_{00}. \end{aligned} \quad (35)$$

Скалярное произведение двойных тензоров имеет вид

$$(\tilde{W}_{J_1 J_2}(1,2) \cdot \tilde{U}_{J_1 J_2}(1,2)) = \sum_{M_1 M_2} (-1)^{J_1-M_1+J_2-M_2} \tilde{W}_{J_1 M_1 J_2 M_2}(1,2) \tilde{U}_{J_1-M_1 J_2-M_2}(1,2). \quad (36)$$

### 3.2. СВЯЗЬ АППАРАТА НЕПРИВОДИМЫХ ТЕНЗОРОВ С ВЕКТОРАМИ И ТЕНЗОРАМИ

#### 1. Векторы и неприводимые тензоры

Произвольный вектор  $A$  является неприводимым тензором первого ранга. Его циклические компоненты можно рассматривать как компоненты неприводимого тензора  $A_1$  ранга 1, для которого выполняется соотношение  $A_1^\mu = (-1)^\mu A_{1-\mu}$ .

$$A_{1\mu} \equiv A_\mu, \quad A^{1\mu} \equiv A^\mu. \quad (1)$$

Полярный вектор — истинный тензор 1 ранга, при инверсии системы координат его компоненты меняют знак. Аксиальный вектор является псевдотензором 1 ранга, при инверсии системы координат его компоненты не меняют знак.

Из двух векторов  $A = A_1$  и  $B = B_1$  можно организовать три неприводимых тензорных произведения рангов 0, 1, 2:

$$\{A_1 \otimes B_1\}_{00}, \quad \{A_1 \otimes B_1\}_{1\mu}, \quad \{A_1 \otimes B_1\}_{2\mu}.$$

Если один из векторов  $A$  и  $B$  полярный, а другой аксиальный, то  $\{A_1 \times B_1\}_{00}$  — псевдоскаляр,  $\{A_1 \otimes B_1\}_{1\mu}$  — полярный вектор,  $\{A_1 \otimes B_1\}_{2\mu}$  — псевдотензор второго ранга. Если же  $A$  и  $B$  — оба полярные или аксиальные векторы, то  $\{A_1 \otimes B_1\}_{00}$  — скаляр,  $\{A_1 \otimes B_1\}_{1\mu}$  — аксиальный вектор,  $\{A_1 \otimes B_1\}_{2\mu}$  — истинный тензор второго ранга.

а. Неприводимое тензорное произведение ранга 0 отличается от скалярного произведения векторов  $A$  и  $B$  численным множителем

$$\{A_1 \otimes B_1\}_{00} = -\frac{1}{\sqrt{3}} (A \cdot B). \quad (2)$$

Скалярное произведение неприводимых тензоров  $A_1$  и  $B_1$ , введенное в 3.1.8, совпадает со скалярным произведением векторов

$$(A_1 \cdot B_1) = (A \cdot B). \quad (3)$$

б. Неприводимое тензорное произведение ранга 1 выражается через векторное произведение векторов  $A$  и  $B$ :

$$\{A_1 \otimes B_1\}_{1\mu} = \frac{i}{\sqrt{2}} [A \times B]_\mu. \quad (4)$$

Компоненты тензорного произведения ранга 1 выражаются через циклические компоненты векторов  $A$  и  $B$  по формуле

$$\{A_1 \otimes B_1\}_{1M} = \frac{i}{\sqrt{2}} [A \times B]_M = \sum_{\mu, \nu} C_{1\mu 1\nu}^{1M} A_\mu B_\nu. \quad (5)$$

в. Компоненты тензорного произведения ранга 2 связаны с циклическими компонентами векторов  $A$  и  $B$  следующим образом:

$$\{A_1 \otimes B_1\}_{2M} = \sum_{\mu, \nu} C_{1\mu 1\nu}^{2M} A_\mu B_\nu = \sqrt{\frac{3|M|-2}{14|M|-12}} \sum_{\substack{\mu+\nu=M \\ \mu \geq \nu}} (A_\mu B_\nu + A_\nu B_\mu). \quad (6)$$

В развернутой записи соотношения (6) имеют вид

$$\begin{aligned} \{A_1 \otimes B_1\}_{2+2} &= A_{+1} B_{+1}, \\ \{A_1 \otimes B_1\}_{2+1} &= \frac{1}{\sqrt{2}} (A_{+1} B_0 + A_0 B_{+1}), \\ \{A_1 \otimes B_1\}_{20} &= \frac{1}{\sqrt{6}} (A_{+1} B_{-1} + 2A_0 B_0 + A_{-1} B_{+1}), \\ \{A_1 \otimes B_1\}_{2-1} &= \frac{1}{\sqrt{2}} (A_{-1} B_0 + A_0 B_{-1}), \\ \{A_1 \otimes B_1\}_{2-2} &= A_{-1} B_{-1}. \end{aligned} \quad (7)$$

Из трех коммутирующих векторов  $A_1, B_1, C_1$  можно построить следующие неприводимые тензорные произведения рангов 0 и 1:

$$\{(A_1 \otimes B_1)_0 \otimes C_1\}_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}} (A \cdot B) \cdot C, \quad (8)$$

$$\{(A_1 \otimes B_1)_1 \otimes C_1\}_0 = -\frac{i}{\sqrt{6}} [A \times B] \cdot C, \quad (9)$$

$$\{(A_1 \otimes B_1)_1 \otimes C_1\}_1 = -\frac{1}{2} [[A \times B] \times C] = \frac{1}{2} A (B \cdot C) - \frac{1}{2} B (A \cdot C), \quad (10)$$

$$\{(A_1 \otimes B_1)_2 \otimes C_1\}_1 = \sqrt{\frac{3}{5}} \left\{ \frac{1}{3} C (A \cdot B) - \frac{1}{2} B (A \cdot C) - \frac{1}{2} A (B \cdot C) \right\}. \quad (11)$$

Кроме того, возможны произведения, отличающиеся от (8)–(11) схемой связи векторов. Вопросы, относящиеся к изменению схемы связи в тензорных произведениях рассмотрены ниже (см. 3.3). Из четырех коммутирующих векторов  $A_1, B_1, C_1$  и  $D_1$  можно построить следующие неприводимые тензорные произведения рангов 0 и 1.

$$\{(A_1 \otimes B_1)_0 \otimes (C_1 \otimes D_1)_0\}_0 = \frac{1}{3} (A \cdot B) (D \cdot C), \quad (12)$$

$$\{(A_1 \otimes B_1)_1 \otimes (C_1 \otimes D_1)_0\}_1 = -\frac{i}{\sqrt{6}} [A \times B] (C \cdot D), \quad (13)$$

$$\{(A_1 \otimes B_1)_0 \otimes (C_1 \otimes D_1)_1\}_1 = -\frac{i}{\sqrt{6}} (A \cdot B) [C \times D], \quad (14)$$

$$\{(A_1 \otimes B_1)_1 \otimes (C_1 \otimes D_1)_1\}_0 = \frac{1}{2\sqrt{3}} \{(A \cdot C) (B \cdot D) - (A \cdot D) (B \cdot C)\}, \quad (15)$$

$$\{(A_1 \otimes B_1)_1 \otimes (C_1 \otimes D_1)_1\}_1 = -\frac{i}{2\sqrt{2}} \{C (D \cdot [A \times B]) - D (C \cdot [A \times B])\} = -\frac{i}{2\sqrt{2}} \{B (A \cdot [C \times D]) - A (B \cdot [C \times D])\}, \quad (16)$$

$$\{(A_1 \otimes B_1)_2 \otimes (C_1 \otimes D_1)_1\}_1 = \frac{i\sqrt{3}}{2 \cdot 5} \left\{ \frac{1}{3} (A \cdot B) [C \times D] - \frac{1}{2} B (D \cdot [A \times C]) - \frac{1}{2} A (D \cdot [B \times C]) \right\}, \quad (17)$$

$$\{(A_1 \otimes B_1)_1 \otimes (C_1 \otimes D_1)_2\}_1 = \frac{i\sqrt{3}}{2 \cdot 5} \left\{ \frac{1}{3} (C \cdot D) [A \times B] - \frac{1}{2} C (B \cdot [D \times A]) - \frac{1}{2} D (B \cdot [C \times A]) \right\}, \quad (18)$$

$$\{(A_1 \otimes B_1)_2 \otimes (C_1 \otimes D_1)_2\}_0 = \frac{1}{\sqrt{5}} \left\{ \frac{1}{2} (A \cdot C) (B \cdot D) - \frac{1}{3} (A \cdot B) (C \cdot D) + \frac{1}{2} (A \cdot D) (B \cdot C) \right\}, \quad (19)$$

$$\{(A_1 \otimes B_1)_2 \otimes (C_1 \otimes D_1)_2\}_1 = -\frac{i}{2 \cdot 5} \{(A \cdot C) [B \times D] + (A \cdot D) [B \times C] + (B \cdot C) [A \times D] + (B \cdot D) [A \times C]\}. \quad (20)$$

Изменение схем связи в произведениях четырех неприводимых тензоров рассмотрены ниже (см. 3.3).

Произведения, составленные из компонент одного и того же вектора обладают следующим свойством:

$$\{\dots \{(A_1 \otimes A_1)_{l_2} \otimes A_1\}_{l_3} \dots \otimes A_1\}_{l_n} = \{A_1 \otimes \dots \{A_1 \otimes (A_1 \otimes A_1)_{l_2}\}_{l_3} \dots\}_{l_n}. \quad (21)$$

Если вектор  $A_1$  не содержит спиновых переменных и дифференциальных операторов, то такие произведения можно выразить через сферические функции (гл. 5)

$$\{\dots \{(A_1 \otimes A_1)_{l_2} \otimes A_1\}_{l_3} \dots \otimes A_1\}_{l_n m_n} = \sqrt{\frac{4\pi}{2l_n + 1}} |A|^n Y_{l_n m_n}(\vartheta, \varphi) \prod_{i=2}^n C_{l_i 0}^{l_i 0}, \quad (22)$$

где  $\vartheta, \varphi$  — сферические углы вектора  $A$ ,  $l_1 \equiv 1$ . В частности, если  $l_2 = 2, l_3 = 3, \dots, l_n = n$ , то

$$\{\dots \{(A_1 \otimes A_1)_2 \otimes A_1\}_3 \dots \otimes A_1\}_{nm} = \sqrt{\frac{4\pi n!}{(2n+1)!}} |A|^n Y_{nm}(\vartheta, \varphi). \quad (23)$$

## 2. Декартовы тензоры второго и третьего ранга

Произвольный декартов тензор второго ранга  $T_{ik}$ , ( $i, k = x, y, z$ ) является, вообще говоря, приводимым и может быть представлен в виде суммы трех неприводимых членов:

а) тензора, пропорционального единичному  $E_{ik} = E\delta_{ik}$ ;

б) антисимметричного тензора  $A_{ik} = -A_{ki}$ ;

в) симметричного тензора со следом, равным нулю,  $S_{ik} = S_{ki}$ ,  $\sum_i S_{ii} = 0$ .

$$T_{ik} = E\delta_{ik} + A_{ik} + S_{ik}, \quad (24)$$

$$E = \frac{1}{3} \text{Sp}(T_{ik}) = \frac{1}{3} \sum_i T_{ii}, \quad (25)$$

$$A_{ik} = \frac{1}{2} (T_{ik} - T_{ki}), \quad (26)$$

$$S_{ik} = \frac{1}{2} \left( T_{ik} + T_{ki} - \frac{2}{3} \delta_{ik} \sum_l T_{ll} \right). \quad (27)$$

Величина  $E$  инвариантна относительно поворотов системы координат. Она является неприводимым тензором нулевого ранга

$$\mathcal{T}_{00} = E. \quad (28)$$

Антисимметричный тензор  $A_{ik}$  эквивалентен аксиальному вектору  $\mathcal{A}_i$ .

$$A_{ik} = \varepsilon_{ikl} \mathcal{A}_l, \quad \mathcal{A}_i = \frac{1}{2} \sum_{kl} \varepsilon_{ikl} A_{kl}. \quad (29)$$

Из компонент тензора  $A_{ik}$  можно построить неприводимый псевдотензор первого ранга

$$\mathcal{T}_{10} = \mathcal{A}_z = A_{xy}, \quad (30)$$

$$\mathcal{T}_{1\pm 1} = \mp \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathcal{A}_x \pm i\mathcal{A}_y) = \mp \frac{1}{\sqrt{2}} (A_{yz} \pm iA_{zx}).$$

Из компонент симметричного тензора  $S_{ik}$  со следом, равным нулю, можно построить неприводимый тензор второго ранга

$$\mathcal{T}_{20} = S_{zz},$$

$$\mathcal{T}_{2\pm 1} = \mp \sqrt{\frac{2}{3}} (S_{zx} \pm iS_{zy}), \quad (31)$$

$$\mathcal{T}_{2\pm 2} = \sqrt{\frac{1}{6}} (S_{xx} - S_{yy} \pm 2iS_{xy}).$$

Таким образом, из 9 компонент тензора  $T_{ik}$  можно построить один тензор нулевого ранга (одна компонента), один псевдотензор первого ранга (три компоненты) и один неприводимый тензор второго ранга (пять компонент).

Из двадцати семи компонент тензора третьего ранга  $T_{ikl}$  можно построить один псевдотензор нулевого ранга  $\mathcal{T}_{00}$  (одна компонента), три тензора первого ранга  $\mathcal{T}_{1\mu}$  (всего девять компонент), два неприводимых тензора второго ранга  $\mathcal{T}_{2\mu}$  (всего десять компонент) и один неприводимый тензор третьего ранга  $\mathcal{T}_{3\mu}$  (семь компонент), причем построение неприводимых тензоров первого и второго рангов неоднозначно.

### 3. Запись дифференциальных операций в виде неприводимых тензорных произведений

Дифференциальные операции над скалярами и векторами и векторами (см. 1.3.) могут быть записаны в виде неприводимых тензорных произведений оператора  $\nabla$  и соответствующего скаляра или вектора

$$\text{grad } \Phi = \{\mathbf{V}_1 \otimes \Phi\}_1, \quad (32)$$

$$\text{div } \mathbf{A} = -\sqrt{3} \{\mathbf{V}_1 \otimes \mathbf{A}_1\}_0, \quad (33)$$

$$\text{rot } \mathbf{A} = -i\sqrt{2} \{\mathbf{V}_1 \otimes \mathbf{A}_1\}_1, \quad (34)$$

$$\Delta = \nabla^2 = -\sqrt{3} \{\mathbf{V}_1 \otimes \mathbf{V}_1\}_0, \quad (35)$$

$$\text{grad div } \mathbf{A} = -\sqrt{3} \{\mathbf{V}_1 \otimes \{\mathbf{V}_1 \otimes \mathbf{A}_1\}_0\}_1, \quad (36)$$

$$\text{rot rot } \mathbf{A} = -2 \{\mathbf{V}_1 \otimes \{\mathbf{V}_1 \otimes \mathbf{A}_1\}_1\}_1, \quad (37)$$

$$\text{div grad } \Phi = -\sqrt{3} \{\mathbf{V}_1 \otimes \{\mathbf{V}_1 \otimes \Phi\}_1\}_0 = -\sqrt{3} \{\mathbf{V}_1 \otimes \mathbf{V}_1\}_0 \Phi, \quad (38)$$

$$\text{rot grad } \Phi = -i\sqrt{2} \{\mathbf{V}_1 \otimes \{\mathbf{V}_1 \otimes \Phi\}_1\}_1 = 0, \quad (39)$$

$$\text{div rot } \mathbf{A} = i\sqrt{6} \{\mathbf{V}_1 \otimes \{\mathbf{V}_1 \otimes \mathbf{A}_1\}_1\}_0 = 0. \quad (40)$$



Оператор  $\mathbf{V}$  (см. 1.3.1.) может быть представлен в виде

$$\mathbf{V} = \mathbf{n} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{i}{r} [\mathbf{n} \times \hat{\mathbf{L}}], \quad (41)$$

а его циклические компоненты в виде

$$\nabla_{\mu} = \sqrt{\frac{4\pi}{3}} \left( Y_{1\mu} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sqrt{2}}{r} (Y_1 \otimes \hat{\mathbf{L}})_{1\mu} \right). \quad (42)$$

Здесь  $Y_1$  — неприводимый тензор, компонентами которого являются сферические функции  $Y_{1\mu}(\mathbf{n})$  (гл. 5), а  $\hat{\mathbf{L}}_1 \equiv \hat{\mathbf{L}}$  — оператор орбитального момента (см. 2.2).

При разложении в ряд Тейлора скалярной функции  $\Phi(\mathbf{r})$  возникают сколь угодно большие степени оператора  $\mathbf{V}$ .

$$\begin{aligned} \Phi(\mathbf{r} + \delta\mathbf{r}) &= e^{(\delta\mathbf{r} \cdot \mathbf{V})} \Phi(\mathbf{r}) = \Phi(\mathbf{r}) + (\delta\mathbf{r} \cdot \mathbf{V}) \Phi(\mathbf{r}) + \frac{1}{2!} (\delta\mathbf{r} \cdot \mathbf{V})^2 \Phi(\mathbf{r}) + \dots = \\ &= \Phi(\mathbf{r}) + \delta\mathbf{r} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{V}) \Phi(\mathbf{r}) + \frac{1}{2!} (\delta r)^2 (\mathbf{u} \cdot \mathbf{V})^2 \Phi(\mathbf{r}) + \dots \end{aligned} \quad (43)$$

Здесь  $\mathbf{u} = \frac{\delta\mathbf{r}}{|\delta\mathbf{r}|}$ , а  $(\mathbf{u} \cdot \mathbf{V}) = \frac{d}{ds}$  — оператор дифференцирования по направлению  $\mathbf{u}$  (см. 1.3). Величины  $(\mathbf{u} \cdot \mathbf{V})^n \equiv \frac{d^n}{ds^n}$  можно записать в виде тензорных произведений

$$(\mathbf{u} \cdot \mathbf{V})^n = (-1)^n \sum_{l_2, l_3, \dots, l_n} (-1)^{l_n} (\{ \dots \{ \{ \mathbf{u}_1 \otimes \mathbf{u}_1 \}_{l_2} \otimes \mathbf{u}_1 \}_{l_3} \dots \otimes \mathbf{u}_1 \}_{l_n} \cdot \{ \dots \{ \{ \mathbf{V}_1 \otimes \mathbf{V}_1 \}_{l_2} \otimes \mathbf{V}_1 \}_{l_3} \dots \otimes \mathbf{V}_1 \}_{l_n}). \quad (44)$$

Входящие сюда многократные тензорные произведения орта  $\mathbf{u}$  могут быть выражены через сферические функции по формулам (22), (23).

### 3.3. ИЗМЕНЕНИЕ СХЕМЫ СВЯЗИ В НЕПРИВОДИМЫХ ТЕНЗОРНЫХ ПРОИЗВЕДЕНИЯХ

Неприводимое тензорное произведение двух неприводимых тензоров определено в 3.1.7. С помощью тех же соотношений можно построить и неприводимое произведение трех и более неприводимых тензоров. Однако при этом возможны различные последовательности и различные схемы связи перемножаемых тензоров.

Изменение схемы связи тензоров без изменения их последовательности осуществляется вещественной (при выбранном здесь определении коэффициентов векторного сложения) и ортогональной матрицей, которая осуществляет прямое и обратное преобразование. При изменении последовательности тензоров необходимо учитывать правила коммутации 3.1. (24) — 3.1.(28). В формулах приведенных ниже используется обозначение

$$\Pi_{abc \dots d} = \sqrt{(2a+1)(2b+1)(2c+1) \dots (2d+1)}.$$

#### 1. Соотношения, общие для коммутирующих и некоммутирующих тензоров

Изменение схемы связи тензоров без изменения их последовательности в неприводимых тензорных произведениях трех и четырех тензоров

$$\{ \{ \mathbf{P}_a \otimes \mathbf{Q}_b \}_c \otimes \mathbf{R}_d \}_f = (-1)^{a+b+f+d} \sum_h \Pi_{hc} \begin{Bmatrix} a & b & c \\ d & f & h \end{Bmatrix} \{ \mathbf{P}_a \otimes \{ \mathbf{Q}_b \otimes \mathbf{R}_d \}_h \}_f, \quad (1)$$

$$\{ \{ \mathbf{P}_a \otimes \mathbf{Q}_b \}_c \cdot \mathbf{R}_c \} = (-1)^{-c+a} \frac{\Pi_c}{\Pi_a} (\mathbf{P}_a \cdot \{ \mathbf{Q}_b \otimes \mathbf{R}_c \}_a), \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \{ \{ \mathbf{P}_a \otimes \mathbf{Q}_b \}_c \otimes \{ \mathbf{R}_d \otimes \mathbf{S}_e \}_f \}_k &= (-1)^{d+c+e+k} \sum_h \Pi_{hf} \begin{Bmatrix} d & c & h \\ k & e & f \end{Bmatrix} \{ \{ \{ \mathbf{P}_a \otimes \mathbf{Q}_b \}_c \otimes \mathbf{R}_d \}_h \otimes \mathbf{S}_e \}_k = \\ &= (-1)^{a+f+b+k} \sum_h \Pi_{hc} \begin{Bmatrix} a & b & c \\ f & k & h \end{Bmatrix} \{ \mathbf{P}_a \otimes \{ \mathbf{Q}_b \otimes \{ \mathbf{R}_d \otimes \mathbf{S}_e \}_f \}_h \}_k, \end{aligned} \quad (3)$$

$$((\mathbf{P}_a \otimes \mathbf{Q}_b)_c \cdot \{\mathbf{R}_d \otimes \mathbf{S}_e\}_c) = \frac{(-1)^{-c+e} \Pi_c}{\Pi_e} (\{(\mathbf{P}_a \otimes \mathbf{Q}_b)_c \otimes \mathbf{R}_d\}_e \cdot \mathbf{S}_e) = (-1)^{-c+a} \frac{\Pi_c}{\Pi_a} (\mathbf{P}_a \cdot \{\mathbf{Q}_b \otimes \{\mathbf{R}_d \otimes \mathbf{S}_e\}_f\}_a), \quad (4)$$

$$\{(\{(\mathbf{P}_a \otimes \mathbf{Q}_b)_c \otimes \mathbf{R}_d\}_h \otimes \mathbf{S}_e\}_k = \sum_{f, q} (-1)^{a+f+b-d-c-e} \Pi_{cqh} \begin{Bmatrix} a & b & c \\ f & k & q \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} d & e & f \\ k & c & h \end{Bmatrix} \{\mathbf{P}_a \otimes \{\mathbf{Q}_b \otimes \{\mathbf{R}_d \otimes \mathbf{S}_e\}_f\}_q\}_k, \quad (5)$$

$$(\{(\mathbf{P}_a \otimes \mathbf{Q}_b)_c \otimes \mathbf{R}_d\}_e \cdot \mathbf{S}_e) = (-1)^{-e+a} \frac{\Pi_e}{\Pi_a} (\mathbf{P}_a \cdot \{\mathbf{Q}_b \otimes \{\mathbf{R}_d \otimes \mathbf{S}_e\}_f\}_a). \quad (6)$$

Соотношения, приведенные в этом пункте, применимы как в случае произведений коммутирующих, так и в случае произведений некоммутирующих тензоров.

## 2. Соотношения для коммутирующих тензоров

Изменение схемы связи в неприводимых произведениях трех и четырех коммутирующих между собой тензоров:

$$\begin{aligned} \{\mathbf{P}_a \otimes \{\mathbf{Q}_b \otimes \mathbf{R}_d\}_f\}_e &= (-1)^{b+d-f} \{\mathbf{P}_a \otimes \{\mathbf{R}_d \otimes \mathbf{Q}_b\}_f\}_e = (-1)^{a+f-e} \{\{\mathbf{Q}_b \otimes \mathbf{R}_d\}_f \otimes \mathbf{P}_a\}_e = \\ &= (-1)^{a+b+d-e} \{\{\mathbf{R}_d \otimes \mathbf{Q}_b\}_f \otimes \mathbf{P}_a\}_e, \end{aligned} \quad (7)$$

$$\{(\mathbf{P}_a \otimes \mathbf{Q}_b)_c \otimes \mathbf{R}_d\}_f = (-1)^{c+d+f} \sum_h \Pi_{ch} \begin{Bmatrix} a & b & c \\ f & d & h \end{Bmatrix} \{\mathbf{Q}_b \otimes \{\mathbf{P}_a \otimes \mathbf{R}_d\}_h\}_f, \quad (8)$$

$$(\{\mathbf{P}_a \otimes \mathbf{Q}_b\}_c \cdot \mathbf{R}_c) = (-1)^{-a} \frac{\Pi_c}{\Pi_b} (\mathbf{Q}_b \cdot \{\mathbf{P}_a \otimes \mathbf{R}_c\}_b), \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \{\mathbf{P}_a \otimes \{\mathbf{Q}_b \otimes \{\mathbf{R}_d \otimes \mathbf{S}_e\}_f\}_h\}_k &= (-1)^{d+e-f} \{\mathbf{P}_a \otimes \{\mathbf{Q}_b \otimes \{\mathbf{S}_e \otimes \mathbf{R}_d\}_f\}_h\}_k = (-1)^{d+b+e-h} \{\mathbf{P}_a \otimes \{\{\mathbf{S}_e \otimes \mathbf{R}_d\}_f \otimes \mathbf{Q}_b\}_h\}_k = \\ &= (-1)^{b+f-h} \{\mathbf{P}_a \otimes \{\{\mathbf{R}_d \otimes \mathbf{S}_e\}_f \otimes \mathbf{Q}_b\}_h\}_k = (-1)^{a+h-k} \{\{\mathbf{Q}_b \otimes \{\mathbf{R}_d \otimes \mathbf{S}_e\}_f\}_h \otimes \mathbf{P}_a\}_k = \\ &= (-1)^{d+e+a+h-f-k} \{\{\mathbf{Q}_b \otimes \{\mathbf{S}_e \otimes \mathbf{R}_d\}_f\}_h \otimes \mathbf{P}_a\}_k = (-1)^{a+b+d+e-k} \{\{\{\mathbf{Q}_e \otimes \mathbf{R}_d\}_f \otimes \mathbf{Q}_b\}_h \otimes \mathbf{P}_a\}_k = \\ &= (-1)^{a+b+f-k} \{\{\{\mathbf{R}_d \otimes \mathbf{S}_e\}_f \otimes \mathbf{Q}_b\}_h \otimes \mathbf{P}_a\}_k, \end{aligned} \quad (10)$$

$$\{(\mathbf{P}_a \otimes \mathbf{Q}_b)_c \otimes \{\mathbf{R}_d \otimes \mathbf{S}_e\}_f\}_k = \sum_{gh} \Pi_{c f g h} \begin{Bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{Bmatrix} \{\{\mathbf{P}_a \otimes \mathbf{R}_d\}_g \otimes \{\mathbf{Q}_b \otimes \mathbf{S}_e\}_h\}_k, \quad (11)$$

$$\{(\mathbf{P}_a \otimes \mathbf{Q}_b)_c \otimes \{\mathbf{R}_d \otimes \mathbf{S}_e\}_f\}_k = \sum_{gh} (-1)^{h+b-k-e} \Pi_{c f g h}^2 \begin{Bmatrix} a & b & c \\ g & d & h \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} d & e & f \\ k & c & g \end{Bmatrix} \{\{\{\mathbf{P}_a \otimes \mathbf{R}_d\}_h \otimes \mathbf{Q}_b\}_g \otimes \mathbf{S}_e\}_k, \quad (12)$$

$$(\{\mathbf{P}_a \otimes \mathbf{Q}_b\}_c \cdot \{\mathbf{R}_d \otimes \mathbf{S}_e\}_c) = (-1)^{2a+b-d} \sum_g \Pi_g^2 \begin{Bmatrix} a & b & c \\ e & d & g \end{Bmatrix} (\{\mathbf{P}_a \otimes \mathbf{R}_d\}_g \cdot \{\mathbf{Q}_b \otimes \mathbf{S}_e\}_g), \quad (13)$$

$$(\{\mathbf{P}_a \otimes \mathbf{Q}_b\}_c \cdot \{\mathbf{R}_d \otimes \mathbf{S}_e\}_c) = \sum_h (-1)^{e+b+d+h} \frac{\Pi_{c e h}}{\Pi_e} \begin{Bmatrix} a & b & c \\ e & d & h \end{Bmatrix} (\{\{\mathbf{P}_a \otimes \mathbf{R}_d\}_h \otimes \mathbf{Q}_b\}_e \cdot \mathbf{S}_e). \quad (14)$$

Все остальные перестановки можно получить, используя соотношение 3.1.(27) и соотношения (11) и (14). Произведение  $\{\mathbf{P}_a \otimes \mathbf{Q}_b\}_b$  ортогонально тензору  $\mathbf{Q}_b$  при  $a = 2b - 1, 2b - 2, \dots$

$$(\{\mathbf{P}_a \otimes \mathbf{Q}_b\}_b \cdot \mathbf{Q}_b) = 0. \quad (15)$$

## 3. Соотношения для некоммутирующих тензоров

Изменение схемы связи в неприводимых тензорных произведениях трех и четырех некоммутирующих между собой тензоров (определение коммутатора дано в 3.1.(26))

$$\{(\mathbf{P}_a \otimes \mathbf{Q}_b)_c \otimes \mathbf{R}_d\}_f = (-1)^{f+d+c} \sum_h \Pi_{ch} \begin{Bmatrix} a & b & c \\ f & d & h \end{Bmatrix} \{\mathbf{Q}_b \otimes \{\mathbf{P}_a \otimes \mathbf{R}_d\}_h\}_f + \{\mathfrak{R}_c^{ab} \otimes \mathbf{R}_d\}_f, \quad (16)$$

$$(\{\mathbf{P}_a \otimes \mathbf{Q}_b\}_c \cdot \mathbf{R}_c) = (-1)^{-a} \frac{\Pi_c}{\Pi_b} (\mathbf{Q}_b \cdot \{\mathbf{P}_a \otimes \mathbf{R}_c\}_b) + \{\mathfrak{R}_c^{nb} \cdot \mathbf{R}_c\}, \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \{\mathbf{P}_a \otimes \{\mathbf{Q}_b \otimes \mathbf{R}_d\}_h\}_f &= \sum_{cg} (-1)^{a+b-c} \Pi_{c g h} \begin{Bmatrix} a & b & c \\ f & d & g \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} a & b & c \\ d & f & h \end{Bmatrix} \{\mathbf{Q}_b \otimes \{\mathbf{P}_a \otimes \mathbf{R}_d\}_g\}_f + \\ &+ \sum_c (-1)^{a+b+f+d} \Pi_{ch} \begin{Bmatrix} a & b & c \\ d & f & h \end{Bmatrix} \{\mathfrak{R}_c^{nb} \otimes \mathbf{R}_d\}_f, \end{aligned} \quad (18)$$

$$(\mathbf{P}_a \cdot \{\mathbf{Q}_b \otimes \mathbf{R}_d\}_a) = (-1)^{2b-d} \frac{\Pi_a}{\Pi_b} (\mathbf{Q}_b \cdot \{\mathbf{P}_a \otimes \mathbf{R}_d\}_b) + (-1)^{-a+d} \frac{\Pi_a}{\Pi_d} (\mathfrak{R}_q^{gb} \cdot \mathbf{R}_d), \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \{(\mathbf{P}_a \otimes \mathbf{Q}_b)_c \otimes \{\mathbf{R}_d \otimes \mathbf{S}_e\}_f\}_k &= \sum_{gr} \Pi_{c f g r} \begin{Bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ r & g & k \end{Bmatrix} \{(\mathbf{P}_a \otimes \mathbf{R}_d)_r \otimes \{\mathbf{Q}_b \otimes \mathbf{S}_e\}_g\}_k + \\ &+ \sum_{hq} (-1)^{a+k+d+e-f-h} \Pi_{chqf} \begin{Bmatrix} a & b & c \\ f & k & h \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} d & e & f \\ h & b & q \end{Bmatrix} \{\mathbf{P}_a \otimes \{\mathfrak{R}_q^{bd} \otimes \mathbf{S}_e\}_h\}_k, \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \{(\mathbf{P}_a \otimes \mathbf{Q}_b)_c \cdot \{\mathbf{R}_d \otimes \mathbf{S}_e\}_c\} &= \sum_g (-1)^{d+b+2g} \Pi_c^2 \begin{Bmatrix} a & b & c \\ e & d & g \end{Bmatrix} \{(\mathbf{P}_a \otimes \mathbf{R}_d)_g \cdot \{\mathbf{Q}_b \otimes \mathbf{S}_e\}_g\} + \\ &+ \sum_q (-1)^{d+e+c-b} \frac{\Pi_{ceq}}{\Pi_a} \begin{Bmatrix} a & b & c \\ d & e & q \end{Bmatrix} (\mathbf{P}_a \cdot \{\mathfrak{R}_q^{bd} \otimes \mathbf{S}_e\}_a), \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} \{(\mathbf{P}_a \otimes \mathbf{Q}_b)_c \otimes \{\mathbf{R}_d \otimes \mathbf{S}_e\}_f\}_k &= \sum_{hq} (-1)^{a-b+k-d-g} \Pi_{hcfq} \begin{Bmatrix} a & b & c \\ f & k & h \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} b & e & g \\ d & h & f \end{Bmatrix} \{\mathbf{P}_a \otimes \{\mathbf{R}_d \otimes \{\mathbf{Q}_b \otimes \mathbf{S}_e\}_g\}_h\}_k + \\ &+ \sum_{hq} (-1)^{a+k+d+e-f-h} \Pi_{hcqf} \begin{Bmatrix} a & b & c \\ f & k & h \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} d & e & f \\ h & b & q \end{Bmatrix} \{\mathbf{P}_a \otimes \{\mathfrak{R}_q^{bd} \otimes \mathbf{S}_e\}_h\}_k, \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} \{(\mathbf{P}_a \otimes \mathbf{Q}_b)_c \cdot \{\mathbf{R}_d \otimes \mathbf{S}_e\}_c\} &= \sum_g (-1)^{a+d+g+b} \frac{\Pi_{ceg}}{\Pi_a} \begin{Bmatrix} b & e & g \\ d & a & c \end{Bmatrix} (\mathbf{P}_a \cdot \{\mathbf{R}_d \otimes \{\mathbf{Q}_b \otimes \mathbf{S}_e\}_g\}_a) + \\ &+ \sum_q (-1)^{d+e+c-b} \frac{\Pi_{ceq}}{\Pi_a} \begin{Bmatrix} a & b & c \\ d & e & q \end{Bmatrix} (\mathbf{P}_a \cdot \{\mathfrak{R}_q^{bd} \otimes \mathbf{S}_e\}_a). \end{aligned} \quad (23)$$

Другие соотношения для некоммутирующих тензоров можно получить, используя вышеприведенные формулы.

## D-ФУНКЦИИ ВИГНЕРА

### 4.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ

1. *D-функции Вигнера*  $D_{MM'}^J(\alpha, \beta, \gamma)$  определяются как матричные элементы оператора поворота  $\hat{D}(\alpha, \beta, \gamma)$  в  $JM$ -представлении

$$\langle JM | \hat{D}(\alpha, \beta, \gamma) | J'M' \rangle = \delta_{JJ'} D_{MM'}^J(\alpha, \beta, \gamma). \quad (1)$$

При повороте системы координат, характеризуемом углами Эйлера  $\alpha, \beta, \gamma$ , ковариантные компоненты неприводимого тензора ранга  $J$ , в частности волновые функции  $\psi_{JM}$  системы с определенным угловым моментом  $J$  и проекцией  $M$ , преобразуются с помощью  $D$ -функций по формулам

$$\begin{aligned} \Psi_{JM}(\vartheta', \varphi', \sigma') &= \sum_{M=-J}^J \Psi_{JM}(\vartheta, \varphi, \sigma) D_{MM'}^J(\alpha, \beta, \gamma), \\ \Psi_{JM}^*(\vartheta', \varphi', \sigma') &= \sum_{M=-J}^J \Psi_{JM}^*(\vartheta, \varphi, \sigma) D_{MM'}^{J*}(\alpha, \beta, \gamma), \end{aligned} \quad (2)$$

где  $\vartheta, \varphi$  — совокупность сферических углов в исходной системе координат  $S$ , а  $\vartheta', \varphi'$  в повернутой системе  $S'$ . Углы  $\vartheta, \varphi$  и  $\vartheta', \varphi'$  связаны между собой соотношениями 1.4 (2) и 1.4. (3). Аналогично  $\sigma$  и  $\sigma'$  — совокупность спиновых переменных в исходной и новой системах координат соответственно.

Обратное преобразование  $S' \rightarrow S$  осуществляется обратной матрицей  $[\hat{D}^{-1}(\alpha, \beta, \gamma)]_{MM'}^J$ , для которой в силу унитарности оператора поворота

$$\hat{D}^{-1}(\alpha, \beta, \gamma) = \hat{D}^\dagger(\alpha, \beta, \gamma) \quad (3)$$

справедливо следующее соотношение:

$$[\hat{D}^{-1}(\alpha, \beta, \gamma)]_{MM'}^J = D_{M'M}^{J*}(\alpha, \beta, \gamma). \quad (4)$$

Преобразование волновых функций при обратном повороте  $S' \rightarrow S$  имеет вид

$$\begin{aligned} \Psi_{JM}(\vartheta, \varphi, \sigma) &= \sum_{M'=-J}^J D_{MM'}^{J*}(\alpha, \beta, \gamma) \Psi_{JM'}(\vartheta', \varphi', \sigma'), \\ \Psi_{JM}^*(\vartheta, \varphi, \sigma) &= \sum_{M'=-J}^J D_{MM'}^J(\alpha, \beta, \gamma) \Psi_{JM'}^*(\vartheta', \varphi', \sigma'). \end{aligned} \quad (5)$$

Условие унитарности для  $D$ -функций Вигнера можно записать в виде

$$\begin{aligned} \sum_{M=-J}^J D_{MM'}^J(\alpha, \beta, \gamma) D_{MM'}^{J*}(\alpha, \beta, \gamma) &= \delta_{M'M'}, \\ \sum_{M'=-J}^J D_{MM'}^{J*}(\alpha, \beta, \gamma) D_{MM'}^J(\alpha, \beta, \gamma) &= \delta_{MM}. \end{aligned} \quad (6)$$

Матрица  $D_{MM'}^J(\alpha, \beta, \gamma)$  является унимодулярной

$$\det \| D_{MM'}^J(\alpha, \beta, \gamma) \| = +1. \quad (7)$$

2. Совокупность  $2J + 1$  функций  $\Psi_{JM}$  представляет собой базис, по которому можно разложить произвольную функцию с определенным моментом  $J$ :

$$\Psi_J(\vartheta, \varphi) = \sum_{M=-J}^J C_J^M \Psi_{JM}(\vartheta, \varphi) = (C_J \cdot \Psi_J). \quad (8)$$

Коэффициенты  $C_J^M$  являются контравариантными компонентами неприводимого тензора ранга  $J$  и преобразуются с помощью функций  $D_{M'M}^{J*}(\alpha, \beta, \gamma)$ . Действие оператора  $\hat{D}(\alpha, \beta, \gamma)$  на  $\Psi_J(\vartheta, \varphi)$  можно рассматривать либо как изменение базисных функций, обусловленное поворотом системы координат, либо как обратный поворот физической системы (табл. 4.1) при неизменных базисных функциях

$$\begin{aligned} \hat{D}(\alpha, \beta, \gamma) \Psi_J &= \sum_{M=-J}^J C_J^M \left( \sum_{M'=-J}^J \Psi_{JM'}(\vartheta, \varphi) D_{M'M}^J(\alpha, \beta, \gamma) \right) = (C_J \cdot \Psi_J'(\vartheta', \varphi')) = \\ &= \sum_{M'=-J}^J \left( \sum_{M=-J}^J D_{M'M}^J(\alpha, \beta, \gamma) C_J^M \right) \cdot \Psi_{JM'}(\vartheta, \varphi) = (C_J' \cdot \Psi_J(\vartheta, \varphi)). \end{aligned} \quad (9)$$

Волновая функция  $\Psi_J$  инвариантна по отношению к двум совместным операциям — повороту физической системы и такому же повороту системы координат

$$\{\hat{D}(\alpha, \beta, \gamma)\}_{\text{физ. сист.}} \cdot \{\hat{D}(\alpha, \beta, \gamma)\}_{\text{осн.}} = 1, \quad (10)$$

так что

$$\{D_{MM'}^J(\alpha, \beta, \gamma)\}_{\text{физ. сист.}} = \{[\hat{D}^{-1}(\alpha, \beta, \gamma)]_{MM'}^J\}_{\text{осн.}} \quad (11)$$

$D$ -функции Вигнера являются комплексными функциями трех вещественных аргументов  $\alpha, \beta, \gamma$ , заданных в области

$$0 \leq \alpha < 2\pi, \quad 0 \leq \beta \leq \pi, \quad 0 \leq \gamma < 2\pi. \quad (12)$$

Они однозначны, ограничены и непрерывны вместе со всеми своими производными.

В ряде случаев удобно изменить или расширить область определения аргументов  $D$ -функции. Это можно сделать с помощью свойств симметрии (см. 4.4). Например, для матрицы обратного преобразования  $S' \rightarrow S$  справедливо соотношение

$$[D^{-1}(\alpha, \beta, \gamma)]_{MM'}^J = D_{MM'}^J(\pi - \gamma, \beta, -\pi - \alpha) = D_{MM'}^J(-\gamma, -\beta, -\alpha). \quad (13)$$

Это соответствует тому, что обратное преобразование системы координат  $S' \rightarrow S$  может быть получено как посредством поворота, характеризуемого углами Эйлера

$$\alpha' = \pi - \gamma, \quad \beta' = \beta, \quad \gamma' = -\pi - \alpha, \quad (14)$$

так и с помощью поворота, характеризуемого углами Эйлера

$$\alpha' = -\gamma, \quad \beta' = -\beta, \quad \gamma' = -\alpha. \quad (15)$$

Преобразование волновых функций (2), осуществляемое с помощью  $D_{MM'}^J(\alpha, \beta, \gamma)$  можно интерпретировать четырьмя различными способами (табл. 4.1.). Это обусловлено следующими обстоятельствами. Во-первых, в силу (11),  $D$ -функции Вигнера описывают как поворот системы координат, так и поворот физической системы. Во-вторых, как отмечено в 1.4, поворот, характеризуемый углами  $\alpha, \beta, \gamma$ , можно осуществить двумя различными способами: либо вращением относительно исходных координатных осей (1.4.(A)), либо вращением относительно повернутых осей (1.4.(B)) (см. стр. 20—21).

#### 4.2. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ $D_{MM'}^J(\alpha, \beta, \gamma)$ И ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ

1.  $D_{MM'}^J(\alpha, \beta, \gamma)$  являются собственными функциями трех операторов, определяющих трехмерное вращение:

$$J_z = -i \frac{\partial}{\partial \alpha}, \quad J_x = -i \frac{\partial}{\partial \gamma}, \quad J^2 = -\left[ \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} + \text{ctg } \beta \frac{\partial}{\partial \beta} + \frac{1}{\sin^2 \beta} \left( \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} - 2 \cos \beta \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \gamma} + \frac{\partial^2}{\partial \gamma^2} \right) \right]. \quad (1)$$

Эти операторы можно рассматривать как операторы углового момента симметричного волчка. Оператор  $\hat{J}_z$  определяет проекцию углового момента на ось  $z'$  вращающейся системы, а  $\hat{J}_z$  — на ось  $z$  неподвижной системы.

$$\begin{aligned} \hat{J}_z D_{MM'}^J(\alpha, \beta, \gamma) &= -M D_{MM'}^J(\alpha, \beta, \gamma), \\ \hat{J}_{z'} D_{MM'}^J(\alpha, \beta, \gamma) &= -M' D_{MM'}^J(\alpha, \beta, \gamma), \\ \hat{J}^2 D_{MM'}^J(\alpha, \beta, \gamma) &= \left\{ -\frac{1}{\sin \beta} \cdot \frac{\partial}{\partial \beta} \left( \sin \beta \frac{\partial}{\partial \beta} \right) + \frac{M^2 - 2MM' \cos \beta + M'^2}{\sin^2 \beta} \right\} D_{MM'}^J(\alpha, \beta, \gamma) = J(J+1) D_{MM'}^J(\alpha, \beta, \gamma). \end{aligned} \quad (2)$$

Граничные условия

$$\begin{aligned} D_{MM'}^J(\alpha \pm 2k\pi, \beta, \gamma) &= D_{MM'}^J(\alpha, \beta, \gamma), \\ D_{MM'}^J(\alpha, \beta, \gamma \pm 2k\pi) &= D_{MM'}^J(\alpha, \beta, \gamma), \\ D_{MM'}^J(\alpha, \beta \pm 2k\pi, \gamma) &= D_{MM'}^J(\alpha, \beta, \gamma), \end{aligned} \quad (3)$$

где

$$\begin{aligned} k &= 0, 1, 2, 3, \dots \text{ при } J \text{ — целом,} \\ k &= 0, 2, 4, 6, \dots \text{ при } J \text{ — полуцелом.} \end{aligned}$$

2. Функции  $D_{MM'}^J(\alpha, \beta, \gamma)$  также можно определить следующими дифференциальными уравнениями:

$$\begin{aligned} [\hat{J}_y, D_{MM'}^J(\alpha, \beta, \gamma)] &= \hat{J}_y D_{MM'}^J(\alpha, \beta, \gamma) = (-1)^{l+\nu} \sqrt{J(J+1)} C_{JM'1-\nu}^{JM-\nu} D_{M-\nu, M'}^J(\alpha, \beta, \gamma) = \\ &= \begin{cases} -M D_{MM'}^J(\alpha, \beta, \gamma), & \nu = 0, \\ \pm \sqrt{\frac{J(J+1) - M(M \mp 1)}{2}} D_{M \mp 1, M'}^J(\alpha, \beta, \gamma), & \nu = \pm 1, \end{cases} \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} [\hat{J}'_y, D_{MM'}^J(\alpha, \beta, \gamma)] &= \hat{J}'_y D_{MM'}^J(\alpha, \beta, \gamma) = -\sqrt{J(J+1)} C_{JM'1\nu}^{JM'+\nu} D_{M+1, M'}^J(\alpha, \beta, \gamma) = \\ &= \begin{cases} -M' D_{MM'}^J(\alpha, \beta, \gamma), & \nu = 0, \\ \pm \sqrt{\frac{J(J+1) - M'(M' \pm 1)}{2}} D_{M M' \pm 1}^J(\alpha, \beta, \gamma), & \nu = \pm 1. \end{cases} \end{aligned} \quad (5)$$

Величины  $\hat{J}$ , являются ковариантными циклическими компонентами оператора углового момента  $\hat{\mathbf{J}}$ , определенными в неподвижной системе координат  $S$ :

$$\begin{aligned} \hat{J}_{\pm 1} &= \frac{i}{\sqrt{2}} e^{\pm i\alpha} \left[ \mp \operatorname{ctg} \beta \frac{\partial}{\partial \alpha} + i \frac{\partial}{\partial \beta} \pm \frac{1}{\sin \beta} \cdot \frac{\partial}{\partial \gamma} \right], \\ \hat{J}_0 &= -i \frac{\partial}{\partial \alpha}. \end{aligned} \quad (6)$$

Величины  $\hat{J}'$  являются контравариантными компонентами оператора углового момента, определенными во вращающейся системе координат  $S'$ , связанной с волчком.

$$\begin{aligned} \hat{J}'_{\pm 1} &= \frac{i}{\sqrt{2}} e^{\mp i\gamma} \left[ \pm \operatorname{ctg} \beta \frac{\partial}{\partial \gamma} + i \frac{\partial}{\partial \beta} \mp \frac{1}{\sin \beta} \cdot \frac{\partial}{\partial \alpha} \right], \\ \hat{J}'_0 &= -i \frac{\partial}{\partial \gamma}. \end{aligned} \quad (7)$$

Оператор квадрата углового момента  $\hat{\mathbf{J}}^2$  выражается через  $\hat{J}$  и  $\hat{J}'$  по формулам

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{J}}^2 &= -\hat{J}_{-1} \hat{J}_{+1} + \hat{J}_0 \hat{J}_0 - \hat{J}_{+1} \hat{J}_{-1} = -\hat{J}'_{-1} \hat{J}'_{+1} + \hat{J}'_0 \hat{J}'_0 - \hat{J}'_{+1} \hat{J}'_{-1} = \hat{J}_0 (\hat{J}_0 + 1) - 2\hat{J}_{-1} \hat{J}_{+1} = \\ &= \hat{J}'_0 (\hat{J}'_0 - 1) - 2\hat{J}'_{-1} \hat{J}'_{+1} = \hat{J}_0 (\hat{J}_0 - 1) - 2\hat{J}_{+1} \hat{J}_{-1} = \hat{J}'_0 (\hat{J}'_0 + 1) - 2\hat{J}'_{+1} \hat{J}'_{-1}. \end{aligned} \quad (8)$$

Компоненты  $\hat{J}_\nu$  и  $\hat{J}'^\mu$  связаны соотношениями

$$\hat{J}'^\mu(\alpha, \beta, \gamma) = \sum_\nu D_{\nu\mu}^1(\alpha, \beta, \gamma) \hat{J}_\nu(\alpha, \beta, \gamma), \quad (9)$$

$$\hat{J}_\nu(\alpha, \beta, \gamma) = \sum_\mu D_{\nu\mu}^{1*}(\alpha, \beta, \gamma) \hat{J}'^\mu(\alpha, \beta, \gamma),$$

$$\hat{J}'^\nu(\alpha, \beta, \gamma) = -\hat{J}'_\nu(-\gamma, -\beta, -\alpha), \quad \hat{J}'^\nu(\alpha, \beta, \gamma) = \hat{J}'_{-\nu}(\gamma, \beta, \alpha). \quad (10)$$

Коммутационные соотношения для циклических компонент  $\hat{J}_\nu$  и  $\hat{J}'_\nu$  имеют вид

$$\begin{aligned} [\hat{J}_\mu, \hat{J}_\nu] &= -\sqrt{2} C_{1\mu 1\nu}^{1\mu+\nu} \hat{J}_{\mu+\nu}, \\ [\hat{J}'^\mu, \hat{J}'^\nu] &= \sqrt{2} C_{1\mu 1\nu}^{1\mu+\nu} \hat{J}'^{\mu+\nu}, \\ [\hat{J}_\mu, \hat{J}'^\nu] &= 0, \end{aligned} \quad (11)$$

где

$$\mu, \nu = 1, 0, -1.$$

Коммутационные соотношения для декартовых компонент  $\hat{J}$  имеют вид

$$\begin{aligned} [\hat{J}_i, \hat{J}_k] &= i\varepsilon_{ikl} \hat{J}_l, \\ [\hat{J}'_i, \hat{J}'_k] &= i\varepsilon_{ikl} \hat{J}'_l, \\ [\hat{J}_i, \hat{J}'_k] &= 0, \end{aligned} \quad (12)$$

где

$$i, k, l = x, y, z.$$

Связь  $\hat{J}$  и  $\hat{J}'$  с орбитальным моментом  $\hat{L}$ :

при  $\alpha = \varphi, \beta = \vartheta, \gamma = 0$

$$\begin{aligned} \hat{J}_\nu(\varphi, \vartheta, 0) &= \hat{L}_\nu(\vartheta, \varphi), \quad \text{где } \nu = +1, 0, -1, \\ \hat{J}'_i(\varphi, \vartheta, 0) &= \hat{L}'_i(\vartheta, \varphi), \quad \text{где } i = x, y, z, \end{aligned} \quad (13)$$

при  $\alpha = 0, \beta = \vartheta, \gamma = \varphi$

$$\begin{aligned} \hat{J}'^\nu(0, \vartheta, \varphi) &= \hat{L}'^\nu(\vartheta, \varphi), \quad \text{где } \nu = +1, 0, -1, \\ \hat{J}'_i(0, \vartheta, \varphi) &= \hat{L}'_i(\vartheta, \varphi), \quad \text{где } i = x, y, z. \end{aligned} \quad (14)$$

3. Дифференциальные уравнения (2) определяют  $D$ -функции Вигнера с точностью до произвольного нормировочного и фазового множителя. Для диагональных элементов матрицы поворота  $D_{MM'}^J$  этот множитель можно определить с помощью естественного условия

$$D_{MM'}^J(0, 0, 0) = \delta_{MM'}. \quad (15)$$

После этого нормировочные и фазовые множители у недиагональных элементов определяются с помощью дифференциальных соотношений (4) и (5), связывающих между собой  $D$ -функции с различными индексами  $M, M'$ . Заметим, что при таком выборе фаз имеет место соотношение

$$D_{MM'}^J(0, \pi, 0) = (-1)^{J+M} \delta_{M-M'}. \quad (16)$$

4. Разные авторы используют в качестве матрицы поворота разные функции. Это связано с различным подходом к следующим вопросам:

- 1) используется правая или левая система координат;
- 2) поворачивается ли координатная система при неподвижной физической системе или наоборот;
- 3) вокруг каких осей производятся повороты, в каких последовательности и направлении отсчитываются углы  $\alpha, \beta, \gamma$ ;
- 4) рассматривается матрица преобразования ковариантных или контравариантных компонент;
- 5) выражаются ли с помощью матрицы поворота неприводимые тензоры в повернутой системе координат через неприводимые тензоры в исходной системе или наоборот;
- 6) как выбирается относительная фаза недиагональных матричных элементов в соотношениях (4), (5).

$D$ -функции, рассматриваемые в данной книге, совпадают с  $D$ -функциями, используемыми, например, Эдмондсом [64], Роузом [30], Ньютоном [28] и др. Связь  $D$ -функций с аналогичными функциями других авторов указана ниже в табл. 4.2.

## 4.3. ЯВНЫЙ ВИД D-ФУНКЦИЙ ВИГНЕРА

Функции  $D_{MM'}^J(\alpha, \beta, \gamma)$  представляются в виде произведения трех сомножителей, каждый из которых зависит только от одного угла Эйлера:

$$D_{MM'}^J(\alpha, \beta, \gamma) = e^{-iM\alpha} d_{MM'}^J(\beta) e^{-iM'\gamma}, \quad (1)$$

где  $d_{MM'}^J(\beta)$  — вещественные функции, явный вид которых приведен ниже.

1. Выражения  $d_{MM'}^J(\beta)$  в виде конечных тригонометрических сумм

$$\begin{aligned} d_{MM'}^J(\beta) &= (-1)^{J-M'} [(J+M)! (J-M)! (J+M')! (J-M')!]^{1/2} \times \\ &\times \sum_k (-1)^k \frac{\left(\cos \frac{\beta}{2}\right)^{M+M'+2k} \left(\sin \frac{\beta}{2}\right)^{2J-M-M'-2k}}{k! (J-M-k)! (J-M'-k)! (M+M'+k)!}, \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} d_{MM'}^J(\beta) &= (-1)^{J+M} [(J+M)! (J-M)! (J+M')! (J-M')!]^{1/2} \times \\ &\times \sum_k (-1)^k \frac{\left(\cos \frac{\beta}{2}\right)^{2k-M-M'} \left(\sin \frac{\beta}{2}\right)^{2J+M+M'-2k}}{k! (J+M-k)! (J+M'-k)! (k-M-M')!}, \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} d_{MM'}^J(\beta) &= [(J+M)! (J-M)! (J+M')! (J-M')!]^{1/2} \times \\ &\times \sum_k (-1)^k \frac{\left(\cos \frac{\beta}{2}\right)^{2J-2k+M-M'} \left(\sin \frac{\beta}{2}\right)^{2k-M+M'}}{k! (J+M-k)! (J-M'-k)! (M'-M+k)!}, \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} d_{MM'}^J(\beta) &= (-1)^{M-M'} [(J+M)! (J-M)! (J+M')! (J-M')!]^{1/2} \times \\ &\times \sum_k (-1)^k \frac{\left(\cos \frac{\beta}{2}\right)^{2J-2k-M+M'} \left(\sin \frac{\beta}{2}\right)^{2k+M-M'}}{k! (J-M-k)! (J+M'-k)! (M-M'+k)!}. \end{aligned} \quad (5)$$

В формулах (2)–(5) суммирование производится по всем целым неотрицательным значениям  $k$ , при которых под знаком факториала стоят неотрицательные числа. Каждая из этих сумм содержит  $N+1$  членов, где  $N$  — наименьшее из чисел  $J+M$ ,  $J-M$ ,  $J+M'$ ,  $J-M'$ . Формулы (2)–(5) не являются независимыми и сводятся одна к другой заменой индекса суммирования. Сравнение этих формул между собой позволяет выяснить свойства симметрии функций  $d_{MM'}^J(\beta)$  (см. 4.4.1.).

Формулы (2)–(5) являются частными случаями более общей формулы

$$\begin{aligned} d_{MM'}^J(\beta) &= \left[ \frac{(J_1+J_2+J+1)! (J_1+J_2-J)!}{2J+1} \right]^{1/2} \times \\ &\times \sum_{\substack{m_1, m_2 \\ (m_1+m_2=M)}} (-1)^{J_2+m_2} C_{J_1 m_1 J_2 m_2}^{J M} \frac{\left(\cos \frac{\beta}{2}\right)^{J_1+J_2+m_1-m_2} \left(\sin \frac{\beta}{2}\right)^{J_1+J_2-m_1+m_2}}{[(J_1+m_1)! (J_1-m_1)! (J_2+m_2)! (J_2-m_2)!]^{1/2}}, \end{aligned} \quad (6)$$

где  $J_1 - J_2 = M'$ ,  $|J_1 - J_2| \leq J \leq J_1 + J_2$ , в остальном  $J_1$  и  $J_2$  произвольны. Суммирование в (6) проводится по всем значениям  $m_1$  и  $m_2$  целым или полуцелым, положительным или отрицательным, при которых коэффициенты Клебша-Гордана отличны от нуля. В частности, формула (2) получается из (6) при

$$J_1 = \frac{1}{2}(J+M'), \quad J_2 = \frac{1}{2}(J-M'), \quad m_1 = M - \frac{1}{2}(J-M') + k, \quad m_2 = \frac{1}{2}(J-M') - k.$$



2. Выражения  $d_{MM'}^J(\beta)$  в виде производных

$$d_{MM'}^J(\beta) = (-1)^{J-M'} \frac{1}{2^J} \left[ \frac{(J+M)!}{(J-M)!(J+M')!(J-M')!} \right]^{1/2} (1 - \cos \beta)^{\frac{M'-M}{2}} (1 + \cos \beta)^{-\frac{M+M'}{2}} \times \\ \times \frac{d^{J-M}}{(d \cos \beta)^{J-M}} [(1 - \cos \beta)^{J-M'} (1 + \cos \beta)^{J+M'}], \quad (7)$$

$$d_{MM'}^J(\beta) = (-1)^{J+M} \frac{1}{2^J} \left[ \frac{(J-M)!}{(J+M)!(J+M')!(J-M')!} \right]^{1/2} (1 - \cos \beta)^{\frac{M-M'}{2}} (1 + \cos \beta)^{\frac{M+M'}{2}} \times \\ \times \frac{d^{J+M}}{(d \cos \beta)^{J+M}} [(1 - \cos \beta)^{J+M'} (1 + \cos \beta)^{J-M'}], \quad (8)$$

$$d_{MM'}^J(\beta) = (-1)^{J-M'} \frac{1}{2^J} \left[ \frac{(J+M')!}{(J+M)!(J-M)!(J-M')!} \right]^{1/2} (1 - \cos \beta)^{\frac{M-M'}{2}} (1 + \cos \beta)^{-\frac{M+M'}{2}} \times \\ \times \frac{d^{J-M'}}{(d \cos \beta)^{J-M'}} [(1 - \cos \beta)^{J-M} (1 + \cos \beta)^{J+M}], \quad (9)$$

$$d_{MM'}^J(\beta) = (-1)^{J+M} \frac{1}{2^J} \left[ \frac{(J-M')!}{(J+M)!(J-M)!(J+M')!} \right]^{1/2} (1 - \cos \beta)^{\frac{M'-M}{2}} (1 + \cos \beta)^{\frac{M+M'}{2}} \times \\ \times \frac{d^{J+M'}}{(d \cos \beta)^{J+M'}} [(1 - \cos \beta)^{J+M} (1 + \cos \beta)^{J-M}]. \quad (10)$$

При конкретных вычислениях удобнее пользоваться той из формул (7)–(10), в которой степень производной наименьшая.

3. Интегральные представления  $d_{MM'}^J(\beta)$ 

$$d_{MM'}^J(\beta) = i^{M-M'} \frac{1}{2\pi} \left[ \frac{(J+M)!(J-M)!}{(J+M')!(J-M')!} \right]^{1/2} \times \\ \times \int_0^{2\pi} \left( e^{i\frac{\varphi}{2}} \cos \frac{\beta}{2} + i e^{-i\frac{\varphi}{2}} \sin \frac{\beta}{2} \right)^{J-M'} \left( e^{-i\frac{\varphi}{2}} \cos \frac{\beta}{2} + i e^{i\frac{\varphi}{2}} \sin \frac{\beta}{2} \right)^{J+M'} e^{iM\varphi} d\varphi. \quad (11)$$

Формула (11) может быть записана в виде контурного интеграла

$$d_{MM'}^J(\beta) = \frac{i^{M-M'-1}}{2\pi} \left[ \frac{(J+M)!(J-M)!}{(J+M')!(J-M')!} \right]^{1/2} \oint_{|z|=1} \left( z \cos \frac{\beta}{2} + i \sin \frac{\beta}{2} \right)^{J-M'} \left( iz \sin \frac{\beta}{2} + \cos \frac{\beta}{2} \right)^{J+M'} z^{M-J-1} dz. \quad (12)$$

Контур интегрирования по  $z$  в (12) представляет собой окружность единичного радиуса с центром в начале координат.

4. Связь  $d_{MM'}^J(\beta)$  с полиномами Якоби

Функции  $d_{MM'}^J(\beta)$  выражаются через полиномы Якоби  $P_s^{(\mu, \nu)}$  по формуле

$$d_{MM'}^J(\beta) = \xi_{MM'} \left[ \frac{s!(s+\mu+\nu)!}{(s+\mu)!(s+\nu)!} \right]^{1/2} \left( \sin \frac{\beta}{2} \right)^\mu \left( \cos \frac{\beta}{2} \right)^\nu P_s^{(\mu, \nu)}(\cos \beta), \quad (13)$$

где индексы полиномов Якоби  $s, \mu, \nu$  связаны с  $J, M, M'$  соотношениями

$$\mu = |M - M'|, \quad \nu = |M + M'|, \quad s = J - \frac{1}{2}(\mu + \nu). \quad (14)$$

Величина  $\xi_{MM'}$  определяется формулой

$$\xi_{MM'} = \begin{cases} 1 & \text{при } M' \geq M, \\ (-1)^{M'-M} & \text{при } M' < M. \end{cases} \quad (15)$$

### 5. Выражения $d_{MM'}^J(\beta)$ через гипергеометрические функции

$$d_{MM'}^J(\beta) = \frac{\xi_{MM'}}{\mu!} \left[ \frac{(s+\mu+\nu)! (s+\mu)!}{s!(s+\nu)!} \right]^{1/2} \left( \sin \frac{\beta}{2} \right)^\mu \left( \cos \frac{\beta}{2} \right)^\nu F\left(-s, s+\mu+\nu+1; \mu+1; \sin^2 \frac{\beta}{2}\right), \quad (16)$$

$$d_{MM'}^J(\beta) = \frac{\xi_{MM'}}{\mu!} \left[ \frac{(s+\mu+\nu)! (s+\mu)!}{s!(s+\nu)!} \right]^{1/2} \left( \sin \frac{\beta}{2} \right)^\mu \left( \cos \frac{\beta}{2} \right)^{-\nu} F\left(s+\mu+1, -s-\nu; \mu+1; \sin^2 \frac{\beta}{2}\right), \quad (17)$$

$$d_{MM'}^J(\beta) = \frac{(-1)^s \xi_{MM'}}{\nu!} \left[ \frac{(s+\mu+\nu)! (s+\nu)!}{s!(s+\mu)!} \right]^{1/2} \left( \sin \frac{\beta}{2} \right)^\mu \left( \cos \frac{\beta}{2} \right)^\nu F\left(-s, s+\mu+\nu+1; \nu+1; \cos^2 \frac{\beta}{2}\right), \quad (18)$$

$$d_{MM'}^J(\beta) = \frac{(-1)^s \xi_{MM'}}{\nu!} \left[ \frac{(s+\mu+\nu)! (s+\nu)!}{s!(s+\mu)!} \right]^{1/2} \left( \sin \frac{\beta}{2} \right)^{-\mu} \left( \cos \frac{\beta}{2} \right)^\nu F\left(s+\nu+1, -s-\mu; \nu+1; \cos^2 \frac{\beta}{2}\right), \quad (19)$$

$$d_{MM'}^J(\beta) = \frac{\xi_{MM'}}{\mu!} \left[ \frac{(s+\mu+\nu)! (s+\mu)!}{s!(s+\nu)!} \right]^{1/2} \left( \sin \frac{\beta}{2} \right)^\mu \left( \cos \frac{\beta}{2} \right)^{2s+\nu} F\left(-s, -s-\nu; \mu+1; -\operatorname{tg}^2 \frac{\beta}{2}\right), \quad (20)$$

$$d_{MM'}^J(\beta) = \frac{(-1)^s \xi_{MM'}}{\nu!} \left[ \frac{(s+\mu+\nu)! (s+\nu)!}{s!(s+\mu)!} \right]^{1/2} \left( \sin \frac{\beta}{2} \right)^{2s+\mu} \left( \cos \frac{\beta}{2} \right)^\nu F\left(-s, -s-\mu; \nu+1; -\operatorname{ctg}^2 \frac{\beta}{2}\right), \quad (21)$$

$$d_{MM'}^J(\beta) = \frac{(-1)^s \xi_{MM'} (2s+\mu+\nu)!}{[s!(s+\mu+\nu)!(s+\mu)!(s+\nu)!]^{1/2}} \left( \sin \frac{\beta}{2} \right)^{2s+\mu} \left( \cos \frac{\beta}{2} \right)^\nu F\left(-s, -s-\mu; -2s-\mu-\nu; \frac{1}{\sin^2 \frac{\beta}{2}}\right), \quad (22)$$

$$d_{MM'}^J(\beta) = \frac{\xi_{MM'} (2s+\mu+\nu)!}{[s!(s+\mu+\nu)!(s+\mu)!(s+\nu)!]^{1/2}} \left( \sin \frac{\beta}{2} \right)^\mu \left( \cos \frac{\beta}{2} \right)^{2s+\nu} F\left(-s, -s-\nu; -2s-\mu-\nu; -\frac{1}{\cos^2 \frac{\beta}{2}}\right). \quad (23)$$

Входящие сюда величины  $s, \mu, \nu$  и  $\xi_{MM'}$  даются формулами (14) и (15).

#### 4.4. СВОЙСТВА СИММЕТРИИ

1. Из явного вида функций  $d_{MM'}^J(\beta)$  (см. 4.3. (2)—4.3. (5)) следует, что они вещественные и удовлетворяют соотношениям

$$\left. \begin{aligned} d_{MM'}^J(\beta) &= (-1)^{M-M'} d_{-M-M'}^J(\beta) = (-1)^{M-M'} d_{M'M}^J(\beta) = d_{-M'-M}^J(\beta), \\ d_{MM'}^J(-\beta) &= (-1)^{M-M'} d_{MM'}^J(\beta) = d_{M'M}^J(\beta), \\ d_{MM'}^J(\pi - \beta) &= (-1)^{J-M'} d_{MM'}^J(\beta) = (-1)^{J+M} d_{M-M'}^J(\beta), \\ d_{MM'}^J(\beta \pm 2\pi n) &= (-1)^{2Jn} d_{MM'}^J(\beta), \\ d_{MM'}^J(\beta \pm (2n+1)\pi) &= (-1)^{\pm(2n+1)J-M'} d_{M-M'}^J(\beta), \end{aligned} \right\} n - \text{целое.} \quad (1)$$

2. Из (1) получаются следующие свойства симметрии функций  $D_{MM'}^J(\alpha, \beta, \gamma)$ :

$$\begin{aligned} D_{MM'}^J(\alpha, \beta, \gamma) &= \varepsilon \eta D_{-M-M'}^J(\alpha, \beta, \gamma) = \eta D_{MM'}^{J*}(\alpha, \beta, \gamma) = \varepsilon D_{-M-M'}^{J*}(\alpha, \beta, \gamma) = \\ &= \varepsilon D_{M'M}^J(\gamma, \beta, \alpha) = \eta D_{-M-M}^J(\gamma, \beta, \alpha) = \varepsilon \eta D_{M'M}^{J*}(\gamma, \beta, \alpha) = D_{-M-M}^{J*}(\gamma, \beta, \alpha) = \\ &= \varepsilon D_{MM'}^J(\alpha, -\beta, \gamma) = \eta D_{-M-M'}^J(\alpha, -\beta, \gamma) = \varepsilon \eta D_{MM'}^{J*}(\alpha, -\beta, \gamma) = D_{-M-M'}^{J*}(\alpha, -\beta, \gamma) = \\ &= D_{M'M}^J(\gamma, -\beta, \alpha) = \varepsilon \eta D_{-M'-M}^J(\gamma, -\beta, \alpha) = \eta D_{M'M}^{J*}(\gamma, -\beta, \alpha) = \varepsilon D_{-M'-M}^{J*}(\gamma, -\beta, \alpha) = \\ &= \varepsilon D_{-M-M'}^J(-\alpha, \beta, -\gamma) = \eta D_{MM'}^J(-\alpha, \beta, -\gamma) = \varepsilon \eta D_{-M-M'}^{J*}(-\alpha, \beta, -\gamma) = D_{MM'}^{J*}(-\alpha, \beta, -\gamma) = \\ &= D_{-M'-M}^J(-\gamma, \beta, -\alpha) = \varepsilon \eta D_{M'M}^J(-\gamma, \beta, -\alpha) = \eta D_{-M'-M}^{J*}(-\gamma, \beta, -\alpha) = \varepsilon D_{M'M}^{J*}(-\gamma, \beta, -\alpha) = \\ &= D_{-M-M'}^J(-\alpha, -\beta, -\gamma) = \varepsilon \eta D_{MM'}^J(-\alpha, -\beta, -\gamma) = \eta D_{-M-M'}^{J*}(-\alpha, -\beta, -\gamma) = \varepsilon D_{MM'}^{J*}(-\alpha, -\beta, -\gamma) = \\ &= \varepsilon D_{-M'-M}^J(-\gamma, -\beta, -\alpha) = \eta D_{M'M}^J(-\gamma, -\beta, -\alpha) = \varepsilon \eta D_{-M'-M}^{J*}(-\gamma, -\beta, -\alpha) = D_{M'M}^{J*}(-\gamma, -\beta, -\alpha), \end{aligned} \quad (2)$$

где

$$\varepsilon = (-1)^{M'-M}, \quad \eta = e^{-i2M\alpha - i2M'\gamma}. \quad (3)$$

Свойства периодичности  $D_{MM'}^J(\alpha, \beta, \gamma)$  по аргументам  $(\alpha, \beta, \gamma)$  имеют вид ( $n$  — целое)

$$\begin{aligned} D_{MM'}^J(\alpha, \beta \pm 2n\pi, \gamma) &= (-1)^{2nJ} D_{MM'}^J(\alpha, \beta, \gamma), \\ D_{MM'}^J(\alpha, \beta \pm (2n+1)\pi, \gamma) &= (-1)^{\pm(2n+1)J-M'} D_{M-M'}^J(\alpha, \beta, -\gamma), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_{MM'}^J(\alpha \pm n\pi, \beta, \gamma) &= (-i)^{\pm 2nM} D_{MM'}^J(\alpha, \beta, \gamma), \\ D_{MM'}^J(\alpha, \beta, \gamma \pm n\pi) &= (-i)^{\pm 2nM'} D_{MM'}^J(\alpha, \beta, \gamma). \end{aligned} \quad (4)$$

Отметим также следующее свойство:

$$D_{MM'}^J(\bar{\alpha}, \beta, \bar{\gamma}) = e^{-iM(\alpha-\bar{\alpha})} D_{MM'}^J(\alpha, \beta, \gamma) e^{-iM'(\gamma-\bar{\gamma})}. \quad (5)$$

Некоторые свойства симметрии функций  $D_{MM'}^J$  могут быть получены как следствие формулы сложения поворотов (см. 1.4.7). Рассмотрим примеры.

а. Переход от матрицы преобразования  $S\{x, y, z\} \rightarrow S'\{x', y', z'\}$  к матрице преобразования  $S\{x, y, z\} \rightarrow S'\{x', -y', -z'\}$  эквивалентен замене углов Эйлера  $(\alpha, \beta, \gamma)$  на  $(\alpha + \pi, \pi - \beta, -\gamma)$ , а с другой стороны, сводится к дополнительному повороту  $R_{x'}$  вокруг оси  $x'$  на угол  $-\pi$ . Поэтому

$$\begin{aligned} D_{MM'}^J(\alpha + \pi, \pi - \beta, -\gamma) &= \hat{R}_{x'} D_{MM'}^J(\alpha, \beta, \gamma) = \sum_{M''} D_{MM''}^J(\alpha, \beta, \gamma) D_{M''M'}^J\left(-\frac{\pi}{2}, -\pi, \frac{\pi}{2}\right) = \\ &= (-1)^J D_{M-M'}^J(\alpha, \beta, \gamma). \end{aligned} \quad (6)$$

б. Переход от матрицы преобразования  $S'\{x, y, z\} \rightarrow S'\{x', y', z'\}$  к матрице преобразования  $S\{x, y, z\} \rightarrow S'\{-x', y', -z'\}$  эквивалентен замене углов Эйлера  $(\alpha, \beta, \gamma)$  на  $(\alpha - \pi, \pi - \beta, \pi - \gamma)$ , а с другой стороны, сводится к дополнительному повороту  $R_{y'}$  вокруг оси  $y'$  на угол  $-\pi$ . Следовательно,

$$\begin{aligned} D_{MM'}^J(\alpha - \pi, \pi - \beta, \pi - \gamma) &= \hat{R}_{y'} D_{MM'}^J(\alpha, \beta, \gamma) = \sum_{M''} D_{MM''}^J(\alpha, \beta, \gamma) D_{M''M'}^J(0, -\pi, 0) = \\ &= (-1)^{J+M'} D_{M-M'}^J(\alpha, \beta, \gamma). \end{aligned} \quad (7)$$

в. Переход от матрицы преобразования  $S\{x, y, z\} \rightarrow S'\{x', y', z'\}$  к матрице преобразования  $S\{x, y, z\} \rightarrow S'\{-x', -y', z'\}$  эквивалентен замене углов Эйлера  $(\alpha, \beta, \gamma)$  на  $(\alpha, \beta, \gamma - \pi)$ , а с другой стороны, сводится к дополнительному повороту  $R_{z'}$  вокруг оси  $z'$  на угол  $-\pi$ . Отсюда

$$D_{MM'}^J(\alpha, \beta, \gamma - \pi) = \hat{R}_{z'} D_{MM'}^J(\alpha, \beta, \gamma) = \sum_{M''} D_{MM''}^J(\alpha, \beta, \gamma) D_{M''M'}^J(0, 0, -\pi) = (-1)^{M'} D_{MM'}^J(\alpha, \beta, \gamma). \quad (8)$$

Отметим, что  $\hat{R}_{z'} \hat{R}_{y'} \hat{R}_{x'} = 1$ .

## 4.5. МАТРИЦА ПОВОРОТА В $(\omega, \Theta, \Phi)$ -ПРЕДСТАВЛЕНИИ

### 1. Определение

В ряде случаев поворот системы координат удобнее описывать не углами Эйлера  $\alpha, \beta, \gamma$ , а углами  $\omega, \Theta, \Phi$ , характеризующими направление оси поворота  $\mathbf{n}(\Theta, \Phi)$  и величину самого поворота (см. 1.4.). Матричные элементы оператора поворота в переменных  $\omega, \Theta, \Phi$  будем обозначать  $U_{MM'}^J(\omega; \Theta, \Phi)$ :

$$U_{MM'}^J(\omega; \Theta, \Phi) \equiv \langle JM | e^{-i\omega \mathbf{n} \cdot \mathbf{J}} | JM' \rangle. \quad (1)$$

При повороте системы координат, задаваемом углами  $\omega, \Theta, \Phi$ , компоненты неприводимого тензора ранга  $J$  преобразуются с помощью  $U_{MM'}^J$  по формуле

$$\mathfrak{M}_{JM'}(\vartheta', \varphi') = \sum_M \mathfrak{M}_{JM}(\vartheta, \varphi) U_{MM'}^J(\omega; \Theta, \Phi). \quad (2)$$

В  $(\omega, \Theta, \Phi)$ -представлении углы  $\vartheta, \varphi$  и  $\vartheta', \varphi'$ , характеризующие произвольное направление в исходной и повернутой системах координат соответственно, связаны соотношениями 1.4 (5), 1.4 (6).

### 2. Явный вид функции $U_{MM'}^J(\omega, \Theta, \Phi)$

а. Произвольный поворот, характеризуемый углами  $\omega, \Theta, \Phi$ , можно представить как результат трех последовательных поворотов.

1. Поворот, при котором ось  $z$  совмещается с направлением  $\mathbf{n}(\Theta, \Phi)$ . Этому повороту соответствуют углы Эйлера  $\alpha = \Phi, \beta = \Theta, \gamma = -\Phi$ .

2. Поворот вокруг направления  $\mathbf{n}$  ( $\Theta$ ,  $\Phi$ ) на угол  $\omega$ , которому соответствуют углы Эйлера  $\alpha = \omega$ ,  $\beta = 0$ ,  $\gamma = 0$ .

3. Поворот  $R$  ( $\Phi$ ,  $-\Theta$ ,  $-\Phi$ ), обратный первому повороту, описывается углами  $\alpha = 0$ ,  $\beta = -\Theta$ ,  $\gamma = -\Phi$ .

Это позволяет связать функции  $U_{MM'}^J(\omega; \Theta, \Phi)$  с  $D$ -функциями Вигнера:

$$U_{MM'}^J(\omega; \Theta, \Phi) = \sum_{lM''} D_{MM''}^J(\Phi, \Theta, -\Phi) e^{-iM''\omega} D_{M''M'}^J(\Phi, -\Theta, -\Phi). \quad (3)$$

С помощью (3) можно найти явный вид функций  $U_{MM'}^J(\omega; \Theta, \Phi)$  при конкретных значениях  $J$ .

б. Функции  $U_{MM'}^J(\omega; \Theta, \Phi)$  можно также построить непосредственно из элементов матрицы  $U_{MM'}^J$  с помощью соотношения 4.6. (10), если воспользоваться связью параметров Кэли—Клейна  $a$ ,  $b$  с углами  $\omega$ ,  $\Theta$ ,  $\Phi$  (см. 1.4. (26)). При этом получаем

$$U_{MM'}^J(\omega; \Theta, \Phi) = \begin{cases} (-iv)^{2J} \left(\frac{u}{-iv}\right)^{(M+M')} e^{-i(M-M')\Phi} \sum_s \frac{\sqrt{(J+M)!(J-M)!(J+M')!(J-M')!}}{s!(s+M+M')!(J-M-s)!(J-M'-s)!} (1-v^{-2})^s, \\ \text{при } M+M' \geq 0, \\ (-iv)^{2J} \left(\frac{u^*}{-iv}\right)^{-(M+M')} e^{-i(M-M')\Phi} \sum_s \frac{\sqrt{(J+M)!(J-M)!(J+M')!(J-M')!}}{s!(s-M-M')!(J+M-s)!(J+M'-s)!} (1-v^{-2})^s, \\ \text{при } M+M' \leq 0, \end{cases} \quad (4)$$

где использованы следующие обозначения:

$$v = \sin \frac{\omega}{2} \sin \Theta, \quad u = \cos \frac{\omega}{2} - i \sin \frac{\omega}{2} \cos \Theta. \quad (5)$$

Сумма распространяется на все целые положительные значения  $s$ , при которых выражения, стоящие под знаком факториала, неотрицательны.

в. Вид функций  $U_{MM'}^J(\omega; \Theta, \Phi)$  можно найти также, производя замену переменных в  $D$ -функции Вигнера. При этом нужно учесть соотношения 1.4. (16), 1.4. (17), связывающие углы  $\omega$ ,  $\Theta$ ,  $\Phi$  с углами Эйлера  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ . Замена переменных приводит к следующему выражению для  $U_{MM'}^J(\omega; \Theta, \Phi)$ :

$$U_{MM'}^J(\omega; \Theta, \Phi) = i^{M-M'} e^{-i(M-M')\Phi} \left( \frac{1 - i \operatorname{tg} \frac{\omega}{2} \cos \Theta}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\omega}{2} \cos^2 \Theta}} \right)^{M+M'} d_{MM'}^J(\xi). \quad (6)$$

Функция  $d_{MM'}^J(\xi)$  определена в 4.3, угол  $\xi$  дается соотношением

$$\sin \frac{\xi}{2} = \sin \frac{\omega}{2} \sin \Theta. \quad (7)$$

г. Функцию  $U_{MM'}^J(\omega; \Theta, \Phi)$  можно разложить по сферическим функциям углов  $\Theta$  и  $\Phi$ . Такое разложение имеет вид

$$U_{MM'}^J(\omega; \Theta, \Phi) = \sum_{\lambda\mu} (-i)^\lambda \frac{2\lambda+1}{2J+1} \chi_\lambda^J(\omega) C_{J\lambda\mu}^{JM'} \sqrt{\frac{4\pi}{2\lambda+1}} Y_{\lambda\mu}(\Theta, \Phi), \quad (8)$$

где функции  $\chi_\lambda^J(\omega)$  — обобщенные характеры порядка  $\lambda$  неприводимого представления ранга  $J$ . Явный вид и свойства этих функций даны в 4.15.

Из формулы (8), видно, что вся зависимость элементов матрицы  $U_{MM'}^J(\omega; \Theta, \Phi)$  от индексов  $M$  и  $M'$  определяется коэффициентами Клебша—Гордана.

### 3. Дифференциальное уравнение

Функции  $U_{MM'}^J(\omega; \Theta, \Phi)$  являются собственными функциями трех операторов  $\hat{J}_z$ ,  $\hat{J}'_z$  и  $\hat{J}^2$ , соответствующими собственным значениям  $-M$ ,  $-M'$  и  $J(J+1)$ . Эти операторы в переменных  $\omega$ ,  $\Theta$ ,  $\Phi$  имеют вид

$$\hat{J}_z = -i \left[ \cos \Theta \frac{\partial}{\partial \omega} - \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \frac{\omega}{2} \sin \Theta \frac{\partial}{\partial \Theta} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial}{\partial \Phi} \right], \quad (9)$$

$$\hat{J}'_z = -i \left[ \cos \Theta \frac{\partial}{\partial \omega} - \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \frac{\omega}{2} \sin \Theta \frac{\partial}{\partial \Theta} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial}{\partial \Phi} \right], \quad (10)$$

$$\hat{J}^2 = - \left[ \frac{\partial^2}{\partial \omega^2} + \operatorname{ctg} \frac{\omega}{2} \frac{\partial}{\partial \omega} + \frac{1}{4 \sin^2 \frac{\omega}{2}} \left( \frac{\partial^2}{\partial \Theta^2} + \operatorname{ctg} \Theta \frac{\partial}{\partial \Theta} + \frac{1}{\sin^2 \Theta} \frac{\partial^2}{\partial \Phi^2} \right) \right]. \quad (11)$$

Таким образом, функции  $U_{MM'}^J(\omega; \Theta, \Phi)$  являются решениями дифференциального уравнения II порядка

$$[\hat{J}^2 - J(J+1)] U_{MM'}^J(\omega; \Theta, \Phi) = 0 \quad (12)$$

с граничными условиями

$$U_{MM'}^J(0; \Theta, \Phi) = \delta_{MM'}, \quad (13)$$

$$\frac{\partial}{\partial \Phi} U_{MM'}^J(\omega; \Theta, \Phi) \Big|_{\Theta=0} = \frac{\partial}{\partial \Phi} U_{MM'}^J(\omega; \Theta, \Phi) \Big|_{\Theta=\pi} = 0.$$

#### 4. Ортогональность и полнота

Совокупность функций  $U_{MM'}^J(\omega; \Theta, \Phi)$  при всех  $J$ , целых и полужелых, образует полную систему ортогональных функций трех переменных  $\omega; \Theta, \Phi$ , заданных в области

$$0 \leq \Theta \leq \pi, \quad 0 \leq \Phi < 2\pi, \quad 0 \leq \omega < 2\pi, \quad (14)$$

объем которой равен  $16\pi^2$ .

а. Условие ортогональности и нормировки

$$4 \int_0^{2\pi} d\omega \sin^2 \frac{\omega}{2} \int_0^\pi d\Theta \sin \Theta \int_0^{2\pi} d\Phi U_{M_1 M_1'}^{J_1*}(\omega; \Theta, \Phi) U_{M_2 M_2'}^{J_2}(\omega; \Theta, \Phi) = \frac{16\pi^2}{2J_1+1} \delta_{J_1 J_2} \delta_{M_1 M_2} \delta_{M_1' M_2'}. \quad (15)$$

б. Условие полноты

$$\sum_{J=0, 1/2, 1, \dots}^{\infty} \frac{2J+1}{16\pi^2} \sum_{MM'} U_{MM'}^J(\omega; \Theta, \Phi) U_{MM'}^{J*}(\tilde{\omega}; \tilde{\Theta}, \tilde{\Phi}) = \frac{\delta(\Phi - \tilde{\Phi}) \delta(\Theta - \tilde{\Theta}) \delta(\omega - \tilde{\omega})}{4 \sin \Theta \sin^2 \frac{\omega}{2}}. \quad (16)$$

#### 5. Свойства $U_{MM'}^J(\omega, \Theta, \Phi)$

а. Матрица обратного преобразования

$$[U^{-1}(\omega; \Theta, \Phi)]_{MM'}^J = U_{MM'}^J(-\omega; \Theta, \Phi) = U_{MM'}^J(\omega; \pi - \Theta, \pi + \Phi). \quad (17)$$

б. Комплексное сопряжение

$$U_{MM'}^{J*}(\omega; \Theta, \Phi) = U_{M'M}^J(\omega; \pi - \Theta, \pi + \Phi) = U_{M'M}^J(-\omega; \Theta, \Phi). \quad (18)$$

в. Изменение знака аргументов (четность)

$$U_{MM'}^J(-\omega; \Theta, \Phi) = (-1)^{M-M'} U_{-M'-M}^J(\omega; \Theta, \Phi),$$

$$U_{MM'}^J(\omega; -\Theta, \Phi) = (-1)^{M-M'} U_{MM'}^J(\omega; \Theta, \Phi),$$

$$U_{MM'}^J(\omega; \Theta, -\Phi) = U_{M'M}^J(\omega; \Theta, \Phi). \quad (19)$$

г. Периодичность

$$U_{MM'}^J(\omega + 4\pi; \Theta, \Phi) = U_{MM'}^J(\omega; \Theta, \Phi),$$

$$U_{MM'}^J(\omega; \Theta + 2\pi, \Phi) = U_{MM'}^J(\omega; \Theta, \Phi),$$

$$U_{MM'}^J(\omega; \Theta, \Phi + 2\pi) = U_{MM'}^J(\omega; \Theta, \Phi). \quad (20)$$

Изменение аргументов на полупериод

$$\begin{aligned}
 U_{MM'}^J(\omega + 2\pi; \Theta, \Phi) &= (-1)^{2J} U_{MM'}^J(\omega; \Theta, \Phi), & U_{MM'}^J(2\pi - \omega; \Theta, \Phi) &= (-1)^{M+M'} U_{-M'-M}^J(\omega; \Theta, \Phi), \\
 U_{MM'}^J(\omega; \Theta + \pi, \Phi) &= (-1)^{M-M'} U_{-M'-M}^J(\omega; \Theta, \Phi), & U_{MM'}^J(\omega; \pi - \Theta, \Phi) &= U_{-M'-M}^J(\omega; \Theta, \Phi), \\
 U_{MM'}^J(\omega; \Theta, \Phi + \pi) &= (-1)^{M-M'} U_{MM'}^J(\omega; \Theta, \Phi), & U_{MM'}^J(\omega; \Theta, \pi - \Phi) &= (-1)^{M-M'} U_{MM'}^J(\omega; \Theta, \Phi),
 \end{aligned} \tag{21}$$

д. Перестановка индексов  $M, M'$  и изменение их знака

$$\begin{aligned}
 U_{M'M}^J(\omega; \Theta, \Phi) &= U_{MM'}^J(\omega; \Theta, -\Phi) = U_{MM'}^{J*}(\omega; \pi - \Theta, \pi + \Phi), \\
 U_{-M-M'}^J(\omega; \Theta, \Phi) &= (-1)^{M-M'} U_{MM'}^J(\omega; \pi - \Theta, \pi + \Phi), \\
 U_{MM'}^J(\omega; \Theta, \Phi) &= (-1)^{J-M'} U_{-MM'}^J(\omega_1; \Theta_1, \Phi_1) = (-1)^{J+M} U_{-M-M'}^J(\omega_1; \Theta_1, \Phi_1),
 \end{aligned} \tag{22}$$

где углы  $\omega, \Theta, \Phi$  и  $\omega_1, \Theta_1, \Phi_1$  связаны соотношениями

$$\cos \frac{\omega_1}{2} = \sin \frac{\omega}{2} \sin \Theta \sin \Phi,$$

$$\sin \frac{\omega_1}{2} \cos \Theta_1 = -\sin \frac{\omega}{2} \sin \Theta \cos \Phi, \tag{23}$$

$$\operatorname{ctg} \Phi_1 = -\operatorname{tg} \frac{\omega}{2} \cos \Theta;$$

$$\cos \frac{\omega}{2} = \sin \frac{\omega_1}{2} \sin \Theta_1 \sin \Phi_1,$$

$$\sin \frac{\omega}{2} \cos \Theta = -\sin \frac{\omega_1}{2} \sin \Theta_1 \cos \Phi_1, \tag{24}$$

$$\operatorname{ctg} \Phi = -\operatorname{tg} \frac{\omega_1}{2} \cos \Theta_1,$$

$$\sin^2 \frac{\omega_1}{2} \sin^2 \Theta_1 + \sin^2 \frac{\omega}{2} \sin^2 \Theta = 1. \tag{25}$$

Значительное число соотношений для функций  $D_{MM'}^J(\alpha, \beta, \gamma)$  остается справедливым и для функций  $U_{MM'}^J(\omega; \Theta, \Phi)$ . Так, например, разложение Клебша—Гордана

$$U_{M_1 M_1'}^{J_1}(\omega; \Theta, \Phi) U_{M_2 M_2'}^{J_2}(\omega; \Theta, \Phi) = \sum_{JM} C_{J_1 M_1 J_2 M_2}^{JM} U_{MM'}^J(\omega; \Theta, \Phi) C_{J_1 M_1' J_2 M_2'}^{JM'} \tag{26}$$

аналогично разложению 4.6.(1).

Теорема сложения

$$\sum_{M''} U_{MM''}^J(\omega_2; \Theta_2, \Phi_2) U_{M''M'}^J(\omega_1; \Theta_1, \Phi_1) = U_{MM'}^J(\omega; \Theta, \Phi) \tag{27}$$

аналогична теореме 4.7.(1). В соотношении (27) все углы  $\omega_1, \Theta_1, \Phi_1, \omega_2, \Theta_2, \Phi_2$ , и  $\omega, \Theta, \Phi$  отсчитываются от положения исходной системы координат и связаны соотношением 1.4.(76).

## 6. Явный вид функций $U_{MM'}^J(\omega; \Theta, \Phi)$

при частных значениях индексов и аргументов

1. Ось поворота  $\mathbf{n}(\Theta, \Phi)$  совпадает с одной из координатных осей:

а) с осью  $x$  ( $\Theta = \frac{\pi}{2}, \Phi = 0$ )

$$U_{MM'}^J\left(\omega; \frac{\pi}{2}, 0\right) = D_{MM'}^J\left(\frac{\pi}{2}, \omega, -\frac{\pi}{2}\right) = (-i)^{M-M'} d_{MM'}^J(\omega), \tag{28}$$

б) с осью  $y$  ( $\Theta = \frac{\pi}{2}, \Phi = \frac{\pi}{2}$ )

$$U_{MM'}^J\left(\omega; \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) = D_{MM'}^J(0, \omega, 0) = d_{MM'}^J(\omega), \tag{29}$$

в) с осью  $z$  ( $\Theta = 0$ )

$$U_{MM'}^J(\omega; 0, \Phi) = \delta_{MM'} e^{-iM\omega}. \quad (30)$$

2. Малый поворот вокруг направления  $\mathbf{n}$  ( $\Theta, \Phi$ ) ( $\omega \ll \frac{\pi}{2}$ ):

$$U_{MM'}^J(\omega; \Theta, \Phi) = \delta_{MM'} (1 - i\omega M \cos \Theta) - \frac{i\omega}{2} e^{-i\Phi} \sin \Theta \sqrt{(J-M')(J+M)} \delta_{M, M'+1} - \\ - \frac{i\omega}{2} e^{i\Phi} \sqrt{(J-M)(J+M')} \delta_{MM'-1}. \quad (31)$$

3. Явный вид  $U_{MM'}^J(\omega; \Theta, \Phi)$  при  $M, M' = \pm J$ :

$$U_{JJ}^J(\omega; \Theta, \Phi) = \left( \cos \frac{\omega}{2} - i \sin \frac{\omega}{2} \cos \Theta \right)^{2J}, \quad U_{-JJ}^J(\omega; \Theta, \Phi) = \left( \cos \frac{\omega}{2} + i \sin \frac{\omega}{2} \cos \Theta \right)^{2J}, \\ U_{J-J}^J(\omega; \Theta, \Phi) = \left( -i \sin \frac{\omega}{2} \sin \Theta e^{-i\Phi} \right)^{2J}, \quad U_{-JJ}^J(\omega; \Theta, \Phi) = \left( -i \sin \frac{\omega}{2} \sin \Theta e^{i\Phi} \right)^{2J}. \quad (32)$$

4. Явный вид  $U_{MM'}^J(\omega, \Theta, \Phi)$  при  $J = 1/2, 1, 3/2, 2$  дан в разделе 4.22.

#### 4.6. СУММЫ ПРОИЗВЕДЕНИЙ $D$ -ФУНКЦИЙ С ОДИНАКОВЫМИ АРГУМЕНТАМИ.

1. Разложение Клебша—Гордана. Произведение двух  $D$ -функций  $D_{M_1 N_1}^{J_1}(\alpha, \beta, \gamma)$  и  $D_{M_2 N_2}^{J_2}(\alpha, \beta, \gamma)$  может быть записано в виде следующей суммы, называемой *рядом Клебша—Гордана*:

$$D_{M_1 N_1}^{J_1}(\alpha, \beta, \gamma) D_{M_2 N_2}^{J_2}(\alpha, \beta, \gamma) = \sum_{J=|J_1-J_2|}^{J_1+J_2} \sum_{MN} C_{J_1 M_1 J_2 M_2}^{JM} D_{MN}^J(\alpha, \beta, \gamma) C_{J_1 N_1 J_2 N_2}^{JN}, \quad (1)$$

где  $C_{J_1 M_1 J_2 M_2}^{JM}$  — коэффициенты Клебша—Гордана (см. гл. 7). В сумме (1) содержится  $2j+1$  член, где  $j = \min\{J_1, J_2\}$ . Разложение (1) является частым случаем разложения произвольной функции по  $D$ -функциям Вигнера (см. 4.10).

2. С помощью разложения Клебша—Гордана (1) и свойств ортогональности коэффициентов Клебша—Гордана 7.1.(8) можно вычислять некоторые суммы произведений  $D$ -функций с одинаковыми аргументами. В формулах, приведенных ниже, величина  $\{J_1 J_2 J_3\}$  означает  $3j$ -символ, определенный соотношением

$$\{J_1 J_2 J_3\} = \begin{cases} 1, & \text{если } J_1 + J_2 + J_3 - \text{целое и } |J_1 - J_2| \leq J_3 \leq J_1 + J_2, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \quad (2)$$

Величина  $\{J_1 J_2 J_3\}$  симметрична относительно любой перестановки аргументов  $J_1, J_2, J_3$ .

$$\sum_{\substack{M_1 M_2 \\ N_1 N_2}} C_{J_1 M_1 J_2 M_2}^{JM} D_{M_1 N_1}^{J_1}(\alpha, \beta, \gamma) D_{M_2 N_2}^{J_2}(\alpha, \beta, \gamma) C_{J_1 N_1 J_2 N_2}^{JN} = \delta_{JJ'} \{J_1 J_2 J\} D_{MN}^J(\alpha, \beta, \gamma). \quad (3)$$

Формула (3) является обратной формуле (1)

$$\sum_{J=|J_1-J_2|}^{J_1+J_2} \sum_{M_1 M} C_{J_1 M_1 J_2 M_2}^{JM} D_{M_1 N_1}^{J_1}(\alpha, \beta, \gamma) D_{MN}^J(\alpha, \beta, \gamma) C_{J_1 N_1 J_2 N_2}^{JN} = \delta_{N_1 N_1'} D_{M_1 N_2}^{J_2}(\alpha, \beta, \gamma), \quad (4)$$

$$\sum_{N_1 N_2} D_{M_1 N_1}^{J_1}(\alpha, \beta, \gamma) D_{M_2 N_2}^{J_2}(\alpha, \beta, \gamma) C_{J_1 N_1 J_2 N_2}^{JN} = C_{J_1 M_1 J_2 M_2}^{JM} D_{MN}^J(\alpha, \beta, \gamma), \quad (5)$$

$$\sum_{N_1 N_2 N} D_{M' N}^{J_1}(\alpha, \beta, \gamma) D_{M_1 N_1}^{J_1}(\alpha, \beta, \gamma) D_{M_2 N_2}^{J_2}(\alpha, \beta, \gamma) C_{J_1 N_1 J_2 N_2}^{JN} = C_{J_1 M_1 J_2 M_2}^{JM} \delta_{MM'} \quad (6)$$

$$\sum_{\substack{M_1 M_2 M \\ N_1 N_2 N}} C_{J_1 M_1 J_2 M_2}^{JM} D_{MN}^{J_1}(\alpha, \beta, \gamma) D_{M_1 N_1}^{J_1}(\alpha, \beta, \gamma) D_{M_2 N_2}^{J_2}(\alpha, \beta, \gamma) C_{J_1 N_1 J_2 N_2}^{JN} = \delta_{JJ'} \delta_{NN'} \{J_1 J_2 J\}, \quad (7)$$

$$\sum_{\substack{M_1 M_2 M_3 \\ N_1 N_2 N_3}} C_{J_1 M_1 J_2 M_2}^{JM} C_{J_2 M_2 J_3 M_3}^{J_2 M_2} D_{M_1 N_1}^{J_1}(\alpha, \beta, \gamma) D_{M_2 N_2}^{J_2}(\alpha, \beta, \gamma) D_{M_3 N_3}^{J_3}(\alpha, \beta, \gamma) C_{J_1 N_1 J_2 N_2}^{JN} C_{J_2 N_2 J_3 N_3}^{J_2 N_2} = \\ = \delta_{JJ'} \delta_{J_2 J_2'} \{J_1 J_2 J_{12}\} \{J_{12} J_3 J\} D_{MN}^J(\alpha, \beta, \gamma). \quad (8)$$

3. Формулы типа (3) и (8) допускают обобщение на случай произведения любого числа  $D$ -функций

$$\sum_{\substack{m_1, \dots, m_k \\ n_1, \dots, n_k}} \prod_{i=1}^k C_{J_{i-1} M_{i-1} j_i m_i}^{J_i M_i} D_{m_i n_i}^{j_i}(\alpha, \beta, \gamma) C_{J_i N_i}^{J_i N_i} = D_{M_k N_k}^{J_k}(\alpha, \beta, \gamma) \prod_{i=1}^k \delta_{J_i j_i} \{j_i J_{i-1} J_i\}, \quad (9)$$

где  $J_i (i = 1, 2, \dots, k)$  — любые значения моментов, совместимые с правилами векторного сложения

$$J_i = j_1 + j_2 + \dots + j_i, \quad M_i = m_1 + m_2 + \dots + m_i, \quad N_i = n_1 + n_2 + \dots + n_i, \quad (i = 1, 2, \dots, k).$$

При этом предполагается  $J_0 = J'_0 = M_0 = N_0 = 0$ . В частности, полагая в (9)  $j_1 = j_2 = \dots = j_k = 1/2$ ,  $J_{i+1} = J_i + (1/2)$ , получаем для целого или полуцелого  $J \equiv J_k = k/2$

$$\begin{aligned} & \sum_{\substack{m_1 + \dots + m_k = M \\ n_1 + \dots + n_k = N}} D_{m_1 n_1}^{1/2}(\alpha, \beta, \gamma) D_{m_2 n_2}^{1/2}(\alpha, \beta, \gamma) \dots D_{m_k n_k}^{1/2}(\alpha, \beta, \gamma) = \\ & = \frac{(2J)!}{\sqrt{(J+M)! (J-M)! (J+N)! (J-N)!}} D_{MN}^J(\alpha, \beta, \gamma). \end{aligned} \quad (10)$$

Аналогично, полагая в (9)  $j_1 = j_2 = \dots = j_k = 1$ ,  $J_{i+1} = J_i + 1$ , получаем для целого  $J \equiv J_k = k$

$$\begin{aligned} & \sum_{\substack{m_1 + \dots + m_k = M \\ n_1 + \dots + n_k = N}} \sqrt{\prod_{i,j=1}^k (1 + \delta_{m_i 0})(1 + \delta_{n_j 0})} D_{m_1 n_1}^1(\alpha, \beta, \gamma) D_{m_2 n_2}^1(\alpha, \beta, \gamma) \dots D_{m_k n_k}^1(\alpha, \beta, \gamma) = \\ & = \frac{(2J)!}{\sqrt{(J+M)! (J-M)! (J+N)! (J-N)!}} D_{MN}^J(\alpha, \beta, \gamma). \end{aligned} \quad (11)$$

Формулы типа (10), (11) могут быть использованы для вычисления  $D$ -функций Вигнера. Так, учитывая, что индексы  $m, n$  в (10) могут принимать только значения  $\pm 1/2$ , и вводя обозначения

$$\left. \begin{aligned} D_{1/2 \ 1/2}^{1/2}(\alpha, \beta, \gamma) &\equiv a, & D_{1/2 \ -1/2}^{1/2}(\alpha, \beta, \gamma) &\equiv -b^*, \\ D_{-1/2 \ 1/2}^{1/2}(\alpha, \beta, \gamma) &\equiv b, & D_{-1/2 \ -1/2}^{1/2}(\alpha, \beta, \gamma) &\equiv a^*, \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

где  $a, b$  — параметры Кэли—Клейна (см. 1.4.), получаем из (10) выражение для  $D$ -функций Вигнера в виде

$$D_{MN}^J(\alpha, \beta, \gamma) = \sqrt{(J+M)! (J-M)! (J+N)! (J-N)!} \sum_{p, q, r, s} \frac{(a)^p (b)^q (a^*)^r (-b^*)^s}{p! q! r! s!}. \quad (13)$$

Здесь сумма берется по всем целочисленным значениям  $p, q, r, s$ , удовлетворяющим условиям

$$\begin{aligned} p + q + r + s &= 2J, \\ p - q - r + s &= 2M, \\ p + q - r - s &= 2N. \end{aligned} \quad (14)$$

Условия (14) приводят к тому, что только одно из чисел  $p, q, r$  и  $s$  является независимым, так что сумма (13) — однократная. Из (13) можно получить приведенные ранее выражения для  $D$ -функций 4.3. (2)—4.3. (5). Например, формула 4.3. (2) получается из (13), если в качестве независимой переменной суммирования выбрать  $r$ , формула 4.3. (3) — если независимой переменной суммирования является  $p$ , и т. д.

4. Условие равенства единице определителя, составленного из функции  $D_{MN}^J(\alpha, \beta, \gamma)$  (см. 4.1. (7)), может быть записано в виде следующей суммы:

$$\sum_P (-1)^P D_{-J M_1}^J(\alpha, \beta, \gamma) D_{-J+1 M_2}^J(\alpha, \beta, \gamma) \dots D_{J M_{2J+1}}^J(\alpha, \beta, \gamma) = 1, \quad (15)$$

где индексы  $M_1, M_2, \dots, M_{2J+1}$  получаются всеми возможными перестановками  $P$  из последовательности  $-J, -J+1, \dots, J-1, J$ . Суммирование в (15) производится по всем перестановкам  $P$ ,  $(-1)^P$  означает  $+1$  для четных и  $-1$  для нечетных перестановок.

#### 4.7. ФОРМУЛА СЛОЖЕНИЯ ДЛЯ $D$ -ФУНКЦИЙ ВИГНЕРА

1. Произведем два последовательных поворота системы координат  $S \{x, y, z\} \rightarrow S' \{x', y', z'\} \rightarrow S'' \{x'', y'', z''\}$ . Пусть первый поворот  $S \rightarrow S'$  характеризуется углами Эйлера  $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ , второй поворот  $S' \rightarrow S''$  — углами Эйлера  $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ , а результирующий по-



ворот  $S \rightarrow S''$  — углами Эйлера  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ . Выразим  $D$ -функции от углов результирующего поворота через  $D$ -функции от углов первого и второго поворотов. При этом имеются 2 возможности (см. 1.4.7.).

а. Если оба поворота производятся по схеме (В) (см. 1.4.1), и углы результирующего поворота  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ , так же как углы первого поворота  $\alpha_1$ ,  $\beta_1$ ,  $\gamma_1$  и второго поворота  $\alpha_2$ ,  $\beta_2$ ,  $\gamma_2$ , отсчитываются от положения исходной системы координат  $S \{x, y, z\}$ , то оператор результирующего поворота дается формулой 1.4.(64), и формула сложения имеет вид

$$\sum_{M''=-J}^J D_{MM''}^J(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2) D_{M''M'}^J(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1) = D_{MM'}^J(\alpha, \beta, \gamma). \quad (1)$$

При этом углы  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  выражаются через углы  $\alpha_1$ ,  $\beta_1$ ,  $\gamma_1$  и  $\alpha_2$ ,  $\beta_2$ ,  $\gamma_2$  по формулам 1.4. (66)—1.4. (70).

б. Если оба поворота производятся по схеме (В), но углы  $\alpha_1$ ,  $\beta_1$ ,  $\gamma_1$  и  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  отсчитываются от положения исходной системы координат  $S \{x, y, z\}$ , а углы  $\alpha_2$ ,  $\beta_2$ ,  $\gamma_2$  — от положения системы  $S' \{x', y', z'\}$  или, если последовательные повороты производятся по схеме А (см. 1.4.1), то оператор результирующего поворота дается формулой 1.4. (73), и формула сложения имеет вид

$$\sum_{M''=-J}^J D_{MM''}^J(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1) D_{M''M'}^J(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2) = D_{MM'}^J(\alpha, \beta, \gamma). \quad (2)$$

При этом углы  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  выражаются через углы  $\alpha_1$ ,  $\beta_1$ ,  $\gamma_1$  и  $\alpha_2$ ,  $\beta_2$ ,  $\gamma_2$ , по формулам, получаемым из 1.4. (66)—1.4. (70) путем замены индексов  $1 \rightleftharpoons 2$ .

Частные случаи формул (1) и (2):

$$\sum_{M''=-J}^J D_{MM''}^J(\alpha, \beta_1, \varphi) D_{M''M'}^J(-\varphi, \beta_2, \gamma) = D_{MM'}^J(\alpha, \beta_1 + \beta_2, \gamma), \quad (3)$$

$\varphi$  — произвольное;

$$\sum_{M''=-J}^J D_{MM''}^J(\alpha, \beta, \gamma) D_{M''M'}^{J*}(\alpha, \beta, \gamma) = \sum_{M''=-J}^J D_{MM''}^J(\alpha, \beta, \gamma) D_{M''M'}^J(-\gamma, -\beta, -\alpha) = D_{MM'}^J(0, 0, 0) = \delta_{MM'}. \quad (4)$$

2. Формула сложения для функций  $d_{MM'}^J(\beta)$  имеет вид

$$\sum_{M''=-J}^J d_{MM''}^J(\beta_1) d_{M''M'}^J(\beta_2) e^{-iM''\varphi} = e^{-iM\alpha} d_{MM'}^J(\beta) e^{-iM'\gamma}, \quad (5)$$

где

$$\begin{aligned} \operatorname{ctg} \alpha &= \cos \beta_1 \operatorname{ctg} \varphi + \operatorname{ctg} \beta_2 \frac{\sin \beta_1}{\sin \varphi}, \\ \cos \beta &= \cos \beta_1 \cos \beta_2 - \sin \beta_1 \sin \beta_2 \cos \varphi, \\ \operatorname{ctg} \gamma &= \cos \beta_2 \operatorname{ctg} \varphi + \operatorname{ctg} \beta_1 \frac{\sin \beta_2}{\sin \varphi}. \end{aligned} \quad (6)$$

Рассмотрим некоторые частные случаи формул (5) и (6). Если  $\varphi = 0$  и  $\beta_1 + \beta_2 < \pi$ , то  $\alpha = 0$ ,  $\beta = \beta_1 + \beta_2$ ,  $\gamma = 0$ , поэтому

$$\sum_{M''=-J}^J d_{MM''}^J(\beta_1) d_{M''M'}^J(\beta_2) = d_{MM'}^J(\beta_1 + \beta_2). \quad (7)$$

Если  $\varphi = 0$  и  $\beta_1 + \beta_2 > \pi$ , то  $\alpha = \pi$ ,  $\beta = 2\pi - \beta_1 - \beta_2$ ,  $\gamma = \pi$ , поэтому

$$\sum_{M''=-J}^J d_{MM''}^J(\beta_1) d_{M''M'}^J(\beta_2) = (-1)^{M+M'} d_{MM'}^J(2\pi - \beta_1 - \beta_2). \quad (8)$$

Если  $\varphi = \pi$ ,  $\beta_1 \geq \beta_2$ , то  $\alpha = 0$ ,  $\beta = \beta_1 - \beta_2$ ,  $\gamma = \pi$ , а следовательно,

$$\sum_{M''=-J}^J (-1)^{M''-M'} d_{MM''}^J(\beta_1) d_{M''M'}^J(\beta_2) = d_{MM'}^J(\beta_1 - \beta_2). \quad (9)$$

В частности, при  $\beta_1 = \beta_2$  из (9) следует

$$\sum_{M''=-J}^J (-1)^{M''-M'} d_{MM''}^J(\beta) d_{M''M'}^J(\beta) = \delta_{MM'}. \quad (10)$$

Если  $\varphi = \frac{\pi}{2}$ , то формула (5) принимает вид

$$\sum_{M''=-J}^J (-i)^{M''} d_{MM''}^J(\beta_1) d_{M''M'}^J(\beta_2) = e^{-iM\alpha} d_{MM'}^J(\beta) e^{-iM'\gamma}, \quad (11)$$

где

$$\begin{aligned} \operatorname{ctg} \alpha &= \operatorname{ctg} \beta_2 \sin \beta_1, \\ \cos \beta &= \cos \beta_1 \cos \beta_2, \\ \operatorname{ctg} \gamma &= \operatorname{ctg} \beta_1 \sin \beta_2. \end{aligned} \quad (12)$$

3. Полагая в (1) углы  $\alpha_1 = \alpha_2$ ,  $\beta_1 = \beta_2$ ,  $\gamma_1 = \gamma_2$  и используя разложение Клебша—Гордана 4.6 (1), получаем

$$\sum_{J=0, 1, \dots}^{2j} \sum_{m''} C_{jm''}^{Jm+m''} D_{m+m''}^J(\alpha, \beta, \gamma) C_{jm''}^{Jm'+m''} = D_{mm'}^j(\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\gamma}), \quad (13)$$

где

$$\begin{aligned} \cos \bar{\beta} &= \cos^2 \beta - \sin^2 \beta \cos(\alpha + \gamma), \\ \operatorname{tg} \frac{\alpha + \gamma}{2} &= \frac{\operatorname{tg} \frac{\alpha + \gamma}{2}}{\cos \beta}, \\ \operatorname{tg}(\bar{\alpha} - \alpha) &= \operatorname{tg}(\bar{\gamma} - \gamma) = \frac{\operatorname{tg} \frac{\alpha + \gamma}{2}}{\cos \beta}. \end{aligned} \quad (14)$$

В частности, при  $\alpha = \gamma = 0$  имеем  $\bar{\alpha} = \bar{\gamma} = 0$ ,  $\bar{\beta} = 2\beta$ , поэтому

$$\sum_{J=0, 1, \dots}^{2j} \sum_{m''} C_{jm''}^{Jm+m''} d_{m+m''}^J(\beta) C_{jm''}^{Jm'+m''} = d_{mm'}^j(2\beta). \quad (15)$$

4. Из формулы (5) можно получить интегральное представление для произведения двух функций  $d_{MM'}^J$  (теорема умножения)

$$d_{MM''}^J(\beta_1) d_{M''M'}^J(\beta_2) = \frac{1}{4\pi} \int_{-2\pi}^{2\pi} e^{i(M''\varphi - M\alpha - M'\gamma)} d_{MM'}^J(\beta) d\varphi, \quad (16)$$

где  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  выражаются через  $\beta_1$ ,  $\beta_2$  и  $\varphi$  по формулам (6).

5. С помощью формул сложения (1), (2) можно вычислять некоторые суммы произведений  $D$ -функций с разными аргументами. Кроме приведенных выше сумм (1) и (2), укажем некоторые, сводящиеся к характеристам группы вращений (см. 4.14):

$$\sum_{MM'} D_{MM'}^J(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1) D_{M'M}^J(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2) \equiv \chi^J(R_1 R_2) = \chi^J(R_2 R_1) = \frac{\sin \left[ (2J+1) \frac{\omega}{2} \right]}{\sin \frac{\omega}{2}}, \quad (17)$$

где

$$\begin{aligned} \cos \frac{\omega}{2} &= \cos \frac{\beta_1}{2} \cos \frac{\beta_2}{2} \cos \frac{\alpha_1 + \gamma_1 + \alpha_2 + \gamma_2}{2} - \sin \frac{\beta_1}{2} \sin \frac{\beta_2}{2} \cos \frac{\alpha_1 - \gamma_1 - \alpha_2 + \gamma_2}{2} = \\ &= \cos \frac{\beta_1 + \beta_2}{2} \cos \frac{\alpha_1 + \gamma_2}{2} \cos \frac{\gamma_1 + \alpha_2}{2} - \cos \frac{\beta_1 - \beta_2}{2} \sin \frac{\alpha_1 + \gamma_2}{2} \sin \frac{\gamma_1 + \alpha_2}{2}. \end{aligned} \quad (18)$$

$$\sum_{MM'} D_{MM'}^J(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1) D_{MM'}^{J*}(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2) \equiv \chi^J(R_1 R_2^{-1}) = \chi^J(R_1^{-1} R_2) = \frac{\sin \left[ (2J+1) \frac{\omega'}{2} \right]}{\sin \frac{\omega'}{2}}, \quad (19)$$

где

$$\begin{aligned} \cos \frac{\omega'}{2} &= \cos \frac{\beta_1}{2} \cos \frac{\beta_2}{2} \cos \frac{\alpha_1 + \gamma_1 - \alpha_2 - \gamma_2}{2} + \sin \frac{\beta_1}{2} \sin \frac{\beta_2}{2} \cos \frac{\alpha_1 - \gamma_1 - \alpha_2 + \gamma_2}{2} = \\ &= \cos \frac{\beta_1 - \beta_2}{2} \cos \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2} \cos \frac{\gamma_1 - \gamma_2}{2} - \cos \frac{\beta_1 + \beta_2}{2} \sin \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2} \sin \frac{\gamma_1 - \gamma_2}{2}. \end{aligned} \quad (20)$$

Выражение (20) получается из (18) заменой  $(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2) \rightarrow (-\gamma_2, -\beta_2, -\alpha_2)$ . Путем последовательного применения формул (1), (2) можно вычислять также суммы, сводящиеся к характеристам от произведений трех и более поворотов, типа  $\chi^J(R_1 R_2 R_3)$  и т. д.

6. Отметим также следующую сумму произведений трех  $d$ -функций от разных аргументов [89], не сводящуюся к формуле сложения:

$$\sum_{J=\min}^{\infty} (2J+1) d_{M_1 M_2}^J(\beta_3) d_{M_2 M_3}^J(\beta_1) d_{M_3 M_1}^J(\beta_2) = \frac{2\theta(B)}{\pi\sqrt{B}} \cos\left(\sum_{i=1}^3 M_i \delta_i\right), \quad (21)$$

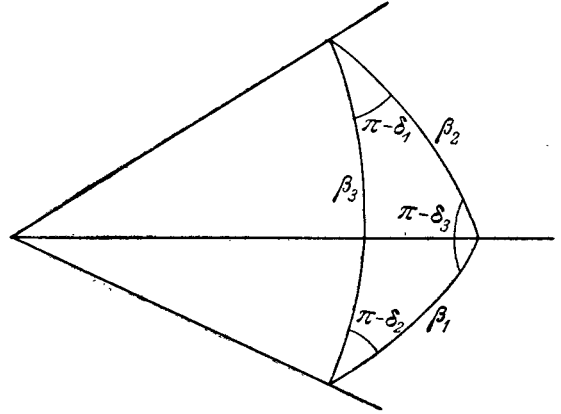


Рис. 4.1. Геометрическое истолкование углов, входящих в формулу 4.7 (21).

где суммирование проводится от минимального  $J$ , допустимого значениями проекций  $M_1, M_2, M_3$ , до бесконечности,

$$B = \begin{vmatrix} 1 & \cos \beta_3 & \cos \beta_2 \\ \cos \beta_3 & 1 & \cos \beta_1 \\ \cos \beta_2 & \cos \beta_1 & 1 \end{vmatrix}, \quad (22)$$

$$\theta(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x > 0, \\ 0 & \text{при } x < 0. \end{cases} \quad (23)$$

Углы  $\delta_1, \delta_2, \delta_3$  могут быть вычислены по формуле

$$\cos \delta_i = \frac{\cos \beta_j \cos \beta_k - \cos \beta_i}{\sin \beta_j \sin \beta_k}, \quad (i \neq j \neq k). \quad (24)$$

Они обладают следующим свойством

$$\frac{\sin \beta_i}{\sin \delta_i} = \frac{\sin \beta_j}{\sin \delta_j}, \quad (i, j = 1, 2, 3). \quad (25)$$

Геометрический смысл углов  $\delta_1, \delta_2, \delta_3$  и их связь с углами  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$  пояснены на рис. 4.1

#### 4.8. АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ СООТНОШЕНИЯ ДЛЯ $D_{MM'}^J(\alpha, \beta, \gamma)$ С РАЗНЫМИ ИНДЕКСАМИ

##### 1. Рекуррентные формулы, связывающие $D_{MM'}^J$ и $D_{MM'}^{J+1}$

$$\begin{aligned} \cos \beta D_{MM'}^J(\alpha, \beta, \gamma) &= \frac{\sqrt{(J^2 - M^2)(J^2 - M'^2)}}{J(2J+1)} D_{MM'}^{J-1}(\alpha, \beta, \gamma) + \frac{MM'}{J(J+1)} D_{MM'}^J(\alpha, \beta, \gamma) + \\ &+ \frac{\sqrt{[(J+1)^2 - M^2][(J+1)^2 - M'^2]}}{(J+1)(2J+1)} D_{MM'}^{J+1}(\alpha, \beta, \gamma), \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \sin \beta e^{i\alpha} D_{M+1 M'}^J(\alpha, \beta, \gamma) &= -\frac{\sqrt{(J+M)(J+M+1)(J^2 - M'^2)}}{J(2J+1)} D_{M M'}^{J-1}(\alpha, \beta, \gamma) + \\ &+ \frac{M' \sqrt{(J-M)(J+M+1)}}{J(J+1)} D_{M M'}^J(\alpha, \beta, \gamma) + \\ &+ \frac{\sqrt{(J-M)(J-M+1)[(J+1)^2 - M'^2]}}{(J+1)(2J+1)} D_{M M'}^{J+1}(\alpha, \beta, \gamma), \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \sin \beta e^{-i\alpha} D_{M-1M'}^J(\alpha, \beta, \gamma) &= \frac{\sqrt{(J-M)(J-M+1)(J^2-M'^2)}}{J(2J+1)} D_{MM'}^{J-1}(\alpha, \beta, \gamma) + \\ &+ \frac{M' \sqrt{(J+M)(J-M+1)}}{J(J+1)} D_{MM'}^J(\alpha, \beta, \gamma) - \\ &- \frac{\sqrt{(J+M)(J+M+1)[(J+1)^2-M'^2]}}{(J+1)(2J+1)} D_{MM'}^{J+1}(\alpha, \beta, \gamma), \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \sin \beta e^{i\gamma} D_{MM'+1}^J(\alpha, \beta, \gamma) &= \frac{\sqrt{(J^2-M^2)(J+M')(J+M'+1)}}{J(2J+1)} D_{MM'}^{J-1}(\alpha, \beta, \gamma) - \\ &- \frac{M \sqrt{(J-M')(J+M'+1)}}{J(J+1)} D_{MM'}^J(\alpha, \beta, \gamma) - \\ &- \frac{\sqrt{[(J+1)^2-M^2](J-M')(J-M'+1)}}{(J+1)(2J+1)} D_{MM'}^{J+1}(\alpha, \beta, \gamma), \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \sin \beta e^{-i\gamma} D_{MM'-1}^J(\alpha, \beta, \gamma) &= -\frac{\sqrt{(J^2-M^2)(J-M')(J-M'+1)}}{J(2J+1)} D_{MM'}^{J-1}(\alpha, \beta, \gamma) - \\ &- \frac{M \sqrt{(J+M')(J-M'+1)}}{J(J+1)} D_{MM'}^J(\alpha, \beta, \gamma) + \\ &+ \frac{\sqrt{[(J+1)^2-M^2](J+M')(J+M'+1)}}{(J+1)(2J+1)} D_{MM'}^{J+1}(\alpha, \beta, \gamma), \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} (1 + \cos \beta) e^{i(\alpha+\gamma)} D_{M+1M'+1}^J(\alpha, \beta, \gamma) &= \frac{\sqrt{(J+M+1)(J+M)(J+M'+1)(J+M')}}{J(2J+1)} D_{MM'}^{J-1}(\alpha, \beta, \gamma) + \\ &+ \frac{\sqrt{(J-M)(J+M+1)(J-M')(J+M'+1)}}{J(J+1)} D_{MM'}^J(\alpha, \beta, \gamma) + \\ &+ \frac{\sqrt{(J-M)(J-M+1)(J-M')(J-M'+1)}}{(J+1)(2J+1)} D_{MM'}^{J+1}(\alpha, \beta, \gamma), \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} (1 + \cos \beta) e^{-i(\alpha+\gamma)} D_{M-1M'-1}^J(\alpha, \beta, \gamma) &= \frac{\sqrt{(J-M)(J-M+1)(J-M')(J-M'+1)}}{J(2J+1)} D_{MM'}^{J-1}(\alpha, \beta, \gamma) + \\ &+ \frac{\sqrt{(J+M)(J-M+1)(J+M')(J-M'+1)}}{J(J+1)} D_{MM'}^J(\alpha, \beta, \gamma) + \\ &+ \frac{\sqrt{(J+M')(J+M'+1)(J+M)(J+M+1)}}{(J+1)(2J+1)} D_{MM'}^{J+1}(\alpha, \beta, \gamma), \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} (1 - \cos \beta) e^{i(\alpha-\gamma)} D_{M+1M'-1}^J(\alpha, \beta, \gamma) &= \frac{\sqrt{(J+M)(J+M+1)(J-M')(J-M'+1)}}{J(2J+1)} D_{MM'}^{J-1}(\alpha, \beta, \gamma) - \\ &- \frac{\sqrt{(J-M)(J+M+1)(J+M')(J-M'+1)}}{J(J+1)} D_{MM'}^J(\alpha, \beta, \gamma) + \\ &+ \frac{\sqrt{(J-M)(J-M+1)(J+M')(J+M'+1)}}{(J+1)(2J+1)} D_{MM'}^{J+1}(\alpha, \beta, \gamma), \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} (1 - \cos \beta) e^{i(\gamma-\alpha)} D_{M-1M'+1}^J(\alpha, \beta, \gamma) &= \frac{\sqrt{(J-M)(J-M+1)(J+M')(J+M'+1)}}{J(2J+1)} D_{MM'}^{J-1}(\alpha, \beta, \gamma) - \\ &- \frac{\sqrt{(J+M)(J-M+1)(J-M')(J+M'+1)}}{J(J+1)} D_{MM'}^J(\alpha, \beta, \gamma) + \\ &+ \frac{\sqrt{(J+M)(J+M+1)(J-M')(J-M'+1)}}{(J+1)(2J+1)} D_{MM'}^{J+1}(\alpha, \beta, \gamma). \end{aligned} \quad (9)$$

Формулы (1)—(9) могут быть получены, например, из разложения Клебша—Гордана (см. 4.6.(1)), если положить в нем  $J_1 = 1$ .

## 2. Рекуррентные формулы, связывающие $D_{MM'}^J$ и $D_{MM'}^{J\pm 1/2}$

$$\begin{aligned} \cos \frac{\beta}{2} e^{i\frac{\alpha+\gamma}{2}} D_{M+\frac{1}{2}M'+\frac{1}{2}}^J(\alpha, \beta, \gamma) &= \frac{\sqrt{(J+M+\frac{1}{2})(J+M'+\frac{1}{2})}}{2J+1} D_{MM'}^{J-1/2}(\alpha, \beta, \gamma) + \\ &+ \frac{\sqrt{(J-M+\frac{1}{2})(J-M'+\frac{1}{2})}}{2J+1} D_{MM'}^{J+1/2}(\alpha, \beta, \gamma), \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \sin \frac{\beta}{2} e^{i \frac{\alpha-\gamma}{2}} D_{M+1/2, M'-1/2}^J(\alpha, \beta, \gamma) = & - \frac{\sqrt{\left(J+M+\frac{1}{2}\right)\left(J-M'+\frac{1}{2}\right)}}{2J+1} D_{MM'}^{J-1/2}(\alpha, \beta, \gamma) + \\ & + \frac{\sqrt{\left(J-M+\frac{1}{2}\right)\left(J+M'+\frac{1}{2}\right)}}{2J+1} D_{MM'}^{J+1/2}(\alpha, \beta, \gamma), \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \cos \frac{\beta}{2} e^{-i \frac{\alpha+\gamma}{2}} D_{M-1/2, M'+1/2}^J(\alpha, \beta, \gamma) = & \frac{\sqrt{\left(J-M+\frac{1}{2}\right)\left(J-M'+\frac{1}{2}\right)}}{2J+1} D_{MM'}^{J-1/2}(\alpha, \beta, \gamma) + \\ & + \frac{\sqrt{\left(J+M+\frac{1}{2}\right)\left(J+M'+\frac{1}{2}\right)}}{2J+1} D_{MM'}^{J+1/2}(\alpha, \beta, \gamma), \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \sin \frac{\beta}{2} e^{i \frac{\gamma-\alpha}{2}} D_{M-1/2, M'+1/2}^J(\alpha, \beta, \gamma) = & \frac{\sqrt{\left(J-M+\frac{1}{2}\right)\left(J+M'+\frac{1}{2}\right)}}{2J+1} D_{MM'}^{J-1/2}(\alpha, \beta, \gamma) - \\ & - \frac{\sqrt{\left(J+M+\frac{1}{2}\right)\left(J-M'+\frac{1}{2}\right)}}{2J+1} D_{MM'}^{J+1/2}(\alpha, \beta, \gamma). \end{aligned} \quad (13)$$

Формулы (10)–(13) выводятся, например, из разложения Клебша—Гордана (см. 4.6.(1)), если положить в нем  $J_1 = 1/2$ . Из формул (10)–(13) можно получить также следующие соотношения:

$$\begin{aligned} D_{MM'}^J(\alpha, \beta, \gamma) = & \sqrt{\frac{J-M}{J-M'}} \cos \frac{\beta}{2} e^{i \frac{\alpha+\gamma}{2}} D_{M+1/2, M'+1/2}^{J-1/2}(\alpha, \beta, \gamma) - \\ & - \sqrt{\frac{J+M}{J-M'}} \sin \frac{\beta}{2} e^{-i \frac{\alpha-\gamma}{2}} D_{M-1/2, M'+1/2}^{J-1/2}(\alpha, \beta, \gamma), \quad (M' \neq J), \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} D_{MM'}^J(\alpha, \beta, \gamma) = & \sqrt{\frac{J-M}{J+M'}} \sin \frac{\beta}{2} e^{i \frac{\alpha-\gamma}{2}} D_{M+1/2, M'-1/2}^{J-1/2}(\alpha, \beta, \gamma) + \\ & + \sqrt{\frac{J+M}{J+M'}} \cos \frac{\beta}{2} e^{-i \frac{\alpha+\gamma}{2}} D_{M-1/2, M'-1/2}^{J-1/2}(\alpha, \beta, \gamma), \quad (M' \neq -J). \end{aligned} \quad (15)$$

### 3. Рекуррентные формулы, связывающие $D_{MM'}^J$ и $D_{M\pm 1, M'\pm 1}^J$

$$\begin{aligned} \frac{-M+M' \cos \beta}{\sin \beta} D_{MM'}^J(\alpha, \beta, \gamma) = & \frac{1}{2} \sqrt{(J+M')(J-M'+1)} D_{MM'-1}^J(\alpha, \beta, \gamma) e^{-i\gamma} + \\ & + \frac{1}{2} \sqrt{(J-M')(J+M'+1)} D_{MM'+1}^J(\alpha, \beta, \gamma) e^{i\gamma}, \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \frac{M'-M \cos \beta}{\sin \beta} D_{MM'}^J(\alpha, \beta, \gamma) = & \frac{1}{2} \sqrt{(J+M)(J-M+1)} D_{M-1, M'}^J(\alpha, \beta, \gamma) e^{-i\alpha} + \\ & + \frac{1}{2} \sqrt{(J-M)(J+M+1)} D_{M+1, M'}^J(\alpha, \beta, \gamma) e^{i\alpha}, \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} D_{M+1, M'}^J(\alpha, \beta, \gamma) e^{i\alpha} = & \sqrt{\frac{(J+M')(J-M'+1)}{(J-M)(J+M+1)}} \frac{1+\cos \beta}{2} e^{-i\gamma} D_{MM'-1}^J(\alpha, \beta, \gamma) + \\ & + \frac{M' \sin \beta}{\sqrt{(J-M)(J+M+1)}} D_{MM'}^J(\alpha, \beta, \gamma) - \\ & - \sqrt{\frac{(J-M')(J+M'+1)}{(J-M)(J+M+1)}} \frac{1-\cos \beta}{2} e^{i\gamma} D_{MM'+1}^J(\alpha, \beta, \gamma), \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} D_{M-1, M'}^J(\alpha, \beta, \gamma) e^{-i\alpha} = & - \sqrt{\frac{(J+M')(J-M'+1)}{(J+M)(J-M+1)}} \frac{1-\cos \beta}{2} e^{-i\gamma} D_{MM'-1}^J(\alpha, \beta, \gamma) + \\ & + \frac{M' \sin \beta}{\sqrt{(J+M)(J-M+1)}} D_{MM'}^J(\alpha, \beta, \gamma) + \\ & + \sqrt{\frac{(J-M')(J+M'+1)}{(J+M)(J-M+1)}} \frac{1+\cos \beta}{2} e^{i\gamma} D_{MM'+1}^J(\alpha, \beta, \gamma), \end{aligned} \quad (19)$$

$$D_{MM'+1}^J(\alpha, \beta, \gamma) e^{i\gamma} = \sqrt{\frac{(J+M)(J-M+1)}{(J-M')(J+M'+1)}} \frac{1 + \cos \beta}{2} e^{-i\alpha} D_{M-1M'}^J(\alpha, \beta, \gamma) -$$

$$- \frac{M \sin \beta}{\sqrt{(J-M')(J+M'+1)}} D_{MM'}^J(\alpha, \beta, \gamma) -$$

$$- \sqrt{\frac{(J-M)(J+M+1)}{(J-M')(J+M'+1)}} \frac{1 - \cos \beta}{2} e^{i\alpha} D_{M+1M'}^J(\alpha, \beta, \gamma), \quad (20)$$

$$D_{MM'-1}^J(\alpha, \beta, \gamma) e^{-i\gamma} = -\sqrt{\frac{(J+M)(J-M+1)}{(J+M')(J-M'+1)}} \frac{1 - \cos \beta}{2} e^{-i\alpha} D_{M-1M'}^J(\alpha, \beta, \gamma) -$$

$$- \frac{M \sin \beta}{\sqrt{(J+M')(J-M'+1)}} D_{MM'}^J(\alpha, \beta, \gamma) +$$

$$+ \sqrt{\frac{(J-M)(J+M+1)}{(J+M')(J-M'+1)}} \frac{1 + \cos \beta}{2} e^{i\alpha} D_{M+1M'}^J(\alpha, \beta, \gamma). \quad (21)$$

#### 4.9. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ СООТНОШЕНИЯ ДЛЯ *D*-ФУНКЦИЙ

Ниже приведены формулы, позволяющие выразить производные от  $D_{MM'}^J$  через сумму *D*-функций с другими индексами  $J$  или  $M, M'$ .

$$\sin \beta \frac{\partial}{\partial \beta} D_{MM'}^J(\alpha, \beta, \gamma) = -\frac{(J+1)\sqrt{(J^2-M^2)(J^2-M'^2)}}{J(2J+1)} D_{MM'}^{J-1}(\alpha, \beta, \gamma) - \frac{MM'}{J(J+1)} D_{MM'}^J(\alpha, \beta, \gamma) +$$

$$+ \frac{J\sqrt{[(J+1)^2-M^2][(J+1)^2-M'^2]}}{(J+1)(2J+1)} D_{MM'}^{J+1}(\alpha, \beta, \gamma), \quad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial \beta} D_{MM'}^J(\alpha, \beta, \gamma) = -\frac{1}{2} \sqrt{(J+M)(J-M+1)} e^{-i\alpha} D_{M-1M'}^J(\alpha, \beta, \gamma) +$$

$$+ \frac{1}{2} \sqrt{(J-M)(J+M+1)} e^{i\alpha} D_{M+1M'}^J(\alpha, \beta, \gamma), \quad (2)$$

$$\frac{\partial}{\partial \beta} D_{MM'}^J(\alpha, \beta, \gamma) = \frac{1}{2} \sqrt{(J+M')(J-M'+1)} e^{-i\gamma} D_{MM'-1}^J(\alpha, \beta, \gamma) -$$

$$- \frac{1}{2} \sqrt{(J-M')(J+M'+1)} e^{i\gamma} D_{MM'+1}^J(\alpha, \beta, \gamma), \quad (3)$$

$$\frac{\partial}{\partial \beta} D_{MM'}^J(\alpha, \beta, \gamma) = \frac{M' - M \cos \beta}{\sin \beta} D_{MM'}^J(\alpha, \beta, \gamma) - \sqrt{(J+M)(J-M+1)} e^{-i\alpha} D_{M-1M'}^J(\alpha, \beta, \gamma), \quad (4)$$

$$\frac{\partial}{\partial \beta} D_{MM'}^J(\alpha, \beta, \gamma) = -\frac{M' - M \cos \beta}{\sin \beta} D_{MM'}^J(\alpha, \beta, \gamma) + \sqrt{(J-M)(J+M+1)} e^{i\alpha} D_{M+1M'}^J(\alpha, \beta, \gamma), \quad (5)$$

$$\frac{\partial}{\partial \beta} D_{MM'}^J(\alpha, \beta, \gamma) = \frac{M - M' \cos \beta}{\sin \beta} D_{MM'}^J(\alpha, \beta, \gamma) + \sqrt{(J+M')(J-M'+1)} e^{-i\gamma} D_{MM'-1}^J(\alpha, \beta, \gamma), \quad (6)$$

$$\frac{\partial}{\partial \beta} D_{MM'}^J(\alpha, \beta, \gamma) = -\frac{M - M' \cos \beta}{\sin \beta} D_{MM'}^J(\alpha, \beta, \gamma) - \sqrt{(J-M')(J+M'+1)} e^{i\gamma} D_{MM'+1}^J(\alpha, \beta, \gamma), \quad (7)$$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} D_{MM'}^J(\alpha, \beta, \gamma) = -iM D_{MM'}^J(\alpha, \beta, \gamma), \quad (8)$$

$$\frac{\partial}{\partial \gamma} D_{MM'}^J(\alpha, \beta, \gamma) = -iM' D_{MM'}^J(\alpha, \beta, \gamma), \quad (9)$$

(см. также 4.2.1. и 4.2.2).

#### 4.10. ОРТОГОНАЛЬНОСТЬ И ПОЛНОТА СИСТЕМЫ *D*-ФУНКЦИЙ

Функции  $D_{MM'}^J(\alpha, \beta, \gamma)$  ортогональны в общем случае только при интегрировании по удвоенному объему группы трехмерных вращений (т. е. по объему группы  $SU_2$ ), поскольку функции  $D_{MM'}^J(\alpha, \beta, \gamma)$  при полуцелых  $J$  имеют период  $4\pi$ , а не  $2\pi$ . Удвоение объема может быть достигнуто путем удвоения области интегрирования либо по углу  $\alpha$ , либо по углу  $\gamma$ . Таким образом, удвоенному объему группы трехмерных вращений будем сопоставлять одну из следующих областей изменения углов Эйлера:

$$V_1: \quad 0 \leq \alpha < 4\pi, \quad 0 \leq \beta \leq \pi, \quad 0 \leq \gamma < 2\pi; \quad (1)$$

$$V_2: \quad 0 \leq \alpha < 2\pi, \quad 0 \leq \beta \leq \pi, \quad 0 \leq \gamma < 4\pi. \quad (2)$$

Полный объем области  $V_1$  или  $V_2$  равен  $16\pi^2$ . Условие ортогональности и нормировки функций  $D_{MM'}^J(\alpha, \beta, \gamma)$  имеет вид

$$\int_0^{4\pi} d\alpha \int_0^\pi d\beta \sin \beta \int_0^{2\pi} d\gamma D_{M_2 M_2'}^{J_2*}(\alpha, \beta, \gamma) D_{M_1 M_1'}^{J_1}(\alpha, \beta, \gamma) = \int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^\pi d\beta \sin \beta \int_0^{4\pi} d\gamma D_{M_2 M_2'}^{J_2*}(\alpha, \beta, \gamma) D_{M_1 M_1'}^{J_1}(\alpha, \beta, \gamma) = \frac{16\pi^2}{2J_1 + 1} \delta_{J_1 J_2} \delta_{M_1 M_2} \delta_{M_1' M_2'} \quad (3)$$

В том случае, когда оба индекса  $J_1$  и  $J_2$  одновременно либо целые, либо полуцелые, ортогональность  $D$ -функций имеет место при интегрировании просто по объему группы трехмерных вращений, т. е. по области изменения аргументов

$$V: \quad 0 \leq \alpha < 2\pi, \quad 0 \leq \beta \leq \pi, \quad 0 \leq \gamma < 2\pi. \quad (4)$$

Полный объем области  $V$  равен  $8\pi^2$ . При этом условие ортогональности и нормировки имеет вид

$$\int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^\pi d\beta \sin \beta \int_0^{2\pi} d\gamma D_{M_2 M_2'}^{J_2*}(\alpha, \beta, \gamma) D_{M_1 M_1'}^{J_1}(\alpha, \beta, \gamma) = \frac{8\pi^2}{2J_1 + 1} \delta_{J_1 J_2} \delta_{M_1 M_2} \delta_{M_1' M_2'} \quad (5)$$

Условие ортогональности в виде (5) наиболее часто используется в физических приложениях, где, как правило, условие его применимости выполняется автоматически.

Для функций  $d_{MM'}^J(\beta)$  условие (5) дает

$$\int_0^\pi d\beta \sin \beta d_{MM'}^J(\beta) d_{MM'}^{J'}(\beta) = \frac{2}{2J + 1} \delta_{JJ'} \quad (6)$$

Функции  $D_{MM'}^J(\alpha, \beta, \gamma)$  образуют полную систему функций. Если рассматривать область  $V_1$  (или  $V_2$ ) изменения аргумента  $\alpha, \beta, \gamma$ , (см. (1)), то условие полноты имеет вид

$$\sum_{J=0, 1/2, 1, \dots}^{\infty} \sum_{M=-J}^J \sum_{M'=-J}^J \frac{2J+1}{16\pi^2} D_{MM'}^{J*}(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1) D_{MM'}^J(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2) = \delta(\alpha_1 - \alpha_2) \delta(\cos \beta_1 - \cos \beta_2) \delta(\gamma_1 - \gamma_2). \quad (7)$$

Любая функция  $f(\alpha, \beta, \gamma)$ , заданная в области  $V_1$  (или  $V_2$ ) изменения аргументов  $\alpha, \beta, \gamma$  и квадратично интегрируемая в этой области

$$\iiint_{V_1(V_2)} d\alpha d\beta \sin \beta d\gamma |f(\alpha, \beta, \gamma)|^2 < \infty, \quad (8)$$

может быть разложена в данной области в ряд по  $D$ -функциям Вигнера следующего вида:

$$f(\alpha, \beta, \gamma) = \sum_{J=0, 1/2, 1, \dots}^{\infty} \sum_{M=-J}^J \sum_{M'=-J}^J a_{MM'}^J D_{MM'}^J(\alpha, \beta, \gamma). \quad (9)$$

Коэффициенты разложения  $a_{MM'}^J$  даются формулой

$$a_{MM'}^J = \frac{2J+1}{16\pi^2} \iiint_{V_1(V_2)} d\alpha d\beta \sin \beta d\gamma f(\alpha, \beta, \gamma) D_{MM'}^{J*}(\alpha, \beta, \gamma), \quad (10)$$

и удовлетворяют соотношению

$$\sum_{J=0, 1/2, 1, \dots}^{\infty} \frac{16\pi^2}{2J+1} \sum_{M=-J}^J \sum_{M'=-J}^J |a_{MM'}^J|^2 = \iiint_{V_1(V_2)} d\alpha d\beta \sin \beta d\gamma |f(\alpha, \beta, \gamma)|^2. \quad (11)$$

Если рассматривать только область  $V$  (см. (4)) изменения углов  $\alpha, \beta, \gamma$ , то любая функция  $f(\alpha, \beta, \gamma)$ , заданная в области  $V$ , может быть разложена в этой области как в ряд, содержащий  $D_{MM'}^J(\alpha, \beta, \gamma)$  только с целыми  $J$ , так и в ряд, содержащий  $D_{MM'}^J(\alpha, \beta, \gamma)$  только с полуцелыми  $J$ .

$$f(\alpha, \beta, \gamma) = \sum_{\substack{J \text{ целые (или} \\ J \text{ полуцелые)}}} \sum_{M=-J}^J \sum_{M'=-J}^J b_{MM'}^J D_{MM'}^J(\alpha, \beta, \gamma). \quad (12)$$

Коэффициенты  $b_{MM'}^J$  даются формулой, имеющей одинаковый вид как в случае целых, так и в случае полуцелых  $J$ .

$$b_{MM'}^J = \frac{2J+1}{8\pi^2} \int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^\pi d\beta \sin \beta \int_0^{2\pi} d\gamma f(\alpha, \beta, \gamma) D_{MM'}^{J*}(\alpha, \beta, \gamma). \quad (13)$$

Отличие разложения по целым  $J$  от разложения по полуцелым  $J$  проявляется вне области  $V$ . Коэффициенты разложения (12) удовлетворяют соотношению

$$\sum_{\substack{J \text{ целые (или} \\ J \text{ полуцелые)}}} \frac{8\pi^2}{2J+1} \sum_{M=-J}^J \sum_{M'=-J}^J |b_{MM'}^J|^2 = \int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^\pi d\beta \sin \beta \int_0^{2\pi} d\gamma |f(\alpha, \beta, \gamma)|^2. \quad (14)$$

#### 4.11. ИНТЕГРАЛЫ, СОДЕРЖАЩИЕ ФУНКЦИИ $D_{MM'}^J(\alpha, \beta, \gamma)$ ИЛИ $d_{MM'}^J(\beta)$

##### 1. Интегралы от произведений $D$ -функций

$$\int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^\pi d\beta \sin \beta \int_0^{2\pi} d\gamma D_{MM'}^J(\alpha, \beta, \gamma) = \delta_{J0} \delta_{M0} \delta_{M'0} 8\pi^2, \quad (J - \text{целое}), \quad (1)$$

$$\int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^\pi d\beta \sin \beta \int_0^{2\pi} d\gamma D_{M_1 M_1'}^{J_1}(\alpha, \beta, \gamma) D_{M_2 M_2'}^{J_2}(\alpha, \beta, \gamma) = (-1)^{M_2 - M_2'} \frac{8\pi^2}{2J_2 + 1} \delta_{J_1 J_2} \delta_{-M_1 M_2} \delta_{-M_1' M_2'}, \quad (2)$$

( $J_1 + J_2 - \text{целое}$ ),

$$\int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^\pi d\beta \sin \beta \int_0^{2\pi} d\gamma D_{M_1 M_1'}^{J_1*}(\alpha, \beta, \gamma) D_{M_2 M_2'}^{J_2}(\alpha, \beta, \gamma) = \frac{8\pi^2}{2J_2 + 1} \delta_{J_1 J_2} \delta_{M_1 M_2} \delta_{M_1' M_2'}, \quad (3)$$

( $J_1 + J_2 - \text{целое}$ ),

$$\int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^\pi d\beta \sin \beta \int_0^{2\pi} d\gamma D_{M_3 M_3'}^{J_3}(\alpha, \beta, \gamma) D_{M_2 M_2'}^{J_2}(\alpha, \beta, \gamma) D_{M_1 M_1'}^{J_1}(\alpha, \beta, \gamma) = (-1)^{M_3 - M_3'} \frac{8\pi^2}{2J_3 + 1} C_{J_1 M_1 J_2 M_2}^{J_3 - M_3} C_{J_1 M_1' J_2 M_2'}^{J_3 - M_3'}, \quad (4)$$

( $J_1 + J_2 + J_3 - \text{целое}$ ),

$$\int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^\pi d\beta \sin \beta \int_0^{2\pi} d\gamma D_{M_3 M_3'}^{J_3*}(\alpha, \beta, \gamma) D_{M_2 M_2'}^{J_2}(\alpha, \beta, \gamma) D_{M_1 M_1'}^{J_1}(\alpha, \beta, \gamma) = \frac{8\pi^2}{2J_3 + 1} C_{J_1 M_1 J_2 M_2}^{J_3 M_3} C_{J_1 M_1' J_2 M_2'}^{J_3 M_3'}, \quad (5)$$

( $J_1 + J_2 + J_3 - \text{целое}$ ).

Формулы (1)–(5) имеют место, если выполнены условия, указанные в скобках. Если в (1)–(5) удвоить область интегрирования по углу  $\alpha$  или углу  $\gamma$  и одновременно умножить на 2 правую часть, то указанные в скобках ограничения можно снять (см. 4.10).

Интегралы от произведений четырех и более  $D$ -функций могут быть сведены к интегралам, приведенным выше с помощью разложения Клебша—Гордана (см. 4.6.1)

2. Для функций  $d_{MM'}^J(\beta)$  из (1)–(5) следует

$$\int_0^\pi d\beta \sin \beta d_{00}^J(\beta) = 2\delta_{J0}, \quad (6)$$



$$\int_0^\pi d\beta \sin \beta d_{MM'}^J(\beta) d_{MM'}^{J'}(\beta) = \frac{2}{2J+1} \delta_{JJ'}, \quad (7)$$

$$\int_0^\pi d\beta \sin \beta d_{M_1 M_1'}^{J_1}(\beta) d_{M_2 M_2'}^{J_2}(\beta) d_{M_3 M_3'}^{J_3}(\beta) \delta_{M_1+M_2 M_3} \delta_{M_1'+M_2' M_3'} = \frac{2}{2J_3+1} C_{J_1 M_1 J_2 M_2}^{J_3 M_3} C_{J_1 M_1' J_2 M_2'}^{J_3 M_3'}. \quad (8)$$

3. При  $M, M' \geq 0$  и  $M \geq M'$  имеет место формула

$$\int_0^\beta d\beta \left(\sin \frac{\beta}{2}\right)^{M-M'+1} \left(\cos \frac{\beta}{2}\right)^{M+M'+1} d_{MM'}^J(\beta) = \frac{-1}{\sqrt{J(J+1)-M(M+1)}} \left(\sin \frac{\beta}{2}\right)^{M-M'+1} \left(\cos \frac{\beta}{2}\right)^{M+M'+1} d_{M+1 M'}^J(\beta). \quad (9)$$

Аналогичные формулы при  $M \leq M'$  или при  $M$  и  $M'$  отрицательных можно получить из (9) с помощью свойств симметрии  $d_{MM'}^J(\beta)$  (см. 4.4(1)).

#### 4.12. СУММЫ ИНТЕГРАЛОВ ОТ ПРОИЗВЕДЕНИЙ $D$ -ФУНКЦИЙ

В приведенных ниже формулах  $R$  означает совокупность углов Эйлера  $\alpha, \beta, \gamma$ ,  $dR \equiv \sin \beta d\alpha d\beta d\gamma$ ,

$$\int dR f(R) \equiv \int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^\pi d\beta \sin \beta \int_0^{2\pi} d\gamma f(\alpha, \beta, \gamma). \quad (1)$$

В этих обозначениях формулы имеют вид

$$\sum_{MM'} \int dR D_{MM}^{J*}(R) D_{M'M'}^{J'}(R) = 8\pi^2 \delta_{JJ'}, \quad (2)$$

$$\sum_{MM'} \int dR D_{MM}^J(R) D_{M'M}^{J'}(R) = (-1)^{2J} 8\pi^2 \delta_{JJ'}, \quad (3)$$

$$\sum_{M_1 M_2 M_3} \int dR D_{M_3 M_3}^{J_3}(R) D_{M_2 M_2}^{J_2}(R) D_{M_1 M_1}^{J_1}(R) = 8\pi^2 \{J_1 J_2 J_3\}, \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \sum_{\text{Все } M, N} \int dR_1 D_{M_1 N_1}^{J_1}(R_1) D_{M_2 N_2}^{J_2}(R_1) D_{M_3 N_3}^{J_3}(R_1) \int dR_2 D_{N_1 M_1}^{J_1}(R_2) D_{M_2 N_2}^{J_2}(R_2) D_{M_3 N_3}^{J_3}(R_2) = \\ = (-1)^{2J_3} (8\pi^2)^2 \begin{Bmatrix} J_1 & J_2 & J_3 \\ J_1 & J_2 & J_3' \end{Bmatrix}, \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \sum_{\text{Все } M, N} \int dR_1 D_{M_1 N_1}^{J_1*}(R_1) D_{M_2 N_2}^{J_2}(R_1) D_{M_3 N_3}^{J_3}(R_1) \int dR_2 D_{M_2 N_2}^{J_2*}(R_2) D_{M_3 N_3}^{J_3}(R_2) D_{M_1 N_1}^{J_1}(R_2) \times \\ \times \int dR_3 D_{M_3 N_3}^{J_3*}(R_3) D_{M_1 N_1}^{J_1}(R_3) D_{M_2 N_2}^{J_2}(R_3) = (8\pi^2)^3 \begin{Bmatrix} J_1 & J_2 & J_3 \\ J_1' & J_2' & J_3' \end{Bmatrix}, \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \sum_{\text{Все } M, N} \int dR_1 D_{MM}^J(R_1) D_{N_2 N_2}^{J_2}(R_1) D_{N_3 N_3}^{J_3}(R_1) \int dR_2 D_{M' M'}^{J'}(R_2) D_{N_1 M_1}^{J_1}(R_2) D_{N_2 M_2}^{J_2}(R_2) \times \\ \times \int dR_3 D_{M'' M''}^{J''}(R_3) D_{M_2 N_2}^{J_2}(R_3) D_{M_3 N_3}^{J_3}(R_3) \int dR_4 D_{M_1 N_1}^{J_1}(R_4) D_{M_2 N_2}^{J_2}(R_4) D_{M_2 N_2}^{J_2}(R_4) D_{M_3 N_3}^{J_3}(R_4) = \\ = (-1)^{2J_1} (8\pi^2)^4 \begin{Bmatrix} J_1 & J_2 & J' \\ J_3 & J_2 & J \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} J_1 & J_2 & J'' \\ J_3 & J_2 & J' \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} J_1 & J_2 & J \\ J_3 & J_2 & J'' \end{Bmatrix}, \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \sum_{\text{Все } M, N} \int dR_1 D_{MM}^J(R_1) D_{M' N'}^{J'}(R_1) D_{M_1 N_1}^{J_1*}(R_1) \int dR_2 D_{N' M'}^J(R_2) D_{N N}^J(R_2) D_{M_2 N_2}^{J_2*}(R_2) \times \\ \times \int dR_3 D_{M_1 N_1}^{J_1}(R_3) D_{M_2 N_2}^{J_2}(R_3) D_{M_3 N_3}^{J_3*}(R_3) = (8\pi^2)^3 \begin{Bmatrix} J & J & J_1 \\ J & J & J_2 \\ J_1 & J_2 & J_3 \end{Bmatrix}, \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{\text{все } M, N} \int dR_1 D_{M_1 N_1}^{J_1} (R_1) D_{M_2 N_2}^{J_2} (R_2) D_{M_{12} M_{12}}^{J_{12}} (R_1) \int dR_2 D_{M_3 N_3}^{J_3} (R_2) D_{M_4 N_4}^{J_4} (R_2) D_{M_{34} M_{34}}^{J_{34}} (R_2) \times \\
& \times \int dR_3 D_{M_{13} N_{13}}^{J_{13}} (R_3) D_{M_{24} N_{24}}^{J_{24}} (R_3) D_{M M}^J (R_3) \int dR_4 D_{N_1 M_1}^{J_1} (R_4) D_{N_3 M_3}^{J_3} (R_4) D_{N_{13} M_{13}}^{J_{13}} (R_4) \times \\
& \times \int dR_5 D_{N_2 M_2}^{J_2} (R_5) D_{N_4 M_4}^{J_4} (R_5) D_{N_{24} M_{24}}^{J_{24}} (R_5) = (8\pi^2)^5 \left\{ \begin{matrix} J_1 & J_2 & J_{12} \\ J_3 & J_4 & J_{34} \\ J_{13} & J_{24} & J \end{matrix} \right\}^2. \quad (9)
\end{aligned}$$

Если в формулах (5)—(9) сначала выполнить интегрирование с помощью 4.11 (4) — 4.11 (5), то получим формулы для суммирования произведений коэффициентов Клебша—Гордана (см. 8.7). Если же, наоборот, в формулах (5)—(9) сначала выполнить суммирование, то получим представления для 6j- и 9j-символов в виде интегралов от характеров (см. 9.3 и 10.3).

#### 4.13. ПРОИЗВОДЯЩИЕ ФУНКЦИИ

Функции  $d_{MM'}^J(\beta)$  могут быть получены, как коэффициенты разложения в степенные ряды или конечные суммы некоторых функций, называемых *производящими функциями*. Ниже приведены некоторые из таких производящих функций.

1. Производящая функция для  $d_{MM'}^J(\beta)$  с заданными  $J, M'$

$$\begin{aligned}
& \left( \cos \frac{\beta}{2} e^{i\varphi/2} + i \sin \frac{\beta}{2} e^{-i\varphi/2} \right)^{J+M'} \left( i \sin \frac{\beta}{2} e^{i\varphi/2} + \cos \frac{\beta}{2} e^{-i\varphi/2} \right)^{J-M'} = \\
& = \sum_{M=-J}^J \sqrt{\frac{(J-M')!(J+M')!}{(J-M)!(J+M)!}} (-i)^{M-M'} e^{iM\varphi} d_{MM'}^J(\beta). \quad (1)
\end{aligned}$$

В частности, из (1) получаются следующие разложения:  
при  $\varphi = 0$

$$e^{iJ\beta} = \sum_{M=-J}^J \sqrt{\frac{(J-M')!(J+M')!}{(J-M)!(J+M)!}} (-i)^{M-M'} d_{MM'}^J(\beta), \quad (2)$$

при  $\varphi = \pi$

$$e^{-iJ\beta} = \sum_{M=-J}^J \sqrt{\frac{(J-M')!(J+M')!}{(J-M)!(J+M)!}} i^{M-M'} d_{MM'}^J(\beta). \quad (3)$$

2. Производящие функции для  $d_{MM'}^J(\beta)$  с заданными  $M, M'$ .

В формулах, приведенных ниже, индексы  $s, \mu, \nu$  связаны с  $J, M, M'$  соотношениями 4.3. (14), величины  $\xi_{MM'}$  даются формулой 4.3. (15), величина  $R$  имеет вид

$$R = \sqrt{1 - 2t \cos \beta + t^2}, \quad |t| < 1. \quad (4)$$

$$\frac{\xi_{MM'}}{R} \left( \frac{2 \sin \frac{\beta}{2}}{1 + R - t} \right)^\mu \left( \frac{2 \cos \frac{\beta}{2}}{1 + R + t} \right)^\nu = \sum_{s=0}^{\infty} \sqrt{\frac{(s+\mu)!(s+\nu)!}{s!(s+\mu+\nu)!}} t^s d_{MM'}^{s+\frac{\mu+\nu}{2}}(\beta), \quad (5)$$

$$\begin{aligned}
& \xi_{MM'} \left( \sin \frac{\beta}{2} \right)^\mu \left( \cos \frac{\beta}{2} \right)^\nu {}_0F_1 \left( ; 1 + \mu; -t \sin^2 \frac{\beta}{2} \right) {}_0F_1 \left( ; 1 + \nu; t \cos^2 \frac{\beta}{2} \right) = \\
& = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\mu! \nu!}{\sqrt{s!(s+\mu)!(s+\nu)!(s+\mu+\nu)!}} t^s d_{MM'}^{s+\frac{\mu+\nu}{2}}(\beta), \quad (6)
\end{aligned}$$

$$\xi_{MM'} (1-t)^{1-\mu-\nu} \left( \sin \frac{\beta}{2} \right)^\mu \left( \cos \frac{\beta}{2} \right)^\nu {}_2F_1 \left( \frac{\mu+\nu+1}{2}, \frac{\mu+\nu+2}{2}; 1+\mu; -\frac{4t \sin^2 \frac{\beta}{2}}{(1-t)^2} \right) =$$

$$= \sum_{s=0}^{\infty} \sqrt{\frac{(s+\nu)!(s+\mu+\nu)!}{s!(s+\mu)!}} \frac{\mu!}{(\mu+\nu)!} t^s d_{MM'}^{s+\frac{\mu+\nu}{2}}(\beta), \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \xi_{MM'} \left(\sin \frac{\beta}{2}\right)^{\mu} \left(\cos \frac{\beta}{2}\right)^{\nu} {}_2F_1\left(\lambda, \mu+\nu+1-\lambda; 1+\mu; \frac{1-t-R}{2}\right) {}_2F_1\left(\lambda, \mu+\nu+1-\lambda; 1+\nu; \frac{1+t-R}{2}\right) = \\ = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(\mu+\nu+1-\lambda)_s (\lambda)_s \mu! \nu!}{\sqrt{s!(s+\mu+\nu)!(s+\mu)!(s+\nu)!}} t^s d_{MM'}^{s+\frac{\mu+\nu}{2}}(\beta). \end{aligned} \quad (8)$$

В формуле (8)  $\lambda$  — произвольное целое.

#### 4.14. ХАРАКТЕРЫ НЕПРИВОДИМЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ ГРУППЫ ВРАЩЕНИЙ

##### 1. Определение

Характером неприводимого представления ранга  $J$  группы вращений называется величина  $\chi^J(R)$ , определяемая формулой

$$\chi^J(R) = \sum_{M=-J}^J D_{MM}^J(R), \quad (1)$$

где  $R$  — любая совокупность параметров, описывающих поворот.

В отличие от  $D_{MM}^J$ , характер  $\chi^J(R)$  является инвариантом, т. е. не зависит от выбора системы координат. Функция  $\chi^J(R)$  имеет наиболее простой вид, когда поворот  $R$  характеризуется углами  $\omega$ ,  $\Theta$ ,  $\Phi$  (см. 1.4.2). В этом случае характер зависит лишь от угла поворота  $\omega$  и не зависит от углов  $\Theta$ ,  $\Phi$ , определяющих направление оси поворота:

$$\chi^J(R) = \chi^J(\omega). \quad (2)$$

##### 2. Явный вид $\chi^J(R)$ и связь с другими функциями

$$\chi^J(\omega) = \frac{\sin\left[(2J+1)\frac{\omega}{2}\right]}{\sin\frac{\omega}{2}}, \quad (3)$$

$$\chi^J(\omega) = \sum_{M=-J}^J e^{-iM\omega} = \sum_{M=-J}^J \cos M\omega, \quad (4)$$

$$\chi^J(\omega) = \sum_{n=0}^{[J]} (-1)^n \frac{(2J-n)!}{(2J-2n)!n!} \left(2\cos\frac{\omega}{2}\right)^{2J-2n}, \quad (5)$$

$$\chi^J(\omega) = \sum_{n=0}^{[J]} (-1)^n \frac{(2J+1)!}{(2n+1)!(2J-2n)!} \left(\cos\frac{\omega}{2}\right)^{2J-2n} \left(\sin\frac{\omega}{2}\right)^{2n}, \quad (6)$$

$$\chi^J(\omega) = \frac{1}{2J+1} \frac{d}{d\left(\cos\frac{\omega}{2}\right)} \cos\left[(2J+1)\frac{\omega}{2}\right], \quad (7)$$

$$\chi^J(\omega) = \frac{(2J+1)!2^{2J}}{(4J+1)! \sin\frac{\omega}{2}} \left[-\frac{d}{d\left(\cos\frac{\omega}{2}\right)}\right]^{2J} \left(\sin\frac{\omega}{2}\right)^{4J+1}. \quad (8)$$

Связь с гипергеометрическими функциями

$$\chi^J(\omega) = (2J+1) F\left(-J, J+1; 3/2; \sin^2\frac{\omega}{2}\right), \quad (9)$$

$$\chi^J(\omega) = (2J+1) F\left(-2J, 2(J+1); 3/2; \sin^2 \frac{\omega}{4}\right). \quad (10)$$

Связь с полиномами Чебышева II рода

$$\chi^J(\omega) = U_{2J}\left(\cos \frac{\omega}{2}\right). \quad (11)$$

Связь с полиномами Гегенбауэра

$$\chi^J(\omega) = C_{2J}^1\left(\cos \frac{\omega}{2}\right). \quad (12)$$

Связь с полиномами Якоби

$$\chi^J(\omega) = \frac{(4J+2)!!}{2(4J+1)!!} P_{2J}^{(1/2, 1/2)}\left(\cos \frac{\omega}{2}\right). \quad (13)$$

Интегральное представление

$$\chi^J(\omega) = \frac{2J+1}{2} \int_{-1}^1 \left(\cos \frac{\omega}{2} + ix \sin \frac{\omega}{2}\right)^{2J} dx. \quad (14)$$

Для того чтобы выразить характеры  $\chi^J(\omega)$  через углы Эйлера  $\alpha, \beta, \gamma$ , можно воспользоваться соотношением

$$\cos \frac{\omega}{2} = \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\alpha + \gamma}{2}. \quad (15)$$

### 3. Свойства характеров

Характеры  $\chi^J(R)$  в отличие от  $D_{MM}^J(R)$  являются вещественными функциями

$$(\chi^J(R))^* = \chi^J(R). \quad (16)$$

Характеры, соответствующие прямому и обратному повороту, равны между собой

$$\chi^J(R^{-1}) = \chi^J(R). \quad (17)$$

Характеры инвариантны относительно поворота системы координат и ее инверсии

$$\chi^J(URU^{-1}) = \chi^J(R), \quad (18)$$

где  $U$  и  $U^{-1}$  — прямое и обратное преобразования системы координат из группы ортогональных преобразований.

Характер произведения поворотов  $R_1 R_2 \dots R_n$  инвариантен относительно их циклической перестановки

$$\chi^J(R_1 R_2 \dots R_n) = \chi^J(R_2 \dots R_n R_1). \quad (19)$$

В частности,

$$\chi^J(R_1 R_2) = \chi^J(R_2 R_1), \quad (20)$$

несмотря на то, что повороты  $R_1$  и  $R_2$  не коммутируют.

Произведение двух характеров разлагается в ряд Клебша—Гордана

$$\chi^{J_1}(R) \chi^{J_2}(R) = \sum_J \{J_1 J_2 J\} \chi^J(R), \quad (21)$$

где  $\{J_1 J_2 J\} = 1$ , если выполняются условия треугольника (см. 4.6.2), во всех остальных случаях  $\{J_1 J_2 J\} = 0$ .

При замене  $J \rightarrow \bar{J} \equiv -J - 1$  характер изменяет знак

$$\chi^J(R) = -\chi^{\bar{J}}(R). \quad (22)$$

Характер  $\chi^J(\omega)$  является четной периодической функцией угла поворота  $\omega$ :

$$\begin{aligned}\chi^J(-\omega) &= \chi^J(\omega), \\ \chi^J(\omega + 4\pi) &= \chi^J(\omega), \\ \chi^J(\omega + 2\pi) &= (-1)^{2J} \chi^J(\omega).\end{aligned}\quad (23)$$

**Теорема сложения.** Характер поворота, являющегося результатом сложения двух последовательных поворотов,  $\chi^J(R_1 R_2)$  можно представить в виде суперпозиции произведений обобщенных характеров исходных поворотов  $\chi_\lambda^J(R_1) \cdot \chi_\lambda^J(R_2)$  (см. 4.15):

$$\chi^J(\omega) = \sum_{\lambda=0}^{2J} (-1)^\lambda \frac{2\lambda + 1}{12J + 1} \chi_\lambda^J(\omega_1) \chi_\lambda^J(\omega_2) P_\lambda(\cos \theta_{12}), \quad (24)$$

где  $\omega_1, \omega_2, \omega$  — углы поворотов, соответствующие  $R_1, R_2, R_1 R_2$  и связанные соотношением 1.4 (75),  $\theta_{12}$  — угол между осями поворотов  $R_1$  и  $R_2$ ;

$$\cos \theta_{12} = (\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2) = \cos \theta_1 \cos \theta_2 + \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cos(\Phi_1 - \Phi_2). \quad (25)$$

#### 4. Дифференциальное уравнение

Характеры  $\chi^J(\omega)$  являются решениями однородного дифференциального уравнения II порядка

$$\frac{d^2}{d\omega^2} \chi^J(\omega) + \operatorname{ctg} \frac{\omega}{2} \cdot \frac{d}{d\omega} \chi^J(\omega) + J(J+1) \chi^J(\omega) = 0 \quad (26)$$

с граничными условиями

$$\begin{aligned}\chi^J(0) &= 2J + 1, \\ \chi^J(\omega \pm 4\pi n) &= \chi^J(\omega), \quad \text{где } n \text{ — целое.}\end{aligned}\quad (27)$$

#### 5. Дифференциальные соотношения

$$\frac{d}{d\omega} \chi^J(\omega) = -\sqrt{J(J+1)} \chi_1^J(\omega); \quad (28)$$

$$\left( \frac{d}{d \cos \frac{\omega}{2}} \right)^k \chi^J(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2J+1}} V \frac{(2J+k+1)!}{(2J-k)!} \frac{\chi_k^J(\omega)}{\left( \sin \frac{\omega}{2} \right)^k}, \quad (29)$$

где  $\chi_k^J(\omega)$  — обобщенные характеры (см. 4.15);

$$\sin \frac{\omega}{2} \frac{d}{d\omega} \chi^J(\omega) = J \cos \frac{\omega}{2} \chi^J(\omega) - \left( J + \frac{1}{2} \right) \chi^{J-1/2}(\omega) = \left( J + \frac{1}{2} \right) \chi^{J+1/2}(\omega) - (J+1) \cos \frac{\omega}{2} \chi^J(\omega). \quad (30)$$

#### 6. Алгебраические соотношения

$$\chi^{J+1/2}(\omega) = 2 \cos \frac{\omega}{2} \cdot \chi^J(\omega) - \chi^{J-1/2}(\omega), \quad (31)$$

$$\chi^{J_1}(\omega) - \chi^{J_2}(\omega) = 2\chi^{\frac{J_1+J_2-1}{2}}(\omega) \cos \left[ (J_1 + J_2 + 1) \frac{\omega}{2} \right], \quad (32)$$

$$\chi^{J_1}(\omega) + \chi^{J_2}(\omega) = 2\chi^{\frac{J_1+J_2}{2}}(\omega) \cos \left[ (J_1 - J_2) \frac{\omega}{2} \right]. \quad (33)$$

Соотношения (32) и (33) справедливы при  $J_1 + J_2$  целым.

$$\chi^{J-\frac{1}{2}}(\omega) = 2 \cos \frac{\omega}{2} \chi^{\frac{J-1}{2}}(\omega), \quad (34)$$

где  $J$  — целое, положительное.

$$-2 \sin^2 \frac{\omega}{2} \chi^{J_1}(\omega) \chi^{J_2}(\omega) = \cos [(J_1 + J_2 + 1)\omega] - \cos [(J_1 - J_2)\omega]. \quad (35)$$

В частности,

$$2 \sin^2 \frac{\omega}{2} [\chi^J(\omega)]^2 = 1 - \cos [(2J + 1)\omega], \quad (36)$$

$$\chi^J(\omega) = 2^{2J} \prod_{k=1}^{2J} \sin \left( \frac{\omega}{2} + \frac{k\pi}{2J+1} \right). \quad (37)$$

## 7. Ортогональность и полнота

Характеры  $\chi^J(\omega)$  представляют собой полную и ортонормированную систему функций одной переменной  $\omega$ , задаваемой в интервале  $0 \leq \omega < 2\pi$ .

Условие ортогональности и нормировки имеет вид

$$\int_0^{2\pi} \chi^{J_1}(\omega) \chi^{J_2}(\omega) \sin^2 \frac{\omega}{2} d\omega = \pi \delta_{J_1 J_2}. \quad (38)$$

Условие полноты

$$\sum_{J=0, \frac{1}{2}, 1, \dots}^{\infty} \chi^J(\omega_1) \chi^J(\omega_2) = \frac{\pi \delta(\omega_1 - \omega_2)}{\sin^2 \frac{\omega_1}{2}}. \quad (39)$$

## 8. Интегралы, содержащие характеры

$$\int_0^{2\pi} d\omega \sin^2 \frac{\omega}{2} \chi^J(\omega) = \pi \delta_{J0}, \quad (40)$$

$$\int_0^{2\pi} d\omega \sin^2 \frac{\omega}{2} \chi^J(2\omega) = \pi (-1)^{2J}, \quad (41)$$

$$\int_0^{2\pi} d\omega \frac{\sin^2 \frac{\omega}{2}}{\cos \frac{\omega}{2} - \cos \frac{\Omega}{2}} \chi^J(\omega) = -2\pi \cos \left[ (2J + 1) \frac{\Omega}{2} \right]. \quad (42)$$

В формуле (42) интеграл понимается в смысле главного значения.

$$\int_0^{2\pi} d\omega \sin^2 \frac{\omega}{2} \chi^{J_1}(\omega) \chi^{J_2}(\omega) = \pi \delta_{J_1 J_2}, \quad (43)$$

$$\int_0^{2\pi} d\omega \sin^2 \frac{\omega}{2} \chi^{J_1}(\omega) \chi^{J_2}(\omega) \chi^{J_3}(\omega) = \pi \{J_1 J_2 J_3\}. \quad (44)$$

## 9. Суммы и ряды, содержащие характеры

а. Конечные суммы

$$\sum_{J=J_1, J_1+1, \dots}^{J_2} \chi^J(\omega) = \frac{\sin \left[ (J_2 + J_1 + 1) \frac{\omega}{2} \right] \sin \left[ (J_2 - J_1 + 1) \frac{\omega}{2} \right]}{\sin^2 \frac{\omega}{2}} = \chi^{\frac{J_2+J_1}{2}}(\omega) \chi^{\frac{J_2-J_1}{2}}(\omega), \quad (45)$$

$$\sum_{J=0, 1, 2, \dots}^{J_0} (2J+1) \chi^J(\omega) = \frac{(2J_0+3) \sin \left[ (2J_0+1) \frac{\omega}{2} \right] - (2J_0+1) \sin \left[ (2J_0+3) \frac{\omega}{2} \right]}{4 \sin^2 \frac{\omega}{2}}. \quad (46)$$

В формуле (45) суммирование ведется либо только по целым, либо только по полужелым значениям  $J$  в зависимости от того, целые или полужелые  $J_1$  и  $J_2$ . В формулах, следующих ниже, суммирование ведется как по целым, так и по полужелым значениям  $J$ .

$$\sum_{J=J_1, J_1+\frac{1}{2}, J_1+1, \dots}^{J_2} \chi^J(\omega) = \frac{\sin \left[ (J_2+J_1+1) \frac{\omega}{2} \right] \sin \left[ \left( J_2 - J_1 + \frac{1}{2} \right) \frac{\omega}{2} \right]}{\sin \frac{\omega}{2} \sin \frac{\omega}{4}}, \quad (47)$$

$$\sum_{J=0, \frac{1}{2}, 1, \dots}^{J_0} (2J+1) \chi^J(\omega) = \frac{(2J_0+2) \sin \left[ (2J_0+1) \frac{\omega}{2} \right] - (2J_0+1) \sin \left[ (2J_0+2) \frac{\omega}{2} \right]}{4 \sin \frac{\omega}{2} \sin^2 \frac{\omega}{4}}, \quad (48)$$

$$\sum_{J=0, \frac{1}{2}, 1, \dots}^{J_0} [\chi^J(\omega)]^2 = \frac{(4J_0+3) \sin \frac{\omega}{2} - \sin \left[ (4J_0+3) \frac{\omega}{2} \right]}{4 \sin^3 \frac{\omega}{2}}, \quad (49)$$

$$\sum_{J=0, \frac{1}{2}, 1, \dots}^{J_0} \chi^J(\omega) \chi^J(\omega') = \frac{\chi^{J_0+1/2}(\omega) \chi^{J_0}(\omega') - \chi^{J_0}(\omega) \chi^{J_0+1/2}(\omega')}{2 \left( \cos \frac{\omega}{2} - \cos \frac{\omega'}{2} \right)}, \quad (50)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{J=0, \frac{1}{2}, 1, \dots}^{J_0} \chi^J(\omega) \cos \left[ (2J+1) \frac{\omega'}{2} \right] = \\ & = \frac{\sin \frac{\omega}{2} - \cos \left[ (2J_0+1) \frac{\omega'}{2} \right] \sin [(J_0+1)\omega] + \sin \left[ (2J_0+1) \frac{\omega}{2} \right] \cos [(J_0+1)\omega']}{2 \sin \frac{\omega}{2} \left( \cos \frac{\omega'}{2} - \cos \frac{\omega}{2} \right)}. \end{aligned} \quad (51)$$

б. Бесконечные ряды

$$\sum_{J=0, \frac{1}{2}, 1, \dots}^{\infty} \chi^J(\omega) = \frac{1}{4 \sin^2 \frac{\omega}{4}}, \quad (\omega \neq 0), \quad (52)$$

$$\sum_{J=0, \frac{1}{2}, 1, \dots}^{\infty} (2J+1) \chi^J(\omega) = \frac{\pi}{\sin^2 \frac{\omega}{2}} \delta(\omega). \quad (53)$$

Введем обозначение

$$R^2 \equiv 1 - 2t \cos \frac{\omega}{2} + t^2, \quad \text{где } |t| < 1: \quad (54)$$

$$\sum_{J=0, \frac{1}{2}, 1, \dots}^{\infty} t^{2J} \chi^J(\omega) = \frac{1}{R^2}, \quad (55)$$

$$\sum_{J=0, \frac{1}{2}, 1, \dots}^{\infty} (2J+1) t^{2J} \chi^J(\omega) = \frac{1-t^2}{R^4}, \quad (56)$$

$$\sum_{J=0, \frac{1}{2}, 1, \dots}^{\infty} \frac{(4J+1)!!}{(4J+2)!!} t^{2J} \chi^J(\omega) = \frac{1}{R \sqrt{2 \left( 1 - t \cos \frac{\omega}{2} + R \right)}}, \quad (57)$$

$$\sum_{J=0, 1/2, 1, \dots}^{\infty} \frac{1}{(2J+1)!} t^{2J+1} \chi^J(\omega) = \frac{\sin\left(t \sin \frac{\omega}{2}\right)}{\sin \frac{\omega}{2}} e^{t \cos \frac{\omega}{2}}, \quad (58)$$

$$\sum_{J=0, 1/2, 1, \dots}^{\infty} \frac{1}{2J+1} t^{2J} \chi^J(\omega) = \frac{1}{2it \sin \frac{\omega}{2}} \ln \left( \frac{1 - te^{-\frac{i\omega}{2}}}{1 - te^{\frac{i\omega}{2}}} \right), \quad (59)$$

$$\sum_{J=0, 1/2, 1, \dots}^{\infty} \frac{\Gamma(2J+\nu)}{\Gamma(\nu)} \frac{t^{2J} \chi^J(\omega)}{(2J+1)!} = \left(1 - t \cos \frac{\omega}{2}\right)^{-\nu} {}_2F_1\left(\frac{\nu}{2}, \frac{\nu+1}{2}; \frac{3}{2}; -\left(\frac{t \sin \frac{\omega}{2}}{1 - t \cos \frac{\omega}{2}}\right)^2\right), \quad (60)$$

$$\sum_{J=0, 1/2, 1, \dots}^{\infty} \frac{1}{(4J+2)!} (4t)^{2J} \chi^J(\omega) = \frac{1}{2} {}_0F_1\left(; \frac{3}{2}; -t \sin^2 \frac{\omega}{4}\right) {}_0F_1\left(; \frac{3}{2}; t \cos^2 \frac{\omega}{4}\right), \quad (61)$$

$$\sum_{J=0, 1/2, 1, \dots}^{\infty} t^{2J} \chi^J(\omega) \chi^J(\omega') = \frac{1 - t^2}{1 + t^2 - 4t \cos \frac{\omega}{2} \cos \frac{\omega'}{2} + 2t^2 (\cos \omega + \cos \omega')}. \quad (62)$$

## 10. Частные значения $\chi^J(\omega)$ при определенных значениях аргументов

$$\chi^J(0) = 2J + 1, \quad (63)$$

$$\chi^J(2\pi) = (-1)^{2J} (2J + 1), \quad (64)$$

$$\chi^J(\pi) = \begin{cases} 0 & \text{при } J \text{ полуцелом,} \\ (-1)^J & \text{при } J \text{ целом,} \end{cases} \quad (65)$$

$$\chi^J\left(\frac{\pi}{2}\right) = \begin{cases} \sqrt{2} & J = 1/2, 9/2, 17/2, \dots \\ 1 & J = 0, 1, 4, 5, 8, 9, \dots \\ 0 & J = 3/2, 7/2, 11/2, 15/2, \dots \\ -1 & J = 2, 3, 6, 7, 10, 11, \dots \\ -\sqrt{2} & J = 5/2, 13/2, 21/2, \dots \end{cases} \quad (66)$$

## 11. Явный вид $\chi^J(\omega)$ при частных значениях индексов

$$\chi^0(\omega) = 1, \quad (67)$$

$$\chi^{1/2}(\omega) = 2 \cos \frac{\omega}{2}, \quad (68)$$

$$\chi^1(\omega) = 4 \cos^2 \frac{\omega}{2} - 1, \quad (69)$$

$$\chi^{3/2}(\omega) = 8 \cos^3 \frac{\omega}{2} - 4 \cos \frac{\omega}{2}, \quad (70)$$

$$\chi^2(\omega) = 16 \cos^4 \frac{\omega}{2} - 12 \cos^2 \frac{\omega}{2} + 1, \quad (71)$$

$$\chi^{5/2}(\omega) = 32 \cos^5 \frac{\omega}{2} - 32 \cos^3 \frac{\omega}{2} + 6 \cos \frac{\omega}{2}. \quad (72)$$

### 4.15. ОБОБЩЕННЫЕ ХАРАКТЕРЫ НЕПРИВОДИМЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ ГРУППЫ ВРАЩЕНИЙ

#### 1. Определение

1. Пусть функция  $\chi^J(\omega)$  является характером неприводимого представления ранга  $J$  группы вращений. Введем функцию  $\chi^J_\lambda(\omega)$ , связанную с  $\chi^J(\omega)$  следующим дифференциальным соотношением:



$$\chi_{\lambda}^J(\omega) = \sqrt{2J+1} \sqrt{\frac{(2J-\lambda)!}{(2J+\lambda+1)!}} \left(\sin \frac{\omega}{2}\right)^{\lambda} \left(\frac{d}{d \cos \frac{\omega}{2}}\right)^{\lambda} \chi^J(\omega), \quad (1)$$

где  $\lambda$  — целое число, удовлетворяющее условию  $0 \leq \lambda \leq 2J$ . Функцию  $\chi_{\lambda}^J(\omega)$  назовем *обобщенным характером порядка  $\lambda$  неприводимого представления ранга  $J$* . Подчеркнем, что *обычный и обобщенный* характеры связаны между собой аналогично тому, как связаны обычные и присоединенные полиномы Лежандра. При  $\lambda=0$  функция  $\chi_{\lambda}^J(\omega)$  тождественно совпадает с  $\chi^J(\omega)$ .

## 2. ЯВНЫЙ ВИД ФУНКЦИЙ $\chi_{\lambda}^J(\omega)$

Представление  $\chi_{\lambda}^J(\omega)$  в виде тригонометрических сумм

$$\chi_{\lambda}^J(\omega) = i^{\lambda} \sum_M e^{-iM\omega} C_{JM\lambda 0}^{JM}, \quad (2)$$

$$\chi_{\lambda}^J(\omega) = \left(\sin \frac{\omega}{2}\right)^{\lambda} \sqrt{2J+1} \sqrt{\frac{(2J-\lambda)!}{(2J+\lambda+1)!}} 2^{\lambda} \sum_{s=0}^{[J-\lambda/2]} \frac{(-1)^s (2J-s)!}{s!(2J-\lambda-2s)!} \left(2 \cos \frac{\omega}{2}\right)^{2J-\lambda-2s}, \quad (3)$$

$$\chi_{\lambda}^J(\omega) = \frac{\left(2 \sin \frac{\omega}{2}\right)^{\lambda}}{\lambda!} \sqrt{2J+1} \sqrt{\frac{(2J-\lambda)!}{(2J+\lambda+1)!}} \sum_{s=0}^{2J-\lambda} \frac{(\lambda+s)!(2J-s)!}{s!(2J-\lambda-s)!} \cos \left[ (2J-\lambda-2s) \frac{\omega}{2} \right]. \quad (4)$$

Представление  $\chi_{\lambda}^J(\omega)$  в виде производных

$$\chi_{\lambda}^J(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2J+1}} \sqrt{\frac{(2J-\lambda)!}{(2J+\lambda+1)!}} \left(\sin \frac{\omega}{2}\right)^{\lambda} \left(\frac{d}{d \cos \frac{\omega}{2}}\right)^{\lambda+1} \cos \left[ (2J+1) \frac{\omega}{2} \right], \quad (5)$$

см. также (1).

Связь с полиномами Гегенбауэра  $C_n^x(x)$

$$\chi_{\lambda}^J(\omega) = (2\lambda)!! \sqrt{2J+1} \sqrt{\frac{(2J-\lambda)!}{(2J+\lambda+1)!}} \left(\sin \frac{\omega}{2}\right)^{\lambda} C_{2J-\lambda}^{\lambda+1} \left(\cos \frac{\omega}{2}\right). \quad (6)$$

Связь с полиномами Якоби  $P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$

$$\chi_{\lambda}^J(\omega) = \frac{\sqrt{2J+1} \sqrt{(2J-\lambda)! (2J+\lambda+1)!}}{(4J+1)!!} 2^{2J-\lambda} \left(\sin \frac{\omega}{2}\right)^{\lambda} P_{2J-\lambda}^{(\lambda+1/2, \lambda+1/2)} \left(\cos \frac{\omega}{2}\right), \quad (7)$$

$$\chi_{\lambda}^J(\omega) = \begin{cases} \sqrt{2J+1} \sqrt{\frac{(2J+\lambda)!! (2J-\lambda)!!}{(2J+\lambda+1)!! (2J-\lambda-1)!!}} \left(\sin \frac{\omega}{2}\right)^{\lambda} P_{J-\lambda/2}^{(\lambda+1/2, -1/2)}(\cos \omega), \\ \quad 2J-\lambda-\text{четное}, \\ \sqrt{2J+1} \sqrt{\frac{(2J-\lambda-1)!! (2J+\lambda+1)!!}{(2J-\lambda)!! (2J+\lambda)!!}} \left(\cos \frac{\omega}{2}\right) \left(\sin \frac{\omega}{2}\right)^{\lambda} P_{J-\frac{\lambda+1}{2}}^{(\lambda+1/2, 1/2)}(\cos \omega), \\ \quad 2J-\lambda-\text{нечетное}. \end{cases} \quad (8)$$

Представление  $\chi_{\lambda}^J(\omega)$  в виде гипергеометрических функций

$$\chi_{\lambda}^J(\omega) = \frac{\sqrt{2J+1}}{(2\lambda+1)!!} \sqrt{\frac{(2J+\lambda+1)!}{(2J-\lambda)!}} \left(\sin \frac{\omega}{2}\right)^{\lambda} F\left(-2J+\lambda, 2J+\lambda+2; \lambda+\frac{3}{2}; \sin^2 \frac{\omega}{2}\right), \quad (9)$$

$$\chi_{\lambda}^J(\omega) = \frac{(-1)^{2J-\lambda} (2\lambda)!! \sqrt{2J+1}}{(2\lambda+1)!} \sqrt{\frac{(2J+\lambda+1)!}{(2J-\lambda)!}} \left(\sin \frac{\omega}{2}\right)^{\lambda} F\left(-2J+\lambda, 2J+\lambda+2; \lambda+\frac{3}{2}; \cos^2 \frac{\omega}{2}\right), \quad (10)$$

$$\chi_{\lambda}^J(\omega) = \frac{(-1)^{2J-\lambda} \sqrt{2J+1} 2^{4J-\lambda} (2J)!}{\sqrt{(2J-\lambda)! (2J+\lambda+1)!}} \left(\sin \frac{\omega}{2}\right)^{\lambda} \left(\sin \frac{\omega}{4}\right)^{4J-2\lambda} F\left(-2J+\lambda, -2J-\frac{1}{2}; -4J-1; \frac{1}{\sin^2 \frac{\omega}{2}}\right), \quad (11)$$

$$\chi_{\lambda}^J(\omega) = \frac{\sqrt{2J+1} (4J)!!}{\sqrt{(2J-\lambda)! (2J+\lambda+1)!}} \left(\cos \frac{\omega}{2}\right)^{2J-\lambda} \left(\sin \frac{\omega}{2}\right)^{\lambda} F\left(-J+\frac{1}{2}, \frac{-2J+\lambda+1}{2}; -2J; \frac{1}{\cos^2 \frac{\omega}{2}}\right), \quad (12)$$

$$\chi_{\lambda}^J(\omega) = \frac{\sqrt{2J+1}}{(2\lambda+1)!!} \sqrt{\frac{(2J+\lambda+1)!}{(2J-\lambda)!}} \left(\sin \frac{\omega}{2}\right)^{\lambda} \left(\cos \frac{\omega}{4}\right)^{4J-2\lambda} F\left(-2J+\lambda, -2J-\frac{1}{2}; \lambda+\frac{3}{2}; -\operatorname{tg}^2 \frac{\omega}{4}\right), \quad (13)$$

$$\chi_{\lambda}^J(\omega) = \frac{\sqrt{2J+1} (2J)! i^{\lambda}}{\sqrt{(2J-\lambda)! (2J+\lambda+1)!}} \left(e^{-\frac{i\omega}{2}} - e^{\frac{i\omega}{2}}\right)^{\lambda} e^{\pm i \frac{\omega}{2} (2J-\lambda)} F(-2J+\lambda, \lambda+1; -2J; e^{\mp i\omega}), \quad (14)$$

$$\chi_{\lambda}^J(\omega) = \begin{cases} (-1)^{J+\frac{3\lambda}{2}} \sqrt{2J+1} \sqrt{\frac{(2J-\lambda-1)!! (2J+\lambda)!!}{(2J-\lambda)!! (2J+\lambda+1)!!}} \left(\sin \frac{\omega}{2}\right)^{\lambda} F\left(-J+\frac{\lambda}{2}, J+1+\frac{\lambda}{2}; \frac{1}{2}; \cos^2 \frac{\omega}{2}\right), \\ \text{при } 2J-\lambda \text{ четном,} \\ (-1)^{J+\frac{3\lambda-1}{2}} \sqrt{2J+1} \sqrt{\frac{(2J-\lambda)!! (2J+\lambda+1)!!}{(2J-\lambda-1)!! (2J+\lambda)!!}} \cos \frac{\omega}{2} \left(\sin \frac{\omega}{2}\right)^{\lambda} \times \\ \times F\left(-J+\frac{\lambda+1}{2}, J+1+\frac{\lambda+1}{2}; \frac{3}{2}; \cos^2 \frac{\omega}{2}\right), \\ \text{при } 2J-\lambda \text{ нечетном,} \end{cases} \quad (15)$$

$$\chi_{\lambda}^J(\omega) = \begin{cases} \frac{\sqrt{2J+1}}{(2\lambda+1)!!} \sqrt{\frac{(2J+\lambda+1)!}{(2J-\lambda)!}} \left(\sin \frac{\omega}{2}\right)^{\lambda} F\left(-J+\frac{\lambda}{2}, J+1+\frac{\lambda}{2}; \lambda+\frac{3}{2}; \sin^2 \frac{\omega}{2}\right), \\ \text{при } 2J-\lambda \text{ четном,} \\ \frac{\sqrt{2J+1}}{(2\lambda+1)!!} \sqrt{\frac{(2J+\lambda+1)!}{(2J-\lambda)!}} \cos \frac{\omega}{2} \left(\sin \frac{\omega}{2}\right)^{\lambda} F\left(-J+\frac{\lambda+1}{2}, J+1+\frac{\lambda+1}{2}; \lambda+\frac{3}{2}; \sin^2 \frac{\omega}{2}\right), \\ \text{при } 2J-\lambda \text{ нечетном.} \end{cases} \quad (16)$$

### Интегральные представления

$$\chi_{\lambda}^J(\omega) = \frac{1}{2} \frac{1}{\lambda!} \sqrt{\frac{(2J+1)(2J+\lambda+1)}{(2J-\lambda)!}} \frac{1}{\left(\sin \frac{\omega}{2}\right)^{\lambda+1}} \int_0^{\omega} \cos\left[(2J+1)\frac{\psi}{2}\right] \left(\cos \frac{\psi}{2} - \cos \frac{\omega}{2}\right)^{\lambda} d\psi, \quad (17)$$

$$\chi_{\lambda}^J(\omega) = (-i)^{\lambda} \frac{\sqrt{(2J+1)(2J+\lambda+1)! (2J-\lambda)!}}{2(2J)!} \int_{-1}^{+1} P_{\lambda}(x) \left[\cos \frac{\omega}{2} + ix \sin \frac{\omega}{2}\right]^{2J} dx. \quad (18)$$

### 3. Свойства функций $\chi_{\lambda}^J(\omega)$

$$\chi_{\lambda}^{J*}(\omega) = \chi_{\lambda}^J(\omega) = (-1)^{\lambda} \chi_{\lambda}^J(-\omega), \quad (19)$$

$$\chi_{\lambda}^J(\omega + 2\pi n) = (-1)^{2Jn} \chi_{\lambda}^J(\omega), \quad \chi_{\lambda}^J(2\pi - \omega) = (-1)^{2J-\lambda} \chi_{\lambda}^J(\omega). \quad (20)$$

### Частные значения

$$\chi_{\lambda}^J(0) = (2J+1) \delta_{\lambda 0}, \quad \chi_{\lambda}^J(2\pi) = (-1)^{2J} (2J+1) \delta_{\lambda 0},$$

$$\chi_{\lambda}^J(\pi) = \begin{cases} (-1)^{J-\frac{\lambda}{2}} \sqrt{\frac{(2J+\lambda)!! (2J-\lambda-1)!! (2J+1)}{(2J-\lambda)!! (2J+\lambda+1)!!}} & \text{при } 2J-\lambda \text{ четном,} \\ 0 & \text{при } 2J-\lambda \text{ нечетном.} \end{cases} \quad (21)$$

### Рекуррентные соотношения

Обобщенные характеры удовлетворяют следующим рекуррентным соотношениям:

$$2 \frac{d}{d\omega} \chi_{\lambda}^J(\omega) = \frac{\lambda}{2\lambda+1} \sqrt{(2J+1)^2 - \lambda^2} \chi_{\lambda-1}^J(\omega) - \frac{\lambda+1}{2\lambda+1} \sqrt{(2J+1)^2 - (\lambda+1)^2} \chi_{\lambda+1}^J(\omega), \quad (22)$$

$$(2\lambda+1) \operatorname{ctg} \frac{\omega}{2} \chi_{\lambda}^J(\omega) = \sqrt{(2J+1)^2 - \lambda^2} \chi_{\lambda-1}^J(\omega) + \sqrt{(2J+1)^2 - (\lambda+1)^2} \chi_{\lambda+1}^J(\omega). \quad (23)$$

Эти соотношения позволяют найти все  $2J+1$  функций  $\chi_{\lambda}^J(\omega)$  по одной известной  $\chi_{2J}^J(\omega)$ .

### Асимптотика

При  $J \rightarrow \infty$  и одновременно  $\omega \rightarrow 0$  так, что  $J\omega = x$  остается конечным, имеет место следующее соотношение:

$$\lim_{\substack{J \rightarrow \infty \\ \omega \rightarrow 0}} \frac{1}{2J+1} \chi_{\lambda}^J(\omega) = j_{\lambda}(x), \quad (24)$$

где  $j_{\lambda}(x)$  — сферическая функция Бесселя.

При  $\omega \rightarrow 0$

$$\chi_{\lambda}^J(\omega) \approx \left(\frac{\omega}{2}\right)^{\lambda} \frac{1}{(2\lambda+1)!!} \sqrt{(2J+1) \frac{(2J+\lambda+1)!}{(2J-\lambda)!}}. \quad (25)$$

## 4. Дифференциальное уравнение

Функции  $\chi_{\lambda}^J(\omega)$  являются решениями линейного дифференциального уравнения второго порядка

$$\frac{d^2}{d\omega^2} \chi_{\lambda}^J(\omega) + \operatorname{ctg} \frac{\omega}{2} \frac{d}{d\omega} \chi_{\lambda}^J(\omega) + \left[ J(J+1) - \frac{\lambda(\lambda+1)}{4 \sin^2 \frac{\omega}{2}} \right] \chi_{\lambda}^J(\omega) = 0 \quad (26)$$

с граничными условиями

$$\chi_{\lambda}^J(0) = (2J+1) \delta_{\lambda 0}, \quad \chi_{\lambda}^J(2\pi) = (-1)^{2J} (2J+1) \delta_{\lambda 0}. \quad (27)$$

## 5. Ортогональность и полнота

Совокупность функции  $\chi_{\lambda}^J(\omega)$  образует полную систему ортогональных и нормированных функций одной переменной  $\omega$ , заданной в области  $0 \leq \omega < 2\pi$ .

Условия ортогональности и нормировки

$$\int_0^{2\pi} d\omega \sin^2 \frac{\omega}{2} \chi_{\lambda_1}^{J_1}(\omega) \chi_{\lambda_2}^{J_2}(\omega) = \pi \delta_{J_1 J_2}. \quad (28)$$

Условие полноты

$$\sum_{J=0, 1/2, 1, \dots}^{\infty} \chi_{\lambda}^J(\omega_1) \chi_{\lambda}^J(\omega_2) = \frac{\pi \delta(\omega_1 - \omega_2)}{\sin^2 \frac{\omega_1}{2}}. \quad (29)$$

## 6. Теорема сложения обобщенных характеров

В случае, когда поворот  $R(\omega; \Theta, \Phi)$  является результатом двух последовательных поворотов  $R_1(\omega_1; \Theta_1, \Phi_1)$  и  $R_2(\omega_2; \Theta_2, \Phi_2)$ , обобщенные характеры этих поворотов связаны следующим соотношением:

$$\chi_\lambda^J(\omega) = \sqrt{\frac{(2J - \lambda)!}{(2J + \lambda + 1)!(2J + 1)}} \left( \frac{\sin \frac{\omega}{2}}{\sin \frac{\omega_1}{2} \sin \frac{\omega_2}{2} \sin \chi} \right)^\lambda \sum_{l=\lambda}^{2J} (-1)^l (2l + 1) P_l(\cos \chi) \chi_l^J(\omega_1) \chi_l^J(\omega_2), \quad (30)$$

где  $P_l^\lambda(\cos \chi)$  — присоединенный полином Лежандра от косинуса угла между осями поворотов  $\mathbf{n}_1(\Theta_1, \Phi_1)$  и  $\mathbf{n}_2(\Theta_2, \Phi_2)$ ,

$$\cos \chi = (\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2) = \cos \Theta_1 \cos \Theta_2 + \sin \Theta_1 \sin \Theta_2 \cos(\Phi_1 - \Phi_2). \quad (31)$$

Угол результирующего поворота определяется соотношением

$$\cos \frac{\omega}{2} = \cos \frac{\omega_1}{2} \cos \frac{\omega_2}{2} - \sin \frac{\omega_1}{2} \sin \frac{\omega_2}{2} \cos \chi. \quad (32)$$

## 7. Некоторые суммы, содержащие обобщенные характеры

### а. Суммы по $\lambda$

$$\sum_{\lambda=0}^{2J} (\pm 1)^\lambda i^\lambda \frac{2\lambda + 1}{2J + 1} \chi_\lambda^J(\omega) C_{JM\lambda 0}^{JM} = e^{\pm iM\omega}, \quad (|M| \leq J), \quad (33)$$

$$\sum_{\lambda=0, 2, \dots}^{\leq 2J} (-i)^\lambda \frac{2\lambda + 1}{2J + 1} \chi_\lambda^J(\omega) C_{JM\lambda 0}^{JM} = \cos M\omega, \quad (|M| \leq J), \quad (34)$$

$$\sum_{\lambda=1, 3, \dots}^{\leq 2J} (-i)^{\lambda-1} \frac{2\lambda + 1}{2J + 1} \chi_\lambda^J(\omega) C_{JM\lambda 0}^{JM} = \sin M\omega, \quad (|M| \leq J). \quad (35)$$

В формулах (33)–(35)  $J$  — произвольное целое или полуцелое число, большее или равное  $|M|$ .

$$\sum_{\lambda=0, 2, \dots}^{\leq 2l} \frac{2\lambda + 1}{2l + 1} \frac{(\lambda - 1)!!}{\lambda!!} \chi_\lambda^l(\vartheta) C_{l0\lambda 0}^{l0} = P_l(\cos \vartheta), \quad (36)$$

$$\sum_{\lambda=|m|}^{2l} \frac{2\lambda + 1}{2l + 1} \sqrt{\frac{(\lambda + m - 1)!! (\lambda - m - 1)!!}{(\lambda + m)!! (\lambda - m)!!}} \chi_\lambda(\vartheta) C_{l0\lambda m}^{l m} = \sqrt{\frac{4\pi}{2l + 1}} Y_{lm}(\vartheta, 0), \quad (37)$$

( $\lambda + m$  — четное),

$$\sum_{\lambda=|M'-M|}^{\leq 2l} (-1)^\lambda \frac{2\lambda + 1}{2J + 1} \sqrt{\frac{(\lambda + M' - M - 1)!! (\lambda - M' + M - 1)!!}{(\lambda + M' - M)!! (\lambda - M' + M)!!}} \chi_\lambda^J(\beta) C_{JM\lambda M'-M}^{JM'} = d_{MM'}^J(\beta), \quad (38)$$

( $\lambda + M' - M$  — четное).

### б. Суммы по $J$

$$\sum_{J=\nu/2}^{\infty} \sqrt{\frac{(2J + \nu + 1)!}{(2J - \nu)!}} \frac{\chi_\nu^J(\omega)}{\sqrt{2J + 1}} t^{2J} = (2\nu)!! \frac{(-t \sin \frac{\omega}{2})^\nu}{R^{2(\nu+1)}}, \quad (39)$$

$$\sum_{J=\nu/2}^{\infty} \frac{(4J + 1)!! \chi_\nu^J(\omega) \left(\frac{t}{2}\right)^{2J}}{\sqrt{(2J + 1)(2J - \nu)!(2J + \nu + 1)!}} = \sqrt{2} \frac{(-t \sin \frac{\omega}{2})^\nu}{R \left(1 - t \cos \frac{\omega}{2} + R\right)^{\nu+1/2}}, \quad (40)$$

где  $R^2 = 1 - 2t \cos \frac{\omega}{2} + t^2$ .

$$\sum_{J=\nu/2}^{\infty} i^{2J-\nu} \sqrt{\frac{(2J + \nu + 1)!}{(2J - \nu)!}} \chi_\nu^J(\omega) J_{2J+1}(y) = \frac{y}{2} \left(y \sin \frac{\omega}{2}\right)^\nu e^{iy \cos \frac{\omega}{2}}, \quad (41)$$

$$\sum_{J=\nu/2}^{\infty} \frac{\chi_{\nu}^J(\omega) t^{2J}}{\sqrt{(2J+1)(2J-\nu)! (2J+\nu+1)!}} = j_{\nu} \left( t \sin \frac{\omega}{2} \right) e^{t \cos \frac{\omega}{2}}, \quad (42)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{J=\nu/2}^{\infty} \frac{\Gamma(k+2J-\nu)}{\Gamma(k)} \frac{\chi_{\nu}^J(\omega) t^{2J}}{\sqrt{(2J+1)(2J-\nu)! (2J+\nu+1)!}} = \\ & = \frac{1}{(2\nu+1)!!} \frac{\left( t \sin \frac{\omega}{2} \right)^{\nu}}{\left( 1 - t \cos \frac{\omega}{2} \right)^k} F \left( \frac{k}{2}, \frac{k+1}{2}; \nu + \frac{3}{2}; - \left( \frac{t \sin \frac{\omega}{2}}{1 - t \cos \frac{\omega}{2}} \right)^2 \right). \end{aligned} \quad (43)$$

Здесь  $k$  — произвольное число.

$$\begin{aligned} & \sum_{J=\nu/2}^{\infty} \frac{\chi_{\nu}^J(\omega) (2t)^{2J}}{(4J+1)!! \sqrt{(2J+1)(2J-\nu)! (2J+\nu+1)!}} = \\ & = \frac{\left( 2t \sin \frac{\omega}{2} \right)^{\nu}}{[(2\nu+1)!!]^2} {}_0F_1 \left( ; \nu + \frac{3}{2}; -t \sin^2 \frac{\omega}{4} \right) {}_0F_1 \left( ; \nu + \frac{3}{2}; t \cos^2 \frac{\omega}{4} \right). \end{aligned} \quad (44)$$

Функции, стоящие в правой части формул (39)–(44), можно рассматривать как производящие функции для  $\chi_{\lambda}^J(\omega)$ .

### 8. Явный вид функций $\chi_{\lambda}^J(\omega)$

при частных значениях параметра  $\lambda$

а. При  $\lambda = 2J, 2J-1, 2J-2, 2J-3$  обобщенные характеры имеют следующий явный вид:

$$\chi_{2J}^J(\omega) = \sqrt{2J+1} \sqrt{\frac{(4J)!!}{(4J+1)!!}} \left( \sin \frac{\omega}{2} \right)^{2J}, \quad (45)$$

$$\chi_{2J-1}^J(\omega) = \sqrt{2J+1} \sqrt{\frac{(4J)!!}{(4J-1)!!}} \left( \sin \frac{\omega}{2} \right)^{2J-1} \cos \frac{\omega}{2}, \quad (46)$$

$$\chi_{2J-2}^J(\omega) = \sqrt{2J+1} \sqrt{\frac{(4J-2)!!}{2(4J-1)!!}} \left( \sin \frac{\omega}{2} \right)^{2J-2} \left[ 4J \cos^2 \frac{\omega}{2} - 1 \right], \quad (47)$$

$$\chi_{2J-3}^J(\omega) = \sqrt{2J+1} \sqrt{\frac{(4J-2)!!}{6(4J-3)!!}} \left( \sin \frac{\omega}{2} \right)^{2J-3} \left[ 4J \cos^3 \frac{\omega}{2} - 3 \cos \frac{\omega}{2} \right]. \quad (48)$$

б. При  $\lambda = 0, 1, 2$  функции  $\chi_{\lambda}^J(\omega)$  имеют вид

$$\chi_0^J(\omega) = \frac{\sin(2J+1)\frac{\omega}{2}}{\sin \frac{\omega}{2}} = \frac{\cos J\omega - \cos(J+1)\omega}{1 - \cos \omega}, \quad (49)$$

$$\chi_1^J(\omega) = \frac{-1}{\sqrt{J(J+1)}} \frac{2J \cos(2J+1)\frac{\omega}{2} \sin \frac{\omega}{2} - \sin J\omega}{2 \sin^2 \frac{\omega}{2}} = \frac{-1}{\sqrt{J(J+1)}} \frac{J \sin(J+1)\omega - (J+1) \sin J\omega}{1 - \cos \omega}, \quad (50)$$

$$\chi_2^J(\omega) = \frac{1}{\sqrt{J(J+1)(2J-1)(2J+3)}} \left\{ \frac{\left[ 3 - 2J(2J-1) \sin^2 \frac{\omega}{2} \right] \sin(2J+1)\frac{\omega}{2}}{2 \sin^3 \frac{\omega}{2}} - \frac{3}{2} (2J+1) \frac{\cos J\omega}{\sin^2 \frac{\omega}{2}} \right\}. \quad (51)$$

Обобщенные характеры выражаются через производные от  $\chi^J(\omega)$  по  $\omega$ :

$$\begin{aligned} \chi_0^J(\omega) &= \chi^J(\omega), \\ \chi_1^J(\omega) &= \frac{-1}{\sqrt{J(J+1)}} \frac{d\chi^J(\omega)}{d\omega}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\chi_2^J(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{J(J+1)(2J-1)(2J+3)}} \left[ J(J+1)\chi^J(\omega) + 3\frac{d^2\chi^J(\omega)}{d\omega^2} \right], \\ \chi_3^J(\omega) &= -4\sqrt{2J+1} \sqrt{\frac{(2J-3)!}{(2J+4)!}} \left\{ [3J(J+1)-1] \frac{d\chi^J(\omega)}{d\omega} + 5\frac{d^2\chi^J(\omega)}{d\omega^2} \right\}, \\ \chi_4^J(\omega) &= 2\sqrt{2J+1} \sqrt{\frac{(2J-4)!}{(2J+5)!}} \left\{ 3(J-1)J(J+1)(J+2)\chi^J(\omega) + \right. \\ &\quad \left. + 5[6J(J+1)-5] \frac{d^2\chi^J(\omega)}{d\omega^2} + 35\frac{d^4\chi^J(\omega)}{d\omega^4} \right\}.\end{aligned}\quad (52)$$

### 9. ЯВНЫЙ ВИД $\chi^J(\omega)$ ПРИ ЧАСТНЫХ ЗНАЧЕНИЯХ $J=0, 1/2, 1, 3/2, 2$

$$\begin{aligned}J=0 \quad \chi_0^0(\omega) &= 1; \\ J=1/2 \quad \chi_0^{1/2}(\omega) &= 2 \cos \frac{\omega}{2}; \\ \chi_1^{1/2}(\omega) &= \frac{2}{\sqrt{3}} \sin \frac{\omega}{2}; \\ J=1 \quad \chi_0^1(\omega) &= 1 + 2 \cos \omega, \\ \chi_1^1(\omega) &= \sqrt{2} \sin \omega, \\ \chi_2^1(\omega) &= \sqrt{\frac{2}{5}} (1 - \cos \omega); \\ J=3/2 \quad \chi_0^{3/2}(\omega) &= 4 \cos \omega \cos \frac{\omega}{2} = 4 \cos \frac{\omega}{2} \left( 2 \cos^2 \frac{\omega}{2} - 1 \right), \\ \chi_1^{3/2}(\omega) &= \frac{4}{\sqrt{3 \cdot 5}} (2 + 3 \cos \omega) \sin \frac{\omega}{2} = \frac{4}{\sqrt{3 \cdot 5}} \sin \frac{\omega}{2} \left( 6 \cos^2 \frac{\omega}{2} - 1 \right), \\ \chi_2^{3/2}(\omega) &= \frac{8}{\sqrt{5}} \left( \sin \frac{\omega}{2} \right)^2 \cos \frac{\omega}{2} = \frac{4}{\sqrt{5}} \sin \frac{\omega}{2} \sin \omega, \\ \chi_3^{3/2}(\omega) &= \frac{4}{\sqrt{5 \cdot 7}} \sin \frac{\omega}{2} (1 - \cos^2 \omega) = \frac{8}{\sqrt{5 \cdot 7}} \left( \sin \frac{\omega}{2} \right)^3; \\ J=2 \quad \chi_0^2(\omega) &= 4 \cos^2 \omega + 2 \cos \omega - 1, \\ \chi_1^2(\omega) &= \sqrt{\frac{2}{3}} \sin \omega (1 + 4 \cos \omega), \\ \chi_2^2(\omega) &= \sqrt{\frac{2}{7}} (3 + \cos \omega - 4 \cos^2 \omega), \\ \chi_3^2(\omega) &= 2 \sqrt{\frac{2}{7}} \sin \omega (1 - \cos \omega), \\ \chi_4^2(\omega) &= \frac{2}{3} \sqrt{\frac{2}{7}} (1 - \cos \omega)^2.\end{aligned}\quad (53)$$

#### 4.16. ВИД $D_{MM'}^J(\alpha, \beta, \gamma)$ ПРИ ЧАСТНЫХ ЗНАЧЕНИЯХ УГЛОВ $\alpha, \beta, \gamma$

В формулах, приведенных ниже,  $n$  и  $l$  — целые числа.

$$D_{MM'}^J(0, 0, 0) = \delta_{MM'}, \quad (1)$$

$$D_{MM'}^J(\alpha, 0, \gamma) = \delta_{MM'} e^{-iM(\alpha+\gamma)}, \quad (2)$$

$$D_{MM'}^J(\alpha, \pm 2n\pi, \gamma) = \delta_{MM'} (-1)^{2nJ} e^{-iM(\alpha+\gamma)}, \quad (3)$$

$$D_{MM'}^J(\alpha, \pm (2n+1)\pi, \gamma) = \delta_{-MM'} (-1)^{\pm(2n+1)J+M} e^{-iM(\alpha-\gamma)}, \quad (4)$$

$$D_{MM'}^J\left(\alpha, \frac{\pi}{2}, \gamma\right) = (-1)^{M-M'} e^{-i\alpha M - i\gamma M'} \frac{1}{2^J} \sqrt{\frac{(J+M)! (J-M)!}{(J+M')! (J-M')!}} \sum_k (-1)^k \binom{J+M'}{k} \binom{J-M'}{k+M-M'}.\quad (5)$$

В частности, при целочисленных значениях  $J$  из (5) получаем

$$D_{m0}^l\left(\alpha, \frac{\pi}{2}, \gamma\right) = (-1)^{\frac{l+m}{2}} \delta_{l-m, 2m} \frac{\sqrt{(l-m)! (l+m)!}}{2^l \left(\frac{l+m}{2}\right)! \left(\frac{l-m}{2}\right)!} e^{-im\alpha}, \quad (6)$$

$$D_{0m}^l\left(\alpha, \frac{\pi}{2}, \gamma\right) = (-1)^{\frac{l-m}{2}} \delta_{l-m, 2m} \frac{\sqrt{(l-m)! (l+m)!}}{2^l \left(\frac{l+m}{2}\right)! \left(\frac{l-m}{2}\right)!} e^{-im\gamma},$$

$$D_{00}^l\left(\alpha, \frac{\pi}{2}, \gamma\right) = P_l(0) = \delta_{l, 2n} (-1)^{l/2} \frac{(l-1)!!}{l!!}, \quad (7)$$

$$D_{\pm 1m}^l\left(\alpha, \frac{\pi}{2}, \gamma\right) = \sqrt{\frac{(l-m)! (l+m)!}{l(l+1)}} \left\{ \delta_{l+m, 2k} \frac{m(-1)^{\frac{l-m}{2}}}{2^l \left(\frac{l-m}{2}\right)! \left(\frac{l+m}{2}\right)!} \mp \right. \\ \left. \mp \delta_{l+m, 2k+1} \frac{(-1)^{\frac{l-m-1}{2}}}{2^{l-1} \left(\frac{l-m-1}{2}\right)! \left(\frac{l+m-1}{2}\right)!} \right\} e^{\mp i\alpha - im\gamma}. \quad (8)$$

Квадраты  $D$ -функций при  $\beta = \pi/2$  могут быть представлены в виде

$$\left[ D_{MM'}^J\left(\alpha, \frac{\pi}{2}, \gamma\right) \right]^2 = e^{-i2M\alpha - i2M'\gamma} (-1)^{M-M'} \sum_{k=0, 2, 4, \dots} (-1)^{k/2} \frac{(l-1)!!}{l!!} C_{JM'J-M}^{l0} C_{JM'J-M'}^{l0}. \quad (9)$$

Таблицы численных значений  $D_{MM'}^J\left(0, \frac{\pi}{2}, 0\right) \equiv d_{MM'}^J\left(\frac{\pi}{2}\right)$  при  $0 \leq J \leq 5$  даны в 4.21.

#### 4.17. ВИД $D_{MM'}^J(\alpha, \beta, \gamma)$ ПРИ ЧАСТНЫХ ЗНАЧЕНИЯХ ИНДЕКСОВ

1.  $M=0$  или  $M'=0$ , ( $J=l$  — целое)

$$D_{m0}^l(\alpha, \beta, \gamma) = (-1)^m \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} Y_{l-m}(\beta, \alpha) = \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} Y_{lm}^*(\beta, \alpha), \quad (1)$$

$$D_{0m}^l(\alpha, \beta, \gamma) = \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} Y_{l-m}(\beta, \gamma) = (-1)^m \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} Y_{lm}^*(\beta, \gamma).$$

В частности,

$$D_{00}^l(\alpha, \beta, \gamma) = P_l(\cos \beta),$$

$$D_{\pm 10}^l(\alpha, \beta, \gamma) = \mp e^{\mp i\alpha} \frac{\sin \beta}{\sqrt{l(l+1)}} P_l'(\cos \beta),$$

$$D_{0\pm 1}^l(\alpha, \beta, \gamma) = \pm e^{\mp i\gamma} \frac{\sin \beta}{\sqrt{l(l+1)}} P_l'(\cos \beta), \quad (2)$$

$$D_{\pm 20}^l(\alpha, \beta, \gamma) = e^{\mp i2\alpha} \left\{ -\sqrt{\frac{l(l+1)}{(l-1)(l+2)}} P_l(\cos \beta) + \frac{2 \cos \beta}{\sqrt{(l-1)l(l+1)(l+2)}} P_l'(\cos \beta) \right\},$$

$$D_{0\pm 2}^l(\alpha, \beta, \gamma) = e^{\mp i2\gamma} \left\{ -\sqrt{\frac{l(l+1)}{(l-1)(l+2)}} P_l(\cos \beta) + \frac{2 \cos \beta}{\sqrt{(l-1)l(l+1)(l+2)}} P_l'(\cos \beta) \right\}.$$

2.  $M = \pm 1/2$  или  $M' = \pm 1/2$  ( $J$  — полуцелое)

$$D_{\pm 1/2 M'}^J(\alpha, \beta, \gamma) = e^{\pm i \frac{\gamma - \alpha}{2}} \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2J+1} \sin \frac{\beta}{2}} \left\{ \pm \sqrt{\frac{J \pm M' + 1}{J+1}} Y_{J+1/2, \mp 1/2 - M'}(\beta, \gamma) \mp \right. \\ \left. \mp \sqrt{\frac{J \mp M'}{J}} Y_{J-1/2, \mp 1/2 - M'}(\beta, \gamma) \right\}, \quad (3)$$

$$D_{M \pm 1/2}^J(\alpha, \beta, \gamma) = (-1)^{\pm \frac{1}{2} - M} e^{\mp i \frac{\gamma - \alpha}{2}} \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2J+1} \sin \frac{\beta}{2}} \left\{ \pm \sqrt{\frac{J \pm M + 1}{J+1}} Y_{J+1/2, \mp 1/2 - M}(\beta, \alpha) \mp \right. \\ \left. \mp \sqrt{\frac{J \mp M}{J}} Y_{J-1/2, \mp 1/2 - M}(\beta, \alpha) \right\}.$$

В частности,

$$D_{1/2, 1/2}^J(\alpha, \beta, \gamma) = e^{-i \frac{\alpha + \gamma}{2}} \frac{\cos \frac{\beta}{2}}{J + \frac{1}{2}} \{P'_{J+1/2}(\cos \beta) - P'_{J-1/2}(\cos \beta)\}, \\ D_{1/2, -1/2}^J(\alpha, \beta, \gamma) = -e^{-i \frac{\alpha - \gamma}{2}} \frac{\sin \frac{\beta}{2}}{J + \frac{1}{2}} \{P'_{J+1/2}(\cos \beta) + P'_{J-1/2}(\cos \beta)\}, \\ D_{-1/2, 1/2}^J(\alpha, \beta, \gamma) = e^{i \frac{\alpha - \gamma}{2}} \frac{\sin \frac{\beta}{2}}{J + \frac{1}{2}} \{P'_{J+1/2}(\cos \beta) + P'_{J-1/2}(\cos \beta)\}, \\ D_{-1/2, -1/2}^J(\alpha, \beta, \gamma) = e^{i \frac{\alpha + \gamma}{2}} \frac{\cos \frac{\beta}{2}}{J + \frac{1}{2}} \{P'_{J+1/2}(\cos \beta) - P'_{J-1/2}(\cos \beta)\}.$$

3.  $M = \pm 1$  или  $M' = \pm 1$ , ( $J = l$  — целое)

$$D_{\pm 1 m}^l(\alpha, \beta, \gamma) = e^{\mp i \alpha} \sqrt{\frac{4\pi}{l(l+1)(2l+1)}} \left\{ \mp \sqrt{(l-m)(l+m+1)} \frac{1 \mp \cos \beta}{2} Y_{l-m-1}(\beta, \gamma) e^{\pm i \gamma} + \right. \\ \left. + m \sin \beta Y_{l-m}(\beta, \gamma) \pm \sqrt{(l+m)(l-m+1)} \frac{1 \pm \cos \beta}{2} Y_{l-m+1}(\beta, \gamma) e^{-i \gamma} \right\}, \quad (5)$$

$$D_{m \pm 1}^l(\alpha, \beta, \gamma) = e^{\mp i \gamma} (-1)^{m \pm 1} \sqrt{\frac{4\pi}{l(l+1)(2l+1)}} \left\{ \mp \sqrt{(l-m)(l+m+1)} \frac{1 \mp \cos \beta}{2} Y_{l-m-1}(\beta, \alpha) e^{\pm i \alpha} + \right. \\ \left. + m \sin \beta Y_{l-m}(\beta, \alpha) \pm \sqrt{(l+m)(l-m+1)} \frac{1 \pm \cos \beta}{2} Y_{l-m+1}(\beta, \alpha) e^{-i \alpha} \right\}.$$

В частности,

$$D_{\pm 1 1}^l(\alpha, \beta, \gamma) = e^{\mp i \alpha - i \gamma} \frac{1 \pm \cos \beta}{l(l+1)} \{P'_l(\cos \beta) \mp (1 \mp \cos \beta) P''_l(\cos \beta)\}, \\ D_{\pm 1 -1}^l(\alpha, \beta, \gamma) = e^{\mp i \alpha + i \gamma} \frac{1 \mp \cos \beta}{l(l+1)} \{P'_l(\cos \beta) \pm (1 \pm \cos \beta) P''_l(\cos \beta)\}.$$

(6)



4.  $M = \pm(J-1)$  или  $M' = \pm(J-1)$ 

$$\begin{aligned}
D_{J-1m}^J(\alpha, \beta, \gamma) &= (-1)^{J-m-1} \sqrt{\frac{(2J-1)!}{(J+m)!(J-m)!}} \left(\cos \frac{\beta}{2}\right)^{J+m-1} \left(\sin \frac{\beta}{2}\right)^{J-m-1} [J \cos \beta - m] e^{-i(J-1)\alpha - im\gamma}, \\
D_{-J+1m}^J(\alpha, \beta, \gamma) &= e^{i(J-1)\alpha - im\gamma} \sqrt{\frac{(2J-1)!}{(J+m)!(J-m)!}} \left(\cos \frac{\beta}{2}\right)^{J-m-1} \left(\sin \frac{\beta}{2}\right)^{J+m-1} [J \cos \beta + m], \\
D_{mJ-1}^J(\alpha, \beta, \gamma) &= e^{-i(J-1)\gamma - im\alpha} \sqrt{\frac{(2J-1)!}{(J+m)!(J-m)!}} \left(\cos \frac{\beta}{2}\right)^{J+m-1} \left(\sin \frac{\beta}{2}\right)^{J-m-1} [J \cos \beta - m], \\
D_{m-J+1}^J(\alpha, \beta, \gamma) &= (-1)^{J+m-1} e^{+i(J-1)\gamma - im\alpha} \sqrt{\frac{(2J-1)!}{(J+m)!(J-m)!}} \left(\cos \frac{\beta}{2}\right)^{J-m-1} \left(\sin \frac{\beta}{2}\right)^{J+m-1} [J \cos \beta + m].
\end{aligned} \tag{7}$$

5.  $M = \pm J$  или  $M' = \pm J$ 

$$\begin{aligned}
D_{JM}^J(\alpha, \beta, \gamma) &= \sqrt{\frac{(2J)!}{(J+M)!(J-M)!}} \left(\cos \frac{\beta}{2}\right)^{J+M} \left(-\sin \frac{\beta}{2}\right)^{J-M} e^{-iJ\alpha - iM\gamma}, \\
D_{-JM}^J(\alpha, \beta, \gamma) &= \sqrt{\frac{(2J)!}{(J+M)!(J-M)!}} \left(\cos \frac{\beta}{2}\right)^{J-M} \left(\sin \frac{\beta}{2}\right)^{J+M} e^{iJ\alpha - iM\gamma}, \\
D_{MJ}^J(\alpha, \beta, \gamma) &= \sqrt{\frac{(2J)!}{(J+M)!(J-M)!}} \left(\cos \frac{\beta}{2}\right)^{J+M} \left(\sin \frac{\beta}{2}\right)^{J-M} e^{-iM\alpha - iJ\gamma}, \\
D_{M-J}^J(\alpha, \beta, \gamma) &= \sqrt{\frac{(2J)!}{(J+M)!(J-M)!}} \left(\cos \frac{\beta}{2}\right)^{J-M} \left(-\sin \frac{\beta}{2}\right)^{J+M} e^{-iM\alpha + iJ\gamma}.
\end{aligned} \tag{8}$$

Явный вид  $d_{MM'}^J(\beta)$  при  $J = 0, 1/2, 1, 3/2, 2, 5/2, 3, 7/2, 4, 9/2, 5$  дан в 4.21.

4.18. АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ВЫРАЖЕНИЯ ДЛЯ  $D_{MM'}^J(\alpha, \beta, \gamma)$ 1. Вид  $D_{MM'}^J(\alpha, \beta, \gamma)$  при  $J \gg 1$ 

$$\begin{aligned}
D_{MM'}^J(\alpha, \beta, \gamma) &\approx e^{-iM\alpha - iM'\gamma} \xi_{MM'} \sqrt{\frac{s!(s+\mu+\nu)!}{(s+\mu)!(s+\nu)!}} \times \\
&\times \sqrt{\frac{2}{\pi s}} \frac{\cos \left[ \left( s + \frac{\mu+\nu+1}{2} \right) \beta - \frac{\pi}{4} (2\mu+1) \right]}{\sqrt{\sin \beta}} + O\left(\frac{1}{J^{3/2}}\right).
\end{aligned} \tag{1}$$

Индексы  $s, \mu, \nu$  связаны с  $J, M, M'$  соотношениями 4.3(14), величина  $\xi_{MM'}$  дается формулой 4.3(15).

Если  $J \rightarrow \infty$ , а  $\beta \rightarrow 0$ , так что  $J\beta \rightarrow \text{const}$ , то

$$D_{MM'}^J(\alpha, \beta, \gamma) \approx e^{-iM\alpha - iM'\gamma} J_{M-M'}(J\beta), \tag{2}$$

где  $J_n(x)$  — функция Бесселя.

2. Вид  $D_{MM'}^J(\alpha, \beta, \gamma)$  при  $\beta \ll 1$  и  $\pi - \beta \ll 1$ .

При  $\beta \ll 1$

$$\begin{aligned}
D_{MM'}^J(\alpha, \beta, \gamma) &\approx e^{-iM\alpha - iM'\gamma} \frac{\xi_{MM'}}{\mu!} \sqrt{\frac{(s+\mu+\nu)!(s+\mu)!}{s!(s+\nu)!}} \times \\
&\times \left(\frac{\beta}{2}\right)^\mu \left\{ 1 - \frac{2s(s+\mu+\nu+1) + \nu(\mu+1)}{2(\mu+1)} \left(\frac{\beta}{2}\right)^2 + \dots \right\},
\end{aligned} \tag{3}$$

ТАБЛИЦА 4.2

Автор, работа,* год	Последовательность поворотов, углы и оси вращения	Вид преобразования из системы в систему	Связь функций, используемых в работе (левая часть), с D-функциями данной книги (правая часть)
Эдмондс [16], 1958	$e^{-i\alpha J_x} e^{-i\beta J_y} e^{-i\gamma J_z}$	$\Psi_{JM'}(\vartheta', \varphi') = \sum_M \Psi_{JM}(\vartheta, \varphi) D_{MM'}^J(\alpha, \beta, \gamma)$	$D_{MM'}^{(J)}(\alpha, \beta, \gamma) = D_{MM'}^J(\alpha, \beta, \gamma)$
Роуз [21], 1957	То же	То же	То же
Бринк, Сэчлер [9], 1968	» »	» »	» »
Месси **, 1960	» »	» »	» »
Тинкхэм [39], 1964	» »	» »	» »
Ньютон [28], 1969	» »	» »	» »
Балдин, Гольдманский, Розенталь [8], 1968	» »	» »	» »
Де Шалит, Тальми [32], 1963	» »	» »	» »
Долгинов [14], 1961	$e^{i\alpha J_x} e^{i\beta J_y} e^{i\gamma J_z}$	$\Psi_{JM}(\vartheta, \varphi) = \sum_{M'} D_{MM'}^J(\alpha, \beta, \gamma) \Psi_{JM'}(\vartheta', \varphi')$	$D_{MM'}^J(\alpha, \beta, \gamma) = D_{MM'}^J(-\alpha, -\beta, -\gamma)$
Давыдов [12], 1963	То же	То же	То же
Бор, Моттelson [3], 1971	» »	$\Psi_{JM}(\vartheta', \varphi') = \sum_M \Psi_{JM}(\vartheta, \varphi) D_{MM'}^{J*}(\alpha, \beta, \gamma)$	$D_{MM'}^J(\alpha, \beta, \gamma) = D_{MM'}^{J*}(\alpha, \beta, \gamma)$
Вигнер [43], 1961	» »		$D^J((\alpha, \beta, \gamma))_{MM'} = D_{MM'}^J(-\alpha, -\beta, -\gamma)$
Роуз [30], 1955	$e^{i\alpha J_x} e^{i\beta J_y} e^{i\gamma J_z}$	$\Psi_{JM'}(\vartheta', \varphi') = \sum_M \Psi_{JM}(\vartheta, \varphi) D_{MM'}^{(J)}(\alpha, \beta, \gamma)$	$D_{MM'}^{(J)}(\alpha, \beta, \gamma) = D_{MM'}^J(-\alpha, -\beta, -\gamma)$
Эдмондс [64], 1957	То же	То же	То же
Фано, Рака [18], 1959	» »	» »	» »
Берестецкий, Лифшиц, Питаевский [6], 1968	» »	$\Psi_{JM}(\vartheta, \varphi) = \sum_{M'} \Psi_{JM'}(\vartheta', \varphi') D_{MM'}^{(J)}(\alpha, \beta, \gamma)$	$D_{MM'}^{(J)}(\alpha, \beta, \gamma) = D_{MM'}^J(-\gamma, -\beta, -\alpha)$
Гельфанд, Минлос, Шапиро [20], 1958	$e^{-i\alpha J_x} e^{-i\beta J_y} e^{-i\gamma J_z}$		$T_{MM'}^J(\alpha, \beta, \gamma) = (-i)^{M-M'} D_{MM'}^J(\alpha, \beta, \gamma)$
Любарский [20], 1958	То же		$D_{MM'}^J(\alpha, \beta, \gamma) = (-i)^{M-M'} D_{MM'}^J(\alpha, \beta, \gamma)$
Виленкин [41], 1965	» »		$t_{MM'}^J(\alpha, \beta, \gamma) = (-i)^{M-M'} D_{MM'}^J(\alpha, \beta, \gamma)$
Юцис, Банзайтис [45], 1965	» »	$\Psi_{JM'}(\vartheta', \varphi') = \sum_M D_{MM'}^{(J)}(\alpha, \beta, \gamma) \Psi_{JM}(\vartheta, \varphi)$	$D_{MM'}^{(J)}(\alpha, \beta, \gamma) = i^{M-M'} D_{MM'}^{J*}(\alpha, \beta, \gamma)$

\* Во всех перечисленных в таблице работах использовалась правая система координат и отсчет углов производился по правому винту. Всюду, кроме [43], рассматривался поворот системы координат, а не физической системы.

\*\* Messiah A., *Mecanique Quantique*. Paris, 1959.

При  $\pi - \beta \ll 1$

$$D_{MM'}^J(\alpha, \beta, \gamma) \approx e^{-iM\alpha - iM'\gamma} \frac{\xi_{MM'}}{\nu!} (-1)^s \sqrt{\frac{(s + \mu + \nu)! (s + \nu)!}{s! (s + \mu)!}} \times \\ \times \left(\frac{\pi - \beta}{2}\right)^\nu \left\{ 1 - \frac{2s(s + \mu + \nu + 1) + \mu(\nu + 1)}{2(\nu + 1)} \left(\frac{\pi - \beta}{2}\right)^2 + \dots \right\}. \quad (4)$$

3. Вид  $D_{MM'}^J(\alpha, \beta, \gamma)$  для бесконечно малых поворотов

а. Поворот вокруг оси  $x$  на угол  $\varepsilon$  ( $\varepsilon \ll 1$ )

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} [D_{MM'}^J(-\frac{\pi}{2}, \varepsilon, \frac{\pi}{2}) - \delta_{MM'}] = -i \langle JM | \hat{J}_x | JM' \rangle = \\ = -\frac{i}{2} \delta_{MM'+1} \sqrt{(J - M')(J + M' + 1)} - \frac{i}{2} \delta_{MM'-1} \sqrt{(J + M')(J - M' + 1)}. \quad (5)$$

б. Поворот вокруг оси  $y$  на угол  $\varepsilon$  ( $\varepsilon \ll 1$ )

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} [D_{MM'}^J(0, \varepsilon, 0) - \delta_{MM'}] = -i \langle JM | \hat{J}_y | JM' \rangle = \\ = -\frac{1}{2} \delta_{MM'+1} \sqrt{(J - M')(J + M' + 1)} + \frac{1}{2} \delta_{MM'-1} \sqrt{(J + M')(J - M' + 1)}. \quad (6)$$

в. Поворот вокруг оси  $z$  на угол  $\varepsilon$  ( $\varepsilon \ll 1$ )

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} [D_{MM'}^J(\varepsilon, 0, 0) - \delta_{MM'}] = -i \langle JM | \hat{J}_z | JM' \rangle = -iM \delta_{MM'}. \quad (7)$$

г. Поворот вокруг произвольного направления  $\mathbf{n}(\Theta, \Phi)$  на угол  $\varepsilon$  ( $\varepsilon \ll 1$ )

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} [D_{MM'}^J(\alpha, \beta, \gamma) - \delta_{MM'}] = -i \langle JM | \hat{\mathbf{J}} \cdot \mathbf{n} | JM' \rangle = -iM \cos \Theta \delta_{MM'} - \\ - \frac{i}{2} \sin \Theta e^{-i\Phi} \sqrt{(J - M')(J + M' + 1)} \delta_{MM'+1} - \frac{i}{2} \sin \Theta e^{i\Phi} \sqrt{(J + M')(J - M' + 1)} \delta_{MM'-1}. \quad (8)$$

В формулах (5)–(8)  $\hat{\mathbf{J}}$  является оператором полного углового момента (см. 2.1).

#### 4.19. СОПОСТАВЛЕНИЕ ОПРЕДЕЛЕНИЙ $D$ -ФУНКЦИЙ, ИСПОЛЬЗУЕМЫХ РАЗНЫМИ АВТОРАМИ

В работах разных авторов использовались различные определения поворотов и  $D$ -функций. Их связь с определениями, принятыми в данной книге, дана в табл. 4.2.

#### 4.20. ТАБЛИЦЫ ФОРМУЛ ДЛЯ $d_{MM'}^J(\beta)$ ПРИ $1/2 \leq J \leq 5$

В таблицах, представленных ниже,  $d_{MM'}^J(\beta)$  даны как функции аргумента  $\beta$  при целых  $J$  и аргумента  $\beta/2$  при полуцелых  $J$ . При  $J \geq 5/2$  формулы приведены только для тех функций  $d_{MM'}^J(\beta)$ , у которых  $M > 0$ , а  $|M'| \leq M$ . Функции  $d_{MM'}^J(\beta)$  при  $M < 0$  или  $|M'| > M$  могут быть получены из этих формул с помощью свойств симметрии 4.4.

Формулы для явного вида функций  $d_{MM'}^J(\beta)$  при частных значениях  $J$  имеются также в работах [116, 129].

Таблицы численных значений  $d_{MM'}^J(\beta)$  приведены в работе [114].

ТАБЛИЦА 4.3

$$d_{MM'}^{1/2}(\beta)$$

$M \backslash M'$	1/2	-1/2
1/2	$\cos \frac{\beta}{2}$	$-\sin \frac{\beta}{2}$
-1/2	$\sin \frac{\beta}{2}$	$\cos \frac{\beta}{2}$

ТАБЛИЦА 4.4

$$d_{MM'}^1(\beta)$$

$M \backslash M'$	1	0	-1
1	$\frac{1 + \cos \beta}{2}$	$-\frac{\sin \beta}{\sqrt{2}}$	$\frac{1 - \cos \beta}{2}$
0	$\frac{\sin \beta}{\sqrt{2}}$	$\cos \beta$	$-\frac{\sin \beta}{\sqrt{2}}$
-1	$\frac{1 - \cos \beta}{2}$	$\frac{\sin \beta}{\sqrt{2}}$	$\frac{1 + \cos \beta}{2}$

ТАБЛИЦА 4.5

$$d_{MM'}^{3/2}(\beta)$$

$M \backslash M'$	3/2	1/2	-1/2	-3/2
3/2	$\cos^3 \frac{\beta}{2}$	$-\sqrt{3} \sin \frac{\beta}{2} \cos^2 \frac{\beta}{2}$	$\sqrt{3} \sin^2 \frac{\beta}{2} \cos \frac{\beta}{2}$	$-\sin^3 \frac{\beta}{2}$
1/2	$\sqrt{3} \sin \frac{\beta}{2} \cos^2 \frac{\beta}{2}$	$\cos \frac{\beta}{2} (3 \cos^2 \frac{\beta}{2} - 2)$	$\sin \frac{\beta}{2} (3 \sin^2 \frac{\beta}{2} - 2)$	$\sqrt{3} \sin^2 \frac{\beta}{2} \cos \frac{\beta}{2}$
-1/2	$\sqrt{3} \sin^2 \frac{\beta}{2} \cos \frac{\beta}{2}$	$-\sin \frac{\beta}{2} (3 \sin^2 \frac{\beta}{2} - 2)$	$\cos \frac{\beta}{2} (3 \cos^2 \frac{\beta}{2} - 2)$	$-\sqrt{3} \sin \frac{\beta}{2} \cos^2 \frac{\beta}{2}$
-3/2	$\sin^3 \frac{\beta}{2}$	$\sqrt{3} \sin^2 \frac{\beta}{2} \cos \frac{\beta}{2}$	$\sqrt{3} \sin \frac{\beta}{2} \cos^2 \frac{\beta}{2}$	$\cos^3 \frac{\beta}{2}$

ТАБЛИЦА 4.6

$$d_{MM'}^2(\beta)$$

$M \backslash M'$	2	1	0	-1	-2
2	$\frac{(1 + \cos \beta)^2}{4}$	$-\frac{\sin \beta (1 + \cos \beta)}{2}$	$\frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{2}} \sin^2 \beta$	$-\frac{\sin \beta (1 - \cos \beta)}{2}$	$\frac{(1 - \cos \beta)^2}{4}$
1	$\frac{\sin \beta (1 + \cos \beta)}{2}$	$\frac{2 \cos^2 \beta + \cos \beta - 1}{2}$	$-\sqrt{\frac{3}{2}} \sin \beta \cos \beta$	$-\frac{2 \cos^2 \beta - \cos \beta - 1}{2}$	$-\frac{\sin \beta (1 - \cos \beta)}{2}$
0	$\frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{2}} \sin^2 \beta$	$\sqrt{\frac{3}{2}} \sin \beta \cos \beta$	$\frac{3 \cos^2 \beta - 1}{2}$	$-\sqrt{\frac{3}{2}} \sin \beta \cos \beta$	$\frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{2}} \sin^2 \beta$
-1	$\frac{\sin \beta (1 - \cos \beta)}{2}$	$-\frac{2 \cos^2 \beta - \cos \beta - 1}{2}$	$\sqrt{\frac{3}{2}} \sin \beta \cos \beta$	$\frac{2 \cos^2 \beta + \cos \beta - 1}{2}$	$-\frac{\sin \beta (1 + \cos \beta)}{2}$
-2	$\frac{(1 - \cos \beta)^2}{4}$	$\frac{\sin \beta (1 - \cos \beta)}{2}$	$\frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{2}} \sin^2 \beta$	$\frac{\sin \beta (1 + \cos \beta)}{2}$	$\frac{(1 + \cos \beta)^2}{4}$

ТАБЛИЦА 4.7

 $d_{MM'}^{5/2}(\beta)$ 

$M'$	$M = 5/2$	$M'$	$M = 3/2$
5/2	$\cos^5 \frac{\beta}{2}$	3/2	$\cos^3 \frac{\beta}{2} \left(1 - 5 \sin^2 \frac{\beta}{2}\right)$
3/2	$-\sqrt{5} \sin \frac{\beta}{2} \cos^4 \frac{\beta}{2}$	1/2	$-\sqrt{2} \sin \frac{\beta}{2} \cos^2 \frac{\beta}{2} \left(2 - 5 \sin^2 \frac{\beta}{2}\right)$
1/2	$\sqrt{10} \sin^2 \frac{\beta}{2} \cos^3 \frac{\beta}{2}$	-1/2	$-\sqrt{2} \sin^2 \frac{\beta}{2} \cos \frac{\beta}{2} \left(2 - 5 \cos^2 \frac{\beta}{2}\right)$
-1/2	$-\sqrt{10} \sin^3 \frac{\beta}{2} \cos^2 \frac{\beta}{2}$	-3/2	$\sin^3 \frac{\beta}{2} \left(1 - 5 \cos^2 \frac{\beta}{2}\right)$
-3/2	$\sqrt{5} \sin^4 \frac{\beta}{2} \cos \frac{\beta}{2}$	$M'$	$M = 1/2$
-5/2	$-\sin^5 \frac{\beta}{2}$	1/2	$\cos \frac{\beta}{2} \left(3 - 12 \cos^2 \frac{\beta}{2} + 10 \cos^4 \frac{\beta}{2}\right)$
		-1/2	$-\sin \frac{\beta}{2} \left(3 - 12 \sin^2 \frac{\beta}{2} + 10 \sin^4 \frac{\beta}{2}\right)$

ТАБЛИЦА 4.8

 $d_{MM'}^3(\beta)$ 

$M'$	$M = 3$	$M'$	$M = 2$
3	$\frac{1}{8} (1 + \cos \beta)^3$	0	$\frac{\sqrt{30}}{4} \sin^2 \beta \cos \beta$
2	$-\frac{\sqrt{6}}{8} \sin \beta (1 + \cos \beta)^2$	-1	$-\frac{\sqrt{10}}{8} \sin \beta (1 + 2 \cos \beta - 3 \cos^2 \beta)$
1	$\frac{\sqrt{15}}{8} \sin^2 \beta (1 + \cos \beta)$	-2	$\frac{1}{4} (1 - \cos \beta)^2 (2 + 3 \cos \beta)$
0	$-\frac{\sqrt{5}}{4} \sin^3 \beta$	$M'$	$M = 1$
-1	$\frac{\sqrt{15}}{8} \sin^2 \beta (1 - \cos \beta)$	1	$-\frac{1}{8} (1 + \cos \beta) (1 + 10 \cos \beta - 15 \cos^2 \beta)$
-2	$-\frac{\sqrt{6}}{8} \sin \beta (1 - \cos \beta)^2$	0	$\frac{\sqrt{3}}{4} \sin \beta (1 - 5 \cos^2 \beta)$
-3	$\frac{1}{8} (1 - \cos \beta)^3$	-1	$-\frac{1}{8} (1 - \cos \beta) (1 - 10 \cos \beta - 15 \cos^2 \beta)$
$M'$	$M = 2$	$M'$	$M = 0$
2	$-\frac{1}{4} (1 + \cos \beta)^2 (2 - 3 \cos \beta)$	0	$-\frac{1}{2} \cos \beta (3 - 5 \cos^2 \beta)$
1	$\frac{\sqrt{10}}{8} \sin \beta (1 - 2 \cos \beta - 3 \cos^2 \beta)$		

ТАБЛИЦА 4.9

 $d_{MM'}^{1/2}(\beta)$ 

$M'$	$M = 7/2$	$M'$	$M = 5/2$
7/2	$\cos^7 \frac{\beta}{2}$	-1/2	$\sqrt{5} \cos^2 \frac{\beta}{2} \sin^3 \frac{\beta}{2} \left(3 - 7 \cos^2 \frac{\beta}{2}\right)$
5/2	$-\sqrt{7} \cos^6 \frac{\beta}{2} \sin \frac{\beta}{2}$	-3/2	$-\sqrt{3} \cos \frac{\beta}{2} \sin^4 \frac{\beta}{2} \left(2 - 7 \cos^2 \frac{\beta}{2}\right)$
3/2	$\sqrt{21} \cos^5 \frac{\beta}{2} \sin^2 \frac{\beta}{2}$	-5/2	$\sin^5 \frac{\beta}{2} \left(1 - 7 \cos^2 \frac{\beta}{2}\right)$
1/2	$-\sqrt{35} \cos^4 \frac{\beta}{2} \sin^4 \frac{\beta}{2}$	$M = 3/2$	
-1/2	$\sqrt{35} \cos^3 \frac{\beta}{2} \sin^4 \frac{\beta}{2}$	3/2	$\cos^3 \frac{\beta}{2} \left(10 - 30 \cos^2 \frac{\beta}{2} + 21 \cos^4 \frac{\beta}{2}\right)$
-3/2	$-\sqrt{21} \cos^2 \frac{\beta}{2} \sin^5 \frac{\beta}{2}$	1/2	$-\sqrt{15} \cos^2 \frac{\beta}{2} \sin \frac{\beta}{2} \left(2 - 8 \cos^2 \frac{\beta}{2} + 7 \cos^4 \frac{\beta}{2}\right)$
-5/2	$\sqrt{7} \cos \frac{\beta}{2} \sin^6 \frac{\beta}{2}$	-1/2	$\sqrt{15} \cos \frac{\beta}{2} \sin^2 \frac{\beta}{2} \left(2 - 8 \sin^2 \frac{\beta}{2} + 7 \sin^4 \frac{\beta}{2}\right)$
-7/2	$-\sin^7 \frac{\beta}{2}$	-3/2	$-\sin^3 \frac{\beta}{2} \left(10 - 30 \sin^2 \frac{\beta}{2} + 21 \sin^4 \frac{\beta}{2}\right)$
$M'$	$M = 5/2$	$M'$	$M = 1/2$
5/2	$\cos^5 \frac{\beta}{2} \left(1 - 7 \sin^2 \frac{\beta}{2}\right)$	1/2	$-\cos \frac{\beta}{2} \left(4 - 30 \cos^2 \frac{\beta}{2} + 60 \cos^4 \frac{\beta}{2} - 35 \cos^6 \frac{\beta}{2}\right)$
3/2	$-\sqrt{3} \cos^4 \frac{\beta}{2} \sin \frac{\beta}{2} \left(2 - 7 \sin^2 \frac{\beta}{2}\right)$	-1/2	$-\sin \frac{\beta}{2} \left(4 - 30 \sin^2 \frac{\beta}{2} + 60 \sin^4 \frac{\beta}{2} - 35 \sin^6 \frac{\beta}{2}\right)$
1/2	$\sqrt{5} \cos^3 \frac{\beta}{2} \sin^2 \frac{\beta}{2} \left(3 - 7 \sin^2 \frac{\beta}{2}\right)$		

ТАБЛИЦА 4.10

 $d_{MM'}^4(\beta)$ 

$M'$	$M = 4$	$M'$	$M = 4$
4	$\frac{1}{16} (1 + \cos \beta)^4$	-1	$-\frac{\sqrt{14}}{8} \sin^3 \beta (1 - \cos \beta)$
3	$-\frac{\sqrt{2}}{8} \sin \beta (1 + \cos \beta)^3$	-2	$\frac{\sqrt{7}}{8} \sin^2 \beta (1 - \cos \beta)^2$
2	$\frac{\sqrt{7}}{8} \sin^2 \beta (1 + \cos \beta)^2$	-3	$-\frac{\sqrt{2}}{8} \sin \beta (1 - \cos \beta)^3$
1	$-\frac{\sqrt{14}}{8} \sin^3 \beta (1 + \cos \beta)$	-4	$\frac{1}{16} (1 - \cos \beta)^4$
0	$\frac{\sqrt{70}}{16} \sin^4 \beta$		

ТАБЛИЦА 4.10 (продолжение)

$M'$	$M=3$	$M'$	$M=2$
3	$-\frac{1}{8}(1+\cos\beta)^3(3-4\cos\beta)$	0	$-\frac{\sqrt{10}}{8}\sin^2\beta(1-7\cos^2\beta)$
2	$\frac{\sqrt{14}}{8}\sin\beta(1+\cos\beta)^2(1-2\cos\beta)$	-1	$\frac{\sqrt{2}}{8}\sin\beta(1-\cos\beta)(1-7\cos\beta-14\cos^2\beta)$
1	$-\frac{\sqrt{7}}{8}\sin^2\beta(1+\cos\beta)(1-4\cos\beta)$	-2	$\frac{1}{4}(1-\cos\beta)^2(1+7\cos\beta+7\cos^2\beta)$
0	$-\frac{\sqrt{35}}{4}\sin^3\beta\cos\beta$	$M=1$	
-1	$\frac{\sqrt{7}}{8}\sin^2\beta(1-\cos\beta)(1+4\cos\beta)$	1	$\frac{1}{8}(1+\cos\beta)(3-6\cos\beta-21\cos^2\beta+28\cos^3\beta)$
-2	$-\frac{\sqrt{14}}{8}\sin\beta(1-\cos\beta)^2(1+2\cos\beta)$	0	$\frac{\sqrt{5}}{4}\sin\beta\cos\beta(3-7\cos^2\beta)$
-3	$\frac{1}{8}(1-\cos\beta)^3(3+4\cos\beta)$	-1	$-\frac{1}{8}(1-\cos\beta)(3+6\cos\beta-21\cos^2\beta-28\cos^3\beta)$
$M'$	$M=2$	$M'$	$M=0$
2	$\frac{1}{4}(1+\cos\beta)^2(1-7\cos\beta+7\cos^2\beta)$	0	$\frac{1}{8}(3-30\cos^2\beta+35\cos^4\beta)$
1	$\frac{\sqrt{2}}{8}\sin\beta(1+\cos\beta)(1+7\cos\beta-14\cos^2\beta)$		

ТАБЛИЦА 4.11  
 $d_{MM'}^{9/2}(\beta)$

$M'$	$M=9/2$	$M'$	$M=7/2$
9/2	$\cos^9\frac{\beta}{2}$	7/2	$\cos^7\frac{\beta}{2}\left(1-9\sin^2\frac{\beta}{2}\right)$
7/2	$-3\cos^8\frac{\beta}{2}\sin\frac{\beta}{2}$	5/2	$-2\cos^6\frac{\beta}{2}\sin\frac{\beta}{2}\left(2-9\sin^2\frac{\beta}{2}\right)$
5/2	$6\cos^7\frac{\beta}{2}\sin^2\frac{\beta}{2}$	3/2	$2\sqrt{21}\cos^5\frac{\beta}{2}\sin^2\frac{\beta}{2}\left(1-3\sin^2\frac{\beta}{2}\right)$
3/2	$-2\sqrt{21}\cos^6\frac{\beta}{2}\sin^3\frac{\beta}{2}$	1/2	$-\sqrt{14}\cos^4\frac{\beta}{2}\sin^3\frac{\beta}{2}\left(4-9\sin^2\frac{\beta}{2}\right)$
1/2	$3\sqrt{14}\cos^5\frac{\beta}{2}\sin^4\frac{\beta}{2}$	-1/2	$-\sqrt{14}\cos^3\frac{\beta}{2}\sin^4\frac{\beta}{2}\left(4-9\cos^2\frac{\beta}{2}\right)$
-1/2	$-3\sqrt{14}\cos^4\frac{\beta}{2}\sin^5\frac{\beta}{2}$	-3/2	$2\sqrt{21}\cos^2\frac{\beta}{2}\sin^5\frac{\beta}{2}\left(1-3\cos^2\frac{\beta}{2}\right)$
-3/2	$2\sqrt{21}\cos^3\frac{\beta}{2}\sin^6\frac{\beta}{2}$	-5/2	$-2\cos\frac{\beta}{2}\sin^6\frac{\beta}{2}\left(2-9\cos^2\frac{\beta}{2}\right)$
-5/2	$-6\cos^2\frac{\beta}{2}\sin^7\frac{\beta}{2}$	-7/2	$\sin^7\frac{\beta}{2}\left(1-9\cos^2\frac{\beta}{2}\right)$
-7/2	$3\cos\frac{\beta}{2}\sin^8\frac{\beta}{2}$	$M=5/2$	
-9/2	$-\sin^9\frac{\beta}{2}$	5/2	$\cos^5\frac{\beta}{2}\left(21-56\cos^2\frac{\beta}{2}+36\cos^4\frac{\beta}{2}\right)$

ТАБЛИЦА 4.11 (продолжение)

$M'$	$M = 5/2$	$M'$	$M = 3/2$
3/2	$-\sqrt{21} \cos^4 \frac{\beta}{2} \sin \frac{\beta}{2} \left(5 - 16 \cos^2 \frac{\beta}{2} + 12 \cos^4 \frac{\beta}{2}\right)$	1/2	$\sqrt{6} \cos^2 \frac{\beta}{2} \sin \frac{\beta}{2} \left(5 - 35 \cos^2 \frac{\beta}{2} + 70 \cos^4 \frac{\beta}{2} - 42 \cos^6 \frac{\beta}{2}\right)$
1/2	$\sqrt{14} \cos^3 \frac{\beta}{2} \sin^2 \frac{\beta}{2} \left(5 - 20 \cos^2 \frac{\beta}{2} + 18 \cos^4 \frac{\beta}{2}\right)$	-1/2	$\sqrt{6} \cos \frac{\beta}{2} \sin^2 \frac{\beta}{2} \left(5 - 35 \sin^2 \frac{\beta}{2} + 70 \sin^4 \frac{\beta}{2} - 42 \sin^6 \frac{\beta}{2}\right)$
-1/2	$-\sqrt{14} \cos^2 \frac{\beta}{2} \sin^3 \frac{\beta}{2} \left(5 - 20 \sin^2 \frac{\beta}{2} + 18 \sin^4 \frac{\beta}{2}\right)$	-3/2	$-\sin^3 \frac{\beta}{2} \left(20 - 105 \sin^2 \frac{\beta}{2} + 168 \sin^4 \frac{\beta}{2} - 84 \sin^6 \frac{\beta}{2}\right)$
-3/2	$\sqrt{21} \cos \frac{\beta}{2} \sin^4 \frac{\beta}{2} \left(5 - 16 \sin^2 \frac{\beta}{2} + 12 \sin^4 \frac{\beta}{2}\right)$	$M'$	$M = 1/2$
-5/2	$-\sin^5 \frac{\beta}{2} \left(21 - 56 \sin^2 \frac{\beta}{2} + 36 \sin^4 \frac{\beta}{2}\right)$	1/2	$\cos \frac{\beta}{2} \left(5 - 60 \cos^2 \frac{\beta}{2} + 210 \cos^4 \frac{\beta}{2} - 280 \cos^6 \frac{\beta}{2} + 126 \cos^8 \frac{\beta}{2}\right)$
$M'$	$M = 3/2$	-1/2	$-\sin \frac{\beta}{2} \left(5 - 60 \sin^2 \frac{\beta}{2} + 210 \sin^4 \frac{\beta}{2} - 280 \sin^6 \frac{\beta}{2} + 126 \sin^8 \frac{\beta}{2}\right)$
3/2	$-\cos^3 \frac{\beta}{2} \left(20 - 105 \cos^2 \frac{\beta}{2} + 168 \cos^4 \frac{\beta}{2} - 84 \cos^6 \frac{\beta}{2}\right)$		

ТАБЛИЦА 4.12

 $d_{MM'}^5(\beta)$ 

$M'$	$M = 5$	$M'$	$M = 4$
5	$\frac{1}{32} (1 + \cos \beta)^5$	4	$-\frac{1}{16} (1 + \cos \beta)^4 (4 - 5 \cos \beta)$
4	$-\frac{\sqrt{10}}{32} \sin \beta (1 + \cos \beta)^4$	3	$\frac{3\sqrt{2}}{32} \sin \beta (1 + \cos \beta)^3 (3 - 5 \cos \beta)$
3	$\frac{3\sqrt{5}}{32} \sin^2 \beta (1 + \cos \beta)^3$	2	$-\frac{2\sqrt{3}}{16} \sin^2 \beta (1 + \cos \beta)^2 (2 - 5 \cos \beta)$
2	$-\frac{\sqrt{30}}{16} \sin^3 \beta (1 + \cos \beta)^2$	1	$\frac{\sqrt{21}}{16} \sin^3 \beta (1 + \cos \beta) (1 - 5 \cos \beta)$
1	$\frac{\sqrt{210}}{32} \sin^4 \beta (1 + \cos \beta)$	0	$\frac{3\sqrt{70}}{16} \sin^4 \beta \cos \beta$
0	$-\frac{3\sqrt{7}}{16} \sin^5 \beta$	-1	$-\frac{\sqrt{21}}{16} \sin^3 \beta (1 - \cos \beta) (1 + 5 \cos \beta)$
-1	$\frac{\sqrt{210}}{32} \sin^4 \beta (1 - \cos \beta)$	-2	$\frac{2\sqrt{3}}{16} \sin^2 \beta (1 - \cos \beta)^2 (2 + 5 \cos \beta)$
-2	$-\frac{\sqrt{30}}{16} \sin^3 \beta (1 - \cos \beta)^2$	-3	$-\frac{3\sqrt{2}}{32} \sin \beta (1 - \cos \beta)^3 (3 + 5 \cos \beta)$
-3	$\frac{3\sqrt{5}}{32} \sin^2 \beta (1 - \cos \beta)^3$	-4	$\frac{1}{16} (1 - \cos \beta)^4 (4 + 5 \cos \beta)$
-4	$-\frac{\sqrt{10}}{32} \sin \beta (1 - \cos \beta)^4$	$M'$	$M = 3$
-5	$\frac{1}{32} (1 - \cos \beta)^5$	3	$\frac{1}{32} (1 + \cos \beta)^3 (13 - 54 \cos \beta + 45 \cos^2 \beta)$



ТАБЛИЦА 4.12 (продолжение)

$M'$	$M=3$	$M'$	$M=2$
2	$-\frac{\sqrt{6}}{16} \sin \beta (1 + \cos \beta)^2 (1 - 12 \cos \beta + 15 \cos^2 \beta)$	-1	$\frac{\sqrt{7}}{8} \sin \beta (1 - \cos \beta) (1 + 3 \cos \beta - 9 \cos^2 \beta - 15 \cos^3 \beta)$
1	$-\frac{\sqrt{42}}{32} \sin^2 \beta (1 + \cos \beta) (1 + 6 \cos \beta - 15 \cos^2 \beta)$	-2	$-\frac{1}{4} (1 - \cos \beta)^2 (1 - 3 \cos \beta - 18 \cos^2 \beta - 15 \cos^3 \beta)$
0	$\frac{\sqrt{35}}{16} \sin^2 \beta (1 - 9 \cos^2 \beta)$	$M'$	$M=1$
-1	$-\frac{\sqrt{42}}{32} \sin^2 \beta (1 - \cos \beta) (1 - 6 \cos \beta - 15 \cos^2 \beta)$	1	$\frac{1}{16} (1 + \cos \beta) (1 + 28 \cos \beta - 42 \cos^2 \beta - 84 \cos^3 \beta + 105 \cos^4 \beta)$
-2	$-\frac{\sqrt{6}}{16} \sin \beta (1 - \cos \beta)^2 (1 + 12 \cos \beta + 15 \cos^2 \beta)$	0	$-\frac{\sqrt{30}}{16} \sin \beta (1 - 14 \cos^2 \beta + 21 \cos^4 \beta)$
-3	$\frac{1}{32} (1 - \cos \beta)^3 (13 + 54 \cos \beta + 45 \cos^2 \beta)$	-1	$\frac{1}{16} (1 - \cos \beta) (1 - 28 \cos \beta - 42 \cos^2 \beta + 84 \cos^3 \beta + 105 \cos^4 \beta)$
$M'$	$M=2$	$M'$	$M=0$
2	$\frac{1}{4} (1 + \cos \beta)^2 (1 + 3 \cos \beta - 18 \cos^2 \beta + 15 \cos^3 \beta)$	0	$\frac{1}{8} \cos \beta (15 - 70 \cos^2 \beta + 63 \cos^4 \beta)$
1	$-\frac{\sqrt{7}}{8} \sin \beta (1 + \cos \beta) (1 - 3 \cos \beta - 9 \cos^2 \beta + 15 \cos^3 \beta)$		
0	$-\frac{\sqrt{210}}{8} \sin^2 \beta \cos \beta (1 - 3 \cos^2 \beta)$		

4.21. ТАБЛИЦЫ ЗНАЧЕНИЙ  $d_{MM'}^J\left(\frac{\pi}{2}\right)$  ПРИ  $\frac{1}{2} \leq J \leq 5$

С помощью  $d_{MM'}^J\left(\frac{\pi}{2}\right)$  можно вычислять значения  $D$ -функций Вигнера для произвольных углов  $\alpha, \beta, \gamma$  по формуле

$$D_{MM'}^J(\alpha, \beta, \gamma) = i^{M-M'} e^{-iM\alpha - iM'\gamma} \sum_{M''=-J}^J d_{M''M}^J\left(\frac{\pi}{2}\right) d_{M''M'}^J\left(\frac{\pi}{2}\right) e^{-iM''\beta}.$$

Эта формула может быть получена с помощью последовательного сложения поворотов. Ниже приведены таблицы  $d_{MM'}^J\left(\frac{\pi}{2}\right)$  для значений  $J = 1/2, 1, 3/2, 2, 5/2, 3, 7/2, 4, 9/2, 5$  (табл. 4.13—4.22).

ТАБЛИЦА 4.13

$$d_{MM'}^{1/2}\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$M \backslash M'$	1/2	-1/2
1/2	$1/\sqrt{2}$	$-1/\sqrt{2}$
-1/2	$1/\sqrt{2}$	$1/\sqrt{2}$

ТАБЛИЦА 4.14

$$d_{MM'}^1\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$M \backslash M'$	1	0	-1
1	$1/2$	$-1/\sqrt{2}$	$1/2$
0	$1/\sqrt{2}$	0	$-1/\sqrt{2}$
-1	$1/2$	$1/\sqrt{2}$	$1/2$

ТАБЛИЦА 4.15

$$d_{MM'}^{3/2}\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$M \backslash M'$	3/2	1/2	-1/2	-3/2
3/2	$1/2\sqrt{2}$	$-\sqrt{3}/2\sqrt{2}$	$\sqrt{3}/2\sqrt{2}$	$-1/2\sqrt{2}$
1/2	$\sqrt{3}/2\sqrt{2}$	$-1/2\sqrt{2}$	$-1/2\sqrt{2}$	$\sqrt{3}/2\sqrt{2}$
-1/2	$\sqrt{3}/2\sqrt{2}$	$1/2\sqrt{2}$	$-1/2\sqrt{2}$	$-\sqrt{3}/2\sqrt{2}$
-3/2	$1/2\sqrt{2}$	$\sqrt{3}/2\sqrt{2}$	$\sqrt{3}/2\sqrt{2}$	$1/2\sqrt{2}$

ТАБЛИЦА 4.16

$$d_{MM'}^2\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$M \backslash M'$	2	1	0	-1	-2
2	1/4	-1/2	$\sqrt{3}/2\sqrt{2}$	-1/2	1/4
1	1/2	-1/2	0	1/2	-1/2
0	$\sqrt{3}/2\sqrt{2}$	0	-1/2	0	$\sqrt{3}/2\sqrt{2}$
-1	1/2	1/2	0	-1/2	-1/2
-2	1/4	1/2	$\sqrt{3}/2\sqrt{2}$	1/2	1/4

ТАБЛИЦА 4.17

$$d_{MM'}^{5/2}\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$M \backslash M'$	5/2	3/2	1/2	-1/2	-3/2	-5/2
5/2	$1/4\sqrt{2}$	$-\sqrt{5}/4\sqrt{2}$	$\sqrt{5}/4$	$-\sqrt{5}/4$	$\sqrt{5}/4\sqrt{2}$	$-1/4\sqrt{2}$
3/2	$\sqrt{5}/4\sqrt{2}$	$-3/4\sqrt{2}$	1/4	1/4	$-3/4\sqrt{2}$	$\sqrt{5}/4\sqrt{2}$
1/2	$\sqrt{5}/4$	-1/4	$-1/2\sqrt{2}$	$1/2\sqrt{2}$	1/4	$-\sqrt{5}/4$
-1/2	$\sqrt{5}/4$	1/4	$-1/2\sqrt{2}$	$-1/2\sqrt{2}$	1/4	$\sqrt{5}/4$
-3/2	$\sqrt{5}/4\sqrt{2}$	$3/4\sqrt{2}$	1/4	-1/4	$-3/4\sqrt{2}$	$-\sqrt{5}/4\sqrt{2}$
-5/2	$1/4\sqrt{2}$	$\sqrt{5}/4\sqrt{2}$	$\sqrt{5}/4$	$\sqrt{5}/4$	$\sqrt{5}/4\sqrt{2}$	$1/4\sqrt{2}$

ТАБЛИЦА 4.18

$$d_{MM'}^3\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$M \backslash M'$	3	2	1	0	-1	-2	-3
3	1/8	$-\sqrt{3}/4\sqrt{2}$	$\sqrt{3 \cdot 5}/8$	$-\sqrt{5}/4$	$\sqrt{3 \cdot 5}/8$	$-\sqrt{3}/4\sqrt{2}$	1/8
2	$\sqrt{3}/4\sqrt{2}$	-1/2	$\sqrt{5}/4\sqrt{2}$	0	$-\sqrt{5}/4\sqrt{2}$	1/2	$-\sqrt{3}/4\sqrt{2}$
1	$\sqrt{3 \cdot 5}/8$	$-\sqrt{5}/4\sqrt{2}$	-1/8	$\sqrt{3}/4$	-1/8	$-\sqrt{5}/4\sqrt{2}$	$\sqrt{3 \cdot 5}/8$
0	$\sqrt{5}/4$	0	$-\sqrt{3}/4$	0	$\sqrt{3}/4$	0	$-\sqrt{5}/4$
-1	$\sqrt{3 \cdot 5}/8$	$\sqrt{5}/4\sqrt{2}$	-1/8	$-\sqrt{3}/4$	-1/8	$\sqrt{5}/4\sqrt{2}$	$\sqrt{3 \cdot 5}/8$
-2	$\sqrt{3}/4\sqrt{2}$	1/2	$\sqrt{5}/4\sqrt{2}$	0	$-\sqrt{5}/4\sqrt{2}$	-1/2	$-\sqrt{3}/4\sqrt{2}$
-3	1/8	$\sqrt{3}/4\sqrt{2}$	$\sqrt{3 \cdot 5}/8$	$\sqrt{5}/4$	$\sqrt{3 \cdot 5}/8$	$\sqrt{3}/4\sqrt{2}$	1/8

ТАБЛИЦА 4.19

$$d_{MM'}^{7/2}\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$M \backslash M'$	7/2	5/2	3/2	1/2	-1/2	-3/2	-5/2	-7/2
7/2	$1/8\sqrt{2}$	$-\sqrt{7}/8\sqrt{2}$	$\sqrt{3 \cdot 7}/8\sqrt{2}$	$-\sqrt{5 \cdot 7}/8\sqrt{2}$	$\sqrt{5 \cdot 7}/8\sqrt{2}$	$-\sqrt{3 \cdot 7}/8\sqrt{2}$	$\sqrt{7}/8\sqrt{2}$	$-1/8\sqrt{2}$
5/2	$\sqrt{7}/8\sqrt{2}$	$-5/8\sqrt{2}$	$3\sqrt{3}/8\sqrt{2}$	$-\sqrt{5}/8\sqrt{2}$	$-\sqrt{5}/8\sqrt{2}$	$3\sqrt{3}/8\sqrt{2}$	$-5/8\sqrt{2}$	$\sqrt{7}/8\sqrt{2}$
3/2	$\sqrt{3 \cdot 7}/8\sqrt{2}$	$-3\sqrt{3}/8\sqrt{2}$	$1/8\sqrt{2}$	$-\sqrt{3 \cdot 5}/8\sqrt{2}$	$-\sqrt{3 \cdot 5}/8\sqrt{2}$	$-1/8\sqrt{2}$	$3\sqrt{3}/8\sqrt{2}$	$-\sqrt{3 \cdot 7}/8\sqrt{2}$
1/2	$\sqrt{5 \cdot 7}/8\sqrt{2}$	$-\sqrt{5}/8\sqrt{2}$	$-\sqrt{3 \cdot 5}/8\sqrt{2}$	$3/8\sqrt{2}$	$3/8\sqrt{2}$	$-\sqrt{3 \cdot 5}/8\sqrt{2}$	$-\sqrt{5}/8\sqrt{2}$	$\sqrt{5 \cdot 7}/8\sqrt{2}$
-1/2	$\sqrt{5 \cdot 7}/8\sqrt{2}$	$\sqrt{5}/8\sqrt{2}$	$-\sqrt{3 \cdot 5}/8\sqrt{2}$	$-3/8\sqrt{2}$	$3/8\sqrt{2}$	$\sqrt{3 \cdot 5}/8\sqrt{2}$	$-\sqrt{5}/8\sqrt{2}$	$-\sqrt{5 \cdot 7}/8\sqrt{2}$
-3/2	$\sqrt{3 \cdot 7}/8\sqrt{2}$	$3\sqrt{3}/8\sqrt{2}$	$1/8\sqrt{2}$	$-\sqrt{3 \cdot 5}/8\sqrt{2}$	$-\sqrt{3 \cdot 5}/8\sqrt{2}$	$1/8\sqrt{2}$	$3\sqrt{3}/8\sqrt{2}$	$\sqrt{3 \cdot 7}/8\sqrt{2}$
-5/2	$\sqrt{7}/8\sqrt{2}$	$5/8\sqrt{2}$	$3\sqrt{3}/8\sqrt{2}$	$\sqrt{5}/8\sqrt{2}$	$-\sqrt{5}/8\sqrt{2}$	$-3\sqrt{3}/8\sqrt{2}$	$-5/8\sqrt{2}$	$-\sqrt{7}/8\sqrt{2}$
-7/2	$1/8\sqrt{2}$	$\sqrt{7}/8\sqrt{2}$	$\sqrt{3 \cdot 7}/8\sqrt{2}$	$\sqrt{5 \cdot 7}/8\sqrt{2}$	$\sqrt{5 \cdot 7}/8\sqrt{2}$	$\sqrt{3 \cdot 7}/8\sqrt{2}$	$\sqrt{7}/8\sqrt{2}$	$1/8\sqrt{2}$

ТАБЛИЦА 4.20

$$d_{MM'}^4 \left( \frac{\pi}{2} \right)$$

$M \backslash M'$	4	3	2	1	0	-1	-2	-3	-4
4	1/16	-1/4√2	√7/8	-√7/4√2	√5·7/8√2	-√7/4√2	√7/8	-1/4√2	-4
3	1/4√2	-3/8	√7/4√2	-√7/8	0	√7/8	-√7/4√2	3/8	1/16
2	√7/8	-√7/4√2	1/4	1/4√2	-√5/4√2	1/4√2	1/4	-√7/4√2	√7/8
1	√7/4√2	-√7/8	-1/4√2	3/8	0	-3/8	1/4√2	√7/8	-√7/4√2
0	√5·7/8√2	0	-√5/4√2	0	3/8	0	-√5/4√2	0	√5·7/8√2
-1	√7/4√2	√7/8	-1/4√2	-3/8	0	3/8	1/4√2	-√7/8	-√7/4√2
-2	√7/8	√7/4√2	1/4	-1/4√2	-√5/4√2	-1/4√2	1/4	√7/4√2	√7/8
-3	1/4√2	3/8	√7/4√2	√7/8	0	-√7/8	-√7/4√2	-3/8	-1/4√2
-4	1/16	1/4√2	√7/8	√7/4√2	√5·7/8√2	√7/4√2	√7/8	1/4√2	1/16

ТАБЛИЦА 4.21

$$d_{MM'}^{3/2} \left( \frac{\pi}{2} \right)$$

$M \backslash M'$	9/2	7/2	5/2	3/2	1/2	-1/2	-3/2	-5/2	-7/2	-9/2
9/2	1/16√2	-3/16√2	3/8√2	-√3·7/8√2	3√7/16	-3√7/16	√3·7/8√2	-3/8√2	3/16√2	-1/16√2
7/2	3/16√2	-7/16√2	5/8√2	-√3·7/8√2	√7/16	-√3·7/8√2	-√3·7/8√2	5/8√2	-7/16√2	3/16√2
5/2	3/8√2	-5/8√2	1/2√2	0	-√7/8	√7/8	0	-1/2√2	5/8√2	-3/8√2
3/2	√3·7/8√2	-√3·7/8√2	0	1/2√2	-√3/8	√3/8	1/2√2	0	-√3·7/8√2	√3·7/8√2
1/2	3√7/16	-√7/16	-√7/8	√3/8	-√3/8	-√3/8	-√3/8	√7/8	√7/16	-3√7/16
-1/2	3√7/16	√7/16	-√7/8	-√3/8	√3/8	-√3/8	-√3/8	-√7/8	√7/16	3√7/16
-3/2	√3·7/8√2	√3·7/8√2	0	-1/2√2	-√3/8	√3/8	1/2√2	0	-√3·7/8√2	-√3·7/8√2
-5/2	3/8√2	5/8√2	1/2√2	0	-√7/8	√7/8	0	1/2√2	5/8√2	3/8√2
-7/2	3/16√2	7/16√2	5/8√2	√3·7/8√2	√7/16	-√7/16	-√3·7/8√2	-5/8√2	-7/16√2	-3/16√2
-9/2	1/16√2	3/16√2	3/8√2	√3·7/8√2	3√7/16	√3·7/8√2	√3·7/8√2	3/8√2	3/16√2	1/16√2

ТАБЛИЦА 4.22

$$d_{MM'}^5\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$M'$ $M$	5	4	3	2	1	0	-1	-2	-3	-4	-5
5	$1/32$	$-\sqrt{5}/16\sqrt{2}$	$3\sqrt{5}/32$	$-\sqrt{3}\cdot 5/8\sqrt{2}$	$\sqrt{3}\cdot 5\cdot 7/16\sqrt{2}$	$-3\sqrt{7}/16$	$\sqrt{3}\cdot 5\cdot 7/16\sqrt{2}$	$-\sqrt{3}\cdot 5/8\sqrt{2}$	$3\sqrt{5}/32$	$-\sqrt{5}/16\sqrt{2}$	$1/32$
4	$\sqrt{5}/16\sqrt{2}$	$-1/4$	$9/16\sqrt{2}$	$-\sqrt{3}/4$	$\sqrt{3}\cdot 7/16$	0	$-\sqrt{3}\cdot 7/16$	$\sqrt{3}/4$	$-9/16\sqrt{2}$	$1/4$	$-\sqrt{5}/16\sqrt{2}$
3	$3\sqrt{5}/32$	$-9/16\sqrt{2}$	$13/32$	$-\sqrt{3}\cdot 8\sqrt{2}$	$-\sqrt{3}\cdot 7/16\sqrt{2}$	$\sqrt{5}\cdot 7/16$	$-\sqrt{3}\cdot 7/16\sqrt{2}$	$-\sqrt{3}\cdot 8\sqrt{2}$	$13/32$	$-9/16\sqrt{2}$	$3\sqrt{5}/32$
2	$\sqrt{3}\cdot 5/8\sqrt{2}$	$-\sqrt{3}/4$	$\sqrt{3}/8\sqrt{2}$	$1/4$	$-\sqrt{7}/8$	0	$\sqrt{7}/8$	$-1/4$	$-\sqrt{3}\cdot 8\sqrt{2}$	$\sqrt{3}/4$	$-\sqrt{3}\cdot 5/8\sqrt{2}$
1	$\sqrt{3}\cdot 5\cdot 7/16\sqrt{2}$	$-\sqrt{3}\cdot 7/16$	$-\sqrt{3}\cdot 7/16\sqrt{2}$	$\sqrt{7}/8$	$-\sqrt{7}/8$	$-\sqrt{3}\cdot 5/8\sqrt{2}$	$1/16$	$\sqrt{7}/8$	$-\sqrt{3}\cdot 7/16\sqrt{2}$	$-\sqrt{3}\cdot 7/16$	$\sqrt{3}\cdot 5\cdot 7/16\sqrt{2}$
0	$3\sqrt{7}/16$	0	$-\sqrt{5}\cdot 7/16$	0	$\sqrt{3}\cdot 5/8\sqrt{2}$	0	$-\sqrt{3}\cdot 5/8\sqrt{2}$	0	$\sqrt{5}\cdot 7/16$	0	$-3\sqrt{7}/16$
-1	$\sqrt{3}\cdot 5\cdot 7/16\sqrt{2}$	$\sqrt{3}\cdot 7/16$	$-\sqrt{3}\cdot 7/16\sqrt{2}$	$-\sqrt{7}/8$	$1/16$	$\sqrt{3}\cdot 5/8\sqrt{2}$	$1/16$	$-\sqrt{7}/8$	$-\sqrt{3}\cdot 7/16\sqrt{2}$	$\sqrt{3}\cdot 7/16$	$\sqrt{3}\cdot 5\cdot 7/16\sqrt{2}$
-2	$\sqrt{3}\cdot 5/8\sqrt{2}$	$\sqrt{3}/4$	$\sqrt{3}/8\sqrt{2}$	$-1/4$	$-\sqrt{7}/8$	0	$\sqrt{7}/8$	$1/4$	$-\sqrt{3}\cdot 8\sqrt{2}$	$-\sqrt{3}/4$	$-\sqrt{3}\cdot 5/8\sqrt{2}$
-3	$3\sqrt{5}/32$	$9/16\sqrt{2}$	$13/32$	$\sqrt{3}\cdot 8\sqrt{2}$	$-\sqrt{3}\cdot 7/16\sqrt{2}$	$-\sqrt{5}\cdot 7/16$	$-\sqrt{3}\cdot 7/16\sqrt{2}$	$\sqrt{3}/8\sqrt{2}$	$13/32$	$9/16\sqrt{2}$	$3\sqrt{5}/32$
-4	$\sqrt{5}/16\sqrt{2}$	$1/4$	$9/16\sqrt{2}$	$\sqrt{3}/4$	$\sqrt{3}\cdot 7/16$	0	$-\sqrt{3}\cdot 7/16$	$-\sqrt{3}/4$	$-9/16\sqrt{2}$	$-1/4$	$\sqrt{5}/16\sqrt{2}$
-5	$1/32$	$\sqrt{5}/16\sqrt{2}$	$3\sqrt{5}/32$	$\sqrt{3}\cdot 5/8\sqrt{2}$	$\sqrt{3}\cdot 5\cdot 7/16\sqrt{2}$	$3\sqrt{7}/16$	$\sqrt{3}\cdot 5\cdot 7/16\sqrt{2}$	$\sqrt{3}\cdot 5/8\sqrt{2}$	$3\sqrt{5}/32$	$\sqrt{5}/16\sqrt{2}$	$1/32$

4.22 ТАБЛИЦЫ ФОРМУЛ ДЛЯ  $U_{MM'}^J(\omega; \theta, \Phi)$  ПРИ  $J = 1/2, 1, 3/2, 2$ 

ТАБЛИЦА 4.23

$$U_{MM'}^{1/2}(\omega; \theta, \Phi)$$

$M'$ $M$	1/2	-1/2	$M'$ $M$	1	0	-1
1/2	$\cos \frac{\omega}{2} - i \sin \frac{\omega}{2} \cos \theta$	$-i \sin \frac{\omega}{2} \sin \theta e^{-i\theta}$	1	$\left(\cos \frac{\omega}{2} - i \sin \frac{\omega}{2} \cos \theta\right)^2$	$-i\sqrt{2} \sin \frac{\omega}{2} \sin \theta e^{-i\theta} \times$ $\times \left(\cos \frac{\omega}{2} - i \sin \frac{\omega}{2} \cos \theta\right)$	$-\left(\sin \frac{\omega}{2} \sin \theta e^{-i\theta}\right)^2$
-1/2	$-i \sin \frac{\omega}{2} \sin \theta e^{i\theta}$	$\cos \frac{\omega}{2} + i \sin \frac{\omega}{2} \cos \theta$	0	$-i\sqrt{2} \sin \frac{\omega}{2} \sin \theta e^{i\theta} \times$ $\times \left(\cos \frac{\omega}{2} - i \sin \frac{\omega}{2} \cos \theta\right)$	$1 - 2\sin^2 \frac{\omega}{2} \sin^2 \theta$	$-i\sqrt{2} \sin \frac{\omega}{2} \sin \theta e^{-i\theta} \times$ $\times \left(\cos \frac{\omega}{2} + i \sin \frac{\omega}{2} \cos \theta\right)$
			-1	$-\left(\sin \frac{\omega}{2} \sin \theta e^{i\theta}\right)^2$	$-i\sqrt{2} \sin \frac{\omega}{2} \sin \theta e^{i\theta} \times$ $\times \left(\cos \frac{\omega}{2} + i \sin \frac{\omega}{2} \cos \theta\right)$	$\left(\cos \frac{\omega}{2} + i \sin \frac{\omega}{2} \cos \theta\right)^2$

ТАБЛИЦА 4.24

$$U_{MM'}^1(\omega; \theta, \Phi)$$

ТАБЛИЦА 4.25  
 $U_{MM'}^J(\omega; \theta, \Phi)$ 

$M \backslash M'$	3/2	1/2	-1/2	-3/2
3/2	$(\cos \frac{\omega}{2} - i \sin \frac{\omega}{2} \cos \theta)^3$	$-i\sqrt{3} \sin \frac{\omega}{2} \sin \theta e^{-i\Phi} \times$ $\times (\cos \frac{\omega}{2} - i \sin \frac{\omega}{2} \cos \theta)^2$	$-\sqrt{3} \left( \sin \frac{\omega}{2} \sin \theta e^{-i\Phi} \right)^2 \times$ $\times \left( \cos \frac{\omega}{2} - i \sin \frac{\omega}{2} \cos \theta \right)$	$i \left( \sin \frac{\omega}{2} \sin \theta e^{-i\Phi} \right)^3$
1/2	$-i\sqrt{3} \sin \frac{\omega}{2} \sin \theta e^{i\Phi} \times$ $\times \left( \cos \frac{\omega}{2} - i \sin \frac{\omega}{2} \cos \theta \right)^2$	$(1 - 3 \sin^2 \frac{\omega}{2} \sin^2 \theta) \times$ $\times \left( \cos \frac{\omega}{2} - i \sin \frac{\omega}{2} \cos \theta \right)$	$-i \sin \frac{\omega}{2} \sin \theta e^{-i\Phi} \times$ $\times \left( 2 - 3 \sin^2 \frac{\omega}{2} \sin^2 \theta \right)$	$-\sqrt{3} \left( \sin \frac{\omega}{2} \sin \theta e^{-i\Phi} \right)^2 \times$ $\times \left( \cos \frac{\omega}{2} + i \sin \frac{\omega}{2} \cos \theta \right)$
-1/2	$-\sqrt{3} \left( \sin \frac{\omega}{2} \sin \theta e^{i\Phi} \right)^2 \times$ $\times \left( \cos \frac{\omega}{2} - i \sin \frac{\omega}{2} \cos \theta \right)$	$-i \sin \frac{\omega}{2} \sin \theta e^{i\Phi} \times$ $\times \left( 2 - 3 \sin^2 \frac{\omega}{2} \sin^2 \theta \right)$	$(1 - 3 \sin^2 \frac{\omega}{2} \sin^2 \theta) \times$ $\times \left( \cos \frac{\omega}{2} + i \sin \frac{\omega}{2} \cos \theta \right)^2$	$-i\sqrt{3} \sin \frac{\omega}{2} \sin \theta e^{-i\Phi} \times$ $\times \left( \cos \frac{\omega}{2} + i \sin \frac{\omega}{2} \cos \theta \right)^2$
-3/2	$i \left( \sin \frac{\omega}{2} \sin \theta e^{i\Phi} \right)^3$	$-\sqrt{3} \left( \sin \frac{\omega}{2} \sin \theta e^{i\Phi} \right)^2 \times$ $\times \left( \cos \frac{\omega}{2} + i \sin \frac{\omega}{2} \cos \theta \right)$	$-i\sqrt{3} \sin \frac{\omega}{2} \sin \theta e^{i\Phi} \times$ $\times \left( \cos \frac{\omega}{2} + i \sin \frac{\omega}{2} \cos \theta \right)^2$	$\left( \cos \frac{\omega}{2} + i \sin \frac{\omega}{2} \cos \theta \right)^3$

ТАБЛИЦА 4.26  
 $U_{MM'}^2(\omega; \theta, \Phi)$ 

$M \backslash M'$	2	1	0	-1	-2
2	$(\cos \frac{\omega}{2} - i \sin \frac{\omega}{2} \cos \theta)^4$	$-2i \sin \frac{\omega}{2} \sin \theta e^{-i\Phi} \times$ $\times \left( \cos \frac{\omega}{2} - i \sin \frac{\omega}{2} \cos \theta \right)^3$	$-\sqrt{6} \left( \sin \frac{\omega}{2} \sin \theta e^{-i\Phi} \right)^2 \times$ $\times \left( \cos \frac{\omega}{2} - i \sin \frac{\omega}{2} \cos \theta \right)^2$	$2i \left( \sin \frac{\omega}{2} \sin \theta e^{-i\Phi} \right)^3 \times$ $\times \left( \cos \frac{\omega}{2} - i \sin \frac{\omega}{2} \cos \theta \right)$	$\left( \sin \frac{\omega}{2} \sin \theta e^{-i\Phi} \right)^4$

ТАБЛИЦА 4.26 (продолжение)

$M'$ $M$	2	1	0	-1	-2
1	$-2i \sin \frac{\omega}{2} \sin \theta e^{i\theta} \times$ $\times \left( \cos \frac{\omega}{2} - i \sin \frac{\omega}{2} \cos \theta \right)^3$	$(1 - 4 \sin^2 \frac{\omega}{2} \sin^2 \theta) \times$ $\left( \cos \frac{\omega}{2} - i \sin \frac{\omega}{2} \cos \theta \right)^2$	$-i\sqrt{6} \sin \frac{\omega}{2} \sin \theta e^{-i\theta} \times$ $\times \left( 1 - 2 \sin^2 \frac{\omega}{2} \sin^2 \theta \right) \times$ $\times \left( \cos \frac{\omega}{2} - i \sin \frac{\omega}{2} \cos \theta \right)$	$-\left( \sin \frac{\omega}{2} \sin \theta e^{-i\theta} \right)^2 \times$ $\times \left( 3 - 4 \sin^2 \frac{\omega}{2} \sin^2 \theta \right)$	$2i \left( \sin \frac{\omega}{2} \sin \theta e^{-i\theta} \right)^3 \times$ $\times \left( \cos \frac{\omega}{2} + i \sin \frac{\omega}{2} \cos \theta \right)$
0	$-\sqrt{6} \left( \sin \frac{\omega}{2} \sin \theta e^{i\theta} \right)^2 \times$ $\times \left( \cos \frac{\omega}{2} - i \sin \frac{\omega}{2} \cos \theta \right)^2$	$-i\sqrt{6} \sin \frac{\omega}{2} \sin \theta e^{i\theta} \times$ $\times \left( 1 - 2 \sin^2 \frac{\omega}{2} \sin^2 \theta \right) \times$ $\times \left( \cos \frac{\omega}{2} - i \sin \frac{\omega}{2} \cos \theta \right)$	$1 - 6 \sin^2 \frac{\omega}{2} \sin^2 \theta \times$ $\times \left( 1 - \sin^2 \frac{\omega}{2} \sin^2 \theta \right)$	$-i\sqrt{6} \sin \frac{\omega}{2} \sin \theta e^{-i\theta} \times$ $\times \left( 1 - 2 \sin^2 \frac{\omega}{2} \sin^2 \theta \right) \times$ $\times \left( \cos \frac{\omega}{2} + i \sin \frac{\omega}{2} \cos \theta \right)$	$-\sqrt{6} \left( \sin \frac{\omega}{2} \sin \theta e^{-i\theta} \right)^2 \times$ $\times \left( \cos \frac{\omega}{2} + i \sin \frac{\omega}{2} \cos \theta \right)^2$
-1	$2i \left( \sin \frac{\omega}{2} \sin \theta e^{i\theta} \right)^3 \times$ $\times \left( \cos \frac{\omega}{2} - i \sin \frac{\omega}{2} \cos \theta \right)$	$-\left( \sin \frac{\omega}{2} \sin \theta e^{i\theta} \right)^2 \times$ $\times \left( 3 - 4 \sin^2 \frac{\omega}{2} \sin^2 \theta \right)$	$-i\sqrt{6} \sin \frac{\omega}{2} \sin \theta e^{i\theta} \times$ $\times \left( 1 - 2 \sin^2 \frac{\omega}{2} \sin^2 \theta \right) \times$ $\times \left( \cos \frac{\omega}{2} + i \sin \frac{\omega}{2} \cos \theta \right)$	$\left( 1 - 4 \sin^2 \frac{\omega}{2} \sin^2 \theta \right) \times$ $\times \left( \cos \frac{\omega}{2} + i \sin \frac{\omega}{2} \cos \theta \right)^2$	$-2i \sin \frac{\omega}{2} \sin \theta e^{-i\theta} \times$ $\times \left( \cos \frac{\omega}{2} + i \sin \frac{\omega}{2} \cos \theta \right)^3$
-2	$\left( \sin \frac{\omega}{2} \sin \theta e^{i\theta} \right)^4$	$2i \left( \sin \frac{\omega}{2} \sin \theta e^{i\theta} \right)^3 \times$ $\times \left( \cos \frac{\omega}{2} + i \sin \frac{\omega}{2} \cos \theta \right)$	$-\sqrt{6} \left( \sin \frac{\omega}{2} \sin \theta e^{i\theta} \right)^2 \times$ $\times \left( \cos \frac{\omega}{2} + i \sin \frac{\omega}{2} \cos \theta \right)^2$	$-2i \sin \frac{\omega}{2} \sin \theta e^{i\theta} \times$ $\times \left( \cos \frac{\omega}{2} + i \sin \frac{\omega}{2} \cos \theta \right)^3$	$\left( \cos \frac{\omega}{2} + i \sin \frac{\omega}{2} \cos \theta \right)^4$

# СФЕРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

## 5.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ

Сферическая (шаровая) функция  $Y_{lm}(\vartheta, \varphi)$  есть однозначная непрерывная комплексная функция двух вещественных переменных  $\vartheta$  и  $\varphi$ , заданных в интервалах  $0 \leq \vartheta \leq \pi$ ,  $0 \leq \varphi < 2\pi$ . Она характеризуется двумя параметрами  $l$  и  $m$ , которые принимают значения  $l=0, 1, 2, \dots$  и  $m=l, l-1, l-2, \dots, -l$ . Таким образом, при заданном  $l$  имеется  $(2l+1)$  независимых функций, соответствующих различным значениям  $m$ . Функция  $Y_{lm}(\vartheta, \varphi)$  и все ее производные однозначны, непрерывны и ограничены по модулю.

Важная роль сферических функций в квантовой механике определяется тем, что они являются собственными функциями оператора орбитального углового момента. Они характеризуют угловое распределение частиц, обладающих орбитальным моментом  $l$ , квадрат которого равен  $l(l+1)$ , а проекция на ось квантования равна  $m$ .

## 1. Коммутационные соотношения

Сферические функции  $Y_{lm}(\vartheta, \varphi)$  являются компонентами неприводимого тензора ранга  $l$  (гл. 3). Поэтому они определяются своими коммутационными соотношениями с оператором орбитального момента

$$[\hat{L}_\mu, Y_{lm}(\vartheta, \varphi)] = \sqrt{l(l+1)} C_{lm\ 1\mu}^{lm+\mu} Y_{lm+\mu}(\vartheta, \varphi), \quad (1)$$

где  $\hat{L}_\mu(\vartheta, \varphi)$  — циклические компоненты оператора  $\hat{L}$  (см. 2.2 (18)).

Трем коммутационным соотношениям, отвечающим  $\mu=1, 0, -1$ , соответствуют три уравнения, которые можно представить в следующем виде:

$$\begin{aligned} \hat{L}_{\pm 1} Y_{lm}(\vartheta, \varphi) &= \mp \sqrt{\frac{l(l+1) - m(m \pm 1)}{2}} Y_{l, m \pm 1}(\vartheta, \varphi), \\ \hat{L}_0 Y_{lm}(\vartheta, \varphi) &= m Y_{lm}(\vartheta, \varphi). \end{aligned} \quad (2)$$

## 2. Дифференциальные уравнения

Из коммутационных соотношений (1) следует, что  $Y_{lm}(\vartheta, \varphi)$  являются собственными функциями операторов  $\hat{L}^2$  и  $\hat{L}_z$ :

$$\begin{cases} \hat{L}^2 Y_{lm}(\vartheta, \varphi) = l(l+1) Y_{lm}(\vartheta, \varphi), \\ \hat{L}_z Y_{lm}(\vartheta, \varphi) = m Y_{lm}(\vartheta, \varphi), \end{cases} \quad (3)$$

или в развернутом виде

$$\begin{aligned} \left[ \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left( \sin \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + l(l+1) \right] Y_{lm}(\vartheta, \varphi) &= 0, \\ \left[ i \frac{\partial}{\partial \varphi} + m \right] Y_{lm}(\vartheta, \varphi) &= 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Уравнения (4) инвариантны относительно любого из следующих преобразований:

- а)  $l \rightarrow l = -l - 1$ ;
- б)  $\vartheta \rightarrow -\vartheta$  (или  $\vartheta \rightarrow \pi - \vartheta$ );
- в)  $m \rightarrow -m$ ,  $\varphi \rightarrow -\varphi$ .

### 3. Граничные условия

Уравнения (4) являются уравнениями второго порядка и при фиксированных значениях параметров  $l$  и  $m$  имеют два линейно независимых решения. Однако лишь одно из них является регулярным, т. е. удовлетворяет условию  $|Y_{lm}(\vartheta, \varphi)|^2 < \infty$ , тогда как другое обращается в бесконечность при  $\vartheta = 0$  и  $\vartheta = \pi$ .

В квантовомеханических приложениях основной интерес представляют регулярные решения, которые и будут рассмотрены ниже. Выбор регулярного решения определяется следующими граничными условиями:

$$Y_{lm}(\vartheta, \varphi \pm 2\pi n) = Y_{lm}(\vartheta, \varphi),$$

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} Y_{lm}(\vartheta, \varphi) \Big|_{\vartheta=0} = \frac{\partial}{\partial \varphi} Y_{lm}(\vartheta, \varphi) \Big|_{\vartheta=\pi} = 0. \quad (5)$$

Ниже рассматриваются лишь функции  $Y_{lm}(\vartheta, \varphi)$  с целочисленными значениями параметров  $l$  и  $m$  (причем  $|m| \leq l$ ), поскольку только при таких значениях параметров удовлетворяются условия (5).

### 4. Нормировка

а. Дифференциальные уравнения (4) и граничные условия (5) однородны и поэтому определяют  $Y_{lm}(\vartheta, \varphi)$  лишь с точностью до произвольного комплексного множителя, абсолютная величина которого определяется из условия нормировки.

Условие нормировки и ортогональности функций  $Y_{lm}(\vartheta, \varphi)$

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\vartheta \sin \vartheta Y_{lm}^*(\vartheta, \varphi) Y_{l'm'}(\vartheta, \varphi) = \delta_{ll'} \delta_{mm'}. \quad (6)$$

б. Иногда вместо  $Y_{lm}(\vartheta, \varphi)$  используют функции  $C_{lm}(\vartheta, \varphi)$  (см., например, [9, 24]), отличающиеся от  $Y_{lm}(\vartheta, \varphi)$  нормировочным множителем

$$C_{lm}(\vartheta, \varphi) = \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} Y_{lm}(\vartheta, \varphi). \quad (7)$$

Функции  $C_{lm}(\vartheta, \varphi)$  удовлетворяют условиям

$$\sum_m C_{lm}(\vartheta, \varphi) C_{l-m}(\vartheta, \varphi) (-1)^m = 1, \quad C_{lm}(0, 0) = \delta_{m0},$$

$$C_{l0}(\vartheta, \varphi) = P_l(\cos \vartheta), \quad C_{lm}(\vartheta, \varphi) = D_{l, -m}^l(0, \vartheta, \varphi). \quad (8)$$

Для этих функций условие нормировки и ортогональности имеет вид

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\vartheta \sin \vartheta C_{lm}^*(\vartheta, \varphi) C_{l'm'}(\vartheta, \varphi) = \frac{2l+1}{4\pi} \delta_{ll'} \delta_{mm'}. \quad (9)$$

### 5. Выбор фаз

а. Разности фаз функций  $Y_{lm}(\vartheta, \varphi)$  и  $Y_{l'm'}(\vartheta, \varphi)$  с  $m = m' \pm 1$  определяются коммутационными соотношениями (1). Пользуясь этими соотношениями, можно найти для каждого  $l$  относительные фазы всех  $(2l+1)$ -функций  $Y_{lm}(\vartheta, \varphi)$  с различными значениями  $m$ .

Общий фазовый множитель можно фиксировать, задав фазу одной из функций  $Y_{lm}(\vartheta, \varphi)$  при каком либо определенном значении аргументов, например

$$Y_{l0}(0, 0) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}}. \quad (10)$$

При этом для комплексно сопряженных функций  $Y_{lm}^*(\vartheta, \varphi)$  будут справедливы следующие соотношения:

$$Y_{lm}^*(\vartheta, \varphi) = Y_{lm}(\vartheta, -\varphi) = (-1)^m Y_{l-m}(\vartheta, \varphi). \quad (11)$$



Из соотношений (10) и (11), в частности, следует, что функции  $Y_{l_0}(\vartheta, \varphi)$  вещественны при любых значениях аргументов, а функции  $Y_{lm}(\vartheta, \varphi)$  с  $m \neq 0$  вещественны лишь при  $\varphi = 0, \pi/m, 2\pi/m, 3\pi/m, \dots$  и т. д.

Указанный выше выбор фаз соответствует широко используемому определению, принятому, например, Кондоном и Шортли [40] и др.

б. Иногда пользуются *модифицированными сферическими функциями*

$$\tilde{Y}_{lm}(\vartheta, \varphi) = i^l Y_{lm}(\vartheta, \varphi), \quad (12)$$

для которых

$$\tilde{Y}_{lm}^*(\vartheta, \varphi) = (-1)^{l+m} Y_{l-m}(\vartheta, \varphi). \quad (13)$$

Такой выбор фазы используется, например, в работах [6, 18].

Уравнение (4) и условия (5), (10), (11) полностью определяют вид функции  $Y_{lm}(\vartheta, \varphi)$ . Целочисленность параметров  $l$  и  $m$  обеспечивает однозначность сферических функций.

## 6. Зональные, секториальные и тессеральные гармоники

Иногда вместо сферических функций  $Y_{lm}(\vartheta, \varphi)$  используют их линейные комбинации

$$\begin{aligned} u_{lm}(\vartheta, \varphi) &= \frac{1}{2} [Y_{lm}(\vartheta, \varphi) + Y_{lm}^*(\vartheta, \varphi)] = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \cdot \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} \cos m\varphi P_l^m(\cos \vartheta), \\ v_{lm}(\vartheta, \varphi) &= \frac{1}{2i} [Y_{lm}(\vartheta, \varphi) - Y_{lm}^*(\vartheta, \varphi)] = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \cdot \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} \sin m\varphi P_l^m(\cos \vartheta). \end{aligned} \quad (14)$$

В отличие от  $Y_{lm}(\vartheta, \varphi)$  функции  $u_{lm}(\vartheta, \varphi)$  и  $v_{lm}(\vartheta, \varphi)$  вещественны. Функции  $u_{l_0}(\vartheta, \varphi)$  называются *зональными гармониками*, поскольку параллели, на которых  $u_{l_0}(\vartheta, \varphi) = 0$ , разбивают всю сферу на  $(l+1)$  зону. Функции  $u_{ll}(\vartheta, \varphi)$  и  $v_{ll}(\vartheta, \varphi)$  называются *секториальными гармониками*, так как меридианы, на которых  $u_{ll}(\vartheta, \varphi) = 0$  или  $v_{ll}(\vartheta, \varphi) = 0$ , разбивают всю сферу на  $2l$  секторов. Функции  $u_{lm}(\vartheta, \varphi)$  и  $v_{lm}(\vartheta, \varphi)$  при  $m \neq 0$  и  $m \neq l$  называются *тессеральными* (или *клеточными*) *гармониками*, потому что система параллелей и меридианов, на которых  $u_{lm}(\vartheta, \varphi) = 0$  или  $v_{lm}(\vartheta, \varphi) = 0$ , делит всю поверхность сферы на  $2m(l-m+1)$  клеток. Клетки, соответствующие положительным и отрицательным значениям функции, чередуются в шахматном порядке.

## 7. Уравнения, решения которых выражаются через $Y_{lm}(\vartheta, \varphi)$

а. Решениями уравнения Лапласа в сферических координатах

$$\nabla^2 f(r, \vartheta, \varphi) = 0 \quad (15)$$

являются функции

$$\mathfrak{Z}_{lm}(r, \vartheta, \varphi) = r^l Y_{lm}(\vartheta, \varphi) \text{ и } \mathfrak{X}_{lm}(r, \vartheta, \varphi) = r^{-l-1} Y_{lm}(\vartheta, \varphi),$$

называемые *регулярными* и *иррегулярными* (в соответствии с их поведением в точке  $r=0$ ) *телесными гармониками*. В декартовых координатах функции  $\mathfrak{Z}_{lm}(r, \vartheta, \varphi)$  представляют собой гармонические однородные по  $x, y, z$  полиномы степени  $l$

$$r^l Y_{lm}(\vartheta, \varphi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} \sum_{p, q, r} \frac{1}{p! q! r!} \left(-\frac{x+iy}{2}\right)^p \left(\frac{x-iy}{2}\right)^q z^r, \quad (16)$$

где  $p, q, r$  — целые положительные числа, удовлетворяющие условиям  $p+q+r=l, p-q=m$ .

б. Решениями волнового уравнения Гельмгольца в сферических координатах

$$[\nabla^2 + k^2] f(r, \vartheta, \varphi) = 0 \quad (17)$$

являются функции типа  $z_l(kr) Y_{lm}(\vartheta, \varphi)$ , где  $z_l(kr) = \sqrt{\frac{\pi}{2kr}} Z_{l+1/2}(kr)$  есть сферические функции Бесселя, Неймана или Ханкеля I и II рода порядка  $l$ . Функции

$$\mathfrak{Z}_{lm}(r, \vartheta, \varphi) = i^l j_l(kr) Y_{lm}(\vartheta, \varphi) \text{ и } \mathfrak{X}_{lm}(r, \vartheta, \varphi) = i^l n_l(kr) Y_{lm}(\vartheta, \varphi)$$

называют *стоячими сферическими волнами*, регулярными и иррегулярными в точке  $r = 0$ . Функции

$$\mathfrak{S}_{lm}^{(1)}(r, \vartheta, \varphi) = i^l h_l^{(1)}(kr) Y_{lm}(\vartheta, \varphi) \text{ и } \mathfrak{S}_{lm}^{(2)}(r, \vartheta, \varphi) = i^l h_l^{(2)}(kr) Y_{lm}(\vartheta, \varphi)$$

называют *бегущими сферическими волнами*, сходящимися и расходящимися из точки  $r = 0$ . При  $k \rightarrow 0$  уравнение (17) переходит в уравнение (15). Соответственно

$$\mathfrak{S}_{lm}(r, \vartheta, \varphi) \rightarrow \mathfrak{S}_{lm}(r, \vartheta, \varphi), \text{ а } \mathfrak{N}_{lm}(r, \vartheta, \varphi) \rightarrow \mathfrak{N}_{lm}(r, \vartheta, \varphi).$$

в. Решениями уравнения

$$\left[ \nabla^2 - \frac{(n-l)(n+l+1)}{r^2} \right] f(r, \vartheta, \varphi) = 0 \quad (18)$$

являются функции

$$f_{lm}^n(r, \vartheta, \varphi) = r^n Y_{lm}(\vartheta, \varphi).$$

В точке  $r = 0$  функции  $f_{lm}^n(r, \vartheta, \varphi)$  регулярны при  $n \geq 0$  и иррегулярны при  $n < 0$ . При  $n = l$  или  $n = -l - 1$  уравнение (18) переходит в уравнение (15). Соответственно

$$f_{lm}^l(r, \vartheta, \varphi) = \mathfrak{S}_{lm}(r, \vartheta, \varphi), \quad f_{lm}^{-l-1}(r, \vartheta, \varphi) = \mathfrak{N}_{lm}(r, \vartheta, \varphi). \quad (19)$$

Отметим, что приведенные уравнения наряду с перечисленными выше решениями, регулярными по  $\vartheta$ , имеют решения, иррегулярные по  $\vartheta$ , которые содержат вместо  $Y_{lm}(\vartheta, \varphi) \sim P_l^m(\cos \vartheta) e^{im\varphi}$  функции  $Q_l^m(\cos \vartheta) e^{im\varphi}$  (где  $P_l^m(x)$  и  $Q_l^m(x)$  — присоединенные функции Лежандра I и II рода [4, 27]).

## 5.2. ЯВНЫЙ ВИД СФЕРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ И ИХ СВЯЗЬ С ДРУГИМИ ФУНКЦИЯМИ

Сферические функции  $Y_{lm}(\vartheta, \varphi)$  можно представить в виде произведения двух функций, одна из которых зависит только от  $\varphi$ , а другая только от  $\vartheta$ . Они выражаются через присоединенные полиномы Лежандра  $P_l^m(\cos \vartheta)$  по формуле

$$Y_{lm}(\vartheta, \varphi) = e^{im\varphi} \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_l^m(\cos \vartheta). \quad (1)$$

Сферические функции  $Y_{lm}(\vartheta, \varphi)$  равны нулю при  $|m| > l$  ( $l, m$  — целые), тогда как  $P_l^{-|m|}(\cos \vartheta) \neq 0$  при  $|m| > l$ . Для функций  $Y_{lm}(\vartheta, \varphi)$  с  $|m| \leq l$  справедливы приведенные ниже выражения [4, 22, 27].

### 1. Дифференциальные выражения для $Y_{lm}(\vartheta, \varphi)$

$$Y_{lm}(\vartheta, \varphi) = \frac{e^{im\varphi}}{2^l l!} \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l+m)!}{(l-m)!}} (\sin \vartheta)^{-m} \frac{d^{l-m}}{(d \cos \vartheta)^{l-m}} (\cos^2 \vartheta - 1)^l, \quad (2)$$

$$Y_{lm}(\vartheta, \varphi) = (-1)^m \frac{e^{im\varphi}}{2^l l!} \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} (\sin \vartheta)^m \frac{d^{l+m}}{(d \cos \vartheta)^{l+m}} (\cos^2 \vartheta - 1)^l, \quad (3)$$

$$Y_{lm}(\vartheta, \varphi) = \frac{e^{im\varphi}}{2^l} \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l+m)!}{(l-m)!}} \left( \operatorname{ctg} \frac{\vartheta}{2} \right)^m \left( \frac{d}{d \cos \vartheta} \right)^l [(1 + \cos \vartheta)^{l-m} (\cos \vartheta - 1)^{l+m}], \quad (4)$$

$$Y_{lm}(\vartheta, \varphi) = (-1)^m \frac{e^{im\varphi}}{2^l} \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l+m)!}{(l-m)!}} \left( \operatorname{tg} \frac{\vartheta}{2} \right)^m \left( \frac{d}{d \cos \vartheta} \right)^l [(\cos \vartheta + 1)^{l+m} (\cos \vartheta - 1)^{l-m}]. \quad (5)$$

Сферические функции  $Y_{lm}(\vartheta, \varphi)$  могут быть представлены в виде производных от полиномов Лежандра

$$Y_{lm}(\vartheta, \varphi) = (-1)^m e^{im\varphi} \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} (\sin \vartheta)^m \frac{d^m}{(d \cos \vartheta)^m} P_l(\cos \vartheta). \quad (6)$$

$(m \geq 0)$

Формулу (6) можно применять не только при  $m \geq 0$ , но и при  $m < 0$ , если полагать

$$\left( \frac{d}{d\mu} \right)^{-|m|} f(\mu) \equiv \int_1^\mu \int_1^\mu \dots \int_1^\mu f(\mu) \frac{d\mu \dots d\mu}{|m|}. \quad (7)$$

## 2. Представление $Y_{lm}(\vartheta, \varphi)$ в виде степенных рядов тригонометрических функций от аргумента $\vartheta/2$

В приведенных ниже формулах суммирование производится по целочисленным значениям  $s$ , при которых под знаком факториалов стоят неотрицательные числа. Величина  $\xi_{m0}$  определена следующим образом:

$$\xi_{m0} = \begin{cases} (-1)^m & \text{при } m > 0, \\ 1 & \text{при } m \leq 0. \end{cases} \quad (8)$$

$$Y_{lm}(\vartheta, \varphi) = (-1)^m e^{im\varphi} \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \cdot \frac{(l+m)!}{(l-m)!}} \left(\operatorname{tg} \frac{\vartheta}{2}\right)^m \sum_s (-1)^s \frac{(l+s)!}{(l-s)!} \cdot \frac{\left(\sin \frac{\vartheta}{2}\right)^{2s}}{s!(s+m)!}, \quad (9)$$

$$Y_{lm}(\vartheta, \varphi) = (-1)^m e^{im\varphi} \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \cdot \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} \left(\sin \frac{\vartheta}{2} \cdot \cos \frac{\vartheta}{2}\right)^m \sum_s (-1)^s \frac{(l+m+s)!}{(l-m-s)!} \cdot \frac{\left(\sin \frac{\vartheta}{2}\right)^{2s}}{s!(s+m)!}, \quad (10)$$

$$Y_{lm}(\vartheta, \varphi) = e^{im\varphi} \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \cdot \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} \left(\operatorname{ctg} \frac{\vartheta}{2}\right)^m \sum_s (-1)^{l-s} \frac{(2l-s)!}{s!(l-s)!} \cdot \frac{\left(\sin \frac{\vartheta}{2}\right)^{2(l-s)}}{(l-m-s)!}, \quad (11)$$

$$Y_{lm}(\vartheta, \varphi) = (-1)^l e^{im\varphi} \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \cdot \frac{(l+m)!}{(l-m)!}} \left(\operatorname{ctg} \frac{\vartheta}{2}\right)^m \sum_s (-1)^s \frac{(l+s)!}{(l-s)!} \cdot \frac{\left(\cos \frac{\vartheta}{2}\right)^{2s}}{s!(s+m)!}, \quad (12)$$

$$Y_{lm}(\vartheta, \varphi) = (-1)^l e^{im\varphi} \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \cdot \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} \left(\sin \frac{\vartheta}{2} \cos \frac{\vartheta}{2}\right)^m \sum_s (-1)^s \frac{(l+m+s)!}{(l-m-s)!} \cdot \frac{\left(\cos \frac{\vartheta}{2}\right)^{2s}}{s!(s+m)!}, \quad (13)$$

$$Y_{lm}(\vartheta, \varphi) = (-1)^{l-m} e^{im\varphi} \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \cdot \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} \left(\operatorname{tg} \frac{\vartheta}{2}\right)^m \sum_s (-1)^{l-s} \frac{(2l-s)!}{s!(l-s)!} \cdot \frac{\left(\cos \frac{\vartheta}{2}\right)^{2(l-s)}}{(l-m-s)!}, \quad (14)$$

$$Y_{lm}(\vartheta, \varphi) = \xi_{m0} e^{im\varphi} \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} \sqrt{(l+m)! (l-m)!} |l||m|! \left(\cos \frac{\vartheta}{2}\right)^{2l} \sum_s \frac{(-1)^s \left(\operatorname{tg} \frac{\vartheta}{2}\right)^{2s+|m|}}{s!(s+|m|)! (l-s)! (l-|m|-s)!}, \quad (15)$$

$$Y_{lm}(\vartheta, \varphi) = \xi_{m0} (-1)^{l-m} e^{im\varphi} \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} \sqrt{(l+m)! (l-m)!} |l||m|! \left(\sin \frac{\vartheta}{2}\right)^{2l} \sum_s \frac{(-1)^s \left(\operatorname{ctg} \frac{\vartheta}{2}\right)^{2s+|m|}}{s!(s+|m|)! (l-s)! (l-|m|-s)!}. \quad (16)$$

## 3. Представление $Y_{lm}(\vartheta, \varphi)$ в виде степенных рядов тригонометрических функций от аргумента $\vartheta$

В формулах, приведенных в этом пункте, индекс суммирования  $s$  пробегает либо только четные, либо только нечетные значения в соответствии с условиями, указанными под знаком суммирования. Суммирование производится по таким значениям  $s$ , при которых факториалы, стоящие в знаменателе, не обращаются в бесконечность.

$$Y_{lm}(\vartheta, \varphi) = e^{im\varphi} \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{1}{(l+m)! (l-m)!}} \times \left\{ \begin{array}{l} \sum_{s=|m|, |m|+2, \dots}^l (-1)^{\frac{s+m}{2}} \frac{(l+s)!}{(s+m)! (s-m)!} \cdot \frac{(l+m)! (l-m)!}{(l+s)! (l-s)!} (\sin \vartheta)^s \\ \text{при } l-m \text{ четном,} \\ \cos \vartheta \sum_{s=|m|, |m|+2, \dots}^{l-1} (-1)^{\frac{s+m}{2}} \frac{(l+s)!}{(s+m)! (s-m)!} \cdot \frac{(l+m-1)! (l-m-1)!}{(l+s-1)! (l-s-1)!} (\sin \vartheta)^s \\ \text{при } l-m \text{ нечетном.} \end{array} \right. \quad (17)$$

$$Y_{lm}(\vartheta, \varphi) = e^{im\varphi} \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi(l+m)!(l-m)!}} (\sin \vartheta)^l \times \left\{ \begin{array}{l} \sum_{s=0, 2, \dots}^{l-|m|} (-1)^{\frac{l+m-s}{2}} \frac{(l+m)!!(l-m)!!}{(l+m-s)!!(l-m-s)!!} \cdot \frac{(2l-s-1)!!}{s!!(\sin \vartheta)^s} \\ \text{при } l-m \text{ четном,} \\ \cos \vartheta \sum_{s=1, 3, \dots}^{l-|m|} (-1)^{\frac{l+m-s}{2}} \frac{(l+m-1)!!(l-m-1)!!}{(l+m-s)!!(l-m-s)!!} \cdot \frac{(2l-s)!!}{(s-1)!!(\sin \vartheta)^s} \\ \text{при } l-m \text{ нечетном,} \end{array} \right. \quad (18)$$

$$Y_{lm}(\vartheta, \varphi) = e^{im\varphi} \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \cdot \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} (\sin \vartheta)^m \sum_s (-1)^{\frac{l+m-s}{2}} \frac{(l+m+s-1)!!}{(l-m-s)!!} \cdot \frac{(\cos \vartheta)^s}{s!} \quad (19)$$

$l+m-s$  четное.

$$Y_{lm}(\vartheta, \varphi) = e^{im\varphi} \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} (l+m)!(l-m)!(\cos \vartheta)^l \sum_{s=|m|, |m|+2, \dots}^{s+m} (-1)^{\frac{s+m}{2}} \frac{1}{(s+m)!!(s-m)!!} \cdot \frac{(\operatorname{tg} \vartheta)^s}{(l-s)!}, \quad (20)$$

$$Y_{lm}(\vartheta, \varphi) = e^{im\varphi} \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} (l+m)!(l-m)!(\sin \vartheta)^l \sum_s (-1)^{\frac{l+m-s}{2}} \frac{1}{(l+m-s)!!(l-m-s)!!} \cdot \frac{(\operatorname{ctg} \vartheta)^s}{s!} \quad (21)$$

$l+m-s$  четное.

Квадрат модуля сферических функций можно записать в виде следующей суммы:

$$|Y_{lm}(\vartheta, \varphi)|^2 = \frac{2l+1}{4\pi} \sum_{s=|m|, |m|+1, \dots}^l (-1)^{s+m} \frac{(l+s)!}{(l-s)!} \cdot \frac{(2s-1)!!}{(2s)!!} \cdot \frac{(\sin \vartheta)^{2s}}{(s-m)!(s+m)!}. \quad (22)$$

#### 4. Представления $Y_{lm}(\vartheta, \varphi)$ в виде гипергеометрических рядов от тригонометрических функций аргумента $\vartheta/2$

$$Y_{lm}(\vartheta, \varphi) = \xi_{m0} e^{im\varphi} \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \cdot \frac{(l+|m|)!}{(l-|m|)!}} \cdot \frac{(\sin \vartheta)^{|m|}}{|m|! 2^{|m|}} F\left(-l+|m|, l+|m|+1; |m|+1; \sin^2 \frac{\vartheta}{2}\right), \quad (23)$$

$$Y_{lm}(\vartheta, \varphi) = (-1)^{l-m} \xi_{m0} e^{im\varphi} \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l+m)!(l-m)!}{(l+m)!(l-m)!}} \frac{(2l)!}{l!} \left(\sin \frac{\vartheta}{2}\right)^{2l} \left(\operatorname{ctg} \frac{\vartheta}{2}\right)^{|m|} F\left(-l, -l+|m|; -2l; \frac{1}{\sin^2 \frac{\vartheta}{2}}\right), \quad (24)$$

$$Y_{lm}(\vartheta, \varphi) = (-1)^{l-m} \xi_{m0} e^{im\varphi} \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \cdot \frac{(l+|m|)!}{(l-|m|)!}} \frac{(\sin \vartheta)^{|m|}}{|m|! 2^{|m|}} F\left(-l+|m|, l+|m|+1; |m|+1; \cos^2 \frac{\vartheta}{2}\right), \quad (25)$$

$$Y_{lm}(\vartheta, \varphi) = \xi_{m0} e^{im\varphi} \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l+m)!(l-m)!}{(l+m)!(l-m)!}} \frac{(2l)!}{l!} \left(\cos \frac{\vartheta}{2}\right)^{2l} \left(\operatorname{tg} \frac{\vartheta}{2}\right)^{|m|} F\left(-l, -l+|m|; -2l; \frac{1}{\cos^2 \frac{\vartheta}{2}}\right), \quad (26)$$

$$Y_{lm}(\vartheta, \varphi) = \xi_{m0} e^{im\varphi} \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \cdot \frac{(l+|m|)!}{(l-|m|)!}} \left(\operatorname{tg} \frac{\vartheta}{2}\right)^{|m|} \left(\cos \frac{\vartheta}{2}\right)^{2l} F\left(-l+|m|, -l; |m|+1; -\operatorname{tg}^2 \frac{\vartheta}{2}\right), \quad (27)$$

$$Y_{lm}(\vartheta, \varphi) = (-1)^{l-m} \xi_{m0} e^{im\varphi} \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \cdot \frac{(l+|m|)!}{(l-|m|)!}} \left(\operatorname{ctg} \frac{\vartheta}{2}\right)^{|m|} \left(\sin \frac{\vartheta}{2}\right)^{2l} F\left(-l+|m|, -l; |m|+1; -\operatorname{ctg}^2 \frac{\vartheta}{2}\right). \quad (28)$$

### 5. Представление $Y_{lm}(\vartheta, \varphi)$ в виде гипергеометрических рядов от тригонометрических функций аргумента $\vartheta$

$$Y_{lm}(\vartheta, \varphi) = \xi_{m0} e^{im\varphi} \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l+|m|)!}{(l-|m|)! 2^{|m|} |m|!}} \begin{cases} F\left(-\frac{l-|m|}{2}, \frac{l+|m|+1}{2}; |m|+1; \sin^2 \vartheta\right) & \text{при } l+m \text{ четном,} \\ \cos \vartheta F\left(-\frac{l-|m|-1}{2}, \frac{l+|m|+2}{2}; |m|+1; \sin^2 \vartheta\right) & \text{при } l+m \text{ нечетном.} \end{cases} \quad (29)$$

$$Y_{lm}(\vartheta, \varphi) = e^{im\varphi} \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi (l+m)! (l-m)!}} (2l-1)!! (\sin \vartheta)^l \times \begin{cases} (-1)^{\frac{l+m}{2}} F\left(-\frac{l+m}{2}, -\frac{l-m}{2}; -\frac{2l-1}{2}; \frac{1}{\sin^2 \vartheta}\right) & \text{при } l+m \text{ четном,} \\ (-1)^{\frac{l+m-1}{2}} \operatorname{ctg} \vartheta F\left(-\frac{l+m-1}{2}, -\frac{l-m-1}{2}; -\frac{2l-1}{2}; \frac{1}{\sin^2 \vartheta}\right) & \text{при } l+m \text{ нечетном.} \end{cases} \quad (30)$$

$$Y_{lm}(\vartheta, \varphi) = e^{im\varphi} \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi (l+m)! (l-m)!}} (\sin \vartheta)^m \times \begin{cases} (-1)^{\frac{l+m}{2}} (l+m-1)!! (l-m-1)!! F\left(-\frac{l-m}{2}, \frac{l+m+1}{2}; \frac{1}{2}; \cos^2 \vartheta\right) & \text{при } l+m \text{ четном,} \\ (-1)^{\frac{l+m-1}{2}} (l+m)!! (l-m)!! \cos \vartheta F\left(-\frac{l-m-1}{2}, \frac{l+m+2}{2}; \frac{3}{2}; \cos^2 \vartheta\right) & \text{при } l+m \text{ нечетном.} \end{cases} \quad (31)$$

$$Y_{lm}(\vartheta, \psi) = (-1)^m e^{im\varphi} \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi (l+m)! (l-m)!}} (2l-1)!! (\cos \vartheta)^l (\operatorname{tg} \vartheta)^m \times F\left(-\frac{l-m}{2}, -\frac{l-m-1}{2}; -\frac{2l-1}{2}; \frac{1}{\cos^2 \vartheta}\right), \quad (32)$$

$$Y_{lm}(\vartheta, \varphi) = \xi_{m0} e^{im\varphi} \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l+|m|)!}{(l-|m|)!}} (\cos \vartheta)^l \frac{(\operatorname{tg} \vartheta)^{|m|}}{2^{|m|} |m|!} F\left(-\frac{l-|m|}{2}, -\frac{l-|m|-1}{2}; |m|+1; -\operatorname{tg}^2 \vartheta\right), \quad (33)$$

$$Y_{lm}(\vartheta, \varphi) = e^{im\varphi} \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi (l+m)! (l-m)!}} (\sin \vartheta)^l \times \begin{cases} (-1)^{\frac{l+m}{2}} (l+m-1)!! (l-m-1)!! F\left(-\frac{l-m}{2}, -\frac{l+m}{2}; \frac{1}{2}; -\operatorname{ctg}^2 \vartheta\right) & \text{при } l+m \text{ четном,} \\ (-1)^{\frac{l+m-1}{2}} (l+m)!! (l-m)!! \operatorname{ctg} \vartheta F\left(-\frac{l-m-1}{2}, -\frac{l+m-1}{2}; \frac{3}{2}; -\operatorname{ctg}^2 \vartheta\right) & \text{при } l+m \text{ нечетном.} \end{cases} \quad (34)$$

### 6. Связь $Y_{lm}(\vartheta, \varphi)$ с гипергеометрическими рядами от экспоненциальных функций

$$Y_{lm}(\vartheta, \varphi) = -\frac{ie^{im\varphi}}{\pi} \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} (l+m)! (l-m)!} \frac{2^{l+m+1} (\sin \vartheta)^m}{(2l+1)!!} \times \left\{ e^{-i(l+m+1)\vartheta} F\left(m + \frac{1}{2}, l+m+1; l + \frac{3}{2}; e^{-2i\vartheta}\right) - e^{i(l+m+1)\vartheta} F\left(m + \frac{1}{2}, l+m+1; l + \frac{3}{2}; e^{2i\vartheta}\right) \right\}, \quad (35)$$

$$\begin{aligned}
Y_{lm}(\vartheta, \varphi) = & -\frac{i}{\pi} e^{im\varphi} \sqrt{\frac{2l+1}{8\pi} (l+m)! (l-m)!} \frac{2^{l+1}}{(2l+1)!! \sqrt{\sin \vartheta}} \times \\
& \times \left\{ e^{-i\left[(2l+1)\frac{\vartheta}{2} + (2m+1)\frac{\pi}{4}\right]} F\left(m + \frac{1}{2}, \frac{1}{2} - m; l + \frac{3}{2}; -\frac{e^{-i\left(\vartheta + \frac{\pi}{2}\right)}}{2 \sin \vartheta}\right) - \right. \\
& \left. - e^{i\left[(2l+1)\frac{\vartheta}{2} + (2m+1)\frac{\pi}{4}\right]} F\left(m + \frac{1}{2}, \frac{1}{2} - m; l + \frac{3}{2}; -\frac{e^{i\left(\vartheta + \frac{\pi}{2}\right)}}{2 \sin \vartheta}\right) \right\}. \quad (36)
\end{aligned}$$

## 7. СВЯЗЬ $Y_{lm}(\vartheta, \varphi)$ С ДРУГИМИ СПЕЦИАЛЬНЫМИ ФУНКЦИЯМИ

а. Связь  $Y_{lm}(\vartheta, \varphi)$  с  $D$ -функциями Вигнера  $D_{M M'}^J(\alpha, \beta, \gamma)$  (см. гл. 4)

$$\begin{aligned}
Y_{lm}(\vartheta, \varphi) = & \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} D_{l-m}^l(\chi, \vartheta, \varphi) = (-i)^m \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} D_{l-m}^{l*}(\chi, \vartheta, \varphi) = \\
= & (-i)^m \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} D_{-m0}^l(\varphi, \vartheta, \chi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} D_{m0}^{l*}(\varphi, \vartheta, \chi), \quad (37)
\end{aligned}$$

где  $\chi$  — произвольный угол.

б. Связь  $Y_{lm}(\vartheta, \varphi)$  с полиномами Якоби  $P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$

$$Y_{lm}(\vartheta, \varphi) = \xi_{m0} \frac{e^{im\varphi}}{2^{|m|} l!} \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} (l+m)! (l-m)! (\sin \vartheta)^{|m|}} P_{l-|m|}^{(|m|, |m|)}(\cos \vartheta). \quad (38)$$

в. Связь  $Y_{lm}(\vartheta, \varphi)$  с полиномами Гегенбауэра  $C_n^\lambda(x)$

$$Y_{lm}(\vartheta, \varphi) = \xi_{m0} e^{im\varphi} \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \cdot \frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!}} (2|m|-1)!! (\sin \vartheta)^{|m|} C_{l-|m|}^{\frac{1}{2}+|m|}(\cos \vartheta). \quad (39)$$

## 8. Представление $Y_{lm}(\vartheta, \varphi)$ в виде неприводимого тензорного произведения произвольного вектора $\mathbf{r}$

$$Y_{lm}(\vartheta, \varphi) = \frac{1}{r^l} \sqrt{\frac{(2l+1)!!}{4\pi l!}} \{ \dots \{ (\mathbf{r} \otimes \mathbf{r})_s \otimes \mathbf{r} \}_s \dots \otimes \mathbf{r} \}_{lm}, \quad (40)$$

где  $r$  — длина вектора  $\mathbf{r}$ , а  $\vartheta, \varphi$  — сферические углы, характеризующие его направление.

### 5.3. ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ СФЕРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

#### 1. Представление $Y_{lm}(\vartheta, \varphi)$ в виде интегралов, пределы которых зависят от $\vartheta$ [4, 22, 27]

$$\text{а) } Y_{lm}(\vartheta, \varphi) = e^{im\varphi} \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \cdot \frac{(l+m)!}{(l-m)!}} \frac{1}{(\sin \vartheta)^m} \int_1^{\cos \vartheta} \int_1^{\cos \vartheta} \dots \int_1^{\cos \vartheta} P_l(\cos \vartheta) (d \cos \vartheta)^m, \quad (m \geq 0). \quad (1)$$

Эту формулу можно рассматривать как обобщение дифференциального соотношения 5.2 (б) на случай  $m < 0$ .

б) Формулы Мёлера—Дирихле

$$Y_{lm}(\vartheta, \varphi) = (-1)^m \frac{\sqrt{2}}{\pi} e^{im\varphi} \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \cdot \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} (2m-1)!! \left(\frac{\sin \vartheta}{2}\right)^m \int_0^\pi \frac{\cos \left[ (2l+1) \frac{\psi}{2} \right] d\psi}{(\cos \psi - \cos \vartheta)^{m+\frac{1}{2}}}, \quad (m \geq 0). \quad (2)$$

$$Y_{lm}(\vartheta, \varphi) = \frac{\sqrt{2}}{\pi} e^{im\varphi} \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \cdot \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} (2m-1)!! \left(\frac{\sin \vartheta}{2}\right)^m \int_0^\pi \frac{\sin \left[ (2l+1) \frac{\psi}{2} \right] d\psi}{(\cos \vartheta - \cos \psi)^{m+\frac{1}{2}}}, \quad (m \geq 0). \quad (3)$$

$$в) Y_{lm}(\vartheta, \varphi) = (-1)^m e^{im\varphi} \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \cdot \frac{(l+m)!}{(l-m)!}} \frac{1}{(m-1)!(\sin \vartheta)^m} \int_{\cos \vartheta}^1 P_l(\cos \psi) [\cos \psi - \cos \vartheta]^{m-1} d \cos \psi, \quad (m > 0). \quad (4)$$

## 2. Представление $Y_{lm}(\vartheta, \varphi)$ в виде определенных интегралов в конечных пределах [4, 22, 27]

$$а) Y_{lm}(\vartheta, \varphi) = \frac{(\pm i)^m}{\pi} e^{im\varphi} \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} (l+m)! (l-m)!} \frac{1}{l!} \int_0^\pi [\cos \vartheta \pm i \sin \vartheta \cos \psi]^l \cos(m\psi) d\psi, \quad (5)$$

$$Y_{lm}(\vartheta, \varphi) = \frac{(\pm i)^m}{\pi} e^{im\varphi} \sqrt{\frac{(2l+1)}{4\pi} (l+m)! (l-m)!} l! \int_0^\pi \frac{\cos(m\psi) d\psi}{(\cos \vartheta \mp i \sin \vartheta \cos \psi)^{l+1}}. \quad (6)$$

При  $\varphi = 0$  комплексное сопряжение не меняет значения правой части равенства, поскольку  $Y_{lm}(\vartheta, 0)$  вещественно.

$$б) Y_{lm}(\vartheta, \varphi) = \frac{(\pm i)^m}{2\pi} \sqrt{\frac{(2l+1)}{4\pi} (l+m)! (l-m)!} \frac{1}{l!} \int_0^{2\pi} [\cos \vartheta \pm i \sin \vartheta \cos(\psi - \varphi)]^l e^{im\psi} d\psi, \quad (7)$$

$$Y_{lm}(\vartheta, \varphi) = \frac{(\pm i)^m}{2\pi} \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} (l+m)! (l-m)!} l! \int_0^{2\pi} [\cos \vartheta \mp i \sin \vartheta \cos(\psi - \varphi)]^{-l-1} e^{im\psi} d\psi. \quad (8)$$

Соотношения (7) и (8) являются модификацией формул (5) и (6).

$$в) Y_{lm}(\vartheta, \varphi) = \frac{(-1)^m}{\pi} e^{im\varphi} \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \cdot \frac{(l+m)!}{(l-m)!}} \frac{(\sin \vartheta)^m}{(2m-1)!!} \int_0^\pi (\cos \vartheta \pm i \sin \vartheta \cos \psi)^{l-m} (\sin \psi)^{2m} d\psi, \quad (m \geq 0), \quad (9)$$

$$Y_{lm}(\vartheta, \varphi) = \frac{(-1)^m}{\pi} e^{im\varphi} \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \cdot \frac{(l+m)!}{(l-m)!}} \frac{(\sin \vartheta)^m}{(2m-1)!!} \int_0^\pi \frac{(\sin \chi)^{2m} d\chi}{(\cos \vartheta \mp i \sin \vartheta \cos \chi)^{l+m+1}}, \quad (m \geq 0). \quad (10)$$

Формулы (9) и (10) переходят друг в друга при замене переменных интегрирования по формулам

$$\cos \psi = \frac{\cos \vartheta \cos \chi + i \sin \vartheta}{\cos \vartheta + i \sin \vartheta \cos \chi}, \quad \cos \chi = \frac{\cos \vartheta \cos \psi - i \sin \vartheta}{\cos \vartheta - i \sin \vartheta \cos \psi}. \quad (11)$$

Такое преобразование эквивалентно «зеркальной» симметрии, т. е. замене  $l$  на  $l = -l - 1$ .

## 3. Представление $Y_{lm}(\vartheta, \varphi)$ в виде определенных интегралов в бесконечных пределах [4, 22, 27]

$$а) Y_{lm}(\vartheta, \varphi) = \frac{i^{m+1}}{\pi} e^{im\varphi} \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi(l+m)!(l-m)!}} l! \left\{ (-1)^m \int_0^\infty \frac{\operatorname{ch}(mt) dt}{(\cos \vartheta + i \sin \vartheta \operatorname{ch} t)^{l+1}} - \int_0^\infty \frac{\operatorname{ch}(mt) dt}{(\cos \vartheta - i \sin \vartheta \operatorname{ch} t)^{l+1}} \right\}, \quad (12)$$

$$Y_{lm}(\vartheta, \varphi) = \frac{i}{\pi} e^{im\varphi} \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \cdot \frac{(l+m)!}{(l-m)!}} \frac{(\sin \vartheta)^m}{(2m-1)!!} \times \left\{ \int_0^\infty \frac{(\operatorname{sh} t)^{2m} dt}{(\cos \vartheta + i \sin \vartheta \operatorname{ch} t)^{l+m+1}} - \int_0^\infty \frac{(\operatorname{sh} t)^{2m} dt}{(\cos \vartheta - i \sin \vartheta \operatorname{ch} t)^{l+m+1}} \right\}, \quad (m \geq 0). \quad (13)$$

$$б) Y_{lm}(\vartheta, \varphi) = (-1)^m e^{im\varphi} \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi(l+m)!(l-m)!}} \int_0^\infty e^{-k \cos \vartheta} J_m(k \sin \vartheta) k^l dk, \quad (14)$$

где  $J_m(x)$  — функция Бесселя порядка  $m$ .

в) Квадрат модуля сферических функций  $|Y_{lm}(\vartheta, \varphi)|^2$  можно представить в виде следующего интеграла:

$$|Y_{lm}(\vartheta, \varphi)|^2 = \frac{2l+1}{4\pi} \int_0^\infty \left[ J_m\left(\frac{t \sin \vartheta}{2}\right) \right]^2 J_{2l+1}(t) dt. \quad (15)$$

#### 5.4. СВОЙСТВА СИММЕТРИИ

1. Приведенные ниже свойства симметрии сферических функций связывают между собой  $Y_{lm}(\vartheta, \varphi)$  с разными значениями аргументов  $\vartheta, \varphi$  и параметров  $l, m$ . Они позволяют расширить область изменения аргументов и обобщить определение  $Y_{lm}(\vartheta, \varphi)$  на случай отрицательных значений  $l$ .

а. Комплексное сопряжение

$$Y_{lm}^*(\vartheta, \varphi) = Y_{lm}(\vartheta, -\varphi) = (-1)^m Y_{l-m}(\vartheta, \varphi). \quad (1)$$

б. Изменение знака  $m$ :

$$Y_{l-m}(\vartheta, \varphi) = (-1)^m Y_{lm}(\vartheta, -\varphi) = (-1)^m e^{-i2m\varphi} Y_{lm}(\vartheta, \varphi). \quad (2)$$

в. «Зеркальная» симметрия (замена  $l$  на  $\bar{l} = -l - 1$ ):

$$Y_{lm}(\vartheta, \varphi) = (-1)^m Y_{l-m}(\vartheta, \varphi). \quad (3)$$

г. Замена аргументов  $\vartheta \rightarrow \pi - \vartheta$  и  $\varphi \rightarrow \pi + \varphi$ :

$$Y_{lm}(\pi - \vartheta, \varphi) = (-1)^{l+m} Y_{lm}(\vartheta, \varphi), \quad (4)$$

$$Y_{lm}(\vartheta, \pi + \varphi) = (-1)^m Y_{lm}(\vartheta, \varphi), \quad (5)$$

$$Y_{lm}(\pi - \vartheta, \pi + \varphi) = (-1)^l Y_{lm}(\vartheta, \varphi). \quad (6)$$

д. Изменение знака аргументов:

$$Y_{lm}(-\vartheta, \varphi) = (-1)^m Y_{lm}(\vartheta, \varphi), \quad (7)$$

$$Y_{lm}(\vartheta, -\varphi) = (-1)^m Y_{l-m}(\vartheta, \varphi), \quad (8)$$

$$Y_{lm}(-\vartheta, -\varphi) = Y_{l-m}(\vartheta, \varphi). \quad (9)$$

е. Периодичность по  $\vartheta$  и  $\varphi$ :

$$Y_{lm}(\vartheta \pm n\pi, \varphi) = \begin{cases} (-1)^l Y_{lm}(\vartheta, \varphi), & n - \text{нечетное,} \\ Y_{lm}(\vartheta, \varphi), & n - \text{четное.} \end{cases} \quad (10)$$

$$Y_{lm}(\vartheta, \varphi \pm n\pi) = \begin{cases} (-1)^m Y_{lm}(\vartheta, \varphi), & n - \text{нечетное,} \\ Y_{lm}(\vartheta, \varphi), & n - \text{четное.} \end{cases} \quad (11)$$

2. Следующие соотношения для  $Y_{lm}(\vartheta, \varphi)$  можно получить, комбинируя указанные выше свойства симметрии:

$$\begin{aligned} Y_{lm}(\vartheta, \varphi) &= (-1)^m e^{2im\varphi} Y_{l-m}(\vartheta, \varphi) = e^{2im\varphi} Y_{lm}^*(\vartheta, \varphi) = (-1)^m Y_{l-m}^*(\vartheta, \varphi) = \\ &= (-1)^m Y_{lm}(-\vartheta, \varphi) = e^{2im\varphi} Y_{l-m}(-\vartheta, \varphi) = (-1)^m e^{2im\varphi} Y_{lm}^*(-\vartheta, \varphi) = Y_{l-m}^*(-\vartheta, \varphi) = \\ &= (-1)^m Y_{l-m}(\vartheta, -\varphi) = e^{2im\varphi} Y_{lm}(\vartheta, -\varphi) = (-1)^m e^{2im\varphi} Y_{l-m}^*(\vartheta, -\varphi) = Y_{lm}^*(\vartheta, -\varphi) = \\ &= Y_{l-m}(-\vartheta, -\varphi) = (-1)^m e^{2im\varphi} Y_{lm}(-\vartheta, -\varphi) = e^{2im\varphi} Y_{l-m}^*(-\vartheta, -\varphi) = (-1)^m Y_{lm}^*(-\vartheta, -\varphi). \end{aligned} \quad (12)$$

#### 5.5. ПОВЕДЕНИЕ $Y_{lm}(\vartheta, \varphi)$ ПРИ ПРЕОБРАЗОВАНИЯХ СИСТЕМЫ КООРДИНАТ

Преобразование системы координат в трехмерном пространстве, не нарушающее ортогональность координатных осей, в общем случае можно представить как результат действия трех операций: поворота системы координат, ее инверсии и параллельного переноса.



## 1. Поворот

Сферические функции  $Y_{lm}(\vartheta, \varphi)$  являются *ковариантными компонентами* неприводимого тензора ранга  $l$ , поэтому при повороте системы координат  $S \{x, y, z\} \rightarrow S' \{x', y', z'\}$ , характеризуемом углами Эйлера  $\alpha, \beta, \gamma$  (см. 1.4), сферические функции преобразуются следующим образом:

$$\hat{D}(\alpha, \beta, \gamma) Y_{lm}(\vartheta, \varphi) = Y_{lm'}(\vartheta', \varphi') = \sum_m Y_{lm}(\vartheta, \varphi) D_{mm'}^l(\alpha, \beta, \gamma). \quad (1)$$

Здесь  $D_{mm'}^l(\alpha, \beta, \gamma)$  — функции Вигнера (гл. 4),  $\vartheta, \varphi$  и  $\vartheta', \varphi'$  — сферические углы радиус-вектора в исходной системе координат  $S$  и в новой системе координат  $S'$  соответственно. Углы  $\vartheta', \varphi'$  выражаются через углы  $\vartheta, \varphi$  и углы Эйлера  $\alpha, \beta, \gamma$  по формулам 1.4 (2).

## 2. Инверсия

При инверсии системы координат относительно ее начала сферические функции преобразуются следующим образом:

$$\hat{P}_r Y_{lm}(\vartheta, \varphi) = Y_{lm}(\pi - \vartheta, \varphi + \pi) = (-1)^l Y_{lm}(\vartheta, \varphi). \quad (2)$$

## 3. Параллельный перенос

При параллельном переносе системы координат  $S \{x, y, z\} \rightarrow S' \{x', y', z'\}$  координаты каждой точки пространства преобразуются по формуле  $\mathbf{r}' = \mathbf{r} - \mathbf{a}$ , где вектор  $\mathbf{a}(a, \Theta, \Phi)$  характеризует величину и направление сдвига системы. Сферические функции при этом преобразуются следующим образом:

$$\hat{T}(\mathbf{a}) Y_{l'm'}(\vartheta, \varphi) = Y_{l'm'}(\vartheta', \varphi') = \sum_{l=0}^{l'} (-1)^{l'+l} \left(\frac{a}{r'}\right)^{l'} \left(\frac{r}{a}\right)^l \{Y_l(\vartheta, \varphi) \otimes Y_{l-l}(\Theta, \Phi)\}_{l'm'}. \quad (3)$$

Здесь  $\hat{T}(\mathbf{a}) = e^{-\mathbf{a} \cdot \nabla}$  — оператор сдвига,  $\{Y_{l_1} \otimes Y_{l_2}\}_{l'm}$  — неприводимое тензорное произведение (см. 3.1). Сферические координаты векторов  $\mathbf{r}(r, \vartheta, \varphi)$  и  $\mathbf{r}'(r', \vartheta', \varphi')$  связаны соотношениями

$$\begin{aligned} r'^2 &= r^2 + a^2 - 2ra \cos \omega_{12}, \\ \cos \vartheta' &= \frac{r \cos \vartheta - a \cos \Theta}{\sqrt{r^2 + a^2 - 2ra \cos \omega_{12}}}, \\ \operatorname{tg} \varphi' &= \frac{r \sin \vartheta \sin \varphi - a \sin \Theta \sin \Phi}{r \sin \vartheta \cos \varphi - a \sin \Theta \cos \Phi}, \end{aligned} \quad (4)$$

где

$$\cos \omega_{12} = \cos \vartheta \cos \Theta + \sin \vartheta \sin \Theta \cos(\varphi - \Phi). \quad (5)$$

## 4. Частные случаи преобразования системы координат

а. Поворот вокруг координатных осей на угол  $\pi$

$$\text{вокруг оси } x \quad \left. \begin{aligned} r' &= r, \\ \vartheta' &= \pi - \vartheta, \\ \varphi' &= 2\pi - \varphi, \end{aligned} \right\} Y_{lm}(\pi - \vartheta, 2\pi - \varphi) = (-1)^l Y_{l-m}(\vartheta, \varphi), \quad (6)$$

$$\text{вокруг оси } y \quad \left. \begin{aligned} r' &= r, \\ \vartheta' &= \pi - \vartheta, \\ \varphi' &= \pi - \varphi, \end{aligned} \right\} Y_{lm}(\pi - \vartheta, \pi - \varphi) = (-1)^{l-m} Y_{l-m}(\vartheta, \varphi), \quad (7)$$

$$\text{вокруг оси } z \quad \left. \begin{aligned} r' &= r, \\ \vartheta' &= \vartheta, \\ \varphi' &= \pi + \varphi, \end{aligned} \right\} Y_{lm}(\vartheta, \pi + \varphi) = (-1)^m Y_{lm}(\vartheta, \varphi). \quad (8)$$

б. Поворот системы вокруг оси  $z$  на произвольный угол  $\chi$

$$\left. \begin{aligned} r' &= r, \\ \vartheta' &= \vartheta, \\ \varphi' &= \varphi - \chi, \end{aligned} \right\} Y_{lm}(\vartheta, \varphi - \chi) = e^{-im\chi} Y_{lm}(\vartheta, \varphi). \quad (9)$$

в. Поворот системы координат на малый угол  $\omega$  ( $\omega \ll \pi/2$ ) вокруг произвольного направления  $\mathbf{n}(\Theta, \Phi)$

$$\begin{aligned} \hat{D}Y_{lm}(\vartheta, \varphi) &\approx Y_{lm}(\vartheta, \varphi) - i\omega \left\{ m \cos \Theta Y_{lm}(\vartheta, \varphi) + \right. \\ &\left. + \frac{\sin \Theta}{2} [e^{-i\Phi} \sqrt{l(l+1) - m(m+1)} Y_{l, m+1}(\vartheta, \varphi) + e^{i\Phi} \sqrt{l(l+1) - m(m-1)} Y_{l, m-1}(\vartheta, \varphi)] \right\}. \end{aligned} \quad (10)$$

г. Отражение системы координат относительно экваториальной плоскости  $\vartheta = \pi/2$

$$\left. \begin{aligned} r' &= r \\ \vartheta' &= \pi - \vartheta, \\ \varphi' &= \varphi, \end{aligned} \right\} Y_{lm}(\pi - \vartheta, \varphi) = (-1)^{l+m} Y_{lm}(\vartheta, \varphi). \quad (11)$$

д. Отражение системы координат относительно меридианальной плоскости  $\varphi = \varphi_0$  и  $\varphi = \pi + \varphi_0$

$$\left. \begin{aligned} r' &= r, \\ \vartheta' &= \vartheta, \\ \varphi' &= 2\varphi_0 - \varphi, \end{aligned} \right\} Y_{lm}(\vartheta, 2\varphi_0 - \varphi) = e^{i2m\varphi_0} (-1)^m Y_{l, -m}(\vartheta, \varphi). \quad (12)$$

## 5.6. РАЗЛОЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ ПО СФЕРИЧЕСКИМ ГАРМОНИКАМ

1. Совокупность сферических функций  $Y_{lm}(\vartheta, \varphi)$  при всех целых неотрицательных значениях  $l$  и целых значениях  $m$  таких, что  $|m| \leq l$ , образует полную систему функций двух вещественных переменных  $\vartheta$  и  $\varphi$ , определенных в области  $0 \leq \vartheta \leq \pi$ ,  $0 \leq \varphi < 2\pi$ . Эта система представляет собой ортонормированный базис.

Условие полноты системы функций  $Y_{lm}(\vartheta, \varphi)$

$$\sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l Y_{lm}^*(\vartheta, \varphi) Y_{lm}(\vartheta', \varphi') = \delta(\varphi - \varphi') \delta(\cos \vartheta - \cos \vartheta'). \quad (1)$$

Условие ортогональности и нормировки функций

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\vartheta \sin \vartheta Y_{lm}^*(\vartheta, \varphi) Y_{l'm'}(\vartheta, \varphi) = \delta_{ll'} \delta_{mm'}. \quad (2)$$

Произвольную функцию  $f(\vartheta, \varphi)$ , определенную в области изменения аргументов  $0 \leq \vartheta \leq \pi$ ,  $0 \leq \varphi < 2\pi$  и удовлетворяющую условию

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\vartheta \sin \vartheta |f(\vartheta, \varphi)|^2 < \infty, \quad (3)$$

можно разложить в ряд по сферическим функциям

$$f(\vartheta, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l a_{lm} Y_{lm}(\vartheta, \varphi). \quad (4)$$

Коэффициенты разложения  $a_{lm}$  определяются соотношением

$$a_{lm} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\vartheta \sin \vartheta Y_{lm}^*(\vartheta, \varphi) f(\vartheta, \varphi). \quad (5)$$

Это соотношение можно рассматривать как интегральное преобразование функции  $f$  от непрерывных переменных  $\vartheta, \varphi$  к дискретным переменным  $l, m$ . При этом функция  $Y_{lm}(\vartheta, \varphi) \equiv \langle \vartheta \varphi | lm \rangle$  играет роль матрицы преобразования. Выражение (5) можно записать в виде

$$\langle lm | f \rangle = \langle lm | \vartheta \varphi \rangle \langle \vartheta \varphi | f \rangle, \quad (6)$$

где

$$\langle lm | f \rangle \equiv a_{lm}, \quad \langle lm | \vartheta \varphi \rangle \equiv Y_{lm}^*(\vartheta, \varphi), \quad \langle \vartheta \varphi | f \rangle \equiv f(\vartheta, \varphi).$$

Под дважды повторяющимся переменным, как обычно, подразумевается интегрирование или суммирование по всему интервалу их изменения.

Преобразование (5) унитарно, так что

$$\langle f | lm \rangle \langle lm | f \rangle = \langle f | \vartheta, \varphi \rangle \langle \vartheta, \varphi | f \rangle, \quad (7)$$

т. е. коэффициенты  $a_{lm}$  удовлетворяют условию *Парсеваля*

$$\sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l |a_{lm}|^2 = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\vartheta \sin \vartheta |f(\vartheta, \varphi)|^2. \quad (8)$$

Разложение (4) по сферическим функциям широко применяется при решении различных задач и называется *разложением по мультиполям*, а коэффициенты разложения  $a_{lm}$  называются *мультипольными моментами*.

2. Разложение произведений сферических функций.

а. Прямые произведения сферических функций одинаковых аргументов

$$Y_{l_1 m_1}(\vartheta, \varphi) Y_{l_2 m_2}(\vartheta, \varphi) = \sum_{LM} \sqrt{\frac{(2l_1+1)(2l_2+1)}{4\pi(2L+1)}} C_{l_1 0 l_2 0}^{L0} C_{l_1 m_1 l_2 m_2}^{LM} Y_{LM}(\vartheta, \varphi). \quad (9)$$

Соотношение (9) называется *разложением Клебша—Гордана*. Обратное ему соотношение записывается следующим образом:

$$\sqrt{\frac{4\pi(2L+1)}{(2l_1+1)(2l_2+1)}} \sum_{m_1 m_2} C_{l_1 m_1 l_2 m_2}^{LM} Y_{l_1 m_1}(\vartheta, \varphi) Y_{l_2 m_2}(\vartheta, \varphi) = C_{l_1 0 l_2 0}^{L0} Y_{LM}(\vartheta, \varphi). \quad (10)$$

Произведения трех и большего числа сферических функций имеют вид

$$Y_{l_1 m_1}(\vartheta, \varphi) Y_{l_2 m_2}(\vartheta, \varphi) Y_{l_3 m_3}(\vartheta, \varphi) = \sum_{LML'M'} \sqrt{\frac{(2l_1+1)(2l_2+1)(2l_3+1)}{(4\pi)^2(2L+1)}} \times \\ \times C_{l_1 0 l_2 0}^{L'0} C_{L'0 l_3 0}^{L0} C_{l_1 m_1 l_2 m_2}^{L'M'} C_{L'M' l_3 m_3}^{LM} Y_{LM}(\vartheta, \varphi), \quad (11)$$

$$Y_{l_1 m_1}(\vartheta, \varphi) Y_{l_2 m_2}(\vartheta, \varphi) \times \dots \times Y_{l_n m_n}(\vartheta, \varphi) = \sum_{L_n} B_{L_n} Y_{L_n M_n}(\vartheta, \varphi), \quad (12)$$

где

$$B_{L_n} = \sqrt{\frac{4\pi}{2L_n+1}} \sum_{\substack{L_1 L_2 \dots L_{n-1} \\ M_1 M_2 \dots M_{n-1}}} \prod_{i=1}^n \left( \sqrt{\frac{2l_i+1}{4\pi}} C_{L_{i-1} 0 l_i 0}^{L_i 0} C_{L_{i-1} M_{i-1} l_i m_i}^{L_i M_i} \right), \quad (13)$$

причем  $L_0 \equiv M_0 \equiv 0$ ,

б. Неприводимые тензорные произведения сферических функций. Произведения такого вида определены в 3.1.

$$\{Y_{l_1}(\vartheta, \varphi) \otimes Y_{l_2}(\vartheta, \varphi)\}_{LM} = \sqrt{\frac{(2l_1+1)(2l_2+1)}{4\pi(2L+1)}} C_{l_1 0 l_2 0}^{L0} Y_{LM}(\vartheta, \varphi), \quad (14)$$

$$\{\{Y_{l_1}(\vartheta, \varphi) \otimes Y_{l_2}(\vartheta, \varphi)\}_L \otimes Y_{l_3}(\vartheta, \varphi)\}_{LM} = \sqrt{\frac{(2l_1+1)(2l_2+1)(2l_3+1)}{(4\pi)^2(2L+1)}} C_{l_1 0 l_2 0}^{L'0} C_{L'0 l_3 0}^{L0} Y_{LM}(\vartheta, \varphi), \quad (15)$$

$$\begin{aligned} & \{ \dots \{ \{ Y_{l_1}(\vartheta, \varphi) \otimes Y_{l_2}(\vartheta, \varphi) \}_{L_2} \otimes Y_{l_3}(\vartheta, \varphi) \}_{L_3} \dots \otimes Y_{l_n}(\vartheta, \varphi) \}_{L_n M_n} = \\ & = \sqrt{\frac{4\pi}{2L_n+1}} \prod_{i=1}^n \left( \sqrt{\frac{2l_i+1}{4\pi}} C_{L_{i-1} 0 l_i 0}^{L_i 0} \right) Y_{L_n M_n}(\vartheta, \varphi). \end{aligned} \quad (16)$$

В частности, при  $l_1 = l_2 = \dots = l_n = 1$  и  $L_k = k$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ )

$$\{ \dots \{ \{ Y_1(\vartheta, \varphi) \otimes Y_1(\vartheta, \varphi) \}_2 \otimes Y_1(\vartheta, \varphi) \}_3 \dots \otimes Y_1(\vartheta, \varphi) \}_{nm} = \sqrt{\frac{3^n}{(4\pi)^{n-1}} \frac{n!}{(2n+1)!}} Y_{nm}(\vartheta, \varphi). \quad (17)$$

Заметим, что при разложении произведений сферических функций удобно использовать функции  $C_{lm}(\vartheta, \varphi)$ , включающие дополнительный множитель  $\sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}}$  (см. 5.1.4).

### 5.7. АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ СООТНОШЕНИЯ

Рекуррентные формулы для сферических функций  $Y_{lm}(\vartheta, \varphi)$  можно получить, например, из разложения Клебша—Гордана 5.6 (9):

$$-2m \operatorname{ctg} \vartheta Y_{lm}(\vartheta, \varphi) = \sqrt{l(l+1) - m(m+1)} e^{-i\varphi} Y_{l, m+1}(\vartheta, \varphi) + \sqrt{l(l+1) - m(m-1)} e^{i\varphi} Y_{l, m-1}(\vartheta, \varphi), \quad (1)$$

$$\cos \vartheta Y_{lm}(\vartheta, \varphi) = \sqrt{\frac{(l-m+1)(l+m+1)}{(2l+1)(2l+3)}} Y_{l+1, m}(\vartheta, \varphi) + \sqrt{\frac{(l-m)(l+m)}{(2l-1)(2l+1)}} Y_{l-1, m}(\vartheta, \varphi), \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \sin \vartheta Y_{lm}(\vartheta, \varphi) e^{-i\varphi} &= \sqrt{\frac{(l-m+1)(l-m+2)}{(2l+1)(2l+3)}} Y_{l+1, m-1}(\vartheta, \varphi) - \sqrt{\frac{(l+m-1)(l+m)}{(2l-1)(2l+1)}} Y_{l-1, m-1}(\vartheta, \varphi) = \\ &= \cos \vartheta \sqrt{\frac{l-m+1}{l+m}} Y_{l, m-1}(\vartheta, \varphi) - \sqrt{\frac{2l+1}{2l-1} \cdot \frac{l+m-1}{l+m}} Y_{l-1, m-1}(\vartheta, \varphi) = \\ &= -\cos \vartheta \sqrt{\frac{l+m}{l-m+1}} Y_{l, m-1}(\vartheta, \varphi) + \sqrt{\frac{2l+1}{2l+3} \cdot \frac{l-m+2}{l-m+1}} Y_{l+1, m-1}(\vartheta, \varphi). \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \sin \vartheta Y_{lm}(\vartheta, \varphi) e^{i\varphi} &= -\sqrt{\frac{(l+m+1)(l+m+2)}{(2l+1)(2l+3)}} Y_{l+1, m+1}(\vartheta, \varphi) + \sqrt{\frac{(l-m-1)(l-m)}{(2l-1)(2l+1)}} Y_{l-1, m+1}(\vartheta, \varphi) = \\ &= -\cos \vartheta \sqrt{\frac{l+m+1}{l-m}} Y_{l, m+1}(\vartheta, \varphi) + \sqrt{\frac{2l+1}{2l-1} \cdot \frac{l-m-1}{l-m}} Y_{l-1, m+1}(\vartheta, \varphi) = \\ &= \cos \vartheta \sqrt{\frac{l-m}{l+m+1}} Y_{l, m+1}(\vartheta, \varphi) - \sqrt{\frac{2l+1}{2l+3} \cdot \frac{l+m+2}{l+m+1}} Y_{l+1, m+1}(\vartheta, \varphi). \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} (2l-1)(2l+3) \cos^2 \vartheta Y_{lm}(\vartheta, \varphi) &= (2l-1) \sqrt{\frac{(l+1)^2 - m^2}{2l+1} \cdot \frac{(l+2)^2 - m^2}{2l+5}} Y_{l+2, m}(\vartheta, \varphi) + \\ &+ [2l(l+1) - 2m^2 - 1] Y_{lm}(\vartheta, \varphi) + (2l+3) \sqrt{\frac{l^2 - m^2}{2l+1} \cdot \frac{(l-1)^2 - m^2}{2l-3}} Y_{l-2, m}(\vartheta, \varphi), \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} (2l-1)(2l+3) \sin \vartheta \cos \vartheta e^{i\varphi} Y_{lm}(\vartheta, \varphi) &= -(2l-1) \sqrt{\frac{(l+1)^2 - m^2}{2l+1} \cdot \frac{(l+m+2)(l+m+3)}{2l+5}} Y_{l+2, m+1}(\vartheta, \varphi) - \\ &- (2m+1) \sqrt{l(l+1) - m(m+1)} Y_{l, m+1}(\vartheta, \varphi) + (2l+3) \sqrt{\frac{l^2 - m^2}{2l+1} \cdot \frac{(l-m-1)(l-m-2)}{2l-3}} Y_{l-2, m+1}(\vartheta, \varphi), \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} (2l-1)(2l+3) \sin \vartheta \cos \vartheta e^{-i\varphi} Y_{lm}(\vartheta, \varphi) &= (2l-1) \sqrt{\frac{(l+1)^2 - m^2}{2l+1} \cdot \frac{(l-m+2)(l-m+3)}{2l+5}} Y_{l+2, m-1}(\vartheta, \varphi) - \\ &- (2m-1) \sqrt{l(l+1) - m(m-1)} Y_{l, m-1}(\vartheta, \varphi) - (2l+3) \sqrt{\frac{l^2 - m^2}{2l+1} \cdot \frac{(l+m-1)(l+m-2)}{(2l-3)}} Y_{l-2, m-1}(\vartheta, \varphi), \end{aligned} \quad (7)$$

$$(2l-1)(2l+3)\sin^2\vartheta e^{i2\varphi}Y_{lm}(\vartheta, \varphi) = \frac{(2l-1)}{\sqrt{(2l+1)(2l+5)}} \sqrt{\frac{(l+m+4)!}{(l+m)!}} Y_{l+2, m+2}(\vartheta, \varphi) +$$

$$+ \frac{(2l+3)}{\sqrt{(2l+1)(2l-3)}} \sqrt{\frac{(l-m)!}{(l-m-4)!}} Y_{l-2, m+2}(\vartheta, \varphi) - 2 \sqrt{\frac{(l+m+2)!(l-m)!}{(l-m-2)!(l+m)!}} Y_{l, m+2}(\vartheta, \varphi), \quad (8)$$

$$(2l-1)(2l+3)\sin^2\vartheta e^{-i2\varphi}Y_{lm}(\vartheta, \varphi) = \frac{2l-1}{\sqrt{(2l+1)(2l+5)}} \sqrt{\frac{(l-m+4)!}{(l-m)!}} Y_{l+2, m-2}(\vartheta, \varphi) +$$

$$+ \frac{2l+3}{\sqrt{(2l+1)(2l-3)}} \sqrt{\frac{(l+m)!}{(l+m-4)!}} Y_{l-2, m-2}(\vartheta, \varphi) - 2 \sqrt{\frac{(l-m+2)!(l+m)!}{(l+m-2)!(l-m)!}} Y_{l, m-2}(\vartheta, \varphi). \quad (9)$$

## 5.8. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ СООТНОШЕНИЯ

1. Действие оператора орбитального момента  $\hat{L}$  на  $Y_{lm}(\vartheta, \varphi)$ 

Циклические компоненты оператора  $\hat{L}$  (см. 2.2(18)) действуют на  $Y_{lm}(\vartheta, \varphi)$  по формулам

$$\hat{L}_{\pm 1} Y_{lm}(\vartheta, \varphi) = \mp \sqrt{\frac{l(l+1)-m(m\pm 1)}{2}} Y_{l, m\pm 1}(\vartheta, \varphi),$$

$$\hat{L}_0 Y_{lm}(\vartheta, \varphi) = m Y_{lm}(\vartheta, \varphi) \quad (1)$$

или в более компактной записи

$$\hat{L}_{\mu} Y_{lm}(\vartheta, \varphi) = \sqrt{l(l+1)} C_{lm\mu}^{l, m+\mu} Y_{l, m+\mu}(\vartheta, \varphi). \quad (2)$$

Оператор квадрата орбитального момента  $\hat{L}^2$  действует на  $Y_{lm}(\vartheta, \varphi)$  следующим образом:

$$\hat{L}^2 Y_{lm}(\vartheta, \varphi) = l(l+1) Y_{lm}(\vartheta, \varphi). \quad (3)$$

2. Производные от  $Y_{lm}(\vartheta, \varphi)$  первого и второго порядка

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} Y_{lm}(\vartheta, \varphi) = im Y_{lm}(\vartheta, \varphi), \quad (4)$$

$$\frac{\partial}{\partial \vartheta} Y_{lm}(\vartheta, \varphi) = m \operatorname{ctg} \vartheta Y_{lm}(\vartheta, \varphi) + \sqrt{l(l+1)-m(m+1)} Y_{l, m+1}(\vartheta, \varphi) e^{-i\varphi} =$$

$$= -m \operatorname{ctg} \vartheta Y_{lm}(\vartheta, \varphi) - \sqrt{l(l+1)-m(m-1)} Y_{l, m-1}(\vartheta, \varphi) e^{i\varphi} =$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{l(l+1)-m(m+1)} Y_{l, m+1}(\vartheta, \varphi) e^{-i\varphi} - \frac{1}{2} \sqrt{l(l+1)-m(m-1)} Y_{l, m-1}(\vartheta, \varphi) e^{i\varphi}. \quad (5)$$

$$\sin \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} Y_{lm}(\vartheta, \varphi) = -\sin^2 \vartheta \frac{\partial}{\partial \cos \vartheta} Y_{lm}(\vartheta, \varphi) =$$

$$= l \cos \vartheta Y_{lm}(\vartheta, \varphi) - \sqrt{\frac{2l+1}{2l-1}} (l^2 - m^2) Y_{l-1, m}(\vartheta, \varphi) =$$

$$= -(l+1) \cos \vartheta Y_{lm}(\vartheta, \varphi) + \sqrt{\frac{2l+1}{2l+3}} [(l+1)^2 - m^2] Y_{l+1, m}(\vartheta, \varphi) =$$

$$= l \sqrt{\frac{(l+1)^2 - m^2}{(2l+1)(2l+3)}} Y_{l+1, m}(\vartheta, \varphi) - (l+1) \sqrt{\frac{l^2 - m^2}{(2l+1)(2l-1)}} Y_{l-1, m}(\vartheta, \varphi). \quad (6)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial \vartheta^2} Y_{lm}(\vartheta, \varphi) = -\left[ l(l+1) - \frac{m^2}{\sin^2 \vartheta} \right] Y_{lm}(\vartheta, \varphi) - \operatorname{ctg} \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} Y_{lm}(\vartheta, \varphi). \quad (7)$$

$$\sin^2 \vartheta \frac{\partial^2}{\partial (\cos \vartheta)^2} Y_{lm}(\vartheta, \varphi) = 2 \cos \vartheta \frac{\partial}{\partial \cos \vartheta} Y_{lm}(\vartheta, \varphi) - \left[ l(l+1) - \frac{m^2}{\sin^2 \vartheta} \right] Y_{lm}(\vartheta, \varphi). \quad (8)$$

### 3. Операции векторного дифференцирования

а. Градиент функции  $f(r) Y_{lm}(\vartheta, \varphi)$ , где  $f(r)$  — произвольная функция от  $r \equiv |r|$ , можно разложить по шаровым векторам (см. 7.3)

$$\nabla [f(r) Y_{lm}(\vartheta, \varphi)] = -\sqrt{\frac{l+1}{2l+1}} \left( \frac{df}{dr} - \frac{l}{r} f \right) Y_{l+1, m}^{l+1}(\vartheta, \varphi) + \sqrt{\frac{l}{2l+1}} \left( \frac{df}{dr} + \frac{l+1}{r} f \right) Y_{l-1, m}^{l-1}(\vartheta, \varphi). \quad (9)$$

Соотношение (9) в развернутой записи имеет вид

$$\begin{aligned} \nabla_0 [f(r) Y_{lm}(\vartheta, \varphi)] &= \sqrt{\frac{(l+1)^2 - m^2}{(2l+1)(2l+3)}} \left( \frac{df}{dr} - \frac{l}{r} f \right) Y_{l+1, m}(\vartheta, \varphi) + \\ &+ \sqrt{\frac{l^2 - m^2}{(2l-1)(2l+1)}} \left( \frac{df}{dr} + \frac{l+1}{r} f \right) Y_{l-1, m}(\vartheta, \varphi), \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \nabla_{\pm 1} [f(r) Y_{lm}(\vartheta, \varphi)] &= \sqrt{\frac{(l \pm m + 1)(l \pm m + 2)}{2(2l+1)(2l+3)}} \left( \frac{df}{dr} - \frac{l}{r} f \right) Y_{l+1, m \pm 1}(\vartheta, \varphi) - \\ &- \sqrt{\frac{(l \mp m - 1)(l \mp m)}{2(2l-1)(2l+1)}} \left( \frac{df}{dr} + \frac{l+1}{r} f \right) Y_{l-1, m \pm 1}(\vartheta, \varphi), \end{aligned} \quad (11)$$

где  $\nabla_{0, \pm 1}$  — циклические компоненты оператора  $\nabla$  (см. 1.3).

Частные случаи формулы (9). При  $f(r) = j_l(kr)$ , где  $j_l(x)$  — сферические функции Бесселя порядка  $l$

$$\frac{1}{k} \nabla [j_l(kr) Y_{lm}(\vartheta, \varphi)] = \sqrt{\frac{l+1}{2l+1}} j_{l+1}(kr) Y_{l+1, m}^{l+1}(\vartheta, \varphi) + \sqrt{\frac{l}{2l+1}} j_{l-1}(kr) Y_{l-1, m}^{l-1}(\vartheta, \varphi). \quad (12)$$

При  $f(r) = r^l$

$$\nabla [r^l Y_{lm}(\vartheta, \varphi)] = \sqrt{l(2l+1)} r^{l-1} Y_{l-1, m}^{l-1}(\vartheta, \varphi). \quad (13)$$

При  $f(r) = r^{-l-1}$

$$\nabla [r^{-l-1} Y_{lm}(\vartheta, \varphi)] = \sqrt{(l+1)(2l+1)} r^{-l-2} Y_{l+1, m}^{l+1}(\vartheta, \varphi). \quad (14)$$

б. Дивергенция функции  $f(r) \hat{L} Y_{lm}(\vartheta, \varphi)$  равна нулю при произвольной функции  $f(r)$ :

$$\nabla [f(r) \hat{L} Y_{lm}(\vartheta, \varphi)] = 0. \quad (15)$$

в. Ротор функции  $f(r) \hat{L} Y_{lm}(\vartheta, \varphi)$ , где  $f(r)$  — произвольная функция  $r$ , можно выразить через градиент соответствующей скалярной функции и представить в следующем виде:

$$\nabla \times [f(r) \hat{L} Y_{lm}(\vartheta, \varphi)] = i \nabla \left[ \left( r \frac{df}{dr} + f \right) Y_{lm}(\vartheta, \varphi) \right] - i r \left[ \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{df}{dr} \right) - \frac{l(l+1)}{r^2} f \right] Y_{lm}(\vartheta, \varphi). \quad (16)$$

В частности, при  $f(r) = j_l(kr)$

$$\text{rot} [j_l(kr) \hat{L} Y_{lm}(\vartheta, \varphi)] = i \nabla [(kr j_{l-1}(kr) - l j_l(kr)) Y_{lm}(\vartheta, \varphi)] + i r k^2 j_l(kr) Y_{lm}(\vartheta, \varphi). \quad (17)$$

При  $f(r) = r^l$

$$\text{rot} [r^l \hat{L} Y_{lm}(\vartheta, \varphi)] = i(l+1) \sqrt{l(2l+1)} r^{l-1} Y_{l-1, m}^{l-1}(\vartheta, \varphi). \quad (18)$$

При  $f(r) = r^{-l-1}$

$$\text{rot} [r^{-l-1} \hat{L} Y_{lm}(\vartheta, \varphi)] = -i l \sqrt{(l+1)(2l+1)} r^{-l-2} Y_{l+1, m}^{l+1}(\vartheta, \varphi). \quad (19)$$

Некоторые дополнительные формулы векторного дифференцирования функций, содержащих  $Y_{lm}(\vartheta, \varphi)$ , приведены в 7.3.6.

5.9. НЕКОТОРЫЕ ИНТЕГРАЛЫ, СОДЕРЖАЩИЕ  $Y_{lm}(\vartheta, \varphi)$ 

## 1. Интегралы от произведений сферических функций по полному телесному углу

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\vartheta \sin \vartheta Y_{lm}(\vartheta, \varphi) = \sqrt{4\pi} \delta_{l0} \delta_{m0}. \quad (1)$$

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\vartheta \sin \vartheta Y_{l_1 m_1}(\vartheta, \varphi) Y_{l_2 m_2}^*(\vartheta, \varphi) = \delta_{l_1 l_2} \delta_{m_1 m_2}. \quad (2)$$

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\vartheta \sin \vartheta Y_{l_1 m_1}(\vartheta, \varphi) Y_{l_2 m_2}(\vartheta, \varphi) = (-1)^{m_2} \delta_{l_1 l_2} \delta_{-m_1 m_2}. \quad (3)$$

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\vartheta \sin \vartheta Y_{l_1 m_1}(\vartheta, \varphi) Y_{l_2 m_2}(\vartheta, \varphi) Y_{l_3 m_3}^*(\vartheta, \varphi) = \sqrt{\frac{(2l_1+1)(2l_2+1)}{4\pi(2l_3+1)}} C_{l_1 l_2 l_3}^{m_1 m_2 m_3}. \quad (4)$$

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\vartheta \sin \vartheta Y_{l_1 m_1}(\vartheta, \varphi) Y_{l_2 m_2}(\vartheta, \varphi) Y_{l_3 m_3}(\vartheta, \varphi) = \\ & = \sqrt{\frac{(2l_1+1)(2l_2+1)(2l_3+1)}{4\pi}} \begin{pmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (5)$$

Интегралы от произведений трех и более сферических функций можно вычислить, сводя их к интегралам от произведения меньшего числа сферических функций с помощью разложения Клебша—Гордана 5.6(9).

2. Фурье-образы некоторых выражений, содержащих  $Y_{lm}(\vartheta, \varphi)$ 

$$\int_0^{\infty} dr r^2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\vartheta \sin \vartheta e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} j_l(qr) Y_{lm}(\vartheta, \varphi) = 2\pi^2 i^l \frac{\delta(q-k)}{q^2} Y_{lm}(\vartheta_{\mathbf{k}}, \varphi_{\mathbf{k}}). \quad (6)$$

$$\int_0^{\infty} dr r^2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\vartheta \sin \vartheta e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} \hat{\mathbf{L}} [j_l(qr) Y_{lm}(\vartheta, \varphi)] = 2\pi^2 i^l \frac{\delta(q-k)}{q^2} \hat{\mathbf{L}}_{\mathbf{k}} Y_{lm}(\vartheta_{\mathbf{k}}, \varphi_{\mathbf{k}}). \quad (7)$$

$$\int_0^{\infty} dr r^2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\vartheta \sin \vartheta e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} [\nabla \times \hat{\mathbf{L}}] (j_l(qr) Y_{lm}(\vartheta, \varphi)) = 2\pi^2 i^{l-1} \frac{\delta(q-k)}{q^2} [\mathbf{k} \times \hat{\mathbf{L}}_{\mathbf{k}}] Y_{lm}(\vartheta_{\mathbf{k}}, \varphi_{\mathbf{k}}). \quad (8)$$

Здесь  $j_l(x)$  — сферическая функция Бесселя;  $\vartheta_{\mathbf{k}}$  и  $\varphi_{\mathbf{k}}$  — сферические углы вектора  $\mathbf{k}$ ,  $\hat{\mathbf{L}}$  и  $\hat{\mathbf{L}}_{\mathbf{k}}$  — операторы орбитального момента в координатном и импульсном представлении:

$$\hat{\mathbf{L}} = -i[\mathbf{r} \times \nabla], \quad \hat{\mathbf{L}}_{\mathbf{k}} = -i[\mathbf{k} \times \nabla_{\mathbf{k}}]. \quad (9)$$

3. Интегралы по углу  $\vartheta$ , содержащие сферические функции

$$\int_0^{\pi} Y_{lm}^*(\vartheta, \varphi) Y_{l'm'}(\vartheta, \varphi) \sin \vartheta d\vartheta = \frac{\delta_{ll'}}{2\pi}. \quad (10)$$

$$\int_0^{\pi} Y_{lm}^*(\vartheta, \varphi) Y_{l'm'}(\vartheta, \varphi) \frac{d\vartheta}{\sin \vartheta} = \frac{2l+1}{4\pi m} \delta_{mm'}, \quad (m, m' > 0). \quad (11)$$

$$\int_0^{\pi/2} (\sin \vartheta)^{m+1} (\cos \vartheta)^n Y_{lm}(\vartheta, \varphi) d\vartheta = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} \cdot \frac{(l+m)!}{(l-m)!} (-1)^m \frac{n! e^{im\varphi}}{(n+l+m+1)!! (n-l+m)!!}, \quad (m, n \geq 0). \quad (12)$$

$$\begin{aligned} & \int_a^b \left[ (l_1 - l_2)(l_1 + l_2 + 1) - \frac{m_1^2 - m_2^2}{\sin^2 \vartheta} \right] Y_{l_1 m_1}(\vartheta, \varphi) Y_{l_2 m_2}(\vartheta, \varphi) d(\cos \vartheta) = \\ & = \sin^2 \vartheta \left[ Y_{l_1 m_1}(\vartheta, \varphi) \frac{d}{d \cos \vartheta} Y_{l_2 m_2}(\vartheta, \varphi) - Y_{l_2 m_2}(\vartheta, \varphi) \frac{d}{d \cos \vartheta} Y_{l_1 m_1}(\vartheta, \varphi) \right] \Big|_a^b = \\ & = [\cos \vartheta (l_1 - l_2) Y_{l_1 m_1}(\vartheta, \varphi) Y_{l_2 m_2}(\vartheta, \varphi) + (l_2 + m_2) Y_{l_1 m_1}(\vartheta, \varphi) Y_{l_2 - 1 m_2}(\vartheta, \varphi) - \\ & \quad - (l_1 + m_1) Y_{l_1 - 1 m_1}(\vartheta, \varphi) Y_{l_2 m_2}(\vartheta, \varphi)] \Big|_a^b. \end{aligned} \quad (13)$$

## 5.10. НЕКОТОРЫЕ СУММЫ, СОДЕРЖАЩИЕ СФЕРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

### 1. Суммы по индексу $m$ ( $l$ — фиксировано)

$$\sum_{m=-l}^l |Y_{lm}(\vartheta, \varphi)|^2 = \frac{2l+1}{4\pi}, \quad (1)$$

$$\sum_{m=-l}^l m |Y_{lm}(\vartheta, \varphi)|^2 = 0, \quad (2)$$

$$\sum_{m=-l}^l m^2 |Y_{lm}(\vartheta, \varphi)|^2 = \frac{l(l+1)(2l+1)}{8\pi} \sin^2 \vartheta, \quad (3)$$

$$\sum_{m=-l}^l \sqrt{\frac{(l^2 - m^2)[(l+1)^2 - m^2]}{(2l-1)(2l+3)}} Y_{l-1 m}(\vartheta, \varphi) Y_{l+1 m}(\vartheta, \varphi) = \frac{l(l+1)}{8\pi} (3 \cos^2 \vartheta - 1), \quad (4)$$

$$\sum_{m=-l}^l \frac{(\mp i)^m}{\sqrt{(l-m)!(l+m)!}} Y_{lm}(\vartheta, \varphi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} \cdot \frac{(\cos \vartheta \pm i \sin \vartheta \cos \varphi)^l}{l!}. \quad (5)$$

### 2. Суммы по индексу $l$ ( $m$ — фиксировано, $m \geq 0$ )

В формулах, приведенных ниже [27] используется обозначение

$$R = \sqrt{1 - 2t \cos \vartheta + t^2}.$$

$$\begin{aligned} & \sum_{l=m}^{n+m} (-1)^l \frac{t^{n-l+m}}{(n-l+m)! \sqrt{(l-m)! (l+m)!}} \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} Y_{lm}(\vartheta, \varphi) = \\ & = (-1)^n \frac{(2m-1)!!}{(2m+n)!} (\sin \vartheta e^{i\varphi})^m (1 - 2t \cos \vartheta + t^2)^{\frac{n}{2}} C_n^{m+\frac{1}{2}} \left( \frac{\cos \vartheta - t}{\sqrt{1 - 2t \cos \vartheta + t^2}} \right), \quad (|t| < 1), \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{l=m}^{\infty} \sqrt{\frac{4\pi}{(2l+1)(l-m)!(l+m)!}} \cdot \frac{1}{l!} t^{l-m} Y_{lm}(\vartheta, \varphi) = \\ & = \frac{(-\sin \vartheta e^{i\varphi})^m}{2^m (m!)^2} {}_0F_1 \left( ; m+1; t \cos^2 \frac{\vartheta}{2} \right) {}_0F_1 \left( ; m+1; -t \sin^2 \frac{\vartheta}{2} \right), \quad (|t| < 1), \end{aligned} \quad (7)$$



$$\sum_{i=m}^{\infty} \frac{(n+l-m)! t^{l-m}}{\sqrt{(l+m)! (l-m)!}} \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} Y_{lm}(\vartheta, \varphi) =$$

$$= \frac{n!}{2^m m!} \cdot \frac{(-\sin \vartheta e^{i\varphi})^m}{(1-t \cos \vartheta)^{m+1}} F\left\{\frac{n+1}{2}, \frac{n}{2}+1; m+1; -\left(\frac{t \sin \vartheta}{1-t \cos \vartheta}\right)^2\right\}, \quad (|t| < 1), \quad (8)$$

$$\sum_{i=m}^{\infty} \sqrt{\frac{4\pi}{(2l+1)(l-m)! (l+m)!}} \cdot \frac{(l+m-n)! (l-m+n-1)!}{l!} t^{l-m} Y_{lm}(\vartheta, \varphi) = \frac{(2m-n)! (n-1)!}{2^m (m!)^2} \times$$

$$\times (-\sin \vartheta e^{i\varphi})^m F\left(n, 2m+1-n; m+1; \frac{1-t-R}{2}\right) F\left(n, 2m+1-n; m+1; \frac{1+t-R}{2}\right), \quad (|t| < 1), \quad (9)$$

$$\sum_{i=m}^{\infty} \sqrt{\frac{4\pi (l-m)!}{(2l+1)(l+m)!}} L_{l-m}^{2m}(y) t^{l-m} Y_{lm}(\vartheta, \varphi) =$$

$$= \frac{1}{2^m m!} \cdot \frac{(-\sin \vartheta e^{i\varphi})^m}{R^{2m+1}} \exp\left[-\frac{yt(\cos \vartheta - t)}{R^2}\right] {}_0F_1\left(; m+1; -\frac{y^2 t^2 \sin^2 \vartheta}{4R^4}\right), \quad (|t| < 1), \quad (10)$$

$$\sum_{i=m}^{\infty} i^{l-m} \sqrt{\frac{4\pi (2l+1)(l+m)!}{(l-m)!}} j_l(t) Y_{lm}(\vartheta, \varphi) = (-t \sin \vartheta e^{i\varphi})^m e^{it \cos \vartheta}, \quad (11)$$

$$\sum_{i=m, m+2, \dots}^{\infty} i^{l-m} \sqrt{\frac{4\pi (2l+1)(l+m)!}{(l-m)!}} j_l(t) Y_{lm}(\vartheta, \varphi) = (-t \sin \vartheta e^{i\varphi})^m \cos(t \cos \vartheta), \quad (12)$$

$$\sum_{i=m+1, m+3, \dots}^{\infty} i^{l-m-1} \sqrt{\frac{4\pi (2l+1)(l+m)!}{(l-m)!}} j_l(t) Y_{lm}(\vartheta, \varphi) = (-t \sin \vartheta e^{i\varphi})^m \sin(t \cos \vartheta), \quad (13)$$

$$\sum_{i=m}^{\infty} \sqrt{\frac{4\pi (2l+1)(l+m)!}{(l-m)!}} j_l(t) z_l(t) Y_{lm}(\vartheta, \varphi) = \left(-t \cos \frac{\vartheta}{2} e^{i\varphi}\right)^m z_m\left(2t \sin \frac{\vartheta}{2}\right), \quad (14)$$

$$\sum_{i=m}^{\infty} \sqrt{\frac{4\pi (2l+1)(l+m)!}{(l-m)!}} j_l(x) z_l(y) Y_{lm}(\vartheta, \varphi) = \left(-\frac{xy \sin \vartheta e^{i\varphi}}{\sqrt{x^2 + y^2 - 2xy \cos \vartheta}}\right)^m z_m(\sqrt{x^2 + y^2 - 2xy \cos \vartheta}), \quad (15)$$

$$\sum_{i=m}^{\infty} i^{l-m} j_l(t) Y_{lm}(\vartheta_1, \varphi_1) Y_{lm}^*(\vartheta_2, \varphi_2) = \frac{1}{4\pi} J_m(t \sin \vartheta_1 \sin \vartheta_2) e^{it \cos \vartheta_1 \cos \vartheta_2} e^{im(\varphi_1 - \varphi_2)}. \quad (16)$$

## 5.11. ПРОИЗВОДЯЩИЕ ФУНКЦИИ

Ниже приведены производящие функции [4, 22] для  $Y_{lm}(\vartheta, \varphi)$ , разлагающиеся в бесконечные ряды по  $l$  при фиксированном  $m \geq 0$

$$\frac{1}{R^{2m+1}} = \begin{cases} \frac{(-1)^m}{(2m-1)!! (\sin \vartheta)^m} \sum_{i=m}^{\infty} t^{l-m} \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1} \cdot \frac{(l+m)!}{(l-m)!}} Y_{lm}(\vartheta, 0), & |t| < 1, \\ \frac{(-1)^m}{(2m-1)!! (\sin \vartheta)^m} \sum_{i=m}^{\infty} \frac{1}{t^{l+m+1}} \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1} \cdot \frac{(l+m)!}{(l-m)!}} Y_{lm}(\vartheta, 0), & |t| > 1, \end{cases} \quad (1)$$

где

$$R = \sqrt{1 - 2t \cos \vartheta + t^2}.$$

В частности,

$$\frac{1}{R} = \begin{cases} \sum_{i=0}^{\infty} t^i P_i(\cos \vartheta), & |t| < 1, \\ \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{t^{i+1}} P_i(\cos \vartheta), & |t| > 1. \end{cases} \quad (2)$$

$$\frac{[(1+R)^2 - t^2]^{-m}}{R} = \frac{(-1)^m}{2^m (\sin \vartheta)^m} \sum_{l=m}^{\infty} t^{l-m} l! \sqrt{\frac{4\pi}{(2l+1)(l+m)!(l-m)!}} Y_{lm}(\vartheta, 0), \quad |t| < 1. \quad (3)$$

Производящие функции для  $Y_{lm}(\vartheta, \varphi)$ , разлагающиеся не в степенные ряды, а в ряды Фурье, имеют вид [4]

$$\frac{(\sin \vartheta)^m}{(\cos \psi - \cos \vartheta)^{m+1/2}} \Theta(\cos \psi - \cos \vartheta) = \frac{(-1)^m 2^m}{(2m-1)!!} \sum_{l=m}^{\infty} \sqrt{\frac{8\pi}{2l+1} \cdot \frac{(l+m)!}{(l-m)!}} \cos \left[ (2l+1) \frac{\psi}{2} \right] Y_{lm}(\vartheta, 0), \quad (4)$$

$$\frac{(\sin \vartheta)^m}{(\cos \vartheta - \cos \psi)^{m+1/2}} \Theta(\cos \vartheta - \cos \psi) = \frac{(-1)^m 2^m}{(2m-1)!!} \sum_{l=m}^{\infty} \sqrt{\frac{8\pi}{2l+1} \cdot \frac{(l+m)!}{(l-m)!}} \sin \left[ (2l+1) \frac{\psi}{2} \right] Y_{lm}(\vartheta, 0), \quad (5)$$

где

$$\Theta(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x > 0, \\ 0 & \text{при } x < 0. \end{cases} \quad (6)$$

В частности, при  $m=0$

$$\frac{\Theta(\cos \psi - \cos \vartheta)}{\sqrt{\cos \psi - \cos \vartheta}} \pm i \frac{\Theta(\cos \vartheta - \cos \psi)}{\sqrt{\cos \vartheta - \cos \psi}} = \sqrt{2} \sum_{l=0}^{\infty} e^{\pm i(2l+1)\frac{\psi}{2}} P_l(\cos \vartheta). \quad (7)$$

## 5.12. АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ВЫРАЖЕНИЯ ДЛЯ $Y_{lm}(\vartheta, \varphi)$

### 1. Асимптотика $Y_{lm}(\vartheta, \varphi)$ при больших значениях параметра $l$

Сферическую функцию  $Y_{lm}(\vartheta, \varphi)$ , где  $\varepsilon \leq \vartheta \leq \pi - \varepsilon$  ( $\varepsilon > 0$ ) и  $0 \leq \varphi < 2\pi$  при  $l \gg 1$ ,  $l \gg m \gg 0$  и  $l \gg \frac{1}{\varepsilon}$ , можно аппроксимировать выражением [4]

$$Y_{lm}(\vartheta, \varphi) \approx \frac{e^{im\varphi}}{\pi} \frac{\cos \left[ (2l+1) \frac{\vartheta}{2} + (2m-1) \frac{\pi}{4} \right]}{\sqrt{\sin \vartheta}} + O\left(\frac{1}{l}\right). \quad (1)$$

Более точная формула имеет вид [22]

$$Y_{lm}(\vartheta, \varphi) \approx \frac{e^{im\varphi}}{\pi \sqrt{\sin \vartheta}} \left\{ \left( 1 + \frac{4m^2 - 3}{8l} \right) \cos \left[ (2l+1) \frac{\vartheta}{2} + (2m-1) \frac{\pi}{4} \right] + \right. \\ \left. + \frac{4m^2 - 1}{8l \sin \vartheta} \cos \left[ (2l+3) \frac{\vartheta}{2} + (2m-3) \frac{\pi}{4} \right] \right\} + O\left(\frac{1}{l^2}\right). \quad (2)$$

Поправки  $O\left(\frac{1}{l}\right)$  и  $O\left(\frac{1}{l^2}\right)$  — функции  $m$  и  $\vartheta$ .

При  $l \gg 1$ ,  $l \gg m \gg 0$  справедливо следующее неравенство:

$$|Y_{l\pm m}(\vartheta, \varphi)| < \frac{2}{\pi} (\sin \vartheta)^{-\left(m+\frac{1}{2}\right)}. \quad (3)$$

### 2. Асимптотические выражения для $Y_{lm}(\vartheta, \varphi)$

в окрестности значений  $\vartheta = 0, \pi$  и  $\pi/2$

При  $0 \leq \vartheta \leq \varepsilon$ , где  $\varepsilon \ll 1$ ,

$$Y_{l\pm m}(\vartheta, \varphi) \approx (\mp 1)^m \frac{e^{\pm im\varphi}}{m!} \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \cdot \frac{(l+m)!}{(l-m)!}} \left(\frac{\vartheta}{2}\right)^m \left[ 1 - \frac{3l(l+1) - m(m+1)}{3(m+1)} \left(\frac{\vartheta}{2}\right)^2 \right]. \quad (4)$$

При  $\pi - \varepsilon \leq \vartheta \leq \pi$ , где  $\varepsilon \ll 1$ ,

$$Y_{l \pm m}(\vartheta, \varphi) \approx (-1)^l (\pm 1)^m \frac{e^{\pm im\varphi}}{m!} \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \cdot \frac{(l+m)!}{(l-m)!}} \left(\frac{\pi-\vartheta}{2}\right)^m \left[1 - \frac{3l(l+1) - m(m+1)}{3(m+1)} \left(\frac{\pi-\vartheta}{2}\right)^2\right]. \quad (5)$$

При  $\frac{\pi}{2} - \varepsilon \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{2} + \varepsilon$ , где  $\varepsilon \ll 1$ , вид асимптотического выражения для  $Y_{lm}(\vartheta, \varphi)$  зависит от того, четно или нечетно значение  $l+m$ . Если  $l+m$  — четно,

$$Y_{l \pm m}(\vartheta, \varphi) \approx (-1)^{\frac{l \pm m}{2}} e^{\pm im\varphi} \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \cdot \frac{(l-m-1)!!}{(l-m)!!} \cdot \frac{(l+m-1)!!}{(l+m)!!}} \left[1 - \frac{l(l+1) - m^2}{2} \left(\frac{\pi}{2} - \vartheta\right)^2\right]. \quad (6)$$

Если  $l+m$  — нечетно,

$$Y_{l \pm m}(\vartheta, \varphi) \approx (-1)^{\frac{l \pm m - 1}{2}} e^{\pm im\varphi} \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \cdot \frac{(l-m)!!}{(l-m-1)!!} \cdot \frac{(l+m)!!}{(l+m-1)!!}} \left(\frac{\pi}{2} - \vartheta\right) \times \left[1 - \frac{l(l+1) - (m^2+1)}{6} \left(\frac{\pi}{2} - \vartheta\right)^2\right]. \quad (7)$$

В случае малых  $\vartheta$  функцию  $Y_{lm}(\vartheta, \varphi)$  можно аппроксимировать формулой Мак Дональда [4]

$$Y_{l-m}(\vartheta, \varphi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l+m)!}{(l-m)!}} e^{-im\varphi} \left[\left(l + \frac{1}{2}\right) \cos \frac{\vartheta}{2}\right]^m \times \left\{ J_m(\alpha) + \left(\sin \frac{\vartheta}{2}\right)^2 \left[ \frac{\alpha}{6} J_{m+3}(\alpha) - J_{m+2}(\alpha) + \frac{1}{2\alpha} J_{m+1}(\alpha) \right] + O\left[\left(\sin \frac{\vartheta}{2}\right)^4\right] \right\}. \quad (8)$$

Здесь  $\alpha = (2l+1) \sin \frac{\vartheta}{2}$ ,  $J_\lambda(\alpha)$  — функция Бесселя порядка  $\lambda$ .

### 3. Асимптотика при $m$ — фиксированном, $l \rightarrow \infty$ и $\vartheta \rightarrow 0$ , $l\vartheta$ — конечном

Справедливо следующее соотношение:

$$Y_{l-m}(\vartheta, \varphi) \approx \sqrt{\frac{l}{2\pi}} e^{-im\varphi} J_m(l\vartheta). \quad (9)$$

### 5.13. ВИД ФУНКЦИЙ $Y_{lm}(\vartheta, \varphi)$ ПРИ ЧАСТНЫХ ЗНАЧЕНИЯХ ИНДЕКСОВ

1. Функции  $Y_{lm}(\vartheta, \varphi)$  при  $l=0, 1, 2, 3, 4, 5$  даются формулами, приведенными ниже. Графики этих функций изображены на рис. 5.1.

$$Y_{00}(\vartheta, \varphi) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}. \quad (1)$$

$$Y_{1+1}(\vartheta, \varphi) = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{2\pi}} \sin \vartheta e^{i\varphi},$$

$$Y_{10}(\vartheta, \varphi) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{\pi}} \cos \vartheta, \quad (2)$$

$$Y_{1-1}(\vartheta, \varphi) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{2\pi}} \sin \vartheta e^{-i\varphi}.$$

$$Y_{2+2}(\vartheta, \varphi) = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{3 \cdot 5}{2\pi}} \sin^2 \vartheta e^{i2\varphi} = \frac{1}{8} \sqrt{\frac{3 \cdot 5}{2\pi}} (1 - \cos 2\vartheta) e^{i2\varphi},$$

$$Y_{2+1}(\vartheta, \varphi) = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{3 \cdot 5}{2\pi}} \cos \vartheta \sin \vartheta e^{i\varphi} = -\frac{1}{4} \sqrt{\frac{3 \cdot 5}{2\pi}} \sin 2\vartheta e^{i\varphi},$$

$$Y_{20}(\vartheta, \varphi) = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{5}{\pi}} (3 \cos^2 \vartheta - 1) = \frac{1}{8} \sqrt{\frac{5}{\pi}} (1 + 3 \cos 2\vartheta), \quad (3)$$

$$Y_{2-1}(\vartheta, \varphi) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3 \cdot 5}{2\pi}} \cos \vartheta \sin \vartheta e^{-i\varphi} = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{3 \cdot 5}{2\pi}} \sin 2\vartheta e^{-i\varphi},$$

$$Y_{2-2}(\vartheta, \varphi) = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{3 \cdot 5}{2\pi}} \sin^2 \vartheta e^{-i2\varphi} = \frac{1}{8} \sqrt{\frac{3 \cdot 5}{2\pi}} (1 - \cos 2\vartheta) e^{-i2\varphi}.$$

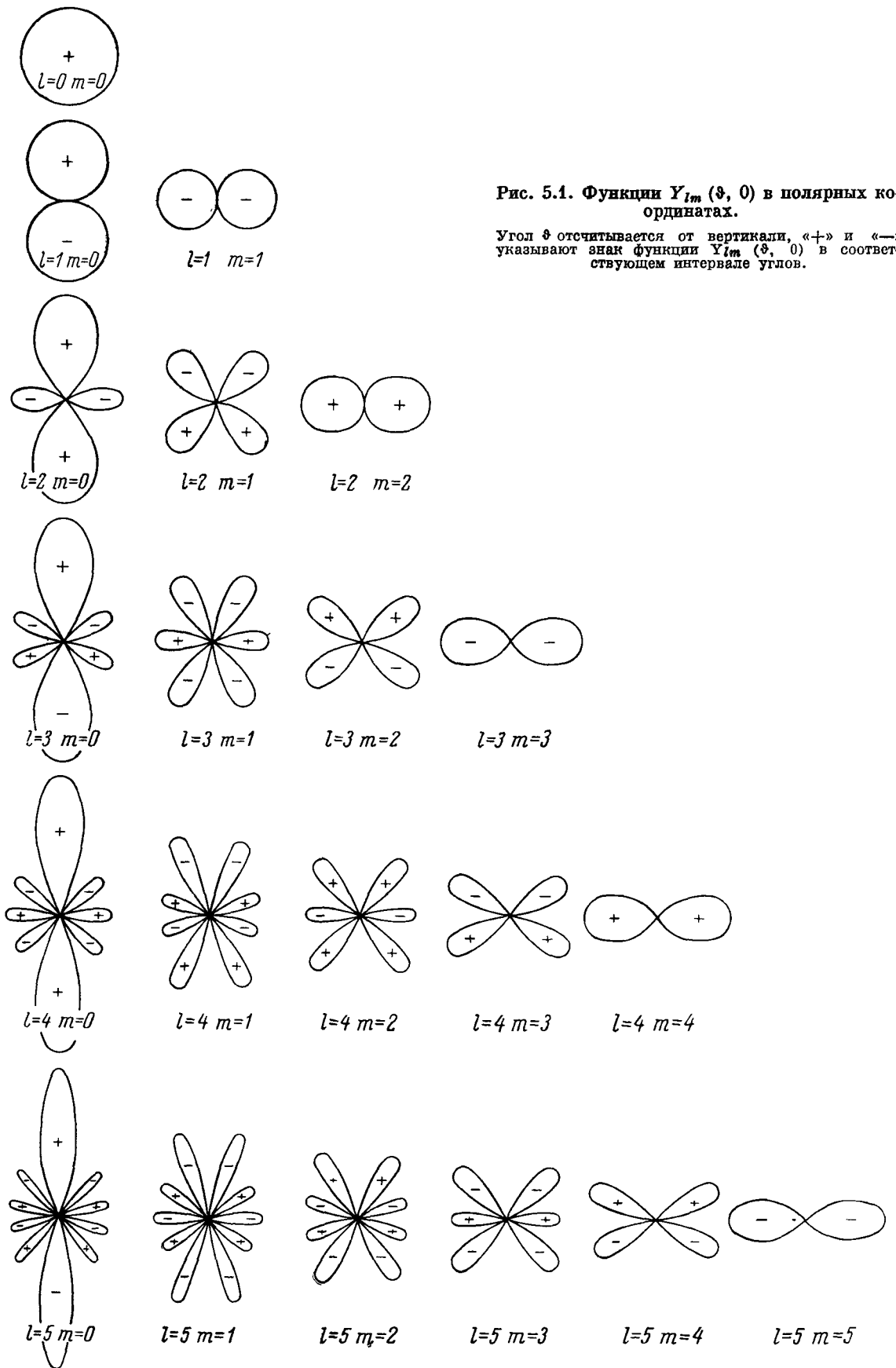


Рис. 5.1. Функции  $Y_{lm}(\vartheta, 0)$  в полярных координатах.

Угол  $\vartheta$  отсчитывается от вертикали, «+» и «-» указывают знак функции  $Y_{lm}(\vartheta, 0)$  в соответствующем интервале углов.

$$\begin{aligned}
Y_{3+3}(\vartheta, \varphi) &= -\frac{1}{8} \sqrt{\frac{5 \cdot 7}{\pi}} \sin^3 \vartheta e^{i3\varphi} = -\frac{1}{32} \sqrt{\frac{5 \cdot 7}{\pi}} (3 \sin \vartheta - \sin 3\vartheta) e^{i2\varphi}, \\
Y_{3+2}(\vartheta, \varphi) &= \frac{1}{4} \sqrt{\frac{3 \cdot 5 \cdot 7}{2\pi}} \cos \vartheta \sin^2 \vartheta e^{i2\varphi} = \frac{1}{16} \sqrt{\frac{3 \cdot 5 \cdot 7}{2\pi}} (\cos \vartheta - \cos 3\vartheta) e^{i2\varphi}, \\
Y_{3+1}(\vartheta, \varphi) &= -\frac{1}{8} \sqrt{\frac{3 \cdot 7}{\pi}} (5 \cos^2 \vartheta - 1) \sin \vartheta e^{i\varphi} = -\frac{1}{32} \sqrt{\frac{3 \cdot 7}{\pi}} (\sin \vartheta + 5 \sin 3\vartheta) e^{i\varphi}, \\
Y_{30}(\vartheta, \varphi) &= \frac{1}{4} \sqrt{\frac{7}{\pi}} (5 \cos^2 \vartheta - 3) \cos \vartheta = \frac{1}{16} \sqrt{\frac{7}{\pi}} (3 \cos \vartheta + 5 \cos 3\vartheta), \\
Y_{3-1}(\vartheta, \varphi) &= \frac{1}{8} \sqrt{\frac{3 \cdot 7}{\pi}} (5 \cos^2 \vartheta - 1) \sin \vartheta e^{-i\varphi} = \frac{1}{32} \sqrt{\frac{3 \cdot 7}{\pi}} (\sin \vartheta + 5 \sin 3\vartheta) e^{-i\varphi}, \\
Y_{3-2}(\vartheta, \varphi) &= \frac{1}{4} \sqrt{\frac{3 \cdot 5 \cdot 7}{2\pi}} \cos \vartheta \sin^2 \vartheta e^{-i2\varphi} = \frac{1}{16} \sqrt{\frac{3 \cdot 5 \cdot 7}{2\pi}} (\cos \vartheta - \cos 3\vartheta) e^{-i2\varphi}, \\
Y_{3-3}(\vartheta, \varphi) &= \frac{1}{8} \sqrt{\frac{5 \cdot 7}{\pi}} \sin^3 \vartheta e^{-i3\varphi} = \frac{1}{32} \sqrt{\frac{5 \cdot 7}{\pi}} (3 \sin \vartheta - \sin 3\vartheta) e^{-i3\varphi}.
\end{aligned} \tag{4}$$

$$\begin{aligned}
Y_{4+4}(\vartheta, \varphi) &= \frac{3}{16} \sqrt{\frac{5 \cdot 7}{2\pi}} \sin^4 \vartheta e^{i4\varphi} = \frac{3}{128} \sqrt{\frac{5 \cdot 7}{2\pi}} (3 - 4 \cos 2\vartheta + \cos 4\vartheta) e^{i4\varphi}, \\
Y_{4+3}(\vartheta, \varphi) &= -\frac{3}{8} \sqrt{\frac{5 \cdot 7}{\pi}} \sin^3 \vartheta \cos \vartheta e^{i3\varphi} = -\frac{3}{64} \sqrt{\frac{5 \cdot 7}{\pi}} (2 \sin 2\vartheta - \sin 4\vartheta) e^{i3\varphi}, \\
Y_{4+2}(\vartheta, \varphi) &= \frac{3}{8} \sqrt{\frac{5}{2\pi}} \sin^2 \vartheta (7 \cos^2 \vartheta - 1) e^{i2\varphi} = \frac{3}{64} \sqrt{\frac{5}{2\pi}} (3 + 4 \cos 2\vartheta - 7 \cos 4\vartheta) e^{i2\varphi}, \\
Y_{4+1}(\vartheta, \varphi) &= -\frac{3}{8} \sqrt{\frac{5}{\pi}} \sin \vartheta (7 \cos^3 \vartheta - 3 \cos \vartheta) e^{i\varphi} = -\frac{3}{64} \sqrt{\frac{5}{\pi}} (2 \sin 2\vartheta + 7 \sin 4\vartheta) e^{i\varphi}, \\
Y_{40}(\vartheta, \varphi) &= \frac{3}{16 \sqrt{\pi}} (35 \cos^4 \vartheta - 30 \cos^2 \vartheta + 3) = \frac{3}{128 \sqrt{\pi}} (9 + 20 \cos 2\vartheta + 35 \cos 4\vartheta), \\
Y_{4-1}(\vartheta, \varphi) &= \frac{3}{8} \sqrt{\frac{5}{\pi}} \sin \vartheta (7 \cos^3 \vartheta - 3 \cos \vartheta) e^{-i\varphi} = \frac{3}{64} \sqrt{\frac{5}{\pi}} (2 \sin 2\vartheta + 7 \sin 4\vartheta) e^{-i\varphi}, \\
Y_{4-2}(\vartheta, \varphi) &= \frac{3}{8} \sqrt{\frac{5}{2\pi}} \sin^2 \vartheta (7 \cos^2 \vartheta - 1) e^{-i2\varphi} = \frac{3}{64} \sqrt{\frac{5}{2\pi}} (3 + 4 \cos 2\vartheta - 7 \cos 4\vartheta) e^{-i2\varphi}, \\
Y_{4-3}(\vartheta, \varphi) &= \frac{3}{8} \sqrt{\frac{5 \cdot 7}{\pi}} \sin^3 \vartheta \cos \vartheta e^{-i3\varphi} = \frac{3}{64} \sqrt{\frac{5 \cdot 7}{\pi}} (2 \sin 2\vartheta - \sin 4\vartheta) e^{-i3\varphi}, \\
Y_{4-4}(\vartheta, \varphi) &= \frac{3}{16} \sqrt{\frac{5 \cdot 7}{2\pi}} \sin^4 \vartheta e^{-i4\varphi} = \frac{3}{128} \sqrt{\frac{5 \cdot 7}{2\pi}} (3 - 4 \cos 2\vartheta + \cos 4\vartheta) e^{-i4\varphi}.
\end{aligned} \tag{5}$$

$$\begin{aligned}
Y_{5+5}(\vartheta, \varphi) &= -\frac{3}{32} \sqrt{\frac{7 \cdot 11}{\pi}} \sin^5 \vartheta e^{i5\varphi} = -\frac{3}{512} \sqrt{\frac{77}{\pi}} (10 \sin \vartheta - 5 \sin 3\vartheta + \sin 5\vartheta) e^{i5\varphi}, \\
Y_{5+4}(\vartheta, \varphi) &= \frac{3}{16} \sqrt{\frac{5 \cdot 7 \cdot 11}{2\pi}} \sin^4 \vartheta \cos \vartheta e^{i4\varphi} = \frac{3}{256} \sqrt{\frac{385}{2\pi}} (2 \cos \vartheta - 3 \cos 3\vartheta + \cos 5\vartheta) e^{i4\varphi}, \\
Y_{5+3}(\vartheta, \varphi) &= -\frac{1}{32} \sqrt{\frac{5 \cdot 7 \cdot 11}{\pi}} \sin^3 \vartheta (9 \cos^2 \vartheta - 1) e^{i3\varphi} = -\frac{1}{512} \sqrt{\frac{385}{\pi}} (6 \sin \vartheta + 13 \sin 3\vartheta - 9 \sin 5\vartheta) e^{i3\varphi}, \\
Y_{5+2}(\vartheta, \varphi) &= \frac{1}{8} \sqrt{\frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11}{2\pi}} \sin^2 \vartheta (3 \cos^3 \vartheta - \cos \vartheta) e^{i2\varphi} = \frac{1}{128} \sqrt{\frac{1155}{2\pi}} (2 \cos \vartheta + \cos 3\vartheta - 3 \cos 5\vartheta) e^{i2\varphi}, \\
Y_{5+1}(\vartheta, \varphi) &= -\frac{1}{16} \sqrt{\frac{3 \cdot 5 \cdot 11}{2\pi}} \sin \vartheta (21 \cos^4 \vartheta - 14 \cos^2 \vartheta + 1) e^{i\varphi} = -\frac{1}{256} \sqrt{\frac{165}{2\pi}} (2 \sin \vartheta + 7 \sin 3\vartheta + 21 \sin 5\vartheta) e^{i\varphi}, \\
Y_{50}(\vartheta, \varphi) &= \frac{1}{16} \sqrt{\frac{11}{\pi}} (63 \cos^5 \vartheta - 70 \cos^3 \vartheta + 15 \cos \vartheta) = \frac{1}{256} \sqrt{\frac{11}{\pi}} (30 \cos \vartheta + 35 \cos 3\vartheta + 63 \cos 5\vartheta), \\
Y_{5-1}(\vartheta, \varphi) &= \frac{1}{16} \sqrt{\frac{3 \cdot 5 \cdot 11}{2\pi}} \sin \vartheta (21 \cos^4 \vartheta - 14 \cos^2 \vartheta + 1) e^{-i\varphi} = \frac{1}{256} \sqrt{\frac{165}{2\pi}} (2 \sin \vartheta + 7 \sin 3\vartheta + 21 \sin 5\vartheta) e^{-i\varphi},
\end{aligned} \tag{6}$$

$$Y_{5-2}(\vartheta, \varphi) = \frac{1}{8} \sqrt{\frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11}{2\pi}} \sin^2 \vartheta (3 \cos^3 \vartheta - \cos \vartheta) e^{-i2\varphi} = \frac{1}{128} \sqrt{\frac{1155}{2\pi}} (2 \cos \vartheta + \cos 3\vartheta - 3 \cos 5\vartheta) e^{-i2\varphi},$$

$$Y_{5-3}(\vartheta, \varphi) = \frac{1}{32} \sqrt{\frac{5 \cdot 7 \cdot 11}{\pi}} \sin^3 \vartheta (9 \cos^2 \vartheta - 1) e^{-i3\varphi} = \frac{1}{512} \sqrt{\frac{385}{\pi}} (6 \sin \vartheta + 13 \sin 3\vartheta - 9 \sin 5\vartheta) e^{-i3\varphi},$$

$$Y_{5-4}(\vartheta, \varphi) = \frac{3}{16} \sqrt{\frac{5 \cdot 7 \cdot 11}{2\pi}} \sin^4 \vartheta \cos \vartheta e^{-i4\varphi} = \frac{3}{256} \sqrt{\frac{385}{2\pi}} (2 \cos \vartheta - 3 \cos 3\vartheta + \cos 5\vartheta) e^{-i4\varphi},$$

$$Y_{5-5}(\vartheta, \varphi) = \frac{3}{32} \sqrt{\frac{7 \cdot 11}{\pi}} \sin^5 \vartheta e^{-i5\varphi} = \frac{3}{512} \sqrt{\frac{77}{\pi}} (10 \sin \vartheta - 5 \sin 3\vartheta + \sin 5\vartheta) e^{-i5\varphi}.$$

2. При  $|m| = 0, 1, 2, 3, 4$  и произвольном значении  $l$ , целом и положительном, функции  $Y_{lm}(\vartheta, \varphi)$  выражаются через полиномы Лежандра  $P_l(\cos \vartheta)$  следующим образом:

$$Y_{l0}(\vartheta, \varphi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} P_l(\cos \vartheta), \quad (7)$$

$$Y_{l\pm 1}(\vartheta, \varphi) = \mp \frac{e^{\pm i\varphi}}{\sin \vartheta} \sqrt{\frac{l(l+1)}{4\pi(2l+1)}} [P_{l-1}(\cos \vartheta) - P_{l+1}(\cos \vartheta)], \quad (8)$$

$$Y_{l\pm 2}(\vartheta, \varphi) = \frac{e^{\pm i2\varphi}}{(\sin \vartheta)^2} \sqrt{\frac{(l-1)l(l+1)(l+2)}{4\pi(2l+1)}} \left[ \frac{P_{l-2}(\cos \vartheta)}{2l-1} - \frac{2(2l+1)}{(2l-1)(2l+3)} P_l(\cos \vartheta) + \frac{1}{2l+3} P_{l+2}(\cos \vartheta) \right], \quad (9)$$

$$Y_{l\pm 3}(\vartheta, \varphi) = \mp \frac{e^{\pm i3\varphi}}{(\sin \vartheta)^3} \sqrt{\frac{1}{4\pi(2l+1)} \cdot \frac{(l+3)!}{(l-3)!}} \left[ \frac{1}{(2l-3)(2l-1)} P_{l-3}(\cos \vartheta) - \frac{3}{(2l-3)(2l+3)} P_{l-1}(\cos \vartheta) + \frac{3}{(2l-1)(2l+5)} P_{l+1}(\cos \vartheta) - \frac{1}{(2l+3)(2l+5)} P_{l+3}(\cos \vartheta) \right], \quad (10)$$

$$Y_{l\pm 4}(\vartheta, \varphi) = \frac{e^{\pm i4\varphi}}{(\sin \vartheta)^4} \sqrt{\frac{1}{4\pi(2l+1)} \cdot \frac{(l+4)!}{(l-4)!}} \left[ \frac{1}{(2l-5)(2l-3)(2l-1)} P_{l-4}(\cos \vartheta) - \frac{4}{(2l-5)(2l-1)(2l+3)} P_{l-2}(\cos \vartheta) + \frac{6(2l+1)}{(2l-3)(2l-1)(2l+3)(2l+5)} P_l(\cos \vartheta) - \frac{4}{(2l-1)(2l+3)(2l+7)} P_{l+2}(\cos \vartheta) + \frac{1}{(2l+3)(2l+5)(2l+7)} P_{l+4}(\cos \vartheta) \right]. \quad (11)$$

3. При  $|m| = l, l-1, l-2, l-3, l-4, l-5$  и произвольном значении  $l$ , целом и положительном, функции  $Y_{lm}(\vartheta, \varphi)$  имеют следующий явный вид:

$$Y_{l\pm l}(\vartheta, \varphi) = (\mp 1)^l e^{\pm il\varphi} \sqrt{\frac{(2l+1)!!}{4\pi(2l)!!}} (\sin \vartheta)^l, \quad (12)$$

$$Y_{l\pm(l-1)}(\vartheta, \varphi) = (\mp 1)^{l-1} e^{\pm i(l-1)\varphi} \sqrt{\frac{(2l+1)!!}{4\pi(2l-2)!!}} \cos \vartheta (\sin \vartheta)^{l-1}, \quad (13)$$

$$Y_{l\pm(l-2)}(\vartheta, \varphi) = (\mp 1)^{l-2} e^{\pm i(l-2)\varphi} \sqrt{\frac{2l+1}{8\pi} \cdot \frac{(2l-3)!!}{(2l-2)!!}} (\sin \vartheta)^{l-2} [(2l-1) \cos^2 \vartheta - 1], \quad (14)$$

$$Y_{l\pm(l-3)}(\vartheta, \varphi) = (\mp 1)^{l-3} e^{\pm i(l-3)\varphi} \sqrt{\frac{2l+1}{24\pi} \cdot \frac{(2l-3)!!}{(2l-4)!!}} (\sin \vartheta)^{l-3} \cos \vartheta [(2l-1) \cos^2 \vartheta - 3], \quad (15)$$

$$Y_{l\pm(l-4)}(\vartheta, \varphi) = (\mp 1)^{l-4} e^{\pm i(l-4)\varphi} \sqrt{\frac{2l+1}{96\pi} \cdot \frac{(2l-5)!!}{(2l-4)!!}} (\sin \vartheta)^{l-4} \times \\ \times [(2l-1)(2l-3) \cos^4 \vartheta - 6(2l-3) \cos^2 \vartheta + 3], \quad (16)$$

$$Y_{l\pm(l-5)}(\vartheta, \varphi) = (\mp 1)^{l-5} e^{\pm i(l-5)\varphi} \sqrt{\frac{2l+1}{480\pi} \cdot \frac{(2l-5)!!}{(2l-6)!!}} (\sin \vartheta)^{l-5} \cos \vartheta \times \\ \times [(2l-1)(2l-3) \cos^4 \vartheta - 10(2l-3) \cos^2 \vartheta + 15]. \quad (17)$$

5.14. ЗНАЧЕНИЯ ФУНКЦИЙ  $Y_{lm}(\vartheta, \varphi)$  И  $\frac{\partial}{\partial \vartheta} Y_{lm}(\vartheta, \varphi)$  ПРИ ЧАСТНЫХ ЗНАЧЕНИЯХ АРГУМЕНТОВ

1.

$$Y_{lm}(0, \varphi) = \delta_{m0} \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}}, \quad (1)$$

$$Y_{lm}\left(\frac{\pi}{2}, \varphi\right) = \begin{cases} (-1)^{\frac{l+m}{2}} e^{im\varphi} \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \cdot \frac{(l+m-1)!! \cdot (l-m-1)!!}{(l+m)!! \cdot (l-m)!!}} & \text{при } l+m \text{ четном,} \\ 0 & \text{при } l+m \text{ нечетном.} \end{cases} \quad (2)$$

$$Y_{lm}(\pi, \varphi) = \delta_{m0} (-1)^l \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}}, \quad (3)$$

$$Y_{lm}(\pm\pi n, \varphi) = \delta_{m0} (-1)^{nl} \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}}. \quad (4)$$

2.

$$\frac{\partial}{\partial \vartheta} Y_{lm}(\vartheta, \varphi) \Big|_{\vartheta=0} = (\delta_{m-1} e^{-i\varphi} - \delta_{m1} e^{i\varphi}) \sqrt{\frac{l(l+1)(2l+1)}{16\pi}}, \quad (5)$$

$$\frac{\partial}{\partial \vartheta} Y_{lm}(\vartheta, \varphi) \Big|_{\vartheta=\frac{\pi}{2}} = \begin{cases} (-1)^{\frac{l+m+1}{2}} e^{im\varphi} \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \cdot \frac{(l+m)!! (l-m)!!}{(l+m-1)!! (l-m-1)!!}} & \text{при } l+m \text{ нечетном,} \\ 0 & \text{при } l+m \text{ четном,} \end{cases} \quad (6)$$

$$\frac{\partial}{\partial \vartheta} Y_{lm}(\vartheta, \varphi) \Big|_{\vartheta=\pi} = (-1)^l (\delta_{m-1} e^{-i\varphi} - \delta_{m1} e^{i\varphi}) \sqrt{\frac{l(l+1)(2l+1)}{16\pi}}, \quad (7)$$

$$\frac{\partial}{\partial \vartheta} Y_{lm}(\vartheta, \varphi) \Big|_{\vartheta=\pm\pi} = (-1)^{nl} (\delta_{m-1} e^{-i\varphi} - \delta_{m1} e^{i\varphi}) \sqrt{\frac{l(l+1)(2l+1)}{16\pi}}. \quad (8)$$

 5.15. НУЛИ ФУНКЦИЙ  $Y_{lm}(\vartheta, \varphi)$  И  $\frac{\partial}{\partial \vartheta} Y_{lm}(\vartheta, \varphi)$ 

При изменении угла  $\vartheta$  от 0 до  $\pi$  сферические функции  $Y_{lm}(\vartheta, \varphi)$ , так же как и их производные  $\frac{\partial}{\partial \vartheta} Y_{lm}(\vartheta, \varphi)$ , обращаются в нуль при определенных значениях угла  $\vartheta$ . Число нулей по  $\vartheta$  функций  $Y_{lm}(\vartheta, \varphi)$  и  $\frac{\partial}{\partial \vartheta} Y_{lm}(\vartheta, \varphi)$ , т. е. число корней уравнений

$$Y_{lm}(\vartheta, \varphi) = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial}{\partial \vartheta} Y_{lm}(\vartheta, \varphi) = 0, \quad (1)$$

конечно в промежутке  $[0, \pi]$ , причем все эти корни вещественны и среди них нет кратных. Ниже нули функции  $Y_{lm}(\vartheta, \varphi)$  будут обозначаться  $\vartheta_\alpha$ , а нули  $\frac{\partial}{\partial \vartheta} Y_{lm}(\vartheta, \varphi)$  — через  $\vartheta_\beta$ . Функции  $Y_{lm}(\vartheta, \varphi)$  и  $\frac{\partial}{\partial \vartheta} Y_{lm}(\vartheta, \varphi)$  не имеют нулей по  $\varphi$ .

1. Функция  $Y_{lm}(\vartheta, \varphi)$  при  $m=0$  имеет  $l$  нулей внутри интервала  $(0, \pi)$  а при  $m \neq 0$  имеет  $(l-m)$  нулей внутри интервала  $(0, \pi)$  и еще два нуля при  $\vartheta_\alpha = 0$  и  $\vartheta_\alpha = \pi$ . Все эти нули расположены симметрично относительно значения  $\vartheta = \pi/2$ . Поэтому, когда  $(l-m)$  — нечетно,  $Y_{lm}(\pi/2, \varphi) = 0$ .

Нули функции  $Y_{lm}(\vartheta, \varphi)$  при  $m \neq 0$  определяются следующими уравнениями:

$$\begin{aligned} \text{при } m = \pm l & \quad \cos^2 \vartheta_\alpha = 1; \\ m = \pm(l-1) & \quad \cos^2 \vartheta_\alpha = 1, 0; \\ m = \pm(l-2) & \quad \cos^2 \vartheta_\alpha = 1, \frac{1}{2l-1}; \\ m = \pm(l-3) & \quad \cos^2 \vartheta_\alpha = 1, \frac{3}{(2l-1)}, 0; \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \text{при } m = \pm(l-4) \quad \cos^2 \vartheta_\alpha &= 1, \quad \frac{3 \pm 2\sqrt{3(l-2)/(2l-3)}}{2l-1}; \\ m = \pm(l-5) \quad \cos^2 \vartheta_\alpha &= 1, \quad \frac{5 \pm 2\sqrt{5(l-3)/(2l-3)}}{(2l-1)}, \quad 0. \end{aligned}$$

Численные значения углов  $\vartheta_\alpha$ , при которых  $Y_{lm}(\vartheta, \varphi) = 0$  для  $l = 0 \div 5$ , приведены в табл. 5.1. Для  $l \gg 1$  приближенные значения  $\vartheta_\alpha$  можно найти из соотношения

$$\vartheta_\alpha \approx \frac{\pi}{2} \left( \frac{4k+3-2m}{2l+1} \right), \quad (3)$$

где  $k$  — целое число из промежутка  $\left[ \frac{2|m|-3}{4}, \frac{4l+2|m|-1}{4} \right]$ .

2. Функция  $\frac{\partial}{\partial \vartheta} Y_{lm}(\vartheta, \varphi)$  при  $m=0$  имеет  $(l-1)$  нулей внутри интервала  $(0, \pi)$  и еще два нуля при  $\vartheta_\beta = 0$  и  $\vartheta_\beta = \pi$ , а при  $m \neq 0$  имеет  $(l-m+1)$  нулей внутри интервала  $(0, \pi)$  и два нуля при  $\vartheta_\beta = 0$  и  $\vartheta_\beta = \pi$ , если  $|m| \geq 2$ . Все нули функции  $\frac{\partial}{\partial \vartheta} Y_{lm}(\vartheta, \varphi)$  расположены симметрично относительно значения  $\vartheta = \pi/2$ . Поэтому, когда  $(l-m+1)$  — нечетно,  $\frac{\partial}{\partial \vartheta} Y_{lm}(\vartheta, \varphi) = 0$  при  $\vartheta = \pi/2$ .

Нули функции  $\frac{\partial}{\partial \vartheta} Y_{lm}(\vartheta, \varphi)$  при  $m \neq 0$  определяются следующими уравнениями:

$$\begin{aligned} \text{при } m = \pm l \quad \cos^2 \vartheta_\beta &= 0; \quad 1 \quad (l \geq 2); \\ m = \pm(l-1) \quad \cos^2 \vartheta_\beta &= \frac{1}{l}; \quad 1 \quad (l \geq 3); \\ m = \pm(l-2) \quad \cos^2 \vartheta_\beta &= \frac{5l-4}{l(2l-1)}; \quad 0; \quad 1 \quad (l \geq 4); \\ m = \pm(l-3) \quad \cos^2 \vartheta_\beta &= \frac{9(l-1) \pm \sqrt{3(19l^2 - 50l + 27)}}{2l(2l-1)}; \quad 1 \quad (l \geq 5); \\ m = \pm(l-4) \quad \cos^2 \vartheta_\beta &= \frac{7l-8 \pm 2\sqrt{(11l^2 - 62l^2 + 104l - 48)/(2l-3)}}{l(2l-1)}; \quad 0; \quad 1 \quad (l \geq 6). \end{aligned} \quad (4)$$

Численные значения нулей функции  $\frac{\partial}{\partial \vartheta} Y_{lm}(\vartheta, \varphi)$  даны в табл. 5.1.

ТАБЛИЦА 5.1

НУЛИ ФУНКЦИЙ  $Y_{lm}(\vartheta, \varphi)$  И  $\frac{\partial}{\partial \vartheta} Y_{lm}(\vartheta, \varphi)$ 

$l$	$m$	$\vartheta_\alpha$ (в град.)	$\vartheta_\beta$ (в град.)	$l$	$m$	$\vartheta_\alpha$ (в град.)	$\vartheta_\beta$ (в град.)
1	0	90	0; 180	4	0	30.6; 70.1; 109.9; 149.4;	0; 49.1; 90; 130.9; 180
1	$\pm 1$	0; 180	90	4	$\pm 1$	0; 49.1; 90; 130.9; 180	23.9; 69; 111; 156.1
2	0	54.7; 125.3	0; 90; 180	4	$\pm 2$	0; 67.8; 112.2; 180	0; 50.9; 90; 129.1; 180
2	$\pm 1$	0; 90; 180	45; 135	4	$\pm 3$	0; 90; 180	0; 60; 120; 180
2	$\pm 2$	0; 180	0; 90; 180	4	$\pm 4$	0; 180	0; 90; 180
3	0	39.2; 90; 140.8	0; 63.4; 116.6; 180	5	0	25; 57.4; 90; 112.6; 155	0; 49.9; 73.4; 106.6; 130.1; 180
3	$\pm 1$	0; 63.4; 116.6; 180	31.1; 90; 148.9	5	$\pm 1$	0; 49.9; 73.4; 106.6; 130.1; 180	19.6; 56.1; 90; 123.9; 160.4
3	$\pm 2$	0; 90; 180	0; 54.7; 125.3; 180	5	$\pm 2$	0; 54.7; 90; 125.3; 180	0; 32.9; 72.1; 107.9; 147.1; 180
3	$\pm 3$	0; 180	0; 90; 180	5	$\pm 3$	0; 70.5; 109.5; 180	0; 46.9; 90; 133.1; 180
				5	$\pm 4$	0; 90; 180	0; 63.4; 116.6; 180
				5	$\pm 5$	0; 180	0; 90; 180

Корни уравнения  $\frac{\partial}{\partial \vartheta} Y_{lm}(\vartheta, \varphi) = 0$  определяют значения  $\vartheta_\beta$ , при которых функция  $Y_{lm}(\vartheta, \varphi)$  достигает максимума или минимума. Нули функций  $Y_{lm}(\vartheta, \varphi)$  и  $\frac{\partial}{\partial \vartheta} Y_{lm}(\vartheta, \varphi)$  чередуются между собой.



Все функции  $Y_{lm}(\vartheta, 0)$  и  $Y_{l+s, m+s}(\vartheta, 0)$  при  $m > 0$ ,  $m + s > 0$  имеют одинаковое число максимумов, минимумов и нулей, т. е. представляются топологически одинаковыми графиками (рис. 5.1). Их различие состоит лишь в том, что с ростом  $l+s$  положение всех максимумов, минимумов и нулей  $Y_{l+s, m+s}(\vartheta, 0)$  смещается в направлении  $\vartheta = \pi/2$ .

### 5.16. БИПОЛЯРНЫЕ И ТРИПОЛЯРНЫЕ ГАРМОНИКИ

В прикладных задачах часто приходится иметь дело с функциями, зависящими от двух и трех направлений. Удобным базисом для разложения таких функций являются биполярные и триполярные гармоники.

1. *Биполярными сферическими гармониками* называют неприводимое тензорное произведение двух сферических функций разных аргументов;

$$\{Y_{l_1}(\vartheta_1, \varphi_1) \otimes Y_{l_2}(\vartheta_2, \varphi_2)\}_{LM} = \sum_{m_1 m_2} C_{l_1 m_1 l_2 m_2}^{LM} Y_{l_1 m_1}(\vartheta_1, \varphi_1) Y_{l_2 m_2}(\vartheta_2, \varphi_2), \quad (1)$$

Совокупность биполярных сферических гармоник с различными значениями  $l_1$ ,  $l_2$ ,  $L$  и  $M$  представляет собой полную ортонормированную систему функций, зависящих от двух направлений и обладающих простыми трансформационными свойствами при повороте и при инверсии системы координат.

Условие ортогональности и нормировки

$$\iint d\Omega_1 d\Omega_2 \{Y_{l_1}(\Omega_1) \otimes Y_{l_2}(\Omega_2)\}_{LM} \{Y_{l'_1}(\Omega_1) \otimes Y_{l'_2}(\Omega_2)\}_{L'M'}^* = \delta_{l_1 l'_1} \delta_{l_2 l'_2} \delta_{LL'} \delta_{MM'}, \quad (2)$$

где

$$\Omega \equiv (\vartheta, \varphi), \quad \int d\Omega \equiv \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\vartheta \sin \vartheta.$$

Условие полноты имеет вид

$$\sum_{l_1 l_2 LM} \{Y_{l_1}(\Omega_1) \otimes Y_{l_2}(\Omega_2)\}_{LM} \{Y_{l_1}(\Omega'_1) \otimes Y_{l_2}(\Omega'_2)\}_{LM}^* = \delta(\Omega_1 - \Omega'_1) \delta(\Omega_2 - \Omega'_2), \quad (3)$$

где

$$\delta(\Omega - \Omega') \equiv \delta(\cos \vartheta - \cos \vartheta') \delta(\varphi - \varphi').$$

Условие замкнутости

$$\sum_{LM} |\{Y_{l_1}(\Omega_1) \otimes Y_{l_2}(\Omega_2)\}_{LM}|^2 = \frac{(2l_1 + 1)(2l_2 + 1)}{(4\pi)^2}. \quad (4)$$

При повороте системы координат биполярные гармоники преобразуются по формуле

$$\hat{D}(\alpha, \beta, \gamma) \{Y_{l_1}(\Omega_1) \otimes Y_{l_2}(\Omega_2)\}_{LM} = \{Y_{l_1}(\Omega'_1) \otimes Y_{l_2}(\Omega'_2)\}_{LM} = \sum_M D_{M'M}^L(\alpha, \beta, \gamma) \{Y_{l_1}(\Omega_1) \otimes Y_{l_2}(\Omega_2)\}_{LM}, \quad (5)$$

где  $\Omega'_i \equiv \{\vartheta'_i, \varphi'_i\}$  и  $\Omega_i \equiv \{\vartheta_i, \varphi_i\}$  связаны соотношениями 1.4(2), 1.4(3).

При инверсии системы координат биполярные гармоники приобретают фазу

$$\hat{P}_r \{Y_{l_1}(\Omega_1) \otimes Y_{l_2}(\Omega_2)\}_{LM} = (-1)^{l_1 + l_2} \{Y_{l_1}(\Omega_1) \otimes Y_{l_2}(\Omega_2)\}_{LM}. \quad (6)$$

Разложение Клебша—Гордана для произведения биполярных гармоник имеет вид

$$\{Y_{l'_1}(\Omega_1) \otimes Y_{l'_2}(\Omega_2)\}_{L'M'} \{Y_{l''_1}(\Omega_1) \otimes Y_{l''_2}(\Omega_2)\}_{L''M''} = \sum_{LM} C_{L'M'L''M''}^{LM} \sum_{l_1 l_2} B_{l'_1 l'_2 l''_1 l''_2}^{l_1 l_2 L} \{Y_{l_1}(\Omega_1) \otimes Y_{l_2}(\Omega_2)\}_{LM}, \quad (7)$$

где

$$B_{l'_1 l'_2 l''_1 l''_2}^{l_1 l_2 L} = \sqrt{\frac{(2l'_1 + 1)(2l'_2 + 1)(2l''_1 + 1)(2l''_2 + 1)(2L' + 1)(2L'' + 1)}{(4\pi)^2}} C_{l'_1 0 l''_1 0}^{l_1 0} C_{l'_2 0 l''_2 0}^{l_2 0} \begin{Bmatrix} l'_1 & l'_2 & l_1 \\ l''_1 & l''_2 & l_2 \\ L' & L'' & L \end{Bmatrix}. \quad (8)$$

Важным частным случаем биполярных гармоник являются гармоники с  $L=0$

$$\{Y_{l_1}(\Omega_1) \otimes Y_{l_2}(\Omega_2)\}_{00} = \frac{(-1)^{l_1}}{\sqrt{2l_1+1}} (Y_{l_1}(\Omega_1) \cdot Y_{l_1}(\Omega_2)) \delta_{l_1 l_2}, \quad (9)$$

где скалярное произведение, согласно формуле 3.1 (30), имеет вид

$$(Y_l(\Omega_1) \cdot Y_l(\Omega_2)) = \sum_{m=-l}^l Y_{lm}^*(\Omega_1) Y_{lm}(\Omega_2). \quad (10)$$

2. *Триполярными сферическими гармониками* называют неприводимое тензорное произведение трех сферических функций разных аргументов

$$\{Y_{l_1}(\vartheta_1, \varphi_1) \otimes Y_{l_2}(\vartheta_2, \varphi_2) \otimes Y_{l_3}(\vartheta_3, \varphi_3)\}_{l_{23} L M} = \sum_{\substack{m_1 m_2 m_3 \\ m_{23}}} C_{l_1 m_1 l_{23} m_{23}}^{L M} C_{l_2 m_2 l_3 m_3}^{l_{23} m_{23}} Y_{l_1 m_1}(\vartheta_1, \varphi_1) Y_{l_2 m_2}(\vartheta_2, \varphi_2) Y_{l_3 m_3}(\vartheta_3, \varphi_3). \quad (11)$$

В случае триполярных сферических гармоник в отличие от биполярных возможны разные схемы связи угловых моментов  $l_1 + (l_2 + l_3)_{l_3} = L$ ,  $(l_1 + l_2)_{l_2} + l_3 = L$  или  $(l_1 + l_3)_{l_3} + l_2 = L$ . Переход между различными схемами связи рассмотрен в 3.3.

Совокупность триполярных сферических гармоник представляет собой полную ортонормированную систему функций, зависящих от трех направлений.

Условие ортогональности и нормировки

$$\begin{aligned} \iiint d\Omega_1 d\Omega_2 d\Omega_3 \{Y_{l_1}(\Omega_1) \otimes Y_{l_2}(\Omega_2) \otimes Y_{l_3}(\Omega_3)\}_{\lambda L M} \{Y_{l'_1}(\Omega_1) \otimes Y_{l'_2}(\Omega_2) \otimes Y_{l'_3}(\Omega_3)\}_{\lambda' L' M'}^* = \\ = \delta_{l_1 l'_1} \delta_{l_2 l'_2} \delta_{l_3 l'_3} \delta_{\lambda \lambda'} \delta_{L L'} \delta_{M M'}. \end{aligned} \quad (12)$$

Условие полноты

$$\sum_{\substack{l_1 l_2 l_3 \\ \lambda L M}} \{Y_{l_1}(\Omega_1) \otimes Y_{l_2}(\Omega_2) \otimes Y_{l_3}(\Omega_3)\}_{\lambda L M} \{Y_{l_1}(\Omega'_1) \otimes Y_{l_2}(\Omega'_2) \otimes Y_{l_3}(\Omega'_3)\}_{\lambda' L' M'}^* = \delta(\Omega_1 - \Omega'_1) \delta(\Omega_2 - \Omega'_2) \delta(\Omega_3 - \Omega'_3). \quad (13)$$

Условие замкнутости

$$\sum_{\lambda L M} |\{Y_{l_1}(\Omega_1) \otimes Y_{l_2}(\Omega_2) \otimes Y_{l_3}(\Omega_3)\}_{\lambda L M}|^2 = \frac{(2l_1+1)(2l_2+1)(2l_3+1)}{(4\pi)^3}. \quad (14)$$

При повороте системы координат триполярные гармоники преобразуются по формуле

$$\begin{aligned} \hat{D}(\alpha, \beta, \gamma) \{Y_{l_1}(\Omega_1) \otimes Y_{l_2}(\Omega_2) \otimes Y_{l_3}(\Omega_3)\}_{\lambda L M} = \{Y_{l_1}(\Omega'_1) \otimes Y_{l_2}(\Omega'_2) \otimes Y_{l_3}(\Omega'_3)\}_{\lambda L M} = \\ = \sum_M D_{M M'}^L(\alpha, \beta, \gamma) \{Y_{l_1}(\Omega_1) \otimes Y_{l_2}(\Omega_2) \otimes Y_{l_3}(\Omega_3)\}_{\lambda L M}, \end{aligned} \quad (15)$$

где  $\Omega'_i \equiv \{\vartheta'_i, \varphi'_i\}$  и  $\Omega_i \equiv \{\vartheta_i, \varphi_i\}$  связаны соотношениями 1.4(2), 1.4(3). При инверсии системы координат триполярные гармоники приобретают фазовый множитель

$$\hat{P}_r \{Y_{l_1}(\Omega_1) \otimes Y_{l_2}(\Omega_2) \otimes Y_{l_3}(\Omega_3)\}_{\lambda L M} = (-1)^{l_1+l_2+l_3} \{Y_{l_1}(\Omega_1) \otimes Y_{l_2}(\Omega_2) \otimes Y_{l_3}(\Omega_3)\}_{\lambda L M}. \quad (16)$$

Разложение Клебша—Гордана для произведения триполярных гармоник имеет вид

$$\begin{aligned} \{Y_{l'_1}(\Omega_1) \otimes Y_{l'_2}(\Omega_2) \otimes Y_{l'_3}(\Omega_3)\}_{\lambda' L' M'} \{Y_{l''_1}(\Omega_1) \otimes Y_{l''_2}(\Omega_2) \otimes Y_{l''_3}(\Omega_3)\}_{\lambda'' L'' M''} = \\ = \sum_{L M} C_{L' M' L'' M''}^{L M} \sum_{l_1 l_2 l_3} B_{l'_1 l'_2 l'_3 l''_1 l''_2 l''_3}^{l_1 l_2 l_3 \lambda \lambda'} \{Y_{l_1}(\Omega_1) \otimes Y_{l_2}(\Omega_2) \otimes Y_{l_3}(\Omega_3)\}_{\lambda L M}, \end{aligned} \quad (17)$$

где

$$\begin{aligned} B_{l'_1 l'_2 l'_3 l''_1 l''_2 l''_3}^{l_1 l_2 l_3 \lambda \lambda'} = \sqrt{\frac{(2l'_1+1)(2l''_1+1)(2l'_2+1)(2l''_2+1)(2l'_3+1)(2l''_3+1)(2L'+1)(2L''+1)}{(4\pi)^3}} \times \\ \times \sqrt{(2\lambda'+1)(2\lambda''+1)(2\lambda+1)} C_{l'_1 0 l''_1 0}^{l_1 0} C_{l'_2 0 l''_2 0}^{l_2 0} C_{l'_3 0 l''_3 0}^{l_3 0} \begin{Bmatrix} l'_1 & l''_1 & l_1 \\ \lambda' & \lambda'' & \lambda \\ L' & L'' & L \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} l'_2 & l''_2 & l_2 \\ l'_3 & l''_3 & l_3 \\ \lambda' & \lambda'' & \lambda \end{Bmatrix}. \end{aligned} \quad (18)$$

Важным частным случаем триполярных гармоник являются скалярные гармоники с  $L=0$

$$\{Y_{l_1}(\Omega_1) \otimes \{Y_{l_2}(\Omega_2) \otimes Y_{l_3}(\Omega_3)\}_{\lambda}\}_{00} = (-1)^{l_1+l_2+l_3} \delta_{\lambda, l_1} \sum_{m_1 m_2 m_3} \begin{pmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} Y_{l_1 m_1}(\Omega_1) Y_{l_2 m_2}(\Omega_2) Y_{l_3 m_3}(\Omega_3). \quad (19)$$

5.17. РАЗЛОЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ, ЗАВИСЯЩИХ ОТ ДВУХ ВЕКТОРОВ

1. Функцию  $f(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ , зависящую от двух произвольных векторов  $\mathbf{r}_1(r_1, \vartheta_1, \varphi_1)$  и  $\mathbf{r}_2(r_2, \vartheta_2, \varphi_2)$ , можно разложить в ряд по биполярным гармоникам (см. 5.16)

$$f(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \sum_{l_1 l_2 LM} C_{l_1 l_2}^{LM}(r_1, r_2) \{Y_{l_1}(\Omega_1) \otimes Y_{l_2}(\Omega_2)\}_{LM}. \quad (1)$$

Функция  $f(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$  может быть дана как в переменных  $\mathbf{r}_1$  и  $\mathbf{r}_2$ , так и в переменных  $\mathbf{R}$  и  $\mathbf{r}$ , где

$$\mathbf{R} = \mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2, \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2, \quad r_1 = \frac{1}{2}(\mathbf{R} + \mathbf{r}), \quad r_2 = \frac{1}{2}(\mathbf{R} - \mathbf{r}). \quad (2)$$

Сферические координаты векторов  $\mathbf{R}(R, \Theta, \Phi)$  и  $\mathbf{r}(r, \vartheta, \varphi)$  связаны со сферическими координатами векторов  $\mathbf{r}_1(r_1, \vartheta_1, \varphi_1)$  и  $\mathbf{r}_2(r_2, \vartheta_2, \varphi_2)$  следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} R^2 &= r_1^2 + r_2^2 + 2r_1 r_2 \cos \omega_{12}, \\ \cos \Theta &= \frac{r_1 \cos \vartheta_1 + r_2 \cos \vartheta_2}{\sqrt{r_1^2 + r_2^2 + 2r_1 r_2 \cos \omega_{12}}}, \\ \operatorname{tg} \Phi &= \frac{r_1 \sin \vartheta_1 \sin \varphi_1 + r_2 \sin \vartheta_2 \sin \varphi_2}{r_1 \sin \vartheta_1 \cos \varphi_1 + r_2 \sin \vartheta_2 \cos \varphi_2}, \\ r^2 &= r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos \omega_{12}, \\ \cos \vartheta &= \frac{r_1 \cos \vartheta_1 - r_2 \cos \vartheta_2}{\sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos \omega_{12}}}, \\ \operatorname{tg} \varphi &= \frac{r_1 \sin \vartheta_1 \sin \varphi_1 - r_2 \sin \vartheta_2 \sin \varphi_2}{r_1 \sin \vartheta_1 \cos \varphi_1 - r_2 \sin \vartheta_2 \cos \varphi_2}. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь  $\omega_{12}$  — угол между векторами  $\mathbf{r}_1$  и  $\mathbf{r}_2$  (рис. 5.2),

$$\cos \omega_{12} = \cos \vartheta_1 \cos \vartheta_2 + \sin \vartheta_1 \sin \vartheta_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2). \quad (4)$$

Соотношения, обратные (3), имеют вид

$$\begin{aligned} 4r_1^2 &= R^2 + r^2 + 2Rr \cos \omega, & 4r_2^2 &= R^2 + r^2 - 2Rr \cos \omega, \\ \cos \vartheta_1 &= \frac{R \cos \Theta + r \cos \vartheta}{\sqrt{R^2 + r^2 + 2Rr \cos \omega}}, & \cos \vartheta_2 &= \frac{R \cos \Theta - r \cos \vartheta}{\sqrt{R^2 + r^2 - 2Rr \cos \omega}}, \\ \operatorname{tg} \varphi_1 &= \frac{R \sin \Theta \sin \Phi + r \sin \vartheta \sin \varphi}{R \sin \Theta \cos \Phi + r \sin \vartheta \cos \varphi}, & \operatorname{tg} \varphi_2 &= \frac{R \sin \Theta \sin \Phi - r \sin \vartheta \sin \varphi}{R \sin \Theta \cos \Phi - r \sin \vartheta \cos \varphi}. \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь  $\omega$  — угол между векторами  $\mathbf{R}$  и  $\mathbf{r}$  (рис. 5.2),

$$\cos \omega = \cos \Theta \cos \vartheta + \sin \Theta \sin \vartheta \cos(\Phi - \varphi). \quad (6)$$

Отметим, что выражения для сферических координат  $\mathbf{R}$  и  $\mathbf{r}$  переходят одно в другое при замене  $\mathbf{r}_2$  на  $-\mathbf{r}_2$ , т. е. при замене  $\vartheta_2 \rightarrow \pi - \vartheta_2$ ,  $\varphi_2 \rightarrow \pi - \varphi_2$ . Поэтому разложения функций  $F(\mathbf{R}, \mathbf{r})$  и  $F(\mathbf{r}, \mathbf{R})$ , отличающихся между собой лишь заменой аргументов  $\mathbf{R} \rightleftharpoons \mathbf{r}$ , связаны между собой. Если

$$F(\mathbf{R}, \mathbf{r}) = f(r_1, r_2) = \sum_{l_1 l_2 LM} C_{l_1 l_2}^{LM}(r_1, r_2) \{Y_{l_1}(\Omega_1) \otimes Y_{l_2}(\Omega_2)\}_{LM}, \quad (7)$$

то

$$F(\mathbf{r}, \mathbf{R}) = f(r_1, -r_2) = \sum_{l_1 l_2 LM} (-1)^{l_2} C_{l_1 l_2}^{LM}(r_1, r_2) \{Y_{l_1}(\Omega_1) \otimes Y_{l_2}(\Omega_2)\}_{LM}. \quad (8)$$

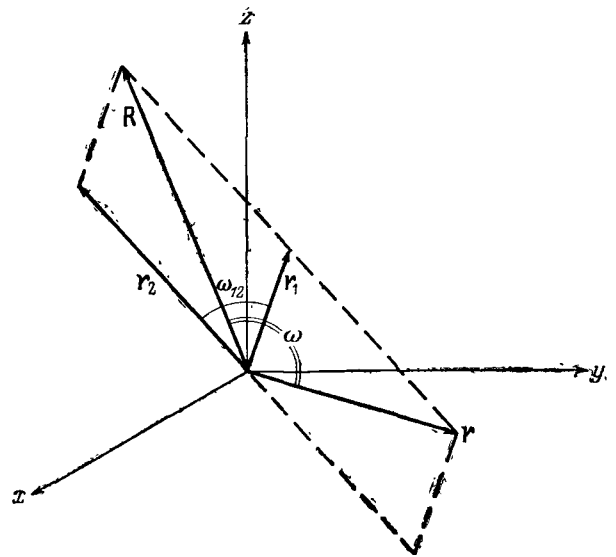


Рис. 5.2. Связь векторов  $\mathbf{R}$  и  $\mathbf{r}$  с векторами  $\mathbf{r}_1$  и  $\mathbf{r}_2$ .

2. Среди различных функций  $f(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$  особую роль играют функции, инвариантные относительно поворота системы координат. Такие функции зависят лишь от трех переменных  $r_1 = |\mathbf{r}_1|$ ,  $r_2 = |\mathbf{r}_2|$ ,  $(\mathbf{r}_1 \mathbf{r}_2) = r_1 r_2 \cos \omega_{12}$  или, что равносильно,  $R = |\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2|$ ,  $r = |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$  и  $(\mathbf{R} \cdot \mathbf{r}) = Rr \cos \omega$ .

Разложение этих функций, очевидно, будет содержать биполярные гармоники только нулевого ранга  $L=0$ , т. е. только скалярные произведения  $(Y_l(\Omega_1) \cdot Y_l(\Omega_2))$  (см. 5.16 (10)). Это разложение эквивалентно разложению по полиномам Лежандра, зависящим от  $\cos \omega_{12}$ , вследствие теоремы сложения сферических гармоник

$$(Y_l(\Omega_1) \cdot Y_l(\Omega_2)) = \frac{2l+1}{4\pi} P_l(\cos \omega_{12}). \quad (9)$$

3. Примеры разложения функций, зависящих от  $\mathbf{r}_1 \mathbf{r}_2$ :

$$(\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2) = \frac{4\pi}{3} r_1 r_2 (Y_1(\vartheta_1, \varphi_1) \cdot Y_1(\vartheta_2, \varphi_2)), \quad (10)$$

$$(\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2)^2 = \frac{4\pi}{3} r_1^2 r_2^2 \left[ (Y_0(\vartheta_1, \varphi_1) \cdot Y_0(\vartheta_2, \varphi_2)) + \frac{2}{5} (Y_2(\vartheta_1, \varphi_1) \cdot Y_2(\vartheta_2, \varphi_2)) \right], \quad (11)$$

$$(\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2)^3 = \frac{4\pi}{5} r_1^3 r_2^3 \left[ (Y_1(\vartheta_1, \varphi_1) \cdot Y_1(\vartheta_2, \varphi_2)) + \frac{2}{7} (Y_3(\vartheta_1, \varphi_1) \cdot Y_3(\vartheta_2, \varphi_2)) \right]. \quad (12)$$

В общем случае [69] при целых положительных  $n$

$$(\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2)^n = 4\pi r_1^n r_2^n \sum_l \frac{n!}{(n-l)! (n+l+1)!} (Y_l(\vartheta_1, \varphi_1) \cdot Y_l(\vartheta_2, \varphi_2)). \quad (13)$$

В этой формуле индекс суммирования  $l$  принимает значения  $l=0, 2, \dots, n-2, n$  при  $n$  — четном или  $l=1, 3, \dots, n-2, n$  при  $n$  — нечетном.

Разложение экспоненциальной функции имеет вид

$$e^{i(\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2)} = 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} i^l j_l(r_1 r_2) (Y_l(\Omega_1) \cdot Y_l(\Omega_2)), \quad (14)$$

где  $j_l(x)$  — сферическая функция Бесселя.

Произвольная функция  $f(\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2)$ , которая может быть представлена в виде степенного ряда

$$f(\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2)^n, \quad (15)$$

разлагается в ряд по сферическим функциям вида

$$f(\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2) = \sum_{l=0}^{\infty} f_l(r_1 r_2) (Y_l(\Omega_1) \cdot Y_l(\Omega_2)), \quad (16)$$

где коэффициенты разложения  $f_l(r_1 r_2)$  определяются формулой

$$f_l(r_1 r_2) = 4\pi \sum_{n=l, l+2}^{\infty} c_n \frac{n! (r_1 r_2)^n}{(n-l)! (n+l+1)!}. \quad (17)$$

4. Примеры разложения функций, зависящих от  $r = |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$ : разложение функции  $\delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$  имеет вид

$$\delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) = \frac{\delta(r_1 - r_2)}{r_1^2} \sum_{l=0}^{\infty} (Y_l(\Omega_1) \cdot Y_l(\Omega_2)). \quad (18)$$

Формула (18) является следствием условия полноты системы функций  $Y_{lm}(\vartheta, \varphi)$  (см. 5.6 (1)).

Разложение функции Грина для скалярного уравнения Гельмгольца может быть записано в виде

$$\frac{e^{ikr}}{r} = 4\pi ik \sum_{l=0}^{\infty} j_l(kr_1) h_l^{(1)}(kr_2) (Y_l(\Omega_1) \cdot Y_l(\Omega_2)), \quad (19)$$

$(r_1 < r_2),$

где  $j_l(x)$  и  $h_l^{(1)}(x)$  — сферические функции Бесселя и Ханкеля I рода. Формула (19) справедлива при  $r_1 < r_2$ . Если  $r_1 > r_2$ , то в ней нужно произвести замену  $r_1 \rightleftharpoons r_2$ . Разложение (19) является частным случаем следующего разложения [70]:

$$z_0(kr) = 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} j_l(kr_1) z_l(kr_2) (\mathbf{Y}_l(\Omega_1) \cdot \mathbf{Y}_l(\Omega_2)), \quad (20)$$

$$(r_1 < r_2),$$

где  $z_l(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} Z_{l+1/2}(x)$  — любая из сферических функций Бесселя, Неймана или Ханкеля I и II рода.

Важным частным случаем формулы (19) является разложение функции Грина для скалярного уравнения Лапласа, получающееся из (19) при  $k=0$

$$\frac{1}{r} = \frac{4\pi}{r_2} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{(2l+1)} \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^l (\mathbf{Y}_l(\Omega_1) \cdot \mathbf{Y}_l(\Omega_2)), \quad (21)$$

$$(r_1 < r_2).$$

Формула (21), также как и (19), справедлива при  $r_1 < r_2$ . Если  $r_1 > r_2$ , то в (21) следует произвести замену  $r_1 \rightleftharpoons r_2$ . Разложение (21) можно записать также в симметричном виде, справедливом как при  $r_1 < r_2$ , так и при  $r_1 > r_2$ :

$$\frac{1}{r} = \frac{4\pi}{\sqrt{r_1^2 + r_2^2}} \sum_{l=0}^{\infty} \left\{ \sum_{n=l, l+2}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(n-l)!!(l+n+1)!!} \left(\frac{r_1 r_2}{r_1^2 + r_2^2}\right)^n \right\} (\mathbf{Y}_l(\Omega_1) \cdot \mathbf{Y}_l(\Omega_2)). \quad (22)$$

Несколько примеров разложений других степеней  $r$ .

$$r = 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{(2l+1)} \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^l \left(\frac{r_1^2}{2l+3} - \frac{r_2^2}{2l-1}\right) (\mathbf{Y}_l(\Omega_1) \cdot \mathbf{Y}_l(\Omega_2)), \quad (23)$$

$$\frac{1}{r^3} = \frac{4\pi}{r_2^3 - r_1^3} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^l (\mathbf{Y}_l(\Omega_1) \cdot \mathbf{Y}_l(\Omega_2)), \quad (24)$$

$$\frac{1}{r^5} = \frac{4\pi}{3(r_2^3 - r_1^3)^2} \sum_{l=0}^{\infty} (2l-1)(2l+3) \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^l \left(\frac{r_2^3}{2l-1} - \frac{r_1^3}{2l+3}\right) (\mathbf{Y}_l(\Omega_1) \cdot \mathbf{Y}_l(\Omega_2)). \quad (25)$$

Эти формулы справедливы при  $r_1 < r_2$ . Если  $r_1 > r_2$ , то в них следует произвести замену  $r_1 \rightleftharpoons r_2$ . Разложения (21)–(25) являются частными случаями разложений, рассматриваемых ниже.

5. Разложение функций  $r^n \equiv |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^n$  ( $n$  — целое, положительное или отрицательное) имеет вид

$$r^n = 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{2l+1} a_l^n(r_1, r_2) (\mathbf{Y}_l(\Omega_1) \cdot \mathbf{Y}_l(\Omega_2)), \quad (26)$$

где коэффициенты разложения  $a_l^n(r_1, r_2)$  даются следующими формулами [97]:

$$a_l^n(r_1, r_2) = \frac{\left(\frac{-n}{2}\right)_l}{\left(\frac{1}{2}\right)_l} r_2^n \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^l F\left(l - \frac{n}{2}, -\frac{1}{2} - \frac{n}{2}; l + \frac{3}{2}; \frac{r_1^2}{r_2^2}\right), \quad (27)$$

$$(r_1 < r_2),$$

$$a_l^n(r_1, r_2) = \frac{\left(\frac{-n}{2}\right)_l r_1^l (r_2^2 - r_1^2)^{n+2}}{r_2^{l+n+4}} F\left(l + 2 + \frac{n}{2}, \frac{3}{2} + \frac{n}{2}; l + \frac{3}{2}; \frac{r_1^2}{r_2^2}\right), \quad (r_1 < r_2), \quad (28)$$

$$a_l^n(r_1, r_2) = \frac{2^{n+1} \left(l + \frac{1}{2}\right) \left(-\frac{n}{2}\right)_l}{\left(1 + \frac{n}{2}\right)_{l+1}} r_1^l r_2^{n-l} F\left(l - \frac{n}{2}, -\frac{1}{2} - \frac{n}{2}; -1 - n; \frac{r_2^2 - r_1^2}{r_2^2}\right) -$$

$$-\frac{2l+1}{2^{n+3}(n+2)} \cdot \frac{r_1^l (r_2^2 - r_1^2)^{n+2}}{r_2^{l+n+4}} F\left(l + \frac{n}{2} + 2, \frac{3}{2} + \frac{n}{2}; n+3; \frac{r_2^2 - r_1^2}{r_2^2}\right),$$

$$(r_1 < r_2), \quad (29)$$

$$a_l^n(r_1, r_2) = \frac{\left(-\frac{n}{2}\right)_l}{\left(\frac{1}{2}\right)_l} (-1)^{\frac{n}{2}} \cos \frac{n\pi}{2} r_1^{n-l} r_2^l F\left(l - \frac{n}{2}, -\frac{1}{2} - \frac{n}{2}; l + \frac{3}{2}; \frac{r_2^2}{r_1^2}\right) +$$

$$+\frac{\Gamma\left(l + \frac{3}{2}\right) \sqrt{\pi} (-1)^{\frac{n+1}{2}}}{\Gamma\left(-\frac{n}{2}\right) \Gamma\left(2 + l + \frac{n}{2}\right)} \frac{r_1^{n+l+1}}{r_2^{l+1}} F\left(-1 - l - \frac{n}{2}, -\frac{1}{2} - \frac{n}{2}; \frac{1}{2} - l; \frac{r_2^2}{r_1^2}\right),$$

$$(r_1 < r_2). \quad (30)$$

При  $r_1 > r_2$  в формулах (27)–(30) нужно заменить  $r_1 \rightleftharpoons r_2$ . Выражения для коэффициентов  $a_l^n(r_1, r_2)$ , справедливые как при  $r_1 < r_2$ , так и при  $r_1 > r_2$ , имеют вид

$$a_l^n(r_1, r_2) = \frac{\left(-\frac{n}{2}\right)_l}{\left(\frac{1}{2}\right)_l} \cdot \frac{(r_1 r_2)^l}{(r_1^2 + r_2^2)^{l - \frac{n}{2}}} F\left(\frac{l}{2} - \frac{n}{4}, \frac{l}{2} - \frac{n}{4} + \frac{1}{2}; l + \frac{3}{2}; \left(\frac{2r_1 r_2}{r_1^2 + r_2^2}\right)^2\right), \quad (31)$$

$$a_l^n(r_1, r_2) = \frac{\left(-\frac{n}{2}\right)_l}{\left(\frac{1}{2}\right)_l} \cdot \frac{(r_1 r_2)^l}{(r_1 + r_2)^{2l-n}} F\left(l - \frac{n}{2}, 1 + l; 2l + 2; \frac{4r_1 r_2}{(r_1 + r_2)^2}\right). \quad (32)$$

При четных положительных  $n$  ряд (26) обрывается при  $l = n/2$ , превращаясь в конечную сумму. Сравнение (27) и (28) показывает, что коэффициенты разложения функций  $r^n$  и  $r^{-n-4}$  связаны соотношением

$$a_l^n(r_1, r_2) = \frac{\left(-\frac{n}{2}\right)_l}{\left(\frac{n}{2} + 2\right)_l} (r_2^2 - r_1^2)^{n+2} a_l^{-n-4}(r_1, r_2). \quad (33)$$

Заметим, что все разложения, приведенные в 5.17.4 и 5.17.5 остаются справедливыми при замене  $r = |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$  на  $R = |\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2|$ , если коэффициенты разложения дополнительно умножить на  $(-1)^l$ .

6. Сферические волны, т. е. функции вида  $z_L(kr) Y_{LM}(\vartheta, \varphi)$ , где  $\mathbf{r}(r, \vartheta, \varphi) = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ ,  $z_L(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} Z_{L+1/2}(x)$ , и  $Z_{L+1/2}(x)$  — любая цилиндрическая функция порядка  $L + \frac{1}{2}$ , разлагаются по биполярным гармоникам ранга  $L$  [70] (см. 5.16.1):

$$z_L(kr) Y_{LM}(\vartheta, \varphi) = \sqrt{\frac{4\pi}{2L+1}} \sum_{l_1, l_2=0}^{\infty} i^{l_1-l_2-L} \sqrt{(2l_1+1)(2l_2+1)} C_{l_1 0 l_2 0}^{L 0} j_{l_1}(kr_1) z_{l_2}(kr_2) \{Y_{l_1}(\Omega_1) \otimes Y_{l_2}(\Omega_2)\}_{LM},$$

$$(r_1 < r_2) \quad (34)$$

В случае  $r_1 > r_2$  в формуле (34) следует произвести замену  $r_1 \rightleftharpoons r_2$ . Выбирая в качестве  $z_L(kr)$  сферическую функцию Бесселя  $j_L(kr)$  и устремляя  $k \rightarrow 0$ , получаем разложение [22, 96]

$$r^L Y_{LM}(\vartheta, \varphi) = \sqrt{4\pi(2L+1)!} \sum_{\substack{l_1, l_2=0 \\ l_1+l_2=L}}^L (-1)^{l_2} \frac{r_1^{l_1} r_2^{l_2}}{\sqrt{(2l_1+1)!(2l_2+1)!}} \{Y_{l_1}(\Omega_1) \otimes Y_{l_2}(\Omega_2)\}_{LM}. \quad (35)$$

Аналогично, выбирая в качестве  $z_L(kr)$  сферическую функцию Неймана  $n_L(kr)$  и устремляя  $k \rightarrow 0$  получаем разложение [22, 96]

$$\frac{1}{r^{L+1}} Y_{LM}(\vartheta, \varphi) = \sqrt{\frac{4\pi}{(2L)!}} \sum_{\substack{l_1, l_2=0 \\ l_2-l_1=L}}^L (-1)^{l_2} \sqrt{\frac{(2l_2)!}{(2l_1+1)!}} \cdot \frac{r_1^{l_1}}{r_2^{l_2+1}} \{Y_{l_1}(\Omega_1) \otimes Y_{l_2}(\Omega_2)\}_{LM}, \quad (36)$$

$(r_1 < r_2).$

Например, циклические компоненты вектора  $\mathbf{r}/r^3$  разлагаются по формуле

$$\frac{r_\mu}{r^3} = 4\pi \sum_{l=1}^{\infty} (-1)^l \sqrt{\frac{l}{3}} \cdot \frac{r_1^{l-1}}{r_2^{l+1}} \{Y_{l-1}(\Omega_1) \otimes Y_l(\Omega_2)\}_{1\mu}. \quad (37)$$

$(r_1 < r_2).$

7. Разложение функций  $r^N Y_{LM}(\vartheta, \varphi)$  по биполярным гармоникам ранга  $L$  имеет вид

$$r^N Y_{LM}(\vartheta, \varphi) = 4\pi \sum_{l_1, l_2=0}^{\infty} a_{l_1 l_2}^{NL}(r_1, r_2) \sqrt{\frac{(2l_1+1)(2l_2+1)}{4\pi(2L+1)}} C_{l_1 0 l_2 0}^{L 0} \{Y_{l_1}(\Omega_1) \otimes Y_{l_2}(\Omega_2)\}_{LM}, \quad (38)$$

где суммирование ведется по всем целым положительным значениям  $l_1$  и  $l_2$ , разрешенным правилом сложения моментов ( $l_1 + l_2 = L$ ) и законом сохранения четности ( $l_1 + l_2 - L$  — четное число).

Коэффициенты разложения  $a_{l_1 l_2}^{NL}(r_1, r_2)$  для разных значений  $N, L$  даются формулой [98]

$$a_{l_1 l_2}^{NL}(r_1, r_2) = (-1)^{\frac{l_1-l_2-L}{2}} \frac{2^{l_1}}{(2l_1+1)!!} \frac{\Gamma\left(\frac{l_1+l_2-N}{2}\right) \Gamma\left(\frac{L+N+3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{L-N}{2}\right) \Gamma\left(\frac{-l_1+l_2+N+3}{2}\right)} \times$$

$$\times r_2^N \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^{l_1} F\left(\frac{l_1+l_2-N}{2}, \frac{l_1-l_2-N-1}{2}; l_1 + \frac{3}{2}; \frac{r_1^2}{r_2^2}\right), \quad (39)$$

$(r_1 < r_2).$

Если  $r_1 > r_2$ , то выражение для  $a_{l_1 l_2}^{NL}(r_1, r_2)$  получается из (39) заменой  $r_1 \rightleftharpoons r_2$ ,  $l_1 \rightleftharpoons l_2$  и дополнительным умножением на  $(-1)^L$ . Выражение (39) для коэффициентов разложения может быть также записано в следующих видах [78], в зависимости от значений  $N$  и  $L$ .

При  $N$  — целом,  $N - L$  — четном,  $N - L \geq 0$ , т. е. при  $N = L, L + 2, L + 4, \dots$

$$a_{l_1 l_2}^{NL}(r_1, r_2) = \begin{cases} (-1)^{l_2} (N+L+1)!! (N-L)!! \sum_{\substack{s_1, s_2=0 \\ s_1+s_2=\frac{N-l_1-l_2}{2}}}^{\infty} \frac{r_1^{l_1+2s_1} r_2^{l_2+2s_2}}{(2s_1)!! (2s_1+2l_1+1)!! (2s_2)!! (2s_2+2l_2+1)!!} & \text{при } l_1+l_2 \leq N, \\ 0 & \text{при } l_1+l_2 > N. \end{cases} \quad (40)$$

При  $N$  — целом,  $N - L$  — четном,  $N - L \leq -2$ , т. е. при  $N = L - 2, L - 4, L - 6, \dots$

$$a_{l_1 l_2}^{NL}(r_1, r_2) = (-1)^{l_2 + \frac{N-L}{2}} \frac{(N+L+1)!!}{2(L-N-2)!! (N+l_1+l_2+2)!} r_1^{l_1} r_2^{l_2} \times$$

$$\times \left(\frac{1}{r_1} \cdot \frac{\partial}{\partial r_1}\right)^{l_1} \left(\frac{1}{r_2} \cdot \frac{\partial}{\partial r_2}\right)^{l_2} \frac{1}{r_1 r_2} [(r_1 - r_2)^{N+l_1+l_2+2} \ln|r_1 - r_2| - (r_1 + r_2)^{N+l_1+l_2+2} \ln(r_1 + r_2)]. \quad (41)$$

При  $N$  — целом,  $N - L$  — нечетном и  $r_1 < r_2$

$$a_{l_1 l_2}^{NL}(r_1, r_2) = \begin{cases} (-1)^{\frac{N+L+1}{2} + l_1} \frac{(N+L+1)!!}{(L-N-2)!!} r_1^{l_1} r_2^{N-l_1} \sum_{s=0}^{\frac{N-l_1+l_2+1}{2}} \frac{\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^{2s}}{(2s)!! (N-l_1-l_2-2s)!! (N-l_1+l_2+1-2s)!! (2l_1+2s+1)!!} & \\ 0 & \end{cases} \quad (42)$$

при  $N - l_1 + l_2 + 1 \geq 0,$   
при  $N - l_1 + l_2 + 1 < 0.$

Если  $r_1 > r_2$ , то выражение для  $a_{l_1 l_2}^{NL}(r_1, r_2)$  получается из (42) заменой  $r_1 \rightleftharpoons r_2$ ,  $l_1 \rightleftharpoons l_2$  и дополнительным умножением на  $(-1)^L$ . Важно подчеркнуть, что, если  $N \leq -3$ , коэффициенты  $a_{l_1 l_2}^{NL}(r_1, r_2)$  имеют добавки, содержащие  $\delta(r_1 - r_2)$  и ее производные, которые дают конечный вклад при интегрировании разложения (38). Эти добавки имеют вид [78]

$$a_{l_1 l_2}^{NL}(r_1, r_2)_\delta = (-1)^{\frac{N+L-1}{2}} \frac{(N+L+1)!!}{(L-N-2)!!} \sum_{\substack{l_1 \\ s_1=0}} \sum_{\substack{l_2 \\ s_2=0 \\ s_1+s_2+N \leq -3}} (-1)^{s_2} \frac{(l_1+s_1)!(l_2+s_2)!}{(l_1-s_1)!(l_2-s_2)!} \times \\ \times \frac{1}{(2s_1)!!(2s_2)!!} \cdot \frac{1}{r_2^{s_2+1}} \left( \frac{\partial}{\partial r_2} \right)^{-N-s_1-s_2-3} \left[ \frac{\delta(r_1-r_2)}{r_1^2 r_2^{s_1-1}} \right]. \quad (43)$$

Наконец, при  $N$  — нецелом

$$a_{l_1 l_2}^{NL}(r_1, r_2) = (-1)^{l_1+l_2+1} \frac{2^{L-1} \Gamma\left(\frac{N+L+3}{2}\right) \Gamma(N-L+2)}{\Gamma\left(\frac{N-L+3}{2}\right) \Gamma(N+l_1+l_2+3)} r_1^{l_1} r_2^{l_2} \times \\ \times \left( \frac{1}{r_1} \frac{\partial}{\partial r_1} \right)^{l_1} \left( \frac{1}{r_2} \frac{\partial}{\partial r_2} \right)^{l_2} \frac{1}{r_1 r_2} \{ |r_1+r_2|^{N+l_1+l_2+2} - |r_1-r_2|^{N+l_1+l_2+2} \}. \quad (44)$$

Заметим, что все разложения, приведенные в 5.17.6 и 5.17.7, остаются справедливыми при замене  $\mathbf{r}(r, \vartheta, \varphi)$ , где  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ , на  $\mathbf{R}(R, \Theta, \Phi)$ , где  $\mathbf{R} = \mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2$ , если коэффициенты разложения дополнительно умножить на  $(-1)^{l_2}$ .



---

# СПИНОВЫЕ ФУНКЦИИ

---

## 6.1. СПИНОВЫЕ ФУНКЦИИ ЧАСТИЦ С ПРОИЗВОЛЬНЫМ СПИНОМ

### 1. Определение

*Спиновые функции* описывают поляризационные состояния частиц\* с определенным *спином*, т. е. с определенным собственным (внутренним) моментом количества движения.

Спиновые функции  $\chi(\sigma)$  можно рассматривать как функции от дискретной *спиновой переменной*  $\sigma$ , которая имеет смысл проекции спина на ось  $z$  и может принимать  $2S+1$  значение:  $\sigma = -S, -S+1, \dots, S-1, S$ , где  $S$  — спин частицы ( $S$  — целое или полуцелое неотрицательное число). При этом величина  $|\chi(\sigma)|^2$  представляет собой вероятность того, что в данном состоянии проекция спина на ось  $z$  равна  $\sigma$ .

Спиновую функцию принято записывать в виде столбца, состоящего из  $2S+1$  элемента:

$$\chi = \begin{pmatrix} \chi(S) \\ \chi(S-1) \\ \vdots \\ \chi(-S+1) \\ \chi(-S) \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Элементы этого столбца дают значение спиновой функции  $\chi(\sigma)$  при соответствующем значении спиновой переменной  $\sigma$ , а сами величины  $\chi(\sigma)$  называются *контравариантными компонентами* спиновой функции  $\chi$  (см. ниже 6.1.4).

При такой форме записи операторы, действующие на спиновые переменные, представляются в виде квадратных матриц размерности  $(2S+1) \times (2S+1)$ , а суммирование по спиновой переменной заменяется матричным умножением. Эрмитовски сопряженная функция  $\chi^+$  представляется в виде строки

$$\chi^+ = (\chi^*(S), \chi^*(S-1), \dots, \chi^*(-S+1), \chi^*(-S)). \quad (2)$$

Для того чтобы величины  $|\chi(\sigma)|^2$  можно было рассматривать как вероятности иметь  $z$ -компоненту спина равную  $\sigma$ , они должны удовлетворять условию нормировки

$$\sum_{\sigma=-S}^S |\chi(\sigma)|^2 = 1. \quad (3)$$

Это же условие может быть записано в матричном виде

$$\chi^+ \chi = 1. \quad (4)$$

Описанное выше представление спиновых функций называется *представлением циклического базиса*. В случае целочисленного спина наряду с представлением циклического базиса иногда используется *представление декартового базиса*. Это представление для частиц со спином 1 рассмотрено ниже (см. 6.3).

---

\* Название «частица» используется для обозначения как элементарных частиц (электронов, протонов и т. д.), так и сложных систем (атомов, ядер), которые в рассматриваемых явлениях ведут себя как единое целое.

## 2. Базисные спиновые функции

Базисными спиновыми функциями называются спиновые функции состояний с определенным значением спина и его проекции на ось  $z$ . Базисные функции  $\chi_{Sm}$  являются собственными функциями операторов  $\hat{S}^2$  и  $\hat{S}_z$ , где  $\hat{S}$  — оператор спина (см. 2.3):

$$\hat{S}^2 \chi_{Sm} = S(S+1) \chi_{Sm}, \quad \hat{S}_z \chi_{Sm} = m \chi_{Sm}. \quad (5)$$

Из этого определения следует, что зависимость базисных функций  $\chi_{Sm}(\sigma)$  от спиновой переменной  $\sigma$  дается формулой

$$\chi_{Sm}(\sigma) = \delta_{m\sigma}. \quad (6)$$

Иными словами, контравариантные компоненты базисных спиновых функций  $\chi_{Sm}$  имеют вид

$$[\chi_{Sm}]^\sigma = \delta_{m\sigma}. \quad (7)$$

Если записывать базисные функции в виде столбцов, то

$$\chi_{SS} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \chi_{SS-1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad \chi_{S-S} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (8)$$

Совокупность  $2S+1$  базисных функций  $\chi_{Sm}$  с  $m = S, S-1, \dots, -S$ , образует полную систему ортонормированных функций. Условие ортогональности и нормировки базисных функций

$$\chi_{Sm}^\dagger \chi_{Sm'} = \delta_{mm'}. \quad (9)$$

Условие полноты системы базисных функций можно записать в матричном виде

$$\sum_{m=-S}^S \chi_{Sm} \chi_{Sm}^\dagger = I, \quad (10)$$

где  $I$  — единичная матрица размерности  $(2S+1) \times (2S+1)$ .

Матричные произведения базисных функций вида  $\chi_{Sm} \chi_{Sm'}^\dagger$ , являются квадратными матрицами размерности  $(2S+1) \times (2S+1)$  и могут быть разложены по полному набору поляризационных операторов  $\hat{T}_{LM}(S)$  (см. 2.4). Это разложение имеет вид

$$\chi_{Sm} \chi_{Sm'}^\dagger = \sum_L \sqrt{\frac{2L+1}{2S+1}} C_{Sm', L}^{Sm} \hat{T}_{LM}(S). \quad (11)$$

Матричные элементы циклических компонент оператора спина  $\hat{S}_\mu$  ( $\mu = \pm 1, 0$ ) между базисными функциями даются формулой

$$\chi_{Sm'}^\dagger \hat{S}_\mu \chi_{Sm} = \sqrt{S(S+1)} C_{Sm' 1\mu}^{Sm}; \quad (12)$$

при этом отличными от нуля будут следующие матричные элементы:

$$\begin{aligned} \chi_{Sm+1}^\dagger \hat{S}_{+1} \chi_{Sm} &= -\frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(S-m)(S+m+1)}, \\ \chi_{Sm}^\dagger \hat{S}_0 \chi_{Sm} &= m, \\ \chi_{Sm-1}^\dagger \hat{S}_{-1} \chi_{Sm} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(S+m)(S-m+1)}. \end{aligned} \quad (13)$$

Для декартовых компонент оператора спина  $\hat{S}_i$  ( $i = x, y, z$ ) отличные от нуля матричные элементы имеют вид

$$\begin{aligned} \chi_{Sm\pm 1}^\dagger \hat{S}_x \chi_{Sm} &= \frac{1}{2} \sqrt{(S \mp m)(S \pm m + 1)}, \\ \chi_{Sm\pm 1}^\dagger \hat{S}_y \chi_{Sm} &= \mp \frac{i}{2} \sqrt{(S \mp m)(S \pm m + 1)}, \\ \chi_{Sm}^\dagger \hat{S}_z \chi_{Sm} &= m. \end{aligned} \quad (14)$$

Матричные элементы поляризационных операторов  $\hat{T}_{LM}(S)$  между базисными функциями записываются следующим образом:

$$\chi_{S m'}^+ \hat{T}_{LM}(S) \chi_{S m} = \sqrt{\frac{2L+1}{2S+1}} C_{S m L M}^{S m'} \quad (15)$$

При повороте системы координат базисные функции  $\chi_{S m}$  преобразуются с помощью оператора поворота  $\hat{D}^S(\alpha, \beta, \gamma)$  (формула 2.4 (17)), если поворот характеризуется углами Эйлера  $\alpha, \beta, \gamma$ , или с помощью оператора поворота  $U^S(\omega; \Theta, \Phi)$  (формула 2.4 (18)), если поворот характеризуется направлением оси поворота  $\mathbf{n}(\Theta, \Phi)$  и углом поворота  $\omega$ :

$$\begin{aligned} \chi'_{S m'} &\equiv \hat{D}^S(\alpha, \beta, \gamma) \chi_{S m'} = \sum_m D_{m m'}^S(\alpha, \beta, \gamma) \chi_{S m}, \\ \chi'_{S m'} &\equiv U^S(\omega; \Theta, \Phi) \chi_{S m'} = \sum_m U_{m m'}^S(\omega; \Theta, \Phi) \chi_{S m}, \end{aligned} \quad (16)$$

где  $D_{m m'}^S$  —  $D$ -функции Вигнера (гл. 4), величины  $U_{m m'}^S$  определены в 4.5. Функции  $\chi'_{S m'}$  описывают состояние, в котором частица имеет спин  $S$  и проекцию спина  $m'$  на новую ось  $z'$ . Они являются собственными функциями операторов  $\hat{S}'^2$  и  $\hat{S}'_z$ :

$$\begin{aligned} \hat{S}'^2 \chi'_{S m'} &= S(S+1) \chi'_{S m'}, \\ \hat{S}'_z \chi'_{S m'} &= m' \chi'_{S m'}. \end{aligned} \quad (17)$$

Здесь  $\hat{S}'$  — оператор спина в повернутой системе координат.

$$\hat{S}'_\mu = \sum_\nu D_{\nu \mu}^1(\alpha, \beta, \gamma) \hat{S}'_\nu, \quad (\mu, \nu = \pm 1, 0). \quad (18)$$

### 3. Спиральные базисные функции

*Спиральностью* называется проекция спина на направление импульса частицы. Для частиц со спином  $S$  спиральность  $\lambda$  может принимать  $2S+1$  значение:  $\lambda = S, S-1, \dots, -S+1, -S$ .

*Спиральными базисными функциями*  $\chi_{S \lambda}(\vartheta, \varphi)$  называются собственные функции операторов  $\hat{S}^2$  и  $\hat{S} \cdot \mathbf{n}$ , где  $\hat{S}$  — оператор спина,  $\mathbf{n} = \mathbf{p}/|\mathbf{p}|$  — направление импульса частицы,  $\vartheta$  и  $\varphi$  — сферические углы орты  $\mathbf{n}$ :

$$\begin{aligned} \hat{S}^2 \chi_{S \lambda}(\vartheta, \varphi) &= S(S+1) \chi_{S \lambda}(\vartheta, \varphi), \\ \hat{S} \cdot \mathbf{n} \chi_{S \lambda}(\vartheta, \varphi) &= \lambda \chi_{S \lambda}(\vartheta, \varphi). \end{aligned} \quad (19)$$

Функция  $\chi_{S \lambda}(\vartheta, \varphi)$  описывает состояние со спином  $S$  и определенной спиральностью  $\lambda$ .

Спиральные функции  $\chi_{S \lambda}(\vartheta, \varphi)$  можно выразить через базисные функции  $\chi_{S m}$ , поворачивая систему координат так, чтобы новая ось  $z'$  была направлена по импульсу частицы или, что то же самое, по орту  $\mathbf{n}(\vartheta, \varphi)$ . Такому повороту соответствуют углы Эйлера  $\alpha = \varphi, \beta = \vartheta$ . Третий угол Эйлера  $\gamma$  (угол поворота вокруг новой оси  $z'$ ) может быть выбран произвольно. В дальнейшем для простоты будем полагать  $\gamma = 0$ . При таком выборе  $\gamma$  орты повернутой системы координат  $\mathbf{e}'_x, \mathbf{e}'_y, \mathbf{e}'_z$  будут совпадать со сферическими ортами  $\mathbf{e}_\vartheta, \mathbf{e}_\varphi, \mathbf{e}_p$  соответственно (см. 1.1.2). Пользуясь законом преобразования базисных функций  $\chi_{S m}$  при повороте (16), получаем

$$\begin{aligned} \chi_{S \lambda}(\vartheta, \varphi) &= \sum_m D_{m \lambda}^S(\varphi, \vartheta, 0) \chi_{S m}, \\ \chi_{S m} &= \sum_\lambda D_{-\lambda -m}^S(0, \vartheta, \varphi) \chi_{S \lambda}(\vartheta, \varphi). \end{aligned} \quad (20)$$

Для эрмитовски сопряженных функций имеем

$$\begin{aligned} \chi_{S \lambda}^\dagger(\vartheta, \varphi) &= \sum_m (-1)^{\lambda-m} D_{-m -\lambda}^S(\varphi, \vartheta, 0) \chi_{S m}^+, \\ \chi_{S m}^+ &= \sum_\lambda (-1)^{\lambda-m} D_{\lambda m}^S(0, \vartheta, \varphi) \chi_{S \lambda}^\dagger(\vartheta, \varphi). \end{aligned} \quad (21)$$

Из (6), (7) и (20) следует, что контравариантные компоненты спиральных базисных функций имеют вид

$$[\chi_{S\lambda}(\vartheta, \varphi)]^\sigma = D_{\sigma\lambda}^S(\varphi, \vartheta, 0), \quad (\sigma, \lambda = -S, -S+1, \dots, S-1, S) \quad (22)$$

$$[\chi_{S\lambda}^\dagger(\vartheta, \varphi)]^\sigma = (-1)^{\lambda-\sigma} D_{-\sigma, -\lambda}^S(\varphi, \vartheta, 0).$$

Совокупность  $2S+1$  спиральных функций  $\chi_{S\lambda}(\vartheta, \varphi)$  с  $\lambda = S, S-1, \dots, -S$ , также как и совокупность функций  $\chi_{S\lambda}^\dagger$ , образует ортонормированный базис. Условие ортогональности и нормировки для спиральных функций

$$\chi_{S\lambda}^\dagger(\vartheta, \varphi) \chi_{S\lambda'}(\vartheta, \varphi) = \delta_{\lambda\lambda'}. \quad (23)$$

Условие полноты системы спиральных функций

$$\sum_{\lambda} \chi_{S\lambda}(\vartheta, \varphi) \chi_{S\lambda}^\dagger(\vartheta, \varphi) = I. \quad (24)$$

Произведения спиральных функций вида  $\chi_{S\lambda}(\vartheta, \varphi) \chi_{S\lambda'}^\dagger(\vartheta, \varphi)$  являются матрицами размерности  $(2S+1) \times (2S+1)$ , которые могут быть разложены по поляризационным операторам  $\hat{T}_{LM}(S)$  (см. 2.4):

$$\chi_{S\lambda}(\vartheta, \varphi) \chi_{S\lambda'}^\dagger(\vartheta, \varphi) = \sum_{LM} V \sqrt{\frac{2L+1}{2S+1}} C_{S\lambda' L \Lambda}^{S\lambda} D_{M\Lambda}^L(\varphi, \vartheta, 0) \hat{T}_{LM}(S). \quad (25)$$

Матричные элементы поляризационных операторов между спиральными состояниями вычисляются с помощью формулы

$$\chi_{S\lambda'}^\dagger(\vartheta, \varphi) \hat{T}_{LM}(S) \chi_{S\lambda}(\vartheta, \varphi) = V \sqrt{\frac{2L+1}{2S+1}} (-1)^{M+\Lambda} C_{S\lambda L \Lambda}^{S\lambda'} D_{-M-\Lambda}^L(\varphi, \vartheta, 0). \quad (26)$$

В частности, диагональные матричные элементы имеют вид

$$\chi_{S\lambda}^\dagger(\vartheta, \varphi) \hat{T}_{LM}(S) \chi_{S\lambda}(\vartheta, \varphi) = V \sqrt{\frac{4\pi}{2S+1}} C_{S\lambda L 0}^{S\lambda} Y_{LM}(\vartheta, \varphi). \quad (27)$$

#### 4. Спиновые функции общего вида

Спиновая функция общего вида (1) для частицы со спином  $S$  может быть разложена по базисным функциям  $\chi_{S\lambda}$ , т. е. представлена в виде

$$\chi = \sum_{m=-S}^S a^m \chi_{S\lambda_m}, \quad (28)$$

где  $a^m \equiv \chi(m)$  — контравариантные компоненты неприводимого тензора ранга  $S$ . Разложение эрмитовски сопряженного спинора  $\chi^\dagger$  по базисным функциям  $\chi_{S\lambda}^\dagger$  имеет вид

$$\chi^\dagger = \sum_{m=-S}^S (a^m)^* \chi_{S\lambda_m}^\dagger. \quad (29)$$

Отметим, что в общем случае  $(a^m)^* \neq a_m$ , т. е. соответствующий неприводимый тензор не является вещественным. Условие нормировки (4) налагает на коэффициенты  $a^m$  условие

$$\sum_{m=-S}^S |a^m|^2 = 1.$$

Произведение спиновых функций  $\chi\chi^\dagger$  является матрицей размерности  $(2S+1) \times (2S+1)$  и может быть разложено по поляризационным операторам  $\hat{T}_{LM}(S)$  (см. 2.4):

$$\chi\chi^\dagger = \sum_{L=0}^{2S} \sum_{M=-L}^L (-1)^M P_{L-M} \hat{T}_{LM}(S), \quad (30)$$

где коэффициенты разложения выражаются через компоненты  $a^m$  по формуле

$$P_{LM} = \sqrt{\frac{2L+1}{2S+1}} \sum_{m, n=-S}^S C_{SmLM}^{Sn} (a^n)^* a^m. \quad (31)$$

В частности,  $P_{00} = 1/\sqrt{2S+1}$ .

Величины  $P_{LM}$  ( $M = -L, -L+1, \dots, L$ ) являются *ковариантными компонентами* неприводимого тензора ранга  $L$ . Они представляют средние значения поляризационных операторов  $\hat{T}_{LM}(S)$  в состоянии, описываемом спиновой функцией  $\chi$ :

$$\chi^+ \hat{T}_{LM}(S) \chi = P_{LM}. \quad (32)$$

При комплексном сопряжении величины  $P_{LM}$  преобразуются по формуле

$$(P_{LM})^* = (-1)^M P_{L-M}. \quad (33)$$

Из равенства  $\chi\chi^+\chi\chi^+ = \chi\chi^+$  следует, что коэффициенты  $P_{LM}$  удовлетворяют условиям

$$P_{LM} = \sum_{L_1, M_1, L_2, M_2} (-1)^{2S+L_1+L_2} \sqrt{(2L_1+1)(2L_2+1)} \begin{Bmatrix} L_1 & L_2 & L \\ S & S & S \end{Bmatrix} C_{L_1 M_1 L_2 M_2}^{LM} P_{L_1 M_1} P_{L_2 M_2}, \quad (34)$$

откуда, в частности, следует условие нормировки

$$\sum_{L=0}^{2S} \sum_{M=-L}^L |P_{LM}|^2 = 1. \quad (35)$$

При повороте системы координат, характеризуемом углами Эйлера  $\alpha, \beta, \gamma$ , спиновая функция  $\chi$  преобразуется с помощью оператора поворота  $\hat{D}^S(\alpha, \beta, \gamma)$  (формула 2.4 (17))

$$\chi' = \hat{D}^S(\alpha, \beta, \gamma) \chi. \quad (36)$$

Спиновую функцию в повернутой системе координат  $\chi'$  можно разложить как по базисным функциям  $\chi_{Sm}$  исходной системы координат, так и по базисным функциям  $\chi'_{Sm}$  повернутой системы координат.

$$\chi' = \sum_{m=-S}^S a'^m \chi_{Sm} = \sum_{m=-S}^S a^m \chi'_{Sm}, \quad (37)$$

где  $a^m$  и  $a'^m$  — компоненты спиновой функции в исходной и повернутой системах координат соответственно. Связь базисных функций  $\chi_{Sm}$  и  $\chi'_{Sm}$  дается формулой (16). Закон преобразования компонент  $a^m$  при повороте системы координат имеет вид

$$\begin{aligned} a'^m &= \sum_{n=-S}^S D_{mn}^S(\alpha, \beta, \gamma) a^n, \\ a^n &= \sum_{m=-S}^S D_{mn}^{S*}(\alpha, \beta, \gamma) a'^m, \end{aligned} \quad (38)$$

в соответствии с общим законом преобразования контравариантных компонент (см. 4.1.2).

## 5. Поляризационная матрица плотности

С помощью спиновых функций можно описывать не любое поляризационное состояние частиц, а только *полностью поляризованное (чистое)* состояние.

*Частично поляризованное* состояние, являющееся некогерентной статистической смесью чистых состояний, описывается не спиновой функцией  $\chi$ , а поляризационной матрицей плотности  $\hat{\rho}$ .

*Поляризационная матрица плотности*  $\hat{\rho}$  для частиц со спином  $S$  является квадратной матрицей размерности  $(2S+1) \times (2S+1)$ , элементы которой определяются формулой

$$\rho_{\sigma\sigma'} = \langle \chi(\sigma) \chi^*(\sigma') \rangle_{\xi} \quad (39)$$

или в матричном виде

$$\hat{\rho} = \langle \chi \chi^+ \rangle_{\xi}, \quad (40)$$

где  $\langle \rangle_{\xi}$  означает статистическое усреднение. В частности, для чистых состояний

$$\hat{\rho} = \chi \chi^+. \quad (41)$$

Поляризационная матрица плотности эрмитова

$$\hat{\rho}^+ = \hat{\rho}, \quad \text{т. е. } \rho_{\sigma\sigma'}^* = \rho_{\sigma'\sigma}, \quad (42)$$

и нормирована условием

$$\text{Sp } \hat{\rho} = 1, \quad \text{т. е. } \sum_{\sigma} \rho_{\sigma\sigma} = 1. \quad (43)$$

В силу условий (42) и (43) матрица плотности для частиц со спином  $S$  определяется  $(2S+1)^2 - 1 = 4S(S+1)$  вещественными параметрами.

Среднее значение любого поляризационного оператора  $\hat{T}$  в состоянии, описываемом поляризационной матрицей плотности  $\hat{\rho}$ , вычисляется по формуле

$$\langle \hat{T} \rangle = \text{Sp} \{ \hat{T} \hat{\rho} \} = \text{Sp} \{ \hat{\rho} \hat{T} \}. \quad (44)$$

Отметим также следующее свойство матрицы плотности

$$\text{Sp} \{ \hat{\rho}^2 \} \leq 1, \quad (45)$$

где знак равенства относится только к чистым состояниям, для которых

$$\hat{\rho}^2 = \hat{\rho}. \quad (46)$$

Матрица плотности  $\hat{\rho}$  может быть разложена по поляризационным операторам  $\hat{T}_{LM}(S)$ , т. е. записана в виде

$$\hat{\rho} = \sum_{L=0}^{2S} \sum_{M=-L}^L (-1)^M t_{L-M} \hat{T}_{LM}(S). \quad (47)$$

Величины  $t_{LM}$  носят название *поляризационных моментов*. Они представляют собой средние значения поляризационных операторов  $\hat{T}_{LM}(S)$  в состоянии, описываемом матрицей плотности  $\hat{\rho}$ :

$$t_{LM} = \langle \hat{T}_{LM}(S) \rangle = \text{Sp} \{ \hat{\rho} \hat{T}_{LM}(S) \}. \quad (48)$$

Поляризационные моменты  $t_{LM}$  связаны с элементами матрицы плотности соотношениями

$$t_{LM} = \sqrt{\frac{2L+1}{2S+1}} \sum_{\sigma, \sigma'=-S}^S C_{S\sigma LM}^{S\sigma'} \rho_{\sigma\sigma'}, \quad (49)$$

$$\rho_{\sigma\sigma'} = \sum_{L,M} \sqrt{\frac{2L+1}{2S+1}} C_{S\sigma LM}^{S\sigma'} t_{LM}. \quad (50)$$

В частности,

$$t_{00} = \frac{1}{\sqrt{2S+1}}. \quad (51)$$

При комплексном сопряжении

$$t_{LM}^* = (-1)^M t_{L-M}.$$

Свойства поляризационных моментов для чистого (т. е. полностью поляризованного) состояния рассматривались выше (формулы (31)–(35)). Для полностью неполяризованного состояния все моменты, кроме  $t_{00}$ , равны нулю, т. е.

$$\hat{\rho}_{\text{неполяр}} = \frac{1}{2S+1} \hat{I}, \quad (52)$$

где  $\hat{I}$  — единичная матрица.

Величины  $t_{LM}$  являются *ковариантными компонентами* неприводимого тензора ранга  $L$  и при повороте системы координат преобразуются по формуле 4.1. (2).

6.2. СПИНОВЫЕ ФУНКЦИИ ПРИ  $S=1/2$ 

## 1. Базисные спиновые функции

Базисные функции  $\chi_{1/2 m}$  ( $m = \pm 1/2$ ) являются собственными функциями операторов  $S^2$  и  $\hat{S}_z$ :

$$\begin{aligned}\hat{S}^2 \chi_{1/2 m} &= \frac{3}{4} \chi_{1/2 m}, \\ \hat{S}_z \chi_{1/2 m} &= m \chi_{1/2 m}.\end{aligned}\quad (1)$$

Функция  $\chi_{1/2 m}$  описывает состояние, в котором частица имеет спин  $1/2$  и проекцию спина на ось  $z$ , равную  $m$ .

Зависимость базисных функций  $\chi_{1/2 m}(\sigma)$  от спиновой переменной  $\sigma$  ( $\sigma = \pm 1/2$ ) в представлении циклического базиса дается формулой

$$\chi_{1/2 m}(\sigma) = \delta_{m\sigma}. \quad (2)$$

Согласно формуле 6.1 (1), базисные спиновые функции  $\chi_{1/2 m}$  могут быть записаны в виде:

$$\chi_{1/2 1/2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \chi_{1/2 -1/2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Эрмитовски сопряженные функции  $\chi_{1/2 m}^+$  имеют вид

$$\chi_{1/2 1/2}^+ = (1, 0), \quad \chi_{1/2 -1/2}^+ = (0, 1). \quad (4)$$

Часто используется следующее обозначение базисных функций:

$$\chi_{1/2 1/2} \equiv \alpha, \quad \chi_{1/2 -1/2} \equiv \beta. \quad (5)$$

Условие ортогональности и нормировки

$$\chi_{1/2 m}^+ \chi_{1/2 m} = \delta_{m'm}. \quad (6)$$

Условие полноты системы базисных функций

$$\sum_m \chi_{1/2 m} \chi_{1/2 m}^+ = I, \quad (7)$$

где  $I$  — единичная матрица размерности  $2 \times 2$ .

## 2. Разложение произведений базисных функций

Величина  $\chi_{1/2 m} \chi_{1/2 m'}^+$  является матрицей  $2 \times 2$ , матричные элементы которой даются формулой

$$[\chi_{1/2 m} \chi_{1/2 m'}^+]_{\sigma\sigma'} \equiv \chi_{1/2 \sigma}^+ (\chi_{1/2 m} \chi_{1/2 m'})_{\sigma'} = \delta_{\sigma m} \delta_{\sigma' m'}. \quad (8)$$

Разложение произведений базисных функций по спиновым матрицам

$$\chi_{1/2 m} \chi_{1/2 m'}^+ = \frac{1}{2} \delta_{m m'} I - \sqrt{3} C_{1\mu 1/2 m}^{1/2 m'} \hat{S}_\mu, \quad (9)$$

где  $\hat{S}_\mu$  ( $\mu = \pm 1, 0$ ) — циклические компоненты оператора спина (см. 2.5). В развернутой записи формула (9) имеет вид

$$\begin{aligned}\alpha\alpha^+ &\equiv \chi_{1/2 1/2} \chi_{1/2 1/2}^+ = \frac{1}{2} I + \hat{S}_z = \frac{1}{2} I + \hat{S}_0, \\ \alpha\beta^+ &\equiv \chi_{1/2 1/2} \chi_{1/2 -1/2}^+ = \hat{S}_x + i\hat{S}_y = -\sqrt{2} \hat{S}_{+1}, \\ \beta\alpha^+ &\equiv \chi_{1/2 -1/2} \chi_{1/2 1/2}^+ = \hat{S}_x - i\hat{S}_y = \sqrt{2} \hat{S}_{-1}, \\ \beta\beta^+ &\equiv \chi_{1/2 -1/2} \chi_{1/2 -1/2}^+ = \frac{1}{2} I - \hat{S}_z = \frac{1}{2} I - \hat{S}_0.\end{aligned}\quad (10)$$

### 3. Действие оператора спина на базисные функции

Декартовы компоненты оператора спина  $S_i$  (см. 2.5) действуют на базисные функции соответственно формулам

$$\begin{aligned}\hat{S}_x \chi_{1/2, 1/2} &= \frac{1}{2} \chi_{1/2, -1/2}, & \hat{S}_x \chi_{1/2, -1/2} &= \frac{1}{2} \chi_{1/2, 1/2}, \\ \hat{S}_y \chi_{1/2, 1/2} &= \frac{i}{2} \chi_{1/2, -1/2}, & \hat{S}_y \chi_{1/2, -1/2} &= -\frac{i}{2} \chi_{1/2, 1/2}, \\ \hat{S}_z \chi_{1/2, 1/2} &= \frac{1}{2} \chi_{1/2, 1/2}, & \hat{S}_z \chi_{1/2, -1/2} &= -\frac{1}{2} \chi_{1/2, -1/2}.\end{aligned}\quad (11)$$

Циклические компоненты оператора спина  $\hat{S}_\mu$  (см. 2.5) действуют на базисные спиновые функции следующим образом:

$$\hat{S}_\mu \chi_{1/2, m} = -\frac{\sqrt{3}}{2} C_{1\mu, 1/2, m}^{1/2, m'} \chi_{1/2, m'}.\quad (12)$$

Формула (12) в развернутой записи имеет вид

$$\begin{aligned}\hat{S}_{+1} \chi_{1/2, 1/2} &= 0, & \hat{S}_{+1} \chi_{1/2, -1/2} &= -\frac{1}{\sqrt{2}} \chi_{1/2, 1/2}, \\ \hat{S}_0 \chi_{1/2, 1/2} &= \frac{1}{2} \chi_{1/2, 1/2}, & \hat{S}_0 \chi_{1/2, -1/2} &= -\frac{1}{2} \chi_{1/2, -1/2}, \\ \hat{S}_{-1} \chi_{1/2, 1/2} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \chi_{1/2, -1/2}, & \hat{S}_{-1} \chi_{1/2, -1/2} &= 0.\end{aligned}\quad (13)$$

Из соотношения (12) следует, что для произвольного вектора  $\mathbf{a}$  матричные элементы оператора  $\hat{\mathbf{S}} \cdot \mathbf{a}$  имеют вид

$$[\hat{\mathbf{S}} \cdot \mathbf{a}]_{\sigma\sigma'} = \chi_{1/2, \sigma}^+ \hat{\mathbf{S}} \cdot \mathbf{a} \chi_{1/2, \sigma'} = (-1)^{1-\mu} \frac{\sqrt{3}}{2} C_{1\mu, 1/2, \sigma}^{1/2, \sigma'} a_\mu,\quad (14)$$

где  $a_\mu$  ( $\mu = \pm 1, 0$ ) — ковариантные циклические компоненты вектора  $\mathbf{a}$  (см. 1.2).

### 4. Преобразование базисных функций при повороте системы координат

Базисные функции  $\chi_{1/2, m}$  являются ковариантными ортами. При повороте системы координат  $S \rightarrow S'$  они преобразуются с помощью оператора поворота  $\hat{D}^{1/2}(\alpha, \beta, \gamma)$  (формула 2.5 (32)), если поворот характеризуется углами Эйлера  $\alpha, \beta, \gamma$ , или с помощью оператора поворота  $U^{1/2}(\omega; \Theta, \Phi)$  (формула 2.5 (36)), если поворот характеризуется направлением оси поворота  $\mathbf{n}(\Theta, \Phi)$  и углом поворота  $\omega$ :

$$\begin{aligned}\chi'_{1/2, m'} &= \hat{D}^{1/2}(\alpha, \beta, \gamma) \chi_{1/2, m} = \sum_m \chi_{1/2, m} D_{m m'}^{1/2}(\alpha, \beta, \gamma), \\ \chi'_{1/2, m'} &= U^{1/2}(\omega; \Theta, \Phi) \chi_{1/2, m} = \sum_m \chi_{1/2, m} U_{m m'}^{1/2}(\omega; \Theta, \Phi).\end{aligned}\quad (15)$$

где  $D_{mm'}^{1/2}(\alpha, \beta, \gamma)$  —  $D$ -функции Вигнера (гл. 4),  $U_{mm'}^{1/2}$  определены в 4.5.

Функции  $\chi'_{1/2, m'}$  являются спиновыми функциями состояния, в котором частица имеет спин  $1/2$  и проекцию спина  $m'$  на новую ось  $z'$ . Функции  $\chi'_{1/2, m'}$  являются собственными функциями операторов  $\hat{S}'^2$  и  $\hat{S}'_z$ , где  $\hat{S}'$  — оператор спина в повернутой системе координат (формулы 2.5 (40) и 2.5 (41)):

$$\begin{aligned}\hat{S}'^2 \chi'_{1/2, m'} &= \frac{3}{4} \chi'_{1/2, m'}, \\ \hat{S}'_z \chi'_{1/2, m'} &= m' \chi'_{1/2, m'}.\end{aligned}\quad (16)$$



Явный вид базисных спиновых функций в повернутой системе координат

$$\chi'_{1/2, 1/2} = \begin{pmatrix} \cos \frac{\beta}{2} e^{-i \frac{\alpha+\gamma}{2}} \\ \sin \frac{\beta}{2} e^{i \frac{\sigma-\gamma}{2}} \end{pmatrix}, \quad \chi'_{1/2, -1/2} = \begin{pmatrix} -\sin \frac{\beta}{2} e^{-i \frac{\alpha-\gamma}{2}} \\ \cos \frac{\beta}{2} e^{i \frac{\alpha+\gamma}{2}} \end{pmatrix}, \quad (17)$$

если поворот характеризуется углами Эйлера  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,

$$\chi'_{1/2, 1/2} = \begin{pmatrix} \cos \frac{\omega}{2} - i \sin \frac{\omega}{2} \cos \Theta \\ -i \sin \frac{\omega}{2} \sin \Theta e^{i\Phi} \end{pmatrix}, \quad \chi'_{1/2, -1/2} = \begin{pmatrix} -i \sin \frac{\omega}{2} \sin \Theta e^{-i\Phi} \\ \cos \frac{\omega}{2} + i \sin \frac{\omega}{2} \cos \Theta \end{pmatrix}, \quad (18)$$

если поворот характеризуется углами  $\omega$ ,  $\Theta$ ,  $\Phi$ .

Для функций  $\chi'_{1/2, m}$  справедливы соотношения ортогональности и полноты (6), (7), а также формулы (9)—(13), если в них произвести замену  $\hat{S} \rightarrow \hat{S}'$ .

## 5. Спиральные базисные функции при $S=1/2$

Спиральные базисные функции  $\chi_{1/2, \lambda}(\vartheta, \varphi)$  ( $\lambda = \pm 1/2$ ) описывают состояние, в котором частица имеет спин  $1/2$  и проекцию спина на направление импульса  $\mathbf{n}(\vartheta, \varphi) \equiv \frac{\mathbf{p}}{|\mathbf{p}|}$  (т. е. спиральность) равную  $\lambda$ . Функции  $\chi_{1/2, \lambda}(\vartheta, \varphi)$  являются собственными функциями операторов  $\hat{S}^2$  и  $\hat{S} \cdot \mathbf{n}$

$$\begin{aligned} \hat{S}^2 \chi_{1/2, \lambda}(\vartheta, \varphi) &= \frac{3}{4} \chi_{1/2, \lambda}(\vartheta, \varphi), \\ \hat{S} \cdot \mathbf{n} \chi_{1/2, \lambda}(\vartheta, \varphi) &= \lambda \chi_{1/2, \lambda}(\vartheta, \varphi). \end{aligned} \quad (19)$$

Согласно (15), спиральные функции  $\chi_{1/2, \lambda}(\vartheta, \varphi)$  связаны с базисными функциями  $\chi_{1/2, m}$  соотношениями

$$\begin{aligned} \chi_{1/2, \lambda}(\vartheta, \varphi) &= \sum_m D_{m\lambda}^{1/2}(\varphi, \vartheta, 0) \chi_{1/2, m}, \\ \chi_{1/2, m} &= \sum_{\lambda} D_{-\lambda, -m}^{1/2}(0, \vartheta, \varphi) \chi_{1/2, \lambda}(\vartheta, \varphi). \end{aligned} \quad (20)$$

Для эрмитовски сопряженных спиноров формулы (20) принимают вид

$$\begin{aligned} \chi_{1/2, \lambda}^{\dagger}(\vartheta, \varphi) &= \sum_m (-1)^{\lambda-m} D_{-m, -\lambda}^{1/2}(\varphi, \vartheta, 0) \chi_{1/2, m}^{\dagger}, \\ \chi_{1/2, m}^{\dagger} &= \sum_{\lambda} (-1)^{\lambda-m} D_{\lambda, m}^{1/2}(0, \vartheta, \varphi) \chi_{1/2, \lambda}^{\dagger}(\vartheta, \varphi). \end{aligned} \quad (21)$$

Явный вид спиральных функций

$$\chi_{1/2, 1/2}(\vartheta, \varphi) = \begin{pmatrix} \cos \frac{\vartheta}{2} e^{-i \frac{\varphi}{2}} \\ \sin \frac{\vartheta}{2} e^{i \frac{\varphi}{2}} \end{pmatrix}, \quad \chi_{1/2, -1/2}(\vartheta, \varphi) = \begin{pmatrix} -\sin \frac{\vartheta}{2} e^{-i \frac{\varphi}{2}} \\ \cos \frac{\vartheta}{2} e^{i \frac{\varphi}{2}} \end{pmatrix}, \quad (22)$$

$$\chi_{1/2, 1/2}^{\dagger}(\vartheta, \varphi) = \left( \cos \frac{\vartheta}{2} e^{i \frac{\varphi}{2}}, \sin \frac{\vartheta}{2} e^{-i \frac{\varphi}{2}} \right), \quad \chi_{1/2, -1/2}^{\dagger}(\vartheta, \varphi) = \left( -\sin \frac{\vartheta}{2} e^{i \frac{\varphi}{2}}, \cos \frac{\vartheta}{2} e^{-i \frac{\varphi}{2}} \right). \quad (23)$$

Спиральные функции  $\chi_{1/2, \lambda}(\vartheta, \varphi)$ , также как и функции  $\chi_{1/2, m}$ , образуют ортонормированный базис. Условие ортогональности и нормировки для спиральных функций

$$\chi_{1/2, \lambda'}^{\dagger}(\vartheta, \varphi) \chi_{1/2, \lambda}(\vartheta, \varphi) = \delta_{\lambda' \lambda}, \quad (24)$$

а условие полноты

$$\sum_{\lambda} \chi_{1/2, \lambda}(\vartheta, \varphi) \chi_{1/2, \lambda}^{\dagger}(\vartheta, \varphi) = I. \quad (25)$$

Разложение произведений спиральных функций с одинаковыми аргументами  $\vartheta, \varphi$  имеет вид

$$\chi_{1/2, \lambda}(\vartheta, \varphi) \chi_{1/2, \lambda'}^{\dagger}(\vartheta, \varphi) = \frac{1}{2} \delta_{\lambda \lambda'} I + \sqrt{3} \sum_{\mu, \nu} C_{1/2, \lambda'}^{1/2, \lambda, 1\mu} D_{\nu\mu}^1(\varphi, \vartheta, 0) \hat{S}_{\nu}. \quad (26)$$

В развернутой записи

$$\begin{aligned} \chi_{1/2, 1/2}(\vartheta, \varphi) \chi_{1/2, 1/2}^{\dagger}(\vartheta, \varphi) &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + \cos \vartheta & \sin \vartheta e^{-i\varphi} \\ \sin \vartheta e^{i\varphi} & 1 - \cos \vartheta \end{pmatrix} = \frac{1}{2} I + \mathbf{n} \cdot \hat{\mathbf{S}}, \\ \chi_{1/2, 1/2}(\vartheta, \varphi) \chi_{1/2, -1/2}^{\dagger}(\vartheta, \varphi) &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -\sin \vartheta & (\cos \vartheta + 1) e^{-i\varphi} \\ (\cos \vartheta - 1) e^{i\varphi} & \sin \vartheta \end{pmatrix} = -\sqrt{2} \sum_{\nu} D_{\nu 1}^1(\varphi, \vartheta, 0) \hat{S}_{\nu}, \\ \chi_{1/2, -1/2}(\vartheta, \varphi) \chi_{1/2, 1/2}^{\dagger}(\vartheta, \varphi) &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -\sin \vartheta & (\cos \vartheta - 1) e^{-i\varphi} \\ (\cos \vartheta + 1) e^{i\varphi} & \sin \vartheta \end{pmatrix} = \sqrt{2} \sum_{\nu} D_{\nu -1}^1(\varphi, \vartheta, 0) \hat{S}_{\nu}, \\ \chi_{1/2, -1/2}(\vartheta, \varphi) \chi_{1/2, -1/2}^{\dagger}(\vartheta, \varphi) &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 - \cos \vartheta & -\sin \vartheta e^{-i\varphi} \\ -\sin \vartheta e^{i\varphi} & 1 + \cos \vartheta \end{pmatrix} = \frac{1}{2} I - \mathbf{n} \cdot \hat{\mathbf{S}}. \end{aligned} \quad (27)$$

Матричные элементы циклических компонент оператора спина  $\hat{S}_{\mu}$  ( $\mu = \pm 1, 0$ ) между спиральными состояниями даются формулой

$$\chi_{1/2, \lambda'}^{\dagger}(\vartheta, \varphi) \hat{S}_{\mu} \chi_{1/2, \lambda}(\vartheta, \varphi) = (-1)^{\mu+\nu} \frac{\sqrt{3}}{2} C_{1/2, \lambda'}^{1/2, \lambda, 1\mu} D_{-\mu, -\nu}^1(\varphi, \vartheta, 0). \quad (28)$$

В развернутой записи формула (28) имеет вид

$$\begin{aligned} \langle + | \hat{S}_{+1} | + \rangle &= -\frac{\sin \vartheta}{2\sqrt{2}} e^{i\varphi}, & \langle + | \hat{S}_{+1} | - \rangle &= -\frac{1 + \cos \vartheta}{2\sqrt{2}} e^{i\varphi}, \\ \langle + | \hat{S}_0 | + \rangle &= \frac{1}{2} \cos \vartheta, & \langle + | \hat{S}_0 | - \rangle &= -\frac{1}{2} \sin \vartheta, \\ \langle + | \hat{S}_{-1} | + \rangle &= \frac{\sin \vartheta}{2\sqrt{2}} e^{-i\varphi}, & \langle + | \hat{S}_{-1} | - \rangle &= -\frac{1 - \cos \vartheta}{2\sqrt{2}} e^{-i\varphi}, \\ \langle - | \hat{S}_{+1} | + \rangle &= \frac{1 - \cos \vartheta}{2\sqrt{2}} e^{i\varphi}, & \langle - | \hat{S}_{+1} | - \rangle &= \frac{\sin \vartheta}{2\sqrt{2}} e^{i\varphi}, \\ \langle - | \hat{S}_0 | + \rangle &= -\frac{1}{2} \sin \vartheta, & \langle - | \hat{S}_0 | - \rangle &= -\frac{1}{2} \cos \vartheta, \\ \langle - | \hat{S}_{-1} | + \rangle &= \frac{1 + \cos \vartheta}{2\sqrt{2}} e^{-i\varphi}, & \langle - | \hat{S}_{-1} | - \rangle &= -\frac{\sin \vartheta}{2\sqrt{2}} e^{-i\varphi}. \end{aligned} \quad (29)$$

Здесь использована краткая форма записи

$$\langle + | \hat{S}_{\mu} | + \rangle \equiv \chi_{1/2, 1/2}^{\dagger}(\vartheta, \varphi) \hat{S}_{\mu} \chi_{1/2, 1/2}(\vartheta, \varphi), \quad \langle + | \hat{S}_{\mu} | - \rangle \equiv \chi_{1/2, -1/2}^{\dagger}(\vartheta, \varphi) \hat{S}_{\mu} \chi_{1/2, -1/2}(\vartheta, \varphi) \text{ и т. д.}$$

Матричные элементы декартовых компонент оператора спина  $\hat{S}_i$  ( $i = x, y, z$ ) между спиральными состояниями имеют вид

$$\begin{aligned} \langle + | \hat{S}_x | + \rangle &= \frac{1}{2} \sin \vartheta \cos \varphi, & \langle + | \hat{S}_x | - \rangle &= \frac{1}{2} (\cos \vartheta \cos \varphi + i \sin \varphi), \\ \langle + | \hat{S}_y | + \rangle &= \frac{1}{2} \sin \vartheta \sin \varphi, & \langle + | \hat{S}_y | - \rangle &= \frac{1}{2} (\cos \vartheta \sin \varphi - i \cos \varphi), \\ \langle + | \hat{S}_z | + \rangle &= \frac{1}{2} \cos \vartheta, & \langle + | \hat{S}_z | - \rangle &= -\frac{1}{2} \sin \vartheta, \end{aligned} \quad (30)$$

$$\begin{aligned} \langle - | \hat{S}_x | + \rangle &= \frac{1}{2} (\cos \vartheta \cos \varphi - i \sin \varphi), & \langle - | \hat{S}_x | - \rangle &= -\frac{1}{2} \sin \vartheta \cos \varphi, \\ \langle - | \hat{S}_y | + \rangle &= \frac{1}{2} (\cos \vartheta \sin \varphi + i \cos \varphi), & \langle - | \hat{S}_y | - \rangle &= -\frac{1}{2} \sin \vartheta \sin \varphi, \\ \langle - | \hat{S}_z | + \rangle &= -\frac{1}{2} \sin \vartheta, & \langle - | \hat{S}_z | - \rangle &= -\frac{1}{2} \cos \vartheta. \end{aligned}$$

Отметим, что для диагональных матричных элементов оператора спина имеет место формула

$$\chi_{1/2, \lambda}^+ (\vartheta, \varphi) \hat{S} \chi_{1/2, \lambda} (\vartheta, \varphi) = \lambda \mathbf{n} (\vartheta, \varphi). \quad (31)$$

## 6. Произвольная спиновая функция частицы с $S=1/2$

Произвольная спиновая функция  $\chi_{1/2}$  частицы со спином  $1/2$  может быть разложена по базисным функциям  $\chi_{1/2, m}$ , т. е. представлена в виде

$$\chi_{1/2} = \sum_{m=-1/2}^{1/2} a^m \chi_{1/2, m} = \begin{pmatrix} a^{1/2} \\ a^{-1/2} \end{pmatrix}. \quad (32)$$

При этом эрмитовская сопряженная функция  $\chi_{1/2}^+$  выражается формулой

$$\chi_{1/2}^+ = \sum_{m=-1/2}^{1/2} a^{m*} \chi_{1/2, m}^+ = (a^{1/2*}, a^{-1/2*}). \quad (33)$$

Коэффициенты  $a^m$  ( $m = \pm 1/2$ ) являются контравариантными компонентами спинора  $\chi_{1/2}$  (см. ниже).

Условие нормировки спиновой функции

$$\chi_{1/2}^+ \chi_{1/2} = 1 \quad (34)$$

налагает на коэффициенты  $a^m$  ( $m = \pm 1/2$ ) условие

$$|a^{1/2}|^2 + |a^{-1/2}|^2 = 1.$$

Величина  $a^m$  является амплитудой вероятности того, что в состоянии  $\chi_{1/2}$  частица имеет проекцию спина на ось  $z$ , равную  $m$ .

### Ч а с т н ы е с л у ч а и

а. Спин частицы направлен по оси  $z$ :

$$a^{1/2} = 1, \quad a^{-1/2} = 0, \quad \chi_{1/2} = \chi_{1/2, 1/2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (35)$$

б. Спин частицы направлен против оси  $z$

$$a^{1/2} = 0, \quad a^{-1/2} = 1, \quad \chi_{1/2} = \chi_{1/2, -1/2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (36)$$

в. Спин частицы направлен по орту  $\mathbf{n} (\vartheta, \varphi)$

$$a^{1/2} = \cos \frac{\vartheta}{2} e^{-i\frac{\varphi}{2}}, \quad a^{-1/2} = \sin \frac{\vartheta}{2} e^{i\frac{\varphi}{2}}, \quad \chi_{1/2} = \chi_{1/2, 1/2} (\vartheta, \varphi) = \begin{pmatrix} \cos \frac{\vartheta}{2} e^{-i\frac{\varphi}{2}} \\ \sin \frac{\vartheta}{2} e^{i\frac{\varphi}{2}} \end{pmatrix}. \quad (37)$$

г. Спин частицы направлен против орта  $\mathbf{n} (\vartheta, \varphi)$

$$a^{1/2} = -\sin \frac{\vartheta}{2} e^{-i\frac{\varphi}{2}}, \quad a^{-1/2} = \cos \frac{\vartheta}{2} e^{i\frac{\varphi}{2}}, \quad \chi_{1/2} = \chi_{1/2, -1/2} (\vartheta, \varphi) = \begin{pmatrix} -\sin \frac{\vartheta}{2} e^{-i\frac{\varphi}{2}} \\ \cos \frac{\vartheta}{2} e^{i\frac{\varphi}{2}} \end{pmatrix}. \quad (38)$$

В общем случае спиновая функция (32) описывает состояние, в котором спин частицы направлен по орту  $\mathbf{n}$ , декартовы компоненты которого даются формулами

$$n_x = 2 \operatorname{Re} (a^{1/2*} a^{-1/2}), \quad n_y = 2 \operatorname{Im} (a^{1/2*} a^{-1/2}), \quad n_z = |a^{1/2}|^2 - |a^{-1/2}|^2. \quad (39)$$

При этом циклические компоненты орта  $\mathbf{n}$  определяются по формуле

$$n_\mu = \sqrt{3} \sum_{m, m'} C_{1/2 m' 1\mu}^{1/2} a^{m'*} a^m, \quad (40)$$

или в подробной записи

$$n_{+1} = -\sqrt{2} a^{1/2*} a^{-1/2}, \quad n_0 = |a^{1/2}|^2 - |a^{-1/2}|^2, \quad n_{-1} = \sqrt{2} a^{-1/2*} a^{1/2}. \quad (41)$$

Произведение спиновых функций вида  $\chi_{1/2} \chi_{1/2}^+$  может быть разложено по спиновым матрицам

$$\chi_{1/2} \chi_{1/2}^+ = \begin{pmatrix} |a^{1/2}|^2 & a^{-1/2*} a^{1/2} \\ a^{1/2*} a^{-1/2} & |a^{-1/2}|^2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} I + \mathbf{n} \hat{S}, \quad (42)$$

где  $\mathbf{n}$  — направление спина частицы (39)—(41).

Матричные элементы оператора спина  $\hat{S}$  выражаются через направление спина  $\mathbf{n}$  по формуле

$$\chi_{1/2}^+ \hat{S} \chi_{1/2} = \frac{1}{2} \mathbf{n}. \quad (43)$$

Преобразование спиновых функций при повороте системы координат  $S \rightarrow S'$  осуществляется с помощью операторов поворота  $\hat{D}^{1/2}(\alpha, \beta, \gamma)$  (см. 2.5 (32)) или  $\hat{U}^{1/2}(\omega; \Theta, \Phi)$  (см. 2.5 (36)) в зависимости от способа описания поворота:

$$\chi'_{1/2} = \hat{D}^{1/2}(\alpha, \beta, \gamma) \chi_{1/2} = \hat{U}^{1/2}(\omega; \Theta, \Phi) \chi_{1/2}. \quad (44)$$

Спиновые функции в повернутой системе координат  $\chi'_{1/2}$  могут быть разложены как по базисным функциям  $\chi_{1/2 m}$  исходной системы координат, так и по базисным функциям  $\chi'_{1/2 m}$  повернутой системы координат:

$$\chi'_{1/2} = \begin{pmatrix} a^{1/2} \\ a^{-1/2} \end{pmatrix} = \sum_m a'^m \chi_{1/2 m} = \sum_m a^m \chi'_{1/2 m}, \quad (45)$$

где  $a^m$  — компоненты спинора в исходной системе координат,  $a'^m$  — компоненты этого же спинора в повернутой системе координат. Связь базисных функций  $\chi'_{1/2 m}$  и  $\chi_{1/2 m}$  дается формулами (15). Закон преобразования компонент  $a^m$  имеет вид

$$\begin{aligned} a'^m &= \sum_n D_{mn}^{1/2}(\alpha, \beta, \gamma) a^n, \\ a^n &= \sum_m D_{mn}^{1/2*}(\alpha, \beta, \gamma) a'^m. \end{aligned} \quad \left(m, n = \pm \frac{1}{2}\right). \quad (46)$$

Таким образом, компоненты  $a^m$  являются *контравариантными* компонентами (см. 4.1.2).

## 7. Поляризационная матрица плотности

Поляризационная матрица плотности для частиц со спином 1/2 может быть записана в виде

$$\hat{\rho} = \frac{1}{2} \{I + 2\mathbf{P}\hat{S}\}, \quad (47)$$

где вещественный вектор  $\mathbf{P}$  называется *вектором поляризации*,  $\hat{S}$  — оператор спина.

Вектор  $\mathbf{P}$  является удвоенным средним значением оператора спина

$$\mathbf{P} = 2 \langle \hat{S} \rangle = 2 \operatorname{Sp} \{\rho \hat{S}\}. \quad (48)$$

Длина вектора  $\mathbf{P}$  называется *степенью поляризации*, она меняется в пределах от 0 (для неполяризованного состояния) до 1 (для чистого, т. е. полностью поляризованного состояния):

$$0 \leq |\mathbf{P}| \leq 1. \quad (49)$$

Циклические компоненты вектора поляризации выражаются через элементы матрицы плотности по формуле

$$P_{\mu} = \sqrt{3} \sum_{\sigma\sigma'} C_{1/2}^{1/2} \sigma'_{1\mu} \rho_{\sigma\sigma'} \quad (50)$$

или в развернутом виде

$$P_{+1} = -\sqrt{2} \rho_{-1/2, 1/2}, \quad P_0 = \rho_{1/2, 1/2} - \rho_{-1/2, -1/2}, \quad P_{-1} = \sqrt{2} \rho_{1/2, -1/2}. \quad (51)$$

Декартовы компоненты вектора поляризации даются формулами

$$P_x = \rho_{1/2, -1/2} + \rho_{-1/2, 1/2}, \quad P_y = i(\rho_{1/2, -1/2} - \rho_{-1/2, 1/2}), \quad P_z = \rho_{1/2, 1/2} - \rho_{-1/2, -1/2}. \quad (52)$$

Для чистого состояния, описываемого спиновой функцией  $\chi_{1/2}$ , матрица плотности  $\hat{\rho}$  имеет вид

$$\hat{\rho}_{\text{чист}} = \chi_{1/2} \chi_{1/2}^{\dagger}, \quad (53)$$

а вектор поляризации  $\mathbf{P}$  совпадает с ортом  $\mathbf{n}$  (см. формулы (39)–(41)). Для неполяризованного состояния

$$\hat{\rho}_{\text{неполяр}} = \frac{1}{2} I. \quad (54)$$

### 6.3. СПИНОВЫЕ ФУНКЦИИ ПРИ $S=1$

#### 1. Базисные спиновые функции

Базисные функции  $\chi_{1m}$  ( $m = \pm 1, 0$ ) являются собственными функциями операторов  $\hat{S}^2$  и  $\hat{S}_z$ :

$$\begin{aligned} \hat{S}^2 \chi_{1m} &= 2\chi_{1m}, \\ \hat{S}_z \chi_{1m} &= m\chi_{1m}. \end{aligned} \quad (4)$$

Функция  $\chi_{1m}$  описывает состояние, в котором частица имеет спин 1 и проекцию спина на ось  $z$ , равную  $m$ . Три базисных функции  $\chi_{1m}$  ( $m = \pm 1, 0$ ) можно рассматривать как три циклических ковариантных орта  $\mathbf{e}_m$  (см. 1.1), записанных в виде столбца. Наряду с  $\chi_{1m}$  используются базисные функции  $\chi_i$  ( $i = x, y, z$ ), являющиеся декартовыми ортами  $\mathbf{e}_i$ :

$$\begin{aligned} \chi_{11} &= -\frac{1}{\sqrt{2}}(\chi_x + i\chi_y), & \chi_x &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\chi_{1-1} - \chi_{11}), \\ \chi_{10} &= \chi_z, & \chi_y &= \frac{i}{\sqrt{2}}(\chi_{1-1} + \chi_{11}), \\ \chi_{1-1} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\chi_x - i\chi_y), & \chi_z &= \chi_{10}. \end{aligned} \quad (2)$$

Как функции  $\chi_{1m}$  ( $m = \pm 1, 0$ ), так и функции  $\chi_i$  ( $i = x, y, z$ ) образуют ортонормированный базис. Условие ортогональности и нормировки имеет вид

$$\chi_{1m}^{\dagger} \chi_{1m} = \delta_{m'm}, \quad \chi_i^{\dagger} \chi_k = \delta_{ik}. \quad (3)$$

Условие полноты системы базисных функций записывается следующим образом:

$$\sum_{m=\pm 1, 0} \chi_{1m} \chi_{1m}^{\dagger} = I, \quad \sum_{i=x, y, z} \chi_i \chi_i^{\dagger} = I, \quad (4)$$

где  $I$  — единичная матрица размерности  $3 \times 3$ .

При описании спинового состояния частиц с  $S=1$  используются как представление циклического базиса, так и представление декартового базиса.

### Представление циклического базиса

В представлении циклического базиса зависимость функций  $\chi_{1m}(\sigma)$  от спиновой переменной  $\sigma$  ( $\sigma = \pm 1, 0$ ) дается формулой

$$\chi_{1m}(\sigma) = \delta_{m\sigma}. \quad (5)$$

Согласно 6.1 (1), базисные спиновые функции  $\chi_{1m}$  могут быть записаны в виде

$$\chi_{11} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \chi_{10} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \chi_{1-1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (6)$$

а эрмитовски сопряженные функции  $\chi_{1m}^\dagger$ , как

$$\chi_{11}^\dagger = (1, 0, 0), \quad \chi_{10}^\dagger = (0, 1, 0), \quad \chi_{1-1}^\dagger = (0, 0, 1). \quad (7)$$

Функции  $\chi_i$  ( $i = x, y, z$ ) в представлении циклического базиса имеют вид

$$\chi_x = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \chi_y = \frac{i}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \chi_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (8)$$

$$\chi_x^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}} (-1, 0, 1), \quad \chi_y^\dagger = -\frac{i}{\sqrt{2}} (1, 0, 1), \quad \chi_z^\dagger = (0, 1, 0). \quad (9)$$

Из формул (6) и (8) следует, что в представлении циклического базиса функции  $\chi_{1m}$  вещественны:

$$\chi_{1m}^* = \chi_{1m}, \quad (m = \pm 1, 0), \quad (10)$$

а функции  $\chi_i$  ( $i = x, y, z$ ) удовлетворяют соотношениям

$$\chi_x^* = \chi_x, \quad \chi_y^* = -\chi_y, \quad \chi_z^* = \chi_z. \quad (11)$$

Вид спиновых матриц и поляризационных операторов в представлении циклического базиса дается формулами 2.6 (9)—2.6 (22).

### Представление декартового базиса

В представлении декартового базиса спиновая переменная  $\sigma$  принимает три значения  $\sigma = x, y, z$ , а зависимость от нее функций  $\chi_i(\sigma)$  дается формулой

$$\chi_i(\sigma) = \delta_{i\sigma}. \quad (12)$$

Поэтому базисные спиновые функции  $\chi_i$  ( $i = x, y, z$ ) в представлении декартового базиса записываются в виде (ср. 1.4 (37))

$$\chi_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \chi_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \chi_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (13)$$

$$\chi_x^\dagger = (1, 0, 0), \quad \chi_y^\dagger = (0, 1, 0), \quad \chi_z^\dagger = (0, 0, 1). \quad (14)$$

При этом базисные функции  $\chi_{1m}$  ( $m = \pm 1, 0$ ) имеют вид

$$\chi_{11} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \chi_{10} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \chi_{1-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (15)$$

$$\chi_{11}^\dagger = -\frac{1}{\sqrt{2}} (1, -i, 0), \quad \chi_{10}^\dagger = (0, 0, 1), \quad \chi_{1-1}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}} (1, i, 0). \quad (16)$$

Из (13) и (15) следует, что в представлении декартового базиса функции  $\chi_i$  вещественны:

$$\chi_i^* = \chi_i \quad (i = x, y, z), \quad (17)$$

а функции  $\chi_{1m}$  удовлетворяют соотношениям

$$\chi_{1m}^* = (-1)^m \chi_{1-m} \quad (m = \pm 1, 0). \quad (18)$$

Спиновые матрицы и поляризационные операторы в представлении декартового базиса даются формулами 2.6 (23)—2.6 (35).

Переход от представления циклического базиса к представлению декартового базиса и обратно для спиновых функций осуществляется при помощи унитарной матрицы  $U$  размерности  $3 \times 3$ :

$$\begin{aligned}\chi(\text{цикл. базис}) &= U\chi(\text{декарт. базис}), \\ \chi(\text{декарт. базис}) &= U^{-1}\chi(\text{цикл. базис}).\end{aligned}\quad (19)$$

Явный вид матрицы  $U$  дается формулой 2.6 (37). Формулы, которые будут приведены ниже, не зависят от выбора представления, если не делается специальных оговорок.

## 2. Разложение произведений базисных функций

Произведения базисных функций вида  $\chi_{1m}\chi_{1m'}^+$  и  $\chi_i\chi_k^+$  являются матрицами размерности  $3 \times 3$  и могут быть разложены по полной системе поляризационных матриц  $\hat{I}$ ,  $\hat{S}_\mu$  ( $\mu = \pm 1, 0$ ),  $\hat{T}_{2M}$  ( $M = \pm 2, \pm 1, 0$ ) или эквивалентной ей системе  $\hat{I}$ ,  $\hat{S}_i$ ,  $\hat{Q}_{ik}$  ( $i, k = x, y, z$ ) (см. 2.6). Эти разложения имеют вид

$$\chi_{1m}\chi_{1m'}^+ = \frac{1}{3} \delta_{mm'} \hat{I} + \frac{1}{\sqrt{2}} C_{11'1\mu}^{1m} \hat{S}_\mu + \sqrt{\frac{5}{3}} C_{1m'2M}^{1m} \hat{T}_{2M}, \quad (20)$$

$$\chi_i\chi_k^+ = \frac{1}{3} \delta_{ik} \hat{I} + \frac{i}{2} \varepsilon_{ikl} \hat{S}_l - \hat{Q}_{ik}. \quad (21)$$

В развернутой записи эти формулы имеют вид

$$\begin{aligned}\chi_{11}\chi_{11}^+ &= \frac{1}{3} \hat{I} + \frac{1}{2} \hat{S}_0 + \frac{1}{\sqrt{6}} \hat{T}_{20} = \frac{1}{3} \hat{I} + \frac{1}{2} \hat{S}_z + \frac{1}{2} \hat{Q}_{zz}, \\ \chi_{11}\chi_{10}^+ &= -\frac{1}{2} \hat{S}_{+1} - \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{T}_{21} = \frac{1}{2\sqrt{2}} (\hat{S}_x + i\hat{S}_y + 2\hat{Q}_{xz} + 2i\hat{Q}_{yz}), \\ \chi_{11}\chi_{1-1}^+ &= \hat{T}_{22} = \frac{1}{2} (\hat{Q}_{xx} - \hat{Q}_{yy} + 2i\hat{Q}_{xy}), \\ \chi_{10}\chi_{11}^+ &= \frac{1}{2} \hat{S}_{-1} + \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{T}_{2-1} = \frac{1}{2\sqrt{2}} (\hat{S}_x - i\hat{S}_y + 2\hat{Q}_{xz} - 2i\hat{Q}_{yz}), \\ \chi_{10}\chi_{10}^+ &= \frac{1}{3} \hat{I} - \sqrt{\frac{2}{3}} \hat{T}_{20} = \frac{1}{3} \hat{I} - \hat{Q}_{zz}, \\ \chi_{10}\chi_{1-1}^+ &= -\frac{1}{2} \hat{S}_{+1} + \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{T}_{21} = \frac{1}{2\sqrt{2}} (\hat{S}_x + i\hat{S}_y - 2\hat{Q}_{xz} - 2i\hat{Q}_{yz}), \\ \chi_{1-1}\chi_{11}^+ &= \hat{T}_{2-2} = \frac{1}{2} (\hat{Q}_{xx} - \hat{Q}_{yy} - 2i\hat{Q}_{xy}), \\ \chi_{1-1}\chi_{10}^+ &= \frac{1}{2} \hat{S}_{-1} - \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{T}_{2-1} = \frac{1}{2\sqrt{2}} (\hat{S}_x - i\hat{S}_y - 2\hat{Q}_{xz} + 2i\hat{Q}_{yz}), \\ \chi_{1-1}\chi_{1-1}^+ &= \frac{1}{3} \hat{I} - \frac{1}{2} \hat{S}_0 + \frac{1}{\sqrt{6}} \hat{T}_{20} = \frac{1}{3} \hat{I} - \frac{1}{2} \hat{S}_z + \frac{1}{2} \hat{Q}_{zz}, \\ \chi_x\chi_x^+ &= \frac{1}{3} \hat{I} - \frac{1}{2} \hat{T}_{2-2} - \frac{1}{2} \hat{T}_{22} + \frac{1}{\sqrt{6}} \hat{T}_{20} = \frac{1}{3} \hat{I} - \hat{Q}_{xx}, \\ \chi_x\chi_y^+ &= \frac{i}{2} (\hat{S}_0 - \hat{T}_{2-2} + \hat{T}_{22}) = \frac{i}{2} \hat{S}_z - \hat{Q}_{xy}, \\ \chi_x\chi_z^+ &= \frac{1}{2\sqrt{2}} (\hat{S}_{-1} + \hat{S}_{+1}) - \frac{1}{2} (\hat{T}_{2-1} - \hat{T}_{21}) = -\frac{i}{2} \hat{S}_y - \hat{Q}_{xz}, \\ \chi_y\chi_x^+ &= -\frac{i}{2} (\hat{S}_0 + \hat{T}_{2-2} - \hat{T}_{22}) = -\frac{i}{2} \hat{S}_z - \hat{Q}_{xy}, \\ \chi_y\chi_y^+ &= \frac{1}{3} \hat{I} + \frac{1}{2} \hat{T}_{2-2} + \frac{1}{2} \hat{T}_{22} + \frac{1}{\sqrt{6}} \hat{T}_{20} = \frac{1}{3} \hat{I} - \hat{Q}_{yy},\end{aligned}\quad (23)$$

$$\begin{aligned}\chi_y \chi_x^+ &= \frac{i}{2\sqrt{2}} (\hat{S}_{-1} - \hat{S}_{+1}) - \frac{i}{2} (\hat{T}_{2-1} + \hat{T}_{21}) = \frac{i}{2} \hat{S}_x - \hat{Q}_{y*}, \\ \chi_x \chi_x^+ &= -\frac{1}{2\sqrt{2}} (\hat{S}_{-1} + \hat{S}_{+1}) - \frac{1}{2} (\hat{T}_{2-1} - \hat{T}_{21}) = \frac{i}{2} \hat{S}_y - \hat{Q}_{xz}, \\ \chi_x \chi_y^+ &= -\frac{i}{2\sqrt{2}} (\hat{S}_{-1} - \hat{S}_{+1}) - \frac{i}{2} (\hat{T}_{2-1} + \hat{T}_{21}) = -\frac{i}{2} \hat{S}_x - \hat{Q}_{yz}, \\ \chi_x \chi_x^+ &= \frac{1}{3} I - \sqrt{\frac{2}{3}} \hat{T}_{20} = \frac{1}{3} I - \hat{Q}_{zz}.\end{aligned}$$

### 3. Действие оператора спина на базисные функции

Циклические компоненты оператора спина  $\hat{S}_\mu$  ( $\mu = \pm 1, 0$ ) и его декартовы компоненты  $\hat{S}_i$  ( $i = x, y, z$ ) действуют на базисные функции соответственно формулам

$$\begin{aligned}\hat{S}_\mu \chi_{1m} &= \sqrt{2} C_{1m' 1\mu}^{1m'} \chi_{1m'}, \\ \hat{S}_i \chi_k &= i \varepsilon_{ikl} \chi_l.\end{aligned}\quad (24)$$

В подробной записи действие оператора спина на базисные функции дается формулами

$$\begin{aligned}\hat{S}_{+1} \chi_{11} &= 0, & \hat{S}_{+1} \chi_{10} &= -\chi_{11}, & \hat{S}_{+1} \chi_{1-1} &= -\chi_{10}, \\ \hat{S}_0 \chi_{11} &= \chi_{11}, & \hat{S}_0 \chi_{10} &= 0, & \hat{S}_0 \chi_{1-1} &= -\chi_{1-1}, \\ \hat{S}_{-1} \chi_{11} &= \chi_{10}, & \hat{S}_{-1} \chi_{10} &= \chi_{1-1}, & \hat{S}_{-1} \chi_{1-1} &= 0.\end{aligned}\quad (25)$$

$$\begin{aligned}\hat{S}_{+1} \chi_x &= -\frac{1}{\sqrt{2}} \chi_z, & \hat{S}_{+1} \chi_y &= -\frac{i}{\sqrt{2}} \chi_z, & \hat{S}_{+1} \chi_z &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\chi_x + i\chi_y), \\ \hat{S}_0 \chi_x &= i\chi_y, & \hat{S}_0 \chi_y &= -i\chi_x, & \hat{S}_0 \chi_z &= 0, \\ \hat{S}_{-1} \chi_x &= -\frac{1}{\sqrt{2}} \chi_z, & \hat{S}_{-1} \chi_y &= \frac{i}{2} \chi_z, & \hat{S}_{-1} \chi_z &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\chi_x - i\chi_y).\end{aligned}\quad (26)$$

$$\begin{aligned}\hat{S}_x \chi_{11} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \chi_{10}, & \hat{S}_x \chi_{10} &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\chi_{1-1} + \chi_{11}), & \hat{S}_x \chi_{1-1} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \chi_{10}, \\ \hat{S}_y \chi_{11} &= \frac{i}{\sqrt{2}} \chi_{10}, & \hat{S}_y \chi_{10} &= \frac{i}{\sqrt{2}} (\chi_{1-1} - \chi_{11}), & \hat{S}_y \chi_{1-1} &= -\frac{i}{\sqrt{2}} \chi_{10}, \\ \hat{S}_z \chi_{11} &= \chi_{11}, & \hat{S}_z \chi_{10} &= 0, & \hat{S}_z \chi_{1-1} &= -\chi_{1-1}.\end{aligned}\quad (27)$$

$$\begin{aligned}\hat{S}_x \chi_x &= 0, & \hat{S}_x \chi_y &= i\chi_z, & \hat{S}_x \chi_z &= -i\chi_y, \\ \hat{S}_y \chi_x &= -i\chi_z, & \hat{S}_y \chi_y &= 0, & \hat{S}_y \chi_z &= i\chi_x, \\ \hat{S}_z \chi_x &= i\chi_y, & \hat{S}_z \chi_y &= -i\chi_x, & \hat{S}_z \chi_z &= 0.\end{aligned}\quad (28)$$

### 4. Действие оператора квадрупольного момента на базисные функции

Операторы  $\hat{T}_{2M}$  ( $M = \pm 2, \pm 1, 0$ ) и  $\hat{Q}_{ik}$  ( $i, k = x, y, z$ ) действуют на базисные функции по формулам

$$\begin{aligned}\hat{T}_{2M} \chi_{1m} &= \sqrt{\frac{5}{3}} C_{1m' 2M}^{1m'} \chi_{1m'}, \\ \hat{Q}_{ik} \chi_l &= \frac{1}{2} \left( \frac{2}{3} \delta_{ik} \chi_l - \delta_{il} \chi_k - \delta_{kl} \chi_i \right).\end{aligned}\quad (29)$$

В развернутой записи

$$\begin{aligned}\hat{T}_{22} \chi_{11} &= 0, & \hat{T}_{22} \chi_{10} &= 0, & \hat{T}_{22} \chi_{1-1} &= \chi_{11}, \\ \hat{T}_{21} \chi_{11} &= 0, & \hat{T}_{21} \chi_{10} &= -\frac{1}{\sqrt{2}} \chi_{11}, & \hat{T}_{21} \chi_{1-1} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \chi_{10},\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
\hat{T}_{20}\chi_{11} &= \frac{1}{\sqrt{6}} \chi_{11}, & \hat{T}_{20}\chi_{10} &= -\sqrt{\frac{2}{3}} \chi_{10}, & \hat{T}_{20}\chi_{1-1} &= \frac{1}{\sqrt{6}} \chi_{1-1}, \\
\hat{T}_{2-1}\chi_{11} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \chi_{10}, & \hat{T}_{2-1}\chi_{10} &= -\frac{1}{\sqrt{2}} \chi_{1-1}, & \hat{T}_{2-1}\chi_{1-1} &= 0, \\
\hat{T}_{2-2}\chi_{11} &= \chi_{1-1}, & \hat{T}_{2-2}\chi_{10} &= 0, & \hat{T}_{2-2}\chi_{1-1} &= 0.
\end{aligned} \tag{30}$$

$$\begin{aligned}
\hat{T}_{22}\chi_x &= -\frac{1}{2} (\chi_x + i\chi_y), & \hat{T}_{22}\chi_y &= \frac{1}{2} (\chi_y - i\chi_x), & \hat{T}_{22}\chi_z &= 0, \\
\hat{T}_{21}\chi_x &= \frac{1}{2} \chi_z, & \hat{T}_{21}\chi_y &= \frac{i}{2} \chi_z, & \hat{T}_{21}\chi_z &= \frac{1}{2} (\chi_x + i\chi_y), \\
\hat{T}_{20}\chi_x &= \frac{1}{\sqrt{6}} \chi_x, & \hat{T}_{20}\chi_y &= \frac{1}{\sqrt{6}} \chi_y, & \hat{T}_{20}\chi_z &= -\sqrt{\frac{2}{3}} \chi_z, \\
\hat{T}_{2-1}\chi_x &= -\frac{1}{2} \chi_z, & \hat{T}_{2-1}\chi_y &= \frac{i}{2} \chi_z, & \hat{T}_{2-1}\chi_z &= -\frac{1}{2} (\chi_x - i\chi_y), \\
\hat{T}_{2-2}\chi_x &= -\frac{1}{2} (\chi_x - i\chi_y), & \hat{T}_{2-2}\chi_y &= \frac{1}{2} (\chi_y + i\chi_x), & \hat{T}_{2-2}\chi_z &= 0.
\end{aligned} \tag{31}$$

$$\begin{aligned}
\hat{Q}_{xx}\chi_{11} &= \frac{1}{2} \chi_{1-1} - \frac{1}{6} \chi_{11}, & \hat{Q}_{xx}\chi_{10} &= \frac{1}{3} \chi_{10}, & \hat{Q}_{xx}\chi_{1-1} &= \frac{1}{2} \chi_{11} - \frac{1}{6} \chi_{1-1}, \\
\hat{Q}_{yy}\chi_{11} &= -\frac{1}{2} \chi_{1-1} - \frac{1}{6} \chi_{11}, & \hat{Q}_{yy}\chi_{10} &= \frac{1}{3} \chi_{10}, & \hat{Q}_{yy}\chi_{1-1} &= -\frac{1}{2} \chi_{11} - \frac{1}{6} \chi_{1-1}, \\
\hat{Q}_{zz}\chi_{11} &= \frac{1}{3} \chi_{11}, & \hat{Q}_{zz}\chi_{10} &= -\frac{2}{3} \chi_{10}, & \hat{Q}_{zz}\chi_{1-1} &= \frac{1}{3} \chi_{1-1}, \\
\hat{Q}_{xy}\chi_{11} &= \frac{i}{2} \chi_{1-1}, & \hat{Q}_{xy}\chi_{10} &= 0, & \hat{Q}_{xy}\chi_{1-1} &= -\frac{i}{2} \chi_{11}, \\
\hat{Q}_{xz}\chi_{11} &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \chi_{10}, & \hat{Q}_{xz}\chi_{10} &= \frac{1}{2\sqrt{2}} (\chi_{11} - \chi_{1-1}), & \hat{Q}_{xz}\chi_{1-1} &= -\frac{1}{2\sqrt{2}} \chi_{10}, \\
\hat{Q}_{yz}\chi_{11} &= \frac{i}{2\sqrt{2}} \chi_{10}, & \hat{Q}_{yz}\chi_{10} &= -\frac{i}{2\sqrt{2}} (\chi_{11} + \chi_{1-1}), & \hat{Q}_{yz}\chi_{1-1} &= \frac{i}{2\sqrt{2}} \chi_{10}.
\end{aligned} \tag{32}$$

$$\begin{aligned}
\hat{Q}_{xx}\chi_x &= -\frac{2}{3} \chi_x, & \hat{Q}_{xx}\chi_y &= \frac{1}{3} \chi_y, & \hat{Q}_{xx}\chi_z &= \frac{1}{3} \chi_z, \\
\hat{Q}_{yy}\chi_x &= \frac{1}{3} \chi_x, & \hat{Q}_{yy}\chi_y &= -\frac{2}{3} \chi_y, & \hat{Q}_{yy}\chi_z &= \frac{1}{3} \chi_z, \\
\hat{Q}_{zz}\chi_x &= \frac{1}{3} \chi_x, & \hat{Q}_{zz}\chi_y &= \frac{1}{3} \chi_y, & \hat{Q}_{zz}\chi_z &= -\frac{2}{3} \chi_z, \\
\hat{Q}_{xy}\chi_x &= -\frac{1}{2} \chi_y, & \hat{Q}_{xy}\chi_y &= -\frac{1}{2} \chi_x, & \hat{Q}_{xy}\chi_z &= 0, \\
\hat{Q}_{xz}\chi_x &= -\frac{1}{2} \chi_z, & \hat{Q}_{xz}\chi_y &= 0, & \hat{Q}_{xz}\chi_z &= -\frac{1}{2} \chi_x, \\
\hat{Q}_{yz}\chi_x &= 0, & \hat{Q}_{yz}\chi_y &= -\frac{1}{2} \chi_z, & \hat{Q}_{yz}\chi_z &= -\frac{1}{2} \chi_y.
\end{aligned} \tag{33}$$

## 5. Преобразование базисных функций при повороте системы координат

Базисные функции  $\chi_{1m}$  ( $m = \pm 1, 0$ ) являются ковариантными циклическими ортами, а базисные функции  $\chi_i$  ( $i = x, y, z$ ) — декартовыми ортами. При повороте системы координат они преобразуются с помощью оператора поворота  $\hat{D}^1(\alpha, \beta, \gamma)$  (формулы 2.6 (75)–(78)), если поворот характеризуется углами Эйлера  $\alpha, \beta, \gamma$ , или с помощью оператора поворота  $\hat{U}^1(\omega; \Theta, \Phi)$  (формулы 2.6 (79)–(83)), если поворот характеризуется углом поворота  $\omega$  и направлением оси поворота  $\mathbf{n}(\Theta, \Phi)$ :

$$\begin{aligned}\chi'_{1m'} &= \hat{D}^1(\alpha, \beta, \gamma) \chi_{1m} = \sum_{m=\pm 1, 0} D^1_{mm'}(\alpha, \beta, \gamma) \chi_{1m}, \\ \chi'_i &= \hat{D}^1(\alpha, \beta, \gamma) \chi_i = \sum_{k=x, y, z} a_{ki} \chi_k.\end{aligned}\quad (34)$$

Здесь  $D^1_{mm'}(\alpha, \beta, \gamma) = D$ -функции Вигнера (гл. 4), а  $a_{ik}$  — матрица поворота (см. 1.4.6).

Функции  $\chi'_{1m'}$  описывают состояние, в котором частица имеет спин 1 и проекцию спина  $m'$  на новую ось  $z'$ . Функции  $\chi'_{1m'}$  являются собственными функциями операторов  $\hat{S}'^2$  и  $\hat{S}'_z$ , где  $\hat{S}'$  — оператор спина в повернутой системе координат (формулы 2.6 (85) и 2.6 (87))

$$\begin{aligned}\hat{S}'^2 \chi'_{1m'} &= 2\chi'_{1m'}, \\ \hat{S}'_z \chi'_{1m'} &= m' \chi'_{1m'}.\end{aligned}\quad (35)$$

В представлении циклического базиса функции  $\chi'_{1m'}$  имеют вид

$$\chi'_{11} = \begin{pmatrix} \frac{1 + \cos \beta}{2} e^{-i(\alpha+\gamma)} \\ \frac{\sin \beta}{\sqrt{2}} e^{-i\gamma} \\ \frac{1 - \cos \beta}{2} e^{i(\alpha-\gamma)} \end{pmatrix}, \quad \chi'_{10} = \begin{pmatrix} -\frac{\sin \beta}{\sqrt{2}} e^{-i\alpha} \\ \cos \beta \\ \frac{\sin \beta}{\sqrt{2}} e^{i\alpha} \end{pmatrix}, \quad \chi'_{1-1} = \begin{pmatrix} \frac{1 - \cos \beta}{2} e^{-i(\alpha-\gamma)} \\ -\frac{\sin \beta}{\sqrt{2}} e^{i\gamma} \\ \frac{1 + \cos \beta}{2} e^{i(\alpha+\gamma)} \end{pmatrix}, \quad (36)$$

а функции  $\chi'_i$  даются формулами

$$\chi'_x = \begin{pmatrix} -\frac{\cos \beta \cos \gamma - i \sin \gamma}{\sqrt{2}} e^{-i\alpha} \\ -\sin \beta \cos \gamma \\ \frac{\cos \beta \cos \gamma + i \sin \gamma}{\sqrt{2}} e^{i\alpha} \end{pmatrix}, \quad \chi'_y = \begin{pmatrix} \frac{\cos \beta \sin \gamma + i \cos \gamma}{\sqrt{2}} e^{-i\alpha} \\ \sin \beta \sin \gamma \\ -\frac{\cos \beta \sin \gamma - i \cos \gamma}{\sqrt{2}} e^{i\alpha} \end{pmatrix}, \quad \chi'_z = \begin{pmatrix} -\frac{\sin \beta}{\sqrt{2}} e^{-i\alpha} \\ \cos \beta \\ \frac{\sin \beta}{\sqrt{2}} e^{i\alpha} \end{pmatrix}. \quad (37)$$

В представлении декартового базиса эти функции имеют вид

$$\chi'_{11} = \begin{pmatrix} -\frac{\cos \beta \cos \alpha - i \sin \alpha}{\sqrt{2}} e^{-i\gamma} \\ -\frac{\cos \beta \sin \alpha + i \cos \alpha}{\sqrt{2}} e^{-i\gamma} \\ \frac{\sin \beta}{\sqrt{2}} e^{-i\gamma} \end{pmatrix}, \quad \chi'_{10} = \begin{pmatrix} \sin \beta \cos \alpha \\ \sin \beta \sin \alpha \\ \cos \beta \end{pmatrix}, \quad \chi'_{1-1} = \begin{pmatrix} \frac{\cos \beta \cos \alpha + i \sin \alpha}{\sqrt{2}} e^{i\gamma} \\ \frac{\cos \beta \sin \alpha - i \cos \alpha}{\sqrt{2}} e^{i\gamma} \\ -\frac{\sin \beta}{\sqrt{2}} e^{i\gamma} \end{pmatrix}, \quad (38)$$

$$\chi'_x = \begin{pmatrix} \cos \beta \cos \alpha \cos \gamma - \sin \alpha \sin \gamma \\ \cos \beta \sin \alpha \cos \gamma + \cos \alpha \sin \gamma \\ -\sin \beta \cos \gamma \end{pmatrix}, \quad \chi'_y = \begin{pmatrix} -\cos \beta \cos \alpha \sin \gamma - \sin \alpha \cos \gamma \\ -\cos \beta \sin \alpha \sin \gamma + \cos \alpha \cos \gamma \\ \sin \beta \sin \gamma \end{pmatrix}, \quad \chi'_z = \begin{pmatrix} \sin \beta \cos \alpha \\ \sin \beta \sin \alpha \\ \cos \beta \end{pmatrix}. \quad (39)$$

Выражения для базисных функций в повернутой системе координат в случае, когда поворот характеризуется углами  $\omega$ ,  $\Theta$ ,  $\Phi$  могут быть получены с помощью явного вида оператора поворота  $U^1(\omega, \Theta, \Phi)$  (формулы 2.6 (80), (81)).

## 6. Спиральные базисные функции при $S=1$

Спиральные базисные функции  $\chi_{1\lambda}(\vartheta, \varphi)$  ( $\lambda = \pm 1, 0$ ) описывают состояние, в котором частица имеет спин 1 и проекцию спина на направление импульса  $\mathbf{n}(\vartheta, \varphi) \equiv \mathbf{p}/|\mathbf{p}|$  (т. е. спиральность) равную  $\lambda$ . Функции  $\chi_{1\lambda}(\vartheta, \varphi)$  являются собственными функциями операторов  $\hat{S}^2$  и  $\hat{S}_n$ :

$$\begin{aligned}\hat{S}^2 \chi_{1\lambda}(\vartheta, \varphi) &= 2\chi_{1\lambda}(\vartheta, \varphi), \\ \hat{S}_n \chi_{1\lambda}(\vartheta, \varphi) &= \lambda \chi_{1\lambda}(\vartheta, \varphi).\end{aligned}\quad (40)$$

Согласно 6.1 (20) спиральные базисные функции могут быть получены из базисных функций  $\chi_{1m}$  с помощью поворота системы координат:

$$\begin{aligned}\chi_{1\lambda}(\vartheta, \varphi) &= \sum_m D_{m\lambda}^1(\varphi, \vartheta, 0) \chi_{1m}, \\ \chi_{1m} &= \sum_{\lambda} D_{-\lambda-m}^1(0, \vartheta, \varphi) \chi_{1\lambda}(\vartheta, \varphi).\end{aligned}\quad (41)$$

Для эрмитовски сопряженных функций соотношения (41) принимают вид

$$\begin{aligned}\chi_{1\lambda}^\dagger(\vartheta, \varphi) &= \sum_m (-1)^{\lambda-m} D_{-m-\lambda}^1(\varphi, \vartheta, 0) \chi_{1m}^\dagger, \\ \chi_{1m}^\dagger &= \sum_{\lambda} (-1)^{\lambda-m} D_{\lambda m}^1(0, \vartheta, \varphi) \chi_{1\lambda}^\dagger(\vartheta, \varphi).\end{aligned}\quad (42)$$

Спиральные функции  $\chi_{1\lambda}(\vartheta, \varphi)$  можно рассматривать как ковариантные спиральные орты  $e'_\lambda$  (см. 1.1.4), компоненты которых записаны в виде столбцов

$$\chi_{1\lambda}(\vartheta, \varphi) = e'_\lambda(\lambda = \pm 1, 0). \quad (43)$$

Из спиральных функций  $\chi_{1\lambda}(\vartheta, \varphi)$  ( $\lambda = \pm 1, 0$ ) можно составить линейные комбинации  $\chi_i(\vartheta, \varphi)$  ( $i = x, y, z$ )

$$\begin{aligned}\chi_x(\vartheta, \varphi) &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\chi_{1-1}(\vartheta, \varphi) - \chi_{11}(\vartheta, \varphi)), \\ \chi_y(\vartheta, \varphi) &= \frac{i}{\sqrt{2}} (\chi_{1-1}(\vartheta, \varphi) + \chi_{11}(\vartheta, \varphi)), \\ \chi_z(\vartheta, \varphi) &= \chi_{10}(\vartheta, \varphi).\end{aligned}\quad (44)$$

Функции  $\chi_i(\vartheta, \varphi)$  ( $i = x, y, z$ ) совпадают со сферическими ортами (см. 1.1.3):

$$\chi_x(\vartheta, \varphi) \equiv e_\vartheta, \quad \chi_y(\vartheta, \varphi) \equiv e_\varphi, \quad \chi_z(\vartheta, \varphi) \equiv e_r. \quad (45)$$

Следует подчеркнуть, что функции  $\chi_i(\vartheta, \varphi)$  описывают состояния, не обладающие определенной спиральностью. Эти функции связаны с введенными ранее базисными функциями  $\chi_k$  ( $k = x, y, z$ ) соотношениями

$$\begin{aligned}\chi_i(\vartheta, \varphi) &= \sum_k a_{ki}(\varphi, \vartheta, 0) \chi_k, \\ \chi_k &= \sum_i a_{ik}(\varphi, \vartheta, 0) \chi_i(\vartheta, \varphi),\end{aligned}\quad (46)$$

где матрица поворота  $a_{ik}(\alpha, \beta, \gamma)$  дается формулой 1.4(54). Связь между эрмитовски сопряженными функциями  $\chi_i^\dagger(\vartheta, \varphi)$  и  $\chi_k^\dagger$  также дается формулой (46) вследствие вещественности матрицы  $a_{ki}$ .

Совокупность трех спиральных функций  $\chi_{1\lambda}(\vartheta, \varphi)$  с  $\lambda = \pm 1, 0$  или, эквивалентно, совокупность функций  $\chi_i(\vartheta, \varphi)$  с  $i = x, y, z$  образует ортонормированный базис. Условие ортогональности и нормировки для спиральных функций имеет вид

$$\begin{aligned}\chi_{1\lambda}^\dagger(\vartheta, \varphi) \chi_{1\lambda'}(\vartheta, \varphi) &= \delta_{\lambda\lambda'}, \\ \chi_i^\dagger(\vartheta, \varphi) \chi_k(\vartheta, \varphi) &= \delta_{ik}.\end{aligned}\quad (47)$$

Условие полноты системы спиральных функций

$$\begin{aligned}\sum_{\lambda=\pm 1, 0} \chi_{1\lambda}(\vartheta, \varphi) \chi_{1\lambda}^\dagger(\vartheta, \varphi) &= I, \\ \sum_{i=x, y, z} \chi_i(\vartheta, \varphi) \chi_i^\dagger(\vartheta, \varphi) &= I.\end{aligned}\quad (48)$$

Явный вид спиральных функций  $\chi_{1\lambda}(\vartheta, \varphi)$  и функций  $\chi_i(\vartheta, \varphi)$   
а. Циклический базис

$$\chi_{11}(\vartheta, \varphi) = \begin{pmatrix} \frac{1 + \cos \vartheta}{2} e^{-i\varphi} \\ \frac{\sin \vartheta}{\sqrt{2}} \\ \frac{1 - \cos \vartheta}{2} e^{i\varphi} \end{pmatrix}, \quad \chi_{10}(\vartheta, \varphi) = \begin{pmatrix} -\frac{\sin \vartheta}{\sqrt{2}} e^{-i\varphi} \\ \cos \vartheta \\ \frac{\sin \vartheta}{\sqrt{2}} e^{i\varphi} \end{pmatrix}, \quad \chi_{1-1}(\vartheta, \varphi) = \begin{pmatrix} \frac{1 - \cos \vartheta}{2} e^{-i\varphi} \\ -\frac{\sin \vartheta}{\sqrt{2}} \\ \frac{1 + \cos \vartheta}{2} e^{i\varphi} \end{pmatrix}, \quad (49)$$

$$\chi_x(\vartheta, \varphi) = \begin{pmatrix} -\frac{\cos \vartheta}{\sqrt{2}} e^{-i\varphi} \\ -\sin \vartheta \\ \frac{\cos \vartheta}{\sqrt{2}} e^{i\varphi} \end{pmatrix}, \quad \chi_y(\vartheta, \varphi) = \begin{pmatrix} \frac{i}{\sqrt{2}} e^{-i\varphi} \\ 0 \\ \frac{i}{\sqrt{2}} e^{i\varphi} \end{pmatrix}, \quad \chi_z(\vartheta, \varphi) = \begin{pmatrix} -\frac{\sin \vartheta}{\sqrt{2}} e^{-i\varphi} \\ \cos \vartheta \\ \frac{\sin \vartheta}{\sqrt{2}} e^{i\varphi} \end{pmatrix}. \quad (50)$$

б. Декартов базис

$$\chi_{11}(\vartheta, \varphi) = -\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \cos \vartheta \cos \varphi - i \sin \varphi \\ \cos \vartheta \sin \varphi + i \cos \varphi \\ -\sin \vartheta \end{pmatrix}, \quad \chi_{10}(\vartheta, \varphi) = \begin{pmatrix} \sin \vartheta \cos \varphi \\ \sin \vartheta \sin \varphi \\ \cos \vartheta \end{pmatrix}, \quad \chi_{1-1}(\vartheta, \varphi) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \cos \vartheta \cos \varphi + i \sin \varphi \\ \cos \vartheta \sin \varphi - i \cos \varphi \\ -\sin \vartheta \end{pmatrix}, \quad (51)$$

$$\chi_x(\vartheta, \varphi) = \begin{pmatrix} \cos \vartheta \cos \varphi \\ \cos \vartheta \sin \varphi \\ -\sin \vartheta \end{pmatrix}, \quad \chi_y(\vartheta, \varphi) = \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \chi_z(\vartheta, \varphi) = \begin{pmatrix} \sin \vartheta \cos \varphi \\ \sin \vartheta \sin \varphi \\ \cos \vartheta \end{pmatrix}. \quad (52)$$

В представлении декартового базиса эти функции удовлетворяют соотношениям

$$\chi_{i\lambda}^*(\vartheta, \varphi) = (-1)^\lambda \chi_{1-\lambda}(\vartheta, \varphi), \quad (\lambda = \pm 1, 0), \quad (53)$$

$$\chi_i^*(\vartheta, \varphi) = \chi_i(\vartheta, \varphi), \quad (i = x, y, z).$$

Разложение произведений спиральных базисных функций по матрицам спина и квадрупольного момента (см. 2.6) имеет вид

$$\chi_{1\lambda}(\vartheta, \varphi) \chi_{1\lambda'}^*(\vartheta, \varphi) = \frac{1}{3} \delta_{\lambda\lambda'} I + \frac{1}{\sqrt{2}} C_{1\lambda\lambda'}^1 \sum_{\mu=-1}^1 D_{\mu}^1(\varphi, \vartheta, 0) \hat{S}_\mu + \sqrt{\frac{5}{3}} C_{1\lambda\lambda'}^2 \sum_{M=-2}^2 D_{M}^2(\varphi, \vartheta, 0) \hat{T}_{2M}. \quad (54)$$

Аналогичное разложение для функций  $\chi_i(\vartheta, \varphi)$  записывается в виде

$$\chi_i(\vartheta, \varphi) \chi_i^*(\vartheta, \varphi) = \frac{1}{3} \delta_{ii} I + \frac{i}{2} \varepsilon_{ikl} \sum_{m=x,y,z} a_{mi}(\varphi, \vartheta, 0) \hat{S}_m - \sum_{m,n=x,y,z} a_{mi}(\varphi, \vartheta, 0) a_{nk}(\varphi, \vartheta, 0) \hat{Q}_{mn}, \quad (55)$$

где  $a_{mi}(\alpha, \beta, \gamma)$  — матрица поворота (формула 1.4 (54)).

Матричные элементы оператора спина между спиральными состояниями  $\chi_{1\lambda}(\vartheta, \varphi)$  и состояниями  $\chi_i(\vartheta, \varphi)$  вычисляются по формулам

$$\chi_{1\lambda}^*(\vartheta, \varphi) \hat{S}_\mu \chi_{1\lambda}(\vartheta, \varphi) = (-1)^{\mu+\nu} \sqrt{2} C_{1\lambda\lambda'}^1 D_{\mu-\nu}^1(\varphi, \vartheta, 0), \quad (56)$$

$$\chi_i^*(\vartheta, \varphi) \hat{S}_i \chi_k(\vartheta, \varphi) = -i \sum_m \varepsilon_{ikm} a_{im}(\varphi, \vartheta, 0). \quad (57)$$

В частности, средние значения оператора  $\hat{S}$  в состоянии со спиральностью  $\lambda$  имеют вид

$$\chi_{1\lambda}^*(\vartheta, \varphi) \hat{S} \chi_{1\lambda}(\vartheta, \varphi) = \lambda n(\vartheta, \varphi), \quad (\lambda = \pm 1, 0). \quad (58)$$

Средние значения оператора спина  $\hat{S}$  в состоянии  $\chi_i(\vartheta, \varphi)$  равны нулю:

$$\chi_i^*(\vartheta, \varphi) \hat{S} \chi_i(\vartheta, \varphi) = 0, \quad (i = x, y, z). \quad (59)$$

Матричные элементы операторов квадрупольного момента  $\hat{T}_{2M}$  ( $M = \pm 2, \pm 1, 0$ ) и  $Q_{ik}$  ( $i, k = x, y, z$ ) вычисляются с помощью формул

$$\chi_{1\lambda}^*(\vartheta, \varphi) \hat{T}_{2M} \chi_{1\lambda}(\vartheta, \varphi) = (-1)^{M+N} \sqrt{\frac{5}{3}} C_{1\lambda\lambda'}^2 D_{-M-N}^2(\varphi, \vartheta, 0), \quad (60)$$

$$\chi_i^*(\vartheta, \varphi) \hat{Q}_{im} \chi_k(\vartheta, \varphi) = -\frac{1}{2} \left\{ a_{ii}(\varphi, \vartheta, 0) a_{mk}(\varphi, \vartheta, 0) + a_{ik}(\varphi, \vartheta, 0) a_{mi}(\varphi, \vartheta, 0) - \frac{2}{3} \delta_{ik} \delta_{im} \right\}. \quad (61)$$

В частности, средние значения квадрупольных операторов  $\hat{T}_{2M}$  в состоянии со спиральностью  $\lambda$  даются формулой

$$\chi_{1\lambda}^*(\vartheta, \varphi) \hat{T}_{2M} \chi_{1\lambda}(\vartheta, \varphi) = \frac{(-1)^{1+\lambda}}{1+|\lambda|} \sqrt{\frac{8\pi}{15}} Y_{2M}(\vartheta, \varphi), \quad (62)$$

$$(\lambda = \pm 1, 0; M = \pm 2, \pm 1, 0).$$

## 7. Произвольная спиновая функция частицы с $S=1$

Произвольная спиновая функция  $\chi_1$  частицы с  $S=1$  может быть разложена по базисным функциям, т. е. представлена в одном из следующих видов:

$$\chi_1 = \sum_{m=\pm 1,0} a^m \chi_{1m} = \sum_{m=\pm 1,0} (-1)^m a_{-m} \chi_{1m} = \sum_{i=x,y,z} a_i \chi_i. \quad (63)$$

Разложение эрмитовски сопряженной функции  $\chi_1^\dagger$  дается формулами

$$\chi_1^\dagger = \sum_{m=\pm 1,0} (a^m)^* \chi_{1m}^\dagger = \sum_{m=\pm 1,0} (-1)^m (a_{-m})^* \chi_{1m}^\dagger = \sum_{i=x,y,z} a_i^* \chi_i^\dagger. \quad (64)$$

При этом в циклическом базисе функция  $\chi_1$  имеет вид

$$\chi_1 = \begin{pmatrix} a^{+1} \\ a^0 \\ a^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a_{-1} \\ a_0 \\ -a_{+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}}(a_x - ia_y) \\ a_z \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(a_x + ia_y) \end{pmatrix}, \quad (65)$$

а в декартовом базисе

$$\chi_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}(a^{-1} - a^{+1}) \\ -\frac{i}{\sqrt{2}}(a^{-1} + a^{+1}) \\ a^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}(a_{-1} - a_{+1}) \\ \frac{i}{\sqrt{2}}(a_{-1} + a_{+1}) \\ a_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}. \quad (66)$$

Величины  $a^m$  являются *контравариантными циклическими компонентами* некоторого комплексного (в общем случае) вектора  $\mathbf{a}$ ,  $a_m$  — *ковариантными циклическими компонентами* вектора  $\mathbf{a}$ , а  $a_i$  — *декартовыми компонентами* этого вектора. Вектор  $\mathbf{a}$  часто называется *вектором поляризации* частицы со спином 1.

При комплексном сопряжении компоненты этого вектора преобразуются по формулам

$$(a^m)^* = (a^*)^m, \quad (a_m)^* = (a^*)^m, \quad (a_i)^* = (a^*)_i. \quad (67)$$

Нормировка спиновой функции

$$\chi_1^\dagger \chi_1 = 1 \quad (68)$$

налагает на компоненты вектора  $\mathbf{a}$  условие

$$|a^{+1}|^2 + |a^0|^2 + |a^{-1}|^2 = |a_{+1}|^2 + |a_0|^2 + |a_{-1}|^2 = |a_x|^2 + |a_y|^2 + |a_z|^2 = 1, \quad (69)$$

или в компактной записи

$$|\mathbf{a}|^2 = \mathbf{a}^* \cdot \mathbf{a} = 1. \quad (70)$$

Произведение спиновых функций вида  $\chi_1 \chi_1^\dagger$  может быть разложено по матрицам спина  $\hat{\mathbf{S}}$  и квадрупольного момента  $\hat{T}_{2M}$  или  $\hat{Q}_{ik}$  (см. 2.6)

$$\begin{aligned} \chi_1 \chi_1^\dagger &= \frac{1}{3} I + \frac{1}{2} \sum_{\mu=-1}^1 (-1)^\mu P_{-\mu} \hat{S}_\mu + \sum_{M=-2}^2 (-1)^M P_{2-M} \hat{T}_{2M}, \\ \chi_1 \chi_1^\dagger &= \frac{1}{3} I + \frac{1}{2} \sum_{i=x,y,z} P_i \hat{S}_i + \sum_{i,k=x,y,z} P_{ik} \hat{Q}_{ik} \end{aligned} \quad (71)$$

или в компактной записи

$$\chi_1 \chi_1^\dagger = \frac{1}{3} I + \frac{1}{2} \mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{S}} + (\mathbf{P}_2 \cdot \hat{\mathbf{T}}_2), \quad (72)$$

где  $(\mathbf{P}_2 \cdot \hat{\mathbf{T}}_2)$  означает скалярное произведение двух неприводимых тензоров второго ранга (см. 3.1. (31)).

Вещественный вектор  $\mathbf{P}$  выражается через вектор поляризации  $\mathbf{a}$  по формуле

$$\mathbf{P} = i [\mathbf{a} \times \mathbf{a}^*], \quad (73)$$

а его компоненты имеют вид

$$\begin{aligned} P_\mu &= \sqrt{2} \sum_{m,n} C_{1m1\mu}^{1n} (a^n)^* a^m, \quad (m, n, \mu = \pm 1, 0), \\ P_i &= i \sum_{k,l} \varepsilon_{ikl} a_k a_l^*, \quad (i, k, l = x, y, z). \end{aligned} \quad (74)$$

Циклические и декартовы компоненты вещественного неприводимого тензора второго ранга  $\mathbf{P}_2$  выражаются через компоненты вектора поляризации  $\mathbf{a}$  по формулам

$$\begin{aligned} P_{2M} &= \sqrt{\frac{5}{3}} \sum_{m,n} C_{1m2M}^{1n} (a^n)^* a^m, \quad (m, n = \pm 1, 0; M = \pm 2, \pm 1, 0), \\ P_{ik} &= -\frac{1}{2} \left\{ a_i a_k^* + a_k a_i^* - \frac{2}{3} \delta_{ik} \right\}, \quad (i, k = x, y, z), \\ P_{ik} &= P_{ki}, \quad \sum_i P_{ii} = 0. \end{aligned} \quad (75)$$

Вектор  $\mathbf{P}$  и тензор  $\mathbf{P}_2$  являются средними значениями оператора спина и оператора квадрупольного момента соответственно в состоянии  $\chi_1$  с данным вектором поляризации  $\mathbf{a}$ .

$$\begin{aligned} \langle \hat{S} \rangle &\equiv \chi_1^\dagger \hat{S} \chi_1 = \mathbf{P}, \\ \langle \hat{T}_{2M} \rangle &\equiv \chi_1^\dagger \hat{T}_{2M} \chi_1 = P_{2M}, \\ \langle \hat{Q}_{ik} \rangle &\equiv \chi_1^\dagger \hat{Q}_{ik} \chi_1 = P_{ik}. \end{aligned} \quad (76)$$

Преобразование спиновых функций  $\chi_1$  при повороте системы координат  $S \rightarrow S'$  осуществляется с помощью операторов поворота  $\hat{D}^1(\alpha, \beta, \gamma)$  (см. 2.6 (76)–(77)) или  $\hat{U}^1(\omega; \theta, \Phi)$  (см. 2.6 (80)–(81)) в зависимости от способа описания поворота:

$$\chi'_1 = \hat{D}^1(\alpha, \beta, \gamma) \chi_1 = \hat{U}^1(\omega; \theta, \Phi) \chi_1. \quad (77)$$

Спиновые функции в повернутой системе координат  $\chi'_1$  могут быть разложены как по базисным функциям  $\chi_{1m}$ ,  $\chi_i$  исходной системы координат, так и по базисным функциям  $\chi'_{1m}$ ,  $\chi'_i$  повернутой системы координат:

$$\begin{aligned} \chi'_1 &= \sum_{m=\pm 1, 0} a'^m \chi_{1m} = \sum_{m=\pm 1, 0} a^m \chi'_{1m}, \\ \chi'_1 &= \sum_{m=\pm 1, 0} (-1)^m a'_{-m} \chi_{1m} = \sum_{m=\pm 1, 0} (-1)^m a_{-m} \chi'_{1m}, \\ \chi'_1 &= \sum_{i=x, y, z} a'_i \chi_i = \sum_{i=x, y, z} a_i \chi'_i. \end{aligned} \quad (78)$$

Связь базисных функций в исходной и повернутой системе координат дается формулами (34). Компоненты вектора  $\mathbf{a}$  в исходной и повернутой системе координат связаны соотношениями

$$\begin{aligned} a'^m &= \sum_n D_{mn}^1(\alpha, \beta, \gamma) a^n, & a^n &= \sum_m D_{mn}^{1*}(\alpha, \beta, \gamma) a'^m, \\ a'_m &= \sum_n D_{nm}^1(\alpha, \beta, \gamma) a_n, & a_n &= \sum_m D_{nm}^{1*}(\alpha, \beta, \gamma) a'_m, \\ a'_i &= \sum_k a_{ik} a_k, & a_k &= \sum_i a_{ik} a'_i, \end{aligned} \quad (79)$$

$$(m, n = \pm 1, 0; \quad i, k = x, y, z).$$

## ШАРОВЫЕ ТЕНЗОРЫ

### 7.1. ОБЩИЕ СВОЙСТВА ШАРОВЫХ ТЕНЗОРОВ

#### 1. Определение

*Шаровыми тензорами* (или *тензорными сферическими гармониками*)  $Y_{JM}^{LS}(\vartheta, \varphi)$  называются величины, являющиеся собственными функциями операторов  $\hat{\mathbf{J}}^2$ ,  $\hat{J}_z$ ,  $\hat{\mathbf{L}}^2$ ,  $\hat{\mathbf{S}}^2$ , где  $\hat{\mathbf{L}}$  — оператор орбитального момента (2.2),  $\hat{\mathbf{S}}$  — оператор спина (2.3),  $\hat{\mathbf{J}} = \hat{\mathbf{L}} + \hat{\mathbf{S}}$  — оператор полного углового момента (2.1).

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{J}}^2 Y_{JM}^{LS}(\vartheta, \varphi) &= J(J+1) Y_{JM}^{LS}(\vartheta, \varphi), \\ \hat{J}_z Y_{JM}^{LS}(\vartheta, \varphi) &= M Y_{JM}^{LS}(\vartheta, \varphi), \\ \hat{\mathbf{L}}^2 Y_{JM}^{LS}(\vartheta, \varphi) &= L(L+1) Y_{JM}^{LS}(\vartheta, \varphi), \\ \hat{\mathbf{S}}^2 Y_{JM}^{LS}(\vartheta, \varphi) &= S(S+1) Y_{JM}^{LS}(\vartheta, \varphi). \end{aligned} \tag{1}$$

Шаровые тензоры характеризуют угловое распределение и поляризацию частиц со спином  $S$ , находящихся в состоянии с определенными значениями полного углового момента  $J$ , его проекции  $M$  и орбитального момента  $L$ . Величина  $S$  (значение спина) называется *рангом шарового тензора*. Именно в этом смысле говорят о шаровых спинорах (при  $S=1/2$ ), шаровых векторах (при  $S=1$ ) и т. д. Следует, однако, подчеркнуть условный характер этого названия, так как закон преобразования шаровых тензоров при поворотах системы координат характеризуется не величиной  $S$ , а величиной  $J$  (см. подробнее 7.1.4).

Согласно общим правилам сложения моментов, шаровые тензоры можно построить из сферических функций  $Y_{LM}(\vartheta, \varphi)$  (собственных функций  $\hat{\mathbf{L}}^2$ ,  $\hat{L}_z$ ) и спиноров  $\chi_{S\sigma}$  (собственных функций  $\hat{\mathbf{S}}^2$ ,  $S_z$ ) по формуле

$$Y_{JM}^{LS}(\vartheta, \varphi) = \sum_{m, \sigma} C_{LmS\sigma}^{JM} Y_{Lm}(\vartheta, \varphi) \chi_{S\sigma}. \tag{2}$$

Таким образом, шаровые тензоры являются неприводимыми тензорными произведениями ранга  $J$  сферических и спиновых функций

$$Y_{JM}^{LS}(\vartheta, \varphi) = \{Y_L \otimes \chi_S\}_{JM}. \tag{3}$$

Индексы  $J$ ,  $S$  являются целыми или полужелыми неотрицательными числами, индекс  $L$  принимает только целочисленные неотрицательные значения. При заданных  $J$  и  $S$  индекс  $L$  может иметь  $(2S+1)$  значение  $L = |J-S|, |J-S+1|, \dots, J+S$ . Индекс  $M$  принимает значения  $M = -J, -J+1, \dots, J-1, J$ .

Шаровые тензоры при фиксированных значениях индексов являются функциями трех переменных: сферических углов  $\vartheta, \varphi$  ( $0 \leq \vartheta \leq \pi, 0 \leq \varphi < 2\pi$ ) и спиновой переменной  $\xi$ , от которой зависит функция  $\chi_{S\xi}$  ( $\xi = -S, -S+1, \dots, S-1, S$ ). Спиновая переменная  $\xi$  явно не выписывается, поскольку шаровые тензоры, как и спиновые функции  $\chi_{S\xi}$ , представляются в матричном виде ( $Y_{JM}^{LS}(\vartheta, \varphi)$  — в виде столбцов, а  $Y_{JM}^{LS+}(\vartheta, \varphi)$  — в виде строк, содержащих  $(2S+1)$  компоненту). Суммирование по спиновой переменной заменяется матричным умножением.

Шаровые тензоры  $Y_{JM}^{LS}(\vartheta, \varphi)$  образуют полную, ортогональную и нормированную систему тензорных функций ранга  $S$  в области изменения аргументов  $0 \leq \vartheta \leq \pi$ ,  $0 \leq \varphi < 2\pi$  (см. 7.1.8).

Совокупность  $(2S + 1)$  шаровых тензоров  $Y_{JM}^{LS}(\vartheta, \varphi)$  с одинаковыми индексами  $J$ ,  $M$  и  $S$ , но разными  $L$  образует комплексный ортогональный базис

$$Y_{JM}^{L'S+}(\vartheta, \varphi) \cdot Y_{JM}^{LS}(\vartheta, \varphi) = 0, \text{ если } L' \neq L. \quad (4)$$

## 2. Компоненты шаровых тензоров

*а. Циклические контравариантные компоненты шаровых тензоров, согласно (2), выражаются через сферические функции по формуле*

$$[Y_{JM}^{LS}(\vartheta, \varphi)]^\mu = C_{LM-\mu S \mu}^{JM} Y_{LM-\mu}(\vartheta, \varphi), \quad (5)$$

$$(\mu = -S, \dots, S-1, S).$$

*Циклические ковариантные компоненты шаровых тензоров могут быть определены соотношением*

$$[Y_{JM}^{LS}(\vartheta, \varphi)]_\mu = (-1)^{S-\mu} [Y_{JM}^{LS}(\vartheta, \varphi)]^{-\mu}. \quad (6)$$

При таком определении циклические ковариантные компоненты шаровых тензоров имеют вид

$$[Y_{JM}^{LS}(\vartheta, \varphi)]_\mu = (-1)^{S-\mu} C_{LM+\mu S -\mu}^{JM} Y_{LM+\mu}(\vartheta, \varphi). \quad (7)$$

Однако в случае тензоров целого ранга  $S$  часто используется другое определение ковариантных компонент (см., например, 7.3.2)

$$[Y_{JM}^{LS}(\vartheta, \varphi)]_\mu = (-1)^\mu [Y_{JM}^{LS}(\vartheta, \varphi)]^{-\mu}; \quad (8)$$

при этом

$$[Y_{JM}^{LS}(\vartheta, \varphi)]_\mu = (-1)^\mu C_{LM+\mu S -\mu}^{JM} Y_{LM+\mu}(\vartheta, \varphi). \quad (9)$$

Отметим, что остальные формулы, приведенные в разделе о шаровых тензорах, не зависят от определения ковариантных компонент, если не делается специальных оговорок.

*б. Разложение шаровых тензоров по спиральным спиновым функциям  $\chi_{S\lambda}(\vartheta, \varphi)$  (см. 6.1.3) имеет вид*

$$Y_{JM}^{LS}(\vartheta, \varphi) = \sum_{\lambda=-S}^S [Y_{JM}^{LS}(\vartheta, \varphi)]^\lambda \chi_{S\lambda}(\vartheta, \varphi), \quad (10)$$

где *спиральные контравариантные компоненты шаровых тензоров* даются формулой

$$[Y_{JM}^{LS}(\vartheta, \varphi)]^\lambda = \sqrt{\frac{2L+1}{4\pi}} C_{LOS\lambda}^J D_{-\lambda-M}^J(0, \vartheta, \varphi). \quad (11)$$

Если *спиральные ковариантные компоненты* определять по формуле

$$[Y_{JM}^{LS}(\vartheta, \varphi)]'_\lambda = (-1)^{S-\lambda} [Y_{JM}^{LS}(\vartheta, \varphi)]'^{-\lambda}, \quad (12)$$

то

$$[Y_{JM}^{LS}(\vartheta, \varphi)]'_\lambda = (-1)^{J+L-\lambda} \sqrt{\frac{2L+1}{4\pi}} C_{LOS\lambda}^J D_{\lambda-M}^J(0, \vartheta, \varphi). \quad (13)$$

Если же определять ковариантные компоненты (в случае целых  $S$ ) выражением

$$[Y_{JM}^{LS}(\vartheta, \varphi)]'_\lambda = (-1)^\lambda [Y_{JM}^{LS}(\vartheta, \varphi)]'^{-\lambda}, \quad (14)$$

то

$$[Y_{JM}^{LS}(\vartheta, \varphi)]'_\lambda = (-1)^{J+L-S+\lambda} \sqrt{\frac{2L+1}{4\pi}} C_{LOS\lambda}^J D_{\lambda-M}^J(0, \vartheta, \varphi). \quad (15)$$



### 3. Комплексное сопряжение

Циклические компоненты шаровых тензоров при комплексном сопряжении преобразуются по формулам

$$\begin{aligned} [Y_{JM}^{LS}(\vartheta, \varphi)]^{\mu*} &= (-1)^{J+L+S-M-\mu} [Y_{J-M}^{LS}(\vartheta, \varphi)]^{-\mu}, \\ [Y_{JM}^{LS}(\vartheta, \varphi)]_{\mu}^* &= (-1)^{J+L+S-M-\mu} [Y_{J-M}^{LS}(\vartheta, \varphi)]_{-\mu}. \end{aligned} \quad (16)$$

Спиральные компоненты шаровых тензоров при комплексном сопряжении также преобразуются по формулам (16).

### 4. Поведение шаровых тензоров при преобразованиях системы координат

#### а. Инверсия системы координат

Оператор инверсии  $\hat{P}_r$  действует на шаровые тензоры по формуле

$$\hat{P}_r Y_{JM}^{LS}(\vartheta, \varphi) = \eta_p Y_{JM}^{LS}(\pi - \vartheta, \pi + \varphi) = \eta_p (-1)^L Y_{JM}^{LS}(\vartheta, \varphi). \quad (17)$$

где  $\eta_p$  — фазовый множитель, описывающий внутреннюю четность данного тензора.

#### б. Поворот системы координат

При повороте системы координат  $S \{x, y, z\} \rightarrow S' \{x', y', z'\}$ , характеризуемом углами Эйлера  $\alpha, \beta, \gamma$ , шаровые тензоры преобразуются по формуле

$$Y_{JM'}^{LS}(\vartheta', \varphi') \equiv \hat{D}(\alpha, \beta, \gamma) Y_{JM}^{LS}(\vartheta, \varphi) = \sum_{M=-J}^J D_{MM'}^J(\alpha, \beta, \gamma) Y_{JM}^{LS}(\vartheta, \varphi). \quad (18)$$

Здесь  $M$  — проекция полного момента на старую ось  $z$ ;  $M'$  — проекция полного момента на новую ось  $z'$ ;  $\vartheta, \varphi$  — сферические углы вектора  $\mathbf{n}$  в исходной системе координат  $S$ ,  $\vartheta', \varphi'$  — сферические углы того же вектора в повернутой системе координат  $S'$ . Связь между  $\vartheta', \varphi'$  и  $\vartheta, \varphi$  дается формулами 1.4(2), 1.4(3). Величины  $D_{MM'}^J(\alpha, \beta, \gamma)$  — матричные элементы оператора поворота, т. е.  $D$ -функции Вигнера (гл. 4). Отметим, что закон преобразования шаровых тензоров определяется значением полного момента  $J$ , а не спина  $S$ . В этом смысле название «ранг шарового тензора», применяемое для величины  $S$ , носит чисто условный характер. Истинным рангом шарового тензора является величина  $J$ .

### 5. Дифференциальные уравнения

а. Шаровые тензоры являются собственными функциями оператора  $\hat{L}^2$ , т. е. удовлетворяют уравнению

$$\{\Delta_{\vartheta} + L(L+1)\} Y_{JM}^{LS}(\vartheta, \varphi) = 0, \quad (19)$$

где  $\Delta_{\vartheta}$  — угловая часть оператора Лапласа (см. 1.3.2).

В развернутой записи это уравнение имеет вид

$$\frac{1}{\sin \vartheta} \cdot \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left\{ \sin \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} Y_{JM}^{LS}(\vartheta, \varphi) \right\} + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} Y_{JM}^{LS}(\vartheta, \varphi) + L(L+1) Y_{JM}^{LS}(\vartheta, \varphi) = 0. \quad (20)$$

б. Компоненты тензоров  $r^L Y_{JM}^{LS}(\vartheta, \varphi)$  являются гармоническими полиномами порядка  $L$ , т. е. удовлетворяют уравнению Лапласа

$$\Delta \{r^L Y_{JM}^{LS}(\vartheta, \varphi)\} = 0. \quad (21)$$

в. Величины  $z_L(kr) Y_{JM}^{LS}(\vartheta, \varphi)$  — решения уравнения Гельмгольца

$$(\Delta + k^2) \{z_L(kr) Y_{JM}^{LS}(\vartheta, \varphi)\} = 0. \quad (22)$$

Здесь

$$z_L(kr) = \sqrt{\frac{\pi}{2kr}} Z_{L+1/2}(kr), \quad (23)$$

а  $Z_{L+1/2}$  — любая из цилиндрических функций с полупеллым индексом.

## 6. Действие оператора $\nabla$ и операторов угловых моментов на шаровые тензоры

В формулах, приведенных ниже,  $\mathbf{r} = \{r, \vartheta, \varphi\}$ ,  $\Phi(r)$  — произвольная функция от  $r \equiv |\mathbf{r}|$ ,  $\hat{\mathbf{L}}$  — оператор орбитального момента,  $\hat{\mathbf{S}}$  — оператор спина,  $\hat{\mathbf{J}} = \hat{\mathbf{L}} + \hat{\mathbf{S}}$  — оператор полного углового момента,  $\nabla_\mu$ ,  $\hat{L}_\mu$  и т. д. — циклические компоненты соответствующих операторов ( $\mu = \pm 1, 0$ ).

$$\begin{aligned} \nabla_\mu \{ \Phi(r) Y_{JM}^{LS}(\vartheta, \varphi) \} &= (-1)^{J+L+S} \sqrt{(2J+1)(L+1)} \left\{ \frac{d\Phi(r)}{dr} - \frac{L}{r} \Phi(r) \right\} \sum_{J'} \left\{ \begin{matrix} J & J' & 1 \\ L+1 & L & S \end{matrix} \right\} C_{JM1\mu}^{J'M+\mu} Y_{J'M+\mu}^{L+1S}(\vartheta, \varphi) + \\ &+ (-1)^{J+L+S+1} \sqrt{(2J+1)L} \left\{ \frac{d\Phi(r)}{dr} + \frac{L+1}{r} \Phi(r) \right\} \sum_{J'} \left\{ \begin{matrix} J & J' & 1 \\ L-1 & L & S \end{matrix} \right\} C_{JM1\mu}^{J'M+\mu} Y_{J'M+\mu}^{L-1S}(\vartheta, \varphi). \end{aligned} \quad (24)$$

В частности,

$$r \nabla_\mu Y_{JM}^{LS}(\vartheta, \varphi) = (-1)^{J+L+S+1} \sqrt{2J+1} \sum_{J'L'} A_{L'}(L) \left\{ \begin{matrix} J & J' & 1 \\ L' & L & S \end{matrix} \right\} C_{JM1\mu}^{J'M+\mu} Y_{J'M+\mu}^{L'S}(\vartheta, \varphi), \quad (25)$$

где

$$A_{L'}(L) = \begin{cases} L\sqrt{L+1}, & \text{если } L' = L+1, \\ (L+1)\sqrt{L}, & \text{если } L' = L-1, \\ 0, & \text{если } L' \neq L \pm 1. \end{cases} \quad (26)$$

$$\begin{aligned} \hat{L}_\mu \{ \Phi(r) Y_{JM}^{LS}(\vartheta, \varphi) \} &= \Phi(r) \hat{L}_\mu \{ Y_{JM}^{LS}(\vartheta, \varphi) \} = \\ &= (-1)^{J+L+S+1} \Phi(r) \sqrt{(2J+1)L(L+1)(2L+1)} \sum_{J'} \left\{ \begin{matrix} J & J' & 1 \\ L & L & S \end{matrix} \right\} C_{JM1\mu}^{J'M+\mu} Y_{J'M+\mu}^{LS}(\vartheta, \varphi). \end{aligned} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} \hat{S}_\mu \{ \Phi(r) Y_{JM}^{LS}(\vartheta, \varphi) \} &= \Phi(r) \hat{S}_\mu \{ Y_{JM}^{LS}(\vartheta, \varphi) \} = \\ &= (-1)^{L+1} \Phi(r) \sqrt{(2J+1)S(S+1)(2S+1)} \sum_{J'} (-1)^{J'+S} \left\{ \begin{matrix} J & J' & 1 \\ S & S & L \end{matrix} \right\} C_{JM1\mu}^{J'M+\mu} Y_{J'M+\mu}^{LS}(\vartheta, \varphi), \end{aligned} \quad (28)$$

$$\hat{J}_\mu \{ \Phi(r) Y_{JM}^{LS}(\vartheta, \varphi) \} = \Phi(r) \hat{J}_\mu \{ Y_{JM}^{LS}(\vartheta, \varphi) \} = \Phi(r) \sqrt{J(J+1)} C_{JM1\mu}^{J'M+\mu} Y_{J'M+\mu}^{LS}(\vartheta, \varphi). \quad (29)$$

б)

$$(\mathbf{r} \cdot \nabla) \{ \Phi(r) Y_{JM}^{LS}(\vartheta, \varphi) \} = r \frac{d\Phi(r)}{dr} Y_{JM}^{LS}(\vartheta, \varphi), \quad (30)$$

$$(\mathbf{r} \cdot \hat{\mathbf{L}}) \{ \Phi(r) Y_{JM}^{LS}(\vartheta, \varphi) \} = 0, \quad (31)$$

$$(\mathbf{r} \cdot \hat{\mathbf{S}}) \{ \Phi(r) Y_{JM}^{LS}(\vartheta, \varphi) \} = r \Phi(r) (-1)^{J+L+S} \sqrt{S(S+1)(2S+1)(2L+1)} \sum_{L'} \left\{ \begin{matrix} L & L' & 1 \\ S & S & J \end{matrix} \right\} C_{L'0}^{L'0} Y_{JM}^{L'S}(\vartheta, \varphi). \quad (32)$$

В развернутой записи формула (32) имеет вид

$$\begin{aligned} (\hat{\mathbf{S}} \cdot \mathbf{n}) Y_{JM}^{LS}(\vartheta, \varphi) &= -\frac{1}{2} \left\{ \sqrt{\frac{(J+L+S+2)(J+L-S+1)(J-L+S)(-J+L+S+1)}{(2L+1)(2L+3)}} Y_{JM}^{L+1S}(\vartheta, \varphi) + \right. \\ &+ \left. \sqrt{\frac{(J+L+S+1)(J+L-S)(J-L+S+1)(-J+L+S)}{(2L-1)(2L+1)}} Y_{JM}^{L-1S}(\vartheta, \varphi) \right\}, \end{aligned} \quad (33)$$

$$(\mathbf{r} \cdot \hat{\mathbf{J}}) \{ \Phi(r) Y_{JM}^{LS}(\vartheta, \varphi) \} = (\mathbf{r} \cdot \hat{\mathbf{S}}) \{ \Phi(r) Y_{JM}^{LS}(\vartheta, \varphi) \}. \quad (34)$$

в)

$$\begin{aligned} & (\hat{\mathbf{S}} \cdot \nabla) \{ \Phi(r) Y_{JM}^{LS}(\vartheta, \varphi) \} = \\ & = -\frac{1}{2} \left\{ \frac{d\Phi(r)}{dr} - \frac{L}{r} \Phi(r) \right\} \sqrt{\frac{(J+L+S+2)(J+L-S+1)(J-L+S)(-J+L+S+1)}{(2L+1)(2L+3)}} Y_{JM}^{L+1S}(\vartheta, \varphi) - \\ & - \frac{1}{2} \left\{ \frac{d\Phi(r)}{dr} + \frac{L+1}{r} \Phi(r) \right\} \sqrt{\frac{(J+L+S+1)(J+L-S)(J-L+S+1)(-J+L+S)}{(2L-1)(2L+1)}} Y_{JM}^{L-1S}(\vartheta, \varphi), \end{aligned} \quad (35)$$

$$(\hat{\mathbf{S}} \cdot \hat{\mathbf{L}}) \{ \Phi(r) Y_{JM}^{LS}(\vartheta, \varphi) \} = \frac{1}{2} \{ J(J+1) - L(L+1) - S(S+1) \} \Phi(r) Y_{JM}^{LS}(\vartheta, \varphi), \quad (36)$$

$$(\hat{\mathbf{S}} \cdot \hat{\mathbf{J}}) \{ \Phi(r) Y_{JM}^{LS}(\vartheta, \varphi) \} = \frac{1}{2} \{ J(J+1) - L(L+1) + S(S+1) \} \Phi(r) Y_{JM}^{LS}(\vartheta, \varphi), \quad (37)$$

$$(\hat{\mathbf{L}} \cdot \hat{\mathbf{J}}) \{ \Phi(r) Y_{JM}^{LS}(\vartheta, \varphi) \} = \frac{1}{2} \{ J(J+1) + L(L+1) - S(S+1) \} \Phi(r) Y_{JM}^{LS}(\vartheta, \varphi). \quad (38)$$

## 7. Суммы шаровых тензоров

В формулах (39)–(42) предполагается, что  $S$  — целое, а ковариантные компоненты шаровых тензоров определены по формулам (8), (9):

$$\sum_{\mu=-S}^S Y_{S\mu}(\vartheta, \varphi) [Y_{JM}^{LS}(\vartheta, \varphi)]_{\mu}^{\mu} = \sqrt{\frac{(2S+1)(2L+1)}{4\pi(2J+1)}} C_{L0S0}^{J0} Y_{JM}(\vartheta, \varphi), \quad (39)$$

$$\sum_{\mu=-S}^S Y_{S\mu}^*(\vartheta, \varphi) [Y_{JM}^{LS}(\vartheta, \varphi)]_{\mu} = \sqrt{\frac{(2S+1)(2L+1)}{4\pi(2J+1)}} C_{L0S0}^{J0} Y_{JM}(\vartheta, \varphi), \quad (40)$$

$$\sum_{M=-J}^J Y_{JM}^*(\vartheta, \varphi) [Y_{JM}^{LS}(\vartheta, \varphi)]_{\mu}^{\mu} = (-1)^{\mu} \sqrt{\frac{(2J+1)(2L+1)}{4\pi(2S+1)}} C_{S0L0}^{J0} Y_{S-\mu}(\vartheta, \varphi), \quad (41)$$

$$\sum_{M=-J}^J Y_{JM}^*(\vartheta, \varphi) [Y_{JM}^{LS}(\vartheta, \varphi)]_{\mu} = \sqrt{\frac{(2J+1)(2L+1)}{4\pi(2S+1)}} C_{S0L0}^{J0} Y_{S\mu}(\vartheta, \varphi). \quad (42)$$

## 8. Условия ортогональности, нормировки и полноты

Совокупность шаровых тензоров  $Y_{JM}^{LS}(\vartheta, \varphi)$  данного ранга  $S$  при всех положительных целых (в случае целого  $S$ ) или полуцелых (в случае полуцелого  $S$ ) значениях  $J$  ( $0 \leq J < \infty$ ), при  $L = |J-S|, |J-S+1|, \dots, J+S-1, J+S$  и при  $M = -J, -J+1, \dots, J-1, J$  образует ортонормированную полную систему тензорных функций в области углов  $0 \leq \vartheta \leq \pi, 0 \leq \varphi < 2\pi$ .

Условие ортогональности и нормировки для шаровых тензоров

$$\int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} Y_{J'M'}^{L'S'}(\vartheta, \varphi) Y_{JM}^{LS}(\vartheta, \varphi) \sin \vartheta d\vartheta d\varphi = \delta_{JJ'} \delta_{MM'} \delta_{LL'}. \quad (43)$$

Условие полноты для шаровых тензоров

$$\sum_J \sum_{L=|J-S|}^{J+S} \sum_{M=-J}^J [Y_{JM}^{LS}(\vartheta, \varphi)]_{\mu}^{\mu} [Y_{JM}^{LS}(\vartheta', \varphi')]_{\nu}^{\nu} = \delta_{\mu\nu} \delta(\cos \vartheta - \cos \vartheta') \delta(\varphi - \varphi'), \quad (44)$$

( $\mu; \nu = -S, \dots, S-1, S$ ).

## 9. Разложение по шаровым тензорам

Всякий тензор  $F_S(\vartheta, \varphi)$  ранга  $S$ , зависящий от углов  $\vartheta, \varphi$ , компоненты которого  $F_{S\mu}(\vartheta, \varphi)$  удовлетворяют условиям

$$\int |F_{S\mu}(\vartheta, \varphi)|^2 d\Omega < \infty, \quad (\mu = -S, \dots, S-1, S), \quad (45)$$

можно разложить в ряд по шаровым тензорам  $Y_{JM}^{LS}(\vartheta, \varphi)$ , т. е. представить в виде

$$F_S(\vartheta, \varphi) = \sum_{JLM} A_{JLM} Y_{JM}^{LS}(\vartheta, \varphi). \quad (46)$$

Коэффициенты разложения даются формулами

$$A_{JLM} = \int d\Omega Y_{JM}^{LS+}(\vartheta, \varphi) F_S(\vartheta, \varphi). \quad (47)$$

Они удовлетворяют соотношению

$$\sum_{JLM} |A_{JLM}|^2 = \int d\Omega |F_S(\vartheta, \varphi)|^2. \quad (48)$$

### 7.2. ШАРОВЫЕ СПИНОРЫ

#### 1. Определение

Шаровыми спинорами  $\Omega_{JM}^L(\vartheta, \varphi)$  называются шаровые тензоры ранга  $\frac{1}{2}$  (см. 7.1.1).

$$\Omega_{JM}^L(\vartheta, \varphi) \equiv Y_{JM}^{L\frac{1}{2}}(\vartheta, \varphi). \quad (1)$$

Шаровые спиноры  $\Omega_{JM}^L(\vartheta, \varphi)$  являются собственными функциями операторов  $\hat{J}^2, \hat{J}_z, \hat{L}^2, \hat{S}^2$ , где  $\hat{L}$  — оператор орбитального момента (2.2),  $\hat{S}$  — оператор спинового момента для спина  $1/2$  (2.5),  $\hat{J} = \hat{L} + \hat{S}$  — оператор полного углового момента (2.1).

$$\begin{aligned} \hat{J}^2 \Omega_{JM}^L(\vartheta, \varphi) &= J(J+1) \Omega_{JM}^L(\vartheta, \varphi), \\ \hat{J}_z \Omega_{JM}^L(\vartheta, \varphi) &= M \Omega_{JM}^L(\vartheta, \varphi), \\ \hat{L}^2 \Omega_{JM}^L(\vartheta, \varphi) &= L(L+1) \Omega_{JM}^L(\vartheta, \varphi), \\ \hat{S}^2 \Omega_{JM}^L(\vartheta, \varphi) &= \frac{3}{4} \Omega_{JM}^L(\vartheta, \varphi), \end{aligned} \quad (2)$$

Шаровые спиноры выражаются через сферические функции  $Y_{Lm}(\vartheta, \varphi)$  (см. гл. 5) и спинорные функции  $\chi_{\mu, \sigma}$  (см. 6.2) для частиц со спином  $1/2$  по формуле

$$\Omega_{JM}^L(\vartheta, \varphi) = \sum_{m\sigma} C_{Lm\frac{1}{2}\sigma}^{JM} Y_{Lm}(\vartheta, \varphi) \chi_{\mu, \sigma}. \quad (3)$$

Индекс  $J$  принимает полуцелые, а индекс  $L$  — целые неотрицательные значения. При заданном значении  $J$  величина  $L$  может принимать два значения  $L = J \pm \frac{1}{2}$ . Индекс  $M$  принимает  $2J + 1$  значений  $M = -J, -J + 1, \dots, J - 1, J$ . Шаровые спиноры ортогональны и нормированы в области изменения аргументов  $0 \leq \vartheta \leq \pi, 0 \leq \varphi < 2\pi$  (см. 7.2.7).

### 2. Компоненты шаровых спиноров

а. Разложение шаровых спиноров по базисным спинорам  $\chi_{\mu, \sigma}$  имеет вид

$$\Omega_{JM}^L(\vartheta, \varphi) = \sum_{\mu=-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} [\Omega_{JM}^L(\vartheta, \varphi)]^\mu \chi_{\mu, \sigma}. \quad (4)$$

где  $[\Omega_{JM}^L]^\mu$  — контравариантные компоненты шарового спинора.

Контравариантные компоненты шарового спинора  $\Omega_{JM}^L(\vartheta, \varphi)$  выражаются следующим образом:

$$[\Omega_{JM}^L(\vartheta, \varphi)]^\mu = C_{LM-\mu}^{JM} Y_{LM-\mu}(\vartheta, \varphi). \quad (5)$$

В частности,

$$[\Omega_{JM}^{J+1/2}(\vartheta, \varphi)]^{1/2} = -\sqrt{\frac{J-M+1}{2(J+1)}} Y_{J+1/2, M-1/2}(\vartheta, \varphi), \quad (6)$$

$$[\Omega_{JM}^{J+1/2}(\vartheta, \varphi)]^{-1/2} = \sqrt{\frac{J+M+1}{2(J+1)}} Y_{J+1/2, M+1/2}(\vartheta, \varphi),$$

$$[\Omega_{JM}^{J-1/2}(\vartheta, \varphi)]^{1/2} = \sqrt{\frac{J+M}{2J}} Y_{J-1/2, M-1/2}(\vartheta, \varphi), \quad (7)$$

$$[\Omega_{JM}^{J-1/2}(\vartheta, \varphi)]^{-1/2} = \sqrt{\frac{J-M}{2J}} Y_{J-1/2, M+1/2}(\vartheta, \varphi).$$

Ковариантные компоненты шарового спинора  $\Omega_{JM}^L(\vartheta, \varphi)$  связаны с контравариантными компонентами соотношением

$$[\Omega_{JM}^L(\vartheta, \varphi)]_\mu = (-1)^{1/2-\mu} [\Omega_{JM}^L(\vartheta, \varphi)]^{-\mu} \quad (8)$$

и имеют вид

$$[\Omega_{JM}^L(\vartheta, \varphi)]_\mu = (-1)^{1/2-\mu} C_{LM+\mu}^{JM} Y_{LM+\mu}(\vartheta, \varphi). \quad (9)$$

В частности,

$$[\Omega_{JM}^{J+1/2}(\vartheta, \varphi)]_{1/2} = \sqrt{\frac{J+M+1}{2(J+1)}} Y_{J+1/2, M+1/2}(\vartheta, \varphi), \quad (10)$$

$$[\Omega_{JM}^{J+1/2}(\vartheta, \varphi)]_{-1/2} = \sqrt{\frac{J-M+1}{2(J+1)}} Y_{J+1/2, M-1/2}(\vartheta, \varphi),$$

$$[\Omega_{JM}^{J-1/2}(\vartheta, \varphi)]_{1/2} = \sqrt{\frac{J-M}{2J}} Y_{J-1/2, M+1/2}(\vartheta, \varphi), \quad (11)$$

$$[\Omega_{JM}^{J-1/2}(\vartheta, \varphi)]_{-1/2} = -\sqrt{\frac{J+M}{2J}} Y_{J-1/2, M-1/2}(\vartheta, \varphi).$$

б. Если записывать  $\chi_{1/2, \sigma}$  в виде столбцов

$$\chi_{1/2, 1/2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \chi_{1/2, -1/2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

то шаровые спиноры  $\Omega_{JM}^L(\vartheta, \varphi)$  будут следующими:

$$\Omega_{JM}^{J+1/2}(\vartheta, \varphi) = \begin{pmatrix} -\sqrt{\frac{J-M+1}{2(J+1)}} Y_{J+1/2, M-1/2}(\vartheta, \varphi) \\ \sqrt{\frac{J+M+1}{2(J+1)}} Y_{J+1/2, M+1/2}(\vartheta, \varphi) \end{pmatrix}, \quad (12)$$

$$\Omega_{JM}^{J-1/2}(\vartheta, \varphi) = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{J+M}{2J}} Y_{J-1/2, M-1/2}(\vartheta, \varphi) \\ \sqrt{\frac{J-M}{2J}} Y_{J-1/2, M+1/2}(\vartheta, \varphi) \end{pmatrix}. \quad (13)$$

в. Разложение шаровых спиноров  $\Omega_{JM}^L(\vartheta, \varphi)$  по спиральным спинорам  $\chi_{1/2, \lambda}(\vartheta, \varphi)$  (см. 6.2.5) имеет вид

$$\Omega_{JM}^L(\vartheta, \varphi) = \sqrt{\frac{2L+1}{4\pi}} \sum_{\lambda} C_{L0 1/2 \lambda}^{J \lambda} D_{-\lambda - M}^J(0, \vartheta, \varphi) \chi_{1/2, \lambda}(\vartheta, \varphi), \quad (14)$$

или в развернутой записи

$$\begin{aligned}\Omega_{JM}^{J+1/2}(\vartheta, \varphi) &= \sqrt{\frac{2J+1}{8\pi}} \sum_{\lambda} (-1)^{1/2+\lambda} D_{-\lambda-M}^J(0, \vartheta, \varphi) \chi_{1/2\lambda}(\vartheta, \varphi), \\ \Omega_{JM}^{J-1/2}(\vartheta, \varphi) &= \sqrt{\frac{2J+1}{8\pi}} \sum_{\lambda} D_{-\lambda-M}^J(0, \vartheta, \varphi) \chi_{1/2\lambda}(\vartheta, \varphi).\end{aligned}\quad (15)$$

### 3. Комплексное сопряжение. Обращение времени

а. Мы пользуемся представлением, в котором базисные спиноры  $\chi_{1/2\sigma}$  вещественны:  $\chi_{1/2\sigma}^* = \chi_{1/2\sigma}$ . Поэтому шаровые спиноры  $\Omega_{JM}^L(\vartheta, \varphi)$  при комплексном сопряжении преобразуются по формуле

$$\Omega_{JM}^{L*}(\vartheta, \varphi) = (-1)^{J+L-M} i \delta_y \Omega_{J-M}^L(\vartheta, \varphi), \quad (16)$$

где  $2 \times 2$  матрица  $i\delta_y$  имеет вид

$$i\delta_y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (17)$$

На компоненты шаровых спиноров комплексное сопряжение действует по формулам

$$[\Omega_{JM}^L(\vartheta, \varphi)]_{\mu}^* = [\Omega_{JM}^{L*}(\vartheta, \varphi)]_{\mu} = (-1)^{J+L+M} [\Omega_{J-M}^L(\vartheta, \varphi)]_{\mu} = (-1)^{J+L-M-\mu+1/2} [\Omega_{J-M}^L(\vartheta, \varphi)]_{-\mu}, \quad (18)$$

$$[\Omega_{JM}^L(\vartheta, \varphi)]_{\mu}^{**} = [\Omega_{JM}^{L*}(\vartheta, \varphi)]_{\mu} = (-1)^{J+L-M} [\Omega_{J-M}^L(\vartheta, \varphi)]_{\mu} = (-1)^{J+L-M-\mu+1/2} [\Omega_{J-M}^L(\vartheta, \varphi)]_{-\mu}. \quad (19)$$

б. Оператор обращения времени, согласно Вигнеру, действует на спиноры по формуле

$$\hat{P}_t \Omega_{JM}^L(\vartheta, \varphi) = \delta_y \Omega_{JM}^{L*}(\vartheta, \varphi) = (-1)^{J+L-M+1/2} \Omega_{J-M}^L(\vartheta, \varphi). \quad (20)$$

### 4. Поведение шаровых спиноров при преобразованиях системы координат

а. Инверсия системы координат

$$\hat{P}_r \Omega_{JM}^L(\vartheta, \varphi) = \Omega_{JM}^L(\pi - \vartheta, \pi + \varphi) = (-1)^L \Omega_{JM}^L(\vartheta, \varphi). \quad (21)$$

б. Поворот системы координат

При повороте системы координат, характеризуемом углами Эйлера  $\alpha, \beta, \gamma$ , шаровые спиноры преобразуются по формуле

$$\Omega_{JM'}^L(\vartheta', \varphi') = \hat{D}(\alpha, \beta, \gamma) \Omega_{JM'}^L(\vartheta, \varphi) = \sum_{M=-J}^J D_{MM'}^J(\alpha, \beta, \gamma) \Omega_{JM}^L(\vartheta, \varphi). \quad (22)$$

Здесь  $D_{MM'}^J$  — матрица поворота (см. гл. 4);  $M'$  — проекция полного момента на новую ось  $z'$ ;  $\vartheta, \varphi$  — сферические углы радиус-вектора  $\mathbf{r}$  в исходной системе координат;  $\vartheta', \varphi'$  — сферические углы того же вектора  $\mathbf{r}$  в повернутой системе координат. Связь  $\vartheta', \varphi'$  с  $\vartheta, \varphi$  дается формулами 1.4(2), 1.4(3).

### 5. Действие оператора $\nabla$

и операторов угловых моментов на шаровые спиноры

Для шаровых спиноров справедливы общие формулы 7.1(24) — 7.1(38), в которых следует положить  $S = 1/2$ . Кроме того, имеют место следующие соотношения, в которых  $\hat{S}$  — оператор спина (2.5),  $\hat{L}$  — оператор орбитального момента (2.2),  $\hat{J} = \hat{L} + \hat{S}$  — оператор полного момента,  $\mathbf{n}$  — орт со сферическими углами  $\vartheta, \varphi$ .

$$\text{а)} \quad (\hat{S} \cdot \mathbf{n}) \Omega_{JM}^L(\vartheta, \varphi) = -\frac{1}{2} \Omega_{JM}^{L'}(\vartheta, \varphi), \quad (23)$$

где

$$L' = 2J - L = \begin{cases} J - \frac{1}{2}, & \text{если } L = J + \frac{1}{2}, \\ J + \frac{1}{2}, & \text{если } L = J - \frac{1}{2}. \end{cases} \quad (24)$$

В развернутой записи

$$\begin{aligned} (\hat{\mathbf{S}} \cdot \mathbf{n}) \Omega_{JM}^{J+1/2}(\vartheta, \varphi) &= -\frac{1}{2} \Omega_{JM}^{J-1/2}(\vartheta, \varphi), \\ (\hat{\mathbf{S}} \cdot \mathbf{n}) \Omega_{JM}^{J-1/2}(\vartheta, \varphi) &= -\frac{1}{2} \Omega_{JM}^{J+1/2}(\vartheta, \varphi). \end{aligned} \quad (25)$$

б)

$$r(\hat{\mathbf{S}} \cdot \mathbf{V}) \Omega_{JM}^L(\vartheta, \varphi) = -\frac{1+x}{2} \Omega_{JM}^{L'}(\vartheta, \varphi), \quad (26)$$

где  $L' = 2J - L$ ,

$$x = \begin{cases} J + \frac{1}{2} = L, & \text{если } L = J + \frac{1}{2}, \\ -(J + \frac{1}{2}) = -(L+1), & \text{если } L = J - \frac{1}{2}. \end{cases} \quad (27)$$

В развернутой записи

$$\begin{aligned} r(\hat{\mathbf{S}} \cdot \mathbf{V}) \Omega_{JM}^{J+1/2}(\vartheta, \varphi) &= -\frac{2J+3}{4} \Omega_{JM}^{J-1/2}(\vartheta, \varphi), \\ r(\hat{\mathbf{S}} \cdot \mathbf{V}) \Omega_{JM}^{J-1/2}(\vartheta, \varphi) &= \frac{2J-1}{4} \Omega_{JM}^{J+1/2}(\vartheta, \varphi). \end{aligned} \quad (28)$$

в)

$$(\hat{\mathbf{L}} \cdot \hat{\mathbf{S}}) \Omega_{JM}^L(\vartheta, \varphi) = \frac{1}{2} \left\{ J(J+1) - L(L+1) - \frac{3}{4} \right\} \Omega_{JM}^L(\vartheta, \varphi) = -\frac{1+x}{2} \Omega_{JM}^L(\vartheta, \varphi). \quad (29)$$

В развернутой записи

$$\begin{aligned} (\hat{\mathbf{L}} \cdot \hat{\mathbf{S}}) \Omega_{JM}^{J+1/2}(\vartheta, \varphi) &= -\frac{2J+3}{4} \Omega_{JM}^{J+1/2}(\vartheta, \varphi), \\ (\hat{\mathbf{L}} \cdot \hat{\mathbf{S}}) \Omega_{JM}^{J-1/2}(\vartheta, \varphi) &= \frac{2J-1}{4} \Omega_{JM}^{J-1/2}(\vartheta, \varphi). \end{aligned} \quad (30)$$

## 6. Рекуррентные соотношения

$$\begin{aligned} \cos \vartheta \Omega_{JM}^L(\vartheta, \varphi) &= \frac{\sqrt{(J-M+1)(J+M+1)}}{2(J+1)} \Omega_{J+1M}^{L+1}(\vartheta, \varphi) - \frac{M}{2J(J+1)} \Omega_{JM}^{L'}(\vartheta, \varphi) + \\ &+ \frac{\sqrt{(J-M)(J+M)}}{2J} \Omega_{J-1M}^{L-1}(\vartheta, \varphi), \end{aligned} \quad (31)$$

$$\begin{aligned} \sin \vartheta e^{i\varphi} \Omega_{JM}^L(\vartheta, \varphi) &= -\frac{\sqrt{(J+M+1)(J+M+2)}}{2(J+1)} \Omega_{J+1M+1}^{L+1}(\vartheta, \varphi) - \\ &- \frac{\sqrt{(J+M+1)(J-M)}}{2J(J+1)} \Omega_{JM+1}^{L'}(\vartheta, \varphi) + \frac{\sqrt{(J-M)(J-M-1)}}{2J} \Omega_{J-1M+1}^{L-1}(\vartheta, \varphi). \end{aligned} \quad (32)$$

$$\begin{aligned} \sin \vartheta e^{-i\varphi} \Omega_{JM}^L(\vartheta, \varphi) &= \frac{\sqrt{(J-M+1)(J-M+2)}}{2(J+1)} \Omega_{J+1M-1}^{L+1}(\vartheta, \varphi) - \\ &- \frac{\sqrt{(J+M)(J-M+1)}}{2J(J+1)} \Omega_{JM-1}^{L'}(\vartheta, \varphi) - \frac{\sqrt{(J+M)(J+M-1)}}{2J} \Omega_{J-1M-1}^{L-1}(\vartheta, \varphi). \end{aligned} \quad (33)$$

Здесь  $L'$  дается формулой (24). Формулы (31)—(33) являются развернутой записью соотношения

$$n_{\mu} \Omega_{JM}^L(\vartheta, \varphi) = (-1)^{J+L+1/2} \sqrt{(2J+1)(2L+1)} \sum_{J'L'} \left\{ \begin{matrix} J' & J & 1 \\ L & L' & \frac{1}{2} \end{matrix} \right\} C_{L'0}^{L'0} C_{JM1\mu}^{J'M+1\mu} \Omega_{J'M+1\mu}^{L'}(\vartheta, \varphi), \quad (34)$$

где  $n_{\mu}$  ( $\mu = \pm 1, 0$ ) — циклические компоненты орта  $\mathbf{n}(\vartheta, \varphi)$ .

## 7. Условия ортогональности, нормировки и полноты.

### Разложение по шаровым спинорам

Совокупность шаровых спиноров  $\Omega_{JM}^L(\vartheta, \varphi)$  при всех положительных полуцелых значениях  $J$  ( $\frac{1}{2} \leq J < \infty$ ), при  $L = J \pm \frac{1}{2}$  и  $M = -J, -J+1, \dots, J$  образует полную систему спиноров в области углов  $0 \leq \vartheta \leq \pi$ ,  $0 \leq \varphi < 2\pi$ . Условие ортогональности и нормировки для шаровых спиноров имеет вид

$$\int_0^{\pi} d\vartheta \sin \vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi \Omega_{JM}^{L+}(\vartheta, \varphi) \Omega_{JM}^L(\vartheta, \varphi) = \delta_{J'J} \delta_{L'L} \delta_{M'M}. \quad (35)$$

Условие полноты для шаровых спиноров можно записать следующим образом:

$$\sum_{J=1/2}^{\infty} \sum_{L=J-1/2}^{J+1/2} \sum_{M=-J}^J \Omega_{JM}^L(\vartheta, \varphi) \Omega_{JM}^{L+}(\vartheta', \varphi') = \hat{I} \delta(\cos \vartheta - \cos \vartheta') \delta(\varphi - \varphi'), \quad (36)$$

где  $\hat{I}$  — единичная матрица размерности  $2 \times 2$ .

Произвольный спинор  $\chi(\vartheta, \varphi)$ , удовлетворяющий условию

$$\int \chi^+(\vartheta, \varphi) \chi(\vartheta, \varphi) d\Omega < \infty, \quad (37)$$

может быть разложен в области  $0 \leq \vartheta \leq \pi$ ,  $0 \leq \varphi < 2\pi$  в ряд по шаровым спинорам

$$\chi(\vartheta, \varphi) = \sum_{JLM} A_{JM}^L \Omega_{JM}^L(\vartheta, \varphi), \quad (38)$$

где коэффициенты разложения  $A_{JM}^L$  даются формулой

$$A_{JM}^L = \int_0^{\pi} d\vartheta \sin \vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi \Omega_{JM}^{L+}(\vartheta, \varphi) \chi(\vartheta, \varphi). \quad (39)$$

## 8. Разложение Клебша-Гордана для произведений шаровых спиноров

$$\begin{aligned} \Omega_{J_1 M_1}^{L_1+}(\vartheta, \varphi) \Omega_{J_2 M_2}^{L_2}(\vartheta, \varphi) &= \sum_L (-1)^{J_1+M_1+J_2+L+1/2} \left\{ \begin{matrix} L_1 & L_2 & L \\ J_2 & J_1 & \frac{1}{2} \end{matrix} \right\} \times \\ &\times \sqrt{\frac{(2J_1+1)(2J_2+1)(2L_1+1)(2L_2+1)}{4\pi(2L+1)}} C_{L_1 0 L_2 0}^{L 0} C_{J_1-M_1 J_2 M_2}^{LM} Y_{LM}^L(\vartheta, \varphi), \end{aligned} \quad (40)$$

$$\begin{aligned} \Omega_{J_1 M_1}^{L_1+}(\vartheta, \varphi) \hat{S} \Omega_{J_2 M_2}^{L_2}(\vartheta, \varphi) &= (-1)^{J_2+L_1+M_1} \sqrt{\frac{3(2J_1+1)(2J_2+1)(2L_1+1)(2L_2+1)}{8\pi}} \times \\ &\times \sum_{JL} (-1)^J C_{L_1 0 L_2 0}^{L 0} \left\{ \begin{matrix} L_1 & J_1 & \frac{1}{2} \\ L_2 & J_2 & \frac{1}{2} \\ L & J & 1 \end{matrix} \right\} C_{J_1-M_1 J_2 M_2}^{JM} Y_{JM}^L(\vartheta, \varphi), \end{aligned} \quad (41)$$

где  $\hat{S}$  — оператор спина,  $Y_{JM}^L$  — шаровые векторы (см. 7.3).



## 9. Квадратичные комбинации шаровых спиноров

Величины вида  $\Omega_{JM}^{L+}(\vartheta, \varphi)$   $\Omega_{JM}^L(\vartheta, \varphi)$  характеризуют угловые распределения частиц со спином  $1/2$  в состояниях с полным моментом  $J$ , проекцией полного момента  $M$  и орбитальным моментом  $L$ . Эти величины не зависят от орбитального момента  $L$  и азимутального угла  $\varphi$ .

Введем обозначение

$$W_{JM}(\vartheta) \equiv \Omega_{JM}^{L+}(\vartheta, \varphi) \Omega_{JM}^L(\vartheta, \varphi). \quad (42)$$

Имеет место соотношение

$$\begin{aligned} W_{JM}(\vartheta) &= \frac{1}{2(J+1)} \{ (J+M+1) |Y_{J+1/2, M+1/2}(\vartheta, \varphi)|^2 + (J-M+1) |Y_{J+1/2, M-1/2}(\vartheta, \varphi)|^2 \} = \\ &= \frac{1}{2J} \{ (J+M) |Y_{J-1/2, M-1/2}(\vartheta, \varphi)|^2 + (J-M) |Y_{J-1/2, M+1/2}(\vartheta, \varphi)|^2 \}. \end{aligned} \quad (43)$$

Разложение  $W_{JM}(\vartheta)$  по полиномам Лежандра имеет вид

$$W_{JM}(\vartheta) = \sum_{n=0}^{J-1/2} a_n(J, M) P_{2n}(\cos \vartheta), \quad (44)$$

где

$$\begin{aligned} a_n(J, M) &= -\frac{\sqrt{2J(2J+1)}}{4\pi} (4n+1) \left\{ \begin{matrix} J & J & 2n \\ J - \frac{1}{2} & J - \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{matrix} \right\} C_{J-1/2, 0, 2n, 0}^{J-1/2, 0} C_{JM, 2n, 0}^{JM} = \\ &= (-1)^n \frac{(4n+1)(2J+2n+1)}{4\pi \sqrt{2J+1}} \cdot \frac{\left(J - \frac{1}{2} + n\right)!}{\left(J - \frac{1}{2} - n\right)!} \frac{(2n)!}{(n!)^2} \sqrt{\frac{(2J-2n)!}{(2J+2n+1)!}} C_{JM, 2n, 0}^{JM}. \end{aligned} \quad (45)$$

В частности,

$$\begin{aligned} a_0(J, M) &= \frac{1}{4\pi}, \quad a_1(J, M) = \frac{5}{16\pi} \cdot \frac{J(J+1) - 3M^2}{J(J+1)}, \\ a_2(J, M) &= \frac{27}{256\pi} \cdot \frac{3(J^2 + 2J - 5M^2)(J^2 - 5M^2 - 1) - 10M^2(4M^2 - 1)}{(J-1)J(J+1)(J+2)}. \end{aligned} \quad (46)$$

Величины  $W_{JM}(\vartheta)$  нормированы так, что

$$\begin{aligned} \int W_{JM}(\vartheta) d\Omega &= 1, \\ \sum_{M=-J}^J W_{JM}(\vartheta) &= \frac{2J+1}{4\pi}. \end{aligned} \quad (47)$$

Свойства симметрии  $W_{JM}(\vartheta)$ :

$$W_{JM}(\vartheta) = W_{J-M}(\vartheta) = W_{JM}(\pi - \vartheta) = W_{J-M}(\pi - \vartheta). \quad (48)$$

При  $\vartheta = 0$  и  $\vartheta = \pi$  имеем

$$W_{JM}(0) = W_{JM}(\pi) = \begin{cases} \frac{2J+1}{8\pi} & \text{при } M = \pm \frac{1}{2}, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \quad (49)$$

При частных значениях  $M$  имеем

$$W_{J \pm 1/2}(\vartheta) = \frac{1}{2\pi(2J+1)} \left\{ \sin^2 \vartheta [P'_{J-1/2}(\cos \vartheta)]^2 + \left(J + \frac{1}{2}\right)^2 [P_{J-1/2}(\cos \vartheta)]^2 \right\}, \quad (50)$$

$$W_{J \pm (J-1)}(\vartheta) = \frac{(2J-1)! (\sin \vartheta)^{2J-3}}{\pi 2^{2J+1} \left[\left(J - \frac{1}{2}\right)!\right]^2} \{1 + 4J(J-1) \cos^2 \vartheta\}, \quad (51)$$

ТАБЛИЦА 7.1  
КВАДРАТИЧНЫЕ КОМБИНАЦИИ ШАРОВЫХ СПИНОРОВ

$J$	$M$	$W_{JM}(\vartheta) = \varrho_{JM}^{L+}(\vartheta, \varphi) \varrho_{JM}^L(\vartheta, \varphi)$
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4\pi}$
$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8\pi} \{3 \cos^2 \vartheta + 1\}$
$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{8\pi} \sin^2 \vartheta$
$\frac{5}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{16\pi} \{5 \cos^4 \vartheta - 2 \cos^2 \vartheta + 1\}$
$\frac{5}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{32\pi} \sin^2 \vartheta \{15 \cos^2 \vartheta + 1\}$
$\frac{5}{2}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{15}{32\pi} \sin^4 \vartheta$
$\frac{7}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{64\pi} \{175 \cos^6 \vartheta - 165 \cos^4 \vartheta + 45 \cos^2 \vartheta + 9\}$
$\frac{7}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{15}{64\pi} \sin^2 \vartheta \{21 \cos^4 \vartheta - 6 \cos^2 \vartheta + 1\}$
$\frac{7}{2}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{5}{64\pi} \sin^4 \vartheta \{35 \cos^2 \vartheta + 1\}$
$\frac{7}{2}$	$\frac{7}{2}$	$\frac{35}{64\pi} \sin^6 \vartheta$
$\frac{9}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{256\pi} \{441 \cos^8 \vartheta - 644 \cos^6 \vartheta + 294 \cos^4 \vartheta - 36 \cos^2 \vartheta + 9\}$
$\frac{9}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{15}{128\pi} \sin^2 \vartheta \{147 \cos^6 \vartheta - 105 \cos^4 \vartheta + 21 \cos^2 \vartheta + 1\}$
$\frac{9}{2}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{35}{128\pi} \sin^4 \vartheta \{45 \cos^4 \vartheta - 10 \cos^2 \vartheta + 1\}$
$\frac{9}{2}$	$\frac{7}{2}$	$\frac{35}{512\pi} \sin^6 \vartheta \{63 \cos^2 \vartheta + 1\}$
$\frac{9}{2}$	$\frac{9}{2}$	$\frac{315}{512\pi} \sin^8 \vartheta$
$\frac{11}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{512\pi} \{4851 \cos^{10} \vartheta - 9555 \cos^8 \vartheta + 6510 \cos^6 \vartheta - 1750 \cos^4 \vartheta + 175 \cos^2 \vartheta + 25\}$
$\frac{11}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{105}{512\pi} \sin^2 \vartheta \{297 \cos^8 \vartheta - 348 \cos^6 \vartheta + 126 \cos^4 \vartheta - 12 \cos^2 \vartheta + 1\}$
$\frac{11}{2}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{105}{1024\pi} \sin^4 \vartheta \{495 \cos^6 \vartheta - 285 \cos^4 \vartheta + 45 \cos^2 \vartheta + 1\}$
$\frac{11}{2}$	$\frac{7}{2}$	$\frac{315}{1024\pi} \sin^6 \vartheta \{77 \cos^4 \vartheta - 14 \cos^2 \vartheta + 1\}$
$\frac{11}{2}$	$\frac{9}{2}$	$\frac{63}{1024\pi} \sin^8 \vartheta \{99 \cos^2 \vartheta + 1\}$
$\frac{11}{2}$	$\frac{11}{2}$	$\frac{693}{1024\pi} \sin^{10} \vartheta$

$$W_{J \pm J}(\vartheta) = \frac{(2J)!}{\pi^{2J+1} \left[ \left( J - \frac{1}{2} \right)! \right]^2} \sin^{2J-1} \vartheta. \quad (52)$$

Формулы для  $W_{JM}(\vartheta)$  при  $J = 1/2, 3/2, 5/2, 7/2, 9/2, 11/2$  и  $1/2 \leq M \leq J$  приведены в табл. 7.1. При  $M < 0$  следует воспользоваться соотношением  $W_{JM}(\vartheta) = W_{J-M}(\vartheta)$ .

### 7.3. ШАРОВЫЕ ВЕКТОРЫ

#### 1. Определение

Шаровыми векторами (или векторными сферическими гармониками)  $Y_{JM}^L(\vartheta, \varphi)$  называются шаровые тензоры ранга 1 (см. 7.1.1)

$$Y_{JM}^L(\vartheta, \varphi) \equiv Y_{JM}^{L1}(\vartheta, \varphi). \quad (1)$$

Шаровые векторы  $Y_{JM}^L(\vartheta, \varphi)$  являются собственными функциями операторов  $\hat{J}^2$ ,  $\hat{J}_z$ ,  $\hat{L}^2$ ,  $\hat{S}^2$ , где  $\hat{L}$  — оператор орбитального момента (2.2),  $\hat{S}$  — оператор спинового момента для спина 1 (2.6),  $\hat{J} = \hat{L} + \hat{S}$  — оператор полного углового момента (2.1).

$$\begin{aligned} \hat{J}^2 Y_{JM}^L(\vartheta, \varphi) &= J(J+1) Y_{JM}^L(\vartheta, \varphi), \\ \hat{J}_z Y_{JM}^L(\vartheta, \varphi) &= M Y_{JM}^L(\vartheta, \varphi), \\ \hat{L}^2 Y_{JM}^L(\vartheta, \varphi) &= L(L+1) Y_{JM}^L(\vartheta, \varphi), \\ \hat{S}^2 Y_{JM}^L(\vartheta, \varphi) &= 2 Y_{JM}^L(\vartheta, \varphi). \end{aligned} \quad (2)$$

Согласно 7.1 (2), шаровые векторы  $Y_{JM}^L$  можно записать в виде

$$Y_{JM}^L(\vartheta, \varphi) = \sum_{m, \sigma} C_{Lm1\sigma}^{JM} Y_{Lm}(\vartheta, \varphi) e_{\sigma}. \quad (3)$$

Здесь  $C_{Lm1\sigma}^{JM}$  — коэффициенты Клебша—Гордана (гл. 8),  $Y_{Lm}$  — сферические функции (гл. 5). Величины  $e_{\sigma}$  (спиновые функции, частицы с  $S=1$ ) являются циклическими ковариантными ортами (см. 1.1.3). Индексы  $J$  и  $L$  — целые неотрицательные числа. При заданном значении  $J$  величина  $L$  может принимать три значения  $L = J, J \pm 1$ . В частном случае, когда  $J=0$ , величина  $L$  имеет только одно значение  $L=1$ . Индекс  $M$  принимает значения  $M = -J, -J+1, \dots, J-1, J$ . Три вектора  $Y_{JM}^L(\vartheta, \varphi)$ , имеющие одинаковые  $J, M$ , но разные  $L$ , образуют комплексный ортогональный базис, т. е.

$$Y_{JM}^{L' *}(\vartheta, \varphi) \cdot Y_{JM}^L(\vartheta, \varphi) = 0, \text{ если } L \neq L'. \quad (4)$$

Наряду с шаровыми векторами  $Y_{JM}^L(\vartheta, \varphi)$  широко применяются шаровые векторы  $Y_{JM}^{(\lambda)}(\vartheta, \varphi)$ , у которых индекс  $\lambda$  принимает три значения  $\lambda = 0, \pm 1$ . Шаровые векторы  $Y_{JM}^{(\lambda)}(\vartheta, \varphi)$  в отличие от векторов  $Y_{JM}^L(\vartheta, \varphi)$  не являются, вообще говоря, собственными функциями оператора  $\hat{L}^2$ , но зато определенным образом ориентированы относительно орта  $\mathbf{n} \equiv \mathbf{r}/r$ , у которого  $\vartheta$  и  $\varphi$  — сферические углы. Векторы  $Y_{JM}^{(1)}(\vartheta, \varphi)$  и  $Y_{JM}^{(0)}(\vartheta, \varphi)$  являются поперечными векторами относительно  $\mathbf{n}$ , а вектор  $Y_{JM}^{(-1)}(\vartheta, \varphi)$  — продольный вектор:

$$\begin{aligned} \mathbf{n} \cdot Y_{JM}^{(1)}(\vartheta, \varphi) &= \mathbf{n} \cdot Y_{JM}^{(0)}(\vartheta, \varphi) = 0, \\ \mathbf{n} \times Y_{JM}^{(-1)}(\vartheta, \varphi) &= 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Векторы  $Y_{JM}^{(1)}(\vartheta, \varphi)$  называются иногда векторами электрического типа, а векторы  $Y_{JM}^{(0)}(\vartheta, \varphi)$  — векторами магнитного типа.

Поперечные шаровые векторы имеют вид

$$\begin{aligned} Y_{JM}^{(1)}(\vartheta, \varphi) &= \frac{1}{\sqrt{J(J+1)}} \nabla_{\varrho} Y_{JM}(\vartheta, \varphi), \\ Y_{JM}^{(0)}(\vartheta, \varphi) &= \frac{-i}{\sqrt{J(J+1)}} (\mathbf{n} \times \nabla_{\varrho}) Y_{JM}(\vartheta, \varphi) = \frac{\hat{L}}{\sqrt{J(J+1)}} Y_{JM}(\vartheta, \varphi). \end{aligned} \quad (6)$$

Продольный шаровой вектор выражается следующим образом:

$$Y_{JM}^{(-1)}(\vartheta, \varphi) = nY_{JM}(\vartheta, \varphi). \quad (7)$$

В формулах (6)  $\nabla_{\vartheta}$  — угловая часть оператора  $\nabla$  (см. формулы 1.3(9)—1.3(10)),  $\hat{L}$  — оператор орбитального момента. Три вектора  $Y_{JM}^{(\lambda)}(\vartheta, \varphi)$  с разными значениями  $\lambda$ , но одинаковыми  $J, M$  образуют ортогональный базис

$$Y_{JM}^{(\lambda')*}(\vartheta, \varphi) \cdot Y_{JM}^{(\lambda)}(\vartheta, \varphi) = 0, \text{ если } \lambda \neq \lambda'. \quad (8)$$

Векторы  $Y_{JM}^{(\lambda)}(\vartheta, \varphi)$  являются линейными комбинациями векторов  $Y_{JM}^L(\vartheta, \varphi)$  с разными значениями  $L$ .

Связь между векторами  $Y_{JM}^{(\lambda)}$  и  $Y_{JM}^L$  дается соотношениями

$$\begin{aligned} Y_{JM}^{(1)}(\vartheta, \varphi) &= \sqrt{\frac{J+1}{2J+1}} Y_{JM}^{J-1}(\vartheta, \varphi) + \sqrt{\frac{J}{2J+1}} Y_{JM}^{J+1}(\vartheta, \varphi), \\ Y_{JM}^{(0)}(\vartheta, \varphi) &= Y_{JM}^J(\vartheta, \varphi), \\ Y_{JM}^{(-1)}(\vartheta, \varphi) &= \sqrt{\frac{J}{2J+1}} Y_{JM}^{J-1}(\vartheta, \varphi) - \sqrt{\frac{J+1}{2J+1}} Y_{JM}^{J+1}(\vartheta, \varphi). \end{aligned} \quad (9)$$

Обратные соотношения имеют вид

$$\begin{aligned} Y_{JM}^{J+1}(\vartheta, \varphi) &= \sqrt{\frac{J}{2J+1}} Y_{JM}^{(1)}(\vartheta, \varphi) - \sqrt{\frac{J+1}{2J+1}} Y_{JM}^{(-1)}(\vartheta, \varphi), \\ Y_{JM}^J(\vartheta, \varphi) &= Y_{JM}^{(0)}(\vartheta, \varphi), \\ Y_{JM}^{J-1}(\vartheta, \varphi) &= \sqrt{\frac{J+1}{2J+1}} Y_{JM}^{(1)}(\vartheta, \varphi) + \sqrt{\frac{J}{2J+1}} Y_{JM}^{(-1)}(\vartheta, \varphi). \end{aligned} \quad (10)$$

Как шаровые векторы  $Y_{JM}^L(\vartheta, \varphi)$ , так и шаровые векторы  $Y_{JM}^{(\lambda)}(\vartheta, \varphi)$  образуют полную, ортогональную и нормированную систему векторов в области изменения аргументов  $0 \leq \vartheta \leq \pi$ ,  $0 \leq \varphi < 2\pi$ . (см. 7.3.12).

## 2. Компоненты шаровых векторов

а. Разложение шаровых векторов  $Y_{JM}^L(\vartheta, \varphi)$  по циклическим ковариантным ортам  $e_{\mu}$  ( $\mu = \pm 1, 0$ ) имеет вид

$$Y_{JM}^L(\vartheta, \varphi) = \sum_{\mu} [Y_{JM}^L(\vartheta, \varphi)]^{\mu} e_{\mu} = \sum_{\mu} (-1)^{\mu} [Y_{JM}^L(\vartheta, \varphi)]_{-\mu} e_{\mu}, \quad (11)$$

где  $[Y_{JM}^L(\vartheta, \varphi)]^{\mu}$  — контравариантные циклические компоненты вектора  $Y_{JM}^L(\vartheta, \varphi)$ , а  $[Y_{JM}^L(\vartheta, \varphi)]_{\mu}$  — ковариантные циклические компоненты.

Контравариантные циклические компоненты векторов  $Y_{JM}^L(\vartheta, \varphi)$ , согласно 7.1(5), имеют вид

$$[Y_{JM}^L(\vartheta, \varphi)]^{\mu} = C_{LM-\mu}^{JM} Y_{LM-\mu}(\vartheta, \varphi). \quad (12)$$

Ковариантные циклические компоненты векторов  $Y_{JM}^L(\vartheta, \varphi)$  связаны с контравариантными компонентами соотношением

$$[Y_{JM}^L(\vartheta, \varphi)]_{\mu} = (-1)^{\mu} [Y_{JM}^L(\vartheta, \varphi)]^{-\mu} \quad (13)$$

и даются формулой

$$[Y_{JM}^L(\vartheta, \varphi)]_{\mu} = (-1)^{\mu} C_{LM+\mu}^{JM} Y_{LM+\mu}(\vartheta, \varphi). \quad (14)$$

В более подробной записи соотношения (12), (14) имеют вид

$$\begin{aligned} [Y_{JM}^{J+1}(\vartheta, \varphi)]^{+1} &= -[Y_{JM}^{J+1}(\vartheta, \varphi)]_{-1} = \left[ \frac{(J-M+1)(J-M+2)}{2(J+1)(2J+3)} \right]^{1/2} Y_{J+1, M-1}(\vartheta, \varphi), \\ [Y_{JM}^{J+1}(\vartheta, \varphi)]^0 &= [Y_{JM}^{J+1}(\vartheta, \varphi)]_0 = - \left[ \frac{(J-M+1)(J+M+1)}{(J+1)(2J+3)} \right]^{1/2} Y_{J+1, M}(\vartheta, \varphi), \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned}
[\mathbf{Y}_{JM}^{J+1}(\vartheta, \varphi)]^{-1} &= -[\mathbf{Y}_{JM}^{J+1}(\vartheta, \varphi)]_{+1} = \left[ \frac{(J+M+1)(J+M+2)}{2(J+1)(2J+3)} \right]^{1/2} Y_{J+1M+1}(\vartheta, \varphi), \\
[\mathbf{Y}_{JM}^J(\vartheta, \varphi)]^{+1} &= -[\mathbf{Y}_{JM}^J(\vartheta, \varphi)]_{-1} = -\left[ \frac{(J+M)(J-M+1)}{2J(J+1)} \right]^{1/2} Y_{JM-1}(\vartheta, \varphi), \\
[\mathbf{Y}_{JM}^J(\vartheta, \varphi)]^0 &= [\mathbf{Y}_{JM}^J(\vartheta, \varphi)]_0 = \frac{M}{\sqrt{J(J+1)}} Y_{JM}(\vartheta, \varphi),
\end{aligned} \tag{16}$$

$$\begin{aligned}
[\mathbf{Y}_{JM}^J(\vartheta, \varphi)]^{-1} &= -[\mathbf{Y}_{JM}^J(\vartheta, \varphi)]_{+1} = \left[ \frac{(J-M)(J+M+1)}{2J(J+1)} \right]^{1/2} Y_{JM+1}(\vartheta, \varphi), \\
[\mathbf{Y}_{JM}^{J-1}(\vartheta, \varphi)]^{+1} &= -[\mathbf{Y}_{JM}^{J-1}(\vartheta, \varphi)]_{-1} = \left[ \frac{(J+M)(J+M-1)}{2J(2J-1)} \right]^{1/2} Y_{J-1M-1}(\vartheta, \varphi), \\
[\mathbf{Y}_{JM}^{J-1}(\vartheta, \varphi)]^0 &= [\mathbf{Y}_{JM}^{J-1}(\vartheta, \varphi)]_0 = \left[ \frac{(J-M)(J+M)}{J(2J-1)} \right]^{1/2} Y_{J-1M}(\vartheta, \varphi), \\
[\mathbf{Y}_{JM}^{J-1}(\vartheta, \varphi)]^{-1} &= -[\mathbf{Y}_{JM}^{J-1}(\vartheta, \varphi)]_{+1} = \left[ \frac{(J-M)(J-M-1)}{2J(2J-1)} \right]^{1/2} Y_{J-1M+1}(\vartheta, \varphi).
\end{aligned} \tag{17}$$

6. Разложение шаровых векторов  $\mathbf{Y}_{JM}^{(\lambda)}(\vartheta, \varphi)$  по циклическим ковариантным ортам  $\mathbf{e}_\mu$  ( $\mu = \pm 1, 0$ ) имеет вид

$$\mathbf{Y}_{JM}^{(\lambda)}(\vartheta, \varphi) = \sum_{\mu} [\mathbf{Y}_{JM}^{(\lambda)}(\vartheta, \varphi)]^{\mu} \mathbf{e}_{\mu} = \sum_{\mu} (-1)^{\mu} [\mathbf{Y}_{JM}^{(\lambda)}(\vartheta, \varphi)]_{-\mu} \mathbf{e}_{\mu}, \tag{18}$$

где  $[\mathbf{Y}_{JM}^{(\lambda)}(\vartheta, \varphi)]^{\mu}$  — контравариантные циклические компоненты вектора  $\mathbf{Y}_{JM}^{(\lambda)}$ , а  $[\mathbf{Y}_{JM}^{(\lambda)}(\vartheta, \varphi)]_{\mu}$  — ковариантные циклические компоненты.

Контравариантные циклические компоненты векторов  $\mathbf{Y}_{JM}^{(\lambda)}(\vartheta, \varphi)$  записываются следующим образом:

$$\begin{aligned}
[\mathbf{Y}_{JM}^{(1)}(\vartheta, \varphi)]^{\mu} &= \sqrt{\frac{J+1}{2J+1}} C_{J-1M-\mu 1\mu}^{JM} Y_{J-1M-\mu}(\vartheta, \varphi) + \sqrt{\frac{J}{2J+1}} C_{J+1M-\mu 1\mu}^{JM} Y_{J+1M-\mu}(\vartheta, \varphi), \\
[\mathbf{Y}_{JM}^{(0)}(\vartheta, \varphi)]^{\mu} &= C_{JM-\mu 1\mu}^{JM} Y_{JM-\mu}(\vartheta, \varphi), \\
[\mathbf{Y}_{JM}^{(-1)}(\vartheta, \varphi)]^{\mu} &= \sqrt{\frac{J}{2J+1}} C_{J-1M-\mu 1\mu}^{JM} Y_{J-1M-\mu}(\vartheta, \varphi) - \sqrt{\frac{J+1}{2J+1}} C_{J+1M-\mu 1\mu}^{JM} Y_{J+1M-\mu}(\vartheta, \varphi).
\end{aligned} \tag{19}$$

Ковариантные циклические компоненты векторов  $\mathbf{Y}_{JM}^{(\lambda)}$  связаны с контравариантными компонентами соотношением

$$[\mathbf{Y}_{JM}^{(\lambda)}(\vartheta, \varphi)]_{\mu} = (-1)^{\mu} [\mathbf{Y}_{JM}^{(\lambda)}(\vartheta, \varphi)]^{-\mu}. \tag{20}$$

В развернутой записи выражения для циклических компонент векторов  $\mathbf{Y}_{JM}^{(\lambda)}(\vartheta, \varphi)$  имеют вид

$$\begin{aligned}
[\mathbf{Y}_{JM}^{(+1)}(\vartheta, \varphi)]^{+1} &= -[\mathbf{Y}_{JM}^{(+1)}(\vartheta, \varphi)]_{-1} = \left[ \frac{(J+M)(J+M-1)(J+1)}{2J(2J-1)(2J+1)} \right]^{1/2} Y_{J-1M-1}(\vartheta, \varphi) + \\
&\quad + \left[ \frac{(J-M+1)(J-M+2)J}{2(J+1)(2J+1)(2J+3)} \right]^{1/2} Y_{J+1M-1}(\vartheta, \varphi), \\
[\mathbf{Y}_{JM}^{(+1)}(\vartheta, \varphi)]^0 &= [\mathbf{Y}_{JM}^{(+1)}(\vartheta, \varphi)]_0 = \left[ \frac{(J-M)(J+M)(J+1)}{J(2J-1)(2J+1)} \right]^{1/2} Y_{J-1M}(\vartheta, \varphi) - \\
&\quad - \left[ \frac{(J-M+1)(J+M+1)J}{(J+1)(2J+1)(2J+3)} \right]^{1/2} Y_{J+1M}(\vartheta, \varphi), \\
[\mathbf{Y}_{JM}^{(+1)}(\vartheta, \varphi)]^{-1} &= -[\mathbf{Y}_{JM}^{(+1)}(\vartheta, \varphi)]_{+1} = \left[ \frac{(J-M)(J-M-1)(J+1)}{2J(2J-1)(2J+1)} \right]^{1/2} Y_{J-1M+1}(\vartheta, \varphi) + \\
&\quad + \left[ \frac{(J+M+1)(J+M+2)J}{2(J+1)(2J+1)(2J+3)} \right]^{1/2} Y_{J+1M+1}(\vartheta, \varphi), \\
[\mathbf{Y}_{JM}^{(0)}(\vartheta, \varphi)]^{+1} &= -[\mathbf{Y}_{JM}^{(0)}(\vartheta, \varphi)]_{-1} = -\left[ \frac{(J+M)(J-M+1)}{2J(J+1)} \right]^{1/2} Y_{JM-1}(\vartheta, \varphi), \\
[\mathbf{Y}_{JM}^{(0)}(\vartheta, \varphi)]^0 &= [\mathbf{Y}_{JM}^{(0)}(\vartheta, \varphi)]_0 = \frac{M}{\sqrt{J(J+1)}} Y_{JM}(\vartheta, \varphi),
\end{aligned} \tag{22}$$

$$\begin{aligned}
[\mathbf{Y}_{JM}^{(0)}(\vartheta, \varphi)]^{-1} &= -[\mathbf{Y}_{JM}^{(0)}(\vartheta, \varphi)]_{+1} = \left[ \frac{(J-M)(J+M+1)}{2J(J+1)} \right]^{1/2} Y_{JM+1}(\vartheta, \varphi), \\
[\mathbf{Y}_{JM}^{(-1)}(\vartheta, \varphi)]^{+1} &= -[\mathbf{Y}_{JM}^{(-1)}(\vartheta, \varphi)]_{-1} = \left[ \frac{(J+M)(J+M-1)}{2(2J-1)(2J+1)} \right]^{1/2} Y_{J-1, M-1}(\vartheta, \varphi) - \\
&\quad - \left[ \frac{(J-M+1)(J-M+2)}{2(2J+1)(2J+3)} \right]^{1/2} Y_{J+1, M-1}(\vartheta, \varphi), \\
[\mathbf{Y}_{JM}^{(-1)}(\vartheta, \varphi)]^0 &= [\mathbf{Y}_{JM}^{(-1)}(\vartheta, \varphi)]_0 = \left[ \frac{(J-M)(J+M)}{(2J-1)(2J+1)} \right]^{1/2} Y_{J-1, M}(\vartheta, \varphi) + \\
&\quad + \left[ \frac{(J-M+1)(J+M+1)}{(2J+1)(2J+3)} \right]^{1/2} Y_{J+1, M}(\vartheta, \varphi), \\
[\mathbf{Y}_{JM}^{(-1)}(\vartheta, \varphi)]^{-1} &= -[\mathbf{Y}_{JM}^{(-1)}(\vartheta, \varphi)]_{+1} = \left[ \frac{(J-M)(J-M-1)}{2(2J-1)(2J+1)} \right]^{1/2} Y_{J-1, M+1}(\vartheta, \varphi) - \\
&\quad - \left[ \frac{(J+M+1)(J+M+2)}{2(2J+1)(2J+3)} \right]^{1/2} Y_{J+1, M+1}(\vartheta, \varphi).
\end{aligned} \tag{23}$$

в. Разложение шаровых векторов  $\mathbf{Y}_{JM}^{(\lambda)}(\vartheta, \varphi)$  по ортам сферической системы координат  $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\vartheta, \mathbf{e}_\varphi$  (см. 1.1.2) дается формулой

$$\mathbf{Y}_{JM}^{(\lambda)}(\vartheta, \varphi) = [\mathbf{Y}_{JM}^{(\lambda)}(\vartheta, \varphi)]_r \mathbf{e}_r + [\mathbf{Y}_{JM}^{(\lambda)}(\vartheta, \varphi)]_\vartheta \mathbf{e}_\vartheta + [\mathbf{Y}_{JM}^{(\lambda)}(\vartheta, \varphi)]_\varphi \mathbf{e}_\varphi. \tag{24}$$

Сферические компоненты векторов  $\mathbf{Y}_{JM}^{(\lambda)}(\vartheta, \varphi)$  имеют вид

$$\begin{aligned}
[\mathbf{Y}_{JM}^{(1)}(\vartheta, \varphi)]_r &= 0, \\
[\mathbf{Y}_{JM}^{(1)}(\vartheta, \varphi)]_\vartheta &= \frac{1}{\sqrt{J(J+1)}} \cdot \frac{\partial}{\partial \vartheta} Y_{JM}(\vartheta, \varphi) = \\
&= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(J-M)(J+M+1)}{J(J+1)}} e^{-i\varphi} Y_{JM+1}(\vartheta, \varphi) - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(J+M)(J-M+1)}{J(J+1)}} e^{i\varphi} Y_{JM-1}(\vartheta, \varphi), \\
[\mathbf{Y}_{JM}^{(1)}(\vartheta, \varphi)]_\varphi &= \frac{1}{\sqrt{J(J+1)}} \cdot \frac{1}{\sin \vartheta} \cdot \frac{\partial}{\partial \varphi} Y_{JM}(\vartheta, \varphi) = \frac{iM}{\sqrt{J(J+1)}} \cdot \frac{1}{\sin \vartheta} Y_{JM}(\vartheta, \varphi), \\
[\mathbf{Y}_{JM}^{(0)}(\vartheta, \varphi)]_r &= 0, \\
[\mathbf{Y}_{JM}^{(0)}(\vartheta, \varphi)]_\vartheta &= \frac{i}{\sqrt{J(J+1)}} \cdot \frac{1}{\sin \vartheta} \cdot \frac{\partial}{\partial \vartheta} Y_{JM}(\vartheta, \varphi) = \frac{-M}{\sqrt{J(J+1)}} \cdot \frac{1}{\sin \vartheta} Y_{JM}(\vartheta, \varphi), \\
[\mathbf{Y}_{JM}^{(0)}(\vartheta, \varphi)]_\varphi &= -\frac{i}{\sqrt{J(J+1)}} \cdot \frac{\partial}{\partial \varphi} Y_{JM}(\vartheta, \varphi) = \\
&= -\frac{i}{2} \sqrt{\frac{(J-M)(J+M+1)}{J(J+1)}} e^{-i\varphi} Y_{JM+1}(\vartheta, \varphi) + \frac{i}{2} \sqrt{\frac{(J+M)(J-M+1)}{J(J+1)}} e^{i\varphi} Y_{JM-1}(\vartheta, \varphi).
\end{aligned} \tag{25}$$

$$\begin{aligned}
[\mathbf{Y}_{JM}^{(-1)}(\vartheta, \varphi)]_r &= Y_{JM}(\vartheta, \varphi), \\
[\mathbf{Y}_{JM}^{(-1)}(\vartheta, \varphi)]_\vartheta &= 0, \\
[\mathbf{Y}_{JM}^{(-1)}(\vartheta, \varphi)]_\varphi &= 0.
\end{aligned} \tag{26}$$

г. Разложение шаровых векторов  $\mathbf{Y}_{JM}^L(\vartheta, \varphi)$  по спиральным ортам  $\mathbf{e}'_r(\vartheta, \varphi)$  (см. 1.1.4) имеет вид

$$\mathbf{Y}_{JM}^L(\vartheta, \varphi) = \sum_{\nu} [\mathbf{Y}_{JM}^L(\vartheta, \varphi)]'^{\nu} \mathbf{e}'_r(\vartheta, \varphi) = \sum_{\nu} (-1)^{\nu} [\mathbf{Y}_{JM}^L(\vartheta, \varphi)]'_{-\nu} \mathbf{e}'_r(\vartheta, \varphi), \tag{27}$$

где  $[\mathbf{Y}_{JM}^L(\vartheta, \varphi)]'^{\nu}$  — контравариантные спиральные компоненты, вектора  $\mathbf{Y}_{JM}^L(\vartheta, \varphi)$  а  $[\mathbf{Y}_{JM}^L(\vartheta, \varphi)]'_{-\nu}$  — ковариантные спиральные компоненты.

Контравариантные спиральные компоненты векторов  $\mathbf{Y}_{JM}^L(\vartheta, \varphi)$  записываются следующим образом:

$$[\mathbf{Y}_{JM}^L(\vartheta, \varphi)]'^{\nu} = \sqrt{\frac{2L+1}{4\pi}} C_{L0\nu}^{J\nu} D_{-\nu, -M}^J(0, \vartheta, \varphi). \tag{28}$$

Ковариантные спиральные компоненты векторов  $\mathbf{Y}_{JM}^L(\vartheta, \varphi)$  связаны с контравариантными компонентами соотношением

$$[\mathbf{Y}_{JM}^L(\vartheta, \varphi)]'_{-\nu} = (-1)^{\nu} [\mathbf{Y}_{JM}^L(\vartheta, \varphi)]'^{-\nu} \tag{29}$$

и даются формулой

$$[\mathbf{Y}_{JM}^L(\vartheta, \varphi)]'_\nu = (-1)^{J+L+\nu+1} \sqrt{\frac{2L+1}{4\pi}} C_{L0\nu}^{J\nu} D_{-\nu-M}^J(0, \vartheta, \varphi). \quad (31)$$

В развернутой записи выражения для спиральных компонент векторов  $\mathbf{Y}_{JM}^L(\vartheta, \varphi)$  имеют вид

$$\begin{aligned} [\mathbf{Y}_{JM}^{J+1}(\vartheta, \varphi)]'^{+1} &= -[\mathbf{Y}_{JM}^{J+1}(\vartheta, \varphi)]'_{-1} = \sqrt{\frac{J}{8\pi}} D_{-1-M}^J(0, \vartheta, \varphi), \\ [\mathbf{Y}_{JM}^{J+1}(\vartheta, \varphi)]'^0 &= [\mathbf{Y}_{JM}^{J+1}(\vartheta, \varphi)]'_0 = -\sqrt{\frac{J+1}{4\pi}} D_{0-M}^J(0, \vartheta, \varphi), \end{aligned} \quad (32)$$

$$\begin{aligned} [\mathbf{Y}_{JM}^{J+1}(\vartheta, \varphi)]'^{-1} &= -[\mathbf{Y}_{JM}^{J+1}(\vartheta, \varphi)]'_{+1} = \sqrt{\frac{J}{8\pi}} D_{1-M}^J(0, \vartheta, \varphi). \\ [\mathbf{Y}_{JM}^J(\vartheta, \varphi)]'^{+1} &= -[\mathbf{Y}_{JM}^J(\vartheta, \varphi)]'_{-1} = -\sqrt{\frac{2J+1}{8\pi}} D_{-1-M}^J(0, \vartheta, \varphi), \\ [\mathbf{Y}_{JM}^J(\vartheta, \varphi)]'^0 &= [\mathbf{Y}_{JM}^J(\vartheta, \varphi)]'_0 = 0, \end{aligned} \quad (33)$$

$$\begin{aligned} [\mathbf{Y}_{JM}^J(\vartheta, \varphi)]'^{-1} &= -[\mathbf{Y}_{JM}^J(\vartheta, \varphi)]'_{+1} = \sqrt{\frac{2J+1}{8\pi}} D_{1-M}^J(0, \vartheta, \varphi) \\ [\mathbf{Y}_{JM}^{J-1}(\vartheta, \varphi)]'^{+1} &= -[\mathbf{Y}_{JM}^{J-1}(\vartheta, \varphi)]'_{-1} = \sqrt{\frac{J+1}{8\pi}} D_{-1-M}^J(0, \vartheta, \varphi). \\ [\mathbf{Y}_{JM}^{J-1}(\vartheta, \varphi)]'^0 &= [\mathbf{Y}_{JM}^{J-1}(\vartheta, \varphi)]'_0 = \sqrt{\frac{J}{4\pi}} D_{0-M}^J(0, \vartheta, \varphi), \\ [\mathbf{Y}_{JM}^{J-1}(\vartheta, \varphi)]'^{-1} &= -[\mathbf{Y}_{JM}^{J-1}(\vartheta, \varphi)]'_{+1} = \sqrt{\frac{J+1}{8\pi}} D_{1-M}^J(0, \vartheta, \varphi). \end{aligned} \quad (34)$$

д. Разложение шаровых векторов  $\mathbf{Y}_{JM}^{(\lambda)}(\vartheta, \varphi)$  по спиральным ортам  $\mathbf{e}'_\mu(\vartheta, \varphi)$  ( $\mu = \pm 1, 0$ )

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}_{JM}^{(1)}(\vartheta, \varphi) &= \sqrt{\frac{2J+1}{8\pi}} \{D_{-1-M}^J(0, \vartheta, \varphi) \mathbf{e}'_1(\vartheta, \varphi) + D_{1-M}^J(0, \vartheta, \varphi) \mathbf{e}'_{-1}(\vartheta, \varphi)\}, \\ \mathbf{Y}_{JM}^{(0)}(\vartheta, \varphi) &= \sqrt{\frac{2J+1}{8\pi}} \{-D_{-1-M}^J(0, \vartheta, \varphi) \mathbf{e}'_1(\vartheta, \varphi) + D_{1-M}^J(0, \vartheta, \varphi) \mathbf{e}'_{-1}(\vartheta, \varphi)\}, \\ \mathbf{Y}_{JM}^{(-1)}(\vartheta, \varphi) &= \sqrt{\frac{2J+1}{4\pi}} D_{0-M}^J(0, \vartheta, \varphi) \mathbf{e}'_0(\vartheta, \varphi). \end{aligned} \quad (35)$$

Контравариантные спиральные компоненты  $[\mathbf{Y}_{JM}^{(\lambda)}]'^\nu$  и ковариантные спиральные компоненты  $[\mathbf{Y}_{JM}^{(\lambda)}(\vartheta, \varphi)]'_\nu$  имеют вид

$$\begin{aligned} [\mathbf{Y}_{JM}^{(1)}(\vartheta, \varphi)]'^{+1} &= -[\mathbf{Y}_{JM}^{(1)}(\vartheta, \varphi)]'_{-1} = \sqrt{\frac{2J+1}{8\pi}} D_{-1-M}^J(0, \vartheta, \varphi), \\ [\mathbf{Y}_{JM}^{(1)}(\vartheta, \varphi)]'^0 &= [\mathbf{Y}_{JM}^{(1)}(\vartheta, \varphi)]'_0 = 0, \end{aligned} \quad (36)$$

$$\begin{aligned} [\mathbf{Y}_{JM}^{(1)}(\vartheta, \varphi)]'^{-1} &= -[\mathbf{Y}_{JM}^{(1)}(\vartheta, \varphi)]'_{+1} = \sqrt{\frac{2J+1}{8\pi}} D_{1-M}^J(0, \vartheta, \varphi). \\ [\mathbf{Y}_{JM}^{(0)}(\vartheta, \varphi)]'^{+1} &= -[\mathbf{Y}_{JM}^{(0)}(\vartheta, \varphi)]'_{-1} = -\sqrt{\frac{2J+1}{8\pi}} D_{-1-M}^J(0, \vartheta, \varphi), \\ [\mathbf{Y}_{JM}^{(0)}(\vartheta, \varphi)]'^0 &= [\mathbf{Y}_{JM}^{(0)}(\vartheta, \varphi)]'_0 = 0, \end{aligned} \quad (37)$$

$$\begin{aligned} [\mathbf{Y}_{JM}^{(0)}(\vartheta, \varphi)]'^{-1} &= -[\mathbf{Y}_{JM}^{(0)}(\vartheta, \varphi)]'_{+1} = \sqrt{\frac{2J+1}{8\pi}} D_{1-M}^J(0, \vartheta, \varphi). \\ [\mathbf{Y}_{JM}^{(-1)}(\vartheta, \varphi)]'^{+1} &= -[\mathbf{Y}_{JM}^{(-1)}(\vartheta, \varphi)]'_{-1} = 0, \\ [\mathbf{Y}_{JM}^{(-1)}(\vartheta, \varphi)]'^0 &= [\mathbf{Y}_{JM}^{(-1)}(\vartheta, \varphi)]'_0 = \sqrt{\frac{2J+1}{4\pi}} D_{0-M}^J(0, \vartheta, \varphi), \\ [\mathbf{Y}_{JM}^{(-1)}(\vartheta, \varphi)]'^{-1} &= -[\mathbf{Y}_{JM}^{(-1)}(\vartheta, \varphi)]'_{+1} = 0. \end{aligned} \quad (38)$$

### 3. Комплексное сопряжение

Шаровые векторы  $Y_{JM}^L(\vartheta, \varphi)$  и  $Y_{JM}^{(\lambda)}(\vartheta, \varphi)$  являются комплексными векторами. При комплексном сопряжении они преобразуются по формулам

$$\begin{aligned} Y_{JM}^{L*}(\vartheta, \varphi) &= (-1)^{J+L+M+1} Y_{L-M}^J(\vartheta, \varphi), \\ Y_{JM}^{(\lambda)*}(\vartheta, \varphi) &= (-1)^{M+\lambda+1} Y_{J-M}^{(\lambda)}(\vartheta, \varphi). \end{aligned} \quad (39)$$

Действие комплексного сопряжения на циклические компоненты шаровых векторов дается формулами

$$[\tilde{Y}_{JM}^L(\vartheta, \varphi)]_{\mu}^* = [Y_{JM}^{L*}(\vartheta, \varphi)]_{\mu} = (-1)^{J+L+M+\mu+1} [Y_{J-M}^L(\vartheta, \varphi)]_{-\mu} = (-1)^{J+L+M+1} [Y_{J-M}^L(\vartheta, \varphi)]_{\mu}, \quad (40)$$

$$[Y_{JM}^L(\vartheta, \varphi)]_{\mu}^{*\mu} = [Y_{JM}^{L*}(\vartheta, \varphi)]_{\mu} = (-1)^{J+L+M+\mu+1} [Y_{J-M}^L(\vartheta, \varphi)]_{-\mu} = (-1)^{J+L+M+1} [Y_{J-M}^L(\vartheta, \varphi)]_{\mu}, \quad (41)$$

$$[Y_{JM}^{(\lambda)}(\vartheta, \varphi)]_{\mu}^* = [Y_{JM}^{(\lambda)*}(\vartheta, \varphi)]_{\mu} = (-1)^{M+\mu+\lambda+1} [Y_{J-M}^{(\lambda)}(\vartheta, \varphi)]_{-\mu} = (-1)^{M+\lambda+1} [Y_{J-M}^{(\lambda)}(\vartheta, \varphi)]_{\mu}, \quad (42)$$

$$[Y_{JM}^{(\lambda)}(\vartheta, \varphi)]_{\mu}^{*\mu} = [Y_{JM}^{(\lambda)*}(\vartheta, \varphi)]_{\mu} = (-1)^{M+\mu+\lambda+1} [Y_{J-M}^{(\lambda)}(\vartheta, \varphi)]_{-\mu} = (-1)^{M+\lambda+1} [Y_{J-M}^{(\lambda)}(\vartheta, \varphi)]_{\mu}. \quad (43)$$

### 4. Поведение шаровых векторов при преобразованиях системы координат

#### а. Инверсия системы координат

$$\begin{aligned} \hat{P}_r Y_{JM}^L(\vartheta, \varphi) &= -Y_{JM}^L(\pi - \vartheta, \pi + \varphi) = (-1)^{L+1} Y_{JM}^L(\vartheta, \varphi), \\ \hat{P}_r Y_{JM}^{(\lambda)}(\vartheta, \varphi) &= -Y_{JM}^{(\lambda)}(\pi - \vartheta, \pi + \varphi) = (-1)^{J+\lambda+1} Y_{JM}^{(\lambda)}(\vartheta, \varphi). \end{aligned} \quad (44)$$

#### б. Поворот системы координат

При повороте системы координат, характеризуемом эйлеровыми углами  $\alpha, \beta, \gamma$  (см. 1.4), шаровые векторы преобразуются по формулам

$$\begin{aligned} Y_{JM}^L(\vartheta', \varphi') &= \hat{D}(\alpha, \beta, \gamma) Y_{JM}^L(\vartheta, \varphi) = \sum_M D_{MM'}^J(\alpha, \beta, \gamma) Y_{JM}^L(\vartheta, \varphi), \\ Y_{JM}^{(\lambda)}(\vartheta', \varphi') &= \hat{D}(\alpha, \beta, \gamma) Y_{JM}^{(\lambda)}(\vartheta, \varphi) = \sum_M D_{MM'}^J(\alpha, \beta, \gamma) Y_{JM}^{(\lambda)}(\vartheta, \varphi). \end{aligned} \quad (45)$$

Здесь  $D_{MM'}^J(\alpha, \beta, \gamma)$  — матрица поворота (гл. 4);  $M'$  — проекция полного момента на новую ось  $z'$ ;  $\vartheta, \varphi$  — сферические углы вектора  $\mathbf{r}$  в исходной системе координат;  $\vartheta', \varphi'$  — сферические углы того же вектора  $\mathbf{r}$  в повернутой системе координат. Связь  $\vartheta', \varphi'$  с  $\vartheta, \varphi$  дается формулами 1.4(2), 1.4(3).

### 5. Дифференциальные уравнения

а. Шаровые векторы  $Y_{JM}^L(\vartheta, \varphi)$  являются собственными функциями оператора  $\hat{\mathbf{L}}^2$ , т. е. удовлетворяют дифференциальному уравнению

$$\frac{1}{\sin \vartheta} \cdot \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left\{ \sin \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} Y_{JM}^L(\vartheta, \varphi) \right\} + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} Y_{JM}^L(\vartheta, \varphi) + L(L+1) Y_{JM}^L(\vartheta, \varphi) = 0. \quad (46)$$

Это уравнение можно записать и в виде

$$\{\Delta_{\vartheta} + L(L+1)\} Y_{JM}^L(\vartheta, \varphi) = 0, \quad (47)$$

где  $\Delta_{\vartheta} \equiv \nabla_{\vartheta}^2$  — угловая часть оператора Лапласа (см. 1.3(15)).

б. Величины  $r^L Y_{JM}^L(\vartheta, \varphi)$  являются решениями уравнения Лапласа

$$\Delta \{r^L Y_{JM}^L(\vartheta, \varphi)\} = 0. \quad (48)$$

Это означает, что все компоненты векторов  $r^L Y_{JM}^L(\vartheta, \varphi)$  — гармонические полиномы порядка  $L$ .



в. Величины  $z_L(kr) Y_{JM}^L(\vartheta, \varphi)$  являются решениями уравнения Гельмгольца

$$(\Delta + k^2) \{z_L(kr) Y_{JM}^L(\vartheta, \varphi)\} = 0. \quad (49)$$

Здесь

$$z_L(kr) = \sqrt{\frac{\pi}{2kr}} Z_{L+1/2}(kr), \quad (50)$$

где  $Z_{L+1/2}(kr)$  — любая из цилиндрических функций ранга  $L + \frac{1}{2}$ .

## 6. Дифференциальные соотношения

В приведенных ниже формулах  $f(r)$  — произвольная функция от  $r \equiv |r|$ .

$$\begin{aligned} \text{а) } \nabla \{f(r) Y_{JM}(\vartheta, \varphi)\} &\equiv \text{grad} \{f(r) Y_{JM}(\vartheta, \varphi)\} = \\ &= \sqrt{\frac{J}{2J+1}} \left\{ \frac{d}{dr} + \frac{J+1}{r} \right\} f(r) Y_{JM}^{J-1}(\vartheta, \varphi) - \sqrt{\frac{J+1}{2J+1}} \left\{ \frac{d}{dr} - \frac{J}{r} \right\} f(r) Y_{JM}^{J+1}(\vartheta, \varphi), \end{aligned} \quad (51)$$

$$\nabla \{f(r) Y_{JM}(\vartheta, \varphi)\} \equiv \text{grad} \{f(r) Y_{JM}(\vartheta, \varphi)\} = \frac{df(r)}{dr} Y_{JM}^{(-1)}(\vartheta, \varphi) + \sqrt{J(J+1)} \frac{1}{r} f(r) Y_{JM}^{(1)}(\vartheta, \varphi).$$

$$(\mathbf{r} \cdot \nabla) \{f(r) Y_{JM}^L(\vartheta, \varphi)\} = r \frac{d}{dr} f(r) Y_{JM}^L(\vartheta, \varphi), \quad (52)$$

$$(\mathbf{r} \cdot \nabla) \{f(r) Y_{JM}^{(1)}(\vartheta, \varphi)\} = r \frac{d}{dr} f(r) Y_{JM}^{(1)}(\vartheta, \varphi).$$

$$\begin{aligned} \text{б) } \nabla \cdot [f(r) Y_{JM}^{J+1}(\vartheta, \varphi)] &\equiv \text{div} [f(r) Y_{JM}^{J+1}(\vartheta, \varphi)] = -\sqrt{\frac{J+1}{2J+1}} \left( \frac{d}{dr} + \frac{J+2}{r} \right) f(r) Y_{JM}(\vartheta, \varphi), \\ \nabla \cdot [f(r) Y_{JM}^J(\vartheta, \varphi)] &\equiv \text{div} [f(r) Y_{JM}^J(\vartheta, \varphi)] = 0, \end{aligned} \quad (53)$$

$$\nabla \cdot [f(r) Y_{JM}^{J-1}(\vartheta, \varphi)] \equiv \text{div} [f(r) Y_{JM}^{J-1}(\vartheta, \varphi)] = \sqrt{\frac{J}{2J+1}} \left( \frac{d}{dr} - \frac{J-1}{r} \right) f(r) Y_{JM}(\vartheta, \varphi).$$

$$\nabla \cdot [f(r) Y_{JM}^{(1)}(\vartheta, \varphi)] \equiv \text{div} [f(r) Y_{JM}^{(1)}(\vartheta, \varphi)] = -\sqrt{J(J+1)} \frac{1}{r} f(r) Y_{JM}(\vartheta, \varphi),$$

$$\nabla \cdot [f(r) Y_{JM}^{(0)}(\vartheta, \varphi)] \equiv \text{div} [f(r) Y_{JM}^{(0)}(\vartheta, \varphi)] = 0, \quad (54)$$

$$\nabla \cdot [f(r) Y_{JM}^{(-1)}(\vartheta, \varphi)] \equiv \text{div} [f(r) Y_{JM}^{(-1)}(\vartheta, \varphi)] = \left( \frac{d}{dr} + \frac{2}{r} \right) f(r) Y_{JM}(\vartheta, \varphi).$$

$$\begin{aligned} \text{в) } \nabla \times [f(r) Y_{JM}^{J+1}(\vartheta, \varphi)] &\equiv \text{rot} [f(r) Y_{JM}^{J+1}(\vartheta, \varphi)] = i \sqrt{\frac{J}{2J+1}} \left( \frac{d}{dr} + \frac{J+2}{r} \right) f(r) Y_{JM}^J(\vartheta, \varphi), \\ \nabla \times [f(r) Y_{JM}^J(\vartheta, \varphi)] &\equiv \text{rot} [f(r) Y_{JM}^J(\vartheta, \varphi)] = \\ &= i \sqrt{\frac{J}{2J+1}} \left( \frac{d}{dr} - \frac{J}{r} \right) f(r) Y_{JM}^{J+1}(\vartheta, \varphi) + i \sqrt{\frac{J+1}{2J+1}} \left( \frac{d}{dr} + \frac{J+1}{r} \right) f(r) Y_{JM}^{J-1}(\vartheta, \varphi), \end{aligned} \quad (55)$$

$$\nabla \times [f(r) Y_{JM}^{J-1}(\vartheta, \varphi)] \equiv \text{rot} [f(r) Y_{JM}^{J-1}(\vartheta, \varphi)] = i \sqrt{\frac{J+1}{2J+1}} \left( \frac{d}{dr} - \frac{J-1}{r} \right) f(r) Y_{JM}^J(\vartheta, \varphi).$$

$$\nabla \times [f(r) Y_{JM}^{(1)}(\vartheta, \varphi)] \equiv \text{rot} [f(r) Y_{JM}^{(1)}(\vartheta, \varphi)] = i \left( \frac{d}{dr} + \frac{1}{r} \right) f(r) Y_{JM}^{(0)}(\vartheta, \varphi),$$

$$\begin{aligned} \nabla \times [f(r) Y_{JM}^{(0)}(\vartheta, \varphi)] &\equiv \text{rot} [f(r) Y_{JM}^{(0)}(\vartheta, \varphi)] = \\ &= i \left( \frac{d}{dr} + \frac{1}{r} \right) f(r) Y_{JM}^{(1)}(\vartheta, \varphi) + i \sqrt{J(J+1)} \frac{1}{r} f(r) Y_{JM}^{(-1)}(\vartheta, \varphi), \end{aligned} \quad (56)$$

$$\nabla \times [f(r) Y_{JM}^{(-1)}(\vartheta, \varphi)] \equiv \text{rot} [f(r) Y_{JM}^{(-1)}(\vartheta, \varphi)] = -i \sqrt{J(J+1)} \frac{1}{r} f(r) Y_{JM}^{(0)}(\vartheta, \varphi).$$

г. В прикладных задачах часто приходится иметь дело с функциями вида

$$\begin{aligned} F_{JM}(\mathbf{r}) &\equiv z_J(kr) Y_{JM}(\vartheta, \varphi), \\ \mathbf{F}_{JM}^L(\mathbf{r}) &\equiv z_L(kr) \mathbf{Y}_{JM}^L(\vartheta, \varphi), \end{aligned} \quad (57)$$

где  $z_L(kr) \equiv \sqrt{\frac{\pi}{2kr}} Z_{L+1/2}(kr)$ ,  $Z_{L+1/2}(kr)$  — одна из цилиндрических функций,  $k$  — некоторый параметр. Для функций этого частного вида соотношения а), б), в) сводятся к следующим соотношениям:

$$\begin{aligned} \frac{1}{k} \operatorname{grad} \{F_{JM}(\mathbf{r})\} &= \sqrt{\frac{J}{2J+1}} z_{J-1}(kr) \mathbf{Y}_{JM}^{J-1}(\vartheta, \varphi) + \sqrt{\frac{J+1}{2J+1}} z_{J+1}(kr) \mathbf{Y}_{JM}^{J+1}(\vartheta, \varphi) = \\ &= \sqrt{\frac{J}{2J+1}} \mathbf{F}_{JM}^{J-1}(\mathbf{r}) + \sqrt{\frac{J+1}{2J+1}} \mathbf{F}_{JM}^{J+1}(\mathbf{r}). \end{aligned} \quad (58)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{k} \operatorname{div} \{\mathbf{F}_{JM}^{J+1}(\mathbf{r})\} &= -\sqrt{\frac{J+1}{2J+1}} z_J(kr) Y_{JM}(\vartheta, \varphi) = -\sqrt{\frac{J+1}{2J+1}} F_{JM}(\mathbf{r}), \\ \frac{1}{k} \operatorname{div} \{\mathbf{F}_{JM}^J(\mathbf{r})\} &= 0, \end{aligned} \quad (59)$$

$$\frac{1}{k} \operatorname{div} \{\mathbf{F}_{JM}^{J-1}(\mathbf{r})\} = -\sqrt{\frac{J}{2J+1}} z_J(kr) Y_{JM}(\vartheta, \varphi) = -\sqrt{\frac{J}{2J+1}} F_{JM}(\mathbf{r}).$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{k} \operatorname{rot} \{\mathbf{F}_{JM}^{J+1}(\mathbf{r})\} &= i \sqrt{\frac{J}{2J+1}} z_J(kr) \mathbf{Y}_{JM}^J(\vartheta, \varphi) = i \sqrt{\frac{J}{2J+1}} \mathbf{F}_{JM}^J(\mathbf{r}), \\ \frac{1}{k} \operatorname{rot} \{\mathbf{F}_{JM}^J(\mathbf{r})\} &= -i \sqrt{\frac{J}{2J+1}} z_{J+1}(kr) \mathbf{Y}_{JM}^{J+1}(\vartheta, \varphi) + i \sqrt{\frac{J+1}{2J+1}} z_{J-1}(kr) \mathbf{Y}_{JM}^{J-1}(\vartheta, \varphi) = \\ &= -i \sqrt{\frac{J}{2J+1}} \mathbf{F}_{JM}^{J+1}(\mathbf{r}) + i \sqrt{\frac{J+1}{2J+1}} \mathbf{F}_{JM}^{J-1}(\mathbf{r}), \\ \frac{1}{k} \operatorname{rot} \{\mathbf{F}_{JM}^{J-1}(\mathbf{r})\} &= -i \sqrt{\frac{J+1}{2J+1}} z_J(kr) \mathbf{Y}_{JM}^J(\vartheta, \varphi) = -i \sqrt{\frac{J+1}{2J+1}} \mathbf{F}_{JM}^J(\mathbf{r}). \end{aligned} \quad (60)$$

## 7. Действие операторов угловых моментов на шаровые векторы

Операторы угловых моментов действуют на шаровые векторы по общим формулам 7.1 (27) — 7.1 (29), в которых нужно положить  $S=1$ . Кроме того, имеют место следующие формулы, где  $\hat{\mathbf{S}}$  — оператор спина,  $\hat{\mathbf{L}}$  — оператор орбитального момента,  $\hat{\mathbf{J}} = \hat{\mathbf{L}} + \hat{\mathbf{S}}$  — оператор полного момента,  $\mathbf{n}$  — орт со сферическими углами  $\vartheta, \varphi$ .

$$\begin{aligned} \text{а) } (\hat{\mathbf{S}} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{Y}_{JM}^L(\vartheta, \varphi) &= -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{(J+L+3)(J+L)(-J+L+2)(J-L+1)}{(2L+1)(2L+3)}} \mathbf{Y}_{JM}^{L+1}(\vartheta, \varphi) - \\ &- \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(J+L+2)(J+L-1)(-J+L+1)(J-L+2)}{(2L-1)(2L+1)}} \mathbf{Y}_{JM}^{L-1}(\vartheta, \varphi). \end{aligned} \quad (61)$$

В частности:

$$\begin{aligned} (\hat{\mathbf{S}} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{Y}_{JM}^{J+1}(\vartheta, \varphi) &= -\sqrt{\frac{J}{2J+1}} \mathbf{Y}_{JM}^J(\vartheta, \varphi), \\ (\hat{\mathbf{S}} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{Y}_{JM}^J(\vartheta, \varphi) &= -\sqrt{\frac{J}{2J+1}} \mathbf{Y}_{JM}^{J+1}(\vartheta, \varphi) - \sqrt{\frac{J+1}{2J+1}} \mathbf{Y}_{JM}^{J-1}(\vartheta, \varphi), \end{aligned} \quad (62)$$

$$\begin{aligned} (\hat{\mathbf{S}} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{Y}_{JM}^{J-1}(\vartheta, \varphi) &= -\sqrt{\frac{J+1}{2J+1}} \mathbf{Y}_{JM}^J(\vartheta, \varphi); \\ (\hat{\mathbf{S}} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{Y}_{JM}^{(1)}(\vartheta, \varphi) &= -\mathbf{Y}_{JM}^{(0)}(\vartheta, \varphi), \\ (\hat{\mathbf{S}} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{Y}_{JM}^{(0)}(\vartheta, \varphi) &= -\mathbf{Y}_{JM}^{(1)}(\vartheta, \varphi), \\ (\hat{\mathbf{S}} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{Y}_{JM}^{(-1)}(\vartheta, \varphi) &= 0. \end{aligned} \quad (63)$$

$$\begin{aligned}
\text{б)} \quad r(\hat{S} \cdot \nabla) Y_{JM}^L(\vartheta, \varphi) &= \frac{L}{2} \sqrt{\frac{(J+L+3)(J+L)(-J+L+2)(J-L+1)}{(2L+1)(2L+3)}} Y_{JM}^{L+1}(\vartheta, \varphi) - \\
&- \frac{L+1}{2} \sqrt{\frac{(J+L+2)(J+L-1)(-J+L+1)(J-L+2)}{(2L-1)(2L+1)}} Y_{JM}^{L-1}(\vartheta, \varphi).
\end{aligned} \quad (64)$$

В частности:

$$\begin{aligned}
r(\hat{S} \cdot \nabla) Y_{JM}^{J+1}(\vartheta, \varphi) &= -(J+2) \sqrt{\frac{J}{2J+1}} Y_{JM}^J(\vartheta, \varphi), \\
r(\hat{S} \cdot \nabla) Y_{JM}^J(\vartheta, \varphi) &= J \sqrt{\frac{J}{2J+1}} Y_{JM}^{J+1}(\vartheta, \varphi) - (J+1) \sqrt{\frac{J+1}{2J+1}} Y_{JM}^{J-1}(\vartheta, \varphi);
\end{aligned} \quad (65)$$

$$r(\hat{S} \cdot \nabla) Y_{JM}^{J-1}(\vartheta, \varphi) = (J-1) \sqrt{\frac{J+1}{2J+1}} Y_{JM}^J(\vartheta, \varphi);$$

$$r(\hat{S} \cdot \nabla) Y_{JM}^{(1)}(\vartheta, \varphi) = -Y_{JM}^{(0)}(\vartheta, \varphi),$$

$$r(\hat{S} \cdot \nabla) Y_{JM}^{(0)}(\vartheta, \varphi) = -Y_{JM}^{(1)}(\vartheta, \varphi) - \sqrt{J(J+1)} Y_{JM}^{(-1)}(\vartheta, \varphi), \quad (66)$$

$$r(\hat{S} \cdot \nabla) Y_{JM}^{(-1)}(\vartheta, \varphi) = \sqrt{J(J+1)} Y_{JM}^{(0)}(\vartheta, \varphi).$$

$$\text{в)} \quad (\hat{S}\hat{L}) Y_{JM}^L(\vartheta, \varphi) = \frac{1}{2} \{J(J+1) - L(L+1) - 2\} Y_{JM}^L(\vartheta, \varphi). \quad (67)$$

В частности:

$$(\hat{S} \cdot \hat{L}) Y_{JM}^{J+1}(\vartheta, \varphi) = -(J+2) Y_{JM}^{J+1}(\vartheta, \varphi),$$

$$(\hat{S} \cdot \hat{L}) Y_{JM}^J(\vartheta, \varphi) = -Y_{JM}^J(\vartheta, \varphi), \quad (68)$$

$$(\hat{S} \cdot \hat{L}) Y_{JM}^{J-1}(\vartheta, \varphi) = (J-1) Y_{JM}^{J-1}(\vartheta, \varphi).$$

$$(\hat{S} \cdot \hat{L}) Y_{JM}^{(1)}(\vartheta, \varphi) = -Y_{JM}^{(0)}(\vartheta, \varphi) + \sqrt{J(J+1)} Y_{JM}^{(-1)}(\vartheta, \varphi),$$

$$(\hat{S} \cdot \hat{L}) Y_{JM}^{(0)}(\vartheta, \varphi) = -Y_{JM}^{(0)}(\vartheta, \varphi), \quad (69)$$

$$(\hat{S} \cdot \hat{L}) Y_{JM}^{(-1)}(\vartheta, \varphi) = \sqrt{J(J+1)} Y_{JM}^{(1)}(\vartheta, \varphi) - 2Y_{JM}^{(-1)}(\vartheta, \varphi).$$

## 8. Функциональные соотношения между шаровыми векторами

В приведенных ниже формулах  $\mathbf{n}$  — орт со сферическими углами  $\vartheta, \varphi$

$$\begin{aligned}
\text{а)} \quad n Y_{JM}^L(\vartheta, \varphi) &= \sqrt{\frac{J}{2J+1}} Y_{JM}^{J-1}(\vartheta, \varphi) - \sqrt{\frac{J+1}{2J+1}} Y_{JM}^{J+1}(\vartheta, \varphi), \\
n Y_{JM}^J(\vartheta, \varphi) &= Y_{JM}^{(-1)}(\vartheta, \varphi).
\end{aligned} \quad (70)$$

$$\begin{aligned}
\text{б)} \quad \mathbf{n} \cdot Y_{JM}^{J+1}(\vartheta, \varphi) &= -\sqrt{\frac{J+1}{2J+1}} Y_{JM}^J(\vartheta, \varphi), \\
\mathbf{n} \cdot Y_{JM}^J(\vartheta, \varphi) &= 0,
\end{aligned} \quad (71)$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{n} \cdot Y_{JM}^{J-1}(\vartheta, \varphi) &= \sqrt{\frac{J}{2J+1}} Y_{JM}^J(\vartheta, \varphi), \\
\mathbf{n} \cdot Y_{JM}^{(1)}(\vartheta, \varphi) &= 0, \\
\mathbf{n} \cdot Y_{JM}^{(0)}(\vartheta, \varphi) &= 0, \\
\mathbf{n} \cdot Y_{JM}^{(-1)}(\vartheta, \varphi) &= Y_{JM}^J(\vartheta, \varphi).
\end{aligned} \quad (72)$$

$$\begin{aligned}
\text{в)} \quad \mathbf{n} \times Y_{JM}^{J+1}(\vartheta, \varphi) &= i \sqrt{\frac{J}{2J+1}} Y_{JM}^J(\vartheta, \varphi), \\
\mathbf{n} \times Y_{JM}^J(\vartheta, \varphi) &= i \sqrt{\frac{J+1}{2J+1}} Y_{JM}^{J-1}(\vartheta, \varphi) + i \sqrt{\frac{J}{2J+1}} Y_{JM}^{J+1}(\vartheta, \varphi), \\
\mathbf{n} \times Y_{JM}^{J-1}(\vartheta, \varphi) &= i \sqrt{\frac{J+1}{2J+1}} Y_{JM}^J(\vartheta, \varphi).
\end{aligned} \quad (73)$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{n} \times \mathbf{Y}_{JM}^{(1)}(\vartheta, \varphi) &= i \mathbf{Y}_{JM}^{(0)}(\vartheta, \varphi), \\
\mathbf{n} \times \mathbf{Y}_{JM}^{(0)}(\vartheta, \varphi) &= i \mathbf{Y}_{JM}^{(-1)}(\vartheta, \varphi), \\
\mathbf{n} \times \mathbf{Y}_{JM}^{(-1)}(\vartheta, \varphi) &= 0.
\end{aligned} \tag{74}$$

### 9. Суммы шаровых векторов

$$\begin{aligned}
\text{а) } \sum_{\mu=-1}^1 Y_{1\mu}^*(\vartheta, \varphi) [\mathbf{Y}_{JM}^L(\vartheta, \varphi)]_{\mu} &= \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \mathbf{n} \cdot \mathbf{Y}_{JM}^L(\vartheta, \varphi), \\
\sum_{\mu=-1}^1 Y_{1\mu}^*(\vartheta, \varphi) [\mathbf{Y}_{JM}^{(1)}(\vartheta, \varphi)]_{\mu} &= \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \mathbf{n} \cdot \mathbf{Y}_{JM}^{(1)}(\vartheta, \varphi).
\end{aligned} \tag{75}$$

Отсюда получаются следующие соотношения:

$$\begin{aligned}
\sum_{\mu=-1}^1 Y_{1\mu}^*(\vartheta, \varphi) [\mathbf{Y}_{JM}^{J+1}(\vartheta, \varphi)]_{\mu} &= -\sqrt{\frac{3(J+1)}{4\pi(2J+1)}} Y_{JM}(\vartheta, \varphi), \\
\sum_{\mu=-1}^1 Y_{1\mu}^*(\vartheta, \varphi) [\mathbf{Y}_{JM}^J(\vartheta, \varphi)]_{\mu} &= 0,
\end{aligned} \tag{76}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{\mu=-1}^1 Y_{1\mu}^*(\vartheta, \varphi) [\mathbf{Y}_{JM}^{J-1}(\vartheta, \varphi)]_{\mu} &= \sqrt{\frac{3J}{4\pi(2J+1)}} Y_{JM}(\vartheta, \varphi), \\
\sum_{\mu=-1}^1 Y_{1\mu}^*(\vartheta, \varphi) [\mathbf{Y}_{JM}^{(1)}(\vartheta, \varphi)]_{\mu} &= 0, \\
\sum_{\mu=-1}^1 Y_{1\mu}^*(\vartheta, \varphi) [\mathbf{Y}_{JM}^{(0)}(\vartheta, \varphi)]_{\mu} &= 0,
\end{aligned} \tag{77}$$

$$\sum_{\mu=-1}^1 Y_{1\mu}^*(\vartheta, \varphi) [\mathbf{Y}_{JM}^{(-1)}(\vartheta, \varphi)]_{\mu} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} Y_{JM}(\vartheta, \varphi).$$

$$\text{б) } \sum_{M=-J}^J Y_{JM}^*(\vartheta, \varphi) \mathbf{Y}_{JM}^L(\vartheta, \varphi) = \frac{\sqrt{(2J+1)(2L+1)}}{4\pi} C_{10L0}^{J0} \mathbf{n}. \tag{78}$$

В развернутой записи эти соотношения имеют вид:

$$\begin{aligned}
\sum_{M=-J}^J Y_{JM}^*(\vartheta, \varphi) \mathbf{Y}_{JM}^{J+1}(\vartheta, \varphi) &= -\frac{\sqrt{(J+1)(2J+1)}}{4\pi} \mathbf{n}, \\
\sum_{M=-J}^J Y_{JM}^*(\vartheta, \varphi) \mathbf{Y}_{JM}^J(\vartheta, \varphi) &= 0, \\
\sum_{M=-J}^J Y_{JM}^*(\vartheta, \varphi) \mathbf{Y}_{JM}^{J-1}(\vartheta, \varphi) &= \frac{\sqrt{J(2J+1)}}{4\pi} \mathbf{n}.
\end{aligned} \tag{79}$$

Аналогично, для векторов  $\mathbf{Y}_{JM}^{(1)}(\vartheta, \varphi)$  справедливы следующие соотношения:

$$\begin{aligned}
\sum_{M=-J}^J Y_{JM}^*(\vartheta, \varphi) \mathbf{Y}_{JM}^{(1)}(\vartheta, \varphi) &= \sum_{M=-J}^J Y_{JM}^*(\vartheta, \varphi) \mathbf{Y}_{JM}^{(0)}(\vartheta, \varphi) = 0, \\
\sum_{M=-J}^J Y_{JM}^*(\vartheta, \varphi) \mathbf{Y}_{JM}^{(-1)}(\vartheta, \varphi) &= \frac{2J+1}{4\pi} \mathbf{n}.
\end{aligned} \tag{80}$$

$$\begin{aligned}
 \text{в) } \sum_{M=-J}^J \mathbf{Y}_{JM}^{L'*}(\vartheta, \varphi) \cdot \mathbf{Y}_{JM}^L(\vartheta, \varphi) &= \frac{2J+1}{4\pi} \delta_{LL'}, \\
 \sum_{M=-J}^J \mathbf{Y}_{JM}^{(\lambda')*}(\vartheta, \varphi) \cdot \mathbf{Y}_{JM}^{(\lambda)}(\vartheta, \varphi) &= \frac{2J+1}{4\pi} \delta_{\lambda\lambda'}.
 \end{aligned} \tag{81}$$

г) В приведенных ниже формулах  $\mathbf{a}$  — произвольный комплексный вектор,  $\mathbf{n}$  — орт с направляющими углами  $\vartheta, \varphi$ .

$$\sum_{M=-J}^J |\mathbf{a} \cdot \mathbf{Y}_{JM}^{J+1}(\vartheta, \varphi)|^2 = \frac{1}{8\pi} \{J|\mathbf{a}|^2 + (J+2)|\mathbf{n} \cdot \mathbf{a}|^2\}, \tag{82}$$

$$\sum_{M=-J}^J |\mathbf{a} \cdot \mathbf{Y}_{JM}^J(\vartheta, \varphi)|^2 = \frac{2J+1}{8\pi} \{|\mathbf{a}|^2 - |\mathbf{n} \cdot \mathbf{a}|^2\}, \tag{83}$$

$$\sum_{M=-J}^J |\mathbf{a} \cdot \mathbf{Y}_{JM}^{J-1}(\vartheta, \varphi)|^2 = \frac{1}{8\pi} \{(J+1)|\mathbf{a}|^2 + (J-1)|\mathbf{n} \cdot \mathbf{a}|^2\}, \tag{84}$$

$$\sum_{M=-J}^J (\mathbf{a} \cdot \mathbf{Y}_{JM}^{J+1}(\vartheta, \varphi))^* (\mathbf{a} \cdot \mathbf{Y}_{JM}^J(\vartheta, \varphi)) = -i \frac{\sqrt{J(2J+1)}}{8\pi} \mathbf{n} \cdot [\mathbf{a}^* \times \mathbf{a}], \tag{85}$$

$$\sum_{M=-J}^J (\mathbf{a} \cdot \mathbf{Y}_{JM}^{J+1}(\vartheta, \varphi))^* (\mathbf{a} \cdot \mathbf{Y}_{JM}^{J-1}(\vartheta, \varphi)) = \frac{\sqrt{J(J+1)}}{8\pi} \{|\mathbf{a}|^2 - 3|\mathbf{n} \cdot \mathbf{a}|^2\}, \tag{86}$$

$$\sum_{M=-J}^J (\mathbf{a} \cdot \mathbf{Y}_{JM}^J(\vartheta, \varphi))^* (\mathbf{a} \cdot \mathbf{Y}_{JM}^{J+1}(\vartheta, \varphi)) = -i \frac{\sqrt{J(2J+1)}}{8\pi} \mathbf{n} \cdot [\mathbf{a}^* \times \mathbf{a}], \tag{87}$$

$$\sum_{M=-J}^J (\mathbf{a} \cdot \mathbf{Y}_{JM}^J(\vartheta, \varphi))^* (\mathbf{a} \cdot \mathbf{Y}_{JM}^{J-1}(\vartheta, \varphi)) = -i \frac{\sqrt{(J+1)(2J+1)}}{8\pi} \mathbf{n} \cdot [\mathbf{a}^* \times \mathbf{a}], \tag{88}$$

$$\sum_{M=-J}^J (\mathbf{a} \cdot \mathbf{Y}_{JM}^{J-1}(\vartheta, \varphi))^* (\mathbf{a} \cdot \mathbf{Y}_{JM}^{J+1}(\vartheta, \varphi)) = \frac{\sqrt{J(J+1)}}{8\pi} \{|\mathbf{a}|^2 - 3|\mathbf{n} \cdot \mathbf{a}|^2\}, \tag{89}$$

$$\sum_{M=-J}^J (\mathbf{a} \cdot \mathbf{Y}_{JM}^{J-1}(\vartheta, \varphi))^* (\mathbf{a} \cdot \mathbf{Y}_{JM}^J(\vartheta, \varphi)) = -i \frac{\sqrt{(J+1)(2J+1)}}{8\pi} \mathbf{n} \cdot [\mathbf{a}^* \times \mathbf{a}]. \tag{90}$$

д) Для векторов  $\mathbf{Y}_{JM}^{(\lambda)}(\vartheta, \varphi)$  аналогичные соотношения имеют вид

$$\sum_{M=-J}^J |\mathbf{a} \cdot \mathbf{Y}_{JM}^{(1)}(\vartheta, \varphi)|^2 = \frac{2J+1}{8\pi} \{|\mathbf{a}|^2 - |\mathbf{n} \cdot \mathbf{a}|^2\}, \tag{91}$$

$$\sum_{M=-J}^J |\mathbf{a} \cdot \mathbf{Y}_{JM}^{(0)}(\vartheta, \varphi)|^2 = \frac{2J+1}{8\pi} \{|\mathbf{a}|^2 - |\mathbf{n} \cdot \mathbf{a}|^2\}, \tag{92}$$

$$\sum_{M=-J}^J |\mathbf{a} \cdot \mathbf{Y}_{JM}^{(-1)}(\vartheta, \varphi)|^2 = \frac{2J+1}{4\pi} |\mathbf{n} \cdot \mathbf{a}|^2, \tag{93}$$

$$\sum_{M=-J}^J (\mathbf{a} \cdot \mathbf{Y}_{JM}^{(1)}(\vartheta, \varphi))^* (\mathbf{a} \cdot \mathbf{Y}_{JM}^{(0)}(\vartheta, \varphi)) = -i \frac{2J+1}{8\pi} \mathbf{n} \cdot [\mathbf{a}^* \times \mathbf{a}], \tag{94}$$

$$\sum_{M=-J}^J (\mathbf{a} \cdot \mathbf{Y}_{JM}^{(1)}(\vartheta, \varphi))^* (\mathbf{a} \cdot \mathbf{Y}_{JM}^{(-1)}(\vartheta, \varphi)) = 0, \quad (95)$$

$$\sum_{M=-J}^J (\mathbf{a} \cdot \mathbf{Y}_{JM}^{(0)}(\vartheta, \varphi))^* (\mathbf{a} \cdot \mathbf{Y}_{JM}^{(1)}(\vartheta, \varphi)) = -i \frac{2J+1}{8\pi} \mathbf{n} [\mathbf{a}^* \times \mathbf{a}], \quad (96)$$

$$\sum_{M=-J}^J (\mathbf{a} \cdot \mathbf{Y}_{JM}^{(0)}(\vartheta, \varphi))^* (\mathbf{a} \cdot \mathbf{Y}_{JM}^{(-1)}(\vartheta, \varphi)) = 0, \quad (97)$$

$$\sum_{M=-J}^J (\mathbf{a} \cdot \mathbf{Y}_{JM}^{(-1)}(\vartheta, \varphi))^* (\mathbf{a} \cdot \mathbf{Y}_{JM}^{(1)}(\vartheta, \varphi)) = 0, \quad (98)$$

$$\sum_{M=-J}^J (\mathbf{a} \cdot \mathbf{Y}_{JM}^{(-1)}(\vartheta, \varphi))^* (\mathbf{a} \cdot \mathbf{Y}_{JM}^{(0)}(\vartheta, \varphi)) = 0. \quad (99)$$

## 10. Разложения Клебша—Гордана для произведений шаровых векторов

$$\begin{aligned} & \mathbf{Y}_{J_1 M_1}^{L_1}(\vartheta, \varphi) \cdot \mathbf{Y}_{J_2 M_2}^{L_2}(\vartheta, \varphi) = \\ & = \sum_L (-1)^{J_2+L_1+L} \sqrt{\frac{(2J_1+1)(2J_2+1)(2L_1+1)(2L_2+1)}{4\pi(2L+1)}} \begin{Bmatrix} L_1 & L_2 & L \\ J_2 & J_1 & 1 \end{Bmatrix} C_{L,0L_2,0}^{L,0} C_{J_1 M_1, J_2 M_2}^{L, L M} \mathbf{Y}_{LM}(\vartheta, \varphi), \end{aligned} \quad (100)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}_{J_1 M_1}^{L_1}(\vartheta, \varphi) \times \mathbf{Y}_{J_2 M_2}^{L_2}(\vartheta, \varphi) & = i \sqrt{\frac{3}{2\pi} (2J_1+1)(2J_2+1)(2L_1+1)(2L_2+1)} \times \\ & \times \sum_{JL} \begin{Bmatrix} J_1 & L_1 & 1 \\ J_2 & L_2 & 1 \\ J & L & 1 \end{Bmatrix} C_{L,0L_2,0}^{L,0} C_{J_1 M_1, J_2 M_2}^{J, L M} \mathbf{Y}_{JM}^L(\vartheta, \varphi). \end{aligned} \quad (101)$$

## 11. Интегралы, содержащие шаровые векторы

Обозначения  $\int f(\vartheta, \varphi) d\Omega = \int_0^\pi d\vartheta \sin \vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi f(\vartheta, \varphi)$ .

$$\int e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} \mathbf{Y}_{JM}^L(\vartheta, \varphi) d\Omega = i^L 4\pi j_L(kr) \mathbf{Y}_{JM}^L(\vartheta_k, \varphi_k), \quad (102)$$

где

$$\mathbf{k} = (k, \vartheta_k, \varphi_k), \quad \mathbf{r} = (r, \vartheta, \varphi), \quad j_L(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} J_{l+\frac{1}{2}}(x).$$

$$\begin{aligned} \int e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} \mathbf{Y}_{JM}^{(1)}(\vartheta, \varphi) d\Omega & = 4\pi i^{J+1} \left\{ \sqrt{\frac{J}{2J+1}} j_{J+1}(kr) \mathbf{Y}_{JM}^{J+1}(\vartheta_k, \varphi_k) - \sqrt{\frac{J+1}{2J+1}} j_{J-1}(kr) \mathbf{Y}_{JM}^{J-1}(\vartheta_k, \varphi_k) \right\} = \\ & = \frac{4\pi i^{J+1}}{2J+1} \{ [J \cdot j_{J+1}(kr) - (J+1) j_{J-1}(kr)] \mathbf{Y}_{JM}^{(1)}(\vartheta_k, \varphi_k) - \sqrt{J(J+1)} [j_{J+1}(kr) + j_{J-1}(kr)] \mathbf{Y}_{JM}^{(-1)}(\vartheta_k, \varphi_k) \}, \end{aligned} \quad (103)$$

$$\int e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} \mathbf{Y}_{JM}^{(0)}(\vartheta, \varphi) d\Omega = 4\pi i^J j_J(kr) \mathbf{Y}_{JM}^J(\vartheta_k, \varphi_k) = 4\pi i^J j_J(kr) \mathbf{Y}_{JM}^{(0)}(\vartheta_k, \varphi_k), \quad (104)$$

$$\begin{aligned} \int e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} \mathbf{Y}_{JM}^{(-1)}(\vartheta, \varphi) d\Omega & = 4\pi i^{J-1} \left\{ \sqrt{\frac{J+1}{2J+1}} j_{J+1}(kr) \mathbf{Y}_{JM}^{J+1}(\vartheta_k, \varphi_k) + \sqrt{\frac{J}{2J+1}} j_{J-1}(kr) \mathbf{Y}_{JM}^{J-1}(\vartheta_k, \varphi_k) \right\} = \\ & = \frac{4\pi i^{J-1}}{2J+1} \{ \sqrt{J(J+1)} [j_{J+1}(kr) + j_{J-1}(kr)] \mathbf{Y}_{JM}^{(-1)}(\vartheta_k, \varphi_k) - [(J+1) j_{J+1}(kr) - J j_{J-1}(kr)] \mathbf{Y}_{JM}^{(1)}(\vartheta_k, \varphi_k) \}. \end{aligned} \quad (105)$$

$$\int \mathbf{Y}_{JM}^L(\vartheta, \varphi) d\Omega = \sqrt{4\pi} \delta_{J1} \delta_{L0} \mathbf{e}_M, \quad (106)$$

$$\int \mathbf{Y}_{JM}^{(\lambda)}(\vartheta, \varphi) d\Omega = \sqrt{\frac{4\pi}{3}} \delta_{J1} (\sqrt{2} \delta_{\lambda 1} + \delta_{\lambda -1}) \mathbf{e}_M;$$

$$\int \mathbf{Y}_{J'M'}^{L'*}(\vartheta, \varphi) \cdot \mathbf{Y}_{JM}^L(\vartheta, \varphi) d\Omega = \delta_{J'J} \delta_{L'L} \delta_{M'M}, \quad (107)$$

$$\int \mathbf{Y}_{J'M'}^{(\lambda')*}(\vartheta, \varphi) \mathbf{Y}_{JM}^{(\lambda)}(\vartheta, \varphi) d\Omega = \delta_{J'J} \delta_{\lambda'\lambda} \delta_{M'M};$$

$$\begin{aligned} & \int \mathbf{Y}_{J'M'}^{L'*}(\vartheta, \varphi) \times \mathbf{Y}_{JM}^L(\vartheta, \varphi) d\Omega = \\ & = i (-1)^{J+L} \delta_{LL'} \sqrt{6(2J'+1)} \begin{Bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ J' & J & L \end{Bmatrix} C_{J'M'm}^{JM} \mathbf{e}_m. \end{aligned} \quad (108)$$

## 12. Условия ортогональности, нормировки и полноты

Совокупность шаровых векторов  $\mathbf{Y}_{JM}^L(\vartheta, \varphi)$ , при всех положительных целых значениях  $J$  ( $0 \leq J < \infty$ ),  $L = J, J \pm 1$  и целочисленных значениях  $M$  ( $|M| \leq J$ ) образуют ортогональную нормированную полную систему векторных функций в области углов  $0 \leq \vartheta \leq \pi$ ,  $0 \leq \varphi < 2\pi$ .

Условие ортогональности и нормировки для векторов  $\mathbf{Y}_{JM}^L(\vartheta, \varphi)$

$$\int_0^\pi \int_0^{2\pi} \mathbf{Y}_{J'M'}^{L'*}(\vartheta, \varphi) \mathbf{Y}_{JM}^L(\vartheta, \varphi) \sin \vartheta d\vartheta d\varphi = \delta_{J'J} \delta_{L'L} \delta_{M'M}. \quad (109)$$

Условие полноты для циклических компонент векторов  $\mathbf{Y}_{JM}^L(\vartheta, \varphi)$

$$\sum_{J=0}^{\infty} \sum_{L=J-1}^{J+1} \sum_{M=-J}^J [\mathbf{Y}_{JM}^L(\vartheta, \varphi)]_\mu [\mathbf{Y}_{JM}^L(\vartheta', \varphi')]_\nu^* = \delta_{\mu\nu} \delta(\cos \vartheta - \cos \vartheta') \delta(\varphi - \varphi'). \quad (110)$$

Аналогично, совокупность шаровых векторов  $\mathbf{Y}_{JM}^{(\lambda)}(\vartheta, \varphi)$  также образует ортонормированную полную систему векторных функций. Условие ортогональности и нормировки для векторов  $\mathbf{Y}_{JM}^{(\lambda)}(\vartheta, \varphi)$  имеет вид

$$\int_0^\pi \int_0^{2\pi} \mathbf{Y}_{J'M'}^{(\lambda')*}(\vartheta, \varphi) \mathbf{Y}_{JM}^{(\lambda)}(\vartheta, \varphi) \sin \vartheta d\vartheta d\varphi = \delta_{J'J} \delta_{\lambda'\lambda} \delta_{M'M}. \quad (111)$$

Для циклических компонент векторов  $\mathbf{Y}_{JM}^{(\lambda)}(\vartheta, \varphi)$  условие полноты можно записать следующим образом:

$$\sum_{J=0}^{\infty} \sum_{\lambda=-1}^1 \sum_{M=-J}^J [\mathbf{Y}_{JM}^{(\lambda)}(\vartheta, \varphi)]_\mu [\mathbf{Y}_{JM}^{(\lambda)}(\vartheta', \varphi')]_\nu^* = \delta_{\mu\nu} \delta(\cos \vartheta - \cos \vartheta') \delta(\varphi - \varphi'). \quad (112)$$

## 13. Разложение по шаровым векторам

Всякий вектор  $\mathbf{F}(\vartheta, \varphi)$ , зависящий от углов  $\vartheta, \varphi$  и удовлетворяющий условию

$$\int |\mathbf{F}(\vartheta, \varphi)|^2 d\Omega < \infty, \quad (113)$$

где

$$\int d\Omega = \int_0^\pi d\vartheta \sin \vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi,$$

можно в области  $0 \leq \vartheta \leq \pi$ ,  $0 \leq \varphi < 2\pi$  разложить в ряд по шаровым векторам  $Y_{JM}^L(\vartheta, \varphi)$  или  $Y_{JM}^{(\lambda)}(\vartheta, \varphi)$ , т. е. представить как

$$\mathbf{F}(\vartheta, \varphi) = \sum_{JLM} A_{JM}^L Y_{JM}^L(\vartheta, \varphi) \quad (114)$$

или в виде

$$\mathbf{F}(\vartheta, \varphi) = \sum_{JLM} A_{JM}^{(\lambda)} Y_{JM}^{(\lambda)}(\vartheta, \varphi). \quad (115)$$

Коэффициенты разложения даются формулами

$$\begin{aligned} A_{JM}^L &= \int d\Omega \mathbf{F}(\vartheta, \varphi) \cdot \mathbf{Y}_{JM}^{L*}(\vartheta, \varphi), \\ A_{JM}^{(\lambda)} &= \int d\Omega \mathbf{F}(\vartheta, \varphi) \cdot \mathbf{Y}_{JM}^{(\lambda)*}(\vartheta, \varphi). \end{aligned} \quad (116)$$

Полезно также иметь в виду следующее правило. Если скалярная функция  $\Phi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$  от  $\mathbf{r}_1(r_1, \vartheta_1, \varphi_1)$ ,  $\mathbf{r}_2(r_2, \vartheta_2, \varphi_2)$  разлагается в ряд по сферическим функциям вида

$$\Phi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \sum_{Lm} A_L(r_1, r_2) Y_{Lm}^*(\vartheta_2, \varphi_2) Y_{Lm}(\vartheta_1, \varphi_1), \quad (117)$$

то для векторной функции  $\mathbf{F}(\mathbf{r}_2)\Phi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$  разложение по шаровым векторам  $Y_{JM}^L(\vartheta_1, \varphi_1)$  будет иметь вид

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}_2)\Phi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \sum_{JLM} A_L(r_1, r_2) [\mathbf{F}(\mathbf{r}_2) \cdot \mathbf{Y}_{JM}^{L*}(\vartheta_2, \varphi_2)] Y_{JM}^L(\vartheta_1, \varphi_1). \quad (118)$$

Ниже приводятся примеры разложений.

#### а. Разложение плоской волны

Пусть  $\mathbf{k} = (k, \vartheta_k, \varphi_k)$ ,  $\mathbf{r} = (r, \vartheta, \varphi)$ . Тогда

$$\varepsilon(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} = 4\pi \sum_{JLM} i^L j_L(kr) \{ \varepsilon(\mathbf{k}) \cdot \mathbf{Y}_{JM}^{L*}(\vartheta_k, \varphi_k) \} Y_{JM}^L(\vartheta, \varphi). \quad (119)$$

Здесь  $j_L(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} J_{L+\frac{1}{2}}(x)$  — сферическая функция Бесселя.

Разложение по векторам  $Y_{JM}^{(\lambda)}(\vartheta, \varphi)$  имеет вид

$$\varepsilon(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} = \sum_{JLM} A_{JM}^{(\lambda)} Y_{JM}^{(\lambda)}(\vartheta, \varphi), \quad (120)$$

где

$$\begin{aligned} A_{JM}^{(1)} &= 4\pi i^{J+1} \left\{ \sqrt{\frac{J}{2J+1}} j_{J+1}(kr) \varepsilon(\mathbf{k}) \cdot \mathbf{Y}_{JM}^{J+1*}(\vartheta_k, \varphi_k) - \sqrt{\frac{J+1}{2J+1}} j_{J-1}(kr) \varepsilon(\mathbf{k}) \cdot \mathbf{Y}_{JM}^{J-1*}(\vartheta_k, \varphi_k) \right\} = \\ &= \frac{4\pi i^{J+1}}{2J+1} \{ [J \cdot j_{J+1}(kr) - (J+1) j_{J-1}(kr)] \varepsilon(\mathbf{k}) \cdot \mathbf{Y}_{JM}^{(1)*}(\vartheta_k, \varphi_k) - \\ &\quad - \sqrt{J(J+1)} [j_{J+1}(kr) + j_{J-1}(kr)] \varepsilon(\mathbf{k}) \cdot \mathbf{Y}_{JM}^{(-1)*}(\vartheta_k, \varphi_k) \}, \end{aligned} \quad (121)$$

$$A_{JM}^{(0)} = 4\pi i^J j_J(kr) \varepsilon(\mathbf{k}) \cdot \mathbf{Y}_{JM}^{J*}(\vartheta_k, \varphi_k) = 4\pi i^J j_J(kr) \varepsilon(\mathbf{k}) \cdot \mathbf{Y}_{JM}^{(0)*}(\vartheta_k, \varphi_k), \quad (122)$$

$$\begin{aligned} A_{JM}^{(-1)} &= 4\pi i^{J-1} \left\{ \sqrt{\frac{J+1}{2J+1}} j_{J+1}(kr) \varepsilon(\mathbf{k}) \cdot \mathbf{Y}_{JM}^{J+1*}(\vartheta_k, \varphi_k) + \sqrt{\frac{J}{2J+1}} j_{J-1}(kr) \varepsilon(\mathbf{k}) \cdot \mathbf{Y}_{JM}^{J-1*}(\vartheta_k, \varphi_k) \right\} = \\ &= \frac{4\pi i^{J-1}}{2J+1} \{ \sqrt{J(J+1)} [j_{J+1}(kr) + j_{J-1}(kr)] \varepsilon(\mathbf{k}) \cdot \mathbf{Y}_{JM}^{(1)*}(\vartheta_k, \varphi_k) - \\ &\quad - [(J+1) j_{J+1}(kr) - J \cdot j_{J-1}(kr)] \varepsilon(\mathbf{k}) \cdot \mathbf{Y}_{JM}^{(-1)*}(\vartheta_k, \varphi_k) \}. \end{aligned} \quad (123)$$

Если волна поперечная, т. е.  $\mathbf{k} \cdot \varepsilon(\mathbf{k}) = 0$ , то  $A_{JM}^{(0)} = 0$ .



## б. Разложение функции Грина для уравнения Лапласа

Пусть  $\mathbf{r} = (r, \vartheta, \varphi)$ ,  $\mathbf{R} = (R, \Theta, \Phi)$ . Тогда

$$\mathbf{J}(\mathbf{R}) \frac{1}{|\mathbf{R} - \mathbf{r}|} = 4\pi \sum_{JLM} A_L(R, r) \frac{1}{(2L+1)} \{ \mathbf{J}(\mathbf{R}) \cdot \mathbf{Y}_{JM}^{L*}(\Theta, \Phi) \} \mathbf{Y}_{JM}^L(\vartheta, \varphi), \quad (124)$$

где

$$A_L(R, r) = \begin{cases} \frac{r^L}{R^{L+1}} & \text{при } r < R, \\ \frac{R^L}{r^{L+1}} & \text{при } r > R. \end{cases} \quad (125)$$

## в. Разложение функции Грина для уравнения Гельмгольца

$$\mathbf{J}(\mathbf{R}) \frac{e^{ik|\mathbf{R}-\mathbf{r}|}}{|\mathbf{R}-\mathbf{r}|} = 4\pi ik \sum_{JLM} A_L(R, r) \{ \mathbf{J}(\mathbf{R}) \mathbf{Y}_{JM}^{L*}(\Theta, \Phi) \} \mathbf{Y}_{JM}^L(\vartheta, \varphi), \quad (126)$$

где

$$A_L(R, r) = \begin{cases} j_L(kr) h_L^{(1)}(kR) & \text{при } r < R, \\ h_L^{(1)}(kr) j_L(kR) & \text{при } r > R. \end{cases} \quad (127)$$

Здесь

$$h_L^{(1)}(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} H_{L+\frac{1}{2}}^{(1)}(x)$$

— сферическая функция Ханкеля.

14. Вид шаровых векторов при  $\vartheta = 0$  и  $\vartheta = \pi$ 

Если  $\vartheta = 0$  или  $\vartheta = \pi$ , то шаровые векторы  $\mathbf{Y}_{JM}^L(\vartheta, \varphi)$  и  $\mathbf{Y}_{LM}^{(\lambda)}(\vartheta, \varphi)$  отличны от нуля только для значений проекций  $M$ , равных  $\pm 1$  или  $0$ . При этом

$$\mathbf{Y}_{JM}^{J+1}(0, \varphi) = (-1)^{J-1} \mathbf{Y}_{JM}^{J+1}(\pi, \varphi) = \begin{cases} \sqrt{\frac{J}{8\pi}} \mathbf{e}_M, & \text{если } M = \pm 1, \\ -\sqrt{\frac{J+1}{4\pi}} \mathbf{e}_0, & \text{если } M = 0. \end{cases} \quad (128)$$

$$\mathbf{Y}_{JM}^J(0, \varphi) = (-1)^J \mathbf{Y}_{JM}^J(\pi, \varphi) = \begin{cases} -M \sqrt{\frac{2J+1}{8\pi}} \mathbf{e}_M, & \text{если } M = \pm 1, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \quad (129)$$

$$\mathbf{Y}_{JM}^{J-1}(0, \varphi) = (-1)^{J-1} \mathbf{Y}_{JM}^{J-1}(\pi, \varphi) = \begin{cases} \sqrt{\frac{J+1}{8\pi}} \mathbf{e}_M, & \text{если } M = \pm 1, \\ \sqrt{\frac{J}{4\pi}} \mathbf{e}_0, & \text{если } M = 0. \end{cases} \quad (130)$$

$$\mathbf{Y}_{JM}^{(1)}(0, \varphi) = (-1)^{J-1} \mathbf{Y}_{JM}^{(1)}(\pi, \varphi) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2J+1}{8\pi}} \mathbf{e}_M, & \text{если } M = \pm 1, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \quad (131)$$

$$\mathbf{Y}_{JM}^{(0)}(0, \varphi) = (-1)^J \mathbf{Y}_{JM}^{(0)}(\pi, \varphi) = \begin{cases} -M \sqrt{\frac{2J+1}{8\pi}} \mathbf{e}_M, & \text{если } M = \pm 1, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \quad (132)$$

$$\mathbf{Y}_{JM}^{(-1)}(0, \varphi) = (-1)^{J-1} \mathbf{Y}_{JM}^{(-1)}(\pi, \varphi) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2J+1}{4\pi}} \mathbf{e}_0, & \text{если } M = 0, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \quad (133)$$

## 15. Квадраты модулей шаровых векторов

Квадраты модулей шаровых векторов  $|Y_{JM}^{(\lambda)}(\vartheta, \varphi)|^2$  представляют интерес для физических приложений. Они характеризуют, в частности, угловые распределения частиц со спином 1 в состояниях с полным моментом  $J$ . Эти величины не зависят от азимутального угла  $\varphi$  и совпадают при  $\lambda = 1$  и  $\lambda = 0$ . Введем обозначения

$$\begin{aligned} W_{JM}^{\perp}(\vartheta) &\equiv |Y_{JM}^{(1)}(\vartheta, \varphi)|^2 = |Y_{JM}^{(0)}(\vartheta, \varphi)|^2, \\ W_{JM}^{\parallel}(\vartheta) &\equiv |Y_{JM}^{(-1)}(\vartheta, \varphi)|^2. \end{aligned} \quad (134)$$

Имеют место следующие соотношения:

$$\begin{aligned} W_{JM}^{\perp}(\vartheta) &= \frac{1}{2J(J+1)} \{ (J-M)(J+M+1) |Y_{JM+1}(\vartheta, \varphi)|^2 + 2M^2 |Y_{JM}(\vartheta, \varphi)|^2 + \\ &+ (J+M)(J-M+1) |Y_{JM-1}(\vartheta, \varphi)|^2 \}, \\ W_{JM}^{\parallel}(\vartheta) &= |Y_{JM}(\vartheta, \varphi)|^2. \end{aligned} \quad (135)$$

Разложения  $W_{JM}^{\perp, \parallel}(\vartheta, \varphi)$  по полиномам Лежандра имеют вид

$$\begin{aligned} W_{JM}^{\perp}(\vartheta) &= \sum_{n=0}^J a_n(J, M) P_{2n}(\cos \vartheta), \\ W_{JM}^{\parallel}(\vartheta) &= \sum_{n=0}^J b_n(J, M) P_{2n}(\cos \vartheta), \end{aligned} \quad (136)$$

где

$$\begin{aligned} a_n(J, M) &= -\frac{(2J+1)(4n+1)}{4\pi} \begin{Bmatrix} J & J & 2n \\ J & J & 1 \end{Bmatrix} C_{J02n0}^{J0} C_{JM2n0}^{JM} = \\ &= (-1)^n \frac{4n+1}{4\pi} \frac{J(J+1)-n(2n+1)}{J(J+1)} \frac{(J+n)!(2n)!}{(J-n)!(n!)^2} \sqrt{\frac{(2J+1)(2J-2n)!}{(2J+2n+1)!}} C_{JM2n0}^{JM}, \end{aligned} \quad (137)$$

$$b_n(J, M) = \frac{4n+1}{4\pi} C_{J02n0}^{J0} C_{JM2n0}^{JM} = (-1)^n \frac{4n+1}{4\pi} \frac{(J+n)!(2n)!}{(J-n)!(n!)^2} \sqrt{\frac{(2J+1)(2J-2n)!}{(2J+2n+1)!}} C_{JM2n0}^{JM}. \quad (138)$$

В частности:

$$a_0(J, M) = b_0(J, M) = \frac{1}{4\pi}, \quad (139)$$

$$a_1(J, M) = \frac{5}{4\pi} \frac{[J(J+1)-3][J(J+1)-3M^2]}{J(J+1)(2J-1)(2J+3)}, \quad (140)$$

$$b_1(J, M) = \frac{5}{4\pi} \frac{J(J+1)-3M^2}{(2J-1)(2J+3)}, \quad (141)$$

$$a_2(J, M) = \frac{27}{16\pi} \frac{[J(J+1)-10] \cdot [3(J^2+2J-5M^2)(J^2-5M^2-1)-10M^2(4M^2-1)]}{J(J+1)(2J-3)(2J-1)(2J+3)(2J+5)}, \quad (142)$$

$$b_2(J, M) = \frac{27}{16\pi} \frac{[3(J^2+2J-5M^2)(J^2-5M^2-1)-10M^2(4M^2-1)]}{(2J-3)(2J-1)(2J+3)(2J+5)}. \quad (143)$$

Величина  $W_{JM}^{\perp, \parallel}(\vartheta)$  нормирована так, что

$$\begin{aligned} \int W_{JM}^{\perp}(\vartheta) d\Omega &= \int W_{JM}^{\parallel}(\vartheta) d\Omega = 1, \\ \sum_{M=-J}^J W_{JM}^{\perp}(\vartheta) &= \sum_{M=-J}^J W_{JM}^{\parallel}(\vartheta) = \frac{2J+1}{4\pi}. \end{aligned} \quad (144)$$

Свойства симметрии  $W_{JM}^{\perp, \parallel}(\vartheta)$

$$\begin{aligned} W_{JM}^{\perp}(\vartheta) &= W_{J-M}^{\perp}(\vartheta) = W_{JM}^{\perp}(\pi - \vartheta) = W_{J-M}^{\perp}(\pi - \vartheta), \\ W_{JM}^{\parallel}(\vartheta) &= W_{J-M}^{\parallel}(\vartheta) = W_{JM}^{\parallel}(\pi - \vartheta) = W_{J-M}^{\parallel}(\pi - \vartheta). \end{aligned} \quad (145)$$

При  $\vartheta = 0$  и  $\vartheta = \pi$  имеем

$$W_{JM}^{\perp}(0) = W_{JM}^{\perp}(\pi) = \begin{cases} \frac{2J+1}{8\pi} & \text{при } M = \pm 1, \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases} \quad (146)$$

$$W_{JM}^{\parallel}(0) = W_{JM}^{\parallel}(\pi) = \begin{cases} \frac{2J+1}{4\pi} & \text{при } M = 0, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \quad (147)$$

Значения  $W_{JM}^{\perp, \parallel}(\vartheta)$  при  $J = 0, 1, 2, 3, 4, 5$  и  $0 \leq M \leq J$  приведены в табл. 7.2. При  $M < 0$  следует воспользоваться соотношением  $W_{J-M} = W_{JM}$ .

Кроме того, при частных значениях  $M$  имеют место формулы

$$W_{J0}^{\perp}(\vartheta) = \frac{2J+1}{4\pi(J+1)J} \sin^2 \vartheta [P'_J(\cos \vartheta)]^2, \quad (148)$$

$$W_{J0}^{\parallel}(\vartheta) = \frac{2J+1}{4\pi} [P_J(\cos \vartheta)]^2;$$

$$W_{JJ}^{\perp}(\vartheta) = W_{J-J}^{\perp}(\vartheta) = \frac{1}{4\pi} \frac{(2J+1)! (\sin \vartheta)^{2J-2}}{2^{2J} (J+1)! (J-1)!} (1 + \cos^2 \vartheta), \quad (149)$$

$$W_{JJ}^{\parallel}(\vartheta) = W_{J-J}^{\parallel}(\vartheta) = \frac{1}{4\pi} \frac{(2J+1)!}{2^{2J} (J!)^2} (\sin \vartheta)^{2J}.$$

#### 7.4. СВЯЗЬ С ОБОЗНАЧЕНИЯМИ ДРУГИХ АВТОРОВ

В левой части приведенных ниже соотношений стоят шаровые тензоры, спиноры и векторы в обозначениях других авторов, в правой части — соответствующие им величины в наших обозначениях.

##### Шаровые тензоры

Берестецкий, Долгинов, Тер-Мартirosян [55]:

$$Y_{lm}^{L\lambda} = \eta Y_{lm}^{l+\lambda L}, \quad \text{где } \eta = \begin{cases} (-1)^L & \text{для целых } L, \\ 1 & \text{для полуцелых } L. \end{cases}$$

Ньютон [28]:  $\mathfrak{Y}_{jls}^M = i^{l+s} Y_{jm}^{ls}$ .

##### Шаровые спиноры

Ахиезер, Берестецкий [2]:  $\Omega_{jlm} = \Omega_{jm}^l$ .

Берестецкий, Долгинов, Тер-Мартirosян [55]:  $Y_{jm}^{(\lambda)} = \Omega_{jm}^{j+\lambda}$ .

Берестецкий, Лифшиц, Питаевский [6]:  $\Omega_{jlm} = i^l \Omega_{jm}^l$ .

##### Шаровые векторы

Ахиезер, Берестецкий [2]:  $Y_{JM}^{(\lambda)} = Y_{JM}^{(\lambda)}, Y_{JLM} = Y_{JM}^L$ .

Блатт, Вайскопф [7], Роуз [30]:  $T_{L\lambda}^M = (-1)^{\lambda+1-L} Y_{LM}^{(\lambda)}$ ,

Берестецкий, Долгинов, Тер-Мартirosян [55]:  $Y_{lm}^{(\lambda)} = -Y_{lm}^{l+\lambda}$ .

Джексон [23]:  $X_{lm} = Y_{lm}^{(0)}$ .

Ньютон [28]:  $Y_{JM}^{(s)} = i^J Y_{JM}^{(1)}$ ,  $Y_{JM}^{(m)} = i^{J+1} Y_{JM}^{(0)}$ ,  $Y_{JM}^{(0)} = i^J Y_{JM}^{(-1)}$ ,  $Y_{Jl}^M = i^{l+1} Y_{JM}^l$ .

Берестецкий, Лифшиц, Питаевский [6]:  $Y_{JM}^{(s)} = i^J Y_{JM}^{(1)}$ ,  $Y_{JM}^{(M)} = i^{J+1} Y_{JM}^{(0)}$ ,  $Y_{JM}^{(n)} = i^J Y_{JM}^{(-1)}$ .

ТАБЛИЦА 7.2  
 ЗНАЧЕНИЯ  $w_{JM}^\perp(\vartheta)$  И  $w_{JM}^\parallel(\vartheta)$ .

$J$	$M$	$w_{JM}^\perp(\vartheta)$	$w_{JM}^\parallel(\vartheta)$
0	0	$1/4\pi$	$1/4\pi$
1	0	$\frac{3}{8\pi} \sin^2 \vartheta$	$\frac{3}{4\pi} \cos^2 \vartheta$
1	1	$\frac{3}{16\pi} (1 + \cos^2 \vartheta)$	$\frac{3}{8\pi} \sin^2 \vartheta$
2	0	$\frac{15}{8\pi} \sin^2 \vartheta \cos^2 \vartheta$	$\frac{5}{16\pi} (1 - 3 \cos^2 \vartheta)^2$
2	1	$\frac{5}{16\pi} (1 - 3 \cos^2 \vartheta + 4 \cos^4 \vartheta)$	$\frac{15}{8\pi} \sin^2 \vartheta \cos^2 \vartheta$
2	2	$\frac{5}{16\pi} (1 - \cos^4 \vartheta)$	$\frac{15}{32\pi} \sin^4 \vartheta$
3	0	$\frac{21}{64\pi} \sin^2 \vartheta (1 - 5 \cos^2 \vartheta)^2$	$\frac{7}{16\pi} \cos^2 \vartheta (3 - 5 \cos^2 \vartheta)^2$
3	1	$\frac{7}{256\pi} (1 + 111 \cos^2 \vartheta - 305 \cos^4 \vartheta + 225 \cos^6 \vartheta)$	$\frac{21}{64\pi} \sin^2 \vartheta (1 - 5 \cos^2 \vartheta)^2$
3	2	$\frac{35}{128\pi} \sin^2 \vartheta (1 - 2 \cos^2 \vartheta + 9 \cos^4 \vartheta)$	$\frac{105}{32\pi} \sin^4 \vartheta \cos^2 \vartheta$
3	3	$\frac{105}{256\pi} \sin^4 \vartheta (1 + \cos^2 \vartheta)$	$\frac{35}{64\pi} \sin^6 \vartheta$
4	0	$\frac{45}{64\pi} \sin^2 \vartheta \cos^2 \vartheta (3 - 7 \cos^2 \vartheta)^2$	$\frac{9}{256\pi} (3 - 30 \cos^2 \vartheta + 35 \cos^4 \vartheta)^2$
4	1	$\frac{9}{256\pi} (9 - 153 \cos^2 \vartheta + 855 \cos^4 \vartheta - 1463 \cos^6 \vartheta + 784 \cos^8 \vartheta)$	$\frac{45}{64\pi} \sin^2 \vartheta \cos^2 \vartheta (3 - 7 \cos^2 \vartheta)^2$
4	2	$\frac{9}{128\pi} \sin^2 \vartheta (1 + 50 \cos^2 \vartheta - 175 \cos^4 \vartheta + 196 \cos^6 \vartheta)$	$\frac{45}{128\pi} \sin^4 \vartheta (1 - 7 \cos^2 \vartheta)^2$
4	3	$\frac{63}{256\pi} \sin^4 \vartheta (1 + \cos^2 \vartheta + 16 \cos^4 \vartheta)$	$\frac{315}{64\pi} \sin^6 \vartheta \cos^2 \vartheta$
4	4	$\frac{63}{128\pi} \sin^6 \vartheta (1 + \cos^2 \vartheta)$	$\frac{315}{512\pi} \sin^8 \vartheta$
5	0	$\frac{165}{512\pi} \sin^2 \vartheta (1 - 14 \cos^2 \vartheta + 21 \cos^4 \vartheta)^2$	$\frac{11}{256\pi} \cos^2 \vartheta (15 - 70 \cos^2 \vartheta + 63 \cos^4 \vartheta)^2$
5	1	$\frac{11}{1024\pi} (1 + 813 \cos^2 \vartheta - 7070 \cos^4 \vartheta + 21378 \cos^6 \vartheta - 26019 \cos^8 \vartheta + 11025 \cos^{10} \vartheta)$	$\frac{165}{512\pi} \sin^2 \vartheta (1 - 14 \cos^2 \vartheta + 21 \cos^4 \vartheta)^2$
5	2	$\frac{77}{256\pi} \sin^2 \vartheta (1 - 20 \cos^2 \vartheta + 150 \cos^4 \vartheta - 324 \cos^6 \vartheta + 225 \cos^8 \vartheta)$	$\frac{1155}{128\pi} \sin^4 \vartheta \cos^2 \vartheta (1 - 3 \cos^2 \vartheta)^2$
5	3	$\frac{231}{2048\pi} \sin^4 \vartheta (1 + 31 \cos^2 \vartheta - 129 \cos^4 \vartheta + 225 \cos^6 \vartheta)$	$\frac{365}{1024\pi} \sin^6 \vartheta (1 - 9 \cos^2 \vartheta)^2$
5	4	$\frac{231}{1024\pi} \sin^6 \vartheta (1 + 6 \cos^2 \vartheta + 25 \cos^4 \vartheta)$	$\frac{3465}{512\pi} \sin^8 \vartheta \cos^2 \vartheta$
5	5	$\frac{1155}{2048\pi} \sin^8 \vartheta (1 + \cos^2 \vartheta)$	$\frac{693}{1024\pi} \sin^{10} \vartheta$

## КОЭФФИЦИЕНТЫ КЛЕБША—ГОРДАНА И $3jm$ -СИМВОЛЫ

### 8.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ

Коэффициенты Клебша—Гордана, являющиеся коэффициентами векторного сложения, осуществляют разложение приводимых представлений группы вращений на неприводимые. Все остальные коэффициенты векторного сложения могут быть представлены в виде сумм произведений коэффициентов Клебша—Гордана. Все это определяет их широкое использование в квантовой теории углового момента.

1. Коэффициенты Клебша—Гордана  $C_{j_1 m_1 j_2 m_2}^{j m}$  представляют собой амплитуду вероятности того, что угловые моменты  $\mathbf{j}_1$  и  $\mathbf{j}_2$  с проекциями  $m_1$  и  $m_2$ , связаны в суммарный угловой момент  $\mathbf{j}$  с проекцией  $m$ . В соответствии с правилами векторного сложения  $\mathbf{j}_1 + \mathbf{j}_2 = \mathbf{j}$  отличны от нуля лишь коэффициенты, для которых выполнено условие треугольника

$$|j_1 - j_2| \leq j \leq j_1 + j_2, \quad (1)$$

а также условие

$$m_1 + m_2 = m. \quad (2)$$

Кроме того, в дальнейшем предполагается, что аргументы коэффициентов Клебша—Гордана удовлетворяют условиям \*

- а)  $j_1, j_2, j$  — целые или полуцелые неотрицательные числа,
- б)  $m_1, m_2, m$  — целые или полуцелые, положительные или отрицательные числа,
- в)  $|m_1| \leq j_1, |m_2| \leq j_2, |m| \leq j,$
- г)  $j_1 + m_1, j_2 + m_2, j + m, j_1 + j_2 + j$  — целые неотрицательные числа.

Абсолютная величина коэффициентов Клебша—Гордана определяется соотношением

$$[C_{j_1 m_1 j_2 m_2}^{j m}]^2 = \frac{2j+1}{8\pi} \int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^\pi d\beta \sin \beta \int_0^{2\pi} d\gamma D_{m_1 m_1}^{j_1}(\alpha, \beta, \gamma) D_{m_2 m_2}^{j_2}(\alpha, \beta, \gamma) D_{m m}^{j*}(\alpha, \beta, \gamma). \quad (4)$$

Фазы коэффициентов могут быть определены различными способами. Общепринятым является выбор фаз, предложенный Кондоном и Шортли [10], при котором коэффициенты  $C_{j_1 m_1 j_2 m_2}^{j m}$  вещественны. В качестве дополнительных условий, однозначно определяющих фазу коэффициентов, можно указать следующие:

$$C_{j_1 m_1 j_2 m_2}^{j m} C_{j_1 j_1 j_2 j_2}^{j_1 j_1 - j_2} = \frac{2j+1}{8\pi} \int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^\pi d\beta \sin \beta \int_0^{2\pi} d\gamma D_{m_1 j_1}^{j_1}(\alpha, \beta, \gamma) D_{m_2 - j_2}^{j_2}(\alpha, \beta, \gamma) D_{m j_1 - j_2}^{j*}(\alpha, \beta, \gamma), \quad (5)$$

где

$$C_{j_1 j_1 j_2 - j_2}^{j_1 j_1 - j_2} > 0.$$

При таком выборе фаз коэффициенты Клебша—Гордана удовлетворяют следующим соотношениям:

$$C_{j m 00}^{j m} = 1, \quad C_{j_1 j_1 j_2 j_2}^{j_1 + j_2, j_1 + j_2} = 1, \quad C_{j_1 m_1 j_2 m_2}^{j_1 + j_2, m_1 + m_2} > 0, \quad C_{j_1 m_1 j_2 - j_2}^{j m} > 0, \quad (-1)^{j_1 + j_2 - j} C_{j_1 m_1 j_2 j_2}^{j m} > 0, \\ (-1)^{j_1 - m_1} C_{j_1 m_1 j_2 m_2}^{j j} > 0, \quad (-1)^{j_2 + m_2} C_{j_1 m_1 j_2 m_2}^{j_1 - j_2, m} > 0. \quad (6)$$

\* Исключение составляют коэффициенты, рассматриваемые в 8.4.5.

Коэффициенты Клебша—Гордана образуют унитарную матрицу, осуществляющую преобразование от представления  $j_1 m_1, j_2 m_2$  к представлению  $j_1 j_2 j m$  и обратно,

$$C_{j_1 m_1, j_2 m_2}^{j m} = \langle j_1 m_1 j_2 m_2 | j_1 j_2 j m \rangle = \langle j_1 j_2 j m | j_1 m_1 j_2 m_2 \rangle. \quad (7)$$

Соотношение унитарности

$$\begin{aligned} \sum_{m_1 m_2} C_{j_1 m_1, j_2 m_2}^{j m} C_{j_1 m_1, j_2 m_2}^{j' m'} &= \delta_{j j'} \delta_{m m'}, \\ \sum_{j(m)} C_{j_1 m_1, j_2 m_2}^{j m} C_{j_1 m_1', j_2 m_2'}^{j m} &= \delta_{m_1 m_1'} \delta_{m_2 m_2'}. \end{aligned} \quad (8)$$

Произведение двух неприводимых тензоров  $\mathfrak{M}_{j_1 m_1}$  и  $\mathfrak{N}_{j_2 m_2}$  может быть разложено в ряд по неприводимым тензорам. Коэффициентами этого разложения являются коэффициенты Клебша—Гордана

$$\mathfrak{M}_{j_1 m_1} \mathfrak{N}_{j_2 m_2} = \sum_{j(m)} C_{j_1 m_1, j_2 m_2}^{j m} \{ \mathfrak{M}_{j_1} \otimes \mathfrak{N}_{j_2} \}_{j m}. \quad (9)$$

Обратное разложение

$$\{ \mathfrak{M}_{j_1} \otimes \mathfrak{N}_{j_2} \}_{j m} = \sum_{m_1 m_2} C_{j_1 m_1, j_2 m_2}^{j m} \mathfrak{M}_{j_1 m_1} \mathfrak{N}_{j_2 m_2}. \quad (10)$$

2.  $3jm$ -символы. Иногда вместо коэффициентов Клебша—Гордана пользуются  $3jm$ -символами Вигнера [110], обладающими более простыми свойствами симметрии. Они определяются соотношениями

$$\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} = (-1)^{j_3 + m_3 + 2j_1} \frac{1}{\sqrt{2j_3 + 1}} C_{j_1 - m_1, j_2 - m_2}^{j_3 m_3}. \quad (11)$$

Обратное соотношение имеет вид

$$\sqrt{2j_3 + 1} C_{j_1 m_1, j_2 m_2}^{j_3 m_3} = (-1)^{j_1 - j_2 + m_3} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & -m_3 \end{pmatrix}. \quad (12)$$

$3jm$ -символ представляет собой амплитуду вероятности того, что три угловых момента  $\mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2$  и  $\mathbf{j}_3$  с проекциями  $m_1, m_2$  и  $m_3$  соответственно складываются в полный угловой момент, равный нулю.

$$\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} = \eta \sum_{j' m'} C_{j_1 m_1, j_2 m_2}^{j' m'} C_{j' m', j_3 m_3}^{00}. \quad (13)$$

Фазовый множитель  $\eta = (-1)^{j_1 - j_2 + j_3}$  выбран так, чтобы циклическая перестановка моментов  $j_1, j_2$  и  $j_3$  не изменяла значения  $3jm$ -символа.

В дальнейшем при обозначении аргументов коэффициентов Клебша—Гордана и  $3jm$ -символов будут использоваться также латинские буквы ( $a, b, c$  и т. д.) для обозначения моментов и греческие ( $\alpha, \beta, \gamma$  и т. д.) — для обозначения их проекций.

3.  $R_{ik}$ -символы Редже.  $3jm$ -символы Вигнера могут быть представлены в виде квадратной таблицы  $\|R_{ik}\|$  размерности  $3 \times 3$  ( $i, k = 1, 2, 3$ ). Эта таблица называется  $R$ -символом Редже [94].

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ \alpha & \beta & \gamma \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{vmatrix}, \quad (14)$$

где

$$\begin{aligned} R_{11} &= -a + b + c, & R_{12} &= a - b + c, & R_{13} &= a + b - c, \\ R_{21} &= a + \alpha, & R_{22} &= b + \beta, & R_{23} &= c + \gamma, \\ R_{31} &= a - \alpha, & R_{32} &= b - \beta, & R_{33} &= c - \gamma. \end{aligned} \quad (15)$$

Обратные соотношения имеют вид

$$\begin{aligned} 2a &= R_{21} + R_{31} = R_{12} + R_{13}, & 2\alpha &= R_{21} - R_{31} = R_{32} - R_{22} + R_{33} - R_{23}, \\ 2b &= R_{22} + R_{32} = R_{11} + R_{13}, & 2\beta &= R_{22} - R_{32} = R_{31} - R_{21} + R_{33} - R_{23}, \\ 2c &= R_{23} + R_{33} = R_{11} + R_{12}, & 2\gamma &= R_{23} - R_{33} = R_{31} - R_{21} + R_{32} - R_{22}. \end{aligned} \quad (16)$$

Все 9 элементов  $R_{ik}$  представляют собой целые неотрицательные числа, удовлетворяющие условиям

$$\sum_i R_{ik} = J, \quad \sum_k R_{ik} = J, \quad (17)$$

где

$$J = a + b + c. \quad (18)$$

### 8.2. ЯВНЫЙ ВИД КОЭФФИЦИЕНТОВ И ИХ СВЯЗЬ С ДРУГИМИ ФУНКЦИЯМИ

В приведенных ниже формулах предполагается, что аргументы коэффициентов Клебша—Гордана и  $3j$ -символов удовлетворяют условиям 8.1 (1)—8.1 (3). Входящий в эти формулы  $\Delta$ -символ имеет вид

$$\Delta(abc) = \left[ \frac{(a+b-c)! (a-b+c)! (-a+b+c)!}{(a+b+c+1)!} \right]^{1/2}. \quad (19)$$

Он симметричен относительно перестановки моментов  $a, b, c$ . Численные значения  $\Delta$ -символа для моментов  $\frac{1}{2} \leq a, b, c \leq 5$  приведены в табл. 8.12. Если один из моментов равен нулю, то  $\Delta$ -символ имеет вид

$$\Delta(aa0) = \frac{1}{\sqrt{2a+1}}. \quad (20)$$

#### 1. Представление в виде алгебраических сумм

$$C_{a\alpha b\beta}^{c\gamma} = \delta_{\gamma, \alpha+\beta} \Delta(abc) [(a+\alpha)! (a-\alpha)! (b+\beta)! (b-\beta)! (c+\gamma)! (c-\gamma)! (2c+1)]^{1/2} \times \\ \times \sum_z \frac{(-1)^z}{z! (a+b-c-z)! (a-\alpha-z)! (b+\beta-z)! (c-b+\alpha+z)! (c-a-\beta+z)!} \quad (3)$$

(Ван-дер-Варден [40], Ракá [91]),

$$C_{a\alpha b\beta}^{c\gamma} = \delta_{\gamma, \alpha+\beta} \frac{\Delta(abc)}{(c+a-b)! (c-a+b)!} \left[ \frac{(a-\alpha)! (b-\beta)! (c+\gamma)! (c-\gamma)! (2c+1)}{(a+\alpha)! (b+\beta)!} \right]^{1/2} \times \\ \times \sum_z \frac{(-1)^{a-\alpha+z} (a+\alpha+z)! (c+b-\alpha-z)!}{z! (a-\alpha-z)! (c-\gamma-z)! (b-c+\alpha+z)!} \quad (\text{Ракá [91], Фок [68]},) \quad (4)$$

$$C_{a\alpha b\beta}^{c\gamma} = \delta_{\gamma, \alpha+\beta} \Delta(abc) \left[ \frac{(c+\gamma)! (c-\gamma)! (2c+1)}{(a+\alpha)! (a-\alpha)! (b+\beta)! (b-\beta)!} \right]^{1/2} \times \\ \times \sum_z \frac{(-1)^{b+\beta+z} (c+b+\alpha-z)! (a-\alpha+z)!}{z! (c-a+b-z)! (c+\gamma-z)! (a-b-\gamma+z)!} \quad (\text{Вигнер [43]},) \quad (5)$$

$$C_{a\alpha b\beta}^{c\gamma} = \delta_{\gamma, \alpha+\beta} \frac{\Delta(abc)}{(a-b+c)! (a+b-c)!} \left[ \frac{(a+\alpha)! (a-\alpha)! (b-\beta)! (c+\gamma)! (2c+1)}{(b+\beta)! (c-\gamma)!} \right]^{1/2} \times \\ \times \sum_z \frac{(-1)^{b+\beta+z} (2c-z)! (a+b-c+z)!}{z! (c-a+b-z)! (c+\gamma-z)! (a-c-\beta+z)!} \quad (\text{Маджумдар [82]},) \quad (6)$$

$$C_{a\alpha b\beta}^{c\gamma} = \delta_{\gamma, \alpha+\beta} \frac{\Delta(abc) (a+b+c+1)!}{(a-b+c)!} \left[ \frac{(a-\alpha)! (c+\gamma)! (2c+1)}{(a+\alpha)! (b+\beta)! (b-\beta)! (c-\gamma)!} \right]^{1/2} \times \\ \times \sum_z \frac{(-1)^{b+\beta+z} (2c-z)! (c+b+\alpha-z)!}{z! (c-a+b-z)! (c+\gamma-z)! (a+b+c+1-z)!} \quad (\text{Бандзайтис, Юцис [51]},) \quad (7)$$

$$C_{a\alpha b\beta}^{c\gamma} = \delta_{\gamma, \alpha+\beta} \left[ \frac{(a+\alpha)! (a-\alpha)! (c+\gamma)! (c-\gamma)! (2c+1)}{(b+\beta)! (b-\beta)!} \right]^{1/2} \times \\ \times \sum_z \frac{(-1)^{a-\alpha+z} (a+b-\gamma-z)! (b+c-\alpha-z)!}{z! (a-\alpha-z)! (c-\gamma-z)! (a+b+c+1-z)!} \quad (\text{Бандзайтис, Юцис [51]},) \quad (8)$$

В формулах (3)—(8) суммирование проводится по всем целым неотрицательным значениям  $z$ , при которых величины, стоящие под знаком факториала, являются неотрицательными числами.

2. Коэффициенты Клебша—Гордана можно представить в виде *квазибинома*  $(u \pm v)^{(k)}$  [48]

$$C_{\alpha\alpha\beta\beta}^{c\gamma} = \delta_{\gamma, \alpha+\beta} \frac{\Delta(abc)}{(a+b-c)!} \left[ \frac{(c-\gamma)! (c+\gamma)! (2c+1)}{(a-\alpha)! (a+\alpha)! (b-\beta)! (b+\beta)!} \right]^{1/2} [(a+x)(b-\beta) - (a-\alpha)(b+\beta)]^{(a+b-c)}. \quad (9)$$

Для вычисления квазибином необходимо раскрыть по формуле бинома Ньютона, а степени заменить квазистепенями

$$(u \pm v)^{(k)} = \sum_z (\pm 1)^z \binom{k}{z} u^{(k-z)} v^{(z)}. \quad (10)$$

*Квазистепени* (или *обобщенные степени*) определяются формулами

$$u^{(z)} \equiv u^{(1)(z)} = \frac{\Gamma(u+1)}{\Gamma(u-z+1)}, \quad (11)$$

$$u^{(-1)(z)} = (u+z)^{(z)} = \frac{\Gamma(u+z+1)}{\Gamma(u+1)}.$$

В случае целого положительного  $z$

$$u^{(z)} = u(u-1)\dots(u-z+1), \quad (12)$$

$$u^{(-1)(z)} = (u+1)(u+2)\dots(u+z).$$

3. Коэффициенты Клебша—Гордана связаны с исчислением *конечных разностей* [41]

$$C_{\alpha\alpha\beta\beta}^{c\gamma} = \delta_{\gamma, \alpha+\beta} (-1)^{a-c+\beta} \left[ \frac{(c+\gamma)! (a+b-c)! (2c+1)}{(c-\gamma)! (c+a-b)! (c-a+b)! (a+b+c+1)!} \right]^{1/2} \times$$

$$\times \left[ \frac{(a-\alpha)^{(a-b-\gamma)}}{(a+\alpha)^{(a-b+\gamma)}} \right]^{1/2} \Delta_{\alpha}^{c-\gamma} \left[ \frac{(a+\alpha)^{(c+a-b)}}{(a-\alpha)^{(a-b-c)}} \right], \quad (13)$$

где *разность  $k$ -го порядка по аргументу  $a$*  вычисляется по формуле

$$\Delta_a^k f(a) = \sum_{n=0}^k (-1)^{k-n} \frac{k!}{n! (k-n)!} f(a+n). \quad (14)$$

В частности,

$$\Delta_a f(a) = f(a+1) - f(a), \quad (15)$$

$$\Delta_a^n a^{(n)} = n a^{(n-1)}.$$

Конечные разности являются аналогами операторов дифференцирования, а квазистепени — разностными аналогами обычных степеней. При этом коэффициенты Клебша—Гордана являются разностными аналогами  $D$ -функций Вигнера [20, 58]. Чтобы продемонстрировать эту аналогию, введем обозначения

$$j = b, \quad \mu = c - a, \quad \nu = \beta, \quad P = \frac{1}{2}(a+b+c), \quad Q = a + \alpha - \frac{1}{2}(a+b+c). \quad (16)$$

Тогда формулу (3) можно записать через квазистепени следующим образом:

$$\sqrt{\frac{a+b+c+1}{2c+1}} C_{\alpha\alpha\beta\beta}^{c\gamma} = \left[ \frac{(j+\mu)! (j-\mu)! (j+\nu)! (j-\nu)!}{(2P)^{(2j)} (P-Q)^{(j+\mu)} (P-Q)^{(j+\nu)} (P+Q)^{(-\mu-\nu)}} \right]^{1/2} \times$$

$$\times \sum_z (-1)^z \frac{(P-Q)^{(j+\mu+z)} (P+Q)^{(j-\mu-z)}}{z! (j-\mu-z)! (j+\nu-z)! (\mu-\nu+z)!}. \quad (17)$$

Если в (17) заменить квазистепени на обычные степени и ввести угол  $\theta$  по формуле

$$\cos \theta = \frac{Q}{P}, \quad \cos \frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{P+Q}{2P}}, \quad \sin \frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{P-Q}{2P}}, \quad (18)$$



то выражение (17) перейдет в формулу для  $D$ -функций Вигнера, эквивалентную формуле 4.3. (4),

$$d_{\nu\mu}^j(\theta) = \left[ \frac{(j+\mu)! (j-\mu)! (j+\nu)! (j-\nu)!}{(2P)^{2j} (P-Q)^{j+\mu} (P-Q)^{j+\nu} (P+Q)^{j-\mu-\nu}} \right]^{1/2} \sum_z (-1)^z \frac{(P-Q)^{j+\mu+z} (P+Q)^{j-\mu-z}}{z! (j-\mu-z)! (j+\nu-z)! (\mu-\nu+z)!}. \quad (19)$$

Эта аналогия позволяет связать между собой рекуррентные соотношения, свойства симметрии и др.  $D$ -функций и коэффициентов Клебша—Гордана [58]. Поскольку квазистепени  $u^{(z)}$  переходят в обычные степени  $u^z$  при  $u \gg z$ ,  $u \gg 1$ , коэффициенты Клебша—Гордана в пределе больших моментов асимптотически переходят в  $D$ -функции (см. 8.9.1).

4. Коэффициенты Клебша—Гордана можно выразить через биномиальные коэффициенты [126]:

$$C_{\alpha\alpha\beta\beta}^{\alpha\gamma} = \delta_{\gamma, \alpha+\beta} \left[ \frac{\binom{2a}{J-2c} \binom{2b}{J-2c}}{\binom{J+1}{J-2c} \binom{2a}{a-\alpha} \binom{2b}{b-\beta} \binom{2c}{c-\gamma}} \right]^{1/2} \sum_z (-1)^z \binom{J-2c}{z} \binom{J-2b}{a-\alpha-z} \binom{J-2a}{b+\beta-z}, \quad (20)$$

где  $J = a + b + c$ .

5. Связь с гипергеометрическими функциями. Коэффициенты Клебша—Гордана выражаются через обобщенные гипергеометрические функции  ${}_3F_2$  от единичного аргумента

$$C_{\alpha\alpha\beta\beta}^{\alpha\gamma} = \delta_{\gamma, \alpha+\beta} \frac{\Delta(abc)}{(a+b-c)! (-b+c+a)! (-a+c-\beta)!} \left[ \frac{(a+\alpha)! (b-\beta)! (c+\gamma)! (c-\gamma)! (2c+1)}{(a-\alpha)! (b+\beta)!} \right]^{1/2} \times \\ \times {}_3F_2 \left[ \begin{matrix} -a-b+c, -a+\alpha, -b-\beta \\ -a+c-\beta+1, -b+c+a+1 \end{matrix} \middle| 1 \right], \quad (21)$$

$$C_{\alpha\alpha\beta\beta}^{\alpha\gamma} = \delta_{\gamma, \alpha+\beta} (-1)^{a-\alpha} \frac{\Delta(abc) (b+c-a)!}{(a-b+c)! (-a+b+c)! (b-c+a)!} \left[ \frac{(a+\alpha)! (b-\beta)! (c+\gamma)! (2c+1)}{(a-\alpha)! (b+\beta)! (c-\gamma)!} \right]^{1/2} \times \\ \times {}_3F_2 \left[ \begin{matrix} a+\alpha+1, -a+\alpha, -c+\gamma \\ -b-c+\alpha, b-c+a+1 \end{matrix} \middle| 1 \right], \quad (22)$$

$$C_{\alpha\alpha\beta\beta}^{\alpha\gamma} = \delta_{\gamma, \alpha+\beta} (-1)^{b+\beta} \frac{\Delta(abc) (b+c+a)!}{(-a+b+c)! (a-b-\gamma)!} \left[ \frac{(a-\alpha)! (c-\gamma)! (2c+1)}{(a+\alpha)! (b+\beta)! (b-\beta)! (c+\gamma)!} \right]^{1/2} \times \\ \times {}_3F_2 \left[ \begin{matrix} a-b-c, a-\alpha+1, -c-\gamma \\ a-b-\gamma+1, -b-c-\alpha \end{matrix} \middle| 1 \right] \quad (\text{Поуз [30]}), \quad (23)$$

$$C_{\alpha\alpha\beta\beta}^{\alpha\gamma} = \delta_{\gamma, \alpha+\beta} (-1)^{b+\beta} \frac{\Delta(abc) (2c)!}{(a-b+c)! (-a+b+c)! (a-c-\beta)!} \left[ \frac{(a+\alpha)! (a-\alpha)! (b-\beta)! (2c+1)}{(b+\beta)! (c+\gamma)! (c-\gamma)!} \right]^{1/2} \times \\ \times {}_3F_2 \left[ \begin{matrix} a-b-c, a+b-c+1, -c-\gamma \\ -2c, a-c-\beta+1 \end{matrix} \middle| 1 \right], \quad (24)$$

$$C_{\alpha\alpha\beta\beta}^{\alpha\gamma} = \delta_{\gamma, \alpha+\beta} (-1)^{b+\beta} \frac{\Delta(abc) (2c)! (b+c+a)!}{(a-b+c)! (-a+b+c)!} \left[ \frac{(a-\alpha)! (2c+1)}{(a+\alpha)! (b+\beta)! (b-\beta)! (c+\gamma)! (c-\gamma)!} \right]^{1/2} \times \\ \times {}_3F_2 \left[ \begin{matrix} a-b-c, -a-b-c-1, -c-\gamma \\ -2c, -b-c-\alpha \end{matrix} \middle| 1 \right], \quad (25)$$

$$C_{\alpha\alpha\beta\beta}^{\alpha\gamma} = \delta_{\gamma, \alpha+\beta} (-1)^{a-\alpha} \frac{(a+b-\gamma)! (b+c-a)!}{\Delta(abc) (a+b+c+1)!} \left[ \frac{(a+\alpha)! (c+\gamma)! (2c+1)}{(a-\alpha)! (b+\beta)! (b-\beta)! (c-\gamma)!} \right]^{1/2} \times \\ \times {}_3F_2 \left[ \begin{matrix} -a-b-c-1, -a+\alpha, -c+\gamma \\ -a-b+\gamma, -b-c+\alpha \end{matrix} \middle| 1 \right]. \quad (26)$$

Формулы (21)—(26) являются записью в виде обобщенных гипергеометрических функций формул (3)—(8) соответственно.

Согласно [36], все функции  ${}_3F_2$  от аргумента 1, вырождающиеся в конечные суммы, являются коэффициентами Клебша—Гордана. Коэффициенты Клебша—Гордана выражаются через производные от гипергеометрической функции по формуле [46]

$$C_{\alpha\alpha\beta\beta}^{\alpha\gamma} = \delta_{\gamma, \alpha+\beta} (-1)^{a+b-\alpha} \frac{\Delta(abc)}{(a+b-c)! (-a+b+c)! (a-b+\gamma)!} \left[ \frac{(a+\alpha)! (a-\alpha)! (b+\beta)! (c+\gamma)! (2c+1)}{(b-\beta)! (c-\gamma)!} \right]^{1/2} \times \\ \times \left\{ \frac{d^{b-\beta}}{(dt)^{b-\beta}} [(1-t)^{a+b-\alpha} F(a-b-c, -c+\gamma; a-b+\gamma+1; t)] \right\}_{t=0}. \quad (27)$$

6. Явный вид  $3jm$ -символов Вигнера можно получить, используя выражения для коэффициентов Клебша—Гордана. При записи формул (3)—(8) через элементы  $R$ -символа (см. 8.1.3) выражения для  $3jm$ -символов принимают вид [45]

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a & b & c \\ \alpha & \beta & \gamma \end{pmatrix} &= (-1)^{R_{21}+R_{32}} \left[ \frac{\prod_{i,j=1}^3 (R_{ij})!}{(J+1)!} \right]^{1/2} \times \\ &\times \sum_z (-1)^z \frac{1}{z! (R_{13}-z)! (R_{22}-z)! (R_{31}-z)! (R_{33}-R_{22}+z)! (R_{11}-R_{22}+z)!}, \end{aligned} \quad (28)$$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a & b & c \\ \alpha & \beta & \gamma \end{pmatrix} &= (-1)^{R_{21}+R_{31}+R_{32}} \left[ \frac{R_{13}! R_{23}! R_{31}! R_{32}! R_{33}!}{(J+1)! R_{11}! R_{12}! R_{21}! R_{22}!} \right]^{1/2} \times \\ &\times \sum_z (-1)^z \frac{(R_{21}+z)! (R_{11}+R_{31}-z)!}{z! (R_{31}-z)! (R_{23}-z)! (R_{13}-R_{31}+z)!}, \end{aligned} \quad (29)$$

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ \alpha & \beta & \gamma \end{pmatrix} = (-1)^{R_{21}+R_{22}+R_{32}} \left[ \frac{R_{11}! R_{12}! R_{13}! R_{23}! R_{33}!}{(J+1)! R_{21}! R_{22}! R_{31}! R_{32}!} \right]^{1/2} \sum_z (-1)^z \frac{(R_{31}+z)! (R_{32}+R_{33}-z)!}{z! (R_{11}-z)! (R_{33}-z)! (R_{12}-R_{33}+z)!}, \quad (30)$$

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ \alpha & \beta & \gamma \end{pmatrix} = (-1)^{R_{21}+R_{22}+R_{32}} \left[ \frac{R_{11}! R_{21}! R_{31}! R_{32}! R_{33}!}{(J+1)! R_{12}! R_{13}! R_{22}! R_{23}!} \right]^{1/2} \sum_z (-1)^z \frac{(R_{13}+z)! (R_{23}+R_{33}-z)!}{z! (R_{11}-z)! (R_{33}-z)! (R_{21}-R_{33}+z)!}, \quad (31)$$

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ \alpha & \beta & \gamma \end{pmatrix} = (-1)^{R_{21}+R_{22}+R_{32}} \left[ \frac{(J+1)! R_{11}! R_{13}! R_{31}! R_{33}!}{R_{12}! R_{21}! R_{22}! R_{23}! R_{32}!} \right]^{1/2} \sum_z (-1)^z \frac{(R_{11}+R_{21}-z)! (R_{23}+R_{33}-z)!}{z! (R_{11}-z)! (R_{33}-z)! (J+1-z)!}, \quad (32)$$

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ \alpha & \beta & \gamma \end{pmatrix} = (-1)^{R_{21}+R_{31}+R_{32}} \left[ \frac{(J+1)! R_{21}! R_{23}! R_{31}! R_{33}!}{R_{11}! R_{12}! R_{13}! R_{22}! R_{32}!} \right]^{1/2} \sum_z (-1)^z \frac{(R_{11}+R_{31}-z)! (R_{13}+R_{23}-z)!}{z! (R_{23}-z)! (R_{31}-z)! (J+1-z)!}. \quad (33)$$

В этих формулах  $R_{ik}$  — элементы  $R$ -символа,  $J = a + b + c$ .

7.  $3jm$ -символы Вигнера можно представить в виде квазибиномов, которые вычисляются по формулам (10)—(11).

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ \alpha & \beta & \gamma \end{pmatrix} = (-1)^{R_{21}+R_{32}} \left[ \frac{R_{21}^{(-1)(R_{31}-R_{13})} R_{31}^{(-1)(R_{22}-R_{13})} R_{32}^{(-1)(R_{22}-R_{13})} R_{22}^{(-1)(R_{21}-R_{13})}}{(J+1)! R_{13}!} \right]^{1/2} (u-v)^{(R_{13})}. \quad (34)$$

В качестве  $u$  и  $v$  можно использовать любой из следующих наборов величин [45]:

$$\begin{aligned} \text{а) } u &= R_{21}^{(1)} R_{32}^{(1)}, & v &= R_{22}^{(1)} R_{31}^{(1)}, \\ \text{б) } u &= R_{21}^{(1)} R_{11}^{(-1)}, & v &= R_{22}^{(1)} R_{12}^{(-1)}, \\ \text{в) } u &= R_{11}^{(-1)} R_{23}^{(-1)}, & v &= R_{32}^{(1)} (J+1)^{(1)}. \end{aligned} \quad (35)$$

### 8.3. ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ

1. Коэффициенты Клебша—Гордана можно представить в виде следующих интегралов [41] (где  $J = a + b + c$ ):

$$\begin{aligned} C_{\alpha\alpha\beta\beta}^{c\gamma} &= \frac{(-1)^{a-c+\beta}}{2^{J+1}} \left[ \frac{(c+\gamma)! (J-2c)! (J+1)! (2c+1)}{(a-\alpha)! (a+\alpha)! (b-\beta)! (b+\beta)! (c-\gamma)! (J-2a)! (J-2b)!} \right]^{1/2} \times \\ &\times \int_{-1}^1 (1-x)^{a-\alpha} (1+x)^{b-\beta} \frac{d^{c-\gamma}}{(dx)^{c-\gamma}} [(1-x)^{J-2a} (1+x)^{J-2b}] dx, \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} C_{\alpha\alpha\beta\beta}^{c\gamma} &= \frac{(-1)^{a-c+\beta}}{2^{J+1}} \left[ \frac{(J-2b)! (J-2c)! (J+1)! (2c+1)}{(a-\alpha)! (a+\alpha)! (b-\beta)! (b+\beta)! (c-\gamma)! (c+\gamma)! (J-2a)!} \right]^{1/2} \times \\ &\times \int_{-1}^1 (1-x)^{b+\beta} (1+x)^{b-\beta} \frac{d^{J-2a}}{(dx)^{J-2a}} [(1-x)^{c-\gamma} (1+x)^{c+\gamma}] dx. \end{aligned} \quad (2)$$

В частности, при  $\alpha = \beta = \gamma = 0$

$$C_{a0 b0}^{c0} = \frac{(-1)^{a-c}}{2^{J+1} a! b! c!} \left[ \frac{(J-2b)! (J-2c)! (J+1)! (2c+1)!}{(J-2a)!} \right]^{1/2} \int_{-1}^1 (1-x^2)^b \frac{d^{J-2a}}{(dx)^{J-2a}} [(1-x^2)^c] dx. \quad (3)$$

2. Интегралы, содержащие  $D$ -функции Вигнера,

$$C_{a\alpha b\beta}^{c\gamma} = \frac{1}{8\pi^2} \left[ \frac{(a+b+c+1)! (a+b-c)! (2c+1)!}{(2a)! (2b)!} \right]^{1/2} \int dR D_{a\alpha}^a(R) D_{\beta-b}^b(R) D_{\gamma}^{c*}(R), \quad (4)$$

где  $R$  — совокупность углов Эйлера (см. 4.12).

$$C_{a\alpha b\beta}^{c\gamma} = \frac{(-1)^{a+c-\alpha-\gamma}}{2^{a+b+1}} \left[ \frac{(J-2c)! (J+1)! (2c+1)!}{(a+\alpha)! (a-\alpha)! (b+\beta)! (b-\beta)!} \right]^{1/2} \times \\ \times \int_{-1}^1 (\sin \theta)^{a+\beta} \left( \frac{1-\cos \theta}{1+\cos \theta} \right)^{\frac{\alpha-\beta}{2}} d_{\beta-\alpha\gamma}^c(\theta) d(\cos \theta) \quad (\text{Аким, Левин [46]}). \quad (5)$$

3. Интеграл от сферических функций

При целочисленных  $a, b, c$  и  $J = a + b + c = 2g$  — четном (т. е.  $g$  — целом)

$$C_{a\alpha b\beta}^{c\gamma} = (-1)^{g-c} \left[ \frac{4\pi}{(2a+1)(2b+1)} \right]^{1/2} \frac{(g-a)! (g-b)! (g-c)!}{\Delta(abc) g!} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\vartheta \sin \vartheta Y_{a\alpha}(\vartheta, \varphi) Y_{b\beta}(\vartheta, \varphi) Y_{c\gamma}^*(\vartheta, \varphi). \quad (6)$$

4. Интегральное представление для произведения коэффициентов Клебша—Гордана

$$C_{a\alpha b\beta}^{c\gamma} C_{a'\alpha' b'\beta'}^{c'\gamma'} = \frac{2c+1}{8\pi^2} \int dR D_{a\alpha}^a(R) D_{\beta\beta'}^b(R) D_{\gamma\gamma'}^{c*}(R). \quad (7)$$

В частности,

$$[C_{a0 b0}^{c0}]^2 = \frac{2c+1}{2} \int_0^{\pi} d\vartheta \sin \vartheta P_a(\cos \vartheta) P_b(\cos \vartheta) P_c(\cos \vartheta). \quad (8)$$

#### 8.4. СВОЙСТВА СИММЕТРИИ

1. Свойства симметрии коэффициентов Клебша—Гордана и  $3jm$ -символов наиболее просто формулируются, когда эти коэффициенты представляются в виде  $R$ -символов Редже (см. 8.1.3).

$R$ -символ Редже допускает следующие преобразования симметрии: [94]

а) перестановки столбцов

$$\left\| \begin{matrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{matrix} \right\| = \varepsilon \left\| \begin{matrix} R_{1i} & R_{1k} & R_{1l} \\ R_{2i} & R_{2k} & R_{2l} \\ R_{3i} & R_{3k} & R_{3l} \end{matrix} \right\|, \quad (1)$$

где

$$\varepsilon = \begin{cases} +1 & \text{для циклических перестановок (четное число перестановок),} \\ (-1)^J & \text{для нециклических перестановок (нечетное число перестановок),} \end{cases} \quad (2)$$

причем

$$J \equiv \sum_k R_{ik} = \sum_i R_{ik};$$

б) перестановки строк

$$\left\| \begin{matrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{matrix} \right\| = \varepsilon \left\| \begin{matrix} R_{i1} & R_{i2} & R_{i3} \\ R_{k1} & R_{k2} & R_{k3} \\ R_{l1} & R_{l2} & R_{l3} \end{matrix} \right\|; \quad (3)$$

в) транспонирование

$$\begin{vmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} R_{11} & R_{21} & R_{31} \\ R_{12} & R_{22} & R_{32} \\ R_{13} & R_{23} & R_{33} \end{vmatrix}. \quad (4)$$

Эти преобразования симметрии связывают между собой  $6 \times 6 \times 2 = 72$  различных (в общем случае) коэффициента.

2. Приведенные выше соотношения эквивалентны следующим свойствам симметрии  $3jm$ -символов:

а) перестановке столбцов  $3jm$ -символов [110] (соответствует перестановкам столбцов символа Редже)

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ \alpha & \beta & \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & c & a \\ \beta & \gamma & \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & a & b \\ \gamma & \alpha & \beta \end{pmatrix} = (-1)^{a+b+c} \begin{pmatrix} a & c & b \\ \alpha & \gamma & \beta \end{pmatrix} = (-1)^{a+b+c} \begin{pmatrix} b & a & c \\ \beta & \alpha & \gamma \end{pmatrix} = (-1)^{a+b+c} \begin{pmatrix} c & b & a \\ \gamma & \beta & \alpha \end{pmatrix}; \quad (5)$$

б) замене знаков проекций моментов [110] (соответствует перестановке второй и третьей строк символа Редже)

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ \alpha & \beta & \gamma \end{pmatrix} = (-1)^{a+b+c} \begin{pmatrix} a & b & c \\ -\alpha & -\beta & -\gamma \end{pmatrix}; \quad (6)$$

а также свойствам симметрии Редже [94]

в)

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ \alpha & \beta & \gamma \end{pmatrix} = (-1)^{a+b+c} \begin{pmatrix} \frac{b+c+a}{2} & \frac{a+c+\beta}{2} & \frac{a+b+\gamma}{2} \\ a - \frac{b+c-a}{2} & b - \frac{a+c-\beta}{2} & c - \frac{a+b-\gamma}{2} \end{pmatrix} \quad (7)$$

(это соответствует перестановке первой и третьей строк символа Редже);

г)

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ \alpha & \beta & \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & \frac{b+c-a}{2} & \frac{b+c+a}{2} \\ -b+c & \frac{b-c-a}{2} - \gamma & \frac{b-c+a}{2} + \gamma \end{pmatrix} \quad (8)$$

(соответствует транспонированию символа Редже).

Из этих свойств симметрии следует, что 72 различных в общем случае  $3jm$ -символов будут равны между собой по абсолютной величине. Их можно разбить на шесть групп (по 12 коэффициентов в каждой), соответствующих треугольникам различной формы, но одинакового периметра  $J = a + b + c$ . Все  $3jm$ -символы, входящие в одну группу, связаны между собой классическими свойствами симметрии (5), (6). В равенстве (9) приведено по одному элементу из каждой группы:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a & b & c \\ \alpha & \beta & \gamma \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a & \frac{b+c-a}{2} & \frac{b+c+a}{2} \\ c-b & \frac{b+\beta-c-\gamma}{2} & \frac{b-\beta-c+\gamma}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & \frac{a+c-\beta}{2} & \frac{a+c+\beta}{2} \\ a-c & \frac{-a-\alpha+c+\gamma}{2} & \frac{-a+\alpha+c-\gamma}{2} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} c & \frac{a+b-\gamma}{2} & \frac{a+b+\gamma}{2} \\ b-a & \frac{a+a-b-\beta}{2} & \frac{a-a-b+\beta}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{b+c-a}{2} & \frac{a+c-\beta}{2} & \frac{a+b-\gamma}{2} \\ a-a-\frac{b+c-a}{2} & b-\beta-\frac{a+c-\beta}{2} & c-\gamma-\frac{a+b-\gamma}{2} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \frac{b+c+a}{2} & \frac{a+c+\beta}{2} & \frac{a+b+\gamma}{2} \\ \frac{b+c+a}{2} - a - \alpha & \frac{a+c+\beta}{2} - b - \beta & \frac{a+b+\gamma}{2} - c - \gamma \end{pmatrix}. \quad (9) \end{aligned}$$

3. Для коэффициентов Клебша—Гордана справедливы следующие соотношения:

а)

$$\begin{aligned}
C_{a\alpha b\beta}^{c\gamma} &= (-1)^{a+b-c} C_{b\beta a\alpha}^{c\gamma} = (-1)^{a-\alpha} \sqrt{\frac{2c+1}{2b+1}} C_{a\alpha c-\gamma}^{b-\beta} = (-1)^{a-\alpha} \sqrt{\frac{2c+1}{2b+1}} C_{c\gamma a-\alpha}^{b\beta} \\
&= (-1)^{b+\beta} \sqrt{\frac{2c+1}{2a+1}} C_{c-\gamma}^{a-\alpha} b\beta = (-1)^{b+\beta} \sqrt{\frac{2c+1}{2a+1}} C_{b-\beta}^{a\alpha} c\gamma.
\end{aligned} \quad (10)$$

б)

$$C_{a\alpha b\beta}^{c\gamma} = (-1)^{a+b-c} C_{a-\alpha}^{c-\gamma} b-\beta. \quad (11)$$

в)

$$C_{a\alpha b\beta}^{c\gamma} = C_{a'\alpha' b'\beta'}^{c'\gamma'}, \quad (12)$$

где

$$\begin{aligned}
2a' &= (a + \alpha) + (b + \beta), & 2a &= (a' + \alpha') + (b' + \beta'), \\
2a' &= (a + \alpha) - (b + \beta), & 2a &= (a' + \alpha') - (b' + \beta'), \\
2b' &= (a - \alpha) + (b - \beta), & 2b &= (a' - \alpha') + (b' - \beta'), \\
2b' &= (a - \alpha) - (b - \beta), & 2b &= (a' - \alpha') - (b' - \beta'), \\
c' &= c, & c &= c', \\
\gamma' &= a - b, & \gamma &= a' - b'.
\end{aligned} \quad (13)$$

г)

$$C_{a\alpha b\beta}^{c\gamma} = (-1)^{b+\beta} \sqrt{\frac{2c+1}{2c'+1}} C_{a'\alpha' b'\beta'}^{c'\gamma'}, \quad (14)$$

где

$$\begin{aligned}
2a' &= (b - \beta) + (c + \gamma), & 2a &= (b' - \beta') + (c' + \gamma'), \\
2a' &= 2(a + \alpha) - (b - \beta) - (c + \gamma), & 2a &= 2(a' + \alpha') - (b' - \beta') - (c' + \gamma'), \\
2b' &= (a - \alpha) + (c + \gamma), & 2b &= (a' - \alpha') + (c' + \gamma'), \\
2b' &= 2(b + \beta) - (a - \alpha) - (c + \gamma), & 2b &= 2(b' + \beta') - (a' - \alpha') - (c' + \gamma'), \\
2c' &= (a - \alpha) + (b - \beta), & 2c &= (a' - \alpha') + (b' - \beta'), \\
2c' &= (a - \alpha) + (b - \beta) - 2(c - \gamma), & 2c &= (a' - \alpha') + (b' - \beta') - 2(c' - \gamma').
\end{aligned} \quad (15)$$

4. «Зеркальная» симметрия. Исходные формулы, определяющие  $3jm$ -символы и  $C_{a\alpha b\beta}^{c\gamma}$ , допускают обобщение на случай отрицательных целых и полужелых значений  $a, b, c$ . При этом имеют место следующие соотношения [45], в которых использованы обозначения  $\bar{c} \equiv -c - 1$ ,  $\bar{\gamma} \equiv -\gamma$  и т. д.:

а. Соотношения для  $3jm$ -символов

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ \alpha & \beta & \gamma \end{pmatrix} = (-1)^{b-c-\alpha} \begin{pmatrix} \bar{a} & \bar{b} & \bar{c} \\ \alpha & \beta & \gamma \end{pmatrix} = i(-1)^{c+\alpha-\beta} \begin{pmatrix} \bar{a} & \bar{b} & \bar{c} \\ \alpha & \beta & \gamma \end{pmatrix} = i(-1)^{a+b+c} \begin{pmatrix} \bar{a} & \bar{b} & \bar{c} \\ \alpha & \beta & \gamma \end{pmatrix}. \quad (16)$$

$3jm$ -Символы с отрицательными значениями индексов обладают свойствами симметрии 8.4(5)—8.4(6), если в фазовых множителях этих формул вместо  $\bar{a}, b$  и  $\bar{c}$  подставлять  $-a, -b$  и  $-c$  соответственно.

б. Соотношения для коэффициентов Клебша—Гордана

$$\begin{aligned}
C_{a\alpha b\beta}^{c\gamma} &= (-1)^{a+b-c} C_{\bar{a}\bar{\alpha} \bar{b}\bar{\beta}}^{\bar{c}\bar{\gamma}} = (-1)^{b-c-\alpha} C_{\bar{a}\bar{\alpha} b\beta}^{c\gamma} = (-1)^{b+\beta} C_{\bar{a}\bar{\alpha} b\beta}^{\bar{c}\bar{\gamma}} = (-1)^{a-\alpha} C_{\bar{a}\bar{\alpha} b\beta}^{\bar{c}\bar{\gamma}} = C_{\bar{a}\bar{\alpha} \bar{b}\bar{\beta}}^{\bar{c}\bar{\gamma}} = \\
&= \sqrt{\frac{2c+1}{2b+1}} C_{\bar{a}\bar{\alpha} c\gamma}^{b\beta} = \sqrt{\frac{2c+1}{2a+1}} C_{\bar{c}\bar{\gamma} b\beta}^{\bar{a}\bar{\alpha}} = \sqrt{\frac{2c+1}{2a+1}} C_{c\gamma b\beta}^{a\alpha}.
\end{aligned} \quad (17)$$

Из формул (17) следует

$$C_{\bar{a}\bar{\alpha} \bar{b}\bar{\beta}}^{c\bar{\gamma}} = C_{\bar{a}\bar{\alpha} b\beta}^{\bar{c}\bar{\gamma}}, \quad (18)$$

$$C_{\bar{a}\bar{\alpha} b\beta}^{c\gamma} = C_{\bar{a}\bar{\alpha} \bar{b}\bar{\beta}}^{\bar{c}\bar{\gamma}}, \quad (19)$$

$$C_{a\alpha b\beta}^{c\gamma} = C_{\bar{a}\bar{\alpha} \bar{b}\bar{\beta}}^{\bar{c}\bar{\gamma}}. \quad (20)$$

При составлении таблиц коэффициентов Клебша—Гордана удобно использовать «зеркальную» симметрию в виде

$$C_{\alpha\alpha\beta\beta}^{a+k\gamma} = (-1)^{b+\beta} C_{\alpha\alpha\beta\beta}^{a-k\gamma}. \quad (21)$$

5. Трансформационные свойства  $3jm$ -символов и коэффициентов Клебша—Гордана относительно преобразований системы координат и инверсии времени. Коэффициенты векторного сложения не являются инвариантными относительно указанных преобразований, хотя и не зависят явно от координат и времени.

а. Поворот системы координат. При повороте системы координат изменяются значения проекций угловых моментов, причем так, что  $3jm$ -символы и коэффициенты Клебша—Гордана в новой системе координат представляют собой суперпозицию этих величин, определенных в исходной системе.

$$\begin{aligned} \hat{R} \begin{pmatrix} a & b & c \\ \alpha & \beta & \gamma \end{pmatrix} &\equiv \begin{pmatrix} a & b & c \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \end{pmatrix} = \sum_{\alpha\beta\gamma} \begin{pmatrix} a & b & c \\ \alpha & \beta & \gamma \end{pmatrix} D_{\alpha\alpha'}^a(R) D_{\beta\beta'}^b(R) D_{\gamma\gamma'}^c(R), \\ \hat{R} C_{\alpha\alpha\beta\beta}^{c\gamma} &\equiv C_{\alpha\alpha'\beta\beta'}^{c\gamma'} = \sum_{\alpha\beta\gamma} C_{\alpha\alpha\beta\beta}^{c\gamma} D_{\alpha\alpha'}^a(R) D_{\beta\beta'}^b(R) D_{\gamma\gamma'}^{c*}(R). \end{aligned} \quad (22)$$

б. Инверсия системы координат.  $3jm$ -символы и коэффициенты Клебша—Гордана не изменяются при инверсии системы координат, поскольку угловые моменты являются псевдовекторами.

$$\begin{aligned} \hat{P}_r \begin{pmatrix} a & b & c \\ \alpha & \beta & \gamma \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a & b & c \\ \alpha & \beta & \gamma \end{pmatrix}, \\ \hat{P}_r C_{\alpha\alpha\beta\beta}^{c\gamma} &= C_{\alpha\alpha\beta\beta}^{c\gamma}. \end{aligned} \quad (23)$$

в. Инверсия времени. При обращении времени меняется знак проекций всех угловых моментов (изменение направления вращения)

$$\begin{aligned} \hat{P}_t \begin{pmatrix} a & b & c \\ \alpha & \beta & \gamma \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a & b & c \\ -\alpha & -\beta & -\gamma \end{pmatrix} = (-1)^{a+b+c} \begin{pmatrix} a & b & c \\ \alpha & \beta & \gamma \end{pmatrix}, \\ \hat{P}_t C_{\alpha\alpha\beta\beta}^{c\gamma} &= C_{-\alpha-\beta-\gamma}^{c-\gamma} = (-1)^{a+b+c} C_{\alpha\alpha\beta\beta}^{c\gamma}. \end{aligned} \quad (24)$$

## 8.5. ЯВНЫЙ ВИД КОЭФФИЦИЕНТОВ КЛЕБША—ГОРДАНА ПРИ ЧАСТНЫХ ЗНАЧЕНИЯХ ИНДЕКСОВ

### 1. Частные значения моментов $a$ , $b$ , и $c$

а)  $c = 0$  или  $b = 0$ :

$$C_{\alpha\alpha\beta\beta}^{00} = (-1)^{\alpha-\alpha} \frac{\delta_{ab}\delta_{\alpha,-\beta}}{\sqrt{2a+1}}, \quad (1)$$

$$C_{\alpha\alpha 00}^{c\gamma} = \delta_{ac}\delta_{\alpha\gamma}. \quad (2)$$

б)  $c = a + b$ :

$$C_{\alpha\alpha\beta\beta}^{a+b\alpha+\beta} = \left[ \frac{(2a)!(2b)!(a+b+\alpha+\beta)!(a+b-\alpha-\beta)!}{(2a+2b)!(a+\alpha)!(a-\alpha)!(b+\beta)!(b-\beta)!} \right]^{1/2}. \quad (3)$$

Формулы, эквивалентные (3) ( $i$ ,  $n$  — целые)

$$C_{\alpha\alpha-n+i\beta\beta-i+1}^{a+b\alpha+\beta-n+1} = \left[ \frac{\binom{2a}{n-i}\binom{2b}{i-1}}{\binom{2a+2b}{n-1}} \right]^{1/2}, \quad (4)$$

$$C_{\alpha\alpha+n-i\beta\beta-i-1}^{a+b\alpha+\beta-n-1} = \left[ \frac{\binom{2a}{i-n}\binom{2b}{i-1}}{\binom{2a+2b}{2a+n-1}} \right]^{1/2}. \quad (5)$$

В частности,

$$C_{aa}^{a+b} C_{bb}^{a+b} = 1, \quad (6)$$

$$C_{aa}^{a+b} C_{bb}^{a-b} = \left[ \frac{(2a)! (2b)!}{(2a+2b)!} \right]^{1/2}. \quad (7)$$

в)  $c = a + b - 1$ :

$$C_{aa}^{a+b-1} C_{bb}^{a+b-1} = 2(ba - a\beta) \left[ \frac{(2a+2b-1)(2a-1)!(2b-1)!(a+b+\alpha+\beta-1)!(a+b-\alpha-\beta-1)!}{(a+\alpha)!(a-\alpha)!(b+\beta)!(b-\beta)!(2a+2b)!} \right]^{1/2}. \quad (8)$$

В частности,

$$C_{aa}^{a+b-1} C_{bb}^{a+b-1} = 0, \text{ если } \frac{\alpha}{\beta} = \frac{a}{b}; \quad (9)$$

$$C_{a-1}^{a+b-1} C_{bb}^{a+b-1} = -\sqrt{\frac{b}{a+b}}, \quad (10)$$

$$C_{aa}^{a+b-1} C_{b-1}^{a+b-1} = \sqrt{\frac{a}{a+b}}, \quad (11)$$

$$C_{aa}^{a+b-1} C_{bb}^{a-b} = \left[ \frac{(2a)! (2b)! (2a-2b-1)!}{(2a+2b)!} \right]^{1/2}. \quad (12)$$

г)  $c = a - b$  ( $a \geq b$ ):

$$C_{aa}^{a-b} C_{bb}^{a+b} = (-1)^{b+\beta} \left[ \frac{(a+\alpha)!(a-\alpha)!(2b)!(2a-2b+1)!}{(2a+1)!(b+\beta)!(b-\beta)!(a-b+\alpha+\beta)!(a-b-\alpha-\beta)!} \right]^{1/2}. \quad (13)$$

Формулы, эквивалентные (13) ( $i, n$  — целые),

$$C_{aa}^{a-b} C_{a-n+i}^{a+b-n+1} C_{bb}^{a-b-i+1} = (-1)^{2b-i+1} \left[ \frac{2a-2b+1}{2a+1} \frac{\binom{2b}{i-1} \binom{2a-2b}{2a-n+1}}{\binom{2a}{n-i}} \right]^{1/2}, \quad (14)$$

$$C_{aa}^{a-b} C_{a-n+i}^{a-b-n+1} C_{b-i+1}^{a+b} = (-1)^{i+1} \left[ \frac{2a-2b+1}{2a+1} \frac{\binom{2b}{-i+1} \binom{2a-2b}{n-1}}{\binom{2a}{n-i}} \right]^{1/2}. \quad (15)$$

В частности,

$$C_{aa}^{a-b} C_{b-b}^{a-b} = \sqrt{\frac{2a-2b+1}{2a+1}}. \quad (16)$$

д)  $c = a - b + 1$  ( $a + 1 \geq b$ ):

$$C_{aa}^{a-b+1} C_{bb}^{a+b} = (-1)^{b+\beta+1} (a\beta + ba + \beta) \left[ \frac{(2a-2b+3)(2b-1)!(2a-2b+1)!(a+\alpha)!(a-\alpha)!}{(2a+2)!(b+\beta)!(b-\beta)!(a-b+\alpha+\beta+1)!(a-b-\alpha-\beta+1)!} \right]^{1/2}. \quad (17)$$

В частности,

$$C_{aa}^{a-b+1} C_{b-b}^{a-b} = \left[ \frac{(2a-2b+3)2b}{(2a+2)(2a+1)} \right]^{1/2}. \quad (18)$$

е)  $c = a + b - 2$ :

$$C_{aa}^{a+b-2} C_{bb}^{a+b-2} = \left[ \frac{2a(2a-1)2b(2b-1)}{2(2a+2b-2)(2a+2b-1)} \right]^{1/2} \left[ \binom{2a}{a-\alpha} \binom{2b}{b-\beta} \binom{2a+2b-4}{a+b-\alpha-\beta-2} \right]^{-1/2} \times \\ \times \left\{ \binom{2a-2}{a-\alpha} \binom{2b-2}{b+\beta} - 2 \binom{2a-2}{a-\alpha-1} \binom{2b-2}{b+\beta-1} + \binom{2a-2}{a-\alpha-2} \binom{2b-2}{b+\beta-2} \right\}. \quad (19)$$

В частности,

$$C_{aa}^{a+b-2} C_{b-b}^{a-b} = \left[ \frac{(2a)! (2b)! (2a+2b-3)!}{2(2a+2b-1)!} \right]^{1/2}. \quad (20)$$

ж)  $c = a - b + 2$  ( $a + 2 \geq b$ ):

$$C_{\alpha\alpha}^{a-b+2} \alpha+\beta = \left[ \frac{(2b-1)2b(2a-2b+5)(2a-2b+4)(2a-2b+3)}{2(2a+1)(2a+2)(2a+3)} \right]^{1/2} \left[ \binom{2a}{a-a} \binom{2b}{b-\beta} \binom{2a-2b+4}{a-b-a-\beta+2} \right]^{-1/2} \times \\ \times (-1)^{b+\beta} \left\{ \binom{2b-2}{b+\beta} \binom{2a-2b+2}{a-b-a-\beta} - 2 \binom{2b-2}{b+\beta-1} \binom{2a-2b+2}{a-b-a-\beta+1} + \binom{2b-2}{b+\beta-2} \binom{2a-2b+2}{a-b-a-\beta+2} \right\}. \quad (21)$$

В частности,

$$C_{\alpha\alpha}^{a-b+2} \alpha-b = \left[ \frac{(2a-2b+5)2b(2b-1)}{2(2a+1)(2a+2)(2a+3)} \right]^{1/2}. \quad (22)$$

з)  $a = b$ ,  $\alpha = \beta$ :

$$C_{\alpha\alpha}^{\alpha\alpha} = \begin{cases} 0, & \text{если } 2a+c=2g+1 \\ \delta_{\gamma, 2a} \frac{(-1)^{g-c} \sqrt{2c+1} g!}{\left(\frac{c+\gamma}{2}\right)! \left(\frac{c-\gamma}{2}\right)! (g-c)!} \left[ \frac{(c+\gamma)! (c-\gamma)! (2g-2c)!}{(2g+1)!} \right]^{1/2}, & \text{если } 2a+c=2g \text{ (} g \text{ — целое)} \end{cases} \quad (23)$$

и)  $b = a + \frac{1}{2}$ ,  $\beta = \alpha \pm \frac{1}{2}$ ,  $2a+c=2g$ :

$$C_{\alpha\alpha}^{c+1/2} \frac{2\alpha+1/2}{\alpha+1/2} = \left[ \frac{c+2\alpha+1}{a+\alpha+1} \right]^{1/2} C, \quad (24)$$

$$C_{\alpha\alpha}^{c+1/2} \frac{2\alpha-1/2}{\alpha-1/2} = \left[ \frac{c-2\alpha+1}{a-\alpha+1} \right]^{1/2} C,$$

где

$$C = \frac{(-1)^{c/2-a} \left(a + \frac{c}{2}\right)!}{\left(a - \frac{c}{2}\right)! \left(\frac{c}{2} + a\right)! \left(\frac{c}{2} - a\right)!} \left[ \frac{(2a+c+2)(2a-c)!(c+2\alpha)!(c-2\alpha)!}{2(2a+c+1)!} \right]^{1/2}. \quad (25)$$

$b = a + \frac{1}{2}$ ,  $\beta = \alpha \pm \frac{1}{2}$ ,  $2a+c=2g+1$ :

$$C_{\alpha\alpha}^{c+1/2} \frac{2\alpha+1/2}{\alpha+1/2} = \left[ \frac{c-2\alpha+1}{a+\alpha+1} \right]^{1/2} D, \quad (26)$$

$$C_{\alpha\alpha}^{c+1/2} \frac{2\alpha-1/2}{\alpha-1/2} = - \left[ \frac{c+2\alpha+1}{a-\alpha+1} \right]^{1/2} D,$$

где

$$D = \frac{(-1)^{\frac{c-1}{2}-a} \left(a + \frac{c+1}{2}\right)!}{\left(a - \frac{c+1}{2}\right)! \left(\frac{c+1}{2} + a\right)! \left(\frac{c+1}{2} - a\right)!} \left[ \frac{(2a-c)!(c+2\alpha+1)!(c-2\alpha+1)!}{2(2a+c+2)!} \right]^{1/2}. \quad (27)$$

к)  $b = a + 1$ ;  $\beta = \alpha$ ,  $\alpha \pm 1$ ;  $2a+c=2g$ :

$$C_{\alpha\alpha}^{c} \frac{2\alpha+1}{\alpha+1} = - \left[ \frac{(c+2\alpha+1)(c-2\alpha)}{(a+\alpha+2)(a+\alpha+1)} \right]^{1/2} E, \quad (28)$$

$$C_{\alpha\alpha}^{c} \frac{2\alpha}{\alpha} = \frac{2\alpha}{[(a+\alpha+1)(a-\alpha+1)]^{1/2}} E,$$

$$C_{\alpha\alpha}^{c} \frac{2\alpha-1}{\alpha-1} = \left[ \frac{(c-2\alpha+1)(c+2\alpha)}{(a-\alpha+2)(a-\alpha+1)} \right]^{1/2} E,$$

где

$$E = \frac{(-1)^{\frac{c}{2}-a} \left(a + \frac{c}{2}\right)!}{2 \left(a - \frac{c}{2}\right)! \left(\frac{c}{2} + a\right)! \left(\frac{c}{2} - a\right)!} \left[ \frac{(2c+1)(2a+c+2)(2a-c+1)!(c+2\alpha)!(c-2\alpha)!}{c(c+1)(2a+c+1)!} \right]^{1/2}. \quad (29)$$



$$b = a + 1; \beta = \alpha, \alpha \pm 1; 2a + c = 2g + 1:$$

$$C_{\alpha\alpha}^{c\ 2\alpha+1}{}_{\alpha+1} = \frac{c(c+1) + (2a+1)(2a+2)}{2\left(\frac{c+1}{2} + a\right)! \left(\frac{c+1}{2} - a\right)!} \left[ \frac{(c+2a+1)!(c-2a-1)!}{(a+a+2)(a+a+1)} \right]^{1/2} F,$$

$$C_{\alpha\alpha}^{c\ 2\alpha}{}_{\alpha+1}{}_{\alpha} = \frac{2a+2}{\left(\frac{c-1}{2} + a\right)! \left(\frac{c-1}{2} - a\right)!} \left[ \frac{(c+2a)!(c-2a)!}{(a+a+1)(a-a+1)} \right]^{1/2} F, \quad (30)$$

$$C_{\alpha\alpha}^{c\ 2\alpha-1}{}_{\alpha-1} = \frac{c(c+1) - (2a-1)(2a+2)}{2\left(\frac{c+1}{2} - a\right)! \left(\frac{c-1}{2} + a\right)!} \left[ \frac{(c+2a-1)!(c-2a+1)!}{(a-a+2)(a-a+1)} \right]^{1/2} F,$$

где

$$F = \frac{(-1)^{\frac{c-1}{2}-a} \left(a + \frac{c+1}{2}\right)!}{\left(a - \frac{c-1}{2}\right)!} \left[ \frac{(2c+1)(2a-c+1)!}{c(c+1)(2a+c+2)!} \right]^{1/2}. \quad (31)$$

Формулы (24)—(31) получены Стоуном [107].

## 2. Частные значения проекций моментов

а)  $\alpha = \beta = \gamma = 0$ :

$$C_{\alpha\beta}^{c\ 0}{}_{\gamma 0} = \begin{cases} 0, & \text{если } a + b + c = 2g + 1, \\ \frac{(-1)^{g-c} \sqrt{2c+1} g!}{(g-a)!(g-b)!(g-c)!} \left[ \frac{(2g-2a)!(2g-2b)!(2g-2c)!}{(2g+1)!} \right]^{1/2}, & \text{если } a + b + c = 2g \text{ (} g \text{ — целое)}. \end{cases} \quad (32)$$

В частности,

$$C_{\alpha\beta}^{c\ 0}{}_{\gamma 0} = \frac{(a+b)!}{a!b!} \left[ \frac{(2a)!(2b)!}{(2a+2b)!} \right]^{1/2}, \quad (33)$$

$$C_{\alpha\beta}^{c\ 0}{}_{\gamma 0} = (-1)^b \frac{a!}{b!(a-b)!} \left[ \frac{(2b)!(2a-2b+1)!}{(2a+1)!} \right]^{1/2}. \quad (34)$$

б)  $\gamma = c$  или  $\alpha = a$ :

$$C_{\alpha\alpha}^{c\ c}{}_{\beta\beta} = \delta_{\alpha+\beta, c} (-1)^{a-\alpha} \left[ \frac{(2c+1)!(a+b-c)!(a+\alpha)!(b+\beta)!}{(a+b+c+1)!(a-b+c)!(-a+b+c)!(a-\alpha)!(b-\beta)!} \right]^{1/2}, \quad (35)$$

$$C_{\alpha\alpha}^{c\ \gamma}{}_{\beta\beta} = \delta_{\gamma-\beta, a} \left[ \frac{(2c+1)(2a)!(-a+b+c)!(b-\beta)!(c+\gamma)!}{(a+b+c+1)!(a-b+c)!(a+b-c)!(b+\beta)!(c-\gamma)!} \right]^{1/2}. \quad (36)$$

В частности,

$$C_{\alpha\alpha}^{c\ c}{}_{\beta\beta} = \delta_{a+b, c}, \quad (37)$$

$$C_{\alpha\alpha}^{c\ c}{}_{\beta\beta} = \delta_{a-b, c} \left[ \frac{2c+1}{2a+1} \right]^{1/2}, \quad (38)$$

$$C_{\alpha\alpha}^{c\ c}{}_{\beta\beta} = \left[ \frac{(2a)!(2c+1)!}{(a+b+c+1)!(a-b+c)!} \right]^{1/2}, \quad (39)$$

$$C_{\alpha\alpha}^{c\ c}{}_{\beta\beta} = - \left[ \frac{(2a-1)!(2c+1)!(a+b-c)(-a+b+c+1)}{(a+b+c+1)!(a-b+c)!} \right]^{1/2}, \quad (40)$$

$$C_{\alpha\alpha}^{c\ c-1}{}_{\beta\beta} = \left[ \frac{(2a)!(2c+1)!(a+b-c+1)(-a+b+c)}{(a+b+c+1)!(a-b+c)!2c} \right]^{1/2}, \quad (41)$$

$$C_{\alpha\alpha}^{c\ c}{}_{\beta\beta} = (2c)! \left[ \frac{2c+1}{(2c-b)!(2c+b+1)!} \right]^{1/2}, \quad (42)$$

$$C_{\alpha\alpha}^{c\ c}{}_{\beta\beta} = (-1)^b \left[ \frac{(2c+1)(2b)!}{(2c+b+1)!b!} \right]^{1/2}. \quad (43)$$

в)  $\gamma = c - 1$  или  $\alpha = a - 1$ :

$$C_{\alpha\alpha}^c c_{\beta\beta}^{-1} = \delta_{\alpha+\beta, c-1} (-1)^{a-\alpha} \{(b-\beta)(b+\beta+1) - (a-\alpha)(a+\alpha+1)\} \times \\ \times \left[ \frac{(2c+1)(2c-1)! (a+b-c)! (a+\alpha)! (b+\beta)!}{(a+b+c+1)! (a-b+c)! (-a+b+c)! (a-\alpha)! (b-\beta)!} \right]^{1/2}, \quad (44)$$

$$C_{\alpha a-1}^{\alpha\gamma} c_{\beta\beta} = \delta_{\gamma-\beta, a-1} \{(c-\gamma)(c+\gamma+1) - (b+\beta)(b-\beta+1)\} \times \\ \times \left[ \frac{(2c+1)(2a-1)! (-a+b+c)! (b-\beta)! (c+\gamma)!}{(a+b+c+1)! (a-b+c)! (a+b-c)! (b+\beta)! (c-\gamma)!} \right]^{1/2}. \quad (45)$$

В частности,

$$C_{\alpha\alpha}^c c_{\alpha\alpha}^{-1} = 0, \quad (46)$$

$$C_{\alpha a-1}^{\alpha\gamma} c_{c-\gamma} = 0, \quad (47)$$

$$C_{\alpha\alpha}^c c_{\beta\beta}^{-1} = \delta_{\beta, c-a} \{a(a+1) - b(b+1) + c(c+1) - 2ac\} \left[ \frac{(2c+1)(2c-1)!(2a-1)!}{(a+b+c+1)!(a-b+c)!} \right]^{1/2}. \quad (48)$$

## 8.6. РЕКУРРЕНТНЫЕ СООТНОШЕНИЯ ДЛЯ КОЭФФИЦИЕНТОВ КЛЕВША—ГОРДАНА

### 1. Общие рекуррентные соотношения

$$C_{\alpha\alpha}^c c_{\beta\beta}^{\alpha\gamma} = \left[ \frac{(b+\beta-2k)! (c+\gamma)! (a+b-c)! (-a+b+c)! (a+b+c+1)! (2c+1)!}{(b+\beta)! (c-\gamma)! (a-b+c)!} \right]^{1/2} \times \\ \times \sum_{c'=c-k}^{c+k} (-1)^{c'+k-c} C_{\alpha\alpha}^{c'} c_{\beta\beta}^{\gamma-k} \frac{(c'-k+c)! (2k)!}{(c+k-c')! (c+c'+k+1)! (c'+k-c)!} \times \\ \times \left[ \frac{(c'+k-\gamma)! (a-b+c'+k)! (2c'+1)}{(c'-k+\gamma)! (-a+b+c'-k)! (a+b-c'-k)! (a+b+c'-k+1)!} \right]^{1/2} \quad (\text{Юцис, Бандзайтис [45]}, \quad (1)$$

где  $k$  — целое или полуцелое,  $0 \leq k \leq \frac{b+\beta}{2}$ . В зависимости от выбора числа  $k$  формула (1) приводит к разным рекуррентным соотношениям.

$$C_{\alpha\alpha}^c c_{\beta\beta}^{\alpha\gamma} = \left[ \frac{(a+b+c+1)! (a-b+c)! (a+b-c)! (b+\beta)! (b-\beta)! (a-b+\alpha-\beta)! (a-b-\alpha+\beta)!}{(-a+b+c)! (a+\alpha)! (a-\alpha)!} \right]^{1/2} \times \\ \times \sum_{b'} (-1)^{b-b'/2} C_{\alpha\alpha}^{c'} c_{\beta\beta}^{\alpha\gamma} \frac{(2b'+1) \left(b + \frac{b'}{2}\right)!}{(2b+b'+1)! \left(b - \frac{b'}{2}\right)! \left(\frac{b'}{2} + \beta\right)! \left(\frac{b'}{2} - \beta\right)!} \times \\ \times \left[ \frac{(-a+b+c+b')! (b'+2\beta)! (b'-2\beta)!}{(a-b+c+b'+1)! (a-b+c-b')! (a-b-c+b')!} \right]^{1/2} \quad (\text{Стоун [107]}). \quad (2)$$

Здесь  $a-b \geq |\alpha-\beta| \geq 0$ ,  $b'$  — целочисленные, причем  $b'+2b$  — четное и  $a-b+c \geq b' \geq |-a+b+c|$ ,  $2b \geq b' \geq |2\beta|$ .

Формула (1) может быть записана с помощью квазистепеней в виде [45]

$$C_{\alpha\alpha}^c c_{\beta\beta}^{\alpha\gamma} = \left[ \frac{2c+1}{(b+\beta)^{(2k)}} \right]^{1/2} \sum_{k'=-k}^k (-1)^{k+k'} C_{\alpha\alpha}^{c+k'} c_{\beta\beta}^{\gamma-k} \{(c+\gamma)^{(k-k')} (c-\gamma+k+k')^{(k+k')} (a+b-c)^{(k+k')} \times \\ \times (-a+b+c)^{(k-k')} (a+b+c+1)^{(k-k')} (a-b+c+k+k')^{(k+k')} (2c+2k'+1)^{1/2} \times \\ \times \frac{(2k)^{(k+k')}}{(2c+k+k'+1)^{(2k+1)} (k+k')^{(k+k')}}\}, \quad (3)$$

где

$$a^{(n)} = \frac{a!}{(a-n)!}, \quad \frac{1}{2} \leq k \leq \frac{b-x}{2}, \quad x = \begin{cases} 0, & \text{если } b \text{ — целое,} \\ \frac{1}{2}, & \text{если } b \text{ — полуцелое.} \end{cases}$$

2. Соотношения, в которых индексы  $\alpha, \beta, \gamma$  меняются на 1

$$[(c \pm \gamma)(c \mp \gamma + 1)]^{1/2} C_{\alpha\alpha}^c \gamma_{\beta\beta}^{\mp 1} = [(a \mp \alpha)(a \pm \alpha + 1)]^{1/2} C_{\alpha\alpha}^c \gamma_{\beta\beta}^{\mp 1} + [(b \mp \beta)(b \pm \beta + 1)]^{1/2} C_{\alpha\alpha}^c \gamma_{\beta\beta}^{\mp 1}. \quad (4)$$

В частности, при  $|\gamma| = c$

$$C_{\alpha\alpha}^{c \pm c} \gamma_{\beta\beta}^{\mp 1} = -C_{\alpha\alpha}^{c \pm c} \gamma_{\beta\beta}^{\mp 1} \left[ \frac{(b \pm \beta)(b \mp \beta + 1)}{(a \pm \alpha)(a \mp \alpha + 1)} \right]^{1/2}; \quad (5)$$

при  $|\alpha| = |\beta| = \frac{1}{2}$

$$C_{\alpha\alpha}^{c1} \gamma_{\beta\beta}^{\mp 1} = C_{\alpha\alpha}^{c0} \gamma_{\beta\beta}^{\mp 1} \frac{(2b+1) + (-1)^{a+b-c}(2a+1)}{2[c(c+1)]^{1/2}}; \quad (6)$$

при  $|\alpha| = |\beta| = 1, a+b+c$  — четном

$$C_{\alpha\alpha}^{c0} \gamma_{\beta\beta}^{\mp 1} = C_{\alpha\alpha}^{c0} \gamma_{\beta\beta}^{\mp 1} \frac{c(c+1) - a(a+1) - b(b+1)}{2[a(a+1)b(b+1)]^{1/2}}, \quad (7)$$

$$C_{\alpha\alpha}^{c2} \gamma_{\beta\beta}^{\mp 1} = C_{\alpha\alpha}^{c0} \gamma_{\beta\beta}^{\mp 1} \frac{a(a+1)[c(c+1) - a(a+1) + b(b+1)] + b(b+1)[c(c+1) + a(a+1) - b(b+1)]}{2[a(a+1)b(b+1)(c-1)c(c+1)(c+2)]^{1/2}}. \quad (8)$$

3. Соотношения, в которых индексы  $a, b, c$  и  $\alpha, \beta, \gamma$  меняются на  $1/2$ 

$$(2a+1)[b \pm \beta]^{1/2} C_{\alpha\alpha}^c \gamma_{\beta\beta}^{\mp 1} = \mp [(a \mp \alpha)(a+b-c)(a+b+c+1)]^{1/2} C_{\alpha-1/2}^c \gamma_{\alpha \pm 1/2} \beta_{\beta-1/2}^{\mp 1} + \\ + [(a \pm \alpha + 1)(-a+b+c)(a-b+c+1)]^{1/2} C_{\alpha+1/2}^c \gamma_{\alpha \pm 1/2} \beta_{\beta-1/2}^{\mp 1}, \quad (9)$$

$$(2a+1)[b \mp \beta + 1]^{1/2} C_{\alpha\alpha}^c \gamma_{\beta\beta}^{\mp 1} = [(a \mp \alpha)(a-b+c)(-a+b+c+1)]^{1/2} C_{\alpha-1/2}^c \gamma_{\alpha \pm 1/2} \beta_{\beta+1/2}^{\mp 1} \pm \\ \pm [(a \pm \alpha + 1)(a+b-c+1)(a+b+c+2)]^{1/2} C_{\alpha+1/2}^c \gamma_{\alpha \pm 1/2} \beta_{\beta+1/2}^{\mp 1}, \quad (10)$$

$$[(-a+b+c)(a-b+c+1)]^{1/2} C_{\alpha\alpha}^c \gamma_{\beta\beta}^{\mp 1} = [(a-\alpha+1)(b-\beta)]^{1/2} C_{\alpha-1/2}^c \gamma_{\alpha-1/2} \beta_{\beta+1/2}^{\mp 1} + \\ + [(a+\alpha+1)(b+\beta)]^{1/2} C_{\alpha+1/2}^c \gamma_{\alpha+1/2} \beta_{\beta-1/2}^{\mp 1}, \quad (11)$$

$$[(a-b+c)(-a+b+c+1)]^{1/2} C_{\alpha\alpha}^c \gamma_{\beta\beta}^{\mp 1} = [(a-\alpha)(b-\beta+1)]^{1/2} C_{\alpha-1/2}^c \gamma_{\alpha+1/2} \beta_{\beta-1/2}^{\mp 1} + \\ + [(a+\alpha)(b+\beta+1)]^{1/2} C_{\alpha+1/2}^c \gamma_{\alpha-1/2} \beta_{\beta+1/2}^{\mp 1}, \quad (12)$$

$$\left[ \frac{2c(-a+b+c)(a+b+c+1)}{2c+1} \right]^{1/2} C_{\alpha\alpha}^c \gamma_{\beta\beta}^{\mp 1} = [(b-\beta)(c-\gamma)]^{1/2} C_{\alpha\alpha}^{c-1/2} \gamma_{\alpha \pm 1/2}^{\mp 1} + [(b+\beta)(c+\gamma)]^{1/2} C_{\alpha\alpha}^{c-1/2} \gamma_{\alpha \pm 1/2}^{\mp 1}, \quad (13)$$

$$\left[ \frac{2c(c \mp \gamma)(a+b+c+1)}{2c+1} \right]^{1/2} C_{\alpha\alpha}^c \gamma_{\beta\beta}^{\mp 1} = [(a \mp \alpha)(a-b+c)]^{1/2} C_{\alpha-1/2}^{c-1/2} \gamma_{\alpha \pm 1/2}^{\mp 1} \beta_{\beta\beta}^{\mp 1} + [(b \mp \beta)(-a+b+c)]^{1/2} C_{\alpha\alpha}^{c-1/2} \gamma_{\alpha \pm 1/2}^{\mp 1} \beta_{\beta\beta}^{\mp 1}, \quad (14)$$

$$\left[ \frac{2c(c \mp \gamma)(a+b-c+1)}{2c+1} \right]^{1/2} C_{\alpha\alpha}^c \gamma_{\beta\beta}^{\mp 1} = \pm [(a \pm \alpha + 1)(-a+b+c)]^{1/2} C_{\alpha+1/2}^{c-1/2} \gamma_{\alpha \pm 1/2}^{\mp 1} \beta_{\beta\beta}^{\mp 1} \mp \\ \mp [(b \pm \beta + 1)(a-b+c)]^{1/2} C_{\alpha\alpha}^{c-1/2} \gamma_{\alpha \pm 1/2}^{\mp 1} \beta_{\beta\beta}^{\mp 1}, \quad (15)$$

$$\left[ \frac{2(c+1)(c \pm \gamma + 1)(a+b-c)}{2c+1} \right]^{1/2} C_{\alpha\alpha}^c \gamma_{\beta\beta}^{\mp 1} = \mp [(a \mp \alpha)(-a+b+c+1)]^{1/2} C_{\alpha-1/2}^{c+1/2} \gamma_{\alpha \pm 1/2}^{\mp 1} \beta_{\beta\beta}^{\mp 1} \pm \\ \pm [(b \mp \beta)(a-b+c+1)]^{1/2} C_{\alpha\alpha}^{c+1/2} \gamma_{\alpha \pm 1/2}^{\mp 1} \beta_{\beta\beta}^{\mp 1}, \quad (16)$$

$$[(2c+1)(b \mp \beta)]^{1/2} C_{\alpha\alpha}^c \gamma_{\beta\beta}^{\mp 1} = \left[ \frac{(c \mp \gamma)(-a+b+c)(a+b+c+1)}{2c} \right]^{1/2} C_{\alpha\alpha}^{c-1/2} \gamma_{\alpha \pm 1/2}^{\mp 1} \beta_{\beta\beta}^{\mp 1} \pm \\ \pm \left[ \frac{(c \pm \gamma + 1)(a-b+c+1)(a+b-c)}{2(c+1)} \right]^{1/2} C_{\alpha\alpha}^{c+1/2} \gamma_{\alpha \pm 1/2}^{\mp 1} \beta_{\beta\beta}^{\mp 1}. \quad (17)$$

В частности, из формул (9)—(10) следует

$$C_{\alpha \pm 1/2}^{c0} \gamma_{\beta \mp 1/2}^{\mp 1} = \pm C_{\alpha-1/2}^{c0} \gamma_{\beta-1/2}^{\mp 1} \left[ \frac{(a+b-c)(a+b+c+1)}{(2a+1)(2b+1)} \right]^{1/2} = \mp C_{\alpha+1/2}^{c0} \gamma_{\beta+1/2}^{\mp 1} \left[ \frac{(a+b-c+1)(a+b+c+2)}{(2a+1)(2b+1)} \right]^{1/2}, \quad (18)$$

если  $a + b + c$  — нечетное;

$$C_{a \pm 1/2, b \mp 1/2}^{c0} = C_{a \pm 1/2, 0, b - 1/2, 0}^{c0} \left[ \frac{(-a + b + c)(a - b + c + 1)}{(2a + 1)(2b + 1)} \right]^{1/2} = C_{a - 1/2, 0, b + 1/2, 0}^{c0} \left[ \frac{(a - b + c)(-a + b + c + 1)}{(2a + 1)(2b + 1)} \right]^{1/2}, \quad (19)$$

если  $a + b + c$  — четное.

#### 4. Соотношения для коэффициентов с $\alpha = \beta = \gamma = 0$

( $p$  — целое,  $2g = a + b + c$ )

$$C_{a+p, 0, b-p, 0}^{c0} = C_{a0, 0, b0, 0}^{c0} \frac{(g-a)!(g-b)!}{(g-a-p)!(g-b+p)!} \left[ \frac{(2g-2a-2p)!(2g-2b+2p)!}{(2g-2a)!(2g-2b)!} \right]^{1/2}. \quad (20)$$

В частности, из (20) следует

$$C_{a+1, 0, b-1, 0}^{c0} = C_{a0, 0, b0, 0}^{c0} \left[ \frac{(-a+b+c)(a-b+c+1)}{(-a+b+c-1)(a-b+c+2)} \right]^{1/2}. \quad (21)$$

$$C_{a0, b+2p, 0}^{c0} = C_{a0, b0, 0}^{c0} (-1)^p \frac{(g+p)!(g-a)!(g-b)!(g-c)!}{g!(g-a+p)!(g-b-p)!(g-c+p)!} \times \\ \times \left[ \frac{(a+b-c+2p)!(a-b+c-2p)!(-a+b+c+2p)!(a+b+c+1)!}{(a+b-c)!(a-b+c)!(-a+b+c)!(a+b+c+2p+1)!} \right]^{1/2}. \quad (22)$$

В частности, из (22) следует

$$C_{a0, b+2, 0}^{c0} = -C_{a0, b0, 0}^{c0} \left[ \frac{(a+b+c+2)(a+b-c+1)(a-b+c)(-a+b+c+1)}{(a+b+c+3)(a+b-c+2)(a-b+c-1)(-a+b+c+2)} \right]^{1/2}. \quad (23)$$

#### 5. Соотношения, в которых $a, b, c$ меняются на 1

$$2[b^2 - \beta^2]^{1/2} C_{a\alpha, b-1, \beta}^{c\gamma} = \frac{1}{a(2a+1)} [(a^2 - a^2)(-a+b+c)(-a+b+c+1)(a-b+c)(a-b+c+1)]^{1/2} C_{a-1, \alpha, b\beta}^{c\gamma} + \\ + \frac{\alpha}{a(a+1)} [(-a+b+c)(a-b+c+1)(a+b-c)(a+b+c+1)]^{1/2} C_{a\alpha, b\beta}^{c\gamma} - \\ - \frac{1}{(a+1)(2a+1)} \{[(a+1)^2 - a^2](a+b-c)(a+b-c+1)(a+b+c+1)(a+b+c+2)\}^{1/2} C_{a+1, \alpha, b\beta}^{c\gamma}, \quad (24)$$

$$2\beta C_{a\alpha, b\beta}^{c\gamma} = -\frac{1}{a(2a+1)} [(a^2 - a^2)(-a+b+c+1)(a-b+c)(a+b-c)(a+b+c+1)]^{1/2} C_{a-1, \alpha, b\beta}^{c\gamma} -$$

$$-\frac{\alpha}{a(a+1)} \{a(a+1) + b(b+1) - c(c+1)\} C_{a\alpha, b\beta}^{c\gamma} -$$

$$-\frac{1}{(a+1)(2a+1)} \{[(a+1)^2 - a^2](-a+b+c)(a-b+c+1)(a+b-c+1)(a+b+c+2)\}^{1/2} C_{a+1, \alpha, b\beta}^{c\gamma}, \quad (25)$$

$$2[(b+1)^2 - \beta^2]^{1/2} C_{a\alpha, b+1, \beta}^{c\gamma} = -\frac{1}{a(2a+1)} [(a^2 - a^2)(a+b-c)(a+b-c+1)(a+b+c+1)(a+b+c+2)]^{1/2} C_{a-1, \alpha, b\beta}^{c\gamma} +$$

$$+\frac{\alpha}{a(a+1)} [(-a+b+c+1)(a-b+c)(a+b-c+1)(a+b+c+2)]^{1/2} C_{a\alpha, b\beta}^{c\gamma} +$$

$$+\frac{1}{(a+1)(2a+1)} \{[(a+1)^2 - a^2](-a+b+c)(-a+b+c+1)(a-b+c)(a-b+c+1)\}^{1/2} C_{a+1, \alpha, b\beta}^{c\gamma}, \quad (26)$$

$$C_{a\alpha, b\beta}^{c\gamma} = \left[ \frac{4c^2(2c+1)(2c-1)}{(c+\gamma)(c-\gamma)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c+1)(a+b+c+1)} \right]^{1/2} \times \\ \times \left\{ \frac{(\alpha-\beta)c(c-1) - \gamma a(a+1) + \gamma b(b+1)}{2c(c-1)} C_{a\alpha, b\beta}^{c-1, \gamma} - \right.$$

$$\left. - \left[ \frac{(c-\gamma-1)(c+\gamma-1)(-a+b+c-1)(a-b+c-1)(a+b-c+2)(a+b+c)}{4(c-1)^2(2c-3)(2c-1)} \right]^{1/2} C_{a\alpha, b\beta}^{c-2, \gamma} \right\}. \quad (27)$$

6. Соотношения, в которых  $a, b, \alpha, \beta$  меняются на 1

$$\begin{aligned}
& [(b \pm \beta)(b \pm \beta + 1)]^{1/2} C_{\alpha\alpha b-1\beta}^{\sigma\gamma} = \\
& = \frac{1}{2a(2a+1)} [(a \pm a)(a \pm a - 1)(-a + b + c)(-a + b + c + 1)(a - b + c)(a - b + c + 1)]^{1/2} C_{\alpha-1\alpha\mp 1 b \pm \beta \pm 1}^{\sigma\gamma} \mp \\
& \mp \frac{1}{2a(a+1)} [(a \pm a)(a \mp a + 1)(-a + b + c)(a - b + c + 1)(a + b - c)(a + b + c + 1)]^{1/2} C_{\alpha\mp 1 b \pm \beta \pm 1}^{\sigma\gamma} + \\
& + \frac{1}{2(a+1)(2a+1)} [(a \mp a + 1)(a \mp a + 2)(a + b - c)(a + b - c + 1)(a + b + c + 1)(a + b + c + 2)]^{1/2} C_{\alpha+1\alpha\mp 1 b \pm \beta \pm 1}^{\sigma\gamma}. \quad (28)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& [(b \mp \beta)(b \pm \beta + 1)]^{1/2} C_{\alpha\alpha b\beta}^{\sigma\gamma} = \\
& = \pm \frac{1}{2a(2a+1)} [(a \pm a)(a \pm a - 1)(-a + b + c + 1)(a - b + c)(a + b - c)(a + b + c + 1)]^{1/2} C_{\alpha-1\alpha\mp 1 b \pm \beta \pm 1}^{\sigma\gamma} - \\
& - \frac{1}{2a(a+1)} \{a(a+1) + b(b+1) - c(c+1)\} [(a \pm a)(a \mp a + 1)]^{1/2} C_{\alpha\mp 1 b \pm \beta \pm 1}^{\sigma\gamma} \mp \\
& \mp \frac{1}{2(a+1)(2a+1)} [(a \mp a + 1)(a \mp a + 2)(-a + b + c)(a - b + c + 1)(a + b - c + 1)(a + b + c + 2)]^{1/2} C_{\alpha+1\alpha\mp 1 b \pm \beta \pm 1}^{\sigma\gamma}. \quad (29)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& [(b \mp \beta)(b \mp \beta + 1)]^{1/2} C_{\alpha\alpha b+1\beta}^{\sigma\gamma} = \\
& = \frac{1}{2a(2a+1)} [(a \pm a)(a \pm a - 1)(a + b - c)(a + b - c + 1)(a + b + c + 1)(a + b + c + 2)]^{1/2} C_{\alpha-1\alpha\mp 1 b \pm \beta \pm 1}^{\sigma\gamma} \pm \\
& \pm \frac{1}{2a(a+1)} [(a \pm a)(a \mp a + 1)(-a + b + c + 1)(a - b + c)(a + b - c + 1)(a + b + c + 2)]^{1/2} C_{\alpha\mp 1 b \pm \beta \pm 1}^{\sigma\gamma} + \\
& + \frac{1}{2(a+1)(2a+1)} [(a \mp a + 1)(a \mp a + 2)(-a + b + c)(-a + b + c + 1)(a - b + c)(a - b + c + 1)]^{1/2} C_{\alpha+1\alpha\mp 1 b \pm \beta \pm 1}^{\sigma\gamma}. \quad (30)
\end{aligned}$$

7. Соотношения, в которых  $c, b, \gamma, \beta$  меняются на 1

$$\begin{aligned}
& \left[ \frac{(-a + b + c)(a - b + c)(a + b - c + 1)(a + b + c + 1)(2c - 1)}{(2c + 1)} \right]^{1/2} C_{\alpha\alpha b\beta}^{\sigma\gamma} = \\
& = [(b + \beta)(b - \beta + 1)(c + \gamma)(c + \gamma - 1)]^{1/2} C_{\alpha\alpha b\beta-1}^{c-1\gamma-1} - 2\beta [c^2 - \gamma^2]^{1/2} C_{\alpha\alpha b\beta}^{c-1\gamma} - \\
& - [(b - \beta)(b + \beta + 1)(c - \gamma)(c - \gamma - 1)]^{1/2} C_{\alpha\alpha b\beta+1}^{c-1\gamma+1}. \quad (31)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& [(b \mp \beta)(b \mp \beta + 1)]^{1/2} C_{\alpha\alpha b-1\beta}^{\sigma\gamma} = \\
& = \frac{1}{2c} \left[ \frac{(c \pm \gamma)(c \pm \gamma - 1)(a - b + c)(a - b + c + 1)(a + b - c)(a + b - c + 1)}{(2c - 1)(2c + 1)} \right]^{1/2} C_{\alpha\alpha b\beta\mp 1}^{c-1\gamma\mp 1} \pm \\
& \pm \frac{1}{2c(c+1)} [(c \pm \gamma)(c \mp \gamma + 1)(-a + b + c)(a - b + c + 1)(a + b - c)(a + b + c + 1)]^{1/2} C_{\alpha\alpha b\beta\mp 1}^{\gamma\mp 1} + \\
& + \frac{1}{2(c+1)} \left[ \frac{(c \mp \gamma + 1)(c \mp \gamma + 2)(-a + b + c)(-a + b + c + 1)(a + b + c + 1)(a + b + c + 2)}{(2c + 1)(2c + 3)} \right]^{1/2} C_{\alpha\alpha b\beta\mp 1}^{c+1\gamma\mp 1}. \quad (32)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& [(b \pm \beta)(b \mp \beta + 1)]^{1/2} C_{\alpha\alpha b\beta}^{\sigma\gamma} = \\
& = \pm \frac{1}{2c} \left[ \frac{(c \pm \gamma)(c \pm \gamma - 1)(-a + b + c)(a - b + c)(a + b - c + 1)(a + b + c + 1)}{(2c - 1)(2c + 1)} \right]^{1/2} C_{\alpha\alpha b\beta\mp 1}^{c-1\gamma\mp 1} + \\
& + \frac{1}{2c(c+1)} \{-a(a+1) + b(b+1) + c(c+1)\} [(c \pm \gamma)(c \mp \gamma + 1)]^{1/2} C_{\alpha\alpha b\beta\mp 1}^{\gamma\mp 1} \mp \\
& \mp \frac{1}{2(c+1)} \left[ \frac{(c \mp \gamma + 1)(c \mp \gamma + 2)(-a + b + c + 1)(a - b + c + 1)(a + b - c)(a + b + c + 2)}{(2c + 1)(2c + 3)} \right]^{1/2} C_{\alpha\alpha b\beta\mp 1}^{c+1\gamma\mp 1}. \quad (33)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& [(b \pm \beta)(b \pm \beta + 1)]^{1/2} C_{\alpha\alpha b+1\beta}^{\sigma\gamma} = \\
& = \frac{1}{2c} \left[ \frac{(c \pm \gamma)(c \pm \gamma - 1)(-a + b + c)(-a + b + c + 1)(a + b + c + 1)(a + b + c + 2)}{-(2c - 1)(2c + 1)} \right]^{1/2} C_{\alpha\alpha b\beta\mp 1}^{c-1\gamma\mp 1} \mp
\end{aligned}$$

$$\mp \frac{1}{2c(c+1)} [(c \pm \gamma)(c \mp \gamma + 1)(-a + b + c + 1)(a - b + c)(a + b - c + 1)(a + b + c + 2)]^{1/2} C_{\alpha\alpha\beta\beta\gamma}^{\sigma\gamma\mp 1} + \\ + \frac{1}{2(c+1)} \left[ \frac{(c \mp \gamma + 1)(c \mp \gamma + 2)(a - b + c)(a - b + c + 1)(a + b - c)(a + b - c + 1)}{(2c + 1)(2c + 3)} \right]^{1/2} C_{\alpha\alpha\beta\beta\gamma}^{c+1\gamma\mp 1}. \quad (34)$$

## 8. Рекуррентные соотношения для символов Редже

Рекуррентные соотношения для  $R$ -символов удобны потому, что каждое такое соотношение эквивалентно целому набору разных по виду соотношений для коэффициентов Клебша—Гордана, если учитывать свойства симметрии  $R$ -символов (см. 8.4) и связь  $R$ -символов с коэффициентами Клебша—Гордана (см. 8.1). Ниже приведены некоторые из этих соотношений [86, 103], в которых

использовано обозначение  $J = \sum_{k=1}^3 R_{ik} = \sum_{i=1}^3 R_{ik} = a + b + c$ .

$$[R_{11}(J+1)]^{1/2} \begin{vmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{vmatrix} - [R_{22}R_{33}]^{1/2} \begin{vmatrix} R_{11} - 1 & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} - 1 & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} - 1 \end{vmatrix} + \\ + [R_{23}R_{32}]^{1/2} \begin{vmatrix} R_{11} - 1 & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} - 1 \\ R_{31} & R_{32} - 1 & R_{33} \end{vmatrix} = 0. \quad (35)$$

$$[(R_{11} + 1)R_{21}]^{1/2} \begin{vmatrix} R_{11} + 1 & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} - 1 & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{vmatrix} + [(R_{12} + 1)R_{22}]^{1/2} \begin{vmatrix} R_{11} & R_{12} + 1 & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} - 1 & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{vmatrix} + \\ + [(R_{13} + 1)R_{23}]^{1/2} \begin{vmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} + 1 \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} - 1 \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{vmatrix} = 0. \quad (36)$$

$$[R_{11}R_{22}(J+1)]^{1/2} \begin{vmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{vmatrix} - (R_{22} + R_{23}) [R_{33}]^{1/2} \begin{vmatrix} R_{11} - 1 & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} - 1 & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} - 1 \end{vmatrix} - \\ - [R_{23}R_{31}(R_{21} + 1)]^{1/2} \begin{vmatrix} R_{11} - 1 & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} + 1 & R_{22} - 1 & R_{23} - 1 \\ R_{31} - 1 & R_{32} & R_{33} \end{vmatrix} = 0. \quad (37)$$

$$(R_{11} + R_{12} + 1) [R_{22}]^{1/2} \begin{vmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{vmatrix} + [R_{13}(R_{23} + 1)(R_{12} + 1)]^{1/2} \begin{vmatrix} R_{11} & R_{12} + 1 & R_{13} - 1 \\ R_{21} & R_{22} - 1 & R_{23} + 1 \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{vmatrix} - \\ - [R_{11}R_{33}(J+1)]^{1/2} \begin{vmatrix} R_{11} - 1 & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} - 1 & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} - 1 \end{vmatrix} = 0. \quad (38)$$

$$(R_{22} - R_{33}) [R_{11}R_{23}R_{32}]^{1/2} \begin{vmatrix} R_{11} - 1 & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} - 1 \\ R_{31} & R_{32} - 1 & R_{33} \end{vmatrix} + (R_{33} - R_{11}) [R_{13}R_{22}R_{31}]^{1/2} \begin{vmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} - 1 \\ R_{21} & R_{22} - 1 & R_{23} \\ R_{31} - 1 & R_{32} & R_{33} \end{vmatrix} + \\ + (R_{11} - R_{22}) [R_{12}R_{21}R_{33}]^{1/2} \begin{vmatrix} R_{11} & R_{12} - 1 & R_{13} \\ R_{21} - 1 & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} - 1 \end{vmatrix} = 0. \quad (39)$$

### 8.7. СУММЫ ПРОИЗВЕДЕНИЙ КОЭФФИЦИЕНТОВ КЛЕБША—ГОРДАНА

Формулы суммирования произведений коэффициентов векторного сложения удобно записывать через  $3jm$ -символы, а не через коэффициенты Клебша—Гордана, поскольку  $3jm$ -символы обладают более простыми свойствами симметрии. Такого рода формулы даны в 12.2. Однако в практи-

ческих вычислениях наряду с  $3jm$ -символами широкое применение находят коэффициенты Клебша—Гордана. Поэтому в данном параграфе приведены наиболее часто используемые формулы суммирования произведений коэффициентов Клебша—Гордана, причем для удобства сюда включены варианты этих формул, отличающиеся перестановкой верхних и нижних индексов.

Так же как и в гл. 12, здесь использовано обозначение

$$\Pi_{ab\dots c} \equiv \sqrt{(2a+1)(2b+1)\dots(2c+1)}.$$

### 1. Суммы, содержащие один коэффициент Клебша—Гордана

$$\sum_{\alpha} C_{a\alpha b\alpha}^{a\alpha} = \Pi_{a\delta}^2 \delta_{b0}, \quad (1)$$

$$\sum_{\alpha} (-1)^{a-\alpha} C_{a\alpha a-\alpha}^{a\alpha} = \Pi_{a\delta}^2 \delta_{c0}, \quad (2)$$

$$\sum_{\alpha\beta\gamma} (-1)^{c+\gamma} C_{a\alpha b\beta}^{c\gamma} [(a+\alpha)!(a-\alpha)!(b+\beta)!(b-\beta)!(c+\gamma)!(c-\gamma)!]^{-1/2} = 0. \quad (3)$$

### 2. Суммы произведений двух коэффициентов Клебша—Гордана

$$\sum_{\alpha\beta} C_{a\alpha b\beta}^{c\gamma} C_{a\alpha' b\beta'}^{c'\gamma'} = \delta_{cc'} \delta_{\gamma\gamma'}, \quad (4)$$

$$\sum_{\alpha\gamma} C_{a\alpha b\beta}^{c\gamma} C_{a\alpha b'\beta'}^{c'\gamma'} = \frac{\Pi_b^2}{\Pi_c^2} \delta_{bb'} \delta_{\beta\beta'}, \quad (5)$$

$$\sum_{\alpha\beta} (-1)^{b+\beta} C_{a\alpha b\beta}^{c\gamma} C_{c'\beta' a\alpha}^{b-\beta} = (-1)^{c+\gamma} \frac{\Pi_b}{\Pi_c} \delta_{cc'} \delta_{\gamma\gamma'}, \quad (6)$$

$$\sum_{\alpha\beta} (-1)^{a+\alpha} C_{b\beta a\alpha}^{c\gamma} C_{a-\alpha c'\gamma'}^{b\beta} = \frac{\Pi_b}{\Pi_c} \delta_{cc'} \delta_{\gamma\gamma'}, \quad (7)$$

$$\sum_{\alpha\beta} C_{c\gamma b\beta}^{a\alpha} C_{c'\beta' a\alpha}^{b\beta} = (-1)^{b-a-\gamma} \frac{\Pi_{ab}}{\Pi_c^2} \delta_{cc'} \delta_{\gamma\gamma'}. \quad (8)$$

$$\sum_{c\gamma} C_{a\alpha b\beta}^{c\gamma} C_{a\alpha' b\beta'}^{c'\gamma'} = \delta_{\alpha\alpha'} \delta_{\beta\beta'}, \quad (9)$$

$$\sum_{c\gamma} \Pi_c^2 C_{a\alpha c\gamma}^{b\beta} C_{a\alpha' c\gamma'}^{b'\beta'} = \Pi_b^2 \delta_{\alpha\alpha'} \delta_{\beta\beta'}, \quad (10)$$

$$\sum_{\alpha} (-1)^{a-\alpha} \Pi_a^2 C_{a\alpha c\gamma}^{c\gamma} C_{a\alpha c\gamma'}^{b'\beta'} = \Pi_{bc} \delta_{\gamma, -\gamma'} \delta_{\beta, -\beta'}. \quad (11)$$

### 3. Суммы произведений трех коэффициентов Клебша—Гордана

$$\sum_{\alpha\beta\delta} C_{a\alpha b\beta}^{c\gamma} C_{a\delta b\beta}^{e\epsilon} C_{a\alpha f\varphi}^{d\delta} = \kappa_1 \Pi_{cd} C_{c\gamma f\varphi}^{e\epsilon} \begin{Bmatrix} a & b & c \\ e & f & d \end{Bmatrix}, \quad (12)$$

$$\sum_{\alpha\beta\delta} C_{b\beta c\gamma}^{a\alpha} C_{b\beta e\epsilon}^{d\delta} C_{a\alpha f\varphi}^{d\delta} = \kappa_1 \frac{\Pi_{add}}{\Pi_e} C_{c\gamma f\varphi}^{e\epsilon} \begin{Bmatrix} a & b & c \\ e & f & d \end{Bmatrix}, \quad (13)$$

$$\sum_{\alpha\beta\delta} C_{b\beta a\alpha}^{c\gamma} C_{b\beta d\delta}^{e\epsilon} C_{a\alpha f\varphi}^{d\delta} = \kappa_2 \Pi_{cd} C_{c\gamma f\varphi}^{e\epsilon} \begin{Bmatrix} a & b & c \\ e & f & d \end{Bmatrix}, \quad (14)$$

$$\sum_{\alpha\beta\delta} (-1)^{a-\alpha} C_{a\alpha b\beta}^{c\gamma} C_{a\delta b\beta}^{e\epsilon} C_{a\delta a-\alpha}^{f\varphi} = \kappa_1 \Pi_{ef} C_{c\gamma f\varphi}^{e\epsilon} \begin{Bmatrix} a & b & c \\ e & f & d \end{Bmatrix}, \quad (15)$$

$$\sum_{\alpha\beta\delta} (-1)^{b+\beta} C_{\alpha\alpha}^{\sigma\gamma} C_{b\beta}^{\delta\delta} C_{e\epsilon}^{\delta\delta} C_{d\delta}^{\delta\delta} = \kappa_1 \frac{\Pi_{cd\delta}}{\Pi_e} C_{c\gamma}^{e\epsilon} C_{f\varphi} \begin{Bmatrix} a & b & c \\ e & f & d \end{Bmatrix}, \quad (16)$$

$$\sum_{\alpha\beta\delta} (-1)^{a-\alpha} C_{b\beta}^{\sigma\gamma} C_{\alpha\alpha}^{\delta\delta} C_{b\beta}^{\delta\delta} C_{d\delta}^{\delta\delta} C_{f\varphi}^{a-\alpha} = \kappa_2 \Pi_{cf} C_{c\gamma}^{e\epsilon} C_{f\varphi} \begin{Bmatrix} a & b & c \\ e & f & d \end{Bmatrix}, \quad (17)$$

$$\sum_{\alpha\beta\delta} (-1)^{b+\beta} C_{b-\beta}^{\alpha\alpha} C_{c\gamma}^{\delta\delta} C_{d\delta}^{\delta\delta} C_{\alpha\alpha}^{\delta\delta} C_{f\varphi} = \kappa_1 \Pi_{ad} C_{c\gamma}^{e\epsilon} C_{f\varphi} \begin{Bmatrix} a & b & c \\ e & f & d \end{Bmatrix}, \quad (18)$$

$$\sum_{\alpha\beta\delta} (-1)^{a-\alpha} C_{\alpha\alpha}^{b\beta} C_{c-\gamma}^{\delta\delta} C_{d\delta}^{\delta\delta} C_{b-\beta}^{\delta\delta} C_{\alpha\alpha}^{\delta\delta} C_{f\varphi} = \kappa_1 \Pi_{bd} C_{c\gamma}^{e\epsilon} C_{f\varphi} \begin{Bmatrix} a & b & c \\ e & f & d \end{Bmatrix}, \quad (19)$$

где

$$\kappa_1 = (-1)^{b+c+d+f}, \quad \kappa_2 = (-1)^{a+b+e+f}.$$

## 4. Суммы произведений четырех коэффициентов Клебша—Гордана

$$\begin{aligned} & \sum_{\beta\gamma\epsilon\varphi} C_{b\beta}^{\alpha\alpha} C_{c\gamma}^{\delta\delta} C_{e\epsilon}^{\delta\delta} C_{f\varphi}^{\delta\delta} C_{e\epsilon}^{\delta\delta} C_{b\beta}^{\delta\delta} C_{f\varphi}^{\delta\delta} = \\ & = (-1)^{a-b+c+d+e-f} \sum_{s\sigma} \Pi_{ssag} C_{\alpha\alpha}^{j\mu} C_{g\eta}^{\delta\delta} C_{s\sigma} \begin{Bmatrix} b & c & a \\ j & s & f \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} b & e & g \\ d & s & f \end{Bmatrix} = \Pi_{adgj} \sum_{kx} C_{g\eta}^{kx} C_{j\mu}^{kx} C_{d\delta}^{kx} \begin{Bmatrix} c & b & a \\ f & e & d \\ j & g & k \end{Bmatrix}, \quad (20) \end{aligned}$$

$$\sum_{\beta\gamma\epsilon\varphi} C_{b\beta}^{\alpha\alpha} C_{c-\gamma}^{\delta\delta} C_{e\epsilon}^{\delta\delta} C_{f-\varphi}^{\delta\delta} C_{b\beta}^{\delta\delta} C_{e\epsilon}^{\delta\delta} C_{c\gamma}^{j\mu} C_{f\varphi} = (-1)^{b+e-g} \Pi_{adgj} \sum_{kx} C_{g\eta}^{kx} C_{j-\mu}^{kx} C_{d\delta}^{kx} \begin{Bmatrix} c & b & a \\ f & e & d \\ j & g & k \end{Bmatrix}, \quad (21)$$

$$\sum_{\beta\gamma\epsilon\varphi} C_{b\beta}^{\sigma\gamma} C_{\alpha\alpha}^{\delta\delta} C_{c\gamma}^{j\mu} C_{e\epsilon}^{\delta\delta} C_{b\beta}^{\delta\delta} C_{g\eta}^{\delta\delta} C_{f\varphi}^{\delta\delta} C_{d\delta}^{\delta\delta} = (-1)^{a-b+f-j} \Pi_{ce}^2 \sum_{kx} C_{g\eta}^{kx} C_{j\mu}^{kx} C_{d\delta}^{kx} \begin{Bmatrix} c & b & a \\ f & e & d \\ j & g & k \end{Bmatrix}, \quad (22)$$

$$\sum_{\beta\gamma\epsilon\varphi} C_{\alpha\alpha}^{\sigma\gamma} C_{b\beta}^{\delta\delta} C_{g\eta}^{\delta\delta} C_{e\epsilon}^{\delta\delta} C_{d\delta}^{\delta\delta} C_{f\varphi}^{\delta\delta} C_{j\mu}^{\delta\delta} C_{c\gamma} = (-1)^{d+e-c-j} \Pi_{bcef} \sum_{kx} (-1)^{k-x} C_{g\eta}^{k-x} C_{j\mu}^{k-x} C_{d\delta}^{k-x} \begin{Bmatrix} c & b & a \\ f & e & d \\ j & g & k \end{Bmatrix}, \quad (23)$$

$$\sum_{\beta\gamma\epsilon\varphi} C_{b\beta}^{\sigma\gamma} C_{\alpha-\alpha}^{\delta\delta} C_{e\epsilon}^{\delta\delta} C_{d-\delta}^{\delta\delta} C_{g\eta}^{\delta\delta} C_{b-\beta}^{\delta\delta} C_{f\varphi}^{\delta\delta} C_{c-\gamma} = (-1)^{b-c-g-a+\eta} \Pi_{ceff} \sum_{kx} C_{g\eta}^{kx} C_{j-\mu}^{kx} C_{d\delta}^{kx} \begin{Bmatrix} c & b & a \\ f & e & d \\ j & g & k \end{Bmatrix}, \quad (24)$$

$$\sum_{\beta\gamma\epsilon\varphi} C_{b\beta}^{\alpha\alpha} C_{c-\gamma}^{\delta\delta} C_{e\epsilon}^{\delta\delta} C_{f\varphi}^{\delta\delta} C_{e\epsilon}^{\delta\delta} C_{g\eta}^{\delta\delta} C_{f\varphi}^{j\mu} = (-1)^{b+f-g-\delta} \Pi_{abcd} \sum_{kx} C_{g\eta}^{kx} C_{j-\mu}^{kx} C_{d\delta}^{kx} \begin{Bmatrix} c & b & a \\ f & e & d \\ j & g & k \end{Bmatrix}, \quad (25)$$

$$\sum_{\beta\gamma\epsilon\varphi} C_{b\beta}^{\alpha\alpha} C_{c\gamma}^{\delta\delta} C_{e\epsilon}^{\delta\delta} C_{f\varphi}^{\delta\delta} C_{e\epsilon}^{\delta\delta} C_{g-\eta}^{\delta\delta} C_{f\varphi}^{j\mu} C_{j-\mu} = \sum_{kx} (-1)^{j+g-k} \Pi_{bcdk} C_{g\eta}^{kx} C_{j\mu}^{kx} C_{d\delta}^{kx} \begin{Bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ k & g & j \end{Bmatrix}, \quad (26)$$

$$\sum_{\beta\gamma\epsilon\varphi} C_{b\beta}^{\alpha\alpha} C_{c-\gamma}^{\delta\delta} C_{e\epsilon}^{\delta\delta} C_{f-\varphi}^{\delta\delta} C_{g\eta}^{\delta\delta} C_{b-\beta}^{\delta\delta} C_{j\mu}^{\delta\delta} C_{f-\varphi} = (-1)^{c+e-g+j+\alpha-\mu} \Pi_{adec} \sum_{kx} C_{g\eta}^{kx} C_{j-\mu}^{kx} C_{d\delta}^{kx} \begin{Bmatrix} c & b & a \\ f & e & d \\ j & g & k \end{Bmatrix}, \quad (27)$$

$$\sum_{\beta\gamma\epsilon\varphi} C_{b\beta}^{\alpha\alpha} C_{c\gamma}^{\delta\delta} C_{e\epsilon}^{\delta\delta} C_{g\eta}^{\delta\delta} C_{f\varphi}^{\delta\delta} C_{d\delta}^{\delta\delta} C_{f\varphi}^{j\mu} C_{c\gamma} = (-1)^{j-a+\delta-\eta} \Pi_{aeeg} \sum_{kx} C_{g\eta}^{kx} C_{j-\mu}^{kx} C_{d\delta}^{kx} \begin{Bmatrix} c & b & a \\ f & e & d \\ j & g & k \end{Bmatrix}, \quad (28)$$

$$\sum_{\beta\gamma\epsilon\varphi} C_{b\beta}^{\alpha\alpha} C_{c\gamma}^{\delta\delta} C_{e\epsilon}^{\delta\delta} C_{g\eta}^{\delta\delta} C_{f\varphi}^{\delta\delta} C_{d\delta}^{\delta\delta} C_{f\varphi}^{j\mu} C_{c\gamma} = (-1)^{j-a-g+\delta} \Pi_{abej} \sum_{kx} C_{g-\eta}^{kx} C_{j-\mu}^{kx} C_{d\delta}^{kx} \begin{Bmatrix} c & b & a \\ f & e & d \\ j & g & k \end{Bmatrix}, \quad (29)$$

$$\sum_{\beta\gamma\epsilon\varphi} (-1)^{c-\gamma+\epsilon-e} C_{\alpha\alpha}^{\sigma\gamma} C_{b\beta}^{\delta\delta} C_{d\delta}^{\delta\delta} C_{f\varphi}^{\delta\delta} C_{e\epsilon}^{\delta\delta} C_{b\beta}^{\delta\delta} C_{c\gamma}^{j\mu} C_{f\varphi} = (-1)^{a+d-\alpha-\delta} \Pi_{cegj} \sum_{kx} C_{g\eta}^{kx} C_{j-\mu}^{kx} C_{d\delta}^{kx} \begin{Bmatrix} c & b & a \\ f & e & d \\ j & g & k \end{Bmatrix}. \quad (30)$$



5. Сумма произведений коэффициентов Клебша—Гордана и  $6j$ -символа

$$\sum_{e\epsilon} (-1)^{2e} \Pi_{cd} C_{b\beta}^{e\epsilon} d\delta C_{f\varphi}^{e\epsilon} c\gamma \begin{Bmatrix} a & b & c \\ e & f & d \end{Bmatrix} = C_{aa}^{c\gamma} b\beta C_{a\alpha}^{d\delta} f\varphi, \quad (31)$$

$$\sum_{f\varphi} (-1)^{c+d+f} \Pi_{ce} C_{e\epsilon}^{f\varphi} \alpha\alpha C_{d\delta}^{f\varphi} c\gamma \begin{Bmatrix} b & a & c \\ f & d & e \end{Bmatrix} = C_{aa}^{c\gamma} b\beta C_{d\delta}^{e\epsilon} b\beta, \quad (32)$$

$$\sum_{c\gamma} (-1)^{2e-d+\alpha+\varphi} \Pi_{ae} C_{f-\varphi}^{c\gamma} b\beta C_{e\epsilon}^{c\gamma} a-\alpha \begin{Bmatrix} c & f & b \\ d & e & a \end{Bmatrix} = C_{b\beta}^{e\epsilon} d\delta C_{f\varphi}^{a\alpha} d\delta, \quad (33)$$

$$\sum_{c\gamma} (-1)^{c+d-\beta-\varphi} \Pi_a^2 C_{a\alpha}^{c\gamma} b\beta C_{f-\varphi}^{c\gamma} e\epsilon \begin{Bmatrix} a & b & c \\ e & f & d \end{Bmatrix} = C_{a\alpha}^{d\delta} f\varphi C_{b-\beta}^{d\delta} e\epsilon, \quad (34)$$

$$\sum_{c\gamma} (-1)^{2e} \Pi_{cd} C_{a\alpha}^{c\gamma} b\beta C_{f\varphi}^{e\epsilon} c\gamma \begin{Bmatrix} a & b & c \\ e & f & d \end{Bmatrix} = C_{b\beta}^{e\epsilon} d\delta C_{a\alpha}^{d\delta} f\varphi, \quad (35)$$

$$\sum_{f\varphi} (-1)^{2c} \Pi_{ef} C_{b\beta}^{f\varphi} d\delta C_{a\alpha}^{c\gamma} f\varphi \begin{Bmatrix} a & b & e \\ d & c & f \end{Bmatrix} = C_{b\beta}^{e\epsilon} \alpha\alpha C_{d\delta}^{c\gamma} e\epsilon, \quad (36)$$

$$\sum_{c\gamma} (-1)^{e+d-\beta} \frac{\Pi_{cdd}}{\Pi_a} C_{a\alpha}^{c\gamma} b\beta C_{f\varphi}^{e\epsilon} c\gamma \begin{Bmatrix} a & b & c \\ e & f & d \end{Bmatrix} = C_{b-\beta}^{d\delta} e\epsilon C_{a\alpha}^{d\delta} f\varphi, \quad (37)$$

$$\sum_{c\gamma} (-1)^{2e} \frac{\Pi_{acc}}{\Pi_b} C_{f\varphi}^{b\beta} c\gamma C_{c\gamma}^{e\epsilon} a\alpha \begin{Bmatrix} c & f & b \\ d & e & a \end{Bmatrix} = C_{d\delta}^{e\epsilon} b\beta C_{f\varphi}^{a\alpha} d\delta. \quad (38)$$

6. Суммы произведений коэффициентов Клебша—Гордана и  $9j$ -символа

$$\sum_{ak} \Pi_{adgj} C_{b\beta}^{a\alpha} c\gamma C_{g\eta}^{kx} j\mu C_{d\delta}^{kx} a\alpha \begin{Bmatrix} c & b & a \\ f & e & d \\ j & g & k \end{Bmatrix} = C_{e\epsilon}^{d\delta} f\varphi C_{e\epsilon}^{g\eta} b\beta C_{f\varphi}^{j\mu} c\gamma, \quad (39)$$

$$\sum_{gj} \Pi_{adgj} C_{g\eta}^{kx} j\mu C_{e\epsilon}^{g\eta} b\beta C_{f\varphi}^{j\mu} c\gamma \begin{Bmatrix} c & b & a \\ f & e & d \\ j & g & k \end{Bmatrix} = C_{d\delta}^{kx} a\alpha C_{e\epsilon}^{d\delta} f\varphi C_{b\beta}^{a\alpha} c\gamma, \quad (40)$$

$$\sum_{gj} (-1)^{b+e-g} \Pi_{adgj} C_{g\eta}^{kx} j-\mu C_{b\beta}^{g\eta} e\epsilon C_{c\gamma}^{j\mu} f\varphi \begin{Bmatrix} c & b & a \\ f & e & d \\ j & g & k \end{Bmatrix} = C_{d\delta}^{kx} a\alpha C_{e\epsilon}^{d\delta} f-\varphi C_{b\beta}^{a\alpha} c-\gamma, \quad (41)$$

$$\sum_{ad} (-1)^{b+f-j-\delta} \Pi_{abcd} C_{b\beta}^{a\alpha} c-\gamma C_{e\epsilon}^{d\delta} f\varphi C_{d\delta}^{kx} a\alpha \begin{Bmatrix} c & b & a \\ f & e & d \\ j & g & k \end{Bmatrix} = C_{g\eta}^{kx} j-\mu C_{e-\epsilon}^{b\beta} g\eta C_{f\varphi}^{c\gamma} j\mu, \quad (42)$$

$$\sum_{gj} (-1)^{g-b-f+\varphi+\epsilon} \frac{\Pi_{adjgg}}{\Pi_{bc}} C_{g\eta}^{kx} j-\mu C_{e-\epsilon}^{b\beta} g\eta C_{f\varphi}^{c\gamma} j\mu \begin{Bmatrix} c & b & a \\ f & e & d \\ j & g & k \end{Bmatrix} = C_{b\beta}^{a\alpha} c-\gamma C_{e\epsilon}^{d\delta} f\varphi C_{d\delta}^{kx} a\alpha. \quad (43)$$

Формулы, содержащие большее число коэффициентов Клебша—Гордана в левой части, могут быть получены из приведенных выше с помощью соотношения ортогональности (формула 8.1(8)).

## 8.8. ПРОИЗВОДЯЩИЕ ФУНКЦИИ

Коэффициенты Клебша—Гордана являются коэффициентами разложения в степенные ряды или конечные суммы некоторых функций, называемых *производящими функциями*. Ниже приведены примеры таких производящих функций. При этом используется обозначение  $J \equiv a + b + c$ .

1. Определитель Редже в степени  $J$  [94, 106]

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}^J = J! \sqrt{(J+1)!} \sum_{kik} \left\| \begin{matrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{matrix} \right\| \frac{u_1^{R_{11}} u_2^{R_{12}} u_3^{R_{13}} v_1^{R_{21}} v_2^{R_{22}} v_3^{R_{23}} w_1^{R_{31}} w_2^{R_{32}} w_3^{R_{33}}}{[R_{11}! R_{12}! R_{13}! R_{21}! R_{22}! R_{23}! R_{31}! R_{32}! R_{33}!]^{1/2}}. \quad (1)$$

Здесь  $R_{i_k}$  — элементы  $R$ -символа (см. 8.1.3), связь  $R$ -символа с коэффициентами Клебша—Гордана дается формулами 8.1 (14) и 8.1 (11).

## 2. Произведение биномов [94]

$$(t_1 - t_2)^{J-2c} (t_2 - t_3)^{J-2a} (t_3 - t_1)^{J-2b} =$$

$$= \left[ \frac{(J+1)!(J-2a)!(J-2b)!(J-2c)!}{2c+1} \right]^{1/2} \sum_{\substack{\alpha, \beta, \gamma \\ \alpha+\beta+\gamma=0}} (-1)^{\alpha-b-\gamma} \frac{t_1^{\alpha+\alpha} t_2^{b+\beta} t_3^{c+\gamma}}{[(a+\alpha)!(a-\alpha)!(b+\beta)!(b-\beta)!(c+\gamma)!(c-\gamma)!]^{1/2}} C_{a\alpha b\beta}^{c-\gamma} \quad (2)$$

$$(v_1 u_2 - u_1 v_2)^{J-2c} (w_1 v_2 - w_2 v_1)^{J-2a} (u_1 w_2 - w_1 u_2)^{J-2b} =$$

$$= \left[ \frac{(J+1)!(J-2a)!(J-2b)!(J-2c)!}{2c+1} \right]^{1/2} \sum_{\substack{\alpha, \beta, \gamma \\ \alpha+\beta+\gamma=0}} (-1)^{\alpha-b-\gamma} \frac{u_1^{\alpha-\alpha} u_2^{\alpha+\alpha} v_1^{b-\beta} v_2^{b+\beta} w_1^{c-\gamma} w_2^{c+\gamma}}{[(a+\alpha)!(a-\alpha)!(b+\beta)!(b-\beta)!(c+\gamma)!(c-\gamma)!]^{1/2}} C_{a\alpha b\beta}^{c-\gamma} \quad (3)$$

## 3. Экспоненциальная функция

$$\exp \{x_1(t_2 - t_3) + x_2(t_3 - t_1) + x_3(t_1 - t_2)\} =$$

$$= \sum_{\substack{a, b, c \\ \alpha, \beta, \gamma}} \frac{(-1)^{\alpha-b-\gamma}}{\Delta(abc)} \frac{x_1^{-a+b+c} x_2^{a-b+c} x_3^{a+b-c} t_1^{\alpha+\alpha} t_2^{b+\beta} t_3^{c+\gamma}}{[(2c+1)(a+\alpha)!(a-\alpha)!(b+\beta)!(b-\beta)!(c+\gamma)!(c-\gamma)!]^{1/2}} C_{a\alpha b\beta}^{c-\gamma} \quad (4)$$

где  $\Delta(abc)$  дается формулой 8.2(1).

## 4. Гипергеометрическая функция [46]

$$\left[ \frac{(J-2b)!(c+\gamma)!(2c+1)}{(J-2a)!(J-2c)!(c-\gamma)!(J+1)!} \right]^{1/2} \frac{(t-1)^{J-2c}}{(a-b+\gamma)!} F(\gamma-c, a-b-c; a-b+\gamma+1; t) =$$

$$= \sum_{\substack{\alpha, \beta \\ \alpha+\beta=\gamma}} C_{a\alpha b\beta}^{c\gamma} \frac{t^{b-\beta}}{[(a+\alpha)!(a-\alpha)!(b+\beta)!(b-\beta)!]^{1/2}} \quad (5)$$

## 5. $D$ -функция Вигнера

$$\left[ \frac{(2c+1)}{(J+1)!(J-2c)!} \right]^{1/2} d_{\gamma\gamma'}^c(\theta) = \sum_{\substack{\alpha, \beta \\ \alpha+\beta=\gamma}} (-1)^{b+\beta} C_{a\alpha b\beta}^{c\gamma} \frac{\left(\cos \frac{\theta}{2}\right)^{a+b+\alpha-\beta} \left(\sin \frac{\theta}{2}\right)^{a+b-\alpha+\beta}}{[(a+\alpha)!(a-\alpha)!(b+\beta)!(b-\beta)!]^{1/2}}, \quad (6)$$

где  $a-b=\gamma'$ ,  $|a-b| \leq c \leq a+b$ , в остальном  $a$  и  $b$  произвольны.

## 6. Производящая функция [101] для коэффициентов $C_{a_0 b_0}^{c_0}$

$$\frac{1}{1+u^2+v^2+w^2} = \sum_{abc} (-1)^{a-b} \left[ \frac{(J+1)!}{2c+1} \right]^{1/2} C_{a_0 b_0}^{c_0} \frac{u^{J-2a} v^{J-2b} w^{J-2c}}{[(J-2a)!(J-2b)!(J-2c)!]^{1/2}} \quad (7)$$

### 8.9. КЛАССИЧЕСКИЙ ПРЕДЕЛ И АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ КОЭФФИЦИЕНТОВ КЛЕБША—ГОРДАНА

Асимптотические формулы для коэффициентов Клебша—Гордана позволяют с хорошей точностью вычислять значения этих коэффициентов даже при не очень больших значениях индексов.

1. Асимптотическое выражение для  $C_{a\alpha b\beta}^{c\gamma}$ ,  
справедливое при  $a, c \gg b$  (Эдмондс [64], Брушард, Толхук [60])

$$C_{a\alpha b\beta}^{c\gamma} \approx [(b+\beta)! (b-\beta)! (b+\delta)! (b-\delta)!]^{1/2} \sum_s \frac{(-1)^{b-\delta-s} \left(\cos \frac{\vartheta}{2}\right)^{2s+\beta+\delta} \left(\sin \frac{\vartheta}{2}\right)^{2b-\beta-\delta-2s}}{s! (s+\beta+\delta)! (b-\beta-s)! (b-\delta-s)!} = \delta_{\gamma-\alpha, \beta} D_{\beta\delta}^b(0, \vartheta, 0), \quad (1)$$

где  $\delta = c - a$ ,  $\vartheta$  — угол между моментом  $c$  и осью  $z$ ,

$$\cos \frac{\vartheta}{2} = \sqrt{\frac{c + \gamma + \frac{1}{2}}{2c + 1}} = C_{c\gamma \frac{1}{2} \frac{1}{2}}^{c+1/2 \gamma+1/2}, \quad \sin \frac{\vartheta}{2} = \sqrt{\frac{c - \gamma + \frac{1}{2}}{2c + 1}} = C_{c\gamma \frac{1}{2} \frac{1}{2}}^{c+1/2 \gamma-1/2}, \quad \cos \vartheta = \frac{\gamma}{c + \frac{1}{2}}. \quad (2)$$

В частности,

$$C_{a\alpha b\beta}^{c\gamma} \approx \delta_{b, \gamma-\alpha} (-1)^{b-\delta} \left[ \frac{(2b)!}{(b+\delta)! (b-\delta)!} \right]^{1/2} \left(\cos \frac{\vartheta}{2}\right)^{b+\delta} \left(\sin \frac{\vartheta}{2}\right)^{b-\delta}, \quad (3)$$

$$C_{a\alpha b\beta}^{c\sigma} \approx \delta_{\beta, c-\alpha} D_{\beta c-a}^b(0, 0, 0) = \delta_{\beta, c-\alpha} \delta_{\beta, c-a}, \quad (4)$$

$$C_{a-\beta b\beta}^{c0} \approx D_{\beta c-a}^b\left(0, \frac{\pi}{2}, 0\right), \quad (5)$$

$$C_{c\gamma b0}^{c\gamma} \approx P_b(\cos \vartheta), \quad (6)$$

$$C_{a\alpha b\beta}^{c\gamma} \approx \delta_{\beta, \gamma-\alpha} \sqrt{\frac{4\pi}{2b+1}} Y_{b\beta}(\vartheta, 0), \quad (7)$$

$$C_{c\pm c b0}^{c\pm c} \approx (\pm 1)^b. \quad (8)$$

При  $a, c \gg b \gg 1$  в формуле (1) можно использовать асимптотические выражения для  $D$ -функции Вигнера (формулы 4.18(1)—4.18(4)). Тогда коэффициенты Клебша—Гордана принимают вид

$$C_{a\alpha b\beta}^{c\gamma} \approx \frac{(-1)^{\beta-\delta}}{(\beta-\delta)!} \left[ \frac{2}{\pi} \frac{(b+\beta)! (b-\beta+1)!}{(b+\delta)! (b-\delta)!} \right]^{1/2} \frac{\cos \left[ (2b+1) \frac{\vartheta}{2} - \frac{\pi}{2} \left( \beta - \delta + \frac{1}{2} \right) \right]}{\sqrt{\sin \vartheta}}, \quad (9)$$

если  $\beta \geq \delta, \beta \geq 0$ .

$$C_{a\alpha b\beta}^{c\gamma} \approx \frac{1}{(\delta-\beta)!} \left[ \frac{2}{\pi} \frac{(b+\delta)! (b-\delta+1)!}{(b+\beta)! (b-\beta)!} \right]^{1/2} \frac{\cos \left[ (2b+1) \frac{\vartheta}{2} - \frac{\pi}{2} \left( \delta - \beta + \frac{1}{2} \right) \right]}{\sqrt{\sin \vartheta}}, \quad (10)$$

если  $\delta \geq \beta, \delta \geq 0$ .

2. Асимптотическое выражение для  $C_{a\alpha b\beta}^{c\gamma}$ ,  
справедливое при  $a, b, c, \gamma \gg a+b-\gamma$  (Аким, Левин [46])

$$C_{a\alpha b\beta}^{c\gamma} \approx (-1)^{a+b-c} \frac{(c+\gamma+1)^{b-\beta}}{(a-b-\alpha)!} \left[ \frac{(2c+1)(a-b+c)! (a-\alpha)! (b+\beta)! (c-\gamma)! (c+\gamma)!}{(a+b-c)! (-a+b+c)! (a+b+c+1)! (a+\alpha)! (b-\beta)!} \right]^{1/2}. \quad (11)$$

3. Полуклассическая формула для  $C_{a\alpha b\beta}^{c\gamma}$ ,  
справедливая при  $a, b, c \gg 1$  (Понзано, Редже [89])

$$C_{a\alpha b\beta}^{c\gamma} \approx (-1)^{2b+c+\gamma+1} \sqrt{\frac{2c+1}{2\pi S}} \cos \left[ j_1 \theta_1 + j_2 \theta_2 + j_3 \theta_3 - m_2 \varphi_1 + m_1 \varphi_2 + \frac{\pi}{4} \right], \quad (12)$$

где

$$j_1 \equiv a + \frac{1}{2}, \quad j_2 \equiv b + \frac{1}{2}, \quad j_3 \equiv c + \frac{1}{2}, \quad m_1 \equiv a, \quad m_2 \equiv \beta, \quad m_3 \equiv -\gamma, \quad (13)$$

$$S^2 = \frac{1}{16} \{ -j_1^4 - j_2^4 - j_3^4 + 2(j_1^2 j_2^2 + j_1^2 j_3^2 + j_2^2 j_3^2) + 4(j_1^2 m_2 m_3 + j_2^2 m_1 m_3 + j_3^2 m_1 m_2) \} =$$

$$= -\frac{1}{16} \begin{vmatrix} 0 & j_1^2 - m_1^2 & j_2^2 - m_2^2 & 1 \\ j_1^2 - m_1^2 & 0 & j_3^2 - m_3^2 & 1 \\ j_2^2 - m_2^2 & j_3^2 - m_3^2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}. \quad (14)$$

Если  $m_1 = m_2 = m_3 = 0$ , то выражение (14) сводится к (15):

$$S^2 = \frac{1}{16} \left( a + b + c + \frac{5}{2} \right) \left( -a + b + c + \frac{1}{2} \right) \left( a - b + c + \frac{1}{2} \right) \left( a + b - c + \frac{1}{2} \right). \quad (15)$$

$$\cos \theta_i = \frac{2j_i^2 m_l + m_i (j_i^2 - j_k^2 + j_l^2)}{\sqrt{(j_i^2 - m_i^2) [4j_i^2 j_l^2 - (j_i^2 - j_k^2 + j_l^2)^2]}}, \quad (16)$$

$$\cos \varphi_i = \frac{1}{2} \frac{j_i^2 - j_k^2 - j_l^2 - 2m_k m_l}{\sqrt{(j_k^2 - m_k^2)(j_l^2 - m_l^2)}}. \quad (17)$$

Индексы  $i, k, l$  в (16), (17) образуют циклическую перестановку из 1, 2, 3. Величины, входящие в эти формулы, имеют наглядный геометрический смысл. Три стороны  $j_1 = a + \frac{1}{2}$ ,  $j_2 = b + \frac{1}{2}$  и  $j_3 = c + \frac{1}{2}$

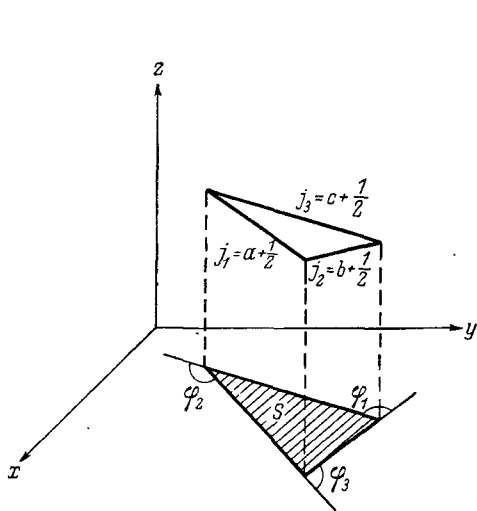


Рис. 8.1. Геометрическая интерпретация параметров, входящих в асимптотическую формулу 8.9 (12).

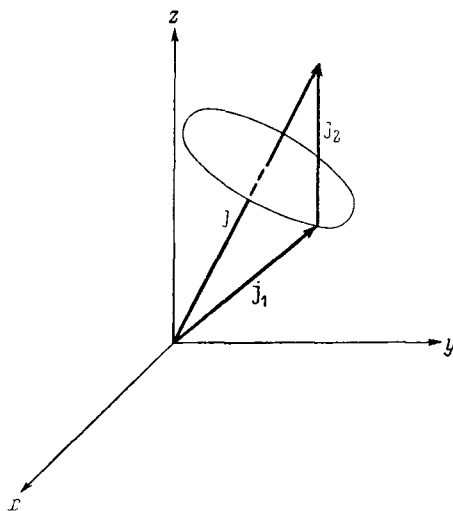


Рис. 8.2. Сложение моментов в классическом пределе.

образуют треугольник, ориентированный в пространстве так, что проекции его сторон на ось  $z$  равны  $m_1$ ,  $m_2$  и  $m_3$  соответственно (рис. 8.1).  $S$  — площадь проекции треугольника на плоскость  $x, y$ . Если построить трехгранную пирамиду с боковыми гранями, параллельными оси  $z$ , такую, что ориентированный треугольник будет одним из сечений этой пирамиды, то  $\theta_i$  будет углом между нормалью к плоскости треугольника и нормалью к боковой грани пирамиды, проходящей через сторону  $j_i$ , а  $\varphi_i$  — углом между нормальями к двум боковым граням, противолежащим стороне  $j_i$  ( $\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 = 2\pi$ ).

В частности, при  $\alpha = \beta = \gamma = 0$  имеем  $\theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = \frac{\pi}{2}$ ,

$$C_{a_0 b_0}^{c_0} \approx (-1)^{\frac{a+b-c}{2}} \left[ \frac{1 + (-1)^{a+b-c}}{2} \right] \sqrt{\frac{2c+1}{2\pi S}}. \quad (18)$$

4. Формула, определяющая вероятность сложения угловых моментов в классическом пределе (Брушард, Толхук [60]), справедливая при  $j_1, j_2, j \gg 1$

Квадрат коэффициентов Клебша—Гордана  $(C_{j_1 m_1 j_2 m_2}^{j m})^2$  есть вероятность того, что при сложении угловых моментов  $\mathbf{j}_1$  и  $\mathbf{j}_2$  с проекциями  $m_1$  и  $m_2$  соответственно образуется угловой момент  $\mathbf{j}$  с проекцией  $m$ . Эта же величина равна вероятности того, что моменты  $\mathbf{j}_1$  и  $\mathbf{j}_2$ , складывающиеся в суммарный момент  $\mathbf{j}$  с проекцией  $m$  имеют проекции  $m_1$  и  $m_2$  соответственно.

При заданном векторе  $\mathbf{j}$  и заданных длинах векторов  $\mathbf{j}_1$  и  $\mathbf{j}_2$  возможным положениям конца вектора  $\mathbf{j}_1$  соответствует окружность (рис. 8.2). Искомая вероятность пропорциональна длине участка окружности, заключенного между плоскостями  $z=m_1$  и  $z=m_1+1$ , и равна

$$(C_{j_1 m_1 j_2 m_2}^j)^2 \approx \frac{2j+1}{\pi} [-(j_1^4 + j_2^4 + j^4) + 2(j_1^2 j_2^2 + j_1^2 j^2 + j_2^2 j^2) - 4(j_1^2 m_2 m + j_2^2 m_1 m - j^2 m_1 m_2)]^{-1/2}. \quad (19)$$

Формула (19) верна только в среднем, так как при больших значениях моментов коэффициенты Клебша—Гордана быстро осциллируют (ср. 8.9 (12)).

При  $m_1=m_2=m=0$  и  $j_1+j_2-j$  — четном

$$C_{j_1 0 j_2 0}^j \approx (-1)^{\frac{j_1+j_2-j}{2}} \sqrt{\frac{2j+1}{\pi}} [-(j_1^4 + j_2^4 + j^4) + 2(j_1^2 j_2^2 + j_1^2 j^2 + j_2^2 j^2)]^{-1/4}. \quad (20)$$

### 8.10. КОРНИ КОЭФФИЦИЕНТОВ ВЕКТОРНОГО СЛОЖЕНИЯ

Коэффициенты Клебша—Гордана  $C_{\alpha\beta\gamma}^{c\gamma}$  и соответствующие им  $3jm$ -символы  $\begin{pmatrix} a & b & c \\ \alpha & \beta & -\gamma \end{pmatrix}$  обращаются в нуль, если не выполняется условие треугольника, т. е. если  $c > a+b$  или  $c < |a-b|$ , а также, если  $\gamma \neq \alpha + \beta$ . Кроме того имеются нетривиальные случаи, когда коэффициенты Клебша—Гордана и  $3jm$ -символы равны нулю, хотя условия  $a+b \geq c \geq |a-b|$  и  $\gamma = \alpha + \beta$  выполнены. Это приводит к дополнительным правилам отбора, запрещающим квантовые переходы, амплитуды которых пропорциональны соответствующим коэффициентам Клебша—Гордана.

Укажем наиболее важные случаи соотношений между индексами, при которых коэффициенты Клебша—Гордана обращаются в нуль.

- а)  $C_{a0b0}^{c0} = 0$ , если  $J \equiv a+b+c$  — нечетно;
- б)  $C_{\alpha\alpha\alpha}^{c\gamma} = 0$ ,  $C_{\alpha-\alpha c\gamma}^{\alpha\alpha} = 0$ ,  $C_{c\gamma\alpha-\alpha}^{\alpha\alpha} = 0$ , если  $J = 2a+c$  — нечетно;
- в)  $C_{\alpha J-3\alpha b J-3b}^{c-(J-3c)} = 0$ , если  $J = a+b+c$  — нечетно;
- г)  $C_{\alpha\alpha\beta\beta}^{a+b-1\gamma} = 0$  при  $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{a}{b}$ ;
- д)  $C_{\alpha\alpha\beta\beta}^{a-b+1\gamma} = 0$  при  $\frac{\alpha}{\beta} = -\frac{a+1}{b}$ ;
- е)  $C_{\alpha\alpha\beta\beta}^{c\alpha c-1} = 0$  при  $a(a+1) - b(b+1) = (a-\beta)c$ ,

в частности

$$C_{\alpha\alpha\alpha\alpha}^{c\alpha c-1} = 0;$$

- а)  $C_{\alpha\alpha\beta\beta-1}^{c\gamma} = 0$  при  $a(a+1) - c(c+1) = -(a+\gamma)b$ ,

в частности

$$C_{\alpha\alpha\beta\beta-1}^{\alpha-\alpha} = 0.$$

Ниже перечислены конкретные  $3jm$ -символы  $\begin{pmatrix} a & b & c \\ \alpha & \beta & -\gamma \end{pmatrix}$ , равные нулю по нетривиальным причинам, для которых  $J = a+b+c \leq 17$ . Они расположены в порядке возрастания  $J$  и так, что  $a \leq b \leq c$ . Остальные корни можно получить, используя простейшие свойства симметрии  $3jm$ -символов, связанные с перестановкой моментов  $a, b, c$  и изменением знака проекций  $\alpha, \beta, \gamma$  (см. 8.4 (5) и 8.4 (6)). Таким образом, каждому  $3jm$ -символу, приведенному в таблице, можно сопоставить 12, в общем случае, различных по виду  $3jm$ -символов или коэффициентов Клебша—Гордана, равных нулю. При этом связь  $3jm$ -символов с коэффициентами Клебша—Гордана имеет вид

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ \alpha & \beta & -\gamma \end{pmatrix} = (-1)^{a-b+\gamma} \frac{1}{\sqrt{2c+1}} C_{\alpha\alpha\beta\beta}^{c\gamma}.$$



8.11. СВЯЗЬ КОЭФФИЦИЕНТОВ КЛЕБША—ГОРДАНА И  $3jm$ -СИМВОЛОВ С ОБОЗНАЧЕНИЯМИ ДРУГИХ АВТОРОВ

$$C_{j_1 m_1 j_2 m_2}^{j m} = \left\{ \begin{array}{l} S_{j_1 m_1 j_2}^{j_1 j_2} - \text{Вигнер [43]}, \\ A_{m_1 m_2}^{j_1 j_1 j_2} - \text{Эккарт [15]}, \\ C_{m_1 m_2}^{j_1} - \text{Ван-дер-Верден [40]}, \\ (j_1 j_2 m_1 m_2 | j_1 j_2 j m) - \text{Кондон и Шортли [10]}, \\ C_{j_1 m_1}^{j_1 j_2} (m_1 m_2) - \text{Фок [68]}, \\ X(j, m, j_1, j_2, m_1) - \text{Бойс [59]}, \\ C(j m; m_1 m_2) - \text{Блатт, Вайскопф [7]}, \\ C_{m_1 m_2}^{j_1 j_2 j} - \text{Биденхарн [115]}, \\ C(j_1 j_2 j, m_1 m_2) - \text{Роуз [30]}, \\ \begin{bmatrix} j_1 & j_2 & j \\ m_1 & m_2 & m \end{bmatrix} - \text{Юцис, Бандвайтис [45]}, \\ \langle j_1 m_1 j_2 m_2 | (j_1 j_2) j m \rangle - \text{Фано [66]}. \end{array} \right.$$

$$\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} = \left\{ \begin{array}{l} (-1)^{-j_1+j_2+j_3} V(j_1 j_2 j_3, m_1 m_2 m_3) - \text{Рака [91]}, \\ (-1)^{-j_1+j_2+j_3} \bar{V}(j_1 j_2 j_3, m_1 m_2 m_3) - \text{Фано, Рака [18]}, \\ (-1)^{j_1-j_2+j_3} S_{j_1 m_1 j_2 m_2 j_3 m_3} - \text{Ландау, Лифшиц [25]}, \\ (-1)^{j_1-j_2+j_3} \langle j_1 m_1, j_2 m_2, j_3 m_3 | 0 \rangle - \text{Фано [66]}, \\ X(j_1 j_2 j_3, m_1 m_2 m_3) - \text{Швингер [101]}, \\ (-1)^{j_1-j_2+j_3} U(j_1 j_2 m_1 m_2 | j_3 - m_3) - \text{Любарский [26]}, \\ (j_1 j_2 j_3)_{m_1 m_2 m_3} - \text{Шарп [102]}. \end{array} \right.$$

## 8.12. АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ТАБЛИЦЫ КОЭФФИЦИЕНТОВ КЛЕБША—ГОРДАНА

Ниже приведены таблицы алгебраических формул для коэффициентов Клебша—Гордана  $C_{a b \beta}^{c \gamma}$  с  $b=1/2, 1, 3/2, 2, 5/2, 3, 7/2, 4, 9/2, 5$ . При  $b=3, 7/2, 4, 9/2, 5$  даны формулы только для тех коэффициентов, у которых  $\beta \geq 0$ . Значения  $C_{a b \beta}^{c \gamma}$  с  $\beta < 0$  могут быть получены из приведенных формул с помощью свойства симметрии

$$C_{\sigma \sigma \beta}^{c \gamma} = (-1)^{a+b-c} C_{a-\sigma b-\beta}^{c-\gamma}.$$

Алгебраические таблицы для коэффициентов Клебша—Гордана имеются также в следующих работах: а) коэффициенты с  $b=1/2, 1, 3/2, 2$  [10],  $b=5/2$  [121, 125],  $b=3$  [117, 130],  $b=7/2, 4, 9/2, 5$  [126].

ТАБЛИЦА 8.1

 $C_{\alpha\alpha}^{\gamma}$ 

$c$	$\beta = 1/2$	$\beta = -1/2$
$a + 1/2$	$\left[ \frac{c + \gamma}{2c} \right]^{1/2}$	$\left[ \frac{c - \gamma}{2c} \right]^{1/2}$
$a - 1/2$	$-\left[ \frac{c - \gamma + 1}{2c + 2} \right]^{1/2}$	$\left[ \frac{c + \gamma + 1}{2c + 2} \right]^{1/2}$

ТАБЛИЦА 8.2

 $C_{\alpha\alpha}^{\gamma}$ 

$c$	$\beta = 1$	$\beta = 0$	$\beta = -1$
$a + 1$	$\left[ \frac{(c + \gamma - 1)(c + \gamma)}{(2c - 1)2c} \right]^{1/2}$	$\left[ \frac{(c + \gamma)(c - \gamma)}{(2c - 1)c} \right]^{1/2}$	$\left[ \frac{(c - \gamma - 1)(c - \gamma)}{(2c - 1)2c} \right]^{1/2}$
$a$	$-\left[ \frac{(c + \gamma)(c - \gamma + 1)}{2c(c + 1)} \right]^{1/2}$	$\frac{\gamma}{[c(c + 1)]^{1/2}}$	$\left[ \frac{(c + \gamma + 1)(c - \gamma)}{2c(c + 1)} \right]^{1/2}$
$a - 1$	$\left[ \frac{(c - \gamma + 1)(c - \gamma + 2)}{(2c + 2)(2c + 3)} \right]^{1/2}$	$-\left[ \frac{(c + \gamma + 1)(c - \gamma + 1)}{(c + 1)(2c + 3)} \right]^{1/2}$	$\left[ \frac{(c + \gamma + 2)(c - \gamma + 1)}{(2c + 2)(2c + 3)} \right]^{1/2}$

ТАБЛИЦА 8.3

 $C_{\alpha\alpha}^{\gamma, \beta}$ 

$c$	$\beta = 3/2$	$\beta = 1/2$	$\beta = -1/2$
$a + 3/2$	$\left[ \frac{(c + \gamma - 2)(c + \gamma - 1)(c + \gamma)}{(2c - 2)(2c - 1)2c} \right]^{1/2}$	$\left[ \frac{3(c + \gamma - 1)(c + \gamma)(c - \gamma)}{(2c - 2)(2c - 1)2c} \right]^{1/2}$	$\left[ \frac{3(c + \gamma)(c - \gamma - 1)(c - \gamma)}{(2c - 2)(2c - 1)2c} \right]^{1/2}$
$a + 1/2$	$-\left[ \frac{3(c + \gamma - 1)(c + \gamma)(c - \gamma + 1)}{(2c - 1)2c(2c + 2)} \right]^{1/2}$	$-\left[ \frac{(c - 3\gamma + 1) \left[ \frac{c + \gamma}{(2c - 1)2c(2c + 2)} \right]^{1/2}}{(c + 3\gamma + 1) \left[ \frac{c - \gamma}{(2c - 1)2c(2c + 2)} \right]^{1/2}} \right]^{1/2}$	$\left[ \frac{(c + 3\gamma + 1) \left[ \frac{c - \gamma}{(2c - 1)2c(2c + 2)} \right]^{1/2}}{-(c - 3\gamma) \left[ \frac{c + \gamma + 1}{2c(2c + 2)(2c + 3)} \right]^{1/2}} \right]^{1/2}$
$a - 1/2$	$\left[ \frac{3(c + \gamma)(c - \gamma + 1)(c - \gamma + 2)}{2c(2c + 2)(2c + 3)} \right]^{1/2}$	$-\left[ \frac{3(c + \gamma + 1)(c - \gamma + 1)(c - \gamma + 2)}{(2c + 2)(2c + 3)(2c + 4)} \right]^{1/2}$	$-\left[ \frac{(c - \gamma + 1)(c - \gamma + 2)(c - \gamma + 3)}{(2c + 2)(2c + 3)(2c + 4)} \right]^{1/2}$
$a - 3/2$	$-\left[ \frac{(c - \gamma + 1)(c - \gamma + 2)(c - \gamma + 3)}{(2c + 2)(2c + 3)(2c + 4)} \right]^{1/2}$		

ТАБЛИЦА 8.3 (продолжение)

 $\beta = -3/2$ 

$c$	$\beta = 2$	$\beta = 1$
$a + 3/2$	$\left[ \frac{(c - \gamma - 2)(c - \gamma - 1)(c - \gamma)}{(2c - 2)(2c - 1)2c} \right]^{1/2}$	$\left[ \frac{(c + \gamma - 2)(c + \gamma - 1)(c + \gamma)}{(2c - 3)(2c - 2)(2c - 1)c} \right]^{1/2}$
$a + 1/2$	$\left[ \frac{3(c + \gamma + 1)(c - \gamma - 1)(c - \gamma)}{(2c - 1)2c(2c + 2)} \right]^{1/2}$	$-\left[ \frac{(c + \gamma - 2)(c + \gamma - 1)(c + \gamma)}{(2c - 2)(2c - 1)c(c + 1)} \right]^{1/2}$
$a - 1/2$	$\left[ \frac{3(c + \gamma + 1)(c + \gamma + 2)(c - \gamma)}{2c(2c + 2)(2c + 3)} \right]^{1/2}$	$-\left[ \frac{(c + \gamma - 1)(c - \gamma + 1)(c - \gamma + 2)}{2(2c - 1)c(c + 1)(c - \gamma + 3)} \right]^{1/2}$
$a - 3/2$	$\left[ \frac{(c + \gamma + 1)(c + \gamma + 2)(c + \gamma + 3)}{(2c + 2)(2c + 3)(2c + 4)} \right]^{1/2}$	$-\left[ \frac{(c - \gamma + 1)(c - \gamma + 2)(c - \gamma + 3)(c - \gamma + 4)}{(2c + 2)(2c + 3)(2c + 4)(2c + 5)} \right]^{1/2}$

ТАБЛИЦА 8.4

 $C_{\alpha\alpha}^{\gamma, \beta}$ 

$c$	$\beta = 2$	$\beta = 1$
$a + 2$	$\left[ \frac{(c + \gamma - 3)(c + \gamma - 2)(c + \gamma - 1)(c + \gamma)}{(2c - 3)(2c - 2)(2c - 1)2c} \right]^{1/2}$	$\left[ \frac{(c + \gamma - 2)(c + \gamma - 1)(c + \gamma)}{(2c - 3)(c - 1)(2c - 1)c} \right]^{1/2}$
$a + 1$	$-\left[ \frac{(c + \gamma - 2)(c + \gamma - 1)(c + \gamma + 1)}{(2c - 2)(2c - 1)c(c + 1)} \right]^{1/2}$	$-\left[ \frac{(c - 2\gamma + 1) \left[ \frac{(c + \gamma - 1)(c + \gamma)}{(2c - 2)(2c - 1)c(c + 1)} \right]^{1/2}}{(1 - 2\gamma) \left[ \frac{3(c + \gamma)(c - \gamma + 1)}{2(2c - 1)c(c + 1)(2c + 3)} \right]^{1/2}} \right]^{1/2}$
$a$	$\left[ \frac{3(c + \gamma - 1)(c + \gamma)(c - \gamma + 1)(c - \gamma + 2)}{2(2c - 1)c(c + 1)(c - \gamma + 3)} \right]^{1/2}$	$\left[ \frac{(c + 2\gamma) \left[ \frac{(c - \gamma + 1)(c - \gamma + 2)}{2(2c - 1)c(c + 1)(2c + 3)} \right]^{1/2}}{(c + 2\gamma) \left[ \frac{c(c + 1)(2c + 3)(2c + 4)}{(c + \gamma + 1)(c - \gamma + 1)(c - \gamma + 2)(2c + 4)} \right]^{1/2}} \right]^{1/2}$
$a - 1$	$-\left[ \frac{c(c + 1)(2c + 3)(2c + 4)}{(c - \gamma + 1)(c - \gamma + 2)(c - \gamma + 3)(c - \gamma + 4)} \right]^{1/2}$	$-\left[ \frac{(c + 2\gamma) \left[ \frac{(c - \gamma + 1)(c - \gamma + 2)}{(c + 1)(2c + 3)(2c + 4)} \right]^{1/2}}{(c + \gamma + 1)(c - \gamma + 1)(c - \gamma + 2)(2c + 5)} \right]^{1/2}$
$a - 2$	$\left[ \frac{(c - \gamma + 1)(c - \gamma + 2)(c - \gamma + 3)(c - \gamma + 4)}{(2c + 2)(2c + 3)(2c + 4)(2c + 5)} \right]^{1/2}$	



ТАБЛИЦА 8.4 (продолжение)

c	$\beta = 0$	$\beta = -1$	$\beta = -2$
a + 2	$\left[ \frac{3(c + \gamma - 1)(c + \gamma)(c - \gamma - 1)(c - \gamma)}{(2c - 3)(2c - 2)(2c - 1)c} \right]^{1/2}$	$\left[ \frac{(c + \gamma)(c - \gamma - 2)(c - \gamma - 1)(c - \gamma)}{(2c - 3)(c - 1)(2c - 1)c} \right]^{1/2}$	$\left[ \frac{(c - \gamma - 3)(c - \gamma - 2)(c - \gamma - 1)(c - \gamma)}{(2c - 3)(2c - 2)(2c - 1)2c} \right]^{1/2}$
a + 1	$\gamma \left[ \frac{3(c + \gamma)(c - \gamma)}{3\gamma^2 - c(c + 4)} \right]^{1/2}$	$(c + 2\gamma + 1) \left[ \frac{(c - \gamma - 1)(c - \gamma)}{(2c - 2)(2c - 1)c(c + 1)} \right]^{1/2}$	$\left[ \frac{(c + \gamma + 1)(c - \gamma - 2)(c - \gamma - 1)(c - \gamma)}{(2c - 2)(2c - 1)c(c + 1)} \right]^{1/2}$
a	$\frac{1}{3\gamma^2 - c(c + 4)} \left[ \frac{3(c + \gamma)(c - \gamma)}{3(c + \gamma + 1)(2c + 3)(c + 2)} \right]^{1/2}$	$(2\gamma + 1) \left[ \frac{3(c + \gamma + 1)(c - \gamma)}{2(2c - 1)c(c + 1)(2c + 3)} \right]^{1/2}$	$\left[ \frac{3(c + \gamma + 1)(c - \gamma + 2)(c - \gamma - 1)(c - \gamma)}{2(2c - 1)c(c + 1)(2c + 3)} \right]^{1/2}$
a - 1	$-\gamma \left[ \frac{c(c + 1)(2c + 3)(c + 2)}{3(c + \gamma + 1)(c - \gamma + 4)(c - \gamma + 1)} \right]^{1/2}$	$-(c - 2\gamma) \left[ \frac{c(c + 1)(2c + 3)(c + 2)}{c(c + 1)(2c + 3)(2c + 4)} \right]^{1/2}$	$\left[ \frac{c(c + 1)(2c + 3)(2c + 4)}{c(c + 1)(2c + 3)(2c + 4)} \right]^{1/2}$
a - 2	$\left[ \frac{3(c + \gamma + 1)(c + \gamma + 2)(c - \gamma + 1)(c - \gamma + 2)}{(c + 1)(2c + 3)(2c + 4)(2c + 5)} \right]^{1/2}$	$-\left[ \frac{(c + \gamma + 1)(c + \gamma + 2)(c + \gamma + 3)(c - \gamma + 1)}{(c + 1)(2c + 3)(c + 2)(2c + 5)} \right]^{1/2}$	$\left[ \frac{(c + \gamma + 1)(c + \gamma + 2)(c + \gamma + 3)(c - \gamma + 4)}{(c + \gamma + 1)(c + \gamma + 2)(c + \gamma + 3)(c + \gamma + 4)} \right]^{1/2}$

ТАБЛИЦА 8.5  
C $\alpha^2\beta$

c	$\beta = 5/2$	$\beta = 3/2$
a + 5/2	$\left[ \frac{(c + \gamma)(2c - 5)}{(c + \gamma - 5)(2c)I} \right]^{1/2}$	$\left[ \frac{5(c + \gamma)(c - \gamma)(2c - 5)I}{(c + \gamma - 4)I(2c)I} \right]^{1/2}$
a + 3/2	$-\left[ \frac{5(c + \gamma)(c - \gamma + 1)(2c + 1)(2c - 4)I}{(c + \gamma - 4)I(2c + 2)I} \right]^{1/2}$	$-(3c - 5\gamma + 3) \left[ \frac{(c + \gamma - 3)I(2c + 2)I}{(c + \gamma - 1)(2c + 1)(2c - 4)I} \right]^{1/2}$
a + 1/2	$\left[ \frac{10(c + \gamma)(c - \gamma + 2)(2c + 1)(2c - 3)I}{(c + \gamma - 3)I(c - \gamma)I(2c + 3)I} \right]^{1/2}$	$(c - 5\gamma + 4) \left[ \frac{2(c + \gamma)(c - \gamma + 1)(2c + 1)(2c - 3)I}{(c + \gamma - 2)I(2c + 3)I} \right]^{1/2}$
a - 1/2	$-\left[ \frac{10(c + \gamma)(c - \gamma + 3)(2c + 1)(2c - 2)I}{(c + \gamma - 2)I(c - \gamma)I(2c + 4)I} \right]^{1/2}$	$(c + 5\gamma - 3) \left[ \frac{2(c + \gamma)(c - \gamma + 2)(2c + 1)(2c - 2)I}{(c - \gamma)I(2c + 4)I} \right]^{1/2}$
a - 3/2	$\left[ \frac{5(c + \gamma)(c - \gamma + 4)(2c + 1)(2c - 1)I}{(c - \gamma)I(2c + 5)I} \right]^{1/2}$	$-(3c + 5\gamma) \left[ \frac{(c - \gamma)I(2c + 5)I}{(c - \gamma + 3)I(2c + 1)(2c - 1)I} \right]^{1/2}$
a - 5/2	$-\left[ \frac{(c - \gamma + 5)(2c + 1)I}{(c - \gamma)I(2c + 6)I} \right]^{1/2}$	$\left[ \frac{5(c + \gamma + 1)(c - \gamma + 4)(2c + 1)I}{(c - \gamma)I(2c + 6)I} \right]^{1/2}$

c	$\beta = 1/2$	$\beta = -1/2$
a + 5/2	$\left[ \frac{10(c + \gamma)(c - \gamma)I(2c - 5)I}{(c + \gamma - 3)I(c - \gamma - 2)I(2c)I} \right]^{1/2}$	$\left[ \frac{10(c + \gamma)I(c - \gamma)I(2c - 5)I}{(c + \gamma - 2)I(c - \gamma - 3)I(2c)I} \right]^{1/2}$
a + 3/2	$-(c - 5\gamma + 1) \left[ \frac{2(c + \gamma)(2c + 1)(2c - 4)I}{(c + \gamma - 2)I(2c + 2)I} \right]^{1/2}$	$(c + 5\gamma + 1) \left[ \frac{2(c + \gamma)(c - \gamma)I(2c + 1)(2c - 4)I}{(c - \gamma - 2)I(2c + 2)I} \right]^{1/2}$
a + 1/2	$2\{3\gamma(2\gamma - 1) - (c + \gamma - 1)(c + \gamma + 1)\} \left[ \frac{(c - \gamma + 1)(2c + 1)(2c - 3)I}{(2c + 3)I} \right]^{1/2}$	$2\{3\gamma(2\gamma + 1) - (c - \gamma - 1)(c - \gamma + 1)\} \left[ \frac{(c - \gamma)(2c + 1)(2c - 3)I}{(2c + 3)I} \right]^{1/2}$
a - 1/2	$-2\{3\gamma(2\gamma - 1) - (c - \gamma)(c - \gamma + 2)\} \left[ \frac{(c - \gamma + 1)(2c + 1)(2c - 4)I}{(2c + 4)I} \right]^{1/2}$	$2\{3\gamma(2\gamma + 1) - (c + \gamma)(c + \gamma + 2)\} \left[ \frac{(c + \gamma + 1)(2c + 1)(2c - 4)I}{(2c + 4)I} \right]^{1/2}$
a - 3/2	$(c + 5\gamma) \left[ \frac{2(c + \gamma + 1)(c - \gamma + 2)I}{(c - \gamma)I(2c + 5)I} \right]^{1/2}$	$(c - 5\gamma) \left[ \frac{2(c + \gamma + 2)I(c - \gamma + 1)(2c + 5)I}{(c + \gamma)I(2c + 5)I} \right]^{1/2}$
a - 5/2	$-\left[ \frac{10(c + \gamma + 2)(c - \gamma + 3)I(2c + 1)I}{(c + \gamma)I(c - \gamma)I(2c + 6)I} \right]^{1/2}$	$\left[ \frac{10(c + \gamma + 3)I(c - \gamma + 2)I(2c + 1)I}{(c + \gamma)I(c - \gamma)I(2c + 6)I} \right]^{1/2}$

ТАБЛИЦА 8.5 (продолжение)

$c$	$\beta = -3/2$	$\beta = -5/2$
$a + 5/2$		$\left[ \frac{(c + \gamma)!(2c - 5)!}{(c - \gamma - 4)!(2c)!} \right]^{1/2}$
$a + 3/2$	$(3c + 5\gamma + 3) \left[ \frac{(c - \gamma)!(2c + 1)(2c - 4)!}{(c - \gamma - 3)!(2c + 2)!} \right]^{1/2}$	$\left[ \frac{5(c + \gamma + 1)(c - \gamma)!(2c + 1)(2c - 4)!}{(c - \gamma - 4)!(2c + 2)!} \right]^{1/2}$
$a + 1/2$	$(c + 5\gamma + 4) \left[ \frac{2(c + \gamma + 1)(c - \gamma)!(2c + 1)(2c - 3)!}{(c - \gamma - 2)!(2c + 3)!} \right]^{1/2}$	$\left[ \frac{10(c + \gamma + 2)(c - \gamma)!(2c + 1)(2c - 3)!}{(c + \gamma)!(c - \gamma - 3)!(2c + 3)!} \right]^{1/2}$
$a - 1/2$	$-(c - 5\gamma - 3) \left[ \frac{2(c + \gamma + 2)(c - \gamma)(2c + 1)(2c - 2)!}{(c + \gamma)!(2c + 4)!} \right]^{1/2}$	$\left[ \frac{10(c + \gamma + 3)(c - \gamma)!(2c + 1)(2c - 2)!}{(c + \gamma)!(c - \gamma - 2)!(2c + 4)!} \right]^{1/2}$
$a - 3/2$	$-(3c - 5\gamma) \left[ \frac{(c + \gamma + 3)(2c + 1)(2c - 4)!}{(c + \gamma)!(2c + 5)!} \right]^{1/2}$	$\left[ \frac{5(c + \gamma + 4)(c - \gamma)(2c + 1)(2c - 4)!}{(c + \gamma)!(2c + 5)!} \right]^{1/2}$
$a - 5/2$	$-\left[ \frac{5(c + \gamma + 4)(c - \gamma + 1)(2c + 1)!}{(c + \gamma)!(2c + 6)!} \right]^{1/2}$	$\left[ \frac{(c + \gamma + 5)!(2c + 5)!}{(c + \gamma)!(2c + 6)!} \right]^{1/2}$

ТАБЛИЦА 8.6

СЧ  
0 $\alpha$ 3 $\beta$ 

$c$	$\beta = 3$	$\beta = 2$
$a + 3$	$\left[ \frac{(c + \gamma)!(2c - 6)!}{(c + \gamma - 6)!(2c)!} \right]^{1/2}$	
$a + 2$	$-\left[ \frac{6(c + \gamma)!(c - \gamma + 1)(2c + 1)(2c - 5)!}{(c + \gamma - 5)!(2c + 2)!} \right]^{1/2}$	$\left[ \frac{6(c + \gamma)!(c - \gamma)(2c - 6)!}{(c + \gamma - 5)!(2c)!} \right]^{1/2}$
$a + 1$	$\left[ \frac{15(c + \gamma)!(c - \gamma + 2)(2c + 4)(2c - 4)!}{(c + \gamma - 4)!(c - \gamma)!(2c + 3)!} \right]^{1/2}$	$-2(2c - 3\gamma + 2) \left[ \frac{(c + \gamma)!(2c + 1)(2c - 5)!}{(c + \gamma - 4)!(2c + 2)!} \right]^{1/2}$
$a$	$-2 \left[ \frac{5(c + \gamma)!(c - \gamma + 3)(2c + 4)(2c - 3)!}{(c + \gamma - 3)!(c - \gamma)!(2c + 4)!} \right]^{1/2}$	$(c - 3\gamma + 3) \left[ \frac{10(c + \gamma)!(c - \gamma + 1)(2c + 1)(2c - 4)!}{(c + \gamma - 3)!(2c + 3)!} \right]^{1/2}$
$a - 1$	$\left[ \frac{15(c + \gamma)!(c - \gamma + 4)(2c + 1)(2c - 2)!}{(c + \gamma - 2)!(c - \gamma)!(2c + 5)!} \right]^{1/2}$	$2(\gamma - 4) \left[ \frac{30(c + \gamma)!(c - \gamma + 2)(2c + 1)(2c - 3)!}{(c + \gamma - 2)!(c - \gamma)!(2c + 4)!} \right]^{1/2}$
$a - 2$	$-\left[ \frac{6(c + \gamma)!(c - \gamma + 5)(2c + 1)(2c - 4)!}{(c - \gamma)!(2c + 6)!} \right]^{1/2}$	$-(c + 3\gamma - 2) \left[ \frac{10(c + \gamma)(c - \gamma + 3)(2c + 1)(2c - 2)!}{(c - \gamma)!(2c + 5)!} \right]^{1/2}$
$a - 3$	$\left[ \frac{(c - \gamma + 6)!(2c + 1)!}{(c - \gamma)!(2c + 7)!} \right]^{1/2}$	$2(2c + 3\gamma) \left[ \frac{(c - \gamma + 4)!(2c + 1)(2c - 4)!}{(c - \gamma)!(2c + 6)!} \right]^{1/2}$ $-\left[ \frac{6(c + \gamma + 4)(c - \gamma + 5)(2c + 1)!}{(c - \gamma)!(2c + 7)!} \right]^{1/2}$

ТАБЛИЦА 8.6 (продолжение)

$c$	$\beta = 1$	$\beta = 0$
$a + 3$	$\left[ \frac{15(c + \gamma)(c - \gamma)(2c - 6)!}{(c + \gamma - 4)(c - \gamma - 2)(2c)!} \right]^{1/2}$	$2 \left[ \frac{5(c + \gamma)(c - \gamma)(2c - 6)!}{(c + \gamma - 3)(c - \gamma - 3)(2c)!} \right]^{1/2}$
$a + 2$	$-(c - 3\gamma + 4) \left[ \frac{10(c + \gamma)(c - \gamma)(2c + 1)(2c - 5)!}{(c + \gamma - 3)(2c + 2)!} \right]^{1/2}$	$2\gamma \left[ \frac{30(c + \gamma)(c - \gamma)(2c + 1)(2c - 5)!}{(c + \gamma - 2)(c - \gamma - 2)(2c + 2)!} \right]^{1/2}$
$a + 1$	$-((c - 1)(c + 6) + 5(\gamma - 1)(2c - 3\gamma)) \left[ \frac{(c + \gamma)(2c + 1)(2c - 4)!}{(c + \gamma - 2)(2c + 3)!} \right]^{1/2}$	$-2((c - 1)(c + 4) - 5\gamma^2) \left[ \frac{3(c + \gamma)(c - \gamma)(2c + 1)(2c - 4)!}{(2c + 3)!} \right]^{1/2}$
$a$	$2(c(c + 1) - 5\gamma(\gamma - 1) - 2) \left[ \frac{3(c + \gamma)(c - \gamma + 1)(2c + 4)!}{(2c + 4)!} \right]^{1/2}$	$-4\gamma(3c(c + 1) - 5\gamma^2 - 4) \left[ \frac{(2c + 1)(2c - 3)!}{(2c + 4)!} \right]^{1/2}$
$a - 1$	$-((c + 2)(c - 5) - 5(\gamma - 1)(2c + 3\gamma + 2)) \left[ \frac{(c - \gamma + 2)(2c + 1)(2c - 2)!}{(c - \gamma)! (2c + 5)!} \right]^{1/2}$	$2((c + 1)^2 - 5\gamma^2 - 4) \left[ \frac{3(c + \gamma + 1)(c - \gamma + 1)(2c + 1)(2c - 2)!}{(2c + 5)!} \right]^{1/2}$
$a - 2$	$-(c + 3\gamma) \left[ \frac{10(c + \gamma + 1)(c - \gamma + 3)(2c + 4)(2c - 1)!}{(c - \gamma)! (2c + 6)!} \right]^{1/2}$	$2\gamma \left[ \frac{30(c + \gamma + 2)(c - \gamma + 2)(2c + 1)(2c - 1)!}{(c + \gamma)(c - \gamma)(2c + 6)!} \right]^{1/2}$
$a - 3$	$\left[ \frac{15(c + \gamma + 2)(c - \gamma + 4)(2c + 4)!}{(c + \gamma)(c - \gamma)(2c + 7)!} \right]^{1/2}$	$-2 \left[ \frac{5(c + \gamma + 3)(c - \gamma + 3)(2c + 1)!}{(c + \gamma)(c - \gamma)(2c + 7)!} \right]^{1/2}$

ТАБЛИЦА 8.7

 $C_{\alpha\gamma}^{1/2}$ 

$c$	$\beta = 7/2$	$\beta = 5/2$
$a + 7/2$	$\left[ \frac{(c + \gamma)(2c - 7)!}{(c + \gamma - 7)(2c)!} \right]^{1/2}$	$\left[ \frac{7(c + \gamma)(c - \gamma)(2c - 7)!}{(c + \gamma - 6)(2c)!} \right]^{1/2}$
$a + 5/2$	$-\left[ \frac{7(c + \gamma)(c - \gamma + 1)(2c + 4)(2c - 6)!}{(c + \gamma - 6)(2c + 2)!} \right]^{1/2}$	$-(5c - 7\gamma + 5) \left[ \frac{(c + \gamma)(2c - 6)!}{(c + \gamma - 5)(2c + 2)!} \right]^{1/2}$
$a + 3/2$	$\left[ \frac{21(c + \gamma)(c - \gamma + 2)(2c + 1)(2c - 5)!}{(c + \gamma - 5)(c - \gamma)(2c + 3)!} \right]^{1/2}$	$(3c - 7\gamma + 8) \left[ \frac{3(c + \gamma)(c - \gamma + 1)(2c + 1)(2c - 5)!}{(c + \gamma - 4)(2c + 3)!} \right]^{1/2}$
$a + 1/2$	$-\left[ \frac{35(c + \gamma)(c - \gamma + 3)(2c + 4)(2c - 4)!}{(c + \gamma - 4)(c - \gamma)(2c + 4)!} \right]^{1/2}$	$-(c - 7\gamma + 9) \left[ \frac{5(c + \gamma)(c - \gamma + 2)(2c + 1)(2c - 4)!}{(c + \gamma - 3)(c - \gamma)(2c + 4)!} \right]^{1/2}$
$a - 1/2$	$\left[ \frac{35(c + \gamma)(c - \gamma + 4)(2c + 4)(2c - 3)!}{(c + \gamma - 3)(c - \gamma)(2c + 5)!} \right]^{1/2}$	$-(c + 7\gamma - 8) \left[ \frac{5(c + \gamma)(c - \gamma + 3)(2c + 1)(2c - 3)!}{(c + \gamma - 2)(c - \gamma)(2c + 5)!} \right]^{1/2}$
$a - 3/2$	$-\left[ \frac{21(c + \gamma)(c - \gamma + 5)(2c + 1)(2c - 2)!}{(c + \gamma - 2)(c - \gamma)(2c + 6)!} \right]^{1/2}$	$(3c + 7\gamma - 5) \left[ \frac{3(c + \gamma)(c - \gamma + 4)(2c + 1)(2c - 2)!}{(c - \gamma)(2c + 6)!} \right]^{1/2}$
$a - 5/2$	$\left[ \frac{7(c + \gamma)(c - \gamma + 6)(2c + 4)(2c - 1)!}{(c - \gamma)(2c + 7)!} \right]^{1/2}$	$-(5c + 7\gamma) \left[ \frac{(c - \gamma + 5)(2c + 1)(2c - 1)!}{(c - \gamma)(2c + 7)!} \right]^{1/2}$
$a - 7/2$	$-\left[ \frac{(c - \gamma + 7)(2c + 8)!}{(c - \gamma)(2c + 8)!} \right]^{1/2}$	$\left[ \frac{7(c + \gamma + 1)(c - \gamma + 6)(2c + 1)!}{(c - \gamma)(2c + 8)!} \right]^{1/2}$

ТАБЛИЦА 8.7 (продолжение)

$c$	$\beta = 3/2$	$c$	$\beta = 1/2$
$a + 7/2$	$\left[ \frac{24(c+\gamma)! (c-\gamma)! (2c-7)!}{(c+\gamma-5)! (c-\gamma-2)! (2c)!} \right]^{1/2}$	$a + 7/2$	$\left[ \frac{35(c+\gamma)! (c-\gamma)! (2c-7)!}{(c+\gamma-4)! (c-\gamma-3)! (2c)!} \right]^{1/2}$
$a + 5/2$	$-(3c-7\gamma+3) \left[ \frac{3(c+\gamma)! (c-\gamma)! (2c+4)! (2c-6)!}{(c+\gamma-4)! (2c+2)!} \right]^{1/2}$	$a + 5/2$	$-(c-7\gamma+4) \left[ \frac{5(c+\gamma)! (c-\gamma)! (2c+4)! (2c-6)!}{(c+\gamma-3)! (c-\gamma-2)! (2c+2)!} \right]^{1/2}$
$a + 3/2$	$\{(c-7\gamma+12)(c-3\gamma+1) - 8\gamma(c-2)\} \left[ \frac{(c+\gamma)! (2c+1)! (2c-5)!}{(c+\gamma-3)! (2c+3)!} \right]^{1/2}$	$a + 3/2$	$-\{(c-7\gamma+4)(c+\gamma-2) + 4\gamma(2c-3)\} \left[ \frac{15(c+\gamma)! (c-\gamma+1)! (2c+4)! (2c-4)!}{(c+\gamma-2)! (2c+4)!} \right]^{1/2}$
$a + 1/2$	$\{(c-7\gamma+2)(c+\gamma-3) + 4\gamma(2c-3)\} \left[ \frac{15(c+\gamma)! (c-\gamma+1)! (2c+4)! (2c-4)!}{(c+\gamma-2)! (2c+4)!} \right]^{1/2}$	$a + 1/2$	$\{3(c-5\gamma+2)\{(c+1)(c-1) - 5\gamma^2\} - 10\gamma(4\gamma^2-1)\} \left[ \frac{(c+\gamma)! (2c+4)! (2c-4)!}{(2c+4)!} \right]^{1/2}$
$a - 1/2$	$-\{(c+7\gamma-1)(c-\gamma+4) - 4\gamma(2c+5)\} \left[ \frac{15(c+\gamma)! (c-\gamma+2)! (2c+1)! (2c-3)!}{(c-\gamma)! (2c+5)!} \right]^{1/2}$	$a - 1/2$	$\{3(c+5\gamma-1)\{(c+2)c - 5\gamma^2\} + 10\gamma(4\gamma^2-1)\} \left[ \frac{(c-\gamma+1)! (2c+1)! (2c-3)!}{(2c+5)!} \right]^{1/2}$
$a - 3/2$	$-\{(c+7\gamma-11)(c+3\gamma) + 8\gamma(c+3)\} \left[ \frac{(c-\gamma+3)! (2c+1)! (2c-2)!}{(c-\gamma)! (2c+6)!} \right]^{1/2}$	$a - 3/2$	$-\{(c+7\gamma)(c-\gamma+2) + 4\gamma(2c+5)\} \left[ \frac{15(c+\gamma+1)(c-\gamma+2)! (2c+1)! (2c-2)!}{(c-\gamma)! (2c+6)!} \right]^{1/2}$
$a - 5/2$	$(3c+7\gamma) \left[ \frac{3(c+\gamma+1)(c-\gamma+4)! (2c+1)! (2c-1)!}{(c-\gamma)! (2c+7)!} \right]^{1/2}$	$a - 5/2$	$-(c+7\gamma) \left[ \frac{5(c+\gamma+2)! (c-\gamma+3)! (2c+1)! (2c-1)!}{(c+\gamma)! (c-\gamma)! (2c+7)!} \right]^{1/2}$
$a - 7/2$	$-\left[ \frac{24(c+\gamma+2)! (c-\gamma+5)! (2c+1)!}{(c+\gamma)! (c-\gamma)! (2c+8)!} \right]^{1/2}$	$a - 7/2$	$\left[ \frac{35(c+\gamma+3)! (c-\gamma+4)! (2c+1)!}{(c+\gamma)! (c-\gamma)! (2c+8)!} \right]^{1/2}$

ТАБЛИЦА 8.8

С<sub>с</sub><sup>γ</sup><sub>с</sub><sup>α</sup><sub>48</sub>

$c$	$\beta = 4$	$\beta = 3$
$a + 4$	$\left[ \frac{(c + \gamma)! (2c - 8)!}{(c + \gamma - 8)! (2c)!} \right]^{1/2}$	$2 \left[ \frac{2(c + \gamma)! (c - \gamma)! (2c - 8)!}{(c + \gamma - 7)! (2c)!} \right]^{1/2}$
$a + 3$	$-2 \left[ \frac{2(c + \gamma)! (c - \gamma + 1)! (2c + 1)! (2c - 7)!}{(c + \gamma - 7)! (2c + 2)!} \right]^{1/2}$	$-2(3c - 4\gamma + 3) \left[ \frac{(c + \gamma)! (2c + 4)! (2c - 7)!}{(c + \gamma - 6)! (2c + 2)!} \right]^{1/2}$
$a + 2$	$2 \left[ \frac{7(c + \gamma)! (c - \gamma + 2)! (2c + 1)! (2c - 6)!}{(c + \gamma - 6)! (c - \gamma)! (2c + 3)!} \right]^{1/2}$	$(2c - 4\gamma + 5) \left[ \frac{14(c + \gamma)! (c - \gamma + 4)! (2c + 4)! (2c - 6)!}{(c + \gamma - 5)! (2c + 3)!} \right]^{1/2}$
$a + 1$	$-2 \left[ \frac{14(c + \gamma)! (c - \gamma + 3)! (2c + 4)! (2c - 5)!}{(c + \gamma - 5)! (c - \gamma)! (2c + 4)!} \right]^{1/2}$	$-2(c - 4\gamma + 6) \left[ \frac{7(c + \gamma)! (c - \gamma + 2)! (2c + 4)! (2c - 5)!}{(c + \gamma - 4)! (c - \gamma)! (2c + 4)!} \right]^{1/2}$
$a$	$\left[ \frac{70(c + \gamma)! (c - \gamma + 4)! (2c + 4)! (2c - 4)!}{(c + \gamma - 4)! (c - \gamma)! (2c + 5)!} \right]^{1/2}$	$2(3 - 2\gamma) \left[ \frac{35(c + \gamma)! (c - \gamma + 3)! (2c + 4)! (2c - 4)!}{(c + \gamma - 3)! (c - \gamma)! (2c + 5)!} \right]^{1/2}$
$a - 1$	$-2 \left[ \frac{14(c + \gamma)! (c - \gamma + 5)! (2c + 4)! (2c - 3)!}{(c + \gamma - 3)! (c - \gamma)! (2c + 6)!} \right]^{1/2}$	$2(c + 4\gamma - 5) \left[ \frac{7(c + \gamma)! (c - \gamma + 4)! (2c + 4)! (2c - 3)!}{(c + \gamma - 2)! (c - \gamma)! (2c + 6)!} \right]^{1/2}$
$a - 2$	$2 \left[ \frac{7(c + \gamma)! (c - \gamma + 6)! (2c + 4)! (2c - 2)!}{(c + \gamma - 2)! (c - \gamma)! (2c + 7)!} \right]^{1/2}$	$- (2c + 4\gamma - 3) \left[ \frac{14(c + \gamma)! (c - \gamma + 5)! (2c + 4)! (2c - 2)!}{(c - \gamma)! (2c + 7)!} \right]^{1/2}$
$a - 3$	$-2 \left[ \frac{2(c + \gamma)! (c - \gamma + 7)! (2c + 4)! (2c - 4)!}{(c - \gamma)! (2c + 8)!} \right]^{1/2}$	$2(3c + 4\gamma) \left[ \frac{(c - \gamma)! (2c + 7)!}{(c - \gamma + 6)! (2c + 8)!} \right]^{1/2}$
$a - 4$	$\left[ \frac{(c - \gamma + 8)! (2c + 9)!}{(c - \gamma)! (2c + 9)!} \right]^{1/2}$	$-2 \left[ \frac{2(c + \gamma + 1)! (c - \gamma + 7)! (2c + 4)! (2c + 1)!}{(c - \gamma)! (2c + 9)!} \right]^{1/2}$
$c$	$\beta = 2$	$\beta = 2$
$a + 4$	$2 \left[ \frac{7(c + \gamma)! (c - \gamma)! (2c - 8)!}{(c + \gamma - 6)! (c - \gamma - 2)! (2c)!} \right]^{1/2}$	$2 \left[ \frac{7(c + \gamma)! (c - \gamma)! (2c - 8)!}{(c + \gamma - 6)! (c - \gamma - 2)! (2c)!} \right]^{1/2}$
$a + 3$	$-2(c - 2\gamma + 1) \left[ \frac{14(c + \gamma)! (c - \gamma)! (2c + 1)! (2c - 7)!}{(c + \gamma - 5)! (2c + 2)!} \right]^{1/2}$	$-2(c - 4\gamma + 3) \left[ \frac{(c + \gamma)! (2c + 4)! (2c - 6)!}{(c + \gamma - 4)! (2c + 3)!} \right]^{1/2}$
$a + 2$	$2 \{ 2(c - 5\gamma + 5)(c - 2\gamma + 1) - 3\gamma(2\gamma - 3) \} \left[ \frac{(c + \gamma)! (2c + 1)! (2c - 6)!}{(c + \gamma - 4)! (2c + 3)!} \right]^{1/2}$	$2(c + 4\gamma - 5) \left[ \frac{7(c + \gamma)! (c - \gamma + 4)! (2c + 4)! (2c - 6)!}{(c + \gamma - 3)! (c - \gamma)! (2c + 6)!} \right]^{1/2}$
$a + 1$	$2 \{ (c + 8\gamma - 9)(c - \gamma + 2) - 3\gamma(2\gamma - 4) \} \left[ \frac{2(c + \gamma)! (c - \gamma + 1)! (2c + 1)! (2c - 5)!}{(c + \gamma - 3)! (2c + 4)!} \right]^{1/2}$	$- (2c + 4\gamma - 3) \left[ \frac{14(c + \gamma)! (c - \gamma + 5)! (2c + 4)! (2c - 2)!}{(c - \gamma)! (2c + 7)!} \right]^{1/2}$
$a$	$-2 \{ (c - 4)(c + 2) - 7(\gamma - 4)^2 \} \left[ \frac{10(c + \gamma)! (c - \gamma + 2)! (2c + 1)! (2c - 4)!}{(c + \gamma - 2)! (c - \gamma)! (2c + 5)!} \right]^{1/2}$	$2(3c + 4\gamma) \left[ \frac{(c - \gamma)! (2c + 7)!}{(c - \gamma + 6)! (2c + 8)!} \right]^{1/2}$
$a - 1$	$2 \{ (c - 8\gamma + 10)(c + \gamma - 4) - 3\gamma(2\gamma - 4) \} \left[ \frac{2(c + \gamma)! (c - \gamma + 3)! (2c + 4)! (2c - 3)!}{(c - \gamma)! (2c + 6)!} \right]^{1/2}$	$-2 \left[ \frac{2(c + \gamma + 1)! (c - \gamma + 7)! (2c + 4)! (2c + 1)!}{(c - \gamma)! (2c + 9)!} \right]^{1/2}$
$a - 2$	$2 \{ 2(c + 5\gamma - 4)(c + 2\gamma) - 3\gamma(2\gamma - 3) \} \left[ \frac{(c - \gamma + 4)! (2c + 4)! (2c - 2)!}{(c - \gamma)! (2c + 7)!} \right]^{1/2}$	
$a - 3$	$-2(c + 2\gamma) \left[ \frac{14(c + \gamma + 1)(c - \gamma + 5)! (2c + 4)! (2c - 1)!}{(c - \gamma)! (2c + 8)!} \right]^{1/2}$	
$a - 4$	$2 \left[ \frac{7(c + \gamma + 2)! (c - \gamma + 6)! (2c + 4)! (2c + 1)!}{(c + \gamma)! (c - \gamma)! (2c + 9)!} \right]^{1/2}$	

$\beta = 1$ 

$c$	
$a + 4$	$2 \left[ \frac{14(c+\gamma)(c-\gamma)(2c-8)!}{(c+\gamma-5)!(c-\gamma-3)!(2c)!} \right]^{\gamma/2}$
$a + 3$	$-2(c-4\gamma+1) \left[ \frac{7(c+\gamma)(c-\gamma)(2c+1)(2c-7)!}{(c+\gamma-4)!(c-\gamma-2)!(2c+2)!} \right]^{\gamma/2}$
$a + 2$	$-(2c+16\gamma-11)(c-\gamma+1)-6\gamma(2\gamma+1) \left[ \frac{(c+\gamma-3)(2c+3)!}{2(c+\gamma)(c-\gamma)(2c+1)(2c-6)!} \right]^{\gamma/2}$
$a + 1$	$2\{3(c+\gamma-2)(c+\gamma+1)(c-4\gamma+2)+20\gamma(2\gamma-1)(\gamma-1)\} \left[ \frac{(c+\gamma)(2c+1)(2c-5)!}{(c+\gamma-2)!(2c+4)!} \right]^{\gamma/2}$
$a$	$2(2\gamma-1)(3(c-1)(c+2)-7\gamma(\gamma-1)) \left[ \frac{5(c+\gamma)(c-\gamma+1)(2c+1)(2c-4)!}{(2c+5)!} \right]^{\gamma/2}$
$a - 1$	$-2\{3(c-\gamma)(c-\gamma+3)(c+4\gamma-1)-20\gamma(2\gamma-1)(\gamma-1)\} \left[ \frac{(c-\gamma+2)(2c+4)(2c-3)!}{(c-\gamma)!(2c+6)!} \right]^{\gamma/2}$
$a - 2$	$((2c-16\gamma+13)(c+\gamma)-6\gamma(2\gamma+1)) \left[ \frac{2(c+\gamma+1)(c-\gamma+3)(2c+1)(2c-2)!}{(c-\gamma)!(2c+7)!} \right]^{\gamma/2}$
$a - 3$	$2(c+4\gamma) \left[ \frac{7(c+\gamma+2)(c-\gamma+4)(2c+1)(2c-1)!}{(c+\gamma)(c-\gamma)(2c+8)!} \right]^{\gamma/2}$
$a - 4$	$-2 \left[ \frac{14(c+\gamma+3)(c-\gamma+5)(2c+1)!}{(c+\gamma)(c-\gamma)(2c+9)!} \right]^{\gamma/2}$

 $\beta = 0$ 

$c$	
$a + 4$	$\left[ \frac{70(c+\gamma)(c-\gamma)(2c-8)!}{(c+\gamma-4)!(c-\gamma-4)!(2c)!} \right]^{\gamma/2}$
$a + 3$	$4\gamma \left[ \frac{35(c+\gamma)(c-\gamma)(2c+1)(2c-7)!}{(c+\gamma-3)!(c-\gamma-3)!(2c+2)!} \right]^{\gamma/2}$
$a + 2$	$-2\{(c-2)(c+1)-7\gamma^2\} \left[ \frac{10(c+\gamma)(c-\gamma)(2c+1)(2c-6)!}{(c+\gamma-2)!(c-\gamma-2)!(2c+3)!} \right]^{\gamma/2}$
$a + 1$	$-4\gamma(3c^2-7\gamma^2-5) \left[ \frac{5(c+\gamma)(c-\gamma)(2c+1)(2c-5)!}{(2c+4)!} \right]^{\gamma/2}$
$a$	$2\{3(c^2+2c-5\gamma^2)(c^2-5\gamma^2-1)-10\gamma^2(4\gamma^2-1)\} \left[ \frac{(2c+1)(2c-4)!}{(2c+5)!} \right]^{\gamma/2}$
$a - 1$	$4\gamma(3(c+4)^2-7\gamma^2-5) \left[ \frac{5(c+\gamma+1)(c-\gamma+1)(2c+1)(2c-3)!}{(2c+6)!} \right]^{\gamma/2}$
$a - 2$	$-2(c(c+3)-7\gamma^2) \left[ \frac{10(c+\gamma+2)(c-\gamma+2)(2c+4)(2c-2)!}{(c+\gamma)(c-\gamma)(2c+7)!} \right]^{\gamma/2}$
$a - 3$	$-4\gamma \left[ \frac{35(c+\gamma+3)(c-\gamma+3)(2c+1)(2c-1)!}{(c+\gamma)(c-\gamma)(2c+8)!} \right]^{\gamma/2}$
$a - 4$	$\left[ \frac{70(c+\gamma+4)(c-\gamma+4)(2c+1)!}{(c+\gamma)(c-\gamma)(2c+9)!} \right]^{\gamma/2}$

ТАБЛИЦА 8.9

 $C_{\alpha\alpha^9, \beta\beta}^{\gamma\gamma}$ 

$c$	$\beta = 9/2$	$\beta = 7/2$
$a + 9/2$	$\left[ \frac{(c+\gamma)(2c-9)}{(c+\gamma-9)(2c)!} \right]^{1/2}$	$3 \left[ \frac{(c+\gamma)(c-\gamma)(2c-9)!}{(c+\gamma-8)(2c)!} \right]^{1/2}$
$a + 7/2$	$-3 \left[ \frac{(c+\gamma)(c-\gamma+1)(2c+1)(2c-8)!}{(c+\gamma-8)(2c+2)!} \right]^{1/2}$	$-(7c-9\gamma+7) \left[ \frac{(c+\gamma)(2c+1)(2c-8)!}{(c+\gamma-7)(2c+2)!} \right]^{1/2}$
$a + 5/2$	$6 \left[ \frac{(c+\gamma)(c-\gamma+2)(2c+1)(2c-7)!}{(c+\gamma-7)(c-\gamma+3)(2c+3)!} \right]^{1/2}$	$2(5c-9\gamma+12) \left[ \frac{(c+\gamma)(c-\gamma+1)(2c+1)(2c-7)!}{(c+\gamma-6)(2c+3)!} \right]^{1/2}$
$a + 3/2$	$-2 \left[ \frac{21(c+\gamma)(c-\gamma+3)(2c+1)(2c-6)!}{(c+\gamma-6)(c-\gamma+4)(2c+4)!} \right]^{1/2}$	$-2(c-3\gamma+5) \left[ \frac{21(c+\gamma)(c-\gamma+2)(2c+1)(2c-6)!}{(c+\gamma-5)(c-\gamma+3)(2c+4)!} \right]^{1/2}$
$a + 1/2$	$3 \left[ \frac{14(c+\gamma)(c-\gamma+4)(2c+1)(2c-5)!}{(c+\gamma-5)(c-\gamma+5)(2c+5)!} \right]^{1/2}$	$(c-9\gamma+16) \left[ \frac{14(c+\gamma)(c-\gamma+3)(2c+1)(2c-5)!}{(c+\gamma-4)(c-\gamma+4)(2c+5)!} \right]^{1/2}$
$a - 1/2$	$-3 \left[ \frac{14(c+\gamma)(c-\gamma+5)(2c+1)(2c-4)!}{(c+\gamma-4)(c-\gamma+6)(2c+6)!} \right]^{1/2}$	$(c+9\gamma-15) \left[ \frac{14(c+\gamma)(c-\gamma+4)(2c+1)(2c-4)!}{(c+\gamma-3)(c-\gamma+5)(2c+6)!} \right]^{1/2}$
$a - 3/2$	$2 \left[ \frac{21(c+\gamma)(c-\gamma+6)(2c+1)(2c-3)!}{(c+\gamma-3)(c-\gamma+7)(2c+7)!} \right]^{1/2}$	$-2(c+3\gamma-4) \left[ \frac{21(c+\gamma)(c-\gamma+5)(2c+1)(2c-3)!}{(c+\gamma-2)(c-\gamma+6)(2c+7)!} \right]^{1/2}$
$a - 5/2$	$-6 \left[ \frac{(c+\gamma)(c-\gamma+7)(2c+1)(2c-2)!}{(c+\gamma-2)(c-\gamma+8)(2c+8)!} \right]^{1/2}$	$2(5c+9\gamma-7) \left[ \frac{(c+\gamma)(c-\gamma+6)(2c+1)(2c-2)!}{(c-\gamma+9)(c-\gamma+7)(2c+8)!} \right]^{1/2}$
$a - 7/2$	$3 \left[ \frac{(c+\gamma)(c-\gamma+8)(2c+1)(2c-1)!}{(c-\gamma+9)(2c+9)!} \right]^{1/2}$	$-(7c+9\gamma) \left[ \frac{(c-\gamma)(2c+9)!}{(c-\gamma+7)(2c+1)(2c-1)!} \right]^{1/2}$
$a - 9/2$	$-\left[ \frac{(c-\gamma+9)(2c+4)!}{(c-\gamma+10)!} \right]^{1/2}$	$3 \left[ \frac{(c+\gamma+4)(c-\gamma+8)(2c+1)!}{(c-\gamma+10)!} \right]^{1/2}$

 $\beta = 5/2$ 

$c$	$\beta = 5/2$
$a + 9/2$	$6 \left[ \frac{(c+\gamma)(c-\gamma)(2c-9)!}{(c+\gamma-7)(c-\gamma-2)(2c)!} \right]^{1/2}$
$a + 7/2$	$-2(5c-9\gamma+5) \left[ \frac{(c+\gamma)(c-\gamma)(2c+1)(2c-8)!}{(c+\gamma-6)(2c+2)!} \right]^{1/2}$
$a + 5/2$	$2 \{(c-\gamma+1)(4c-16\gamma+15) + \gamma(2\gamma+1)\} \left[ \frac{(c+\gamma)(2c+1)(2c-7)!}{(c+\gamma-5)(2c+3)!} \right]^{1/2}$
$a + 3/2$	$2 \{(c-\gamma+2)(4\gamma-5) - \gamma(2\gamma-1)\} \left[ \frac{21(c+\gamma)(c-\gamma+4)(2c+1)(2c-6)!}{(c+\gamma-4)(2c+4)!} \right]^{1/2}$
$a + 1/2$	$-2 \{(c-\gamma+3)(c+3\gamma-5) - 3(\gamma-1)(2\gamma-1)\} \left[ \frac{14(c+\gamma)(c-\gamma+2)(2c+1)(2c-5)!}{(c+\gamma-3)(c-\gamma+1)(2c+5)!} \right]^{1/2}$

ТАБЛИЦА 8.9 (продолжение)

 $\beta = 5/2$ 

$$\begin{aligned}
 & 2 \{(c + \gamma - 2)(c - 3\gamma + 6) - 3(\gamma - 4)(2\gamma - 4)\} \left[ \frac{14(c + \gamma)! (c - \gamma + 3)! (2c + 1)(2c - 4)!}{(c + \gamma - 2)! (c - \gamma)! (2c + 6)!} \right]^{1/2} \\
 & 2 \{(c + \gamma - 4)(4\gamma - 5) + \gamma(2\gamma - 4)\} \left[ \frac{24(c + \gamma)(c - \gamma + 4)! (2c + 1)(2c - 3)!}{(c - \gamma)! (2c + 7)!} \right]^{1/2} \\
 & - 2 \{(c + \gamma)(4c + 16\gamma - 14) + \gamma(2\gamma + 4)\} \left[ \frac{(c - \gamma + 5)! (2c + 4)(2c - 2)!}{(c - \gamma)! (2c + 8)!} \right]^{1/2} \\
 & 2(5c + 9\gamma) \left[ \frac{(c + \gamma + 4)(c - \gamma + 6)! (2c + 1)(2c - 4)!}{(c - \gamma)! (2c + 9)!} \right]^{1/2} \\
 & - 6 \left[ \frac{(c + \gamma + 2)! (c - \gamma + 7)! (2c + 4)!}{(c + \gamma)! (c - \gamma)! (2c + 10)!} \right]^{1/2}
 \end{aligned}$$

 $\beta = 3/2$ 

$$\begin{aligned}
 & 2 \left[ \frac{24(c + \gamma)! (c - \gamma)! (2c - 9)!}{(c + \gamma - 6)! (c - \gamma - 3)! (2c)!} \right]^{1/2} \\
 & - 2(c - 3\gamma + 4) \left[ \frac{24(c + \gamma)! (c - \gamma)! (2c + 1)(2c - 8)!}{(c + \gamma - 5)! (c - \gamma - 2)! (2c + 2)!} \right]^{1/2} \\
 & 2 \{(c - \gamma + 1)(3 - 4\gamma) + \gamma(2\gamma + 4)\} \left[ \frac{24(c + \gamma)! (c - \gamma)! (2c + 1)(2c - 7)!}{(c + \gamma - 4)! (2c + 3)!} \right]^{1/2} \\
 & 2 \{(c + 1)(c + 2)(4c - 15) - 24\gamma(c - \gamma)(2\gamma - 3) - 24\gamma(\gamma - 4)\} \left[ \frac{(c + \gamma)! (2c + 1)(2c - 6)!}{(c + \gamma - 3)! (2c + 4)!} \right]^{1/2} \\
 & - 2 \{(c^2 - 4)(c - 7\gamma + 6) - 7\gamma(\gamma - 1)(c - 3\gamma + 4)\} \left[ \frac{6(c + \gamma)! (c - \gamma + 1)(2c + 1)(2c - 5)!}{(c + \gamma - 2)! (2c + 5)!} \right]^{1/2} \\
 & - 2 \{(c - 1)(c + 3)(c + 7\gamma - 5) - 7\gamma(\gamma - 1)(c + 3\gamma - 3)\} \left[ \frac{6(c + \gamma)(c - \gamma + 2)! (2c + 1)(2c - 4)!}{(c - \gamma)! (2c + 6)!} \right]^{1/2} \\
 & 2(c(c - 1)(4c + 19) - 24\gamma(2\gamma - 3)(c + \gamma + 1) + 24\gamma(\gamma - 4)) \left[ \frac{(c - \gamma + 3)! (2c + 1)(2c - 3)!}{(c - \gamma)! (2c + 7)!} \right]^{1/2} \\
 & 2 \{(c + \gamma)(4\gamma - 3) + \gamma(2\gamma + 4)\} \left[ \frac{24(c + \gamma + 1)(c - \gamma + 4)! (2c + 1)(2c - 2)!}{(c - \gamma)! (2c + 8)!} \right]^{1/2} \\
 & - 2(c + 3\gamma) \left[ \frac{24(c + \gamma + 2)! (c - \gamma + 5)! (2c + 1)(2c - 1)!}{(c + \gamma)! (c - \gamma)! (2c + 9)!} \right]^{1/2} \\
 & 2 \left[ \frac{24(c + \gamma + 3)! (c - \gamma + 6)! (2c + 1)!}{(c + \gamma)! (c - \gamma)! (2c + 10)!} \right]^{1/2}
 \end{aligned}$$



$c$	$\beta = 1/2$
$a + 9/2$	$3 \left[ \frac{14(c+\gamma)(c-\gamma)(2c-9)!}{(c+\gamma-5)!(c-\gamma-4)!(2c)!} \right]^{1/2}$
$a + 7/2$	$-(c-9\gamma+4) \left[ \frac{14(c+\gamma)(c-\gamma)(2c+1)(2c-8)!}{(c+\gamma-4)!(c-\gamma-3)!(2c+2)!} \right]^{1/2}$
$a + 5/2$	$-2 \{(c+3\gamma-3)(c-\gamma+1) - 3\gamma(2\gamma+1)\} \left[ \frac{14(c+\gamma)(c-\gamma)(2c+1)(2c-7)!}{(c+\gamma-3)!(c-\gamma-2)!(2c+3)!} \right]^{1/2}$
$a + 3/2$	$2 \{(c+1)(c-2)(c-7\gamma+2) - 7\gamma^2(c-3\gamma+2) + 7\gamma\} \left[ \frac{6(c+\gamma)(c-\gamma)(2c-6)!}{(c+\gamma-2)!(2c+4)!} \right]^{1/2}$
$a + 1/2$	$2 \{3(c^2-7\gamma^2-4)(c^2-7\gamma^2-1) + 2\gamma(2c+5)(3c^2-7\gamma^2-5) - 84\gamma^4\} \left[ \frac{(c+\gamma)(2c+4)(2c-5)!}{(2c+5)!} \right]^{1/2}$
$a - 1/2$	$-2 \{3(c^2+2c-7\gamma^2-3)(c^2+2c-7\gamma^2) - 2\gamma(2c-3)(3c^2+6c-7\gamma^2-2) - 84\gamma^4\} \left[ \frac{(c-\gamma+1)(2c+1)(2c-4)!}{(2c+6)!} \right]^{1/2}$
$a - 3/2$	$-2 \{(c+3)(c+7\gamma-1) - 7\gamma^2(c+3\gamma-1) - 7\gamma\} \left[ \frac{6(c+\gamma+1)(c-\gamma+2)(2c+1)(2c-3)!}{(c-\gamma)!(2c+7)!} \right]^{1/2}$
$a - 5/2$	$2 \{(c-3\gamma+4)(c+\gamma) - 3\gamma(2\gamma+1)\} \left[ \frac{14(c+\gamma+2)(c-\gamma+3)(2c+1)(2c-2)!}{(c+\gamma)(c-\gamma)!(2c+8)!} \right]^{1/2}$
$a - 7/2$	$(c+9\gamma) \left[ \frac{14(c+\gamma+3)(c-\gamma+4)(2c+1)(2c-1)!}{(c+\gamma)(c-\gamma)!(2c+9)!} \right]^{1/2}$
$a - 9/2$	$-3 \left[ \frac{14(c+\gamma+4)(c-\gamma+5)(2c+1)!}{(c+\gamma)(c-\gamma)!(2c+10)!} \right]^{1/2}$

ТАБЛИЦА 8.10

С 51  
00059

$c$	$\beta = 5$	$\beta = 4$
$a + 5$	$\left[ \frac{(c+\gamma)(2c-10)!}{(c+\gamma-10)!(2c)!} \right]^{1/2}$	$\left[ \frac{10(c+\gamma)(c-\gamma)(2c-10)!}{(c+\gamma-9)!(2c)!} \right]^{1/2}$
$a + 4$	$-\left[ \frac{10(c+\gamma)(c-\gamma+1)(2c+1)(2c-9)!}{(c+\gamma-9)!(2c+2)!} \right]^{1/2}$	$-2(4c-5\gamma+4) \left[ \frac{(c+\gamma)(2c+1)(2c-9)!}{(c+\gamma-8)(2c+2)!} \right]^{1/2}$
$a + 3$	$3 \left[ \frac{5(c+\gamma)(c-\gamma+2)(2c+1)(2c-8)!}{(c+\gamma-8)!(2c+3)!} \right]^{1/2}$	$3(3c-5\gamma+7) \left[ \frac{2(c+\gamma)(c-\gamma+1)(2c+4)(2c-8)!}{(c+\gamma-7)!(2c+3)!} \right]^{1/2}$
$a + 2$	$-2 \left[ \frac{30(c+\gamma)(c-\gamma+3)(2c+1)(2c-7)!}{(c+\gamma-7)!(2c+4)!} \right]^{1/2}$	$-4(2c-5\gamma+9) \left[ \frac{3(c+\gamma)(c-\gamma+2)(2c+1)(2c-7)!}{(c+\gamma-6)!(2c+4)!} \right]^{1/2}$
$a + 1$	$\left[ \frac{210(c+\gamma)(c-\gamma+4)(2c+1)(2c-6)!}{(c+\gamma-6)!(2c+5)!} \right]^{1/2}$	$2(c-5\gamma+10) \left[ \frac{21(c+\gamma)(c-\gamma+3)(2c+1)(2c-6)!}{(c+\gamma-5)!(2c+5)!} \right]^{1/2}$
$a$	$-6 \left[ \frac{7(c+\gamma)(c-\gamma+5)(2c+1)(2c-5)!}{(c+\gamma-5)!(2c+6)!} \right]^{1/2}$	$6(\gamma-2) \left[ \frac{70(c+\gamma)(c-\gamma+4)(2c+1)(2c-5)!}{(c+\gamma-4)!(2c+6)!} \right]^{1/2}$

ТАБЛИЦА 8.10 (продолжение)

$\beta = 4$		$\beta = 5$	
$c$		$c$	
$a-1$	$-2(c+5\gamma-9) \left[ \frac{21(c+\gamma)(c-\gamma+5)(2c+1)(2c-4)!}{(c+\gamma-3)!(c-\gamma)(2c+7)!} \right]^{1/2}$	$\left[ \frac{240(c+\gamma)(c-\gamma+6)(2c+4)(2c-4)!}{(c+\gamma-4)!(c-\gamma)(2c+7)!} \right]^{1/2}$	
$a-2$	$4(2c+5\gamma-7) \left[ \frac{3(c+\gamma)(c-\gamma+6)(2c+4)(2c-3)!}{(c+\gamma-2)!(c-\gamma)(2c+8)!} \right]^{1/2}$	$-2 \left[ \frac{30(c+\gamma)(c-\gamma+7)(2c+4)(2c-3)!}{(c+\gamma-3)!(c-\gamma)(2c+8)!} \right]^{1/2}$	
$a-3$	$-3(3c+5\gamma-4) \left[ \frac{2(c+\gamma)(c-\gamma+7)(2c+4)(2c-2)!}{(c-\gamma)(2c+9)!} \right]^{1/2}$	$3 \left[ \frac{5(c+\gamma)(c-\gamma+8)(2c+4)(2c-2)!}{(c+\gamma-2)!(c-\gamma)(2c+9)!} \right]^{1/2}$	
$a-4$	$2(4c+5\gamma) \left[ \frac{(c-\gamma+8)(2c+4)(2c-1)!}{(c-\gamma)(2c+10)!} \right]^{1/2}$	$- \left[ \frac{10(c+\gamma)(c-\gamma+9)(2c+4)(2c-1)!}{(c-\gamma)(2c+10)!} \right]^{1/2}$	
$a-5$	$- \left[ \frac{10(c+\gamma+4)(c-\gamma+9)(2c+1)!}{(c-\gamma)(2c+11)!} \right]^{1/2}$	$\left[ \frac{(c-\gamma+10)(2c+4)!}{(c-\gamma)(2c+11)!} \right]^{1/2}$	
$\beta = 3$			
$c$		$c$	
$a+5$	$3 \left[ \frac{5(c+\gamma)(c-\gamma)(2c-10)!}{(c+\gamma-8)!(c-\gamma-2)(2c)!} \right]^{1/2}$	$3 \left[ \frac{5(c+\gamma)(c-\gamma)(2c-10)!}{(c+\gamma-8)!(c-\gamma-2)(2c)!} \right]^{1/2}$	
$a+4$	$-3(3c-5\gamma+3) \left[ \frac{2(c+\gamma)(c-\gamma)(2c+1)(2c-9)!}{(c+\gamma-7)(2c+2)!} \right]^{1/2}$	$-3(3c-5\gamma+3) \left[ \frac{2(c+\gamma)(c-\gamma)(2c+1)(2c-9)!}{(c+\gamma-7)(2c+2)!} \right]^{1/2}$	
$a+3$	$((c-3\gamma+1)(13c-15\gamma+42)+60\gamma) \left[ \frac{(c+\gamma)(2c+4)(2c-8)!}{(c+\gamma-6)(2c+3)!} \right]^{1/2}$	$((c-3\gamma+1)(13c-15\gamma+42)+60\gamma) \left[ \frac{(c+\gamma)(2c+4)(2c-8)!}{(c+\gamma-6)(2c+3)!} \right]^{1/2}$	
$a+2$	$-2((c-3\gamma+2)(c-9\gamma+15)-12\gamma(\gamma-2)) \left[ \frac{6(c+\gamma)(c-\gamma+1)(2c+1)(2c-7)!}{(c+\gamma-5)(2c+4)!} \right]^{1/2}$	$-2((c-3\gamma+2)(c-9\gamma+15)-12\gamma(\gamma-2)) \left[ \frac{6(c+\gamma)(c-\gamma+1)(2c+1)(2c-7)!}{(c+\gamma-5)(2c+4)!} \right]^{1/2}$	
$a+1$	$-((c-2\gamma+3)(c+8\gamma-12)+(\gamma+1)(\gamma-4)) \left[ \frac{42(c+\gamma)(c-\gamma+2)(2c+4)(2c-6)!}{(c+\gamma-4)!(c-\gamma)(2c+5)!} \right]^{1/2}$	$-((c-2\gamma+3)(c+8\gamma-12)+(\gamma+1)(\gamma-4)) \left[ \frac{42(c+\gamma)(c-\gamma+2)(2c+4)(2c-6)!}{(c+\gamma-4)!(c-\gamma)(2c+5)!} \right]^{1/2}$	
$a$	$2(c(c+1)-9\gamma(\gamma-3)-24) \left[ \frac{35(c+\gamma)(c-\gamma+3)(2c+4)(2c-5)!}{(c+\gamma-3)!(c-\gamma)(2c+6)!} \right]^{1/2}$	$2(c(c+1)-9\gamma(\gamma-3)-24) \left[ \frac{35(c+\gamma)(c-\gamma+3)(2c+4)(2c-5)!}{(c+\gamma-3)!(c-\gamma)(2c+6)!} \right]^{1/2}$	
$a-1$	$-((c+2\gamma-2)(c-8\gamma+13)+(\gamma+1)(\gamma-4)) \left[ \frac{42(c+\gamma)(c-\gamma+4)(2c+1)(2c-4)!}{(c+\gamma-2)!(c-\gamma)(2c+7)!} \right]^{1/2}$	$-((c+2\gamma-2)(c-8\gamma+13)+(\gamma+1)(\gamma-4)) \left[ \frac{42(c+\gamma)(c-\gamma+4)(2c+1)(2c-4)!}{(c+\gamma-2)!(c-\gamma)(2c+7)!} \right]^{1/2}$	
$a-2$	$-2((c+3\gamma-4)(c+9\gamma-14)-12\gamma(\gamma-2)) \left[ \frac{6(c+\gamma)(c-\gamma+5)(2c+4)(2c-3)!}{(c-\gamma)(2c+8)!} \right]^{1/2}$	$-2((c+3\gamma-4)(c+9\gamma-14)-12\gamma(\gamma-2)) \left[ \frac{6(c+\gamma)(c-\gamma+5)(2c+4)(2c-3)!}{(c-\gamma)(2c+8)!} \right]^{1/2}$	
$a-3$	$((c+3\gamma)(13c+15\gamma-29)+60\gamma) \left[ \frac{(c-\gamma+6)(2c+1)(2c-2)!}{(c-\gamma)(2c+9)!} \right]^{1/2}$	$((c+3\gamma)(13c+15\gamma-29)+60\gamma) \left[ \frac{(c-\gamma+6)(2c+1)(2c-2)!}{(c-\gamma)(2c+9)!} \right]^{1/2}$	
$a-4$	$-3(3c+5\gamma) \left[ \frac{2(c+\gamma+1)(c-\gamma+7)(2c+4)(2c-1)!}{(c-\gamma)(2c+10)!} \right]^{1/2}$	$-3(3c+5\gamma) \left[ \frac{2(c+\gamma+1)(c-\gamma+7)(2c+4)(2c-1)!}{(c-\gamma)(2c+10)!} \right]^{1/2}$	
$a-5$	$3 \left[ \frac{5(c+\gamma+2)(c-\gamma+8)(2c+4)!}{(c+\gamma)(c-\gamma+11)!} \right]^{1/2}$	$3 \left[ \frac{5(c+\gamma+2)(c-\gamma+8)(2c+4)!}{(c+\gamma)(c-\gamma+11)!} \right]^{1/2}$	

$\beta = 2$ 

$c$	
$a + 5$	$2 \left[ \frac{30(c+\gamma)! (c-\gamma)! (2c-10)!}{(c+\gamma-7)! (c-\gamma-3)! (2c)!} \right]^{1/2}$
$a + 4$	$-4(2c-5\gamma+2) \left[ \frac{3(c+\gamma)! (c-\gamma)! (2c+1)(2c-9)!}{(c+\gamma-6)! (c-\gamma-2)! (2c+2)!} \right]^{1/2}$
$a + 3$	$2 \{(c+\gamma+1)(c-13\gamma+9) + 14\gamma(2\gamma-4)\} \left[ \frac{6(c+\gamma)! (c-\gamma)! (2c+1)(2c-8)!}{(c+\gamma-5)! (2c+3)!} \right]^{1/2}$
$a + 2$	$4 \{(c+2)[2(c+6\gamma+1)(c-3\gamma+5) - 25(c+1)] + 30\gamma(\gamma^2-1)\} \left[ \frac{(c+\gamma)! (2c+1)(2c-7)!}{(c+\gamma-4)! (2c+4)!} \right]^{1/2}$
$a + 1$	$-4 \{(c+5)[(c+\gamma-1)^2 - 10\gamma^2 - 4] - 5\gamma(c-1)^2 + 15(\gamma^3+5\gamma-1)\} \left[ \frac{7(c+\gamma)! (c-\gamma+1)(2c+1)(2c-6)!}{(c+\gamma-3)! (2c+5)!} \right]^{1/2}$
$a$	$-4(\gamma-1)(c(c+1) - 3(\gamma^2-2\gamma+2)) \left[ \frac{210(c+\gamma)! (c-\gamma+2)! (2c+1)(2c-5)!}{(c+\gamma-2)! (c-\gamma)! (2c+6)!} \right]^{1/2}$
$a - 1$	$4 \{(c-4)[(c-\gamma+2)^2 - 10\gamma^2 - 4] + 5\gamma(c+2)^2 - 15(\gamma^3+5\gamma-1)\} \left[ \frac{7(c+\gamma)! (c-\gamma+3)! (2c+1)(2c-4)!}{(c-\gamma)! (2c+7)!} \right]^{1/2}$
$a - 2$	$-4 \{(c-1)[2(c-6\gamma)(c+3\gamma-4) + 25c] - 30\gamma(\gamma^2-1)\} \left[ \frac{(c-\gamma+4)! (2c+1)(2c-3)!}{(c-\gamma)! (2c+8)!} \right]^{1/2}$
$a - 3$	$-2 \{(c-\gamma)(c+13\gamma-8) + 14\gamma(2\gamma-1)\} \left[ \frac{6(c+\gamma+1)(c-\gamma+5)! (2c+1)(2c-2)!}{(c-\gamma)! (2c+9)!} \right]^{1/2}$
$a - 4$	$4(2c+5\gamma) \left[ \frac{3(c+\gamma+2)! (c-\gamma+6)! (2c+1)(2c-4)!}{(c+\gamma)! (c-\gamma)! (2c+10)!} \right]^{1/2}$
$a - 5$	$-2 \left[ \frac{30(c+\gamma+3)! (c-\gamma+7)! (2c+1)!}{(c+\gamma)! (c-\gamma)! (2c+11)!} \right]^{1/2}$

 $\beta = 1$ 

$c$	
$a + 5$	$\left[ \frac{210(c+\gamma)! (c-\gamma)! (2c-10)!}{(c+\gamma-6)! (c-\gamma-4)! (2c)!} \right]^{1/2}$
$a + 4$	$-2(c-5\gamma+1) \left[ \frac{21(c+\gamma)! (c-\gamma)! (2c+1)(2c-9)!}{(c+\gamma-5)! (c-\gamma-3)! (2c+2)!} \right]^{1/2}$
$a + 3$	$- \{(c+\gamma+1)(c+5\gamma-6) - 10\gamma(2\gamma-1)\} \left[ \frac{42(c+\gamma)! (c-\gamma)! (2c+1)(2c-8)!}{(c+\gamma-4)! (c-\gamma-2)! (2c+3)!} \right]^{1/2}$
$a + 2$	$4 \{(c+\gamma-3)(c+\gamma+1)(c-5\gamma+2) + 10\gamma(\gamma-1)(2\gamma-1)\} \left[ \frac{7(c+\gamma)! (c-\gamma)! (2c+1)(2c-7)!}{(c+\gamma-3)! (2c+4)!} \right]^{1/2}$
$a + 1$	$2 \{(c+1)(c^2-4) + 14c\gamma - 15\} + 14c\gamma(c-2\gamma+3)(3c+3\gamma-5) - 28\gamma(5c\gamma+2) + 105\gamma(\gamma-1)(\gamma^2-\gamma+2) \left[ \frac{(c+\gamma)! (2c+1)(2c-6)!}{(c+\gamma-2)! (2c+5)!} \right]^{1/2}$
$a$	$-2 \{(c+1) - 2[c(c+1) - 6] - 7\gamma(\gamma-1) - 3\gamma(\gamma-4) - 6\} \left[ \frac{30(c+\gamma)(c-\gamma+1)(2c-5)!}{(2c+6)!} \right]^{1/2}$

ТАБЛИЦА 8.10 (продолжение)

 $\beta=1$ 

$$\begin{aligned}
& 2 \{ (c-4)(c+3)(c+14\gamma+16) - 14(c+4)\gamma(c+2\gamma-2)(3c-3\gamma+8) + 28\gamma(5c\gamma+5\gamma-2) + \\
& \quad + 105\gamma(\gamma-1)(\gamma^2-\gamma+2) \} \left[ \frac{(c-\gamma+2)!(2c+1)(2c-4)!}{(c-\gamma)!(2c+7)!} \right]^{1/2} \\
& 4 \{ (c-\gamma+4)(c-\gamma)(c+5\gamma-1) - 10\gamma(\gamma-1)(2\gamma-1) \} \left[ \frac{7(c+\gamma+1)(c-\gamma+3)!(2c+1)(2c-3)!}{(c-\gamma)!(2c+8)!} \right]^{1/2} \\
& - \{ (c-5\gamma+7)(c-\gamma) - 10\gamma(2\gamma-1) \} \left[ \frac{42(c+\gamma+2)!(c-\gamma+4)!(2c+1)(2c-2)!}{(c+\gamma)!(c-\gamma)!(2c+9)!} \right]^{1/2} \\
& - 2(c+5\gamma) \left[ \frac{21(c+\gamma+3)!(c-\gamma+5)!(2c+1)(2c-1)!}{(c+\gamma)!(c-\gamma)!(2c+10)!} \right]^{1/2} \\
& \left[ \frac{240(c+\gamma+4)!(c-\gamma+6)!(2c+1)!}{(c+\gamma)!(c-\gamma)!(2c+11)!} \right]^{1/2}
\end{aligned}$$

 $\beta=0$ 

$$\begin{aligned}
& 6 \left[ \frac{7(c+\gamma)!(c-\gamma)!(2c-10)!}{(c+\gamma-5)!(c-\gamma-5)!(2c)!} \right]^{1/2} \\
& 6\gamma \left[ \frac{70(c+\gamma)!(c-\gamma)!(2c+1)(2c-9)!}{(c+\gamma-4)!(c-\gamma-4)!(2c+2)!} \right]^{1/2} \\
& - 2 \{ (c-3)(c+1) - 9\gamma^2 \} \left[ \frac{35(c+\gamma)!(c-\gamma)!(2c+1)(2c-8)!}{(c+\gamma-3)!(c-\gamma-3)!(2c+3)!} \right]^{1/2} \\
& - 4\gamma \{ (c-2)(c+1) - 3\gamma^2 - 1 \} \left[ \frac{240(c+\gamma)!(c-\gamma)!(2c+1)(2c-7)!}{(c+\gamma-2)!(c-\gamma-2)!(2c+4)!} \right]^{1/2} \\
& 2 \{ (c-1)(c+1)(c^2-14\gamma^2-4) + 24\gamma^2(\gamma^2+1) \} \left[ \frac{30(c+\gamma)(c-\gamma)(2c+1)(2c-6)!}{(2c+5)!} \right]^{1/2} \\
& 4\gamma \{ 5c(c+1) [3c(c+1) - 14\gamma^2 - 10] + 24\gamma^2(3\gamma^2+5) + 12 \} \left[ \frac{(2c+1)(2c-5)!}{(2c+6)!} \right]^{1/2} \\
& - 2 \{ c(c+2) [(c+1)^2 - 14\gamma^2 - 4] + 24\gamma^2(\gamma^2+1) \} \left[ \frac{30(c+\gamma+1)(c-\gamma+1)(2c+1)(2c-4)!}{(2c+7)!} \right]^{1/2} \\
& - 4\gamma \{ (c+3)c - 3\gamma^2 - 1 \} \left[ \frac{240(c+\gamma+2)!(c-\gamma+2)!(2c+1)(2c-3)!}{(c+\gamma)!(c-\gamma)!(2c+8)!} \right]^{1/2} \\
& 2 \{ (c+4)c - 9\gamma^2 \} \left[ \frac{35(c+\gamma+3)!(c-\gamma+3)!(2c+1)(2c-2)!}{(c+\gamma)!(c-\gamma)!(2c+9)!} \right]^{1/2} \\
& 6\gamma \left[ \frac{70(c+\gamma+4)!(c-\gamma+4)!(2c+10)!}{(c+\gamma)!(c-\gamma)!(2c+10)!} \right]^{1/2} \\
& - 6 \left[ \frac{7(c+\gamma+5)!(c-\gamma+5)!(2c+1)!}{(c+\gamma)!(c-\gamma)!(2c+11)!} \right]^{1/2}
\end{aligned}$$

## 8.13 ЧИСЛЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ КОЭФФИЦИЕНТОВ КЛЕБША—ГОРДАНА

В табл. 8.11 приведены численные значения коэффициентов Клебша—Гордана  $C_{\alpha\alpha b\beta}^{c\alpha+\beta}$ , у которых  $a, b, c \leq 3$ .

Значения даны в виде как простых, так и десятичных дробей. Коэффициенты Клебша—Гордана объединены в группы в зависимости от значения индекса  $c$ . Индексы  $a, \alpha, b, \beta$  коэффициентов, приведенных в таблице, удовлетворяют условиям: а)  $a \geq b, \alpha \geq 0$ ; б) если  $a=b$ , то  $\alpha \geq \beta$ . Остальные коэффициенты Клебша—Гордана с  $a, b, c \leq 3$  сводятся к табличным с помощью простейших свойств симметрии.

$$C_{\alpha\alpha b\beta}^{c\alpha+\beta} = (-1)^{a+b-c} C_{b\beta \alpha\alpha}^{c\alpha+\beta} = (-1)^{a+b-c} C_{a-\alpha b-\beta}^{c-\alpha-\beta} = C_{b-\beta a-\alpha}^{c-\alpha-\beta}.$$

Таблицы численных значений коэффициентов Клебша—Гордана имеются также в работах [126, 127]. В работе [127] даны в виде десятичных дробей коэффициенты, у которых  $1/2 \leq a \leq 4, 1/2 \leq b, c \leq 9/2$ . В работе [126] приведены в виде простых дробей коэффициенты, у которых  $1/2 \leq b \leq 6, a=5, 11/2, 6$ . Численные значения  $3j\pi$ -символов имеются в работе [113].

ТАБЛИЦА 8.11

$a$	$\alpha$	$b$	$\beta$	$C_{\alpha\alpha b\beta}^{0\alpha+\beta}$	$a$	$\alpha$	$b$	$\beta$	$C_{\alpha\alpha b\beta}^{1/2\alpha+\beta}$	
0	0	0	0	1	5/2	5/2	2	-2	$1/\sqrt{3}$	0.577350
1/2	1/2	1/2	-1/2	$1/\sqrt{2}$	5/2	3/2	2	-1	$-2/\sqrt{3 \cdot 5}$	-0.516398
1	1	1	-1	$1/\sqrt{3}$	5/2	3/2	2	-2	$1/\sqrt{3 \cdot 5}$	0.258199
1	0	1	0	$-1/\sqrt{3}$	5/2	1/2	2	0	$1/\sqrt{5}$	0.447214
3/2	3/2	3/2	-3/2	1/2	5/2	1/2	2	-1	$-\sqrt{2/3 \cdot 5}$	-0.365148
3/2	1/2	3/2	-1/2	-1/2	3	3	5/2	-5/2	$\sqrt{2/7}$	0.534522
2	2	2	-2	$1/\sqrt{5}$	3	2	5/2	-3/2	$-\sqrt{5/3 \cdot 7}$	-0.487950
2	1	2	-1	$-1/\sqrt{5}$	3	2	5/2	-5/2	$1/\sqrt{3 \cdot 7}$	0.218218
2	0	2	0	$1/\sqrt{5}$	3	1	5/2	-1/2	$2/\sqrt{3 \cdot 7}$	0.436436
5/2	5/2	5/2	-5/2	$1/\sqrt{2 \cdot 3}$	3	1	5/2	-3/2	$-\sqrt{2}/\sqrt{3 \cdot 7}$	-0.308607
5/2	3/2	5/2	-3/2	$-1/\sqrt{2 \cdot 3}$	3	0	5/2	1/2	$-1/\sqrt{7}$	-0.377964
5/2	1/2	5/2	-1/2	$1/\sqrt{2 \cdot 3}$						
3	3	3	-3	$1/\sqrt{7}$						
3	2	3	-2	$-1/\sqrt{7}$						
3	1	3	-1	$1/\sqrt{7}$						
3	0	3	0	$-1/\sqrt{7}$						
$a$	$\alpha$	$b$	$\beta$	$C_{\alpha\alpha b\beta}^{1/2\alpha+\beta}$	$a$	$\alpha$	$b$	$\beta$	$C_{\alpha\alpha b\beta}^{1\alpha+\beta}$	
1/2	1/2	0	0	1	1/2	1/2	1/2	1/2	1	1.000000
1	1	1/2	-1/2	$\sqrt{2/3}$	1/2	1/2	1/2	-1/2	$1/\sqrt{2}$	0.707107
1	0	1/2	1/2	$-1/\sqrt{3}$	1	1	0	0	1	1.000000
3/2	3/2	1	-1	$1/\sqrt{2}$	1	0	0	0	1	1.000000
3/2	1/2	1	0	$-1/\sqrt{3}$	1	1	1	0	$1/\sqrt{2}$	0.707107
3/2	1/2	1	-1	$1/\sqrt{2 \cdot 3}$	1	0	1	0	$1/\sqrt{2}$	0.707107
2	2	3/2	-3/2	$\sqrt{2/5}$	3/2	3/2	1/2	-1/2	$\sqrt{3/2}$	0.866025
2	1	3/2	-1/2	$-\sqrt{3/2 \cdot 5}$	3/2	1/2	1/2	1/2	-1/2	-0.500000
2	1	3/2	-3/2	$1/\sqrt{2 \cdot 5}$	3/2	1/2	1/2	-1/2	$1/\sqrt{2}$	0.707107
2	0	3/2	1/2	$1/\sqrt{5}$	3/2	3/2	3/2	-1/2	$\sqrt{3/2 \cdot 5}$	0.547723
					3/2	3/2	3/2	-3/2	$3/(2\sqrt{5})$	0.670820
					3/2	1/2	3/2	1/2	$-\sqrt{2/5}$	-0.632456
					3/2	1/2	3/2	-1/2	$-1/(2\sqrt{5})$	-0.223607
					2	2	1	-1	$\sqrt{3/5}$	0.774597
					2	1	1	0	$-\sqrt{3/2 \cdot 5}$	-0.547723

ТАБЛИЦА 8.11 (продолжение)

<i>a</i>	$\alpha$	<i>b</i>	$\beta$	$C_{\alpha\alpha b\beta}^{1\alpha+\beta}$		<i>a</i>	$\alpha$	<i>b</i>	$\beta$	$C_{\alpha\alpha b\beta}^{3/2\alpha+\beta}$	
2	1	1	-1	$\sqrt{3/2 \cdot 5}$	0.547723	3/2	3/2	1	0	$\sqrt{3}/\sqrt{5}$	0.774597
2	0	1	1	$1/\sqrt{2 \cdot 5}$	0.316228	3/2	3/2	1	-1	$\sqrt{2}/\sqrt{5}$	0.632456
2	0	1	0	$-\sqrt{2/5}$	-0.632456	3/2	1/2	1	1	$-\sqrt{2}/\sqrt{5}$	-0.632456
2	2	2	-1	$1/\sqrt{5}$	0.447214	3/2	1/2	1	0	$1/\sqrt{3 \cdot 5}$	0.258199
2	2	2	-2	$\sqrt{2/5}$	0.632456	3/2	1/2	1	-1	$2\sqrt{2}/\sqrt{3 \cdot 5}$	0.730297
2	1	2	0	$-\sqrt{3/2 \cdot 5}$	-0.547723	2	2	1/2	-1/2	$2/\sqrt{5}$	0.894427
2	1	2	-1	$-1/\sqrt{2 \cdot 5}$	-0.316228	2	1	1/2	1/2	$-1/\sqrt{5}$	-0.447214
2	0	2	0	0	0.000000	2	1	1/2	-1/2	$\sqrt{3}/\sqrt{5}$	0.774597
5/2	5/2	3/2	-3/2	$1/\sqrt{2}$	0.707107	2	0	1/2	1/2	$-\sqrt{2}/\sqrt{5}$	-0.632456
5/2	3/2	3/2	-1/2	$-\sqrt{3/2 \cdot 5}$	-0.547723	2	2	3/2	-1/2	$\sqrt{2}/\sqrt{5}$	0.632456
5/2	3/2	3/2	-3/2	$1/\sqrt{5}$	0.447214	2	2	3/2	-3/2	$\sqrt{2}/\sqrt{5}$	0.632456
5/2	1/2	3/2	1/2	$\sqrt{3}/(2\sqrt{5})$	0.387298	2	1	3/2	1/2	$-\sqrt{2}/\sqrt{5}$	-0.632456
5/2	1/2	3/2	-1/2	$-\sqrt{3/2 \cdot 5}$	-0.547723	2	1	3/2	-1/2	0	0.000000
5/2	1/2	3/2	-3/2	$1/(2\sqrt{5})$	0.223607	2	1	3/2	-3/2	$\sqrt{2}/\sqrt{5}$	0.632456
5/2	5/2	5/2	-3/2	$1/\sqrt{7}$	0.377964	2	0	3/2	3/2	$1/\sqrt{5}$	0.447214
5/2	5/2	5/2	-5/2	$\sqrt{5}/\sqrt{2 \cdot 7}$	0.597614	2	0	3/2	1/2	$-1/\sqrt{5}$	-0.447214
5/2	3/2	5/2	-1/2	$-2\sqrt{2}/\sqrt{5 \cdot 7}$	-0.478091	5/2	5/2	1	-1	$\sqrt{2}/\sqrt{3}$	0.816497
5/2	3/2	5/2	-3/2	$-3/\sqrt{2 \cdot 5 \cdot 7}$	-0.358569	5/2	3/2	1	0	$-2/\sqrt{3 \cdot 5}$	-0.516398
5/2	1/2	5/2	1/2	$3/\sqrt{5 \cdot 7}$	0.507093	5/2	3/2	1	-1	$\sqrt{2}/\sqrt{5}$	0.632456
5/2	1/2	5/2	-1/2	$1/\sqrt{2 \cdot 5 \cdot 7}$	0.119523	5/2	1/2	1	1	$1/\sqrt{3 \cdot 5}$	0.258199
3	3	2	-2	$\sqrt{3/7}$	0.654654	5/2	1/2	1	0	$-\sqrt{2}/\sqrt{5}$	-0.632456
3	2	2	-1	$-\sqrt{2/7}$	-0.534522	5/2	1/2	1	-1	$1/\sqrt{5}$	0.447214
3	2	2	-2	$1/\sqrt{7}$	0.377964	5/2	5/2	2	-1	$\sqrt{2}/\sqrt{7}$	0.534522
3	1	2	0	$\sqrt{2 \cdot 3/5 \cdot 7}$	0.444039	5/2	5/2	2	-2	$2\sqrt{2}/\sqrt{3 \cdot 7}$	0.617213
3	1	2	-1	$-2\sqrt{2}/\sqrt{5 \cdot 7}$	-0.478091	5/2	3/2	2	0	$-2\sqrt{3}/\sqrt{5 \cdot 7}$	-0.585540
3	1	2	-2	$1/\sqrt{5 \cdot 7}$	0.169031	5/2	3/2	2	-1	$-\sqrt{2}/\sqrt{3 \cdot 5 \cdot 7}$	-0.138013
3	0	2	1	$-\sqrt{3/5 \cdot 7}$	-0.292770	5/2	3/2	2	-2	$4\sqrt{2}/\sqrt{3 \cdot 5 \cdot 7}$	0.552052
3	0	2	0	$3/\sqrt{5 \cdot 7}$	0.507093	5/2	1/2	2	1	$3/\sqrt{5 \cdot 7}$	0.507093
3	3	3	-2	$\sqrt{3}/(2\sqrt{7})$	0.327327	5/2	1/2	2	0	$-\sqrt{2}/\sqrt{5 \cdot 7}$	-0.239046
3	3	3	-3	$3/(2\sqrt{7})$	0.566947	5/2	1/2	2	-1	$-\sqrt{5}/\sqrt{3 \cdot 7}$	-0.487950
3	2	3	-1	$-\sqrt{5}/(2\sqrt{7})$	-0.422577	5/2	1/2	2	-2	$2/\sqrt{5 \cdot 7}$	0.338062
3	2	3	-2	$-1/\sqrt{7}$	-0.377964	3	3	3/2	-3/2	$2/\sqrt{7}$	0.755929
3	1	3	0	$\sqrt{3}/\sqrt{2 \cdot 7}$	0.462910	3	2	3/2	-1/2	$-\sqrt{2}/\sqrt{7}$	-0.534522
3	1	3	-1	$1/(2\sqrt{7})$	0.188982	3	2	3/2	-3/2	$\sqrt{2}/\sqrt{7}$	0.534522
3	0	3	0	0	0.000000	3	1	3/2	1/2	$2/\sqrt{5 \cdot 7}$	0.338062
						3	1	3/2	-1/2	$-2\sqrt{3}/\sqrt{5 \cdot 7}$	-0.585540
						3	1	3/2	-3/2	$2/\sqrt{5 \cdot 7}$	0.338062
						3	0	3/2	3/2	$-1/\sqrt{5 \cdot 7}$	-0.169031
						3	0	3/2	1/2	$3/\sqrt{5 \cdot 7}$	0.507093
						3	3	5/2	-3/2	$\sqrt{3}/\sqrt{2 \cdot 7}$	0.462910
						3	3	5/2	-5/2	$\sqrt{5}/\sqrt{2 \cdot 7}$	0.597614
3/2	3/2	0	0	1	1.000000	3	2	5/2	-1/2	$-\sqrt{2}/\sqrt{7}$	-0.534522
3/2	1/2	0	0	1	1.000000	3	2	5/2	-3/2	$-1/\sqrt{3 \cdot 7}$	-0.218218

ТАБЛИЦА 8.11 (продолжение)

$a$	$\alpha$	$b$	$\beta$	$C_{\alpha\alpha\beta\beta}^{1/2, \alpha+\beta}$		$a$	$\alpha$	$b$	$\beta$	$C_{\alpha\alpha\beta\beta}^{2\alpha+\beta}$	
3	2	5/2	-5/2	$\sqrt{5}/\sqrt{3 \cdot 7}$	0.487950	5/2	5/2	3/2	-1/2	$\sqrt{2 \cdot 5}/\sqrt{3 \cdot 7}$	0.690066
3	1	5/2	1/2	$3/\sqrt{5 \cdot 7}$	0.507093	5/2	5/2	3/2	-3/2	$\sqrt{5}/\sqrt{2 \cdot 7}$	0.597614
3	1	5/2	-1/2	$-1/\sqrt{3 \cdot 5 \cdot 7}$	-0.097590	5/2	3/2	3/2	1/2	$-2\sqrt{2}/\sqrt{3 \cdot 7}$	-0.617213
3	1	5/2	-3/2	$-\sqrt{7}/\sqrt{2 \cdot 3 \cdot 5}$	-0.483046	5/2	3/2	3/2	-1/2	$1/\sqrt{2 \cdot 3 \cdot 7}$	0.154303
3	1	5/2	-5/2	$1/\sqrt{2 \cdot 7}$	0.267261	5/2	3/2	3/2	-3/2	$\sqrt{3}/\sqrt{7}$	0.654654
3	0	5/2	3/2	$-\sqrt{2 \cdot 3}/\sqrt{5 \cdot 7}$	-0.414039	5/2	1/2	3/2	3/2	$1/\sqrt{7}$	0.377964
3	0	5/2	1/2	$2/\sqrt{5 \cdot 7}$	0.338062	5/2	1/2	3/2	1/2	$-5/(2\sqrt{3 \cdot 7})$	-0.545545
						5/2	1/2	3/2	-1/2	$-1/\sqrt{2 \cdot 7}$	-0.267261
						5/2	1/2	3/2	-3/2	$3/(2\sqrt{7})$	0.566947
						5/2	5/2	5/2	-1/2	$\sqrt{5}/(2\sqrt{7})$	0.422577
						5/2	5/2	5/2	-3/2	$\sqrt{5}/\sqrt{2 \cdot 7}$	0.597614
						5/2	5/2	5/2	-5/2	$5/(2\sqrt{3 \cdot 7})$	0.545545
						5/2	3/2	5/2	1/2	$-3/(2\sqrt{7})$	-0.566947
						5/2	3/2	5/2	-1/2	$-1/\sqrt{7}$	-0.377964
3/2	3/2	1/2	1/2	1	1.000000	5/2	3/2	5/2	-3/2	$1/(2\sqrt{3 \cdot 7})$	0.109109
3/2	3/2	1/2	-1/2	1/2	0.500000	5/2	1/2	5/2	1/2	0	0.000000
3/2	1/2	1/2	1/2	$\sqrt{3}/2$	0.866025	5/2	1/2	5/2	-1/2	$-2/\sqrt{3 \cdot 7}$	-0.436436
3/2	1/2	1/2	-1/2	$1/\sqrt{2}$	0.707107						
3/2	3/2	3/2	1/2	$1/\sqrt{2}$	0.707107	3	3	1	-1	$\sqrt{5}/\sqrt{7}$	0.845154
3/2	3/2	3/2	-1/2	$1/\sqrt{2}$	0.707107	3	2	1	0	$-\sqrt{5}/\sqrt{3 \cdot 7}$	-0.487950
3/2	3/2	3/2	-3/2	1/2	0.500000	3	2	1	-1	$\sqrt{2 \cdot 5}/\sqrt{3 \cdot 7}$	0.690066
3/2	1/2	3/2	1/2	0	0.000000	3	1	1	1	$1/\sqrt{3 \cdot 7}$	0.218218
3/2	1/2	3/2	-1/2	1/2	0.500000	3	1	1	0	$-2\sqrt{2}/\sqrt{3 \cdot 7}$	-0.617213
2	2	0	0	1	1.000000	3	1	1	-1	$\sqrt{2}/\sqrt{7}$	0.534522
2	1	0	0	1	1.000000	3	0	1	1	$1/\sqrt{7}$	0.377964
2	0	0	0	1	1.000000	3	0	1	0	$-\sqrt{3}/\sqrt{7}$	-0.654654
2	2	1	0	$\sqrt{2}/\sqrt{3}$	0.816497	3	3	2	-1	$\sqrt{5}/\sqrt{2 \cdot 7}$	0.597614
2	2	1	-1	$1/\sqrt{3}$	0.577350	3	3	2	-2	$\sqrt{5}/\sqrt{2 \cdot 7}$	0.597614
2	1	1	1	$-1/\sqrt{3}$	-0.577350	3	2	2	0	$-\sqrt{5}/\sqrt{2 \cdot 7}$	-0.597614
2	1	1	0	$1/\sqrt{2 \cdot 3}$	0.408248	3	2	2	-1	0	0.000000
2	1	1	-1	$1/\sqrt{2}$	0.707107	3	2	2	-2	$\sqrt{5}/\sqrt{2 \cdot 7}$	0.597614
2	0	1	1	$-1/\sqrt{2}$	-0.707107	3	1	2	1	$\sqrt{3}/\sqrt{2 \cdot 7}$	0.462910
2	0	1	0	0	0.000000	3	1	2	0	$-1/\sqrt{7}$	-0.377964
2	2	2	0	$\sqrt{2}/\sqrt{7}$	0.534522	3	1	2	-1	$-1/\sqrt{7}$	-0.377964
2	2	2	-1	$\sqrt{3}/\sqrt{7}$	0.654654	3	1	2	-2	$\sqrt{3}/\sqrt{2 \cdot 7}$	0.462910
2	2	2	-2	$\sqrt{2}/\sqrt{7}$	0.534522	3	0	2	2	$-1/\sqrt{2 \cdot 7}$	-0.267261
2	1	2	1	$-\sqrt{3}/\sqrt{7}$	-0.654654	3	0	2	1	$\sqrt{2}/\sqrt{7}$	0.534522
2	1	2	0	$-1/\sqrt{2 \cdot 7}$	-0.267261	3	0	2	0	0	0.000000
2	1	2	-1	$1/\sqrt{2 \cdot 7}$	0.267261	3	3	3	-1	$\sqrt{5}/\sqrt{2 \cdot 3 \cdot 7}$	0.345033
2	0	2	0	$-\sqrt{2}/\sqrt{7}$	-0.534522	3	3	3	-2	$5/(2\sqrt{3 \cdot 7})$	0.545545
5/2	5/2	1/2	-1/2	$\sqrt{5}/\sqrt{2 \cdot 3}$	0.912871	3	3	3	-3	$5/(2\sqrt{3 \cdot 7})$	0.545545
5/2	3/2	1/2	1/2	$-1/\sqrt{2 \cdot 3}$	-0.408248	3	2	3	0	$-\sqrt{5}/\sqrt{3 \cdot 7}$	-0.487950
5/2	3/2	1/2	-1/2	$\sqrt{2}/\sqrt{3}$	0.816497	3	2	3	-1	$-\sqrt{5}/(2\sqrt{7})$	-0.422577
5/2	1/2	1/2	1/2	$-1/\sqrt{3}$	-0.577350	3	2	3	-2	0	0.000000
5/2	1/2	1/2	-1/2	$1/\sqrt{2}$	0.707107	3	1	3	1	$\sqrt{2}/\sqrt{7}$	0.534522

ТАБЛИЦА 8.11 (продолжение)

$a$	$\alpha$	$b$	$\beta$	$C_{\alpha\alpha b\beta}^{2\alpha+\beta}$		$a$	$\alpha$	$b$	$\beta$	$C_{\alpha\alpha b\beta}^{3/2\alpha+\beta}$	
3	1	3	0	$1/\sqrt{2 \cdot 3 \cdot 7}$	0.154303	5/2	3/2	2	0	$-1/\sqrt{2 \cdot 5 \cdot 7}$	-0.119523
3	1	3	-1	$-\sqrt{3}/(2\sqrt{7})$	-0.327327	5/2	3/2	2	-1	$\sqrt{2 \cdot 3}/\sqrt{5 \cdot 7}$	0.414039
3	0	3	0	$2/\sqrt{3 \cdot 7}$	0.436436	5/2	3/2	2	-2	$3\sqrt{3}/\sqrt{2 \cdot 5 \cdot 7}$	0.621059
$a$	$\alpha$	$b$	$\beta$	$C_{\alpha\alpha b\beta}^{3/2\alpha+\beta}$		5/2	1/2	2	2	$\sqrt{3}/\sqrt{2 \cdot 7}$	0.462910
5/2	1/2	2	1	$-\sqrt{2 \cdot 3}/\sqrt{5 \cdot 7}$	-0.414039	5/2	1/2	2	0	$-2\sqrt{2}/\sqrt{5 \cdot 7}$	-0.478091
5/2	1/2	2	0	0	0.000000	5/2	1/2	2	-1	0	0.000000
5/2	1/2	2	-1	$3\sqrt{3}/\sqrt{2 \cdot 5 \cdot 7}$	0.621059	5/2	1/2	2	-2	$3\sqrt{3}/\sqrt{2 \cdot 5 \cdot 7}$	0.621059
3/2	3/2	1	1	1	1.000000	3	3	1/2	-1/2	$\sqrt{2 \cdot 3}/\sqrt{7}$	0.925820
3/2	3/2	1	0	$\sqrt{2/5}$	0.632456	3	2	1/2	1/2	$-1/\sqrt{7}$	-0.377964
3/2	3/2	1	-1	$1/\sqrt{2 \cdot 5}$	0.316228	3	2	1/2	-1/2	$\sqrt{5/7}$	0.845154
3/2	1/2	1	1	$\sqrt{3/5}$	0.774597	3	1	1/2	1/2	$-\sqrt{2/7}$	-0.534522
3/2	1/2	1	0	$\sqrt{3/5}$	0.774597	3	1	1/2	-1/2	$2/\sqrt{7}$	0.755929
3/2	1/2	1	-1	$\sqrt{3/2 \cdot 5}$	0.547723	3	0	1/2	1/2	$-\sqrt{3/7}$	-0.654654
2	2	1/2	1/2	1	1.000000	3	3	3/2	-1/2	$\sqrt{3 \cdot 5}/(2\sqrt{7})$	0.731925
2	2	1/2	-1/2	$1/\sqrt{5}$	0.447214	3	3	3/2	-3/2	$3/(2\sqrt{7})$	0.566947
2	1	1/2	1/2	$2/\sqrt{5}$	0.894427	3	2	3/2	1/2	$-\sqrt{5}/\sqrt{2 \cdot 7}$	-0.597614
2	1	1/2	-1/2	$\sqrt{2/5}$	0.632456	3	2	3/2	-1/2	$1/\sqrt{2 \cdot 7}$	0.267261
2	0	1/2	1/2	$\sqrt{3/5}$	0.774597	3	2	3/2	-3/2	$\sqrt{3}/\sqrt{7}$	0.654654
2	2	3/2	1/2	$2/\sqrt{7}$	0.755929	3	1	3/2	3/2	$\sqrt{3}/(2\sqrt{7})$	0.327327
2	2	3/2	-1/2	$4\sqrt{5 \cdot 7}$	0.676123	3	1	3/2	1/2	$-\sqrt{7}/(2\sqrt{5})$	-0.591608
2	2	3/2	-3/2	$\sqrt{2 \cdot 3}/\sqrt{5 \cdot 7}$	0.414039	3	1	3/2	-1/2	$-1/\sqrt{2 \cdot 5 \cdot 7}$	-0.119523
2	1	3/2	3/2	$-\sqrt{3/7}$	-0.654654	3	1	3/2	-3/2	$3\sqrt{3}/\sqrt{2 \cdot 5 \cdot 7}$	0.621059
2	1	3/2	1/2	$1/\sqrt{5 \cdot 7}$	0.169031	3	0	3/2	3/2	$3/\sqrt{5 \cdot 7}$	0.507093
2	1	3/2	-1/2	$\sqrt{5}/\sqrt{2 \cdot 7}$	0.597614	3	0	3/2	1/2	$-\sqrt{2 \cdot 3}/\sqrt{5 \cdot 7}$	-0.414039
2	1	3/2	-3/2	$3\sqrt{3}/\sqrt{2 \cdot 5 \cdot 7}$	0.621059	3	3	5/2	-1/2	$\sqrt{5}/\sqrt{3 \cdot 7}$	0.487950
2	0	3/2	3/2	$-3\sqrt{2}/\sqrt{5 \cdot 7}$	-0.717137	3	3	5/2	-3/2	$2\sqrt{2}/\sqrt{3 \cdot 7}$	0.617213
2	0	3/2	1/2	$-\sqrt{3}/\sqrt{5 \cdot 7}$	-0.292770	3	3	5/2	-5/2	$\sqrt{5}/\sqrt{3 \cdot 7}$	0.487950
5/2	5/2	0	0	1	1.000000	3	2	5/2	1/2	$-\sqrt{5}/\sqrt{2 \cdot 7}$	-0.597614
5/2	3/2	0	0	1	1.000000	3	2	5/2	-1/2	$-1/\sqrt{2 \cdot 7}$	-0.267261
5/2	1/2	0	0	1	1.000000	3	2	5/2	-3/2	$1/\sqrt{2 \cdot 7}$	0.267261
5/2	5/2	1	0	$\sqrt{5/7}$	0.845154	3	2	5/2	-5/2	$\sqrt{5}/\sqrt{2 \cdot 7}$	0.597614
5/2	5/2	1	-1	$\sqrt{2/7}$	0.534522	3	1	5/2	3/2	$\sqrt{2/7}$	0.534522
5/2	3/2	1	1	$-\sqrt{2/7}$	-0.534522	3	1	5/2	1/2	$-1/\sqrt{5 \cdot 7}$	-0.169031
5/2	3/2	1	0	$3/\sqrt{5 \cdot 7}$	0.507093	3	1	5/2	-1/2	$-2\sqrt{2}/\sqrt{5 \cdot 7}$	-0.478091
5/2	3/2	1	-1	$4/\sqrt{5 \cdot 7}$	0.676123	3	1	5/2	-3/2	$-1/\sqrt{5 \cdot 7}$	-0.169031
5/2	1/2	1	1	$-4/\sqrt{5 \cdot 7}$	-0.676123	3	1	5/2	-5/2	$\sqrt{2/7}$	0.534522
5/2	1/2	1	0	$1/\sqrt{5 \cdot 7}$	0.169031	3	0	5/2	5/2	$-\sqrt{5}/\sqrt{2 \cdot 3 \cdot 7}$	-0.345033
5/2	1/2	1	-1	$3\sqrt{2}/\sqrt{5 \cdot 7}$	0.717137	3	0	5/2	3/2	$\sqrt{7}/\sqrt{2 \cdot 3 \cdot 5}$	0.483046
5/2	5/2	2	0	$\sqrt{5}/\sqrt{2 \cdot 7}$	0.597614	3	0	5/2	1/2	$2\sqrt{2}/\sqrt{3 \cdot 5 \cdot 7}$	0.276026
5/2	5/2	2	-1	$\sqrt{3/7}$	0.654654						
5/2	5/2	2	-2	$\sqrt{3}/\sqrt{2 \cdot 7}$	0.462910						
5/2	3/2	2	1	$-\sqrt{3}/\sqrt{7}$	-0.654654						



ТАБЛИЦА 8.11 (продолжение)

$a$	$\alpha$	$b$	$\beta$	$C_{\alpha a \beta b}^{3\alpha+\beta}$	$a$	$\alpha$	$b$	$\beta$	$C_{\alpha a \beta b}^{3\alpha+\beta}$		
3/2	3/2	3/2	3/2	1	1.000000	5/2	3/2	5/2	3/2	-2/3	-0.666667
3/2	3/2	3/2	1/2	$1/\sqrt{2}$	0.707107	5/2	3/2	5/2	1/2	$-1/(2\sqrt{3})$	-0.288675
3/2	3/2	3/2	-1/2	$1/\sqrt{5}$	0.447214	5/2	3/2	5/2	-1/2	$1/\sqrt{2 \cdot 3 \cdot 5}$	0.182574
3/2	3/2	3/2	-3/2	$1/(2\sqrt{5})$	0.223607	5/2	3/2	5/2	-3/2	$7/(2 \cdot 3 \sqrt{5})$	0.521749
3/2	1/2	3/2	1/2	$\sqrt{3}/\sqrt{5}$	0.774597	5/2	1/2	5/2	1/2	$-2/\sqrt{3 \cdot 5}$	-0.516398
3/2	1/2	3/2	-1/2	$3/(2\sqrt{5})$	0.670820	5/2	1/2	5/2	-1/2	$-2/(3\sqrt{5})$	-0.298142
2	2	1	1	1	1.000000	3	3	0	0	1	1.000000
2	2	1	0	$1/\sqrt{3}$	0.577350	3	2	0	0	1	1.000000
2	2	1	-1	$1/\sqrt{3 \cdot 5}$	0.258199	3	1	0	0	1	1.000000
2	1	1	1	$\sqrt{2}/\sqrt{3}$	0.816497	3	0	0	0	1	1.000000
2	1	1	0	$2\sqrt{2}/\sqrt{3 \cdot 5}$	0.730297	3	3	1	0	$\sqrt{3}/2$	0.866025
2	1	1	-1	$1/\sqrt{5}$	0.447214	3	3	1	-1	1/2	0.500000
2	0	1	1	$\sqrt{2}/\sqrt{5}$	0.632456	3	2	1	1	-1/2	-0.500000
2	0	1	0	$\sqrt{3}/\sqrt{5}$	0.774597	3	2	1	-1	$1/\sqrt{3}$	0.577350
2	2	2	1	$1/\sqrt{2}$	0.707107	3	2	1	0	$\sqrt{5}/(2\sqrt{3})$	0.645497
2	2	2	0	$1/\sqrt{2}$	0.707107	3	1	1	0	$-\sqrt{5}/(2\sqrt{3})$	-0.645497
2	2	2	-1	$\sqrt{3}/\sqrt{2 \cdot 5}$	0.547723	3	1	1	0	$1/(2\sqrt{3})$	0.288675
2	2	2	-2	$1/\sqrt{2 \cdot 5}$	0.316228	3	1	1	-1	$1/\sqrt{2}$	0.707107
2	1	2	1	0	0.000000	3	0	1	1	$-1/\sqrt{2}$	-0.707107
2	1	2	0	$1/\sqrt{5}$	0.447214	3	0	1	0	0	0.000000
2	1	2	-1	$\sqrt{2}/\sqrt{5}$	0.632456	3	3	2	-1	$\sqrt{5}/(2\sqrt{3})$	0.645497
2	0	2	0	0	0.000000	3	3	2	-1	$\sqrt{5}/(2\sqrt{3})$	0.645497
5/2	5/2	1/2	1/2	1	1.000000	3	3	2	-2	$1/\sqrt{2 \cdot 3}$	0.408248
5/2	5/2	1/2	-1/2	$1/\sqrt{2 \cdot 3}$	0.408248	3	2	2	1	$-\sqrt{5}/(2\sqrt{3})$	-0.645497
5/2	3/2	1/2	1/2	$\sqrt{5}/\sqrt{2 \cdot 3}$	0.912871	3	2	2	0	0	0.000000
5/2	3/2	1/2	-1/2	$1/\sqrt{3}$	0.577350	3	2	2	-1	1/2	0.500000
5/2	1/2	1/2	1/2	$\sqrt{2}/\sqrt{3}$	0.816497	3	1	2	2	$1/\sqrt{2 \cdot 3}$	0.408248
5/2	1/2	1/2	-1/2	$1/\sqrt{2}$	0.707107	3	1	2	1	$1/\sqrt{2 \cdot 3}$	0.408248
5/2	5/2	3/2	1/2	$\sqrt{5}/(2\sqrt{2})$	0.790569	3	1	2	0	-1/2	-0.500000
5/2	5/2	3/2	-1/2	$\sqrt{5}/(2\sqrt{3})$	0.645497	3	1	2	-1	$-\sqrt{3}/(2\sqrt{5})$	-0.387298
5/2	5/2	3/2	-3/2	$1/(2\sqrt{2})$	0.353553	3	1	2	-1	$1/\sqrt{2 \cdot 3 \cdot 5}$	0.182574
5/2	3/2	3/2	3/2	$-\sqrt{3}/(2\sqrt{2})$	-0.612372	3	1	2	-2	$\sqrt{2}/\sqrt{5}$	0.632456
5/2	3/2	3/2	1/2	$1/(2\sqrt{3})$	0.288675	3	0	2	2	$1/\sqrt{3}$	0.577350
5/2	3/2	3/2	-1/2	$7/(2\sqrt{2 \cdot 3 \cdot 5})$	0.639010	3	0	2	1	$1/\sqrt{3}$	0.577350
5/2	3/2	3/2	-3/2	$\sqrt{3}/\sqrt{2 \cdot 5}$	0.547723	3	0	2	1	$-1/\sqrt{2 \cdot 3 \cdot 5}$	-0.182574
5/2	1/2	3/2	3/2	$-1/\sqrt{2}$	-0.707107	3	0	2	0	$-2/\sqrt{3 \cdot 5}$	-0.516398
5/2	1/2	3/2	1/2	$-1/(2\sqrt{3 \cdot 5})$	-0.129099	3	3	3	0	$1/\sqrt{2 \cdot 3}$	0.408248
5/2	1/2	3/2	-1/2	$1/\sqrt{5}$	0.447214	3	3	3	-1	$1/\sqrt{2 \cdot 3}$	0.408248
5/2	1/2	3/2	-3/2	$3/(2\sqrt{5})$	0.670820	3	2	3	1	$-1/\sqrt{3}$	-0.577350
5/2	5/2	5/2	1/2	$\sqrt{5}/(3\sqrt{2})$	0.527046	3	2	3	0	$-1/\sqrt{2 \cdot 3}$	-0.408248
5/2	5/2	5/2	-1/2	$\sqrt{5}/(2\sqrt{3})$	0.645497	3	2	3	-1	0	0.000000
5/2	5/2	5/2	-3/2	$1/\sqrt{3}$	0.577350	3	2	3	-1	0	0.000000
5/2	5/2	5/2	-5/2	$\sqrt{5}/(2 \cdot 3)$	0.372678	3	2	3	-2	$1/\sqrt{2 \cdot 3}$	0.408248
						3	1	3	1	0	0.000000
						3	0	3	0	$-1/\sqrt{2 \cdot 3}$	-0.408248
						3	0	3	0	0	0.000000

ТАБЛИЦА 8.12

ЧИСЛЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ  $\Delta(a, b, c)$  С  $\frac{1}{2} \leq a, b, c \leq 5$ 

<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	$\frac{1}{\Delta(abc)}$	$\Delta(abc)$	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	$\frac{1}{\Delta(abc)}$	$\Delta(abc)$
1/2	1/2	1	$\sqrt{2 \cdot 3}$	0.408248	2	5/2	5/2	$4\sqrt{3 \cdot 5 \cdot 7}$	$0.243975 \cdot 10^{-1}$
1/2	1	3/2	$2\sqrt{3}$	0.288675	2	5/2	7/2	$2 \cdot 3\sqrt{2 \cdot 5 \cdot 7}$	$0.199205 \cdot 10^{-1}$
1/2	3/2	2	$2\sqrt{5}$	0.223607	2	5/2	9/2	$2 \cdot 3\sqrt{5 \cdot 7}$	$0.281718 \cdot 10^{-1}$
1/2	2	5/2	$\sqrt{2 \cdot 3 \cdot 5}$	0.182574	2	3	3	$2 \cdot 3\sqrt{3 \cdot 5 \cdot 7}$	$0.162650 \cdot 10^{-1}$
1/2	5/2	3	$\sqrt{2 \cdot 3 \cdot 7}$	0.154303	2	3	4	$4 \cdot 3\sqrt{5 \cdot 7}$	$0.140859 \cdot 10^{-1}$
1/2	3	7/2	$2\sqrt{2 \cdot 7}$	0.133631	2	3	5	$\sqrt{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11}$	$0.208063 \cdot 10^{-1}$
1/2	7/2	4	$2 \cdot 3\sqrt{2}$	0.117851	2	7/2	7/2	$2 \cdot 3\sqrt{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}$	$0.115011 \cdot 10^{-1}$
1/2	4	9/2	$3\sqrt{2 \cdot 5}$	0.105409	2	7/2	9/2	$2\sqrt{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11}$	$0.104031 \cdot 10^{-1}$
1/2	9/2	5	$\sqrt{2 \cdot 5 \cdot 11}$	$0.953463 \cdot 10^{-1}$	2	4	4	$2 \cdot 3\sqrt{5 \cdot 7 \cdot 11}$	$0.849412 \cdot 10^{-2}$
1	1	1	$2\sqrt{2 \cdot 3}$	0.204124	2	4	5	$4 \cdot 3\sqrt{2 \cdot 5 \cdot 11}$	$0.794552 \cdot 10^{-2}$
1	1	2	$\sqrt{2 \cdot 3 \cdot 5}$	0.182574	2	9/2	9/2	$4 \cdot 3\sqrt{3 \cdot 5 \cdot 11}$	$0.648749 \cdot 10^{-2}$
1	3/2	3/2	$2\sqrt{3 \cdot 5}$	0.129099	2	5	5	$3\sqrt{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 13}$	$0.508921 \cdot 10^{-2}$
1	3/2	5/2	$2\sqrt{3 \cdot 5}$	0.129099	5/2	5/2	3	$4 \cdot 3\sqrt{5 \cdot 7}$	$0.140859 \cdot 20^{-1}$
1	2	2	$2\sqrt{2 \cdot 3 \cdot 5}$	$0.912871 \cdot 10^{-1}$	5/2	5/2	4	$2 \cdot 3 \cdot 5\sqrt{7}$	$0.125988 \cdot 10^{-1}$
1	2	3	$\sqrt{3 \cdot 5 \cdot 7}$	$0.975900 \cdot 10^{-1}$	5/2	5/2	5	$2 \cdot 3\sqrt{7 \cdot 11}$	$0.189934 \cdot 10^{-1}$
1	5/2	5/2	$\sqrt{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}$	$0.690066 \cdot 10^{-1}$	5/2	3	7/2	$2 \cdot 3 \cdot 5\sqrt{2 \cdot 7}$	$0.890871 \cdot 10^{-2}$
1	5/2	7/2	$2\sqrt{2 \cdot 3 \cdot 7}$	$0.771517 \cdot 10^{-1}$	5/2	3	9/2	$2 \cdot 3\sqrt{5 \cdot 7 \cdot 11}$	$0.849412 \cdot 10^{-2}$
1	3	3	$4\sqrt{3 \cdot 7}$	$0.545545 \cdot 10^{-1}$	5/2	7/2	4	$2 \cdot 3\sqrt{2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11}$	$0.600625 \cdot 10^{-2}$
1	3	4	$2 \cdot 3\sqrt{7}$	$0.629941 \cdot 10^{-1}$	5/2	7/2	5	$2 \cdot 3\sqrt{2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11}$	$0.600625 \cdot 10^{-2}$
1	7/2	7/2	$2 \cdot 3\sqrt{2 \cdot 7}$	$0.445435 \cdot 10^{-1}$	5/2	4	9/2	$4 \cdot 3\sqrt{5 \cdot 7 \cdot 11}$	$0.424706 \cdot 10^{-2}$
1	7/2	9/2	$2 \cdot 3\sqrt{2 \cdot 5}$	$0.527046 \cdot 10^{-1}$	5/2	9/2	5	$4 \cdot 3\sqrt{5 \cdot 11 \cdot 13}$	$0.311649 \cdot 10^{-2}$
1	4	4	$4 \cdot 3\sqrt{5}$	$0.372678 \cdot 10^{-1}$	3	3	3	$4 \cdot 5\sqrt{2 \cdot 3 \cdot 7}$	$0.771517 \cdot 10^{-2}$
1	4	5	$3\sqrt{5 \cdot 11}$	$0.449467 \cdot 10^{-1}$	3	3	4	$3 \cdot 5\sqrt{2 \cdot 7 \cdot 11}$	$0.537215 \cdot 10^{-2}$
1	9/2	9/2	$3\sqrt{2 \cdot 5 \cdot 11}$	$0.317821 \cdot 10^{-1}$	3	3	5	$4 \cdot 3\sqrt{3 \cdot 7 \cdot 11}$	$0.548293 \cdot 10^{-2}$
1	5	5	$2\sqrt{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11}$	$0.275241 \cdot 10^{-1}$	3	7/2	7/2	$2 \cdot 5\sqrt{2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11}$	$0.465242 \cdot 10^{-2}$
3/2	3/2	2	$2 \cdot 3\sqrt{5}$	$0.745356 \cdot 10^{-1}$	3	7/2	9/2	$2 \cdot 3\sqrt{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11}$	$0.346771 \cdot 10^{-2}$
3/2	3/2	3	$2\sqrt{5 \cdot 7}$	$0.845154 \cdot 10^{-1}$	3	4	4	$4 \cdot 3\sqrt{2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11}$	$0.300312 \cdot 10^{-2}$
3/2	2	5/2	$2\sqrt{3 \cdot 5 \cdot 7}$	$0.487950 \cdot 10^{-1}$	3	4	5	$2 \cdot 3\sqrt{5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13}$	$0.235584 \cdot 10^{-2}$
3/2	2	7/2	$2\sqrt{2 \cdot 5 \cdot 7}$	$0.597614 \cdot 10^{-1}$	3	9/2	9/2	$4\sqrt{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13}$	$0.204022 \cdot 10^{-2}$
3/2	5/2	3	$2\sqrt{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}$	$0.345033 \cdot 10^{-1}$	3	5	5	$4\sqrt{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13}$	$0.144265 \cdot 10^{-2}$
3/2	5/2	4	$2 \cdot 3\sqrt{2 \cdot 7}$	$0.445435 \cdot 10^{-1}$	7/2	7/2	4	$2 \cdot 3 \cdot 5\sqrt{2 \cdot 7 \cdot 11}$	$0.268608 \cdot 10^{-2}$
3/2	3	7/2	$2 \cdot 3\sqrt{2 \cdot 3 \cdot 7}$	$0.257172 \cdot 10^{-1}$	7/2	7/2	5	$2 \cdot 3\sqrt{2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13}$	$0.215058 \cdot 10^{-2}$
3/2	3	9/2	$2\sqrt{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}$	$0.345033 \cdot 10^{-1}$	7/2	4	9/2	$2 \cdot 3\sqrt{2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13}$	$0.166583 \cdot 10^{-2}$
3/2	7/2	4	$2 \cdot 3\sqrt{2 \cdot 5 \cdot 7}$	$0.199205 \cdot 10^{-1}$	7/2	9/2	5	$2 \cdot 7\sqrt{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 13}$	$0.109054 \cdot 10^{-2}$
3/2	7/2	5	$2\sqrt{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11}$	$0.275241 \cdot 10^{-1}$	4	4	4	$3 \cdot 5\sqrt{2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13}$	$0.148997 \cdot 10^{-2}$
3/2	4	9/2	$2 \cdot 3\sqrt{2 \cdot 5 \cdot 11}$	$0.158910 \cdot 10^{-1}$	4	4	5	$4 \cdot 3 \cdot 7\sqrt{11 \cdot 13}$	$0.995526 \cdot 10^{-3}$
3/2	9/2	5	$2 \cdot 3\sqrt{3 \cdot 5 \cdot 11}$	$0.129750 \cdot 10^{-1}$	4	9/2	9/2	$2 \cdot 3 \cdot 7\sqrt{5 \cdot 11 \cdot 13}$	$0.890426 \cdot 10^{-3}$
2	2	2	$3\sqrt{2 \cdot 5 \cdot 7}$	$0.398410 \cdot 10^{-1}$	4	5	5	$3 \cdot 5 \cdot 7\sqrt{2 \cdot 11 \cdot 13}$	$0.563155 \cdot 10^{-3}$
2	2	3	$4\sqrt{2 \cdot 5 \cdot 7}$	$0.298807 \cdot 10^{-1}$	9/2	9/2	5	$2 \cdot 3 \cdot 7\sqrt{3 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 13}$	$0.514088 \cdot 10^{-3}$
2	2	4	$3\sqrt{2 \cdot 5 \cdot 7}$	$0.398410 \cdot 10^{-1}$	5	5	5	$8 \cdot 3 \cdot 7\sqrt{3 \cdot 11 \cdot 13}$	$0.287384 \cdot 10^{-3}$

## 6j-СИМВОЛЫ И КОЭФФИЦИЕНТЫ РАКА

### 9.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ

1. 6j-Символы Вигнера [110] определяются через коэффициенты преобразования между различными схемами сложения трех угловых моментов. Угловые моменты  $\mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2, \mathbf{j}_3$  можно связать в полный момент  $\mathbf{j}$  с проекцией  $m$  тремя разными способами:

$$\begin{aligned} \text{I) } & \mathbf{j}_1 + \mathbf{j}_2 = \mathbf{j}_{12}, & \mathbf{j}_{12} + \mathbf{j}_3 = \mathbf{j}, \\ \text{II) } & \mathbf{j}_2 + \mathbf{j}_3 = \mathbf{j}_{23}, & \mathbf{j}_1 + \mathbf{j}_{23} = \mathbf{j}, \\ \text{III) } & \mathbf{j}_1 + \mathbf{j}_3 = \mathbf{j}_{13}, & \mathbf{j}_{13} + \mathbf{j}_2 = \mathbf{j}. \end{aligned} \quad (1)$$

Состояния, соответствующие схеме связи I, обозначим как  $|j_1 j_2 (j_{12}) j_3 j m\rangle$ . Они являются собственными состояниями операторов  $\hat{j}_1^2, \hat{j}_2^2, \hat{j}_3^2, \hat{j}_{12}^2, \hat{j}^2, \hat{j}_z$  и имеют вид

$$|j_1 j_2 (j_{12}) j_3 j m\rangle = \sum_{m_1 m_2 m_3} C_{j_1 m_1 j_2 m_2}^{j m} C_{j_1 m_1 j_2 m_2}^{j_{12} m_{12}} |j_1 m_1, j_2 m_2, j_3 m_3\rangle. \quad (2)$$

Состояния, соответствующие схеме связи II, — собственные состояния операторов  $\hat{j}_1^2, \hat{j}_2^2, \hat{j}_3^2, \hat{j}_{23}^2, \hat{j}^2, \hat{j}_z$

$$|j_1, j_2 j_3 (j_{23}) j m\rangle = \sum_{m_1 m_2 m_3} C_{j_1 m_1 j_2 m_2}^{j m} C_{j_2 m_2 j_3 m_3}^{j_{23} m_{23}} |j_1 m_1, j_2 m_2, j_3 m_3\rangle. \quad (3)$$

Аналогично состояния, соответствующие схеме связи III, являются собственными состояниями операторов  $\hat{j}_1^2, \hat{j}_2^2, \hat{j}_3^2, \hat{j}_{13}^2, \hat{j}^2, \hat{j}_z$  и имеют вид

$$|j_1 j_3 (j_{13}) j_2 j m\rangle = \sum_{m_1 m_2 m_3} C_{j_1 m_1 j_3 m_3}^{j m} C_{j_1 m_1 j_3 m_3}^{j_{13} m_{13}} |j_1 m_1, j_2 m_2, j_3 m_3\rangle. \quad (4)$$

Состояния, отвечающие каждой из схем связи, образуют полный набор. Переходу от одной схемы связи к другой соответствует унитарное преобразование, которое связывает состояния с одинаковыми значениями полного момента  $j$  и его проекции  $m$ . Коэффициенты этого преобразования  $U$  отличаются от 6j-символов только нормировочным и фазовым множителями. Выделение этих множителей производится для того, чтобы 6j-символы обладали более простыми свойствами симметрии (см. 9.4).

Более точно 6j-символы Вигнера  $\left\{ \begin{matrix} j_1 & j_2 & j_{12} \\ j_3 & j & j_{23} \end{matrix} \right\}$  определяются следующим соотношением

$$\begin{aligned} \langle j_1 j_2 (j_{12}) j_3 j m | j_1, j_2 j_3 (j_{23}) j' m' \rangle &= \delta_{j j'} \delta_{m m'} U(j_1 j_2 j_3; j_{12} j_{23}) = \\ &= \delta_{j j'} \delta_{m m'} (-1)^{j_1 + j_2 + j_3 + j} \sqrt{(2j_{12} + 1)(2j_{23} + 1)} \left\{ \begin{matrix} j_1 & j_2 & j_{12} \\ j_3 & j & j_{23} \end{matrix} \right\}. \end{aligned} \quad (5)$$

Отсюда можно получить [92, 64]

$$\begin{aligned} \langle j_1 j_2 (j_{12}) j_3 j m | j_1 j_3 (j_{13}) j_2 j' m' \rangle &= \delta_{j j'} \delta_{m m'} (-1)^{j + j_1 - j_{12} - j_{13}} U(j_2 j_1 j_3; j_{12} j_{13}) = \\ &= \delta_{j j'} \delta_{m m'} (-1)^{j_2 + j_3 + j_{12} + j_{13}} \sqrt{(2j_{12} + 1)(2j_{13} + 1)} \left\{ \begin{matrix} j_2 & j_1 & j_{12} \\ j_3 & j & j_{13} \end{matrix} \right\}, \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \langle j_1, j_2 j_3 (j_{23}) j m | j_1 j_3 (j_{13}) j_2 j' m' \rangle &= \delta_{j j'} \delta_{m m'} (-1)^{j_2 + j_3 - j_{23}} U(j_1 j_3 j_2; j_{13} j_{23}) = \\ &= \delta_{j j'} \delta_{m m'} (-1)^{j_1 + j + j_{23}} \sqrt{(2j_{13} + 1)(2j_{23} + 1)} \left\{ \begin{matrix} j_1 & j_3 & j_{13} \\ j_2 & j & j_{23} \end{matrix} \right\}. \end{aligned} \quad (7)$$

Из определения  $6j$ -символов (5) следует, что они могут быть выражены через коэффициенты Клебша—Гордана по формуле

$$\sum C_{j_2 m_2 j_3 m_3}^{j_1 m_1} C_{j_1 m_1 j_2 m_2}^{j_2 m_2} C_{j_1 m_1 j_3 m_3}^{j_3 m_3} C_{j_2 m_2 j_3 m_3}^{j_1 m_1} = \delta_{j j'} \delta_{m m'} (-1)^{j_1 + j_2 + j_3 + j} \sqrt{(2j_{12} + 1)(2j_{23} + 1)} \begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & j_{12} \\ j_3 & j & j_{23} \end{Bmatrix}. \quad (8)$$

Здесь суммирование проводится по  $m_1, m_2, m_3, m_{12}, m_{23}$ , значения  $m$  и  $m'$  фиксированы. Это соотношение однозначно фиксирует как величину  $6j$ -символов, так и их фазу.  $6j$ -Символы, как и коэффициенты Клебша—Гордана, вещественны.

Правила векторного сложения налагают определенные ограничения на значения моментов, входящих в  $6j$ -символы  $\begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & j_{12} \\ j_3 & j & j_{23} \end{Bmatrix}$ .

а. Значения всех моментов являются целыми или полужелыми неотрицательными числами (исключение из этого правила рассматривается в 9.4).

б. Для каждой из следующих троек моментов  $(j_1 j_2 j_{12})$ ,  $(j_{12} j_3 j)$ ,  $(j_2 j_3 j_{23})$  и  $(j_{23} j_1 j)$  должны выполняться условия треугольника (см. 8.1 (1)).

Унитарность преобразования, отвечающего переходу к другой схеме связи, означает, что  $6j$ -символы удовлетворяют условию ортогональности и нормировки

$$\sum_{j_{12}} (2j_{12} + 1)(2j_{23} + 1) \begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & j_{12} \\ j_3 & j & j_{23} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & j_{12} \\ j_3 & j & j'_{23} \end{Bmatrix} = \delta_{j_{23} j'_{23}}, \quad (9)$$

$$\sum_{j_{23}} (2j_{12} + 1)(2j_{23} + 1) \begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & j_{12} \\ j_3 & j & j_{23} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & j'_{12} \\ j_3 & j & j_{23} \end{Bmatrix} = \delta_{j_{12} j'_{12}}. \quad (10)$$

В дальнейшем для обозначения аргументов  $6j$ -символов будем использовать латинские буквы  $a, b, c$  и т. д.

2. Вместо  $6j$ -символов Вигнера часто используются коэффициенты Рака [91], отличающиеся от  $6j$ -символов только выбором фазы:

$$\begin{Bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{Bmatrix} \equiv (-1)^{a+b+d+e} W(abed; cf). \quad (11)$$

Коэффициенты Рака были введены независимо от  $6j$ -символов и получили широкое распространение в спектроскопии. Их фаза выбрана такой же, как у коэффициентов преобразования между схемами связи I и II (формула (5)).

3.  $6j$ -Символы и коэффициенты Рака могут быть представлены в виде таблицы  $\|R_{i\alpha}\|$  размерности  $3 \times 4$  ( $i = 1, 2, 3$ ;  $\alpha = 1, 2, 3, 4$ ). Эта таблица называется  $R$ -символом (Шелепин [105]).

$$\left\| \begin{matrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} & R_{14} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} & R_{24} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} & R_{34} \end{matrix} \right\| \equiv \begin{Bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{Bmatrix} \equiv (-1)^{a+b+d+e} W(abed; cf), \quad (12)$$

где

$$\begin{aligned} R_{11} &= -c + d + e, & R_{12} &= b + d - f, & R_{13} &= a + e - f, & R_{14} &= a + b - c, \\ R_{21} &= -b + d + f, & R_{22} &= c + d - e, & R_{23} &= a - b + c, & R_{24} &= a - e + f, \\ R_{31} &= -a + e + f, & R_{32} &= -a + b + c, & R_{33} &= c - d + e, & R_{34} &= b - d + f. \end{aligned} \quad (13)$$

Обратные соотношения имеют вид

$$\begin{aligned} 2a &= R_{13} + R_{24} = R_{14} + R_{23}, & 2d &= R_{11} + R_{22} = R_{12} + R_{21}, \\ 2b &= R_{12} + R_{34} = R_{14} + R_{32}, & 2e &= R_{11} + R_{33} = R_{13} + R_{31}, \\ 2c &= R_{22} + R_{33} = R_{23} + R_{32}, & 2f &= R_{21} + R_{34} = R_{24} + R_{31}. \end{aligned} \quad (14)$$

Все 12 элементов  $R_{i\alpha}$  являются целыми неотрицательными числами. Разности между соответствующими элементами строк и столбцов постоянны.

$$\begin{aligned} R_{i\alpha} - R_{k\alpha} &= R_{i\beta} - R_{k\beta}, \\ R_{i\alpha} - R_{i\beta} &= R_{k\alpha} - R_{k\beta}, \end{aligned} \quad (i, k = 1, 2, 3; \alpha, \beta = 1, 2, 3, 4). \quad (15)$$

Имеют место следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^3 R_{i1} &= 2(d+e+f) - a - b - c, & \sum_{i=1}^3 R_{i3} &= 2(a+c+e) - b - d - f, \\ \sum_{i=1}^3 R_{i2} &= 2(b+c+d) - a - e - f, & \sum_{i=1}^3 R_{i4} &= 2(a+b+f) - c - d - e, \\ \sum_{i,\alpha} R_{i\alpha} &= 2(a+b+c+d+e+f). \end{aligned} \quad (16)$$

Используется также следующая параметризация элементов таблицы  $R_{i\alpha}$  [45]:

$$R_{i\alpha} = A_i - B_\alpha. \quad (17)$$

Здесь параметры  $A_i$ ,  $B_\alpha$  — целые неотрицательные числа:

$$\begin{aligned} A_1 &= a + b + d + e, & B_1 &= a + b + c, \\ A_2 &= a + c + d + f, & B_2 &= a + e + f, \\ A_3 &= b + c + e + f, & B_3 &= b + d + f, \\ & & B_4 &= c + d + e, \end{aligned} \quad (18)$$

причем

$$\sum_{i=1}^3 A_i = \sum_{\alpha=1}^4 B_\alpha = 2(a+b+c+d+e+f). \quad (19)$$

Обратные соотношения имеют вид

$$\begin{aligned} 2a &= A_1 + A_2 - B_3 - B_4, & 2d &= A_1 + A_2 - B_1 - B_2, \\ 2b &= A_1 + A_3 - B_2 - B_4, & 2e &= A_1 + A_3 - B_1 - B_3, \\ 2c &= A_2 + A_3 - B_2 - B_3, & 2f &= A_2 + A_3 - B_1 - B_4. \end{aligned} \quad (20)$$

С помощью  $R$ -символов наиболее просто формулируются свойства симметрии  $6j$ -символов и коэффициентов Рака.

## 9.2. ЯВНЫЙ ВИД $6j$ -СИМВОЛОВ И ИХ СВЯЗЬ С ДРУГИМИ ФУНКЦИЯМИ

$6j$ -Символы  $\begin{Bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{Bmatrix}$  равны нулю, если хотя бы для одной из троек моментов  $(abc)$ ,  $(cde)$ ,  $(aef)$  и  $(bdf)$  не выполняется условие треугольника 8.1 (1). Если все условия треугольника выполнены, то для  $6j$ -символов справедливы формулы, приведенные ниже. Соответствующие формулы для коэффициентов Рака можно получить, используя связь этих коэффициентов с  $6j$ -символами 9.1 (11).

### 1. Выражения для $6j$ -символов в виде конечных сумм

В этих выражениях суммирование проводится по всем целочисленным неотрицательным значениям  $n$ , при которых под знаком факториала стоят неотрицательные числа. Величины  $\Delta(abc)$  даются формулой 8.2 (1). Численные значения  $\Delta(abc)$  приведены в табл. 8.12.

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{Bmatrix} &= \Delta(abc) \Delta(cde) \Delta(aef) \Delta(bdf) \times \\ & \times \sum_n \frac{(-1)^n (n+1)!}{(n-a-b-c)! (n-c-d-e)! (n-a-e-f)! (n-b-d-f)! (a+b+d+e-n)! \times} \\ & \times (a+c+d+f-n)! (b+c+e+f-n)! \quad (\text{Ракá [91]}). \quad (1) \end{aligned}$$

Заменой индекса суммирования  $n \rightarrow a+b+d+e-n$  формула (1) может быть приведена к виду

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{Bmatrix} &= (-1)^{a+b+d+e-n} \Delta(abc) \Delta(cde) \Delta(aef) \Delta(bdf) \times \\ & \times \sum_n \frac{(-1)^n (a+b+d+e+1-n)!}{n! (a+b-c-n)! (-c+d+e-n)! (a+e-f-n)! (b+d-f-n)! \times} \\ & \times (-a+c-d+f+n)! (-b+c-e+f+n)! \quad (\text{Ракá [91]}). \quad (2) \end{aligned}$$

Другие выражения для  $6j$ -символов, не сводящиеся к (1) и (2), имеют вид [45, 50]

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{matrix} a & b & c \\ d & e & f \end{matrix} \right\} &= (-1)^{a+e+d+f} \frac{\Delta(aef) \Delta(bdf)}{\Delta(abc) \Delta(cde)} \times \\ &\times \sum_n (-1)^n \frac{(a+b+c+n)! (c-d+e+n)! (a-c+d+f-n)!}{n! (a-e+f-n)! (-b+d+f-n)! (-a+b-d+e+n)! (b+c+e-f+1+n)!}, \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{matrix} a & b & c \\ d & e & f \end{matrix} \right\} &= (-1)^{a+c+d+f} \frac{\Delta(abc) \Delta(bdf)}{\Delta(aef) \Delta(cde)} \times \\ &\times \sum_n (-1)^n \frac{(a-b+d+e-n)! (-b+c+e+f-n)! (a+c+d+f+1-n)!}{n! (a-b+c-n)! (-b+d+f-n)! (a+e+f+1-n)! (c+d+e+1-n)!}, \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{matrix} a & b & c \\ d & e & f \end{matrix} \right\} &= (-1)^{a+b+d+e} \frac{\Delta(abc) \Delta(cde) \Delta(aef) \Delta(bdf) (a+e+f+1)! (b+d+f+1)!}{(a+b-c)! (a-b+c)! (-c+d+e)! (c+d-e)! (-a+e+f)! (b-d+f)!} \times \\ &\times \sum_n (-1)^n \frac{(a+e+f+n)! (b-d+f+n)! (a+c+d-f-n)!}{n! (a+e-f-n)! (b+d-f-n)! (-a+c-d+f+n)! (2f+1+n)!}, \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{matrix} a & b & c \\ d & e & f \end{matrix} \right\} &= (-1)^{b+c+e+f} \frac{\Delta(abc) \Delta(cde) \Delta(aef) \Delta(bdf) (a+b+c+1)! (b+d+f+1)!}{(a+b-c)! (c-d+e)! (c+d-e)! (a-e+f)! (-a+e+f)! (b+d-f)!} \times \\ &\times \sum_n (-1)^n \frac{(2b-n)! (b+c-e+f-n)! (b+c+e+f+1-n)!}{n! (-a+b+c-n)! (b-d+f-n)! (a+b+c+1-n)! (b+d+f+1-n)!}. \end{aligned} \quad (6)$$

## 2. Формула Баргмана [53]

$$\left\{ \begin{matrix} a & b & c \\ d & e & f \end{matrix} \right\} \equiv \left\| \begin{matrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} & R_{14} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} & R_{24} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} & R_{34} \end{matrix} \right\| = \left[ \frac{\prod_{i=1}^3 \prod_{\alpha=1}^4 (R_{i\alpha})!}{\prod_{\alpha=1}^4 (B_{\alpha} + 1)!} \right]^{1/2} \sum_{x_i, y_{\alpha}} \frac{(-1)^n (n+1)!}{\prod_{i=1}^3 (x_i)! \prod_{\alpha=1}^4 (y_{\alpha})!}. \quad (7)$$

Здесь  $R_{i\alpha}$  — элементы  $R$ -символа (см. 9.1.3),  $B_{\alpha}$  даются формулой 9.1(18),  $x_i, y_{\alpha}$  — переменные суммирования,  $n \equiv \sum_{i=1}^3 x_i + \sum_{\alpha=1}^4 y_{\alpha}$ . Суммирование проводится по всем целым неотрицательным значениям  $x_i, y_{\alpha}$ , удовлетворяющим условиям  $x_i + y_{\alpha} = R_{i\alpha}$ . Эти условия сводят число независимых переменных суммирования до одной. В написанной сумме содержится  $r+1$  слагаемое, где  $r = \min \{R_{i\alpha}\}$ . Если в качестве независимой переменной суммирования выбрать  $n$  (целое, неотрицательное), то  $x_i = A_i - n$ ,  $y_{\alpha} = n - B_{\alpha}$ , где  $A_i, B_{\alpha}$  определены в 9.1.3. При этом формула Баргмана переходит в формулу Рака (1).

## 3. Связь с обобщенными гипергеометрическими функциями

$6j$ -символы выражаются через гипергеометрические функции  ${}_4F_3$  от единичного аргумента

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{matrix} a & b & c \\ d & e & f \end{matrix} \right\} &= (-1)^{a+b+d+e} \frac{\Delta(abc) \Delta(cde) \Delta(aef) \Delta(bdf) (a+b+d+e+1)!}{(a+b-c)! (-c+d+e)! (a+e-f)! (b+d-f)! (-a+c-d+f)! (-b+c-e+f)!} \times \\ &\times {}_4F_3 \left[ \begin{matrix} -a-b+c, c-d-e, -a-e+f, -b-d+f \\ -a-b-d-e-1, -a+c-d+f+1, -b+c-e+f+1 \end{matrix} \middle| 1 \right], \quad (\text{Роуз [30]}) \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{matrix} a & b & c \\ d & e & f \end{matrix} \right\} &= (-1)^{a+c+d+f} \frac{\Delta(aef) \Delta(bdf) (-a+b+c)! (c-d+e)! (a-c+d+f)!}{\Delta(abc) \Delta(cde) (a-e+f)! (-b+d+f)! (-a+b-d+e)! (b+c+e-f+1)!} \times \\ &\times {}_4F_3 \left[ \begin{matrix} -a+b+c+1, c-d+e+1, -a+e-f, b-d-f \\ -a+c-d-f, -a+b-d+e+1, b+c+e-f+2 \end{matrix} \middle| 1 \right], \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{matrix} a & b & c \\ d & e & f \end{matrix} \right\} &= (-1)^{a+c+d+f} \frac{\Delta(abc) \Delta(bdf) (a-b+d+e)! (-b+c+e+f)! (a+c+d+f+1)!}{\Delta(aef) \Delta(cde) (a-b+c)! (-b+d+f)! (a+e+f+1)! (c+d+e+1)!} \times \\ &\times {}_4F_3 \left[ \begin{matrix} -a+b-c, b-d-f, -a-e-f-1, -c-d-e-1 \\ -a+b-d-e, b-c-e-f, -a-c-d-f-1 \end{matrix} \middle| 1 \right], \end{aligned} \quad (10)$$

$$\left\{ \begin{matrix} a & b & c \\ d & e & f \end{matrix} \right\} = (-1)^{a+b+d+e} \times$$

$$\times \frac{\Delta(abc) \Delta(cde) \Delta(aef) \Delta(bdf) (a+e+f+1)! (b+d+f+1)! (a+c+d-f)!}{(a+b-c)! (a-b+c)! (-c+d+e)! (c+d-e)! (a+e-f)! (b+d-f)! (-a+c-d+f)! (2f+1)!} \times$$

$$\times {}_4F_3 \left[ \begin{matrix} -a-e+f, -b-d+f, -a+e+f+1, b-d+f+1 \\ -a-c-d+f, -a+c-d+f+1, 2f+2 \end{matrix} \middle| 1 \right], \quad (11)$$

$$\left\{ \begin{matrix} a & b & c \\ d & e & f \end{matrix} \right\} = (-1)^{b+c+e+f} \times$$

$$\times \frac{\Delta(abc) \Delta(cde) \Delta(aef) \Delta(bdf) (2b)! (b+c-e+f)! (b+c+e+f+1)!}{(-a+b+c)! (a+b-c)! (c-d+e)! (c+d-e)! (a-e+f)! (-a+e+f)! (b+d-f)! (b-d+f)!} \times$$

$$\times {}_4F_3 \left[ \begin{matrix} a-b-c, -b+d-f, -a-b-c-1, -b-d-f-1 \\ -2b, -b-c+e-f, -b-c-e-f-1 \end{matrix} \middle| 1 \right]. \quad (12)$$

Формулы (8)—(12) являются записью в виде обобщенных гипергеометрических функций формул (2)—(6) соответственно.

#### 4. СВЯЗЬ $6j$ -СИМВОЛОВ С $3jm$ -СИМВОЛАМИ

$6j$ -Символы могут быть записаны как сумма произведений коэффициентов Клебша—Гордана (формула 9.1 (8)) или  $3jm$ -символов. Связь  $6j$ -символов с  $3jm$ -символами имеет вид

$$\left\{ \begin{matrix} a & b & c \\ d & e & f \end{matrix} \right\} = \sum (-1)^{d+e+f+\delta+\varepsilon+\varphi} \begin{pmatrix} a & b & c \\ \alpha & \beta & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & e & f \\ \alpha & \varepsilon & -\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & b & f \\ -\delta & \beta & \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & e & c \\ \delta & -\varepsilon & \gamma \end{pmatrix}. \quad (13)$$

В формуле (13) суммирование проводится по всем проекциям моментов  $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \varphi$ , при этом число независимых индексов суммирования равно 3. Некоторые другие суммы  $3jm$ -символов, приводящие к  $6j$ -символам, рассмотрены в гл. 12.

#### 5. Представление $6j$ -символов в виде квазибиномов

$6j$ -символы могут быть записаны в виде квазибиномов [45, 99], которые определены в 8.2.2. Такое представление широко используется при составлении алгебраических таблиц  $6j$ -символов. Введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} k_1 &\equiv e-d, & B &\equiv R_{21} = -b+d+f, & F &\equiv R_{12} = b+d-f, \\ k_2 &\equiv a-b, & D &\equiv R_{34} = b-d+f, & E &\equiv R_{12} + R_{21} + R_{34} + 1 = b+d+f+1. \end{aligned} \quad (14)$$

Тогда зависимость  $6j$ -символов от  $k_1$  и  $k_2$  имеет вид

$$\left\{ \begin{matrix} a & b & c \\ d & e & f \end{matrix} \right\} \equiv \left\{ \begin{matrix} b+k_2 & b & c \\ d & d+k_1 & f \end{matrix} \right\} =$$

$$= (-1)^{E+k_1+k_2+1} \left[ \frac{(c+k_2)^{(2k_2)} B^{(k_2-k_1)} D^{(-1)(k_2-k_1)} E^{(-1)(k_2+k_1)} F^{(-1)(k_2+k_1)}}{(c+k_1)! (c-k_1)! (2b+c+k_2+1)^{(2c+1)} (2d+c+k_1+1)^{(2c+1)}} \right]^{1/2} (u-v)^{(c-k_2)}. \quad (15)$$

Величины  $u$  и  $v$  могут выбираться разными способами в зависимости от того, какая из формул в 9.2.1 записывается в виде квазибинома [45].

Формулам (1) и (2) соответствуют

$$\begin{aligned} u &= (c+k_1)^{(1)} (B-k_2+k_1)^{(1)} D^{(1)}, \\ v &= (c-k_1)^{(1)} F^{(1)} (E+k_1+k_2)^{(-1)}. \end{aligned} \quad (16)$$

Формуле (3) отвечают

$$\begin{aligned} u &= (c+k_1)^{(1)} B^{(-1)} (D+k_2-k_1)^{(-1)}, \\ v &= (c-k_1)^{(1)} (F+k_2+k_1)^{(-1)} E^{(1)}. \end{aligned} \quad (17)$$

или

$$\begin{aligned} u &= (2d-c+k_1)^{(-1)} D^{(1)} (F+k_2+k_1)^{(-1)}, \\ v &= (2d+c+k_1+1)^{(1)} (D+k_2-k_1)^{(-1)} F^{(1)}. \end{aligned} \quad (18)$$

Формуле (4) соответствуют

$$\begin{aligned} u &= (2d + c + k_1 + 1)^{(1)} (B - k_2 + k_1)^{(1)} E^{(1)}, \\ v &= (2d - c + k_1)^{(-1)} B^{(-1)} (E + k_2 + k_1)^{(-1)}. \end{aligned} \quad (19)$$

Формуле (5) отвечают

$$\begin{aligned} u &= (c + k_2)^{(-1)} (B - k_2 + k_1)^{(1)} (D + k_2 - k_1)^{(-1)}, \\ v &= (c - k_1)^{(1)} (2b + c + k_2 + 1)^{(1)} (2d - c + k_1)^{(-1)} \end{aligned} \quad (20)$$

или

$$\begin{aligned} u &= (c + k_1)^{(1)} (2b - c + k_2)^{(-1)} (2d - c + k_1)^{(-1)}, \\ v &= (c + k_2)^{(-1)} F^{(1)} E^{(1)}. \end{aligned} \quad (21)$$

Формуле (6) соответствуют:

$$\begin{aligned} u &= D^{(1)} E^{(1)} (2b + c + k_2 + 1)^{(1)}, \\ v &= (D + k_2 - k_1)^{(-1)} (E + k_2 + k_1)^{(-1)} (2b - c + k_2)^{(-1)} \end{aligned} \quad (22)$$

или

$$\begin{aligned} u &= (c + k_1)^{(1)} (2b + c + k_2 + 1)^{(1)} (2d + c + k_1 + 1)^{(1)}, \\ v &= (c + k_2)^{(-1)} (F + k_2 + k_1)^{(-1)} (E + k_2 + k_1)^{(-1)}. \end{aligned} \quad (23)$$

Выражение (15) для  $6j$ -символов справедливо в том случае, когда показатели квазистепеней  $2k_2$ ,  $k_2 - k_1$  и  $k_2 + k_1$  являются неотрицательными целыми числами, т. е. когда  $k_2 \geq |k_1| \geq 0$ . Если какой-нибудь из показателей является отрицательным числом, то в соответствующей квазистепени нужно произвести замену

$$p^{(\sigma)} \rightarrow \frac{1}{p^{(-1)(1+\sigma)}}, \quad p^{(-1)(\sigma)} \rightarrow \frac{1}{p^{(1+\sigma)}} \quad \text{при } \sigma < 0. \quad (24)$$

### 9.3. ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ $6j$ -СИМВОЛОВ

Квадраты  $6j$ -символов выражаются в виде интегралов от характеров представлений группы вращений [110].

$$\left\{ \begin{array}{ccc} a & b & c \\ d & e & f \end{array} \right\}^2 = \frac{1}{(8\pi^2)^3} \int dR_1 dR_2 dR_3 \chi^a(R_1) \chi^b(R_2) \chi^c(R_3) \chi^d(R_2 R_3^{-1}) \chi^e(R_3 R_1^{-1}) \chi^f(R_1 R_2^{-1}). \quad (1)$$

Здесь

$$\chi^j(R) \equiv \sum_m D_{mm}^j(R) \equiv \sum_m D_{mm}^j(\alpha, \beta, \gamma)$$

— характер представления с весом  $j$  (см. 4.14),

$$\int f(R) dR \equiv \int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^\pi \sin \beta d\beta \int_0^{2\pi} d\gamma f(\alpha, \beta, \gamma).$$

Для  $6j$ -символов частного вида имеют место следующие интегральные представления:

$$\left\{ \begin{array}{ccc} a & b & c \\ a & b & f \end{array} \right\} = \frac{(-1)^{2c}}{(8\pi^2)^2} \int dR_1 dR_2 \chi^c(R_1) \chi^f(R_2) \chi^a(R_2 R_1) \chi^b(R_2^{-1} R_1), \quad (2)$$

$$\left\{ \begin{array}{ccc} a & b & g \\ d & b & c \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{ccc} a & b & g \\ d & b & f \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{ccc} a & b & c \\ d & b & f \end{array} \right\} = \frac{(-1)^{2a}}{(8\pi^2)^4} \int dR_1 dR_2 dR_3 dR_4 \chi^c(R_1) \chi^g(R_2) \chi^f(R_3) \chi^a(R_4 R_2) \chi^b(R_4 R_3 R_2 R_1 R_4) \chi^d(R_1 R_4 R_3), \quad (3)$$

$$\left\{ \begin{array}{ccc} a & b & c \\ d & e & f \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{ccc} a & e & f \\ a & b & c \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{ccc} d & b & f \\ a & b & c \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{ccc} d & e & c \\ a & b & c \end{array} \right\} =$$

$$= \frac{(-1)^{2d}}{(8\pi^2)^5} \int dR_1 dR_2 dR_3 dR_4 dR_5 \chi^d(R_1) \chi^e(R_2) \chi^f(R_3) \chi^a(R_4) \chi^a(R_5^{-1} R_3 R_2) \chi^b(R_5 R_4 R_2 R_1) \chi^c(R_4^{-1} R_5 R_1 R_3). \quad (4)$$



## 9.4. СВОЙСТВА СИММЕТРИИ 6j-СИМВОЛОВ И КОЭФФИЦИЕНТОВ РАКА

1. Свойства симметрии 6j-символов и  $W$ -коэффициентов наиболее просто формулируются, когда эти коэффициенты записаны в виде  $R$ -символа (см. 9.1.3).

Величина  $R$ -символа не меняется при произвольной перестановке как строк, так и столбцов этого символа [105]:

$$\begin{vmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} & R_{14} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} & R_{24} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} & R_{34} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} R_{i1} & R_{i2} & R_{i3} & R_{i4} \\ R_{k1} & R_{k2} & R_{k3} & R_{k4} \\ R_{l1} & R_{l2} & R_{l3} & R_{l4} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} R_{1\alpha} & R_{1\beta} & R_{1\gamma} & R_{1\delta} \\ R_{2\alpha} & R_{2\beta} & R_{2\gamma} & R_{2\delta} \\ R_{3\alpha} & R_{3\beta} & R_{3\gamma} & R_{3\delta} \end{vmatrix}. \quad (1)$$

Другими словами, величина  $R$ -символа не меняется при любых перестановках между собой как параметров  $A_i$ , так и параметров  $B_\alpha$  (см. 9.1.3). Эти соотношения симметрии связывают  $3! \times 4! = 144$ , вообще говоря, различных коэффициента Рака.

2. Указанные свойства симметрии  $R$ -символа эквивалентны следующим свойствам симметрии 6j-символов.

а. Классические свойства симметрии [110]. Величина 6j-символа не меняется при перестановке столбцов, а также любых двух элементов верхней строки с расположенными под ними двумя элементами нижней строки.

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a & c & b \\ d & f & e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & a & c \\ e & d & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & c & a \\ e & f & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & a & b \\ f & d & e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & b & a \\ f & e & d \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} a & e & f \\ d & b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & f & e \\ d & c & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e & a & f \\ b & d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e & f & a \\ b & c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f & a & e \\ c & d & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f & e & a \\ c & b & d \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} d & e & c \\ a & b & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & c & e \\ a & f & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e & d & c \\ b & a & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e & c & d \\ b & f & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & d & e \\ f & a & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & e & d \\ f & b & a \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} d & b & f \\ a & e & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & f & b \\ a & c & e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & d & f \\ e & a & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & f & d \\ e & c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f & d & b \\ c & a & e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f & b & d \\ c & e & a \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2)$$

Эти соотношения связывают между собой  $3! \times 4! = 24$  6j-символа.

б. Свойства симметрии Редже [95]. Эти свойства имеют функциональный характер, т. е. они не сводятся к простой перестановке параметров в 6j-символе.

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a & s_1 - b & s_1 - c \\ d & s_1 - e & s_1 - f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_2 - a & b & s_2 - c \\ s_2 - d & e & s_2 - f \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} s_3 - a & s_3 - b & c \\ s_3 - d & s_3 - e & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_2 - d & s_3 - e & s_1 - f \\ s_2 - a & s_3 - b & s_1 - c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_3 - d & s_1 - e & s_2 - f \\ s_3 - a & s_1 - b & s_2 - c \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (3)$$

где

$$s_1 = \frac{1}{2}(b + c + e + f), \quad s_2 = \frac{1}{2}(a + c + d + f), \quad s_3 = \frac{1}{2}(a + b + d + e). \quad (4)$$

Эти свойства особенно удобно использовать, когда величина  $s_i$  равна одному из параметров 6j-символа.

Комбинируя свойства симметрии Редже с классическими свойствами симметрии, получим все 144 соотношения симметрии.

3. Для коэффициентов Рака соотношения симметрии имеют следующий вид.

а. Классические свойства симметрии [91]

$$\begin{aligned} W(abed; cf) &= W(deba; cf) = W(edab; cf) = W(bade; cf) = \\ &= W(aebd; fc) = W(dbea; fc) = W(bdae; fc) = W(eadb; fc) = \\ &= \varepsilon_1 W(acfd; be) = \varepsilon_1 W(dfca; be) = \varepsilon_1 W(fdac; be) = \varepsilon_1 W(cadf; be) = \\ &= \varepsilon_1 W(afcd; eb) = \varepsilon_1 W(dcfa; eb) = \varepsilon_1 W(cdaf; eb) = \varepsilon_1 W(fadc; eb) = \\ &= \varepsilon_2 W(cbef; ad) = \varepsilon_2 W(febe; ad) = \varepsilon_2 W(efcb; ad) = \varepsilon_2 W(befe; ad) = \\ &= \varepsilon_2 W(cebf; da) = \varepsilon_2 W(fbce; da) = \varepsilon_2 W(bfce; da) = \varepsilon_2 W(ecfb; da), \end{aligned} \quad (5)$$

где

$$\varepsilon_1 = (-1)^{b+c-e-f}, \quad \varepsilon_2 = (-1)^{a+d-c-f}. \quad (6)$$

## б. Свойства симметрии Редже

$$\begin{aligned} W(abed; cf) &= W(s_3 - a, s_3 - b, s_3 - e, s_3 - d; cf) = \varepsilon_1 W(a, s_1 - b, s_1 - e, d; s_1 - c, s_1 - f) = \\ &= \varepsilon_1 W(s_2 - d, s_3 - e, s_3 - b, s_2 - a; s_1 - f, s_1 - c) = \varepsilon_2 W(s_2 - a, b, e, s_2 - d; s_2 - c, s_2 - f) = \\ &= \varepsilon_2 W(s_3 - d, s_1 - e, s_1 - b, s_3 - a; s_2 - f, s_2 - c). \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь  $s_1, s_2, s_3$  даются формулой (4), а  $\varepsilon_1$  и  $\varepsilon_2$  — формулой (6).

4. «Зеркальная» симметрия. Формулы для  $6j$ -символов могут быть обобщены на случай отрицательных целых или полудельных значений моментов. При этом  $6j$ -символы удовлетворяют следующим свойствам симметрии [45] относительно замены моментов  $j \rightarrow -j - 1$ :

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{Bmatrix} &= - \begin{Bmatrix} \bar{a} & \bar{b} & \bar{c} \\ \bar{d} & \bar{e} & \bar{f} \end{Bmatrix} = (-1)^{\varphi_1} \begin{Bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{Bmatrix} = (-1)^{\varphi_1+1} \begin{Bmatrix} a & \bar{b} & \bar{c} \\ \bar{d} & \bar{e} & \bar{f} \end{Bmatrix} = \\ &= (-1)^{\varphi_2} \begin{Bmatrix} \bar{a} & b & c \\ \bar{d} & e & f \end{Bmatrix} = (-1)^{\varphi_2+1} \begin{Bmatrix} a & \bar{b} & \bar{c} \\ \bar{d} & \bar{e} & \bar{f} \end{Bmatrix} = i(-1)^{\varphi_3} \begin{Bmatrix} \bar{a} & \bar{b} & \bar{c} \\ d & e & f \end{Bmatrix} = i(-1)^{\varphi_3} \begin{Bmatrix} a & b & \bar{c} \\ \bar{d} & \bar{e} & \bar{f} \end{Bmatrix} = \\ &= i(-1)^{\varphi_4} \begin{Bmatrix} \bar{a} & \bar{b} & \bar{c} \\ d & e & f \end{Bmatrix} = i(-1)^{\varphi_4} \begin{Bmatrix} a & b & c \\ \bar{d} & \bar{e} & \bar{f} \end{Bmatrix} = (-1)^{\varphi_5} \begin{Bmatrix} \bar{a} & \bar{b} & \bar{c} \\ \bar{d} & \bar{e} & \bar{f} \end{Bmatrix} = (-1)^{\varphi_5+1} \begin{Bmatrix} a & b & \bar{c} \\ \bar{d} & \bar{e} & \bar{f} \end{Bmatrix}. \end{aligned} \quad (8)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \bar{a} &\equiv -a - 1, \quad \bar{b} \equiv -b - 1 \text{ и т. д.}, \\ \varphi_1 &= b - c - e + f, \quad \varphi_2 = 2(a + d), \quad \varphi_3 = c + d + e + 2f, \quad \varphi_4 = a + b + c, \quad \varphi_5 = 2(c + f) + 1. \end{aligned} \quad (9)$$

Аналогично для коэффициентов Рака получаем

$$\begin{aligned} W(abed; cf) &= -W(\bar{a}\bar{b}\bar{e}\bar{d}; \bar{c}\bar{f}) = W(\bar{a}\bar{b}\bar{e}\bar{d}; cf) = -W(a\bar{b}\bar{e}\bar{d}; \bar{c}\bar{f}) = \\ &= (-1)^{\psi_1+1} W(\bar{a}\bar{b}\bar{e}\bar{d}; cf) = (-1)^{\psi_1} W(a\bar{b}\bar{e}\bar{d}; \bar{c}\bar{f}) = i(-1)^{\psi_2} W(\bar{a}\bar{b}\bar{e}\bar{d}; cf) = i(-1)^{\psi_2} W(a\bar{b}\bar{e}\bar{d}; \bar{c}\bar{f}) = \\ &= i(-1)^{\psi_3} W(\bar{a}\bar{b}\bar{e}\bar{d}; \bar{c}\bar{f}) = i(-1)^{\psi_3} W(a\bar{b}\bar{e}\bar{d}; cf) = (-1)^{\psi_4} W(\bar{a}\bar{b}\bar{e}\bar{d}; cf) = (-1)^{\psi_4+1} W(a\bar{b}\bar{e}\bar{d}; \bar{c}\bar{f}). \end{aligned} \quad (10)$$

Здесь

$$\psi_1 = -b + c - e + f, \quad \psi_2 = -c + d + e + 2f, \quad \psi_3 = a + b - c, \quad \psi_4 = 2(d + f). \quad (11)$$

9.5. ЯВНЫЙ ВИД  $6j$ -СИМВОЛОВ ПРИ ЧАСТНЫХ ЗНАЧЕНИЯХ ИНДЕКСОВ

## 1. Один из индексов равен нулю

Для  $6j$ -символов имеют место следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} 0 & b & c \\ d & e & f \end{Bmatrix} &= (-1)^{b+e+d} \frac{\delta_{bc}\delta_{ef}}{\sqrt{(2b+1)(2e+1)}}, & \begin{Bmatrix} a & b & c \\ 0 & e & f \end{Bmatrix} &= (-1)^{a+b+e} \frac{\delta_{bf}\delta_{ce}}{\sqrt{(2b+1)(2c+1)}}, \\ \begin{Bmatrix} a & 0 & c \\ d & e & f \end{Bmatrix} &= (-1)^{a+d+e} \frac{\delta_{ac}\delta_{df}}{\sqrt{(2a+1)(2d+1)}}, & \begin{Bmatrix} a & b & c \\ d & 0 & f \end{Bmatrix} &= (-1)^{a+b+d} \frac{\delta_{af}\delta_{cd}}{\sqrt{(2a+1)(2c+1)}}, \\ \begin{Bmatrix} a & b & 0 \\ d & e & f \end{Bmatrix} &= (-1)^{a+e+f} \frac{\delta_{ab}\delta_{de}}{\sqrt{(2a+1)(2d+1)}}, & \begin{Bmatrix} a & b & c \\ d & e & 0 \end{Bmatrix} &= (-1)^{a+b+c} \frac{\delta_{ae}\delta_{bd}}{\sqrt{(2a+1)(2b+1)}}. \end{aligned} \quad (1)$$

Для коэффициентов Рака соотношения имеют вид

$$\begin{aligned} W(0bed; cf) &= \frac{\delta_{bc}\delta_{ef}}{\sqrt{(2b+1)(2e+1)}}, & W(a0ed; cf) &= \frac{\delta_{ac}\delta_{df}}{\sqrt{(2a+1)(2d+1)}}, \\ W(ab0d; cf) &= \frac{\delta_{af}\delta_{cd}}{\sqrt{(2a+1)(2c+1)}}, & W(abe0; cf) &= \frac{\delta_{bf}\delta_{ce}}{\sqrt{(2b+1)(2c+1)}}, \\ W(abed; 0f) &= (-1)^{a+e+f} \frac{\delta_{ab}\delta_{de}}{\sqrt{(2a+1)(2d+1)}}, & W(abed; c0) &= (-1)^{a+b+c} \frac{\delta_{ae}\delta_{bd}}{\sqrt{(2a+1)(2b+1)}}. \end{aligned} \quad (2)$$

При этом предполагается, что остальные моменты удовлетворяют «условию треугольника».

## 2. Один из индексов равен сумме двух других

Если один из индексов 6*j*-символа равен сумме двух других, входящих с ним в одну триаду (*abc*), (*cde*), (*aef*), (*bd<sub>f</sub>*), то с помощью классических свойств симметрии 6*j*-символов (формулы 9.4 (2)) все эти случаи могут быть сведены к следующему:

$$\left\{ \begin{array}{ccc} a & b & a+b \\ d & e & f \end{array} \right\} = (-1)^{a+b+d+e} W(abed; a+bf) = (-1)^{a+b+d+e} \times$$

$$\times \left[ \frac{(2a)! (2b)! (a+b+d+e+1)! (a+b-d+e)! (a+b+d-e)! (-a+e+f)! (-b+d+f)!}{(2a+2b+1)! (-a-b+d+e)! (a+e-f)! (a-e+f)! (a+e+f+1)! (b+d-f)! (b-d+f)! (b+d+f+1)!} \right]^{1/2}. \quad (3)$$

Некоторые частные случаи формулы (3):

$$\left\{ \begin{array}{ccc} a & b & a+b \\ d & e & a+e \end{array} \right\} = (-1)^{a+b+d+e} \left[ \frac{(2b)! (2e)! (a+b+d-e)! (a-b+d+e)!}{(2a+2b+1)! (2a+2e+1)! (-a-b+d+e)! (-a+b+d-e)!} \right]^{1/2}, \quad (4)$$

$$\left\{ \begin{array}{ccc} a & b & a+b \\ d & e & a+e-1 \end{array} \right\} = (-1)^{a+b+d+e} \times$$

$$\times \left[ 2a(a+b+d+e+1)(a+b-d+e) \frac{(2b)! (2e-1)! (a+b+d-e)! (a-b+d+e-1)!}{(2a+2b+1)! (2a+2e+1)! (-a-b+d+e)! (-a+b+d-e+1)!} \right]^{1/2}, \quad (5)$$

$$\left\{ \begin{array}{ccc} a & b & a+b \\ a & e & a+b \end{array} \right\} = (-1)^{2a+b+e} \frac{(2a)! (b+e)!}{(2a+2b+1)! (-b+e)!}, \quad (6)$$

$$\left\{ \begin{array}{ccc} a & b & a+b \\ a & e & a+b-1 \end{array} \right\} = (-1)^{2a+b+e} \frac{(2a-1)! (b+e-1)!}{(2a+2b)! (-b+e)!} \left[ \frac{2a \cdot 2b (b+e) (2a+b-e) (2a+b+e+1)}{(2a+2b+1) (-b+e+1)} \right]^{1/2}, \quad (7)$$

$$\left\{ \begin{array}{ccc} a & b & a+b \\ a & b & f \end{array} \right\} = (-1)^{2a+2b} \frac{(2a)! (2b)!}{(a+b-f)! (a+b+f+1)!}, \quad (8)$$

$$\left\{ \begin{array}{ccc} a & b & a+b \\ b & a & f \end{array} \right\} = (-1)^{2a+2b} \frac{(2a)! (2b)!}{[(2a-f)! (2a+f+1)! (2b-f)! (2b+f+1)!]^{1/2}}, \quad (9)$$

$$\left\{ \begin{array}{ccc} a & b & a+b \\ a & b & a+b \end{array} \right\} = (-1)^{2a+2b} \frac{(2a)! (2b)!}{(2a+2b+1)!}, \quad (10)$$

$$\left\{ \begin{array}{ccc} a & b & a+b \\ a & b & a+b-1 \end{array} \right\} = (-1)^{2a+2b} \frac{(2a)! (2b)!}{(2a+2b)!}, \quad (11)$$

$$\left\{ \begin{array}{ccc} a & b & a+b \\ a & b & a-b \end{array} \right\} = (-1)^{2a+2b} \frac{1}{2a+1}, \quad (a \geq b), \quad (12)$$

$$\left\{ \begin{array}{ccc} a & b & a+b \\ a & b & a-b+1 \end{array} \right\} = (-1)^{2a+2b} \frac{2b}{(2a+1)(2a+2)}, \quad (a \geq b-1), \quad (13)$$

$$\left\{ \begin{array}{ccc} a & b & a+b \\ a+b+e & e & a+e \end{array} \right\} = (-1)^{2(a+b+e)} \frac{1}{[(2a+2b+1)(2a+2e+1)]^{1/2}}. \quad (14)$$

## 3. Один из индексов меньше суммы двух других на единицу

Если один из индексов 6*j*-символа на единицу меньше суммы двух других, входящих с ним в один треугольник (*abc*), (*cde*), (*aef*), (*bd<sub>f</sub>*), то с помощью классических свойств симметрии 6*j*-символов (формулы 9.4(2)) все эти случаи могут быть сведены к следующему:

$$\left\{ \begin{array}{ccc} a & b & a+b-1 \\ d & e & f \end{array} \right\} = (-1)^{a+b+d+e} W(abed; a+b-1, f) =$$

$$= (-1)^{a+b+d+e} 2 \{ ab(a+b) + (a+b)f(f+1) - ad(d+1) - be(e+1) \} \times$$

$$\times \left[ \frac{(2a-1)! (2b-1)! (a+b+d+e)! (a+b-d+e-1)! (a+b+d-e-1)! (-a+e+f)! (-b+d+f)!}{(2a+2b)! (-a-b+d+e+1)! (a+e-f)! (a-e+f)! (a+e+f+1)! (b+d-f)! (b-d+f)! (b+d+f+1)!} \right]^{1/2}. \quad (15)$$

Некоторые частные случаи формулы (15):

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{matrix} a & b & a+b-1 \\ d & e & a+e-1 \end{matrix} \right\} &= (-1)^{a+b+d+e+2} \{a(a+b+e-1)(a+b+e) - ad(d+1) - 2be\} \times \\ &\times \left[ \frac{(2b-1)!(2e-1)!(a+b+d-e-1)!(a-b+d+e-1)!}{(2a+2b)!(2a+2e)!(-a-b+d+e+1)!(-a+b+d-e+1)!} \right]^{1/2}, \end{aligned} \quad (16)$$

$$\left\{ \begin{matrix} a & b & a+b-1 \\ a & e & a+b-1 \end{matrix} \right\} = (-1)^{2a+b+e+2} \{b(2a+b-1)(2a+b) - be(e+1) - 2a^2\} \frac{(2a-1)!(b+e-1)!}{(2a+2b)!(-b+e+1)!}, \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{matrix} a & b & a+b-1 \\ a & b & f \end{matrix} \right\} &= (-1)^{2a+2b+2} \{ab(a+b) + (a+b)f(f+1) - a^2(a+1) - \\ &- b^2(b+1)\} \frac{(2a-1)!(2b-1)!}{(a+b-f)!(a+b+f+1)!}, \end{aligned} \quad (18)$$

$$\left\{ \begin{matrix} a & b & a+b-1 \\ b & a & f \end{matrix} \right\} = (-1)^{2a+2b+2} \{(a+b)f(f+1) - 2ab\} \frac{(2a-1)!(2b-1)!}{[(2a-f)!(2a+f+1)!(2b-f)!(2b+f+1)!]^{1/2}}, \quad (19)$$

$$\left\{ \begin{matrix} a & b & a+b-1 \\ a+b+e-1 & e & a+e-1 \end{matrix} \right\} = (-1)^{2(a+b+e)} \left[ \frac{2b \cdot 2e}{(2a+2b)(2a+2b-1)(2a+2e)(2a+2e-1)} \right]^{1/2}. \quad (20)$$

Другие частные случаи даются формулами (5), (7), (11).

#### 4. Индексы $a, b, d, e$ попарно равны

Если  $a=b$  и  $d=e$  или  $a=e$  и  $b=d$ , то  $6j$ -символы Вигнера могут быть представлены в виде [56]

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{matrix} a & a & c \\ b & b & f \end{matrix} \right\} &= \left\{ \begin{matrix} a & b & f \\ b & a & c \end{matrix} \right\} = (-1)^{2a+2b} W(aabb; cf) = (-1)^{2a+2b} W(abab; fc) = \\ &= (-1)^{a+b+c+f} \left[ \frac{(2a-c)!(2b-c)!}{(2a+c+1)!(2b+c+1)!} \right]^{1/2} V_c(a, f, b), \end{aligned} \quad (21)$$

где  $c$  — целое число,  $V_c(a, f, b) = V_c(b, f, a)$ . Величины  $V_c$ , согласно 9.6(6), удовлетворяют рекуррентному соотношению

$$V_{c+1} = \frac{2c+1}{c+1} V_1 V_c - c(2c+1) V_c - \frac{c}{c+1} [4a(a+1)+1-c^2] [4b(b+1)+1-c^2] V_{c-1}. \quad (22)$$

Введем обозначения

$$\bar{a} \equiv a(a+1), \quad \bar{b} \equiv b(b+1), \quad x \equiv f(f+1) - a(a+1) - b(b+1) = \bar{f} - \bar{a} - \bar{b}. \quad (23)$$

Тогда для частных значений  $c$  функции  $V_c$  имеют следующий вид:

$$V_0(a, f, b) = 1, \quad (24)$$

$$V_1(a, f, b) = -2x, \quad (25)$$

$$V_2(a, f, b) = 6x^2 + 6x - 8\bar{a}\bar{b}, \quad (26)$$

$$V_3(a, f, b) = -20x^3 - 80x^2 - 16x[3 + \bar{a} + \bar{b} - 3\bar{a}\bar{b}] + 80\bar{a}\bar{b}, \quad (27)$$

$$\begin{aligned} V_4(a, f, b) &= 70x^4 + 700x^3 + 40x^2[39 + 5\bar{a} + 5\bar{b} - 6\bar{a}\bar{b}] + \\ &+ 80x[9 + 6\bar{a} + 6\bar{b} - 17\bar{a}\bar{b}] - 48\bar{a}\bar{b}[27 + 4\bar{a} + 4\bar{b} - 2\bar{a}\bar{b}], \end{aligned} \quad (28)$$

$$\begin{aligned} V_{2a-1}(a, f, b) &= (-1)^{1+a-b+f+2} \{a^2 + \bar{f} - \bar{b}\} \frac{(2a)!(2a-1)!(2a+2b)!(-a+b+f)!}{(2b-2a+1)!(a+b-f)!(a-b+f)!(a+b+f+1)!}, \\ &\quad \left( a \leq b + \frac{1}{2} \right), \end{aligned} \quad (29)$$

$$\begin{aligned} V_{2b-1}(a, f, b) &= (-1)^{1-a+b+f+2} \{b^2 + \bar{f} - \bar{a}\} \frac{(2b)!(2b-1)!(2a+2b)!(a-b+f)!}{(2a-2b+1)!(a+b-f)!(-a+b+f)!(a+b+f+1)!}, \\ &\quad \left( b \leq a + \frac{1}{2} \right), \end{aligned} \quad (30)$$

$$V_{2a}(a, f, b) = (-1)^{a-b+f} \frac{(2a)! (2a)! (2a+2b+1)! (-a+b+f)!}{(2b-2a)! (a+b-f)! (a-b+f)! (a+b+f+1)!}, \quad (31)$$

$(a \leq b),$

$$V_{2b}(a, f, b) = (-1)^{-a+b+f} \frac{(2b)! (2b)! (2a+2b+1)! (a-b+f)!}{(2a-2b)! (a+b-f)! (-a+b+f)! (a+b+f+1)!}, \quad (32)$$

$(b \leq a).$

При частных значениях  $f$  имеем

$$V_c(a, a-b, b) = \frac{(2b)! (2a+c+1)!}{(2a+1)! (2b-c)!}, \quad (a \geq b), \quad (33)$$

$$V_c(a, b-a, b) = \frac{(2a)! (2b+c+1)!}{(2b+1)! (2a-c)!}, \quad (a \leq b), \quad (34)$$

$$V_c(a, a-b+1, b) = 2 \{2b(a+1) - (a-b+1)c(c+1)\} \frac{(2b-1)! (2a+c+1)!}{(2a+2)! (2b-c)!}, \quad (35)$$

$(a \geq b-1),$

$$V_c(a, b-a+1, b) = 2 \{2a(b+1) + (a-b-1)c(c+1)\} \frac{(2a-1)! (2b+c+1)!}{(2b+2)! (2a-c)!}, \quad (36)$$

$(b \geq a-1),$

$$V_c(a, a+b-1, b) = (-1)^{c+1} 2 \{(a+b)c(c+1) - 2ab\} \frac{(2a-1)! (2b-1)!}{(2a-c)! (2b-c)!}, \quad (37)$$

$$V_c(a, a+b, b) = (-1)^c \frac{(2a)! (2b)!}{(2a-c)! (2b-c)!}. \quad (38)$$

См. также формулы (9) и (19).

## 9.6. РЕКУРРЕНТНЫЕ СООТНОШЕНИЯ

### 1. Соотношения, в которых индексы меняются на $1/2$

$$\begin{aligned} & [(a+b+c+1)(-a+b+c)(c+d+e+1)(c+d-e)]^{1/2} \begin{Bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{Bmatrix} = \\ & = -2c [(b+d+f+1)(b+d-f)]^{1/2} \begin{Bmatrix} a & b - \frac{1}{2} & c - \frac{1}{2} \\ d - \frac{1}{2} & e & f \end{Bmatrix} + \\ & + [(a+b-c+1)(a-b+c)(-c+d+e+1)(c-d+e)]^{1/2} \begin{Bmatrix} a & b & c-1 \\ d & e & f \end{Bmatrix}, \quad (1) \\ & (a-b-d+e) [(a+b+c+1)(c+d+e+1)]^{1/2} \begin{Bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{Bmatrix} = \\ & = - [(a-b+c)(c-d+e)(a+e-f)(a+e+f+1)]^{1/2} \begin{Bmatrix} a - \frac{1}{2} & b & c - \frac{1}{2} \\ d & e - \frac{1}{2} & f \end{Bmatrix} + \\ & + [(-a+b+c)(c+d-e)(b+d-f)(b+d+f+1)]^{1/2} \begin{Bmatrix} a & b - \frac{1}{2} & c - \frac{1}{2} \\ d - \frac{1}{2} & e & f \end{Bmatrix}, \quad (2) \\ & [(-a+b+c)(a-b+c+1)(a+e-f+1)(b+d+f+1)]^{1/2} \begin{Bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{Bmatrix} = \\ & = [(c+d-e)(c-d+e+1)(a+e+f+2)(b+d-f)]^{1/2} \begin{Bmatrix} a + \frac{1}{2} & b - \frac{1}{2} & c \\ d - \frac{1}{2} & e + \frac{1}{2} & f \end{Bmatrix} + \end{aligned}$$

$$+ (a - b - d + e + 1) [(-a + b + c)(b - d + f)]^{1/2} \left\{ \begin{matrix} a + \frac{1}{2} & b - \frac{1}{2} & c \\ d & e & f - \frac{1}{2} \end{matrix} \right\}, \quad (3)$$

$$(2d + 1)(2f + 1) [(a + b + c + 1)(a - b + c)]^{1/2} \left\{ \begin{matrix} a & b & c \\ d & e & f \end{matrix} \right\} =$$

$$= - [(a + e + f + 1)(a - e + f)(b + d + f + 1)(-b + d + f)(c + d + e + 1)(c + d - e)]^{1/2} \left\{ \begin{matrix} a - \frac{1}{2} & b & c - \frac{1}{2} \\ d - \frac{1}{2} & e & f - \frac{1}{2} \end{matrix} \right\} -$$

$$- [(-a + e + f + 1)(a + e - f)(b - d + f + 1)(b + d - f)(c + d + e + 1)(c + d - e)]^{1/2} \left\{ \begin{matrix} a - \frac{1}{2} & b & c - \frac{1}{2} \\ d - \frac{1}{2} & e & f + \frac{1}{2} \end{matrix} \right\} -$$

$$- [(a + e + f + 1)(a - e + f)(b + d - f + 1)(b - d + f)(-c + d + e + 1)(c - d + e)]^{1/2} \left\{ \begin{matrix} a - \frac{1}{2} & b & c - \frac{1}{2} \\ d + \frac{1}{2} & e & f - \frac{1}{2} \end{matrix} \right\} +$$

$$+ [(-a + e + f + 1)(a + e - f)(b + d + f + 2)(-b + d + f + 1)(-c + d + e + 1)(c - d + e)]^{1/2} \left\{ \begin{matrix} a - \frac{1}{2} & b & c - \frac{1}{2} \\ d + \frac{1}{2} & e & f + \frac{1}{2} \end{matrix} \right\}. \quad (4)$$

## 2. Соотношения, в которых индексы меняются на 1

$$(2c + 1) \{2[a(a + 1)d(d + 1) + b(b + 1)e(e + 1) - c(c + 1)f(f + 1)] -$$

$$- [a(a + 1) + b(b + 1) - c(c + 1)][d(d + 1) + e(e + 1) - c(c + 1)]\} \left\{ \begin{matrix} a & b & c \\ d & e & f \end{matrix} \right\} =$$

$$= -c[(a + b + c + 2)(-a + b + c + 1)(a - b + c + 1)(a + b - c) \times$$

$$\times (d + e + c + 2)(-d + e + c + 1)(d - e + c + 1)(d + e - c)]^{1/2} \left\{ \begin{matrix} a & b & c + 1 \\ d & e & f \end{matrix} \right\} -$$

$$- (c + 1)[(a + b + c + 1)(-a + b + c)(a - b + c)(a + b - c + 1) \times$$

$$\times (d + e + c + 1)(-d + e + c)(d - e + c)(d + e - c + 1)]^{1/2} \left\{ \begin{matrix} a & b & c - 1 \\ d & e & f \end{matrix} \right\}. \quad (5)$$

Для  $6j$ -символов частного вида из (5) следуют соотношения:

$$(2c + 1) \{-2a(a + 1) - 2b(b + 1) + 2f(f + 1) + c(c + 1)\} \left\{ \begin{matrix} a & a & c \\ b & b & f \end{matrix} \right\} =$$

$$= (c + 1) [(2a + c + 2)(2a - c)(2b + c + 2)(2b - c)]^{1/2} \left\{ \begin{matrix} a & a & c + 1 \\ b & b & f \end{matrix} \right\} +$$

$$+ c [(2a + c + 1)(2a - c + 1)(2b + c + 1)(2b - c + 1)]^{1/2} \left\{ \begin{matrix} a & a & c - 1 \\ b & b & f \end{matrix} \right\}, \quad (6)$$

$$(2c + 1) \{[a(a + 1) + b(b + 1) - c(c + 1)]^2 - 2[a^2(a + 1)^2 + b^2(b + 1)^2 - c(c + 1)f(f + 1)]\} \left\{ \begin{matrix} a & b & c \\ a & b & f \end{matrix} \right\} =$$

$$= c(a + b + c + 2)(-a + b + c + 1)(a - b + c + 1)(a + b - c) \left\{ \begin{matrix} a & b & c + 1 \\ a & b & f \end{matrix} \right\} +$$

$$+ (c + 1)(a + b + c + 1)(-a + b + c)(a - b + c)(a + b - c + 1) \left\{ \begin{matrix} a & b & c - 1 \\ a & b & f \end{matrix} \right\}. \quad (7)$$

9.7. ПРОИЗВОДЯЩАЯ ФУНКЦИЯ

6j-символы являются коэффициентами разложения в степенной ряд производящей функции  $f(\tau_{i\alpha})$  [53], зависящей от 12 переменных  $\tau_{i\alpha}$  ( $i = 1, 2, 3, \alpha = 1, 2, 3, 4$ ):

$$f(\tau_{i\alpha}) \equiv \left[ 1 + \sum_{i=1}^3 \prod_{\alpha=1}^4 \tau_{i\alpha} + \sum_{i=1}^4 \prod_{\alpha=1}^3 \tau_{i\alpha} \right]^{-2} = \sum_{R_{i\alpha}} N(R_{i\alpha}) \begin{Bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{Bmatrix} \prod_{i=1}^3 \prod_{\alpha=1}^4 (\tau_{i\alpha})^{R_{i\alpha}}. \tag{1}$$

Показатели степени  $R_{i\alpha}$  являются элементами  $R$ -символа и связаны с моментами  $a, b, c$  и т. д. соотношениями 9.1 (13)—9.1 (14). Нормировочные константы  $N$  имеют вид

$$N(R_{i\alpha}) = \left[ \frac{\prod_{\alpha=1}^4 (B_{\alpha} + 1)!}{\prod_{i=1}^3 \prod_{\alpha=1}^4 (R_{i\alpha})!} \right]^{1/2}, \tag{2}$$

где  $B_{\alpha}$  даются формулами 9.1 (18).

Суммы произведений 6j-символов Вигнера, 3jm- и 9j-символов даны в гл. 12.

9.8. АСИМПТОТИКА 6j-СИМВОЛОВ ПРИ БОЛЬШИХ ЗНАЧЕНИЯХ МОМЕНТОВ

1. Асимптотическая связь 6j-символов и коэффициентов Клебша—Гордана

При  $R \gg 1$  и произвольных  $a, b, c$  и т. д. имеет место асимптотическая связь

$$\left\{ \begin{matrix} a & b & c \\ d+R & e+R & f+R \end{matrix} \right\} \approx \frac{(-1)^{a+b+d+e}}{\sqrt{2R(2c+1)}} C_{a\alpha}^{c\gamma} C_{a\alpha}^{e\beta}, \tag{1}$$

где  $\alpha = f - e, \beta = d - f, \gamma = d - e$ .

Для 6j- и 3jm-символов это соотношение имеет вид [47]

$$\left\{ \begin{matrix} a & b & c \\ d+R & e+R & f+R \end{matrix} \right\} \approx \frac{(-1)^{a+b+c+2(d+e+f)}}{\sqrt{2R}} \left( \begin{matrix} a & b & c \\ e-f & f-d & d-e \end{matrix} \right). \tag{2}$$

Для  $R$ -символов, соответствующих коэффициентам Клебша—Гордана и 6j-символам, асимптотическая связь имеет вид

$$\begin{aligned} & \left\| \begin{matrix} -c+d+e+2R & b+d-f & a+e-f & a+b-c \\ -b+d+f+2R & c+d-e & a-b+c & a-e+f \\ -a+e+f+2R & -a+b+c & c-d+e & b-d+f \end{matrix} \right\| \approx \\ & \approx \frac{(-1)^{a+b+c+2(d+e+f)}}{\sqrt{2R}} \left\| \begin{matrix} -a+b+c & a-b+c & a+b-c \\ a+e-f & b-d+f & c+d-e \\ a-e+f & b+d-f & c-d+e \end{matrix} \right\|. \end{aligned} \tag{3}$$

В частности, при  $d = e = f = 0$  из (1) следует формула [60]

$$\left\{ \begin{matrix} a & b & c \\ R & R & R \end{matrix} \right\} \approx \frac{(-1)^c}{\sqrt{2R(2c+1)}} C_{a0}^{c0} C_{a0}^{e0}. \tag{4}$$

2. Асимптотические выражения для 6j-символов

Асимптотические свойства 6j-символов  $\begin{Bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{Bmatrix}$  при больших значениях моментов связаны с геометрическими свойствами тетраэдра, имеющего своими ребрами отрезки  $a + \frac{1}{2}, b + \frac{1}{2}$ , и т. д. (рис. 9.1).

а. Формула Понзано—Редже [89] (квазиклассическое приближение для 6j-символов). Если  $a, b, c, d, e, f \gg 1$ , то

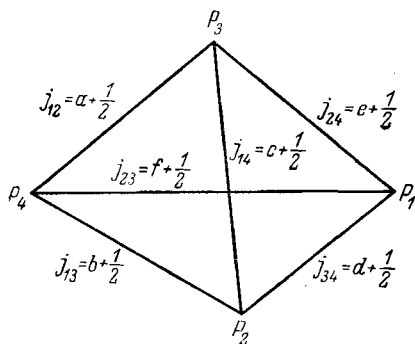
$$\left\{ \begin{matrix} a & b & c \\ d & e & f \end{matrix} \right\} \approx \frac{1}{\sqrt{12\pi V}} \cos \left( \sum_{i,k=1}^4 j_{ik} \theta_{ik} + \frac{\pi}{4} \right), (V^2 > 0). \tag{5}$$

Здесь

$$\begin{aligned} j_{12} &= a + \frac{1}{2}, & j_{13} &= b + \frac{1}{2}, & j_{14} &= c + \frac{1}{2}, \\ j_{23} &= f + \frac{1}{2}, & j_{24} &= e + \frac{1}{2}, & j_{34} &= d + \frac{1}{2}, \\ j_{ik} &= j_{ki}, & j_{ii} &= 0. \end{aligned} \quad (6)$$

$V$  — объем тетраэдра,  $\Theta_{ik}$  — угол между внешними нормальными к двум граням, примыкающим к стороне  $j_{ik}$ .

Объем тетраэдра может быть вычислен по формуле



$$V^2 = \frac{1}{2^3 (3!)^2} \begin{vmatrix} 0 & j_{34}^2 & j_{24}^2 & j_{23}^2 & 1 \\ j_{34}^2 & 0 & j_{14}^2 & j_{13}^2 & 1 \\ j_{24}^2 & j_{14}^2 & 0 & j_{12}^2 & 1 \\ j_{23}^2 & j_{13}^2 & j_{12}^2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}. \quad (7)$$

Углы  $\Theta_{ik}$  определяются из соотношения

$$S_i S_k \sin \Theta_{ik} = \frac{3}{2} V j_{ik}, \quad (i \neq k). \quad (8)$$

Здесь  $S_i$  — площадь треугольника, противоположного вершине  $P_i$  (см. рис. 9.1).

Рис. 9.1. Тетраэдр, связанный с асимптотикой 6  $j$ -символов.

Величины  $S_i$  могут быть вычислены по формуле Герона. Например,

$$S_1^2 = \frac{1}{16} (j_{12} + j_{13} + j_{14}) (j_{12} + j_{13} - j_{14}) (j_{12} - j_{13} + j_{14}) (-j_{12} + j_{13} + j_{14}) = -\frac{1}{16} \begin{vmatrix} 0 & j_{12}^2 & j_{13}^2 & 1 \\ j_{12}^2 & 0 & j_{14}^2 & 1 \\ j_{13}^2 & j_{14}^2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}. \quad (9)$$

Приведенная выше асимптотическая формула (5) справедлива, если  $V^2 > 0$ . Если  $V^2 < 0$ , т. е. нельзя построить тетраэдр с ребрами  $j_{ik}$ , то формула принимает вид

$$\begin{Bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{Bmatrix} \approx \frac{1}{2 \sqrt{|12\pi| |V|}} \cos \Phi \exp \left\{ - \left| \sum_{i,k=1}^4 j_{ik} \operatorname{Im} \Theta_{ik} \right| \right\}, \quad (V^2 < 0), \quad (10)$$

где

$$\Phi = \sum_{i,k=1}^4 \left( j_{ik} - \frac{1}{2} \right) \operatorname{Re} \Theta_{ik}. \quad (11)$$

В этом случае 6  $j$ -символы экспоненциально малы, даже если все условия треугольника выполнены.

В переходной области  $V^2 \approx 0$  формулы (5), (10) мало пригодны и лучше пользоваться соотношением [89].

$$\begin{Bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{Bmatrix} \approx 2^{-4/3} \left( \prod_{i=1}^4 S_i \right)^{-1/6} \{ \cos \Phi \operatorname{Ai}(z) + \sin \Phi \operatorname{Bi}(z) \}, \quad (12)$$

где  $\operatorname{Ai}(z)$  и  $\operatorname{Bi}(z)$  — функции Эйри [27],

$$z = \begin{cases} -(3V)^2 \left( 4 \prod_{i=1}^4 S_i \right)^{-2/3} & \text{при } V^2 > 0, \\ (3|V|)^2 \left( 4 \prod_{i=1}^4 S_i \right)^{-2/3} & \text{при } V^2 < 0. \end{cases} \quad (13)$$

Формулы Понзано—Редже дают хорошую точность даже при небольших значениях моментов  $a, b, c$  и т. д.



б. *Формула Эдмондса* [16]. Если  $f, m, n$  — произвольные целые или полуцелые числа, а  $a, b, c \gg f, m, n$ , то

$$\left\{ \begin{matrix} a & b & c \\ b+m & a+n & f \end{matrix} \right\} \approx \frac{(-1)^{a+b+c+f+m}}{\sqrt{(2a+1)(2b+1)}} d_{mn}^f(\theta), \quad (14)$$

где  $d_{mn}^f(\theta)$  — матрица поворота (гл. 4),  $\theta$  — угол между ребрами тетраэдра  $a + n + \frac{1}{2}$  и  $b + m + \frac{1}{2}$  (рис. 9.2),

$$\cos \theta = \frac{a(a+1) + b(b+1) - c(c+1)}{2\sqrt{a(a+1)b(b+1)}}. \quad (15)$$

В частности, если  $m = n = 0$ ,  $a, b, c \gg f$ ,  $f$  — любое целое число, то (14) переходит в формулу Рака [93]

$$\left\{ \begin{matrix} a & b & c \\ b & a & f \end{matrix} \right\} \approx \frac{(-1)^{a+b+c+f}}{\sqrt{(2a+1)(2b+1)}} P_f(\cos \theta), \quad (16)$$

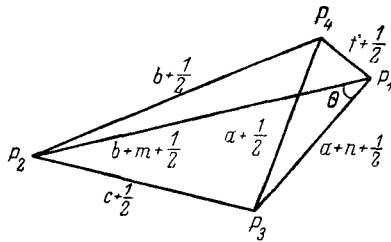


Рис. 9.2. Угол  $\theta$ , входящий в асимптотическую формулу 9.8 (14).

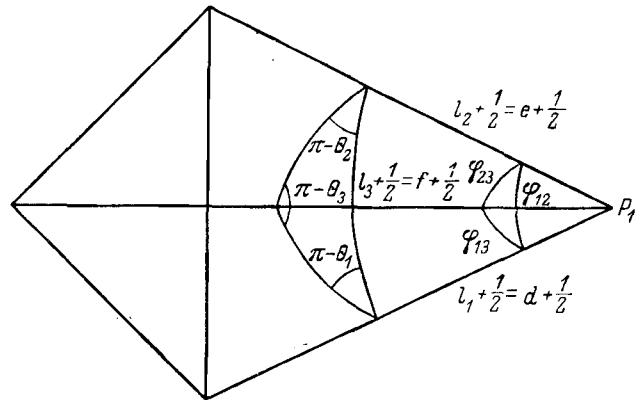


Рис. 9.3. Геометрическая интерпретация углов, входящих в формулы 9.8 (20)—9.8 (23).

где  $P_f$  — полином Лежандра. Если к тому же  $f$  велико, т. е.  $a, b, c \gg f \gg 1$ , то в (16) можно воспользоваться асимптотикой для полиномов Лежандра. При этом

$$\left\{ \begin{matrix} a & b & c \\ b & a & f \end{matrix} \right\} \approx (-1)^{a+b+c+f} \left[ \frac{4}{\pi(2a+1)(2b+1)(2f+1)\sin\theta} \right]^{1/4} \cos \left[ \left( f + \frac{1}{2} \right) \theta - \frac{\pi}{4} \right]. \quad (17)$$

Эту же формулу можно записать в виде

$$\left\{ \begin{matrix} a & b & c \\ b & a & f \end{matrix} \right\} \approx \frac{(-1)^{a+b+c+f}}{\sqrt{12\pi V}} \cos \left[ \left( f + \frac{1}{2} \right) \theta - \frac{\pi}{4} \right], \quad (18)$$

где объем тетраэдра равен

$$V = \frac{1}{6} \left( a + \frac{1}{2} \right) \left( b + \frac{1}{2} \right) \left( f + \frac{1}{2} \right) \sin \theta. \quad (19)$$

(ср. с формулой (5)).

в. Если  $a, b, c, d, e, f \gg 1, m, n, p$ , то

$$\left\{ \begin{matrix} a & b & c \\ d & e & f \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} a & b & c \\ d+m & e+n & f+p \end{matrix} \right\} \approx \frac{\theta(V^2)}{24\pi V} \cos(m\theta_1 + n\theta_2 + p\theta_3). \quad (20)$$

Здесь  $V$  — объем тетраэдра (формула (7)),

$$\theta(V^2) = \begin{cases} 1, & \text{если } V^2 > 0, \\ 0, & \text{если } V^2 < 0. \end{cases} \quad (21)$$

$\Theta_i$  — угол между внешними нормальными к граням тетраэдра, проходящим через сторону  $l_i + \frac{1}{2}$  (рис. 9.3), где  $l_1 \equiv d$ ,  $l_2 \equiv e$ ,  $l_3 \equiv f$ . Углы  $\Theta_i$  можно вычислять по формуле

$$\cos \Theta_i = \frac{\cos \varphi_{ik} \cos \varphi_{il} - \cos \varphi_{kl}}{\sin \varphi_{ik} \sin \varphi_{il}}, \quad (22)$$

где индексы  $i, k, l$  получаются циклической перестановкой индексов 1, 2, 3.

В формуле (22)  $\varphi_{ik} \equiv \varphi_{ki}$  является углом между ребрами тетраэдра  $l_i + \frac{1}{2}$  и  $l_k + \frac{1}{2}$  (рис. 9.3),

$$\cos \varphi_{ik} = \frac{l_i(l_i + 1) + l_k(l_k + 1) - l_l(l_l + 1)}{2\sqrt{l_i(l_i + 1)l_k(l_k + 1)}}, \quad (23)$$

где  $i \neq k \neq l$ , причем  $j_1 \equiv a$ ,  $j_2 \equiv b$ ,  $j_3 \equiv c$ .

г. В частности, при  $m = n = p = 0$  из (20) получается формула Вигнера [43]

$$\left\{ \begin{matrix} a & b & c \\ d & e & f \end{matrix} \right\}^2 \approx \frac{\Theta(V^2)}{24\pi V}, \quad (a, b, c, d, e, f \geq 1). \quad (24)$$

Эта формула справедлива только в среднем, так как при больших значениях моментов 6j-символы быстро осциллируют.

д. Если  $a, b, c$  и т. д. фиксированы, а  $R \rightarrow \infty$ , то [89]

$$\left\{ \begin{matrix} a & b & c \\ d & e & f \end{matrix} \right\} \approx (-1)^{\varphi} \left[ \frac{(a-b+c)! (a-e+f)! (c+d-e)! (-b+d+f)!}{(a+b-c)! (a+e-f)! (-c+d+e)! (b+d-f)!} \right]^{1/2} \text{sign}(c+f-b-e) \times \\ \times \frac{(2R)^{-1-|b+e-c-f|}}{|b+e-c-f|!} \left[ 1 + O\left(\frac{1}{R^2}\right) \right]. \quad (25)$$

Здесь

$$\varphi = a + d + \min\{b+e, c+f\},$$

$$\text{sign } x = \begin{cases} 1 & \text{при } x \geq 0, \\ -1 & \text{при } x < 0. \end{cases} \quad (26)$$

### 9.9 СВЯЗЬ 6j-СИМВОЛОВ ВИГНЕРА С АНАЛОГИЧНЫМИ ФУНКЦИЯМИ ДРУГИХ АВТОРОВ

Рака [91]:

$$W(abed; cf) = (-1)^{a+b+d+e} \left\{ \begin{matrix} a & b & c \\ d & e & f \end{matrix} \right\}.$$

Ян [73]:

$$U(abed; cf) = \sqrt{(2c+1)(2f+1)} W(abed; cf) = (-1)^{a+b+d+e} \sqrt{(2c+1)(2f+1)} \left\{ \begin{matrix} a & b & c \\ d & e & f \end{matrix} \right\}.$$

Биденхарн, Блатт, Роуз [56]:

$$Z(abed; cf) = i^{-a+e+f} \sqrt{(2a+1)(2b+1)(2d+1)(2e+1)} C_{a0\ e0}^{f0} W(abed; cf).$$

### 9.10. ТАБЛИЦЫ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ФОРМУЛ ДЛЯ 6j-СИМВОЛОВ

В таблицы включены формулы для 6j-символов  $\left\{ \begin{matrix} a & b & c \\ d & e & f \end{matrix} \right\}$ , у которых индекс  $d$  принимает значения  $\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, 3, \frac{7}{2}, 4$ . Используются следующие обозначения:

$$s = a + b + c,$$

$$X = -a(a+1) + b(b+1) + c(c+1).$$

Таблицы алгебраических формул для 6j-символов и коэффициентов Рака имеются также в работах [3, 45, 56].

ТАБЛИЦА 9.1

$$\begin{Bmatrix} a & b & c \\ 1/2 & e & f \end{Bmatrix}$$

$f$	$e = c + 1/2$	$e = c - 1/2$
$b + 1/2$	$(-1)^{s+1} \frac{1}{2} \left[ \frac{(s+2)(s-2a+1)}{(2b+1)(b+1)(2c+1)(c+1)} \right]^{1/2}$	$(-1)^s \frac{1}{2} \left[ \frac{(s-2c+1)(s-2b)}{(2b+1)(b+1)c(2c+1)} \right]^{1/2}$
$b - 1/2$	$(-1)^s \frac{1}{2} \left[ \frac{(s-2c)(s-2b+1)}{b(2b+1)(2c+1)(c+1)} \right]^{1/2}$	$(-1)^s \frac{1}{2} \left[ \frac{(s+1)(s-2a)}{b(2b+1)c(2c+1)} \right]^{1/2}$

ТАБЛИЦА 9.2

$$\begin{Bmatrix} a & b & c \\ 1 & e & f \end{Bmatrix}$$

$f$	$e = c + 1$
$b + 1$	$(-1)^s \frac{1}{2} \left[ \frac{(s+2)(s+3)(s-2a+1)(s-2a+2)}{(2b+1)(b+1)(2b+3)(2c+1)(c+1)(2c+3)} \right]^{1/2}$
$b$	$(-1)^{s+1} \frac{1}{2} \left[ \frac{(s+2)(s-2c)(s-2b+1)(s-2a+1)}{b(2b+1)(b+1)(2c+1)(c+1)(2c+3)} \right]^{1/2}$
$b - 1$	$(-1)^s \frac{1}{2} \left[ \frac{(s-2c-1)(s-2c)(s-2b+1)(s-2b+2)}{(2b-1)b(2b+1)(2c+1)(c+1)(2c+3)} \right]^{1/2}$
$f$	$e = c$
$b + 1$	$(-1)^{s+1} \frac{1}{2} \left[ \frac{(s+2)(s-2c+1)(s-2b)(s-2a+1)}{(2b+1)(b+1)(2b+3)c(2c+1)(c+1)} \right]^{1/2}$
$b$	$(-1)^{s+1} \frac{1}{2} \frac{X}{[b(2b+1)(b+1)c(2c+1)(c+1)]^{1/2}}$
$b - 1$	$(-1)^s \frac{1}{2} \left[ \frac{(s+1)(s-2c)(s-2b+1)(s-2a)}{(2b-1)b(2b+1)c(2c+1)(c+1)} \right]^{1/2}$
$f$	$e = c - 1$
$b + 1$	$(-1)^s \frac{1}{2} \left[ \frac{(s-2c+1)(s-2c+2)(s-2b-1)(s-2b)}{(2b+1)(b+1)(2b+3)(2c-1)c(2c+1)} \right]^{1/2}$
$b$	$(-1)^s \frac{1}{2} \left[ \frac{(s+1)(s-2c+1)(s-2b)(s-2a)}{b(2b+1)(b+1)(2c-1)c(2c+1)} \right]^{1/2}$
$b - 1$	$(-1)^s \frac{1}{2} \left[ \frac{s(s+1)(s-2a-1)(s-2a)}{(2b-1)b(2b+1)(2c-1)c(2c+1)} \right]^{1/2}$

ТАБЛИЦА 9.3

$$\begin{Bmatrix} a & b & c \\ 3/2 & e & f \end{Bmatrix}$$

$f$	$e = c + 3/2$
$b + 3/2$	$(-1)^{s+1} \left[ \frac{(s+2)(s+3)(s+4)(s-2a+1)(s-2a+2)(s-2a+3)}{(2b+1)(2b+2)(2b+3)(2b+4)(2c+1)(2c+2)(2c+3)(2c+4)} \right]^{1/2}$
$b + 1/2$	$(-1)^s \left[ \frac{3(s+2)(s+3)(s-2c)(s-2b+1)(s-2a+1)(s-2a+2)}{2b(2b+1)(2b+2)(2b+3)(2c+1)(2c+2)(2c+3)(2c+4)} \right]^{1/2}$
$b - 1/2$	$(-1)^{s+1} \left[ \frac{r_3(s+2)(s-2c-1)(s-2c)(s-2b+1)(s-2b+2)(s-2a+1)}{(2b-1)2b(2b+1)(2b+2)(2c+1)(2c+2)(2c+3)(2c+4)} \right]^{1/2}$
$-3/2$	$(-1)^s \left[ \frac{(s-2c-2)(s-2c-1)(s-2c)(s-2b+1)(s-2b+2)(s-2b+3)}{(2b-2)(2b-1)2b(2b+1)(2c+1)(2c+2)(2c+3)(2c+4)} \right]^{1/2}$

ТАБЛИЦА 9.3 (продолжение)

$f$	$e = c + 1/2$
$b + 3/2$	$(-1)^s \left[ \frac{3(s+2)(s+3)(s-2c+1)(s-2b)(s-2a+1)(s-2a+2)}{(2b+1)(2b+2)(2b+3)(2b+4)2c(2c+1)(2c+2)(2c+3)} \right]^{1/2}$
$b + 1/2$	$(-1)^s \{3X - 2bc\} \left[ \frac{(s+2)(s-2a+1)}{2b(2b+1)(2b+2)(2b+3)2c(2c+1)(2c+2)(2c+3)} \right]^{1/2}$
$b - 1/2$	$(-1)^{s+1} \{3X + 2(b+1)c\} \left[ \frac{(s-2c)(s-2b+1)}{(2b-1)2b(2b+1)(2b+2)2c(2c+1)(2c+2)(2c+3)} \right]^{1/2}$
$b - 3/2$	$(-1)^s \left[ \frac{3(s+1)(s-2c-1)(s-2c)(s-2b+1)(s-2b+2)(s-2a)}{(2b-2)(2b-1)2b(2b+1)2c(2c+1)(2c+2)(2c+3)} \right]^{1/2}$
$f$	$e = c - 1/2$
$b + 3/2$	$(-1)^{s+1} \left[ \frac{3(s+2)(s-2c+1)(s-2c+2)(s-2b-1)(s-2b)(s-2a+1)}{(2b+1)(2b+2)(2b+3)(2b+4)(2c-1)2c(2c+1)(2c+2)} \right]^{1/2}$
$b + 1/2$	$(-1)^{s+1} \{3X + 2b(c+1)\} \left[ \frac{(s-2c+1)(s-2b)}{2b(2b+1)(2b+2)(2b+3)(2c-1)2c(2c+1)(2c+2)} \right]^{1/2}$
$b - 1/2$	$(-1)^{s+1} \{3X - 2(b+1)(c+1)\} \left[ \frac{(s+1)(s-2a)}{(2b-1)2b(2b+1)(2b+2)(2c-1)2c(2c+1)(2c+2)} \right]^{1/2}$
$b - 3/2$	$(-1)^s \left[ \frac{3(s+1)s(s-2c)(s-2b+1)(s-2a-1)(s-2a)}{(2b-2)(2b-1)2b(2b+1)(2c-1)2c(2c+1)(2c+2)} \right]^{1/2}$
$f$	$e = c - 3/2$
$b + 3/2$	$(-1)^s \left[ \frac{(s-2c+1)(s-2c+2)(s-2c+3)(s-2b-2)(s-2b-1)(s-2b)}{(2b+1)(2b+2)(2b+3)(2b+4)(2c-2)(2c-1)2c(2c+1)} \right]^{1/2}$
$b + 1/2$	$(-1)^s \left[ \frac{3(s+1)(s-2c+1)(s-2c+2)(s-2b-1)(s-2b)(s-2a)}{2b(2b+1)(2b+2)(2b+3)(2c-2)(2c-1)2c(2c+1)} \right]^{1/2}$
$b - 1/2$	$(-1)^s \left[ \frac{3(s+1)s(s-2c+1)(s-2b)(s-2a-1)(s-2a)}{(2b-1)2b(2b+1)(2b+2)(2c-2)(2c-1)2c(2c+1)} \right]^{1/2}$
$b - 3/2$	$(-1)^s \left[ \frac{(s-1)s(s+1)(s-2a-2)(s-2a-1)(s-2a)}{(2b-2)(2b-1)2b(2b+1)(2c-2)(2c-1)2c(2c+1)} \right]^{1/2}$

ТАБЛИЦА 9.4

$$\begin{Bmatrix} a & b & c \\ 2 & e & f \end{Bmatrix}$$

$f$	$e = c + 2$
$b + 2$	$(-1)^s \left[ \frac{(s+5)!(s-2a+4)!(2b)!(2c)!}{(s+1)!(s-2a)!(2b+5)!(2c+5)!} \right]^{1/2}$
$b + 1$	$(-1)^{s+1} 2 \left[ \frac{(s+4)!(s-2c)(s-2b+1)(s-2a+3)!(2b-1)!(2c)!}{(s+1)!(s-2a)!(2b+4)!(2c+5)!} \right]^{1/2}$
$b$	$(-1)^s \left[ \frac{6(s+3)!(s-2c)!(s-2b+2)!(s-2a+2)!(2b-2)!(2c)!}{(s+1)!(s-2c-2)!(s-2b)!(s-2a)!(2b+3)!(2c+5)!} \right]^{1/2}$
$b - 1$	$(-1)^{s+1} 2 \left[ \frac{(s+2)(s-2c)!(s-2b+3)!(s-2a+1)(2b-3)!(2c)!}{(s-2c-3)!(s-2b)!(2b+2)!(2c+5)!} \right]^{1/2}$
$b - 2$	$(-1)^s \left[ \frac{(s-2c)!(s-2b+4)!(2b-4)!(2c)!}{(s-2c-4)!(s-2b)!(2b+1)!(2c+5)!} \right]^{1/2}$

ТАБЛИЦА

Ложение)

$f$	$e = c + 1$
$b + 2$	$(-1)^{s+1} 2 \left[ \frac{(s+4)! (s-2c+1) (s-2b) (s-2a+3)! (2b)! (2c-1)!}{(s+1)! (s-2a)! (2b+5)! (2c+4)!} \right]^{1/2}$
$b + 1$	$(-1)^{s+1} 4 \{X - bc\} \left[ \frac{(s+3)! (s-2a+2)! (2b-1)! (2c-1)!}{(s+1)! (s-2a)! (2b+4)! (2c+4)!} \right]^{1/2}$
$b$	$(-1)^s 2 \{X + c\} \left[ \frac{6(s+2) (s-2c) (s-2b+1) (s-2a+1) (2b-2)! (2c-1)!}{(2b+3)! (2c+4)!} \right]^{1/2}$
$b - 1$	$(-1)^{s+1} 4 \{X + c(b+1)\} \left[ \frac{(s-2c)! (s-2b+2)! (2b-3)! (2c-1)!}{(s-2c-2)! (s-2b)! (2b+2)! (2c+4)!} \right]^{1/2}$
$b - 2$	$(-1)^s 2 \left[ \frac{(s+1) (s-2c)! (s-2b+3)! (s-2a) (2b-4)! (2c-1)!}{(s-2c-3)! (s-2b)! (2b+1)! (2c+4)!} \right]^{1/2}$
$f$	$e = c$
$b + 2$	$(-1)^s \left[ \frac{6(s+3)! (s-2c+2)! (s-2b)! (s-2a+2)! (2b)! (2c-2)!}{(s+1)! (s-2c)! (s-2b-2)! (s-2a)! (2b+5)! (2c+3)!} \right]^{1/2}$
$b + 1$	$(-1)^s 2 \{X + b\} \left[ \frac{6(s+2) (s-2c+1) (s-2b) (s-2a+1) (2b-1)! (2c-2)!}{(2b+4)! (2c+3)!} \right]^{1/2}$
$b$	$(-1)^s 2 \{3X(X-1) - 4b(b+1)c(c+1)\} \left[ \frac{(2b-2)! (2c-2)!}{(2b+3)! (2c+3)!} \right]^{1/2}$
$b - 1$	$(-1)^{s+1} 2 \{X - b - 1\} \left[ \frac{6(s+1) (s-2c) (s-2b+1) (s-2a) (2b-3)! (2c-2)!}{(2b+2)! (2c+3)!} \right]^{1/2}$
$b - 2$	$(-1)^s \left[ \frac{6(s+1)! (s-2c)! (s-2b+2)! (s-2a)! (2b-4)! (2c-2)!}{(s-1)! (s-2c-2)! (s-2b)! (s-2a-2)! (2b+1)! (2c+3)!} \right]^{1/2}$
$f$	$e = c - 1$
$b + 2$	$(-1)^{s+1} 2 \left[ \frac{(s+2) (s-2c+3)! (s-2b)! (s-2a+1) (2b)! (2c-3)!}{(s-2c)! (s-2b-3)! (2b+5)! (2c+2)!} \right]^{1/2}$
$b + 1$	$(-1)^{s+1} 4 \{X + b(c+1)\} \left[ \frac{(s-2c+2)! (s-2b)! (2b-1)! (2c-3)!}{(s-2c)! (s-2b-2)! (2b+4)! (2c+2)!} \right]^{1/2}$
$b$	$(-1)^{s+1} 2 \{X - c - 1\} \left[ \frac{6(s+4) (s-2c+1) (s-2b) (s-2a) (2b-2)! (2c-3)!}{(2b+3)! (2c+2)!} \right]^{1/2}$
$b - 1$	$(-1)^{s+1} 4 \{X - (b+1)(c+1)\} \left[ \frac{(s+1)! (s-2a)! (2b-3)! (2c-3)!}{(s-1)! (s-2a-2)! (2b+2)! (2c+2)!} \right]^{1/2}$
$b - 2$	$(-1)^s 2 \left[ \frac{(s+1)! (s-2c) (s-2b+1) (s-2a)! (2b-4)! (2c-3)!}{(s-2)! (s-2a-3)! (2b+1)! (2c+2)!} \right]^{1/2}$
$f$	$e = c - 2$
$b + 2$	$(-1)^s \left[ \frac{(s-2c+4)! (s-2b)! (2b)! (2c-4)!}{(s-2c)! (s-2b-4)! (2b+5)! (2c+1)!} \right]^{1/2}$
$b + 1$	$(-1)^s 2 \left[ \frac{(s+1) (s-2c+3)! (s-2b)! (s-2a) (2b-1)! (2c-4)!}{(s-2c)! (s-2b-3)! (2b+4)! (2c+1)!} \right]^{1/2}$
$b$	$(-1)^s \left[ \frac{6(s+1)! (s-2c+2)! (s-2b)! (s-2a)! (2b-2)! (2c-4)!}{(s-1)! (s-2c)! (s-2b-2)! (s-2a-2)! (2b+3)! (2c+1)!} \right]^{1/2}$
$b - 1$	$(-1)^s 2 \left[ \frac{(s+1)! (s-2c+1) (s-2b) (s-2a)! (2b-3)! (2c-4)!}{(s-2)! (s-2a-3)! (2b+2)! (2c+1)!} \right]^{1/2}$
$b - 2$	$(-1)^s \left[ \frac{(s+1)! (s-2a)! (2b-4)! (2c-4)!}{(s-3)! (s-2a-4)! (2b+1)! (2c+1)!} \right]^{1/2}$

ТАБЛИЦА 9.5

$$\begin{cases} a & b & c \\ 5/2 & e & f \end{cases}$$

$f$	$e = c + 5/2$
$b + 5/2$	$(-1)^{s+1} \frac{(s+6)! (s-2a+5)! (2b)! (2c)!}{(s+1)! (s-2a)! (2b+6)! (2c+6)!} \uparrow^{1/2}$
$b + 3/2$	$(-1)^s \left[ \frac{5(s+5)! (s-2c)! (s-2b+4)! (s-2a+4)! (2b-4)! (2c)! \uparrow^{1/2}}{(s+1)! (s-2a)! (2b+5)! (2c+6)!} \right.$
$b + 1/2$	$(-1)^{s+1} \left[ \frac{10(s+4)! (s-2c)! (s-2b+2)! (s-2a+3)! (2b-2)! (2c)! \uparrow^{1/2}}{(s+1)! (s-2c-2)! (s-2b)! (s-2a)! (2b+4)! (2c+6)!} \right.$
$b - 1/2$	$(-1)^s \left[ \frac{10(s+3)! (s-2c)! (s-2b+3)! (s-2a+2)! (2b-3)! (2c)! \uparrow^{1/2}}{(s+1)! (s-2c-3)! (s-2b)! (s-2a)! (2b+3)! (2c+6)!} \right.$
$b - 3/2$	$(-1)^{s+1} \left[ \frac{5(s+2)! (s-2c)! (s-2b+4)! (s-2a+4)! (2b-4)! (2c)! \uparrow^{1/2}}{(s-2c-4)! (s-2b)! (2b+2)! (2c+6)!} \right.$
$b - 5/2$	$(-1)^s \left[ \frac{(s-2c)! (s-2b+5)! (2b-5)! (2c)! \uparrow^{1/2}}{(s-2c-5)! (s-2b)! (2b+1)! (2c+6)!} \right.$
$f$	$e = c + 3/2$
$b + 5/2$	$(-1)^s \left[ \frac{5(s+5)! (s-2c+1)! (s-2b)! (s-2a+4)! (2b)! (2c-4)! \uparrow^{1/2}}{(s+1)! (s-2a)! (2b+6)! (2c+5)!} \right.$
$b + 3/2$	$(-1)^s \{5X - 6bc\} \left[ \frac{(s+4)! (s-2a+3)! (2b-4)! (2c-1)! \uparrow^{1/2}}{(s+1)! (s-2a)! (2b+5)! (2c+5)!} \right.$
$b + 1/2$	$(-1)^{s+1} \{5X - 2c(b-3)\} \left[ \frac{2(s+3)! (s-2c)! (s-2b+1)! (s-2a+2)! (2b-2)! (2c-1)! \uparrow^{1/2}}{(s+1)! (s-2a)! (2b+4)! (2c+5)!} \right.$
$b - 1/2$	$(-1)^s \{5X + 2c(b+4)\} \left[ \frac{2(s+2)! (s-2c)! (s-2b+2)! (s-2a+1)! (2b-3)! (2c-1)! \uparrow^{1/2}}{(s-2c-2)! (s-2b)! (2b+3)! (2c+5)!} \right.$
$b - 3/2$	$(-1)^{s+1} \{5X + 6c(b+1)\} \left[ \frac{(s-2c)! (s-2b+3)! (2b-4)! (2c-4)! \uparrow^{1/2}}{(s-2c-3)! (s-2b)! (2b+2)! (2c+5)!} \right.$
$b - 5/2$	$(-1)^s \left[ \frac{5(s+1)! (s-2c)! (s-2b+4)! (s-2a)! (2b-5)! (2c-1)! \uparrow^{1/2}}{(s-2c-4)! (s-2b)! (2b+1)! (2c+5)!} \right.$
$f$	$e = c + 1/2$
$b + 5/2$	$(-1)^{s+1} \left[ \frac{10(s+4)! (s-2c+2)! (s-2b)! (s-2a+3)! (2b)! (2c-2)! \uparrow^{1/2}}{(s+1)! (s-2c)! (s-2b-2)! (s-2a)! (2b+6)! (2c+4)!} \right.$
$b + 3/2$	$(-1)^{s+1} \{5X - 2b(c-3)\} \left[ \frac{2(s+3)! (s-2c+1)! (s-2b)! (s-2a+2)! (2b-4)! (2c-2)! \uparrow^{1/2}}{(s+1)! (s-2a)! (2b+5)! (2c+4)!} \right.$
$b + 1/2$	$(-1)^{s+1} 2 \{5X^2 - 2X(2bc - b - c + 3) - 2bc(2bc + 4b + 4c + 3)\} \left[ \frac{(s+2)! (s-2a+1)! (2b-2)! (2c-2)! \uparrow^{1/2}}{(2b+4)! (2c+4)!} \right.$

ТАБЛИЦА 9.5 (продолжение)

$f$	$e = c + 1/2$	$f$	$e = c - 1/2$
$b - 1/2$	$(-1)^s 2 (5X^2 + 2X (2bc - b + 3c - 4) - 2c (b + 1) (2bc + 4b - 2c + 1)) \left[ \frac{(s-2c)(s-2b+1)(2b-3)(2c-2)!}{(2b+3)!(2c+4)!} \right]^{1/2}$	$b + 5/2$	$(-1)^s \left[ \frac{10(s+3)!(s-2c+3)!(s-2b)!(s-2a+2)!(2b)!(2c-3)!}{(s+4)!(s-2c)!(s-2b-3)!(s-2a)!(2b+6)!(2c+3)!} \right]^{1/2}$
$b - 3/2$	$(-1)^{s+1} (5X + 2(b+1)(c-3)) \left[ \frac{2(s+1)(s-2c)!(s-2b+2)!(s-2a)(2b-4)!(2c-2)!}{(s-2c-2)!(s-2b)!(2b+2)!(2c+4)!} \right]^{1/2}$	$b + 3/2$	$(-1)^s (5X + 2b(c+4)) \left[ \frac{2(s+2)(s-2c+2)!(s-2b)!(s-2a+1)(2b-1)!(2c-3)!}{(s-2c)!(s-2b-2)!(2b+5)!(2c+3)!} \right]^{1/2}$
$b - 5/2$	$(-1)^s \left[ \frac{10(s+1)!(s-2c)!(s-2b+3)!(s-2a)!(2b-5)!(2c-2)!}{(s-1)!(s-2c-3)!(s-2b)!(s-2a-2)!(2b+1)!(2c+4)!} \right]^{1/2}$	$b + 1/2$	$(-1)^s 2 (5X^2 + 2X (2bc + 3b - c - 4) - 2b(c+1) (2bc - 2b + 4c + 1)) \left[ \frac{(s-2c+1)(s-2b)(2b-2)!(2c-3)!}{(2b+4)!(2c+3)!} \right]^{1/2}$
$f$	$e = c - 1/2$	$b - 1/2$	$(-1)^s 2 (5X^2 - 2X (2bc + 3b + 3c + 7) - 2(b+1)(c+1)(2bc - 2b - 2c - 3)) \left[ \frac{(s+1)(s-2a)(2b-3)!(2c-3)!}{(2b+3)!(2c+3)!} \right]^{1/2}$
$b + 5/2$	$(-1)^{s+1} (5X - 2(b+1)(c+4)) \left[ \frac{2(s+1)!(s-2c)(s-2b+1)(s-2a)!(2b-4)!(2c-3)!}{(s-1)!(s-2a-2)!(2b+2)!(2c+3)!} \right]^{1/2}$	$b - 3/2$	$(-1)^s \left[ \frac{10(s+1)!(s-2c)!(s-2b+2)!(s-2a)!(2b-5)!(2c-3)!}{(s-2)!(s-2c-2)!(s-2b)!(s-2a-3)!(2b+1)!(2c+3)!} \right]^{1/2}$
$b - 5/2$	$(-1)^s \left[ \frac{10(s+1)!(s-2c)!(s-2b+3)!(s-2a)!(2b-5)!(2c-2)!}{(s-1)!(s-2c-3)!(s-2b)!(s-2a-2)!(2b+1)!(2c+4)!} \right]^{1/2}$	$f$	$e = c - 3/2$
$f$	$e = c - 3/2$	$b + 5/2$	$(-1)^{s+1} \left[ \frac{5(s+2)(s-2c+4)!(s-2b)!(s-2a+1)(2b)!(2c-4)!}{(s-2c)!(s-2b-4)!(2b+6)!(2c+2)!} \right]^{1/2}$
$b + 3/2$	$(-1)^{s+1} (5X + 6b(c+1)) \left[ \frac{(s-2c+3)!(s-2b)!(2b-4)!(2c-4)!}{(s-2c)!(s-2b-3)!(2b+5)!(2c+2)!} \right]^{1/2}$	$b + 3/2$	$(-1)^{s+1} (5X - 2(b-3)(c+1)) \left[ \frac{2(s+1)(s-2c+2)!(s-2b)!(s-2a)(2b-2)!(2c-4)!}{(s-2c)!(s-2b-2)!(2b+4)!(2c+2)!} \right]^{1/2}$
$b + 1/2$	$(-1)^{s+1} (5X + 2(b-3)(c+1)) \left[ \frac{2(s+1)!(s-2c+1)(s-2b)!(s-2a)!(2b-3)!(2c-4)!}{(s-1)!(s-2a-2)!(2b+3)!(2c+2)!} \right]^{1/2}$	$b - 1/2$	$(-1)^{s+1} (5X - 2(b+4)(c+1)) \left[ \frac{2(s+1)!(s-2c+1)(s-2b)!(s-2a)!(2b-3)!(2c-4)!}{(s-1)!(s-2a-2)!(2b+3)!(2c+2)!} \right]^{1/2}$
$b - 3/2$	$(-1)^{s+1} (5X - 6(b+1)(c+1)) \left[ \frac{(s+1)!(s-2a)!(2b-4)!(2c-4)!}{(s-2)!(s-2a-3)!(2b+2)!(2c+2)!} \right]^{1/2}$	$b - 3/2$	$(-1)^s \left[ \frac{5(s+1)!(s-2c)(s-2b+1)(s-2a)!(2b-5)!(2c-4)!}{(s-3)!(s-2a-4)!(2b+1)!(2c+2)!} \right]^{1/2}$
$b - 5/2$	$(-1)^s \left[ \frac{5(s+1)!(s-2c)(s-2b+1)(s-2a)!(2b-5)!(2c-4)!}{(s-3)!(s-2a-4)!(2b+1)!(2c+2)!} \right]^{1/2}$	$b - 5/2$	$(-1)^s \left[ \frac{5(s+1)!(s-2c)(s-2b+1)(s-2a)!(2b-5)!(2c-4)!}{(s-3)!(s-2a-4)!(2b+1)!(2c+2)!} \right]^{1/2}$

ТАБЛИЦА 9.5 (продолжение)

$f$	$e = c - 5/2$
$b + 5/2$	$(-1)^s \left[ \frac{(s-2c+5)!(s-2b)!(2b)!(2c-5)!}{(s-2c)!(s-2b-5)!(2b+6)!(2c+1)!} \right]^{1/2}$
$b + 3/2$	$(-1)^s \left[ \frac{5(s+1)(s-2c+4)!(s-2b)!(s-2a)(2b-1)!(2c-5)!}{(s-2c)!(s-2b-4)!(2b+5)!(2c+1)!} \right]^{1/2}$
$b + 1/2$	$(-1)^s \left[ \frac{10(s+1)!(s-2c+3)!(s-2b)!(s-2a)!(2b-2)!(2c-5)!}{(s-4)!(s-2c)!(s-2b-3)!(s-2a-2)!(2b+4)!(2c+1)!} \right]^{1/2}$
$b - 1/2$	$(-1)^s \left[ \frac{10(s+1)!(s-2c+2)!(s-2b)!(s-2a)!(2b-3)!(2c-5)!}{(s-2)!(s-2c)!(s-2b-2)!(s-2a-3)!(2b+3)!(2c+1)!} \right]^{1/2}$
$b - 3/2$	$(-1)^s \left[ \frac{5(s+1)!(s-2c+1)(s-2b)(s-2a)!(2b-4)!(2c-5)!}{(s-3)!(s-2a-4)!(2b+2)!(2c+1)!} \right]^{1/2}$
$b - 5/2$	$(-1)^s \left[ \frac{(s+1)!(s-2a)!(2b-5)!(2c-5)!}{(s-4)!(s-2a-5)!(2b+1)!(2c+1)!} \right]^{1/2}$

ТАБЛИЦА 9.6

$$\begin{cases} a & b & c \\ 3 & e & f \end{cases}$$

$f$	$e = c + 3$
$b + 3$	$(-1)^s \left[ \frac{(s+7)!(s-2a+6)!(2b)!(2c)!}{(s+1)!(s-2a)!(2b+7)!(2c+7)!} \right]^{1/2}$
$b + 2$	$(-1)^{s+1} \left[ \frac{6(s+6)!(s-2c)(s-2b+4)(s-2a+5)!(2b-1)!(2c)!}{(s+1)!(s-2a)!(2b+6)!(2c+7)!} \right]^{1/2}$
$b + 1$	$(-1)^s \left[ \frac{15(s+5)!(s-2c)!(s-2b+2)!(s-2a+4)!(2b-2)!(2c)!}{(s+1)!(s-2c-2)!(s-2b)!(s-2a)!(2b+5)!(2c+7)!} \right]^{1/2}$
$b$	$(-1)^{s+1} 2 \left[ \frac{5(s+4)!(s-2c)!(s-2b+3)!(s-2a+3)!(2b-3)!(2c)!}{(s+1)!(s-2c-3)!(s-2b)!(s-2a)!(2b+4)!(2c+7)!} \right]^{1/2}$
$b - 1$	$(-1)^s \left[ \frac{15(s+3)!(s-2c)!(s-2b+4)!(s-2a+2)!(2b-4)!(2c)!}{(s+1)!(s-2c-4)!(s-2b)!(s-2a)!(2b+3)!(2c+7)!} \right]^{1/2}$
$b - 2$	$(-1)^{s+1} \left[ \frac{6(s+2)(s-2c)!(s-2b+5)!(s-2a+1)(2b-5)!(2c)!}{(s-2c-5)!(s-2b)!(2b+2)!(2c+7)!} \right]^{1/2}$
$b - 3$	$(-1)^s \left[ \frac{(s-2c)!(s-2b+6)!(2b-6)!(2c)!}{(s-2c-6)!(s-2b)!(2b+1)!(2c+7)!} \right]^{1/2}$
$f$	$e = c + 2$
$b + 3$	$(-1)^{s+1} \left[ \frac{6(s+6)!(s-2c+4)(s-2b)(s-2a+5)!(2b)!(2c-1)!}{(s+1)!(s-2a)!(2b+7)!(2c+6)!} \right]^{1/2}$



ТАБЛИЦА 9.6 (продолжение)

$f$	$e = c + 2$	$f$	$e = c + 1$	$f$	$e = c$
$b + 2$	$(-1)^{s+1} 2 \{3X - 4bc\} \left[ \frac{(s+5)! (s-2a+4)! (2b-1)! (2c-1)! \sqrt{1/2}}{(s+1)! (s-2a)! (2b+6)! (2c+6)!} \right]$	$b + 3$	$(-1)^s \left[ \frac{15(s+5)! (s-2c+2)! (s-2b)! (s-2a+4)! (2b)! (2c-2)! \sqrt{1/2}}{(s+1)! (s-2c)! (s-2b-2)! (s-2a)! (2b+7)! (2c+5)!} \right]$	$b + 3$	$(-1)^{s+1} 2 \left[ \frac{5(s+4)! (s-2c+3)! (s-2b)! (s-2a+3)! (2b)! (2c-3)! \sqrt{1/2}}{(s+1)! (s-2c)! (s-2b-3)! (s-2a)! (2b+7)! (2c+4)!} \right]$
$b + 1$	$(-1)^s \{3X - 2c(b-2)\} \left[ \frac{10(s+4)! (s-2c)(s-2b+1)(s-2a+3)! (2b-2)! (2c-1)! \sqrt{1/2}}{(s+1)! (s-2a)! (2b+5)! (2c+6)!} \right]$	$b + 2$	$(-1)^s \{3X - 2b(c-2)\} \left[ \frac{10(s+4)! (s-2c+1)(s-2b)(s-2a+3)! (2b-1)! (2c-2)! \sqrt{1/2}}{(s+1)! (s-2a)! (2b+6)! (2c+5)!} \right]$	$b + 2$	$(-1)^{s+1} 2 \{X + 2b\} \left[ \frac{30(s+3)! (s-2c+2)! (s-2b)! (s-2a+2)! (2b-1)! (2c-3)! \sqrt{1/2}}{(s+1)! (s-2c)! (s-2b-2)! (s-2a)! (2b+6)! (2c+4)!} \right]$
$b$	$(-1)^{s+1} 2 \{X + 2c\} \left[ \frac{30(s+3)! (s-2c)! (s-2b+2)! (s-2a+2)! (2b-3)! (2c-1)! \sqrt{1/2}}{(s+1)! (s-2c-4)! (s-2b)! (2b+2)! (2c+6)!} \right]$	$b + 1$	$(-1)^s (15X^2 - 10X(2bc - b - c + 2) - 4bc(bc + 7b + 7c + 4)) \left[ \frac{(s+3)! (s-2a+2)! (2b-2)! (2c-2)! \sqrt{1/2}}{(s+1)! (s-2a)! (2b+5)! (2c+5)!} \right]$	$b + 1$	$(-1)^{s+1} 2 \{X + b\} - b(b+2)(2c-1)(2c+3) \left[ \frac{3(s+2)! (s-2b+1)(s-2a+1)(2b-2)! (2c-3)! \sqrt{1/2}}{(s+1)! (s-2c)! (s-2b-2)! (s-2a)! (2b+6)! (2c+4)!} \right]$
$b - 1$	$(-1)^s \{3X + 2c(b+3)\} \left[ \frac{10(s+2)(s-2c)! (s-2b+3)! (s-2a+1)(2b-4)! (2c-1)! \sqrt{1/2}}{(s-2c-3)! (s-2b)! (2b+3)! (2c+6)!} \right]$	$b$	$(-1)^s (15X^2 - 10X(2bc - b - c + 2) - 4bc(bc + 7b + 7c + 4)) \left[ \frac{3(s+2)(s-2c)(s-2b+1)(s-2a+1)(2b-3)! (2c-2)! \sqrt{1/2}}{(2b+4)! (2c+5)!} \right]$	$b + 1$	$(-1)^{s+1} 2 \{5(X+b) - b(b+2)(2c-1)(2c+3)\} \left[ \frac{3(s+2)! (s-2c+1)(s-2b)(s-2a+1)(2b-2)! (2c-3)! \sqrt{1/2}}{(2b+5)! (2c+4)!} \right]$
$b - 2$	$(-1)^{s+1} 2 \{3X + 4c(b+1)\} \left[ \frac{(s-2c)! (s-2b+4)! (2b-5)! (2c-1)! \sqrt{1/2}}{(s-2c-4)! (s-2b)! (2b+2)! (2c+6)!} \right]$	$b - 1$	$(-1)^s (15X^2 + 10X(2bc - b + 3c - 3) - 4(b+1)c(bc + 7b - 6c + 3)) \left[ \frac{(s-2c)! (s-2b+2)! (2b-4)! (2c-2)! \sqrt{1/2}}{(s-2c-2)! (s-2b)! (2b+3)! (2c+5)!} \right]$	$b - 1$	$(-1)^s (15X^2 + 10X(2bc - b + 3c - 3) - 4(b+1)c(bc + 7b - 6c + 3)) \left[ \frac{(s-2c)! (s-2b+2)! (2b-4)! (2c-2)! \sqrt{1/2}}{(s-2c-2)! (s-2b)! (2b+3)! (2c+5)!} \right]$
$b - 3$	$(-1)^s \left[ \frac{6(s+1)(s-2c)! (s-2b+5)! (s-2a)(2b-6)! (2c-1)! \sqrt{1/2}}{(s-2c-5)! (s-2b)! (2b+1)! (2c+6)!} \right]$	$b - 2$	$(-1)^{s+1} 2 \{5(X+c) - (2b-1)(2b+3)c(c+2)\} \left[ \frac{(s+1)! (s-2a)! (2b+5)! (2c+5)! \sqrt{1/2}}{(s+1)! (s-2a)! (2b+5)! (2c+5)!} \right]$	$b - 2$	$(-1)^s \{3X + 2(b+1)(c-2)\} \left[ \frac{10(s+1)(s-2c)! (s-2b+3)! (s-2a)(2b-5)! (2c-2)! \sqrt{1/2}}{(s-2c-3)! (s-2b)! (2b+2)! (2c+5)!} \right]$
$f$	$e = c + 2$	$f$	$e = c + 1$	$f$	$e = c$

ТАБЛИЦА 9.6 (продолжение)

$f$	$e = c$
$b$	$(-1)^{s+1} 4 (5X^3 - 20X^2 - 4X (3b(b+1)(c+1)c(c+1) - b(b+1) - c(c+1) - 3] + 20b(b+1)(c+1)c(c+1)) \left[ \frac{(2b-3)!(2c-3)!}{(2b+4)!(2c+4)!} \right]^{1/2}$
$b-1$	$(-1)^s 2 (5(X-b-1)(X-b-3) - (b^2-1)(2c-1)(2c+3)) \left[ \frac{3(s+1)(s-2c)(s-2a)(2b-4)!(2c-3)!}{(2b+3)!(2c+4)!} \right]^{1/2}$
$b-2$	$(-1)^{s+1} 2 (X-2(b+1)) \left[ \frac{30(s+1)!(s-2c)!(s-2b+2)!(s-2a)!(2b-5)!(2c-3)!}{(s-1)!(s-2c-2)!(s-2b)!(s-2a-2)!(2b+2)!(2c+4)!} \right]^{1/2}$
$b-3$	$(-1)^s 2 \left[ \frac{5(s+1)!(s-2c)!(s-2b+3)!(s-2a)!(2b-6)!(2c-3)!}{(s-2)!(s-2c-3)!(s-2b)!(s-2a-3)!(2b+1)!(2c+4)!} \right]^{1/2}$
$f$	$e = c - 1$
$b+3$	$(-1)^s \left[ \frac{15(s+3)!(s-2c+4)!(s-2b)!(s-2a+2)!(2b)!(2c-4)!}{(s+1)!(s-2c)!(s-2b-4)!(s-2a)!(2b+7)!(2c+3)!} \right]^{1/2}$
$b+2$	$(-1)^s (3X+2b(c+3)) \left[ \frac{10(s+2)(s-2c+3)!(s-2b)!(s-2a+1)(2b-1)!(2c-4)!}{(s-2c)!(s-2b-3)!(2b+6)!(2c+3)!} \right]^{1/2}$
$b+1$	$(-1)^s (15X^2 + 10X(2bc+3b-c-3) - 4b(c+1)(bc-6b+7c+3)) \left[ \frac{(s-2c+2)!(s-2b)!(2b-2)!(2c-4)!}{(s-2c)!(s-2b-2)!(2b+5)!(2c+3)!} \right]^{1/2}$
$b$	$(-1)^s 2 (5(X-c-3)(X-c-1) - (2b-1)(2b+3)(c^2-1)) \left[ \frac{3(s+1)(s-2c+1)(s-2a)(2b-3)!(2c-4)!}{(2b+4)!(2c+3)!} \right]^{1/2}$
$b-1$	$(-1)^s (15X^2 - 10X(2bc+3b+3c+6) - 4(b+1)(c+1)(bc-6b-6c-9)) \left[ \frac{(s+1)!(s-2a)!(2b-4)!(2c-4)!}{(s-4)!(s-2a-2)!(2b+3)!(2c+3)!} \right]^{1/2}$
$b-2$	$(-1)^{s+1} (3X-2(b+1)(c+3)) \left[ \frac{10(s+1)!(s-2c)(s-2b+1)(s-2a)!(2b-5)!(2c-4)!}{(s-2)!(s-2a-3)!(2b+2)!(2c+3)!} \right]^{1/2}$
$b-3$	$(-1)^s \left[ \frac{15(s+1)!(s-2c)!(s-2b+2)!(s-2a)!(2b-6)!(2c-4)!}{(s-3)!(s-2c-2)!(s-2b)!(s-2a-4)!(2b+1)!(2c+3)!} \right]^{1/2}$
$f$	$e = c - 2$
$b+3$	$(-1)^{s+1} \left[ \frac{6(s+2)(s-2c+5)!(s-2b)!(s-2a+1)(2b)!(2c-5)!}{(s-2c)!(s-2b-5)!(2b+7)!(2c+2)!} \right]^{1/2}$
$b+2$	$(-1)^{s+1} 2 (3X+4b(c+1)) \left[ \frac{(s-2c+4)!(s-2b)!(2b-1)!(2c-5)!}{(s-2c)!(s-2b-4)!(2b+6)!(2c+2)!} \right]^{1/2}$
$b+1$	$(-1)^{s+1} (3X+2(b-2)(c+1)) \left[ \frac{10(s+1)(s-2c+3)!(s-2b)!(s-2a)(2b-2)!(2c-5)!}{(s-2c)!(s-2b-3)!(2b+5)!(2c+2)!} \right]^{1/2}$
$b$	$(-1)^{s+1} 2 (X-2(c+1)) \left[ \frac{30(s+1)!(s-2c+2)!(s-2b)!(s-2a)!(2b-3)!(2c-5)!}{(s-1)!(s-2c)!(s-2b-2)!(s-2a-2)!(2b+4)!(2c+2)!} \right]^{1/2}$
$b-1$	$(-1)^{s+1} (3X-2(b+3)(c+1)) \left[ \frac{10(s+1)!(s-2c+1)(s-2b)(s-2a)!(2b-4)!(2c-5)!}{(s-2)!(s-2a-3)!(2b+3)!(2c+2)!} \right]^{1/2}$

$$e = c - 2$$

$$(-1)^{e+1} 2 \{ 3X - 4(b+1)(c+1) \left[ \frac{(s+1)!(s-2a)!(2b-5)!(2c-5)!}{(s-3)!(s-2a-4)!(2b+2)!(2c+2)!} \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$(-1)^e \left[ \frac{6(s+1)!(s-2c)(s-2b+1)(s-2a)!(2b-6)!(2c-5)!}{(s-4)!(s-2a-5)!(2b+1)!(2c+2)!} \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$e = c - 3$$

$$(-1)^e \left[ \frac{(s-2c+6)!(s-2b)!(2b)!(2c-6)!}{(s-2c)!(s-2b-6)!(2b+7)!(2c+1)!} \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$(-1)^e \left[ \frac{6(s+1)(s-2c+5)!(s-2b)!(s-2a)(2b-4)!(2c-6)!}{(s-2c)!(s-2b-5)!(2b+6)!(2c+1)!} \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$(-1)^e \left[ \frac{15(s+1)!(s-2c+4)!(s-2b)!(s-2a)!(2b-2)!(2c-6)!}{(s-4)!(s-2c)!(s-2b-4)!(s-2a-2)!(2b+5)!(2c+1)!} \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$(-1)^e 2 \left[ \frac{5(s+1)!(s-2c+3)!(s-2b)!(s-2a)!(2b-3)!(2c-6)!}{(s-2)!(s-2c)!(s-2b-3)!(s-2a-3)!(2b+4)!(2c+1)!} \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$(-1)^e \left[ \frac{15(s+1)!(s-2c+2)!(s-2b)!(s-2a)!(2b-4)!(2c-6)!}{(s-3)!(s-2c)!(s-2b-2)!(s-2a-4)!(2b+3)!(2c+1)!} \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$(-1)^e \left[ \frac{6(s+1)!(s-2c+1)(s-2b)(s-2a)!(2b-5)!(2c-6)!}{(s-4)!(s-2a-5)!(2b+2)!(2c+1)!} \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$(-1)^e \left[ \frac{(s+1)!(s-2a)!(2b-6)!(2c-6)!}{(s-5)!(s-2a-6)!(2b+1)!(2c+1)!} \right]^{\frac{1}{2}}$$

ТАБЛИЦА 9.7

$$\begin{Bmatrix} a & b & c \\ 7/2 & e & f \end{Bmatrix}$$

$$e = c + 7/2$$

$$(-1)^{e+1} \left[ \frac{(s+8)!(s-2a+7)!(2b)!(2c)!}{(s+1)!(s-2a)!(2b+8)!(2c+8)!} \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$(-1)^e \left[ \frac{7(s+7)!(s-2c)(s-2b+1)(s-2a+6)!(2b-4)!(2c)!}{(s+1)!(s-2a)!(2b+7)!(2c+8)!} \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$(-1)^{e+1} \left[ \frac{21(s+6)!(s-2c)!(s-2b+2)!(s-2a+5)!(2b-2)!(2c)!}{(s+4)!(s-2c-2)!(s-2b)!(s-2a)!(2b+6)!(2c+8)!} \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$(-1)^e \left[ \frac{35(s+5)!(s-2c)!(s-2b+3)!(s-2a+4)!(2b-3)!(2c)!}{(s+1)!(s-2c-3)!(s-2b)!(s-2a)!(2b+5)!(2c+8)!} \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$(-1)^{e+1} \left[ \frac{35(s+4)!(s-2c)!(s-2b+4)!(s-2a+3)!(2b-4)!(2c)!}{(s+4)!(s-2c-4)!(s-2b)!(s-2a)!(2b+4)!(2c+8)!} \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$(-1)^e \left[ \frac{21(s+3)!(s-2c)!(s-2b+5)!(s-2a+2)!(2b-5)!(2c)!}{(s+1)!(s-2c-5)!(s-2b)!(s-2a)!(2b+3)!(2c+8)!} \right]^{\frac{1}{2}}$$

f

b + 7/2

b + 5/2

b + 3/2

b + 1/2

b - 1/2

b - 3/2

ТАБЛИЦА 9.7 (продолжение)

$f$	$e = c + 7/2$	
$b - 5/2$	$(-1)^{s+1} \left[ \frac{7(s+2)(s-2c)! (s-2b+6)! (s-2a+1)(2b-6)! (2c)!}{(s-2c-6)! (s-2b)! (2b+2)! (2c+8)!} \right]^{1/2}$	
$b - 7/2$	$(-1)^s \left[ \frac{(s-2c)! (s-2b+7)! (2b-7)! (2c)!}{(s-2c-7)! (s-2b)! (2b+1)! (2c+8)!} \right]^{1/2}$	
$f$	$e = c + 5/2$	
$b + 7/2$	$(-1)^s \left[ \frac{7(s+7)! (s-2c+1)(s-2b)(s-2a+6)! (2b)! (2c-1)!}{(s+1)! (s-2a)! (2b+8)! (2c+7)!} \right]^{1/2}$	
$b + 5/2$	$(-1)^s \{7X - 10cb\} \left[ \frac{(s+6)! (s-2a+5)! (2b-1)! (2c-1)!}{(s+1)! (s-2a)! (2b+7)! (2c+7)!} \right]^{1/2}$	
$b + 3/2$	$(-1)^{s+1} \{7X - 2c(3b-5)\} \left[ \frac{3(s+5)! (s-2c)(s-2b+1)(s-2a+4)! (2b-2)! (2c-1)!}{(s+1)! (s-2a)! (2b+6)! (2c+7)!} \right]^{1/2}$	
$b + 1/2$	$(-1)^s \{7X - 2c(b-8)\} \left[ \frac{5(s+4)! (s-2c)! (s-2b+2)! (s-2a+3)! (2b-3)! (2c-1)!}{(s+1)! (s-2c-2)! (s-2a)! (2b+5)! (2c+7)!} \right]^{1/2}$	
$b - 1/2$	$(-1)^{s+1} \{7X + 2c(b+9)\} \left[ \frac{5(s+3)! (s-2c)! (s-2b+3)! (s-2a+2)! (2b-4)! (2c-1)!}{(s+1)! (s-2c-3)! (s-2a)! (2b+4)! (2c+7)!} \right]^{1/2}$	
$b - 3/2$	$(-1)^s \{7X + 2c(3b+8)\} \left[ \frac{3(s+2)(s-2c)! (s-2b+4)! (s-2a+1)(2b-5)! (2c-1)!}{(s-2c-4)! (s-2b)! (2b+3)! (2c+7)!} \right]^{1/2}$	
$b - 5/2$	$(-1)^{s+1} \{7X + 10c(b+1)\} \left[ \frac{(s-2c)! (s-2b+5)! (2b-6)! (2c-1)!}{(s-2c-5)! (s-2b)! (2b+2)! (2c+7)!} \right]^{1/2}$	
$b - 7/2$	$(-1)^s \left[ \frac{7(s+1)(s-2c)! (s-2b+6)! (s-2a)(2b-7)! (2c-1)!}{(s-2c-6)! (s-2b)! (2b+1)! (2c+7)!} \right]^{1/2}$	
$f$	$e = c + 3/2$	
$b + 7/2$	$(-1)^{s+1} \left[ \frac{21(s+6)! (s-2c+2)! (s-2b)! (s-2a+5)! (2b)! (2c-2)!}{(s+1)! (s-2c)! (s-2b-2)! (s-2a)! (2b+8)! (2c+6)!} \right]^{1/2}$	
$b + 5/2$	$(-1)^{s+1} \{7X - 2b(3c-5)\} \left[ \frac{3(s+5)! (s-2c+1)(s-2b)(s-2a+4)! (2b-1)! (2c-2)!}{(s+1)! (s-2a)! (2b+7)! (2c+6)!} \right]^{1/2}$	
$b + 3/2$	$(-1)^{s+1} \{21X^2 - 6X(6bc - 3b - 3c + 5) + 4bc(bc - 11b - 11c - 5)\} \left[ \frac{(s+4)! (s-2a+3)! (2b-2)! (2c-2)!}{(s+1)! (s-2a)! (2b+6)! (2c+6)!} \right]^{1/2}$	
$b + 1/2$	$(-1)^s \{7X^2 - 2X(2bc - b - 9c + 8) - 4c[c(b^2 + 3b - 4) + 3b^2 + 2b + 2]\} \left[ \frac{15(s+3)! (s-2c)(s-2b+1)(s-2a+2)! (2b-3)! (2c-2)!}{(s+1)! (s-2a)! (2b+5)! (2c+6)!} \right]^{1/2}$	
$b - 1/2$	$(-1)^{s+1} \{7X^2 + 2X(2bc - b + 11c - 9) - 4c[c(b^2 - b - 6) + 3b^2 + 4b + 3]\} \left[ \frac{15(s+2)(s-2c)! (s-2b+2)! (s-2a+1)(2b-4)! (2c-2)!}{(s-2c-2)! (s-2b)! (2b+4)! (2c+6)!} \right]^{1/2}$	
$b - 3/2$	$(-1)^s \{21X^2 + 6X(6bc - 3b + 9c - 8) + 4c(b+1)(bc - 11b + 12c - 6)\} \left[ \frac{(s-2c)! (s-2b+3)! (2b-5)! (2c-2)!}{(s-2c-3)! (s-2b)! (2b+3)! (2c+6)!} \right]^{1/2}$	

ТАБЛИЦА 9.7 (продолжение)

$f$	$e = c + 3/2$
$b - 5/2$	$(-1)^{s+1} \{7X + 2(b+1)(3c-5)\} \left[ \frac{3(s+1)(s-2c)! (s-2b+4)! (s-2a)(2b-6)! (2c-2)!}{(s-2c-4)! (s-2b)! (2b+2)! (2c+6)!} \right]^{1/2}$
$b - 7/2$	$(-1)^s \left[ \frac{21(s+1)! (s-2c)! (s-2b+5)! (s-2a)! (2b-7)! (2c-2)!}{(s-4)! (s-2c-5)! (s-2b)! (s-2a-2)! (2b+1)! (2c+6)!} \right]^{1/2}$
$f$	$e = c + 1/2$
$b + 7/2$	$(-1)^s \left[ \frac{35(s+5)! (s-2c+3)! (s-2b)! (s-2a+4)! (2b)! (2c-3)!}{(s+1)! (s-2c)! (s-2b-3)! (s-2a)! (2b+8)! (2c+5)!} \right]^{1/2}$
$b + 5/2$	$(-1)^s \{7X - 2b(c-8)\} \left[ \frac{5(s+4)! (s-2c+2)! (s-2b)! (s-2a+3)! (2b-4)! (2c-3)!}{(s+1)! (s-2c)! (s-2b-2)! (s-2a)! (2b+7)! (2c+5)!} \right]^{1/2}$
$b + 3/2$	$(-1)^s \{7X^2 - 2X(2bc - 9b - c + 8) - 4b[c^2 + 3c - 4] + 3c^3 + 2c + 2\} \times$ $\times \left[ \frac{15(s+3)! (s-2c+1)! (s-2b)(s-2a+2)! (2b-2)! (2c-3)!}{(s+4)! (s-2a)! (2b+6)! (2c+5)!} \right]^{1/2}$
$b + 1/2$	$(-1)^s (35X^3 - 10X^2(3bc - 3b - 3c + 17) - 20X(3b^2c^2 + 6b^2c + 6b^2 - 2b^2 + b + c - 6) + 8bc(3b^2c^2 + 3b^2c + 3bc^2 - 6b^2 - 6c^2 + 13bc + 19b + 19c + 22) \left[ \frac{(s+2)(s-2a+1)(2b-3)! (2c-3)!}{(2b+5)! (2c+5)!} \right]^{1/2}$
$b - 1/2$	$(-1)^{s+1} (35X^3 + 10X^2(3bc - 3b + 6c - 20) - 20X(3b^2c^2 + 6b^2c - 2b^2 - 5c^2 + 12bc - 5b + 7c - 9) - 8(b+1)c(3b^2c^2 + 3b^2c + 3bc^2 - 6b^2 - 6c^2 - 7bc - 31b + 9c - 3) \left[ \frac{(s-2c)(s-2b+1)(2b-4)! (2c-3)!}{(2b+4)! (2c+5)!} \right]^{1/2}$
$b - 3/2$	$(-1)^s \{7X^2 + 2X(2bc - 9b + 3c - 17) - 4(b+1)[b(c^2 + 3c - 4) - 2c^2 + c - 6]\} \times$ $\times \left[ \frac{15(s+1)(s-2c)! (s-2b+2)! (s-2a)(2b-5)! (2c-3)!}{(s-2c-2)! (s-2b)! (2b+3)! (2c+5)!} \right]^{1/2}$
$b - 5/2$	$(-1)^{s+1} \{7X + 2(b+1)(c-8)\} \left[ \frac{5(s+4)! (s-2c)! (s-2b+3)! (s-2a)! (2b-6)! (2c-3)!}{(s-4)! (s-2c-3)! (s-2b)! (s-2a-2)! (2b+2)! (2c+5)!} \right]^{1/2}$
$b - 7/2$	$(-1)^s \left[ \frac{35(s+1)! (s-2c)! (s-2b+4)! (s-2a)! (2b-7)! (2c-3)!}{(s-2)! (s-2c-4)! (s-2b)! (s-2a-3)! (2b+1)! (2c+5)!} \right]^{1/2}$
$f$	$e = c - 1/2$
$b + 7/2$	$(-1)^{s+1} \left[ \frac{35(s+4)! (s-2c+4)! (s-2b)! (s-2a+3)! (2b)! (2c-4)!}{(s+1)! (s-2c)! (s-2b-4)! (s-2a)! (2b+8)! (2c+4)!} \right]^{1/2}$
$b + 5/2$	$(-1)^{s+1} \{7X + 2b(c+9)\} \left[ \frac{5(s+3)! (s-2c+3)! (s-2b)! (s-2a+2)! (2b-4)! (2c-4)!}{(s+1)! (s-2c)! (s-2b-3)! (s-2a)! (2b+7)! (2c+4)!} \right]^{1/2}$
$b + 3/2$	$(-1)^{s+1} \{7X^2 + 2X(2bc + 11b - c - 9) - 4b[c^2 - c - 6] + 3c^3 + 4c + 3\} \times$ $\times \left[ \frac{15(s+2)(s-2c+2)! (s-2b)! (s-2a+1)(2b-2)! (2c-4)!}{(s-2c)! (s-2b-2)! (2b+6)! (2c+4)!} \right]^{1/2}$

ТАБЛИЦА 9.7 (продолжение)

$f$	$e = c - 1/2$
$b + 1/2$	$(-1)^{s+1} \{35X^3 + 10X^2 (3bc + 6b - 3c - 20) - 20X (3b^2c^2 + 6bc^2 - 5b^2 - 2c^2 + 12bc + 7b - 5c - 9) - 8b(c + 1)(3b^2c^2 + 3b^2c + 3bc^2 - 6b^2 - 6c^2 - 7bc + 9b - 31c - 3)\} \left[ \frac{(s-2c+1)(s-2b)(2b-3)!(2c-4)! \Gamma^{1/2}}{(2b+5)!(2c+4)!} \right]$
$b - 1/2$	$(-1)^{s+1} \{35X^3 - 10X^2 (3bc + 6b + 6c + 26) - 20X (3b^2c^2 - 5b^2 - 5c^2 - 12bc - 17b - 17c - 21) + 8(b+1)(c+1)(3b^2c^2 + 3b^2c + 3bc^2 - 6b^2 - 6c^2 + 13bc - 21b - 21c - 18)\} \left[ \frac{(s+1)(s-2a)(2b-4)!(2c-4)! \Gamma^{1/2}}{(2b+4)!(2c+4)!} \right]$
$b - 3/2$	$(-1)^s \{7X^2 - 2X(2bc + 11b + 3c + 20) - 4(b+1)[b(c^2 - c - 6) - 2c^2 - 5c - 9]\} \times \left[ \frac{15(s+1)!(s-2c)(s-2b+1)(s-2a)!(2b-5)!(2c-4)! \Gamma^{1/2}}{(s-1)!(s-2a-2)!(2b+3)!(2c+4)!} \right]$
$b - 5/2$	$(-1)^{s+1} \{7X - 2(b+1)(c+9)\} \left[ \frac{5(s+1)!(s-2c)!(s-2b+2)!(s-2a)!(2b-6)!(2c-4)! \Gamma^{1/2}}{(s-2)!(s-2c-2)!(s-2b)!(s-2a-3)!(2b+2)!(2c+4)!} \right]$
$b - 7/2$	$(-1)^s \left[ \frac{35(s+1)!(s-2c)!(s-2b+3)!(s-2a)!(2b-7)!(2c-4)! \Gamma^{1/2}}{(s-3)!(s-2c-3)!(s-2b)!(s-2a-4)!(2b+1)!(2c+4)!} \right]$
$f$	$e = c - 3/2$
$b + 7/2$	$(-1)^s \left[ \frac{21(s+3)!(s-2c+5)!(s-2b)!(s-2a+2)!(2b)!(2c-5)! \Gamma^{1/2}}{(s+1)!(s-2c)!(s-2b-5)!(s-2a)!(2b+8)!(2c+3)!} \right]$
$b + 5/2$	$(-1)^s \{7X + 2b(3c + 8)\} \left[ \frac{3(s+2)(s-2c+4)!(s-2b)!(s-2a+1)(2b-4)!(2c-5)! \Gamma^{1/2}}{(s-2c)!(s-2b-4)!(2b+7)!(2c+3)!} \right]$
$b + 3/2$	$(-1)^s \{21X^2 + 6X(6bc + 9b - 3c - 8) + 4b(c+1)(bc + 12b - 11c - 6)\} \left[ \frac{(s-2c+3)!(s-2b)!(2b-2)!(2c-5)! \Gamma^{1/2}}{(s-2c)!(s-2b-3)!(2b+6)!(2c+3)!} \right]$
$b + 1/2$	$(-1)^s \{7X^2 + 2X(2bc + 3b - 9c - 17) - 4(c+1)[c(b^2 + 3b - 4) - 2b^2 + b - 6]\} \times \left[ \frac{15(s+1)!(s-2c+2)!(s-2b)!(s-2a)(2b-3)!(2c-5)! \Gamma^{1/2}}{(s-2c)!(s-2b-2)!(2b+5)!(2c+3)!} \right]$
$b - 1/2$	$(-1)^s \{7X^2 - 2X(2bc + 3b + 41c + 20) - 4(c+1)[c(b^2 - b - 6) - 2b^2 - 5b - 9]\} \times \left[ \frac{15(s+1)!(s-2c+1)(s-2b)(s-2a)!(2b-4)!(2c-5)! \Gamma^{1/2}}{(s-1)!(s-2a-2)!(2b+4)!(2c+3)!} \right]$
$b - 3/2$	$(-1)^s \{21X^2 - 6X(6bc + 9b + 9c + 17) + 4(b+1)(c+1)(bc + 12b + 12c + 18)\} \left[ \frac{(s+1)!(s-2a)!(2b-5)!(2c-5)! \Gamma^{1/2}}{(s-2)!(s-2a-3)!(2b+3)!(2c+3)!} \right]$
$b - 5/2$	$(-1)^{s+1} \{7X - 2(b+1)(3c + 8)\} \left[ \frac{3(s+1)!(s-2c)(s-2b+1)(s-2a)!(2b-6)!(2c-5)! \Gamma^{1/2}}{(s-3)!(s-2a-4)!(2b+2)!(2c+3)!} \right]$
$b - 7/2$	$(-1)^s \left[ \frac{21(s+1)!(s-2c)!(s-2b+2)!(s-2a)!(2b-7)!(2c-5)! \Gamma^{1/2}}{(s-4)!(s-2c-2)!(s-2b)!(s-2a-5)!(2b+1)!(2c+3)!} \right]$
$f$	$e = c - 5/2$
$b + 7/2$	$(-1)^{s+1} \left[ \frac{7(s+2)(s-2c+6)!(s-2b)!(s-2a+1)(2b)!(2c-6)! \Gamma^{1/2}}{(s-2c)!(s-2b-6)!(2b+8)!(2c+2)!} \right]$

$$e = c - 5/2$$

$$\begin{aligned} & (-1)^{s+1} (7X + 10b(c+1)) \left[ \frac{(s-2c+5)!(s-2b)!(2b-1)!(2c-6)!}{(s-2c)!(s-2b-5)!(2b+7)!(2c+2)!} \right]^{1/2} \\ & (-1)^{s+1} (7X + 2(3b-5)(c+1)) \left[ \frac{3(s+1)(s-2c+4)!(s-2b)!(s-2a)(2b-2)!(2c-6)!}{(s-2c)!(s-2b-4)!(2b+6)!(2c+2)!} \right]^{1/2} \\ & (-1)^{s+1} (7X + 2(b-8)(c+1)) \left[ \frac{5(s+1)!(s-2c+3)!(s-2b)!(s-2a)!(2b-3)!(2c-6)!}{(s-1)!(s-2c)!(s-2b-3)!(s-2a-2)!(2b+5)!(2c+2)!} \right]^{1/2} \\ & (-1)^{s+1} (7X - 2(b+9)(c+1)) \left[ \frac{5(s+1)!(s-2c+2)!(s-2b)!(s-2a)!(2b-4)!(2c-6)!}{(s-2)!(s-2c)!(s-2b-2)!(s-2a-3)!(2b+4)!(2c+2)!} \right]^{1/2} \\ & (-1)^{s+1} (7X - 2(3b+8)(c+1)) \left[ \frac{3(s+1)!(s-2c+1)(s-2b)!(s-2a)!(2b-5)!(2c-6)!}{(s-3)!(s-2a-4)!(2b+3)!(2c+2)!} \right]^{1/2} \\ & (-1)^{s+1} (7X - 10(b+1)(c+1)) \left[ \frac{(s+1)!(s-2a)!(2b-6)!(2c-6)!}{(s-4)!(s-2a-5)!(2b+2)!(2c+2)!} \right]^{1/2} \\ & (-1)^s \left[ \frac{7(s+1)!(s-2c)(s-2b+1)(s-2a)!(2b-7)!(2c-6)!}{(s-5)!(s-2a-6)!(2b+1)!(2c+2)!} \right]^{1/2} \end{aligned}$$

$$e = c - 7/2$$

$$\begin{aligned} & (-1)^s \left[ \frac{(s-2c+7)!(s-2b)!(2b)!(2c-7)!}{(s-2c)!(s-2b-7)!(2b+8)!(2c+1)!} \right]^{1/2} \\ & (-1)^s \left[ \frac{7(s+1)(s-2c+6)!(s-2b)!(s-2a)(2b-4)!(2c-7)!}{(s-2c)!(s-2b-6)!(2b+7)!(2c+1)!} \right]^{1/2} \\ & (-1)^s \left[ \frac{21(s+1)!(s-2c+5)!(s-2b)!(s-2a)!(2b-2)!(2c-7)!}{(s-1)!(s-2c)!(s-2b-5)!(s-2a-2)!(2b+6)!(2c+1)!} \right]^{1/2} \\ & (-1)^s \left[ \frac{35(s+1)!(s-2c+4)!(s-2b)!(s-2a)!(2b-3)!(2c-7)!}{(s-2)!(s-2c)!(s-2b-4)!(s-2a-3)!(2b+5)!(2c+1)!} \right]^{1/2} \\ & (-1)^s \left[ \frac{35(s+1)!(s-2c+3)!(s-2b)!(s-2a)!(2b-4)!(2c-7)!}{(s-3)!(s-2c)!(s-2b-3)!(s-2a-4)!(2b+4)!(2c+1)!} \right]^{1/2} \\ & (-1)^s \left[ \frac{21(s+1)!(s-2c+2)!(s-2b)!(s-2a)!(2b-5)!(2c-7)!}{(s-4)!(s-2c)!(s-2b-2)!(s-2a-5)!(2b+3)!(2c+1)!} \right]^{1/2} \\ & (-1)^s \left[ \frac{7(s+1)!(s-2c+1)(s-2b)(s-2a)!(2b-6)!(2c-7)!}{(s-5)!(s-2a-6)!(2b+2)!(2c+1)!} \right]^{1/2} \\ & (-1)^s \left[ \frac{(s+1)!(s-2a)!(2b-7)!(2c-7)!}{(s-6)!(s-2a-7)!(2b+1)!(2c+1)!} \right]^{1/2} \end{aligned}$$

ТАБЛИЦА 9.8

$$\left\{ \begin{array}{ccc} a & b & c \\ 4 & e & f \end{array} \right\}$$

$$e = c + 4$$

$f$	
$b+4$	$(-1)^s \frac{(s+9)! (s-2a+8)! (2b)! (2c)!}{(s+1)! (s-2a)! (2b+9)! (2c+9)!} \Gamma_{1/2}$
$b+3$	$(-1)^{s+1} 2 \left[ \frac{2(s+8)! (s-2c)! (s-2b+4)! (s-2a+7)! (2b-1)! (2c)!}{(s+1)! (s-2a)! (2b+8)! (2c+9)!} \right] \Gamma_{1/2}$
$b+2$	$(-1)^s 2 \left[ \frac{7(s+7)! (s-2c)! (s-2b+2)! (s-2a+6)! (2b-2)! (2c)!}{(s+1)! (s-2c-2)! (s-2b)! (s-2a)! (2b+7)! (2c+9)!} \right] \Gamma_{1/2}$
$b+1$	$(-1)^{s+1} 2 \left[ \frac{14(s+6)! (s-2c)! (s-2b+3)! (s-2a+5)! (2b-3)! (2c)!}{(s+1)! (s-2c-3)! (s-2b)! (s-2a)! (2b+6)! (2c+9)!} \right] \Gamma_{1/2}$
$b$	$(-1)^s \left[ \frac{70(s+5)! (s-2c)! (s-2b+4)! (s-2a+4)! (2b-4)! (2c)!}{(s+1)! (s-2c-4)! (s-2b)! (s-2a)! (2b+5)! (2c+9)!} \right] \Gamma_{1/2}$
$b-1$	$(-1)^{s+1} 2 \left[ \frac{14(s+4)! (s-2c)! (s-2b+5)! (s-2a+3)! (2b-5)! (2c)!}{(s+1)! (s-2c-5)! (s-2b)! (s-2a)! (2b+4)! (2c+9)!} \right] \Gamma_{1/2}$
$b-2$	$(-1)^s 2 \left[ \frac{7(s+3)! (s-2c)! (s-2b+6)! (s-2a+2)! (2b-6)! (2c)!}{(s+1)! (s-2c-6)! (s-2b)! (s-2a)! (2b+3)! (2c+9)!} \right] \Gamma_{1/2}$
$b-3$	$(-1)^{s+1} 2 \left[ \frac{2(s+2)! (s-2c)! (s-2b+7)! (s-2a+1)! (2b-7)! (2c)!}{(s-2c-7)! (s-2b)! (2b+2)! (2c+9)!} \right] \Gamma_{1/2}$
$b-4$	$(-1)^s \left[ \frac{(s-2c)! (s-2b+8)! (2b-8)! (2c)!}{(s-2c-8)! (s-2b)! (2b+1)! (2c+9)!} \right] \Gamma_{1/2}$

$$e = c + 3$$

$f$	
$b+4$	$(-1)^{s+1} 2 \left[ \frac{2(s+8)! (s-2c+4)! (s-2b)! (s-2a+7)! (2b)! (2c-1)!}{(s+1)! (s-2a)! (2b+9)! (2c+8)!} \right] \Gamma_{1/2}$
$b+3$	$(-1)^{s+1} 4 (2X-3bc) \left[ \frac{(s+7)! (s-2a+6)! (2b-1)! (2c-1)!}{(s+1)! (s-2a)! (2b+8)! (2c+8)!} \right] \Gamma_{1/2}$
$b+2$	$(-1)^s 2 (2X-c(2b-3)) \left[ \frac{14(s+6)! (s-2c)! (s-2b+4)! (s-2a+5)! (2b-2)! (2c-1)!}{(s+1)! (s-2a)! (2b+7)! (2c+8)!} \right] \Gamma_{1/2}$
$b+1$	$(-1)^{s+1} 4 (2X-c(b-5)) \left[ \frac{7(s+5)! (s-2c)! (s-2b+2)! (s-2a+4)! (2b-3)! (2c-1)!}{(s+1)! (s-2c-2)! (s-2b)! (s-2a)! (2b+6)! (2c+8)!} \right] \Gamma_{1/2}$
$b$	$(-1)^s 4 (X+3c) \left[ \frac{35(s+4)! (s-2c)! (s-2b+3)! (s-2a+3)! (2b-4)! (2c+8)!}{(s+1)! (s-2c-3)! (s-2b)! (s-2a)! (2b+5)! (2c+8)!} \right] \Gamma_{1/2}$
$b-1$	$(-1)^{s+1} 4 (2X+c(b+6)) \left[ \frac{7(s+3)! (s-2c)! (s-2b+4)! (s-2a+2)! (2b-5)! (2c-1)!}{(s+1)! (s-2c-4)! (s-2b)! (s-2a)! (2b+4)! (2c+8)!} \right] \Gamma_{1/2}$
$b-2$	$(-1)^s 2 (2X+c(2b+5)) \left[ \frac{14(s+2)! (s-2c)! (s-2b+5)! (s-2a+1)! (2b-6)! (2c-1)!}{(s-2c-5)! (s-2b)! (2b+3)! (2c+8)!} \right] \Gamma_{1/2}$



$f$	$e = c + 3$
$b - 3$	$(-1)^{s+1} 4 \{2X + 3c(b+1)\} \left[ \frac{(s-2c)! (s-2b+6)! (2b-7)! (2c-4)!}{(s-2c-6)! (s-2b)! (2b+2)! (2c+8)!} \right]^{1/2}$
$b - 4$	$(-1)^{s+1} 2 \left[ \frac{2(s+4)(s-2c)! (s-2b+7)! (s-2a)(2b-8)! (2c-4)!}{(s-2c-7)! (s-2b)! (2b+1)! (2c+8)!} \right]^{1/2}$
$f$	$e = c + 2$
$b + 4$	$(-1)^s 2 \left[ \frac{7(s+7)! (s-2c+2)! (s-2b)! (s-2a+6)! (2b)! (2c-2)!}{(s+1)! (s-2c)! (s-2b-2)! (s-2a)! (2b+9)! (2c+7)!} \right]^{1/2}$
$b + 3$	$(-1)^s 2 \{2X - b(2c-3)\} \left[ \frac{14(s+6)! (s-2c+1)(s-2b)(s-2a+5)(2b-4)! (2c-2)!}{(s+1)! (s-2a)! (2b+8)! (2c+7)!} \right]^{1/2}$
$b + 2$	$(-1)^s 2 \{14X^2 - 7X(4bc - 2b - 2c + 3) + 4bc(2bc - 8b - 8c - 3)\} \left[ \frac{(s+5)! (s-2a+4)! (2b-2)! (2c-2)!}{(s+1)! (s-2a)! (2b+7)! (2c+7)!} \right]^{1/2}$
$b + 1$	$(-1)^{s+1} 2 \{14X^2 - 7X(2bc - b - 6c + 5) - 2c[2c(b-1)(b+10) + 13b^2 + 5b + 10]\} \times$ $\times \left[ \frac{2(s+4)! (s-2c)(s-2b+4)(s-2a+3)! (2b-3)! (2c-2)!}{(s+1)! (s-2a)! (2b+6)! (2c+7)!} \right]^{1/2}$
$b$	$(-1)^s 2 \{7X^2 + 7X(4c-3) - 4bc(b+1)(c+3) + 18c(2c-1)\} \left[ \frac{10(s+3)! (s-2c)! (s-2b+2)! (s-2a+2)! (2b-4)! (2c-2)!}{(s+1)! (s-2c-2)! (s-2b)! (s-2a)! (2b+5)! (2c+7)!} \right]^{1/2}$
$b - 1$	$(-1)^{s+1} 2 \{14X^2 + 7X(2bc - b + 8c - 6) - 2c[2c(b+2)(b-9) + 13b^2 + 21b + 18]\} \times$ $\times \left[ \frac{2(s+2)(s-2c)! (s-2b+3)! (s-2a+1)(2b-5)! (2c-2)!}{(s-2c-3)! (s-2b)! (2b+4)! (2c+7)!} \right]^{1/2}$
$b - 2$	$(-1)^s 2 \{14X^2 + 7X(4bc - 2b + 6c - 5) + 4c(b+1)(2bc - 8b + 10c - 5)\} \left[ \frac{(s-2c)! (s-2b+4)! (2b-6)! (2c-2)!}{(s-2c-4)! (s-2b)! (2b+3)! (2c+7)!} \right]^{1/2}$
$b - 3$	$(-1)^{s+1} 2 \{2X + (b+1)(2c-3)\} \left[ \frac{14(s+4)(s-2c)! (s-2b+5)! (s-2a)(2b-7)! (2c-2)!}{(s-2c-5)! (s-2b)! (2b+2)! (2c+7)!} \right]^{1/2}$
$b - 4$	$(-1)^s 2 \left[ \frac{7(s+1)! (s-2c)! (s-2b+6)! (s-2a)! (2b-8)! (2c-2)!}{(s-1)! (s-2c-6)! (s-2b)! (s-2a-2)! (2b+1)! (2c+7)!} \right]^{1/2}$
$f$	$e = c + 1$
$b + 4$	$(-1)^{s+1} 2 \left[ \frac{14(s+6)! (s-2c+3)! (s-2b)! (s-2a+5)! (2b)! (2c-3)!}{(s+1)! (s-2c)! (s-2b-3)! (s-2a)! (2b+9)! (2c+6)!} \right]^{1/2}$
$b + 3$	$(-1)^{s+1} 4 \{2X - b(c-5)\} \left[ \frac{7(s+5)! (s-2c+2)! (s-2b)! (s-2a+4)! (2b-4)! (2c-3)!}{(s+1)! (s-2c)! (s-2b-2)! (s-2a)! (2b+8)! (2c+6)!} \right]^{1/2}$
$b + 2$	$(-1)^{s+1} 2 \{14X^2 - 7X(2bc - 6b - c + 5) - 2b[2b(c-1)(c+10) + 13c^2 + 5c + 10]\} \times$ $\times \left[ \frac{2(s+4)! (s-2c+1)(s-2b)(s-2a+3)! (2b-2)! (2c-3)!}{(s+1)! (s-2c)! (2b+7)! (2c+6)!} \right]^{1/2}$

ТАБЛИЦА 9.8 (продолжение)

$f$	$e = c + 1$	$e = c$
$b + 1$	$(-1)^{s+1} 4 \{ 14X^3 (3bc - 3b - 3c + 14) - 2X (6b^2c^2 + 33b^2c + 33bc^2 - 18bc - 11b^2 - 11c^2 + 13b + 13c - 30) + 4bc (3b^2c^2 + 6b^2c + 6bc^2 + 5bc - 9b^2 - 9c^2 + 17b + 17c + 20) \} \left[ \frac{(s+3)! (s-2a+2)! (2b-3)! (2c-3)!}{(s+1)! (s-2a)! (2b+6)! (2c+6)!} \right]^{1/2}$	
$b$	$(-1)^s 4 \{ 7X^3 (3c - 7) - 2X (6b^2c^2 + 12b^2c + 6bc^2 + 12bc - 4b^2 - 4c^2 - 19c^2 - 4b + 32c - 27) - 4c (3b^2c^2 - b^2c + 3bc^2 - bc - 16b^2 - 6c^2 - 16b + 9c - 3) \} \left[ \frac{5(s+2)(s-2c)(s-2b+1)(s-2a+1)(2b-4)(2c-3)!}{(2b+5)!(2c+6)!} \right]^{1/2}$	
$b - 1$	$(-1)^{s+1} 4 \{ 14X^3 + 7X^2 (3bc - 3b + 6c - 14) - 2X (6b^2c^2 + 33b^2c - 21bc^2 + 84bc - 11b^2 - 38c^2 - 35b + 64c - 54) - 4c (b + 1) (3b^2c^2 + 6b^2c + 7bc - 9b^2 - 12c^2 - 35b + 18c - 6) \} \left[ \frac{(s-2c)! (s-2b+2)! (2b-5)! (2c-3)!}{(s-2c-2)! (s-2b)! (2b+4)! (2c+6)!} \right]^{1/2}$	
$b - 2$	$(-1)^s 2 \{ 14X^2 + 7X (2bc - 6b + 3c - 14) - 2(b+1) \{ 2b(c-1)(c+10) - 11c^2 + 13c - 30 \} \times \left[ \frac{2(s+1)(s-2c)(s-2b+3)(s-2a)(2b-6)! (2c-3)!}{(s-2c-3)! (s-2b)! (2b+3)! (2c+6)!} \right]^{1/2} \right.$	
$b - 3$	$(-1)^{s+1} 4 \{ 2X + (b+1)(c-5) \} \left[ \frac{7(s+1)!(s-2c)!(s-2b+4)!(s-2a)!(2b-7)!(2c-3)!}{(s-4)!(s-2c-4)!(s-2b)!(s-2a-2)!(2b+2)!(2c+6)!} \right]^{1/2}$	
$b - 4$	$(-1)^s 2 \left[ \frac{14(s+1)!(s-2c)!(s-2b+5)!(s-2a)!(2b-8)!(2c-3)!}{(s-2)!(s-2c-5)!(s-2b)!(s-2a-3)!(2b+1)!(2c+6)!} \right]^{1/2}$	
$f$		$e = c$
$b + 4$		$(-1)^s \left[ \frac{70(s+5)!(s-2c+4)!(s-2b)!(s-2a+4)!(2b)!(2c-4)!}{(s+1)!(s-2c)!(s-2b-4)!(s-2a)!(2b+9)!(2c+5)!} \right]^{1/2}$
$b + 3$		$(-1)^s 4 \{ X + 3b \} \left[ \frac{35(s+4)!(s-2c+3)!(s-2b)!(s-2a+3)!(2b-1)!(2c-4)!}{(s+1)!(s-2c)!(s-2b-3)!(s-2a)!(2b+8)!(2c+5)!} \right]^{1/2}$
$b + 2$		$(-1)^s 2 \{ 7X^2 + 7X (4b - 3) - 4bc (b + 3)(c + 1) + 18b(2b - 1) \} \left[ \frac{10(s+3)!(s-2c+2)!(s-2b)!(s-2a+2)!(2b-2)!(2c-4)!}{(s+1)!(s-2c)!(s-2b-2)!(s-2a)!(2b+7)!(2c+5)!} \right]^{1/2}$
$b + 1$		$(-1)^s 4 \{ 7X^2 + 7X^2 (3b - 7) - 2X (6b^2c^2 + 6b^2c + 12bc^2 - 12bc - 19b^2 - 4c^2 + 32b - 4c - 27) - 4b (3b^2c^2 + 3b^2c - bc^2 - 6b^2 - 16c^2 + 9b - 16c - 3) \} \left[ \frac{5(s+2)(s-2c+1)(s-2b)(s-2a+1)(2b-3)!(2c-4)!}{(2b+6)!(2c+5)!} \right]^{1/2}$
$b$		$(-1)^s 2 \{ 35X^4 - 20X^2 [6b(b+1)c(c+1) - 5c(c+1) - 39] + 40X [17b(b+1)c(c+1) - 6b(b+1) - 6c(c+1) - 9] + 24b(b+1)c(c+1) [2b(b+1)c(c+1) - 4b(b+1) - 4c(c+1) - 27] \} \left[ \frac{(2b-4)!(2c-4)!}{(2b+5)!(2c+5)!} \right]^{1/2}$
$b - 1$		$(-1)^{s+1} 4 \{ 7X^2 (3b + 10) - 2X (6b^2c^2 + 6b^2c - 19b^2 - 10c^2 - 70b - 10c - 78) + 4(b+1) (3b^2c^2 + 3b^2c + 7bc^2 + 7bc - 6b^2 - 12c^2 - 21b - 12c - 18) \} \left[ \frac{5(s+1)(s-2c)(s-2b+1)(s-2a)(2b-5)!(2c-4)!}{(2b+4)!(2c+5)!} \right]^{1/2}$
$b - 2$		$(-1)^s 2 \{ 7X^2 - 7X (4b + 7) - 4(b+1)(b-2)c(c+1) + 18(b+1)(2b+3) \} \times \left[ \frac{10(s+1)!(s-2c)!(s-2b+2)!(s-2a)!(2b-6)!(2c-4)!}{(s-1)!(s-2c-2)!(s-2b)!(s-2a-2)!(2b+3)!(2c+5)!} \right]^{1/2}$

$f$	$e = c$
$b-3$	$(-1)^{s+1} 4 \{X-3(b+1)\} \left[ \frac{35(s+1)!(s-2c)!(s-2b+3)!(s-2a)!(2b-7)!(2c-4)!}{(s-2)!(s-2c-3)!(s-2b)!(s-2a-3)!(2b+2)!(2c+5)!} \right]^{1/2}$
$b-4$	$(-1)^s \left[ \frac{70(s+1)!(s-2c)!(s-2b+4)!(s-2a)!(2b-8)!(2c-4)!}{(s-3)!(s-2c-4)!(s-2b)!(s-2a-4)!(2b+1)!(2c+5)!} \right]^{1/2}$
$f$	$e = c - 1$
$b+4$	$(-1)^{s+1} 2 \left[ \frac{14(s+4)!(s-2c+5)!(s-2b)!(s-2a+3)!(2b)!(2c-5)!}{(s+1)!(s-2c)!(s-2b-5)!(s-2a)!(2b+9)!(2c+4)!} \right]^{1/2}$
$b+3$	$(-1)^{s+1} 4 \{2X+b(c+6)\} \left[ \frac{7(s+3)!(s-2c+4)!(s-2b)!(s-2a+2)!(2b-1)!(2c-5)!}{(s+1)!(s-2c)!(s-2b-4)!(s-2a)!(2b+8)!(2c+4)!} \right]^{1/2}$
$b+2$	$(-1)^{s+1} \{14X^2 + 7X(2bc+8b-c-6) - 2b[2b(c+2)(c-9) + 13c^2 + 21c + 18]\} \times$ $\times \left[ \frac{2(s+2)(s-2c+3)!(s-2b)!(s-2a+1)(2b-2)!(2c-5)!}{(s-2c)!(s-2b-3)!(2b+7)!(2c+4)!} \right]^{1/2}$
$b+1$	$(-1)^{s+1} 4 \{14X^3 + 7X^2(36c+6b-3c-14) - 2X(6b^2c^2 - 21b^2c + 33bc^3 + 84bc - 38b^3 - 11c^3 + 64b - 35c - 54) - 4b(c+1)(3b^2c^2 +$ $+ 6bc^3 + 7bc - 12b^3 - 9c^3 + 18b - 35c - 6)\} \left[ \frac{(s-2c+2)!(s-2b)!(2b-3)!(2c-5)!}{(s-2c)!(s-2b-2)!(2b+6)!(2c+4)!} \right]^{1/2}$
$b$	$(-1)^{s+1} 4 \{7X^3 - 7X^2(3c+10) - 2X(6b^2c^3 + 6bc^3 - 10b^3 - 19c^3 - 10b - 70c - 78) + 4(c+1)(3b^2c^2 + 7b^2c + 3bc^3 + 7bc - 12b^3 -$ $- 6c^3 - 12b - 21c - 18)\} \left[ \frac{5(s+1)(s-2c+1)(s-2b)(s-2a)(2b-4)!(2c-5)!}{(2b+5)!(2c+4)!} \right]^{1/2}$
$b-1$	$(-1)^{s+1} 4 \{14X^3 - 7X^2(36c+6b+6c+20) - 2X(6b^2c^3 - 21b^2c - 21bc^3 - 126bc - 38b^3 - 126bc - 38b^3 - 140b - 140c - 156) +$ $+ 4(b+1)(c+1)(3b^2c^3 - 7bc - 12b^3 - 12c^3 - 42b - 42c - 36)\} \left[ \frac{(s+1)!(s-2a-2)!(2b+4)!(2c+4)!}{(s-1)!(s-2a-2)!(2b+4)!(2c+4)!} \right]^{1/2}$
$b-2$	$(-1)^s 2 \{14X^3 - 7X(2bc+8b+3c+14) - 2(b+1)[2b(c+2)(c-9) - 11c^3 - 35c - 54]\} \times$ $\times \left[ \frac{2(s+1)!(s-2c)(s-2b+1)(s-2a)!(2b-6)!(2c-5)!}{(s-2)!(s-2a-3)!(2b+3)!(2c+4)!} \right]^{1/2}$
$b-3$	$(-1)^{s+1} 4 \{2X - (b+1)(c+6)\} \left[ \frac{7(s+1)!(s-2c)!(s-2b+2)!(s-2a)!(2b-7)!(2c-5)!}{(s-3)!(s-2c-2)!(s-2b)!(s-2a-4)!(2b+2)!(2c+4)!} \right]^{1/2}$
$b-4$	$(-1)^s 2 \left[ \frac{14(s+1)!(s-2c)!(s-2b+3)!(s-2a)!(2b-8)!(2c-5)!}{(s-4)!(s-2c-3)!(s-2b)!(s-2a-5)!(2b+1)!(2c+4)!} \right]^{1/2}$

$t$	$e = c - 2$
$b + 4$	$(-1)^s 2 \left[ \frac{7(s+3)!(s-2c+6)!(s-2b)!(s-2a+2)!(2b)!(2c-6)!}{(s+1)!(s-2c)!(s-2b-6)!(s-2a)!(2b+5)!(2c+3)!} \right]^{1/2}$
$b + 3$	$(-1)^s 2 \{2X + b(2c+5)\} \left[ \frac{14(s+2)(s-2c+5)!(s-2b)!(s-2a+1)(2b-4)!(2c-6)!}{(s-2c)!(s-2b-5)!(2b+8)!(2c+3)!} \right]^{1/2}$
$b + 2$	$(-1)^s 2 \{14X^2 + 7X(4bc + 6b - 2c - 5) + 4b(c+1)(2bc + 10b - 8c - 5)\} \times$ $\times \left[ \frac{(s-2c+4)!(s-2b)!(2b-2)!(2c-6)!}{(s-2c)!(s-2b-4)!(2b+7)!(2c+3)!} \right]^{1/2}$
$b + 1$	$(-1)^s 2 \{14X^2 + 7X(2bc + 3b - 6c - 11) - 2(c+1)[2c(b-1)(b+10) - 11b^2 + 13b - 30]\} \times$ $\times \left[ \frac{2(s+1)(s-2c+3)!(s-2b)!(s-2a)(2b-3)!(2c-6)!}{(s-2c)!(s-2b-3)!(2b+6)!(2c+3)!} \right]^{1/2}$
$b$	$(-1)^s 2 \{7X^2 - 7X(4c+7) - 4b(b+1)(c+1)(c-2) + 18(c+1)(2c+3)\} \times$ $\times \left[ \frac{10(s+1)!(s-2c+2)!(s-2b)!(s-2a)!(2b-4)!(2c-6)!}{(s-1)!(s-2c)!(s-2b-2)!(s-2a-2)!(2b+5)!(2c+3)!} \right]^{1/2}$
$b - 1$	$(-1)^s 2 \{14X^2 - 7X(2bc + 3b + 8c + 14) - 2(c+1)[2c(b+2)(b-9) - 11b^2 - 35b - 54]\} \times$ $\times \left[ \frac{2(s+1)!(s-2c+1)(s-2b)(s-2a)!(2b-5)!(2c-6)!}{(s-2)!(s-2a-3)!(2b+4)!(2c+3)!} \right]^{1/2}$
$b - 2$	$(-1)^s 2 \{14X^2 - 7X(4bc + 6b + 6c + 11) + 4(b+1)(c+1)(2bc + 10b + 10c + 15)\} \left[ \frac{(s+1)!(s-2a)!(2b-6)!(2c-6)!}{(s-3)!(s-2a-4)!(2b+3)!(2c+3)!} \right]^{1/2}$
$b - 3$	$(-1)^{s+1} 2 \{2X - (b+1)(2c+5)\} \left[ \frac{14(s+4)!(s-2c)(s-2b+1)(s-2a)!(2b-7)!(2c-6)!}{(s-4)!(s-2a-5)!(2b+2)!(2c+3)!} \right]^{1/2}$
$b - 4$	$(-1)^s 2 \left[ \frac{7(s+1)!(s-2c)!(s-2b+2)!(s-2a)!(2b-8)!(2c-6)!}{(s-5)!(s-2c-2)!(s-2b)!(s-2a-6)!(2b+1)!(2c+3)!} \right]^{1/2}$
$t$	$e = c - 3$
$b + 4$	$(-1)^{s+1} 2 \left[ \frac{2(s+2)(s-2c+7)!(s-2b)!(s-2a+1)(2b)!(2c-7)!}{(s-2c)!(s-2b-7)!(2b+9)!(2c+2)!} \right]^{1/2}$
$b + 3$	$(-1)^{s+1} 4 \{2X + 3b(c+1)\} \left[ \frac{(s-2c+6)!(s-2b)!(2b-1)!(2c-7)!}{(s-2c)!(s-2b-6)!(2b+8)!(2c+2)!} \right]^{1/2}$
$b + 2$	$(-1)^{s+1} 2 \{2X + (2b-3)(c+1)\} \left[ \frac{14(s+4)(s-2c+5)!(s-2b)!(s-2a)(2b-2)!(2c-7)!}{(s-2c)!(s-2b-5)!(2b+7)!(2c+2)!} \right]^{1/2}$
$b + 1$	$(-1)^{s+1} 4 \{2X + (b-5)(c+1)\} \left[ \frac{7(s+1)!(s-2c+4)!(s-2b)!(s-2a)!(2b-3)!(2c-7)!}{(s-1)!(s-2c)!(s-2b-4)!(s-2a-2)!(2b+6)!(2c+2)!} \right]^{1/2}$

$e = c - 3$ 

$$\begin{aligned}
 & (-1)^{s+1} 4 \{X - 3(c + 1)\} \left[ \frac{35(s+1)!(s-2c+3)!(s-2b)!(s-2a)!(2b-4)!(2c-7)!}{(s-2)!(s-2c)!(s-2b-3)!(s-2a-3)!(2b+5)!(2c+2)!} \right]^{1/2} \\
 & (-1)^{s+1} 4 \{2X - (b+6)(c+1)\} \left[ \frac{7(s+1)!(s-2c+2)!(s-2b)!(s-2a)!(2b-5)!(2c-7)!}{(s-3)!(s-2c)!(s-2b-2)!(s-2a-4)!(2b+4)!(2c+2)!} \right]^{1/2} \\
 & (-1)^{s+1} 2 \{2X - (2b+5)(c+1)\} \left[ \frac{14(s+1)!(s-2c+1)(s-2b)(s-2a)!(2b-6)!(2c-7)!}{(s-4)!(s-2a-5)!(2b+3)!(2c+2)!} \right]^{1/2} \\
 & (-1)^{s+1} 4 \{2X - 3(b+1)(c+1)\} \left[ \frac{(s+1)!(s-2a)!(2b-7)!(2c-7)!}{(s-5)!(s-2a-6)!(2b+2)!(2c+2)!} \right]^{1/2} \\
 & (-1)^{s+1} 2 \left[ \frac{2(s+1)!(s-2c)(s-2b+1)(s-2a)!(2b-8)!(2c-7)!}{(s-6)!(s-2a-7)!(2b+1)!(2c+2)!} \right]^{1/2}
 \end{aligned}$$

 $e = c - 4$ 

$$\begin{aligned}
 & (-1)^s \left[ \frac{(s-2c+8)!(s-2b)!(2b)!(2c-8)!}{(s-2c)!(s-2b-8)!(2b+9)!(2c+1)!} \right]^{1/2} \\
 & (-1)^s 2 \left[ \frac{2(s+1)(s-2c+7)!(s-2b)!(s-2a)(2b-1)!(2c-8)!}{(s-2c)!(s-2b-7)!(2b+8)!(2c+1)!} \right]^{1/2} \\
 & (-1)^s 2 \left[ \frac{7(s+1)!(s-2c+6)!(s-2b)!(s-2a)!(2b-2)!(2c-8)!}{(s-1)!(s-2c)!(s-2b-6)!(s-2a-2)!(2b+7)!(2c+1)!} \right]^{1/2} \\
 & (-1)^s 2 \left[ \frac{14(s+1)!(s-2c+5)!(s-2b)!(s-2a)!(2b-3)!(2c-8)!}{(s-2)!(s-2c)!(s-2b-5)!(s-2a-3)!(2b+6)!(2c+1)!} \right]^{1/2} \\
 & (-1)^s \left[ \frac{70(s+1)!(s-2c+4)!(s-2b)!(s-2a)!(2b-4)!(2c-8)!}{(s-3)!(s-2c)!(s-2b-4)!(s-2a-4)!(2b+5)!(2c+1)!} \right]^{1/2} \\
 & (-1)^s 2 \left[ \frac{14(s+1)!(s-2c+3)!(s-2b)!(s-2a)!(2b-5)!(2c-8)!}{(s-4)!(s-2c)!(s-2b-3)!(s-2a-5)!(2b+4)!(2c+1)!} \right]^{1/2} \\
 & (-1)^s 2 \left[ \frac{7(s+1)!(s-2c+2)!(s-2b)!(s-2a)!(2b-6)!(2c-8)!}{(s-5)!(s-2c)!(s-2b-2)!(s-2a-6)!(2b+3)!(2c+1)!} \right]^{1/2} \\
 & (-1)^s 2 \left[ \frac{2(s+1)!(s-2c+1)(s-2b)(s-2a)!(2b-7)!(2c-8)!}{(s-6)!(s-2a-7)!(2b+2)!(2c+1)!} \right]^{1/2} \\
 & (-1)^s \left[ \frac{(s+1)!(s-2a)!(2b-8)!(2c-8)!}{(s-7)!(s-2a-8)!(2b+1)!(2c+1)!} \right]^{1/2}
 \end{aligned}$$

## 9.11. ТАБЛИЦЫ ЧИСЛЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ 6j-СИМВОЛОВ С ИНДЕКСАМИ, НЕ ПРЕВЫШАЮЩИМИ 3

В таблицах приведены численные значения 6j-символов  $\left\{ \begin{matrix} a & b & c \\ d & e & f \end{matrix} \right\}$  с индексами  $a, b, c, d, e, f \leq 3$ , причем в табл. 9.9 собраны 6j-символы, у которых четыре полуцелых индекса ( $a, b, d, e$ ), в табл. 9.10 — три полуцелых индекса ( $d, e, f$ ), а в табл. 9.11 — 6j-символы, у которых все индексы целые. Численные значения даны в виде как простых, так и десятичных дробей. Рассмотрены только случаи, когда все индексы отличны от нуля. Если хотя бы один из индексов равен нулю, то для вычисления 6j-символа следует воспользоваться формулами 9.5 (1).

На индексы 6j-символов, приведенных в табл. 9.9—9.11, наложены следующие условия.

Табл. 9.9: 1)  $a, b, d, e$  — полуцелые,  $c, f$  — целые;

2)  $a \geq b, d, e$  и  $c \geq f$ ;

3) если  $a=b$ , то  $d \geq e$ ; если  $c=f$ , то  $b \geq e$ .

Табл. 9.10: 1)  $a, b, c$  — целые,  $d, e, f$  — полуцелые;

2)  $a \geq b \geq c$ ,

3) если  $a=b$ , то  $d \geq e$ ; если  $b=c$ , то  $e \geq f$ .

Табл. 9.11: 1) все индексы целые;

2)  $a \geq b, c, d, e, f$ ;  $b \geq c, e, f$ ;

3) если  $a=b$ , то  $d \geq e$ ; если  $b=c$ , то  $e \geq f$ ; если  $a=d$ , то  $c \geq f$ .

ТАБЛИЦА 9.9

$a$	$b$	$c$	$d$	$e$	$f$	$\left\{ \begin{matrix} a & b & c \\ d & e & f \end{matrix} \right\}$	$a$	$b$	$c$	$d$	$e$	$f$	$\left\{ \begin{matrix} a & b & c \\ d & e & f \end{matrix} \right\}$		
1/2	1/2	1	1/2	1/2	1	1/2 · 3	0.166667	3/2	3/2	3	3/2	3/2	1	3/2 · 2 · 5	0.150000
3/2	1/2	1	1/2	1/2	1	-1/3	-0.333333	5/2	1/2	3	1/2	5/2	1	$\sqrt{5}/2 \cdot 3 \sqrt{7}$	0.140859
3/2	1/2	1	3/2	1/2	1	-1/2 · 2 · 3	-0.083333	5/2	1/2	3	3/2	3/2	1	1/2 $\sqrt{2} \cdot 3$	0.204124
3/2	3/2	1	1/2	1/2	1	$\sqrt{5}/2 \cdot 3 \sqrt{2}$	0.263523	5/2	3/2	3	1/2	5/2	1	$-\sqrt{2}/3 \sqrt{7}$	-0.178174
3/2	3/2	1	3/2	1/2	1	1/2 · 3	0.166667	5/2	3/2	3	3/2	3/2	1	$-\sqrt{2}/5 \sqrt{3}$	-0.163299
3/2	3/2	1	3/2	3/2	1	-11/2 · 2 · 3 · 5	-0.183333	5/2	3/2	3	3/2	5/2	1	1/2 · 3 · 5 $\sqrt{2} \cdot 7$	0.008909
5/2	3/2	1	1/2	3/2	1	-1/2 · 2	-0.250000	5/2	3/2	3	5/2	3/2	1	-1/2 · 5	-0.100000
5/2	3/2	1	3/2	3/2	1	-1/2 · 5	-0.100000	5/2	5/2	3	3/2	3/2	1	1/2 · 5	0.100000
5/2	3/2	1	5/2	3/2	1	-1/2 · 2 · 3 · 5	-0.016667	5/2	5/2	3	5/2	3/2	1	$\sqrt{3}/5 \sqrt{7}$	0.130931
5/2	5/2	1	3/2	3/2	1	$\sqrt{7}/2 \cdot 5 \sqrt{2}$	0.187083	5/2	5/2	3	5/2	5/2	1	-11/2 · 3 · 5 · 7	-0.052381
5/2	5/2	1	5/2	3/2	1	1/3 · 5	0.066667	3/2	1/2	2	3/2	1/2	2	1/2 · 2 · 5	0.050000
5/2	5/2	1	5/2	5/2	1	-31/2 · 3 · 5 · 7	-0.147619	3/2	3/2	2	3/2	1/2	2	-1/2 · 5	-0.100000
3/2	1/2	2	1/2	3/2	1	1/2 $\sqrt{2} \cdot 5$	0.158114	3/2	3/2	2	3/2	3/2	2	3/2 · 2 · 5	0.150000
3/2	1/2	2	3/2	1/2	1	1/2 · 2	0.250000	5/2	1/2	2	5/2	1/2	2	1/2 · 2 · 5	0.050000
3/2	3/2	2	3/2	1/2	1	-1/2 $\sqrt{5}$	-0.223607	5/2	3/2	2	1/2	3/2	2	$\sqrt{7}/2 \cdot 5 \sqrt{2}$	0.187083
3/2	3/2	2	3/2	3/2	1	1/2 · 2 · 5	0.050000	5/2	3/2	2	3/2	1/2	2	$\sqrt{7}/2 \cdot 5 \sqrt{2}$	0.187083
5/2	1/2	2	1/2	3/2	1	-1/3 $\sqrt{3} \cdot 5$	-0.258199	5/2	3/2	2	3/2	3/2	2	-1/2 · 5	-0.100000
5/2	1/2	2	1/2	5/2	1	$\sqrt{7}/2 \cdot 3 \sqrt{5}$	0.197203	5/2	3/2	2	5/2	1/2	2	1/3 · 5	0.066667
5/2	1/2	2	3/2	3/2	1	-1/2 $\sqrt{2} \cdot 3 \cdot 5$	-0.091287	5/2	3/2	2	5/2	3/2	2	-47/2 · 2 · 3 · 5 · 7	-0.111905
5/2	3/2	2	1/2	3/2	1	$\sqrt{7}/2 \cdot 2 \sqrt{3} \cdot 5$	0.170783	5/2	5/2	2	3/2	1/2	2	$-\sqrt{2}/5 \sqrt{3}$	-0.163299
5/2	3/2	2	1/2	5/2	1	1/3 $\sqrt{5}$	0.149071	5/2	5/2	2	3/2	3/2	2	-1/2 · 5 $\sqrt{3} \cdot 7$	-0.021822
5/2	3/2	2	3/2	3/2	1	$\sqrt{7}/2 \cdot 5 \sqrt{3}$	0.152753	5/2	5/2	2	5/2	1/2	2	-1/2 · 5	-0.100000
5/2	3/2	2	3/2	5/2	1	-13/2 · 3 · 5 $\sqrt{2} \cdot 7$	-0.115813	5/2	5/2	2	5/2	3/2	2	2 · 2/5 · 7	0.114286
5/2	3/2	2	5/2	3/2	1	1/2 · 2 · 5	0.050000	5/2	5/2	2	5/2	5/2	2	-1/2 · 2 · 3 · 5	-0.016667
5/2	5/2	2	3/2	3/2	1	$-\sqrt{7}/2 \cdot 5 \sqrt{3}$	-0.152753	3/2	3/2	3	3/2	3/2	2	1/2 · 2 · 5	0.050000
5/2	5/2	2	5/2	3/2	1	$-\sqrt{2}/5 \sqrt{7}$	-0.106904	5/2	1/2	3	3/2	3/2	2	1/2 $\sqrt{2} \cdot 5 \cdot 7$	0.059761
5/2	5/2	2	5/2	5/2	1	23/2 · 3 · 5 · 7	0.109524	5/2	1/2	3	5/2	1/2	2	1/2 · 3	0.166667

ТАБЛИЦА 9.9 (продолжение)

<i>a b c</i>	<i>d e f</i>	$\begin{Bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{Bmatrix}$	<i>a b c</i>	<i>d e f</i>	$\begin{Bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{Bmatrix}$
5/2 3/2 3	1/2 5/2 2	$-1/\sqrt{3 \cdot 5 \cdot 7}$	3/2 3/2 3	3/2 3/2 3	$1/2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 7$
5/2 3/2 3	3/2 3/2 2	$-\sqrt{2}/5\sqrt{7}$	5/2 1/2 3	5/2 1/2 3	$1/2 \cdot 3 \cdot 7$
5/2 3/2 3	3/2 5/2 2	$11/2 \cdot 2 \cdot 5 \sqrt{3 \cdot 7}$	5/2 3/2 3	3/2 3/2 3	$-1/5 \cdot 7$
5/2 3/2 3	5/2 1/2 2	$-2\sqrt{2}/3\sqrt{5 \cdot 7}$	5/2 3/2 3	5/2 1/2 3	$-1/3 \cdot 7$
5/2 3/2 3	5/2 3/2 2	$23/2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$	5/2 3/2 3	5/2 3/2 3	$71/2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$
5/2 5/2 3	3/2 3/2 2	$3 \cdot 3/2 \cdot 5 \cdot 7$	5/2 5/2 3	3/2 3/2 3	$3 \cdot 3/2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 7$
5/2 5/2 3	5/2 1/2 2	$\sqrt{3}/2\sqrt{5 \cdot 7}$	5/2 5/2 3	5/2 1/2 3	$1/2 \cdot 7$
5/2 5/2 3	5/2 3/2 2	$-\sqrt{3}/5 \cdot 7 \sqrt{2}$	5/2 5/2 3	5/2 3/2 3	$-1/2 \cdot 5$
5/2 5/2 3	5/2 5/2 2	$-29/2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$	5/2 5/2 3	5/2 5/2 3	$79/2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$

ТАБЛИЦА 9.10

<i>a b c</i>	<i>d e f</i>	$\begin{Bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{Bmatrix}$	<i>a b c</i>	<i>d e f</i>	$\begin{Bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{Bmatrix}$
1 1 1	1/2 1/2 1/2	$-1/3$	2 2 2	3/2 3/2 1/2	$\sqrt{7}/2 \cdot 5 \sqrt{2}$
1 1 1	3/2 1/2 1/2	$-1/2 \cdot 3$	2 2 2	3/2 3/2 3/2	0
1 1 1	3/2 3/2 1/2	$\sqrt{5}/2 \cdot 3 \sqrt{2}$	2 2 2	5/2 3/2 1/2	$1/2 \cdot 5$
1 1 1	3/2 3/2 3/2	$-1/3 \sqrt{2 \cdot 5}$	2 2 2	5/2 3/2 3/2	$-1/2 \sqrt{2 \cdot 7}$
1 1 1	5/2 3/2 3/2	$-1/2 \sqrt{2 \cdot 5}$	2 2 2	5/2 5/2 1/2	$-\sqrt{2}/5 \sqrt{3}$
1 1 1	5/2 5/2 3/2	$\sqrt{7}/2 \cdot 3 \sqrt{5}$	2 2 2	5/2 5/2 3/2	$1/7 \sqrt{2 \cdot 3}$
1 1 1	5/2 5/2 5/2	$-1/3 \sqrt{5 \cdot 7}$	2 2 2	5/2 5/2 5/2	$1/7 \sqrt{2 \cdot 3}$
2 1 1	1/2 3/2 1/2	$1/2 \sqrt{3}$	3 2 1	1/2 1/2 5/2	$1/3 \sqrt{2}$
2 1 1	1/2 3/2 3/2	$-1/2 \sqrt{2 \cdot 3}$	3 2 1	1/2 3/2 3/2	$1/2 \sqrt{5}$
2 1 1	3/2 3/2 1/2	$1/2 \sqrt{2 \cdot 3 \cdot 5}$	3 2 1	1/2 3/2 5/2	$-1/3 \sqrt{5}$
2 1 1	3/2 3/2 3/2	$-\sqrt{2}/5 \sqrt{3}$	3 2 1	3/2 1/2 5/2	$1/3 \sqrt{2 \cdot 7}$
2 1 1	3/2 5/2 1/2	$-1/2 \sqrt{5}$	3 2 1	3/2 3/2 3/2	$1/2 \cdot 5$
2 1 1	3/2 5/2 3/2	$\sqrt{7}/2 \cdot 5 \sqrt{2}$	3 2 1	3/2 3/2 5/2	$-2 \cdot 2 \sqrt{2}/3 \cdot 5 \sqrt{7}$
2 1 1	3/2 5/2 5/2	$-\sqrt{7}/3 \cdot 5 \sqrt{2}$	3 2 1	3/2 5/2 1/2	$1/\sqrt{2 \cdot 3 \cdot 5}$
2 1 1	5/2 3/2 3/2	$-1/2 \cdot 5 \sqrt{2 \cdot 3}$	3 2 1	3/2 5/2 3/2	$-\sqrt{2}/5 \sqrt{3}$
2 1 1	5/2 5/2 3/2	$1/2 \cdot 5$	3 2 1	3/2 5/2 5/2	$\sqrt{3}/5 \sqrt{7}$
2 1 1	5/2 5/2 5/2	$-2 \cdot 2 \sqrt{2}/3 \cdot 5 \sqrt{7}$	3 2 1	5/2 3/2 3/2	$1/2 \cdot 5 \sqrt{3 \cdot 7}$
2 2 1	1/2 1/2 3/2	$-1/2 \sqrt{5}$	3 2 1	5/2 3/2 5/2	$-1/5 \sqrt{2 \cdot 7}$
2 2 1	1/2 1/2 5/2	$-1/3 \sqrt{5}$	3 2 1	5/2 5/2 1/2	$1/3 \sqrt{2 \cdot 5 \cdot 7}$
2 2 1	3/2 1/2 3/2	$-1/2 \sqrt{2 \cdot 5}$	3 2 1	5/2 5/2 3/2	$-2 \cdot 2 \cdot 2/3 \cdot 5 \cdot 7$
2 2 1	3/2 1/2 5/2	$\sqrt{7}/2 \cdot 3 \sqrt{5}$	3 2 1	5/2 5/2 5/2	$3 \sqrt{3}/5 \cdot 7 \sqrt{2}$
2 2 1	3/2 3/2 1/2	$-3/2 \cdot 5 / \sqrt{2}$	3 2 2	1/2 3/2 3/2	$-1/5 \sqrt{2}$
2 2 1	3/2 3/2 3/2	$1/5 \sqrt{2}$	3 2 2	1/2 5/2 3/2	$-1/5 \sqrt{2}$
2 2 1	3/2 3/2 5/2	$-1/2 \cdot 3 \cdot 5 \sqrt{2}$	3 2 2	1/2 5/2 5/2	$1/5 \sqrt{2}$
2 2 1	5/2 3/2 1/2	$-1/2 \cdot 5 \sqrt{3}$	3 2 2	3/2 3/2 3/2	$-1/5 \sqrt{2}$
2 2 1	5/2 3/2 3/2	$\sqrt{7}/2 \cdot 5 \sqrt{2 \cdot 3}$	3 2 2	3/2 5/2 1/2	$-1/\sqrt{5 \cdot 7}$
2 2 1	5/2 3/2 5/2	$-1/5 \sqrt{2}$	3 2 2	3/2 5/2 3/2	$1/5 \sqrt{7}$
2 2 1	5/2 5/2 1/2	$\sqrt{7}/3 \cdot 5$	3 2 2	3/2 5/2 5/2	$\sqrt{2}/5 \cdot 7$
2 2 1	5/2 5/2 3/2	$-11/2 \cdot 3 \cdot 5 \sqrt{7}$	3 2 2	5/2 3/2 3/2	$-3/5 \cdot 7 \sqrt{2}$
2 2 1	5/2 5/2 5/2	$1/5 \sqrt{7}$			

ТАБЛИЦА 9.10 (продолжение)

$a$	$b$	$c$	$d$	$e$	$f$	$\begin{Bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{Bmatrix}$	$a$	$b$	$c$	$d$	$e$	$f$	$\begin{Bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{Bmatrix}$	
3	2	2	5/2	5/2	1/2	$-1/\sqrt{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}$	3	3	2	3/2	1/2	5/2	$\sqrt{3}/2\sqrt{5 \cdot 7}$	0.146385
3	2	2	5/2	5/2	3/2	$13/2 \cdot 5 \cdot 7\sqrt{3}$	3	3	2	3/2	3/2	3/2	$\sqrt{3}/5\sqrt{7}$	0.130931
3	2	2	5/2	5/2	5/2	$-3 \cdot 3/2 \cdot 5 \cdot 7\sqrt{2}$	3	3	2	3/2	3/2	5/2	$\sqrt{3}/2 \cdot 2 \cdot 5\sqrt{7}$	0.032733
3	3	1	1/2	1/2	5/2	$-\sqrt{2}/3\sqrt{7}$	3	3	2	5/2	1/2	5/2	$1/\sqrt{3 \cdot 5 \cdot 7}$	0.097590
3	3	1	3/2	1/2	5/2	$-\sqrt{5}/2 \cdot 3\sqrt{7}$	3	3	2	5/2	3/2	3/2	$3\sqrt{3}/5 \cdot 7\sqrt{2}$	0.104978
3	3	1	3/2	3/2	3/2	$-1/\sqrt{5 \cdot 7}$	3	3	2	5/2	3/2	5/2	$-17/2 \cdot 5 \cdot 7\sqrt{2 \cdot 3}$	-0.099146
3	3	1	3/2	3/2	5/2	$\sqrt{7}/2 \cdot 2 \cdot 3\sqrt{5}$	3	3	2	5/2	5/2	1/2	1/7	0.142857
3	3	1	5/2	3/2	3/2	$-1/\sqrt{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}$	3	3	2	5/2	5/2	3/2	$-11/2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 7$	-0.078571
3	3	1	5/2	3/2	5/2	$\sqrt{3}/2\sqrt{2 \cdot 5 \cdot 7}$	3	3	2	5/2	5/2	5/2	$-1/2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$	-0.004762
3	3	1	5/2	5/2	1/2	$-\sqrt{2 \cdot 5}/3 \cdot 7$	3	3	3	3/2	3/2	3/2	$-\sqrt{3}/7\sqrt{2 \cdot 5}$	-0.078246
3	3	1	5/2	5/2	3/2	$17/2 \cdot 3 \cdot 7\sqrt{2 \cdot 5}$	3	3	3	5/2	3/2	3/2	$-3\sqrt{3}/2 \cdot 7\sqrt{2 \cdot 5}$	-0.117369
3	3	1	5/2	5/2	5/2	$-\sqrt{2}/7\sqrt{5}$	3	3	3	5/2	5/2	1/2	$-\sqrt{5}/7\sqrt{2 \cdot 3}$	-0.130410
3	3	1	5/2	5/2	5/2		3	3	3	5/2	5/2	3/2	$1/2 \cdot 7\sqrt{2 \cdot 3 \cdot 5}$	0.013041
							3	3	3	5/2	5/2	5/2	$17/2 \cdot 3 \cdot 7\sqrt{2 \cdot 3 \cdot 5}$	0.073899

ТАБЛИЦА 9.11

$a$	$b$	$c$	$d$	$e$	$f$	$\begin{Bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{Bmatrix}$	$a$	$b$	$c$	$d$	$e$	$f$	$\begin{Bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{Bmatrix}$	
1	1	1	1	1	1	1/2 · 3	3	3	1	1	1	2	$-\sqrt{2}/3\sqrt{7}$	-0.178174
2	1	1	1	1	1	1/2 · 3	3	3	1	1	1	3	$1/2 \cdot 3\sqrt{2 \cdot 7}$	0.044544
2	1	1	2	1	1	1/2 · 3 · 5	3	3	1	2	1	2	$-1/\sqrt{3 \cdot 5 \cdot 7}$	-0.097590
2	2	1	1	1	1	$-1/2\sqrt{5}$	3	3	1	2	2	1	$-2\sqrt{2}/3\sqrt{5 \cdot 7}$	-0.159364
2	2	1	1	1	2	$1/2 \cdot 3\sqrt{5}$	3	3	1	2	2	2	$1/\sqrt{2 \cdot 5 \cdot 7}$	0.119523
2	2	1	2	1	1	$-1/2 \cdot 5$	3	3	1	3	2	1	$-1/3 \cdot 7$	-0.047619
2	2	1	2	2	1	1/2 · 3	3	3	1	3	3	1	11/2 · 2 · 3 · 7	0.130952
2	2	2	1	1	1	$\sqrt{7}/2 \cdot 5\sqrt{3}$	3	3	2	1	1	2	$\sqrt{2}/5\sqrt{7}$	0.106904
2	2	2	2	1	1	$\sqrt{7}/2 \cdot 5\sqrt{3}$	3	3	2	1	1	3	$1/2\sqrt{2 \cdot 7}$	0.133631
2	2	2	2	2	1	$-1/2 \cdot 5$	3	3	2	2	1	2	$\sqrt{3}/5\sqrt{7}$	0.130931
2	2	2	2	2	2	$-3/2 \cdot 5 \cdot 7$	3	3	2	2	1	3	$-1/2\sqrt{2 \cdot 5 \cdot 7}$	-0.059761
3	2	1	1	1	2	$1/3\sqrt{5}$	3	3	2	2	2	1	$2\sqrt{2 \cdot 3}/5 \cdot 7$	0.139971
3	2	1	1	2	1	1/5	3	3	2	2	2	2	$-\sqrt{3}/5 \cdot 7\sqrt{2}$	-0.034993
3	2	1	2	1	2	$1/5\sqrt{3 \cdot 7}$	3	3	2	2	2	3	$-11/2 \cdot 5 \cdot 7\sqrt{2 \cdot 3}$	-0.064153
3	2	1	2	2	1	1/3 · 5	3	3	2	3	1	2	2/5 · 7	0.057143
3	2	1	3	2	1	1/3 · 5 · 7	3	3	2	3	2	1	$\sqrt{3}/7\sqrt{2 \cdot 5}$	0.078246
3	2	2	1	2	1	$-\sqrt{2}/5\sqrt{3}$	3	3	2	3	2	2	$-1/2 \cdot 5$	-0.100000
3	2	2	1	2	2	0	3	3	2	3	3	1	$-3/2 \cdot 2 \cdot 7$	-0.107143
3	2	2	2	2	1	$-\sqrt{2}/5\sqrt{7}$	3	3	2	3	3	2	19/2 · 2 · 3 · 5 · 7	0.045238
3	2	2	2	2	2	2 · 2/5 · 7	3	3	3	2	2	1	$-\sqrt{3}/7\sqrt{5}$	-0.110657
3	2	2	3	2	1	$-1/5 \cdot 7$	3	3	3	2	2	2	$-\sqrt{3}/2 \cdot 7\sqrt{5}$	-0.055328
3	2	2	3	2	2	1/2 · 7	3	3	3	3	2	1	$-1/7\sqrt{2}$	-0.101015
							3	3	3	3	2	2	2/7\sqrt{3 \cdot 5}	0.073771
							3	3	3	3	3	1	1/2 · 7	0.071429
							3	3	3	3	3	2	1/2 · 3 · 7	0.023810
							3	3	3	3	3	3	$-1/2 \cdot 7$	-0.071429



## 9j-СИМВОЛЫ (КОЭФФИЦИЕНТЫ ФАНО)

### 10.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ

1. 9j-символы Вигнера [110] можно определить как коэффициенты преобразования между различными схемами сложения четырех угловых моментов. Угловые моменты  $\mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2, \mathbf{j}_3$  и  $\mathbf{j}_4$  можно связать в полный угловой момент  $\mathbf{j}$  с проекцией  $m$  следующими тремя способами:\*

$$\begin{aligned} \text{I)} \quad & \mathbf{j}_1 + \mathbf{j}_2 = \mathbf{j}_{12}, \quad \mathbf{j}_3 + \mathbf{j}_4 = \mathbf{j}_{34}, \quad \mathbf{j}_{12} + \mathbf{j}_{34} = \mathbf{j}; \\ \text{II)} \quad & \mathbf{j}_1 + \mathbf{j}_3 = \mathbf{j}_{13}, \quad \mathbf{j}_2 + \mathbf{j}_4 = \mathbf{j}_{24}, \quad \mathbf{j}_{13} + \mathbf{j}_{24} = \mathbf{j}; \\ \text{III)} \quad & \mathbf{j}_1 + \mathbf{j}_4 = \mathbf{j}_{14}, \quad \mathbf{j}_2 + \mathbf{j}_3 = \mathbf{j}_{23}, \quad \mathbf{j}_{14} + \mathbf{j}_{23} = \mathbf{j}; \end{aligned} \quad (1)$$

Состояния, отвечающие схеме связи I, обозначим  $|j_1 j_2 (j_{12}) j_3 j_4 (j_{34}) jm\rangle$ . Они являются собственными состояниями операторов  $\hat{\mathbf{j}}_1^2, \hat{\mathbf{j}}_2^2, \hat{\mathbf{j}}_3^2, \hat{\mathbf{j}}_4^2, \hat{\mathbf{j}}_{12}^2, \hat{\mathbf{j}}_{34}^2, \hat{\mathbf{j}}^2$  и  $\hat{j}_z$  и имеют вид

$$|j_1 j_2 (j_{12}) j_3 j_4 (j_{34}) jm\rangle = \sum_{\substack{m_1 m_2 m_3 m_4 \\ m_{12} m_{34}}} C_{j_{12} m_{12} j_{34} m_{34}}^{j m} C_{j_1 m_1 j_2 m_2}^{j_{12} m_{12}} C_{j_3 m_3 j_4 m_4}^{j_{34} m_{34}} |j_1 m_1, j_2 m_2, j_3 m_3, j_4 m_4\rangle. \quad (2)$$

Здесь  $|j_1 m_1, j_2 m_2, j_3 m_3, j_4 m_4\rangle$  обозначает собственное состояние операторов  $\hat{j}_i^2$  и  $\hat{j}_{iz}$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ).

Состояния, соответствующие схеме связи II, являются собственными состояниями операторов  $\hat{\mathbf{j}}_1^2, \hat{\mathbf{j}}_2^2, \hat{\mathbf{j}}_3^2, \hat{\mathbf{j}}_4^2, \hat{\mathbf{j}}_{13}^2, \hat{\mathbf{j}}_{24}^2, \hat{\mathbf{j}}^2$  и  $\hat{j}_z$  и имеют вид

$$|j_1 j_3 (j_{13}) j_2 j_4 (j_{24}) jm\rangle = \sum_{\substack{m_1 m_2 m_3 m_4 \\ m_{13} m_{24}}} C_{j_{13} m_{13} j_{24} m_{24}}^{j m} C_{j_1 m_1 j_3 m_3}^{j_{13} m_{13}} C_{j_2 m_2 j_4 m_4}^{j_{24} m_{24}} |j_1 m_1, j_2 m_2, j_3 m_3, j_4 m_4\rangle. \quad (3)$$

Аналогично состояния, соответствующие схеме связи III, — собственные состояния операторов  $\hat{\mathbf{j}}_1^2, \hat{\mathbf{j}}_2^2, \hat{\mathbf{j}}_3^2, \hat{\mathbf{j}}_4^2, \hat{\mathbf{j}}_{14}^2, \hat{\mathbf{j}}_{23}^2, \hat{\mathbf{j}}^2$  и  $\hat{j}_z$  и выражаются следующим образом:

$$|j_1 j_4 (j_{14}) j_2 j_3 (j_{23}) jm\rangle = \sum_{\substack{m_1 m_2 m_3 m_4 \\ m_{14} m_{23}}} C_{j_{14} m_{14} j_{23} m_{23}}^{j m} C_{j_1 m_1 j_4 m_4}^{j_{14} m_{14}} C_{j_2 m_2 j_3 m_3}^{j_{23} m_{23}} |j_1 m_1, j_2 m_2, j_3 m_3, j_4 m_4\rangle. \quad (4)$$

Состояния, отвечающие каждой из схем связи, образуют полный набор. Переходу от одной схемы связи к другой соответствует унитарное преобразование, которое связывает состояния с одинаковыми значениями полного углового момента  $j$  и его проекции  $m$  и не зависит от  $m$ .

9j-символы Вигнера [110], или коэффициенты Фано [66]

$$\begin{Bmatrix} j_1 & j_1 & j_{12} \\ j_3 & j_4 & j_{34} \\ j_{13} & j_{24} & j \end{Bmatrix},$$

связаны с коэффициентами преобразования следующим соотношением:

$$\langle j_1 j_2 (j_{12}) j_3 j_4 (j_{34}) jm | j_1 j_3 (j_{13}) j_2 j_4 (j_{24}) j' m' \rangle = \delta_{j j'} \delta_{m m'} [(2j_{12} + 1)(2j_{13} + 1)(2j_{24} + 1)(2j_{34} + 1)]^{\frac{1}{2}} \begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & j_{12} \\ j_3 & j_4 & j_{34} \\ j_{13} & j_{24} & j \end{Bmatrix}. \quad (5)$$

\* Кроме приведенных, возможны и другие схемы связи четырех угловых моментов, например:  $\mathbf{j}_1 + \mathbf{j}_2 = \mathbf{j}_{12}$ ,  $\mathbf{j}_{12} + \mathbf{j}_3 = \mathbf{j}_{123}$ ,  $\mathbf{j}_{123} + \mathbf{j}_4 = \mathbf{j}$ . Однако коэффициенты преобразования между такими схемами связи сводятся к произведениям 6 j-символов и рассмотрены в гл. 9 (см. также 3.3).

Используя это определение, имеем

$$\begin{aligned} & \langle j_1 j_2 (j_{12}) j_3 j_4 (j_{34}) jm | j_1 j_4 (j_{14}) j_2 j_3 (j_{23}) j' m' \rangle = \\ & = \delta_{j j'} \delta_{m m'} (-1)^{j_3 + j_4 - j_{34}} [(2j_{12} + 1) (2j_{14} + 1) (2j_{23} + 1) (2j_{34} + 1)]^{\frac{1}{2}} \begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & j_{12} \\ j_4 & j_3 & j_{34} \\ j_{14} & j_{23} & j \end{Bmatrix}, \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} & \langle j_1 j_3 (j_{13}) j_2 j_4 (j_{24}) jm | j_1 j_4 (j_{14}) j_2 j_3 (j_{23}) j' m' \rangle = \\ & = \delta_{j j'} \delta_{m m'} (-1)^{j_3 - j_4 - j_{23} + j_{24}} [(2j_{13} + 1) (2j_{14} + 1) (2j_{24} + 1) (2j_{23} + 1)]^{\frac{1}{2}} \begin{Bmatrix} j_1 & j_3 & j_{13} \\ j_4 & j_2 & j_{24} \\ j_{14} & j_{23} & j \end{Bmatrix}. \end{aligned} \quad (7)$$

Из определения 9j-символов следует, что они могут быть представлены в виде суммы произведений коэффициентов Клебша—Гордана

$$\begin{aligned} & \sum_{m_i m_{ik}} C_{j_1 m_1 j_2 m_2}^{j_{12} m_{12}} C_{j_3 m_3 j_4 m_4}^{j_{34} m_{34}} C_{j_{12} m_{12} j_{34} m_{34}}^{j_{14} m_{14}} C_{j_1 m_1 j_3 m_3}^{j_{13} m_{13}} C_{j_2 m_2 j_4 m_4}^{j_{24} m_{24}} C_{j_{13} m_{13} j_{24} m_{24}}^{j_{23} m_{23}} = \\ & = \delta_{j j'} \delta_{m m'} [(2j_{12} + 1) (2j_{13} + 1) (2j_{24} + 1) (2j_{34} + 1)]^{\frac{1}{2}} \begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & j_{12} \\ j_3 & j_4 & j_{34} \\ j_{13} & j_{24} & j \end{Bmatrix}. \end{aligned} \quad (8)$$

Это соотношение однозначно фиксирует как величину 9j-символов, так и их фазу. 9j-символы вещественны. В дальнейшем для обозначения аргументов 9j-символов будем также использовать латинские буквы  $a, b, c$  и т. д.

В соответствии с правилами сложения угловых моментов в квантовой механике, аргументы 9j-символа

$$\begin{Bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & j \end{Bmatrix}$$

должны удовлетворять следующим условиям.

а. Аргументы  $a, b, c$  и т. д. являются целыми или полуцелыми неотрицательными числами (9j-символы с отрицательными аргументами рассмотрены в 10.4.3).

б. Тройки аргументов  $(abc), (def), (ghj), (adg), (beh), (cfj)$  должны удовлетворять условиям треугольника 8.1(1).

9j-Символы удовлетворяют условиям ортогональности и нормировки

$$\sum_{gh} (2g + 1) (2h + 1) \begin{Bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & j \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} a & b & c' \\ d & e & f' \\ g & h & j \end{Bmatrix} = \delta_{cc'} \delta_{ff'} \{abc\} \{def\} \{cfj\} \frac{1}{(2c + 1) (2f + 1)}, \quad (9)$$

$$\sum_{cf} (2c + 1) (2f + 1) \begin{Bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & j \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g' & h' & j \end{Bmatrix} = \delta_{gg'} \delta_{hh'} \{adg\} \{beh\} \{ghj\} \frac{1}{(2g + 1) (2h + 1)}. \quad (10)$$

Эти условия следуют из унитарности преобразования между схемами связи.

2. 9j-символы могут быть представлены в виде таблицы  $\|r_{ik}, r'_{ik}\|$  размерности  $3 \times 6$  (Шелепин [105], Ву [111]), которую будем называть  $r$ -символом.\*

$$\begin{Bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & j \end{Bmatrix} \equiv \begin{Bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & r'_{11} & r'_{12} & r'_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & r'_{21} & r'_{22} & r'_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & r'_{31} & r'_{32} & r'_{33} \end{Bmatrix}, \quad (11)$$

\* Приведенная здесь таблица  $\|r_{ik}, r'_{ik}\|$  отличается от  $r$ -символа, введенного Шелепиным.

где

$$\begin{aligned}
 r_{11} &= -a + b + c, & r_{12} &= a - b + c, & r_{13} &= a + b - c, \\
 r_{21} &= -d + e + f, & r_{22} &= d - e + f, & r_{23} &= d + e - f, \\
 r_{31} &= -g + h + j, & r_{32} &= g - h + j, & r_{33} &= g + h - j, \\
 r'_{11} &= -a + d + g, & r'_{12} &= -b + e + h, & r'_{13} &= -c + f + j, \\
 r'_{21} &= a - d + g, & r'_{22} &= b - e + h, & r'_{23} &= c - f + j, \\
 r'_{31} &= a + d - g, & r'_{32} &= b + e - h, & r'_{33} &= c + f - j.
 \end{aligned} \tag{12}$$

Обратные соотношения

$$\begin{aligned}
 2a &= r_{12} + r_{13} = r'_{21} + r'_{31}, & 2d &= r_{22} + r_{23} = r'_{11} + r'_{31}, & 2g &= r_{32} + r_{33} = r'_{11} + r'_{21}, \\
 2b &= r_{11} + r_{13} = r'_{22} + r'_{32}, & 2e &= r_{21} + r_{23} = r'_{12} + r'_{32}, & 2h &= r_{31} + r_{33} = r'_{12} + r'_{22}, \\
 2c &= r_{11} + r_{12} = r'_{23} + r'_{33}, & 2f &= r_{21} + r_{22} = r'_{13} + r'_{33}, & 2j &= r_{31} + r_{32} = r'_{13} + r'_{23}.
 \end{aligned} \tag{13}$$

Все восемнадцать элементов  $r_{ik}$ ,  $r'_{ik}$  являются целыми неотрицательными числами. Независимыми являются только девять из них. Элементы  $r_{ik}$  и  $r'_{ik}$  обладают следующими свойствами:

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^3 r_{1i} &= a + b + c, & \sum_{i=1}^3 r_{2i} &= d + e + f, & \sum_{i=1}^3 r_{3i} &= g + h + j, \\
 \sum_{i=1}^3 r_{i1} &= R - 2(a + d + g), & \sum_{i=1}^3 r_{i2} &= R - 2(b + e + h), & \sum_{i=1}^3 r_{i3} &= R - 2(c + f + j), \\
 \sum_{i=1}^3 r'_{1i} &= R - 2(a + b + c), & \sum_{i=1}^3 r'_{2i} &= R - 2(d + e + f), & \sum_{i=1}^3 r'_{3i} &= R - 2(g + h + j), \\
 \sum_{i=1}^3 r'_{i1} &= a + d + g, & \sum_{i=1}^3 r'_{i2} &= b + e + h, & \sum_{i=1}^3 r'_{i3} &= c + f + j, \\
 \sum_{i,k=1}^3 r_{ik} &= R, & \sum_{i,k=1}^3 r'_{ik} &= R,
 \end{aligned} \tag{14}$$

где

$$R = a + b + c + d + e + f + g + h + j. \tag{15}$$

### 10.2. ЯВНЫЙ ВИД $9j$ -СИМВОЛОВ И ИХ СВЯЗЬ С ДРУГИМИ ФУНКЦИЯМИ

Ниже приведены выражения для  $9j$ -символов в виде конечных кратных сумм, а также дана их связь с коэффициентами Клебша—Гордана,  $3jm$ -символами и  $6j$ -символами. Выражение  $9j$ -символа в виде обобщенного гипергеометрического ряда до настоящего времени не известно. Удобные выражения в виде квазибиномов для  $9j$ -символа удастся получить только при некоторых соотношениях между аргументами.

$9j$ -символы

$$\begin{Bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & j \end{Bmatrix}$$

равны нулю, если хотя бы для одной из троек аргументов  $(abc)$ ,  $(def)$ ,  $(ghj)$ ,  $(adg)$ ,  $(beh)$  и  $(cfj)$  не выполняются условия треугольника. Если все условия треугольника выполнены, то для  $9j$ -символов справедливы формулы, приведенные ниже.

#### 1. Выражение $9j$ -символа в виде четырехкратной суммы

$$\begin{aligned}
 \begin{Bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & j \end{Bmatrix} &= \frac{\Delta(abc) \Delta(def) \Delta(beh) \Delta(ghj)}{\Delta(adg) \Delta(cfj)} \times \\
 &\times \frac{(a+d-g)! (c+f-j)! (g+h+j+1)!}{(a+d+g+1)! (a-b+c)! (-a+b+c)! (d-e+f)! (-d+e+f)! (b-e+h)! (-b+e+h)!} \times
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \times \sum_{xyz} (-1)^{a-c+e-g+j+x+y+z+t} \frac{(2a-x)!(2b-y)!(2d-z)!(2e-t)!}{x!y!z!t!} \times \\ & \times \frac{(-a+b+c+x)!(-b+e+h+y)!(-d+e+f+z)!(b-e+g-j+t)!(-a-e+f+g+x+t)!}{(a+b-c-x)!(b+e-h-y)!(d+e-f-z)!(b+e-g+j-t)!(a+d-g-x-z)!(e-b+h+y-t)!} \times \\ & \times \frac{(c-d+e+j+z-t)!}{(-d+e+f+z-t)!(b-e+g-j-y+t)!(-a+c-e+g-j+x+t)!} \times \\ & \times (-a+c-d+f+g+j+1+x+z)!. \end{aligned} \quad (1)$$

В этой формуле суммирование производится по всем целочисленным неотрицательным значениям  $x, y, z, t$ , при которых в знаменателе не появляются факториалы отрицательных чисел.

## 2. Формулы Ву [111]

$$\begin{aligned} & \left\{ \begin{matrix} j_{11} & j_{12} & j_{13} \\ j_{21} & j_{22} & j_{23} \\ j_{31} & j_{32} & j_{33} \end{matrix} \right\} = \Delta(j_{11}j_{12}j_{13}) \Delta(j_{21}j_{22}j_{23}) \Delta(j_{31}j_{32}j_{33}) \Delta(j_{11}j_{21}j_{31}) \times \\ & \times \Delta(j_{12}j_{22}j_{32}) \Delta(j_{13}j_{23}j_{33}) \sum_{\nu, \omega} (-1)^{\omega_1+\omega_2+\omega_3} \frac{(n+1)!}{\prod_{p,q=1}^3 \nu_{pq}! \prod_{\alpha=1}^6 \omega_{\alpha}!}, \end{aligned} \quad (2)$$

где

$$n = \sum_{p,q=1}^3 \nu_{pq} + \sum_{\alpha=1}^6 \omega_{\alpha}. \quad (3)$$

В этой формуле суммирование проводится по пятнадцати переменным  $\nu_{pq}$  ( $p, q = 1, 2, 3$ ),  $\omega_{\alpha}$  ( $\alpha = 1, 2, \dots, 6$ ), на которые наложены следующие условия, уменьшающие число независимых переменных до шести:

$$\begin{aligned} \omega_1 + \omega_4 + \nu_{21} + \nu_{31} &= r_{11}, & \omega_1 + \omega_4 + \nu_{12} + \nu_{13} &= r'_{11}, \\ \omega_3 + \omega_6 + \nu_{22} + \nu_{32} &= r_{12}, & \omega_3 + \omega_6 + \nu_{11} + \nu_{13} &= r'_{12}, \\ \omega_2 + \omega_5 + \nu_{23} + \nu_{33} &= r_{13}, & \omega_2 + \omega_5 + \nu_{11} + \nu_{12} &= r'_{13}, \\ \omega_3 + \omega_5 + \nu_{11} + \nu_{31} &= r_{21}, & \omega_3 + \omega_5 + \nu_{22} + \nu_{23} &= r'_{21}, \\ \omega_2 + \omega_4 + \nu_{12} + \nu_{32} &= r_{22}, & \omega_2 + \omega_4 + \nu_{21} + \nu_{23} &= r'_{22}, \\ \omega_1 + \omega_6 + \nu_{13} + \nu_{33} &= r_{23}, & \omega_1 + \omega_6 + \nu_{21} + \nu_{22} &= r'_{23}, \\ \omega_2 + \omega_6 + \nu_{11} + \nu_{21} &= r_{31}, & \omega_2 + \omega_6 + \nu_{32} + \nu_{33} &= r'_{31}, \\ \omega_1 + \omega_5 + \nu_{12} + \nu_{22} &= r_{32}, & \omega_1 + \omega_5 + \nu_{31} + \nu_{33} &= r'_{32}, \\ \omega_3 + \omega_4 + \nu_{13} + \nu_{23} &= r_{33}, & \omega_3 + \omega_4 + \nu_{31} + \nu_{32} &= r'_{33}. \end{aligned} \quad (4)$$

Отметим, что величины  $\nu_{pq}$  и  $\omega_{\alpha}$  — вещественные и неотрицательные целые числа.

Имеют место следующие соотношения:

$$\sum_{q=1}^3 \nu_{pq} = n - \sum_{q=1}^3 r_{pq}, \quad \sum_{q=1}^3 \nu_{qp} = n - \sum_{q=1}^3 r'_{qp}. \quad (5)$$

$$\begin{aligned} n + \omega_1 + \omega_4 - \nu_{11} &= j_{12} + j_{13} + j_{21} + j_{31}, & n + \omega_3 + \omega_5 - \nu_{21} &= j_{22} + j_{23} + j_{11} + j_{31}, \\ n + \omega_3 + \omega_6 - \nu_{12} &= j_{11} + j_{13} + j_{22} + j_{32}, & n + \omega_2 + \omega_4 - \nu_{22} &= j_{21} + j_{23} + j_{12} + j_{32}, \\ n + \omega_2 + \omega_5 - \nu_{13} &= j_{11} + j_{12} + j_{23} + j_{33}, & n + \omega_1 + \omega_6 - \nu_{23} &= j_{21} + j_{22} + j_{13} + j_{33}, \\ n + \omega_2 + \omega_6 - \nu_{31} &= j_{32} + j_{33} + j_{11} + j_{21}, \\ n + \omega_1 + \omega_5 - \nu_{32} &= j_{31} + j_{33} + j_{12} + j_{22}, \\ n + \omega_3 + \omega_4 - \nu_{33} &= j_{31} + j_{32} + j_{13} + j_{23}. \end{aligned} \quad (6)$$

Конкретный выбор независимых переменных суммирования может быть сделан разными способами. При этом получаются существенно различные по виду выражения для 9-символов. Приведем некоторые из них:

$$\left\{ \begin{matrix} j_{11} & j_{12} & j_{13} \\ j_{21} & j_{22} & j_{23} \\ j_{31} & j_{32} & j_{33} \end{matrix} \right\} = \Delta(j_{11}j_{12}j_{13}) \Delta(j_{21}j_{22}j_{23}) \Delta(j_{31}j_{32}j_{33}) \Delta(j_{11}j_{21}j_{31}) \Delta(j_{12}j_{22}j_{32}) \Delta(j_{13}j_{23}j_{33}) \times$$

$$\times \sum_{z_\alpha} \frac{(-1)^{\frac{1}{2}R + \frac{1}{2} \sum_{\beta=1}^3 z_\beta + z_4 + z_5 + z_6} \left(1 + \sum_{\beta=1}^6 z_\beta\right)!}{\prod_{p,q=1}^3 (z_{pq} - j_{pq})! \prod_{\alpha=1}^6 \left\{ \frac{1}{2} \left( R - \sum_{\beta=1}^6 z_\beta \right) + z_\alpha - h_\alpha \right\}!}, \quad (7)$$

где

$$(z_{pq}) \equiv \begin{pmatrix} z_{11} & z_{12} & z_{13} \\ z_{21} & z_{22} & z_{23} \\ z_{31} & z_{32} & z_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 + z_4 & z_3 + z_6 & z_2 + z_5 \\ z_3 + z_5 & z_2 + z_4 & z_1 + z_6 \\ z_2 + z_6 & z_1 + z_5 & z_3 + z_4 \end{pmatrix}, \quad (8)$$

$$\begin{aligned} h_1 &= j_{11} + j_{23} + j_{32}, & h_4 &= j_{11} + j_{22} + j_{33}, \\ h_2 &= j_{31} + j_{22} + j_{13}, & h_5 &= j_{21} + j_{32} + j_{13}, \\ h_3 &= j_{21} + j_{12} + j_{33}, & h_6 &= j_{31} + j_{12} + j_{23}. \end{aligned} \quad (9)$$

$$R = \sum_{p,q=1}^3 j_{pq}. \quad (10)$$

Суммирование производится по всем  $z_\alpha \geq 0$ , целым и полуцелым.

$$\left\{ \begin{matrix} j_{11} & j_{12} & j_{13} \\ j_{21} & j_{22} & j_{23} \\ j_{31} & j_{32} & j_{33} \end{matrix} \right\} = \Delta(j_{11}j_{12}j_{13}) \Delta(j_{21}j_{22}j_{23}) \Delta(j_{31}j_{32}j_{33}) \Delta(j_{11}j_{21}j_{31}) \Delta(j_{12}j_{22}j_{32}) \Delta(j_{13}j_{23}j_{33}) \times$$

$$\times (-1)^R \sum_{z_\alpha} \frac{(-1)^{z_4 + z_5 + z_6} \left(1 + \sum_{\beta=1}^6 z_\beta\right)!}{\prod_{p,q=1}^3 (z_{pq} - j_{pq})! \prod_{p=1}^3 \left[ \left( R - \sum_{\beta=1}^6 z_\beta + z_p - h_p \right)! (z_{p+3} - h_{p+3})! \right]}.$$

Суммирование проводится по всем целым и полуцелым неотрицательным  $z_\alpha \geq 0$ ,  $z_{pq}$  и  $h_p$  даны выше.

$$\left\{ \begin{matrix} j_{11} & j_{12} & j_{13} \\ j_{21} & j_{22} & j_{23} \\ j_{31} & j_{32} & j_{33} \end{matrix} \right\} = \Delta(j_{11}j_{12}j_{13}) \Delta(j_{21}j_{22}j_{23}) \Delta(j_{31}j_{32}j_{33}) \Delta(j_{11}j_{21}j_{31}) \Delta(j_{12}j_{22}j_{32}) \Delta(j_{13}j_{23}j_{33}) \times$$

$$\times \sum_{x_\alpha} \frac{(-1)^{x_4 + x_5 + x_6} \left(1 + R - 2t + \sum_{\beta=1}^6 x_\beta - x_4\right)!}{\left( \prod_{p=1}^3 x_p! \right) x_4! (x_5 + x_4)! (x_6 + x_4)! \prod_{p \neq q=1}^3 (x_{pq} + t_{pq})! \prod_{p=1}^3 \left( t - j_{qr} - j_{rq} + x_p - \sum_{\beta=1}^6 x_\beta \right)!}, \quad (12)$$

где

$$(x_{pq}) \equiv \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_3 + x_6 & x_2 + x_5 \\ x_3 + x_5 & x_2 & x_1 + x_6 \\ x_2 + x_6 & x_1 + x_5 & x_3 \end{pmatrix}. \quad (13)$$

Суммирование проводится по всем целым неотрицательным  $x_\alpha \geq 0$ ,

$$\begin{aligned} t_{pq} &\equiv j_{qr} + j_{rp} - j_{pp} - j_{qq}, \quad (p \neq q \neq r = 1, 2, 3), \\ t &= j_{11} + j_{22} + j_{33}. \end{aligned} \quad (14)$$

3. Связь  $9j$ -символов с коэффициентами Клебша-Гордана и  $3j$ -символами [110]

$$\begin{Bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & j \end{Bmatrix} = [(2c+1)(2f+1)(2g+1)(2h+1)]^{-\frac{1}{2}} (2j+1)^{-1} \sum_{\substack{\alpha\beta\gamma \\ \delta\varepsilon\varphi \\ \eta\mu\nu}} C_{\alpha\beta\gamma}^{\sigma\tau} C_{\delta\varepsilon\varphi}^{\lambda\mu} C_{\eta\mu\nu}^{j\nu} C_{\alpha\alpha d\delta}^{\sigma\eta} C_{b\beta\sigma\sigma}^{h\mu} C_{g\eta h\mu}^{j\nu}, \quad (15)$$

$$\begin{Bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & j \end{Bmatrix} = \frac{(-1)^{2(c+g)}}{(2a+1)(2e+1)(2j+1)} \sum_{\substack{\alpha\beta\gamma \\ \delta\varepsilon\varphi \\ \eta\mu\nu}} C_{\sigma\tau\delta\sigma}^{\alpha\alpha} C_{g\eta d\delta}^{\alpha\alpha} C_{b\beta h\mu}^{\varepsilon\varepsilon} C_{\delta\delta f\varphi}^{\varepsilon\varepsilon} C_{h\mu\sigma\eta}^{j\nu} C_{j\varphi\sigma\tau}^{j\nu}, \quad (16)$$

$$\begin{Bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & j \end{Bmatrix} = \sum_{\substack{\alpha\beta\gamma \\ \delta\varepsilon\varphi \\ \eta\mu\nu}} \begin{Bmatrix} a & b & c \\ \alpha & \beta & \gamma \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} d & e & f \\ \delta & \varepsilon & \varphi \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} g & h & j \\ \eta & \mu & \nu \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} a & d & g \\ \alpha & \delta & \eta \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} b & e & h \\ \beta & \varepsilon & \mu \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} c & f & j \\ \gamma & \varphi & \nu \end{Bmatrix}. \quad (17)$$

Имеют место также следующие формулы [45]:

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & j \end{Bmatrix} &= \frac{\Delta(abc)\Delta(def)}{\Delta(adg)\Delta(cfj)} \left[ \frac{(g+h+j+1)!(g-h+j)!}{(2h+1)} \right]^{\frac{1}{2}} \times \\ &\times \frac{(c+f-j)!(a+d-g)!}{(a+d+g+1)!(a-b+c)!(-a+b+c)!(d-e+f)!(-d+e+f)!} \times \\ &\times \sum_{xy\beta} (-1)^{a-c+\beta+x+y} \frac{(2a-x)!(2d-y)!(-a+b+c+x)!(-d+e+f+y)!}{x!y!(a+b-c-x)!(d+e-f-y)!(-a+c-\beta+x)!(-d+f+g-j+\beta+y)!} \times \\ &\times \frac{(-a+f+j-\beta+x)!(-d+c+g+\beta+y)!}{(a+d-g-x-y)!(-a+c-d+f+g+j+1+x+y)!} \left[ \frac{(b-\beta)!(e+g-j+\beta)!}{(b+\beta)!(e-g+j-\beta)!} \right]^{\frac{1}{2}} C_{b\beta\sigma}^{h j-g} C_{\sigma j-g-\beta}^{j-g}, \quad (18) \\ \begin{Bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & j \end{Bmatrix} &= \left[ \frac{(a+d-g)!(c+f-j)!(g-h+j)!(g+h+j+1)!}{(-a+d+g)!(a-d+g)!(a+d+g+1)!(c+f+j+1)!(c-f+j)!(-c+f+j)!} \right]^{\frac{1}{2}} \times \\ &\times \frac{1}{[(2c+1)(2f+1)(2h+1)]^{\frac{1}{2}}} \sum_{\alpha\beta} (-1)^{a-c+\beta} \left[ \frac{(a+\alpha)!(d+g-\alpha)!(c+\alpha+\beta)!(f+j-\alpha-\beta)!}{(a-\alpha)!(d-g+\alpha)!(c-\alpha-\beta)!(f-j+\alpha+\beta)!} \right]^{\frac{1}{2}} \times \\ &\times C_{b\beta\sigma}^{h j-g} C_{\sigma j-g-\beta}^{j-g} C_{\alpha\alpha b\beta}^{\sigma\sigma} C_{d g-\alpha\sigma}^{f j-g-\beta}. \quad (19) \end{aligned}$$

4. Связь  $9j$ -символов с  $6j$ -символами и коэффициентами Рака [110, 74]

$$\begin{Bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & j \end{Bmatrix} = \sum_x (-1)^{2x} (2x+1) \begin{Bmatrix} a & b & c \\ f & j & x \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} d & e & f \\ b & x & h \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} g & h & j \\ x & a & d \end{Bmatrix}, \quad (20)$$

$$\begin{Bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & j \end{Bmatrix} = \sum_x (2x+1) W(aech; xb) W(aegf; xd) W(chfg; xj). \quad (21)$$

Выражения для  $9j$ -символов при некоторых частных значениях параметров приведены в разделе 10.9.

10.3. ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ  $9j$ -СИМВОЛОВ

1. Можно указать следующее интегральное представление, содержащее гипергеометрическую функцию  ${}_3F_2$ :

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & j \end{pmatrix} = \frac{(-1)^{a+b-c-g-h+j}}{2^{b+e+h+1}} \cdot \frac{\Delta(abc) \Delta(def) \Delta(beh)}{\Delta(adg) \Delta(cfj) \Delta(ghj)} \times$$

$$\times \frac{(a+d-g)! (c+f-j)! (g-h+j)! (b+e+h+1)!}{(a-b+c)! (-a+b+c)! (d-e+f)! (-d+e+f)! (a+d+g+1)! (-b+e+h)! (b+e+f-g)!} \times$$

$$\times \sum_{xy} \frac{(-1)^{x+y} (2a-x)! (-a+b+c+x)! (-a-e+f+g+x)! (2d-y)! (c-d+e+f+y)!}{x! y! (a+b-c-x)! (-a+c-e+g-j+x)! (d+e-f-y)!} \times$$

$$\times \frac{1}{(a+d-g-x-y)! (-a-d+g+c+f+j+1+x+y)!} \times$$

$$\times \int_{-1}^1 (1+z)^{2e} {}_3F_2 \left[ \begin{matrix} -b-e+g-j, & -a-e+f+g+1+x, & d-e-f-y; \\ -a+c-e+g-j+1+x, & -c+d-e-j-y; \end{matrix} \frac{z-1}{z+1} \right] \times$$

$$\times \frac{d^{-b+e+h}}{(dz)^{-b+e+h}} [(1-z)^{g+h-j} (1+z)^{-g+h+j}] dz. \quad (1)$$

2. Интегральные представления  $9j$ -символов, содержащие  $D$ -функции Вигнера

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & j \end{pmatrix} C_{c\gamma f\varphi}^{j\mu} = (-1)^{c-f-g+h} \frac{[(2j+1)(a+b-c)! (a+b+c+1)! (d+e-f)! (d+e+f+1)!]^{\frac{1}{2}}}{(a+d+g+1)! (b+e+h+1)! \Delta(adg) \Delta(beh)} \times$$

$$\times [(g+h-j)! (g+h+j+1)!]^{\frac{1}{2}} \int dR_1 dR_2 dR_3 B_{beh}^{adg}(R_1, R_2, R_3) D_{b-a, \gamma}^c(R_1) D_{e-d, \varphi}^f(R_2) D_{g-h, \mu}^{j*}(R_3). \quad (2)$$

В этой формуле  $\gamma, \varphi, \mu$  — произвольные,

$$dR_i = \frac{1}{8\pi^2} \sin \beta_i d\alpha_i d\beta_i d\gamma_i, \quad (i = 1, 2, 3). \quad (3)$$

Интегрирование производится в обычных пределах. Величины  $B_{beh}^{adg}(R_1, R_2, R_3)$  имеют вид

$$B_{beh}^{adg}(R_1, R_2, R_3) = B_{\gamma^2}^{a+d-g} B_{12}^{*b+e-h} B_{31}^{a-d+g} B_{31}^{*h-e+h} B_{32}^{-a+d+g} B_{32}^{*-b+e+h}, \quad (4)$$

$$B_{ik} \equiv e^{\frac{\pi}{2} i} \frac{i}{2} \binom{\alpha_i + \alpha_k}{\alpha_i} \left\{ \sin \frac{\beta_i}{2} \cos \frac{\beta_k}{2} e^{\frac{i}{2} (\gamma_i - \gamma_k)} - \cos \frac{\beta_i}{2} \sin \frac{\beta_k}{2} e^{-\frac{i}{2} (\gamma_i - \gamma_k)} \right\} =$$

$$= \sum_M (-1)^{\frac{1}{2} - M} D_{\frac{1}{2} - M}^{\frac{1}{2}}(R_i) D_{\frac{1}{2} - M}^{\frac{1}{2}}(R_k) = -D_{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}(R_i R_k^{-1}). \quad (5)$$

Коэффициенты  $B_{ik}$  обладают следующими свойствами:

$$(B_{ik})^{2j} = \sum_m (-1)^{j-m} D_{jm}^j(R_i) D_{j-m}^j(R_k) = (-1)^{2j} D_{j-j}^j(R_i R_k^{-1}), \quad (6)$$

$$(B_{ik}^*)^{2j} = \sum_m (-1)^{j-m} D_{-jm}^j(R_i) D_{-j-m}^j(R_k) = D_{-j-j}^j(R_i R_k^{-1}), \quad (7)$$

$$|B_{ik}| = \sin \frac{\Omega_{ik}}{2}, \quad (8)$$

где

$$\cos \Omega_{ik} = \cos \beta_i \cos \beta_k + \sin \beta_i \sin \beta_k \cos (\gamma_i - \gamma_k). \quad (9)$$

В частном случае при  $a = b$ ,  $d = e$ ,  $g = h$  из формулы (2) получаем [63]

$$\begin{aligned} & \left\{ \begin{array}{ccc} a & a & c \\ d & d & f \\ g & g & j \end{array} \right\} C_{c0f0}^{j0} = (-1)^{c+f} \frac{1}{[(a+d-g+1)!]^2 \Delta^2(adg)} \times \\ & \times [(2j+1)(2a-c)!(2a+c+1)!(2d-f)!(2d+f+1)!(2g-j)!(2g+j+1)!]^{\frac{1}{2}} \times \\ & \times \int d\Omega_1 d\Omega_2 d\Omega_3 B_{adg}(\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3) P_c(\cos \beta_1) P_f(\cos \beta_2) P_j(\cos \beta_3). \end{aligned} \quad (10)$$

Здесь

$$d\Omega_i = \frac{1}{4\pi} \sin \beta_i d\beta_i d\gamma_i, \quad (11)$$

$$B_{adg}(\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3) = \left( \sin \frac{\Omega_{12}}{2} \right)^{2(a+d-g)} \left( \sin \frac{\Omega_{31}}{2} \right)^{2(a-d+g)} \left( \sin \frac{\Omega_{32}}{2} \right)^{2(-a+d+g)}. \quad (12)$$

3. Выражения для 9*j*-символов в виде интегралов от характеров неприводимых представлений группы вращений (см. 4.14)

$$\begin{aligned} & \left\{ \begin{array}{ccc} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & j \end{array} \right\}^2 = \frac{1}{(8\pi^2)^3} \int dR_1 dR_2 dR_3 dR_4 dR_5 \chi^c(R_1) \chi^f(R_2) \chi^j(R_3) \chi^a(R_1 R_4) \chi^b(R_1 R_5) \chi^d(R_2 R_4) \times \\ & \times \chi^e(R_2 R_5) \chi^g(R_3 R_4) \chi^h(R_3 R_5), \end{aligned} \quad (13)$$

$$\left\{ \begin{array}{ccc} a & a & b \\ a & a & c \\ b & c & d \end{array} \right\} = \frac{1}{(8\pi^2)^3} \int dR_1 dR_2 dR_3 \chi^a(R_1) \chi^a(R_2) \chi^d(R_3) \chi^a(R_2 R_1) \chi^b(R_3 R_1^{-1}) \chi^c(R_3 R_2^{-1}). \quad (14)$$

#### 10.4. СВОЙСТВА СИММЕТРИИ 9*j*-СИМВОЛОВ

1. 9*j*-символ обладает следующими свойствами симметрии [74]. Абсолютная величина 9*j*-символа не изменяется при произвольной перестановке столбцов или строк, а также при его транспонировании относительно главной диагонали. Если перестановка столбцов или строк нечетная, появляется фазовый множитель  $(-1)^R$ , где  $R$  — сумма всех параметров 9*j*-символа. В случае четной перестановки фазовый множитель равен единице. При транспонировании фаза 9*j*-символа не меняется.

а. Перестановка столбцов

$$\left\{ \begin{array}{ccc} j_{11} & j_{12} & j_{13} \\ j_{21} & j_{22} & j_{23} \\ j_{31} & j_{32} & j_{33} \end{array} \right\} = \varepsilon \left\{ \begin{array}{ccc} j_{1i} & j_{1k} & j_{1l} \\ j_{2i} & j_{2k} & j_{2l} \\ j_{3i} & j_{3k} & j_{3l} \end{array} \right\}. \quad (1)$$

б. Перестановка строк

$$\left\{ \begin{array}{ccc} j_{11} & j_{12} & j_{13} \\ j_{21} & j_{22} & j_{23} \\ j_{31} & j_{32} & j_{33} \end{array} \right\} = \varepsilon \left\{ \begin{array}{ccc} j_{i1} & j_{i2} & j_{i3} \\ j_{k1} & j_{k2} & j_{k3} \\ j_{l1} & j_{l2} & j_{l3} \end{array} \right\}. \quad (2)$$

в. Транспонирование

$$\left\{ \begin{array}{ccc} j_{11} & j_{12} & j_{13} \\ j_{21} & j_{22} & j_{23} \\ j_{31} & j_{32} & j_{33} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{ccc} j_{11} & j_{21} & j_{31} \\ j_{12} & j_{22} & j_{32} \\ j_{13} & j_{23} & j_{33} \end{array} \right\}. \quad (3)$$

Здесь

$$\varepsilon = \begin{cases} 1 & \text{для четного числа перестановок} \\ & \text{(циклические перестановки),} \\ (-1)^R & \text{для нечетного числа перестановок} \\ & \text{(нециклические перестановки),} \end{cases} \quad (4)$$

$$R = \sum_{i,k=1}^3 j_{ik}. \quad (5)$$



Все перечисленные свойства симметрии независимы и связывают между собой следующие  $3! \times 3! \times 2 = 72$  9j-символа:

$$\begin{aligned}
 & \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & a & b \\ f & d & e \\ j & g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & c & a \\ e & f & d \\ h & j & g \end{pmatrix} = \varepsilon \begin{pmatrix} b & a & c \\ e & d & f \\ h & g & j \end{pmatrix} = \varepsilon \begin{pmatrix} c & b & a \\ f & e & d \\ j & h & g \end{pmatrix} = \varepsilon \begin{pmatrix} a & c & b \\ d & f & e \\ g & j & h \end{pmatrix} = \\
 & = \begin{pmatrix} g & h & j \\ a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} j & g & h \\ c & a & b \\ f & d & e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h & j & g \\ b & c & a \\ e & f & d \end{pmatrix} = \varepsilon \begin{pmatrix} h & g & j \\ b & a & c \\ e & d & f \end{pmatrix} = \varepsilon \begin{pmatrix} j & h & g \\ c & b & a \\ f & e & d \end{pmatrix} = \varepsilon \begin{pmatrix} g & j & h \\ a & c & b \\ d & f & e \end{pmatrix} = \\
 & = \begin{pmatrix} d & e & f \\ g & h & j \\ a & b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f & d & e \\ j & g & h \\ c & a & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e & f & d \\ h & j & g \\ b & c & a \end{pmatrix} = \varepsilon \begin{pmatrix} e & d & f \\ h & g & j \\ b & a & c \end{pmatrix} = \varepsilon \begin{pmatrix} f & e & d \\ j & h & g \\ c & b & a \end{pmatrix} = \varepsilon \begin{pmatrix} d & f & e \\ g & j & h \\ a & c & b \end{pmatrix} = \\
 & = \varepsilon \begin{pmatrix} d & e & f \\ a & b & c \\ g & h & j \end{pmatrix} = \varepsilon \begin{pmatrix} f & d & e \\ c & a & b \\ j & g & h \end{pmatrix} = \varepsilon \begin{pmatrix} e & f & d \\ b & c & a \\ h & j & g \end{pmatrix} = \varepsilon \begin{pmatrix} e & d & f \\ b & a & c \\ h & g & j \end{pmatrix} = \varepsilon \begin{pmatrix} f & e & d \\ c & b & a \\ j & h & g \end{pmatrix} = \varepsilon \begin{pmatrix} d & f & e \\ a & c & b \\ g & j & h \end{pmatrix} = \\
 & = \varepsilon \begin{pmatrix} g & h & j \\ d & e & f \\ a & b & c \end{pmatrix} = \varepsilon \begin{pmatrix} j & g & h \\ f & d & e \\ c & a & b \end{pmatrix} = \varepsilon \begin{pmatrix} h & j & g \\ e & f & d \\ b & c & a \end{pmatrix} = \varepsilon \begin{pmatrix} h & g & j \\ e & d & f \\ b & a & c \end{pmatrix} = \varepsilon \begin{pmatrix} j & h & g \\ f & e & d \\ c & b & a \end{pmatrix} = \varepsilon \begin{pmatrix} g & j & h \\ d & f & e \\ a & c & b \end{pmatrix} = \\
 & = \varepsilon \begin{pmatrix} a & b & c \\ g & h & j \\ d & e & f \end{pmatrix} = \varepsilon \begin{pmatrix} c & a & b \\ j & g & h \\ f & d & e \end{pmatrix} = \varepsilon \begin{pmatrix} b & c & a \\ h & j & g \\ e & f & d \end{pmatrix} = \varepsilon \begin{pmatrix} b & a & c \\ h & g & j \\ e & d & f \end{pmatrix} = \varepsilon \begin{pmatrix} c & b & a \\ j & h & g \\ f & e & d \end{pmatrix} = \varepsilon \begin{pmatrix} a & c & b \\ d & f & e \\ g & j & h \end{pmatrix} = \\
 & = \begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g & a & d \\ h & b & e \\ f & c & j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & g & a \\ e & h & b \\ f & j & c \end{pmatrix} = \varepsilon \begin{pmatrix} d & a & g \\ e & b & h \\ f & c & j \end{pmatrix} = \varepsilon \begin{pmatrix} g & d & a \\ h & e & b \\ j & f & c \end{pmatrix} = \varepsilon \begin{pmatrix} a & g & d \\ b & h & e \\ c & j & f \end{pmatrix} = \\
 & = \begin{pmatrix} c & f & j \\ a & d & g \\ b & e & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} j & c & f \\ g & a & d \\ h & b & e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f & j & c \\ d & g & a \\ e & h & b \end{pmatrix} = \varepsilon \begin{pmatrix} f & c & j \\ d & a & g \\ e & b & h \end{pmatrix} = \varepsilon \begin{pmatrix} j & f & c \\ g & d & a \\ h & e & b \end{pmatrix} = \varepsilon \begin{pmatrix} c & j & f \\ a & g & d \\ b & h & e \end{pmatrix} = \\
 & = \begin{pmatrix} b & e & h \\ c & f & j \\ a & d & g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h & b & e \\ j & c & f \\ g & a & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e & h & b \\ f & j & c \\ d & g & a \end{pmatrix} = \varepsilon \begin{pmatrix} e & b & h \\ f & c & j \\ d & a & g \end{pmatrix} = \varepsilon \begin{pmatrix} h & e & b \\ j & f & c \\ g & d & a \end{pmatrix} = \varepsilon \begin{pmatrix} b & h & e \\ c & j & f \\ a & g & d \end{pmatrix} = \\
 & = \varepsilon \begin{pmatrix} b & e & h \\ a & d & g \\ c & f & j \end{pmatrix} = \varepsilon \begin{pmatrix} h & b & e \\ g & a & d \\ j & c & f \end{pmatrix} = \varepsilon \begin{pmatrix} e & h & b \\ d & g & a \\ f & j & c \end{pmatrix} = \varepsilon \begin{pmatrix} e & b & h \\ d & a & g \\ f & c & j \end{pmatrix} = \varepsilon \begin{pmatrix} h & e & b \\ g & d & a \\ j & f & c \end{pmatrix} = \varepsilon \begin{pmatrix} b & h & e \\ a & g & d \\ c & j & f \end{pmatrix} = \\
 & = \varepsilon \begin{pmatrix} c & f & j \\ b & e & h \\ a & d & g \end{pmatrix} = \varepsilon \begin{pmatrix} j & c & f \\ h & b & e \\ g & a & d \end{pmatrix} = \varepsilon \begin{pmatrix} f & j & c \\ e & h & b \\ d & g & a \end{pmatrix} = \varepsilon \begin{pmatrix} f & c & j \\ e & b & h \\ d & a & g \end{pmatrix} = \varepsilon \begin{pmatrix} j & f & c \\ h & e & b \\ g & d & a \end{pmatrix} = \varepsilon \begin{pmatrix} c & j & f \\ b & h & e \\ a & g & d \end{pmatrix} = \\
 & = \varepsilon \begin{pmatrix} a & d & g \\ c & f & j \\ b & e & h \end{pmatrix} = \varepsilon \begin{pmatrix} g & a & d \\ j & c & f \\ h & b & e \end{pmatrix} = \varepsilon \begin{pmatrix} d & g & a \\ f & j & c \\ e & h & b \end{pmatrix} = \varepsilon \begin{pmatrix} d & a & g \\ j & f & c \\ h & e & b \end{pmatrix} = \varepsilon \begin{pmatrix} g & d & a \\ j & f & c \\ h & e & b \end{pmatrix} = \varepsilon \begin{pmatrix} a & g & d \\ c & j & f \\ b & h & e \end{pmatrix}.
 \end{aligned} \tag{6}$$

По горизонтали расположены 9j-символы, отличающиеся перестановкой столбцов, а по вертикали — перестановкой строк. Нижние шесть строк связывают транспонированные 9j-символы.

2. Указанным свойствам симметрии 9j-символа соответствуют следующие свойства симметрии таблицы  $\|r_{ik}, r'_{ik}\|$  (см. 10.1.2).

а. Перестановке строк 9j-символа соответствует перестановка строк таблицы

$$\begin{vmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & r'_{11} & r'_{12} & r'_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & r'_{21} & r'_{22} & r'_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & r'_{31} & r'_{32} & r'_{33} \end{vmatrix} = \varepsilon \begin{vmatrix} r_{i1} & r_{i2} & r_{i3} & r'_{i1} & r'_{i2} & r'_{i3} \\ r_{k1} & r_{k2} & r_{k3} & r'_{k1} & r'_{k2} & r'_{k3} \\ r_{l1} & r_{l2} & r_{l3} & r'_{l1} & r'_{l2} & r'_{l3} \end{vmatrix}, \tag{7}$$

фазовый множитель  $\varepsilon$  определен выше (формула (4)).

б. Перестановке столбцов  $9j$ -символа отвечает одновременная перестановка соответствующих столбцов в обеих частях таблицы  $r_{ik}$  и  $r'_{ik}$ :

$$\begin{vmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & r'_{11} & r'_{12} & r'_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & r'_{21} & r'_{22} & r'_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & r'_{31} & r'_{32} & r'_{33} \end{vmatrix} = \varepsilon \begin{vmatrix} r_{1i} & r_{1k} & r_{1l} & r'_{1i} & r'_{1k} & r'_{1l} \\ r_{2i} & r_{2k} & r_{2l} & r'_{2i} & r'_{2k} & r'_{2l} \\ r_{3i} & r_{3k} & r_{3l} & r'_{3i} & r'_{3k} & r'_{3l} \end{vmatrix}. \quad (8)$$

в. Транспонированию  $9j$ -символа соответствует транспонирование обеих частей таблицы  $r_{ik}$  и  $r'_{ik}$  с одновременной их перестановкой:

$$\begin{vmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & r'_{11} & r'_{12} & r'_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & r'_{21} & r'_{22} & r'_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & r'_{31} & r'_{32} & r'_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} r'_{11} & r'_{21} & r'_{31} & r_{11} & r_{21} & r_{31} \\ r'_{12} & r'_{22} & r'_{32} & r_{12} & r_{22} & r_{32} \\ r'_{13} & r'_{23} & r'_{33} & r_{13} & r_{23} & r_{33} \end{vmatrix}. \quad (9)$$

3. «Зеркальная» симметрия. Этот тип симметрии проявляется при обобщении  $9j$ -символов на случай отрицательных целых и полуцелых значений аргументов. При этом для  $9j$ -символов справедливы следующие соотношения [45], в которых  $\bar{a} \equiv -a-1$ ,  $\bar{b} \equiv -b-1$  и т. д.:

$$\begin{aligned} & \begin{Bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & j \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{a} & \bar{b} & \bar{c} \\ \bar{d} & \bar{e} & \bar{f} \\ \bar{g} & \bar{h} & \bar{j} \end{Bmatrix} = \eta_1 \begin{Bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & j \end{Bmatrix} = \eta_1 \begin{Bmatrix} a & \bar{b} & \bar{c} \\ \bar{d} & \bar{e} & \bar{f} \\ \bar{g} & \bar{h} & \bar{j} \end{Bmatrix} = \\ & = i\eta_2 \begin{Bmatrix} \bar{a} & \bar{b} & \bar{c} \\ d & e & f \\ g & h & j \end{Bmatrix} = -i\eta_2 \begin{Bmatrix} a & b & \bar{c} \\ \bar{d} & \bar{e} & \bar{f} \\ \bar{g} & \bar{h} & \bar{j} \end{Bmatrix} = \eta_3 \begin{Bmatrix} a & b & c \\ \bar{d} & \bar{e} & \bar{f} \\ g & h & j \end{Bmatrix} = \eta_3 \begin{Bmatrix} a & \bar{b} & \bar{c} \\ d & e & f \\ \bar{g} & \bar{h} & \bar{j} \end{Bmatrix} = \\ & = i\eta_4 \begin{Bmatrix} \bar{a} & \bar{b} & \bar{c} \\ \bar{d} & \bar{e} & \bar{f} \\ g & h & j \end{Bmatrix} = -i\eta_4 \begin{Bmatrix} a & b & c \\ \bar{d} & \bar{e} & \bar{f} \\ \bar{g} & \bar{h} & \bar{j} \end{Bmatrix} = \eta_5 \begin{Bmatrix} \bar{a} & \bar{b} & \bar{c} \\ d & e & f \\ g & h & j \end{Bmatrix} = \eta_5 \begin{Bmatrix} a & b & \bar{c} \\ \bar{d} & \bar{e} & \bar{f} \\ g & h & j \end{Bmatrix} = \\ & = i\eta_6 \begin{Bmatrix} \bar{a} & \bar{b} & \bar{c} \\ d & e & f \\ \bar{g} & \bar{h} & \bar{j} \end{Bmatrix} = -i\eta_6 \begin{Bmatrix} a & b & \bar{c} \\ \bar{d} & \bar{e} & \bar{f} \\ g & h & j \end{Bmatrix} = \eta_7 \begin{Bmatrix} \bar{a} & \bar{b} & \bar{c} \\ \bar{d} & \bar{e} & \bar{f} \\ g & h & j \end{Bmatrix} = \eta_7 \begin{Bmatrix} a & \bar{b} & \bar{c} \\ d & e & f \\ \bar{g} & \bar{h} & \bar{j} \end{Bmatrix} = \\ & = \eta_8 \begin{Bmatrix} \bar{a} & \bar{b} & \bar{c} \\ \bar{d} & \bar{e} & \bar{f} \\ g & h & j \end{Bmatrix} = \eta_8 \begin{Bmatrix} a & b & \bar{c} \\ d & e & f \\ \bar{g} & \bar{h} & \bar{j} \end{Bmatrix} = \\ & = -i\eta_9 \begin{Bmatrix} \bar{a} & \bar{b} & \bar{c} \\ \bar{d} & \bar{e} & \bar{f} \\ g & h & j \end{Bmatrix} = -i\eta_9 \begin{Bmatrix} a & b & \bar{c} \\ \bar{d} & \bar{e} & \bar{f} \\ \bar{g} & \bar{h} & \bar{j} \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} \bar{a} & \bar{b} & \bar{c} \\ d & e & f \\ g & h & j \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} a & b & \bar{c} \\ \bar{d} & \bar{e} & \bar{f} \\ \bar{g} & \bar{h} & \bar{j} \end{Bmatrix}. \quad (10) \end{aligned}$$

В этих формулах

$$\begin{aligned} \eta_1 &= (-1)^{b-c-d+g}, & \eta_5 &= (-1)^{c-f-g+h+1}, \\ \eta_2 &= (-1)^{c+d-e-g+h}, & \eta_6 &= (-1)^{g-h-f}, \\ \eta_3 &= (-1)^{c+f-g-h}, & \eta_7 &= (-1)^{2(a+e+f)}, \\ \eta_4 &= (-1)^R, & \eta_8 &= (-1)^{R-d+e-f+1}. \end{aligned} \quad (11)$$

4. При получении алгебраических формул и численных значений  $9j$ -символов удобно использовать следующие соотношения, вытекающие из свойств симметрии зеркального отражения [45]:

$$\begin{Bmatrix} d-\delta & e+\varepsilon & f+\varphi \\ d & e & f \\ g & h & j \end{Bmatrix} = i(-1)^{g+e-\varphi} \begin{Bmatrix} \bar{d}+\delta & e+\varepsilon & f+\varphi \\ \bar{d} & e & f \\ g & h & j \end{Bmatrix}, \quad (12)$$

$$\begin{Bmatrix} d+\delta & e-\varepsilon & f+\varphi \\ d & e & f \\ g & h & j \end{Bmatrix} = i(-1)^{h+\varphi-\delta} \begin{Bmatrix} d+\delta & \bar{e}+\varepsilon & f+\varphi \\ d & \bar{e} & f \\ g & h & j \end{Bmatrix}, \quad (13)$$

$$\begin{Bmatrix} d+\delta & e+\varepsilon & f-\varphi \\ d & e & f \\ g & h & j \end{Bmatrix} = i(-1)^{j+\delta-\varepsilon} \begin{Bmatrix} d+\delta & e+\varepsilon & f+\varphi \\ d & e & f \\ g & h & j \end{Bmatrix}, \quad (14)$$

$$\begin{Bmatrix} d-\delta & e-\varepsilon & f+\varphi \\ d & e & f \\ g & h & j \end{Bmatrix} = (-1)^{h+\varphi-g+1} \begin{Bmatrix} \bar{d}+\delta & \bar{e}+\varepsilon & f+\varphi \\ \bar{d} & \bar{e} & f \\ g & h & j \end{Bmatrix}, \quad (15)$$

$$\begin{Bmatrix} d-\delta & e+\varepsilon & f-\varphi \\ d & e & f \\ g & h & j \end{Bmatrix} = (-1)^{g+\varepsilon-j+1} \begin{Bmatrix} \bar{d}+\delta & e+\varepsilon & f+\varphi \\ \bar{d} & e & f \\ g & h & j \end{Bmatrix}, \quad (16)$$

$$\begin{Bmatrix} d+\delta & e-\varepsilon & f-\varphi \\ d & e & f \\ g & h & j \end{Bmatrix} = (-1)^{j+\delta-h+1} \begin{Bmatrix} d+\delta & \bar{e}+\varepsilon & f+\varphi \\ d & \bar{e} & f \\ g & h & j \end{Bmatrix}, \quad (17)$$

$$\begin{Bmatrix} d-\delta & e-\varepsilon & f-\varphi \\ d & e & f \\ g & h & j \end{Bmatrix} = i(-1)^{g+h+j+\delta+\varepsilon+\varphi+1} \begin{Bmatrix} \bar{d}+\delta & \bar{e}+\varepsilon & f+\varphi \\ \bar{d} & \bar{e} & f \\ g & h & j \end{Bmatrix}. \quad (18)$$

10.5. РЕКУРРЕНТНЫЕ СООТНОШЕНИЯ ДЛЯ 9  $j$ -СИМВОЛОВ

1. Рекуррентные соотношения для 9  $j$ -символов могут быть получены, например, с помощью следующей формулы [77]:

$$\begin{aligned} & (-1)^{a+f+b+j} \sum_x (-1)^{2x} (2x+1) \begin{Bmatrix} a & b & x \\ d & e & f \\ g & h & j \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} a & b & x \\ c & \lambda & a' \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} f & f & x \\ \lambda & c & f' \end{Bmatrix} = \\ & = (-1)^{a'+f'+g+\varepsilon} \sum_y (-1)^{2y} (2y+1) \begin{Bmatrix} a' & b & c \\ y & e & f' \\ g & h & j \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} f' & e & y \\ d & \lambda & f \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} g & a' & y \\ \lambda & d & a \end{Bmatrix}. \end{aligned} \quad (1)$$

Для этого нужно придать параметру  $\lambda$  какое-либо целое или полуцелое значение ( $\lambda = \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}$  и т. д.), раскрыть сумму и записать 6  $j$ -символы в явном виде. Таким способом получены соотношения (2)–(5).

2. Связь четырех 9  $j$ -символов. Нижеследующие соотношения получаются из формулы (1) при  $\lambda = \frac{1}{2}$ . Значения  $a'$  и  $f'$  для каждой из формул различные.

а)  $a' = a - \frac{1}{2}, f' = f - \frac{1}{2}$ :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2c+1} \left[ \left( a-b+c+\frac{1}{2} \right) \left( a+b+c+\frac{3}{2} \right) \left( c+f-l+\frac{1}{2} \right) \left( c+f+j+\frac{3}{2} \right) \right]^{1/2} \begin{Bmatrix} a & b & c + \frac{1}{2} \\ d & e & f \\ g & h & j \end{Bmatrix} + \\ & + \frac{1}{2c+1} \left[ \left( -a+b+c+\frac{1}{2} \right) \left( a+b-c+\frac{1}{2} \right) \left( -c+f+j+\frac{1}{2} \right) \left( c-f+j+\frac{1}{2} \right) \right]^{1/2} \begin{Bmatrix} a & b & c - \frac{1}{2} \\ d & e & f \\ g & h & j \end{Bmatrix} = \\ & = \frac{1}{2d+1} [(d+e-f+1)(-d+e+f)(-a+g+d+1)(a-d+g)]^{1/2} \begin{Bmatrix} a - \frac{1}{2} & b & c \\ d + \frac{1}{2} & e & f - \frac{1}{2} \\ g & h & j \end{Bmatrix} + \\ & + \frac{1}{2d+1} [(d-e+f)(d+e+f+1)(a+d-g)(a+d+g+1)]^{1/2} \begin{Bmatrix} a - \frac{1}{2} & b & c \\ d - \frac{1}{2} & e & f - \frac{1}{2} \\ g & h & j \end{Bmatrix}; \end{aligned} \quad (2)$$

$$\text{б) } a' = a + \frac{1}{2}, \quad f' = f + \frac{1}{2}:$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2c+1} \left[ \left( -a + b + c + \frac{1}{2} \right) \left( a + b - c + \frac{1}{2} \right) \left( -c + f + j + \frac{1}{2} \right) \left( c - f + j + \frac{1}{2} \right) \right]^{1/2} \begin{Bmatrix} a & b & c + \frac{1}{2} \\ d & e & f \\ g & h & j \end{Bmatrix} + \\ & + \frac{1}{2c+1} \left[ \left( a - b + c + \frac{1}{2} \right) \left( a + b + c + \frac{3}{2} \right) \left( c + f - j + \frac{1}{2} \right) \left( c + f + j + \frac{3}{2} \right) \right]^{1/2} \begin{Bmatrix} a & b & c - \frac{1}{2} \\ d & e & f \\ g & h & j \end{Bmatrix} = \\ & = \frac{1}{2d+1} [(d-e+f+1)(d+e+f+2)(a+d-g+1)(a+d+g+2)]^{1/2} \begin{Bmatrix} a + \frac{1}{2} & b & c \\ d + \frac{1}{2} & e & f + \frac{1}{2} \\ g & h & j \end{Bmatrix} + \\ & + \frac{1}{2d+1} [(-d+e+f+1)(d+e-f)(-a+d+g)(a-d+g+1)]^{1/2} \begin{Bmatrix} a + \frac{1}{2} & b & c \\ d - \frac{1}{2} & e & f + \frac{1}{2} \\ g & h & j \end{Bmatrix}; \quad (3) \end{aligned}$$

$$\text{в) } a' = a - \frac{1}{2}, \quad f' = f + \frac{1}{2}:$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2c+1} \left[ \left( a - b + c + \frac{1}{2} \right) \left( a + b + c + \frac{3}{2} \right) \left( -c + f + j + \frac{1}{2} \right) \left( c - f + j + \frac{1}{2} \right) \right]^{1/2} \begin{Bmatrix} a & b & c + \frac{1}{2} \\ d & e & f \\ g & h & j \end{Bmatrix} - \\ & - \frac{1}{2c+1} \left[ \left( -a + b + c + \frac{1}{2} \right) \left( a + b - c + \frac{1}{2} \right) \left( c + f - j + \frac{1}{2} \right) \left( c + f + j + \frac{3}{2} \right) \right]^{1/2} \begin{Bmatrix} a & b & c - \frac{1}{2} \\ d & e & f \\ g & h & j \end{Bmatrix} = \\ & = \frac{1}{2d+1} [(d-e+f+1)(d+e+f+2)(-a+d+g+1)(a-d+g)]^{1/2} \begin{Bmatrix} a - \frac{1}{2} & b & c \\ d + \frac{1}{2} & e & f + \frac{1}{2} \\ g & h & j \end{Bmatrix} - \\ & - \frac{1}{2d+1} [(-d+e+f+1)(d+e-f)(a+d-g)(a+d+g+1)]^{1/2} \begin{Bmatrix} a - \frac{1}{2} & b & c \\ d - \frac{1}{2} & e & f + \frac{1}{2} \\ g & h & j \end{Bmatrix}. \quad (4) \end{aligned}$$

Соотношение, получающееся при  $a' = a + \frac{1}{2}$ ,  $f' = f - \frac{1}{2}$ , эквивалентно (4).

3. Связь пяти 9j-символов [45].

$$\begin{aligned} & \frac{A_{c+1}(ab, fj)}{(c+1)(2c+1)} \begin{Bmatrix} a & b & c + 1 \\ d & e & f \\ g & h & j \end{Bmatrix} + \frac{A_c(ab, fj)}{c(2c+1)} \begin{Bmatrix} a & b & c - 1 \\ d & e & f \\ g & h & j \end{Bmatrix} - \frac{A_{d+1}(ef, ag)}{(d+1)(2d+1)} \begin{Bmatrix} a & b & c \\ d + 1 & e & f \\ g & h & j \end{Bmatrix} - \frac{A_d(ef, ag)}{d(2d+1)} \begin{Bmatrix} a & b & c \\ d - 1 & e & f \\ g & h & j \end{Bmatrix} = \\ & = \left\{ \frac{[a(a+1) + d(d+1) - g(g+1)][d(d+1) - e(e+1) + f(f+1)]}{d(d+1)} - \right. \\ & \left. - \frac{[a(a+1) - b(b+1) + c(c+1)][c(c+1) + f(f+1) - j(j+1)]}{c(c+1)} \right\} \begin{Bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & j \end{Bmatrix}, \quad (5) \end{aligned}$$

где

$$A_q(pr, st) = [(-p+r+q)(p-r+q)(p+r-q+1)(p+r+q+1) \times \\ \times (-s+t+q)(s-t+q)(s+t-q+1)(s+t+q+1)]^{1/2}. \quad (6)$$

Это соотношение получается, если в формуле (1) положить  $\lambda = 1$ ,  $a' = a$ ,  $f' = f$ .  
Другого типа соотношения, связывающие пять 9*j*-символов, имеют вид [75]

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{(g+h+j+1)(g+h-j)(-b+e+h)(b+e-h+1)}{(a+d+g+2)(a-d+g+1)} \right]^{1/2} \left\{ \begin{array}{ccc} a + \frac{1}{2} & b + \frac{1}{2} & c \\ d & e & f \\ g - \frac{1}{2} & h - \frac{1}{2} & j \end{array} \right\} + \\ & + \left[ \frac{(g-h+j)(-g+h+j+1)(b+e+h+2)(b-e+h+1)}{(a+d+g+2)(a-d+g+1)} \right]^{1/2} \left\{ \begin{array}{ccc} a + \frac{1}{2} & b + \frac{1}{2} & c \\ d & e & f \\ g - \frac{1}{2} & h + \frac{1}{2} & j \end{array} \right\} + \\ & + \left[ \frac{(g+h+j+2)(g+h-j+1)(b+e+h+2)(b-e+h+1)}{(a+d-g+1)(-a+d+g)} \right]^{1/2} \left\{ \begin{array}{ccc} a + \frac{1}{2} & b + \frac{1}{2} & c \\ d & e & f \\ g + \frac{1}{2} & h + \frac{1}{2} & j \end{array} \right\} - \\ & - \left[ \frac{(g-h+j+1)(-g+h+j)(b+e-h+1)(-b+e+h)}{(a+d-g+1)(-a+d+g)} \right]^{1/2} \left\{ \begin{array}{ccc} a + \frac{1}{2} & b + \frac{1}{2} & c \\ d & e & f \\ g + \frac{1}{2} & h - \frac{1}{2} & j \end{array} \right\} = \\ & = (2g+1)(2h+1) \left[ \frac{(a+b+c+2)(a+b-c+1)}{(a+d+g+2)(a-d+g+1)(a+d-g+1)(-a+d+g)} \right]^{1/2} \left\{ \begin{array}{ccc} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & j \end{array} \right\}. \quad (7) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{(g+h+j+1)(g+h-j)(b+e+h+1)(b+h-e)}{(a+d-g)(-a+d+g+1)} \right]^{1/2} \left\{ \begin{array}{ccc} a - \frac{1}{2} & b - \frac{1}{2} & c \\ d & e & f \\ g - \frac{1}{2} & h - \frac{1}{2} & j \end{array} \right\} - \\ & - \left[ \frac{(-g+h+j+1)(g-h+j)(-b+e+h+1)(b+e-h)}{(a+d-g)(-a+d+g+1)} \right]^{1/2} \left\{ \begin{array}{ccc} a - \frac{1}{2} & b - \frac{1}{2} & c \\ d & e & f \\ g - \frac{1}{2} & h + \frac{1}{2} & j \end{array} \right\} + \\ & + \left[ \frac{(g-h+j+1)(-g+h+j)(b+e+h+1)(b-e+h)}{(a+d+g+1)(a-d+g)} \right]^{1/2} \left\{ \begin{array}{ccc} a - \frac{1}{2} & b - \frac{1}{2} & c \\ d & e & f \\ g + \frac{1}{2} & h - \frac{1}{2} & j \end{array} \right\} + \\ & + \left[ \frac{(g+h+j+2)(g+h-j+1)(-b+e+h+1)(b+e-h)}{(a+d+g+1)(a-d+g)} \right]^{1/2} \left\{ \begin{array}{ccc} a - \frac{1}{2} & b - \frac{1}{2} & c \\ d & e & f \\ g + \frac{1}{2} & h + \frac{1}{2} & j \end{array} \right\} = \\ & = (2g+1)(2h+1) \left[ \frac{(a+b+c+1)(a+b-c)}{(a+d+g+1)(a-d+g)(a+d-g)(-a+d+g+1)} \right]^{1/2} \left\{ \begin{array}{ccc} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & j \end{array} \right\}. \quad (8) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left[ \frac{(-g+h+j+1)(g-h+j)(-b+e+h+1)(b+e-h)}{(a+d+g+2)(a-d+g+1)} \right]^{1/2} \left\{ \begin{array}{ccc} a + \frac{1}{2} & b - \frac{1}{2} & c \\ d & e & f \\ g - \frac{1}{2} & h + \frac{1}{2} & j \end{array} \right\} - \\
& - \left[ \frac{(g+h+j+1)(g+h-j)(b+e+h+1)(b-e+h)}{(a+d+g+2)(a-d+g+1)} \right]^{1/2} \left\{ \begin{array}{ccc} a + \frac{1}{2} & b - \frac{1}{2} & c \\ d & e & f \\ g - \frac{1}{2} & h - \frac{1}{2} & j \end{array} \right\} + \\
& + \left[ \frac{(g-h+j+1)(-g+h+j)(b+e+h+1)(b-e+h)}{(a+d-g+1)(-a+d+g)} \right]^{1/2} \left\{ \begin{array}{ccc} a + \frac{1}{2} & b - \frac{1}{2} & c \\ d & e & f \\ g + \frac{1}{2} & h - \frac{1}{2} & j \end{array} \right\} + \\
& + \left[ \frac{(g+h+j+2)(g+h-j+1)(-b+e+h+1)(b+e-h)}{(a+d-g+1)(-a+d+g)} \right]^{1/2} \left\{ \begin{array}{ccc} a + \frac{1}{2} & b - \frac{1}{2} & c \\ d & e & f \\ g + \frac{1}{2} & h + \frac{1}{2} & j \end{array} \right\} = \\
& = (2g+1)(2h+1) \left[ \frac{(a-b+c+1)(-a+b+c)}{(a+d+g+2)(a-d+g+1)(a+d-g+1)(-a+d+g)} \right]^{1/2} \left\{ \begin{array}{ccc} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & j \end{array} \right\}. \quad (9)
\end{aligned}$$

4. Имеет место также рекуррентное соотношение другого типа, связывающее шесть  $9j$ -символов:

$$\begin{aligned}
& \frac{[(a+b+1)^2 - (c+1)^2]^{1/2} [(c+1)^2 - (a-b)^2]^{1/2} [f+j-c+1]^{1/2}}{(2c+1)} \left[ \frac{a \ b \ c + 1}{f+j-c} \right]^{1/2} \left\{ \begin{array}{ccc} a & b & c + 1 \\ d & e & f \\ g & h & j \end{array} \right\} + \\
& + \frac{[(d+e+1)^2 - (f+1)^2]^{1/2} [(f+1)^2 - (d-e)^2]^{1/2} [c-f+j+1]^{1/2}}{(2f+1)} \left[ \frac{a \ b \ c}{c-f+j} \right]^{1/2} \left\{ \begin{array}{ccc} a & b & c \\ d & e & f + 1 \\ g & h & j \end{array} \right\} + \\
& + \frac{[(g+h+1)^2 - (j+1)^2]^{1/2} [(j+1)^2 - (g-h)^2]^{1/2} [c+f-j+1]^{1/2}}{(2j+1)} \left[ \frac{a \ b \ c}{c+f-j} \right]^{1/2} \left\{ \begin{array}{ccc} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & j + 1 \end{array} \right\} = \\
& = \left[ \frac{(-c+f+j+1)(c-f+j+1)(c+f-j+1)(c+f+j+2)}{(-c+f+j)(c-f+j)(c+f-j)(c+f+j+1)} \right]^{1/2} \times \\
& \times \left\{ \frac{[(a+b+1)^2 - c^2]^{1/2} [c^2 - (a-b)^2]^{1/2} [-c+f+j]^{1/2}}{2c+1} \left[ \frac{a \ b \ c - 1}{-c+f+j+1} \right]^{1/2} \left\{ \begin{array}{ccc} a & b & c - 1 \\ d & e & f \\ g & h & j \end{array} \right\} + \right. \\
& \left. + \frac{[(d+e+1)^2 - f^2]^{1/2} [f^2 - (d-e)^2]^{1/2} [c-f+j]^{1/2}}{2f+1} \left[ \frac{a \ b \ c}{c-f+j+1} \right]^{1/2} \left\{ \begin{array}{ccc} a & b & c \\ d & e & f - 1 \\ g & h & j \end{array} \right\} + \right. \\
& \left. + \frac{[(g+h+1)^2 - j^2]^{1/2} [j^2 - (g-h)^2]^{1/2} [c+f-j]^{1/2}}{2j+1} \left[ \frac{a \ b \ c}{c+f-j+1} \right]^{1/2} \left\{ \begin{array}{ccc} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & j - 1 \end{array} \right\} \right\}. \quad (10)
\end{aligned}$$

5. Более простые рекуррентные соотношения можно получить в тех случаях, когда параметры  $9j$ -символа удовлетворяют некоторым соотношениям.

а. Два столбца (или две строки) 9*j*-символа одинаковы:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2c+1} [(2a+c+2)(2a-c)(-c+f+j)(c-f+j+1)(c+f-j+1)(c+f+j+2)]^{1/2} \left\{ \begin{matrix} a & a & c+1 \\ d & d & f \\ g & g & j \end{matrix} \right\} + \\ & + \frac{1}{2c+1} [(2a+c+1)(2a-c+1)(-c+f+j+1)(c-f+j)(c+f-j)(c+f+j+1)]^{1/2} \left\{ \begin{matrix} a & a & c-1 \\ d & d & f \\ g & g & j \end{matrix} \right\} = \\ & = \frac{1}{2f+1} [(2d+f+2)(2d-f)(-c+f+j+1)(c-f+j)(c+f-j+1)(c+f+j+2)]^{1/2} \left\{ \begin{matrix} a & a & c \\ d & d & f+1 \\ g & g & j \end{matrix} \right\} + \\ & + \frac{1}{2f+1} [(2d+f+1)(2d-f+1)(-c+f+j)(c-f+j+1)(c+f-j)(c+f+j+1)]^{1/2} \left\{ \begin{matrix} a & a & c \\ d & d & f-1 \\ g & g & j \end{matrix} \right\}. \quad (11) \end{aligned}$$

б. Один из индексов в триаде равен сумме двух других [45]:

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{(-c+g+h-f)(c-g+h+f+1)(c+g-h+f+1)(c+g+h+f+2)}{(2c+2f+2)(2c+2f+3)} \right]^{1/2} \left\{ \begin{matrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & c+f \end{matrix} \right\} = \\ & = \left[ \frac{(-a+b+c+1)(a-b+c+1)(a+b-c)(a+b+c+2)}{(2c+1)(2c+2)} \right]^{1/2} \left\{ \begin{matrix} a & b & c+1 \\ d & e & f \\ g & h & c+f+1 \end{matrix} \right\} + \\ & + \left[ \frac{(-d+e+f+1)(d-e+f+1)(d+e-f)(d+e+f+2)}{(2f+1)(2f+2)} \right]^{1/2} \left\{ \begin{matrix} a & b & c \\ d & e & f+1 \\ g & h & c+f+1 \end{matrix} \right\}. \quad (12) \end{aligned}$$

в. Один из индексов 9*j*-символа равен 0 или 1 [32, 75]:

$$\left\{ \begin{matrix} a & b & c \\ d & e & c \\ g & g & 1 \end{matrix} \right\} = \frac{a(a+1)+e(e+1)-d(d+1)-b(b+1)}{2[c(c+1)g(g+1)]^{1/2}} \left\{ \begin{matrix} a & b & c \\ d & e & c \\ g & g & 0 \end{matrix} \right\}, \quad (13)$$

$$\begin{aligned} & [g(g+1)(c+1)(2c+3)(2d+c+2)(2d-c)]^{1/2} \left\{ \begin{matrix} a & a & c \\ d & d & c+1 \\ g & g & 1 \end{matrix} \right\} = \\ & = [g(g+1)c(2c-1)(2d+c+1)(2d-c+1)]^{1/2} \left\{ \begin{matrix} a & a & c \\ d & d & c-1 \\ g & g & 1 \end{matrix} \right\} + \\ & + (2c+1)[d(d+1)+g(g+1)-a(a+1)] \left\{ \begin{matrix} a & a & c \\ d & d & c \\ g & g & 0 \end{matrix} \right\}, \quad (14) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & [c(2c+3)(d+e+c+2)(-d+e+c+1)(d-e+c+1)(d+e-c)]^{1/2} \left\{ \begin{matrix} a & b & c \\ d & e & c+1 \\ g & g & 1 \end{matrix} \right\} - \\ & - [(c+1)(2c-1)(d+e+c+1)(-d+e+c)(d-e+c)(d+e-c+1)]^{1/2} \left\{ \begin{matrix} a & b & c \\ d & e & c-1 \\ g & g & 1 \end{matrix} \right\} = \\ & = (2c+1) \left\{ d(d+1)-e(e+1)-c(c+1) + \frac{2c(c+1)[e(e+1)+g(g+1)-b(b+1)]}{a(a+1)+e(e+1)-d(d+1)-b(b+1)} \right\} \left\{ \begin{matrix} a & b & c \\ d & e & c \\ g & g & 1 \end{matrix} \right\}, \quad (15) \end{aligned}$$

где  $a \neq b$  и  $d \neq e$  или  $a \neq d$  и  $b \neq e$  одновременно. В частности,

$$\left\{ \begin{array}{ccc} a & b & c \\ d & e & c+1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{array} \right\} = \left[ \frac{2c+1}{c+(a-d)(2a+1)+(b-e)(2b+1)} - 1 \right] \times$$

$$\times \left[ \frac{c(2c-1)(d+e-c)(-d+e+c+1)(d-e+c+1)(d+e+c+2)}{(c+1)(2c+3)(d+e-c+1)(-d+e+c)(d-e+c)(d+e+c+1)} \right]^{1/2} \left\{ \begin{array}{ccc} a & b & c \\ d & e & c-1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{array} \right\}. \quad (16)$$

### 10.6. ПРОИЗВОДЯЩАЯ ФУНКЦИЯ ДЛЯ 9 $j$ -СИМВОЛОВ

В качестве производящей функции для 9 $j$ -символов можно рассматривать [111] следующую функцию восемнадцати переменных  $\tau_{ik}, \tau'_{ik}$  ( $i, k = 1, 2, 3$ ):

$$\left[ 1 - \sum_{p,q=1}^3 a_{pq} - \sum_{\alpha=1}^6 b_{\alpha} \right]^{-1}, \quad (1)$$

где  $a_{pq}$  и  $b_{\alpha}$  задаются таблицами

$$(a_{pq}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \tau_{21} & \tau_{31} & \tau'_{12} & \tau'_{13} & \tau_{22} & \tau_{32} & \tau'_{11} & \tau'_{13} & \tau_{23} & \tau_{33} & \tau'_{11} & \tau'_{12} \\ \tau_{11} & \tau_{31} & \tau'_{22} & \tau'_{23} & \tau_{12} & \tau_{32} & \tau'_{21} & \tau'_{23} & \tau_{13} & \tau_{33} & \tau'_{21} & \tau'_{22} \\ \tau_{11} & \tau_{21} & \tau'_{32} & \tau'_{33} & \tau_{12} & \tau_{22} & \tau'_{31} & \tau'_{33} & \tau_{13} & \tau_{23} & \tau'_{31} & \tau'_{32} \end{pmatrix}, \quad (2)$$

$$(b_{\alpha}) = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ b_5 \\ b_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tau_{11} & \tau'_{11} & \tau_{32} & \tau'_{32} & \tau_{23} & \tau'_{23} \\ \tau_{31} & \tau'_{31} & \tau_{22} & \tau'_{22} & \tau_{13} & \tau'_{13} \\ \tau_{21} & \tau'_{21} & \tau_{12} & \tau'_{12} & \tau_{33} & \tau'_{33} \\ -\tau_{11} & \tau'_{11} & \tau_{22} & \tau'_{22} & \tau_{33} & \tau'_{33} \\ -\tau_{21} & \tau'_{21} & \tau_{32} & \tau'_{32} & \tau_{13} & \tau'_{13} \\ -\tau_{31} & \tau'_{31} & \tau_{12} & \tau'_{12} & \tau_{23} & \tau'_{23} \end{pmatrix}. \quad (3)$$

При этом

$$\sum_{\alpha=1}^6 b_{\alpha} = - \begin{vmatrix} \tau_{11} & \tau'_{11} & \tau_{12} & \tau'_{12} & \tau_{13} & \tau'_{13} \\ \tau_{21} & \tau'_{21} & \tau_{22} & \tau'_{22} & \tau_{23} & \tau'_{23} \\ \tau_{31} & \tau'_{31} & \tau_{32} & \tau'_{32} & \tau_{33} & \tau'_{33} \end{vmatrix}. \quad (4)$$

Если функцию (1) разлагать в ряд по степеням  $\tau_{ik}$  и  $\tau'_{ik}$ , причем рассматривать показатели степеней как соответствующие элементы таблицы  $\|r_{ik}, r'_{ik}\|$ , то коэффициенты разложения будут совпадать с 9 $j$ -символами с точностью до нормировочных множителей.

Такое разложение имеет вид

$$\frac{1}{1 - \sum_{p,q=1}^3 a_{pq} - \sum_{\alpha=1}^6 b_{\alpha}} = \sum_{r, r'} \left[ \frac{\prod_{p=1}^3 \left( \sum_{q=1}^3 r_{pq} + 1 \right)! \left( \sum_{q=1}^3 r'_{pq} + 1 \right)!}{\prod_{p,q=1}^3 r_{pq}! r'_{pq}!} \right]^{1/2} \left\{ \begin{array}{ccc} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & j \end{array} \right\} \prod_{p,q=1}^3 (\tau_{pq})^{r_{pq}} (\tau'_{pq})^{r'_{pq}}. \quad (5)$$

### 10.7. АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ВЫРАЖЕНИЕ ДЛЯ 9 $j$ -СИМВОЛОВ

1. Асимптотическое выражение для 9 $j$ -символа, справедливое при  $a, b, c, d, e, f, g, h, j \gg 1$ , имеет вид

$$\left\{ \begin{array}{ccc} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & j \end{array} \right\} \approx \frac{2\theta(B) (-1)^{a+c-e+g+j} \cos [(d-h)\delta_1 + (a-j)\delta_2 + (b-f)\delta_3]}{\pi \sqrt{B(2a+1)(2b+1)(2d+1)(2f+1)(2h+1)(2j+1)}}. \quad (1)$$



В этой формуле

$$B = \begin{vmatrix} 1 & \cos \vartheta_3 & \cos \vartheta_1 \\ \cos \vartheta_3 & 1 & \cos \vartheta_2 \\ \cos \vartheta_1 & \cos \vartheta_2 & 1 \end{vmatrix}, \quad (2)$$

$$\Theta(B) = \begin{cases} 1 & \text{при } B > 0, \\ 0 & \text{при } B < 0. \end{cases} \quad (3)$$

Углы  $\delta_1, \delta_2, \delta_3$  определяются следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} \cos \delta_1 &= \frac{\cos \vartheta_1 \cos \vartheta_3 - \cos \vartheta_2}{\sin \vartheta_1 \sin \vartheta_3}, & \frac{\sin \delta_2}{\sin \delta_3} &= \frac{\sin \vartheta_1}{\sin \vartheta_3}, \\ \cos \delta_2 &= \frac{\cos \vartheta_2 \cos \vartheta_3 - \cos \vartheta_1}{\sin \vartheta_2 \sin \vartheta_3}, & \frac{\sin \delta_1}{\sin \delta_2} &= \frac{\sin \vartheta_2}{\sin \vartheta_1}, \\ \cos \delta_3 &= \frac{\cos \vartheta_1 \cos \vartheta_2 - \cos \vartheta_3}{\sin \vartheta_1 \sin \vartheta_2}, & \frac{\sin \delta_3}{\sin \delta_1} &= \frac{\sin \vartheta_3}{\sin \vartheta_2}. \end{aligned} \quad (4)$$

В свою очередь углы  $\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3$  можно вычислить по формулам

$$\begin{aligned} \cos \vartheta_1 &= \frac{a(a+1) + b(b+1) - c(c+1)}{2\sqrt{a(a+1)b(b+1)}}, & 0 \leq \vartheta_1 \leq \pi, \\ \cos \vartheta_2 &= -\frac{d(d+1) - e(e+1) + f(f+1)}{2\sqrt{d(d+1)f(f+1)}}, & 0 \leq \vartheta_2 \leq \pi, \\ \cos \vartheta_3 &= \frac{-g(g+1) + h(h+1) + j(j+1)}{2\sqrt{h(h+1)j(j+1)}}, & 0 \leq \vartheta_3 \leq \pi. \end{aligned} \quad (5)$$

## 10.8. ЯВНЫЙ ВИД $9j$ -СИМВОЛОВ ПРИ НЕКОТОРЫХ СООТНОШЕНИЯХ МЕЖДУ ИНДЕКСАМИ

### 1. Две строки (или два столбца) $9j$ -символа одинаковы

В этом случае  $9j$ -символ отличен от нуля, если сумма индексов третьей строки (или столбца) есть четное число [49]:

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ g & h & j \end{Bmatrix} &= 0, \text{ если } g + h + j = 2k + 1, \\ \begin{Bmatrix} a & a & c \\ d & d & f \\ g & g & j \end{Bmatrix} &= 0, \text{ если } c + f + j = 2k + 1, \end{aligned} \quad (1)$$

$$k = 0, 1, \dots$$

### 2. Один из индексов $9j$ -символа равен сумме двух других индексов из той же триады

Выражение для  $9j$ -символа может быть записано в виде двукратной суммы

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ a+d & h & j \end{Bmatrix} &= \frac{\Delta(h, j, a+d)}{\Delta(abc) \Delta(beh) \Delta(def) \Delta(cjj)} \left[ \frac{(2a)! (2d)!}{(2a+2d+1)!} \right]^{1/2} \times \\ &\times \frac{(b+c-a)! (b+e-h)! (e+f-d)! (c+f-j)! (a+d+h+j+1)!}{(a+b+c+1)! (b+e+h+1)! (d+e+f+1)! (c+f+j+1)!} \times \\ &\times \sum_{xy} \frac{(-1)^{x+y} (2c-x)! (2e-y)! (j+f-c+x)! (h+b-e+y)!}{x! y! (c+f-j-x)! (b+e-h-y)! (c-e-a+h-x+y)! (e-c-d+j+x-y)!}. \end{aligned} \quad (2)$$

Эту же формулу можно записать в виде однократной суммы, содержащей коэффициенты Клебша—Гордана [104].

$$\left\{ \begin{array}{ccc} a & b & c \\ d & e & f \\ a+d & h & j \end{array} \right\} = \frac{[(a+d+j-h)!(h+j+a+d+1)!]^{1/2}}{\Delta(abc)\Delta(def)\Delta(cfj)} \left[ \frac{(2a)!(2d)!}{(2a+2d+1)!(2h+1)!} \right]^{1/2} \times \\ \times \frac{(c+b-a)!(f+e-d)!(f+c-j)!}{(a+b+c+1)!(f+e+d+1)!(f+c+j+1)!} \times \\ \times \sum_x (-1)^x \frac{(f+j-c+x)!(2c-x)!}{x!(f+c-j-x)!} \left[ \frac{(b+a-c+x)!(e+d+c-j-x)!}{(b+c-a-x)!(e+j-c-d+x)!} \right]^{1/2} C_{b \ c \ a \ x \ e \ j \ d \ c \ x}^{h \ j \ a \ d} \quad (3)$$

Формулу (2) можно также записать в виде квазитринома, определяемого соотношением

$$(A^{(1)} - B^{(1)} - C^{(1)})^{(k)} = \sum_{x,y} \binom{k}{x} \binom{k-x}{y} (-1)^{x+y} C^{(x)} B^{(y)} A^{(k-x-y)}, \quad (4)$$

где  $A^{(x)}$ ,  $B^{(y)}$  и  $C^{(k-x-y)}$  — квазистепени (см. 8.2(11)).

Формула (2) приобретает вид [45]

$$\left\{ \begin{array}{ccc} a & b & c \\ d & e & f \\ a+d & h & j \end{array} \right\} = (-1)^{b+e-h} \left[ \frac{(2d)!(a+b+c+1)^{(-1)(h+j-b-c+d)}(a-b+c)^{(-1)(b+j-h-c+d)} \times \right. \\ \left. \times (b-c+a)^{(-1)(h+e-b-j+d)}(b+c-a)^{(1)(b+c-h-j+d)} \right]^{1/2} \times \\ \times \frac{(e-d+f)!(d-e+f)!(d+e-f)!(e+d+f+1)!(f-j+c)! \times \\ \times (e+h-b)!(e-h+b)!(f+j-c)!(b+e+h+1)^{(2e+1)} \times \\ \times (c+f+j+1)^{(2f+1)}(2a)^{(-1)(2d+1)}}{(2e)^{(1)}} \left[ \frac{(f-j+c)^{(1)}(c-f+j)^{(-1)}}{(2f)^{(1)}} \right]^{(e+f-d)}. \quad (5)$$

Если один из индексов 9j-символа равен разности двух других индексов из той же триады, выражение для 9j-символа можно получить из формул, приведенных здесь, либо используя свойства «зеркальной» симметрии (см. 10.4.3)

$$\left\{ \begin{array}{ccc} a & b & c \\ d & e & f \\ a-d & h & j \end{array} \right\} = i (-1)^{d+h-b-j+c} \left\{ \begin{array}{ccc} \bar{a} & b & c \\ d & e & f \\ \bar{a}+d & h & j \end{array} \right\}, \quad (6)$$

либо производя переобозначение индексов с последующей их перестановкой:

$$\left\{ \begin{array}{ccc} a & b & c \\ d & e & f \\ a-d & h & j \end{array} \right\} \xrightarrow{a=d+g} \left\{ \begin{array}{ccc} d+g & b & c \\ d & e & f \\ g & h & j \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{ccc} d & e & f \\ g & h & j \\ d+g & b & c \end{array} \right\}. \quad (7)$$

Всюду ниже формулы для 9j-символов, у которых один из индексов в любой из триад равен разности двух других, будут опущены, за исключением отдельных случаев.

В пунктах 3—6 приведены формулы, являющиеся частными случаями формул (2)—(5).

### 3. 9j-символы, содержащие две триады, в каждой из которых один из индексов равен сумме двух других индексов

В этом случае имеется пять вариантов формул, не сводящихся друг к другу переобозначением и перестановкой индексов. Соответствующие формулы [45, 104] даны ниже.

$$\left\{ \begin{array}{ccc} a & b & c \\ d & e & f \\ a+d & b+e & j \end{array} \right\} = \frac{\Delta(a+db+ej)}{\Delta(abc)\Delta(def)\Delta(cfj)} \left[ \frac{(2a)!(2b)!(2d)!(2e)!}{(2a+2b+1)!(2d+2e+1)!} \right]^{1/2} \times \\ \times \frac{(a+b+d+e+j+1)!(a-b+c)!(d-e+f)!(c+f-j)!}{(a+b+c+1)!(d+e+f+1)!(c+f+j+1)!} \times \\ \times \sum_z \frac{(-1)^z (2f-z)!(j+c-f+z)!}{z!(c+f-j-z)!(d+f-e-z)!(a-b-f+j+z)!}. \quad (8)$$

Формулу (8) можно записать также через коэффициент Клебша—Гордана

$$\left\{ \begin{array}{ccc} a & b & c \\ d & e & f \\ a+d & b+e & j \end{array} \right\} = \left[ \frac{(2a)! (2b)! (2d)! (2e)! (a+b+d+e+j+1)! (a+d+e+b-j)!}{(2a+2d+1)! (2b+2e+1)! (a+b+c+1)! (a+b-c)! (d+e+f+1)! (d+e-f)! (2j+1)!} \right]^{1/2} \times C_{ca-bfd-e}^{ja-b+d-e}, \quad (9)$$

$$\left\{ \begin{array}{ccc} d+g & b & c \\ d & e & f \\ g & h & c+f \end{array} \right\} = (-1)^{d+h-b-f} \left[ \frac{(2c)! (2f)! (2d)! (2g)!}{(2c+2f+1)! (2d+2g+1)!} \right]^{1/2} \frac{(d+e-f)!}{\Delta(d+gbc) \Delta(c+fgh)} \times \\ \times \frac{(b+e-h)! (d+g+b-c)! (c+f+h-g)!}{\Delta(beh) \Delta(def) (d+e+f+1)! (b+e+h+1)! (d+g+b+c+1)!} \times \\ \times \sum_x \frac{(2e-x)! (h+b-e+x)! (d+g+e+c-h-x)!}{x! (b+e-h-x)! (d+e-f-x)!}, \quad (10)$$

$$\left\{ \begin{array}{ccc} a & b & a+b \\ d & e & f \\ a+d & h & j \end{array} \right\} = \frac{\Delta(a+bff) \Delta(a+d hj)}{\Delta(beh) \Delta(def)} \left[ \frac{(2b)! (2d)!}{(2a+2b+1)! (2a+2d+1)!} \right]^{1/2} \times \\ \times \frac{(a+b+f+j+1)! (a+d+h+j+1)! (h-b+e)! (e-d+f)!}{(f+j-a-b)! (h+j-a-d)! (b+e+h+1)! (d+e+f+1)!} \times \\ \times \sum_x \frac{(-1)^x (a+b+e+d-j-x)! (j+f-a-b+x)! (j+h-a-d+x)!}{x! (a+b+f-j-x)! (a+d+h-j-x)! (j+e-a-b-d+x)! (2j+1+x)!}, \quad (11)$$

$$\left\{ \begin{array}{ccc} a & b & a-b \\ d & e & f \\ a-d & h & j \end{array} \right\} = (-1)^{b+f-d-h} \frac{[(2a-2b)! (2a-2d)! (2b)! (2d)!]^{1/2}}{\Delta(a-bff) \Delta(a-d hj) \Delta(beh) \Delta(def)} \times \\ \times \frac{(b+f+j-a)! (d+h+j-a)! (h-b+e)! (e-d+f)!}{(a-b+f+j+1)! (a-d+h+j+1)! (b+e+h+1)! (d+e+f+1)!} \times \\ \times \sum_x \frac{(x-1)! (b+e+d-a-j+x-1)! (a-d+h+j-x+1)! (a-b+f+j-x+1)!}{(2j+1-x)! (b+f-a-j+x-1)! (d+h-a-j+x-1)! (a+e+j-b-d-x+1)!}, \quad (12)$$

$$\left\{ \begin{array}{ccc} a & b & a+b \\ d & e & f \\ g & h & a+b+f \end{array} \right\} = (-1)^{a+d-g} \frac{\Delta(a+b+fg h)}{\Delta(adg) \Delta(beh) \Delta(def)} \left[ \frac{(2a)! (2b)! (2f)!}{(2a+2b+1)! (2a+2b+2f+1)!} \right]^{1/2} \times \\ \times \frac{(a+b+g+h+f+1)! (g-a+d)! (e-b+h)! (d+e-f)!}{(g+h-a-b-f)! (a+g+d+1)! (b+e+h+1)! (d+e+f+1)!}. \quad (13)$$

#### 4. 9 $j$ -символы, содержащие 3 триады, в каждой из которых один из индексов равен сумме двух других индексов

Ниже приведены простейшие варианты таких формул, не сводящихся друг к другу.

$$\left\{ \begin{array}{ccc} a & b & a+b \\ d & e & d+e \\ g & h & g+h \end{array} \right\} = \frac{\Delta(a+b d+e g+h)}{\Delta(adg) \Delta(beh)} \cdot \frac{(a+b+e+d+g+h+1)!}{(a+d+g+1)! (b+e+h+1)!} \times \\ \times \left[ \frac{(2a)! (2b)! (2d)! (2e)! (2g)! (2h)!}{(2a+2b+1)! (2d+2e+1)! (2g+2h+1)!} \right]^{1/2}, \quad (14)$$

$$\left\{ \begin{array}{ccc} c+b & b & c \\ d & e & d+e \\ g & h & g+h \end{array} \right\} = (-1)^{b+e-h} \frac{\Delta(c+b \, dg)}{\Delta(c \, d+e \, g+h) \Delta(beh)} \cdot \frac{(d+e-c+g+h)!}{(b+e+h+1)!(d-b-c+g)!} \times \\ \times \left[ \frac{(2b)!(2c)!(2d)!(2e)!(2g)!(2h)!}{(2b+2c+1)!(2d+2e+1)!(2g+2h+1)!} \right]^{1/2}, \quad (15)$$

$$\left\{ \begin{array}{ccc} a & b & a+b \\ e+f & e & f \\ g & h & a+b+f \end{array} \right\} = (-1)^{a+e+f-g} \frac{\Delta(a+b+f \, gh)}{\Delta(agg+ef) \Delta(beh)} \cdot \frac{(a+b+g+h+f+1)!(e-b+h)!}{(g+h-a-b-f)!(b+e+h+1)!} \times \\ \times \frac{(e+g+f-a)!}{(a+e+f+g+1)!} \left[ \frac{(2a)!(2b)!(2e)!}{(2a+2b+1)(2e+2f+1)!(2a+2b+2f+1)!} \right]^{1/2}, \quad (16)$$

$$\left\{ \begin{array}{ccc} a & b & c \\ d & d+f & f \\ a+d & b+d+f & j \end{array} \right\} = \frac{\Delta(a+db+d+fj)}{\Delta(abc) \Delta(cfj)} \cdot \frac{(a+b+2d+f+j+1)!(a-b+c)!(j+c-f)!}{(a+b+c+1)!(c+f+j+1)!(a-b-f+j)!} \times \\ \times \left[ \frac{(2a)!(2b)!(2f)!}{(2a+2d+1)!(2f+2d+1)(2b+2d+2f+1)!} \right]^{1/2}. \quad (17)$$

### 5. 9j-символы, содержащие четыре триады, в каждой из которых один из индексов равен сумме двух других индексов

$$\left\{ \begin{array}{ccc} a & b & a+b \\ d & e & f \\ a+d & b+e & a+b+f \end{array} \right\} = \frac{\Delta(a+b+fa+db+e)}{\Delta(def)} \cdot \frac{(2a+2b+d+e+f+1)!}{(d+e+f+1)!} \times \\ \times \left[ \frac{(2e)!(2d)!(2f)!}{(2a+2b+1)(2a+2d+1)!(2e+2b+1)!(2a+2b+2f+1)!} \right]^{1/2}, \quad (18)$$

$$\left\{ \begin{array}{ccc} c+b & b & c \\ d & b+h & d+b+h \\ g & h & g+h \end{array} \right\} = (-1)^{2b} \frac{\Delta(c+b \, dg)}{\Delta(c \, d+b+h \, g+h)} \cdot \frac{(2h+b+d+g-c)!}{(d+g-b-c)!} \times \\ \times \left[ \frac{(2c)!(2d)!(2g)!}{(2b+2h+1)(2b+2c+1)!(2b+2d+2h+1)!(2g+2h+1)!} \right]^{1/2}, \quad (19)$$

$$\left\{ \begin{array}{ccc} a & b & a+b \\ a+g & b+h & f \\ g & h & a+b+f \end{array} \right\} = (-1)^{2a} \frac{\Delta(a+b+f \, gh)}{\Delta(a+g \, b+h \, f)} \cdot \frac{(a+b+g+h-f)!}{(-a-b+g+h-f)!} \times \\ \times \left[ \frac{(2f)!(2g)!(2h)!}{(2a+2b+1)(2a+2b+2f+1)!(2a+2g+1)!(2b+2h+1)!} \right]^{1/2}, \quad (20)$$

$$\left\{ \begin{array}{ccc} a & b & a+b \\ d & b+h & f \\ a+d & h & a+b+f \end{array} \right\} = \frac{\Delta(ha+da+b+f)}{\Delta(df \, b+h)} \cdot \frac{(2a+b+d+h+f+1)!(d+b+h-f)!}{(h+d+b+f+1)!(d+h-f-b)!} \times \\ \times \left[ \frac{(2d)!(2f)!(2h)!}{(2a+2b+1)(2a+2d+1)!(2b+2h+1)!(2a+2b+2f+1)!} \right]^{1/2}, \quad (21)$$

$$\left\{ \begin{array}{ccc} a & b & a+b \\ a+g & a+g+f & f \\ g & h & a+b+f \end{array} \right\} = (-1)^{2a} \frac{\Delta(a+b+f \, gh)}{\Delta(bh \, a+g+f)} \cdot \frac{(a-b+f+g+h)!}{(g+h-a-b-f)!} \times \\ \times \left[ \frac{(2b)!(2g)!}{(2a+2g+1)(2a+2b+1)(2a+2f+2g+1)!(2a+2b+2f+1)!} \right]^{1/2}, \quad (22)$$

$$\left\{ \begin{array}{ccc} a & b & a+b \\ d & d+f & f \\ a+d & h & a+b+f \end{array} \right\} = \frac{\Delta(a+b+f, a+d, h)}{\Delta(b, d+f, f)} \cdot \frac{(2a+b+d+h+f+1)!(h-b+d+f)!}{(b+d+f+h+1)!(h+d-f-b)!} \times \\ \times \left[ \frac{(2b)!(2d)!(2d)!}{(2a+2b+1)(2a+2d+1)!(2d+2f+1)!(2a+2b+2f+1)!} \right]^{1/2}, \quad (23)$$

$$\left\{ \begin{array}{ccc} a & b & a+b \\ d & d+f & f \\ g & b+d+f & a+b+f \end{array} \right\} = (-1)^{a+d-g} \frac{\Delta(a+b+f, g, d+f+b)}{\Delta(adg)} \cdot \frac{(2b+2f+a+d+g+1)!}{(a+d+g+1)!} \times \\ \times \left[ \frac{(2a)!(2d)!}{(2a+2b+1)(2d+2f+1)(2a+2b+2f+1)!(2d+2b+2f+1)!} \right]^{1/2}, \quad (24)$$

$$\left\{ \begin{array}{ccc} a & b & a+b \\ d & b+h & f \\ a+b+f+h & h & a+b+f \end{array} \right\} = (-1)^{d-b-f-h} \frac{1}{\Delta(d, f, b+h)\Delta(a, d, a+b+f+h)} \times \\ \times \frac{(b+d+h-f)!}{(2a+d+b+f+h+1)!(d+b+h+f+1)!} \left[ \frac{(2a)!(2f)!(2a+2b+2h+2f+1)!}{(2a+2b+1)(2a+2b+2f+1)(2b+2h+1)!} \right]^{1/2}, \quad (25)$$

$$\left\{ \begin{array}{ccc} a & b & a+b \\ e+f & e & f \\ a+e+f & b+e & j \end{array} \right\} = (-1)^{f+e+b-j} \frac{\Delta(j, b+e, a+e+f)(f+j+b+a+2e+1)!}{\Delta(f, a+b, j)(f+a+b+j+1)!} \times \\ \times \left[ \frac{(2f)!(2b)!(2b)!}{(2f+2e+1)(2e+2b+1)!(2a+2b+1)!(2f+2e+2a+1)!} \right]^{1/2}. \quad (26)$$

6. 9j-символы, содержащие пять или шесть триад, в каждой из которых один из индексов равен сумме двух других индексов

$$\left\{ \begin{array}{ccc} a & b & a+b \\ d & e & d+e \\ a+d & b+e & a+b+d+e \end{array} \right\} = \frac{1}{[(2a+2b+1)(2d+2e+1)(2a+2d+1)(2b+2e+1)]^{1/2}}. \quad (27)$$

В частности, из (27) следуют (28), (29):

$$\left\{ \begin{array}{ccc} a & b & a+b \\ a & b & a+b \\ 2a & 2b & 2a+2b \end{array} \right\} = \frac{1}{(2a+2b+1)[(4a+1)(4b+1)]^{1/2}}, \quad (28)$$

$$\left\{ \begin{array}{ccc} a & a & 2a \\ a & a & 2a \\ 2a & 2a & 4a \end{array} \right\} = \frac{1}{(4a+1)^2}. \quad (29)$$

$$\left\{ \begin{array}{ccc} a & b & a+b \\ a+g & a+g+f & f \\ g & a+b+f+g & a+b+f \end{array} \right\} = \frac{(-1)^{2a}}{[(2a+2g+1)(2a+2b+1)(2a+2b+2f+1)(2a+2g+2f+1)]^{1/2}}. \quad (30)$$

В частности,

$$\left\{ \begin{array}{ccc} a & b & a+b \\ a+b & a+b+f & f \\ b & a+2b+f & a+b+f \end{array} \right\} = \frac{(-1)^{2a}}{(2a+2b+1)(2a+2b+2f+1)}. \quad (31)$$

## 10.9. ЯВНЫЙ ВИД 9j-СИМВОЛОВ ПРИ НЕКОТОРЫХ ЗНАЧЕНИЯХ ИНДЕКСОВ

### 1. Один из индексов равен нулю

В этом случае 9j-символ сводится к 6j-символу [110].

$$\left\{ \begin{array}{ccc} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & 0 \end{array} \right\} = \delta_{cf} \delta_{gh} \frac{(-1)^{b+c+d+g}}{[(2c+1)(2g+1)]^{1/2}} \left\{ \begin{array}{ccc} a & b & c \\ e & d & g \end{array} \right\} = \delta_{cf} \delta_{gh} [(2c+1)(2g+1)]^{-1/2} W(bcgd; ae). \quad (1)$$

С помощью свойств симметрии получаем

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} 0 & c & c \\ g & e & b \\ g & d & a \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} c & 0 & c \\ d & g & a \\ e & g & b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} g & g & 0 \\ e & d & c \\ b & a & c \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} g & b & e \\ 0 & c & c \\ g & a & d \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} a & g & d \\ c & 0 & c \\ b & g & e \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} b & a & c \\ g & g & 0 \\ e & d & c \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} c & e & d \\ c & b & a \\ 0 & g & g \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} d & c & e \\ a & c & b \\ g & 0 & g \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} a & b & c \\ d & e & c \\ g & g & 0 \end{Bmatrix} = \\ &= \frac{(-1)^{b+d+c+g}}{[(2c+1)(2g+1)]^{1/2}} \begin{Bmatrix} a & b & c \\ e & d & g \end{Bmatrix} = \frac{W(bcgd; ae)}{[(2c+1)(2g+1)]^{1/2}}. \end{aligned} \quad (2)$$

В частности, если два индекса равны нулю, то

$$\begin{Bmatrix} a & b & c \\ d & 0 & f \\ g & h & 0 \end{Bmatrix} = \delta_d f \delta_{bh} \delta_{cf} \delta_{gh} \frac{(-1)^{a-b-c}}{(2b+1)(2c+1)}. \quad (3)$$

Если три индекса равны нулю, то

$$\begin{Bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ 0 & 0 & 0 \end{Bmatrix} = \frac{\delta_{ad} \delta_{be} \delta_{cf}}{[(2a+1)(2b+1)(2c+1)]^{1/2}}, \quad (4)$$

$$\begin{Bmatrix} 0 & b & c \\ d & 0 & f \\ g & h & 0 \end{Bmatrix} = \delta_{bc} \delta_{bd} \delta_{bf} \delta_{bh} \delta_{gh} \frac{(-1)^{2b}}{(2b+1)^2}. \quad (5)$$

## 2. Один из индексов $9j$ -символа равен единице [32]

$$\begin{Bmatrix} a & b & c \\ d & e & c \\ g & g & 1 \end{Bmatrix} = (-1)^{b+d+g+c} \frac{(a-d)(a+d+1) - (b-e)(b+e+1)}{[(2g+2)(2g+1)2g(2c+2)(2c+1)2 \cdot c]^{1/2}} \begin{Bmatrix} a & b & c \\ e & d & g \end{Bmatrix}, \quad (6)$$

$$\begin{aligned} &\begin{Bmatrix} a & b & c \\ d & e & c \\ g+1 & g & 1 \end{Bmatrix} \cdot (-1)^{b+d+g+c} \left[ \frac{(2g+3)(2g+2)(2g+1)(2c+2)(2c+1)2c}{2} \right]^{1/2} = \\ &= [(b-e+g+1)(-b+e+g+1)(b+e+g+2)(b+e-g)]^{1/2} \begin{Bmatrix} a & d & g+1 \\ e & b & c \end{Bmatrix} + \\ &+ [(a-d+g+1)(-a+d+g+1)(a+d+g+2)(a+d-g)]^{1/2} \begin{Bmatrix} a & d & g \\ e & b & c \end{Bmatrix}, \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} &\begin{Bmatrix} a & b & c+1 \\ d & e & c \\ g+1 & g & 1 \end{Bmatrix} [(c+1)(a-d)(a+d+1) - (g+1)(a-b)(a+b+1) + (g+1)(c+1)(g-c)] \times \\ &\times [(2g+3)(2g+2)(2g+1)(2c+3)(2c+2)(2c+1)]^{1/2} (-1)^{b+c+d+g} = \\ &= (c-g) A_{a+\frac{1}{2}} \left( d, g+\frac{1}{2}; b, c+\frac{1}{2} \right) \begin{Bmatrix} a & d & g \\ e & b & c \end{Bmatrix} + (c+1) A_{d+\frac{1}{2}} \left( a, g+\frac{1}{2}; e, c+\frac{1}{2} \right) \begin{Bmatrix} a & b & c+1 \\ e & d & g \end{Bmatrix} - \\ &- (g+1) A_{b+\frac{1}{2}} \left( a, c+\frac{1}{2}; e, g+\frac{1}{2} \right) \begin{Bmatrix} a & b & c \\ e & d & g+1 \end{Bmatrix}. \end{aligned} \quad (8)$$

Величина  $A_g(\lambda, \mu; \sigma, \nu)$  определена формулой 10.5(6).

## 3. Одна из триад есть $(1/2, 1/2, 1)$

В этом случае  $9j$ -символы могут быть выражены через  $6j$ -символы по формуле [16]

$$\begin{Bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ 1/2 & 1/2 & 1 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} c & f & 1 \\ 1/2 & 1/2 & g \end{Bmatrix} = \frac{(-1)^{2g}}{3} \begin{Bmatrix} a & b & c \\ 1/2 & g & e \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} e & d & f \\ 1/2 & g & a \end{Bmatrix} - \frac{(-1)^{b+d-g}}{6(2c+1)} \begin{Bmatrix} a & b & c \\ e & d & 1/2 \end{Bmatrix} \delta_{fc}. \quad (9)$$

Имеются также следующие соотношения, связывающие 9j- и 3jm-символы [9]:

Если  $d, e, c$  — целые и  $d + e + c$  — четное, то

$$[6(2c+1)(2d+1)(2e+1)]^{1/2} \begin{pmatrix} c & d & e \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} a & b & c \\ d & e & c \\ 1/2 & 1/2 & 1 \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 1/2 & 1/2 & -1 \end{pmatrix}. \quad (10)$$

Если  $d, e, c$  — целые и  $d + e + c$  — нечетное, то

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} c+1 & d & e \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} a & b & c \\ d & e & c+1 \\ 1/2 & 1/2 & 1 \end{Bmatrix} = \\ & = (-1)^{b+e+\frac{1}{2}} \frac{[(d-a)(2a+1) + (e-b)(2b+1) + c+1]}{[6(c+1)(2c+1)(2c+3)(2d+1)(2e+1)]^{1/2}} \begin{pmatrix} a & b & c \\ 1/2 & -1/2 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} c-1 & d & e \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} a & b & c \\ d & e & c-1 \\ 1/2 & 1/2 & 1 \end{Bmatrix} = \\ & = (-1)^{b+e+\frac{1}{2}} \frac{[(d-a)(2a+1) + (e-b)(2b+1) - c]}{[6c(2c+1)(2c-1)(2d+1)(2e+1)]^{1/2}} \begin{pmatrix} a & b & c \\ 1/2 & -1/2 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (12)$$

#### 10.10. СВЯЗЬ 9j-СИМВОЛОВ ВИГНЕРА С АНАЛОГИЧНЫМИ ФУНКЦИЯМИ ДРУГИХ АВТОРОВ

Величины типа 9j-символов Вигнера разные авторы определяли различным образом: Фано [66], Фано, Рака [18]:

$$X \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & j \end{pmatrix} = \begin{Bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & j \end{Bmatrix}.$$

Арима, Хори, Танабе [49]:

$$U \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & j \end{pmatrix} = \begin{Bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & j \end{Bmatrix}.$$

Швингер [101]:

$$(-1)^{a+e-c-h} S(abde; cfgh; j) = \begin{Bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & j \end{Bmatrix}.$$

Ян, Хоуп [74]:

$$\frac{\chi(abde; cf; gh; j)}{[(2c+1)(2f+1)(2g+1)(2h+1)]^{1/2}} = \begin{Bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & j \end{Bmatrix}.$$

Кеннеди, Клиф [79]:

$$[(2c+1)(2f+1)(2g+1)(2h+1)]^{-1/2} A \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & j \end{pmatrix} = \begin{Bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & j \end{Bmatrix}.$$

#### 10.11. АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ 9j-СИМВОЛОВ

Ниже приведены алгебраические формулы 9j-символов, представленных в форме

$$\begin{Bmatrix} a+\lambda & b+\mu & c+\nu \\ a & b & c \\ a & \beta & \gamma \end{Bmatrix},$$

в которых индексы  $\alpha, \beta, \gamma$  и  $\lambda, \mu, \nu$  принимают целые или полуцелые значения, лежащие в следующих интервалах;

$$\begin{aligned} 0 < \alpha \leq 3, & \quad 0 < \beta \leq 2, & \quad \gamma = 0, 1, \\ -\alpha \leq \lambda \leq \alpha, & \quad -\beta \leq \mu \leq \beta, & \quad -\gamma \leq \nu \leq \gamma. \end{aligned}$$

При этом даны формулы только для тех 9j-символов, у которых  $\alpha \geq \beta$ . Формулы, соответствующие значениям  $\alpha < \beta$ , могут быть получены из приведенных здесь с помощью соотношений симметрии 9j-символов.

Алгебраические формулы для 9j-символов имеются также в работах Матсунобу и Такебе [120] и Юдуса и Бандзайтиса [45], где индексы принимают следующие значения.

1. В работе [120]:  $\alpha, \beta = 1/2$ ;  $\gamma = 0, 1$ ;  $\nu = 0, \pm 1$ ;  $\lambda, \mu = \pm 1/2$ .

2. В работе [45]:  $0 < \alpha \leq 3$ ;  $0 < \beta \leq 2$ ;  $\gamma = 0, 1$ ;  
 $0 \leq \lambda \leq \alpha$ ;  $0 \leq \mu \leq \beta$ ;  $\nu = 0, \pm 1$ .

В таблицах использованы следующие обозначения:

$$\begin{aligned} s &= a + b + c, \\ Z &= -c(c+1) + a(a+1) + b(b+1). \end{aligned}$$

### 10.12. ТАБЛИЦЫ ЧИСЛЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ 9j-СИМВОЛОВ

Ниже приведены таблицы численных значений 9j-символов

$$\begin{Bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & j \end{Bmatrix}$$

в виде простых и десятичных дробей для случаев

$$(g, h, j) = (1/2, 1/2, 0) \text{ или } (1/2, 1/2, 1).$$

Остальные индексы 9j-символа могут принимать целые и полуцелые значения из промежутка

$$0 \leq a, b, c, d, e, f \leq 4.$$

Каждая из таблиц соответствует 9j-символу, у которого индексы  $a, b, d, e$  принимают значения, лежащие в указанном промежутке, а индексы  $c$  и  $f$  фиксированы.

Все таблицы разбиты на две группы. В первую группу включены таблицы 9j-символов, у которых индексы  $c$  и  $f$  — полуцелые, во вторую — таблицы для целых индексов  $c$  и  $f$ .

Расположение таблиц внутри каждой из групп указано ниже.

#### Расположение таблиц 9j-символов

c, f — полуцелые						c, f — целые					
c	f	j	c	f	j	c	f	j	c	f	j
1/2	1/2	0	3/2	5/2	1	0	0	0	1	2	1
3/2	3/2	0	5/2	5/2	1	1	1	0	2	2	1
5/2	5/2	0	7/2	5/2	1	2	2	0	3	2	1
7/2	7/2	0	5/2	7/2	1	3	3	0	2	3	1
1/2	1/2	1	7/2	7/2	1	4	4	0	3	3	1
3/2	1/2	1				1	0	1	4	3	1
1/2	3/2	1				0	1	1	3	4	1
3/2	3/2	1				1	1	1	4	4	1
5/2	3/2	1				2	1	1			

Таблицы численных значений 9j-символов имеются также в работах [120, 113, 128].

а. В работах [120, 113] приведены коэффициенты с  $g, h=1/2$ ;  $j=0, 1$ ,  $a, b=0, 1, 2, 3, 4$ ;  $d, e=1/2, 3/2, 5/2, 7/2$ ;  $c, f=0, 1, 2, 3, 4, 5$ . При этом в [120] значения 9j-символов даются в виде простых дробей, а в [113] — в виде простых и десятичных дробей.

б. В работе [128] приведены 9j-символы, у которых все индексы целые и принимают следующие значения:

$$j=1, \quad a, b, c, f \leq 6, \quad d, e \leq 11.$$



ТАБЛИЦА 10.1

$$\left\{ \begin{array}{ccc} a + \lambda & b + \mu & c + \nu \\ a & b & c \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{array} \right\}$$

$\lambda$	$\mu$	$\nu = 0$
1/2	1/2	$\left[ \frac{(s+2)(s-2c+1)}{2(2a+1)(2a+2)(2b+1)(2b+2)(2c+1)} \right]^{1/2}$
1/2	-1/2	$\left[ \frac{(s-2b+1)(s-2a)}{2(2a+1)(2a+2)(2b+1)2b(2c+1)} \right]^{1/2}$
-1/2	1/2	$-\left[ \frac{(s-2b)(s-2a+1)}{2 \cdot 2a(2a+1)(2b+1)(2b+2)(2c+1)} \right]^{1/2}$
-1/2	-1/2	$\left[ \frac{(s+1)(s-2c)}{2 \cdot 2a(2a+1)2b(2b+1)(2c+1)} \right]^{1/2}$

ТАБЛИЦА 10.2

$$\left\{ \begin{array}{ccc} a + \lambda & b + \mu & c + \nu \\ a & b & c \\ 3/2 & 3/2 & 0 \end{array} \right\}$$

$\lambda$	$\mu$	$\nu = 0$
3/2	3/2	$\frac{1}{2} \left[ \frac{(s+2)(s+3)(s+4)(s-2c+1)(s-2c+2)(s-2c+3)}{(2a+1)(2a+2)(2a+3)(2a+4)(2b+1)(2b+2)(2b+3)(2b+4)(2c+1)} \right]^{1/2}$
3/2	1/2	$\frac{1}{2} \left[ \frac{3(s+2)(s+3)(s-2c+1)(s-2c+2)(s-2b+1)(s-2a)}{(2a+1)(2a+2)(2a+3)(2a+4)2b(2b+1)(2b+2)(2b+3)(2c+1)} \right]^{1/2}$
3/2	-1/2	$\frac{1}{2} \left[ \frac{3(s+2)(s-2c+1)(s-2b+1)(s-2b+2)(s-2a-1)(s-2a)}{(2a+1)(2a+2)(2a+3)(2a+4)(2b-1)2b(2b+1)(2b+2)(2c+1)} \right]^{1/2}$
3/2	-3/2	$\frac{1}{2} \left[ \frac{(s-2b+1)(s-2b+2)(s-2b+3)(s-2a-2)(s-2a-1)(s-2a)}{(2a+1)(2a+2)(2a+3)(2a+4)(2b-2)(2b-1)(2b)(2b+1)(2c+1)} \right]^{1/2}$
1/2	3/2	$-\frac{1}{2} \left[ \frac{3(s+2)(s+3)(s-2c+1)(s-2c+2)(s-2b)(s-2a+1)}{2a(2a+1)(2a+2)(2a+3)(2b+1)(2b+2)(2b+3)(2b+4)(2c+1)} \right]^{1/2}$
1/2	1/2	$\frac{1}{2} \{3Z - 2ab\} \left[ \frac{(s+2)(s-2c+1)}{2a(2a+1)(2a+2)(2a+3)2b(2b+1)(2b+2)(2b+3)(2c+1)} \right]^{1/2}$
1/2	-1/2	$\frac{1}{2} \{3Z + 2a(b+1)\} \left[ \frac{(s-2b+1)(s-2a)}{2a(2a+1)(2a+2)(2a+3)(2b-1)2b(2b+1)(2b+2)(2c+1)} \right]^{1/2}$
1/2	-3/2	$\frac{1}{2} \left[ \frac{3(s+1)(s-2c)(s-2b+1)(s-2b+2)(s-2a-1)(s-2a)}{2a(2a+1)(2a+2)(2a+3)(2b-2)(2b-1)2b(2b+1)(2c+1)} \right]^{1/2}$
-1/2	3/2	$\frac{1}{2} \left[ \frac{3(s+2)(s-2c+1)(s-2b-1)(s-2b)(s-2a+1)(s-2a+2)}{(2a-1)2a(2a+1)(2a+2)(2b+1)(2b+2)(2b+3)(2b+4)(2c+1)} \right]^{1/2}$
-1/2	1/2	$-\frac{1}{2} \{3Z + 2b(a+1)\} \left[ \frac{(s-2b)(s-2a+1)}{(2a-1)2a(2a+1)(2a+2)2b(2b+1)(2b+2)(2b+3)(2c+1)} \right]^{1/2}$
-1/2	-1/2	$\frac{1}{2} \{3Z - 2(a+1)(b+1)\} \left[ \frac{(s+1)(s-2c)}{(2a-1)2a(2a+1)(2a+2)(2b-1)2b(2b+1)(2b+2)(2c+1)} \right]^{1/2}$
-1/2	-3/2	$\frac{1}{2} \left[ \frac{3s(s+1)(s-2c-1)(s-2c)(s-2b+1)(s-2a)}{(2a-1)2a(2a+1)(2a+2)(2b-2)(2b-1)2b(2b+1)(2c+1)} \right]^{1/2}$
-3/2	3/2	$-\frac{1}{2} \left[ \frac{(s-2b-2)(s-2b-1)(s-2b)(s-2a+1)(s-2a+2)(s-2a+3)}{(2a-2)(2a-1)2a(2a+1)(2b+1)(2b+2)(2b+3)(2b+4)(2c+1)} \right]^{1/2}$
-3/2	1/2	$\frac{1}{2} \left[ \frac{3(s+1)(s-2c)(s-2b-1)(s-2b)(s-2a+1)(s-2a+2)}{(2a-2)(2a-1)2a(2a+1)2b(2b+1)(2b+2)(2b+3)(2c+1)} \right]^{1/2}$
-3/2	-1/2	$-\frac{1}{2} \left[ \frac{3s(s+1)(s-2c-1)(s-2c)(s-2b)(s-2a+1)}{(2a-2)(2a-1)2a(2a+1)(2b-1)2b(2b+1)(2b+2)(2c+1)} \right]^{1/2}$
-3/2	-3/2	$\frac{1}{2} \left[ \frac{(s-1)s(s+1)(s-2c-2)(s-2c-1)(s-2c)}{(2a-2)(2a-1)2a(2a+1)(2b-2)(2b-1)2b(2b+1)(2c+1)} \right]^{1/2}$

ТАБЛИЦА 10.3

$$\begin{cases} a + \lambda & b + \mu & c + \nu \\ a & b & c \\ 1/2 & 1/2 & 1 \end{cases}$$

$\lambda$	$\mu$	$\nu = 1$
1/2	1/2	$\left[ \frac{(s+2)(s+3)(s-2b+1)(s-2a+1)}{3(2a+1)(2a+2)(2b+1)(2b+2)(2c+1)(2c+2)(2c+3)} \right]^{1/2}$
1/2	-1/2	$-\left[ \frac{(s+2)(s-2c)(s-2b+1)(s-2b+2)}{3(2a+1)(2a+2)2b(2b+1)(2c+1)(2c+2)(2c+3)} \right]^{1/2}$
-1/2	1/2	$\left[ \frac{(s+2)(s-2c)(s-2a+1)(s-2a+2)}{3 \cdot 2a(2a+1)(2b+1)(2b+2)(2c+1)(2c+2)(2c+3)} \right]^{1/2}$
-1/2	-1/2	$-\left[ \frac{(s-2c-1)(s-2c)(s-2b+1)(s-2a+1)}{3 \cdot 2a(2a+1)2b(2b+1)(2c+1)(2c+2)(2c+3)} \right]^{1/2}$
$\lambda$	$\mu$	$\nu = 0$
1/2	1/2	$(a-b) \left[ \frac{(s+2)(s-2c+1)}{6(2a+1)(2a+2)(2b+1)(2b+2)c(c+1)(2c+1)} \right]^{1/2}$
1/2	-1/2	$(a+b+1) \left[ \frac{(s-2b+1)(s-2a)}{6(2a+1)(2a+2)2b(2b+1)c(c+1)(2c+1)} \right]^{1/2}$
-1/2	1/2	$(a+b+1) \left[ \frac{(s-2b)(s-2a+1)}{6 \cdot 2a(2a+1)(2b+1)(2b+2)c(c+1)(2c+1)} \right]^{1/2}$
-1/2	-1/2	$(b-a) \left[ \frac{(s+1)(s-2c)}{6 \cdot 2a(2a+1)2b(2b+1)c(c+1)(2c+1)} \right]^{1/2}$
$\lambda$	$\mu$	$\nu = -1$
1/2	1/2	$-\left[ \frac{(s-2c+1)(s-2c+2)(s-2b)(s-2a)}{3(2a+1)(2a+2)(2b+1)(2b+2)(2c-1)2c(2c+1)} \right]^{1/2}$
1/2	-1/2	$-\left[ \frac{(s+1)(s-2c+1)(s-2a-1)(s-2a)}{3(2a+1)(2a+2)2b(2b+1)(2c-1)2c(2c+1)} \right]^{1/2}$
-1/2	1/2	$\left[ \frac{(s+1)(s-2c+1)(s-2b-1)(s-2b)}{3 \cdot 2a(2a+1)(2b+1)(2b+2)(2c-1)2c(2c+1)} \right]^{1/2}$
-1/2	-1/2	$\left[ \frac{s(s+1)(s-2b)(s-2a)}{3 \cdot 2a(2a+1)2b(2b+1)(2c-1)2c(2c+1)} \right]^{1/2}$

ТАБЛИЦА 10.4

$$\begin{cases} a + \lambda & b + \mu & c + \nu \\ a & b & c \\ 3/2 & 1/2 & 1 \end{cases}$$

$\lambda$	$\mu$	$\nu = 1$
3/2	1/2	$\frac{1}{2} \left[ \frac{(s+2)(s+3)(s+4)(s-2c+1)(s-2b+1)(s-2b+2)}{(2a+1)(2a+2)(2a+3)(2a+4)(2b+1)(2b+2)(2c+1)(2c+2)(2c+3)} \right]^{1/2}$
3/2	-1/2	$\frac{1}{2} \left[ \frac{(s+2)(s+3)(s-2b+1)(s-2b+2)(s-2b+3)(s-2a)}{(2a+1)(2a+2)(2a+3)(2a+4)2b(2b+1)(2c+1)(2c+2)(2c+3)} \right]^{1/2}$
1/2	1/2	$\frac{a+3b-3c}{2} \left[ \frac{(s+2)(s+3)(s-2b+1)(s-2a+1)}{3 \cdot 2a(2a+1)(2a+2)(2a+3)(2b+1)(2b+2)(2c+1)(2c+2)(2c+3)} \right]^{1/2}$
1/2	-1/2	$\frac{3b+3c-a+3}{2} \left[ \frac{(s+2)(s-2c)(s-2b+1)(s-2b+2)}{3 \cdot 2a(2a+1)(2a+2)(2a+3)2b(2b+1)(2c+1)(2c+2)(2c+3)} \right]^{1/2}$

ТАБЛИЦА 10.4 (продолжение)

$\lambda$	$\mu$	$\nu = 1$
-1/2	1/2	$-\frac{a+3c-3b+1}{2} \left[ \frac{(s+2)(s-2c)(s-2a+1)(s-2a+2)}{3(2a-1)2a(2a+1)(2a+2)(2b+1)(2b+2)(2c+1)(2c+2)(2c+3)} \right]^{1/2}$
-1/2	-1/2	$\frac{a+3b+3c+4}{2} \left[ \frac{(s-2c-1)(s-2c)(s-2b+1)(s-2a+1)}{3(2a-1)2a(2a+1)(2a+2)2b(2b+1)(2c+1)(2c+2)(2c+3)} \right]^{1/2}$
-3/2	1/2	$-\frac{1}{2} \left[ \frac{(s-2c-1)(s-2c)(s-2b)(s-2a+1)(s-2a+2)(s-2a+3)}{(2a-2)(2a-1)2a(2a+1)(2b+1)(2b+2)(2c+1)(2c+2)(2c+3)} \right]^{1/2}$
-3/2	-1/2	$\frac{1}{2} \left[ \frac{(s+1)(s-2c-2)(s-2c-1)(s-2c)(s-2a+1)(s-2a+2)}{(2a-2)(2a-1)2a(2a+1)2b(2b+1)(2c+1)(2c+2)(2c+3)} \right]^{1/2}$
$\lambda$	$\mu$	$\nu = 0$
3/2	1/2	$-\left[ \frac{(s+2)(s+3)(s-2c+1)(s-2c+2)(s-2b+1)(s-2a)}{2(2a+1)(2a+2)(2a+3)(2a+4)(2b+1)(2b+2)2c(2c+1)(2c+2)} \right]^{1/2}$
3/2	-1/2	$-\left[ \frac{(s+2)(s-2c+1)(s-2b+1)(s-2b+2)(s-2a-1)(s-2a)}{2(2a+1)(2a+2)(2a+3)(2a+4)2b(2b+1)2c(2c+1)(2c+2)} \right]^{1/2}$
1/2	1/2	$-\{3Z-2a(2a+b+3)\} \left[ \frac{(s+2)(s-2c+1)}{2 \cdot 3 \cdot 2a(2a+1)(2a+2)(2a+3)(2b+1)(2b+2)2c(2c+1)(2c+2)} \right]^{1/2}$
1/2	-1/2	$-\{3Z-2a(2a-b+2)\} \left[ \frac{(s-2b+1)(s-2a)}{2 \cdot 3 \cdot 2a(2a+1)(2a+2)(2a+3)2b(2b+1)2c(2c+1)(2c+2)} \right]^{1/2}$
-1/2	1/2	$\{3Z+2(a+1)(b-2a+1)\} \left[ \frac{(s-2b)(s-2a+1)}{2 \cdot 3(2a-1)2a(2a+1)(2a+2)(2b+1)(2b+2)2c(2c+1)(2c+2)} \right]^{1/2}$
-1/2	-1/2	$\{3Z+2(a+1)(2a-b)\} \left[ \frac{(s+1)(s-2c)}{2 \cdot 3(2a-1)2a(2a+1)(2a+2)2b(2b+1)2c(2c+1)(2c+2)} \right]^{1/2}$
-3/2	1/2	$-\left[ \frac{(s+1)(s-2c)(s-2b-1)(s-2b)(s-2a+1)(s-2a+2)}{2(2a-2)(2a-1)2a(2a+1)(2b+1)(2b+2)2c(2c+1)(2c+2)} \right]^{1/2}$
-3/2	-1/2	$\left[ \frac{s(s+1)(s-2c-1)(s-2c)(s-2b)(s-2a+1)}{2(2a-2)(2a-1)2a(2a+1)2b(2b+1)2c(2c+1)(2c+2)} \right]^{1/2}$
$\lambda$	$\mu$	$\nu = -1$
3/2	1/2	$\frac{1}{2} \left[ \frac{(s+2)(s-2c+1)(s-2c+2)(s-2c+3)(s-2a-1)(s-2a)}{(2a+1)(2a+2)(2a+3)(2a+4)(2b+1)(2b+2)(2c-1)2c(2c+1)} \right]^{1/2}$
3/2	-1/2	$\frac{1}{2} \left[ \frac{(s-2c+1)(s-2c+2)(s-2b+1)(s-2a-2)(s-2a-1)(s-2a)}{(2a+1)(2a+2)(2a+3)(2a+4)2b(2b+1)(2c-1)2c(2c+1)} \right]^{1/2}$
1/2	1/2	$-\frac{3s-2a+3}{2} \left[ \frac{(s-2c+1)(s-2c+2)(s-2b)(s-2a)}{3 \cdot 2a(2a+1)(2a+2)(2a+3)(2b+1)(2b+2)(2c-1)2c(2c+1)} \right]^{1/2}$
1/2	-1/2	$\frac{3b-3c-a}{2} \left[ \frac{(s+1)(s-2c+1)(s-2a-1)(s-2a)}{3 \cdot 2a(2a+1)(2a+2)(2a+3)2b(2b+1)(2c-1)2c(2c+1)} \right]^{1/2}$
-1/2	1/2	$\frac{3c+3b-a+2}{2} \left[ \frac{(s+1)(s-2c+1)(s-2b-1)(s-2b)}{3(2a-1)2a(2a+1)(2a+2)(2b+1)(2b+2)(2c-1)2c(2c+1)} \right]^{1/2}$
-1/2	-1/2	$-\frac{a+3b-3c+1}{2} \left[ \frac{s(s+1)(s-2b)(s-2a)}{3(2a-1)2a(2a+1)(2a+2)2b(2b+1)(2c-1)2c(2c+1)} \right]^{1/2}$
-3/2	1/2	$-\frac{1}{2} \left[ \frac{s(s+1)(s-2b-2)(s-2b-1)(s-2b)(s-2a+1)}{(2a-2)(2a-1)2a(2a+1)(2b+1)(2b+2)(2c-1)2c(2c+1)} \right]^{1/2}$
-3/2	-1/2	$\frac{1}{2} \left[ \frac{(s-1)s(s+1)(s-2c)(s-2b-1)(s-2b)}{(2a-2)(2a-1)2a(2a+1)2b(2b+1)(2c-1)2c(2c+1)} \right]^{1/2}$

ТАБЛИЦА 10.5

$$\begin{Bmatrix} a + \lambda & b + \mu & c + \nu \\ a & b & c \\ 3/2 & 3/2 & 1 \end{Bmatrix}$$

$\lambda$	$\mu$	$\nu = 1$
3/2	3/2	$\left[ \frac{3(s+5)!(s-2c+2)!(s-2b+1)(s-2a+1)(2a)!(2b)!(2c)!}{2 \cdot 5(s+1)!(s-2c)!(2a+4)!(2b+4)!(2c+3)!} \right]^{1/2}$
3/2	1/2	$(b-3a+3c) \left[ \frac{(s+4)!(s-2c+1)(s-2b+2)(2a)!(2b-1)!(2c)!}{2 \cdot 5(s+1)!(s-2b)!(2a+4)!(2b+3)!(2c+3)!} \right]^{1/2}$
3/2	-1/2	$-(b+3a-3c+1) \left[ \frac{(s+3)!(s-2b+3)!(s-2a)(2a)!(2b-2)!(2c)!}{2 \cdot 5(s+1)!(s-2b)!(2a+4)!(2b+2)!(2c+3)!} \right]^{1/2}$
3/2	-3/2	$-\left[ \frac{3(s+2)(s-2c)(s-2b+4)!(s-2a)!(2a)!(2b-3)!(2c)!}{2 \cdot 5(s-2b)!(s-2a-2)!(2a+4)!(2b+1)!(2c+3)!} \right]^{1/2}$
1/2	3/2	$-(a-3b+3c) \left[ \frac{(s+4)!(s-2c+1)(s-2a+2)(2a-1)!(2b)!(2c)!}{2 \cdot 5(s+1)!(s-2a)!(2a+3)!(2b+4)!(2c+3)!} \right]^{1/2}$
1/2	1/2	$\{(s-2c)(s+6c+9)-2(s-2b)(s-2a)\} \left[ \frac{(s+3)!(s-2b+1)(s-2a+1)(2a-1)!(2b-1)!(2c)!}{2 \cdot 3 \cdot 5(s+1)!(2a+3)!(2b+3)!(2c+3)!} \right]^{1/2}$
1/2	-1/2	$\{(s-2a+1)(a-b+7c+8)-2(s+1)(s-2c+1)\} \left[ \frac{(s+2)(s-2c)(s-2b+2)(2a-1)!(2b-2)!(2c)!}{2 \cdot 3 \cdot 5(s-2b)!(2a+3)!(2b+2)!(2c+3)!} \right]^{1/2}$
1/2	-3/2	$-(a+3b+3c+3) \left[ \frac{(s-2c)!(s-2b+3)!(s-2a)(2a-1)!(2b-3)!(2c)!}{2 \cdot 5(s-2c-2)!(s-2b)!(2a+3)!(2b+1)!(2c+3)!} \right]^{1/2}$
-1/2	3/2	$-(a+3b-3c+1) \left[ \frac{(s+3)!(s-2b)(s-2a+3)!(2a-2)!(2b)!(2c)!}{2 \cdot 5(s+1)!(s-2a)!(2a+2)!(2b+4)!(2c+3)!} \right]^{1/2}$
-1/2	1/2	$-\{(s-2b+1)(b-a+7c+8)-2(s+1)(s-2c+1)\} \left[ \frac{(s+2)(s-2c)(s-2a+2)(2a-2)!(2b-1)!(2c)!}{2 \cdot 3 \cdot 5(s-2a)!(2a+2)!(2b+3)!(2c+3)!} \right]^{1/2}$
-1/2	-1/2	$-\{(s+2)(a+b-7c-7)-2(s-2b)(s-2a)\} \left[ \frac{(s-2c)!(s-2b+1)(s-2a+1)(2a-2)!(2b-2)!(2c)!}{2 \cdot 3 \cdot 5(s-2c-2)!(2a+2)!(2b+2)!(2c+3)!} \right]^{1/2}$
-1/2	-3/2	$-(3b-a+3c+2) \left[ \frac{(s+1)(s-2c)!(s-2b+2)!(2a-2)!(2b-3)!(2c)!}{2 \cdot 5(s-2c-3)!(s-2b)!(2a+2)!(2b+1)!(2c+3)!} \right]^{1/2}$
-3/2	3/2	$\left[ \frac{3(s+2)(s-2c)(s-2b)!(s-2a+4)!(2a-3)!(2b)!(2c)!}{2 \cdot 5(s-2b-2)!(s-2a)!(2a+1)!(2b+1)!(2b+4)!(2c+3)!} \right]^{1/2}$
-3/2	1/2	$-(b+3a+3c+3) \left[ \frac{(s-2c)!(s-2b)(s-2a+3)!(2a-3)!(2b-1)!(2c)!}{2 \cdot 5(s-2c-2)!(s-2a)!(2a+1)!(2b+3)!(2c+3)!} \right]^{1/2}$
-3/2	-1/2	$(3a-b+3c+2) \left[ \frac{(s+1)(s-2c)!(s-2a+2)!(2a-3)!(2b-2)!(2c)!}{2 \cdot 5(s-2c-3)!(s-2a)!(2a+1)!(2b+2)!(2c+3)!} \right]^{1/2}$
-3/2	-3/2	$-\left[ \frac{3(s+1)!(s-2c)!(s-2b+1)(s-2a+1)(2a-3)!(2b-3)!(2c)!}{2 \cdot 5(s-1)!(s-2c-4)!(2a+1)!(2b+1)!(2c+3)!} \right]^{1/2}$
$\lambda$	$\mu$	$\nu = 0$
3/2	-3/2	$(a-b) \left[ \frac{3(s+4)!(s-2c+3)!(2a)!(2b)!(2c-1)!}{5(s+1)!(s-2c)!(2a+4)!(2b+4)!(2c+2)!} \right]^{1/2}$
3/2	1/2	$(3a-b+3) \left[ \frac{(s+3)!(s-2c+2)!(s-2b+1)(s-2a)(2a)!(2b-1)!(2c-1)!}{5(s+1)!(s-2c)!(2a+4)!(2b+3)!(2c+2)!} \right]^{1/2}$
3/2	-1/2	$(3a+b+4) \left[ \frac{(s+2)(s-2c+1)(s-2b+2)!(s-2a)!(2a)!(2b-2)!(2c-1)!}{5(s-2b)!(s-2a-2)!(2a+4)!(2b+2)!(2c+2)!} \right]^{1/2}$
3/2	-3/2	$(a+b+1) \left[ \frac{3(s-2b+3)!(s-2a)!(2a)!(2b-3)!(2c-1)!}{5(s-2b)!(s-2a-3)!(2a+4)!(2b+1)!(2c+2)!} \right]^{1/2}$
1/2	3/2	$(3b-a+3) \left[ \frac{(s+3)!(s-2c+2)!(s-2b)(s-2a+1)(2a-1)!(2b)!(2c-1)!}{5(s+1)!(s-2c)!(2a+3)!(2b+4)!(2c+2)!} \right]^{1/2}$

ТАБЛИЦА 10.5 (продолжение)

$\lambda$	$\mu$	$\nu = 0$
1/2	1/2	$(a - b) \{3Z - 2ab\} \left[ \frac{(s+2)(s-2c+1)(2a-1)!(2b-1)!(2c-1)!}{3 \cdot 5(2a+3)!(2b+3)!(2c+2)!} \right]^{1/2}$
1/2	-1/2	$(a+b+1) \{3Z+2a(b+1)\} \left[ \frac{(s-2b+1)(s-2a)(2a-1)!(2b-2)!(2c-1)!}{3 \cdot 5(2a+3)!(2b+2)!(2c+2)!} \right]^{1/2}$
1/2	-3/2	$(3b+a) \left[ \frac{(s+1)(s-2c)(s-2b+2)!(s-2a)!(2b-3)!(2a-1)!(2c-1)!}{5(s-2b)!(s-2a-2)!(2a+3)!(2b+1)!(2c+2)!} \right]^{1/2}$
-1/2	3/2	$-(3b+a+4) \left[ \frac{(s+2)(s-2c+1)(s-2b)!(s-2a+2)!(2a-2)!(2b)!(2c-1)!}{5(s-2a)!(s-2b-2)!(2a+2)!(2b+4)!(2c+2)!} \right]^{1/2}$
-1/2	1/2	$(a+b+1) \{3Z+2b(a+1)\} \left[ \frac{(s-2b)(s-2a+1)(2a-2)!(2b-1)!(2c-1)!}{3 \cdot 5(2a+2)!(2b+3)!(2c+2)!} \right]^{1/2}$
-1/2	-1/2	$(b-a) \{3Z-2(a+1)(b+1)\} \left[ \frac{(s+1)(s-2c)(2a-2)!(2b-2)!(2c-1)!}{3 \cdot 5(2a+2)!(2b+2)!(2c+2)!} \right]^{1/2}$
-1/2	-3/2	$-(a-3b+1) \left[ \frac{(s+1)!(s-2c)!(s-2b+1)(s-2a)(2a-2)!(2b-3)!(2c-1)!}{5(s-1)!(s-2c-2)!(2a+2)!(2b+1)!(2c+2)!} \right]^{1/2}$
-3/2	3/2	$(a+b+1) \left[ \frac{3(s-2b)!(s-2a+3)!(2a-3)!(2b)!(2c-1)!}{5(s-2b-3)!(s-2a)!(2a+1)!(2b+4)!(2c+2)!} \right]^{1/2}$
-3/2	1/2	$-(3a+b) \left[ \frac{(s+1)(s-2c)(s-2b)!(s-2a+2)!(2a-3)!(2b-1)!(2c-1)!}{5(s-2b-2)!(s-2a)!(2a+1)!(2b+3)!(2c+2)!} \right]^{1/2}$
-3/2	-1/2	$-(b-3a+1) \left[ \frac{(s+1)!(s-2c)!(s-2b)(s-2a+1)(2a-3)!(2b-2)!(2c-1)!}{5(s-1)!(s-2c-2)!(2a+1)!(2b+2)!(2c+2)!} \right]^{1/2}$
-3/2	-3/2	$(b-a) \left[ \frac{3(s+1)!(s-2c)!(2a-3)!(2b-3)!(2c-1)!}{5(s-2)!(s-2c-3)!(2a+1)!(2b+1)!(2c+2)!} \right]^{1/2}$
$\lambda$	$\mu$	$\nu = -1$
3/2	3/2	$-\left[ \frac{3(s+3)!(s-2c+4)!(s-2b)(s-2a)(2a)!(2b)!(2c-2)!}{2 \cdot 5(s+1)!(s-2c)!(2a+4)!(2b+4)!(2c+1)!} \right]^{1/2}$
3/2	1/2	$-(3a-b+3c+3) \left[ \frac{(s+2)(s-2c+3)!(s-2a)!(2a)!(2b-1)!(2c-2)!}{2 \cdot 5(s-2c)!(s-2a-2)!(2a+4)!(2b+3)!(2c+1)!} \right]^{1/2}$
3/2	-1/2	$-(3a+b+3c+4) \left[ \frac{(s-2c+2)!(s-2b+1)(s-2a)!(2a)!(2b-2)!(2c-2)!}{2 \cdot 5(s-2c)!(s-2a-3)!(2a+4)!(2b+2)!(2c+1)!} \right]^{1/2}$
3/2	-3/2	$-\left[ \frac{3(s+1)(s-2c+1)(s-2b+2)!(s-2a)!(2a)!(2b-3)!(2c-2)!}{2 \cdot 5(s-2b)!(s-2a-4)!(2a+4)!(2b+1)!(2c+1)!} \right]^{1/2}$
1/2	3/2	$(3b-a+3c+3) \left[ \frac{(s+2)(s-2c+3)!(s-2b)!(2a-1)!(2b)!(2c-2)!}{2 \cdot 5(s-2c)!(s-2b-2)!(2a+3)!(2b+4)!(2c+1)!} \right]^{1/2}$
1/2	1/2	$\times \left[ \frac{\{(s+1)(a+b-7c+2)-2(s-2b+1)(s-2a+1)\} \times (s-2c+2)!(s-2b)(s-2a)(2a-1)!(2b-1)!(2c-2)!}{2 \cdot 3 \cdot 5(s-2c)!(2a+3)!(2b+3)!(2c+1)!} \right]^{1/2}$
1/2	-1/2	$\times \left[ \frac{\{(s-2b)(b-a+7c-1)-2(s+2)(s-2c)\} \times (s+1)(s-2c+1)(s-2a)!(2a-1)!(2b-2)!(2c-2)!}{2 \cdot 3 \cdot 5(s-2a-2)!(2a+3)!(2b+2)!(2c+1)!} \right]^{1/2}$
1/2	-3/2	$-(a+3b-3c) \left[ \frac{(s+1)!(s-2b+1)(s-2a)!(2a-1)!(2b-3)!(2c-2)!}{2 \cdot 5(s-1)!(s-2a-3)!(2a+3)!(2b+1)!(2c+1)!} \right]^{1/2}$
-1/2	3/2	$-(3b+a+3c+4) \left[ \frac{(s-2c+2)!(s-2b)!(s-2a+1)(2a-2)!(2b)!(2c-2)!}{2 \cdot 5(s-2c)!(s-2b-3)!(2a+2)!(2b+4)!(2c+1)!} \right]^{1/2}$
-1/2	1/2	$\times \left[ \frac{\{(s-2a)(a-b+7c-1)-2(s+2)(s-2c)\} \times (s+1)(s-2c+1)(s-2b)!(2a-2)!(2b-1)!(2c-2)!}{2 \cdot 3 \cdot 5(s-2b-2)!(2a+2)!(2b+3)!(2c+1)!} \right]^{1/2}$

ТАБЛИЦА 10.5 (продолжение)

$\lambda$	$\mu$	$\nu = -1$
-1/2	-1/2	$\{(s-2c+1)(a+b+7c)-2(s-2b+1)(s-2a+1)\} \times$ $\times \left[ \frac{(s+1)!(s-2b)(s-2a)(2a-2)!(2b-2)!(2c-2)!}{2 \cdot 3 \cdot 5 (s-1)!(2a+2)!(2b+2)!(2c+1)!} \right]^{1/2}$
-1/2	-3/2	$(a-3b+3c+1) \left[ \frac{(s+1)!(s-2c)(s-2a)!(2a-2)!(2b-3)!(2c-2)!}{2 \cdot 5 (s-2)!(s-2a-2)!(2a+2)!(2b+1)!(2c+1)!} \right]^{1/2}$
-3/2	3/2	$\left[ \frac{3(s+1)(s-2c+1)(s-2b)!(s-2a+2)!(2a-3)!(2b)!(2c-2)!}{2 \cdot 5 (s-2b-4)!(s-2a)!(2a+1)!(2b+4)!(2c+1)!} \right]^{1/2}$
-3/2	1/2	$-(b+3a-3c) \left[ \frac{(s+1)!(s-2b)!(s-2a+1)(2a-3)!(2b-1)!(2c-2)!}{2 \cdot 5 (s-1)!(s-2b-3)!(2a+1)!(2b+3)!(2c+1)!} \right]^{1/2}$
-3/2	-1/2	$-(b-3a+3c+1) \left[ \frac{(s+1)!(s-2c)(s-2b)!(2a-3)!(2b-2)!(2c-2)!}{2 \cdot 5 (s-2)!(s-2b-2)!(2a+1)!(2b+2)!(2c+1)!} \right]^{1/2}$
-3/2	-3/2	$\left[ \frac{3(s+1)!(s-2c)!(s-2b)(s-2a)(2a-3)!(2b-3)!(2c-2)!}{2 \cdot 5 (s-3)!(s-2c-2)!(2a+1)!(2b+1)!(2c+1)!} \right]^{1/2}$

ТАБЛИЦА 10.6

$$\begin{Bmatrix} a+\lambda & b+\mu & c+\nu \\ a & b & c \\ 5/2 & 3/2 & 1 \end{Bmatrix}$$

$\lambda$	$\mu$	$\nu = 1$
5/2	3/2	$\left[ \frac{(s+6)!(s-2c+3)!(s-2b+2)!(2a)!(2b)!(2c)!}{2 \cdot 3 (s+1)!(s-2c)!(s-2b)!(2a+6)!(2b+4)!(2c+3)!} \right]^{1/2}$
5/2	1/2	$\left[ \frac{(s+5)!(s-2c+2)!(s-2b+3)!(s-2a)(2a)!(2b-1)!(2c)!}{2 (s+1)!(s-2c)!(s-2b)!(2a+6)!(2b+3)!(2c+3)!} \right]^{1/2}$
5/2	-1/2	$\left[ \frac{(s+4)!(s-2c+1)(s-2b+4)!(s-2a)!(2a)!(2b-2)!(2c)!}{2 (s+1)!(s-2b)!(s-2a-2)!(2a+6)!(2b+2)!(2c+3)!} \right]^{1/2}$
5/2	-3/2	$\left[ \frac{(s+3)!(s-2b+5)!(s-2a)!(2a)!(2b-3)!(2c)!}{2 \cdot 3 (s+1)!(s-2b)!(s-2a-3)!(2a+6)!(2b+1)!(2c+3)!} \right]^{1/2}$
3/2	3/2	$(5b-a-5c) \left[ \frac{(s+5)!(s-2c+2)!(s-2b+1)(s-2a+1)(2a-1)!(2b)!(2c)!}{2 \cdot 3 \cdot 5 (s+1)!(s-2c)!(2a+5)!(2b+4)!(2c+3)!} \right]^{1/2}$
3/2	1/2	$\{2a(3a-b-3c)+5(s-2c)(s-2a+1)\} \left[ \frac{(s+4)!(s-2c+1)(s-2b+2)!(2a-1)!(2b-1)!(2c)!}{2 \cdot 5 (s+1)!(s-2b)!(2a+5)!(2b+3)!(2c+3)!} \right]^{1/2}$
3/2	-1/2	$\{2a(3a+b-3c+1)+5(s-2c)(s-2a+1)\} \left[ \frac{(s+3)!(s-2b+3)!(s-2a)(2a-1)!(2b-2)!(2c)!}{2 \cdot 5 (s+1)!(s-2b)!(2a+5)!(2b+2)!(2c+3)!} \right]^{1/2}$
3/2	-3/2	$(a+5b+5c+5) \left[ \frac{(s+2)(s-2c)(s-2b+4)!(s-2a)!(2a-1)!(2b-3)!(2c)!}{2 \cdot 3 \cdot 5 (s-2b)!(s-2a-2)!(2a+5)!(2b+1)!(2c+3)!} \right]^{1/2}$
1/2	3/2	$\{(2c-2b-1)(a-2b+2c)-(s-2c)(s-2b+1)\} \times$ $\times \left[ \frac{(s+4)!(s-2c+1)(s-2a+2)!(2a-2)!(2b)!(2c)!}{3 \cdot 5 (s+1)!(s-2a)!(2a+4)!(2b+4)!(2c+3)!} \right]^{1/2}$
1/2	1/2	$\{a(2a-1)(3c-3a-b)-4(s-2c)(s-2a+1)(2a-1)+(s-2c-1)(s-2c)(5b+5c-a+8)\} \times$ $\times \left[ \frac{(s+3)!(s-2b+1)(s-2a+1)(2a-2)!(2b-1)!(2c)!}{5 (s+1)!(2a+4)!(2b+3)!(2c+3)!} \right]^{1/2}$
1/2	-1/2	$-\{a(2a-1)(3c-3a+b+1)-4(s-2c)(s-2a+1)(2a-1)+(s-2a+1)(s-2a+2) \times$ $\times (5c-5b-a+3)\} \left[ \frac{(s+2)(s-2c)(s-2b+2)!(2a-2)!(2b-2)!(2c)!}{5 (s-2b)!(2a+4)!(2b+2)!(2c+3)!} \right]^{1/2}$
1/2	-3/2	$\{(2c+2b+1)(a+2b+2c+2)+(s+2)(s-2a+1)\} \times$ $\times \left[ \frac{(s-2c)!(s-2b+3)!(s-2a)(2a-2)!(2b-3)!(2c)!}{3 \cdot 5 (s-2c-2)!(s-2b)!(2a+4)!(2b+1)!(2c+3)!} \right]^{1/2}$

ТАБЛИЦА 10.6 (продолжение)

$\lambda$	$\mu$	$\nu = 1$
-1/2	3/2	$-\{(2c-2b-1)(2c-2b-a-1)-(s-2c)(s-2b+1)\} \times$ $\times \left[ \frac{(s+3)!(s-2b)(s-2a+3)(2a-3)!(2b)!(2c)!}{3 \cdot 5(s+1)!(s-2a)!(2a+3)!(2b+4)!(2c+3)!} \right]^{1/2}$
-1/2	1/2	$\{(a+1)(2a+1)(3c+3a-b+3)-4(s+2)(s-2b+1)(2a+1)+(s-2b+1)(s-2b+2) \times$ $\times (5b+5c+a+9)\} \left[ \frac{(s+2)(s-2c)(s-2a+2)!(2a-3)!(2b-1)!(2c)!}{5(s-2a)!(2a+3)!(2b+3)!(2c+3)!} \right]^{1/2}$
-1/2	-1/2	$\{(a+1)(2a+1)(3c+3a+b+4)-4(s+2)(s-2b+1)(2a+1)+(s+2)(s+3) \times$ $\times (5c+a-5b+4)\} \left[ \frac{(s-2c)!(s-2b+1)(s-2a+1)(2a-3)!(2b-2)!(2c)!}{5(s-2c-2)!(2a+3)!(2b+2)!(2c+3)!} \right]^{1/2}$
-1/2	-3/2	$\{(2c+2b+1)(2b-a+2c+1)+(s+2)(s-2a+1)\} \times$ $\times \left[ \frac{(s+1)(s-2c)!(s-2b+2)!(2a-3)!(2b-3)!(2c)!}{3 \cdot 5(s-2c-3)!(s-2b)!(2a+3)!(2b+1)!(2c+3)!} \right]^{1/2}$
-3/2	3/2	$(5b+a-5c+1) \left[ \frac{(s+2)(s-2c)(s-2b)!(s-2a+4)!(2a-4)!(2b)!(2c)!}{2 \cdot 3 \cdot 5(s-2b-2)!(s-2a)!(2a+2)!(2b+4)!(2c+3)!} \right]^{1/2}$
-3/2	1/2	$-\{(2a+2)(3a+b+3c+3)-5(s+2)(s-2b+1)\} \times$ $\times \left[ \frac{(s-2c)!(s-2b)(s-2a+3)!(2a-4)!(2b-1)!(2c)!}{2 \cdot 5(s-2c-2)!(s-2a)!(2a+2)!(2b+3)!(2c+3)!} \right]^{1/2}$
-3/2	-1/2	$\{(2a+2)(3a-b+3c+2)-5(s+2)(s-2b+1)\} \times$ $\times \left[ \frac{(s+1)(s-2c)!(s-2a+2)!(2a-4)!(2b-2)!(2c)!}{2 \cdot 5(s-2c-3)!(s-2a)!(2a+2)!(2b+2)!(2c+3)!} \right]^{1/2}$
-3/2	-3/2	$(5b+5c-a+4) \left[ \frac{(s+1)!(s-2c)!(s-2b+1)(s-2a+1)(2a-4)!(2b-3)!(2c)!}{2 \cdot 3 \cdot 5(s-1)!(s-2c-4)!(2a+2)!(2b+1)!(2c+3)!} \right]^{1/2}$
-5/2	3/2	$-\left[ \frac{(s-2c)!(s-2b)!(s-2a+5)!(2a-5)!(2b)!(2c)!}{2 \cdot 3(s-2c-2)!(s-2b-3)!(s-2a)!(2a+1)!(2b+4)!(2c+3)!} \right]^{1/2}$
-5/2	1/2	$\left[ \frac{(s+1)(s-2c)!(s-2b)!(s-2a+4)!(2a-5)!(2b-1)!(2c)!}{2(s-2c-3)!(s-2b-2)!(s-2a)!(2a+1)!(2b+3)!(2c+3)!} \right]^{1/2}$
-5/2	-1/2	$-\left[ \frac{(s+1)!(s-2c)!(s-2b)(s-2a+3)!(2a-5)!(2b-2)!(2c)!}{2(s-1)!(s-2c-4)!(s-2a)!(2a+1)!(2b+2)!(2c+3)!} \right]^{1/2}$
-5/2	-3/2	$\left[ \frac{(s+1)!(s-2c)!(s-2a+2)!(2a-5)!(2b-3)!(2c)!}{2 \cdot 3(s-2)!(s-2c-5)!(s-2a)!(2a+1)!(2b+1)!(2c+3)!} \right]^{1/2}$
$\lambda$	$\mu$	$\nu = 0$
5/2	3/2	$-\left[ \frac{(s+5)!(s-2c+4)!(s-2b+1)(s-2a)(2a)!(2b)!(2c-1)!}{3(s+1)!(s-2c)!(2a+6)!(2b+4)!(2c+2)!} \right]^{1/2}$
5/2	1/2	$-\left[ \frac{(s+4)!(s-2c+3)!(s-2b+2)!(s-2a)!(2a)!(2b-1)!(2c-1)!}{(s+1)!(s-2c)!(s-2b)!(s-2a-2)!(2a+6)!(2b+3)!(2c+2)!} \right]^{1/2}$
5/2	-1/2	$-\left[ \frac{(s+3)!(s-2c+2)!(s-2b+3)!(s-2a)!(2a)!(2b-2)!(2c-1)!}{(s+1)!(s-2c)!(s-2b)!(s-2a-3)!(2a+6)!(2b+2)!(2c+2)!} \right]^{1/2}$
5/2	-3/2	$-\left[ \frac{(s+2)(s-2c+1)(s-2b+4)!(s-2a)!(2a)!(2b-3)!(2c-1)!}{3(s-2b)!(s-2a-4)!(2a+6)!(2b+1)!(2c+2)!} \right]^{1/2}$
3/2	3/2	$\{2(b-a)(3a-5b+5c)+5(s-2b)(s-2b+1)\} \left[ \frac{(s+4)!(s-2c+3)!(2a-1)!(2b)!(2c-1)!}{3 \cdot 5(s+1)!(s-2c)!(2a+5)!(2b+4)!(2c+2)!} \right]^{1/2}$
3/2	1/2	$\{3(s-2b)(s-2a-1)-2(s+4)(s-2c)+2a(2a+5)\} \times$ $\times \left[ \frac{(s+3)!(s-2c+2)!(s-2b+1)(s-2a)(2a-1)!(2b-1)!(2c-1)!}{5(s+1)!(s-2c)!(2a+5)!(2b+3)!(2c+2)!} \right]^{1/2}$
3/2	-1/2	$\{-3(s+1)(s-2c+2)+2(s-2b+3)(s-2a+1)+2a(2a+5)\} \times$ $\times \left[ \frac{(s+2)(s-2c+1)(s-2b+2)!(s-2a)!(2a-1)!(2b-2)!(2c-1)!}{5(s-2b)!(s-2a-2)!(2a+5)!(2b+2)!(2c+2)!} \right]^{1/2}$

$\lambda$	$\mu$	$\nu=0$
3/2	-3/2	$\{-2(a+b+1)(3a+5b+5c+5)+5(s+1)(s+2)\} \times$ $\times \left[ \frac{(s-2b+3)!(s-2a)!(2a-1)!(2b-3)!(2c-1)!}{3 \cdot 5(s-2b)!(s-2a-3)!(2a+5)!(2b+1)!(2c+2)!} \right]^{1/2}$
1/2	3/2	$\{4(s+4)(s-2c)-6(s-2b-1)(s-2a)-6(2a-1)(a+2)\} \times$ $\times \left[ \frac{(s+3)!(s-2c+2)!(s-2b)(s-2a+1)(2a-2)!(2b)!(2c-1)!}{2 \cdot 3 \cdot 5(s+1)!(s-2c)!(2a+4)!(2b+4)!(2c+2)!} \right]^{1/2}$
1/2	1/2	$\{(s+3)(s-2c) - (s+4)(s-2c-1) + 2(2a-1)(a+2)\} - (s-2b)(s-2a)(a+3b+3c+5) \times$ $\times (3c-a-3b-1) \left[ \frac{(s+2)(s-2c+1)(2a-2)!(2b-1)!(2c-1)!}{2 \cdot 5(2a+4)!(2b+3)!(2c+2)!} \right]^{1/2}$
1/2	-1/2	$-\{(s-2b+2)(s-2a+1)[(s-2b+3)(s-2a+2)+2(2a-1)(a+2)] - (s+1)(s-2c+1) \times$ $\times (a-3b+3c+2)(3c-a+3b+2) \left[ \frac{(s-2b+1)(s-2a)(2a-2)!(2b-2)!(2c-1)!}{2 \cdot 5(2a+4)!(2b+2)!(2c+2)!} \right]^{1/2}$
1/2	-3/2	$\{4(s-2b+3)(s-2a+1)-6s(s-2c+1)+6(2a-1)(a+2)\} \times$ $\times \left[ \frac{(s+1)(s-2c)(s-2b+2)!(s-2a)!(2a-2)!(2b-3)!(2c-1)!}{2 \cdot 3 \cdot 5(s-2b)!(s-2a-2)!(2a+4)!(2b+1)!(2c+2)!} \right]^{1/2}$
-1/2	3/2	$\{4(s-2b+1)(s-2a+3)-6(s+1)(s-2c+2)+6(2a+3)(a-1)\} \times$ $\times \left[ \frac{(s+2)(s-2c+1)(s-2b)!(s-2a+2)!(2a-3)!(2b)!(2c-1)!}{2 \cdot 3 \cdot 5(s-2b-2)!(s-2a)!(2a+3)!(2b+4)!(2c+2)!} \right]^{1/2}$
-1/2	1/2	$\{(s-2a+2)(s-2b+1)[(s-2a+3)(s-2b+2)+2(2a+3)(a-1)] - (s-2c+1)(s+1) \times$ $\times (-a+3b+3c+4)(a-3b+3c) \left[ \frac{(s-2b)(s-2a+1)(2a-3)!(2b-1)!(2c-1)!}{2 \cdot 5(2a+3)!(2b+3)!(2c+2)!} \right]^{1/2}$
-1/2	-1/2	$\{(s+2)(s-2c-1) - (s+3)(s-2c-2) + 2(2a+3)(a-1)\} - (s-2b)(s-2a) \times$ $\times (3c-a-3b+1)(3c+a+3b+3) \left[ \frac{(s+1)(s-2c)(2a-3)!(2b-2)!(2c-1)!}{2 \cdot 5(2a+3)!(2b+2)!(2c+2)!} \right]^{1/2}$
-1/2	-3/2	$-\{4(s+2)(s-2c-2)-6(s-2b)(s-2a-1)-6(2a+3)(a-1)\} \times$ $\times \left[ \frac{(s+1)!(s-2c)!(s-2b+1)(s-2a)(2a-3)!(2b-3)!(2c-1)!}{2 \cdot 3 \cdot 5(s-1)!(s-2c-2)!(2a+3)!(2b+1)!(2c+2)!} \right]^{1/2}$
-3/2	3/2	$\{2(a+b+1)(5c+5b+3a+8)-5(s+1)(s+2)\} \times$ $\times \left[ \frac{(s-2b)!(s-2a+3)!(2a-4)!(2b)!(2c-1)!}{3 \cdot 5(s-2b-3)!(s-2a)!(2a+2)!(2b+4)!(2c+2)!} \right]^{1/2}$
-3/2	1/2	$\{-3s(s-2c+1)+2(s-2b+1)(s-2a+3)+2(a+1)(2a-3)\} \times$ $\times \left[ \frac{(s+1)(s-2c)(s-2b)!(s-2a+2)!(2a-4)!(2b-1)!(2c-1)!}{5(s-2b-2)!(s-2a)!(2a+2)!(2b+3)!(2c+2)!} \right]^{1/2}$
-3/2	-1/2	$-\{3(s-2b-1)(s-2a)-2(s+2)(s-2c-2)+2(a+1)(2a-3)\} \times$ $\times \left[ \frac{(s+1)!(s-2c)!(s-2b)(s-2a+1)(2a-4)!(2b-2)!(2c-1)!}{5(s-1)!(s-2c-2)!(2a+2)!(2b+2)!(2c+2)!} \right]^{1/2}$
-3/2	-3/2	$\{2(a-b)(5b-3a+5c+2)+5(s-2a)(s-2a+1)\} \times$ $\times \left[ \frac{(s+1)!(s-2c)!(2a-4)!(2b-3)!(2c-1)!}{3 \cdot 5(s-2)!(s-2c-3)!(2a+2)!(2b+1)!(2c+2)!} \right]^{1/2}$
-5/2	3/2	$-\left[ \frac{(s+1)(s-2c)(s-2b)!(s-2a+4)!(2a-5)!(2b)!(2c-1)!}{3(s-2b-4)!(s-2a)!(2a+1)!(2b+4)!(2c+2)!} \right]^{1/2}$
-5/2	1/2	$\left[ \frac{(s+1)!(s-2c)!(s-2b)!(s-2a+3)!(2a-5)!(2b-1)!(2c-1)!}{(s-1)!(s-2c-2)!(s-2b-3)!(s-2a)!(2a+1)!(2b+3)!(2c+2)!} \right]^{1/2}$
-5/2	-1/2	$-\left[ \frac{(s+1)!(s-2c)!(s-2b)!(s-2a+2)!(2a-5)!(2b-2)!(2c-1)!}{(s-2)!(s-2c-3)!(s-2b-2)!(s-2a)!(2a+1)!(2b+2)!(2c+2)!} \right]^{1/2}$
-5/2	-3/2	$\left[ \frac{(s+1)!(s-2c)!(s-2b)!(s-2a+1)(2a-5)!(2b-3)!(2c-1)!}{3(s-3)!(s-2c-4)!(2a+1)!(2b+1)!(2c+2)!} \right]^{1/2}$



ТАБЛИЦА 10.6 (продолжение)

$\lambda$	$\mu$	$v = -1$
5/2	3/2	$\left[ \frac{(s+4)! (s-2c+5)! (s-2a)! (2a)! (2b)! (2c-2)!}{2 \cdot 3 (s+1)! (s-2c)! (s-2a-2)! (2a+6)! (2b+4)! (2c+1)!} \right]^{1/2}$
5/2	1/2	$\left[ \frac{(s+3)! (s-2c+4)! (s-2b+1) (s-2a)! (2a)! (2b-1)! (2c-2)!}{2 (s+1)! (s-2c)! (s-2a-3)! (2a+6)! (2b+3)! (2c+1)!} \right]^{1/2}$
5/2	-1/2	$\left[ \frac{(s+2) (s-2c+3)! (s-2b+2)! (s-2a)! (2a)! (2b-2)! (2c-2)!}{2 (s-2c)! (s-2b)! (s-2a-4)! (2a+6)! (2b+2)! (2c+1)!} \right]^{1/2}$
5/2	-3/2	$\left[ \frac{(s-2c+2)! (s-2b+3)! (s-2a)! (2a)! (2b-3)! (2c-2)!}{2 \cdot 3 (s-2c)! (s-2b)! (s-2a-5)! (2a+6)! (2b+1)! (2c+1)!} \right]^{1/2}$
3/2	3/2	$-(5b-a+5c+3) \left[ \frac{(s+3)! (s-2c+4)! (s-2b) (s-2a) (2a-1)! (2b)! (2c-2)!}{2 \cdot 3 \cdot 5 (s+1)! (s-2c)! (2a+5)! (2b+4)! (2c+1)!} \right]^{1/2}$
3/2	1/2	$\{2a(3a-b+3c+3) - 5(s+1)(s-2b)\} \left[ \frac{(s+2)(s-2c+3)! (s-2a)! (2a-1)! (2b-1)! (2c-2)!}{2 \cdot 5 (s-2c)! (s-2a-2)! (2a+5)! (2b+3)! (2c+1)!} \right]^{1/2}$
3/2	-1/2	$\{2a(3a+b+3c+4) - 5(s+1)(s-2b)\} \left[ \frac{(s-2c+2)! (s-2b-1) (s-2a)! (2a-1)! (2b-2)! (2c-2)!}{2 \cdot 5 (s-2c)! (s-2a-3)! (2a+5)! (2b+2)! (2c+1)!} \right]^{1/2}$
3/2	-3/2	$-(5c-a-5b) \left[ \frac{(s+1) (s-2c+1) (s-2b+2)! (s-2a)! (2a-1)! (2b-3)! (2c-2)!}{2 \cdot 3 \cdot 5 (s-2b)! (s-2a-4)! (2a+5)! (2b+1)! (2c+1)!} \right]^{1/2}$
1/2	3/2	$\begin{aligned} & \{ (2b+2c+3)(2b-a+2c+2) + (s+1)(s-2a) \} \times \\ & \times \left[ \frac{(s+2) (s-2c+3)! (s-2b)! (2a-2)! (2b)! (2c-2)!}{3 \cdot 5 (s-2c)! (s-2b-2)! (2a+4)! (2b+4)! (2c+1)!} \right]^{1/2} \end{aligned}$
1/2	1/2	$\{a(2a-1)(3a+b+3c+3) - 4(s+1)(s-2b)(2a-1) - s(s+1)(5b-5c-a+3)\} \times$ $\times \left[ \frac{(s-2c+2)! (s-2b) (s-2a) (2a-2)! (2b-1)! (2c-2)!}{5 (s-2c)! (2a+4)! (2b+3)! (2a+1)!} \right]^{1/2}$
1/2	-1/2	$\{a(2a-1)(3a-b+3c+2) - 4(s+1)(s-2b)(2a-1) + (s-2b-1)(s-2b)(5b+5c+a+2)\} \times$ $\times \left[ \frac{(s+1) (s-2c+1) (s-2a)! (2a-2)! (2b-2)! (2c-2)!}{5 (s-2a-2)! (2a+4)! (2b+2)! (2c+1)!} \right]^{1/2}$
1/2	-3/2	$\begin{aligned} & \{(2c-2b+1)(2c-a-2b) - (s-2b)(s-2c+1)\} \times \\ & \times \left[ \frac{(s+1)! (s-2b+1) (s-2a)! (2a-2)! (2b-3)! (2c-2)!}{3 \cdot 5 (s-1)! (s-2a-3)! (2a+4)! (2b+1)! (2c+1)!} \right]^{1/2} \end{aligned}$
-1/2	3/2	$\begin{aligned} & - \{(2b+2c+3)(a+2b+2c+3) + (s+1)(s-2a)\} \times \\ & \times \left[ \frac{(s-2c+2)! (s-2b)! (s-2a+1) (2a-3)! (2b)! (2c-2)!}{3 \cdot 5 (s-2c)! (s-2b-3)! (2a+3)! (2b+4)! (2c+1)!} \right]^{1/2} \end{aligned}$
-1/2	1/2	$- \{(a+1)(2a+1)(b-3a+3c) - 4(s-2c+1)(s-2a)(2a+1) - (s-2a-1)(s-2a) \times$ $\times (5b-5c+a+4)\} \left[ \frac{(s+1) (s-2c+1) (s-2b)! (2a-3)! (2b-1)! (2c-2)!}{5 (s-2b-2)! (2a+3)! (2b+3)! (2c+1)!} \right]^{1/2}$
-1/2	-1/2	$- \{(a+1)(2a+1)(3c-b-3a-1) - 4(s-2c+1)(s-2a)(2a+1) - (s-2c+1)(s-2c+2) \times$ $\times (a-5b-5c-1)\} \left[ \frac{(s+1)! (s-2b) (s-2a) (2a-3)! (2b-2)! (2c-2)!}{5 (s-1)! (2a+3)! (2b+2)! (2c+1)!} \right]^{1/2}$
-1/2	-3/2	$\begin{aligned} & \{(2c-2b+1)(a-2b+2c+1) - (s-2c+1)(s-2b)\} \times \\ & \times \left[ \frac{(s+1)! (s-2c) (s-2a)! (2a-3)! (2b-3)! (2c-2)!}{3 \cdot 5 (s-2)! (s-2a-2)! (2a+3)! (2b+1)! (2c+1)!} \right]^{1/2} \end{aligned}$
-3/2	3/2	$(5b+a+5c+6) \left[ \frac{(s+1) (s-2c+1) (s-2b)! (s-2a+2)! (2a-4)! (2b)! (2c-2)!}{2 \cdot 3 \cdot 5 (s-2b-4)! (s-2a)! (2a+2)! (2b+4)! (2c+1)!} \right]^{1/2}$
-3/2	1/2	$\begin{aligned} & - (2(a+1)(3a+b-3c) + 5(s-2c+1)(s-2a)) \times \\ & \times \left[ \frac{(s+1)! (s-2b)! (s-2a+1) (2a-4)! (2b-1)! (2c-2)!}{2 \cdot 5 (s-1)! (s-2b-3)! (2a+2)! (2b+3)! (2c+1)!} \right]^{1/2} \end{aligned}$
-3/2	-1/2	$\begin{aligned} & \{2(a+1)(3a-b-3c-1) + 5(s-2c+1)(s-2a)\} \times \\ & \times \left[ \frac{(s+1)! (s-2c) (s-2b)! (2a-4)! (2b-2)! (2c-2)!}{2 \cdot 5 (s-2)! (s-2b-2)! (2a+2)! (2b+2)! (2c+1)!} \right]^{1/2} \end{aligned}$
-3/2	-3/2	$(a-5b+5c+1) \left[ \frac{(s+1)! (s-2c)! (s-2b) (s-2a) (2a-4)! (2b-3)! (2c-2)!}{2 \cdot 3 \cdot 5 (s-3)! (s-2c-2)! (2a+2)! (2b+1)! (2c+1)!} \right]^{1/2}$

ТАБЛИЦА 10.6 (продолжение)

$\lambda$	$\mu$	$\nu = -1$
-5/2	3/2	$-\left[ \frac{(s+1)!(s-2b)!(s-2a+3)!(2a-5)!(2b)!(2c-2)!}{2 \cdot 3(s-1)!(s-2b-5)!(s-2a)!(2a+1)!(2b+4)!(2c+1)!} \right]^{1/2}$
-5/2	1/2	$\left[ \frac{(s+1)!(s-2c)(s-2b)!(s-2a+2)!(2a-5)!(2b-1)!(2c-2)!}{2(s-2)!(s-2b-4)!(s-2a)!(2a+1)!(2b+3)!(2c+1)!} \right]^{1/2}$
-5/2	-1/2	$-\left[ \frac{(s+1)!(s-2c)!(s-2b)!(s-2a+1)(2a-5)!(2b-2)!(2c-2)!}{2(s-3)!(s-2c-2)!(s-2b-3)!(2a+1)!(2b+2)!(2c+1)!} \right]^{1/2}$
-5/2	-3/2	$\left[ \frac{(s+1)!(s-2c)!(s-2b)!(2a-5)!(2b-3)!(2c-2)!}{2 \cdot 3(s-4)!(s-2c-3)!(s-2b-2)!(2a+1)!(2b+1)!(2c+1)!} \right]^{1/2}$

ТАБЛИЦА 10.7

$$\begin{Bmatrix} a+\lambda & b+\mu & c+\nu \\ a & b & c \\ 1 & 1 & 0 \end{Bmatrix}$$

$\lambda$	$\mu$	$\nu = 0$
1	1	$\left[ \frac{(s+2)(s+3)(s-2c+1)(s-2c+2)}{3(2a+1)(2a+2)(2a+3)(2b+1)(2b+2)(2b+3)(2c+1)} \right]^{1/2}$
1	0	$\left[ \frac{2(s+2)(s-2c+1)(s-2b+1)(s-2a)}{3(2a+1)(2a+2)(2a+3)2b(2b+1)(2b+2)(2c+1)} \right]^{1/2}$
1	-1	$\left[ \frac{(s-2b+1)(s-2b+2)(s-2a-1)(s-2a)}{3(2a+1)(2a+2)(2a+3)(2b-1)2b(2b+1)(2c+1)} \right]^{1/2}$
0	1	$-\left[ \frac{2(s+2)(s-2c+1)(s-2b)(s-2a+1)}{3 \cdot 2a(2a+1)(2a+2)(2b+1)(2b+2)(2b+3)(2c+1)} \right]^{1/2}$
0	0	$\frac{2Z}{[3 \cdot 2a(2a+1)(2a+2)2b(2b+1)(2b+2)(2c+1)]^{1/2}}$
0	-1	$\left[ \frac{2(s+1)(s-2c)(s-2b+1)(s-2a)}{3 \cdot 2a(2a+1)(2b+2)(2b-1)2b(2b+1)(2c+1)} \right]^{1/2}$
-1	1	$\left[ \frac{(s-2b-1)(s-2b)(s-2a+1)(s-2a+2)}{3(2a-1)2a(2a+1)(2b+1)(2b+2)(2b+3)(2c+1)} \right]^{1/2}$
-1	0	$-\left[ \frac{2(s+1)(s-2c)(s-2b)(s-2a+1)}{3(2a-1)2a(2a+1)2b(2b+1)(2b+2)(2c+1)} \right]^{1/2}$
-1	-1	$\left[ \frac{s(s+1)(s-2c-1)(s-2c)}{3(2a-1)2a(2a+1)(2b-1)2b(2b+1)(2c+1)} \right]^{1/2}$

ТАБЛИЦА 10.8

$$\begin{Bmatrix} a+\lambda & b+\mu & c+\nu \\ a & b & c \\ 2 & 2 & 0 \end{Bmatrix}$$

$\lambda$	$\mu$	$\nu = 0$
2	2	$\left[ \frac{(s+5)!(s-2c+4)!(2a)!(2b)!}{5(s+1)!(s-2c)!(2a+5)!(2b+5)!(2c+1)} \right]^{1/2}$
2	1	$2 \left[ \frac{(s+4)!(s-2c+3)!(s-2b+1)(s-2a)(2a)!(2b-1)!}{5(s+1)!(s-2c)!(2a+5)!(2b+4)!(2c+1)} \right]^{1/2}$
2	0	$\left[ \frac{6(s+3)!(s-2c+2)!(s-2b+2)!(s-2a)!(2a)!(2b-2)!}{5(s+1)!(s-2c)!(s-2b)!(s-2a-2)!(2a+5)!(2b+3)!(2c+1)} \right]^{1/2}$
2	-1	$2 \left[ \frac{(s+2)(s-2c+1)(s-2b+3)!(s-2a)!(2a)!(2b-3)!}{5(s-2b)!(s-2a-3)!(2a+5)!(2b+2)!(2c+1)} \right]^{1/2}$

ТАБЛИЦА 10.8 (продолжение)

$\lambda$	$\mu$	$\nu = 0$
2	-2	$\left[ \frac{(s-2b+4)! (s-2a)! (2a)! (2b-4)!}{5(s-2b)! (s-2a-4)! (2a+5)! (2b+1)! (2c+2)!} \right]^{1/2}$
1	2	$-2 \left[ \frac{(s+4)! (s-2c+3)! (s-2b) (s-2a+1) (2a-1)! (2b)!}{5(s+1)! (s-2c)! (2a+4)! (2b+5)! (2c+1)!} \right]^{1/2}$
1	1	$4 \{Z-ab\} \left[ \frac{(s+3)! (s-2c+2)! (2a-1)! (2b-1)!}{5(s+1)! (s-2c)! (2a+4)! (2b+4)! (2c+1)!} \right]^{1/2}$
1	0	$2 \{Z+a\} \left[ \frac{6(s+2) (s-2c+1) (s-2b+1) (s-2a) (2a-1)! (2b-2)!}{5(2a+4)! (2b+3)! (2c+1)!} \right]^{1/2}$
1	-1	$4 \{Z+a(b+1)\} \left[ \frac{(s-2b+2)! (s-2a)! (2a-1)! (2b-3)!}{5(s-2b)! (s-2a-2)! (2a+4)! (2b+2)! (2c+1)!} \right]^{1/2}$
1	-2	$2 \left[ \frac{(s+1) (s-2c) (s-2b+3)! (s-2a)! (2a-1)! (2b-4)!}{5(s-2b)! (s-2a-3)! (2a+4)! (2b+1)! (2c+1)!} \right]^{1/2}$
0	2	$\left[ \frac{6(s+3)! (s-2c+2)! (s-2b)! (s-2a+2)! (2a-2)! (2b)!}{5(s+1)! (s-2c)! (s-2b-2)! (s-2a)! (2a+3)! (2b+5)! (2c+1)!} \right]^{1/2}$
0	1	$-2 \{Z+b\} \left[ \frac{6(s+2) (s-2c+1) (s-2b) (s-2a+1) (2a-2)! (2b-1)!}{5(2a+3)! (2b+4)! (2c+1)!} \right]^{1/2}$
0	0	$2 \{3Z(Z-1) - 4a(a+1)b(b+1)\} \left[ \frac{(2a-2)! (2b-2)!}{5(2a+3)! (2b+3)! (2c+1)!} \right]^{1/2}$
0	-1	$2 \{Z-b-1\} \left[ \frac{6(s+1) (s-2c) (s-2b+1) (s-2a) (2a-2)! (2b-3)!}{5(2a+3)! (2b+2)! (2c+1)!} \right]^{1/2}$
0	-2	$\left[ \frac{6(s+1)! (s-2c)! (s-2b+2)! (s-2a)! (2a-2)! (2b-4)!}{5(s-1)! (s-2c-2)! (s-2b)! (s-2a-2)! (2a+3)! (2b+1)! (2c+1)!} \right]^{1/2}$
-1	2	$-2 \left[ \frac{(s+2) (s-2c+1) (s-2b)! (s-2a+3)! (2a-3)! (2b)!}{5(s-2b-3)! (s-2a)! (2a+2)! (2b+5)! (2c+1)!} \right]^{1/2}$
-1	1	$4 \{Z+(a+1)b\} \left[ \frac{(s-2b)! (s-2a+2)! (2a-3)! (2b-1)!}{5(s-2b-2)! (s-2a)! (2a+2)! (2b+4)! (2c+1)!} \right]^{1/2}$
-1	0	$-2 \{Z-a-1\} \left[ \frac{6(s+1) (s-2c) (s-2b) (s-2a+1) (2a-3)! (2b-2)!}{5(2a+2)! (2b+3)! (2c+1)!} \right]^{1/2}$
-1	-1	$4 \{Z-(a+1)(b+1)\} \left[ \frac{(s+1)! (s-2c)! (2a-3)! (2b-3)!}{5(s-1)! (s-2c-2)! (2a+2)! (2b+2)! (2c+1)!} \right]^{1/2}$
-1	-2	$2 \left[ \frac{(s+1)! (s-2c)! (s-2b+1) (s-2a) (2a-3)! (2b-4)!}{5(s-2)! (s-2c-3)! (2a+2)! (2b+1)! (2c+1)!} \right]^{1/2}$
-2	2	$\left[ \frac{(s-2b)! (s-2a+4)! (2a-4)! (2b)!}{5(s-2b-4)! (s-2a)! (2a+1)! (2b+5)! (2c+1)!} \right]^{1/2}$
-2	1	$-2 \left[ \frac{(s+1) (s-2c) (s-2b)! (s-2a+3)! (2a-4)! (2b-1)!}{5(s-2b-3)! (s-2a)! (2a+1)! (2b+4)! (2c+1)!} \right]^{1/2}$
-2	0	$\left[ \frac{6(s+1)! (s-2c)! (s-2b)! (s-2a+2)! (2a-4)! (2b-2)!}{5(s-1)! (s-2c-2)! (s-2b-2)! (s-2a)! (2a+1)! (2b+3)! (2c+1)!} \right]^{1/2}$
-2	-1	$-2 \left[ \frac{(s+1)! (s-2c)! (s-2b) (s-2a+1) (2a-4)! (2b-3)!}{5(s-2)! (s-2c-3)! (2a+1)! (2b+2)! (2c+1)!} \right]^{1/2}$
-2	-2	$\left[ \frac{(s+1)! (s-2c)! (2a-4)! (2b-4)!}{5(s-3)! (s-2c-4)! (2a+1)! (2b+1)! (2c+1)!} \right]^{1/2}$

ТАБЛИЦА 10.9

$$\begin{Bmatrix} a + \lambda & b + \mu & c + \nu \\ a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \end{Bmatrix}$$

$\lambda$	$\mu$	$\nu = 1$
1	1	$\left[ \frac{(s+4)! (s-2c+1)! (s-2b+1)! (s-2a+1)! (2a)! (2b)! (2c)!}{3(s+1)! (2a+3)! (2b+3)! (2c+3)!} \right]^{1/2}$
1	0	$(c-a) \left[ \frac{2(s+3)! (s-2b+2)! (2a)! (2b-1)! (2c)!}{3(s+1)! (s-2b)! (2a+3)! (2b+2)! (2c+3)!} \right]^{1/2}$
1	-1	$-\left[ \frac{(s+2)(s-2c)(s-2b+3)! (s-2a)(2a)! (2b-2)! (2c)!}{3(s-2b)! (2a+3)! (2b+1)! (2c+3)!} \right]^{1/2}$
0	1	$(b-c) \left[ \frac{2(s+3)! (s-2a+2)! (2a-1)! (2b)! (2c)!}{3(s+1)! (s-2a)! (2a+2)! (2b+3)! (2c+3)!} \right]^{1/2}$
0	0	$2(c+1) \left[ \frac{(s+2)(s-2c)(s-2b+1)(s-2a+1)(2a-1)!(2b-1)!(2c)!}{3(2a+2)!(2b+2)!(2c+3)!} \right]^{1/2}$
0	-1	$-(c+b+1) \left[ \frac{2(s-2c)!(s-2b+2)!(2a-1)!(2b-2)!(2c)!}{3(s-2c-2)!(s-2b)!(2a+2)!(2b+1)!(2c+3)!} \right]^{1/2}$
-1	1	$-\left[ \frac{(s+2)(s-2c)(s-2b)(s-2a+3)!(2a-2)!(2b)!(2c)!}{3(s-2a)!(2a+1)!(2b+3)!(2c+3)!} \right]^{1/2}$
-1	0	$(a+c+1) \left[ \frac{2(s-2c)!(s-2a+2)!(2a-2)!(2b-1)!(2c)!}{3(s-2c-2)!(s-2a)!(2a+1)!(2b+2)!(2c+3)!} \right]^{1/2}$
-1	-1	$-\left[ \frac{(s+1)(s-2c)!(s-2b+1)(s-2a+1)(2a-2)!(2b-2)!(2c)!}{3(s-2c-3)!(2a+1)!(2b+1)!(2c+3)!} \right]^{1/2}$
$\lambda$	$\mu$	$\nu = 0$
1	1	$(a-b) \left[ \frac{2(s+3)!(s-2c+2)!(2a)!(2b)!(2c-1)!}{3(s+1)!(s-2c)!(2a+3)!(2b+3)!(2c+2)!} \right]^{1/2}$
1	0	$2(a+1) \left[ \frac{(s+2)(s-2c+1)(s-2b+1)(s-2a)(2a)!(2b-1)!(2c-1)!}{3(2a+3)!(2b+2)!(2c+2)!} \right]^{1/2}$
1	-1	$(a+b+1) \left[ \frac{2(s-2b+2)!(s-2a)!(2a)!(2b-2)!(2c-1)!}{3(s-2b)!(s-2a-2)!(2a+3)!(2b+1)!(2c+2)!} \right]^{1/2}$
0	1	$2(b+1) \left[ \frac{(s+2)(s-2c+1)(s-2b)(s-2a+1)(2a-1)!(2b)!(2c-1)!}{3(2a+2)!(2b+3)!(2c+2)!} \right]^{1/2}$
0	0	0
0	-1	$2b \left[ \frac{(s+1)(s-2c)(s-2b+1)(s-2a)(2a-1)!(2b-2)!(2c-1)!}{3(2a+2)!(2b+1)!(2c+2)!} \right]^{1/2}$
-1	1	$-(a+b+1) \left[ \frac{2(s-2b)!(s-2a+2)!(2a-2)!(2b)!(2c-1)!}{3(s-2b-2)!(s-2a)!(2a+1)!(2b+3)!(2c+2)!} \right]^{1/2}$
-1	0	$2a \left[ \frac{(s+1)(s-2c)(s-2b)(s-2a+1)(2a-2)!(2b-1)!(2c-1)!}{3(2a+1)!(2b+2)!(2c+2)!} \right]^{1/2}$
-1	-1	$(b-a) \left[ \frac{2(s+1)!(s-2c)!(2a-2)!(2b-2)!(2c-1)!}{3(s-1)!(s-2c-2)!(2a+1)!(2b+1)!(2c+2)!} \right]^{1/2}$
$\lambda$	$\mu$	$\nu = -1$
1	1	$-\left[ \frac{(s+2)(s-2c+3)!(s-2b)(s-2a)(2a)!(2b)!(2c-2)!}{3(s-2c)!(2a+3)!(2b+3)!(2c+1)!} \right]^{1/2}$
1	0	$-(a+c+1) \left[ \frac{2(s-2c+2)!(s-2a)!(2a)!(2b-1)!(2c-2)!}{3(s-2c)!(s-2a-2)!(2a+3)!(2b+2)!(2c+1)!} \right]^{1/2}$
1	-1	$-\left[ \frac{(s+1)(s-2c+1)(s-2b+1)(s-2a)!(2a)!(2b-2)!(2c-2)!}{3(s-2a-3)!(2a+3)!(2b+1)!(2c+1)!} \right]^{1/2}$
0	1	$(b+c+1) \left[ \frac{2(s-2c+2)!(s-2b)!(2a-1)!(2b)!(2c-2)!}{3(s-2c)!(s-2b-2)!(2a+2)!(2b+3)!(2c+1)!} \right]^{1/2}$

ТАБЛИЦА 10.9 (продолжение)

$\lambda$	$\mu$	$v = -1$
0	0	$2c \left[ \frac{(s+1)(s-2c+1)(s-2b)(s-2a)(2a-1)!(2b-1)!(2c-2)!}{(2a+2)!(2b+2)!(2c+1)!} \right]^{1/2}$
0	-1	$(c-b) \left[ \frac{2(s+1)!(s-2a)!(2a-1)!(2b-2)!(2c-2)!}{3(s-1)!(s-2a-2)!(2a+2)!(2b+1)!(2c+1)!} \right]^{1/2}$
-1	1	$-\left[ \frac{(s+1)(s-2c+1)(s-2b)!(s-2a+1)(2a-2)!(2b)!(2c-2)!}{3(s-2b-3)!(2a+1)!(2b+3)!(2c+1)!} \right]^{1/2}$
-1	0	$(a-c) \left[ \frac{2(s+1)!(s-2b)!(2a-2)!(2b-1)!(2c-2)!}{3(s-1)!(s-2b-2)!(2a+1)!(2b+2)!(2c+1)!} \right]^{1/2}$
-1	-1	$\left[ \frac{(s+1)!(s-2c)(s-2b)(s-2a)(2a-2)!(2b-2)!(2c-2)!}{3(s-2)!(2a+1)!(2b+1)!(2c+1)!} \right]^{1/2}$

ТАБЛИЦА 10.10

$$\begin{Bmatrix} a+\lambda & b+\mu & c+v \\ a & b & c \\ 2 & 1 & 1 \end{Bmatrix}$$

$\lambda$	$\mu$	$v = 1$
2	1	$\left[ \frac{(s+5)!(s-2c+2)!(s-2b+2)!(2a)!(2b)!(2c)!}{5(s+1)!(s-2c)!(s-2b)!(2a+5)!(2b+3)!(2c+3)!} \right]^{1/2}$
2	0	$\left[ \frac{2(s+4)!(s-2c+1)(s-2b+3)!(s-2a)(2a)!(2b-1)!(2c)!}{5(s+1)!(s-2b)!(2a+5)!(2b+2)!(2c+3)!} \right]^{1/2}$
2	-1	$\left[ \frac{(s+3)!(s-2b+4)!(s-2a)!(2a)!(2b-2)!(2c)!}{5(s+1)!(s-2b)!(s-2a-2)!(2a+5)!(2b+1)!(2c+3)!} \right]^{1/2}$
1	1	$2(b-c) \left[ \frac{(s+4)!(s-2c+1)(s-2b+1)(s-2a+1)(2a-1)!(2b)!(2c)!}{5(s+1)!(2a+4)!(2b+3)!(2c+3)!} \right]^{1/2}$
1	0	$2\{b(b-c) + (a+b-c)(c+1)\} \left[ \frac{2(s+3)!(s-2b+2)!(2a-1)!(2b-1)!(2c)!}{5(s+1)!(s-2b)!(2a+4)!(2b+2)!(2c+3)!} \right]^{1/2}$
1	-1	$2(b+c+1) \left[ \frac{(s+2)(s-2c)(s-2b+3)!(s-2a)(2a-1)!(2b-2)!(2c)!}{5(s-2b)!(2a+4)!(2b+1)!(2c+3)!} \right]^{1/2}$
0	1	$2\{3(b-c)^2 - a(a+1)\} \left[ \frac{(s+3)!(s-2a+2)!(2a-2)!(2b)!(2c)!}{2 \cdot 3 \cdot 5(s+1)!(s-2a)!(2a+3)!(2b+3)!(2c+3)!} \right]^{1/2}$
0	0	$2\{a(a+1) + 3b(b+1) - 3c(c+2) - 3\} \left[ \frac{(s+2)(s-2c)(s-2b+1)(s-2a+1)(2a-2)!(2b-1)!(2c)!}{3 \cdot 5(2a+3)!(2b+2)!(2c+3)!} \right]^{1/2}$
0	-1	$2\{3(b+c+1)^2 - a(a+1)\} \left[ \frac{(s-2c)!(s-2b+2)!(2a-2)!(2b-2)!(2c)!}{2 \cdot 3 \cdot 5(s-2c-2)!(s-2b)!(2a+3)!(2b+1)!(2c+3)!} \right]^{1/2}$
-1	1	$-2(b-c) \left[ \frac{(s+2)(s-2c)(s-2b)(s-2a+3)!(2a-3)!(2b)!(2c)!}{5(s-2a)!(2a+2)!(2b+3)!(2c+3)!} \right]^{1/2}$
-1	0	$2\{b(b-c) - (a-b+c+1)(c+1)\} \left[ \frac{2(s-2c)!(s-2a+2)!(2a-3)!(2b-1)!(2c)!}{5(s-2c-2)!(s-2a)!(2a+2)!(2b+2)!(2c+3)!} \right]^{1/2}$
-1	-1	$2(b+c+1) \left[ \frac{(s+1)(s-2c)!(s-2b+1)(s-2a+1)(2a-3)!(2b-2)!(2c)!}{5(s-2c-3)!(2a+2)!(2b+1)!(2c+3)!} \right]^{1/2}$
-2	1	$\left[ \frac{(s-2c)!(s-2b)!(s-2a+4)!(2a-4)!(2b)!(2c)!}{5(s-2c-2)!(s-2b-2)!(s-2a)!(2a+1)!(2b+3)!(2c+3)!} \right]^{1/2}$
-2	0	$-\left[ \frac{2(s+1)(s-2c)!(s-2b)(s-2a+3)!(2a-4)!(2b-1)!(2c)!}{5(s-2c-3)!(s-2a)!(2a+1)!(2b+2)!(2c+3)!} \right]^{1/2}$
-2	-1	$\left[ \frac{(s+1)!(s-2c)!(s-2a+2)!(2a-4)!(2b-2)!(2c)!}{5(s-1)!(s-2c-4)!(s-2a)!(2a+1)!(2b+1)!(2c+3)!} \right]^{1/2}$

ТАБЛИЦА 10.10 (продолжение)

$\lambda$	$\mu$	$\nu=0$
2	1	$-\left[ \frac{2(s+4)!(s-2c+3)!(s-2b+1)(s-2a)(2a)!(2b)!(2c-1)!}{5(s+1)!(s-2c)!(2a+5)!(2b+3)!(2c+2)!} \right]^{1/2}$
2	0	$-2 \left[ \frac{(s+3)!(s-2c+2)!(s-2b+2)(s-2a)!(2a)!(2b-1)!(2c-1)!}{5(s+1)!(s-2c)!(s-2b)!(s-2a-2)!(2a+5)!(2b+2)!(2c+2)!} \right]^{1/2}$
2	-1	$-\left[ \frac{2(s+2)(s-2c+1)(s-2b+3)!(s-2a)!(2a)!(2b-2)!(2c-1)!}{5(s-2b)!(s-2a-3)!(2a+5)!(2b+1)!(2c+2)!} \right]^{1/2}$
1	1	$2\{c(c-b) + (a-b+c)(b+1)\} \left[ \frac{2(s+3)!(s-2c+2)!(2a-1)!(2b)!(2c-1)!}{5(s+1)!(s-2c)!(2a+4)!(2b+3)!(2c+2)!} \right]^{1/2}$
1	0	$4(c-b)(c+b+1) \left[ \frac{(s+2)(s-2c+1)(s-2b+1)(s-2a)(2a-1)!(2b-1)!(2c-1)!}{5(2a+4)!(2b+2)!(2c+2)!} \right]^{1/2}$
1	-1	$2\{c(c+b+1) - b(s+1)\} \left[ \frac{2(s-2b+2)!(s-2a)!(2a-1)!(2b-2)!(2c-1)!}{5(s-2b)!(s-2a-2)!(2a+4)!(2b+1)!(2c+2)!} \right]^{1/2}$
0	1	$2\{3(b+1)^2 - a(a+1) - 3c(c+1)\} \left[ \frac{(s+2)(s-2c+1)(s-2b)(s-2a+1)(2a-2)!(2b)!(2c-1)!}{3 \cdot 5(2a+3)!(2b+3)!(2c+2)!} \right]^{1/2}$
0	0	$2\sqrt{2} \{a(a+1)[a(a+1) + 2b(b+1) + 2c(c+1)] - 3(b-c)^2(b+c+1)^2\} \times$ $\times \left[ \frac{(2a-2)!(2b-1)!(2c-1)!}{3 \cdot 5(2a+3)!(2b+2)!(2c+2)!} \right]^{1/2}$
0	-1	$-2\{3b^2 - a(a+1) - 3c(c+1)\} \left[ \frac{(s+1)(s-2c)(s-2b+1)(s-2a)(2a-2)!(2b-2)!(2c-1)!}{3 \cdot 5(2a+3)!(2b+1)!(2c+2)!} \right]^{1/2}$
-1	1	$2\{c(c-b) - (a+b-c+1)(b+1)\} \left[ \frac{2(s-2b)!(s-2a+2)!(2a-3)!(2b)!(2c-1)!}{5(s-2b-2)!(s-2a)!(2a+2)!(2b+3)!(2c+2)!} \right]^{1/2}$
-1	0	$-4(c-b)(c+b+1) \left[ \frac{(s+1)(s-2c)(s-2b)(s-2a+1)(2a-3)!(2b-1)!(2c-1)!}{5(2a+2)!(2b+2)!(2c+2)!} \right]^{1/2}$
-1	-1	$2\{c(c-b+1) + b(a-b+c)\} \left[ \frac{2(s+1)!(s-2c)!(2a-3)!(2b-2)!(2c-1)!}{5(s-1)!(s-2c-2)!(2a+2)!(2b+1)!(2c+2)!} \right]^{1/2}$
-2	1	$\left[ \frac{2(s+1)(s-2c)(s-2b)!(s-2a+3)!(2a-4)!(2b)!(2c-1)!}{5(s-2b-3)!(s-2a)!(2a+1)!(2b+3)!(2c+2)!} \right]^{1/2}$
-2	0	$-2 \left[ \frac{(s+1)!(s-2c)!(s-2b)!(s-2a+2)!(2a-4)!(2b-1)!(2c-1)!}{5(s-1)!(s-2c-2)!(s-2b-2)!(s-2a)!(2a+1)!(2b+2)!(2c+2)!} \right]^{1/2}$
-2	-1	$\left[ \frac{2(s+1)!(s-2c)!(s-2b)(s-2a+1)(2a-4)!(2b-2)!(2c-1)!}{5(s-2)!(s-2c-3)!(2a+1)!(2b+1)!(2c+2)!} \right]^{1/2}$
$\lambda$	$\mu$	$\nu=-1$
2	1	$\left[ \frac{(s+3)!(s-2c+4)!(s-2a)!(2a)!(2b)!(2c-2)!}{5(s+1)!(s-2c)!(s-2a-2)!(2a+5)!(2b+3)!(2c+1)!} \right]^{1/2}$
2	0	$\left[ \frac{2(s+2)(s-2c+3)!(s-2b+1)(s-2a)!(2a)!(2b-1)!(2c-2)!}{5(s-2c)!(s-2a-3)!(2a+5)!(2b+2)!(2c+1)!} \right]^{1/2}$
2	-1	$\left[ \frac{(s-2c+2)!(s-2b+2)!(s-2a)!(2a)!(2b-2)!(2c-2)!}{5(s-2c)!(s-2b)!(s-2a-4)!(2a+5)!(2b+1)!(2c+1)!} \right]^{1/2}$
1	1	$-2(b+c+1) \left[ \frac{(s+2)(s-2c+3)!(s-2b)(s-2a)(2a-1)!(2b)!(2c-2)!}{5(s-2c)!(2a+4)!(2b+3)!(2c+1)!} \right]^{1/2}$
1	0	$2\{b(c+b+1) - c(s+1)\} \left[ \frac{2(s-2c+2)!(s-2a)!(2a-1)!(2b-1)!(2c-2)!}{5(s-2c)!(s-2a-2)!(2a+4)!(2b+2)!(2c+1)!} \right]^{1/2}$
1	-1	$-2(c-b) \left[ \frac{(s+1)(s-2c+1)(s-2b+1)(s-2a)!(2a-1)!(2b-2)!(2c-2)!}{5(s-2a-3)!(2a+4)!(2b+1)!(2c+1)!} \right]^{1/2}$
0	1	$2\{3(b+c+1)^2 - a(a+1)\} \left[ \frac{(s-2c+2)!(s-2b)!(2a-2)!(2b)!(2c-2)!}{2 \cdot 3 \cdot 5(s-2c)!(s-2b-2)!(2a+3)!(2b+3)!(2c+1)!} \right]^{1/2}$
0	0	$2\{3c^2 - a(a+1) - 3b(b+1)\} \left[ \frac{(s+1)(s-2c+1)(s-2b)(s-2a)(2a-2)!(2b-1)!(2c-2)!}{3 \cdot 5(2a+3)!(2b+2)!(2c+1)!} \right]^{1/2}$

ТАБЛИЦА 10.10 (продолжение)

$\lambda$	$\mu$	$\nu = -1$
0	-1	$2 \{3(b-c)^2 - a(a+1)\} \left[ \frac{(s+1)! (s-2a)! (2a-2)! (2b-2)! (2c-2)!}{2 \cdot 3 \cdot 5 (s-1)! (s-2a-2)! (2a+3)! (2b+1)! (2c+1)!} \right]^{1/2}$
-1	1	$-2(b+c+1) \left[ \frac{(s+1)(s-2c+1)(s-2b)!(s-2a+1)(2a-3)!(2b)!(2c-2)!}{5(s-2b-3)!(2a+2)!(2b+3)!(2c+1)!} \right]^{1/2}$
-1	0	$2\{b(b-c+1)+c(a+b-c)\} \left[ \frac{2(s+1)!(s-2b)!(2a-3)!(2b-1)!(2c-2)!}{5(s-1)!(s-2b-2)!(2a+2)!(2b+2)!(2c+1)!} \right]^{1/2}$
-1	-1	$2(c-b) \left[ \frac{(s+1)!(s-2c)(s-2b)(s-2a)(2a-3)!(2b-2)!(2c-2)!}{5(s-2)!(2a+2)!(2b+1)!(2c+1)!} \right]^{1/2}$
-2	1	$\left[ \frac{(s+1)!(s-2b)!(s-2a+2)!(2a-4)!(2b)!(2c-2)!}{5(s-1)!(s-2b-4)!(s-2a)!(2a+1)!(2b+3)!(2c+1)!} \right]^{1/2}$
-2	0	$-\left[ \frac{2(s+1)!(s-2c)(s-2b)!(s-2a+1)(2a-4)!(2b-1)!(2c-2)!}{5(s-2)!(s-2b-3)!(2a+1)!(2b+2)!(2c+1)!} \right]^{1/2}$
-2	-1	$\left[ \frac{(s+1)!(s-2c)!(s-2b)!(2a-4)!(2b-2)!(2c-2)!}{5(s-3)!(s-2c-2)!(s-2b-2)!(2a+1)!(2b+1)!(2c+1)!} \right]^{1/2}$

ТАБЛИЦА 10.11

$$\begin{Bmatrix} a+\lambda & b+\mu & c+\nu \\ a & b & c \\ 2 & 2 & 1 \end{Bmatrix}$$

$\lambda$	$\mu$	$\nu = 1$
2	2	$2 \left[ \frac{(s+6)!(s-2c+3)!(s-2b+1)(s-2a+1)(2a)!(2b)!(2c)!}{3 \cdot 5 (s+1)!(s-2c)!(2a+5)!(2b+5)!(2c+3)!} \right]^{1/2}$
2	1	$-2(2a-b-2c) \left[ \frac{(s+5)!(s-2c+2)!(s-2b+2)!(2a)!(2b-1)!(2c)!}{3 \cdot 5 (s+1)!(s-2c)!(s-2b)!(2a+5)!(2b+4)!(2c+3)!} \right]^{1/2}$
2	0	$+ (2c-2a-1) \left[ \frac{2(s+4)!(s-2c+1)(s-2b+3)!(s-2a)(2a)!(2b-2)!(2c)!}{5(s+1)!(s-2b)!(2a+5)!(2b+3)!(2c+3)!} \right]^{1/2}$
2	-1	$-2(2a+b-2c+1) \left[ \frac{(s+3)!(s-2b+4)!(s-2a)!(2a)!(2b-3)!(2c)!}{3 \cdot 5 (s+1)!(s-2b)!(s-2a-2)!(2a+5)!(2b+2)!(2c+3)!} \right]^{1/2}$
2	-2	$-2 \left[ \frac{(s+2)(s-2c)(s-2b+5)!(s-2a)!(2a)!(2b-4)!(2c)!}{3 \cdot 5 (s-2b)!(s-2a-3)!(2a+5)!(2b+1)!(2c+3)!} \right]^{1/2}$
1	2	$2(2b-a-2c) \left[ \frac{(s+5)!(s-2c+2)!(s-2a+2)!(2a-1)!(2b)!(2c)!}{3 \cdot 5 (s+1)!(s-2c)!(s-2a)!(2a+4)!(2b+5)!(2c+3)!} \right]^{1/2}$
1	1	$4\{(s-2c)(s+c+2)-3ab\} \left[ \frac{(s+4)!(s-2c+1)(s-2b+1)(s-2a+1)(2a-1)!(2b-1)!(2c)!}{3 \cdot 5 (s+1)!(2a+4)!(2b+4)!(2c+3)!} \right]^{1/2}$
1	0	$2\{(c-a)(Z+a)+(c+1)(s-2c)(s-2a+1)\} \left[ \frac{2(s+3)!(s-2b+2)!(2a-1)!(2b-2)!(2c)!}{5(s+1)!(s-2b)!(2a+4)!(2b+3)!(2c+3)!} \right]^{1/2}$
1	-1	$\times \left[ \frac{4\{(s-2a+1)(a-b+2c+1)-3a(b+1)\} \times (s+2)(s-2c)(s-2b+3)!(s-2a)(2a-1)!(2b-3)!(2c)!}{3 \cdot 5 (s-2b)!(2a+4)!(2b+2)!(2c+3)!} \right]^{1/2}$
1	-2	$-2(2b+a+2c+2) \left[ \frac{(s-2c)!(s-2b+4)!(s-2a)!(2a-1)!(2b-4)!(2c)!}{3 \cdot 5 (s-2c-2)!(s-2b)!(s-2a-2)!(2a+4)!(2b+1)!(2c+3)!} \right]^{1/2}$
0	2	$(2c-2b-1) \left[ \frac{2(s+4)!(s-2c+1)(s-2b)(s-2a+3)!(2a-2)!(2b)!(2c)!}{5(s-2a)!(s+1)!(2a+3)!(2b+5)!(2c+3)!} \right]^{1/2}$
0	1	$-2\{(c-b)(Z+b)+(c+1)(s-2c)(s-2b+1)\} \left[ \frac{2(s+3)!(s-2a+2)!(2a-2)!(2b-1)!(2c)!}{5(s+1)!(s-2a)!(2a+3)!(2b+4)!(2c+3)!} \right]^{1/2}$

ТАБЛИЦА 10.11 (продолжение)

$\lambda$	$\mu$	$\nu = 1$
0	0	$2(c+1)\{2(Z-c-1)-1\} \left[ \frac{3(s+2)(s-2c)(s-2b+1)(s-2a+1)(2a-2)!(2b-2)!(2c)!}{5(2a+3)!(2b+3)!(2c+3)!} \right]^{1/2}$
0	-1	$2\{(b+c+1)(b+1-Z)+(c+1)(s+2)(s-2a+1)\} \times$ $\times \left[ \frac{2(s-2c)!(s-2b+2)!(2a-2)!(2b-3)!(2c)!}{5(s-2c-2)!(s-2b)!(2a+3)!(2b+2)!(2c+3)!} \right]^{1/2}$
0	-2	$-(2c+2b+1) \left[ \frac{2(s+1)(s-2c)!(s-2b+3)!(s-2a)(2a-2)!(2b-4)!(2c)!}{5(s-2c-3)!(s-2b)!(2a+3)!(2b+1)!(2c+3)!} \right]^{1/2}$
-1	2	$2(2b+a-2c+1) \left[ \frac{(s+3)!(s-2b)!(s-2a+4)!(2a-3)!(2b)!(2c)!}{3 \cdot 5(s+1)!(s-2b-2)!(s-2a)!(2a+2)!(2b+5)!(2c+3)!} \right]^{1/2}$
-1	1	$4\{(s-2b+1)(b-a+2c+1)-3b(a+1)\} \times$ $\times \left[ \frac{(s+2)(s-2c)(s-2b)(s-2a+3)!(2a-3)!(2b-1)!(2c)!}{3 \cdot 5(s-2a)!(2a+2)!(2b+4)!(2c+3)!} \right]^{1/2}$
-1	0	$-2\{(a+c+1)(a+1-Z)+(c+1)(s+2)(s-2b+1)\} \times$ $\times \left[ \frac{2(s-2c)!(s-2a+2)!(2a-3)!(2b-2)!(2c)!}{5(s-2c-2)!(s-2a)!(2a+2)!(2b+3)!(2c+3)!} \right]^{1/2}$
-1	-1	$-4\{(s+2)(s-3c)-3(a+1)(b+1)\} \left[ \frac{(s+1)(s-2c)!(s-2b+1)(s-2a+1)(2a-3)!(2b-3)!(2c)!}{3 \cdot 5(s-2c-3)!(2a+2)!(2b+2)!(2c+3)!} \right]^{1/2}$
-1	-2	$2(a-2b-2c-1) \left[ \frac{(s+1)!(s-2c)!(s-2b+2)!(2a-3)!(2b-4)!(2c)!}{3 \cdot 5(s-1)!(s-2c-4)!(s-2b)!(2a+2)!(2b+1)!(2c+3)!} \right]^{1/2}$
-2	2	$-2 \left[ \frac{(s+2)(s-2c)(s-2b)!(s-2a+5)!(2a-4)!(2b)!(2c)!}{3 \cdot 5(s-2b-3)!(s-2a)!(2a+1)!(2b+5)!(2c+3)!} \right]^{1/2}$
-2	1	$2(2a+b+2c+2) \left[ \frac{(s-2c)!(s-2b)!(s-2a+4)!(2a-4)!(2b-1)!(2c)!}{3 \cdot 5(s-2c-2)!(s-2b-2)!(s-2a)!(2a+1)!(2b+4)!(2c+3)!} \right]^{1/2}$
-2	0	$-(2c+2a+1) \left[ \frac{2(s+1)(s-2c)!(s-2b)(s-2a+3)!(2a-4)!(2b-2)!(2c)!}{5(s-2c-3)!(s-2a)!(2a+1)!(2b+3)!(2c+3)!} \right]^{1/2}$
-2	-1	$2(2a-b+2c+1) \left[ \frac{(s+1)!(s-2c)!(s-2a+2)!(2a-4)!(2b-3)!(2c)!}{3 \cdot 5(s-1)!(s-2c-4)!(s-2a)!(2a+1)!(2b+2)!(2c+3)!} \right]^{1/2}$
-2	-2	$-2 \left[ \frac{(s+1)!(s-2c)!(s-2b+1)(s-2a+1)(2a-4)!(2b-4)!(2c)!}{3 \cdot 5(s-2)!(s-2c-5)!(2a+1)!(2b+1)!(2c+3)!} \right]^{1/2}$
$\lambda$	$\mu$	$\nu = 0$
2	2	$2(a-b) \left[ \frac{2(s+5)!(s-2c+4)!(2a)!(2b)!(2c-1)!}{3 \cdot 5(s+1)!(s-2c)!(2a+5)!(2b+5)!(2c+2)!} \right]^{1/2}$
2	1	$2(2a-b+2) \left[ \frac{2(s+4)!(s-2c+3)!(s-2b+1)(s-2a)(2a)!(2b-1)!(2c-1)!}{3 \cdot 5(s+1)!(s-2c)!(2a+5)!(2b+4)!(2c+2)!} \right]^{1/2}$
2	0	$2(2a+3) \left[ \frac{(s+3)!(s-2c+2)!(s-2b+2)!(s-2a)!(2a)!(2b-2)!(2c-1)!}{5(s+1)!(s-2c)!(s-2b)!(s-2a-2)!(2a+5)!(2b+3)!(2c+2)!} \right]^{1/2}$
2	-1	$2(2a+b+3) \left[ \frac{2(s+2)(s-2c+1)(s-2b+3)!(s-2a)!(2a)!(2b-3)!(2c-1)!}{3 \cdot 5(s-2b)!(s-2a-3)!(2a+5)!(2b+2)!(2c+2)!} \right]^{1/2}$
2	-2	$2(a+b+1) \left[ \frac{2(s-2b+4)!(s-2a)!(2a)!(2b-4)!(2c-1)!}{3 \cdot 5(s-2b)!(s-2a-4)!(2a+5)!(2b+1)!(2c+2)!} \right]^{1/2}$
1	2	$2(2b-a+2) \left[ \frac{2(s+4)!(s-2c+3)!(s-2b)(s-2a+1)(2a-1)!(2b)!(2c-1)!}{3 \cdot 5(s+1)!(s-2c)!(2a+4)!(2b+5)!(2c+2)!} \right]^{1/2}$
1	1	$4(b-a)\{ab-Z\} \left[ \frac{2(s+3)!(s-2c+2)!(2a-1)!(2b-1)!(2c-1)!}{3 \cdot 5(s+1)!(s-2c)!(2a+4)!(2b+4)!(2c+2)!} \right]^{1/2}$
1	0	$4(Z+a)(a+1) \left[ \frac{(s+2)(s-2c+1)(s-2b+1)(s-2a)(2a-1)!(2b-2)!(2c-1)!}{5(2a+4)!(2b+3)!(2c+2)!} \right]^{1/2}$
1	-1	$4(a+b+1)\{Z+a(b+1)\} \left[ \frac{2(s-2b+2)!(s-2a)!(2a-1)!(2b-3)!(2c-1)!}{3 \cdot 5(s-2b)!(s-2a-2)!(2a+4)!(2b+2)!(2c+2)!} \right]^{1/2}$



ТАБЛИЦА 10.11 (продолжение)

$\lambda$	$\mu$	$v = 0$
1	-2	$2(2b+a) \left[ \frac{2(s+1)(s-2c)(s-2b+3)!(s-2a)!(2a-1)!(2b-4)!(2c-1)!}{3 \cdot 5(s-2b)!(s-2a-3)!(2a+4)!(2b+1)!(2c+2)!} \right]^{1/2}$
0	2	$-2(2b+3) \left[ \frac{(s+3)!(s-2c+2)!(s-2b)!(s-2a+2)!(2a-2)!(2b)!(2c-1)!}{5(s+1)!(s-2c)!(s-2b-2)!(s-2a)!(2a+3)!(2b+5)!(2c+2)!} \right]^{1/2}$
0	1	$4(Z+b)(b+1) \left[ \frac{(s+2)(s-2c+1)(s-2b)(s-2a+1)(2a-2)!(2b-1)!(2c-1)!}{5(2a+3)!(2b+4)!(2c+2)!} \right]^{1/2}$
0	0	0
0	-1	$4(Z-b-1)b \left[ \frac{(s+1)(s-2c)(s-2b+1)(s-2a)(2a-2)!(2b-3)!(2c-1)!}{5(2a+3)!(2b+2)!(2c+2)!} \right]^{1/2}$
0	-2	$2(2b-1) \left[ \frac{(s+1)!(s-2c)!(s-2b+2)!(s-2a)!(2a-2)!(2b-4)!(2c-1)!}{5(s-1)!(s-2c-2)!(s-2b)!(s-2a-2)!(2a+3)!(2b+1)!(2c+2)!} \right]^{1/2}$
-1	2	$2(2b+a+3) \left[ \frac{2(s+2)(s-2c+1)(s-2b)!(s-2a+3)!(2a-3)!(2b)!(2c-1)!}{3 \cdot 5(s-2b-3)!(s-2a)!(2a+2)!(2b+5)!(2c+2)!} \right]^{1/2}$
-1	1	$-4(a+b+1)\{Z+b(a+1)\} \left[ \frac{2(s-2b)!(s-2a+2)!(2a-3)!(2b-1)!(2c-1)!}{3 \cdot 5(s-2b-2)!(s-2a)!(2a+2)!(2b+4)!(2c+2)!} \right]^{1/2}$
-1	0	$4a(Z-a-1) \left[ \frac{(s+1)(s-2c)(s-2b)(s-2a+1)(2a-3)!(2b-2)!(2c-1)!}{5(2a+2)!(2b+3)!(2c+2)!} \right]^{1/2}$
-1	-1	$4(a-b)\{(a+1)(b+1)-Z\} \left[ \frac{2(s+1)!(s-2c)!(2a-3)!(2b-3)!(2c-1)!}{3 \cdot 5(s-1)!(s-2c-2)!(2a+2)!(2b+2)!(2c+2)!} \right]^{1/2}$
-1	-2	$-2(a-2b+1) \left[ \frac{2(s+1)!(s-2c)!(s-2b+1)(s-2a)(2a-3)!(2b-4)!(2c-1)!}{3 \cdot 5(s-2)!(s-2c-3)!(2a+2)!(2b+1)!(2c+2)!} \right]^{1/2}$
-2	2	$-2(a+b+1) \left[ \frac{2(s-2b)!(s-2a+4)!(2a-4)!(2b)!(2c-1)!}{3 \cdot 5(s-2b-4)!(s-2a)!(2a+1)!(2b+5)!(2c+2)!} \right]^{1/2}$
-2	1	$2(2a+b) \left[ \frac{2(s+1)(s-2c)(s-2b)!(s-2a+3)!(2a-4)!(2b-1)!(2c-1)!}{3 \cdot 5(s-2b-3)!(s-2a)!(2a+1)!(2b+4)!(2c+2)!} \right]^{1/2}$
-2	0	$-2(2a-1) \left[ \frac{(s+1)!(s-2c)!(s-2b)!(s-2a+2)!(2a-4)!(2b-2)!(2c-1)!}{5(s-1)!(s-2c-2)!(s-2b-2)!(s-2a)!(2a+1)!(2b+3)!(2c+2)!} \right]^{1/2}$
-2	-1	$-2(b-2a+1) \left[ \frac{2(s+1)!(s-2c)!(s-2b)(s-2a+1)(2a-4)!(2b-3)!(2c-1)!}{3 \cdot 5(s-2)!(s-2c-3)!(2a+1)!(2b+2)!(2c+2)!} \right]^{1/2}$
-2	-2	$2(b-a) \left[ \frac{2(s+1)!(s-2c)!(2a-4)!(2b-4)!(2c-1)!}{3 \cdot 5(s-3)!(s-2c-4)!(2a+1)!(2b+1)!(2c+2)!} \right]^{1/2}$
$\lambda$	$\mu$	$v = -1$
2	2	$-2 \left[ \frac{(s+4)!(s-2c+5)!(s-2b)(s-2a)(2a)!(2b)!(2c-2)!}{3 \cdot 5(s+1)!(s-2c)!(2a+5)!(2b+5)!(2c+1)!} \right]^{1/2}$
2	1	$-2(2a-b+2c+2) \left[ \frac{(s+3)!(s-2c+4)!(s-2a)!(2a)!(2b-1)!(2c-2)!}{3 \cdot 5(s+1)!(s-2c)!(s-2a-2)!(2a+5)!(2b+4)!(2c+1)!} \right]^{1/2}$
2	0	$-(2c+2a+3) \left[ \frac{2(s+2)(s-2c+3)!(s-2b+1)(s-2a)!(2a)!(2b-2)!(2c-2)!}{5(s-2c)!(s-2a-3)!(2a+5)!(2b+3)!(2c+1)!} \right]^{1/2}$
2	-1	$-2(2a+b+2c+3) \left[ \frac{(s-2c+2)!(s-2b+2)!(s-2a)!(2a)!(2b-3)!(2c-2)!}{3 \cdot 5(s-2c)!(s-2b)!(s-2a-4)!(2a+5)!(2b+2)!(2c+1)!} \right]^{1/2}$
2	-2	$-2 \left[ \frac{(s+1)(s-2c+1)(s-2b+3)!(s-2a)!(2a)!(2b-4)!(2c-2)!}{3 \cdot 5(s-2b)!(s-2a-5)!(2a+5)!(2b+1)!(2c+1)!} \right]^{1/2}$
1	2	$2(2b-a+2c+2) \left[ \frac{(s+3)!(s-2c+4)!(s-2b)!(2a-1)!(2b)!(2c-2)!}{3 \cdot 5(s+1)!(s-2c)!(s-2b-2)!(2a+4)!(2b+5)!(2c+1)!} \right]^{1/2}$
1	1	$-4\{(s+1)(s-3c)-3ab\} \left[ \frac{(s+2)(s-2c+3)!(s-2b)(s-2a)(2a-1)!(2b-1)!(2c-2)!}{3 \cdot 5(s-2c)!(2a+4)!(2b+4)!(2c+1)!} \right]^{1/2}$
1	0	$-2\{(Z+a)(a+c+1)-c(s+1)(s-2b)\} \left[ \frac{2(s-2c+2)!(s-2a)!(2a-1)!(2b-2)!(2c-2)!}{5(s-2c)!(s-2a-2)!(2a+4)!(2b+3)!(2c+1)!} \right]^{1/2}$

ТАБЛИЦА 10.11 (продолжение)

$\lambda$	$\mu$	$v = -1$
1	-1	$\times \left[ \frac{-4\{3a(b+1) - (s-2b)(2c+b-a+1)\} \times (s+1)(s-2c+1)(s-2b+1)(s-2a)!(2a-1)!(2b-3)!(2c-2)!}{3 \cdot 5 (s-2a-3)!(2a+4)!(2b+2)!(2c+1)!} \right]^{1/2}$
1	-2	$-2(2b+a-2c) \left[ \frac{(s+1)!(s-2b+2)!(s-2a)!(2a-1)!(2b-4)!(2c-2)!}{3 \cdot 5 (s-1)!(s-2b)!(s-2a-4)!(2a+4)!(2b+1)!(2c+1)!} \right]^{1/2}$
0	2	$-2(2c+2b+3) \left[ \frac{2(s+2)(s-2c+3)!(s-2b)!(s-2a+1)(2a-2)!(2b)!(2c-2)!}{5(s-2c)!(s-2b-3)!(2a+3)!(2b+5)!(2c+1)!} \right]^{1/2}$
0	1	$2\{(Z+b)(b+c+1) - c(s+1)(s-2a)\} \left[ \frac{2(s-2c+2)!(s-2b)!(2a-2)!(2b-1)!(2c-2)!}{5(s-2c)!(s-2b-2)!(2a+3)!(2b+4)!(2c+1)!} \right]^{1/2}$
0	0	$2c(2Z+2c-3) \left[ \frac{3(s+1)(s-2c+1)(s-2b)(s-2a)(2a-2)!(2b-2)!(2c-2)!}{5(2a+3)!(2b+3)!(2c+1)!} \right]^{1/2}$
0	-1	$2\{(Z-b-1)(c-b) + c(s-2c+1)(s-2b)\} \left[ \frac{2(s+1)!(s-2a)!(2a-2)!(2b-3)!(2c-2)!}{5(s-1)!(s-2a-2)!(2a+3)!(2b+2)!(2c+1)!} \right]^{1/2}$
0	-2	$(2c-2b+1) \left[ \frac{2(s+1)!(s-2c)(s-2b+1)(s-2a)!(2a-2)!(2b-4)!(2c-2)!}{5(s-2)!(s-2a-3)!(2a+3)!(2b+1)!(2c+1)!} \right]^{1/2}$
-1	2	$2(2b+a+2c+3) \left[ \frac{(s-2c+2)!(s-2b)!(s-2a+2)!(2a-3)!(2b)!(2c-2)!}{3 \cdot 5 (s-2c)!(s-2b-4)!(s-2a)!(2a+2)!(2b+5)!(2c+1)!} \right]^{1/2}$
-1	1	$\times \left[ \frac{-4\{3b(a+1) - (s-2a)(2c+a-b+1)\} \times (s+1)(s-2c+1)(s-2b)!(s-2a+1)(2a-3)!(2b-1)!(2c-2)!}{3 \cdot 5 (s-2b-3)!(2a+2)!(2b+4)!(2c+1)!} \right]^{1/2}$
-1	0	$-2\{(Z-a-1)(c-a) + c(s-2c+1)(s-2a)\} \left[ \frac{2(s+1)!(s-2b)!(2a-3)!(2b-2)!(2c-2)!}{5(s-1)!(s-2b-2)!(2a+2)!(2b+3)!(2c+1)!} \right]^{1/2}$
-1	-1	$4\{(s-2c+1)(s+c+2) - 3(a+1)(b+1)\} \times \left[ \frac{(s+1)!(s-2c)(s-2b)(s-2a)(2a-3)!(2b-3)!(2c-2)!}{3 \cdot 5 (s-2)!(2a+2)!(2b+2)!(2c+1)!} \right]^{1/2}$
-1	-2	$2(2c-2b+a+1) \left[ \frac{(s+1)!(s-2c)!(s-2a)!(2a-3)!(2b-4)!(2c-2)!}{3 \cdot 5 (s-3)!(s-2c-2)!(s-2a-2)!(2a+2)!(2b+1)!(2c+1)!} \right]^{1/2}$
-2	2	$-2 \left[ \frac{(s+1)(s-2c+1)(s-2b)!(s-2a+3)!(2a-4)!(2b)!(2c-2)!}{3 \cdot 5 (s-2b-5)!(s-2a)!(2a+1)!(2b+5)!(2c+1)!} \right]^{1/2}$
-2	1	$2(2a+b-2c) \left[ \frac{(s+1)!(s-2b)!(s-2a+2)!(2a-4)!(2b-1)!(2c-2)!}{3 \cdot 5 (s-1)!(s-2b-4)!(s-2a)!(2a+1)!(2b+4)!(2c+1)!} \right]^{1/2}$
-2	0	$(2c-2a+1) \left[ \frac{2(s+1)!(s-2c)(s-2b)!(s-2a+1)(2a-4)!(2b-2)!(2c-2)!}{5(s-2)!(s-2b-3)!(2a+1)!(2b+3)!(2c+1)!} \right]^{1/2}$
-2	-1	$-2(2c-2a+b+1) \left[ \frac{(s+1)!(s-2c)!(s-2b)!(2a-4)!(2b-3)!(2c-2)!}{3 \cdot 5 (s-3)!(s-2c-2)!(s-2b-2)!(2a+1)!(2b+2)!(2c+1)!} \right]^{1/2}$
-2	-2	$2 \left[ \frac{(s+1)!(s-2c)!(s-2b)(s-2a)(2a-4)!(2b-4)!(2c-2)!}{3 \cdot 5 (s-4)!(s-2c-3)!(2a+1)!(2b+1)!(2c+1)!} \right]^{1/2}$

ТАБЛИЦА 10.12

$$\begin{Bmatrix} a+\lambda & b+\mu & c+v \\ a & b & c \\ 3 & 2 & 1 \end{Bmatrix}$$

$\lambda$	$\mu$	$v = 1$
3	2	$\left[ \frac{(s+7)!(s-2c+4)!(s-2b+2)!(2a)!(2b)!(2c)!}{7(s+1)!(s-2c)!(s-2b)!(2a+7)!(2b+5)!(2c+3)!} \right]^{1/2}$
3	1	$2 \left[ \frac{(s+6)!(s-2c+3)!(s-2b+3)!(s-2a)(2a)!(2b-1)!(2c)!}{7(s+1)!(s-2c)!(s-2b)!(2a+7)!(2b+4)!(2c+3)!} \right]^{1/2}$

ТАБЛИЦА 10.12 (продолжение)

$\lambda$	$\mu$	$v = 1$
3	0	$\left[ \frac{2 \cdot 3 (s+5)! (s-2c+2)! (s-2b+4)! (s-2a)! (2a)! (2b-2)! (2c)!}{7 (s+1)! (s-2c)! (s-2b)! (s-2a-2)! (2a+7)! (2b+3)! (2c+3)!} \right]^{1/2}$
3	-1	$2 \left[ \frac{(s+4)! (s-2c+1)! (s-2b+5)! (s-2a)! (2a)! (2b-3)! (2c)!}{7 (s+1)! (s-2b)! (s-2a-3)! (2a+7)! (2b+2)! (2c+3)!} \right]^{1/2}$
3	-2	$\left[ \frac{(s+3)! (s-2b+6)! (s-2a)! (2a)! (2b-4)! (2c)!}{7 (s+1)! (s-2b)! (s-2a-4)! (2a+7)! (2b+1)! (2c+3)!} \right]^{1/2}$
2	2	$(3b-a-3c) \left[ \frac{2 (s+6)! (s-2c+3)! (s-2b+1)! (s-2a+1)! (2a-1)! (2b)! (2c)!}{3 \cdot 7 (s+1)! (s-2c)! (2a+6)! (2b+5)! (2c+3)!} \right]^{1/2}$
2	1	$2\{3(b-c)(s-2a) + (a+3)(s-2c)\} \left[ \frac{2 (s+5)! (s-2c+2)! (s-2b+2)! (2a-1)! (2b-1)! (2c)!}{3 \cdot 7 (s+1)! (s-2c)! (s-2b)! (2a+6)! (2b+4)! (2c+3)!} \right]^{1/2}$
2	0	$2\{a(a+2c+5) + 3(b-c)(b+c+1)\} \times$ $\times \left[ \frac{(s+4)! (s-2c+1)! (s-2b+3)! (s-2a)(2a-1)! (2b-2)! (2c)!}{7 (s+1)! (s-2b)! (2a+6)! (2b+3)! (2c+3)!} \right]^{1/2}$
2	-1	$2\{3(c+b+1)(s-2c+1) - (a+3)(s-2a+1)\} \times$ $\times \left[ \frac{2 (s+3)! (s-2b+4)! (s-2a)! (2a-1)! (2b-3)! (2c)!}{3 \cdot 7 (s+1)! (s-2b)! (s-2a-2)! (2a+6)! (2b+2)! (2c+3)!} \right]^{1/2}$
2	-2	$(3b+a+3c+3) \left[ \frac{(s+2)(s-2c)(s-2b+5)! (s-2a)! (2a-1)! (2b-4)! (2c)!}{3 \cdot 7 (s-2b)! (s-2a-3)! (2a+6)! (2b+1)! (2c+3)!} \right]^{1/2}$
1	2	$\{(s-2c-1)(s-2c) - 8(s-2c)(s-2b) + 6(s-2b-1)(s-2b)\} \times$ $\times \left[ \frac{(s+5)! (s-2c+2)! (s-2a+2)! (2a-2)! (2b)! (2c)!}{3 \cdot 5 \cdot 7 (s+1)! (s-2c)! (s-2a)! (2a+5)! (2b+5)! (2c+3)!} \right]^{1/2}$
1	1	$\{(s-2c-1)(s-2c)(s-2a+2)(2a+4)(2a+5) - 2(s-2c)(s-2c+2)(s-2a+1) \times$ $\times (2a-1)(2a+5) + (s-2c+2)(s-2c+3)(s-2a)2a(2a-1)\} \times$ $\times \left[ \frac{(s+4)! (s-2c+1)(s-2b+1)(s-2a+1)(2a-2)! (2b-1)! (2c)!}{3 \cdot 5 \cdot 7 (s+1)! (2a+5)! (2b+4)! (2c+3)!} \right]^{1/2}$
1	0	$\{(s-2c)(s-2a+1)(2a+5)[(s-2c-1)(s-2a+2)(2a+4) - 2(s-2c+1)(s-2a)(2a-1)] +$ $+ 2a(2a-1)(s-2c+1)(s-2c+2)(s-2a-1)(s-2a)\} \times$ $\times \left[ \frac{(s+3)! (s-2b+2)! (2a-2)! (2b-2)! (2c)!}{2 \cdot 5 \cdot 7 (s+1)! (s-2b)! (2a+5)! (2b+3)! (2c+3)!} \right]^{1/2}$
1	-1	$\{(s-2a+1)(2a+5)[(s-2c-1)(s-2a+2)(2a+4) - 2(s-2c)(s-2a-1)(2a-1)] +$ $+ 2a(2a-1)(s-2c+1)(s-2a-2)(s-2a-1)\} \times$ $\times \left[ \frac{(s+2)(s-2c)(s-2b+3)! (s-2a)(2a-2)! (2b-3)! (2c)!}{3 \cdot 5 \cdot 7 (s-2b)! (2a+5)! (2b+2)! (2c+3)!} \right]^{1/2}$
1	-2	$\{(s-2a+1)(s-2a+2) + 8(s+1)(s-2a+1) + 6s(s+1)\} \times$ $\times \left[ \frac{(s-2c)! (s-2b+4)! (s-2a)! (2a-2)! (2b-4)! (2c)!}{3 \cdot 5 \cdot 7 (s-2c-2)! (s-2b)! (s-2a-2)! (2a+5)! (2b+1)! (2c+3)!} \right]^{1/2}$
0	2	$2\{a(a+1) - 5(b-c+1)(b-c) - 2\} \times$ $\times \left[ \frac{(s+4)! (s-2c+1)(s-2b)(s-2a+3)! (2a-3)! (2b)! (2c)!}{5 \cdot 7 (s+1)! (s-2a)! (2a+4)! (2b+5)! (2c+3)!} \right]^{1/2}$
0	1	$\frac{1}{2 \cdot 3} \{(s-2c-1)(s-2c)(2a+3)(2a+4)[(s-2c-2)(s-2a+3)(2a+2) - 3(s-2c+1) \times$ $\times (s-2a+2)(2a-2)] + (s-2c+1)(s-2c+2)(2a-1)(2a-2)[(s-2c)(s-2a+1)(2a+4)3 -$ $- (s-2c+3)(s-2a) \cdot 2a]\} \left[ \frac{(s+3)! (s-2a+2)! (2a-3)! (2b-1)! (2c)!}{5 \cdot 7 (s+1)! (s-2a)! (2a+4)! (2b+4)! (2c+3)!} \right]^{1/2}$

ТАБЛИЦА 10.12 (продолжение)

$\lambda$	$\mu$	$\nu = 1$
0	0	$2 \{ [c(c+2) + a(a+1) - b(b+1)] \cdot [10c - 10Z + 4(2a^2 + 2a + 1)] - 2c(c+2)(2a-1)(2a+3) + (2a+4)(2a-2)[a(a+1) + 3b(b+1) - 3c(c+2) - 3] \} \times$ $\times \left[ \frac{3(s+2)(s-2c)(s-2b+1)(s-2a+1)(2a-3)!(2b-2)!(2c)!}{2 \cdot 5 \cdot 7(2a+4)!(2b+3)!(2c+3)!} \right]^{1/2}$
0	-1	$\frac{1}{2 \cdot 3} \{ (s-2a+1)(s-2a+2)(2a+3)(2a+4)[(s-2c-2)(s-2a+3)(2a+2) - 3(s-2c-1) \times$ $\times (s-2a)(2a-2)] + (s-2a-1)(s-2a)(2a-1)(2a-2)[3(s-2c)(s-2a+1)(2a+4) -$ $- (s-2c+1)(s-2a-2)2a] \left[ \frac{(s-2c)!(s-2b+2)!(2a-3)!(2b-3)!(2c)!}{5 \cdot 7(s-2c-2)!(s-2b)!(2a+4)!(2b+2)!(2c+3)!} \right]^{1/2}$ $- 2(a(a+1) - 5(b+c)(b+c+1) - 2) \times$ $\times \left[ \frac{(s+1)(s-2c)!(s-2b+3)!(s-2a)(2a-3)!(2b-4)!(2c)!}{5 \cdot 7(s-2c-3)!(s-2b)!(2a+4)!(2b+1)!(2c+3)!} \right]^{1/2}$
0	-2	$\{ (s-2b+1)(s-2b+2) - 8(s-2c+1)(s-2b+1) + 6(s-2c+1)(s-2c+2) \} \times$ $\times \left[ \frac{(s+3)!(s-2b)!(s-2a+4)!(2a-4)!(2b)!(2c)!}{3 \cdot 5 \cdot 7(s+1)!(s-2b-2)!(s-2a)!(2a+3)!(2b+5)!(2c+3)!} \right]^{1/2}$
-1	2	$- \{ (s-2b+1)(2a-3)[(s+3)(s-2b+2)(2a-2) - 2(s+2)(s-2b-1)(2a+3)] +$ $+ (2a+2)(2a+3)(s+1)(s-2b-2)(s-2b-1) \} \times$ $\times \left[ \frac{(s+2)(s-2c)(s-2b)(s-2a+3)!(2a-4)!(2b-1)!(2c)!}{3 \cdot 5 \cdot 7(s-2a)!(2a+3)!(2b+4)!(2c+3)!} \right]^{1/2}$
-1	1	$\{ (s+3)(s-2b+1)(2a-3)[(s+2)(s-2b+2)(2a-2) - 2(s+1)(s-2b)(2a+3)] +$ $+ (2a+2)(2a+3)s(s+1)(s-2b-1)(s-2b) \} \times$ $\times \left[ \frac{(s-2c)!(s-2a+2)!(2a-4)!(2b-2)!(2c)!}{2 \cdot 5 \cdot 7(s-2c-2)!(s-2a)!(2a+3)!(2b+3)!(2c+3)!} \right]^{1/2}$
-1	0	$- \{ (s+2)(2a-3)[(s+3)(s-2b+2)(2a-2) - 2s(s-2b+1)(2a+3)] + (2a+2)(2a+3) \} \times$ $\times (s-1)s(s-2b) \left[ \frac{(s+1)(s-2c)!(s-2b+1)(s-2a+1)(2a-4)!(2b-3)!(2c)!}{3 \cdot 5 \cdot 7(s-2c-3)!(2a+3)!(2b+2)!(2c+3)!} \right]^{1/2}$
-1	-1	$\{ (s+2)(s+3) + 8(s+2)(s-2a) + 6(s-2a-1)(s-2a) \} \times$ $\times \left[ \frac{(s+1)!(s-2c)!(s-2b+2)!(2a-4)!(2b-4)!(2c)!}{3 \cdot 5 \cdot 7(s-1)!(s-2c-4)!(s-2b)!(2a+3)!(2b+1)!(2c+3)!} \right]^{1/2}$
-1	-2	$- (3b+a-3c+1) \left[ \frac{(s+2)(s-2c)(s-2b)!(s-2a+5)!(2a-5)!(2b)!(2c)!}{3 \cdot 7(s-2b-3)!(s-2a)!(2a+2)!(2b+5)!(2c+3)!} \right]^{1/2}$
-2	2	$2 \{ 3(s+1)(b-c) + (a-2)(s-2b+1) \} \times$ $\times \left[ \frac{2(s-2c)!(s-2b)!(s-2a+4)!(2a-5)!(2b-1)!(2c)!}{3 \cdot 7(s-2c-2)!(s-2b-2)!(s-2a)!(2a+2)!(2b+4)!(2c+3)!} \right]^{1/2}$
-2	1	$2 \{ (a+1)(2c-a+4) - 3(b-c)(b+c+1) \} \times$ $\times \left[ \frac{(s+1)(s-2c)!(s-2b)(s-2a+3)!(2a-5)!(2b-2)!(2c)!}{7(s-2c-3)!(s-2a)!(2a+2)!(2b+3)!(2c+3)!} \right]^{1/2}$
-2	0	$2 \{ (s+2)(a-2) - 3(s-2b)(c+b+1) \} \times$ $\times \left[ \frac{2(s+1)!(s-2c)!(s-2a+2)!(2a-5)!(2b-3)!(2c)!}{3 \cdot 7(s-1)!(s-2c-4)!(s-2a)!(2a+2)!(2b+2)!(2c+3)!} \right]^{1/2}$
-2	-1	$- (a-3b-3c-2) \left[ \frac{(s+1)!(s-2c)!(s-2b+1)(s-2a+1)(2a-5)!(2b-4)!(2c)!}{3 \cdot 7(s-2)!(s-2c-5)!(2a+2)!(2b+1)!(2c+3)!} \right]^{1/2}$
-2	-2	$\left[ \frac{(s-2c)!(s-2b)!(s-2a+6)!(2a-6)!(2b)!(2c)!}{7(s-2c-2)!(s-2b-4)!(s-2a)!(2a+1)!(2b+5)!(2c+3)!} \right]^{1/2}$
-3	2	$- 2 \left[ \frac{(s+1)(s-2c)!(s-2b)!(s-2a+5)!(2a-6)!(2b-1)!(2c)!}{7(s-2c-3)!(s-2b-3)!(s-2a)!(2a+1)!(2b+4)!(2c+3)!} \right]^{1/2}$
-3	1	$- 2 \left[ \frac{(s+1)(s-2c)!(s-2b)!(s-2a+5)!(2a-6)!(2b-1)!(2c)!}{7(s-2c-3)!(s-2b-3)!(s-2a)!(2a+1)!(2b+4)!(2c+3)!} \right]^{1/2}$

ТАБЛИЦА 10.12 (продолжение)

$\lambda$	$\mu$	$v=1$
-3	0	$\left[ \frac{2 \cdot 3 (s+1)! (s-2c)! (s-2b)! (s-2a+4)! (2a-6)! (2b-2)! (2c)!}{7 (s-1)! (s-2c-4)! (s-2b-2)! (s-2a)! (2a+1)! (2b+3)! (2c+3)!} \right]^{1/2}$
-3	-1	$-2 \left[ \frac{(s+1)! (s-2c)! (s-2b) (s-2a+3)! (2a-6)! (2b-3)! (2c)!}{3 (s-2)! (s-2c-5)! (s-2a)! (2a+1)! (2b+2)! (2c+3)!} \right]^{1/2}$
-3	-2	$\left[ \frac{(s+1)! (s-2c)! (s-2a+2)! (2a-6)! (2b-4)! (2c)!}{7 (s-3)! (s-2c-6)! (s-2a)! (2a+1)! (2b+1)! (2c+3)!} \right]^{1/2}$
$\lambda$	$\mu$	$v=0$
3	2	$-\left[ \frac{2 (s+6)! (s-2c+5)! (s-2b+1) (s-2a) (2a)! (2b)! (2c-1)!}{7 (s+1)! (s-2c)! (2a+7)! (2b+5)! (2c+2)!} \right]^{1/2}$
3	1	$-2 \left[ \frac{2 (s+5)! (s-2c+4)! (s-2b+2)! (s-2a)! (2a)! (2b-1)! (2c-1)!}{7 (s+1)! (s-2c)! (s-2b)! (s-2a-2)! (2a+7)! (2b+4)! (2c+2)!} \right]^{1/2}$
3	0	$-2 \left[ \frac{3 (s+4)! (s-2c+3)! (s-2b+3)! (s-2a)! (2a)! (2b-2)! (2c-1)!}{7 (s+1)! (s-2c)! (s-2b)! (s-2a-3)! (2a+7)! (2b+3)! (2c+2)!} \right]^{1/2}$
3	-1	$-2 \left[ \frac{2 (s+3)! (s-2c+2)! (s-2b+4)! (s-2a)! (2a)! (2b-3)! (2c-1)!}{7 (s+1)! (s-2c)! (s-2b)! (s-2a-4)! (2a+7)! (2b+2)! (2c+2)!} \right]^{1/2}$
3	-2	$-\left[ \frac{2 (s+2) (s-2c+1) (s-2b+5)! (s-2a)! (2a)! (2b-4)! (2c-1)!}{7 (s-2b)! (s-2a-5)! (2a+7)! (2b+1)! (2c+2)!} \right]^{1/2}$
2	2	$2 \{(s-2a) (2a-3b+3c) + (a+3) (s-2b)\} \left[ \frac{(s+5)! (s-2c+4)! (2a-1)! (2b)! (2c-1)!}{3 \cdot 7 (s+1)! (s-2c)! (2a+6)! (2b+5)! (2c+2)!} \right]^{1/2}$
2	1	$\begin{aligned} & 4 \{a (2b-a-1) - 3 (c-b) (c+b+1)\} \times \\ & \times \left[ \frac{(s+4)! (s-2c+3)! (s-2b+1) (s-2a) (2a-1)! (2b-1)! (2c-1)!}{3 \cdot 7 (s+1)! (s-2c)! (2a+6)! (2b+4)! (2c+2)!} \right]^{1/2} \\ & - 2 \{3 (Z+2a) - a (2a+6)\} \times \end{aligned}$
2	0	$\times \left[ \frac{2 (s+3)! (s-2c+2)! (s-2b+2)! (s-2a)! (2a-1)! (2b-2)! (2c-1)!}{7 (s+1)! (s-2c)! (s-2b)! (s-2a-2)! (2a+6)! (2b+3)! (2c+2)!} \right]^{1/2}$
2	-1	$\times \left[ \frac{4 \{3 (c-b) (c+b+1) - a (2b+a+3)\} \times (s+2) (s-2c+1) (s-2b+3)! (s-2a)! (2a-1)! (2b-3)! (2c-1)!}{3 \cdot 7 (s-2b)! (s-2a-3)! (2a+6)! (2b+2)! (2c+2)!} \right]^{1/2}$
2	-2	$\begin{aligned} & 2 \{(s+1) (a+3) - (s-2c+1) (2a+3b+3c+3)\} \times \\ & \times \left[ \frac{(s-2b+4)! (s-2a)! (2a-1)! (2b-4)! (2c-1)!}{3 \cdot 7 (s-2b)! (s-2a-4)! (2a+6)! (2b+1)! (2c+2)!} \right]^{1/2} \\ & \{5 (s+5) (s-2c) - 10 (s-2b-1) (s-2a) - 4 (2a-1) (2a+5)\} \times \end{aligned}$
1	2	$\times \left[ \frac{2 (s+4)! (s-2c+3)! (s-2b) (s-2a+1) (2a-2)! (2b)! (2c-1)!}{3 \cdot 5 \cdot 7 (s+1)! (s-2c)! (2a+5)! (2b+5)! (2c+2)!} \right]^{1/2}$
1	1	$- \{30Z^2 - 4Z [8a^2 + 11a - 5b + 10ab] + 8ab [4a^2 + a - 7b - ab - 9]\} \times$
1	0	$\times \left[ \frac{2 (s+3)! (s-2c+2)! (2a-2)! (2b-1)! (2c-1)!}{3 \cdot 5 \cdot 7 (s+1)! (s-2c)! (2a+5)! (2b+4)! (2c+2)!} \right]^{1/2}$
1	-1	$\begin{aligned} & \{2 (Z+a) [4 (2a+5) (2a-1) + 15 (Z+a-2) - 6 (2b-1) (2b+3) a (a+2)] \times \\ & \times \left[ \frac{(s+2) (s-2c+1) (s-2b+1) (s-2a) (2a-2)! (2b-2)! (2c-1)!}{5 \cdot 7 (2a+5)! (2b+3)! (2c+2)!} \right]^{1/2} \\ & - \{30Z^2 - 4Z [8a^2 + a + 5b - 10ab + 5] - 8a (b+1) [4a^2 + 2a + 7b + ab - 2]\} \times \end{aligned}$
1	-1	$\times \left[ \frac{2 (s-2b+2)! (s-2a)! (2a-2)! (2b-3)! (2c-1)!}{3 \cdot 5 \cdot 7 (s-2b)! (s-2a-2)! (2a+5)! (2b+2)! (2c+2)!} \right]^{1/2}$

$\lambda$	$\mu$	$\nu=0$
1	-2	$-\{10s(s-2c+1) - 5(s-2b+4)(s-2a+1) - 4(2a-1)(2a+5)\} \times$
0	2	$\times \left[ \frac{2(s+1)(s-2c)(s-2b+3)!(s-2a)!(2a-2)!(2b-4)!(2c-1)!}{3 \cdot 5 \cdot 7(s-2b)!(s-2a-3)!(2a+5)!(2b+1)!(2c+2)!} \right]^{1/2}$
0	1	$2\{(a-3)(a+4) - 5b(b+3) + 5c(c+1)\} \times$
0	0	$\times \left[ \frac{2(s+3)!(s-2c+2)!(s-2b)!(s-2a+2)!(2a-3)!(2b)!(2c-1)!}{5 \cdot 7(s+1)!(s-2c)!(s-2b-2)!(s-2a)!(2a+4)!(2b+5)!(2c+2)!} \right]^{1/2}$
0	1	$\{(Z+b)[20(Z+b-2) - 6(2a-2)(2a+4)] - 4b(b+2)(2a-1)(2a+3)\} \times$
0	0	$\times \left[ \frac{2(s+2)(s-2c+1)(s-2b)(s-2a+1)(2a-3)!(2b-1)!(2c-1)!}{5 \cdot 7(2a+4)!(2b+4)!(2c+2)!} \right]^{1/2}$
0	0	$2\{(s-2b-1)(s-2b)(s-2a-1)(s-2a)[s(s-2b+2) - 2(b+c+ac+2)] + 8(a+2) \times$
0	0	$\times (c-b)(s+2)(s-2c)(s-2b)(s-2a) + (s+2)(s+3)(s-2c-1)(s-2c)[s(s-2b+3) -$
0	0	$- 2(a+2b+ac)] \left[ \frac{3(2a-3)!(2b-2)!(2c-1)!}{5 \cdot 7(2a+4)!(2b+3)!(2c+2)!} \right]^{1/2}$
0	-1	$- \{(Z-b-1)[20(Z-b-3) - 6(2a-2)(2a+4)] - 4(b+1)(b-1)(2a-1)(2a+3)\} \times$
0	-1	$\times \left[ \frac{2(s+1)(s-2c)(s-2b+1)(s-2a)(2a-3)!(2b-3)!(2c-1)!}{5 \cdot 7(2a+4)!(2b+2)!(2c+2)!} \right]^{1/2}$
0	-2	$2\{(a-3)(a+4) - 5(b+1)(b-2) + 5c(c+1)\} \times$
-1	2	$\times \left[ \frac{2(s+1)!(s-2c)!(s-2b+2)!(s-2a)!(2a-3)!(2b-4)!(2c-1)!}{5 \cdot 7(s-1)!(s-2c-2)!(s-2b)!(s-2a-2)!(2a+4)!(2b+1)!(2c+2)!} \right]^{1/2}$
-1	1	$\{10(s+1)(s-2c+2) - 5(s-2b+1)(s-2a+4) - 4(2a+3)(2a-3)\} \times$
-1	0	$\times \left[ \frac{2(s+2)(s-2c+1)(s-2b)!(s-2a+3)!(2a-4)!(2b)!(2c-1)!}{3 \cdot 5 \cdot 7(s-2b-3)!(s-2a)!(2a+3)!(2b+5)!(2c+2)!} \right]^{1/2}$
-1	-1	$\{30Z^2 - 4Z[8(a+1)^2 - 11(a+1) - 15b - 10ab] - 8b(a+1)[4(a+1)^2 - a + ab - 6b - 10]\} \times$
-1	-1	$\times \left[ \frac{2(s-2b)!(s-2a+2)!(2a-4)!(2b-1)!(2c-1)!}{3 \cdot 5 \cdot 7(s-2b-2)!(s-2a)!(2a+3)!(2b+4)!(2c+2)!} \right]^{1/2}$
-1	-1	$- \{2(Z-a-1)[4(2a+3)(2a-3) + 15(Z-a-3)] - 6(2b-1)(2b+3)(a+1)(a-1)\} \times$
-1	-1	$\times \left[ \frac{(s+1)(s-2c)(s-2b)(s-2a+1)(2a-4)!(2b-2)!(2c-1)!}{5 \cdot 7(2a+3)!(2b+3)!(2c+2)!} \right]^{1/2}$
-1	-1	$- \{30Z^3 - 4Z[8(a+1)^3 - (a+1)(1-10b) + 5(b+1)] + 8(a+1)(b+1)[4(a+1)^2 - a - 10 +$
-1	-1	$+ (b+1)(6-a)] \left[ \frac{2(s+1)!(s-2c)!(2a-4)!(2b-3)!(2c-1)!}{3 \cdot 5 \cdot 7(s-1)!(s-2c-2)!(2a+3)!(2b+2)!(2c+2)!} \right]^{1/2}$
-1	-1	$- \{5(s+2)(s-2c-3) - 10(s-2b)(s-2a-1) - 4(2a+3)(2a-3)\} \times$
-1	-1	$\times \left[ \frac{2(s+1)!(s-2c)!(s-2b+1)(s-2a)(2a-4)!(2b-4)!(2c-1)!}{3 \cdot 5 \cdot 7(s-2)!(s-2c-3)!(2a+3)!(2b+1)!(2c+2)!} \right]^{1/2}$
-1	-1	$2\{(s+1)(3c-3b-2a-2) + (s-2c+1)(a-2)\} \times$
-1	-1	$\times \left[ \frac{(s-2b)!(s-2a+4)!(2a-5)!(2b)!(2c-1)!}{3 \cdot 7(s-2b-4)!(s-2a)!(2a+2)!(2b+5)!(2c+2)!} \right]^{1/2}$
-1	-1	$- 4\{3(c-b)(c+b+1) - (a+1)(2b+a)\} \times$
-1	-1	$\times \left[ \frac{(s+1)(s-2c)(s-2b)!(s-2a+3)!(2a-5)!(2b-1)!(2c-1)!}{3 \cdot 7(s-2b-3)!(s-2a)!(2a+2)!(2b+4)!(2c+2)!} \right]^{1/2}$
-1	-1	$- 2\{3(Z-2a-2) - (a+1)(2a-4)\} \times$
-1	-1	$\times \left[ \frac{2(s+1)!(s-2c)!(s-2b)!(s-2a+2)!(2a-5)!(2b-2)!(2c-1)!}{7(s-1)!(s-2c-2)!(s-2b-2)!(s-2a)!(2a+2)!(2b+3)!(2c+2)!} \right]^{1/2}$

ТАБЛИЦА 10.12 (продолжение)

$\lambda$	$\mu$	$\nu = 0$
-2	-1	$-4 \{3(c-b)(c+b+1) - (a+1)(a-2b-2)\} \times$ $\times \left[ \frac{(s+1)!(s-2c)!(s-2b)(s-2a+1)(2a-5)!(2b-3)!(2c-1)!}{3 \cdot 7(s-2)!(s-2c-3)!(2a+2)!(2b+2)!(2c+2)!} \right]^{1/2}$
-2	-2	$2\{(s-2a)(3c+3b-2a+1) - (s-2a)(a-2)\} \left[ \frac{(s+1)!(s-2c)!(2a-5)!(2b-4)!(2c-1)!}{3 \cdot 7(s-3)!(s-2c-4)!(2a+2)!(2b+1)!(2c+2)!} \right]^{1/2}$
-3	2	$\left[ \frac{2(s+1)(s-2c)(s-2b)!(s-2a+5)!(2a-6)!(2b)!(2c-1)!}{7(s-2b-5)!(s-2a)!(2a+1)!(2b+5)!(2c+2)!} \right]^{1/2}$
-3	1	$-2 \left[ \frac{2(s+1)!(s-2c)!(s-2b)!(s-2a+4)!(2a-6)!(2b-1)!(2c-1)!}{7(s-1)!(s-2c-2)!(s-2b-4)!(s-2a)!(2a+1)!(2b+4)!(2c+2)!} \right]^{1/2}$
-3	0	$2 \left[ \frac{3(s+1)!(s-2c)!(s-2b)!(s-2a+3)!(2a-6)!(2b-2)!(2c-1)!}{7(s-2)!(s-2c-3)!(s-2b-3)!(s-2a)!(2a+1)!(2b+3)!(2c+2)!} \right]^{1/2}$
-3	-1	$-2 \left[ \frac{2(s+1)!(s-2c)!(s-2b)!(s-2a+2)!(2a-6)!(2b-3)!(2c-1)!}{7(s-3)!(s-2c-4)!(s-2b-2)!(s-2a)!(2a+1)!(2b+2)!(2c+2)!} \right]^{1/2}$
-3	-2	$\left[ \frac{2(s+1)!(s-2c)!(s-2b)(s-2a+1)(2a-6)!(2b-4)!(2c-1)!}{7(s-4)!(s-2c-5)!(2a+1)!(2b+1)!(2c+2)!} \right]^{1/2}$
$\lambda$	$\mu$	$\nu = -1$
3	2	$\left[ \frac{(s+5)!(s-2c+6)!(s-2a)!(2a)!(2b)!(2c-2)!}{7(s+1)!(s-2c)!(s-2a-2)!(2a+7)!(2b+5)!(2c+1)!} \right]^{1/2}$
3	1	$2 \left[ \frac{(s+4)!(s-2c+5)!(s-2b+1)(s-2a)!(2a)!(2b-1)!(2c-2)!}{7(s+1)!(s-2c)!(s-2a-3)!(2a+7)!(2b+4)!(2c+1)!} \right]^{1/2}$
3	0	$\left[ \frac{2 \cdot 3(s+3)!(s-2c+4)!(s-2b+2)!(s-2a)!(2a)!(2b-2)!(2c-2)!}{7(s+1)!(s-2c)!(s-2b)!(s-2a-4)!(2a+7)!(2b+3)!(2c+1)!} \right]^{1/2}$
3	-1	$2 \left[ \frac{(s+2)(s-2c+3)!(s-2b+3)!(s-2a)!(2a)!(2b-3)!(2c-2)!}{7(s-2c)!(s-2b)!(s-2a-5)!(2a+7)!(2b+2)!(2c+1)!} \right]^{1/2}$
3	-2	$\left[ \frac{(s-2c+2)!(s-2b+4)!(s-2a)!(2a)!(2b-4)!(2c-2)!}{7(s-2c)!(s-2b)!(s-2a-6)!(2a+7)!(2b+1)!(2c+1)!} \right]^{1/2}$
2	2	$-(3b-a+3c+3) \left[ \frac{2(s+4)!(s-2c+5)!(s-2b)(s-2a)(2a-1)!(2b)!(2c-2)!}{3 \cdot 7(s+1)!(s-2c)!(2a+6)!(2b+5)!(2c+1)!} \right]^{1/2}$
2	1	$2\{(s+1)(a+3) - 3(s-2b+1)(b+c+1)\} \times$ $\times \left[ \frac{2(s+3)!(s-2c+4)!(s-2a)!(2a-1)!(2b-1)!(2c-2)!}{3 \cdot 7(s+1)!(s-2c)!(s-2a-2)!(2a+6)!(2b+4)!(2c+1)!} \right]^{1/2}$
2	0	$2\{a(a-2c+3) + 3(b-c)(b+c+1)\} \times$ $\left[ \frac{(s+2)(s-2c+3)!(s-2b+1)(s-2a)!(2a-1)!(2b-2)!(2c-2)!}{7(s-2c)!(s-2a-3)!(2a+6)!(2b+3)!(2c+1)!} \right]^{1/2}$
2	-1	$2\{(s-2b)(a+3) + 3(s+2)(b-c)\} \times$ $\times \left[ \frac{2(s-2c+2)!(s-2b+2)!(s-2a)!(2a-1)!(2b-3)!(2c-2)!}{3 \cdot 7(s-2c)!(s-2b)!(s-2a-4)!(2a+6)!(2b+2)!(2c+1)!} \right]^{1/2}$
2	-2	$-(3c-a-3b) \left[ \frac{2(s+1)(s-2c+1)(s-2b+3)!(s-2a)!(2a-1)!(2b-4)!(2c-2)!}{3 \cdot 7(s-2b)!(s-2a-5)!(2a+6)!(2b+1)!(2c+1)!} \right]^{1/2}$
1	2	$\{s(s+1) + 8(s+1)(s-2a+1) + 6(s-2a+1)(s-2a+2)\} \times$ $\times \left[ \frac{(s+3)!(s-2c+4)!(s-2b)!(2a-2)!(2b)!(2c-2)!}{3 \cdot 5 \cdot 7(s+1)!(s-2c)!(s-2b-2)!(2a+5)!(2b+5)!(2c+1)!} \right]^{1/2}$
1	1	$\{(s+1)(2a+5)[s(s-2b-1)(2a+4) - 2(s+3)(s-2b)(2a-1)] + 2a(2a-1)(s+3)\} \times$ $\times (s+4)(s-2b+1) \left[ \frac{(s+2)!(s-2c+3)!(s-2b)(s-2a)(2a-2)!(2b-1)!(2c-2)!}{3 \cdot 5 \cdot 7(s-2c)!(2a+5)!(2b+4)!(2c+1)!} \right]^{1/2}$

$\lambda$	$\mu$	$\nu = -1$
1	0	$\{s(s+1)(s-2b)(2a+5)[(s-2b-1)(2a+4)-2(s-2b+1)(2a-1)]+(s+2)(s+3) \times$ $\times 2a(2a-1)(s-2b+1)(s-2b+2)\} \left[ \frac{(s-2c+2)!(s-2a)!(2a-2)!(2b-2)!(2c-2)!}{2 \cdot 5 \cdot 7(s-2c)!(s-2a-2)!(2a+5)!(2b+3)!(2c+1)!} \right]^{1/2}$
1	-1	$\{[s(s-2b-1)(2a+4)-2(s+1)(s-2b+2)(2a-1)](s-2b)(2a+5)+(s+2)2a(2a-1) \times$ $\times (s-2b+2)(s-2b+3)\} \left[ \frac{(s+1)(s-2c+1)(s-2b+1)(s-2a)!(2a-2)!(2b-3)!(2c-2)!}{3 \cdot 5 \cdot 7(s-2a-3)!(2a+5)!(2b+2)!(2c+1)!} \right]^{1/2}$
1	-2	$\{(s-2b-1)(s-2b)-8(s-2c)(s-2b)+6(s-2c-1)(s-2c)\} \times$ $\times \left[ \frac{(s+1)!(s-2b+2)!(s-2a)!(2a-2)!(2b-4)!(2c-2)!}{3 \cdot 5(s-1)!(s-2b)!(s-2a-4)!(2a+5)!(2b+1)!(2c+1)!} \right]^{1/2}$
0	2	$2\{a(a+1)-5(b+c+1)(b+c+2)-2\} \times$ $\times \left[ \frac{(s+2)(s-2c+3)!(s-2b)!(s-2a+1)(2a-3)!(2b)!(2c-2)!}{5 \cdot 7(s-2c)!(s-2b-3)!(2a+4)!(2b+5)!(2c+1)!} \right]^{1/2}$
0	1	$-\frac{1}{2 \cdot 3}\{s(s+1)(2a+4)(2a+3)[(s-1)(s-2b-2)(2a+2)-3(s+2)(s-2b-1)(2a-2)] +$ $+(s+2)(s+3)(2a-1)(2a-2)[(s+1)(s-2b)(2a+4) \cdot 3-(s+4)(s-2b+1)2a]\} \times$ $\times \left[ \frac{(s-2c+2)!(s-2b)!(2a-3)!(2b-1)!(2c-2)!}{5 \cdot 7(s-2c)!(s-2b-2)!(2a+4)!(2b+4)!(2c+1)!} \right]^{1/2}$
0	0	$-4\{[b(b+1)+a(a+1)+(c+1)(c-1)](4a^2+4a-5Z-5c-3)-(c+1)(c-1)(2a-1) \times$ $\times (2a+3)+2(a+2)(a-1)[a(a+1)+3b(b+1)-3(c+1)(c-1)-3]\} \times$ $\times \left[ \frac{3(s+1)(s-2c+1)(s-2b)(s-2a)(2a-3)!(2b-2)!(2c-2)!}{2 \cdot 5 \cdot 7(2a+4)!(2b+3)!(2c+1)!} \right]^{1/2}$
0	-1	$\frac{1}{2 \cdot 3}\{(s-2b-1)(s-2b)(2a+4)(2a+3)[3s(s-2b+1)(2a-2)-(s-1)(s-2b-2) \times$ $\times (2a+2)]+(s-2b+1)(s-2b+2)(2a-1)(2a-2)[(s+2)(s-2b+3)2a -$ $-3(s+1)(s-2b)(2a+4)]\} \left[ \frac{(s+1)!(s-2a)!(2a-3)!(2b-3)!(2c-2)!}{5 \cdot 7(s-1)!(s-2a-2)!(2a+4)!(2b+2)!(2c+1)!} \right]^{1/2}$
0	-2	$-2\{a(a+1)-5(c-b)(s-b+1)-2\} \times$ $\times \left[ \frac{(s+1)!(s-2c)(s-2b+1)(s-2c)!(2a-3)!(2b-4)!(2c-2)!}{5 \cdot 7(s-2)!(s-2c-3)!(2a+4)!(2b+1)!(2c+1)!} \right]^{1/2}$
-1	2	$+\{(s-2a)(s-2a-1)+8(s+2)(s-2a)+6(s+2)(s+3)\} \times$ $\times \left[ \frac{(s-2c+2)!(s-2b)!(s-2a+2)!(2a-4)!(2b)!(2c-2)!}{3 \cdot 5 \cdot 7(s-2c)!(s-2b-4)!(s-2a)!(2a+3)!(2b+5)!(2c+1)!} \right]^{1/2}$
-1	1	$-\{(s-2a)(2a-3)[(s-2c+2)(s-2a-1)(2a-2)-2(s-2c+1)(s-2a+2)(2a+3)] +$ $+(s-2c)(s-2a+2)(s-2a+3)(2a+2)(2a+3)\} \times$ $\times \left[ \frac{(s+1)(s-2c+1)(s-2b)!(s-2a+1)(2a-4)!(2b-1)!(2c-2)!}{3 \cdot 5 \cdot 7(s-2b-3)!(2a+3)!(2b+4)!(2c+1)!} \right]^{1/2}$



ТАБЛИЦА 10.12 (продолжение)

$\lambda$	$\mu$	$v = -1$
-1	0	$\{(s-2c+1)(s-2a)(2a-3)[(s-2c+2)(s-2a-1)(2a-2) - 2(s-2c)(s-2a+1)(2a+3)] +$ $+ (2a+2)(2a+3)(s-2c-1)(s-2c)(s-2a+1)(s-2a+2)\} \times$ $\times \left[ \frac{(s+1)!(s-2b)!(2a-4)!(2b-2)!(2c-2)!}{2 \cdot 5 \cdot 7 (s-1)!(s-2b-2)!(2a+3)!(2b+3)!(2c+1)!} \right]^{1/2}$
-1	-1	$- \{(s-2c+1)(2a-3)[(s-2c+2)(s-2a-1)(2a-2) - 2(s-2c-1)(s-2a)(2a+3)] +$ $+ (2a+2)(2a+3)(s-2c-2)(s-2c-1)(s-2a+1)\} \times$ $\times \left[ \frac{(s+1)!(s-2c)(s-2b)(s-2a)(2a-4)!(2b-3)!(2c-2)!}{3 \cdot 5 \cdot 7 (s-2)!(2a+3)!(2b+2)!(2c+1)!} \right]^{1/2}$
-1	-2	$\{(s-2c+1)(s-2c+2) - 8(s-2c+1)(s-2b+1) + 6(s-2b+1)(s-2b+2)\} \times$ $\times \left[ \frac{(s+1)!(s-2c)!(s-2a)!(2a-4)!(2b-4)!(2c-2)!}{3 \cdot 5 \cdot 7 (s-3)!(s-2c-2)!(s-2a-2)!(2a+3)!(2b+1)!(2c+1)!} \right]^{1/2}$
-2	2	$- (3b+a+3c+4) \left[ \frac{2(s+1)(s-2c+1)(s-2b)!(s-2a+3)!(2a-5)!(2b)!(2c-2)!}{3 \cdot 7 (s-2b-5)!(s-2a)!(2a+2)!(2b+5)!(2c+1)!} \right]^{1/2}$
-2	1	$2\{3(s-2c)(b+c+1) - (s-2a)(a-2)\} \times$ $\times \left[ \frac{2(s+1)!(s-2b)!(s-2a+2)!(2a-5)!(2b-1)!(2c-2)!}{3 \cdot 7 (s-1)!(s-2b-4)!(s-2a)!(2a+2)!(2b+4)!(2c+1)!} \right]^{1/2}$
-2	0	$- 2\{(a-2)(a+2c+1) + 3(b+c)(b-c+1)\} \times$ $\times \left[ \frac{(s+1)!(s-2c)(s-2b)!(s-2a+1)(2a-5)!(2b-2)!(2c-2)!}{7 (s-2)!(s-2b-3)!(2a+2)!(2b+3)!(2c+1)!} \right]^{1/2}$
-2	-1	$2\{3(s-2a+1)(b-c) + (s-2c+1)(a-2)\} \times$ $\times \left[ \frac{2(s+1)!(s-2b)!(s-2c)!(2a-5)!(2b-3)!(2c-2)!}{3 \cdot 7 (s-3)!(s-2c-2)!(s-2b-2)!(2a+2)!(2b+2)!(2c+1)!} \right]^{1/2}$
-2	-2	$(a-3b+3c+1) \left[ \frac{2(s+1)!(s-2c)!(s-2b)(s-2a)(2a-5)!(2b-4)!(2c-2)!}{3 \cdot 7 (s-4)!(s-2c-3)!(2a+2)!(2b+1)!(2c+1)!} \right]^{1/2}$
-3	2	$\left[ \frac{(s+1)!(s-2b)!(s-2a+4)!(2a-6)!(2b)!(2c-2)!}{7 (s-1)!(s-2b-6)!(s-2a)!(2a+1)!(2b+5)!(2c+1)!} \right]^{1/2}$
-3	1	$- 2 \left[ \frac{(s+1)!(s-2c)(s-2b)!(s-2a+3)!(2a-6)!(2b-1)!(2c-2)!}{7 (s-2)!(s-2b-5)!(s-2a)!(2a+1)!(2b+4)!(2c+1)!} \right]^{1/2}$
-3	0	$\left[ \frac{2 \cdot 3 (s+1)!(s-2c)!(s-2b)!(s-2a+2)!(2a-6)!(2b-2)!(2c-2)!}{7 (s-3)!(s-2c-2)!(s-2b-4)!(s-2a)!(2a+1)!(2b+3)!(2c+1)!} \right]^{1/2}$
-3	-1	$- 2 \left[ \frac{(s+1)!(s-2c)!(s-2b)!(s-2c+1)(2a-6)!(2b-3)!(2c-2)!}{7 (s-4)!(s-2c-3)!(s-2b-3)!(2a+1)!(2b+2)!(2c+1)!} \right]^{1/2}$
-3	-2	$\left[ \frac{(s+1)!(s-2c)!(s-2b)!(2a-6)!(2b-4)!(2c-2)!}{7 (s-5)!(s-2c-4)!(s-2b-2)!(2a+1)!(2b+1)!(2c+1)!} \right]^{1/2}$

ТАБЛИЦА 10.13

a	d	b	e	$\begin{Bmatrix} a & b & 0 \\ d & e & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{Bmatrix}$		a	d	b	e	$\begin{Bmatrix} a & b & 1 \\ d & e & 1 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{Bmatrix}$	
0	1/2	0	1/2	1/2	0.500000	2	5/2	3	7/2	$1/(2 \cdot 3 \sqrt{7})$	0.062994
1	1/2	1	1/2	$1/(2\sqrt{3})$	0.288675	3	5/2	3	7/2	$1/(4 \cdot 3 \cdot 7)$	0.011905
1	3/2	1	3/2	$1/(2\sqrt{2 \cdot 3})$	0.204124	3	7/2	3	7/2	$3/(8 \cdot 7)$	0.053571
2	3/2	2	3/2	$1/(2\sqrt{2 \cdot 5})$	0.158114	4	7/2	3	7/2	$1/(8 \cdot 3 \sqrt{3 \cdot 7})$	0.009092
2	5/2	2	5/2	$1/(2\sqrt{3 \cdot 5})$	0.129099	3	5/2	4	7/2	$1/(4\sqrt{3 \cdot 7})$	0.054554
3	5/2	3	5/2	$1/(2\sqrt{3 \cdot 7})$	0.109109	3	7/2	4	7/2	$-1/(8 \cdot 3 \sqrt{3 \cdot 7})$	-0.009092
3	7/2	3	7/2	$1/(4\sqrt{7})$	0.094491	4	7/2	4	7/2	$\sqrt{5 \cdot 7}/(8 \cdot 9 \sqrt{3})$	0.047439
4	7/2	4	7/2	$1/(4 \cdot 3)$	0.083333						
a	d	b	e	$\begin{Bmatrix} a & b & 1 \\ d & e & 1 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{Bmatrix}$		a	d	b	e	$\begin{Bmatrix} a & b & 2 \\ d & e & 2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{Bmatrix}$	
1	1/2	0	1/2	$1/(2 \cdot 3)$	0.666667	2	3/2	0	1/2	$1/(2 \cdot 5)$	0.100000
1	3/2	0	1/2	$1/(2 \cdot 3)$	0.666667	2	5/2	0	1/2	$1/(2 \cdot 5)$	0.100000
0	1/2	1	1/2	$-1/(2 \cdot 3)$	-0.666667	1	3/2	1	1/2	$-1/(2\sqrt{2 \cdot 3 \cdot 5})$	-0.091287
1	1/2	1	1/2	$1/(3\sqrt{2 \cdot 3})$	0.136083	2	3/2	1	1/2	$1/(2 \cdot 5 \sqrt{2})$	0.070711
1	3/2	1	1/2	$-1/(2 \cdot 3 \sqrt{2 \cdot 3})$	-0.068041	2	5/2	1	1/2	$-1/(3 \cdot 5 \sqrt{2})$	-0.047141
2	3/2	1	1/2	$1/(2 \cdot 3 \sqrt{2})$	0.117851	3	5/2	1	1/2	$1/(2 \cdot 3 \sqrt{5})$	0.074536
0	1/2	1	3/2	$1/(2 \cdot 3)$	0.666667	1	1/2	1	3/2	$1/(2\sqrt{2 \cdot 3 \cdot 5})$	0.091287
1	1/2	1	3/2	$1/(2 \cdot 3 \sqrt{2 \cdot 3})$	0.068041	1	3/2	1	3/2	$1/(4\sqrt{3 \cdot 5})$	0.064550
1	3/2	1	3/2	$\sqrt{5}/(4 \cdot 3 \sqrt{3})$	0.107582	2	3/2	1	3/2	$1/(4 \cdot 5)$	0.050000
2	3/2	1	3/2	$1/(4 \cdot 3 \sqrt{5})$	0.037268	2	5/2	1	3/2	$\sqrt{7}/(2 \cdot 3 \cdot 5 \sqrt{2})$	0.062361
2	5/2	1	3/2	$1/(2\sqrt{2 \cdot 3 \cdot 5})$	0.091287	3	5/2	1	3/2	$1/(2 \cdot 3 \sqrt{5 \cdot 7})$	0.028172
1	1/2	2	3/2	$1/(2 \cdot 3 \sqrt{2})$	0.117851	3	7/2	1	3/2	$1/(2\sqrt{2 \cdot 5 \cdot 7})$	0.059761
1	3/2	2	3/2	$-1/(4 \cdot 3 \sqrt{5})$	-0.037268	0	1/2	2	3/2	$-1/(2 \cdot 5)$	-0.100000
2	3/2	2	3/2	$\sqrt{3}/(4 \cdot 5)$	0.086603	1	1/2	2	3/2	$1/(2 \cdot 5 \sqrt{2})$	0.070711
2	5/2	2	3/2	$-1/(2 \cdot 3 \cdot 5 \sqrt{2})$	-0.023570	1	3/2	2	3/2	$-1/(4 \cdot 5)$	-0.050000
3	5/2	2	3/2	$1/(2 \cdot 3 \sqrt{5})$	0.074536	2	3/2	2	3/2	$\sqrt{7}/(4 \cdot 5 \sqrt{5})$	0.059161
1	3/2	2	5/2	$1/(2\sqrt{2 \cdot 3 \cdot 5})$	0.091287	2	5/2	2	3/2	$-1/(2 \cdot 5 \sqrt{2 \cdot 5})$	-0.031623
2	3/2	2	5/2	$1/(2 \cdot 3 \cdot 5 \sqrt{2})$	0.023570	3	5/2	2	3/2	$1/(5\sqrt{2 \cdot 7})$	0.053452
2	5/2	2	5/2	$\sqrt{7}/(3 \cdot 5 \sqrt{2 \cdot 3})$	0.072008	3	7/2	2	3/2	$-1/(4 \cdot 5 \sqrt{7})$	-0.018898
3	5/2	2	5/2	$1/(2 \cdot 3 \sqrt{3 \cdot 5 \cdot 7})$	0.016265	4	7/2	2	3/2	$1/(4 \cdot 5)$	0.050000
3	7/2	2	5/2	$1/(2 \cdot 3 \sqrt{7})$	0.062994	0	1/2	2	5/2	$1/(2 \cdot 5)$	0.100000
2	3/2	3	5/2	$1/(2 \cdot 3 \sqrt{5})$	0.074536	1	1/2	2	5/2	$1/(3 \cdot 5 \sqrt{2})$	0.047141
2	5/2	3	5/2	$-1/(2 \cdot 3 \sqrt{3 \cdot 5 \cdot 7})$	-0.016265	1	3/2	2	5/2	$\sqrt{7}/(2 \cdot 3 \cdot 5 \sqrt{2})$	0.062361
3	5/2	3	5/2	$\sqrt{5}/(3 \cdot 7 \sqrt{3})$	0.061475	2	3/2	2	5/2	$1/(2 \cdot 5 \sqrt{2 \cdot 5})$	0.031623
3	7/2	3	5/2	$-1/(4 \cdot 3 \cdot 7)$	-0.011905	2	5/2	2	5/2	$1/(5\sqrt{3 \cdot 5})$	0.051640
4	7/2	3	5/2	$1/(4\sqrt{3 \cdot 7})$	0.054554	3	5/2	2	5/2	$1/(2 \cdot 5 \sqrt{3 \cdot 7})$	0.021822
						3	7/2	2	5/2	$\sqrt{3}/(2 \cdot 5 \sqrt{2 \cdot 7})$	0.046291
						4	7/2	2	5/2	$1/(2 \cdot 3 \cdot 5 \sqrt{2 \cdot 3})$	0.013608

ТАБЛИЦА 10.13 (продолжение)

a	d	b	e	$\begin{Bmatrix} a & b & 2 \\ d & e & 2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{Bmatrix}$		a	d	b	e	$\begin{Bmatrix} a & b & 3 \\ d & e & 3 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{Bmatrix}$	
1	1/2	3	5/2	$1/(2 \cdot 3 \sqrt{5})$	0.074536	1	1/2	2	5/2	$1/(2 \cdot 3 \sqrt{7})$	0.062994
1	3/2	3	5/2	$-1/(2 \cdot 3 \sqrt{5 \cdot 7})$	-0.028172	1	3/2	2	5/2	$1/(3 \sqrt{2 \cdot 5 \cdot 7})$	0.039840
2	3/2	3	5/2	$1/(5 \sqrt{2 \cdot 7})$	0.053452	2	3/2	2	5/2	$1/(2 \cdot 5 \sqrt{7})$	0.037796
2	5/2	3	5/2	$-1/(2 \cdot 5 \sqrt{3 \cdot 7})$	-0.021822	2	5/2	2	5/2	$1/(2 \cdot 5 \sqrt{7})$	0.037796
3	5/2	3	5/2	$1/(7 \sqrt{2 \cdot 5})$	0.045175	3	5/2	2	5/2	$1/(7 \sqrt{2 \cdot 3 \cdot 5})$	0.026082
3	7/2	3	5/2	$-1/(4 \cdot 7 \sqrt{5})$	-0.015972	3	7/2	2	5/2	$1/(4 \cdot 7)$	0.035714
4	7/2	3	5/2	$\sqrt{5}/(4 \cdot 3 \sqrt{3 \cdot 7})$	0.040663	4	7/2	2	5/2	$1/(4 \cdot 3 \sqrt{3 \cdot 7})$	0.018185
1	3/2	3	7/2	$1/(2 \sqrt{2 \cdot 5 \cdot 7})$	0.059761	0	1/2	3	5/2	$-1/(2 \cdot 7)$	-0.071429
2	3/2	3	7/2	$1/(4 \cdot 5 \sqrt{7})$	0.018898	1	1/2	3	5/2	$1/(3 \cdot 7)$	0.047619
2	5/2	3	7/2	$\sqrt{3}/(2 \cdot 5 \sqrt{2 \cdot 7})$	0.046291	1	3/2	3	5/2	$-\sqrt{5}/(2 \cdot 3 \cdot 7 \sqrt{2})$	-0.037646
3	5/2	3	7/2	$1/(4 \cdot 7 \sqrt{5})$	0.015972	2	3/2	3	5/2	$\sqrt{3}/(2 \cdot 7 \sqrt{2 \cdot 5})$	0.039123
3	7/2	3	7/2	$\sqrt{5}/(8 \cdot 7)$	0.039930	2	5/2	3	5/2	$-1/(7 \sqrt{2 \cdot 3 \cdot 5})$	-0.026082
4	7/2	3	7/2	$1/(8 \sqrt{3 \cdot 5 \cdot 7})$	0.012199	3	5/2	3	5/2	$\sqrt{5}/(2 \cdot 7 \sqrt{3 \cdot 7})$	0.034853
2	3/2	4	7/2	$1/(4 \cdot 5)$	0.050000	3	7/2	3	5/2	$-1/(2 \cdot 7 \sqrt{2 \cdot 7})$	-0.019090
2	5/2	4	7/2	$-1/(2 \cdot 3 \cdot 5 \sqrt{2 \cdot 3})$	-0.013608	4	7/2	3	5/2	$\sqrt{11}/(2 \cdot 3 \cdot 7 \sqrt{2 \cdot 3})$	0.032238
3	5/2	4	7/2	$\sqrt{5}/(4 \cdot 3 \sqrt{3 \cdot 7})$	0.040663	0	1/2	3	7/2	$1/(2 \cdot 7)$	0.071429
3	7/2	4	7/2	$-1/(8 \sqrt{3 \cdot 5 \cdot 7})$	-0.012199	1	1/2	3	7/2	$1/(4 \cdot 7)$	0.035714
4	7/2	4	7/2	$\sqrt{11}/(8 \cdot 3 \sqrt{3 \cdot 5})$	0.035681	1	3/2	3	7/2	$\sqrt{3}/(4 \cdot 7 \sqrt{2})$	0.043741
a	d	b	e	$\begin{Bmatrix} a & b & 3 \\ d & e & 3 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{Bmatrix}$		2	3/2	3	7/2	$1/(4 \cdot 7 \sqrt{2})$	0.025254
3	5/2	0	1/2	$1/(2 \cdot 7)$	0.071429	2	5/2	3	7/2	$1/(4 \cdot 7)$	0.035714
3	7/2	0	1/2	$1/(2 \cdot 7)$	0.071429	3	5/2	3	7/2	$1/(2 \cdot 7 \sqrt{2 \cdot 7})$	0.019090
2	5/2	1	1/2	$-1/(2 \cdot 3 \sqrt{7})$	-0.062994	3	7/2	3	7/2	$\sqrt{11}/(4 \cdot 7 \sqrt{2 \cdot 7})$	0.031657
3	5/2	1	1/2	$1/(3 \cdot 7)$	0.047619	4	7/2	3	7/2	$1/(4 \cdot 7 \sqrt{2 \cdot 3})$	0.014580
3	7/2	1	1/2	$-1/(4 \cdot 7)$	-0.035714	1	1/2	4	7/2	$1/(4 \sqrt{3 \cdot 7})$	0.054554
4	7/2	1	1/2	$1/(4 \sqrt{3 \cdot 7})$	0.054555	1	3/2	4	7/2	$-1/(4 \cdot 3 \sqrt{2 \cdot 7})$	-0.022272
2	3/2	1	3/2	$1/(2 \sqrt{2 \cdot 5 \cdot 7})$	0.059761	2	3/2	4	7/2	$1/(4 \sqrt{2 \cdot 3 \cdot 7})$	0.038576
2	5/2	1	3/2	$1/(3 \sqrt{2 \cdot 5 \cdot 7})$	0.039841	2	5/2	4	7/2	$-1/(4 \cdot 3 \sqrt{3 \cdot 7})$	-0.018185
3	5/2	1	3/2	$\sqrt{5}/(2 \cdot 3 \cdot 7 \sqrt{2})$	0.037646	3	5/2	4	7/2	$\sqrt{11}/(2 \cdot 3 \cdot 7 \sqrt{2 \cdot 3})$	0.032238
3	7/2	1	3/2	$\sqrt{3}/(4 \cdot 7 \sqrt{2})$	0.043741	3	7/2	4	7/2	$-1/(4 \cdot 7 \sqrt{2 \cdot 3})$	-0.014580
4	7/2	1	3/2	$1/(4 \cdot 3 \sqrt{2 \cdot 7})$	0.022272	4	7/2	4	7/2	$\sqrt{5}/(4 \cdot 3 \sqrt{2 \cdot 3 \cdot 7})$	0.028753
1	3/2	2	3/2	$-1/(2 \sqrt{2 \cdot 5 \cdot 7})$	-0.059761	a	d	b	e	$\begin{Bmatrix} a & b & 4 \\ d & e & 4 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{Bmatrix}$	
2	3/2	2	3/2	$1/(2 \cdot 5 \sqrt{7})$	0.037796	4	7/2	0	1/2	$1/(2 \cdot 9)$	0.055556
2	5/2	2	3/2	$-1/(2 \cdot 5 \sqrt{7})$	-0.037796	3	7/2	1	1/2	$-1/(4 \cdot 3 \sqrt{3})$	-0.048113
3	5/2	2	3/2	$\sqrt{3}/(2 \cdot 7 \sqrt{2 \cdot 5})$	0.039123	4	7/2	1	1/2	$\sqrt{5}/(4 \cdot 9 \sqrt{3})$	0.035861
3	7/2	2	3/2	$-1/(4 \cdot 7 \sqrt{2})$	-0.025254	3	5/2	1	3/2	$1/(2 \cdot 3 \sqrt{2 \cdot 7})$	0.044544
4	7/2	2	3/2	$1/(4 \sqrt{2 \cdot 3 \cdot 7})$	0.038575	3	7/2	1	3/2	$\sqrt{5}/(4 \cdot 3 \sqrt{2 \cdot 3 \cdot 7})$	0.028753
						4	7/2	1	3/2	$\sqrt{7}/(4 \cdot 9 \sqrt{2 \cdot 3})$	0.030003

ТАБЛИЦА 10.13 (продолжение)

a	d	b	e	$\begin{Bmatrix} a & b & 4 \\ d & e & 4 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{Bmatrix}$		a	d	b	e	$\begin{Bmatrix} a & b & 1 \\ d & e & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 1 \end{Bmatrix}$	
2	5/2	2	3/2	$-1/(2 \cdot 3 \sqrt{3 \cdot 5})$	-0.043033	2	5/2	2	5/2	$-1/(9 \sqrt{2 \cdot 5})$	-0.035136
3	5/2	2	3/2	$1/(2 \cdot 3 \sqrt{2 \cdot 3 \cdot 7})$	0.025717	3	5/2	2	5/2	$-1/(2 \cdot 9)$	-0.555556
3	7/2	2	3/2	$-1/(4 \sqrt{2 \cdot 5 \cdot 7})$	-0.029881	2	5/2	3	5/2	$1/(2 \cdot 9)$	0.555556
4	7/2	2	3/2	$\sqrt{11}/(4 \cdot 9 \sqrt{2 \cdot 5})$	0.029134	3	5/2	3	5/2	$1/(9 \sqrt{7})$	0.041996
2	3/2	2	5/2	$1/(2 \cdot 3 \sqrt{3 \cdot 5})$	0.043033	3	7/2	3	7/2	$-1/(8 \sqrt{3 \cdot 7})$	-0.027277
2	5/2	2	5/2	$1/(2 \cdot 9 \sqrt{5})$	0.024845	4	7/2	3	7/2	$-1/(8 \cdot 3)$	-0.041667
3	5/2	2	5/2	$1/(9 \sqrt{2 \cdot 7})$	0.029696	3	7/2	4	7/2	$1/(8 \cdot 3)$	0.041667
3	7/2	2	5/2	$\sqrt{11}/(4 \cdot 3 \sqrt{3 \cdot 5 \cdot 7})$	0.026972	4	7/2	4	7/2	$\sqrt{5}/(8 \cdot 9)$	0.031056
4	7/2	2	5/2	$1/(4 \cdot 3 \sqrt{3 \cdot 5})$	0.021517						
1	3/2	3	5/2	$-1/(2 \cdot 3 \sqrt{2 \cdot 7})$	-0.044544	a	d	b	e	$\begin{Bmatrix} a & b & 0 \\ d & e & 1 \\ 1/2 & 1/2 & 1 \end{Bmatrix}$	
2	3/2	3	5/2	$1/(2 \cdot 3 \sqrt{2 \cdot 3 \cdot 7})$	0.025717						
2	5/2	3	5/2	$-1/(9 \sqrt{2 \cdot 7})$	-0.029696						
3	5/2	3	5/2	$\sqrt{11}/(2 \cdot 9 \cdot 7)$	0.026322	0	1/2	0	1/2	$1/(2 \sqrt{3})$	0.288675
3	7/2	3	5/2	$-\sqrt{5}/(2 \cdot 3 \cdot 7 \sqrt{2 \cdot 3})$	-0.021735	1	1/2	1	1/2	$-1/(2 \cdot 9)$	-0.055556
4	7/2	3	5/2	$1/(2 \cdot 3 \sqrt{2 \cdot 3 \cdot 7})$	0.025717	1	3/2	1	1/2	$1/9$	0.111111
1	1/2	3	7/2	$1/(4 \cdot 3 \sqrt{3})$	0.048113	1	1/2	1	3/2	$-1/9$	-0.111111
1	3/2	3	7/2	$\sqrt{5}/(4 \cdot 3 \sqrt{2 \cdot 3 \cdot 7})$	0.028752	1	3/2	1	3/2	$\sqrt{5}/(2 \cdot 9 \sqrt{2})$	0.087841
2	3/2	3	7/2	$1/(4 \sqrt{2 \cdot 5 \cdot 7})$	0.029881	2	3/2	2	3/2	$-1/(2 \cdot 5 \sqrt{2 \cdot 3})$	-0.040825
2	5/2	3	7/2	$\sqrt{11}/(4 \cdot 3 \sqrt{3 \cdot 5 \cdot 7})$	0.026972	2	5/2	2	3/2	$1/(3 \cdot 5)$	0.066667
3	5/2	3	7/2	$\sqrt{5}/(2 \cdot 3 \cdot 7 \sqrt{2 \cdot 3})$	0.021735	2	3/2	2	5/2	$-1/(3 \cdot 5)$	-0.066667
3	7/2	3	7/2	$1/(4 \cdot 7 \sqrt{2})$	0.025253	2	5/2	2	5/2	$\sqrt{7}/(2 \cdot 3 \cdot 5 \sqrt{3})$	0.050918
4	7/2	3	7/2	$\sqrt{5}/(4 \cdot 9 \sqrt{2 \cdot 7})$	0.016600	3	5/2	3	5/2	$-\sqrt{5}/(2 \cdot 3 \cdot 7 \sqrt{3})$	-0.030738
0	1/2	4	7/2	$-1/(2 \cdot 9)$	-0.055556	3	7/2	3	5/2	$1/(3 \cdot 7)$	0.047619
1	1/2	4	7/2	$\sqrt{5}/(4 \cdot 9 \sqrt{3})$	0.035860	3	5/2	3	7/2	$-1/(3 \cdot 7)$	-0.047619
1	3/2	4	7/2	$-\sqrt{7}/(4 \cdot 9 \sqrt{2 \cdot 3})$	-0.030003	3	7/2	3	7/2	$1/(4 \cdot 7)$	0.035714
2	3/2	4	7/2	$\sqrt{11}/(4 \cdot 9 \sqrt{2 \cdot 5})$	0.029134	4	7/2	4	7/2	$-\sqrt{7}/(4 \cdot 27)$	-0.024498
2	5/2	4	7/2	$-1/(4 \cdot 3 \sqrt{3 \cdot 5})$	-0.021517						
3	5/2	4	7/2	$1/(2 \cdot 3 \sqrt{2 \cdot 3 \cdot 7})$	0.025717	a	d	b	e	$\begin{Bmatrix} a & b & 1 \\ d & e & 1 \\ 1/2 & 1/2 & 1 \end{Bmatrix}$	
3	7/2	4	7/2	$-\sqrt{5}/(4 \cdot 9 \sqrt{2 \cdot 7})$	-0.016600						
4	7/2	4	7/2	$\sqrt{13}/(4 \cdot 27 \sqrt{2})$	0.023607						
				$\begin{Bmatrix} a & b & 1 \\ d & e & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 1 \end{Bmatrix}$							
a	d	b	e			1	1/2	0	1/2	$1/(3 \sqrt{2 \cdot 3})$	0.136083
						1	3/2	0	1/2	$-1/(2 \cdot 3 \sqrt{2 \cdot 3})$	-0.068041
						0	1/2	1	1/2	$1/(3 \sqrt{2 \cdot 3})$	0.136082
1	1/2	0	1/2	$-1/(2 \cdot 3)$	-0.666667	1	3/2	1	1/2	$1/(4 \cdot 3)$	0.083333
0	1/2	1	1/2	$1/(2 \cdot 3)$	0.666667	2	3/2	1	1/2	$1/(4 \cdot 3 \sqrt{3})$	0.048113
1	1/2	1	1/2	$1/(3 \sqrt{2 \cdot 3})$	0.136083	0	1/2	1	3/2	$1/(2 \cdot 3 \sqrt{2 \cdot 3})$	0.068041
1	3/2	1	3/2	$-1/(4 \cdot 3 \sqrt{3})$	-0.048113	1	1/2	1	3/2	$1/(4 \cdot 3)$	0.083333
2	3/2	1	3/2	$-1/(4 \cdot 3)$	-0.083333	2	3/2	1	3/2	$1/(3 \sqrt{2 \cdot 3 \cdot 5})$	0.060858
1	3/2	2	3/2	$1/(4 \cdot 3)$	0.083333	2	5/2	1	3/2	$-1/(4 \cdot 3 \sqrt{5})$	-0.037268
2	3/2	2	3/2	$1/(4 \sqrt{3 \cdot 5})$	0.064550						

ТАБЛИЦА 10.13 (продолжение)

$a$	$d$	$b$	$e$	$\begin{Bmatrix} a & b & 1 \\ d & e & 1 \\ 1/2 & 1/2 & 1 \end{Bmatrix}$	$a$	$d$	$b$	$e$	$\begin{Bmatrix} a & b & 2 \\ d & e & 1 \\ 1/2 & 1/2 & 1 \end{Bmatrix}$		
1	1/2	2	3/2	$-1/(4 \cdot 3 \sqrt{3})$	-0.048113	3	5/2	2	5/2	$-2/(3 \cdot 5 \sqrt{3 \cdot 7})$	-0.029096
1	3/2	2	3/2	$1/(3 \sqrt{2 \cdot 3 \cdot 5})$	0.060858	3	7/2	2	5/2	$-1/(4 \cdot 3 \sqrt{5 \cdot 7})$	-0.014086
2	5/2	2	3/2	$1/(4 \cdot 3 \sqrt{3})$	0.048113	4	7/2	2	5/2	$-1/(4 \cdot 3 \sqrt{5})$	-0.037268
3	5/2	2	3/2	$1/(2 \cdot 3 \sqrt{2 \cdot 3 \cdot 5})$	0.030429	1	3/2	3	5/2	$1/(2 \cdot 3 \sqrt{2 \cdot 5})$	0.052705
1	3/2	2	5/2	$1/(4 \cdot 3 \sqrt{5})$	0.037268	2	3/2	3	5/2	$1/(2 \cdot 3 \cdot 5)$	0.033333
2	3/2	2	5/2	$1/(4 \cdot 3 \sqrt{3})$	0.048113	2	5/2	3	5/2	$2/(3 \cdot 5 \sqrt{3 \cdot 7})$	0.029096
3	5/2	2	5/2	$1/(3 \sqrt{2 \cdot 5 \cdot 7})$	0.039841	3	5/2	3	5/2	$\sqrt{2}/(3 \cdot 7 \sqrt{5})$	0.030117
3	7/2	2	5/2	$-1/(2 \cdot 3 \sqrt{2 \cdot 3 \cdot 7})$	-0.025717	3	7/2	3	5/2	$1/(4 \cdot 7 \sqrt{2 \cdot 3})$	0.014580
2	3/2	3	5/2	$-1/(2 \cdot 3 \sqrt{2 \cdot 3 \cdot 5})$	-0.030429	4	7/2	3	5/2	$1/(4 \cdot 3 \sqrt{2 \cdot 7})$	0.022272
2	5/2	3	5/2	$1/(3 \sqrt{2 \cdot 5 \cdot 7})$	0.039841	2	5/2	3	7/2	$-1/(4 \cdot 3 \sqrt{5 \cdot 7})$	-0.014085
3	7/2	3	5/2	$1/(4 \cdot 3 \sqrt{2 \cdot 3})$	0.034021	3	5/2	3	7/2	$-1/(4 \cdot 7 \sqrt{2 \cdot 3})$	-0.014580
4	7/2	3	5/2	$1/(4 \cdot 3 \sqrt{2 \cdot 7})$	0.022272	3	7/2	3	7/2	$-1/(4 \cdot 7 \sqrt{2 \cdot 3})$	-0.014580
2	5/2	3	7/2	$1/(2 \cdot 3 \sqrt{2 \cdot 3 \cdot 7})$	0.025172	4	7/2	3	7/2	$-1/(4 \cdot 3 \sqrt{2 \cdot 7})$	-0.022272
3	5/2	3	7/2	$1/(4 \cdot 3 \sqrt{2 \cdot 3})$	0.034021	2	5/2	4	7/2	$1/(4 \cdot 3 \sqrt{5})$	0.037268
4	7/2	3	7/2	$1/(9 \sqrt{2 \cdot 7})$	0.029695	3	5/2	4	7/2	$1/(4 \cdot 3 \sqrt{2 \cdot 7})$	0.022272
3	5/2	4	7/2	$-1/(4 \cdot 3 \sqrt{2 \cdot 7})$	-0.022272	3	7/2	4	7/2	$1/(4 \cdot 3 \sqrt{2 \cdot 7})$	0.022272
3	7/2	4	7/2	$1/(9 \sqrt{2 \cdot 7})$	0.029696	4	7/2	4	7/2	$\sqrt{11}/(4 \cdot 27 \sqrt{2})$	0.021715
$a$	$d$	$b$	$e$	$\begin{Bmatrix} a & b & 2 \\ d & e & 1 \\ 1/2 & 1/2 & 1 \end{Bmatrix}$	$a$	$d$	$b$	$e$	$\begin{Bmatrix} a & b & 1 \\ d & e & 2 \\ 1/2 & 1/2 & 1 \end{Bmatrix}$		
2	3/2	0	1/2	$-1/(2 \sqrt{2 \cdot 3 \cdot 5})$	-0.091287	1	3/2	0	1/2	$1/(2 \cdot 3 \sqrt{2})$	0.117851
1	1/2	1	1/2	1/9	0.111111	1	3/2	1	1/2	$1/(4 \cdot 3 \sqrt{3})$	0.048113
1	3/2	1	1/2	$1/(4 \cdot 9)$	0.027778	2	3/2	1	1/2	$-1/(4 \cdot 3 \cdot 5)$	-0.016667
2	3/2	1	1/2	$1/(4 \sqrt{3 \cdot 5})$	0.064550	2	5/2	1	1/2	$1/(3 \cdot 5)$	0.066667
1	1/2	1	3/2	$-1/(4 \cdot 9)$	-0.027778	0	1/2	1	3/2	$1/(2 \cdot 3 \sqrt{2})$	0.117851
1	3/2	1	3/2	$-1/(2 \cdot 9 \sqrt{2 \cdot 5})$	-0.017568	1	1/2	1	3/2	$-1/(4 \cdot 3 \sqrt{3})$	-0.048113
2	3/2	1	3/2	$-1/(2 \cdot 5 \sqrt{2 \cdot 3})$	-0.040825	1	3/2	1	3/2	$1/(2 \cdot 3 \sqrt{2 \cdot 3})$	0.068041
2	5/2	1	3/2	$-1/(4 \cdot 3 \cdot 5)$	-0.016667	2	3/2	1	3/2	$-1/(2 \cdot 3 \cdot 5 \sqrt{2})$	-0.023570
3	5/2	1	3/2	$-1/(2 \cdot 3 \sqrt{2 \cdot 5})$	-0.052705	2	5/2	1	3/2	$\sqrt{7}/(4 \cdot 3 \cdot 5)$	0.044096
0	1/2	2	3/2	$1/(2 \sqrt{2 \cdot 3 \cdot 5})$	0.091287	1	1/2	2	3/2	$1/(4 \cdot 3 \cdot 5)$	-0.016667
1	1/2	2	3/2	$1/(4 \sqrt{3 \cdot 5})$	0.064550	1	3/2	2	3/2	$1/(2 \cdot 3 \cdot 5 \sqrt{2})$	0.023570
1	3/2	2	3/2	$1/(2 \cdot 5 \sqrt{2 \cdot 3})$	0.040825	2	3/2	2	3/2	$-1/(2 \cdot 5 \sqrt{2 \cdot 3 \cdot 5})$	-0.018257
2	3/2	2	3/2	$\sqrt{7}/(2 \cdot 5 \sqrt{2 \cdot 3 \cdot 5})$	0.048305	2	5/2	2	3/2	$\sqrt{7}/(4 \cdot 5 \sqrt{3 \cdot 5})$	0.034156
2	5/2	2	3/2	$\sqrt{7}/(4 \cdot 3 \cdot 5 \sqrt{5})$	0.019720	3	5/2	2	3/2	$1/(2 \cdot 5 \sqrt{2 \cdot 3 \cdot 7})$	-0.015430
3	5/2	2	3/2	$1/(2 \cdot 3 \cdot 5)$	0.033333	3	7/2	2	3/2	$1/(5 \sqrt{3 \cdot 7})$	0.043644
1	3/2	2	5/2	$-1/(4 \cdot 3 \cdot 5)$	-0.016667	1	1/2	2	5/2	$-1/(3 \cdot 5)$	-0.066667
2	3/2	2	5/2	$-\sqrt{7}/(4 \cdot 3 \cdot 5 \sqrt{5})$	-0.019720	1	3/2	2	5/2	$\sqrt{7}/(4 \cdot 3 \cdot 5)$	0.044096
2	5/2	2	5/2	$-1/(3 \cdot 5 \sqrt{3 \cdot 5})$	-0.017213	2	3/2	2	5/2	$-\sqrt{7}/(4 \cdot 5 \sqrt{3 \cdot 5})$	-0.034157
						2	5/2	2	5/2	$\sqrt{2 \cdot 7}/(9 \cdot 5 \sqrt{5})$	0.037185
						3	5/2	2	5/2	$-2/(9 \cdot 5 \sqrt{7})$	-0.016798
						3	7/2	2	5/2	$1/(2 \cdot 5 \sqrt{2 \cdot 7})$	0.026726

ТАБЛИЦА 10.13 (продолжение)

$a$	$d$	$b$	$e$	$\begin{Bmatrix} a & b & 1 \\ d & e & 2 \\ 1/2 & 1/2 & 1 \end{Bmatrix}$	$a$	$d$	$b$	$e$	$\begin{Bmatrix} a & b & 2 \\ d & e & 2 \\ 1/2 & 1/2 & 1 \end{Bmatrix}$		
2	3/2	3	5/2	$-1/(2 \cdot 5 \sqrt{2 \cdot 3 \cdot 7})$	-0.015430	3	5/2	2	5/2	$1/(5 \sqrt{2 \cdot 3 \cdot 7})$	0.030861
2	5/2	3	5/2	$2/(9 \cdot 5 \sqrt{7})$	0.016798	3	7/2	2	5/2	$-1/(4 \cdot 5 \sqrt{3 \cdot 7})$	-0.010911
3	5/2	3	5/2	$-1/(9 \cdot 7)$	-0.015873	4	7/2	2	5/2	$7/(4 \cdot 9 \cdot 5 \sqrt{3})$	0.022453
3	7/2	3	5/2	$1/(4 \cdot 7 \sqrt{2})$	0.025254	1	1/2	3	5/2	$-1/(9 \sqrt{2 \cdot 5})$	-0.035136
4	7/2	3	5/2	$-1/(4 \cdot 3 \sqrt{2 \cdot 3 \cdot 7})$	-0.012859	1	3/2	3	5/2	$\sqrt{5}/(2 \cdot 9 \sqrt{2 \cdot 7})$	0.033201
2	3/2	3	7/2	$-1/(5 \sqrt{3 \cdot 7})$	-0.043644	2	3/2	3	5/2	$-1/(2 \cdot 3 \cdot 5 \sqrt{7})$	-0.012599
2	5/2	3	7/2	$1/(2 \cdot 5 \sqrt{2 \cdot 7})$	0.026726	2	5/2	3	5/2	$1/(5 \sqrt{2 \cdot 3 \cdot 7})$	0.030861
3	5/2	3	7/2	$-1/(4 \cdot 7 \sqrt{2})$	-0.025254	3	7/2	3	5/2	$1/(4 \cdot 3 \sqrt{2 \cdot 5})$	0.026352
3	7/2	3	7/2	$1/(4 \cdot 7 \sqrt{2})$	0.025254	4	7/2	3	5/2	$\sqrt{5}/(4 \cdot 9 \sqrt{2 \cdot 3 \cdot 7})$	0.009584
4	7/2	3	7/2	$-1/(4 \cdot 3 \sqrt{2 \cdot 3 \cdot 7})$	-0.012859	1	3/2	3	7/2	$1/(2 \cdot 3 \sqrt{5 \cdot 7})$	0.028172
3	5/2	4	7/2	$-1/(4 \cdot 3 \sqrt{2 \cdot 3 \cdot 7})$	-0.012859	2	3/2	3	7/2	$1/(2 \cdot 5 \sqrt{2 \cdot 7})$	0.026726
3	7/2	4	7/2	$1/(4 \cdot 3 \sqrt{2 \cdot 3 \cdot 7})$	0.012859	2	5/2	3	7/2	$1/(4 \cdot 5 \sqrt{3 \cdot 7})$	0.010911
4	7/2	4	7/2	$-\sqrt{7}/(4 \cdot 9 \sqrt{2 \cdot 3 \cdot 5})$	-0.013418	3	5/2	3	7/2	$1/(4 \cdot 3 \sqrt{2 \cdot 5})$	0.026352
$a$	$d$	$b$	$e$	$\begin{Bmatrix} a & b & 2 \\ d & e & 2 \\ 1/2 & 1/2 & 1 \end{Bmatrix}$	$a$	$d$	$b$	$e$	$\begin{Bmatrix} a & b & 2 \\ d & e & 2 \\ 1/2 & 1/2 & 1 \end{Bmatrix}$		
2	3/2	0	1/2	$1/(2 \cdot 5 \sqrt{2})$	0.070711	4	7/2	3	7/2	$1/(3 \sqrt{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7})$	0.023002
2	5/2	0	1/2	$-1/(3 \cdot 5 \sqrt{2})$	-0.047140	2	3/2	4	7/2	$-1/(2 \cdot 3 \cdot 5 \sqrt{2})$	-0.023570
1	3/2	1	1/2	$1/(4 \sqrt{3 \cdot 5})$	0.064549	2	5/2	4	7/2	$7/(4 \cdot 9 \cdot 5 \sqrt{3})$	0.022453
2	3/2	1	1/2	$1/(4 \cdot 3 \cdot 5)$	0.016667	3	5/2	4	7/2	$-\sqrt{5}/(4 \cdot 9 \sqrt{2 \cdot 3 \cdot 7})$	-0.005584
2	5/2	1	1/2	$2/(9 \cdot 5)$	0.044444	3	7/2	4	7/2	$1/(3 \sqrt{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7})$	0.023002
3	5/2	1	1/2	$1/(9 \sqrt{2 \cdot 5})$	0.035136	$a$	$d$	$b$	$e$	$\begin{Bmatrix} a & b & 3 \\ d & e & 2 \\ 1/2 & 1/2 & 1 \end{Bmatrix}$	
1	1/2	1	3/2	$1/(4 \sqrt{3 \cdot 5})$	0.064550	3	5/2	0	1/2	$-1/(2 \cdot 3 \sqrt{7})$	-0.062994
2	3/2	1	3/2	$1/(3 \cdot 5 \sqrt{2})$	0.047140	2	3/2	1	1/2	$1/(3 \cdot 5)$	0.066667
2	5/2	1	3/2	$-\sqrt{7}/(4 \cdot 9 \cdot 5)$	-0.014699	2	5/2	1	1/2	$1/(2 \cdot 9 \cdot 5)$	0.011111
3	5/2	1	3/2	$\sqrt{5}/(2 \cdot 9 \sqrt{2 \cdot 7})$	0.033201	3	5/2	1	1/2	$1/(9 \sqrt{7})$	0.041996
3	7/2	1	3/2	$-1/(2 \cdot 3 \sqrt{5 \cdot 7})$	-0.028172	2	3/2	1	3/2	$-1/(2 \cdot 3 \cdot 5 \sqrt{2})$	-0.023570
0	1/2	2	3/2	$1/(2 \cdot 5 \sqrt{2})$	0.070711	2	5/2	1	3/2	$-1/(9 \cdot 5 \sqrt{7})$	-0.008399
1	1/2	2	3/2	$-1/(4 \cdot 3 \cdot 5)$	-0.016667	3	5/2	1	3/2	$-2/(9 \cdot 7)$	-0.031746
1	3/2	2	3/2	$1/(3 \cdot 5 \sqrt{2})$	0.047140	3	7/2	1	3/2	$-1/(4 \cdot 3 \cdot 7 \sqrt{2})$	-0.008418
2	5/2	2	3/2	$1/(4 \cdot 3 \sqrt{5})$	0.037268	4	7/2	1	3/2	$-1/(4 \sqrt{2 \cdot 3 \cdot 7})$	-0.038576
3	5/2	2	3/2	$1/(2 \cdot 3 \cdot 5 \sqrt{7})$	0.012599	1	1/2	2	3/2	$1/(3 \cdot 5)$	0.066667
3	7/2	2	3/2	$1/(2 \cdot 5 \sqrt{2 \cdot 7})$	0.026726	1	3/2	2	3/2	$1/(2 \cdot 3 \cdot 5 \sqrt{2})$	0.023570
4	7/2	2	3/2	$1/(2 \cdot 3 \cdot 5 \sqrt{2})$	0.023570	2	3/2	2	3/2	$1/(2 \cdot 5 \sqrt{5})$	0.044721
0	1/2	2	5/2	$1/(3 \cdot 5 \sqrt{2})$	0.047140	2	5/2	2	3/2	$\sqrt{2}/(3 \cdot 5 \sqrt{5 \cdot 7})$	0.015936
1	1/2	2	5/2	$2/(9 \cdot 5)$	0.044444	3	5/2	2	3/2	$2/(5 \cdot 7 \sqrt{3})$	0.032994
1	3/2	2	5/2	$\sqrt{7}/(4 \cdot 9 \cdot 5)$	0.014699	3	7/2	2	3/2	$\sqrt{3}/(4 \cdot 5 \cdot 7 \sqrt{2})$	0.008748
2	3/2	2	5/2	$1/(4 \cdot 3 \sqrt{5})$	0.037268	4	7/2	2	3/2	$1/(4 \cdot 3 \sqrt{2 \cdot 7})$	0.022272
						1	1/2	2	5/2	$-1/(2 \cdot 9 \cdot 5)$	-0.011111
						1	3/2	2	5/2	$-1/(9 \cdot 5 \sqrt{7})$	-0.008399
						2	3/2	2	5/2	$-\sqrt{2}/(3 \cdot 5 \sqrt{5 \cdot 7})$	-0.015936

ТАБЛИЦА 10.13 (продолжение)

a	d	b	e	$\left\{ \begin{array}{ccc} a & b & 3 \\ d & e & 2 \\ 1/2 & 1/2 & 1 \end{array} \right\}$		a	d	b	e	$\left\{ \begin{array}{ccc} a & b & 2 \\ d & e & 3 \\ 1/2 & 1/2 & 1 \end{array} \right\}$	
2	5/2	2	5/2	$-1/(2 \cdot 5 \sqrt{3 \cdot 5 \cdot 7})$	-0.009759	3	7/2	2	3/2	$\sqrt{3}/(4 \cdot 7 \sqrt{5})$	0.027664
3	5/2	2	5/2	$-1/(5 \cdot 7 \sqrt{2})$	-0.020203	4	7/2	2	3/2	$-1/(4 \cdot 3 \sqrt{3 \cdot 5 \cdot 7})$	-0.008133
3	7/2	2	5/2	$-1/(3 \cdot 5 \cdot 7)$	-0.000523	0	1/2	2	5/2	$1/(2 \cdot 3 \sqrt{5})$	0.074536
4	7/2	2	5/2	$-1/(9 \sqrt{3 \cdot 7})$	-0.024246	1	1/2	2	5/2	$-1/(9 \sqrt{2 \cdot 5})$	-0.035136
0	1/2	3	5/2	$1/(2 \cdot 3 \sqrt{7})$	0.062994	1	3/2	2	5/2	$2/(9 \cdot 5)$	0.044444
1	1/2	3	5/2	$1/(9 \sqrt{7})$	0.041996	2	3/2	2	5/2	$-2/(3 \cdot 5 \sqrt{5 \cdot 7})$	-0.022537
1	3/2	3	5/2	$2/(9 \cdot 7)$	0.031746	2	5/2	2	5/2	$1/(5 \sqrt{5 \cdot 7})$	0.033806
2	3/2	3	5/2	$2/(5 \cdot 7 \sqrt{3})$	0.032991	3	5/2	2	5/2	$-1/(2 \cdot 5 \cdot 7)$	-0.014286
2	5/2	3	5/2	$1/(5 \cdot 7 \sqrt{2})$	0.020203	3	7/2	2	5/2	$1/(7 \sqrt{2 \cdot 3 \cdot 5})$	0.026082
3	5/2	3	5/2	$1/(2 \cdot 7 \sqrt{7})$	0.026997	4	7/2	2	5/2	$-1/(9 \sqrt{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7})$	-0.007667
3	7/2	3	5/2	$1/(3 \cdot 7 \sqrt{2 \cdot 7})$	0.012726	1	1/2	3	5/2	$-1/(2 \cdot 9 \cdot 7)$	-0.007937
4	7/2	3	5/2	$\sqrt{11}/(9 \cdot 7 \sqrt{2 \cdot 3})$	0.021492	1	3/2	3	5/2	$\sqrt{2}/(9 \cdot 7 \sqrt{5})$	0.010039
1	3/2	3	7/2	$1/(4 \cdot 3 \cdot 7 \sqrt{2})$	0.008418	2	3/2	3	5/2	$-1/(3 \cdot 5 \cdot 7)$	-0.009524
2	3/2	3	7/2	$-\sqrt{3}/(4 \cdot 5 \cdot 7 \sqrt{2})$	-0.008748	2	5/2	3	5/2	$1/(2 \cdot 5 \cdot 7)$	0.014286
2	5/2	3	7/2	$-1/(3 \cdot 5 \cdot 7)$	-0.009238	3	5/2	3	5/2	$-1/(7 \sqrt{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7})$	-0.009858
3	5/2	3	7/2	$-1/(3 \cdot 7 \sqrt{2 \cdot 7})$	-0.012727	3	7/2	3	5/2	$1/(3 \cdot 7 \sqrt{7})$	0.017998
3	7/2	3	7/2	$-1/(4 \cdot 7 \sqrt{2 \cdot 7})$	-0.009545	4	7/2	3	5/2	$-1/(9 \cdot 7 \sqrt{3})$	-0.009164
4	7/2	3	7/2	$-\sqrt{11}/(4 \cdot 3 \cdot 7 \sqrt{2 \cdot 3})$	-0.016119	1	1/2	3	7/2	$-1/(3 \cdot 7)$	-0.047619
1	3/2	4	7/2	$1/(4 \sqrt{2 \cdot 3 \cdot 7})$	0.038576	1	3/2	3	7/2	$1/(2 \cdot 7 \sqrt{2 \cdot 3})$	0.029161
2	3/2	4	7/2	$1/(4 \cdot 3 \sqrt{2 \cdot 7})$	0.022272	2	3/2	3	7/2	$-\sqrt{3}/(4 \cdot 7 \sqrt{5})$	-0.027664
2	5/2	4	7/2	$1/(9 \sqrt{3 \cdot 7})$	0.024246	2	5/2	3	7/2	$1/(7 \sqrt{2 \cdot 3 \cdot 5})$	0.026082
3	5/2	4	7/2	$\sqrt{11}/(9 \cdot 7 \sqrt{2 \cdot 3})$	0.021492	3	5/2	3	7/2	$-1/(3 \cdot 7 \sqrt{7})$	-0.017998
3	7/2	4	7/2	$\sqrt{11}/(4 \cdot 3 \cdot 7 \sqrt{2 \cdot 3})$	0.016119	3	7/2	3	7/2	$\sqrt{11}/(8 \cdot 7 \sqrt{7})$	0.022385
4	7/2	4	7/2	$\sqrt{11}/(4 \cdot 3 \sqrt{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7})$	0.019072	4	7/2	3	7/2	$-\sqrt{11}/(8 \cdot 3 \cdot 7 \sqrt{3})$	-0.011398
						2	3/2	4	7/2	$-1/(4 \cdot 3 \sqrt{3 \cdot 5 \cdot 7})$	-0.008133
						2	5/2	4	7/2	$1/(9 \sqrt{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7})$	0.007667
						3	5/2	4	7/2	$-1/(9 \cdot 7 \sqrt{3})$	-0.009164
						3	7/2	4	7/2	$\sqrt{11}/(8 \cdot 3 \cdot 7 \sqrt{3})$	0.011398
						4	7/2	4	7/2	$-1/(8 \cdot 3 \sqrt{3 \cdot 7})$	-0.009092
a	d	b	e	$\left\{ \begin{array}{ccc} a & b & 2 \\ d & e & 3 \\ 1/2 & 1/2 & 1 \end{array} \right\}$		a	d	b	e	$\left\{ \begin{array}{ccc} a & d & 3 \\ d & e & 3 \\ 1/2 & 1/2 & 1 \end{array} \right\}$	
2	5/2	0	1/2	$1/(2 \cdot 3 \sqrt{5})$	0.074536	3	5/2	0	1/2	$1/(3 \cdot 7)$	0.047619
2	5/2	1	1/2	$1/(9 \sqrt{2 \cdot 5})$	0.035136	3	7/2	0	1/2	$-1/(4 \cdot 7)$	-0.035714
3	5/2	1	1/2	$-1/(2 \cdot 9 \cdot 7)$	-0.007937	2	5/2	1	1/2	$1/(9 \sqrt{7})$	0.041996
3	7/2	1	1/2	$1/(3 \cdot 7)$	0.047619	3	5/2	1	1/2	$1/(9 \cdot 7)$	0.015873
1	3/2	1	3/2	$1/(4 \sqrt{3 \cdot 5})$	0.064550	3	7/2	1	1/2	$5/(8 \cdot 3 \cdot 7)$	0.029762
2	3/2	1	3/2	$-1/(4 \cdot 3 \cdot 5)$	-0.016667	4	7/2	1	1/2	$1/(8 \sqrt{3 \cdot 7})$	0.027277
2	5/2	1	3/2	$2/(9 \cdot 5)$	0.044444	2	3/2	1	3/2	$1/(3 \sqrt{2 \cdot 5 \cdot 7})$	0.039841
3	5/2	1	3/2	$-\sqrt{2}/(9 \cdot 7 \sqrt{5})$	-0.010039	3	5/2	2	3/2	$-1/(2 \cdot 9 \sqrt{2 \cdot 5 \cdot 7})$	-0.006640
3	7/2	1	3/2	$1/(2 \cdot 7 \sqrt{2 \cdot 3})$	0.029161	2	5/2	1	3/2		
1	3/2	2	3/2	$1/(4 \cdot 3 \cdot 5)$	0.016667						
2	3/2	2	3/2	$-1/(4 \cdot 5 \sqrt{5 \cdot 7})$	-0.008452						
2	5/2	2	3/2	$2/(3 \cdot 5 \sqrt{5 \cdot 7})$	0.022537						
3	5/2	2	3/2	$-1/(3 \cdot 5 \cdot 7)$	-0.009524						

ТАБЛИЦА 10.13 (продолжение)

$a$	$d$	$b$	$e$	$\begin{Bmatrix} a & b & 3 \\ d & e & 3 \\ 1/2 & 1/2 & 1 \end{Bmatrix}$	$a$	$d$	$b$	$e$	$\begin{Bmatrix} a & b & 4 \\ d & e & 3 \\ 1/2 & 1/2 & 1 \end{Bmatrix}$		
3	5/2	1	3/2	$5\sqrt{5}/(4 \cdot 9 \cdot 7\sqrt{2})$	0.031372	3	5/2	1	3/2	$-\sqrt{5}/(4 \cdot 3 \cdot 7\sqrt{2})$	-0.018823
3	7/2	1	3/2	$-1/(4 \cdot 7\sqrt{2} \cdot 3)$	-0.014580	3	7/2	1	3/2	$-1/(4 \cdot 3 \cdot 7\sqrt{2} \cdot 3)$	-0.004860
4	7/2	1	3/2	$1/(4 \cdot 3\sqrt{2} \cdot 7)$	0.022271	4	7/2	1	3/2	$-\sqrt{5}/(4 \cdot 9\sqrt{2} \cdot 3)$	-0.025358
1	3/2	2	3/2	$1/(3\sqrt{2} \cdot 5 \cdot 7)$	0.039841	2	3/2	2	3/2	$1/(5\sqrt{3} \cdot 7)$	0.043644
2	5/2	2	3/2	$1/(4 \cdot 3\sqrt{7})$	0.031497	2	5/2	2	3/2	$1/(4 \cdot 5\sqrt{3} \cdot 7)$	0.010911
3	5/2	2	3/2	$1/(4 \cdot 7\sqrt{2} \cdot 3 \cdot 5)$	0.006521	3	5/2	2	3/2	$\sqrt{5}/(4 \cdot 7\sqrt{2} \cdot 3)$	0.032603
3	7/2	2	3/2	$1/(4 \cdot 7\sqrt{2})$	0.025254	3	7/2	2	3/2	$1/(4 \cdot 3 \cdot 7\sqrt{2})$	0.008418
4	7/2	2	3/2	$1/(4 \cdot 3\sqrt{2} \cdot 3 \cdot 7)$	0.012859	4	7/2	2	3/2	$\sqrt{11}/(4 \cdot 9\sqrt{2} \cdot 7)$	0.024622
1	1/2	2	5/2	$1/(9\sqrt{7})$	0.041996	2	3/2	2	5/2	$-1/(4 \cdot 5\sqrt{3} \cdot 7)$	-0.010911
1	3/2	2	5/2	$1/(2 \cdot 9\sqrt{2} \cdot 5 \cdot 7)$	0.006640	2	5/2	2	5/2	$-1/(9 \cdot 5\sqrt{3} \cdot 7)$	-0.004849
2	3/2	2	5/2	$1/(4 \cdot 3\sqrt{7})$	0.031497	3	5/2	2	5/2	$-\sqrt{5}/(9 \cdot 7\sqrt{2} \cdot 3)$	-0.014490
3	5/2	2	5/2	$1/(7\sqrt{2} \cdot 3 \cdot 5)$	0.026082	3	7/2	2	5/2	$-1/(8 \cdot 3 \cdot 7)$	-0.005952
3	7/2	2	5/2	$-1/(8 \cdot 3 \cdot 7)$	-0.005952	4	7/2	2	5/2	$-\sqrt{11}/(8 \cdot 9\sqrt{7})$	-0.017411
4	7/2	2	5/2	$\sqrt{7}/(8 \cdot 9\sqrt{3})$	0.021216	1	1/2	3	5/2	$1/(3 \cdot 7)$	0.047619
0	1/2	3	5/2	$1/(3 \cdot 7)$	0.047619	1	3/2	3	5/2	$\sqrt{5}/(4 \cdot 3 \cdot 7\sqrt{2})$	0.018823
1	1/2	3	5/2	$-1/(9 \cdot 7)$	-0.015873	2	3/2	3	5/2	$\sqrt{5}/(4 \cdot 7\sqrt{2} \cdot 3)$	0.032603
1	3/2	3	5/2	$5\sqrt{5}/(4 \cdot 9 \cdot 7\sqrt{2})$	0.031372	2	5/2	3	5/2	$\sqrt{5}/(9 \cdot 7\sqrt{2} \cdot 3)$	0.014490
2	3/2	3	5/2	$-1/(4 \cdot 7\sqrt{2} \cdot 3 \cdot 5)$	-0.006521	3	5/2	3	5/2	$\sqrt{5 \cdot 11}/(9 \cdot 7\sqrt{3} \cdot 7)$	0.025688
2	5/2	3	5/2	$1/(7\sqrt{2} \cdot 3 \cdot 5)$	0.026082	3	7/2	3	5/2	$\sqrt{11}/(4 \cdot 3 \cdot 7\sqrt{2} \cdot 7)$	0.010552
3	7/2	3	5/2	$1/(4 \cdot 3\sqrt{2} \cdot 7)$	0.022272	4	7/2	3	5/2	$\sqrt{5 \cdot 11}/(4 \cdot 9 \cdot 7\sqrt{2})$	0.020810
4	7/2	3	5/2	$\sqrt{11}/(4 \cdot 9 \cdot 7\sqrt{2} \cdot 3)$	0.005373	1	1/2	3	7/2	$-1/(8 \cdot 3 \cdot 7)$	-0.005952
0	1/2	3	7/2	$1/(4 \cdot 7)$	0.035714	1	3/2	3	7/2	$-1/(4 \cdot 3 \cdot 7\sqrt{2} \cdot 3)$	-0.004860
1	1/2	3	7/2	$5/(8 \cdot 3 \cdot 7)$	0.029762	2	3/2	3	7/2	$-1/(4 \cdot 3 \cdot 7\sqrt{2})$	-0.008418
1	3/2	3	7/2	$1/(4 \cdot 7\sqrt{2} \cdot 3)$	0.014580	2	5/2	3	7/2	$-1/(8 \cdot 3 \cdot 7)$	-0.005952
2	3/2	3	7/2	$1/(4 \cdot 7\sqrt{2})$	0.025254	3	5/2	3	7/2	$-\sqrt{11}/(4 \cdot 3 \cdot 7\sqrt{2} \cdot 7)$	-0.010552
2	5/2	3	7/2	$1/(8 \cdot 3 \cdot 7)$	0.005952	3	7/2	3	7/2	$-1/(2 \cdot 3 \cdot 7\sqrt{2} \cdot 7)$	-0.006363
3	5/2	3	7/2	$1/(4 \cdot 3\sqrt{2} \cdot 7)$	0.022272	4	7/2	3	7/2	$-\sqrt{5}/(2 \cdot 9 \cdot 7\sqrt{2})$	-0.012548
4	7/2	3	7/2	$1/(3 \cdot 7\sqrt{2} \cdot 3)$	0.019440	0	1/2	4	7/2	$1/(4 \cdot 3\sqrt{3})$	0.048113
1	1/2	4	7/2	$-1/(8\sqrt{3} \cdot 7)$	-0.027277	1	1/2	4	7/2	$\sqrt{5}/(8 \cdot 9)$	0.031057
1	3/2	4	7/2	$1/(4 \cdot 3\sqrt{2} \cdot 7)$	0.022272	1	3/2	4	7/2	$\sqrt{5}/(4 \cdot 9\sqrt{2} \cdot 3)$	0.025358
2	3/2	4	7/2	$-1/(4 \cdot 3\sqrt{2} \cdot 3 \cdot 7)$	-0.012859	2	3/2	4	7/2	$\sqrt{11}/(4 \cdot 9\sqrt{2} \cdot 7)$	0.024622
2	5/2	4	7/2	$\sqrt{7}/(8 \cdot 9\sqrt{3})$	0.021216	2	5/2	4	7/2	$\sqrt{11}/(8 \cdot 9\sqrt{7})$	0.017411
3	5/2	4	7/2	$-\sqrt{11}/(4 \cdot 9 \cdot 7\sqrt{2} \cdot 3)$	-0.005373	3	5/2	4	7/2	$\sqrt{5 \cdot 11}/(4 \cdot 9 \cdot 7\sqrt{2})$	0.020810
3	7/2	4	7/2	$1/(3 \cdot 7\sqrt{2} \cdot 3)$	0.019440	3	7/2	4	7/2	$\sqrt{5}/(2 \cdot 9 \cdot 7\sqrt{2})$	0.012549
						4	7/2	4	7/2	$\sqrt{13}/(2 \cdot 27\sqrt{2} \cdot 7)$	0.017845
$a$	$d$	$b$	$e$	$\begin{Bmatrix} a & b & 4 \\ d & e & 3 \\ 1/2 & 1/2 & 1 \end{Bmatrix}$	$a$	$d$	$b$	$e$	$\begin{Bmatrix} a & b & 3 \\ d & e & 4 \\ 1/2 & 1/2 & 1 \end{Bmatrix}$		
4	7/2	0	1/2	$-1/(4 \cdot 3\sqrt{3})$	-0.048113	3	7/2	0	1/2	$1/(4\sqrt{3} \cdot 7)$	0.054554
3	5/2	1	1/2	$1/(3 \cdot 7)$	0.047619	3	7/2	1	1/2	$1/(8\sqrt{3} \cdot 7)$	0.027277
3	7/2	1	1/2	$1/(8 \cdot 3 \cdot 7)$	0.005952	4	7/2	1	1/2	$-1/(8 \cdot 27)$	-0.004630
4	7/2	1	1/2	$\sqrt{5}/(8 \cdot 9)$	0.031057						



ТАБЛИЦА 10.13 (продолжение)

a	d	b	e	$\begin{Bmatrix} a & b & 3 \\ d & e & 4 \\ 1/2 & 1/2 & 1 \end{Bmatrix}$			a	d	b	e	$\begin{Bmatrix} a & b & 4 \\ d & e & 4 \\ 1/2 & 1/2 & 1 \end{Bmatrix}$		
2	5/2	1	3/2	$1/(2 \cdot 3 \sqrt{2 \cdot 7})$	0.044544	4	7/2	0	1/2	$\sqrt{5}/(4 \cdot 9 \sqrt{3})$	0.035861		
3	5/2	1	3/2	$-1/(4 \cdot 3 \cdot 7 \sqrt{2})$	-0.008418	3	7/2	1	1/2	$\sqrt{5}/(8 \cdot 9)$	0.031056		
3	7/2	1	3/2	$\sqrt{5}/(4 \cdot 7 \sqrt{2 \cdot 3})$	0.032603	4	7/2	1	1/2	$1/(8 \cdot 9)$	0.013889		
4	7/2	1	3/2	$-\sqrt{5}/(4 \cdot 27 \sqrt{2 \cdot 7})$	-0.005533	3	5/2	1	3/2	$\sqrt{5}/(4 \cdot 3 \sqrt{2 \cdot 3 \cdot 7})$	0.028753		
2	5/2	2	3/2	$1/(4 \cdot 3 \sqrt{5 \cdot 7})$	0.014086	3	7/2	1	3/2	$-1/(4 \cdot 9 \sqrt{2 \cdot 7})$	-0.007424		
3	5/2	2	3/2	$-1/(4 \cdot 3 \cdot 7 \sqrt{2 \cdot 3})$	-0.004860	4	7/2	1	3/2	$\sqrt{7}/(4 \cdot 9 \sqrt{2 \cdot 5})$	0.023241		
3	7/2	2	3/2	$\sqrt{5}/(4 \cdot 3 \cdot 7 \sqrt{2})$	0.018823	2	5/2	2	3/2	$1/(4 \cdot 9)$	0.027778		
4	7/2	2	3/2	$-1/(4 \cdot 3 \sqrt{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7})$	-0.005750	3	5/2	2	3/2	$1/(4 \cdot 9 \sqrt{2 \cdot 5 \cdot 7})$	0.003320		
1	3/2	2	5/2	$1/(2 \cdot 3 \sqrt{2 \cdot 7})$	0.044544	3	7/2	2	3/2	$\sqrt{3}/(4 \cdot 5 \sqrt{2 \cdot 7})$	0.023146		
2	3/2	2	5/2	$-1/(4 \cdot 3 \sqrt{5 \cdot 7})$	-0.014086	4	7/2	2	3/2	$\sqrt{11}/(4 \cdot 9 \cdot 5 \sqrt{2 \cdot 3})$	0.007522		
2	5/2	2	5/2	$1/(3 \sqrt{3 \cdot 5 \cdot 7})$	0.032530	2	3/2	2	5/2	$1/(4 \cdot 9)$	0.027778		
3	5/2	2	5/2	$-1/(9 \cdot 7 \sqrt{2})$	-0.011224	3	5/2	2	5/2	$1/(3 \sqrt{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7})$	0.023002		
3	7/2	2	5/2	$\sqrt{5 \cdot 11}/(8 \cdot 3 \cdot 7 \sqrt{3})$	0.025487	3	7/2	2	5/2	$-\sqrt{11}/(8 \cdot 9 \cdot 5 \sqrt{7})$	-0.003482		
4	7/2	2	5/2	$-\sqrt{11}/(8 \cdot 9 \sqrt{5 \cdot 7})$	-0.007786	4	7/2	2	5/2	$7/(8 \cdot 9 \cdot 5)$	0.019444		
1	3/2	3	5/2	$1/(4 \cdot 3 \cdot 7 \sqrt{2})$	0.008418	1	3/2	3	5/2	$\sqrt{5}/(4 \cdot 3 \sqrt{2 \cdot 3 \cdot 7})$	0.028527		
2	3/2	3	5/2	$-1/(4 \cdot 3 \cdot 7 \sqrt{2 \cdot 3})$	-0.004860	2	3/2	3	5/2	$-1/(4 \cdot 9 \sqrt{2 \cdot 5 \cdot 7})$	-0.003320		
2	5/2	3	5/2	$1/(9 \cdot 7 \sqrt{2})$	0.011224	2	5/2	3	5/2	$1/(3 \sqrt{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7})$	0.023002		
3	5/2	3	5/2	$-1/(9 \cdot 7 \sqrt{7})$	-0.005999	3	7/2	3	5/2	$1/(4 \cdot 9 \sqrt{2})$	0.019641		
3	7/2	3	5/2	$\sqrt{5 \cdot 11}/(4 \cdot 3 \cdot 7 \sqrt{2 \cdot 3 \cdot 7})$	0.013623	4	7/2	3	5/2	$1/(4 \cdot 9 \sqrt{2 \cdot 5 \cdot 7})$	0.003320		
4	7/2	3	5/2	$-\sqrt{5}/(4 \cdot 9 \cdot 7 \sqrt{2})$	-0.006274	1	1/2	3	7/2	$\sqrt{5}/(8 \cdot 9)$	0.031057		
0	1/2	3	7/2	$1/(4 \sqrt{3 \cdot 7})$	0.054554	1	3/2	3	7/2	$1/(4 \cdot 9 \sqrt{2 \cdot 7})$	0.007424		
1	1/2	3	7/2	$-1/(8 \sqrt{3 \cdot 7})$	-0.027277	2	3/2	3	7/2	$\sqrt{3}/(4 \cdot 5 \sqrt{2 \cdot 7})$	0.023146		
1	3/2	3	7/2	$\sqrt{5}/(4 \cdot 7 \sqrt{2 \cdot 3})$	0.032603	2	5/2	3	7/2	$\sqrt{11}/(8 \cdot 9 \cdot 5 \sqrt{7})$	0.003482		
2	3/2	3	7/2	$-\sqrt{5}/(4 \cdot 3 \cdot 7 \sqrt{2})$	-0.018823	3	5/2	3	7/2	$1/(4 \cdot 9 \sqrt{2})$	0.019642		
2	5/2	3	7/2	$\sqrt{5 \cdot 11}/(8 \cdot 3 \cdot 7 \sqrt{3})$	0.025486	4	7/2	3	7/2	$1/(9 \sqrt{2 \cdot 3 \cdot 7})$	0.017145		
3	5/2	3	7/2	$-\sqrt{5 \cdot 11}/(4 \cdot 3 \cdot 7 \sqrt{2 \cdot 3 \cdot 7})$	-0.013623	0	1/2	4	7/2	$\sqrt{5}/(4 \cdot 9 \sqrt{3})$	0.035861		
3	7/2	3	7/2	$\sqrt{11}/(2 \cdot 3 \cdot 7 \sqrt{2 \cdot 7})$	0.021105	1	1/2	4	7/2	$-1/(8 \cdot 9)$	-0.013889		
4	7/2	3	7/2	$-1/(2 \cdot 3 \cdot 7 \sqrt{2 \cdot 3})$	-0.009720	1	3/2	4	7/2	$\sqrt{7}/(4 \cdot 9 \sqrt{2 \cdot 5})$	0.023241		
1	1/2	4	7/2	$-1/(8 \cdot 27)$	-0.004630	2	3/2	4	7/2	$-\sqrt{11}/(4 \cdot 9 \cdot 5 \sqrt{2 \cdot 3})$	-0.007522		
1	3/2	4	7/2	$\sqrt{5}/(4 \cdot 27 \sqrt{2 \cdot 7})$	0.005533	2	5/2	4	7/2	$7/(8 \cdot 9 \cdot 5)$	0.019444		
2	3/2	4	7/2	$-1/(4 \cdot 3 \sqrt{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7})$	-0.005751	3	5/2	4	7/2	$-1/(4 \cdot 9 \sqrt{2 \cdot 5 \cdot 7})$	-0.003320		
2	5/2	4	7/2	$\sqrt{11}/(8 \cdot 9 \sqrt{5 \cdot 7})$	0.007786	3	7/2	4	7/2	$1/(9 \sqrt{2 \cdot 3 \cdot 7})$	0.017145		
3	5/2	4	7/2	$-\sqrt{5}/(4 \cdot 9 \cdot 7 \sqrt{2})$	-0.006274								
3	7/2	4	7/2	$1/(2 \cdot 3 \cdot 7 \sqrt{2 \cdot 3})$	0.009720								
4	7/2	4	7/2	$-\sqrt{5}/(2 \cdot 27 \sqrt{2 \cdot 3 \cdot 7})$	-0.006390								

ТАБЛИЦА 10.14

$a$	$d$	$b$	$e$	$\left\{ \begin{array}{ccc} a & b & 1/2 \\ d & e & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{array} \right\}$		$a$	$d$	$b$	$e$	$\left\{ \begin{array}{ccc} a & b & 3/2 \\ d & e & 3/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{array} \right\}$	
0	1/2	1/2	0	-1/4	-0.250000	2	5/2	5/2	2	-1/(2·3·5√2)	-0.023570
1	1/2	1/2	0	1/4	0.250000	3	5/2	5/2	2	1/(3√5·7)	0.056344
0	1/2	1/2	1	1/4	0.250000	3	7/2	5/2	2	-1/(8√2·5·7)	-0.014940
1	1/2	1/2	1	1/(3·4)	0.083333	4	7/2	5/2	2	1/(8√2·3)	0.051031
1	3/2	1/2	1	1/(2·3)	0.166667	1	3/2	5/2	3	1/(8√3)	0.072169
1	1/2	3/2	1	1/(2·3)	0.166667	2	3/2	5/2	3	1/(8√5·7)	0.021129
1	3/2	3/2	1	-1/(3·8)	-0.041667	2	5/2	5/2	3	1/(3√5·7)	0.056344
2	3/2	3/2	1	1/8	0.125000	3	5/2	5/2	3	1/(2·3·7√2)	0.016836
1	3/2	3/2	2	1/8	0.125000	3	7/2	5/2	3	√3·5/(7·8√2)	0.048904
2	3/2	3/2	2	1/(5·8)	0.025000	4	7/2	5/2	3	1/(3·8√2·7)	0.011136
2	5/2	3/2	2	1/(2·5)	0.100000	2	3/2	7/2	3	1/(2√2·5·7)	0.059761
2	3/2	5/2	2	1/(2·5)	0.100000	2	5/2	7/2	3	-1/(8√2·5·7)	-0.014940
2	5/2	5/2	2	-1/(3·4·5)	-0.016667	3	5/2	7/2	3	√3·5/(7·8√2)	0.048904
3	5/2	5/2	2	1/(3·4)	0.083333	3	7/2	7/2	3	-1/(7·8√2)	-0.012627
2	5/2	5/2	3	1/(3·4)	0.083333	4	7/2	7/2	3	√5/(8√6·7)	0.043129
3	5/2	5/2	3	1/(3·4·7)	0.011905	2	5/2	7/2	4	1/(8√2·3)	0.051031
3	7/2	5/2	3	1/(2·7)	0.071429	3	5/2	7/2	4	1/(3·8√2·7)	0.011136
3	5/2	7/2	3	1/(2·7)	0.071429	3	7/2	7/2	4	√5/(8√6·7)	0.043129
3	7/2	7/2	3	-1/(7·16)	-0.008929	4	7/2	7/2	4	1/(8·9√2)	0.009821
4	7/2	7/2	3	1/16	0.062500	2	5/2	7/2	4	1/(8√2·3)	0.051031
3	7/2	7/2	4	1/16	0.062500	3	5/2	7/2	4	1/(3·8√2·7)	0.011136
4	7/2	7/2	4	1/(9·16)	0.006944	3	7/2	7/2	4	√5/(8√6·7)	0.043129
						4	7/2	7/2	4	1/(8·9√2)	0.009821
$a$	$d$	$b$	$e$	$\left\{ \begin{array}{ccc} a & b & 3/2 \\ d & e & 3/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{array} \right\}$		$a$	$d$	$b$	$e$	$\left\{ \begin{array}{ccc} a & b & 5/2 \\ d & e & 5/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{array} \right\}$	
1	3/2	1/2	0	-1/8	-0.125000	2	5/2	1/2	0	-1/(3·4)	-0.083333
2	3/2	1/2	0	1/8	0.125000	3	5/2	1/2	0	1/(3·4)	0.083333
1	1/2	1/2	1	1/(2·3√2)	0.117851	2	3/2	1/2	1	1/(2·3√5)	0.074536
1	3/2	1/2	1	√5/(3·8)	0.093169	2	5/2	1/2	1	√7/(3·4√3·5)	0.056927
2	3/2	1/2	1	1/(8√5)	0.055902	3	5/2	1/2	1	√5/(3·4√3·7)	0.040663
2	5/2	1/2	1	1/(2√2·3·5)	0.091287	3	7/2	1/2	1	1/(2·3√7)	0.062994
0	1/2	3/2	1	-1/8	-0.125000	1	3/2	3/2	1	-1/(8√3)	-0.072169
1	1/2	3/2	1	√5/(3·8)	0.093169	2	3/2	3/2	1	√7/(3·8√5)	0.049301
1	3/2	3/2	1	-1/(3·4√2)	-0.058926	2	5/2	3/2	1	-1/(2·3√3·5)	-0.043033
2	3/2	3/2	1	1/(4√2·5)	0.079057	3	5/2	3/2	1	1/(3√2·3·7)	0.051434
2	5/2	3/2	1	-1/(8√3·5)	-0.032275	3	7/2	3/2	1	-√5/(3·8√2·7)	-0.024901
3	5/2	3/2	1	1/(8√3)	0.072169	4	7/2	3/2	1	1/(8√2·3)	0.051031
0	1/2	3/2	2	1/8	0.125000	1	1/2	3/2	2	1/(2·3√5)	0.074536
1	1/2	3/2	2	1/(8√5)	0.055902	1	3/2	3/2	2	√7/(3·8√5)	0.049301
1	3/2	3/2	2	1/(4√2·5)	0.079057	2	3/2	3/2	2	√3/(5·8)	0.043301
2	3/2	3/2	2	1/(4·5√2)	0.035355	2	5/2	3/2	2	1/(3·5√2)	0.047141
2	5/2	3/2	2	√7/(5·8)	0.066144	3	5/2	3/2	2	1/(2·3√5·7)	0.028172
3	5/2	3/2	2	1/(8√5·7)	0.021129	3	7/2	3/2	2	3/(8√2·5·7)	0.044821
3	7/2	3/2	2	1/(2√2·5·7)	0.059761	4	7/2	3/2	2	1/(3·8√2·3)	0.017010
1	1/2	5/2	2	1/(2√2·3·5)	0.091287						
1	3/2	5/2	2	-1/(8√3·5)	-0.032275						
2	3/2	5/2	2	√7/(5·8)	0.066144						

ТАБЛИЦА 10.14 (продолжение)

a	d	b	e	$\left\{ \begin{array}{ccc} a & b & 5/2 \\ d & e & 5/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{array} \right\}$		a	d	b	e	$\left\{ \begin{array}{ccc} a & b & 7/2 \\ d & e & 7/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{array} \right\}$	
0	1/2	5/2	2	-1/(3·4)	-0.083333	2	3/2	3/2	2	1/(4·5)	0.050000
1	1/2	5/2	2	$\sqrt{7}/(3·4\sqrt{3·5})$	0.056927	2	5/2	3/2	2	$\sqrt{3}/(5·8\sqrt{2})$	0.030619
1	3/2	5/2	2	-1/(2·3 $\sqrt{3·5}$ )	-0.043033	3	5/2	3/2	2	1/(8 $\sqrt{2·7}$ )	0.033408
2	3/2	5/2	2	1/(3·5 $\sqrt{2}$ )	0.047141	3	7/2	3/2	2	1/(8 $\sqrt{2·7}$ )	0.033408
2	5/2	5/2	2	-1/(4·5 $\sqrt{3}$ )	-0.028867	4	7/2	3/2	2	1/(8 $\sqrt{2·3·5}$ )	0.022822
3	5/2	5/2	2	1/(4 $\sqrt{5·7}$ )	0.042258	1	3/2	5/2	2	-1/(8 $\sqrt{2·3}$ )	-0.051031
3	7/2	5/2	2	-1/(6 $\sqrt{2·5·7}$ )	-0.019920	2	3/2	5/2	2	$\sqrt{3}/(5·8\sqrt{2})$	0.030619
4	7/2	5/2	2	1/(9·2 $\sqrt{2}$ )	0.039284	2	5/2	5/2	2	-1/(2·3·5)	-0.033333
0	1/2	5/2	3	1/(3·4)	0.083333	3	5/2	5/2	2	1/(3·4 $\sqrt{7}$ )	0.031497
1	1/2	5/2	3	$\sqrt{5}/(3·4\sqrt{3·7})$	0.040663	3	7/2	5/2	2	-1/(16 $\sqrt{7}$ )	-0.023623
1	3/2	5/2	3	1/(3 $\sqrt{2·3·7}$ )	0.051434	4	7/2	5/2	2	$\sqrt{11}/(3·16\sqrt{5})$	0.030901
2	3/2	5/2	3	1/(2·3 $\sqrt{5·7}$ )	0.028172	1	1/2	5/2	3	1/(4 $\sqrt{3·7}$ )	0.054555
2	5/2	5/2	3	1/(4 $\sqrt{5·7}$ )	0.042258	1	3/2	5/2	3	1/(8 $\sqrt{2·7}$ )	0.033408
3	5/2	5/2	3	1/(4·7 $\sqrt{3}$ )	0.020620	2	3/2	5/2	3	1/(8 $\sqrt{2·7}$ )	0.033408
3	7/2	5/2	3	$\sqrt{5}/(2·3·7\sqrt{2})$	0.037646	2	5/2	5/2	3	1/(3·4 $\sqrt{7}$ )	0.031497
4	7/2	5/2	3	1/(2·9 $\sqrt{2·7}$ )	0.014848	3	5/2	5/2	3	1/(2·3·7)	0.023810
1	1/2	7/2	3	1/(2·3 $\sqrt{7}$ )	0.062994	3	7/2	5/2	3	$\sqrt{11}/(7·16)$	0.029613
1	3/2	7/2	3	- $\sqrt{5}/(3·8\sqrt{2·7})$	-0.024901	4	7/2	5/2	3	$\sqrt{5}/(3·16\sqrt{7})$	0.017607
2	3/2	7/2	3	3/(8 $\sqrt{2·5·7}$ )	0.044821	0	1/2	7/2	3	-1/16	-0.062500
2	5/2	7/2	3	-1/(6 $\sqrt{2·5·7}$ )	-0.019920	1	1/2	7/2	3	$\sqrt{3}/(16\sqrt{7})$	0.040916
3	5/2	7/2	3	$\sqrt{5}/(2·3·7\sqrt{2})$	0.037646	1	3/2	7/2	3	-1/(8 $\sqrt{2·7}$ )	-0.033408
3	7/2	7/2	3	- $\sqrt{3}/(16·7)$	-0.015465	2	3/2	7/2	3	1/(8 $\sqrt{2·7}$ )	0.033408
4	7/2	7/2	3	$\sqrt{5·11}/(3·16\sqrt{3·7})$	0.033716	2	5/2	7/2	3	-1/(16 $\sqrt{7}$ )	-0.023623
1	3/2	7/2	4	1/(8 $\sqrt{2·3}$ )	0.051031	3	5/2	7/2	3	$\sqrt{11}/(7·16)$	0.029613
2	3/2	7/2	4	1/(3·8 $\sqrt{2·3}$ )	0.017010	3	7/2	7/2	3	-1/(7·8)	-0.017857
2	5/2	7/2	4	1/(9·2 $\sqrt{2}$ )	0.039284	4	7/2	7/2	3	1/(8 $\sqrt{3·7}$ )	0.027277
3	5/2	7/2	4	1/(2·9 $\sqrt{2·7}$ )	0.014848	0	1/2	7/2	4	1/(16)	0.062500
3	7/2	7/2	4	$\sqrt{5·11}/(3·16\sqrt{3·7})$	0.033716	1	1/2	7/2	4	$\sqrt{7}/(3·16\sqrt{3})$	0.031823
4	7/2	7/2	4	1/(3·16 $\sqrt{3}$ )	0.012028	1	3/2	7/2	4	$\sqrt{5}/(3·8\sqrt{2·3})$	0.038036
a	d	b	e	$\left\{ \begin{array}{ccc} a & b & 7/2 \\ d & e & 7/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{array} \right\}$		2	3/2	7/2	4	1/(8 $\sqrt{2·3·5}$ )	0.022822
3	7/2	1/2	0	-1/16	-0.062500	2	5/2	7/2	4	$\sqrt{11}/(3·16\sqrt{5})$	0.030901
4	7/2	1/2	0	1/16	0.062500	3	5/2	7/2	4	$\sqrt{5}/(3·16\sqrt{7})$	0.017607
3	5/2	1/2	1	1/(4 $\sqrt{3·7}$ )	0.054555	3	7/2	7/2	4	1/(8 $\sqrt{3·7}$ )	0.027277
3	7/2	1/2	1	$\sqrt{3}/(16\sqrt{7})$	0.040916	4	7/2	7/2	4	1/(8·9)	0.013889
4	7/2	1/2	1	$\sqrt{7}/(3·16\sqrt{3})$	0.031823	a	d	b	e	$\left\{ \begin{array}{ccc} a & b & 1/2 \\ d & e & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 1 \end{array} \right\}$	
2	5/2	3/2	1	-1/(8 $\sqrt{2·3}$ )	-0.051031	0	1/2	1/2	0	1/4	0.250000
3	5/2	3/2	1	1/(8 $\sqrt{2·7}$ )	0.033408	1	1/2	1/2	0	1/(3·4)	0.083333
3	7/2	3/2	1	-1/(8 $\sqrt{2·7}$ )	-0.033408	0	1/2	1/2	1	1/(3·4)	0.083333
4	7/2	3/2	1	$\sqrt{5}/(3·8\sqrt{2·3})$	0.038036	1	1/2	1/2	1	5/(4·9)	0.138889
						1	3/2	1/2	1	-1/(2·9)	-0.055556

ТАБЛИЦА 10.14 (продолжение)

$a$	$d$	$b$	$e$	$\begin{Bmatrix} a & b & 1/2 \\ d & e & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 1 \end{Bmatrix}$		$a$	$d$	$b$	$e$	$\begin{Bmatrix} a & b & 1/2 \\ d & e & 3/2 \\ 1/2 & 1/2 & 1 \end{Bmatrix}$	
1	1/2	3/2	1	$-1/(2 \cdot 9)$	-0.055556	1	3/2	1/2	0	$1/(2 \cdot 3 \sqrt{2})$	0.117851
1	3/2	3/2	1	$7/(9 \cdot 8)$	0.097222	0	1/2	1/2	1	$1/(2 \cdot 3)$	0.166667
2	3/2	3/2	1	$1/(3 \cdot 8)$	0.041667	1	1/2	1/2	1	$-1/(2 \cdot 9)$	-0.055556
1	3/2	3/2	2	$1/(3 \cdot 8)$	0.041667	1	3/2	1/2	1	$\sqrt{5}/(2 \cdot 9 \sqrt{2})$	0.087841
2	3/2	3/2	2	$3/(5 \cdot 8)$	0.075000	1	1/2	3/2	1	$-1/(4 \cdot 9)$	-0.027778
2	5/2	3/2	2	$-1/(3 \cdot 2 \cdot 5)$	-0.033333	1	3/2	3/2	1	$\sqrt{5}/(4 \cdot 9 \sqrt{2})$	0.043921
2	3/2	5/2	2	$-1/(3 \cdot 2 \cdot 5)$	-0.033333	2	3/2	3/2	1	$-1/(3 \cdot 4 \sqrt{2 \cdot 5})$	-0.026352
2	5/2	5/2	2	$11/(5 \cdot 4 \cdot 9)$	0.061111	2	5/2	3/2	1	$1/(4 \sqrt{3 \cdot 5})$	0.064550
3	5/2	5/2	2	$1/(4 \cdot 9)$	0.027778	1	1/2	3/2	2	$-1/(3 \cdot 4)$	-0.083333
2	5/2	5/2	3	$1/(4 \cdot 9)$	0.027778	1	3/2	3/2	2	$1/(3 \cdot 4 \sqrt{2})$	0.058926
3	5/2	5/2	3	$13/(7 \cdot 4 \cdot 9)$	0.051587	2	3/2	3/2	2	$-1/(4 \cdot 5 \sqrt{2})$	-0.035355
3	7/2	5/2	3	$-1/(2 \cdot 3 \cdot 7)$	-0.023809	2	5/2	3/2	2	$\sqrt{7}/(3 \cdot 4 \cdot 5)$	0.044096
3	5/2	7/2	3	$-1/(3 \cdot 2 \cdot 7)$	-0.023809	2	3/2	5/2	2	$\sqrt{7}/(2 \cdot 5 \cdot 9)$	0.029397
3	7/2	7/2	3	$5/(7 \cdot 16)$	0.044643	3	5/2	5/2	2	$-1/(2 \cdot 9 \sqrt{7})$	-0.020998
4	7/2	7/2	3	$1/(3 \cdot 16)$	0.020833	3	7/2	5/2	2	$1/(2 \cdot 3 \sqrt{2 \cdot 7})$	0.044543
3	7/2	7/2	4	$1/(3 \cdot 16)$	0.020833	2	3/2	5/2	3	$-1/(2 \cdot 3 \sqrt{2 \cdot 5})$	-0.052705
4	7/2	7/2	4	$17/(16 \cdot 27)$	0.039352	2	5/2	5/2	3	$1/(9 \sqrt{2 \cdot 5})$	0.035136
$a$	$d$	$b$	$e$	$\begin{Bmatrix} a & b & 3/2 \\ d & e & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 1 \end{Bmatrix}$		$a$	$d$	$b$	$e$	$\begin{Bmatrix} a & b & 3/2 \\ d & e & 3/2 \\ 1/2 & 1/2 & 1 \end{Bmatrix}$	
1	1/2	1/2	0	$1/(2 \cdot 3)$	0.166667	3	5/2	5/2	2	$-1/(2 \cdot 9 \sqrt{7})$	-0.020998
1	1/2	1/2	1	$-1/(2 \cdot 9)$	-0.055556	3	7/2	5/2	2	$1/(2 \cdot 3 \sqrt{2 \cdot 7})$	0.044543
1	3/2	1/2	1	$-1/(4 \cdot 9)$	-0.027778	2	3/2	5/2	3	$-1/(2 \cdot 3 \sqrt{2 \cdot 5})$	-0.052705
2	3/2	1/2	1	$-1/(3 \cdot 4)$	-0.083333	2	5/2	5/2	3	$1/(9 \sqrt{2 \cdot 5})$	0.035136
0	1/2	3/2	1	$1/(2 \cdot 3 \sqrt{2})$	0.117851	3	5/2	5/2	3	$-\sqrt{5}/(7 \cdot 9 \sqrt{2})$	-0.025097
1	1/2	3/2	1	$\sqrt{5}/(2 \cdot 9 \sqrt{2})$	0.087841	3	7/2	5/2	3	$1/(2 \cdot 7 \sqrt{2 \cdot 3})$	0.029161
1	3/2	3/2	1	$\sqrt{5}/(4 \cdot 9 \sqrt{2})$	0.043921	3	5/2	7/2	3	$-\sqrt{5}/(3 \cdot 4 \cdot 7 \sqrt{2})$	-0.018823
2	3/2	3/2	1	$1/(3 \cdot 4 \sqrt{2})$	0.058926	3	7/2	7/2	3	$\sqrt{3}/(7 \cdot 8 \sqrt{2})$	0.021870
1	3/2	3/2	2	$-1/(3 \cdot 4 \sqrt{2 \cdot 5})$	-0.026352	4	7/2	7/2	3	$-1/(3 \cdot 8 \sqrt{2 \cdot 3})$	-0.017010
2	3/2	3/2	2	$-1/(4 \cdot 5 \sqrt{2})$	-0.035355	3	5/2	7/2	4	$-1/(4 \sqrt{2 \cdot 3 \cdot 7})$	-0.038576
2	5/2	3/2	2	$-1/(2 \cdot 3 \cdot 5 \sqrt{2})$	-0.023570	3	7/2	7/2	4	$\sqrt{5}/(3 \cdot 8 \sqrt{7 \cdot 2})$	0.024901
3	5/2	3/2	2	$-1/(2 \cdot 3 \sqrt{2 \cdot 5})$	-0.052705	4	7/2	7/2	4	$-\sqrt{5 \cdot 7}/(8 \cdot 27 \sqrt{2})$	-0.019367
1	3/2	5/2	2	$1/(4 \sqrt{3 \cdot 5})$	0.064550	$a$	$d$	$b$	$e$	$\begin{Bmatrix} a & b & 3/2 \\ d & e & 3/2 \\ 1/2 & 1/2 & 1 \end{Bmatrix}$	
2	3/2	5/2	2	$\sqrt{7}/(3 \cdot 4 \cdot 5)$	0.044096	1	3/2	1/2	0	$\sqrt{5}/(3 \cdot 8)$	0.093170
2	5/2	5/2	2	$\sqrt{7}/(2 \cdot 5 \cdot 9)$	0.029397	2	3/2	1/2	0	$1/(8 \sqrt{5})$	0.055902
3	5/2	5/2	2	$\sqrt{2}/(3 \cdot 6 \sqrt{5})$	0.035136	1	1/2	1/2	1	$\sqrt{5}/(2 \cdot 9 \sqrt{2})$	0.087841
2	5/2	5/2	3	$-1/(2 \cdot 9 \sqrt{7})$	-0.020998	1	3/2	1/2	1	$-1/(8 \cdot 9)$	-0.013889
3	5/2	5/2	3	$-\sqrt{5}/(7 \cdot 9 \sqrt{2})$	-0.025097	2	3/2	1/2	1	$7/(3 \cdot 5 \cdot 8)$	0.058333
3	7/2	5/2	3	$-\sqrt{5}/(3 \cdot 4 \cdot 7 \sqrt{2})$	-0.018823	2	5/2	1/2	1	$-1/(2 \cdot 5 \sqrt{2 \cdot 3})$	-0.040825
4	7/2	5/2	3	$-1/(4 \sqrt{2 \cdot 3 \cdot 7})$	-0.038576	0	1/2	3/2	1	$\sqrt{5}/(3 \cdot 8)$	0.093170
2	5/2	7/2	3	$1/(2 \cdot 3 \sqrt{2 \cdot 7})$	0.044543	1	1/2	3/2	1	$-1/(8 \cdot 9)$	-0.013889
3	5/2	7/2	3	$1/(2 \cdot 7 \sqrt{2 \cdot 3})$	0.029161	1	3/2	3/2	1	$7/(4 \cdot 9 \sqrt{2 \cdot 5})$	0.061489
3	7/2	7/2	3	$\sqrt{3}/(7 \cdot 8 \sqrt{2})$	0.021870	2	3/2	3/2	1	$1/(3 \cdot 4 \cdot 5 \sqrt{2})$	0.011785
4	7/2	7/2	3	$\sqrt{5}/(3 \cdot 8 \sqrt{2 \cdot 7})$	0.024901	2	5/2	3/2	1	$\sqrt{3}/(5 \cdot 8)$	0.043301
3	7/2	7/2	4	$-1/(3 \cdot 8 \sqrt{2 \cdot 3})$	-0.017010	3	5/2	3/2	1	$1/(8 \sqrt{3 \cdot 5})$	0.032275
4	7/2	7/2	4	$-\sqrt{5 \cdot 7}/(8 \cdot 27 \sqrt{2})$	-0.019367						

ТАБЛИЦА 10.14 (продолжение)

a	d	b	e	$\left\{ \begin{array}{ccc} a & b & 3/2 \\ d & e & 3/2 \\ 1/2 & 1/2 & 1 \end{array} \right\}$		a	d	b	e	$\left\{ \begin{array}{ccc} a & b & 5/2 \\ d & e & 3/2 \\ 1/2 & 1/2 & 1 \end{array} \right\}$	
0	1/2	3/2	2	$1/(8\sqrt{5})$	0.055902	1	1/2	3/2	2	$-1/(3 \cdot 4 \cdot 5)$	-0.016667
1	1/2	3/2	2	$7/(3 \cdot 5 \cdot 8)$	0.058333	1	3/2	3/2	2	$-1/(3 \cdot 4 \cdot 5\sqrt{2})$	-0.011785
1	3/2	3/2	2	$1/(3 \cdot 4 \cdot 5\sqrt{2})$	0.011785	2	3/2	3/2	2	$-\sqrt{7}/(4 \cdot 5\sqrt{2} \cdot 3 \cdot 5)$	-0.024152
2	3/2	3/2	2	$3/(4 \cdot 5\sqrt{2} \cdot 5)$	0.047434	2	5/2	3/2	2	$-1/(4 \cdot 5\sqrt{3} \cdot 5)$	-0.012910
2	5/2	3/2	2	$-\sqrt{7}/(3 \cdot 5 \cdot 8\sqrt{5})$	-0.009860	3	5/2	3/2	2	$-1/(5\sqrt{2} \cdot 3 \cdot 7)$	-0.030861
3	5/2	3/2	2	$11/(3 \cdot 5 \cdot 8\sqrt{7})$	0.034647	3	7/2	3/2	2	$-1/(4 \cdot 5\sqrt{3} \cdot 7)$	-0.010911
3	7/2	3/2	2	$-1/(2 \cdot 5\sqrt{2} \cdot 7)$	-0.026726	4	7/2	3/2	2	$-1/(3 \cdot 4\sqrt{5})$	-0.037268
1	1/2	5/2	2	$-1/(2 \cdot 5\sqrt{2} \cdot 3)$	-0.040825	0	1/2	5/2	2	$1/(2 \cdot 3\sqrt{5})$	0.074536
1	3/2	5/2	2	$\sqrt{3}/(5 \cdot 8)$	0.043301	1	1/2	5/2	2	$\sqrt{7}/(2 \cdot 3 \cdot 5\sqrt{3})$	0.050918
2	3/2	5/2	2	$-\sqrt{7}/(3 \cdot 5 \cdot 8\sqrt{5})$	-0.009860	1	3/2	5/2	2	$\sqrt{7}/(2 \cdot 3 \cdot 5\sqrt{2} \cdot 3)$	0.036004
2	5/2	5/2	2	$11/(2 \cdot 5 \cdot 9\sqrt{2} \cdot 5)$	0.038650	2	3/2	5/2	2	$\sqrt{7}/(2 \cdot 3 \cdot 5\sqrt{5})$	0.039441
3	5/2	5/2	2	$1/(5 \cdot 9\sqrt{7})$	0.008399	2	5/2	5/2	2	$1/(3 \cdot 5\sqrt{2} \cdot 5)$	0.021082
3	7/2	5/2	2	$13/(3 \cdot 5 \cdot 8\sqrt{2} \cdot 7)$	0.028953	3	5/2	5/2	2	$1/(5\sqrt{6} \cdot 7)$	0.030861
4	7/2	5/2	2	$1/(8\sqrt{2} \cdot 3 \cdot 5)$	0.022822	3	7/2	5/2	2	$1/(4 \cdot 5\sqrt{3} \cdot 7)$	0.010911
1	3/2	5/2	3	$1/(8\sqrt{3} \cdot 5)$	0.032275	4	7/2	5/2	2	$1/(3 \cdot 4\sqrt{3} \cdot 5)$	0.021517
2	3/2	5/2	3	$11/(3 \cdot 5 \cdot 8\sqrt{7})$	0.034647	1	3/2	5/2	3	$-1/(2 \cdot 3\sqrt{2} \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7)$	-0.011501
2	5/2	5/2	3	$1/(5 \cdot 9\sqrt{7})$	0.008399	2	3/2	5/2	3	$-1/(2 \cdot 3 \cdot 5\sqrt{7})$	-0.012599
3	5/2	5/2	3	$13/(2 \cdot 7 \cdot 9\sqrt{2} \cdot 5)$	0.032627	2	5/2	5/2	3	$-1/(2 \cdot 3 \cdot 5\sqrt{7})$	-0.012599
3	7/2	5/2	3	$-1/(7 \cdot 8\sqrt{2} \cdot 3)$	-0.007290	3	5/2	5/2	3	$-1/(2 \cdot 7\sqrt{5} \cdot 3)$	-0.018443
4	7/2	5/2	3	$\sqrt{5}/(3 \cdot 8\sqrt{2} \cdot 7)$	0.024901	3	7/2	5/2	3	$-1/(3 \cdot 4 \cdot 7)$	-0.011905
2	3/2	7/2	3	$-1/(2 \cdot 5\sqrt{2} \cdot 7)$	-0.026726	4	7/2	5/2	3	$-\sqrt{5}/(4 \cdot 9\sqrt{7})$	-0.023477
2	5/2	7/2	3	$13/(3 \cdot 5 \cdot 8\sqrt{2} \cdot 7)$	0.028953	1	3/2	7/2	3	$1/(2 \cdot 3\sqrt{2} \cdot 7)$	0.044544
3	5/2	7/2	3	$-1/(2 \cdot 4 \cdot 7\sqrt{2} \cdot 3)$	-0.007290	2	3/2	7/2	3	$1/(2 \cdot 5\sqrt{2} \cdot 7)$	0.026726
3	7/2	7/2	3	$\sqrt{5}/(8 \cdot 7\sqrt{2})$	0.028235	2	5/2	7/2	3	$1/(2 \cdot 5\sqrt{2} \cdot 7)$	0.026726
4	7/2	7/2	3	$1/(3 \cdot 8\sqrt{2} \cdot 3 \cdot 7)$	0.006429	3	5/2	7/2	3	$1/(4 \cdot 7\sqrt{2})$	0.025254
2	5/2	7/2	4	$1/(8\sqrt{2} \cdot 3 \cdot 5)$	0.022822	3	7/2	7/2	3	$\sqrt{5}/(7 \cdot 8\sqrt{2} \cdot 3)$	0.016301
3	5/2	7/2	4	$\sqrt{5}/(3 \cdot 8\sqrt{2} \cdot 7)$	0.024901	4	7/2	7/2	3	$\sqrt{11}/(3 \cdot 8\sqrt{2} \cdot 3 \cdot 7)$	0.021324
3	7/2	7/2	4	$1/(3 \cdot 8\sqrt{2} \cdot 3 \cdot 7)$	0.006429	2	5/2	7/2	4	$-1/(2 \cdot 9\sqrt{2} \cdot 3 \cdot 5)$	-0.010143
4	7/2	7/2	4	$17/(8 \cdot 27\sqrt{2} \cdot 5)$	0.024888	3	5/2	7/2	4	$-\sqrt{5}/(9 \cdot 4\sqrt{2} \cdot 3 \cdot 7)$	-0.009584
						3	7/2	7/2	4	$-1/(3 \cdot 8\sqrt{2} \cdot 7)$	-0.011136
						4	7/2	7/2	4	$-\sqrt{11}/(8 \cdot 9\sqrt{2} \cdot 5)$	-0.014567
a	d	b	e	$\left\{ \begin{array}{ccc} a & b & 5/2 \\ d & e & 3/2 \\ 1/2 & 1/2 & 1 \end{array} \right\}$		a	d	b	e	$\left\{ \begin{array}{ccc} a & b & 3/2 \\ d & e & 5/2 \\ 1/2 & 1/2 & 1 \end{array} \right\}$	
2	3/2	1/2	0	$1/(2 \cdot \sqrt{2} \cdot 3 \cdot 5)$	0.091287	2	5/2	1/2	0	$1/(2 \cdot 3\sqrt{5})$	0.074536
2	3/2	1/2	1	$-1/(2 \cdot 5\sqrt{2} \cdot 3)$	-0.040825	1	3/2	1/2	1	$1/(3 \cdot 4)$	0.083333
2	5/2	1/2	1	$-1/(2 \cdot 5 \cdot 9)$	-0.011111	2	3/2	1/2	1	$-1/(3 \cdot 4 \cdot 5)$	-0.016667
3	5/2	1/2	1	$-1/(2 \cdot 9)$	-0.055556	2	5/2	1/2	1	$\sqrt{7}/(2 \cdot 3 \cdot 5\sqrt{3})$	0.050918
1	1/2	3/2	1	$1/(3 \cdot 4)$	0.083333	1	3/2	3/2	1	$1/(3 \cdot 4\sqrt{2} \cdot 5)$	0.026352
1	3/2	3/2	1	$1/(3 \cdot 4\sqrt{2} \cdot 5)$	0.026352	2	3/2	3/2	1	$-1/(3 \cdot 4 \cdot 5\sqrt{2})$	-0.011785
2	3/2	3/2	1	$\sqrt{7}/(4 \cdot 5\sqrt{2} \cdot 3)$	0.054006	2	5/2	3/2	1	$\sqrt{7}/(2 \cdot 3 \cdot 5\sqrt{2} \cdot 3)$	0.036004
2	5/2	3/2	1	$\sqrt{7}/(4 \cdot 5 \cdot 9)$	0.014699						
3	5/2	3/2	1	$1/(9\sqrt{2} \cdot 5)$	0.035136						

ТАБЛИЦА 10.14 (продолжение)

a	d	b	e	$\left\{ \begin{array}{ccc} a & b & 3/2 \\ d & e & 5/2 \\ 1/2 & 1/2 & 1 \end{array} \right\}$		a	d	b	e	$\left\{ \begin{array}{ccc} a & b & 5/2 \\ d & e & 5/2 \\ 1/2 & 1/2 & 1 \end{array} \right\}$	
3	5/2	3/2	1	$-1/(2 \cdot 3 \sqrt{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7})$	-0.011501	1	3/2	3/2	1	$\sqrt{7}/(3 \cdot 8 \sqrt{5})$	0.049301
3	7/2	3/2	1	$1/(2 \cdot 3 \sqrt{2 \cdot 7})$	0.044544	2	3/2	3/2	1	$1/(3 \cdot 8 \cdot 5 \sqrt{3})$	0.004811
0	1/2	3/2	2	$1/(2 \sqrt{2 \cdot 3 \cdot 5})$	0.091287	2	5/2	3/2	1	$1/(2 \cdot 5 \sqrt{7})$	0.037796
1	1/2	3/2	2	$-1/(2 \cdot 5 \sqrt{2 \cdot 3})$	-0.040825	3	5/2	3/2	1	$1/(3 \cdot 7 \sqrt{2 \cdot 5})$	0.015058
1	3/2	3/2	2	$\sqrt{7}/(4 \cdot 5 \sqrt{2 \cdot 3})$	0.054006	3	7/2	3/2	1	$11/(3 \cdot 7 \cdot 8 \sqrt{2 \cdot 3})$	0.026731
2	3/2	3/2	2	$-\sqrt{7}/(4 \cdot 5 \sqrt{2 \cdot 3 \cdot 5})$	-0.024152	4	7/2	3/2	1	$\sqrt{5}/(3 \cdot 8 \sqrt{2 \cdot 7})$	0.024901
2	5/2	3/2	2	$\sqrt{7}/(2 \cdot 3 \cdot 5 \sqrt{5})$	0.039441	1	1/2	3/2	2	$\sqrt{7}/(2 \cdot 3 \cdot 5 \sqrt{3})$	0.050918
3	5/2	3/2	2	$-1/(2 \cdot 3 \cdot 5 \sqrt{7})$	-0.012599	1	3/2	3/2	2	$1/(3 \cdot 5 \cdot 8 \sqrt{3})$	0.004811
3	7/2	3/2	2	$1/(2 \cdot 5 \sqrt{2 \cdot 7})$	0.026726	2	3/2	3/2	2	$9/(8 \cdot 5 \sqrt{5 \cdot 7})$	0.038032
1	1/2	5/2	2	$-1/(2 \cdot 5 \cdot 9)$	-0.011111	2	5/2	3/2	2	$-1/(3 \cdot 5 \sqrt{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7})$	-0.004600
1	3/2	5/2	2	$\sqrt{7}/(4 \cdot 5 \cdot 9)$	0.014699	3	5/2	3/2	2	$11/(2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \sqrt{3})$	0.030242
2	3/2	5/2	2	$-1/(4 \cdot 5 \sqrt{3 \cdot 5})$	-0.012910	3	7/2	3/2	2	$-3 \sqrt{3}/(5 \cdot 7 \cdot 8 \sqrt{2})$	-0.013122
2	5/2	5/2	2	$1/(3 \cdot 5 \sqrt{2 \cdot 5})$	0.021082	4	7/2	3/2	2	$13/(8 \cdot 9 \sqrt{2 \cdot 5 \cdot 7})$	0.021581
3	5/2	5/2	2	$-1/(2 \cdot 3 \cdot 5 \sqrt{7})$	-0.012599	0	1/2	5/2	2	$\sqrt{7}/(3 \cdot 4 \sqrt{3 \cdot 5})$	0.056927
3	7/2	5/2	2	$1/(2 \cdot 5 \sqrt{2 \cdot 7})$	0.026726	1	1/2	5/2	2	$-1/(3 \cdot 4 \cdot 5)$	-0.016667
4	7/2	5/2	2	$-1/(2 \cdot 9 \sqrt{2 \cdot 3 \cdot 5})$	-0.010143	1	3/2	5/2	2	$1/(2 \cdot 5 \sqrt{7})$	0.037796
1	1/2	5/2	3	$-1/(2 \cdot 9)$	-0.055556	2	3/2	5/2	2	$-1/(3 \cdot 5 \sqrt{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7})$	-0.004600
1	3/2	5/2	3	$1/(9 \sqrt{2 \cdot 5})$	0.035136	2	5/2	5/2	2	$11/(3 \cdot 4 \cdot 5 \sqrt{5 \cdot 7})$	0.030989
2	3/2	5/2	3	$-1/(5 \sqrt{2 \cdot 3 \cdot 7})$	-0.030861	3	5/2	5/2	2	$1/(4 \cdot 5 \cdot 7 \sqrt{3})$	0.004124
2	5/2	5/2	3	$1/(5 \sqrt{2 \cdot 3 \cdot 7})$	0.030861	3	7/2	5/2	2	$13/(2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \sqrt{2 \cdot 3})$	0.025272
3	5/2	5/2	3	$-1/(2 \cdot 7 \sqrt{3 \cdot 5})$	-0.018443	4	7/2	5/2	2	$1/(2 \cdot 3 \sqrt{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7})$	0.011501
3	7/2	5/2	3	$1/(4 \cdot 7 \sqrt{2})$	0.025254	0	1/2	5/2	3	$\sqrt{5}/(4 \cdot 3 \sqrt{3 \cdot 7})$	0.040663
4	7/2	5/2	3	$-\sqrt{5}/(4 \cdot 9 \sqrt{2 \cdot 3 \cdot 7})$	-0.009584	1	1/2	5/2	3	$1/(4 \cdot 7)$	0.035714
2	3/2	7/2	3	$-1/(4 \cdot 5 \sqrt{3 \cdot 7})$	-0.010911	1	3/2	5/2	3	$1/(3 \cdot 7 \sqrt{2 \cdot 5})$	0.015058
2	5/2	7/2	3	$1/(4 \cdot 5 \sqrt{3 \cdot 7})$	0.010911	2	3/2	5/2	3	$11/(2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \sqrt{3})$	0.030242
3	5/2	7/2	3	$-1/(4 \cdot 7 \cdot 3)$	-0.011905	2	5/2	5/2	3	$1/(4 \cdot 5 \cdot 7 \sqrt{3})$	0.004124
3	7/2	7/2	3	$\sqrt{5}/(7 \cdot 8 \sqrt{2 \cdot 3})$	0.016301	3	5/2	5/2	3	$13/(3 \cdot 4 \cdot 7 \sqrt{5 \cdot 7})$	0.026160
4	7/2	7/2	3	$-1/(3 \cdot 8 \sqrt{2 \cdot 7})$	-0.011136	3	7/2	5/2	3	$-1/(2 \cdot 3 \cdot 7 \sqrt{2 \cdot 3 \cdot 7})$	-0.003674
2	3/2	7/2	4	$-1/(4 \cdot 3 \sqrt{5})$	-0.037268	4	7/2	5/2	3	$\sqrt{5}/(2 \cdot 3 \cdot 7 \sqrt{2 \cdot 3})$	0.021735
2	5/2	7/2	4	$1/(3 \cdot 4 \sqrt{3 \cdot 5})$	0.021517	1	1/2	7/2	3	$-\sqrt{5}/(2 \cdot 3 \cdot 7 \sqrt{3})$	-0.030738
3	5/2	7/2	4	$-\sqrt{5}/(4 \cdot 9 \sqrt{7})$	-0.023477	1	3/2	7/2	3	$11/(3 \cdot 7 \cdot 8 \sqrt{2 \cdot 3})$	0.026731
3	7/2	7/2	4	$\sqrt{11}/(3 \cdot 8 \sqrt{2 \cdot 3 \cdot 7})$	0.021324	2	3/2	7/2	3	$-3 \sqrt{3}/(5 \cdot 7 \cdot 8 \sqrt{2})$	-0.013122
4	7/2	7/2	4	$-\sqrt{11}/(8 \cdot 9 \sqrt{2 \cdot 5})$	-0.014567	2	5/2	7/2	3	$13/(2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \sqrt{2 \cdot 3})$	0.025272
a	d	b	e	$\left\{ \begin{array}{ccc} a & b & 5/2 \\ d & e & 5/2 \\ 1/2 & 1/2 & 1 \end{array} \right\}$		3	5/2	7/2	3	$-1/(2 \cdot 3 \cdot 7 \sqrt{2 \cdot 3 \cdot 7})$	-0.003674
2	5/2	1/2	0	$\sqrt{7}/(3 \cdot 4 \sqrt{3 \cdot 5})$	0.056927	3	7/2	7/2	3	$15/(7 \cdot 16 \sqrt{5 \cdot 7})$	0.022638
3	5/2	1/2	0	$\sqrt{5}/(3 \cdot 4 \sqrt{3 \cdot 7})$	0.040663	4	7/2	7/2	3	$\sqrt{11}/(7 \cdot 9 \cdot 16)$	0.003290
2	3/2	1/2	1	$\sqrt{7}/(2 \cdot 3 \cdot 5 \sqrt{3})$	0.050917	1	3/2	7/2	4	$\sqrt{5}/(3 \cdot 8 \sqrt{2 \cdot 7})$	0.024901
2	5/2	1/2	1	$-1/(3 \cdot 4 \cdot 5)$	-0.016667	2	3/2	7/2	4	$13/(8 \cdot 9 \sqrt{2 \cdot 5 \cdot 7})$	0.021581
3	5/2	1/2	1	$1/(4 \cdot 7)$	0.035714	2	5/2	7/2	4	$1/(2 \cdot 3 \sqrt{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7})$	0.011501
3	7/2	1/2	1	$-\sqrt{5}/(2 \cdot 3 \cdot 7 \sqrt{3})$	-0.030738	3	5/2	7/2	4	$\sqrt{5}/(2 \cdot 3 \cdot 7 \sqrt{2 \cdot 3})$	0.021735
						3	7/2	7/2	4	$\sqrt{11}/(7 \cdot 9 \cdot 16)$	0.003290
						4	7/2	7/2	4	$17/(9 \cdot 16 \sqrt{5 \cdot 7})$	0.019955

ТАБЛИЦА 10.14 (продолжение)

a	d	b	e	$\left\{ \begin{array}{ccc} a & b & 7/2 \\ d & e & 5/2 \\ 1/2 & 1/2 & 1 \end{array} \right\}$		a	d	b	e	$\left\{ \begin{array}{ccc} a & b & 5/2 \\ d & e & 7/2 \\ 1/2 & 1/2 & 1 \end{array} \right\}$	
3	5/2	1/2	0	$1/(2 \cdot 3 \sqrt{7})$	0.062994	3	7/2	1/2	0	$1/(4 \sqrt{3 \cdot 7})$	0.054555
3	5/2	1/2	1	$-\sqrt{5}/(2 \cdot 3 \cdot 7 \sqrt{3})$	-0.030738	2	5/2	1/2	1	$1/(2 \cdot 9)$	0.055556
3	7/2	1/2	1	$-1/(3 \cdot 7 \cdot 8)$	-0.005952	3	5/2	1/2	1	$-1/(2 \cdot 7 \cdot 9)$	-0.007937
4	7/2	1/2	1	$-1/(3 \cdot 8)$	-0.041667	3	7/2	1/2	1	$1/(4 \cdot 7)$	0.035714
2	3/2	3/2	1	$1/(2 \cdot 3 \sqrt{10})$	0.052705	2	5/2	3/2	1	$1/(2 \cdot 9 \sqrt{7})$	0.020998
2	5/2	3/2	1	$1/(2 \cdot 3 \sqrt{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7})$	0.011501	3	5/2	3/2	1	$-\sqrt{5}/(4 \cdot 7 \cdot 9 \sqrt{2})$	-0.006274
3	5/2	3/2	1	$\sqrt{5}/(2 \cdot 3 \cdot 7 \sqrt{2})$	0.037646	3	7/2	3/2	1	$\sqrt{5}/(7 \cdot 8 \sqrt{2})$	0.028235
3	7/2	3/2	1	$1/(8 \cdot 7 \sqrt{2 \cdot 3})$	0.007290	4	7/2	3/2	1	$-1/(3 \cdot 8 \sqrt{2 \cdot 3 \cdot 7})$	-0.006429
4	7/2	3/2	1	$\sqrt{5}/(3 \cdot 8 \sqrt{2 \cdot 7})$	0.024901	1	3/2	3/2	2	$1/(2 \cdot 3 \sqrt{2 \cdot 5})$	0.052705
2	3/2	3/2	2	$-1/(2 \cdot 5 \sqrt{2 \cdot 3 \cdot 7})$	-0.015430	2	3/2	3/2	2	$-1/(2 \cdot 5 \sqrt{2 \cdot 3 \cdot 7})$	-0.015430
2	5/2	3/2	2	$-1/(3 \cdot 4 \cdot 5 \sqrt{7})$	-0.006299	2	5/2	3/2	2	$1/(2 \cdot 5 \sqrt{7})$	0.037796
3	5/2	3/2	2	$-1/(4 \cdot 7 \sqrt{3})$	-0.020620	3	5/2	3/2	2	$-1/(4 \cdot 7 \sqrt{2 \cdot 5})$	-0.011294
3	7/2	3/2	2	$-1/(7 \cdot 8 \sqrt{2 \cdot 3})$	-0.007290	3	7/2	3/2	2	$\sqrt{5}/(8 \cdot 7 \sqrt{2})$	0.028235
4	7/2	3/2	2	$-\sqrt{5}/(3 \cdot 8 \sqrt{2 \cdot 7})$	-0.024901	4	7/2	3/2	2	$-1/(3 \cdot 8 \sqrt{2 \cdot 3 \cdot 7})$	-0.006429
1	1/2	5/2	2	$1/(2 \cdot 9)$	0.055556	1	3/2	5/2	2	$1/(2 \cdot 3 \sqrt{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7})$	0.011501
1	3/2	5/2	2	$1/(2 \cdot 9 \sqrt{7})$	0.020998	2	3/2	5/2	2	$-1/(3 \cdot 4 \cdot 5 \sqrt{7})$	-0.006299
2	3/2	5/2	2	$1/(2 \cdot 5 \sqrt{7})$	0.037796	2	5/2	5/2	2	$1/(2 \cdot 5 \sqrt{2 \cdot 3 \cdot 7})$	0.015430
2	5/2	5/2	2	$1/(2 \cdot 5 \sqrt{2 \cdot 3 \cdot 7})$	0.015430	3	5/2	5/2	2	$-1/(2 \cdot 3 \cdot 7 \sqrt{2 \cdot 5})$	-0.007529
3	5/2	5/2	2	$1/(2 \cdot 7 \sqrt{2 \cdot 3})$	0.029161	3	7/2	5/2	2	$\sqrt{5}/(3 \cdot 4 \cdot 7 \sqrt{2})$	0.018823
3	7/2	5/2	2	$1/(7 \cdot 8 \sqrt{3})$	0.010310	4	7/2	5/2	2	$-1/(4 \cdot 9 \sqrt{2 \cdot 7})$	-0.007424
4	7/2	5/2	2	$\sqrt{5 \cdot 11}/(8 \cdot 9 \sqrt{3 \cdot 7})$	0.022477	0	1/2	5/2	3	$1/(2 \cdot 3 \sqrt{7})$	0.062994
1	1/2	5/2	3	$-1/(2 \cdot 7 \cdot 9)$	-0.007937	1	1/2	5/2	3	$-\sqrt{5}/(3 \cdot 2 \cdot 7 \sqrt{3})$	-0.030738
1	3/2	5/2	3	$-\sqrt{5}/(4 \cdot 7 \cdot 9 \sqrt{2})$	-0.006274	1	3/2	5/2	3	$\sqrt{5}/(2 \cdot 3 \cdot 7 \sqrt{2})$	0.037646
2	3/2	5/2	3	$-1/(4 \cdot 7 \sqrt{2 \cdot 5})$	-0.011294	2	3/2	5/2	3	$-1/(4 \cdot 7 \sqrt{3})$	-0.020620
2	5/2	5/2	3	$-1/(2 \cdot 3 \cdot 7 \sqrt{2 \cdot 5})$	-0.007529	2	5/2	5/2	3	$1/(2 \cdot 7 \sqrt{2 \cdot 3})$	0.029161
3	5/2	5/2	3	$-\sqrt{5}/(2 \cdot 3 \cdot 7 \sqrt{2 \cdot 7})$	-0.014229	3	5/2	5/2	3	$-\sqrt{5}/(2 \cdot 3 \cdot 7 \sqrt{2 \cdot 7})$	-0.014229
3	7/2	5/2	3	$-1/(4 \cdot 7 \sqrt{3 \cdot 7})$	-0.007794	3	7/2	5/2	3	$\sqrt{5 \cdot 11}/(3 \cdot 4 \cdot 7 \sqrt{2 \cdot 7})$	0.023596
4	7/2	5/2	3	$-\sqrt{5 \cdot 11}/(4 \cdot 7 \cdot 9 \sqrt{3})$	-0.016991	4	7/2	5/2	3	$-\sqrt{11}/(4 \cdot 7 \cdot 9 \sqrt{2})$	-0.009306
0	1/2	7/2	3	$1/(4 \sqrt{3 \cdot 7})$	0.054555	1	1/2	7/2	3	$-1/(3 \cdot 7 \cdot 8)$	-0.005952
1	1/2	7/2	3	$1/(4 \cdot 7)$	0.035714	1	3/2	7/2	3	$1/(7 \cdot 8 \sqrt{2 \cdot 3})$	0.007290
1	3/2	7/2	3	$\sqrt{5}/(7 \cdot 8 \sqrt{2})$	0.028235	2	3/2	7/2	3	$-1/(8 \cdot 7 \sqrt{2 \cdot 3})$	-0.007290
2	3/2	7/2	3	$\sqrt{5}/(7 \cdot 8 \sqrt{2})$	0.028235	2	5/2	7/2	3	$1/(7 \cdot 8 \sqrt{3})$	0.010310
2	5/2	7/2	3	$\sqrt{5}/(3 \cdot 4 \cdot 7 \sqrt{2})$	0.018823	3	5/2	7/2	3	$-1/(4 \cdot 7 \sqrt{3 \cdot 7})$	-0.007794
3	5/2	7/2	3	$\sqrt{5 \cdot 11}/(3 \cdot 4 \cdot 7 \sqrt{2 \cdot 7})$	0.023596	3	7/2	7/2	3	$\sqrt{11}/(7 \cdot 8 \sqrt{3 \cdot 7})$	0.012924
3	7/2	7/2	3	$\sqrt{11}/(7 \cdot 8 \sqrt{3 \cdot 7})$	0.012924	4	7/2	7/2	3	$-\sqrt{5}/(3 \cdot 7 \cdot 8 \sqrt{3})$	-0.007684
4	7/2	7/2	3	$\sqrt{11}/(3 \cdot 7 \cdot 8)$	0.019742	1	1/2	7/2	4	$-1/(3 \cdot 8)$	-0.041667
1	3/2	7/2	4	$-1/(3 \cdot 8 \sqrt{2 \cdot 3 \cdot 7})$	-0.006429	1	3/2	7/2	4	$\sqrt{5}/(3 \cdot 8 \sqrt{2 \cdot 7})$	0.024901
2	3/2	7/2	4	$-1/(3 \cdot 8 \sqrt{2 \cdot 3 \cdot 7})$	-0.006429	2	3/2	7/2	4	$-\sqrt{5}/(3 \cdot 8 \sqrt{2 \cdot 7})$	-0.024901
2	5/2	7/2	4	$-1/(4 \cdot 9 \sqrt{2 \cdot 7})$	-0.007424	2	5/2	7/2	4	$\sqrt{11 \cdot 5}/(8 \cdot 9 \sqrt{3 \cdot 7})$	0.022477
3	5/2	7/2	4	$-\sqrt{11}/(4 \cdot 7 \cdot 9 \sqrt{2})$	-0.009306	3	5/2	7/2	4	$-\sqrt{5 \cdot 11}/(4 \cdot 7 \cdot 9 \sqrt{3})$	-0.016991
3	7/2	7/2	4	$-\sqrt{5}/(3 \cdot 7 \cdot 8 \sqrt{3})$	-0.007684	3	7/2	7/2	4	$\sqrt{11}/(3 \cdot 7 \cdot 8)$	0.019742
4	7/2	7/2	4	$-\sqrt{5}/(8 \cdot 9 \sqrt{7})$	-0.011738	4	7/2	7/2	4	$-\sqrt{5}/(8 \cdot 9 \sqrt{7})$	-0.011738

ТАБЛИЦА 10.14 (продолжение)

$a$	$d$	$b$	$e$	$\begin{Bmatrix} a & b & 7/2 \\ d & e & 7/2 \\ 1/2 & 1/2 & 1 \end{Bmatrix}$		$a$	$d$	$b$	$e$	$\begin{Bmatrix} a & b & 7/2 \\ d & e & 7/2 \\ 1/2 & 1/2 & 1 \end{Bmatrix}$	
3	7/2	1/2	0	$\sqrt{3}/(16\sqrt{7})$	0.040916	2	3/2	5/2	3	$11/(3 \cdot 7 \cdot 8\sqrt{2 \cdot 3})$	0.026731
4	7/2	1/2	0	$\sqrt{7}/(3 \cdot 16\sqrt{3})$	0.031823	2	5/2	5/2	3	$1/(4 \cdot 7 \cdot 9\sqrt{3})$	0.002291
3	5/2	1/2	1	$1/(4 \cdot 7)$	0.035714	3	5/2	5/2	3	$13/(2 \cdot 7 \cdot 9\sqrt{3 \cdot 7})$	0.022515
3	7/2	1/2	1	$-5/(3 \cdot 7 \cdot 16)$	-0.014881	3	7/2	5/2	3	$-\sqrt{11}/(3 \cdot 7 \cdot 16\sqrt{3 \cdot 7})$	-0.002154
4	7/2	1/2	1	$11/(16 \cdot 27)$	0.025463	4	7/2	5/2	3	$5\sqrt{5}/(3 \cdot 7 \cdot 16\sqrt{3})$	0.019211
2	5/2	3/2	1	$1/(8\sqrt{2 \cdot 7})$	0.033408	0	1/2	7/2	3	$\sqrt{3}/(16\sqrt{7})$	0.040916
3	5/2	3/2	1	$1/(7 \cdot 8\sqrt{2 \cdot 3})$	0.007290	1	1/2	7/2	3	$-5/(3 \cdot 7 \cdot 16)$	-0.014881
3	7/2	3/2	1	$11/(3 \cdot 7 \cdot 8\sqrt{2 \cdot 3})$	0.026731	1	3/2	7/2	3	$11/(3 \cdot 7 \cdot 8\sqrt{2 \cdot 3})$	0.026731
4	7/2	3/2	1	$5\sqrt{5}/(8 \cdot 27\sqrt{2 \cdot 7})$	0.013834	2	3/2	7/2	3	$-1/(7 \cdot 8\sqrt{2 \cdot 3})$	-0.007290
2	3/2	3/2	2	$\sqrt{3}/(4 \cdot 5\sqrt{7})$	0.032733	2	5/2	7/2	3	$13/(3 \cdot 7 \cdot 16\sqrt{3})$	0.022338
2	5/2	3/2	2	$-1/(3 \cdot 5 \cdot 8\sqrt{2 \cdot 7})$	-0.002227	3	5/2	7/2	3	$-\sqrt{11}/(3 \cdot 7 \cdot 16\sqrt{3 \cdot 7})$	-0.002154
3	5/2	3/2	2	$11/(4 \cdot 6 \cdot 7\sqrt{2 \cdot 3})$	0.026731	3	7/2	7/2	3	$5/(7 \cdot 8\sqrt{3 \cdot 7})$	0.019484
3	7/2	3/2	2	$-1/(7 \cdot 8\sqrt{2 \cdot 3})$	-0.007290	4	7/2	7/2	3	$1/(7 \cdot 8 \cdot 9)$	0.001984
4	7/2	3/2	2	$13/(8 \cdot 9\sqrt{2 \cdot 5 \cdot 7})$	0.021581	0	1/2	7/2	4	$\sqrt{7}/(3 \cdot 16\sqrt{3})$	0.031823
1	3/2	5/2	2	$1/(8\sqrt{2 \cdot 7})$	0.033408	1	1/2	7/2	4	$11/(16 \cdot 27)$	0.025463
2	3/2	5/2	2	$-1/(3 \cdot 5 \cdot 8\sqrt{2 \cdot 7})$	-0.002227	1	3/2	7/2	4	$5\sqrt{5}/(8 \cdot 27\sqrt{2 \cdot 7})$	0.013834
2	5/2	5/2	2	$11/(2 \cdot 5 \cdot 9\sqrt{3 \cdot 7})$	0.026671	2	3/2	7/2	4	$13/(8 \cdot 9\sqrt{2 \cdot 5 \cdot 7})$	0.021581
3	5/2	5/2	2	$1/(4 \cdot 7 \cdot 9\sqrt{3})$	0.002291	2	5/2	7/2	4	$\sqrt{11}/(3 \cdot 16\sqrt{3 \cdot 5 \cdot 7})$	0.006743
3	7/2	5/2	2	$13/(3 \cdot 7 \cdot 16\sqrt{3})$	0.022338	3	5/2	7/2	4	$5\sqrt{5}/(3 \cdot 7 \cdot 16\sqrt{3})$	0.019211
4	7/2	5/2	2	$\sqrt{11}/(3 \cdot 16\sqrt{3 \cdot 5 \cdot 7})$	0.006743	3	7/2	7/2	4	$1/(7 \cdot 8 \cdot 9)$	0.001984
1	1/2	5/2	3	$1/(4 \cdot 7)$	0.035714	4	7/2	7/2	4	$17/(8 \cdot 27\sqrt{3 \cdot 7})$	0.017175
1	3/2	5/2	3	$1/(7 \cdot 8\sqrt{2 \cdot 3})$	0.007290						



# ГРАФИЧЕСКИЙ МЕТОД КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ УГЛОВОГО МОМЕНТА

Решение задач, в которых в той или иной мере фигурируют угловые и спиновые переменные, связано с вычислением выражений, представляющих собой многократные интегралы от произведений сферических функций и  $D$ -функций Вигнера и многократные суммы произведений коэффициентов Клебша—Гордана,  $6j$ - и  $9j$ -символов. Эти выражения часто оказываются весьма громоздкими. Из-за большого числа переменных трудно увидеть сразу связи входящих в них величин, выявить симметрию и другие общие свойства, определить инвариантность этих выражений по отношению к тем или иным математическим преобразованиям.

Использование графической техники существенно облегчает общий анализ выражений такого типа. Графическое представление компактно и более наглядно. На графике видны все связи между элементами, а также симметрия всего выражения и отдельных его частей. Более того, в большинстве случаев применение графических методов расчета значительно упрощает конкретные вычисления.

Удобный графический метод суммирования  $3jm$ -коэффициентов был развит Левинсоном [80], Юцисом, Левинсоном, Ванагасом [44] и Юцисом, Бандзайтисом [45]. Видоизмененный вариант этого метода предложен Бринком и Сэчлером [9]. Существенно иная, но менее удобная графическая техника дана также в работах [24, 105]. Подробное изложение графического метода представлено в книге Эль-База и Кастеля [17], которые расширили область применения метода для случаев непрерывных переменных. К сожалению, во всех перечисленных работах имеются существенные различия в выборе фаз и обозначений, в правилах определения знаков и др.

В этой главе даны унифицированные правила графической техники. В параграфах 11.1 и 11.2 определены элементы графиков, т. е. приведено графическое изображение различных функций и указан способ изображения основных математических операций. В параграфе 11.3 сформулированы используемые в процессе графических вычислений правила действия над графиками и указаны соответствующие этим действиям математические операции. Для удобства пользования все определения и правила собраны в таблицы. Общая схема применения графического метода, определяющая последовательность операций в процессе конкретных вычислений, приведена в последнем параграфе (11.4), поскольку она существенно опирается на материал, данный в предшествующих параграфах.

## 11.1. ГРАФИЧЕСКОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ РАЗЛИЧНЫХ ФУНКЦИЙ

В основу графического метода положено однозначное соответствие между элементами графика и величинами, входящими в аналитическое выражение. Каждому аналитическому выражению сопоставляется график и, наоборот, по виду графика можно написать соответствующее ему одно и только одно аналитическое выражение. Каждой аналитической операции соответствует определенное преобразование графика. Благодаря этому все вычисления можно делать не в аналитической, а в графической форме.

### 1. Основные элементы графиков

Сопоставление аналитического и графического представлений особенно удобно, если аналитическое выражение записано в форме Дирака. Исходными понятиями квантовой теории в формулировке Дирака являются «кет»  $|\psi\rangle$  и «бра»  $\langle\psi|$ , т. е. квантовомеханический вектор состояния и эрмитово сопряженный ему вектор. В графическом представлении «бра» и «кет» изображаются в виде направленных отрезков линий, привязанных одним концом к основанию (точке или черточке).

«Кет»  $|\psi\rangle$ , т. е. ковариантный или стандартный вектор состояния, изображается линией с одной стрелкой, идущей от основания.

«Бра»  $\langle\psi|$ , т. е. контравариантный или контрастандартный вектор состояния, изображается линией с двумя стрелками, направленными к основанию.

Сплошной (нежирной) линией изображается вектор состояния, характеризуемого определенным угловым моментом  $j$  и его проекцией  $m$ :

$$\begin{array}{l} \longrightarrow |jm\rangle, \\ \longrightarrow \langle jm|. \end{array}$$

Такие линии на графике называются  $j$ -линиями.

Пунктирной линией представляется вектор состояния, характеризуемого определенным направлением  $\Omega \{\vartheta, \varphi\}$ :

$$\begin{array}{l} \dashrightarrow |\Omega\rangle, \\ \dashrightarrow \langle\Omega|. \end{array}$$

Такие линии на графике называются  $\Omega$ -линиями.

Двойной пунктирной линией изображается совокупность углов Эйлера  $\alpha, \beta, \gamma$  или углов  $\omega; \Theta, \Phi$ , характеризующих  $R$ -поворот системы. Такие линии на графике называются  $R$ -линиями. Повороты системы координат играют определяющую роль в теории углового момента.

$$==== R.$$

Значение аргументов  $jm, \Omega$  или  $R$  указываются непосредственно над соответствующей линией, поэтому длина линии, ее изогнутость и расположение на графике не играют роли. Например:

$$\longrightarrow \text{эквивалентно} \longleftarrow u \longleftrightarrow.$$

Существенно лишь число стрелок и их направление по отношению к основанию.

Квантовомеханические векторы состояний можно нормировать по-разному. На графике это отражено в характере основания, из которого исходит изображающая его линия. Величина  $|jm\rangle$ , представляющая вектор состояния, нормированный на единицу,

$$\langle jm | j' m' \rangle = \delta_{jj'} \delta_{mm'},$$

изображается на графике линией, исходящей из основания в виде черточка. Величина  $|jm\rangle$ , представляющая вектор состояния, нормированный на  $(2j+1)^{-1}$ ,

$$(jm | j' m') = \frac{\delta_{jj'} \delta_{mm'}}{2j+1},$$

изображается линией, исходящей из основания в виде точки. Условия полноты для системы функций  $|jm\rangle$  и  $|jm\rangle$  имеют вид:

$$\sum_{jm} |jm\rangle \langle jm| = \sum_{jm} |jm\rangle (2j+1) (jm| = 1.$$

Величина  $|\Omega\rangle$  представляет вектор состояния, нормированного на  $\delta$ -функцию, т. е.

$$\langle\Omega | \Omega'\rangle = \delta(\Omega - \Omega').$$

Она изображается линией, исходящей из основания-черточка. Величина  $|\Omega\rangle$  представляет вектор состояния, нормированного так, что

$$(\Omega | \Omega') = 4\pi\delta(\Omega - \Omega'),$$

и изображается пунктирной линией, исходящей из основания-точки. Для функций  $|\Omega\rangle$  и  $|\Omega\rangle$  условия полноты имеют вид

$$\int |\Omega\rangle d\Omega \langle\Omega| = \int |\Omega\rangle \frac{d\Omega}{4\pi} (\Omega| = 1.$$

## 2. Графики основных функций

В квантовой механике все функции и операторы, зависящие от угловых и спиновых переменных, могут быть заданы в  $\Omega$ - или в  $jm$ -представлении, соответствующем определенной ориентации  $R$  системы координат. В соответствии с этим любую функцию и матричный элемент любого оператора можно изобразить в виде блока с входящими или выходящими из него  $\Omega$ -,  $j$ - и  $R$ -линиями, характеризующими значения всех его спиновых и угловых переменных. График сложного выражения будет представляться комбинацией таких блоков, связанных между собой  $\Omega$ -,  $j$ - и  $R$ -линиями.

Стандартное графическое изображение различных функций представлено в табл. 11.1—11.3, а графическое представление их свойств — в табл. 11.10—11.14.

Сферическая функция  $Y_{lm}(\Omega) = \langle \Omega | lm \rangle$  представлена в виде соединения сплошной и пунктирной линий, соответствующих  $|lm\rangle$  и  $\langle \Omega |$ .

$3jm$ -Символ Вигнера  $\begin{pmatrix} a & b & c \\ \alpha & \beta & \gamma \end{pmatrix} = (00 | aab\beta c\gamma)$  изображается тремя выходящими из одного узла-точки сплошными линиями, соответствующими  $|a\alpha\rangle$ ,  $|b\beta\rangle$  и  $|c\gamma\rangle$ . Знак узла (плюс или минус) определяет циклический порядок считывания аргументов, т. е. последовательность связи моментов. Плюс соответствует считыванию против часовой стрелки, минус — считыванию по часовой стрелке.

$3j$ -,  $6j$ - и  $9j$ -символы Вигнера изображаются замкнутым графиком в виде не имеющей свободных концов связки трех, шести и соответственно девяти сплошных  $j$ -линий с индексами, характеризующими аргументы этих функций. Стандартный вид таких графиков не однозначен, поскольку индексы на линиях могут быть переставлены, а знаки узлов и направления стрелок — изменены без изменения значения графика. Эта неоднозначность отражает то обстоятельство, что каждый из  $3nj$ -символов может быть представлен в виде несколько различных сумм произведений  $3jm$ -символов, различающихся между собой перестановкой угловых моментов, последовательностью их связи и знаками их проекций.

Матрица оператора поворота  $R$  в  $\Omega$ -представлении  $\langle \Omega' | R | \Omega \rangle$  и в  $jm$ -представлении  $\langle jm | R | j'm' \rangle = \delta_{jj'} D_{mm'}^j(R)$  изображается в виде соединения трех линий, одна из которых двойная пунктирная, соответствующая переменным  $R$ , а две другие — либо пунктирные, соответствующие  $\langle \Omega' |$  и  $| \Omega \rangle$ , либо сплошные, соответствующие  $\langle jm |$  и  $| j'm' \rangle$ . Знак такого соединения, как и выше, определяет порядок считывания аргументов, т. е. какое из двух состояний при повороте является начальным, а какое — конечным. При знаке плюс считывание идет против часовой стрелки, а при знаке минус — по часовой стрелке. Таким образом, изменение знака соединения соответствует переходу от поворота  $R$  к обратному повороту  $R^{-1}$ .

Матричный элемент неприводимого тензорного оператора  $\langle \phi | T_{\lambda\mu} | \phi' \rangle$  изображается в виде блока с тремя линиями, соответствующими  $\langle \phi |$ ,  $| \phi' \rangle$  и  $| \lambda\mu \rangle$ . При этом внутри блока указывается символ оператора, а в тех случаях, когда он зависит еще от каких-либо аргументов или квантовых чисел, приводится и значение этих величин.

ТАБЛИЦА 11.1  
ИЗОБРАЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ

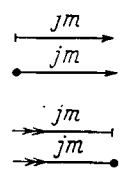
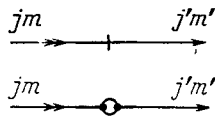
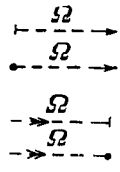
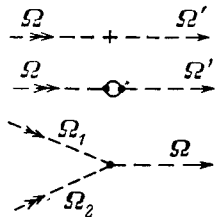
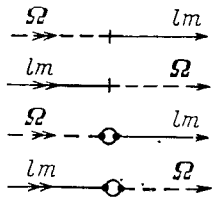
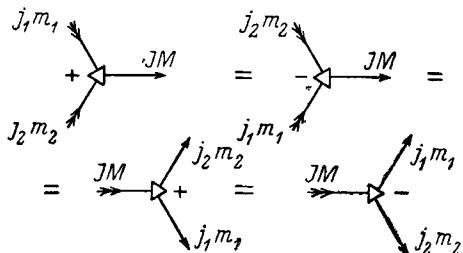
Аналитическое представление	Графическое представление
<p>«Кет» <math> jm\rangle</math>  <math> jm\rangle</math>                      «Бра» <math>\langle jm </math>  <math>(jm </math></p>	
Символы Кронекера	
<p>Скалярное произведение  <math>\langle jm   j'm' \rangle = \delta_{jj'} \delta_{mm'}</math>  <math>(jm   j'm') = \frac{\delta_{jj'} \delta_{mm'}}{2j+1}</math></p>	
<p>«Кет» <math> \Omega\rangle</math>  <math> \Omega\rangle</math>                      «Бра» <math>\langle \Omega </math>  <math>(\Omega </math></p>	
$\delta$ -функции Дирака	
<p>Скалярное произведение  <math>\langle \Omega   \Omega' \rangle = \delta(\Omega - \Omega')</math>  <math>(\Omega   \Omega') = 4\pi\delta(\Omega - \Omega')</math>  <math>(\Omega_1, \Omega_2   \Omega) = \delta(\Omega_1 - \Omega) \delta(\Omega_2 - \Omega)</math></p>	
Сферические функции	
<p><math>\langle \Omega   lm \rangle = Y_{lm}(\Omega)</math>  <math>\langle lm   \Omega \rangle = Y_{lm}^*(\Omega)</math>  <math>(\Omega   lm) = C_{lm}(\Omega)</math>  <math>(lm   \Omega) = C_{lm}^*(\Omega)</math></p>	
Коэффициенты Клебша—Гордана	
<p><math>C_{j_1 m_1 j_2 m_2}^{JM} = \langle j_1 m_1 j_2 m_2   j_1 j_2 JM \rangle = \langle j_1 j_2 JM   j_1 m_1 j_2 m_2 \rangle</math></p>	

ТАБЛИЦА 11.1 (продолжение)

Аналитическое представление	Графическое представление
<p style="text-align: center;">3jm-символы Вигнера</p> $\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} = (00   j_1 m_1 j_2 m_2 j_3 m_3) = (j_1 m_1 j_2 m_2 j_3 m_3   00)$ <p style="text-align: center;">«Метрический тензор»</p> $\begin{pmatrix} j \\ m m' \end{pmatrix} = (-1)^{j+m} \delta_{m, -m'}$ $\begin{pmatrix} j \\ m' m \end{pmatrix} = (-1)^{j-m} \delta_{-m, m'}$	

ТАБЛИЦА 11.2

ИЗОБРАЖЕНИЕ ИНВАРИАНТНЫХ ФУНКЦИЙ

Аналитическое выражение	Графическое представление
$(2a + 1)$ $\sqrt{2a + 1}$ $\delta_{ab}$ $\frac{\delta_{ab}\delta_{bc}}{\sqrt{2a + 1}}$ $\frac{\delta_{ab}\delta_{bc}\delta_{ca}}{(2a + 1)}$	
<p style="text-align: center;">3j-символ</p> $\{a \ b \ c\}$	

ТАБЛИЦА 11.2 (продолжение)

Аналитическое выражение	Графическое представление
6j-символ	
$\begin{Bmatrix} a & b & c \\ A & B & C \end{Bmatrix}$	
9j-символ	
$\begin{Bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{Bmatrix}$	
12j-символ I рода (стр. 397)	
$\begin{Bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \end{Bmatrix}$	
12j-символ II рода (стр. 395)	
$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \end{bmatrix}$	

ТАБЛИЦА 11.3  
ИЗОБРАЖЕНИЕ МАТРИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Аналитическое выражение	Графическое изображение
-------------------------	-------------------------

Матричные элементы неприводимых тензорных операторов в  $\Omega$ -представлении и в  $j'm$ -представлении

$$\langle \gamma \Omega | \mathfrak{M}_{\lambda \mu} | \gamma' \Omega' \rangle,$$

где  $\gamma$  — совокупность всех квантовых чисел, кроме  $j$  и  $m$ .

Для обобщенно эрмитовых операторов

$$\langle \gamma \Omega | \mathfrak{M}_{\lambda \mu}^{\dagger} | \gamma' \Omega' \rangle = (-1)^{\lambda - \mu} \langle \gamma' \Omega' | \mathfrak{M}_{\lambda -\mu} | \gamma \Omega \rangle^*$$

$$\langle \gamma j m | \mathfrak{M}_{\lambda \mu} | \gamma' j' m' \rangle$$

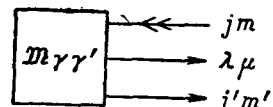
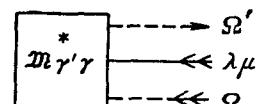
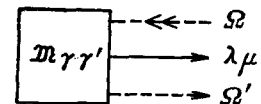
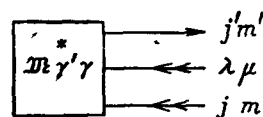


ТАБЛИЦА 11.3 (продолжение)

Аналитическое выражение	Графическое изображение
-------------------------	-------------------------

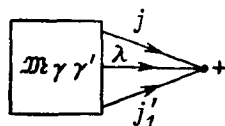
Для обобщенно эрмитовых операторов

$$\langle \gamma jm | \mathfrak{M}_{\lambda\mu}^* | \gamma' j' m' \rangle = (-1)^{\lambda-\mu} \langle \gamma' j' m' | \mathfrak{M}_{\lambda-\mu} | \gamma jm \rangle^*$$



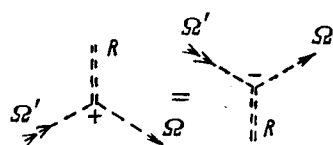
Приведенный матричный элемент

$$\langle \gamma j || \mathfrak{M}_{\lambda} || \gamma' j' \rangle = \sum_{m\mu m'} \langle \gamma jm | \mathfrak{M}_{\lambda\mu} | \gamma' j' m' \rangle (-1)^{j-m} \begin{pmatrix} j & \lambda & j' \\ -m & \mu & m' \end{pmatrix}$$

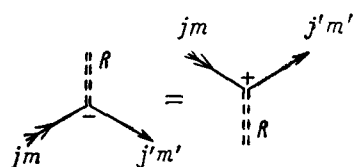


Матричные элементы оператора поворота в  $\Omega$ -представлении и в  $jm$ -представлении ( $D$ -функции Вигнера)

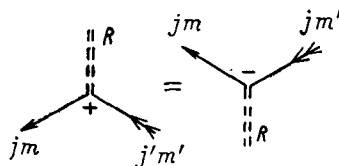
$$\langle \gamma' \Omega' | D(R) | \gamma \Omega \rangle = \delta_{\gamma\gamma'} \delta(\Omega' - R\Omega)$$



$$\langle \gamma jm | D(R) | \gamma' j' m' \rangle = \delta_{\gamma\gamma'} \delta_{jj'} D_{mm'}^j(R)$$



$$\begin{aligned} \langle \gamma jm | D^+(R) | \gamma' j' m' \rangle &= \delta_{\gamma\gamma'} \delta_{jj'} D_{m'm}^{j*}(R) = \\ &= \langle \gamma jm | D^{-1}(R) | \gamma' j' m' \rangle = \delta_{\gamma\gamma'} \delta_{jj'} D_{mm'}^j(R^{-1}) \end{aligned}$$



11.2. ГРАФИЧЕСКОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ОСНОВНЫХ ОПЕРАЦИЙ ТЕОРИИ

Выражения, возникающие при расчетах, основанных на квантовой теории углового момента, обладают следующим общим свойством. Они имеют билинейный характер типа скалярного произведения  $|\psi\rangle \langle\psi|$ , в котором суммирование или интегрирование проводится по всей области изменения переменных  $jm$ ,  $\Omega$  ( $\vartheta$ ,  $\varphi$ ) или  $R$  ( $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ) (так называемые *внутренние переменные*). Благодаря этому свойству выражений их аналитический вид не меняется при повороте системы координат. Это свойство отражает независимость описания физических процессов от выбора системы координат и по существу является следствием изотропии трехмерного физического пространства. При повороте необходимо учитывать изменения значения лишь внешних переменных, т. е. таких переменных  $m$ ,  $\Omega$  ( $\vartheta$ ,  $\varphi$ ) и  $R$  ( $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ), по которым нет суммирования или интегрирования. Изменение же внутренних переменных можно не учитывать.

Таким образом, в реальных задачах, связанных с теорией углового момента, приходится иметь дело лишь с инвариантным суммированием по угловым моментам  $j$  и их проекциям  $m$  и с полным инвариантным интегрированием по сферическим углам  $\Omega$  ( $\vartheta$ ,  $\varphi$ ) и переменным  $R$  ( $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ), характеризующим поворот системы. Только к выражениям такого типа и применим излагаемый в этой главе графический метод вычислений.

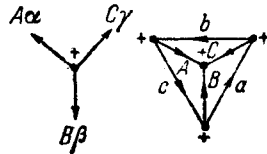
В данном параграфе указаны способы графического изображения математических операций, используемых в теории угловых моментов, тогда как сами правила действия над графиками даны в следующем параграфе. Краткая сводка результатов приводится в табл. 11.4.

## 1. Умножение

Произведение двух величин  $\mathfrak{M}$  и  $\mathfrak{N}$  на графике изображается в виде двух не связанных между собой блоков, один из которых представляет величину  $\mathfrak{M}$ , а другой  $\mathfrak{N}$ . Взаимное расположение и ориентация этих блоков на графике не существенны. Например, произведение

$$\begin{pmatrix} A & B & C \\ a & \beta & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B & C \\ a & b & c \end{pmatrix}$$

изображается как



## 2. Инвариантное суммирование по проекции углового момента

Суммирование по проекции  $m$  углового момента  $j$  ( $m=j, j-1, \dots, -j$ ) билинейного выражения типа скалярного произведения

$$\sum_{m=-j}^j \langle \mathfrak{M} | jm \rangle \langle jm | \mathfrak{N} \rangle$$

графически изображается соединением (замыканием) свободных концов линий, соответствующих  $|jm\rangle$  и  $\langle jm|$ , на графике, представляющем выражение, стоящее под знаком суммы

$$\sum_m \boxed{\mathfrak{M}} \xrightarrow{j^m} \xrightarrow{j^m} \boxed{\mathfrak{N}} = \boxed{\mathfrak{M}} \xrightarrow{j} \boxed{\mathfrak{N}}.$$

Связующей линии приписывается индекс  $j$  и на ней ставится стрелка, направленная в ту же сторону, что и стрелки исходных связываемых линий. Рассматриваемая сумма будет инвариантна относительно поворота системы координат лишь в том случае, когда один из сомножителей, стоящих под знаком суммы, имеет ковариантную по  $jm$ , а другой — контравариантную по  $jm$  форму. Это означает, что на графике одна из соединяемых линий должна обязательно иметь одинарную, а другая — двойную стрелку, направленную в ту же сторону.

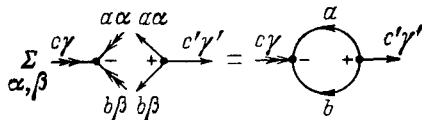
Таким образом, изображенная выше связка  $j$ -линий двух блоков, соответствующих  $\langle \mathfrak{M} | jm \rangle$  и  $\langle jm | \mathfrak{N} \rangle$ , по существу представляет собой скалярное произведение неприводимых тензоров ранга  $j$

$$\sum_{m=-j}^j \mathfrak{M}_{jm} \mathfrak{N}_m.$$

Например, сумма произведений двух  $3jm$ -символов по двум проекциям моментов  $a$  и  $b$

$$\sum_{\alpha, \beta} \begin{pmatrix} a & b & c \\ \alpha & \beta & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c' \\ \alpha & \beta & \gamma' \end{pmatrix} = \sum_{\alpha, \beta} (-1)^{a-a+b-\beta+c-\gamma} \begin{pmatrix} a & b & c \\ -\alpha & -\beta & -\gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c' \\ \alpha & \beta & \gamma' \end{pmatrix}$$

изображается в виде



Графики, различающиеся между собой лишь направлением стрелки на связующей  $j$ -линии, соответствуют выражениям, отличающимся лишь фазовым множителем  $(-1)^{2j}$ , поскольку

$$\sum_m \mathfrak{M}_{jm} \mathfrak{N}_m = (-1)^{2j} \sum_m \mathfrak{M}_j^m \mathfrak{N}_{jm}.$$

Важным примером сумм по магнитным квантовым числам являются  $3nj$ -символы Вигнера, которые представляют собой инвариантные суммы произведений двух, четырех, шести и т. д.



3j-символов; причем суммирование выполнено по всем проекциям, так что соответствующие 3nj-символам графики имеют замкнутый вид, не имеют внешних, входящих или выходящих линий (табл. 11.4).

ТАБЛИЦА 11.4  
3nj-СИМВОЛЫ ВИГНЕРА

Аналитическое выражение	Графическое представление
3j-символ	
$\sum_{\mu_i} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 \end{pmatrix} = \sum_{\mu_i} (-1)^{j_1 - \mu_1 + j_2 - \mu_2 + j_3 - \mu_3} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ -\mu_1 & -\mu_2 & -\mu_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 \end{pmatrix} = \{j_1 \ j_2 \ j_3\}$	
6j-символ	
$\sum_{\mu_i \kappa_i} (-1)^{k_1 - \kappa_1 + k_2 - \kappa_2 + k_3 - \kappa_3} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_1 & k_2 & k_3 \\ \mu_1 & -\kappa_2 & \kappa_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 & j_2 & k_3 \\ \kappa_1 & \mu_2 & -\kappa_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 & k_2 & j_3 \\ -\kappa_1 & \kappa_2 & \mu_3 \end{pmatrix} =$ $= \sum_{\mu_i \kappa_i} (-1)^{j_1 - \mu_1 + j_2 - \mu_2 + j_3 - \mu_3 + k_1 - \kappa_1 + k_2 - \kappa_2 + k_3 - \kappa_3} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_1 & k_2 & k_3 \\ -\mu_1 & -\kappa_2 & \kappa_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 & j_2 & k_3 \\ \kappa_1 & -\mu_2 & -\kappa_3 \end{pmatrix} \times$ $\times \begin{pmatrix} k_1 & k_2 & j_3 \\ -\kappa_1 & \kappa_2 & -\mu_3 \end{pmatrix} = \left\{ \begin{matrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ k_1 & k_2 & k_3 \end{matrix} \right\}$	
9j-символ	
$\sum_{\mu_i \kappa_i \lambda_i} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 & k_2 & k_3 \\ \kappa_1 & \kappa_2 & \kappa_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_1 & k_1 & l_1 \\ \mu_1 & \kappa_1 & \lambda_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_2 & k_2 & l_2 \\ \mu_2 & \kappa_2 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_3 & k_3 & l_3 \\ \mu_3 & \kappa_3 & \lambda_3 \end{pmatrix} =$ $= \sum_{\mu_i \kappa_i \lambda_i} (-1)^{j_1 - \mu_1 + j_2 - \mu_2 + j_3 - \mu_3 + k_1 - \kappa_1 + k_2 - \kappa_2 + k_3 - \kappa_3 + l_1 - \lambda_1 + l_2 - \lambda_2 + l_3 - \lambda_3} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 & k_2 & k_3 \\ \kappa_1 & \kappa_2 & \kappa_3 \end{pmatrix} \times$ $\times \begin{pmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_1 & k_1 & l_1 \\ -\mu_1 & -\kappa_1 & -\lambda_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_2 & k_2 & l_2 \\ -\mu_2 & -\kappa_2 & -\lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_3 & k_3 & l_3 \\ -\mu_3 & -\kappa_3 & -\lambda_3 \end{pmatrix} = \left\{ \begin{matrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ k_1 & k_2 & k_3 \\ l_1 & l_2 & l_3 \end{matrix} \right\}$	

### 3. Суммирование по угловому моменту

Сплошной жирной j-линией, соединяющей два блока на графике



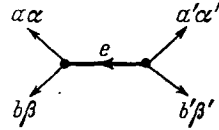
изображается полная инвариантная сумма по угловому моменту j и его проекции m от билинейного выражения типа скалярного произведения

$$\sum_{j=0}^{\infty} N_j \sum_{m=-j}^j \langle M | jm \rangle \langle jm | N \rangle.$$

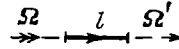
Весовой статистический множитель  $N_j$  равен  $(2j + 1)$  в случае суммирования величин типа 3j-символов, 6j-и 9j-символов, функций типа  $C_{jm}(\Omega) = \sqrt{\frac{4\pi}{2j+1}} Y_{jm}(\Omega)$  или  $P_j(\cos \vartheta)$ . При сум-

мировании по  $j$  величин типа  $c_{j_1 m_1 j_2 m_2}^{j m}$ ,  $U(j_1 j_2 j_3 j_4; j j')$  или  $Y_{jm}(\Omega)$ , нормированных на единицу, весовой множитель  $N_j$  равен единице. Например,

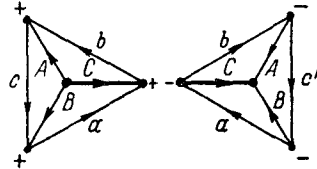
$$\sum_{e, \varepsilon} (2e + 1) (-1)^{e-\varepsilon} \begin{pmatrix} a & b & e \\ \alpha & \beta & -\varepsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' & b' & e \\ \alpha' & \beta' & \varepsilon \end{pmatrix}$$



$$\sum_{lm} Y_{lm}(\Omega) Y_{lm}^*(\Omega') = \langle \Omega | lm \rangle \langle lm | \Omega' \rangle$$

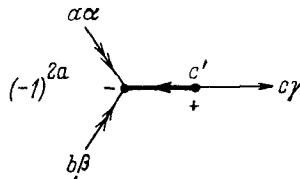


$$\sum_C (2C + 1) \begin{Bmatrix} A & B & C \\ a & b & c \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} A & B & C \\ a & b & c' \end{Bmatrix}$$



Коэффициент Клебша—Гордана  $C_{aab\beta}^{c\gamma}$  можно представить в виде суммы по  $c'\gamma'$  произведения двух  $3jm$ -символов (см. табл. 11.10а)

$$\begin{aligned} C_{aab\beta}^{c\gamma} &\equiv \langle aab\beta | c\gamma \rangle = (-1)^{a-b-c} \sum_{c'\gamma'} (2c' + 1) \begin{pmatrix} a & b & c' \\ \alpha & \beta & \gamma' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c' & c & 0 \\ \gamma' & \gamma & 0 \end{pmatrix} = \\ &= (-1)^{2a} \sum_{c'\gamma'} (2c' + 1) (-1)^{a-a+b-\beta+c'-\gamma'} \begin{pmatrix} b & a & c' \\ -\beta & -\alpha & -\gamma' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c' & c & 0 \\ \gamma' & \gamma & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

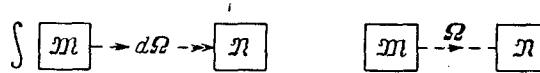


#### 4. Инвариантное интегрирование по углам, характеризующим направление

Инвариантное интегрирование билинейного выражения типа скалярного произведения

$$\int \langle l \mathfrak{M} | \Omega \rangle d\Omega \langle \Omega | \mathfrak{N} \rangle$$

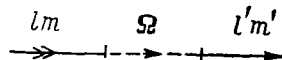
по угловым переменным  $\Omega \{\vartheta, \varphi\}$  в пределах полного телесного угла  $\Omega_0 = 4\pi$  графически изображается соединением свободных концов пунктирных линий, соответствующих  $|\Omega\rangle$  и  $\langle\Omega|$ , на графике, представляющем подинтегральное выражение



На связующей пунктирной линии ставится стрелка, направленная в ту же сторону, что и стрелки исходных линий  $|\Omega\rangle$  и  $\langle\Omega|$ .

Резльтирующей график сопоставляется интегралу от произведения функций, нормированных так, что  $\int |\Omega\rangle d\Omega \langle\Omega| = 1$ . Например,

$$\int Y_{lm}^*(\Omega) Y_{l'm'}(\Omega) d\Omega = \langle lm | \Omega \rangle \langle \Omega | l'm' \rangle$$



В тех случаях, когда используются функции, нормированные не на единицу, а на  $\Omega_0$ , в интеграл, соответствующий графику, следует вводить нормировочный множитель  $1/\Omega_0$ .

### 5. Инвариантное интегрирование по параметрам, характеризующим поворот

Инвариантное интегрирование билинейного выражения типа скалярного произведения по параметрам  $R \{ \alpha, \beta, \gamma \}$  или  $R \{ \omega; \Theta, \Phi \}$ , характеризующим поворот системы, по всей области изменения этих параметров  $R_0 = \int dR = 16\pi^2$

$$\int \langle | \mathfrak{M} (R) \rangle \langle | \mathfrak{N} (R^{-1}) \rangle \frac{dR}{R_0}$$

ТАБЛИЦА 11.5  
ИЗОБРАЖЕНИЕ ОСНОВНЫХ ОПЕРАЦИЙ ТЕОРИИ

Аналитическая операция	Графическое представление
$\langle   \mathfrak{M}   \rangle \langle   \mathfrak{N}   \rangle$	
Умножение	
Инвариантное суммирование по проекции углового момента Скалярное произведение неприводимых тензоров	
$\sum_m \langle   \mathfrak{M}   jm \rangle \langle jm   \mathfrak{N}   \rangle \equiv (\mathfrak{M}_j \cdot \mathfrak{N}_j)$	
Полное суммирование по угловому моменту и его проекции	
$\sum_{jm} \langle   \mathfrak{M}   jm \rangle N_j \langle jm   \mathfrak{N}   \rangle$	
Условие полноты	
$\sum_{jm}   jm \rangle N_j \langle jm   = 1$	
Неприводимое тензорное произведение двух неприводимых тензоров	
$\sum_{m_1 m_2} \langle   \mathfrak{M}   j_1 m_1 \rangle \langle   \mathfrak{N}   j_2 m_2 \rangle \times \langle j_1 m_1 j_2 m_2   j_1 j_2 JM \rangle \equiv$ $\equiv \{ \mathfrak{M}_{j_1} \otimes \mathfrak{N}_{j_2} \}_{JM}$	
Полное инвариантное интегрирование по углам $\Omega \{ \theta, \varphi \}$ , характеризующим направление	
$\int \langle   \mathfrak{M}   \Omega \rangle d\Omega \langle \Omega   \mathfrak{N}   \rangle$	
Условие полноты	
$\int   \Omega \rangle d\Omega \langle \Omega   = 1$	
Полное инвариантное интегрирование по переменным $R$ , характеризующим поворот	
$\int \langle   \mathfrak{M} (R^{-1})   \rangle \frac{dR}{R_0} \langle   \mathfrak{N} (R)   \rangle$	
Условие полноты	
$\int \hat{R}^{-1} \hat{R} \frac{dR}{R_0} = 1$	

графически изображается соединением двойных пунктирных линий, соответствующих  $R$  и  $R^{-1}$  на графике подинтегрального выражения.

$$\int \boxed{\mathcal{M}} = \frac{dR}{R_0} = \boxed{\mathcal{N}} = \boxed{\mathcal{M}} = \boxed{\mathcal{N}}$$

Отметим, что интегралы от произведения трех сферических функций или трех  $D$ -функций Вигнера всегда сводятся к интегралам от произведения двух сопряженных функций благодаря разложению Клебша—Гордана.

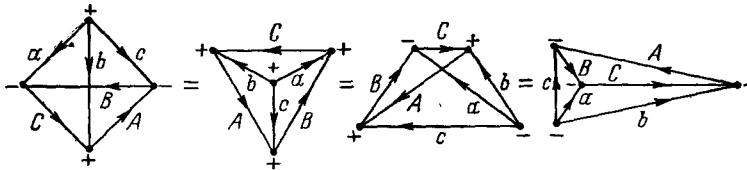
### 11.3. ПРАВИЛА ДЕЙСТВИЙ НАД ГРАФИКАМИ

В данном параграфе сформулированы правила действия над графиками: деформация графиков, изменение знака узлов и направления стрелок, правила разбиения графика на блоки и правила их связывания, графический метод суммирования по угловому моменту, замена пунктирных линий сплошными и правила стирания с графика линий с  $j=0$  и  $R=1$ .

#### 1. Деформация графика

В случае сложного выражения соответствующий график имеет много внешних и внутренних линий. *Внутренними* линиями графика называются линии, оба конца которых привязаны к узлам. *Внешними* называются такие линии, у которых один конец привязан к узлу, а другой конец свободен. Все математические преобразования выражения, не меняющие его значения, связаны с видоизменением внутренних частей графика, внешние линии при этом остаются неизменными. В тех случаях, когда внутренняя структура графика (или части графика) несущественна, его изображают в виде блока с теми же внешними линиями. Именно внешние линии определяют общие свойства графика (блока) при повороте системы координат. Например, *замкнутый график*, т. е. график, не имеющий внешних линий, является инвариантом относительно поворота системы координат. В частности, инвариантами являются  $3j$ -,  $6j$ -,  $9j$ -символы Вигнера.

Длина линий, их кривизна и ориентация на графике, как указано в 11.1.1, не имеют значения. Поэтому любой график можно произвольным образом поворачивать и деформировать; необходимо лишь менять знаки узлов, если при этом изменилась циклическая последовательность моментов, соответствующих этим узлам. Такая операция не меняет значения графика, т. е. исходный и результирующий графики будут представлять одно и то же выражение. Такого рода графики называются *тождественными*, или *эквивалентными*. Например:

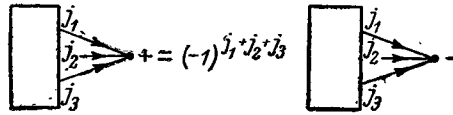


Два графика называются *топологически подобными*, если их можно совместить друг с другом путем поворотов, непрерывной деформации или путем отражения. Топологически подобные графики имеют одинаковое число узлов и одинаковое число сплошных и пунктирных линий, но могут различаться направлением стрелок на этих линиях и знаками узлов.

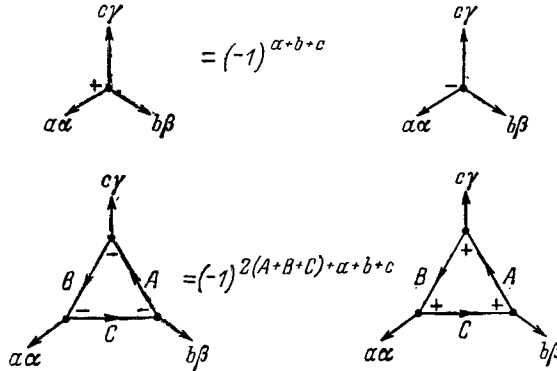
Выражения, соответствующие двум топологически подобным графикам, равны по модулю, но могут различаться фазовым множителем. Этот фазовый множитель можно определить сведением одного графика к другому, последовательно меняя, где нужно, знаки узлов и направления стрелок на линиях в соответствии с правилами, изложенными в 11.3.2 и 11.3.3. Таким путем, график, топологически подобный графику какой-либо известной функции, можно привести к стандартному виду и определить фазу выражения, соответствующего исходному графику. Изменение знаков на графиках, представляющих  $3j$ -,  $6j$ - и  $9j$ -символы, дано в табл. 11.6.

#### 2. Изменение знака узла

При изменении на графике знака узла, объединяющего три линии ( $j_1 j_2 j_3$ ), т. е. при изменении циклической последовательности связи этих моментов, соответствующее графику, аналитическое выражение приобретает дополнительный фазовый множитель, равный  $(-1)^{j_1 + j_2 + j_3}$ :



Поэтому изменение знака всех узлов, объединяющих сплошные  $j$ -линии графика, меняет фазу всего выражения на  $(-1)^{2J_0+J_1}$ , где  $J_0$  — алгебраическая сумма моментов всех внутренних  $j$ -линий графика,  $J_1$  — алгебраическая сумма моментов всех внешних  $j$ -линий. Так, например,



### 3. Изменение направления стрелок на внешних $j$ -линиях графика

Направление стрелок на внешних  $j$ -линиях графика определяет ковариантный или контравариантный характер  $jm$ -зависимости соответствующего графику выражения. Связь ковариантных и контравариантных компонент неприводимого тензорного оператора ранга  $j$  можно задать с по-

мощью антисимметричного символа  $\begin{pmatrix} j \\ mm' \end{pmatrix} = (-1)^{j+m} \delta_{m, -m'}$ , который играет роль метрического тензора в  $(2j+1)$ -мерном пространстве функций  $|jm\rangle$ . Преобразование функции, ковариантной по  $jm$  к контравариантной по  $jm$  и обратно, осуществляется путем свертывания этой функции с метрическим тензором, т. е. умножением на  $\begin{pmatrix} j \\ mm' \end{pmatrix}$  и суммированием по  $m$  или  $m'$ . Например,

$$\sum_{m'} \langle | \mathfrak{M} | jm' \rangle \begin{pmatrix} j \\ m' m \end{pmatrix} = \langle jm | \mathfrak{M} \rangle,$$

$$\sum_m \boxed{\mathfrak{M}} \begin{matrix} \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{matrix} \begin{matrix} jm' \\ jm' \\ jm' \end{matrix} = \boxed{\mathfrak{M}} \begin{matrix} \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{matrix} \begin{matrix} jm \\ jm \\ jm \end{matrix}$$

и обратно

$$\sum_{m'} \begin{pmatrix} j \\ m m' \end{pmatrix} \langle jm' | \mathfrak{M} \rangle = \langle | \mathfrak{M} | jm \rangle.$$

$$\sum_m \boxed{\mathfrak{M}} \begin{matrix} \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{matrix} \begin{matrix} jm' \\ jm' \\ jm' \end{matrix} = \boxed{\mathfrak{M}} \begin{matrix} \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{matrix} \begin{matrix} jm \\ jm \\ jm \end{matrix}$$

Поэтому в случае замены на внешней  $j$ -линии графика одинарной стрелки, направленной наружу, на двойную, идущую в противоположную сторону стрелку, в аналитическом выражении, отвечающем исходному графику, меняется знак проекции  $m \rightarrow -m$  и приобретает дополнительная фаза, равная  $(-1)^{j-m}$  при неизменных буквенных индексах на графике. Например:

$$\sum_a \begin{pmatrix} a \\ a' a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & \beta & \gamma \end{pmatrix} = (-1)^{a-a'} \begin{pmatrix} a & b & c \\ -a & \beta & \gamma \end{pmatrix}.$$

При замене на внешней  $j$ -линии графика двойной стрелки, направленной внутрь на одинарную противоположно идущую стрелку при неизменных буквенных индексах на графике, в аналитическом выражении, отвечающем исходному графику, меняется знак соответствующей проекции  $-m \rightarrow m$  и приобретает дополнительную фазу, компенсирующая множитель  $(-1)^{j-m}$ . Например:

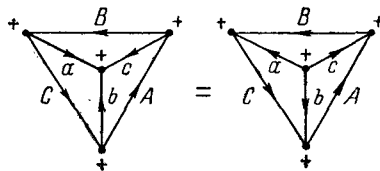
$$\sum_{\alpha'} \begin{pmatrix} a & & \\ & a & \\ & & \alpha' \end{pmatrix} (-1)^{a-\alpha'} \begin{pmatrix} a & b & \alpha \\ -\alpha' & \beta & \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ & \alpha & \beta & \gamma \end{pmatrix}.$$

#### 4. Изменение направления стрелок на внутренних $j$ -линиях графика

При изменении на графике направления стрелки на внутренней  $j$ -линии, отвечающей моменту  $j$ , аналитическое выражение, соответствующее этому графику, приобретает дополнительный фазовый множитель, равный  $(-1)^{2j}$ , поскольку

$$\sum_m \mathfrak{M}_{jm} \mathfrak{N}_m^j = (-1)^{2j} \sum_m \mathfrak{M}_m^j \mathfrak{N}_{jm}.$$

В случае замкнутого графика, представляющего произвольный  $3nj$ -символ, изменение направления всех стрелок на обратное меняет фазу всего выражения на  $(-1)^{2J_0}$ , где  $J_0$  — алгебраическая сумма всех моментов, входящих в замкнутый график (табл. 11.6). Однако изменение направления стрелок на трех внутренних  $j$ -линиях, объединенных в один узел ( $j_1 j_2 j_3$ ), не меняет фазу выражения, поскольку  $(-1)^{2(j_1+j_2+j_3)} = 1$ . Например:

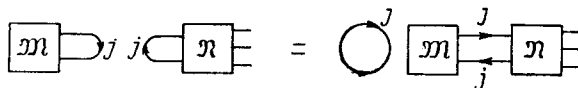


Одновременное изменение знака всех узлов и направления всех стрелок на  $j$ -линиях в замкнутом графике, не меняет его значения.

#### 5. Связывание блоков

Ниже приведены графические правила умножения, т. е. связывания блоков.

**П р а в и л о П<sub>1</sub>.** Если два несвязанных между собой графика-блока, представляющих сомножители  $\mathfrak{M}$  и  $\mathfrak{N}$ , имеют хотя бы по одной одинаковой  $j$ -линии, то их можно объединить, связав в один общий график, представляющий результат умножения. Связывание происходит следующим образом:



Здесь необходимо, чтобы хотя бы один из двух связываемых блоков не имел внешних линий. Это графическое правило умножения блоков эквивалентно операции, представляемой следующим равенством:

$$\left( \sum_m \langle jm | \mathfrak{M} | jm \rangle \right) \times \left( \sum_{m'} \langle jm' | \mathfrak{N} | jm' \rangle \right) = (2j+1) \sum_{m, m'} \langle jm | \mathfrak{M} | jm' \rangle \langle jm' | \mathfrak{N} | jm \rangle.$$

**П р а в и л о П<sub>2</sub>.** Если два несвязанных между собой графика-блока, представляющих сомножители  $\mathfrak{M}$  и  $\mathfrak{N}$ , имеют хотя бы по одному одинаковому узлу, объединяющему три  $j$ -линии, соответствующие моментам ( $j_1 j_2 j_3$ ), то эти графики-блоки можно связать в один общий график, представляющий произведение  $\mathfrak{M} \times \mathfrak{N}$ , по следующему правилу:

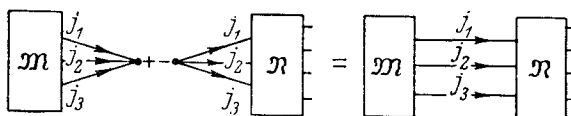
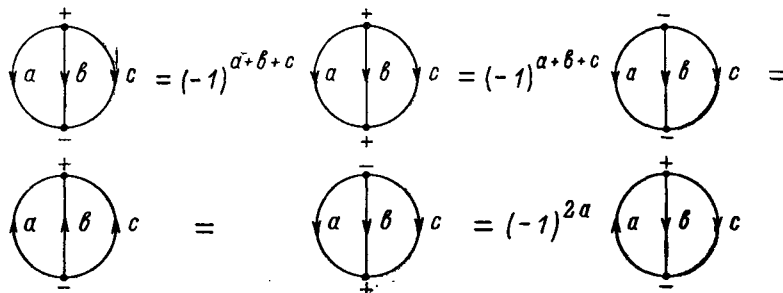


ТАБЛИЦА 11.6

СВОЙСТВА СИММЕТРИИ ГРАФИКОВ  $3nj$ -СИМВОЛОВ

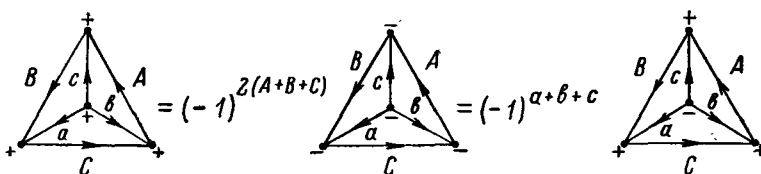
$3j$ -СИМВОЛЫ  $\{a\ b\ c\}$

Изменение знаков узлов, направления стрелок и перестановка индексов

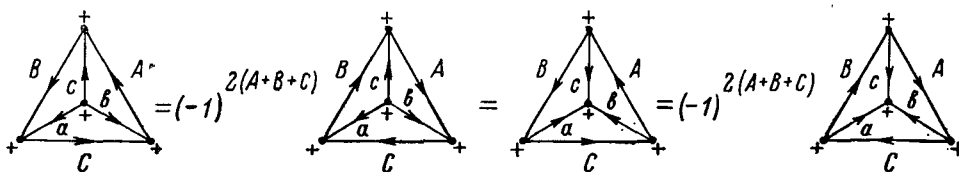


$6j$ -СИМВОЛЫ  $\left\{ \begin{matrix} a & b & c \\ A & B & C \end{matrix} \right\}$

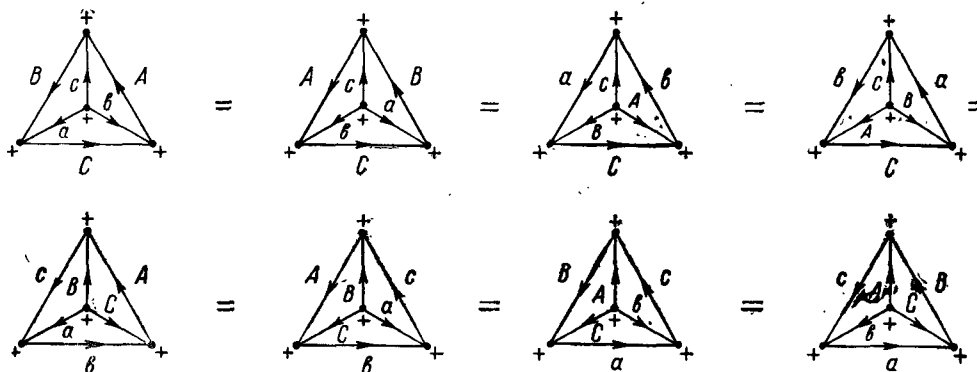
Изменение знаков узлов



Изменение направления стрелок

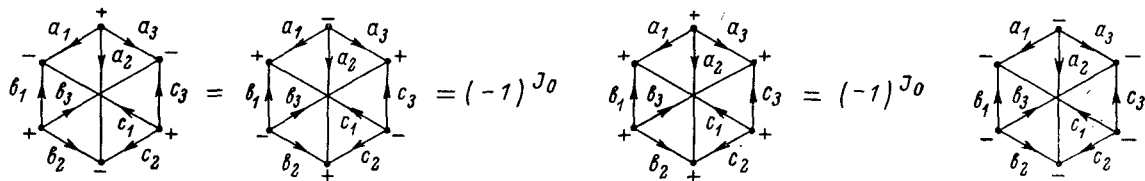


Перестановка индексов

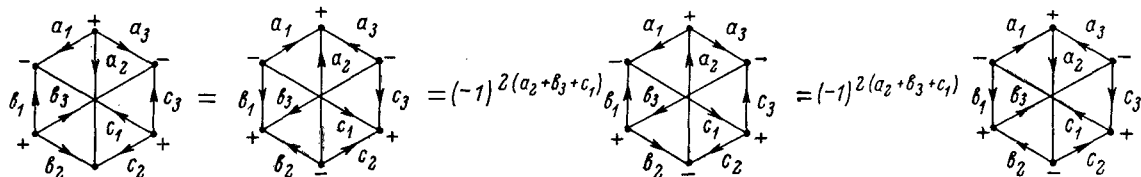


$$9j\text{-символы} \quad \left\{ \begin{array}{ccc} a_1 & a_2 & a_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{array} \right\}$$

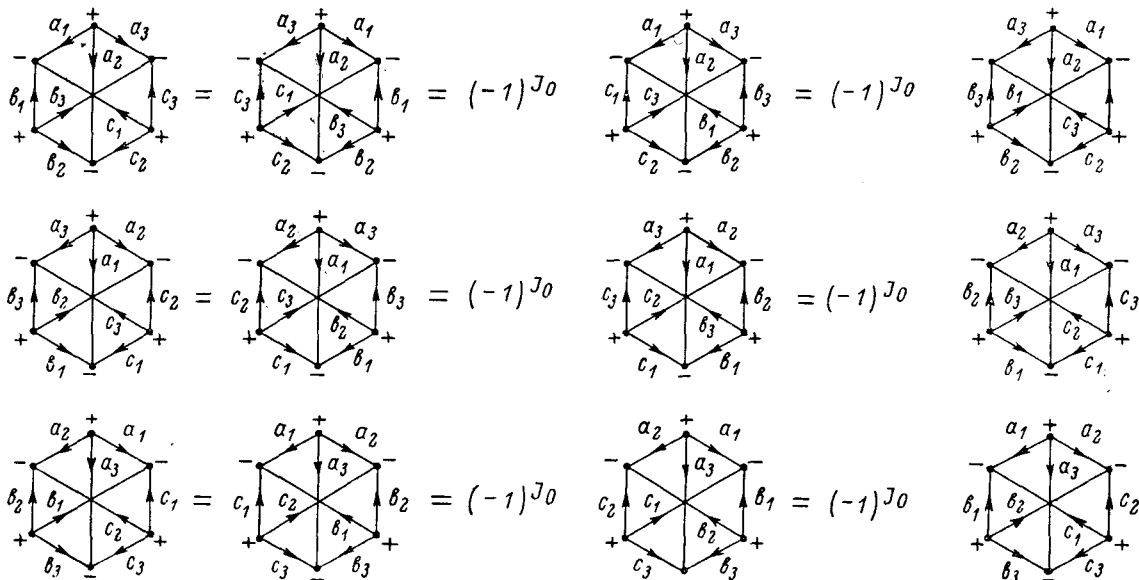
Изменение знаков узлов



Изменение направления стрелок



Перестановка индексов

где  $J_0 \equiv a_1 + a_2 + a_3 + b_1 + b_2 + b_3 + c_1 + c_2 + c_3$ 

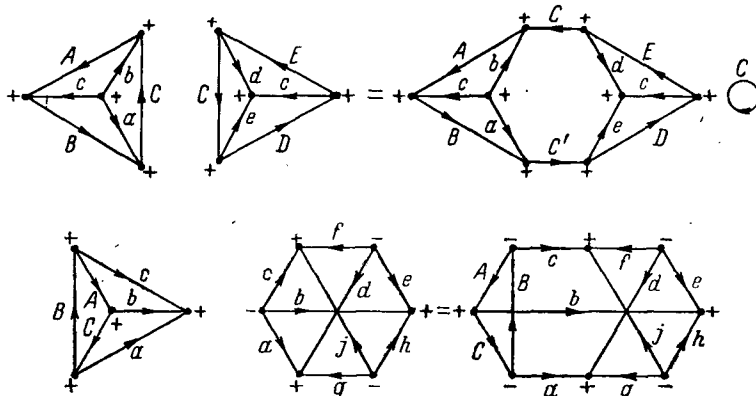
Это графическое правило также справедливо лишь при условии, что хотя бы один из двух связанных блоков является инвариантом, т. е. не имеет внешних линий. Оно основано на следующем аналитическом соотношении:

$$\left[ \sum_{m_1 m_2 m_3} \langle 00 | \mathfrak{M} | j_1 m_1 j_2 m_2 j_3 m_3 \rangle \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} \right] \times \left[ \sum_{m'_1 m'_2 m'_3} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m'_1 & m'_2 & m'_3 \end{pmatrix} \langle j_1 m'_1 j_2 m'_2 j_3 m'_3 | \mathfrak{N} | \rangle \right] =$$

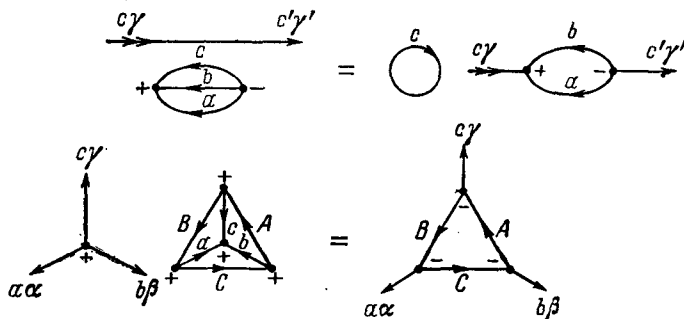
$$= \{j_1 j_2 j_3\} \sum_{m_1 m_2 m_3} \langle 00 | \mathfrak{M} | j_1 m_1 j_2 m_2 j_3 m_3 \rangle \langle j_1 m_1 j_2 m_2 j_3 m_3 | \mathfrak{N} | \rangle.$$



Отметим, что правило  $\Pi_1$  представляет собой частный случай правила  $\Pi_2$ , когда один из моментов  $j_1, j_2, j_3$  равен нулю. Приведем примеры:



Отметим, что объединяемые  $j$ -линии могут быть не только внутренними, но и внешними для одного из сомножителей линиями графика.



### 6. Разбиение графика на отдельные блоки

Инвариантная  $n$ -кратная сумма по проекциям  $m_1, m_2, \dots, m_n$  моментов  $j_1, j_2, \dots, j_n$  вида

$$\sum_{m_1 \dots m_n} \langle 00 | \mathfrak{M} | j_1 m_1 \dots j_n m_n \rangle \langle j_1 m_1 \dots j_n m_n | \mathfrak{N} \rangle,$$

являющаяся скалярным произведением двух неприводимых  $n$ -кратных тензоров  $\mathfrak{M}_{j_1 j_2 \dots j_n}$  и  $\mathfrak{N}_{j_1 j_2 \dots j_n}$  рангов  $j_1, j_2, \dots, j_n$ , может быть представлена:

а) в случае  $n \geq 4$  в виде  $k$ -кратной суммы по моментам  $X_1, X_2, \dots, X_k$ , где  $k = n - 3$ , произведения двух сомножителей

$$(\mathfrak{M}_{j_1 j_2 \dots j_n} \cdot \mathfrak{N}_{j_1 j_2 \dots j_n}) = \sum_{X_1 X_2 \dots X_k}^{k=n-3} (2X_1 + 1) \dots (2X_k + 1) \mathfrak{M}_{j_1 j_2 \dots j_n}(X_1 X_2 \dots X_k) \mathfrak{N}_{j_1 j_2 \dots j_n}(X_1 X_2 \dots X_k).$$

б) в случае  $n \leq 3$  непосредственно в виде произведений этих сомножителей

$$(\mathfrak{M}_{j_1 j_2 j_3} \cdot \mathfrak{N}_{j_1 j_2 j_3}) = \mathfrak{M}_{j_1 j_2 j_3} \mathfrak{N}_{j_1 j_2 j_3}.$$

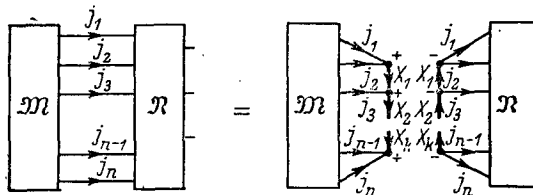
При этом необходимо, чтобы хотя бы один из двух исходных тензоров не зависел от каких-либо еще проекций угловых моментов, кроме указанных  $m_1, m_2, \dots, m_n$ . Другой сомножитель может зависеть от проекции каких-либо еще моментов или углов. Множители  $\mathfrak{M}_{j_1 j_2 \dots j_n}(X_1 X_2 \dots X_k)$  и  $\mathfrak{N}_{j_1 j_2 \dots j_n}(X_1 X_2 \dots X_k)$  определяются соотношениями типа

$$\mathfrak{M}_{j_1 j_2 \dots j_n}(X_1 X_2 \dots X_k) \equiv \sum_{m_i M_i} \mathfrak{M}_{j_1 m_1 j_2 m_2 \dots j_n m_n} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & X_1 \\ m_1 & m_2 & -M_1 \end{pmatrix} (-1)^{X_1 + M_1} \begin{pmatrix} X_1 & j_3 & X_2 \\ M_1 & m_3 & -M_2 \end{pmatrix} (-1)^{X_2 + M_2} \dots \begin{pmatrix} X_k & j_{n-1} & j_n \\ M_k & m_{n-1} & m_n \end{pmatrix},$$

$$\mathfrak{N}_{j_1 j_2 \dots j_n}(X_1 X_2 \dots X_k) \equiv \sum_{m_i M_i} \mathfrak{N}_{j_1 m_1 j_2 m_2 \dots j_n m_n} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & X_1 \\ m_1 & m_2 & -M_1 \end{pmatrix} (-1)^{X_1 - M_1} \begin{pmatrix} X_1 & j_3 & X_2 \\ M_1 & m_3 & -M_2 \end{pmatrix} (-1)^{X_2 - M_2} \dots \begin{pmatrix} X_k & j_{n-1} & j_n \\ M_k & m_{n-1} & m_n \end{pmatrix},$$

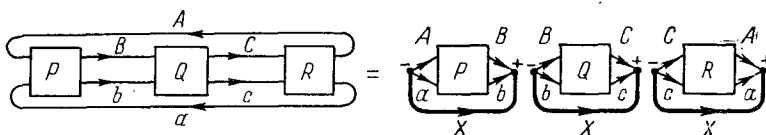
причем в силу указанного условия величина  $\mathfrak{M}_{j_1 j_2 \dots j_n} (X_1 X_2 \dots X_n)$  является инвариантом, скаляром.

В графическом представлении такое преобразование соответствует разбиению исходного графика на блоки, представляющие отдельные сомножители. Важно, чтобы один из блоков не имел дополнительных внешних линий, кроме линий, соединяющих рассматриваемые блоки.



Правила разбиения графика на блоки и наиболее важные частные случаи, соответствующие одной, двум, трем, четырем связывающим блоки  $j$ -линиям даны далее в табл. 11.9.

Последовательно применяя правила, приведенные в табл. 11.9, можно разбить график на целый ряд инвариантных сомножителей, например

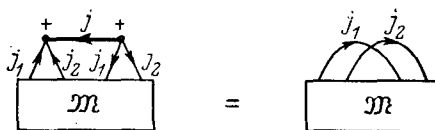


Наиболее важным случаем разбиения графиков на блоки является операция выделения внешних линий графика, при которой вся зависимость исходного выражения от внешних переменных выделяется в виде простейшего множителя, представляющего собой стандартную функцию типа  $C_{j_1 m_1 j_2 m_2}^{j m}$  или  $D_{mm'}^j(R)$ . Такое выделение зависимости от внешних переменных по существу представляет собой теорему Вигнера—Эккарта, которая подробно обсуждается в пункте 11.4.2.

## 7. Графический метод суммирования по угловому моменту

Сумма по угловому моменту  $j$  представляется на графике, согласно 11.2.3, сплошной жирной линией с индексом  $j$ . Такая сумма легко вычисляется графически, если к обоим концам жирной линии примыкают одинаковые  $j$ -линии.

Правило  $\Sigma$ . Если моменты  $j_1$  и  $j_2$ , соответствующие паре  $j$ -линий, примыкающих к одному концу жирной линии  $j$ , равны моментам  $j$ -линий, примыкающих к другому ее концу, тогда эту жирную линию можно изъять (стереть) с графика, соединив попарно концы примыкавших к ней одинаковых линий следующим образом:



При такой операции значение графика не меняется. Аналитически это соответствует следующему соотношению

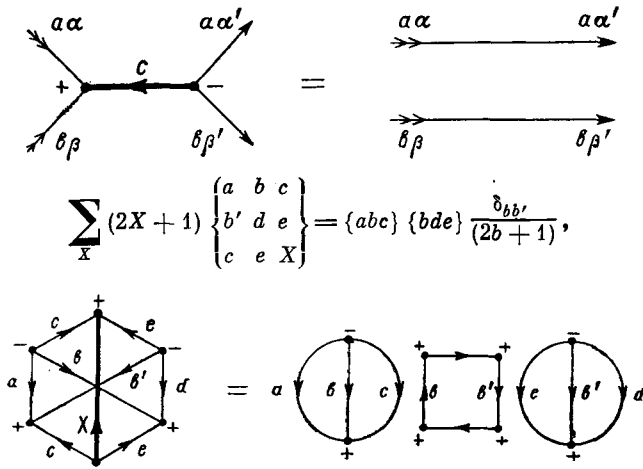
$$\sum_{j^m} (2j+1) \langle j_1 j_2; j m | \mathfrak{M} | j_1 j_2; j m \rangle = \sum_{m_1 m_2} \langle j_1 m_1 j_2 m_2 | \mathfrak{M} | j_1 m_1 j_2 m_2 \rangle,$$

где

$$\langle j_1 m_1 j_2 m_2 | \mathfrak{M} | j_1' m_1' j_2' m_2' \rangle = \sum_{j^m} (2j+1) \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j \\ m_1 & m_2 & m \end{pmatrix} \langle j_1 j_2; j m | \mathfrak{M} | j_1' j_2'; j m \rangle \begin{pmatrix} j_1' & j_2' & j \\ m_1' & m_2' & m \end{pmatrix}.$$

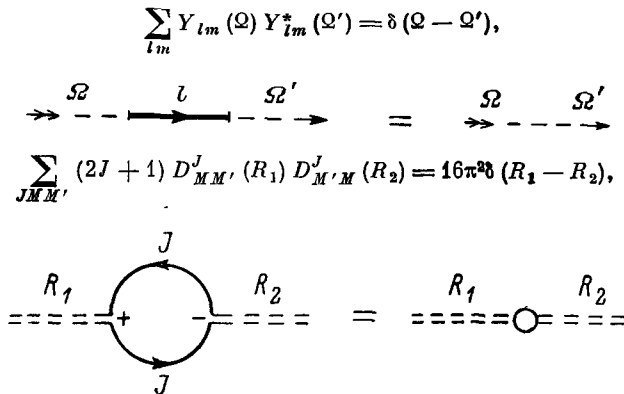
Например:

$$\sum_{c\gamma} (2c+1) (-1)^{a-a+b-\beta+\epsilon-\gamma} \begin{pmatrix} a & b & c \\ -a & -\beta & -\gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & \beta' & \gamma \end{pmatrix} = \sum_{c\gamma} (2c+1) \begin{pmatrix} a & b & c \\ a & \beta & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & \beta' & \gamma \end{pmatrix} = \delta_{aa'} \delta_{\beta\beta'},$$



В тех случаях, когда моменты  $j$ , по которым идет суммирование, т. е. сплошные жирные линии с одинаковыми индексами фигурируют в двух или более несвязанных между собой блоках графика, следует сначала эти блоки связать, пользуясь правилами умножения блоков 11.3.5, так чтобы получилась одна жирная  $j$ -линия, и лишь затем производить графическое суммирование по  $j$ , согласно правилу  $\Sigma$ . Это приводит к дополнительным правилам суммирования по  $j$ , представленным далее в табл. 11.9.

Суммирование по  $j$  можно выполнить графически и в тех случаях, когда к концам жирной  $j$ -линии, примыкают одинаковые пунктирные линии. Например:



Все приведенные в этом пункте правила суммирования по угловому моменту и его проекции по существу являются следствием условия полноты системы функций

$$\sum_{jm} |jm\rangle \langle jm| = \sum_{jm} |jm\rangle (2j+1) \langle jm| = 1.$$

### 8. Замена внутренних пунктирных линий сплошными жирными

Пунктирную внутреннюю  $\Omega$ -линию, которой соответствует инвариантное интегрирование по углам  $\Omega \{\vartheta, \varphi\}$ , всегда можно заменить сплошной жирной  $j$ -линией, которой соответствует инвариантное суммирование по моменту  $j$  и по проекции  $m$ , поскольку

$$\int d\Omega \langle \Omega | \mathfrak{M} | \Omega \rangle = \sum_{jm} \langle jm | \mathfrak{M} | jm \rangle,$$

где

$$\langle jm | \mathfrak{M} | j'm' \rangle \equiv \iint d\Omega d\Omega' \langle jm | \Omega' \rangle \langle \Omega' | \mathfrak{M} | \Omega \rangle \langle \Omega | j'm' \rangle.$$

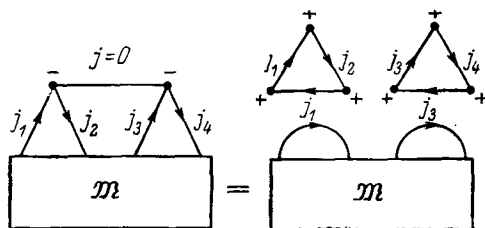
Таким образом, все внутренние пунктирные линии графика могут быть заменены сплошными жирными  $j$ -линиями. Поэтому при формулировке действий с графиками достаточно было определить их только для графиков, содержащих лишь одни сплошные внутренние линии.

### 9. Изъятие из графика $j$ -линии с $j=0$

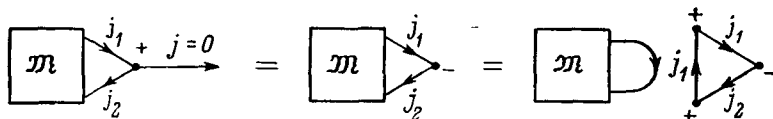
$j$ -линия, соответствующая угловому моменту  $j=0$ , представляет на графике фиктивную зависимость. Состояние с  $j=0$  вообще не зависит от угловых переменных  $\Omega \{ \vartheta, \varphi \}$ . Поэтому сплошную линию  $j=0$  можно изъять (стереть) с графика. Значение (величина) графика при этом не меняется. Однако на графике остаются узлы, к которым была привязана линия  $j=0$ . Эти узлы также можно выделить из графика в виде отдельного, несвязанного с остальным графиком, блока, соответствующего сомножителю

$$K = (\pm 1)^{2j_1} \frac{\delta_{j_1 j_2}}{\sqrt{2j_1 + 1}}.$$

Фаза множителя  $K$  зависит от знака узла и направления стрелок на линиях. Если знак узла на графике таков, что он соответствует циклической последовательности моментов  $(j_1, j, j_2)$  и стрелка на линии  $j_1$  направлена к узлу, а стрелка на линии  $j_2$  — от узла, то линии  $j_1$  и  $j_2$  объединяются в общую линию со стрелкой, направленной в ту же сторону, что и на исходных линиях  $j_1$  и  $j_2$ . При этом знак в выражении для множителя  $K$  будет положительным.



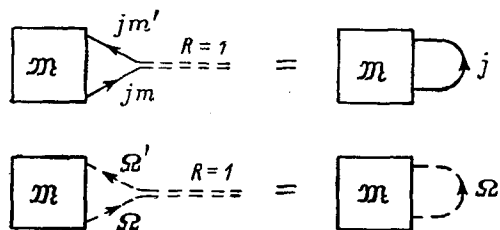
В других случаях фазу  $K$  можно определить с помощью правил 11.3.2, сводя график к стандартному виду, рассмотренному выше.



Наиболее важные частные случаи  $3nj$ -символов, где некоторые из моментов равны нулю, даны в табл. 11.7.

### 10. Изъятие с графика $R$ -линии с $R=1$

Двойная пунктирная  $R$ -линия, соответствующая нулевому повороту  $R=1$ , представляет на графике фиктивную зависимость. Такую линию можно изъять (стереть) с графика, замкнув между собой примыкавшие к  $R$  концы линий, если стрелки на этих линиях направлены в одну и ту же сторону. Значение графика при этом не изменится.



В табл. 11.8 приведены примеры графиков и формул, в которых фигурирует поворот  $R=1$ . Правила действия над графиками резюмированы в табл. 11.9.

ТАБЛИЦА 11.7  
УГЛОВОЙ МОМЕНТ  $J=0$

Аналитическое выражение	Графическое представление
-------------------------	---------------------------

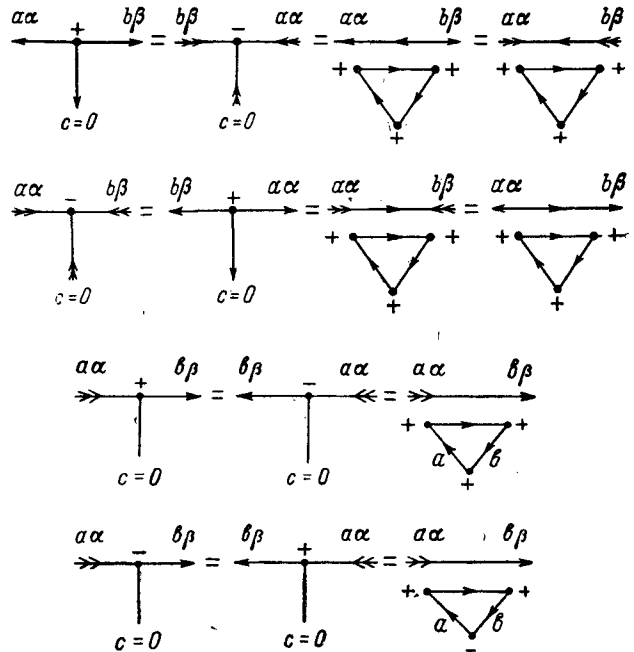
*jm*-Символы

$$\begin{pmatrix} a & 0 & b \\ a & 0 & \beta \end{pmatrix} = \frac{\delta_{ab}}{\sqrt{2a+1}} \begin{pmatrix} a \\ \alpha \end{pmatrix} = (-1)^{a+\alpha} \frac{\delta_{ab}\delta_{\alpha,-\beta}}{\sqrt{2a+1}}$$

$$\begin{pmatrix} a & b & 0 \\ \alpha & \beta & 0 \end{pmatrix} = \frac{\delta_{ab}}{\sqrt{2a+1}} \begin{pmatrix} a \\ \beta \alpha \end{pmatrix} = (-1)^{a-\alpha} \frac{\delta_{ab}\delta_{\alpha,-\beta}}{\sqrt{2a+1}}$$

$$(-1)^{a-\alpha} \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ -\alpha & 0 & \beta \end{pmatrix} = \frac{\beta_{ab}\delta_{\alpha\beta}}{\sqrt{2a+1}}$$

$$(-1)^{a-\alpha} \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ -\alpha & \beta & 0 \end{pmatrix} = (-1)^{2\alpha} \frac{\delta_{ab}\delta_{\alpha\beta}}{\sqrt{2a+1}}$$



*nj*-Символы

$$\{ a \ b \ 0 \} = \delta_{ab}$$

$$\begin{Bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & b & c \end{Bmatrix} = (-1)^{2a} \frac{\delta_{ab}\delta_{bc}}{\sqrt{2a+1}}$$

$$\begin{Bmatrix} a & a' & 0 \\ b & b' & 0 \end{Bmatrix} = (-1)^{2a} \frac{\delta_{aa'}\delta_{bb'}\delta_{ab}}{\sqrt{(2a+1)}}$$

$$\begin{Bmatrix} a & a' & 0 \\ b & b' & c \end{Bmatrix} = (-1)^{a+b+c} \frac{\delta_{aa'}\delta_{bb'}}{\sqrt{(2a+1)(2b+1)}} \{ a \ b \ c \}$$

$$\begin{Bmatrix} a & b & c \\ e & 0 & e' \\ f & b' & d \end{Bmatrix} = (-1)^{b+c+e+f} \frac{\delta_{bb'}\delta_{ee'}}{\sqrt{(2b+1)(2e+1)}} \begin{Bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{Bmatrix}$$

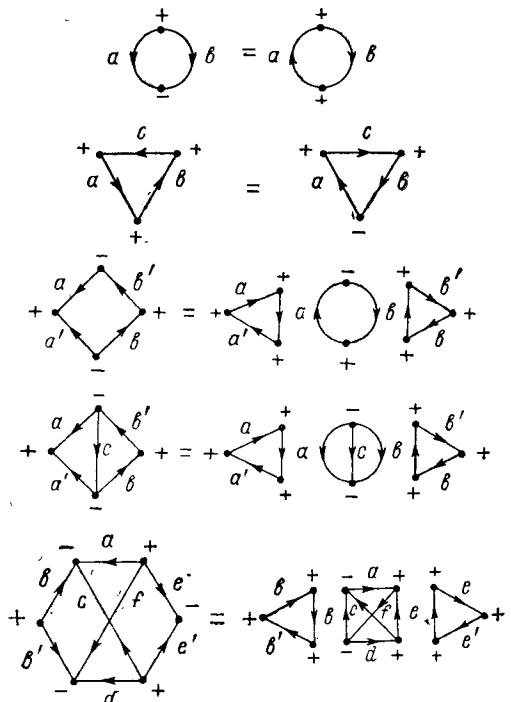


ТАБЛИЦА 11.8  
НУЛЕВОЙ ПОВОРОТ

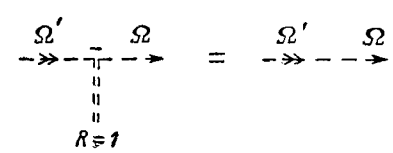
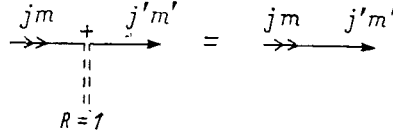
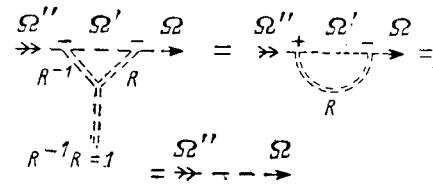
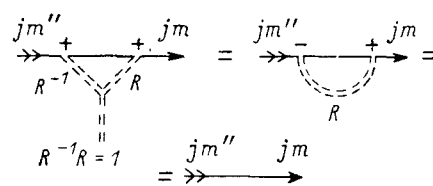
Аналитическое выражение	Графическое представление
<p>При <math>R = 1</math>  <math>\delta(\Omega' - R\Omega) = \delta(\Omega' - \Omega),</math>  т. е.  <math>\langle \Omega'   R   \Omega \rangle = \langle \Omega'   \Omega \rangle.</math></p>	
<p>При <math>R = 1</math>  <math>\delta_{jj'} D_{mm'}^j(000) = \delta_{jj'} \delta_{mm'},</math>  т. е.  <math>\langle jm   D(1)   j'm' \rangle = \langle jm   j'm' \rangle.</math></p>	
<p><math>\int \delta(\Omega'' - R^{-1}\Omega') d\Omega' \delta(\Omega' - R\Omega) = \delta(\Omega'' - \Omega),</math>  т. е.  <math>\langle \Omega''   R^{-1}   \Omega' \rangle \langle \Omega'   R   \Omega \rangle = \langle \Omega''   \Omega \rangle.</math></p>	
<p><math>\sum_{m'} D_{m''m'}^j(R^{-1}) D_{m'm}^j(R) = \delta_{m''m},</math>  т. е.  <math>\langle jm''   D(R^{-1})   j'm' \rangle \langle j'm'   D(R)   jm \rangle = \langle jm''   jm \rangle.</math></p>	

ТАБЛИЦА 11.9

## ПРАВИЛА ДЕЙСТВИЯ НАД ГРАФИКАМИ

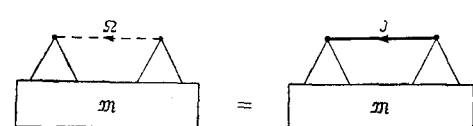
Аналитические соотношения	Графические операции
<p>Инвариантное интегрирование по направлениям</p> $\int d\Omega \langle \Omega   \mathfrak{M}   \Omega \rangle = \sum_{JM} \langle JM   \mathfrak{M}   JM \rangle$ <p>где</p> $\langle JM   \mathfrak{M}   J'M' \rangle \equiv \iint \langle JM   \Omega \rangle d\Omega \langle \Omega   \mathfrak{M}   \Omega' \rangle d\Omega' \langle \Omega'   J'M' \rangle.$ <p>Условие полноты</p> $\int   \Omega \rangle d\Omega \langle \Omega   = \sum_{JM}   JM \rangle \langle JM   = 1.$	<p>Замена пунктирной внутренней <math>\Omega</math>-линии сплошной жирной <math>J</math>-линией</p> 

ТАБЛИЦА 11.9 (продолжение)

Аналитические соотношения

Графические операции

Инвариантное суммирование по угловому моменту и его проекции

$$\sum_{JM} (2J+1) \langle j_1 j_2; JM | \mathfrak{R} | j_1 j_2; JM \rangle = \sum_{m_1 m_2} \langle j_1 m_1 j_2 m_2 | \mathfrak{R} | j_1 m_1 j_2 m_2 \rangle,$$

$$\sum_{JM M'} (2J+1) \langle j_1 j_2; JM | \mathfrak{R} | j_3 j_4; JM \rangle \times \langle j_3 j_4; JM' | \mathfrak{R} | j_1 j_2; JM' \rangle = \sum_{m_1 m_2 m_3 m_4} \langle j_1 m_1 j_2 m_2 | \mathfrak{R} | j_3 m_3 j_4 m_4 \rangle \langle j_3 m_3 j_4 m_4 | \mathfrak{R} | j_1 m_1 j_2 m_2 \rangle.$$

$$\sum_{JM M' M''} (2J+1) \langle j_1 j_2; JM | \mathfrak{R} | j_3 j_4; JM \rangle \times \langle j_3 j_4; JM' | \mathfrak{R} | j_5 j_6; JM' \rangle \langle j_5 j_6; JM'' | \mathfrak{L} | j_1 j_2; JM'' \rangle = \sum_{m_1 m_2 m_3 m_4 m_5 m_6} \langle j_1 m_1 j_2 m_2 | \mathfrak{R} | j_3 m_3 j_4 m_4 \rangle \times \langle j_3 m_3 j_4 m_4 | \mathfrak{R} | j_5 m_5 j_6 m_6 \rangle \langle j_5 m_5 j_6 m_6 | \mathfrak{L} | j_1 m_1 j_2 m_2 \rangle.$$

Здесь

$$\langle j_1 j_2; JM | \mathfrak{R} | j_3 j_4; JM \rangle \equiv \sum_{m_i} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & J \\ m_1 & m_2 & M \end{pmatrix} \langle j_1 m_1 j_2 m_2 | \mathfrak{R} | j_3 m_3 j_4 m_4 \rangle \begin{pmatrix} j_3 & j_4 & J \\ m_3 & m_4 & M \end{pmatrix}.$$

Представление произведения в виде инвариантной суммы произведений, если хотя бы один из сомножителей является истинным инвариантом

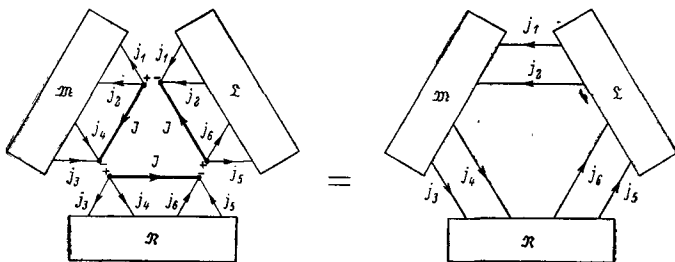
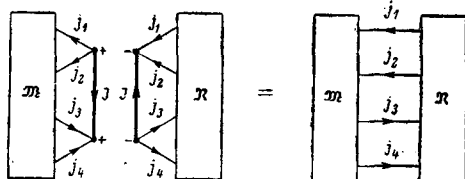
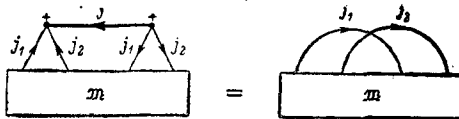
$$\left( \sum_m \langle jm | \mathfrak{R} | jm \rangle \right) \left( \sum_{m'} \langle jm' | \mathfrak{R} | jm' \rangle \right) = (2j+1) \sum_{m m'} \langle jm | \mathfrak{R} | jm' \rangle \langle jm' | \mathfrak{R} | jm \rangle.$$

$$\left[ \sum_{m_1 m_2 m_3} \langle | \mathfrak{R} | j_1 m_1 j_2 m_2 j_3 m_3 \rangle \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} \right] \times \left[ \sum_{m_1 m_2 m_3} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} \langle j_1 m_1 j_2 m_2 j_3 m_3 | \mathfrak{R} | \rangle \right] = \sum_{m_1 m_2 m_3} \langle | \mathfrak{R} | j_1 m_1 j_2 m_2 j_3 m_3 \rangle \langle j_1 m_1 j_2 m_2 j_3 m_3 | \mathfrak{R} | \rangle.$$

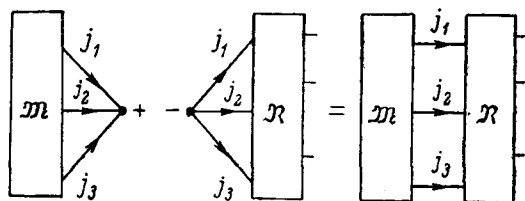
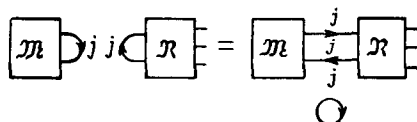
Упрощение выражения в случае углового момента  $J=0$

$$\sum_{m m'} \langle jm | \mathfrak{R} | j'm' \rangle (-1)^{j'-m'} \begin{pmatrix} j' & 0 & j \\ -m' & 0 & m \end{pmatrix} = \frac{\delta_{j j'}}{\sqrt{2j+1}} \sum_m \langle jm | \mathfrak{R} | jm \rangle.$$

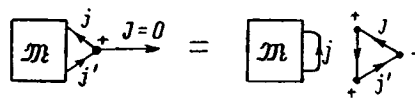
Изъятие с графика сплошной жирной  $j$ -линии



Связывание блоков при наличии у них одинаковых моментов, если хотя бы один из блоков не имеет внешних линий



Стирание с графика  $j$ -линии с  $J=0$



Аналитические соотношения

Графические операции

Упрощение выражения при нулевом повороте  $R = 1$

$$\sum_{m m'} \langle j m | \mathfrak{M} | j' m' \rangle \langle j' m' | D(0 0 0) | j m \rangle = \delta_{j j'} \sum_m \langle j m | \mathfrak{M} | j m \rangle.$$

Преобразование одно-, двух- и трехкратной суммы по проекциям в произведение. Необходимо, чтобы в исходном выражении под знаком  $\sum$  один из двух сомножителей не зависел от каких-либо дополнительных внешних переменных  $j_a m_a$ , обозначаемых  $p, q$

$$\sum_m \langle 0 0 | \mathfrak{M} | j m \rangle \langle j m q | \mathfrak{N} | p \rangle = \delta_{j 0} \delta_{m 0} \langle 0 0 | \mathfrak{M} | 0 0 \rangle \times \langle 0 0 q | \mathfrak{N} | p \rangle.$$

$$\sum_{m_1 m_2} \langle j_1 m_1 | \mathfrak{M} | j_2 m_2 \rangle \langle j_2 m_2 q | \mathfrak{N} | j_1 m_1 p \rangle = \frac{\delta_{j_1 j_2}}{(2j_1 + 1)} \left( \sum_{m_1} \langle j_1 m_1 | \mathfrak{M} | j_1 m_1 \rangle \right) \times \left( \sum_{m_2} \langle j_2 m_2 q | \mathfrak{N} | j_2 m_2 p \rangle \right).$$

$$\sum_{m_1 m_2 m_3} \langle 0 0 | \mathfrak{M} | j_1 m_1 j_2 m_2 j_3 m_3 \rangle \langle j_1 m_1 j_2 m_2 j_3 m_3 q | \mathfrak{N} | p \rangle = \langle 0 \| \mathfrak{M} \| j_1 j_2 j_3 \rangle \langle j_1 j_2 j_3 q \| \mathfrak{N} \| p \rangle,$$

где приведенные матричные элементы

$$\langle 0 \| \mathfrak{M} \| j_1 j_2 j_3 \rangle \equiv \sum_{m_1 m_2 m_3} \langle 0 0 | \mathfrak{M} | j_1 m_1 j_2 m_2 j_3 m_3 \rangle \times \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix}, \langle j_1 j_2 j_3 q \| \mathfrak{N} \| p \rangle \equiv \sum_{m_1 m_2 m_3} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} \times \langle j_1 m_1 j_2 m_2 j_3 m_3 q | \mathfrak{N} | p \rangle.$$

Преобразование  $n$ -кратной суммы по проекциям при  $n \geq 4$  в  $k$ -кратную сумму по моментам, где  $k = n - 3$ . Необходимо, чтобы в исходном выражении под знаком  $\sum$  один из двух сомножителей не зависел от каких-либо дополнительных внешних переменных

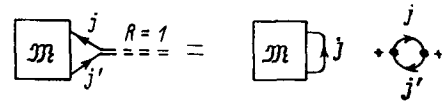
$$\sum_{m_1 m_2 m_3 m_4} \langle j_1 m_1 j_2 m_2 | \mathfrak{M} | j_3 m_3 j_4 m_4 \rangle \langle j_3 m_3 j_4 m_4 q | \mathfrak{N} | j_1 m_1 j_2 m_2 p \rangle = \sum_J (2J + 1) \langle j_1 j_2 J \| \mathfrak{M} \| j_3 j_4 J \rangle \langle j_3 j_4 J q \| \mathfrak{N} \| j_1 j_2 J p \rangle,$$

где

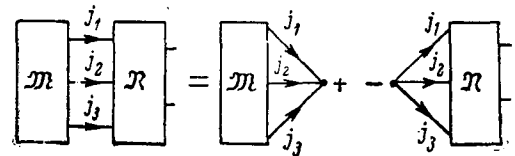
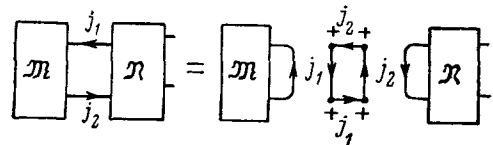
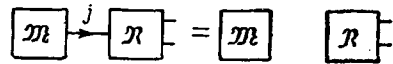
$$\langle j_1 j_2 J \| \mathfrak{M} \| j_3 j_4 J \rangle \equiv \sum_{m_1 m_2 m_3 m_4 M} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & J \\ m_1 & m_2 & M \end{pmatrix} \langle j_1 m_1 j_2 m_2 | \mathfrak{M} | j_3 m_3 j_4 m_4 \rangle \begin{pmatrix} j_3 & j_4 & J \\ m_3 & m_4 & M \end{pmatrix},$$

аналогично для  $\langle j_3 j_4 J q \| \mathfrak{N} \| j_1 j_2 J p \rangle$ .

Стирание с графика  $R$ -линии с  $R = 1$



Разбиение графика на блоки. Необходимо, чтобы в исходном графике один из блоков не имел дополнительных внешних линий, кроме разрезаемых



Разбиение графика на блоки. Необходимо, чтобы в исходном графике один из блоков не имел дополнительных внешних линий, кроме разрезаемых

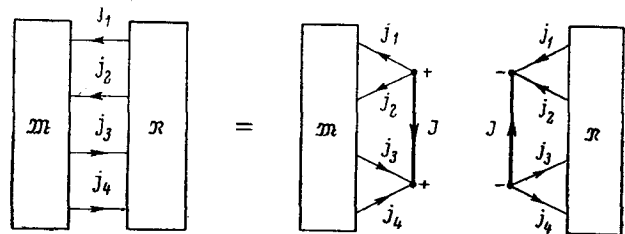




ТАБЛИЦА 11.9 (продолжение)

Аналитические соотношения	Графические операции
$\sum_{m_1 \dots m_6} \langle 0   \mathfrak{M}   j_1 m_1 \dots j_6 m_6 \rangle \langle j_1 m_1 \dots j_6 m_6 q   \mathfrak{N}   p \rangle =$ $= \sum_{J_{12} J_{45}} (2J_{12} + 1) (2J_{45} + 1) \langle 0   \mathfrak{M} \  J_{12} J_3 J_{45} \rangle \times$ $\times \langle J_{12} J_3 J_{45} q \  \mathfrak{N} \  p \rangle,$	
<p>где</p> $\langle 0   \mathfrak{M} \  J_{12} J_3 J_{45} \rangle = \sum_{m_i M_{ik}} \langle 0   \mathfrak{M}   j_1 m_1 \dots j_6 m_6 \rangle \times$ $\times \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & J_{12} \\ m_1 & m_2 & M_{12} \end{pmatrix} (-1)^{j_3 - m_3} \begin{pmatrix} J_{12} & j_3 & J_{45} \\ M_{12} - m_3 & M_{45} & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_4 & j_5 & J_{45} \\ m_4 & m_5 & M_{45} \end{pmatrix},$ <p>аналогично для <math>\langle J_{12} J_3 J_{45} q \  \mathfrak{N} \  p \rangle</math>.</p>	
$\sum_{m_1 \dots m_6} \langle 0   \mathfrak{M}   j_1 m_1 \dots j_6 m_6 \rangle \langle j_1 m_1 \dots j_6 m_6 q   \mathfrak{N}   p \rangle =$ $= \sum_{J_{ik}} (2J_{12} + 1) (2J_{34} + 1) (2J_{56} + 1) \langle 0   \mathfrak{M} \  J_{12} J_{34} J_{56} \rangle \times$ $\times \langle J_{12} J_{34} J_{56} q \  \mathfrak{N} \  p \rangle,$	
<p>где</p> $\langle 0   \mathfrak{M} \  J_{12} J_{34} J_{56} \rangle = \sum_{m_i M_{ik}} \langle 0   \mathfrak{M}   j_1 m_1 \dots j_6 m_6 \rangle \times$ $\times \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & J_{12} \\ m_1 & m_2 & M_{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_3 & j_4 & J_{34} \\ m_3 & m_4 & M_{34} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_5 & j_6 & J_{56} \\ m_5 & m_6 & M_{56} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_{12} & J_{34} & J_{56} \\ M_{12} & M_{34} & M_{56} \end{pmatrix},$ <p>аналогично для <math>\langle J_{12} J_{34} J_{56} q \  \mathfrak{N} \  p \rangle</math>.</p>	

ТАБЛИЦА 11.10  
3jm-СИМВОЛЫ ВИГНЕРА

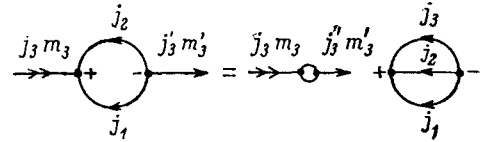
Аналитические соотношения	Графическое представление
<p>Изменение циклической последовательности связи моментов</p>	
$\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} = (-1)^{j_1 + j_2 + j_3} \begin{pmatrix} j_3 & j_2 & j_1 \\ m_3 & m_2 & m_1 \end{pmatrix}$	
<p>Эрмитово сопряжение</p>	
$\sum_{m_i'} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1' & m_2' & m_3' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1' & m_2' & m_3' \end{pmatrix} = (-1)^{j_1 - m_1} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ -m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} =$ $= \sum_{m_i' m_i''} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2' & m_3' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_2 & j_3 \\ m_2' & m_3' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_1 & j_3 \\ m_1' & m_3' \end{pmatrix} = (-1)^{j_2 + m_2 + j_3 + m_3} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & -m_2 & -m_3 \end{pmatrix}$ $\sum_{m_i' m_i'' m_i'''} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1' & m_2' & m_3' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_2 & j_3 \\ m_2' & m_3' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_1 & j_3 \\ m_1' & m_2' & m_3' \end{pmatrix} =$ $= (-1)^{j_1 - m_1 + j_2 - m_2 + j_3 - m_3} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ -m_1 & -m_2 & -m_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix}$	

ТАБЛИЦА 11.10 (продолжение)

Аналитические соотношения	Графическое представление
---------------------------	---------------------------

Ортогональность и нормировка

$$\begin{aligned} & \sum_{m_1, m_2} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3' \\ m_1 & m_2 & m_3' \end{pmatrix} = \\ & = \sum_{m_1, m_2} (-1)^{j_1 - m_1 + j_2 - m_2 + j_3 - m_3} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ -m_1 & -m_2 & -m_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3' \\ m_1 & m_2 & m_3' \end{pmatrix} = \\ & = \frac{\delta_{j_3 j_3'} \delta_{m_3 m_3'}}{(2j_3 + 1)} \langle j_1 j_2 j_3 \rangle \end{aligned}$$



Полнота

$$\begin{aligned} & \sum_{j_3 m_3} (2j_3 + 1) \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1' & m_2' & m_3 \end{pmatrix} = \\ & = \sum_{j_3 m_3} (2j_3 + 1) (-1)^{j_1 - m_1 + j_2 - m_2 + j_3 - m_3} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ -m_1 & -m_2 & -m_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1' & m_2' & m_3 \end{pmatrix} = \\ & = \delta_{m_1 m_1'} \delta_{m_2 m_2'} \end{aligned}$$

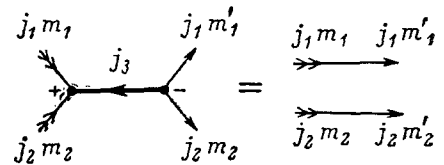


ТАБЛИЦА 11.10а

СВЯЗЬ КОЭФФИЦИЕНТОВ КЛЕБША—ГОРДАНА С 3jм-СИМВОЛАМИ

Аналитические соотношения	Графическое представление
---------------------------	---------------------------

$$\begin{aligned} C_{j_1 m_1 j_2 m_2}^{JM} & = \langle j_1 m_1 j_2 m_2 | j_1 j_2 JM \rangle = \langle j_1 j_2 JM | j_1 m_1 j_2 m_2 \rangle = \\ & = (-1)^{2j_1} \sum_{j_3 m_3} (2j_3 + 1) \begin{pmatrix} J & 0 & j_3 \\ M & 0 & m_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_3 & j_2 & j_1 \\ m_3 & m_2 & m_1 \end{pmatrix} = \\ & = (-1)^{2j_1} \sqrt{2J + 1} (-1)^{J + M} \begin{pmatrix} J & j_2 & j_1 \\ -M & m_2 & m_1 \end{pmatrix} = \\ & = (-1)^{2j_2} \sum_{j_3 m_3} (2j_3 + 1) \begin{pmatrix} 0 & J & j_3 \\ 0 & M & m_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_3 & j_2 & j_1 \\ m_3 & m_2 & m_1 \end{pmatrix} = \\ & = (-1)^{2j_2} \sqrt{2J + 1} (-1)^{J - M} \begin{pmatrix} J & j_2 & j_1 \\ -M & m_2 & m_1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

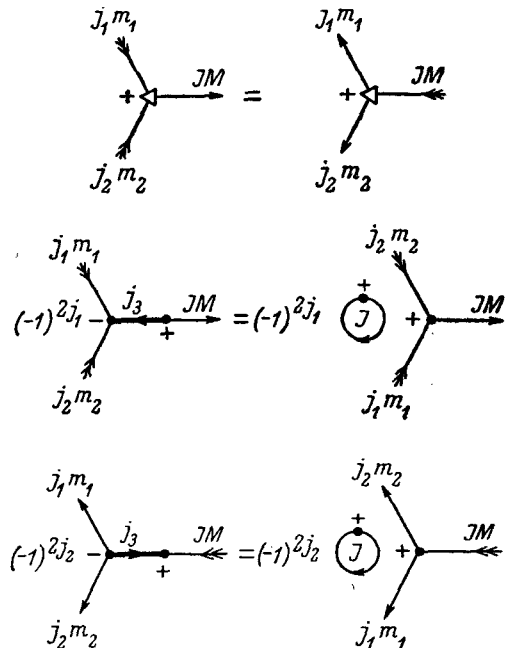


ТАБЛИЦА 11.11

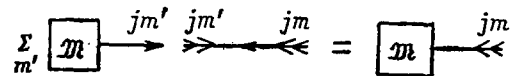
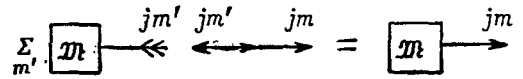
МЕТРИЧЕСКИЙ ТЕНЗОР В  $(2j + 1)$ -МЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ ФУНКЦИЙ  $|jm\rangle$

Аналитические соотношения	Графическое представление
$ jm jm'\rangle = \langle jm jm'   = \binom{j}{m m'} = (-1)^{j+m} \delta_{m-m'}$	
$\langle jm' jm   =  jm' jm\rangle = \binom{j}{m' m} = (-1)^{j-m} \delta_{m'-m}$	
$ jm' jm\rangle = (-1)^{2j}  jm jm'\rangle =$ $= \langle jm' jm   = (-1)^{2j} \langle jm jm'  $	
$\sum_{m'}  jm jm'\rangle \langle jm'' jm'   = \langle jm''   jm\rangle$	

Свертка с метрическим тензором преобразует ковариантные компоненты неприводимого тензора в контравариантные и обратно

$$\sum_{m'} |jm jm'\rangle \langle jm' | \mathfrak{M} | \rangle = \langle | \mathfrak{M} | jm\rangle$$

$$\sum_{m'} \langle | \mathfrak{M} | jm'\rangle \langle jm' jm | = \langle jm | \mathfrak{M} | \rangle$$



Скалярное произведение неприводимых тензоров записывается с помощью метрического тензора

$$\sum_m \langle | \mathfrak{M} | jm\rangle \langle jm | \mathfrak{N} | \rangle =$$

$$= \sum_{m m'} \langle | \mathfrak{M} | jm'\rangle \langle | \mathfrak{N} | jm'\rangle \langle jm' jm | =$$

$$= \sum_{m m'} |jm jm'\rangle \langle jm' | \mathfrak{M} | \rangle \langle jm | \mathfrak{N} | \rangle.$$

$$\sum_m \langle jm | \mathfrak{M} | \rangle \langle | \mathfrak{N} | jm\rangle =$$

$$= \sum_{m m'} \langle | \mathfrak{M} | jm'\rangle \langle | \mathfrak{N} | jm'\rangle \langle jm' jm | =$$

$$= \sum_{m m'} |jm jm'\rangle \langle jm | \mathfrak{M} | \rangle \langle jm' | \mathfrak{N} | \rangle.$$

$$\sum_m \langle | \mathfrak{M} | jm\rangle \langle jm | \mathfrak{N} | \rangle = (-1)^{2j} \sum_m \langle jm | \mathfrak{M} | \rangle \langle | \mathfrak{N} | jm\rangle$$

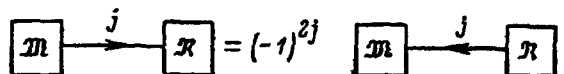
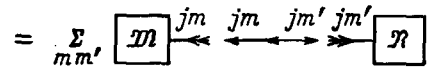
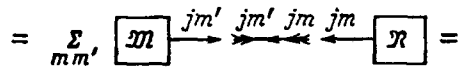
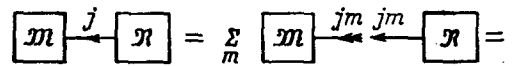
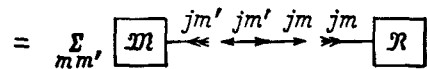
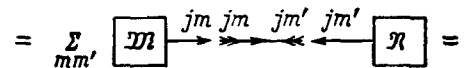
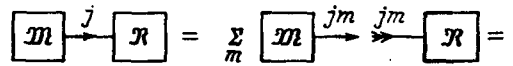


ТАБЛИЦА 11.12  
СФЕРИЧЕСКИЕ ГАРМОНИКИ

Аналитические выражения	Графическое представление
$C_{lm}(\Omega) \equiv \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} Y_{lm}(\Omega) = (\Omega   lm),$ $C_{lm}^*(\Omega) = (-1)^m C_{l-m}(\Omega) = (lm   \Omega).$	
<p>Скалярное произведение (Теорема сложения)</p>	
$\sum_m C_{lm}(\Omega_1) C_{lm}^*(\Omega_2) = P_l(\cos \omega_{12}),$ <p>где <math>\omega_{ik}</math> угол между направлениями <math>\Omega_i</math> и <math>\Omega_k</math>.</p>	
<p>Условие полноты</p>	
$\sum_{lm} (2l+1) C_{lm}(\Omega_1) C_{lm}^*(\Omega_2) = 4\pi \delta(\Omega_1 - \Omega_2).$	
<p>Ортогональность и нормировка</p>	
$\int C_{l_1 m_1}^*(\Omega) C_{l_2 m_2}(\Omega) \frac{d\Omega}{4\pi} = \frac{\delta_{l_1 l_2} \delta_{m_1 m_2}}{(2l_1 + 1)}.$	
<p>Интеграл от произведения трех гармоник</p>	
$\int C_{l_1 m_1}(\Omega) C_{l_2 m_2}(\Omega) C_{l_3 m_3}(\Omega) \frac{d\Omega}{4\pi} = \begin{pmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix}.$	
<p>Разложение Клебша—Гордана</p>	
$C_{l_1 m_1}(\Omega) C_{l_2 m_2}(\Omega) = \sum_{l_3 m_3} \begin{pmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} C_{l_3 m_3}^*(\Omega).$	
<p>Сумма скалярных произведений трех гармоник</p>	
$\sum_{m_1 m_2 m_3} (2l_1 + 1) \begin{pmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} C_{l_1 m_1}(\Omega_1) C_{l_2 m_2}(\Omega_2) C_{l_3 m_3}(\Omega_3) =$ $= P_{l_2}(\cos \omega_{21}) P_{l_3}(\cos \omega_{31}).$	

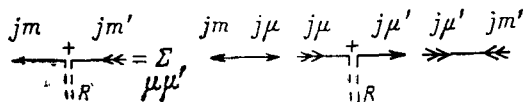
ТАБЛИЦА 11.13  
D-ФУНКЦИИ ВИГНЕРА

Аналитические соотношения

Графическое представление

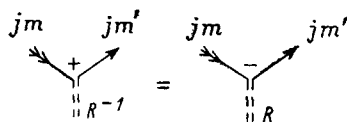
Комплексное сопряжение

$$(D_{mm'}^j(R))^* = \sum_{\mu\mu'} \binom{j}{m \ \mu} D_{\mu\mu'}^j(R) \binom{j}{\mu' \ m'} = (-1)^{m-m'} D_{-m-m'}^j(R).$$



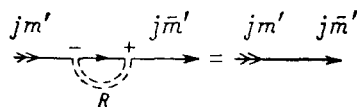
Обратное преобразование

$$D_{mm'}^j(R^{-1}) = (D_{m'm}^j(R))^*.$$

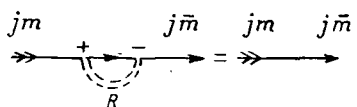


Унитарность

$$\sum_m (D_{mm'}^j(R))^* D_{m\bar{m}'}^j(R) = \sum_m D_{m'm}^j(R^{-1}) D_{m\bar{m}'}^j(R) = \delta_{m'\bar{m}'},$$

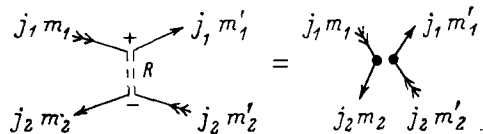


$$\sum_{m'} D_{mm'}^j(R) (D_{\bar{m}m'}^j(R))^* = \sum_{m'} D_{mm'}^j(R) D_{m'\bar{m}}^j(R^{-1}) = \delta_{m\bar{m}}.$$



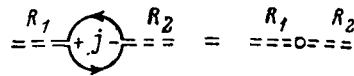
Ортогональность и нормировка

$$\int D_{m_1 m_1'}^{j_1}(R) D_{m_2 m_2'}^{j_2*}(R) \frac{dR}{16\pi^2} = \frac{\delta_{j_1 j_2} \delta_{m_1 m_2} \delta_{m_1' m_2'}}{(2j_1 + 1)}.$$



Полнота

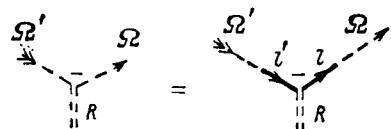
$$\sum_{j=0, 1/2, 1}^{\infty} (2j+1) \sum_{m, m'} D_{mm'}^j(R_1) D_{mm'}^{j*}(R_2) = 16\pi^2 \delta(R_1 - R_2).$$



Связь с матрицей поворота в  $\Omega$ -представлении

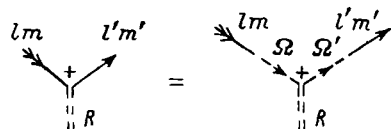
$$\delta(\Omega' - R\Omega) = \sum_{lm m'} \frac{(2l+1)}{4\pi} C_{lm m'}(\Omega') D_{m'm}^l(R^{-1}) C_{lm m'}^*(\Omega),$$

$$\langle \Omega' | R | \Omega \rangle = \langle \Omega' | l' m' \rangle \langle l' m' | R^{-1} | lm \rangle \langle lm | \Omega \rangle.$$



$$\delta_{ll'} D_{mm'}^l(R) = \frac{2l+1}{4\pi} \int \int d\Omega d\Omega' C_{lm m'}^*(\Omega) \delta(\Omega - R^{-1}\Omega') C_{l'm'm'}(\Omega'),$$

$$\langle lm | R | l' m' \rangle = \langle lm | \Omega \rangle \langle \Omega | R^{-1} | \Omega' \rangle \langle \Omega' | l' m' \rangle.$$



Аналитические соотношения

Графическое представление

Разложение Клебша—Гордана и связанные с ним соотношения

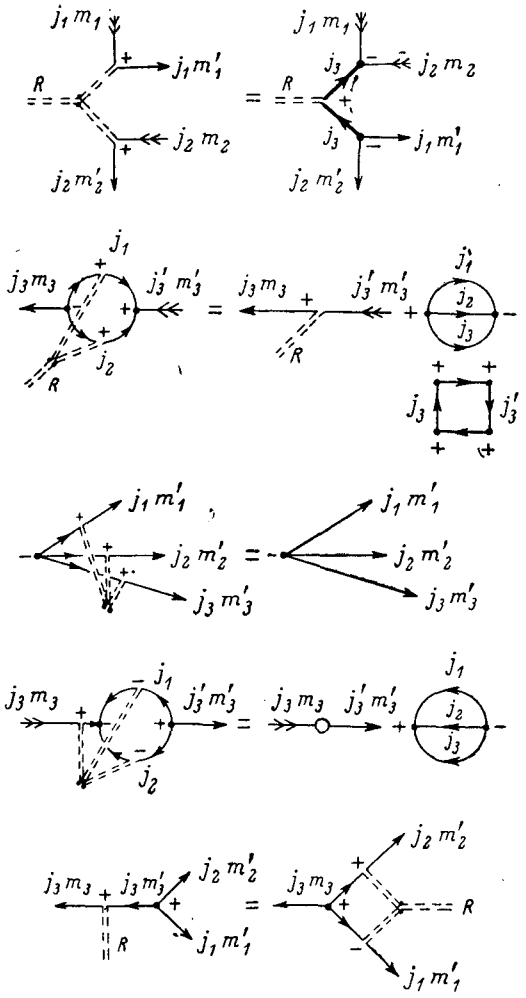
$$D_{m_1 m'_1}^{j_1}(R) D_{m_2 m'_2}^{j_2}(R) = \sum_{\substack{j_3 \\ m_3 m'_3}} (2j_3 + 1) \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} D_{m_3 m'_3}^{j_3*}(R) \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3' \\ m'_1 & m'_2 & m'_3 \end{pmatrix}.$$

$$\sum_{\substack{m_1 m_2 \\ m'_1 m'_2}} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} D_{m_1 m'_1}^{j_1}(R) D_{m_2 m'_2}^{j_2}(R) \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3' \\ m'_1 & m'_2 & m'_3 \end{pmatrix} = \frac{\delta_{j_3 j_3'}}{(2j_3 + 1)} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} D_{m_3 m'_3}^{j_3*}(R).$$

$$\sum_{m_1 m_2 m_3} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} D_{m_1 m'_1}^{j_1}(R) D_{m_2 m'_2}^{j_2}(R) D_{m_3 m'_3}^{j_3}(R) = \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m'_1 & m'_2 & m'_3 \end{pmatrix}.$$

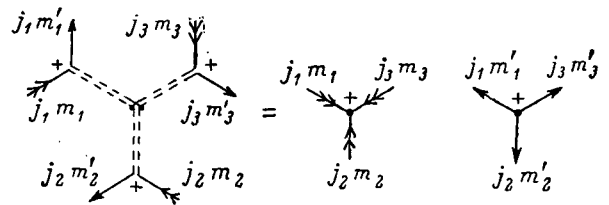
$$\sum_{\substack{m_1 m_2 \\ m'_1 m'_2 \\ m''_3}} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3' \\ m_1 & m_2 & m'_3 \end{pmatrix} D_{m_1 m'_1}^{j_1}(R) D_{m_2 m'_2}^{j_2}(R) D_{m_3 m''_3}^{j_3}(R) \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m'_1 & m'_2 & m''_3 \end{pmatrix} = \frac{\delta_{j_3 j_3'} \delta_{m_3 m'_3}}{(2j_3 + 1)} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix}.$$

$$D_{m_3 m'_3}^{j_3*}(R) \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m'_1 & m'_2 & m'_3 \end{pmatrix} = \sum_{m_1 m_2} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} D_{m_1 m'_1}^{j_1}(R) D_{m_2 m'_2}^{j_2}(R).$$



Интеграл от трех D-функций

$$\int D_{m_1 m'_1}^{j_1}(R) D_{m_2 m'_2}^{j_2}(R) D_{m_3 m'_3}^{j_3}(R) \frac{dR}{16\pi^2} = \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m'_1 & m'_2 & m'_3 \end{pmatrix}.$$



Теоремы сложения

$$\sum_{m'} D_{m m'}^j(R_2) D_{m' m''}^j(R_1) = D_{m m''}^j(R_2 R_1).$$

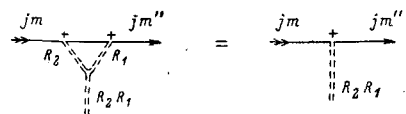
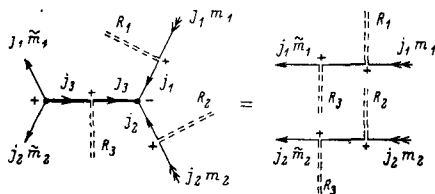


ТАБЛИЦА 11.13 (продолжение)

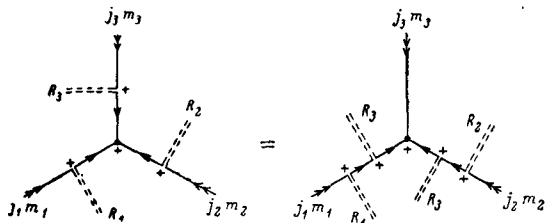
Аналитические соотношения

Графическое представление

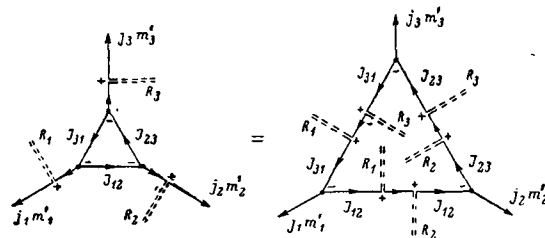
$$\sum_{\substack{j_3 m_3 \\ m'_1 m'_2 m'_3}} (2j_3 + 1) \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ \tilde{m}_1 & \tilde{m}_2 & m_3 \end{pmatrix} D_{m_1 m'_1}^{j_1}(R_1) D_{m_2 m'_2}^{j_2}(R_2) D_{m_3 m'_3}^{j_3}(R_3) \times \\ \times \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m'_1 & m'_2 & m'_3 \end{pmatrix} = D_{\tilde{m}_1 \tilde{m}_1}^{j_1}(R_1 R_3^{-1}) D_{\tilde{m}_2 \tilde{m}_2}^{j_2}(R_2 R_3^{-1}).$$



$$\sum_{m'_1 m'_2 m'_3} D_{m_1 m'_1}^{j_1}(R_1) D_{m_2 m'_2}^{j_2}(R_2) D_{m_3 m'_3}^{j_3}(R_3) \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m'_1 & m'_2 & m'_3 \end{pmatrix} = \\ = \sum_{m'_1 m'_2} D_{m_1 m'_1}^{j_1}(R_1 R_3^{-1}) D_{m_2 m'_2}^{j_2}(R_2 R_3^{-1}) \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m'_1 & m'_2 & m_3 \end{pmatrix}.$$



$$\begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ J_{23} & J_{31} & J_{12} \end{Bmatrix} \sum_{m_1 m_2 m_3} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} D_{m_1 m'_1}^{j_1}(R_1) D_{m_2 m'_2}^{j_2}(R_2) D_{m_3 m'_3}^{j_3}(R_3) = \\ = \sum_{\substack{M_{12} M_{23} M_{31} \\ M'_{12} M'_{23} M'_{31}}} (-1)^{J_{12} - M_{12} + J_{23} - M_{23} + J_{31} - M_{31}} \times \\ \times \begin{pmatrix} J_{12} & j_1 & J_{31} \\ M_{12} & m'_1 & -M'_{31} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_{23} & j_2 & J_{12} \\ M_{23} & m'_2 & -M'_{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_{31} & j_3 & J_{23} \\ M_{31} & m'_3 & -M'_{23} \end{pmatrix} \times \\ \times D_{M_{31} M'_{31}}^{J_{31}}(R_3^{-1} R_1) D_{M_{12} M'_{12}}^{J_{12}}(R_1^{-1} R_2) D_{M_{23} M'_{23}}^{J_{23}}(R_2^{-1} R_3).$$



$$\sum_{j_1 j_2 j_3} (2j_1 + 1) (2j_2 + 1) (2j_3 + 1) \begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ J_{23} & J_{31} & J_{12} \end{Bmatrix} \times \\ \times \sum_{\substack{m_1 m_2 m_3 \\ m'_1 m'_2 m'_3}} (-1)^{J_{12} - M_{12} + J_{23} - M_{23} + J_{31} - M_{31}} \times \\ \times \begin{pmatrix} J_{31} & j_1 & J_{12} \\ M'_{31} & m_1 & -M_{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_{12} & j_2 & J_{23} \\ M'_{12} & m_2 & -M_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_{23} & j_3 & J_{31} \\ M'_{23} & m_3 & -M_{31} \end{pmatrix} \times \\ \times D_{m_1 m'_1}^{j_1}(R_1) D_{m_2 m'_2}^{j_2}(R_2) D_{m_3 m'_3}^{j_3}(R_3) \begin{pmatrix} j_3 & j_2 & j_1 \\ m'_3 & m'_2 & m'_1 \end{pmatrix} = \\ = D_{M_{12} M'_{12}}^{J_{12}}(R_1 R_2^{-1}) D_{M_{23} M'_{23}}^{J_{23}}(R_2 R_3^{-1}) D_{M_{31} M'_{31}}^{J_{31}}(R_3 R_1^{-1}).$$

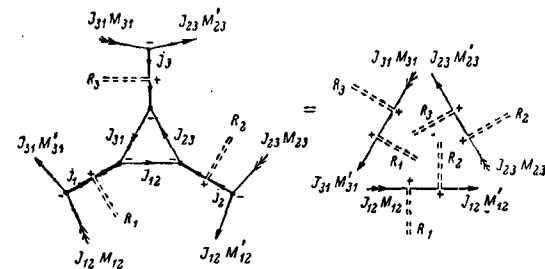


ТАБЛИЦА 11.14

МАТРИЧНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ НЕПРИВОДИМЫХ ТЕНЗОРНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Аналитические соотношения

Графическое представление

Теорема Вигнера—Эккарта

$$\langle \gamma J M | \mathfrak{M}_{kq} | \gamma' J' M' \rangle = (-1)^{J-M} \begin{pmatrix} J & k & J' \\ -M & q & M' \end{pmatrix} (\gamma J \| \mathfrak{M}_k \| \gamma' J'),$$

где

$$(\gamma J \| \mathfrak{M}_k \| \gamma' J')$$

— приведенный матричный элемент.

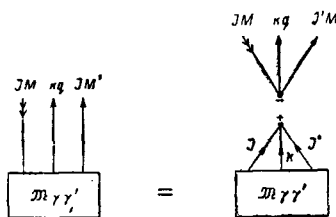


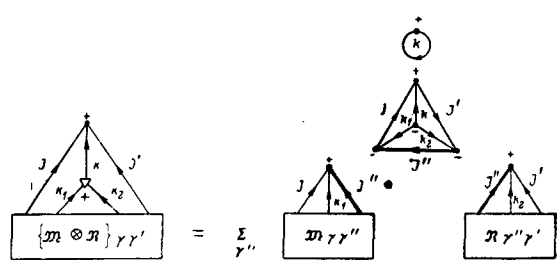
ТАБЛИЦА 11.14 (продолжение)

Аналитическое выражение

Графическое представление

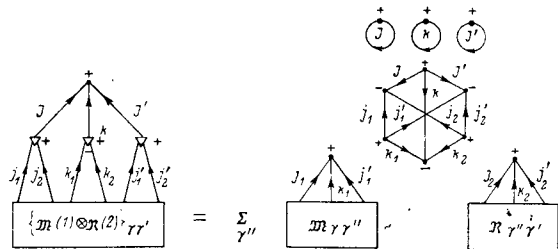
Приведенный матричный элемент неприводимого тензорного произведения операторов

$$\begin{aligned}
 & (\gamma J \| \{ \mathfrak{M}_{k_1} \otimes \mathfrak{N}_{k_2} \}_k \| \gamma' J') = \\
 & = (-1)^{J+k+J'} \sqrt{2k+1} \sum_{\gamma'' J''} \left\{ \begin{matrix} J & k & J' \\ k_2 & J'' & k_1 \end{matrix} \right\} \times \\
 & \times (\gamma J \| \mathfrak{M}_{k_1} \| \gamma'' J'') (\gamma'' J'' \| \mathfrak{N}_{k_2} \| \gamma' J').
 \end{aligned}$$



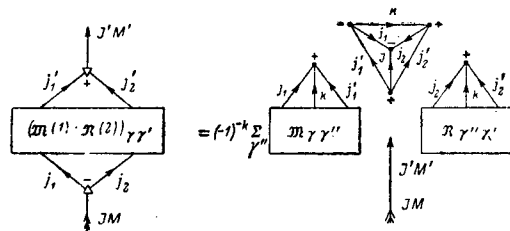
Приведенный матричный элемент неприводимого тензорного произведения двух операторов, зависящих от переменных I и II подсистем соответственно в  $j_1 j_2$ ;  $Jm$ -представлении

$$\begin{aligned}
 & (\gamma j_1 j_2 J \| \{ \mathfrak{M}_{k_1}(1) \otimes \mathfrak{N}_{k_2}(2) \}_k \| \gamma' j'_1 j'_2 J') = \\
 & = \sqrt{(2J+1)(2k+1)(2J'+1)} \left\{ \begin{matrix} j_1 & j'_1 & k_1 \\ j_2 & j'_2 & k_2 \\ J & J' & k \end{matrix} \right\} \times \\
 & \times \sum_{\gamma''} (\gamma j_1 \| \mathfrak{M}_{k_1} \| \gamma'' j'_1) (\gamma'' j_2 \| \mathfrak{N}_{k_2} \| \gamma' j'_2).
 \end{aligned}$$



Матричный элемент скалярного произведения двух неприводимых тензоров, зависящих от переменных I и II подсистем, соответственно в  $j_1 j_2$ ;  $JM$ -представлении

$$\begin{aligned}
 & \langle \gamma j_1 j_2 J M | \mathfrak{M}_{k_1}(1) \cdot \mathfrak{N}_{k_2}(2) | \gamma' j'_1 j'_2 J' M' \rangle = \\
 & = (-1)^{j_1+j_2+J} \delta_{JJ'} \delta_{MM'} \left\{ \begin{matrix} j_1 & j_2 & J \\ j'_2 & j'_1 & k \end{matrix} \right\} \times \\
 & \times \sum_{\gamma''} (\gamma j_1 \| \mathfrak{M}_{k_1} \| \gamma'' j'_1) (\gamma'' j_2 \| \mathfrak{N}_{k_2} \| \gamma' j'_2).
 \end{aligned}$$



Приведенный матричный элемент неприводимого тензорного оператора, зависящего от переменных лишь I подсистемы, в  $j_1 j_2$ ;  $JM$ -представлении

$$\begin{aligned}
 & (\gamma j_1 j_2 J \| \mathfrak{M}_k(1) \| \gamma' j'_1 j'_2 J') = \\
 & = (-1)^{j_1+j_2+J+k} \delta_{j_2 j'_2} \sqrt{(2J+1)(2J'+1)} \times \\
 & \times \left\{ \begin{matrix} J & k & J' \\ j'_1 & j_2 & j_1 \end{matrix} \right\} (\gamma j_1 \| \mathfrak{M}_k \| \gamma' j'_1).
 \end{aligned}$$

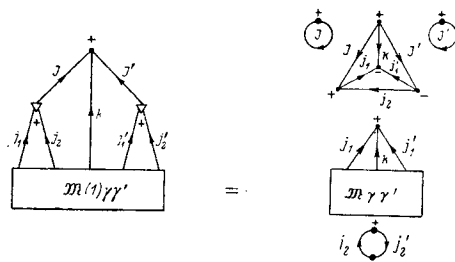




ТАБЛИЦА 11.14 (продолжение)

Аналитическое выражение	Графическое представление
<p>Приведенный матричный элемент неприводимого тензорного оператора, зависящего от переменных лишь II подсистемы, в <math>j_1 j_2</math>; <math>J M</math>-представлении</p> $  \begin{aligned}  & (\gamma j_1 j_2 J \  \mathfrak{R}_k(2) \  \gamma' j_1' j_2' J') = \\  & = (-1)^{j_1' + j_2' + J + k} \delta_{j_1 j_1'} \sqrt{(2J+1)(2J'+1)} \times \\  & \times \begin{Bmatrix} J & k & J' \\ j_2' & j_1 & j_2 \end{Bmatrix} (\gamma j_2 \  \mathfrak{R}_k \  \gamma' j_2').  \end{aligned}  $	

11.4. РЕЗЮМЕ ГРАФИЧЕСКОГО МЕТОДА

Выше были изложены принципы графического метода, определены отдельные элементы, даны графическое изображение различных функций (11.1) и графическое представление математических операций (11.2). Затем были сформулированы правила действия над графиками (11.3). Наконец, в данном параграфе резюмированы на основе вышеизложенного наиболее важные положения метода — перечислены общие свойства графиков, сформулирована в графическом представлении обобщенная теорема Вигнера—Эккарта и в заключение указана общая схема применения графического метода.

1. Общие свойства графиков

1) Любой график можно произвольным образом поворачивать и деформировать, помня лишь о необходимости изменения знака узлов при изменении циклической последовательности моментов, сходящихся в этих узлах. Допустимы не только непрерывные деформации графиков типа их растяжений или изгибов, но и их дискретные преобразования типа отражения или инверсии. Такие преобразования не меняют значения графика, т. е. все возможные графики, полученные путем таких преобразований, соответствуют одному и тому же аналитическому выражению.

2) Угловой момент  $j$  и его проекция  $m$  остаются неизменными вдоль любой сплошной линии графика, какие бы сложные блоки не были встроены в эту линию. Существенно лишь, чтобы эти блоки не имели других внешних линий, кроме рассматриваемой  $j$ -линии. Вследствие этого значения суммарного момента  $J$  и его проекции  $M$  в любом сечении графика остаются неизменными.

3) Суммарный угловой момент любого графика (или блока), представляющий собой векторную сумму моментов, отвечающих всем внешним по отношению к этому графику (блоку) линиям, равен нулю:

$$\sum_i j_i = 0, \quad \sum_i m_i = 0.$$

Поэтому блокам с одной сплошной внешней  $j$ -линией отвечает  $j=0$ , а блокам с двумя сплошными внешними линиями  $j_1$  и  $j_2$  отвечает  $j_1=j_2$ , и т. д. В каждом элементарном узле графика, связывающем три  $j$ -линии,  $j_1+j_2+j_3=0$  и  $m_1+m_2+m_3=0$  в силу свойств  $3jm$ -символа.

По этой же причине равны нулю выражения, соответствующие графикам или блокам, для которых алгебраическая сумма всех моментов, соответствующих внешним  $j$ -линиям  $j_1+j_2+\dots+j_n$ , представляет собой полуцелое число.

4) Любые графические преобразования, не меняющие значения соответствующего аналитического выражения, связаны лишь с изменением внутренних линий графика (блока). Число, характер (сплошные или пунктирные) и индексы внешних линий графика при этом не изменяются. (Исключение составляют лишь случаи  $j$ -линий с  $j=0$  и  $R$ -линий с  $R=1$ , которым соответствует фиктивная зависимость). Именно внешние линии определяют общие свойства графика (блока) при повороте системы координат.

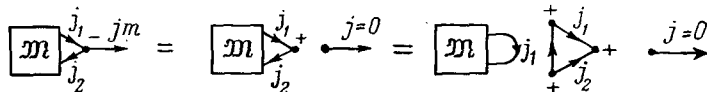
## 2. Обобщенная графическая теорема Вигнера-Экарта

В ряде случаев вся зависимость выражения от внешних переменных выделяется в виде простейшего стандартного множителя типа  $C_{j_1 m_1 j_2 m_2}^{j m}$  или  $D_{MM'}^J(R)$ . На графике выделение такого множителя производится по правилам разбиения на блоки в 11.3.6. Приведем примеры.

1) Замкнутый график, т. е. график, не имеющий внешних линий, является инвариантом относительно поворота системы координат.

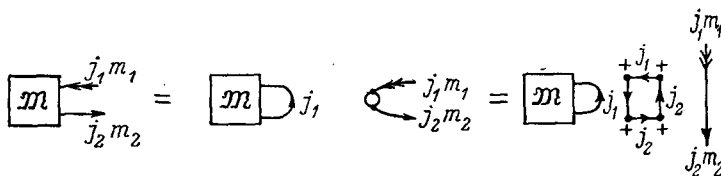
2) График, имеющий лишь одну внешнюю линию фактически также является инвариантом, так как в изотропном пространстве невозможно задать само по себе одно направление, поэтому зависимость от этого направления является фиктивной и соответствующая ему внешняя линия на графике может быть изъята по правилу исключения линий с  $j=0$ :

$$\langle 00 | \mathfrak{M} | jm \rangle = \delta_{j0} \delta_{m0} \langle 00 | \mathfrak{M} | 00 \rangle.$$



3) График, имеющий две сплошные внешние линии, соответствующие  $\langle j_1 m_1 |$  и  $| j_2 m_2 \rangle$ , отличен от нуля лишь при условии  $j_1 = j_2$  и  $m_1 = m_2$ :

$$\langle j_1 m_1 | \mathfrak{M} | j_2 m_2 \rangle = \frac{\delta_{j_1 j_2} \delta_{m_1 m_2}}{(2j_1 + 1)} \sum_m \langle j_1 m | \mathfrak{M} | j_1 m \rangle$$

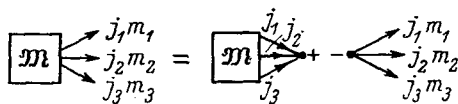


4) График, имеющий три сплошные внешние линии, соответствующие  $| j_1 m_1 \rangle$ ,  $| j_2 m_2 \rangle$  и  $| j_3 m_3 \rangle$ , пропорционален  $3jm$ -символу  $\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix}$ . Коэффициент пропорциональности называют *приведенным матричным элементом*.

$$\langle 00 | \mathfrak{M} | j_1 m_1 j_2 m_2 j_3 m_3 \rangle = \langle 0 | \mathfrak{M} | j_1 j_2 j_3 \rangle \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix},$$

где

$$\langle 0 | \mathfrak{M} | j_1 j_2 j_3 \rangle \equiv \sum_{m_1 m_2 m_3} \langle 00 | \mathfrak{M} | j_1 m_1 j_2 m_2 j_3 m_3 \rangle \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix}.$$



5) График, имеющий четыре сплошные внешние линии, отвечающие моментам  $j_1 m_1$ ,  $j_2 m_2$ ,  $j_3 m_3$  и  $j_4 m_4$ , представляется в виде суммы произведений двух  $3jm$ -символов

$$\langle j_1 m_1 j_2 m_2 | \mathfrak{M} | j_3 m_3 j_4 m_4 \rangle = \sum_{j(m)} (2j + 1) \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j \\ m_1 & m_2 & m \end{pmatrix} \langle j_1 j_2; jm | \mathfrak{M} | j_3 j_4; jm \rangle \begin{pmatrix} j_3 & j_4 & j \\ m_3 & m_4 & m \end{pmatrix},$$

где

$$\langle j_1 j_2; jm | \mathfrak{M} | j_3 j_4; j' m' \rangle \equiv \sum_{m_1 m_2 m_3 m_4} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j \\ m_1 & m_2 & m \end{pmatrix} \langle j_1 m_1 j_2 m_2 | \mathfrak{M} | j_3 m_3 j_4 m_4 \rangle \begin{pmatrix} j_3 & j_4 & j' \\ m_3 & m_4 & m' \end{pmatrix}.$$

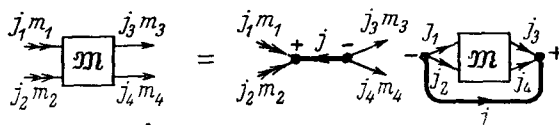
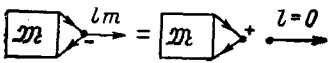
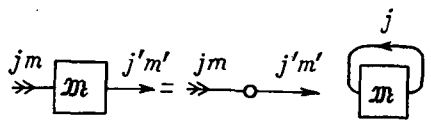
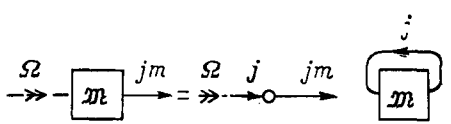
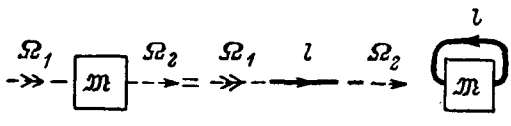
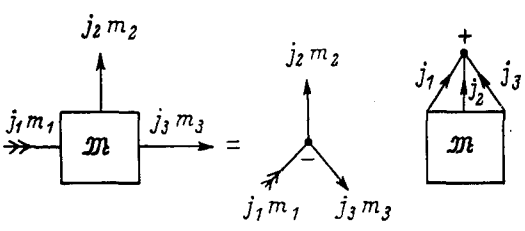
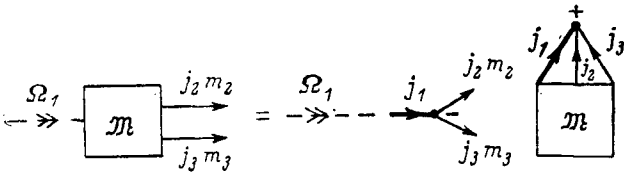
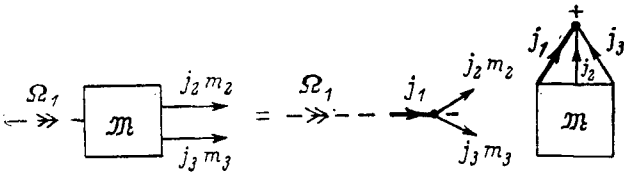
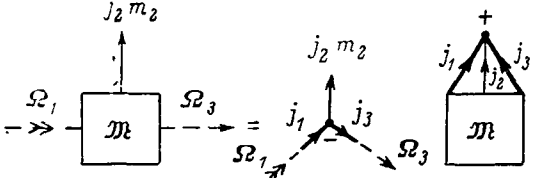


ТАБЛИЦА 11.15

ОБОБЩЕННАЯ ТЕОРЕМА ВИГНЕРА—ЭККАРТА

Аналитическое выражение	Графическое представление
$\langle 00   \mathfrak{M}   lm \rangle = \langle 00   \mathfrak{M}   00 \rangle \delta_{l0} \delta_{m0}.$	
<p>где</p> $\langle jm   \mathfrak{M}   j'm' \rangle = \frac{\delta_{jj'} \delta_{mm'}}{(2j+1)} \langle j    \mathfrak{M}    j \rangle,$ $\langle j    \mathfrak{M}    j \rangle \equiv \sum_m \langle jm   \mathfrak{M}   jm \rangle.$	
$\langle \Omega   \mathfrak{M}   jm \rangle = \langle \Omega   jm \rangle \frac{\langle j    \mathfrak{M}    j \rangle}{(2j+1)}.$	
$\langle \Omega_1   \mathfrak{M}   \Omega_2 \rangle = \frac{1}{4\pi} \sum_l P_l(\cos \omega_{12}) \langle l    \mathfrak{M}    l \rangle,$ <p>где <math>\omega_{12}</math> — угол между направлениями <math>\Omega_1</math> и <math>\Omega_2</math>,</p> $P_l(\cos \omega_{12}) = \sum_m \langle \Omega_1   lm \rangle \langle lm   \Omega_2 \rangle.$	
$\langle j_1 m_1   \mathfrak{M}   j_2 m_2 j_3 m_3 \rangle =$ $= (-1)^{j_1 - m_1} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ -m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} \langle j_1    \mathfrak{M}_{j_2}    j_3 \rangle,$ <p>где</p>	
$\langle j_1    \mathfrak{M}_{j_2}    j_3 \rangle \equiv \sum_{m_1 m_2 m_3} (-1)^{j_1 - m_1} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ -m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} \times$ $\times \langle j_1 m_1   \mathfrak{M}   j_2 m_2 j_3 m_3 \rangle.$	
$\langle \Omega   \mathfrak{M}   j_2 m_2 j_3 m_3 \rangle =$ $= \sum_{j_1 m_1} \langle \Omega   j_1 m_1 \rangle (-1)^{j_1 - m_1} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ -m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} \langle j_1    \mathfrak{M}_{j_2}    j_3 \rangle.$	
$\langle \Omega_1   \mathfrak{M}   j_2 m_2 \Omega_3 \rangle = \sum_{j_1 m_1 j_3 m_3} \langle \Omega_1   j_1 m_1 \rangle \times$ $\times (-1)^{j_1 - m_1} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ -m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} \langle j_3 m_3   \Omega_3 \rangle \langle j_1    \mathfrak{M}_{j_2}    j_3 \rangle.$	

Аналитическое соотношение	Графическое представление
$\langle Q_1   \mathfrak{M}   Q_2 Q_3 \rangle = \sum_{j_1 j_2 j_3} \langle j_1   \mathfrak{M}_{j_2}   j_3 \rangle \times$ $\times \sum_{m_1 m_2 m_3} \langle Q_1   j_1 m_1 \rangle (-1)^{j_1 - m_1} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ -m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} \times$ $\times \langle j_2 m_2   Q_2 \rangle \langle j_3 m_3   Q_3 \rangle.$	
$\langle j_1 m_1 j_2 m_2   \mathfrak{M}   j_3 m_3 j_4 m_4 \rangle =$ $= \sum_{JM} (2J + 1) \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & J \\ m_1 & m_2 & M \end{pmatrix} \langle j_1 j_2; JM   \mathfrak{M}   j_3 j_4; JM \rangle \times$ $\times \begin{pmatrix} j_3 & j_4 & J \\ m_3 & m_4 & M \end{pmatrix}.$	

### 3. Общая схема применения графического метода вычисления

Цель вычисления состоит в том, чтобы преобразовать исходное выражение к такому виду, при котором вся его зависимость от ориентации системы координат была бы выделена в виде простого стандартного множителя типа  $C_{j_1 m_1 j_2 m_2}^{j m}$  или  $D_{MM'}^J(R)$ , зависящего исключительно лишь от внешних переменных, а оставшаяся часть выражения, инвариантная относительно вращения системы координат, представлена в виде произведения или, если это невозможно, в виде суммы по моментам произведений стандартных инвариантных функций типа  $3j$ -,  $6j$ - и  $9j$ -символов.

Графический метод вычисления состоит из следующих этапов.

- 1) Исходное аналитическое выражение изображают в виде графика, используя при этом графическое представление различных функций и операций, данное в 11.1 и 11.2.
  - 2) Исключают из графика все фиктивные  $j$ -линии с  $j=0$  и  $R$ -линии с  $R=1$  в соответствии с правилами 11.3.9 и 11.3.10.
  - 3) Последовательно соединяют все несвязанные между собой блоки, в которые входят общие жирные суммируемые  $j$ -линии, в соответствии с правилами графического перемножения блоков 11.3.5.
  - 4) Заменяют все внутренние пунктирные  $\Omega$ -линии сплошными жирными  $j$ -линиями в соответствии с правилами интегрирования 11.3.8.
  - 5) Производят графическое суммирование по угловым моментам, т. е. исключают жирные линии и производят соответствующую пересвязку оставшихся линий по правилу 11.3.7.
  - 6) Разбивают полученный график по правилам 11.3.6 на отдельные блоки, каждый из которых соответствует топологически одной из стандартных функций. При этом сначала выделяют зависимость от внешних линий, а затем, если необходимо, оставшийся инвариантный множитель представляют в виде произведения (или суммы произведений) стандартных  $3nj$ -символов.
  - 7) Изменяют, пользуясь правилами 11.3.2 и 11.3.3, знаки узлов и направления стрелок с тем, чтобы каждый из полученных блоков был тождественно равен соответствующему стандартному графику, приведенному в табл. 11.1, 11.2. При этом определяют фазу всего выражения.
  - 8) Результирующее графическое выражение записывают в аналитическом виде.
- Иногда используется упрощенный вариант графического метода без указания знака узлов и направления стрелок. При этом графики носят в основном лишь иллюстративный характер, так как фазу выражения по ним определить нельзя.

## СУММЫ КОЭФФИЦИЕНТОВ ВЕКТОРНОГО СЛОЖЕНИЯ

В конкретных расчетах часто приходится вычислять суммы произведений  $3jm$ -,  $6j$ -,  $9j$ - и др. символов, в которых в качестве переменных суммирования выступают как сами моменты, так и их проекции. Суммирование по этим двум типам переменных всегда можно разделить и производить последовательно и независимо. Удобнее вначале производить суммирование по проекциям моментов. Формулы, по которым производится такое суммирование, представлены в 12.1. В результате суммирования по проекциям появляются инварианты типа  $6j$ - и  $9j$ -символов. Дальнейшее суммирование  $6j$ - и  $9j$ -символов производится в соответствии с формулами, приведенными в 12.2.

### 12.1. СУММЫ ПРОИЗВЕДЕНИЙ $3jm$ -СИМВОЛОВ

Ниже приведены суммы произведений  $3jm$ -символов по проекциям моментов. Формулы сопровождаются графическими иллюстрациями, из которых видна связь моментов, входящих в эти формулы. Формулы разбиты на группы по числу  $3jm$ -символов под знаком суммы. Внутри каждой группы формулы расположены в порядке возрастания числа проекций, по которым нет суммирования, т. е. по числу внешних линий графика. В приведенных соотношениях число  $3jm$ -символов под знаком суммы не превышает шести. В пределах этого числа сомножителей даны суммы, соответствующие различным схемам связи угловых моментов.

Формулы записаны в таком виде, что каждой проекции  $m_j$ , по которой производится суммирование, соответствует множитель  $(-1)^{j-m_j}$ , а сама проекция входит в суммируемое выражение два раза с противоположными знаками. Это отражает инвариантный характер суммирования (см. 11.2). К такому виду можно привести любую инвариантную сумму по проекциям с помощью свойств симметрии  $3jm$ -символов (см. 8.4).

Всюду используется следующее обозначение:

$$\Pi_{ab\dots f} = \sqrt{(2a+1)(2b+1)\dots(2f+1)}. \quad (1)$$

#### 1. Сумма, содержащая один $3jm$ -символ

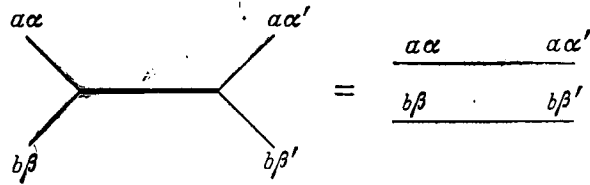
$$\sum_{\alpha} (-1)^{a-\alpha} \begin{pmatrix} a & a & c \\ \alpha & -\alpha & \gamma \end{pmatrix} = \Pi_a \delta_{c0} \delta_{\gamma 0}. \quad (2)$$

#### 2. Суммы, содержащие два $3jm$ -символа

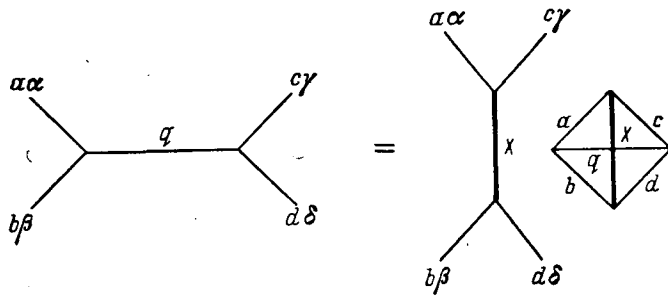
$$\sum_{\psi x} (-1)^{p-\psi+q-x} \begin{pmatrix} a & p & q \\ -\alpha & \psi & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & q & a' \\ -\psi & -x & \alpha' \end{pmatrix} = \frac{(-1)^{a+\alpha}}{\Pi_a^2} \{apq\} \delta_{aa'} \delta_{\alpha\alpha'}, \quad (3)$$

$$\begin{array}{c} a\alpha \\ \text{---} \end{array} \begin{array}{c} p \\ \text{---} \end{array} \begin{array}{c} a'\alpha' \\ \text{---} \end{array} = \begin{array}{c} a\alpha \\ \text{---} \end{array} \begin{array}{c} a'\alpha' \\ \text{---} \end{array} \begin{array}{c} p \\ \text{---} \end{array} \begin{array}{c} \alpha \\ \text{---} \end{array}$$

$$\sum_{q^x} (-1)^{q-x} \Pi_q^2 \begin{pmatrix} a & b & q \\ -a & -\beta & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q & a & b \\ -x & a' & \beta' \end{pmatrix} = (-1)^{a+a'+b+\beta} \delta_{a\alpha'} \delta_{\beta\beta'}, \quad (4)$$

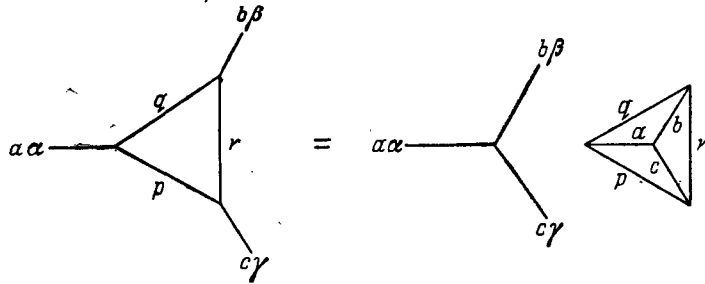


$$\sum_x (-1)^{q-x} \begin{pmatrix} a & b & q \\ a & \beta & -x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q & d & c \\ x & \delta & \gamma \end{pmatrix} = (-1)^{2a} \sum_{x\xi} (-1)^{x-\xi} \Pi_x^2 \begin{pmatrix} a & c & x \\ a & \gamma & -\xi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & d & b \\ \xi & \delta & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b & d & x \\ c & a & q \end{pmatrix}, \quad (5)$$

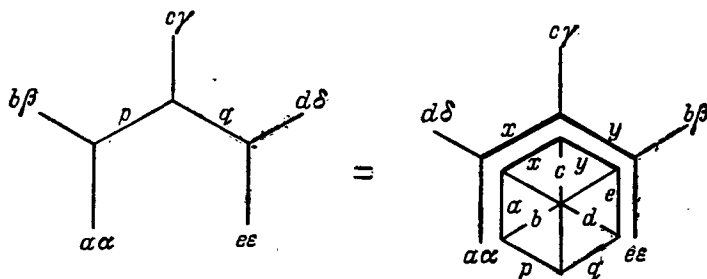


3. Суммы, содержащие три 3jm-символа

$$\sum_{x\psi\rho} (-1)^{p-\psi+q-x+r-\rho} \begin{pmatrix} p & a & q \\ \psi & a & -x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q & b & r \\ x & \beta & -\rho \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r & c & p \\ \rho & \gamma & -\psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ -a & -\beta & -\gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ r & p & q \end{pmatrix}, \quad (6)$$

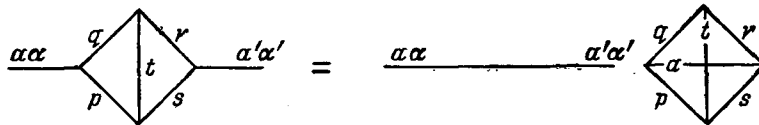


$$\begin{aligned} & \sum_{\psi x} \begin{pmatrix} a & b & p \\ a & \beta & \psi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & c & q \\ -\psi & -\gamma & -x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q & d & e \\ x & \delta & \varepsilon \end{pmatrix} = \\ & = \sum_{xy\xi\eta} \Pi_{xy}^2 \begin{pmatrix} a & d & x \\ a & \delta & \xi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & c & y \\ -\xi & -\gamma & -\eta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y & b & e \\ \eta & \beta & \varepsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & p \\ d & e & q \\ x & y & c \end{pmatrix}, \quad (7) \end{aligned}$$

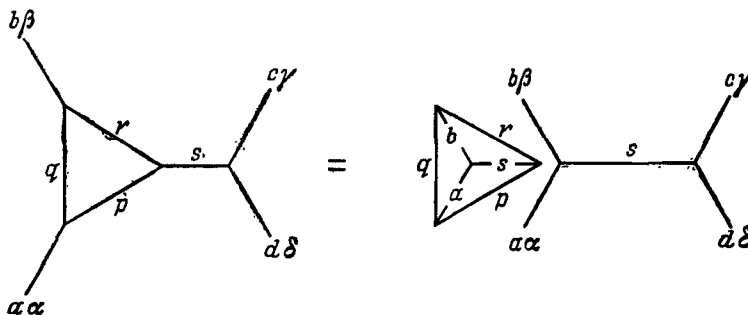


4. Суммы, содержащие четыре 3jт-символа

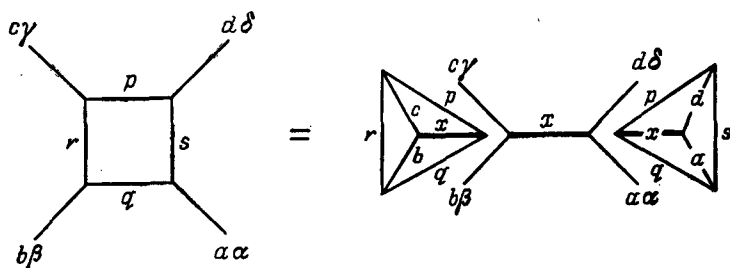
$$\sum_{\alpha\psi\rho\sigma} (-1)^{p-\psi+q-x+r-p+s-\sigma+t-\tau} \begin{pmatrix} p & a & q \\ \psi & -\alpha & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q & r & t \\ -x & p & \tau \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r & a' & s \\ -\rho & a' & \sigma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s & p & t \\ -\sigma & -\psi & -\tau \end{pmatrix} = \frac{(-1)^{a-\alpha}}{\Pi_a^2} \begin{Bmatrix} q & p & a \\ s & r & t \end{Bmatrix} \delta_{\alpha\alpha'} \delta_{\alpha\alpha'}, \quad (8)$$



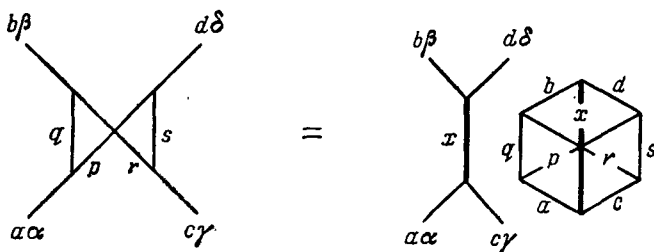
$$\sum_{\rho\psi\alpha} (-1)^{p-\psi+q-x+r-p+s-\sigma} \begin{pmatrix} p & a & q \\ \psi & \alpha & -x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q & b & r \\ x & \beta & -\rho \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r & s & p \\ \rho & \sigma & -\psi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s & c & d \\ -\sigma & \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{Bmatrix} a & b & s \\ r & p & q \end{Bmatrix} \sum_{\sigma} (-1)^{s-\sigma} \begin{Bmatrix} a & s & b \\ \alpha & \sigma & \beta \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} d & s & c \\ \delta & -\sigma & \gamma \end{Bmatrix}, \quad (9)$$



$$\sum_{\psi\rho\sigma} (-1)^{p-\psi+q-x+r-p+s-\sigma} \begin{pmatrix} p & a & q \\ \psi & \alpha & -x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q & b & r \\ x & \beta & -\rho \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r & c & s \\ \rho & \gamma & -\sigma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s & d & p \\ \sigma & \delta & -\psi \end{pmatrix} = (-1)^{s-a-d-q} \sum_{x\xi} (-1)^{x-\xi} \Pi_x^2 \begin{Bmatrix} a & x & d \\ \alpha & -\xi & \delta \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} b & x & c \\ \beta & \xi & \gamma \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} a & x & d \\ s & p & q \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} b & x & c \\ s & r & q \end{Bmatrix} = \quad (10)$$



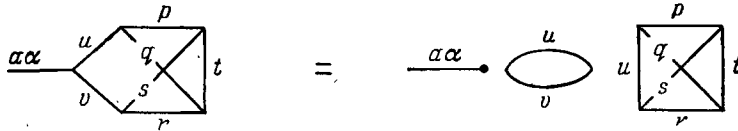
$$= (-1)^{2r-s-d-a-q} \sum_{x\xi} (-1)^{x-\xi} \Pi_x^2 \begin{Bmatrix} a & x & c \\ \alpha & -\xi & \gamma \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} b & x & d \\ \alpha & \xi & \delta \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} a & p & q \\ x & d & b \\ c & s & r \end{Bmatrix}, \quad (11)$$



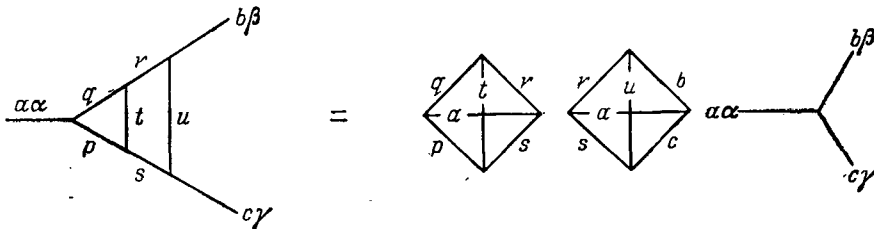
5. Суммы, содержащие пять 3jт-символов

$$\sum_{\substack{\psi \chi \rho \sigma \\ \tau \nu \mu}} (-1)^{p-\psi+q-x+r-\rho+s-\sigma+t-\tau+u-\nu+\theta-\mu} \begin{pmatrix} r & t & q \\ \rho & \tau & -\chi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q & p & u \\ x & \psi & -\nu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u & a & v \\ \nu & a & -\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v & s & r \\ \mu & \sigma & -\rho \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s & p & t \\ -\sigma & -\psi & -\tau \end{pmatrix} =$$

$$= (-1)^{2u} \frac{1}{\Pi_u} \delta_{u\theta} \delta_{a0} \delta_{a0} \begin{Bmatrix} q & p & u \\ s & r & t \end{Bmatrix}, \tag{12}$$

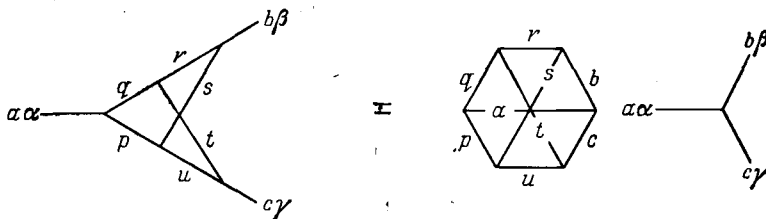


$$\sum_{\substack{\psi \chi \rho \sigma \\ \tau \nu}} (-1)^{p-\psi+q-x+r-\rho+s-\sigma+t-\tau+u-\nu} \begin{pmatrix} p & a & q \\ \psi & a & -\chi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q & r & t \\ x & \rho & -\tau \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t & s & p \\ \tau & -\sigma & -\psi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s & c & u \\ \sigma & \gamma & -\nu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u & b & r \\ \nu & \beta & -\rho \end{pmatrix} = \begin{Bmatrix} a & b & c \\ \alpha & \beta & \gamma \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} a & p & q \\ u & s & r \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} t & r & s \end{Bmatrix}, \tag{13}$$



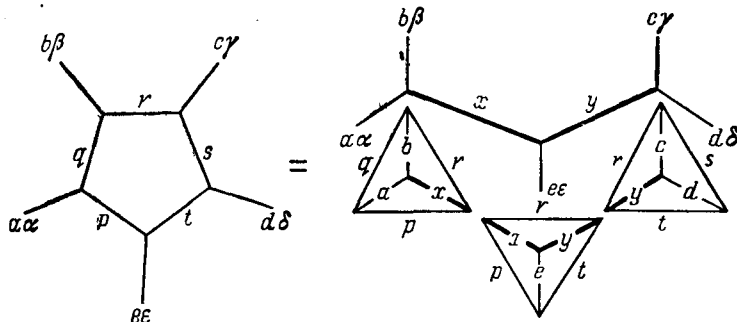
$$\sum_{\substack{\psi \chi \rho \sigma \\ \tau \nu}} (-1)^{p-\psi+q-x+r-\rho+s-\sigma+t-\tau+u-\nu} \begin{pmatrix} p & a & q \\ \psi & a & -\chi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q & t & r \\ -x & -\tau & -\rho \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r & b & s \\ \rho & \beta & \sigma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s & p & u \\ -\sigma & -\psi & -\nu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u & c & t \\ \nu & \gamma & \tau \end{pmatrix} =$$

$$= (-1)^{r+b+s} \begin{pmatrix} a & b & c \\ -a & -\beta & -\gamma \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} a & b & c \\ p & s & u \\ q & r & t \end{Bmatrix}, \tag{14}$$



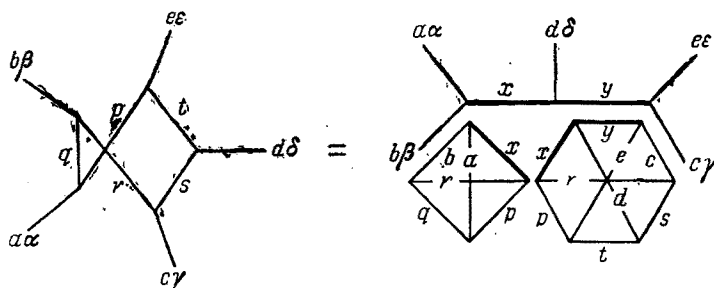
$$\sum_{\substack{\psi \chi \rho \\ \sigma \tau}} (-1)^{p-\psi+q-x+r-\rho+s-\sigma+t-\tau} \begin{pmatrix} p & a & q \\ \psi & a & -\chi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q & b & r \\ x & \beta & -\rho \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r & c & s \\ \rho & \gamma & -\sigma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s & d & t \\ \sigma & \delta & -\tau \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t & e & p \\ \tau & \varepsilon & -\psi \end{pmatrix} =$$

$$= (-1)^{t-p-b-a-d-e} \sum_{x \xi y \eta} (-1)^{x-\xi+y-\eta} \Pi_{xy}^2 \begin{pmatrix} a & b & x \\ \alpha & \beta & \xi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & e & y \\ -\xi & \varepsilon & -\eta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y & c & d \\ \eta & \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} a & b & x \\ r & p & q \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} x & e & y \\ t & r & p \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} y & c & d \\ s & t & r \end{Bmatrix} = \tag{15}$$

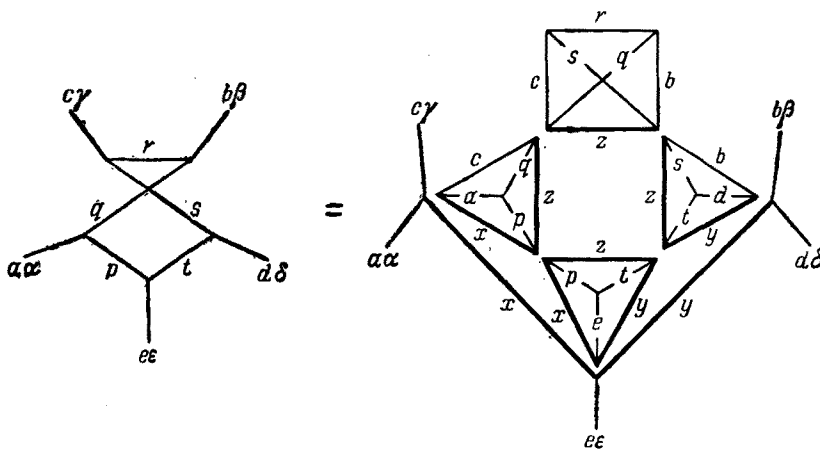




$$= (-1)^{p-t-b-a-d-e} \sum_{x\xi y\eta} (-1)^{x-\xi+y-\eta} \Pi_{xy}^2 \begin{pmatrix} a & b & x \\ \alpha & \beta & \xi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & d & y \\ -\xi & \delta & -\eta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y & c & e \\ \eta & \gamma & \epsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & x \\ r & p & q \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} c & e & y \\ r & p & x \\ s & t & d \end{Bmatrix}, \quad (16)$$

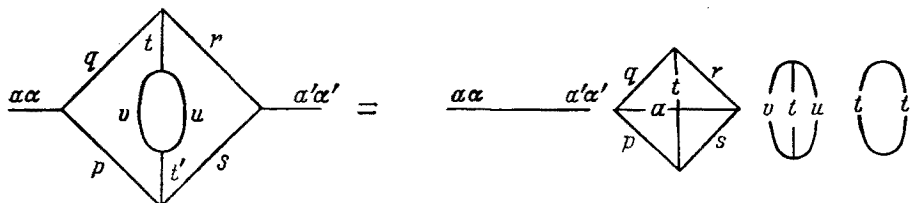


$$= (-1)^{r-t+p+e+d} \sum_{x\xi y\eta s} (-1)^{x-\xi+y-\eta+s} \Pi_{xyz}^2 \begin{pmatrix} a & c & x \\ \alpha & \gamma & \xi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & e & y \\ -\xi & \epsilon & -\eta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y & b & d \\ \eta & \beta & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & q & z \\ b & s & r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & c & x \\ z & p & q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & e & y \\ t & z & p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y & b & d \\ s & t & z \end{pmatrix}, \quad (17)$$

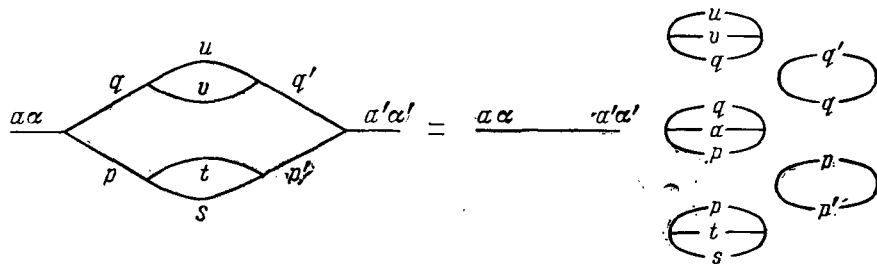


6. Суммы, содержащие шесть 3jm-символов

$$\sum_{\substack{\psi \mu \rho \sigma \\ \tau \nu \lambda}} (-1)^{p-\psi+q-x+r-p+\sigma-t-\tau+u-\nu+e-\mu+t-\lambda} \begin{pmatrix} p & a & q \\ \psi & -\alpha & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q & r & t' \\ -x & \rho & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t' & u & v \\ -\lambda & \nu & \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u & v & t \\ -\nu & -\mu & \tau \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r & a' & s \\ -\rho & a' & \sigma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s & p & t \\ -\sigma & -\psi & -\tau \end{pmatrix} = \\ = \frac{(-1)^{2t+a-\alpha}}{\Pi_{at}^2} \begin{Bmatrix} a & p & q \\ t & r & s \end{Bmatrix} \{tuv\} \delta_{\mu t'} \delta_{\sigma a'} \delta_{\alpha a'}, \quad (18)$$

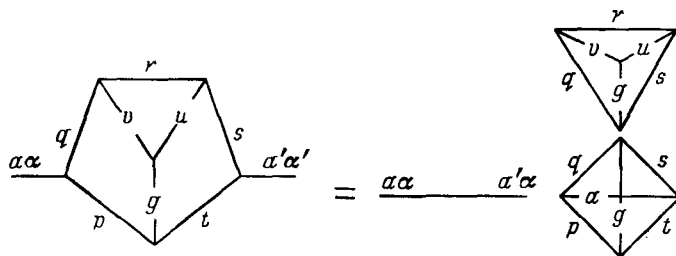


$$\sum_{\substack{\psi \mu \rho \sigma \\ \tau \nu \lambda}} (-1)^{p-\psi+q-x+q'-r+p'-\sigma+u-\nu+e-\mu+t-\tau+s-\lambda} \begin{pmatrix} u & v & q' \\ \nu & \mu & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u & v & q' \\ -\nu & -\mu & -\rho \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t & s & p \\ \tau & \lambda & \psi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t & s & p' \\ -\tau & -\lambda & -\sigma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q & p & a \\ x & \psi & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q' & p' & a' \\ -\rho & -\sigma & -\alpha' \end{pmatrix} = \\ = \frac{(-1)^{\alpha-a}}{\Pi_{apq}^2} \delta_{qq'} \delta_{pp'} \delta_{\sigma a'} \delta_{\alpha a'} \{uvq\} \{pts\} \{apq\}, \quad (19)$$



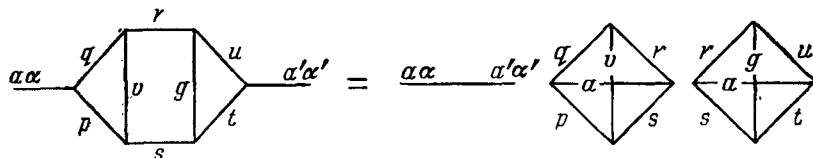
$$\sum_{\substack{\psi \kappa \rho \sigma \\ \tau \mu \nu \lambda}} (-1)^{p-\psi+q-x+r-\rho+\sigma+t-\tau+v-\mu+u-\nu+g-\lambda} \begin{pmatrix} a & q & p \\ -a & x & \psi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & t & g \\ -\psi & \tau & -\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g & u & v \\ \lambda & -\nu & \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v & r & q \\ -\mu & \rho & -x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r & u & s \\ -\rho & \nu & -\sigma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s & t & a' \\ \sigma & -\tau & a' \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{(-1)^{s-p-a-g}}{\Pi_a^2} \begin{Bmatrix} q & g & s \\ u & r & v \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} a & p & q \\ g & s & t \end{Bmatrix} \delta_{aa'} \delta_{aa'}, \quad (20)$$



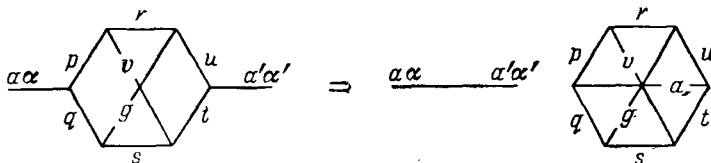
$$\sum_{\substack{\psi \kappa \rho \sigma \\ \nu \tau \mu \lambda}} (-1)^{p-\psi+q-x+r-\rho+\sigma+u-\nu+t-\tau+v-\mu+g-\lambda} \begin{pmatrix} p & a & q \\ \psi & a & -x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q & r & v \\ x & \rho & -\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v & s & p \\ \mu & -\sigma & -\psi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u & r & g \\ \nu & -\rho & -\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g & s & t \\ \lambda & \sigma & \tau \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t & a' & u \\ -\tau & -a' & -\nu \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{(-1)^{2g+a-\alpha}}{\Pi_a^2} \begin{Bmatrix} a & r & s \\ g & t & u \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} a & r & s \\ v & p & q \end{Bmatrix} \delta_{aa'} \delta_{aa'}, \quad (21)$$



$$\sum_{\substack{\psi \kappa \rho \sigma \\ \nu \tau \mu \lambda}} (-1)^{p-\psi+q-x+r-\rho+\sigma+u-\nu+t-\tau+v-\mu+g-\lambda} \begin{pmatrix} a & p & q \\ a & \psi & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q & g & s \\ -x & -\lambda & -\sigma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s & t & v \\ \sigma & \tau & \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v & p & r \\ -\mu & -\psi & -\rho \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r & g & u \\ \rho & \lambda & \nu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u & t & a' \\ -\nu & -\tau & -a' \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{(-1)^{a-\alpha}}{\Pi_a^2} \begin{Bmatrix} a & p & q \\ u & r & g \\ t & v & s \end{Bmatrix} \delta_{aa'} \delta_{aa'}, \quad (22)$$



$$\sum_{\substack{\psi \kappa \rho \sigma \\ \mu \sigma \lambda}} (-1)^{p-\psi+q-x+u-\nu+r-\rho+\sigma-\mu+s-\sigma+g-\lambda} \begin{pmatrix} p & a & q \\ \psi & a & -x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q & u & g \\ x & \nu & -\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g & v & s \\ \lambda & \mu & -\sigma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s & d & p \\ \sigma & \delta & -\psi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u & b & r \\ -\nu & \beta & \rho \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r & c & v \\ -\rho & \gamma & -\mu \end{pmatrix} =$$

$$(-1)^{s+b+u+v-q-a-d-\sigma} \sum_{x\xi} (-1)^{x-\xi} \Pi_x^2 \begin{pmatrix} a & x & d \\ a & -\xi & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & x & b \\ \gamma & \xi & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & x & d \\ s & p & q \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} c & x & b \\ u & r & v \\ s & g & q \end{Bmatrix} = \quad (23)$$

Diagrammatic equation (24) showing the decomposition of a square with internal lines into a product of a vertex and three triangles. The square has vertices labeled  $a\alpha$ ,  $b\beta$ ,  $d\delta$ , and  $c\gamma$ , and internal lines labeled  $q$ ,  $u$ ,  $p$ ,  $g$ ,  $r$ ,  $s$ , and  $v$ . The right side shows a vertex with lines  $a\alpha$ ,  $b\beta$ ,  $d\delta$ , and  $c\gamma$  meeting at a central point  $x$ , multiplied by three triangles with vertices  $(a, q, d)$ ,  $(q, g, u)$ , and  $(u, r, c)$ .

$$= (-1)^{v+u+r+p-g-a-c} \sum_{xy\eta} (-1)^{y-\eta} \Pi_{xy}^2 \begin{pmatrix} a & y & b \\ a & -\eta & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & y & c \\ \delta & \eta & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & y & b \\ r & u & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & y & c \\ r & v & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & p & q \\ g & u & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v & g & s \\ p & d & x \end{pmatrix}, \quad (24)$$

Diagrammatic equation (25) showing the decomposition of a square into a product of two triangles and a vertical line. The square has vertices labeled  $a\alpha$ ,  $b\beta$ ,  $d\delta$ , and  $c\gamma$ , and internal lines labeled  $q$ ,  $u$ ,  $p$ ,  $g$ ,  $r$ ,  $s$ , and  $v$ . The right side shows two triangles with vertices  $(q, a, p)$  and  $(g, u, s)$  on top, and  $(x, u, r)$  and  $(x, v, d)$  on bottom, multiplied by a vertical line with vertices  $a\alpha$ ,  $b\beta$ ,  $d\delta$ , and  $c\gamma$  and a central label  $y$ .

$$= (-1)^{r+s+d-q-c} \sum_{xy\eta} (-1)^{y-\eta+x} \Pi_{xy}^2 \begin{pmatrix} d & y & b \\ \delta & -\eta & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & y & c \\ a & \eta & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & y & b \\ r & u & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & y & c \\ r & v & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & p & q \\ x & d & u \\ v & s & g \end{pmatrix}, \quad (25)$$

Diagrammatic equation (26) showing the decomposition of a square into a product of a cube and a vertical line. The square has vertices labeled  $a\alpha$ ,  $b\beta$ ,  $d\delta$ , and  $c\gamma$ , and internal lines labeled  $q$ ,  $u$ ,  $p$ ,  $g$ ,  $r$ ,  $s$ , and  $v$ . The right side shows a cube with vertices  $(q, u, p)$ ,  $(g, v, s)$ , and  $(d, x, a)$ , multiplied by a vertical line with vertices  $b\beta$ ,  $d\delta$ ,  $c\gamma$ , and  $a\alpha$  and a central label  $y$ .

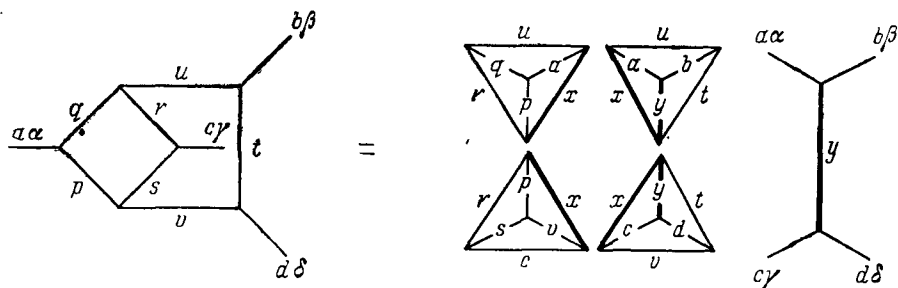
$$\sum_{\substack{\psi \lambda \mu \rho \\ \sigma \nu \xi}} (-1)^{p-\psi+q-x+s-\mu+r-\rho+s-\sigma+u-\nu+g-\lambda} \begin{pmatrix} p & a & q \\ \psi & a & -x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q & v & g \\ x & -\mu & -\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g & u & p \\ \lambda & \nu & -\psi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v & b & r \\ \mu & \beta & -\rho \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r & c & s \\ \rho & \gamma & -a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s & d & u \\ \sigma & \delta & -\nu \end{pmatrix} =$$

$$= (-1)^{a+b+c+u+s} \begin{pmatrix} a & p & q \\ g & v & u \end{pmatrix} \sum_{x\xi} (-1)^{x-\xi} \Pi_x^2 \begin{pmatrix} a & d & x \\ a & \delta & \xi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & b & c \\ -\xi & \beta & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & d & x \\ s & v & u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & b & c \\ r & s & v \end{pmatrix}, \quad (26)$$

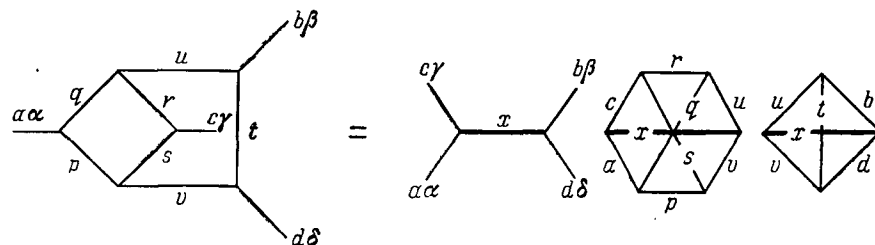
Diagrammatic equation showing the decomposition of a square with a diagonal into a product of two triangles and a vertical line. The square has vertices labeled  $b\beta$ ,  $c\gamma$ ,  $a\alpha$ , and  $d\delta$ , and internal lines labeled  $r$ ,  $u$ ,  $v$ ,  $g$ ,  $p$ ,  $q$ , and  $s$ . The right side shows two triangles with vertices  $(r, b, u)$  and  $(g, p, v)$  on top, and  $(x, v, s)$  and  $(x, u, d)$  on bottom, multiplied by a vertical line with vertices  $b\beta$ ,  $c\gamma$ ,  $a\alpha$ , and  $d\delta$  and a central label  $x$ .

$$\sum_{\substack{\psi \kappa \rho \sigma \\ \tau \nu - \mu}} (-1)^{p-\psi+q-x+r-p+s-\sigma+t-\tau+u-\nu+\theta-\mu} \begin{pmatrix} p & a & q \\ \psi & a & -x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q & u & r \\ x & \nu & -\rho \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r & c & s \\ \rho & \gamma & -\sigma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s & v & p \\ \sigma & \mu & -\psi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u & b & t \\ -\nu & \beta & -\tau \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t & d & v \\ \tau & \delta & -\mu \end{pmatrix} =$$

$$= (-1)^{q+\theta+t-s-d+2u} \sum_{xy\eta} (-1)^{x+y-\eta} \Pi_{xy}^2 \begin{pmatrix} a & b & y \\ a & \beta & -\eta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y & c & d \\ \eta & \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & r & x \\ c & v & s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & r & x \\ u & a & q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & y \\ t & x & u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y & c & d \\ v & t & x \end{pmatrix} = \quad (27)$$

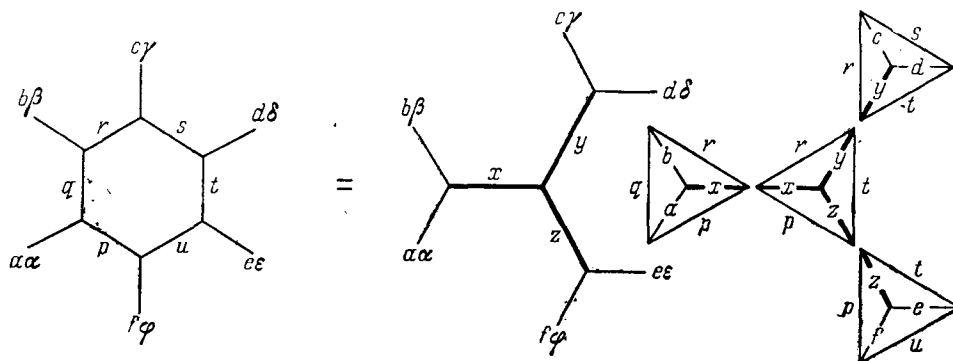


$$= (-1)^{q+u-a-s-b-d} \sum_{x\xi} (-1)^{x-\xi} \Pi_k^2 \begin{pmatrix} a & x & c \\ a & -\xi & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & x & b \\ \delta & \xi & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & x & b \\ u & t & v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & x & c \\ p & v & s \\ q & u & r \end{pmatrix}, \quad (28)$$

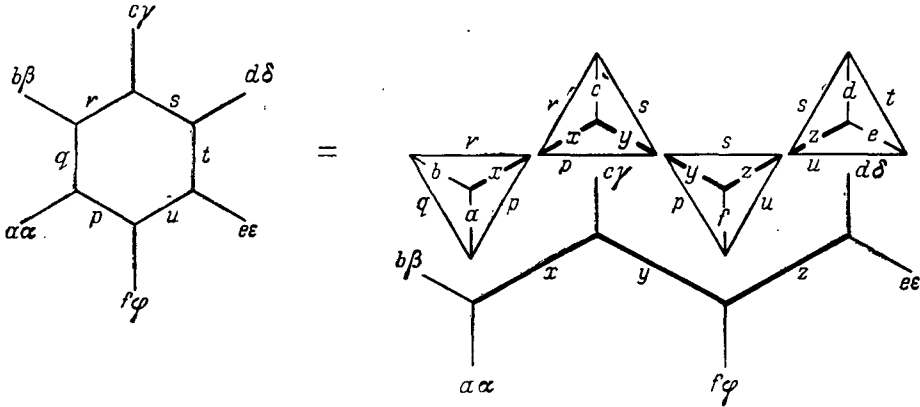


$$\sum_{\substack{\psi \kappa \rho \\ \sigma \tau \nu}} (-1)^{p-\psi+q-x+r-p+s-\sigma+t-\tau+u-\nu} \begin{pmatrix} p & a & q \\ \psi & a & -x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q & b & r \\ x & \beta & -\rho \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r & c & s \\ \rho & \gamma & -\sigma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s & d & t \\ \sigma & \delta & -\tau \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t & e & u \\ \tau & \epsilon & -\nu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u & f & p \\ \nu & \varphi & -\psi \end{pmatrix} =$$

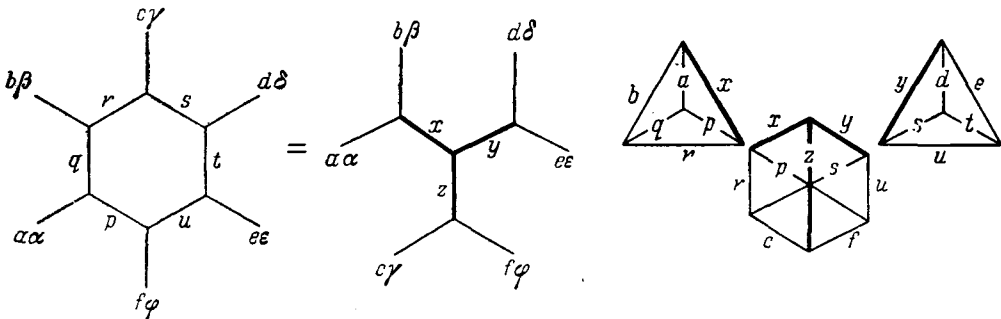
$$= \sum_{\substack{xy\eta \\ \xi\eta\zeta}} (-1)^{x-\xi+y-\eta+z-\zeta} \Pi_{xy\varphi}^2 \begin{pmatrix} a & x & b \\ a & \xi & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & y & d \\ \eta & \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & z & f \\ \epsilon & \zeta & \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y & z \\ -\xi & -\eta & -\zeta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & x & b \\ r & q & p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & y & d \\ t & s & r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & z & f \\ p & u & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y & z \\ t & p & r \end{pmatrix} = \quad (29)$$



$$= (-1)^{2p-u-r+a+b+d+e-e} \sum_{\substack{xyz \\ \xi\eta\zeta}} (-1)^x \Pi_{xyz}^2 (-1)^{x-\xi+y-\eta+s-\zeta} \times \\ \times \begin{pmatrix} a & b & x \\ \alpha & \beta & -\xi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & c & y \\ \xi & \gamma & -\eta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y & f & z \\ \eta & \varphi & -\zeta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z & d & e \\ \zeta & \delta & \varepsilon \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} a & b & x \\ r & p & q \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} x & c & y \\ s & p & r \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} y & f & z \\ u & s & p \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} z & d & e \\ t & u & s \end{Bmatrix} = \quad (30)$$



$$= (-1)^{u-d-c-e-r} \sum_{\substack{xyz \\ \xi\eta\zeta}} (-1)^{x-\xi+y-\eta+s-\zeta} \Pi_{xyz}^2 \begin{pmatrix} a & x & b \\ \alpha & \xi & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & y & d \\ \varepsilon & \eta & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & z & f \\ \gamma & \zeta & \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y & z \\ -\xi & -\eta & -\zeta \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} a & x & b \\ r & q & p \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} e & y & d \\ s & t & u \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} x & y & z \\ p & u & f \\ r & s & c \end{Bmatrix}, \quad (31)$$



12.2. СУММЫ ПРОИЗВЕДЕНИЙ 6j- И 9j-СИМВОЛОВ

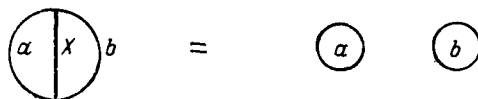
Ниже приведены суммы произведений 3nj-символов. Формулы сопровождаются графическими иллюстрациями, поясняющими связь моментов, входящих в эти формулы. Формулы разбиты на группы по числу сомножителей в произведении, т. е. по числу 3nj-символов, стоящих под знаком суммы. Эти группы расположены в порядке возрастания числа сомножителей. Внутри каждой группы суммы идут в порядке увеличения числа индексов суммирования, а при одинаковом числе индексов суммирования — в порядке увеличения числа 9j-символов. Индексы суммирования напечатаны заглавными буквами. Они принимают все возможные значения, допустимые условиями треугольника. Так же как в 12.1, используется обозначение

$$\Pi_{ab\dots f} = \sqrt{(2a+1)(2b+1)\dots(2f+1)}.$$

Некоторые из приведенных ниже сумм содержатся в работах [24, 44].

1. Суммы 3nj-символов

$$\sum_X \Pi_X^2 \{abX\} = \Pi_{ab}^2, \quad (1)$$



$$\sum_X (-1)^{2a+X} \Pi_X^2 \{aaX\} = \Pi_a^2, \quad (2)$$

$$\text{Circle with vertical line } \begin{matrix} a \\ | \\ X \end{matrix} = \text{Circle with } a$$

$$\sum_X \Pi_X^2 \left\{ \begin{matrix} a & b & X \\ a & b & c \end{matrix} \right\} = (-1)^{2a} \{abc\}, \quad (3)$$

$$\text{Diamond with } \begin{matrix} a & & b \\ & X & \\ c & & a \end{matrix} = \text{Circle with } \begin{matrix} a \\ c \\ b \end{matrix}$$

$$\sum_X (-1)^{a+b+X} \Pi_X^2 \left\{ \begin{matrix} a & b & X \\ b & a & c \end{matrix} \right\} = \Pi_{ab} \delta_{ca}, \quad (4)$$

$$\text{Diamond with } \begin{matrix} a & & b \\ & X & \\ c & & a \end{matrix} = \text{Circle } a \text{ --- } c \text{ --- Circle } b$$

$$\sum_X \Pi_X^2 \left\{ \begin{matrix} a & b & e \\ c & d & f \\ e & f & X \end{matrix} \right\} = \frac{\delta_{bc}}{\Pi_b^2} \{abe\} \{bdf\}, \quad (5)$$

$$\text{Hexagon with } \begin{matrix} e & & f \\ & X & \\ c & & d \\ & & \\ e & & f \end{matrix} = \text{Circle } \begin{matrix} b \\ e \end{matrix} \text{ Rectangle } \begin{matrix} b \\ c \end{matrix} \text{ Circle } \begin{matrix} f \\ d \end{matrix}$$

$$\sum_X (-1)^{a+b+c+d-X} \Pi_X^2 \left\{ \begin{matrix} a & b & e \\ c & d & f \\ f & e & X \end{matrix} \right\} = \frac{\delta_{ad}}{\Pi_a^2} \{dbe\} \{acf\}, \quad (6)$$

$$\text{Hexagon with } \begin{matrix} e & & f \\ & X & \\ c & & d \\ & & \\ f & & e \end{matrix} = \text{Circle } \begin{matrix} c \\ f \end{matrix} \text{ Rectangle } \begin{matrix} a \\ d \end{matrix} \text{ Circle } \begin{matrix} e \\ b \end{matrix}$$

## 2. Суммы произведений двух $3nj$ -символов

### а. Один индекс суммирования

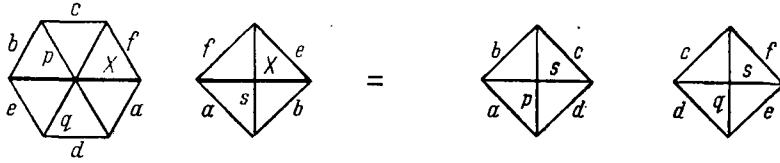
$$\sum_X \Pi_X^2 \left\{ \begin{matrix} a & b & X \\ c & d & p \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} c & d & X \\ a & b & q \end{matrix} \right\} = \frac{\delta_{pq}}{\Pi_p^2} \{adp\} \{bcp\}, \quad (7)$$

$$\text{Diamond } \begin{matrix} b & & c \\ & X & \\ a & p & d \end{matrix} \text{ Diamond } \begin{matrix} c & & b \\ & X & \\ d & q & a \end{matrix} = \text{Circle } \begin{matrix} d \\ p \end{matrix} \text{ Rectangle } \begin{matrix} p \\ q \end{matrix} \text{ Circle } \begin{matrix} c \\ b \end{matrix}$$

$$\sum_X (-1)^{p+q+X} \Pi_X^2 \left\{ \begin{matrix} a & b & X \\ c & d & p \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} c & d & X \\ b & a & q \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} c & a & q \\ d & b & p \end{matrix} \right\}, \quad (8)$$

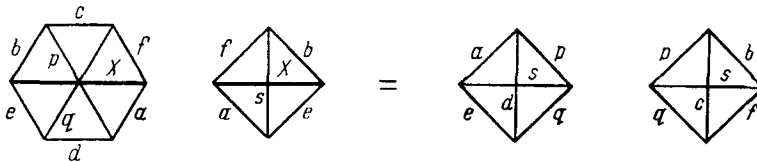
$$\text{Diamond } \begin{matrix} b & & c \\ & X & \\ a & p & d \end{matrix} \text{ Diamond } \begin{matrix} c & & a \\ & X & \\ d & q & b \end{matrix} = \text{Square with } \begin{matrix} c \\ & & \\ & q & \\ d \end{matrix}$$

$$\sum_X \Pi_X^2 \left\{ \begin{matrix} a & f & X \\ d & q & e \\ p & c & b \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} a & f & X \\ e & b & s \end{matrix} \right\} = (-1)^{2s} \left\{ \begin{matrix} a & b & s \\ c & d & p \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} c & d & s \\ e & f & q \end{matrix} \right\}, \quad (9)$$

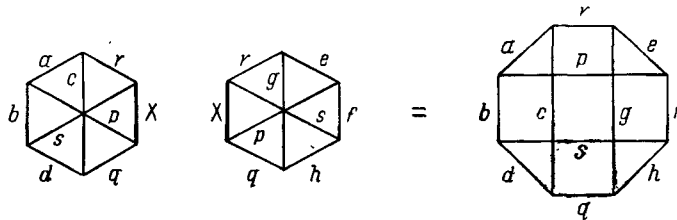


$$\sum_X (-1)^{R+X} \Pi_X^2 \left\{ \begin{matrix} a & f & X \\ d & q & e \\ p & c & b \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} a & f & X \\ b & e & s \end{matrix} \right\} = (-1)^{2s} \left\{ \begin{matrix} p & q & s \\ e & a & d \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} p & q & s \\ f & b & c \end{matrix} \right\}, \quad (10)$$

где  $R \equiv a + b + c + d + e + f + p + q$ ,



$$\sum_X \Pi_X^2 \left\{ \begin{matrix} a & b & p \\ c & d & q \\ r & s & X \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} e & f & p \\ g & h & q \\ r & s & X \end{matrix} \right\} = (-1)^{b+g-c-f} \left[ \begin{matrix} a & e & d & h \\ b & c & f & g \\ p & s & r & q \end{matrix} \right], \quad (11)$$



где  $\left[ \begin{matrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \end{matrix} \right]$  — 12j-символ II рода [45], определяемый соотношением (33). Этот символ равен нулю, если не

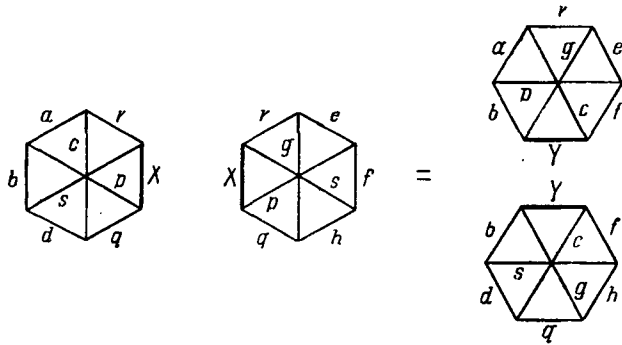
выполняются условия треугольника хотя бы в одной из восьми триад:  $\{a_1 b_1 c_1\}$ ,  $\{a_3 b_1 c_2\}$ ,  $\{a_1 b_2 c_3\}$ ,  $\{a_3 b_2 c_4\}$ ,  $\{a_2 b_3 c_1\}$ ,  $\{a_4 b_3 c_2\}$ ,  $\{a_2 b_4 c_3\}$ ,  $\{a_4 b_4 c_4\}$ , или не выполняются условия четырехугольника хотя бы в одной из тетрад:  $\{a_1 a_2 a_3 a_4\}$ ,  $\{b_1 b_2 b_3 b_4\}$ ,  $\{c_1 c_2 c_3 c_4\}$ . Это означает, что сумма (11) обращается в нуль, когда хоть один из моментов в соответствующей триаде или тетраде оказывается больше алгебраической суммы всех остальных моментов, либо полная сумма этих моментов есть полуцелое число.

12 j-символ II рода обладает следующими свойствами симметрии:

$$\left[ \begin{matrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \end{matrix} \right] = \left[ \begin{matrix} a_4 & a_3 & a_2 & a_1 \\ b_4 & b_3 & b_2 & b_1 \\ c_4 & c_3 & c_2 & c_1 \end{matrix} \right] = \left[ \begin{matrix} b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \end{matrix} \right] = \left[ \begin{matrix} c_4 & c_2 & c_3 & c_1 \\ b_4 & b_2 & b_3 & b_1 \\ a_4 & a_2 & a_3 & a_1 \end{matrix} \right] = \left[ \begin{matrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_2 & b_1 & b_4 & b_3 \\ c_3 & c_4 & c_1 & c_2 \end{matrix} \right].$$

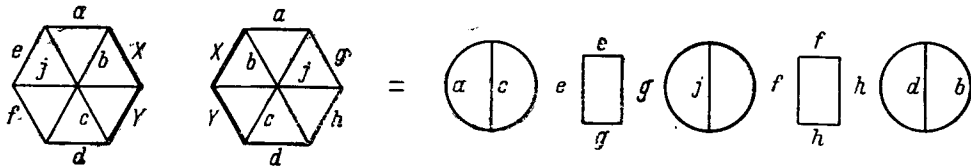
Используя эти свойства, можно преобразовать сумму (11) к существенно иному виду. Например:

$$(-1)^{p+q-r-s} \sum_X \Pi_X^2 \left\{ \begin{matrix} a & b & p \\ c & d & q \\ r & s & X \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} e & f & p \\ g & h & q \\ r & s & X \end{matrix} \right\} = (-1)^{b+g-c-f} \sum_Y \Pi_Y^2 \left\{ \begin{matrix} a & p & b \\ r & e & g \\ c & f & Y \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} d & s & b \\ q & h & g \\ c & f & Y \end{matrix} \right\}, \quad (12)$$

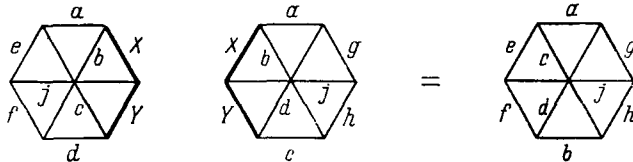


б. Два индекса суммирования

$$\sum_{XY} \Pi_{XY}^2 \begin{Bmatrix} a & b & X \\ c & d & Y \\ e & f & j \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} a & b & X \\ c & d & Y \\ g & h & j \end{Bmatrix} = \frac{\delta_{eg} \delta_{fh}}{\Pi_{ef}^2} \{ace\} \{bdh\} \{gfj\}, \quad (13)$$

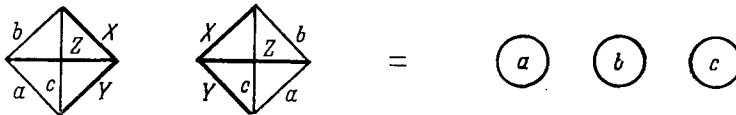


$$\sum_{XY} (-)^Y \Pi_{XY}^2 \begin{Bmatrix} a & b & X \\ c & d & Y \\ e & f & j \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} a & b & X \\ d & c & Y \\ g & h & j \end{Bmatrix} = (-)^{2b+f+h} \begin{Bmatrix} a & d & g \\ c & b & h \\ e & f & j \end{Bmatrix}, \quad (14)$$

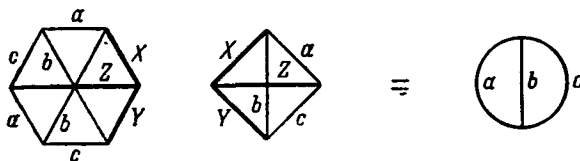


в. Три индекса суммирования

$$\sum_{XYZ} \Pi_{XYZ}^2 \begin{Bmatrix} X & Y & Z \\ a & b & c \end{Bmatrix}^2 = \Pi_{abc}^2, \quad (15)$$

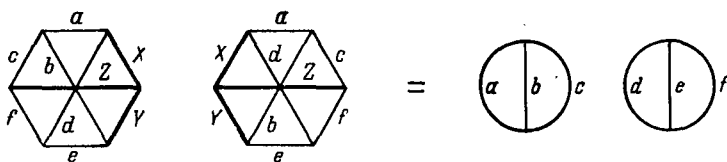


$$\sum_{XYZ} \Pi_{XYZ}^2 \begin{Bmatrix} X & Y & Z \\ a & b & c \\ b & c & a \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} X & Y & Z \\ c & a & b \end{Bmatrix} = \{abc\}, \quad (16)$$





$$\sum_{XYZ} \Pi_{XYZ}^2 \begin{Bmatrix} X & Y & Z \\ a & b & c \\ d & e & f \end{Bmatrix} = \{abc\} \{def\}, \quad (17)$$

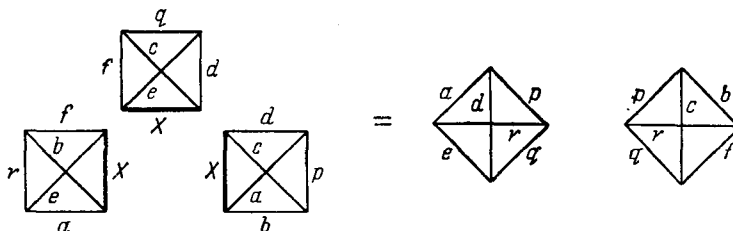


### 3. Суммы произведений трех 3nj-символов

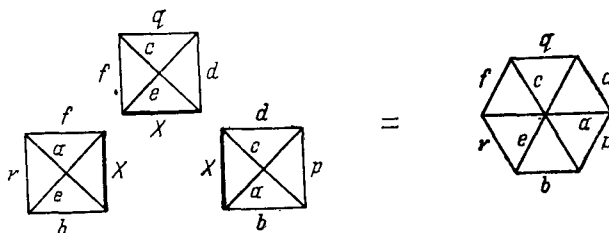
а. Один индекс суммирования

$$\sum_X (-1)^{R+X} \Pi_X^2 \begin{Bmatrix} a & b & X \\ c & d & p \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} c & d & X \\ e & f & q \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} e & f & X \\ b & a & r \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} p & q & r \\ e & a & d \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} p & q & r \\ f & b & c \end{Bmatrix}, \quad (18)$$

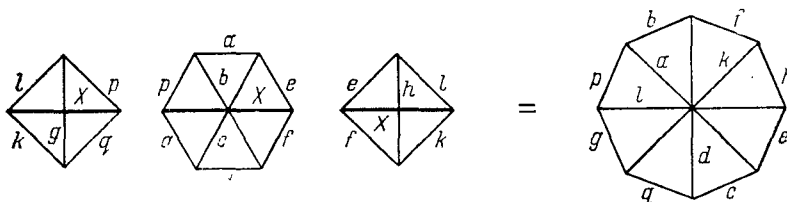
где  $R \equiv a + b + c + d + e + f + p + q + r$ ,



$$\sum_X (-1)^{2X} \Pi_X^2 \begin{Bmatrix} a & b & X \\ c & d & p \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} c & d & X \\ e & f & q \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} e & f & X \\ a & b & r \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} a & f & r \\ d & q & e \\ p & c & b \end{Bmatrix}, \quad (19)$$



$$(-1)^{-e-f+p+q} \sum_X \Pi_X^2 \begin{Bmatrix} a & b & p \\ c & d & q \\ e & f & X \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} p & q & X \\ k & l & g \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} e & f & X \\ k & l & h \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} p & b & f & h \\ a & d & k & l \\ e & c & q & g \end{Bmatrix}, \quad (20)$$



где  $\begin{Bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \end{Bmatrix}$  — 12j-символ I рода [45], определяемый соотношением (32). Этот символ равен нулю, если не

выполняется условие треугольника хотя бы в одной из восьми триад:  $\{a_1 b_1 a_2\}$ ,  $\{a_2 b_2 c_3\}$ ,  $\{a_3 b_3 a_4\}$ ,  $\{a_4 b_4 c_1\}$ ,  $\{c_1 b_1 c_2\}$ ,  $\{c_2 b_2 c_3\}$ ,  $\{c_3 b_3 c_4\}$ ,  $\{c_4 b_4 a_1\}$ , или не выполняются условия четырехугольника хотя бы в одной из двух тетрад:

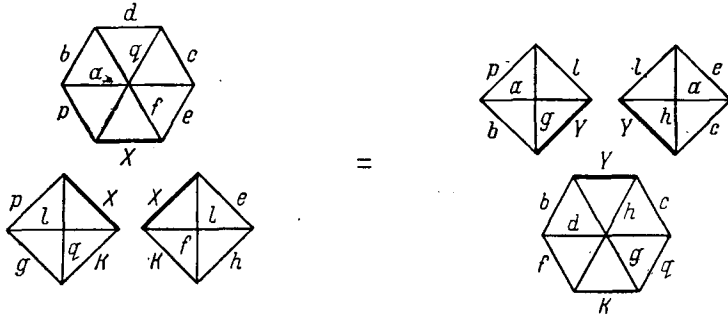
$\{a_1 a_3 c_1 c_3\}, \{a_2 a_4 c_2 c_4\}$ . Это означает, что сумма (20) обращается в нуль, когда хотя один из моментов  $j_i$  будет превосходить алгебраическую сумму всех остальных моментов в соответствующей триаде или тетраде.

12  $f$ -Символ I рода обладает следующими свойствами симметрии:

$$\begin{Bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} a_2 & a_3 & a_4 & c_1 \\ b_2 & b_3 & b_4 & b_1 \\ c_2 & c_3 & c_4 & a_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} a_4 & a_3 & a_2 & a_1 \\ b_3 & b_2 & b_1 & b_4 \\ c_4 & c_3 & c_2 & c_1 \end{Bmatrix}.$$

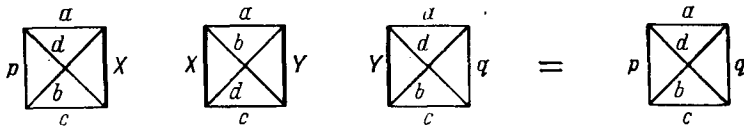
Используя эти свойства симметрии 12 $f$ -символа I рода, можно преобразовать сумму (20) к существенно иным видам. Имеется  $16=8 \times 2$  различных вариантов. Например:

$$(-1)^{p+q-e-f} \sum_X \Pi_X^2 \begin{Bmatrix} a & b & p \\ c & d & q \\ e & f & X \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} p & q & X \\ k & l & g \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} e & f & X \\ k & l & h \end{Bmatrix} = (-1)^{b+g-c-h} \sum_Y \Pi_Y^2 \begin{Bmatrix} d & f & b \\ q & k & g \\ c & h & Y \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} b & g & Y \\ l & a & p \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} c & h & Y \\ l & a & e \end{Bmatrix}. \quad (21)$$

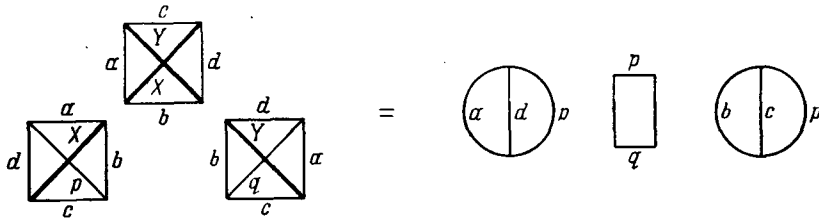


б. Два индекса суммирования

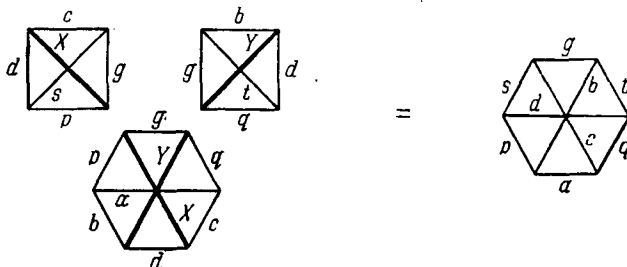
$$\sum_{XY} \Pi_{XY}^2 \begin{Bmatrix} a & b & X \\ c & d & p \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} c & d & X \\ a & b & Y \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} a & b & q \\ c & d & Y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} a & b & q \\ c & d & p \end{Bmatrix}, \quad (22)$$



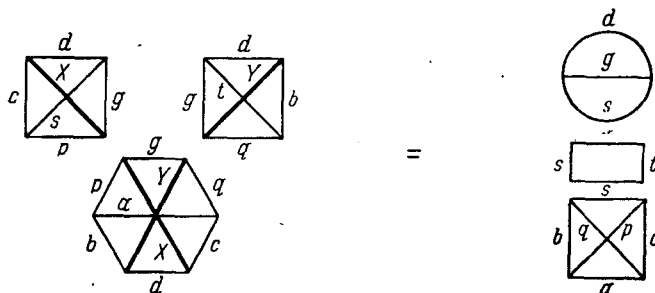
$$\sum_{XY} (-1)^{X+Y+p} \Pi_{XY}^2 \begin{Bmatrix} a & b & X \\ c & d & p \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} a & c & Y \\ d & b & X \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} a & d & q \\ b & c & Y \end{Bmatrix} = \frac{\delta_{pq}}{\Pi_p^2} \{adp\} \{bcp\}, \quad (23)$$



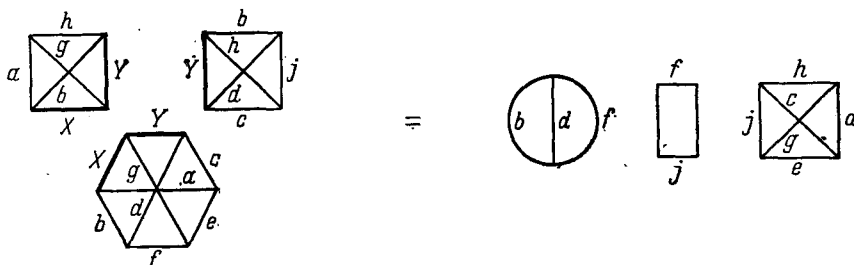
$$\sum_{XY} (-1)^{X+Y+2a-s-t} \Pi_{XY}^2 \begin{Bmatrix} a & b & p \\ c & d & X \\ q & Y & g \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} c & d & X \\ p & g & s \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} b & d & Y \\ q & g & t \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} a & b & p \\ c & g & s \\ q & t & d \end{Bmatrix}, \quad (24)$$



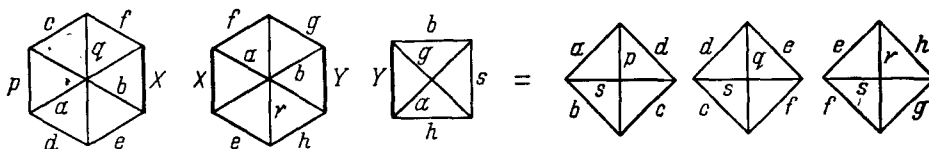
$$\sum_{XY} \Pi_{XY}^2 \begin{Bmatrix} a & b & p \\ c & d & X \\ q & Y & g \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} c & d & X \\ g & p & s \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} b & d & Y \\ g & q & t \end{Bmatrix} = (-1)^{2s} \frac{\delta_{st}}{\Pi_s^2} \{dgs\} \begin{Bmatrix} a & b & p \\ s & c & q \end{Bmatrix}, \quad (25)$$



$$\sum_{XY} \Pi_{XY}^2 \begin{Bmatrix} a & b & X \\ c & d & Y \\ e & f & g \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} a & b & X \\ Y & g & h \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} c & d & Y \\ b & h & j \end{Bmatrix} = (-1)^{2h} \frac{\delta_{jj}}{\Pi_j^2} \{bdf\} \begin{Bmatrix} e & j & g \\ h & a & c \end{Bmatrix}, \quad (26)$$

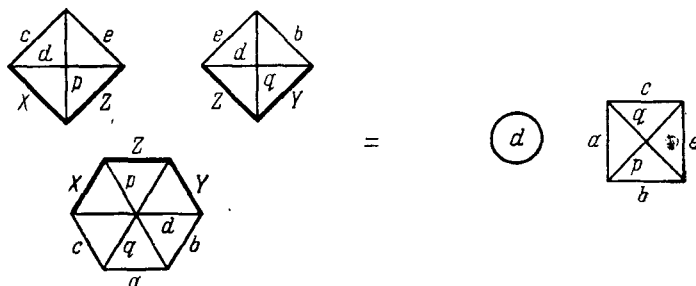


$$\sum_{XY} \Pi_{XY}^2 \begin{Bmatrix} a & f & X \\ d & g & e \\ p & c & b \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} a & f & X \\ h & r & e \\ Y & g & b \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} a & h & Y \\ g & b & s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} a & b & s \\ c & d & p \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} c & d & s \\ e & f & q \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} e & f & s \\ g & h & r \end{Bmatrix}, \quad (27)$$

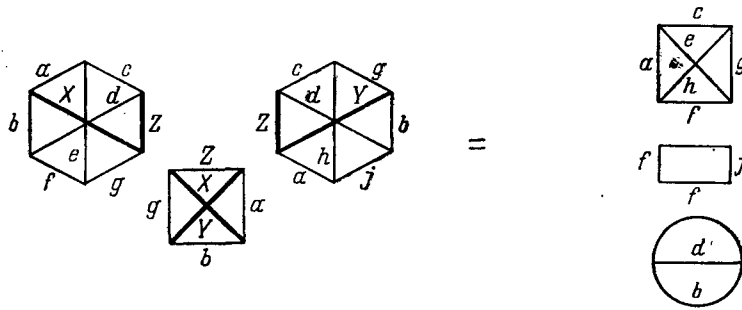


**в. Три индекса суммирования**

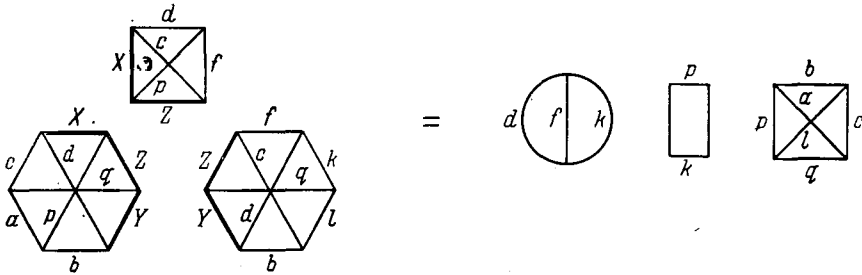
$$\sum_{XYZ} \Pi_{XYZ}^2 \begin{Bmatrix} a & b & p \\ c & d & X \\ q & Y & Z \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} p & X & Z \\ d & e & c \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} q & Y & Z \\ d & e & b \end{Bmatrix} = (-1)^{2s} \Pi_d^2 \begin{Bmatrix} a & b & p \\ e & c & q \end{Bmatrix}, \quad (28)$$



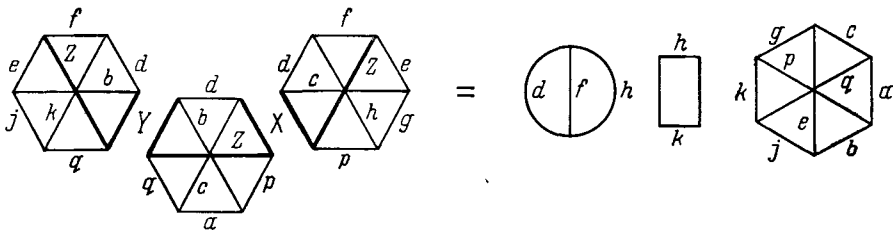
$$\sum_{XYZ} (-1)^{X+Y+e-h} \Pi_{XYZ}^2 \begin{Bmatrix} a & b & X \\ c & d & Z \\ e & f & g \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} g & b & Y \\ c & d & Z \\ h & j & a \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} a & b & X \\ g & Z & Y \end{Bmatrix} = \frac{\delta_{jj}}{\Pi_j^2} \{bdf\} \begin{Bmatrix} e & f & g \\ h & c & a \end{Bmatrix}, \quad (29)$$



$$\sum_{XYZ} (-1)^{x+f-a-l} \Pi_{XYZ}^2 \begin{Bmatrix} a & b & p \\ c & d & X \\ q & Y & Z \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} b & d & Y \\ c & f & Z \\ l & k & q \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} p, X & Z \\ c & f & d \end{Bmatrix} = \frac{\delta_{pk}}{\Pi_k^2} \{dfp\} \begin{Bmatrix} a & b & p \\ l & q & c \end{Bmatrix}, \quad (30)$$



$$\sum_{XYZ} \Pi_{XYZ}^2 \begin{Bmatrix} a & b & p \\ c & d & X \\ q & Y & Z \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} c & d & X \\ e & f & Z \\ g & h & p \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} b & d & Y \\ e & f & Z \\ j & k & q \end{Bmatrix} = \frac{\delta_{hk}}{\Pi_h^2} (dfh) \begin{Bmatrix} a & b & p \\ c & e & g \\ q & j & h \end{Bmatrix}, \quad (31)$$

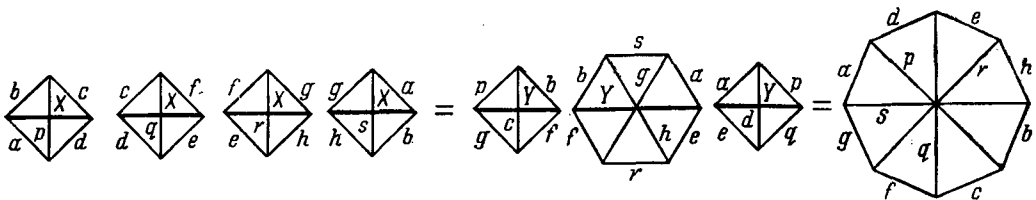


#### 4. Суммы произведения четырех $3nj$ -символов

а. Один индекс суммирования

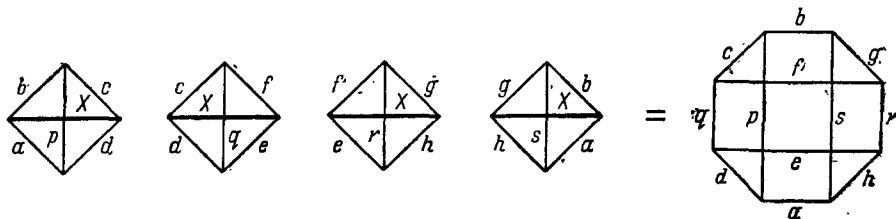
$$\begin{aligned} & \sum_X (-1)^{R-X} \Pi_X^2 \begin{Bmatrix} a & b & X \\ c & d & p \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} c & d & X \\ e & f & q \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} e & f & X \\ g & h & r \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} g & h & X \\ b & a & s \end{Bmatrix} = \\ & = \sum_Y (-1)^{2Y+a+b+c+f} \Pi_Y^2 \begin{Bmatrix} s & h & b \\ g & r & f \\ a & e & Y \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} b & f & Y \\ q & p & c \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} a & e & Y \\ q & p & d \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} a & d & e & h \\ p & q & r & s \\ b & c & f & g \end{Bmatrix}, \end{aligned} \quad (32)$$

где  $R \equiv a + b + c + d + e + f + g + h + p + q + r + s$ ,



Свойства симметрии 12j-символов I рода указаны на стр. 398.

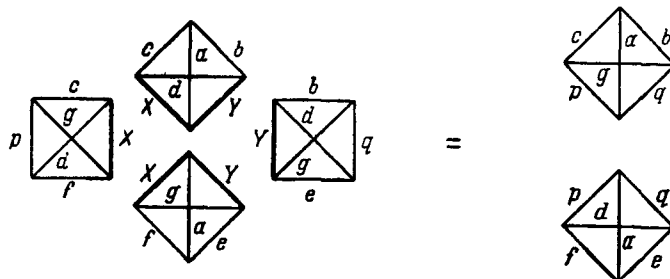
$$\sum_X \Pi_X^2 \begin{Bmatrix} a & b & X \\ c & d & p \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} c & d & X \\ e & f & q \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} e & f & X \\ g & h & r \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} g & h & X \\ a & b & s \end{Bmatrix} = \sum_X \Pi_X^2 \begin{Bmatrix} a & f & X \\ d & q & e \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} a & f & X \\ h & r & e \end{Bmatrix} = (-1)^{-p+q-r+s} \begin{Bmatrix} a & b & e & f \\ d & h & c & g \\ p & q & s & r \end{Bmatrix}, \quad (33)$$



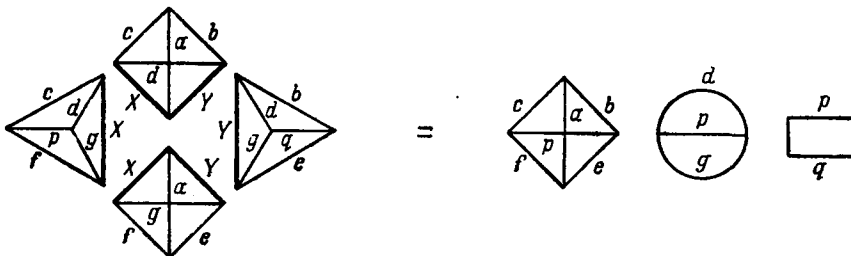
Свойства симметрии 12j-символов II рода указаны на стр. 395.

б. Два индекса суммирования

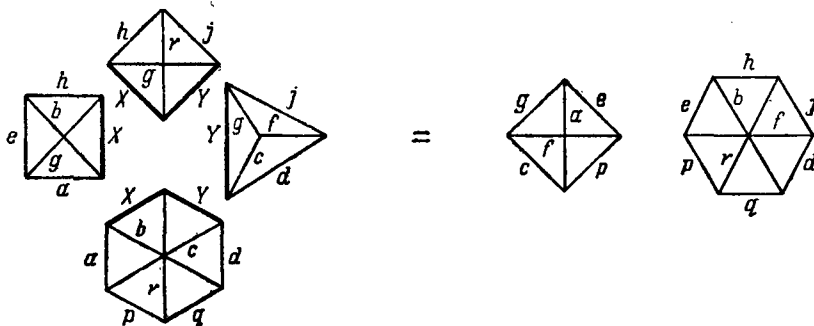
$$\sum_{XY} \Pi_{XY}^2 \begin{Bmatrix} a & b & c \\ d & X & Y \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} a & e & f \\ g & X & Y \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} c & g & p \\ f & d & X \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} b & g & q \\ e & d & Y \end{Bmatrix} = (-1)^{2(e+e)} \begin{Bmatrix} a & b & c \\ g & p & q \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} a & e & f \\ d & p & q \end{Bmatrix}, \quad (34)$$



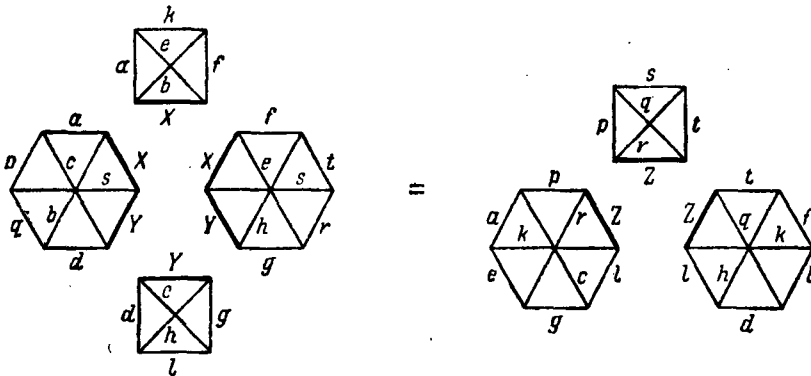
$$\sum_{XY} (-1)^{X+Y} \Pi_{XY}^2 \begin{Bmatrix} a & b & c \\ d & X & Y \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} a & e & f \\ g & X & Y \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} c & f & p \\ g & d & X \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} b & e & q \\ g & d & Y \end{Bmatrix} = (-1)^{a+b+c+d+e+f-g-p} \frac{\delta_{pq}}{\Pi_p^2} \begin{Bmatrix} a & b & c \\ p & f & e \end{Bmatrix}, \quad (35)$$



$$\sum_{XY} (-1)^Y \Pi_{XY}^2 \begin{Bmatrix} a & b & X \\ c & d & Y \\ p & q & r \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} X & Y & r \\ j & h & g \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} a & b & X \\ h & g & e \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} c & d & Y \\ j & g & f \end{Bmatrix} = (-1)^{a-b+d+e-j-p+r} \begin{Bmatrix} e & b & h \\ f & d & j \\ p & q & r \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} a & c & p \\ f & e & g \end{Bmatrix}, \quad (36)$$

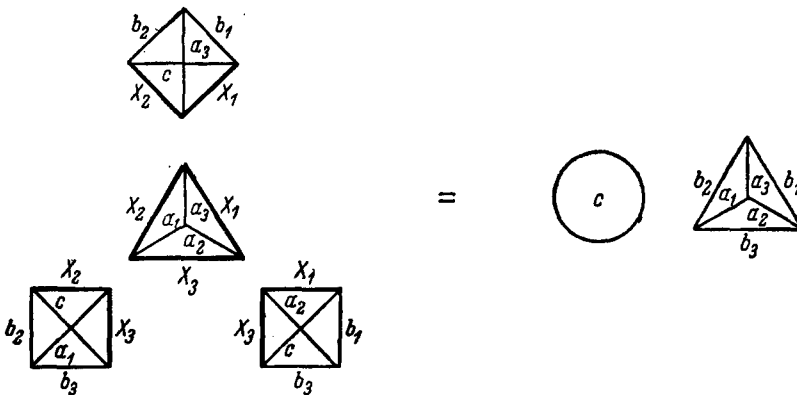


$$\sum_{XY} (-1)^{X+Y} \Pi_{XY}^2 \begin{Bmatrix} a & b & X \\ c & d & Y \\ p & q & s \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} e & f & X \\ g & h & Y \\ r & t & s \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} a & b & X \\ f & e & k \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} c & d & Y \\ h & g & l \end{Bmatrix} = (-1)^{k+l+a+c+p-s-h-t-f} \sum_Z (-1)^Z \Pi_Z^2 \begin{Bmatrix} c & g & l \\ a & e & k \\ p & r & Z \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} f & b & k \\ h & d & l \\ t & q & Z \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} p & r & Z \\ t & q & s \end{Bmatrix}, \quad (37)$$

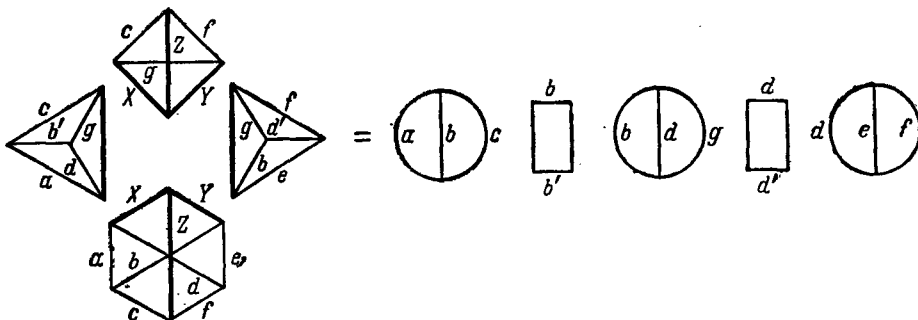


в. Три индекса суммирования

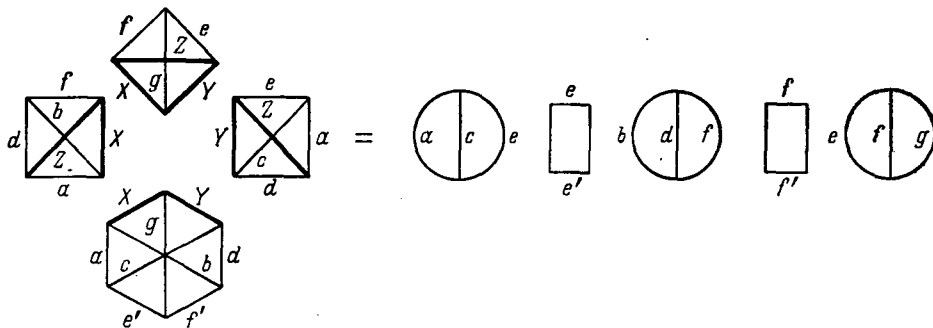
$$\sum_{X_1, X_2, X_3} (-1)^{X_1+X_2+X_3+a_1+a_2+a_3+b_1+b_2+b_3+c} \Pi_{X_1, X_2, X_3}^2 \begin{Bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ X_1 & X_2 & X_3 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 & b_2 & b_3 \\ c & X_3 & X_2 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} a_2 & b_3 & b_1 \\ c & X_1 & X_3 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} a_3 & b_1 & b_2 \\ c & X_2 & X_1 \end{Bmatrix} = \Pi_2^2 \begin{Bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{Bmatrix}, \quad (38)$$



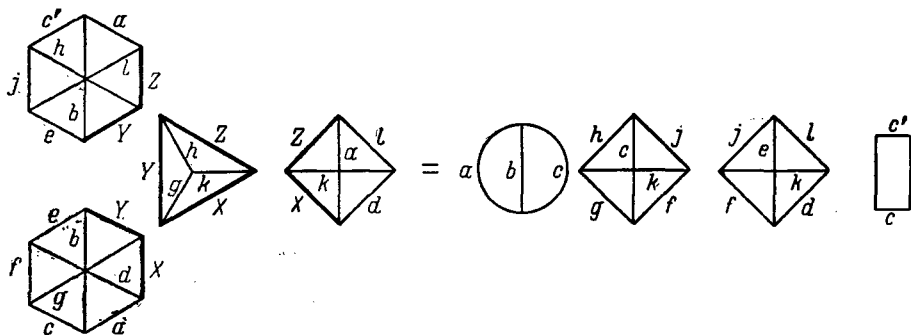
$$\sum_{XYZ} \Pi_{XYZ}^2 \begin{Bmatrix} X & Y & Z \\ d & e & f \\ a & b & c \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} X & Y & Z \\ f & c & g \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} X & a & d \\ b' & g & c \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} Y & b & e \\ d' & f & g \end{Bmatrix} = (-1)^{2(b+d)} \frac{\delta_{bb'} \delta_{dd'}}{\Pi_{bd}^2} (abc) (def) (bdg), \quad (39)$$



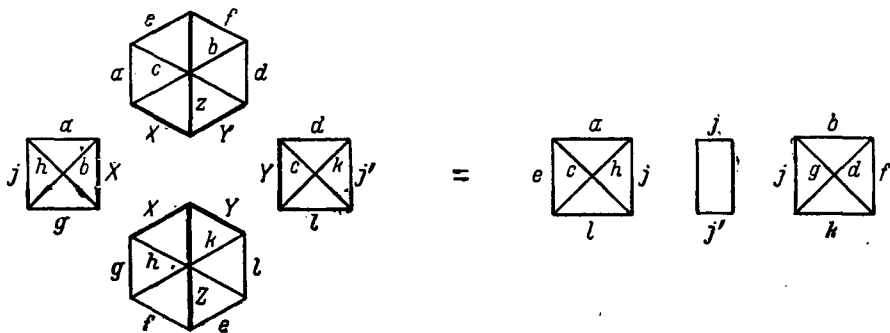
$$\sum_{XYZ} (-1)^{2Z} \Pi_{XYZ}^2 \begin{Bmatrix} a & b & X \\ c & d & Y \\ e' & f' & g \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} a & b & X \\ f & Z & d \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} c & d & Y \\ Z & e & a \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} e & f & g \\ X & Y & Z \end{Bmatrix} = \frac{\delta_{aa'} \delta_{ff'}}{\Pi_{ef}^2} (ace) (bdf) (egf), \quad (40)$$



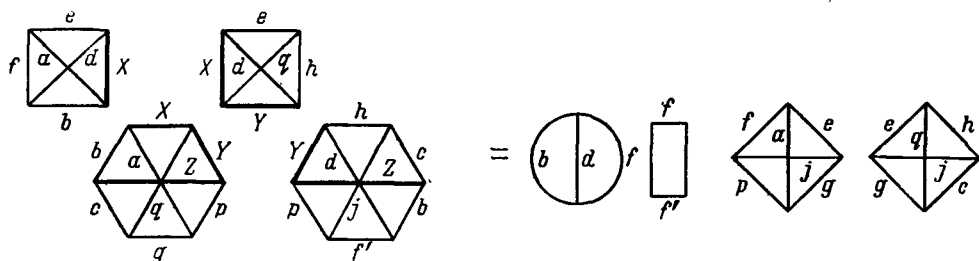
$$\sum_{XYZ} (-1)^Z \Pi_{XYZ}^2 \begin{Bmatrix} a & b & c' \\ d & e & f \\ X & Y & g \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} l & e & j \\ a & b & c \\ Z & Y & h \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} a & d & X \\ k & Z & l \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} X & Y & g \\ h & k & Z \end{Bmatrix} = (-1)^{2c+b-d+g+j} \frac{\delta_{cc'}}{\Pi_c^2} \{abc\} \begin{Bmatrix} k & j & f \\ c & g & h \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} k & j & f \\ e & d & l \end{Bmatrix}, \quad (41)$$



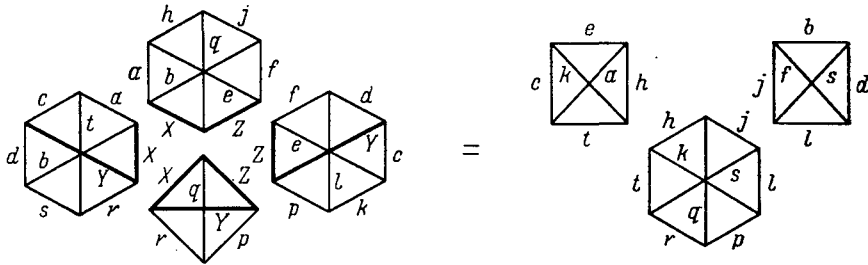
$$\sum_{XYZ} (-1)^{2Y-Z} \Pi_{XYZ}^2 \begin{Bmatrix} a & b & X \\ c & d & Y \\ e & f & Z \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} g & h & X \\ k & l & Y \\ f & e & Z \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} a & b & X \\ g & h & j \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} c & d & Y \\ k & l & j' \end{Bmatrix} = (-1)^{-b+c-h+k} \frac{\delta_{jj'}}{\Pi_j^2} \{ace\} \begin{Bmatrix} b & d & f \\ l & h & j \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} b & d & f \\ k & g & j \end{Bmatrix}, \quad (42)$$



$$\sum_{XYZ} (-1)^{Y-a-b-c-f-h-p+q} \Pi_{XYZ}^2 \begin{Bmatrix} a & b & X \\ g & c & q \\ p & Z & Y \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} b & d & f' \\ c & h & j \\ Z & Y & p \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} a & b & X \\ d & e & f \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} d & h & Y \\ q & X & e \end{Bmatrix} = (-1)^{2j} \frac{\delta_{ff'}}{\Pi_j^2} \{bdf\} \begin{Bmatrix} e & g & j \\ p & f & a \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} e & g & j \\ c & h & q \end{Bmatrix}, \quad (43)$$



$$\sum_{XYZ} \Pi_{XYZ}^2 \begin{Bmatrix} a & b & X \\ c & d & Y \\ t & s & r \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} a & b & X \\ h & j & q \\ e & f & Z \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} k & l & p \\ c & d & Y \\ e & f & Z \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} p & q & r \\ X & Y & Z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} k & l & p \\ h & j & q \\ t & s & r \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} k & h & t \\ a & c & e \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} l & j & s \\ b & d & f \end{Bmatrix}, \quad (44)$$





# МАТРИЧНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ НЕПРИВОДИМЫХ ТЕНЗОРНЫХ ОПЕРАТОРОВ

## 13.1. ТЕОРЕМА ВИГНЕРА—ЭККАРТА И ВЫЧИСЛЕНИЕ МАТРИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

### 1

В этом параграфе даны формулы для вычисления матричных элементов неприводимых тензорных операторов произвольного вида

$$\langle n' j' m' | \hat{\mathfrak{M}}_{kx} | n j m \rangle = \int \Psi_{n' j' m'}^* \hat{\mathfrak{M}}_{kx} \Psi_{n j m} d\tau. \quad (1)$$

Здесь  $\hat{\mathfrak{M}}_{kx}$  — компонента неприводимого тензорного оператора ранга  $k$ , а  $\Psi_{n j m}$  — функции, описывающие состояние квантовомеханической системы с определенными угловыми моментами  $j$  и его проекцией на ось квантования  $m$  ( $n$  — совокупность остальных квантовых чисел характеризующих состояние системы).

Согласно теореме Вигнера—Эккарта зависимость матричного элемента от ориентации системы координат, т. е. от проекций  $m$ ,  $m'$  и  $x$ , определяется  $3jm$ -символом или коэффициентом Клебша—Гордана.

$$\langle n' j' m' | \hat{\mathfrak{M}}_{kx} | n j m \rangle = (-1)^{j'-m'} \begin{pmatrix} j' & k & j \\ -m' & x & m \end{pmatrix} \langle n' j' | \hat{\mathfrak{M}}_k | n j \rangle = (-1)^{2k} C_{j m k x}^{j' m'} \frac{\langle n' j' | \hat{\mathfrak{M}}_k | n j \rangle}{\sqrt{2j'+1}}. \quad (2)$$

Инвариантный множитель  $\langle n' j' | \hat{\mathfrak{M}}_k | n j \rangle$  называется *приведенным матричным элементом*.

При таком определении приведенный матричный элемент единичного оператора имеет вид

$$\langle n' j' | \hat{1} | n j \rangle = \sqrt{2j+1} \delta_{n'n} \delta_{j'j}. \quad (3)$$

### 2

Используя определение (2), можно получить следующие правила сумм для матричных элементов неприводимых тензорных операторов:

$$\sum_{m x} |\langle n' j' m' | \hat{\mathfrak{M}}_{kx} | n j m \rangle|^2 = \frac{|\langle n' j' | \hat{\mathfrak{M}}_k | n j \rangle|^2}{2j'+1}, \quad (4)$$

$$\sum_{m' x} |\langle n' j' m' | \hat{\mathfrak{M}}_{kx} | n j m \rangle|^2 = \frac{|\langle n' j' | \hat{\mathfrak{M}}_k | n j \rangle|^2}{2j+1}, \quad (5)$$

$$\sum_{m m'} |\langle n' j' m' | \hat{\mathfrak{M}}_{kx} | n j m \rangle|^2 = \frac{|\langle n' j' | \hat{\mathfrak{M}}_k | n j \rangle|^2}{2k+1}, \quad (6)$$

$$\sum_{m m' x} |\langle n' j' m' | \hat{\mathfrak{M}}_{kx} | n j m \rangle|^2 = |\langle n' j' | \hat{\mathfrak{M}}_k | n j \rangle|^2. \quad (7)$$

В этом параграфе, так же как и в гл. 12, будет использовано следующее обозначение:

$$\Pi_{ab\dots c} \equiv \sqrt{(2a+1)(2b+1)\dots(2c+1)}.$$

### 3. Матричные элементы произведений неприводимых тензорных операторов

Из двух неприводимых тензорных операторов  $\hat{P}_{a\alpha}$  и  $\hat{Q}_{b\beta}$  можно построить прямое произведение  $\hat{P}_{a\alpha} \cdot \hat{Q}_{b\beta}$  и неприводимое произведение  $\{\hat{P}_a \otimes \hat{Q}_b\}_{c\gamma}$  ранга  $c$  (см. гл. 3).

Матричные элементы прямого тензорного произведения можно записать в виде

$$\langle n'j'm' | \hat{P}_{a\alpha} \cdot \hat{Q}_{b\beta} | njm \rangle = \frac{(-1)^{2a+2b}}{\Pi_{j'}} \sum_{n_1j_1m_1} C_{j_1m_1\alpha}^{j'm'} C_{j_1m_1\beta}^{jm} \frac{1}{\Pi_{j_1}} \langle n'j' | \hat{P}_a || n_1j_1 \rangle \langle n_1j_1 | \hat{Q}_b || nj \rangle. \quad (8)$$

Часто бывает полезным другое выражение для тех же матричных элементов:

$$\langle n'j'm' | \hat{P}_{a\alpha} \cdot \hat{Q}_{b\beta} | njm \rangle = \frac{(-1)^{j'+j}}{\Pi_{j'}} \sum_{c\gamma} (-1)^{-c} \Pi_c C_{j'm'\gamma}^{j'm'} C_{a\alpha b\beta}^{c\gamma} \sum_{n_1j_1} \left\{ \begin{matrix} a & b & c \\ j & j' & j_1 \end{matrix} \right\} \langle n'j' | \hat{P}_a || n_1j_1 \rangle \langle n_1j_1 | \hat{Q}_b || nj \rangle. \quad (9)$$

Матричные элементы неприводимого тензорного произведения:

$$\langle n'j'm' | \{\hat{P}_a \otimes \hat{Q}_b\}_{c\gamma} | njm \rangle = (-1)^{j'+j-c} \frac{\Pi_c}{\Pi_{j'}} C_{j'm'\gamma}^{j'm'} \sum_{n_1j_1} \left\{ \begin{matrix} a & b & c \\ j & j' & j_1 \end{matrix} \right\} \langle n'j' | \hat{P}_a || n_1j_1 \rangle \langle n_1j_1 | \hat{Q}_b || nj \rangle. \quad (10)$$

Матричные элементы скалярного произведения двух тензоров ранга  $a$  получаются из формулы (10), если положить  $c=0$  и в соответствии с 3.1.(34) домножить полученное выражение на величину  $(-1)^{-a} \Pi_a$ :

$$\langle n'j'm' | (\hat{P}_a \cdot \hat{Q}_a) | njm \rangle = \delta_{jj'} \delta_{mm'} \frac{1}{\Pi_j^2} \sum_{n_1j_1} (-1)^{-j+j_1} \langle n'j | \hat{P}_a || n_1j_1 \rangle \langle n_1j_1 | \hat{Q}_a || nj \rangle. \quad (11)$$

Из трех неприводимых тензорных операторов  $\hat{P}_{a\alpha}$ ,  $\hat{Q}_{b\beta}$ ,  $\hat{R}_{d\delta}$  можно образовать следующие произведения:

$$\hat{P}_{a\alpha} \cdot \hat{Q}_{b\beta} \cdot \hat{R}_{d\delta}, \quad \{\hat{P}_a \otimes \hat{Q}_b\}_{c\gamma} \cdot \hat{R}_{d\delta}, \quad \hat{P}_{a\alpha} \cdot \{\hat{Q}_b \otimes \hat{R}_d\}_{f\varphi}, \quad \{(\hat{P}_a \otimes \hat{Q}_b)_c \otimes \hat{R}_d\}_{f\varphi}, \quad \{\hat{P}_a \otimes (\hat{Q}_b \otimes \hat{R}_d)_c\}_{f\varphi}.$$

Перестановка операторов позволяет построить другие произведения, которые отличаются от выписанных здесь только на величины, представляющие собой коммутаторы переставляемых операторов.

Матричные элементы прямого произведения трех тензорных операторов:

$$\langle n'j'm' | \hat{P}_{a\alpha} \cdot \hat{Q}_{b\beta} \cdot \hat{R}_{d\delta} | njm \rangle = \frac{(-1)^{2a+2b+2d}}{\Pi_{j'}} \sum_{n_1j_1n_2j_2} \frac{1}{\Pi_{j_1j_2}} \langle n'j' | \hat{P}_a || n_1j_1 \rangle \langle n_1j_1 | \hat{Q}_b || n_2j_2 \rangle \langle n_2j_2 | \hat{R}_d || nj \rangle \times \\ \times \sum_{m_1m_2} C_{j_1m_1\alpha}^{j'm'} C_{j_2m_2\beta}^{jm} C_{j_2m_2\delta}^{j'm} \quad (12)$$

Вычисление матричных элементов произведений  $\{\hat{P}_a \otimes \hat{Q}_b\}_{c\gamma} \cdot \hat{R}_{d\delta}$  и  $\hat{P}_{a\alpha} \cdot \{\hat{Q}_b \otimes \hat{R}_d\}_{c\gamma}$  сводится к последовательному применению формул (8)–(10).

Матричные элементы неприводимого тензорного произведения трех тензоров имеют вид

$$\langle n'j'm' | \{(\hat{P}_a \otimes \hat{Q}_b)_c \otimes \hat{R}_d\}_{f\varphi} | njm \rangle = (-1)^{j+c-j} \frac{\Pi_{fc}}{\Pi_{j'}} C_{j'm'\varphi}^{j'm'} \times \\ \times \sum_{n_1j_1n_2j_2} (-1)^{j_2} \left\{ \begin{matrix} a & b & c \\ j_2 & j' & j_1 \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} d & c & f \\ j' & j & j_2 \end{matrix} \right\} \langle n'j' | \hat{P}_a || n_1j_1 \rangle \langle n_1j_1 | \hat{Q}_b || n_2j_2 \rangle \langle n_2j_2 | \hat{R}_d || nj \rangle. \quad (13)$$

Вычисление матричных элементов тензорного произведения  $\{\hat{P}_a \otimes (\hat{Q}_b \otimes \hat{R}_d)_c\}_{f\varphi}$  можно свести к формуле (13) с помощью 3.3.(1).

Матричные элементы скалярного произведения:

$$\langle n'j'm' | \{(\hat{P}_a \otimes \hat{Q}_b)_c \cdot \hat{R}_c\} | njm \rangle = \delta_{jj'} \delta_{mm'} (-1)^{2j-c} \frac{\Pi_c}{\Pi_j^2} \times \\ \times \sum_{n_1j_1n_2j_2} \left\{ \begin{matrix} a & b & c \\ j_2 & j & j_1 \end{matrix} \right\} \langle n'j | \hat{P}_a || n_1j_1 \rangle \langle n_1j_1 | \hat{Q}_b || n_2j_2 \rangle \langle n_2j_2 | \hat{R}_c || nj \rangle. \quad (14)$$

Из четырех неприводимых тензоров  $\hat{P}_{aa}$ ,  $\hat{Q}_{bb}$ ,  $\hat{R}_{dd}$ ,  $\hat{S}_{ee}$  можно построить следующие типы тензорных произведений:

- а)  $\hat{P}_{aa} \cdot \hat{Q}_{bb} \cdot \hat{R}_{dd} \cdot \hat{S}_{ee}$ ;  
 б)  $\{\hat{P}_a \otimes \hat{Q}_b\}_{c\gamma} \cdot \hat{R}_{dd} \cdot \hat{S}_{ee}$ ,  $\hat{P}_{aa} \cdot \{\hat{Q}_b \otimes \hat{R}_d\}_{k\kappa} \cdot \hat{S}_{ee}$ ,  $\hat{P}_{aa} \cdot \hat{Q}_{bb} \cdot \{\hat{R}_d \otimes \hat{S}_e\}_{h\alpha}$ ;  
 в)  $\{(\hat{P}_a \otimes \hat{Q}_b)_c \otimes \hat{R}_d\}_{f\varphi} \cdot \hat{S}_{ee}$ ,  $\{\hat{P}_a \otimes (\hat{Q}_b \otimes \hat{R}_d)_h\}_{f\varphi} \cdot \hat{S}_{ee}$ ,  $\hat{P}_{aa} \cdot \{(\hat{Q}_b \otimes \hat{R}_d)_h \otimes \hat{S}_e\}_{f\varphi}$ ,  
 $\hat{P}_{aa} \cdot \{\hat{Q}_b \otimes (\hat{R}_d \otimes \hat{S}_e)_h\}_{f\varphi}$ ,  $\{\hat{P}_a \otimes \hat{Q}_b\}_{c\gamma} \cdot \{\hat{R}_d \otimes \hat{S}_e\}_{h\alpha}$ ;  
 г)  $\{(\hat{P}_a \otimes \hat{Q}_b)_c \otimes \hat{R}_d\}_f \otimes \hat{S}_e\}_{k\kappa}$ ,  $\{\hat{P}_a \otimes (\hat{Q}_b \otimes \hat{R}_d)_h\}_f \otimes \hat{S}_e\}_{k\kappa}$ ,  $\{(\hat{P}_a \otimes \hat{Q}_b)_c \otimes (\hat{R}_d \otimes \hat{S}_e)_h\}_f \otimes \hat{S}_e\}_{k\kappa}$ .

Произведения с другим порядком сомножителей сводятся к приведенным здесь с помощью правил коммутации.

Матричные элементы прямого произведения операторов:

$$\begin{aligned} \langle n'j'm' | \hat{P}_{aa}\hat{Q}_{bb}\hat{R}_{dd}\hat{S}_{ee} | njm \rangle &= (-1)^{2a+2b+2d+2e} \frac{1}{\prod_{j'}^{j'}} \sum_{\substack{n_1n_2n_3 \\ j_1j_2j_3}} \langle n'j' | \hat{P}_a | n_1j_1 \rangle \langle n_1j_1 | \hat{Q}_b | n_2j_2 \rangle \langle n_2j_2 | \hat{R}_d | n_3j_3 \rangle \times \\ &\times \langle n_3j_3 | \hat{S}_e | nj \rangle \frac{1}{\prod_{j_1j_2j_3}^{j_1j_2j_3}} \sum_{m_1m_2m_3} C_{j_1m_1}^{j'm'} C_{j_2m_2}^{j_1m_1} C_{j_3m_3}^{j_2m_2} C_{jm}^{j_3m_3}. \end{aligned} \quad (15)$$

Матричные элементы произведений типа б) и в) вычисляются с помощью формул (8)—(14). Матричные элементы неприводимых тензорных произведений:

$$\begin{aligned} \langle n'j'm' | \{(\hat{P}_a \otimes \hat{Q}_b)_c \otimes \hat{R}_d\}_f \otimes \hat{S}_e\}_{k\kappa} | njm \rangle &= (-1)^{j-j'+f+e-k} \frac{\Pi_{fck}}{\prod_{j'}^{j'}} C_{jm}^{j'm'} \sum_{\substack{n_1n_2n_3 \\ j_1j_2j_3}} (-1)^{j_2+j_3} \left\{ \begin{matrix} a & b & c \\ j_2 & j' & j_1 \end{matrix} \right\} \times \\ &\times \left\{ \begin{matrix} d & c & f \\ j' & j_3 & j_2 \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} e & f & k \\ j' & j & j_3 \end{matrix} \right\} \langle n'j' | \hat{P}_a | n_1j_1 \rangle \langle n_1j_1 | \hat{Q}_b | n_2j_2 \rangle \langle n_2j_2 | \hat{R}_d | n_3j_3 \rangle \langle n_3j_3 | \hat{S}_e | nj \rangle, \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \langle n'j'm' | \{(\hat{P}_a \otimes \hat{Q}_b)_c \otimes \hat{R}_d\}_f \cdot \hat{S}_e | njm \rangle &= (-1)^{c-f-j} \frac{\Pi_{fco}}{\prod_j^2} \delta_{j'j} \delta_{m'm} \sum_{\substack{n_1n_2n_3 \\ j_1j_2j_3}} (-1)^{j_2} \cdot \left\{ \begin{matrix} a & b & c \\ j_2 & j & j_1 \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} d & c & f \\ j & j_3 & j_2 \end{matrix} \right\} \times \\ &\times \langle n'j' | \hat{P}_a | n_1j_1 \rangle \langle n_1j_1 | \hat{Q}_b | n_2j_2 \rangle \langle n_2j_2 | \hat{R}_d | n_3j_3 \rangle \langle n_3j_3 | \hat{S}_e | nj \rangle. \end{aligned} \quad (17)$$

Вычисление матричных элементов неприводимого тензорного произведения  $\{\hat{P}_a \otimes \{\hat{Q}_b \otimes \{\hat{R}_d \otimes \hat{S}_e\}_h\}_f\}_{k\kappa}$  можно свести к формуле (16) с помощью 3.3. (5).

$$\begin{aligned} \langle n'j'm' | \{\hat{P}_a \otimes \hat{Q}_b\}_c \otimes \{\hat{R}_d \otimes \hat{S}_e\}_f \}_{k\kappa} | njm \rangle &= (-1)^{2j'+c-k-f} \frac{\Pi_{cfk}}{\prod_{j'}^{j'}} C_{jm}^{j'm'} \sum_{\substack{n_1n_2n_3 \\ j_1j_2j_3}} \left\{ \begin{matrix} a & b & c \\ j_2 & j' & j_1 \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} d & e & f \\ j & j_2 & j_3 \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} f & c & k \\ j' & j & j_2 \end{matrix} \right\} \times \\ &\times \langle n'j' | \hat{P}_a | n_1j_1 \rangle \langle n_1j_1 | \hat{Q}_b | n_2j_2 \rangle \langle n_2j_2 | \hat{R}_d | n_3j_3 \rangle \langle n_3j_3 | \hat{S}_e | nj \rangle, \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \langle n'j'm' | \{(\hat{P}_a \otimes \hat{Q}_b)_c \cdot (\hat{R}_d \otimes \hat{S}_e)_d\} | njm \rangle &= \delta_{j'j} \delta_{m'm} \frac{\Pi_c^2}{\prod_j^2} \sum_{\substack{n_1n_2n_3 \\ j_1j_2j_3}} (-1)^{-j+j_2} \left\{ \begin{matrix} a & b & c \\ j_2 & j & j_1 \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} d & e & c \\ j & j_2 & j_3 \end{matrix} \right\} \times \\ &\times \langle n'j | \hat{P}_a | n_1j_1 \rangle \langle n_1j_1 | \hat{Q}_b | n_2j_2 \rangle \langle n_2j_2 | \hat{R}_d | n_3j_3 \rangle \langle n_3j_3 | \hat{S}_e | nj \rangle. \end{aligned} \quad (19)$$

#### 4. Матричные элементы операторов, зависящих от переменных двух подсистем

Если квантовомеханическая система состоит из двух подсистем 1 и 2, состояние каждой из которых определяется совокупностями квантовых чисел  $(n_1j_1m_1)$  и  $(n_2j_2m_2)$  соответственно, возможны два представления матричных элементов.

а. Угловые моменты обеих подсистем не связаны. Тогда

$$\langle n'_1j'_1m'_1; n'_2j'_2m'_2 | \hat{P}(1, 2) | n_1j_1m_1; n_2j_2m_2 \rangle = \int \Psi_{n'_1j'_1m'_1}^*(1) \Psi_{n'_2j'_2m'_2}^*(2) \hat{P}(1, 2) \Psi_{n_1j_1m_1}(1) \Psi_{n_2j_2m_2}(2) d\tau_1 d\tau_2, \quad (20)$$

где  $\Psi_{n_1j_1m_1}$  и  $\Psi_{n_2j_2m_2}$  — волновые функции, описывающие состояния каждой из подсистем. Такое представление матричных элементов будем называть  $(n_1j_1m_1; n_2j_2m_2)$ -представлением.

б. Угловые моменты  $\hat{J}_1$  и  $\hat{J}_2$  связаны в полный угловой момент  $\hat{J} = \hat{J}_1 + \hat{J}_2$  с проекцией  $m = m_1 + m_2$ . Тогда

$$\langle n'_1 j'_1 n'_2 j'_2 j' m' | \hat{P}(1, 2) | n_1 j_1 n_2 j_2 j m \rangle = \int \Psi_{n'_1 j'_1 n'_2 j'_2 j' m'}^*(1, 2) \hat{P}(1, 2) \Psi_{n_1 j_1 n_2 j_2 j m}(1, 2) d\tau_1 d\tau_2, \quad (21)$$

здесь

$$\Psi_{n_1 j_1 n_2 j_2 j m}(1, 2) = \sum_{m_1 m_2} C_{j_1 m_1 j_2 m_2}^{j m} \Psi_{n_1 j_1 m_1}(1) \Psi_{n_2 j_2 m_2}(2). \quad (22)$$

Такое представление матричных элементов будем называть  $(n_1 j_1 n_2 j_2 j m)$ -представлением.

В общем случае имеем

$$\begin{aligned} & \langle n'_1 j'_1 m'_1; n'_2 j'_2 m'_2 | \hat{P}_{\alpha\alpha}(1, 2) | n_1 j_1 m_1; n_2 j_2 m_2 \rangle = \\ & = (-1)^{2\alpha} \frac{1}{\Pi_{j'}} \sum_{j m j' m'} C_{j_1 m_1 j_2 m_2}^{j m} C_{j'_1 m'_1 j'_2 m'_2}^{j' m'} C_{j m \alpha}^{j' m'} \langle n'_1 j'_1 n'_2 j'_2 j' m' | \hat{P}_{\alpha}(1, 2) | n_1 j_1 n_2 j_2 j m \rangle. \end{aligned} \quad (23)$$

Часто оператор  $\hat{A}(1, 2)$ , зависящий от переменных двух подсистем, имеет вид прямого или неприводимого произведения двух операторов  $\hat{P}_{\alpha\alpha}(1)$  и  $\hat{Q}_{\beta\beta}(2)$ , каждый из которых зависит от переменных лишь одной из подсистем

$$\hat{A}(1, 2) = \hat{P}_{\alpha\alpha}(1) \cdot \hat{Q}_{\beta\beta}(2) \quad \text{или} \quad \hat{A}(1, 2) = \{\hat{P}_{\alpha}(1) \otimes \hat{Q}_{\beta}(2)\}_{\sigma\gamma}.$$

Для прямого произведения операторов имеем

$$\begin{aligned} & \langle n'_1 j'_1 m'_1; n'_2 j'_2 m'_2 | \hat{P}_{\alpha\alpha}(1) \cdot \hat{Q}_{\beta\beta}(2) | n_1 j_1 m_1; n_2 j_2 m_2 \rangle = \\ & = \frac{(-1)^{2\alpha+2\beta}}{\Pi_{j'_1 j'_2}} C_{j'_1 m'_1 \alpha}^{j'_1 m'_1} C_{j'_2 m'_2 \beta}^{j'_2 m'_2} \langle n'_1 j'_1 | \hat{P}_{\alpha}(1) | n_1 j_1 \rangle \langle n'_2 j'_2 | \hat{Q}_{\beta}(2) | n_2 j_2 \rangle. \end{aligned} \quad (24)$$

Для неприводимого тензорного произведения получаем

$$\begin{aligned} & \langle n'_1 j'_1 m'_1; n'_2 j'_2 m'_2 | \{\hat{P}_{\alpha}(1) \otimes \hat{Q}_{\beta}(2)\}_{\sigma\gamma} | n_1 j_1 m_1; n_2 j_2 m_2 \rangle = \\ & = \frac{(-1)^{2\sigma}}{\Pi_{j'_1 j'_2}} \sum_{\sigma\beta} C_{j'_1 m'_1 \alpha}^{j'_1 m'_1} C_{\alpha\beta\sigma}^{\sigma\gamma} C_{j'_2 m'_2 \beta}^{j'_2 m'_2} \langle n'_1 j'_1 | \hat{P}_{\alpha}(1) | n_1 j_1 \rangle \langle n'_2 j'_2 | \hat{Q}_{\beta}(2) | n_2 j_2 \rangle. \end{aligned} \quad (25)$$

Матричные элементы скалярного произведения операторов имеют вид

$$\begin{aligned} & \langle n'_1 j'_1 m'_1; n'_2 j'_2 m'_2 | (\hat{P}_{\alpha}(1) \cdot \hat{Q}_{\alpha}(2)) | n_1 j_1 m_1; n_2 j_2 m_2 \rangle = \frac{1}{\Pi_{j'_1 j'_2}} \sum_{\alpha} (-1)^{-\alpha} C_{j'_1 m'_1 \alpha}^{j'_1 m'_1} C_{j'_2 m'_2 \alpha}^{j'_2 m'_2} \times \\ & \times \langle n'_1 j'_1 | \hat{P}_{\alpha}(1) | n_1 j_1 \rangle \langle n'_2 j'_2 | \hat{Q}_{\alpha}(2) | n_2 j_2 \rangle. \end{aligned} \quad (26)$$

Если угловые моменты  $j_1$  и  $j_2$ , соответствующие различным подсистемам, связаны в полный угловой момент  $j$  с проекцией  $m$ , матричные элементы (24)–(26) видоизменяются следующим образом:

$$\begin{aligned} & \langle n'_1 j'_1 n'_2 j'_2 j' m' | \hat{P}_{\alpha\alpha}(1) \cdot \hat{Q}_{\beta\beta}(2) | n_1 j_1 n_2 j_2 j m \rangle = (-1)^{2\alpha+2\beta} \Pi_j \times \\ & \times \langle n'_1 j'_1 | \hat{P}_{\alpha}(1) | n_1 j_1 \rangle \langle n'_2 j'_2 | \hat{Q}_{\beta}(2) | n_2 j_2 \rangle \sum_{\sigma\gamma} \Pi_{\sigma} C_{j'_1 m'_1 \sigma}^{j'_1 m'_1} C_{\alpha\beta\sigma}^{\sigma\gamma} \begin{Bmatrix} a & b & c \\ j'_1 & j'_2 & j' \\ j_1 & j_2 & j \end{Bmatrix}, \end{aligned} \quad (27)$$

$$\langle n'_1 j'_1 n'_2 j'_2 j' m' | \{\hat{P}_{\alpha}(1) \otimes \hat{Q}_{\beta}(2)\}_{\sigma\gamma} | n_1 j_1 n_2 j_2 j m \rangle = (-1)^{2\sigma} \Pi_{\sigma} C_{j'_1 m'_1 \sigma}^{j'_1 m'_1} \begin{Bmatrix} a & b & c \\ j'_1 & j'_2 & j' \\ j_1 & j_2 & j \end{Bmatrix} \langle n'_1 j'_1 | \hat{P}_{\alpha}(1) | n_1 j_1 \rangle \langle n'_2 j'_2 | \hat{Q}_{\beta}(2) | n_2 j_2 \rangle, \quad (28)$$

$$\langle n'_1 j'_1 n'_2 j'_2 j' m' | \hat{P}_{\alpha}(1) \cdot \hat{Q}_{\alpha}(2) | n_1 j_1 n_2 j_2 j m \rangle = \delta_{j' j} \delta_{m' m} (-1)^{j+j_1+j_2} \begin{Bmatrix} j'_1 & j_1 & a \\ j_2 & j'_2 & j \end{Bmatrix} \langle n'_1 j'_1 | \hat{P}_{\alpha}(1) | n_1 j_1 \rangle \langle n'_2 j'_2 | \hat{Q}_{\alpha}(2) | n_2 j_2 \rangle. \quad (29)$$

Матричные элементы прямого тензорного произведения трех операторов, каждый из которых зависит от переменных одной из подсистем, вычисляются с помощью последовательного приме-

нения формул (24), (27) и (8). Если же два из трех сомножителей образуют неприводимое тензорное произведение, нужно воспользоваться также формулами (25), (28), (9) и (10).

Матричные элементы неприводимого тензорного произведения трех тензорных операторов имеют вид

$$\begin{aligned} & \langle n'_1 j'_1 m'_1; n'_2 j'_2 m'_2 | \{ \hat{\mathbf{P}}_a(1) \otimes \hat{\mathbf{Q}}_b(2) \}_c \otimes \hat{\mathbf{R}}_d(1) \}_{ee} | n_1 j_1 m_1; n_2 j_2 m_2 \rangle = \\ & = (-1)^{b-c-d-j-j'} \frac{\Pi_c}{\Pi_{j'_1 j'_2}} \sum_{fNJ} \Pi_f^2 C_{f\varphi b\beta}^{ces} C_{j'_1 m'_1 f\varphi}^{j'_1 m'_1} C_{j'_2 m'_2 \beta\varphi}^{j'_2 m'_2} \begin{Bmatrix} a & b & c \\ e & d & f \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} d & a & f \\ j'_1 & j_1 & J \end{Bmatrix} \times \\ & \times \langle n'_1 j'_1 | \hat{\mathbf{P}}_a(1) \| NJ \rangle \langle NJ \| \hat{\mathbf{R}}_d(1) \| n_1 j_1 \rangle \langle n'_2 j'_2 | \hat{\mathbf{Q}}_b(2) \| n_2 j_2 \rangle, \end{aligned} \quad (30)$$

$$\begin{aligned} & \langle n'_1 j'_1 n'_2 j'_2 j' m' | \{ \hat{\mathbf{P}}_a(1) \otimes \hat{\mathbf{Q}}_b(2) \}_c \otimes \hat{\mathbf{R}}_d(1) \}_{ee} | n_1 j_1 n_2 j_2 j m \rangle = (-1)^{b-c-d-j-j'} \Pi_{oje} C_{j' m e e}^{j' m e} \times \\ & \times \sum_{fNJ} \Pi_f^2 \begin{Bmatrix} a & b & c \\ e & d & f \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} d & a & f \\ j'_1 & j_1 & J \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} j_1 & f & j'_1 \\ j_2 & b & j'_2 \\ j & e & j' \end{Bmatrix} \langle n'_1 j'_1 | \hat{\mathbf{P}}_a(1) \| NJ \rangle \langle NJ \| \hat{\mathbf{R}}_d(1) \| n_1 j_1 \rangle \langle n'_2 j'_2 | \hat{\mathbf{Q}}_b(2) \| n_2 j_2 \rangle, \end{aligned} \quad (31)$$

$$\begin{aligned} & \langle n'_1 j'_1 n'_2 j'_2 j' m' | \{ \hat{\mathbf{P}}_a(1) \otimes \hat{\mathbf{Q}}_b(2) \}_c \cdot \hat{\mathbf{R}}_c(1) \}_{ee} | n_1 j_1 n_2 j_2 j m \rangle = \delta_{j' j} \delta_{m' m} (-1)^{-a+b+j+j'-j-j'} \Pi_c \times \\ & \times \begin{Bmatrix} j'_1 & j_1 & b \\ j_2 & j'_2 & j \end{Bmatrix} \sum_{NJ} \begin{Bmatrix} a & b & c \\ j_1 & J & j'_1 \end{Bmatrix} \langle n'_1 j'_1 | \hat{\mathbf{P}}_a(1) \| NJ \rangle \langle NJ \| \hat{\mathbf{R}}_c(1) \| n_1 j_1 \rangle \langle n'_2 j'_2 | \hat{\mathbf{Q}}_b(2) \| n_2 j_2 \rangle. \end{aligned} \quad (32)$$

Матричные элементы произведения вида  $\{ \hat{\mathbf{P}}_a(1) \otimes \hat{\mathbf{Q}}_b(2) \otimes \hat{\mathbf{R}}_d(1) \}_f \}_k$  вычисляются с помощью формулы 3.3. (1), а произведения  $\{ \{ \hat{\mathbf{P}}_a(1) \otimes \hat{\mathbf{R}}_d(1) \}_d \otimes \hat{\mathbf{Q}}_b(2) \}_k$  — с помощью формул (25), (28) и (10).

Матричные элементы приводимых произведений четырех тензорных операторов вычисляются последовательным применением формул, данных выше.

Приведем выражения матричных элементов неприводимых тензорных произведений четырех тензорных операторов

$$\begin{aligned} & \langle n'_1 j'_1 m'_1; n'_2 j'_2 m'_2 | \{ \hat{\mathbf{P}}_a(1) \otimes \hat{\mathbf{Q}}_b(2) \}_c \otimes \{ \hat{\mathbf{R}}_d(1) \otimes \hat{\mathbf{S}}_e(2) \}_f \}_{kx} | n_1 j_1 m_1; n_2 j_2 m_2 \rangle = (-1)^{2j'_1+2j'_2+2k} \frac{\Pi_{cf}}{\Pi_{j'_1 j'_2}} \times \\ & \times \sum_{gh\sigma\eta} \Pi_{gh}^2 C_{h\sigma g\eta}^{kx} C_{h\sigma j'_1 m'_1}^{j'_1 m'_1} C_{g\eta j'_2 m'_2}^{j'_2 m'_2} \begin{Bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ h & g & k \end{Bmatrix} \sum_{N_1 J_1 N_2 J_2} \begin{Bmatrix} a & d & h \\ j_1 & j'_1 & J_1 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} b & e & g \\ j_2 & j'_2 & J_2 \end{Bmatrix} \times \\ & \times \langle n'_1 j'_1 | \hat{\mathbf{P}}_a(1) \| N_1 J_1 \rangle \langle N_1 J_1 \| \hat{\mathbf{R}}_d(1) \| n_1 j_1 \rangle \langle n'_2 j'_2 | \hat{\mathbf{Q}}_b(2) \| N_2 J_2 \rangle \langle N_2 J_2 \| \hat{\mathbf{S}}_e(2) \| n_2 j_2 \rangle, \end{aligned} \quad (33)$$

$$\begin{aligned} & \langle n'_1 j'_1 n'_2 j'_2 j' m' | \{ \hat{\mathbf{P}}_a(1) \otimes \hat{\mathbf{Q}}_b(2) \}_c \otimes \{ \hat{\mathbf{R}}_d(1) \otimes \hat{\mathbf{S}}_e(2) \}_f \}_{kx} | n_1 j_1 n_2 j_2 j m \rangle = \\ & = (-1)^{j+j'-k} \Pi_{cfjk} C_{j' m kx}^{j' m kx} \sum_{gh} \Pi_{gh}^2 \begin{Bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ h & g & k \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} j_1 & j'_1 & h \\ j_2 & j'_2 & g \\ j & j' & k \end{Bmatrix} \sum_{N_1 J_1 N_2 J_2} \begin{Bmatrix} d & a & h \\ j'_1 & j_1 & J_1 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} e & b & g \\ j'_2 & j_2 & J_2 \end{Bmatrix} \times \\ & \times \langle n'_1 j'_1 | \hat{\mathbf{P}}_a(1) \| N_1 J_1 \rangle \langle N_1 J_1 \| \hat{\mathbf{R}}_d(1) \| n_1 j_1 \rangle \langle n'_2 j'_2 | \hat{\mathbf{Q}}_b(2) \| N_2 J_2 \rangle \langle N_2 J_2 \| \hat{\mathbf{S}}_e(2) \| n_2 j_2 \rangle, \end{aligned} \quad (34)$$

$$\begin{aligned} & \langle n'_1 j'_1 n'_2 j'_2 j' m' | \{ \hat{\mathbf{P}}_a(1) \otimes \hat{\mathbf{Q}}_b(2) \}_c \cdot \{ \hat{\mathbf{R}}_d(1) \otimes \hat{\mathbf{S}}_e(2) \}_c \}_{kx} | n_1 j_1 n_2 j_2 j m \rangle = \delta_{j' j} \delta_{m' m} (-1)^{2a+j'_1+j'_2-j-b-d} \Pi_c^2 \times \\ & \times \sum_g \Pi_g^2 \begin{Bmatrix} a & b & c \\ e & d & g \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} j'_1 & j_1 & g \\ j_2 & j'_2 & j \end{Bmatrix} \sum_{N_1 J_1 N_2 J_2} \begin{Bmatrix} d & a & g \\ j'_1 & j_1 & J_1 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} e & b & g \\ j'_2 & j_2 & J_2 \end{Bmatrix} \times \\ & \times \langle n'_1 j'_1 | \hat{\mathbf{P}}_a(1) \| N_1 J_1 \rangle \langle N_1 J_1 \| \hat{\mathbf{R}}_d(1) \| n_1 j_1 \rangle \langle n'_2 j'_2 | \hat{\mathbf{Q}}_b(2) \| N_2 J_2 \rangle \langle N_2 J_2 \| \hat{\mathbf{S}}_e(2) \| n_2 j_2 \rangle, \end{aligned} \quad (35)$$

$$\begin{aligned} & \langle n'_1 j'_1 m'_1; n'_2 j'_2 m'_2 | \{ \{ \hat{\mathbf{P}}_a(1) \otimes \hat{\mathbf{Q}}_b(2) \}_c \otimes \hat{\mathbf{R}}_d(1) \}_f \otimes \hat{\mathbf{S}}_e(2) \}_{kx} | n_1 j_1 m_1; n_2 j_2 m_2 \rangle = \\ & = (-1)^{c+d+k-e+2j'_1+2j'_2} \frac{\Pi_{cf}}{\Pi_{j'_1 j'_2}} \sum_{gh\sigma\eta} \Pi_{gh}^2 C_{h\sigma g\eta}^{kx} C_{h\sigma j'_1 m'_1}^{j'_1 m'_1} C_{g\eta j'_2 m'_2}^{j'_2 m'_2} \begin{Bmatrix} a & d & h \\ f & b & c \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} b & e & g \\ k & h & \eta \end{Bmatrix} \times \\ & \times \sum_{N_1 J_1 N_2 J_2} \begin{Bmatrix} d & a & h \\ j'_1 & j_1 & J_1 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} e & b & g \\ j'_2 & j_2 & J_2 \end{Bmatrix} \langle n'_1 j'_1 | \hat{\mathbf{P}}_a(1) \| N_1 J_1 \rangle \langle N_1 J_1 \| \hat{\mathbf{R}}_d(1) \| n_1 j_1 \rangle \langle n'_2 j'_2 | \hat{\mathbf{Q}}_b(2) \| N_2 J_2 \rangle \langle N_2 J_2 \| \hat{\mathbf{S}}_e(2) \| n_2 j_2 \rangle, \end{aligned} \quad (36)$$

$$\begin{aligned} & \langle n'_1 j'_1 n'_2 j'_2 j' m' | \{ \{ \hat{P}_a(1) \otimes \hat{Q}_b(2) \}_c \otimes \hat{R}_d(1) \}_f \otimes \hat{S}_e(2) \}_{kx} | n_1 j_1 n_2 j_2 j m \rangle = \\ & = (-1)^{c+d-e-j-j'} \Pi_{cfjk} C_{jm' kx}^{j' m'} \sum_{gh} \Pi_{gh}^2 \begin{Bmatrix} a & d & h \\ f & b & c \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} b & e & g \\ k & h & f \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} j_1 & j'_1 & h \\ j_2 & j'_2 & g \\ j & j' & k \end{Bmatrix} \sum_{N_1 J_1 N_2 J_2} \begin{Bmatrix} d & a & h \\ j'_1 & j_1 & J_1 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} e & b & g \\ j'_2 & j_2 & J_2 \end{Bmatrix} \times \\ & \langle n'_1 j'_1 | \hat{P}_a(1) \| N_1 J_1 \rangle \langle N_1 J_1 | \hat{R}_d(1) \| n_1 j_1 \rangle \langle n'_2 j'_2 | \hat{Q}_b(2) \| N_2 J_2 \rangle \langle N_2 J_2 | \hat{S}_e(2) \| n_2 j_2 \rangle, \end{aligned} \quad (37)$$

$$\begin{aligned} & \langle n'_1 j'_1 n'_2 j'_2 j' m' | \{ \{ \hat{P}_a(1) \otimes \hat{Q}_b(2) \}_c \otimes \hat{R}_d(1) \}_f \cdot \hat{S}_f(2) | n_1 j_1 n_2 j_2 j m \rangle = \\ & = \delta_{j' j} \delta_{m' m} (-1)^{c+d-b+f-j+j'+j_2} \Pi_{cf} \sum_g \Pi_g^2 \begin{Bmatrix} a & b & c \\ f & d & g \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} j'_1 & i_1 & g \\ j_2 & j'_2 & j \end{Bmatrix} \sum_{N_1 J_1 N_2 J_2} \begin{Bmatrix} a & d & g \\ j_1 & j'_1 & J_1 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} b & f & g \\ j_2 & j'_2 & J_2 \end{Bmatrix} \times \\ & \times \langle n'_1 j'_1 | \hat{P}_a(1) \| N_1 J_1 \rangle \langle N_1 J_1 | \hat{R}_d(1) \| n_1 j_1 \rangle \langle n'_2 j'_2 | \hat{Q}_b(2) \| N_2 J_2 \rangle \langle N_2 J_2 | \hat{S}_f(2) \| n_2 j_2 \rangle. \end{aligned} \quad (38)$$

Матричные элементы неприводимых тензорных произведений с другими схемами связи операторов можно вычислить, применяя формулы для пересвязки четырех неприводимых тензоров 3.3 (3) и 3.3 (5).

Если волновые функции и операторы, используемые при вычислениях, зависят от переменных большего числа подсистем, определение матричных элементов сводится к последовательному применению приведенных выше формул.

### 5. Матричные элементы операторов, зависящих от переменных одной из подсистем

Пусть  $\hat{P}_{\alpha\alpha}(1)$  — оператор, зависящий от переменных подсистемы 1. Матричные элементы такого оператора диагональны по квантовым числам, определяющим состояние подсистемы 2.

$$\langle n'_1 j'_1 m'_1; n'_2 j'_2 m'_2 | \hat{P}_{\alpha\alpha}(1) | n_1 j_1 m_1; n_2 j_2 m_2 \rangle = \delta_{n'_2 n_2} \delta_{j'_2 j_2} \delta_{m'_2 m_2} \langle n'_1 j'_1 m'_1 | \hat{P}_{\alpha\alpha}(1) | n_1 j_1 m_1 \rangle. \quad (39)$$

Дальнейшее вычисление сводится к применению формул, приведенных выше.

Если состояние определяется полным угловым моментом  $\hat{\mathbf{j}} = \hat{\mathbf{j}}_1 + \hat{\mathbf{j}}_2$  и его проекцией  $m$ , то матричные элементы имеют вид

$$\langle n'_1 j'_1 n'_2 j'_2 j' m' | \hat{P}_{\alpha\alpha}(1) | n_1 j_1 n_2 j_2 j m \rangle = \delta_{j'_2 j_2} \delta_{n'_2 n_2} (-1)^{j+j'+j_2-a} \Pi_j C_{jm' \alpha\alpha}^{j' m'} \begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & j \\ j' & a & j'_1 \end{Bmatrix} \langle n'_1 j'_1 | \hat{P}_a(1) \| n_1 j_1 \rangle. \quad (40)$$

Матричные элементы прямого тензорного произведения операторов:

$$\begin{aligned} \langle n'_1 j'_1 n'_2 j'_2 j' m' | \hat{P}_{\alpha\alpha}(1) \hat{Q}_{b\beta}(1) | n_1 j_1 n_2 j_2 j m \rangle & = \delta_{n'_2 n_2} \delta_{j'_2 j_2} (-1)^{j_2+j-j_1+2a+2b} \Pi_j \sum_{c\gamma} \Pi_c C_{jm' c\gamma}^{j' m'} C_{\alpha\alpha b\beta}^{c\gamma} \begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & j \\ j' & c & j'_1 \end{Bmatrix} \times \\ & \times \sum_{NJ} \begin{Bmatrix} a & b & c \\ j_1 & j'_1 & J \end{Bmatrix} \langle n'_1 j'_1 | \hat{P}_a(1) \| NJ \rangle \langle NJ | \hat{Q}_b(1) \| n_1 j_1 \rangle. \end{aligned} \quad (41)$$

Матричные элементы неприводимого тензорного произведения двух операторов

$$\begin{aligned} \langle n'_1 j'_1 n'_2 j'_2 j' m' | \{ \hat{P}_a(1) \otimes \hat{Q}_b(1) \}_{c\gamma} | n_1 j_1 n_2 j_2 j m \rangle & = \delta_{n'_2 n_2} \delta_{j'_2 j_2} (-1)^{j_2+j-j_1+2c} \Pi_{jc} C_{jm' c\gamma}^{j' m'} \begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & j \\ j' & c & j'_1 \end{Bmatrix} \times \\ & \times \sum_{NJ} \begin{Bmatrix} a & b & c \\ j_1 & j'_1 & J \end{Bmatrix} \langle n'_1 j'_1 | \hat{P}_a(1) \| NJ \rangle \langle NJ | \hat{Q}_b(1) \| n_1 j_1 \rangle, \end{aligned} \quad (42)$$

$$\begin{aligned} \langle n'_1 j'_1 n'_2 j'_2 j' m' | \{ \hat{P}_a(1) \cdot \hat{Q}_b(1) \} | n_1 j_1 n_2 j_2 j m \rangle & = \delta_{n'_2 n_2} \delta_{j'_2 j_2} \delta_{j'_1 j_1} \delta_{j' j} \delta_{m' m} \times \\ & \times \frac{1}{\Pi_{j_1}^2} (-1)^{-j_1} \sum_{NJ} (-1)^J \langle n'_1 j'_1 | \hat{P}_a(1) \| NJ \rangle \langle NJ | \hat{Q}_a(1) \| n_1 j_1 \rangle. \end{aligned} \quad (43)$$

Матричные элементы неприводимого тензорного произведения трех операторов:

$$\begin{aligned} \langle n'_1 j'_1 n'_2 j'_2 j' m' | \{ \{ \hat{P}_a(1) \otimes \hat{Q}_b(1) \}_c \otimes \hat{R}_d(1) \}_f \varphi | n_1 j_1 n_2 j_2 j m \rangle & = \delta_{n'_2 n_2} \delta_{j'_2 j_2} (-1)^{j+j_1-j'_1+j_2+c} \Pi_{jfc} C_{jm' c\gamma}^{j' m'} \begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & j \\ j' & f & j'_1 \end{Bmatrix} \times \\ & \times \sum_{N_1 J_1 N_2 J_2} (-1)^{j_2} \begin{Bmatrix} a & b & c \\ J_2 & j'_1 & J_1 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} d & c & f \\ j'_1 & j_1 & J_2 \end{Bmatrix} \langle n'_1 j'_1 | \hat{P}_a(1) \| N_1 J_1 \rangle \langle N_1 J_1 | \hat{Q}_b(1) \| N_2 J_2 \rangle \langle N_2 J_2 | \hat{R}_d(1) \| n_1 j_1 \rangle, \end{aligned} \quad (44)$$

$$\begin{aligned} \langle n'_1 j'_1 n'_2 j'_2 j' m' | \{ (\hat{\mathbf{P}}_a(1) \otimes \hat{\mathbf{Q}}_b(1))_c \cdot \hat{\mathbf{R}}_c(1) \} | n_1 j_1 n_2 j_2 j m \rangle = & \delta_{n'_2 n_2} \delta_{j'_2 j_2} \delta_{j' m' m} (-1)^{-c+2j_1} \times \\ & \times \frac{\Pi_c}{\Pi_{j_1}^2} \times \sum_{N_1 N_2 J} \begin{Bmatrix} a & b & c \\ J_2 & j_1 & J_1 \end{Bmatrix} \langle n'_1 j'_1 | \hat{\mathbf{P}}_a(1) \| N_1 J_1 \rangle \langle N_1 J_1 | \hat{\mathbf{Q}}_b(1) \| N_2 J_2 \rangle \langle N_2 J_2 | \hat{\mathbf{R}}_c(1) \| n_1 j_1 \rangle. \end{aligned} \quad (45)$$

Матричные элементы неприводимого тензорного произведения четырех операторов:

$$\begin{aligned} \langle n'_1 j'_1 n'_2 j'_2 j' m' | \{ \{ \hat{\mathbf{P}}_a(1) \otimes \hat{\mathbf{Q}}_b(1) \}_c \otimes \{ \hat{\mathbf{R}}_d(1) \otimes \hat{\mathbf{S}}_e(1) \}_f \}_{kx} | n_1 j_1 n_2 j_2 j m \rangle = & \delta_{n'_2 n_2} \delta_{j'_2 j_2} (-1)^{j+j'_1+j_2-c-f} \Pi_{cfkj} C_{jm' kx}^{j'_1 m'} \times \\ & \times \begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & j \\ j' & k & j'_1 \end{Bmatrix} \sum_{\substack{N_1 N_2 N_3 \\ J_1 J_2 J_3}} (-1)^{2J_2} \begin{Bmatrix} a & b & c \\ J_2 & j'_1 & J_1 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} e & d & f \\ J_2 & j_1 & J_3 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} f & c & k \\ j'_1 & j_1 & J_2 \end{Bmatrix} \langle n'_1 j'_1 | \hat{\mathbf{P}}_a(1) \| N_1 J_1 \rangle \times \\ & \times \langle N_1 J_1 | \hat{\mathbf{Q}}_b(1) \| N_2 J_2 \rangle \langle N_2 J_2 | \hat{\mathbf{R}}_d(1) \| N_3 J_3 \rangle \langle N_3 J_3 | \hat{\mathbf{S}}_e(1) \| n_1 j_1 \rangle, \end{aligned} \quad (46)$$

$$\begin{aligned} \langle n'_1 j'_1 n'_2 j'_2 j' m' | \{ \{ \hat{\mathbf{P}}_a(1) \otimes \hat{\mathbf{Q}}_b(1) \}_c \cdot \{ \hat{\mathbf{R}}_d(1) \otimes \hat{\mathbf{S}}_e(1) \}_c \} | n_1 j_1 n_2 j_2 j m \rangle = & \delta_{n'_2 n_2} \delta_{j'_2 j_2} \delta_{j' m' m} \times \\ & \times \frac{(-1)^{-j_1}}{\Pi_{j_1}^2} \sum_{\substack{N_1 N_2 N_3 \\ J_1 J_2 J_3}} (-1)^{J_2} \begin{Bmatrix} a & b & c \\ J_2 & j_1 & J_1 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} e & d & c \\ J_2 & j_1 & J_3 \end{Bmatrix} \Pi_c^2 \cdot \langle n'_1 j'_1 | \hat{\mathbf{P}}_a(1) \| N_1 J_1 \rangle \langle N_1 J_1 | \hat{\mathbf{Q}}_b(1) \| N_2 J_2 \rangle \times \\ & \times \langle N_2 J_2 | \hat{\mathbf{R}}_d(1) \| N_3 J_3 \rangle \langle N_3 J_3 | \hat{\mathbf{S}}_e(1) \| n_1 j_1 \rangle, \end{aligned} \quad (47)$$

$$\begin{aligned} \langle n'_1 j'_1 n'_2 j'_2 j' m' | \{ \{ \{ \hat{\mathbf{P}}_a(1) \otimes \hat{\mathbf{Q}}_b(1) \}_c \otimes \hat{\mathbf{R}}_d(1) \}_f \otimes \hat{\mathbf{S}}_e(1) \}_{kx} | n_1 j_1 n_2 j_2 j m \rangle = & \delta_{n'_2 n_2} \delta_{j'_2 j_2} (-1)^{j_1+j_2+j+f+c} \Pi_{fckj} C_{jm' kx}^{j'_1 m'} \times \\ & \times \begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & j \\ j' & k & j'_1 \end{Bmatrix} \sum_{\substack{N_1 N_2 N_3 \\ J_1 J_2 J_3}} (-1)^{J_2+J_3} \begin{Bmatrix} a & b & c \\ J_2 & j'_1 & J_1 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} d & c & f \\ j'_1 & J_3 & J_2 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} e & f & k \\ j'_1 & j_1 & J_3 \end{Bmatrix} \langle n'_1 j'_1 | \hat{\mathbf{P}}_a(1) \| N_1 J_1 \rangle \times \\ & \times \langle N_1 J_1 | \hat{\mathbf{Q}}_b(1) \| N_2 J_2 \rangle \langle N_2 J_2 | \hat{\mathbf{R}}_d(1) \| N_3 J_3 \rangle \langle N_3 J_3 | \hat{\mathbf{S}}_e(1) \| n_1 j_1 \rangle, \end{aligned} \quad (48)$$

$$\begin{aligned} \langle n'_1 j'_1 n'_2 j'_2 j' m' | \{ \{ \{ \hat{\mathbf{P}}_a(1) \otimes \hat{\mathbf{Q}}_b(1) \}_c \otimes \hat{\mathbf{R}}_d(1) \}_f \cdot \hat{\mathbf{S}}_f \} | n_1 j_1 n_2 j_2 j m \rangle = & \delta_{n'_2 n_2} \delta_{j'_2 j_2} \delta_{j' m' m} (-1)^{c-f-j_1} \times \\ & \times \frac{\Pi_{fc}}{\Pi_{j_1}^2} \sum_{\substack{N_1 N_2 N_3 \\ J_1 J_2 J_3}} (-1)^{J_2} \begin{Bmatrix} a & b & c \\ J_2 & j_1 & J_1 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} d & c & f \\ j_1 & J_3 & J_2 \end{Bmatrix} \langle n'_1 j'_1 | \hat{\mathbf{P}}_a(1) \| N_1 J_1 \rangle \langle N_1 J_1 | \hat{\mathbf{Q}}_b(1) \| N_2 J_2 \rangle \times \\ & \times \langle N_2 J_2 | \hat{\mathbf{R}}_d(1) \| N_3 J_3 \rangle \langle N_3 J_3 | \hat{\mathbf{S}}_f(1) \| n_1 j_1 \rangle. \end{aligned} \quad (49)$$

Матричные элементы тензорных произведений с другой связью операторов можно получить из вышеприведенных формул, используя правила пересвязки и коммутации неприводимых тензоров (гл. 3).

### 13.2. МАТРИЧНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ ОСНОВНЫХ ТЕНЗОРНЫХ ОПЕРАТОРОВ

#### 1

В данном параграфе приведены матричные элементы следующих операторов и их тензорных произведений:

- единичного оператора  $\hat{\mathbf{I}}$ ;
- единичного векторного оператора  $\hat{\mathbf{n}} \equiv \hat{\mathbf{n}}_1$ ;
- операторов градиента  $\hat{\mathbf{V}} \equiv \hat{\mathbf{V}}_1$  и  $\hat{\mathbf{V}}_2 \equiv (\hat{\mathbf{V}}_2)_1$ ;
- оператора полного углового момента  $\hat{\mathbf{J}} \equiv \hat{\mathbf{J}}_1$ ;
- оператора орбитального момента  $\hat{\mathbf{L}} = \hat{\mathbf{L}}_1$ ;
- оператора спинового момента  $\hat{\mathbf{S}} \equiv \hat{\mathbf{S}}_1$ ;
- оператора сферической функции  $\hat{Y}_{lm}(\vartheta, \varphi)$ .

Все матричные элементы вычисляются с помощью формул, приведенных в параграфе 13.1.

Волновые функции, описывающие состояние системы, в общем случае могут зависеть как от пространственных переменных  $r, \vartheta, \varphi$ , так и от спиновых  $\xi$ . Они могут быть представлены в виде

$$\Psi(r, \vartheta, \varphi; \xi) = \Psi_n(r) Y_{lm}(\vartheta, \varphi) \chi_{sm_s}(\xi) = \langle r, \vartheta, \varphi; \xi | n, l, m; sm_s \rangle, \quad (1)$$

$l$  и  $m$  — орбитальный момент и его проекция;  $s$  и  $m_s$  — спиновый момент и его проекция;  $n$  — совокупность остальных квантовых чисел, не определяющих спин-угловое состояние системы.

Функции (1) определяют  $(nlmsm_s)$  — представление матричных элементов оператора.

Если угловые моменты  $\hat{L}$  и  $\hat{S}$  связаны в полный угловой момент  $\hat{J}$  с проекцией  $M$ , волновые функции, описывающие состояние системы имеют вид

$$\Phi(r, \vartheta, \varphi; \xi) = \Psi_n(r) \sum_{m m_s} C_{l m s m_s}^{JM} Y_{lm}(\vartheta, \varphi) \chi_{s m_s}(\xi) = \Psi_n(r) Y_{JM}^{ls}(\vartheta, \varphi) = \langle r, \vartheta, \varphi; \xi | n, l, s, J, M \rangle. \quad (2)$$

Волновые функции (2) определяют  $(nlsJM)$ -представление матричных элементов оператора. Если оператор действует только на переменные  $r, \vartheta, \varphi$ , вычисление его матричных элементов в  $(nlms_s)$ -представлении сводится к вычислению матричных элементов в  $(nlm)$ -представлении:

$$\langle n'l'm'; s'm'_s | \hat{\mathfrak{M}}_{kx}(r, \vartheta, \varphi) | nlm; sm_s \rangle = \delta_{ss'} \delta_{m'_s m_s} \langle n'l'm' | \hat{\mathfrak{M}}_{kx}(r, \vartheta, \varphi) | nlm \rangle. \quad (3)$$

Если же оператор зависит только от спиновых переменных  $\xi$ , имеем аналогичное соотношение

$$\langle n'l'm'; sm_s | \hat{\mathfrak{N}}_{kx}(\xi) | nlm; sm_s \rangle = \delta_{ll'} \delta_{mm'} \langle n'l'm' | \hat{\mathfrak{N}}_{kx}(\xi) | nsm_s \rangle. \quad (4)$$

Поэтому всюду ниже матричные элементы операторов, зависящих только от пространственных или только от спиновых переменных, будут вычислены в  $(nlm)$ - или в  $(nsm_s)$ -представлениях соответственно.

Для вычисления матричных элементов операторов  $\hat{\mathfrak{M}}_{kx}(r, \vartheta, \varphi)$  и  $\hat{\mathfrak{N}}_{kx}(\xi)$  в  $(nlsJM)$ -представлении нужно воспользоваться формулами

$$\langle n'l's'J' | \hat{\mathfrak{M}}_k | nlsJ \rangle = \delta_{ss'} (-1)^{J+l'+s+k} \Pi_{JJ'} \left\{ \begin{matrix} l & s & J \\ J' & k & l' \end{matrix} \right\} \langle n'l' | \hat{\mathfrak{M}}_k | nl \rangle, \quad (5)$$

$$\langle n'l's'J' | \hat{\mathfrak{N}}_k | nlsJ \rangle = \delta_{ll'} (-1)^{J+l'+s+k} \Pi_{JJ'} \left\{ \begin{matrix} s & l & J \\ J' & k & s' \end{matrix} \right\} \langle n's' | \hat{\mathfrak{N}}_k | ns \rangle. \quad (6)$$

Если некоторый оператор  $\hat{R}_{\alpha\alpha}(r, \vartheta, \varphi; \xi)$  действует как на пространственные  $r, \vartheta, \varphi$ , так и на спиновые  $\xi$  переменные, матричные элементы такого оператора даны в  $(nlsJM)$ -представлении. Вычисление матричных элементов оператора  $\hat{R}_{\alpha\alpha}$  в  $(nlms_s)$ -представлении можно произвести либо используя следующее связующее соотношение:

$$\langle n'l'm'; s'm'_s | \hat{R}_{\alpha\alpha}(r, \vartheta, \varphi; \xi) | nlm; sm_s \rangle = \sum_{\substack{J'M \\ J'M'}} C_{l m s m_s}^{JM} C_{l' m' s' m'_s}^{J'M'} \langle n'l's'J'M' | \hat{R}_{\alpha\alpha}(r, \vartheta, \varphi; \xi) | nlsJM \rangle, \quad (7)$$

либо пользуясь непосредственно соответствующими формулами предыдущего параграфа.

Ниже для упрощения записи опущены аргументы операторов в выражениях для матричных элементов. Кроме того, опущен индекс  $n$  всюду, где это несущественно.

## 2. Матричные элементы единичного оператора $\hat{\mathbf{I}}$

Единичный оператор  $\hat{\mathbf{I}}$  представляет собой неприводимый тензорный оператор ранга 0, не действующий на переменные  $r, \vartheta, \varphi, \xi$ . Поэтому в любом представлении отличны от нуля и равны единице только диагональные по всем квантовым числам матричные элементы

$$\langle \lambda' | \hat{\mathbf{I}} | \lambda \rangle = \langle \lambda' | \lambda \rangle = \delta_{\lambda\lambda'}. \quad (8)$$

Соответственно приведенные матричные элементы единичного оператора имеют вид

$$\langle l \| \hat{\mathbf{I}} \| l \rangle = \sqrt{2l+1}, \quad \langle s \| \hat{\mathbf{I}} \| s \rangle = \sqrt{2s+1}, \quad \langle l's'J \| \hat{\mathbf{I}} \| lsJ \rangle = \sqrt{2J+1} \delta_{ll'} \delta_{ss'}. \quad (9)$$

## 3. Матричные элементы единичного вектора $\hat{n}(\vartheta, \varphi) \equiv \hat{n}_1(\vartheta, \varphi)$

Единичный векторный оператор  $\hat{n}_1(\vartheta, \varphi)$  действует только на переменные  $\vartheta, \varphi$ . Матричные элементы циклических компонент оператора  $\hat{n}_1(\vartheta, \varphi)$  в  $(lm)$ -представлении имеют вид

$$\langle l'm' | \hat{n}_{1\mu} | lm \rangle = \frac{\langle l' \| \hat{n}_1 \| l \rangle}{\sqrt{2l'+1}} C_{l'm'1\mu}^{l'm}, \quad (10)$$

где

$$\langle l' \| \hat{n}_1 \| l \rangle = \sqrt{2l'+1} C_{l'010}^{l'0}. \quad (11)$$



Учитывая соотношения (5), получаем приведенный матричный элемент в  $(lsJ)$ -представлении.

$$\langle l's'J' \| \hat{n}_1 \| lsJ \rangle = \delta_{s's'} (-1)^{s+J+l'+1} \sqrt{(2J+1)(2J'+1)(2l+1)} C_{l'0l'0}^{l's'J'} \begin{Bmatrix} l & s & J \\ J' & 1 & l' \end{Bmatrix}. \quad (12)$$

Матричные элементы (10) отличны от нуля только в том случае, если  $l' = l \pm 1$ . В развернутой записи соотношение (10) с учетом (11) имеет вид

$$\begin{aligned} \langle l+1m' | \hat{n}_{1\pm 1} | lm \rangle &= \sqrt{\frac{(l+m+1)(l+m+2)}{2(2l+1)(2l+3)}} \delta_{m'm\pm 1}, \\ \langle l+1m' | \hat{n}_{10} | lm \rangle &= \sqrt{\frac{(l-m+1)(l+m+1)}{(2l+1)(2l+3)}} \delta_{m'm}, \\ \langle l-1m' | \hat{n}_{1\pm 1} | lm \rangle &= -\sqrt{\frac{(l\mp m-1)(l\mp m)}{2(2l+1)(2l-1)}} \delta_{m'm\pm 1}, \\ \langle l-1m' | \hat{n}_{10} | lm \rangle &= \sqrt{\frac{(l-m)(l+m)}{(2l+1)(2l-1)}} \delta_{m'm}. \end{aligned} \quad (13)$$

Остальные матричные элементы циклических компонент оператора  $\hat{n}_1(\vartheta, \varphi)$  равны нулю. Матричные элементы декартовых компонент оператора  $\hat{n}_1(\vartheta, \varphi)$ :

$$\langle l'm \pm 1 | \hat{n}_x | lm \rangle = \mp \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(l \pm m + 1)(l \pm m + 2)}{(2l+1)(2l+3)}} \delta_{l'l \pm 1} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(l \mp m - 1)(l \mp m)}{(2l+1)(2l-1)}} \delta_{l'l-1}, \quad (14)$$

$$\langle l'm \pm 1 | \hat{n}_y | lm \rangle = \frac{i}{2} \sqrt{\frac{(l \pm m + 1)(l \pm m + 2)}{(2l+1)(2l+3)}} \delta_{l'l \pm 1} - \frac{i}{2} \sqrt{\frac{(l \mp m - 1)(l \mp m)}{(2l+1)(2l-1)}} \delta_{l'l-1}, \quad (15)$$

$$\langle l'm | \hat{n}_z | lm \rangle = \sqrt{\frac{(l-m+1)(l+m+1)}{(2l+1)(2l+3)}} \delta_{l'l+1} + \sqrt{\frac{(l-m)(l+m)}{(2l+1)(2l-1)}} \delta_{l'l-1}. \quad (16)$$

Остальные матричные элементы декартовых компонент оператора  $\hat{n}_1(\vartheta, \varphi)$  равны нулю. Матричные элементы прямого произведения циклических компонент двух операторов  $\hat{n}_1(\vartheta, \varphi)$ :

$$\langle l'm' | \hat{n}_{1\mu} \hat{n}_{1\nu} | lm \rangle = \frac{(-1)^\mu}{3} \delta_{l'l'} \delta_{m'm'} \delta_{\mu-\nu} + \sqrt{\frac{2}{3} \frac{2l+1}{2l'+1}} C_{l'0l'0}^{l'm'0} C_{l'0l'0}^{l'm'0} C_{l'm'k}^{l'm'k}. \quad (17)$$

Эти матричные элементы отличны от нуля только в том случае, если  $l' = l, l \pm 2$ .

Матричные элементы прямого произведения декартовых компонент двух операторов  $\hat{n}_1(\vartheta, \varphi)$  выражаются через матричные элементы (17) по следующим формулам:

$$\begin{aligned} \langle l'm \pm 2 | \hat{n}_x \hat{n}_x | lm \rangle &= \frac{1}{2} \langle l'm \pm 2 | \hat{n}_{1\pm 1} \hat{n}_{1\pm 1} | lm \rangle, \\ \langle l'm | \hat{n}_x \hat{n}_x | lm \rangle &= -\langle l'm | \hat{n}_{1\pm 1} \hat{n}_{1\mp 1} | lm \rangle, \\ \langle l'm \pm 2 | \hat{n}_y \hat{n}_y | lm \rangle &= -\langle l'm \pm 2 | \hat{n}_{1\pm 1} \hat{n}_{1\pm 1} | lm \rangle, \\ \langle l'm | \hat{n}_y \hat{n}_y | lm \rangle &= -\langle l'm | \hat{n}_{1\pm 1} \hat{n}_{1\mp 1} | lm \rangle, \\ \langle l'm | \hat{n}_z \hat{n}_z | lm \rangle &= \langle l'm | \hat{n}_{10} \hat{n}_{10} | lm \rangle, \\ \langle l'm \pm 2 | \hat{n}_x \hat{n}_y | lm \rangle &= \mp \frac{i}{2} \langle l'm \pm 2 | \hat{n}_{1\pm 1} \hat{n}_{1\pm 1} | lm \rangle, \\ \langle l'm \pm 1 | \hat{n}_x \hat{n}_z | lm \rangle &= \mp \frac{1}{\sqrt{2}} \langle l'm \pm 1 | \hat{n}_{1\pm 1} \hat{n}_{10} | lm \rangle, \\ \langle l'm \pm 1 | \hat{n}_y \hat{n}_z | lm \rangle &= \frac{i}{\sqrt{2}} \langle l'm \pm 1 | \hat{n}_{1\pm 1} \hat{n}_{10} | lm \rangle. \end{aligned} \quad (18)$$

Матричные элементы неприводимого тензорного произведения  $k$  единичных векторных операторов  $\hat{n}_1(\vartheta, \varphi)$ :

$$\langle l'm' | \{ \dots \{ \{ \hat{n}_1 \otimes \hat{n}_1 \}_{q_2} \otimes \hat{n}_1 \}_{q_3} \otimes \dots \otimes \hat{n}_1 \}_{q_k} | lm \rangle = \sqrt{\frac{2l+1}{2l'+1}} C_{l'0l'0}^{l'm'0} \prod_{i=2}^k C_{l'0l'0}^{q_i 0} C_{l'm'q_k}^{l'm'k}, \quad (19)$$

где  $q_1 = 1$ . В частности, если  $q_2 = 2$ ,  $q_3 = 3$ ,  $q_4 = 4, \dots, q_k = k$ , то

$$\langle l'm' | \{ \dots \{ \{ \hat{n}_1 \otimes \hat{n}_1 \}_2 \otimes \hat{n}_1 \}_3 \otimes \dots \otimes \hat{n}_1 \}_{kx} | lm \rangle = \sqrt{\frac{k!}{(2k-1)!!} \frac{2l+1}{2l'+1}} C_{l_0 k_0}^{l' l} C_{l m k x}^{l' m'} \quad (20)$$

Из формулы (19) следуют два очевидных равенства

$$\begin{aligned} \langle l'm' | (\hat{n} \cdot \hat{n}) | lm \rangle &= \delta_{ll'} \delta_{mm'}, \\ \langle l'm' | [\hat{n} \times \hat{n}] | lm \rangle &= 0. \end{aligned}$$

#### 4. Матричные элементы оператора $\hat{V}(r, \vartheta, \varphi) \equiv \hat{V}_1(r, \vartheta, \varphi)$

Оператор  $\hat{V}_1(r, \vartheta, \varphi)$  действует только на переменные  $r, \vartheta, \varphi$ . Матричные элементы циклических компонент этого оператора можно представить в виде

$$\langle n'l'm' | \hat{V}_{1\mu} | nlm \rangle = \frac{\langle n'l' \| \hat{V}_1 \| nl \rangle}{\sqrt{2l'+1}} C_{l m 1 \mu}^{l' m'}, \quad (21)$$

где

$$\langle n'l' \| \hat{V}_1 \| nl \rangle = \sqrt{l+1} A_{n'l'nl} \delta_{l'l+1} - \sqrt{l} B_{n'l'nl} \delta_{l'l-1}. \quad (22)$$

Величины  $A_{n'l'nl}$  и  $B_{n'l'nl}$  в формуле (22) представляют собой следующие интегралы:

$$\begin{aligned} A_{n'l'nl} &= \int_0^\infty \Psi_{n'l'}^*(r) \left( \frac{\partial}{\partial r} - \frac{l}{r} \right) \Psi_{nl}(r) r^2 dr, \\ B_{n'l'nl} &= \int_0^\infty \Psi_{n'l'}^*(r) \left( \frac{\partial}{\partial r} + \frac{l+1}{r} \right) \Psi_{nl}(r) r^2 dr, \end{aligned} \quad (23)$$

$\Psi_{nl}(r)$  — радиальная часть волновой функции.

Приведенный матричный элемент оператора  $\hat{V}_1(r, \vartheta, \varphi)$  в  $(nlsJM)$ -представлении можно получить, если в формуле (5) под оператором  $\hat{\mathcal{M}}_k$  понимать оператор  $\hat{V}_1$ .

Матричные элементы (21) отличны от нуля только в том случае, если  $l' = l \pm 1$ .

В развернутой записи соотношение (21) с учетом (22) можно представить в виде

$$\begin{aligned} \langle n'l+1m' | \hat{V}_{1\pm 1} | nlm \rangle &= \sqrt{\frac{(l \pm m + 1)(l \pm m + 2)}{2(2l+1)(2l+3)}} A_{n'l+1, nl} \delta_{m'm \pm 1}, \\ \langle n'l+1m' | \hat{V}_{10} | nlm \rangle &= \sqrt{\frac{(l-m+1)(l+m+1)}{(2l+1)(2l+3)}} A_{n'l+1, nl} \delta_{m'm}, \\ \langle n'l-1m' | \hat{V}_{1\pm 1} | nlm \rangle &= -\sqrt{\frac{(l \mp m - 1)(l \mp m)}{2(2l+1)(2l-1)}} B_{n'l-1, nl} \delta_{m'm \pm 1}, \\ \langle n'l-1m' | \hat{V}_{10} | nlm \rangle &= \sqrt{\frac{(l-m)(l+m)}{(2l+1)(2l-1)}} B_{n'l-1, nl} \delta_{m'm}. \end{aligned} \quad (24)$$

Остальные матричные элементы равны нулю.

Матричные элементы декартовых компонент оператора  $\hat{V}_1(r, \vartheta, \varphi)$ :

$$\begin{aligned} \langle n'l'm \pm 1 | \hat{V}_x | nlm \rangle &= \mp \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(l \pm m + 1)(l \pm m + 2)}{(2l+1)(2l+3)}} A_{n'l+1, nl} \delta_{l'l+1} \pm \\ &\pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(l \mp m - 1)(l \mp m)}{(2l+1)(2l-1)}} B_{n'l-1, nl} \delta_{l'l-1}, \end{aligned} \quad (25)$$

$$\langle n'l'm \pm 1 | \hat{V}_y | nlm \rangle = \frac{i}{2} \sqrt{\frac{(l \pm m + 1)(l \pm m + 2)}{(2l+1)(2l+3)}} A_{n'l+1, nl} \delta_{l'l+1} - \frac{i}{2} \sqrt{\frac{(l \mp m - 1)(l \mp m)}{(2l+1)(2l-1)}} B_{n'l-1, nl} \delta_{l'l-1},$$

$$\langle n'l'm | \hat{V}_z | nlm \rangle = \sqrt{\frac{(l-m+1)(l+m+1)}{(2l+1)(2l+3)}} A_{n'l+1, nl} \delta_{l'l+1} + \sqrt{\frac{(l-m)(l+m)}{(2l+1)(2l-1)}} B_{n'l-1, nl} \delta_{l'l-1}.$$

Остальные матричные элементы равны нулю.

Более простой вид имеют матричные элементы угловой части оператора  $\hat{V}(r, \vartheta, \varphi)$ . В соответствии с 1.3. (10)

$$\hat{V}_\varrho = -i\mathbf{n} \times \hat{\mathbf{L}}$$

и не зависит от  $r$ . Матричные элементы циклических компонент оператора  $\hat{V}_\varrho \equiv (\hat{V}_\varrho)_1$  определяются из соотношения

$$\langle l'm' | (\hat{V}_\varrho)_{1\mu} | lm \rangle = \frac{\langle l' \| (\hat{V}_\varrho)_1 \| l \rangle}{\sqrt{2l'+1}} C_{lm1\mu}^{l'm'}, \quad (26)$$

где

$$\langle l' \| (\hat{V}_\varrho)_1 \| l \rangle = -\{l\sqrt{l+1}\delta_{l'l+1} + (l+1)\sqrt{l}\delta_{l'l-1}\}. \quad (27)$$

Формулу (27) можно получить из (22), если произвести следующую формальную замену:

$$A_{n'l', nl} \rightarrow -l, \quad B_{n'l', nl} \rightarrow l+1. \quad (28)$$

Аналогично формулы (24), (25) окажутся справедливыми для оператора  $(\hat{V}_\varrho)_1$ , если в них произвести ту же замену (28).

Матричные элементы прямого произведения циклических компонент двух операторов

$$\begin{aligned} \langle l'm' | (\hat{V}_\varrho)_{1\mu} (\hat{V}_\varrho)_{1\nu} | lm \rangle &= \frac{(-1)^{l-\mu}}{3} l(l+1) \delta_{ll'} \delta_{mm'} \delta_{\mu-\nu} + C_{1\mu 1\nu}^{2x} \left\{ \frac{l(l+1)\sqrt{(l+1)(l+2)}}{\sqrt{(2l+3)(2l+5)}} C_{lm2x}^{l'+2m'+x} \delta_{l'l+2} + \right. \\ &+ \left. \frac{1}{2l+1} \sqrt{\frac{l(l+1)}{6(2l-1)(2l+3)}} [4l^3 + 6l^2 - 4l - 3] C_{lm2x}^{l'+2m'+x} \delta_{ll'} + \frac{l(l+1)\sqrt{l(l-1)}}{\sqrt{(2l-1)(2l-3)}} C_{lm2x}^{l'-2m'+x} \delta_{l'l-2} \right\}. \quad (29) \end{aligned}$$

Матричные элементы прямого произведения декартовых компонент двух операторов  $(\hat{V}_\varrho)_1$  связаны с матричными элементами прямого произведения циклических компонент формулами (18), в которых надо произвести замену  $\hat{n}_i \hat{n}_k \rightarrow (\hat{V}_\varrho)_i (\hat{V}_\varrho)_k$  ( $i, k = x, y, z$ ).

Матричные элементы неприводимого тензорного произведения двух операторов  $(\hat{V}_\varrho)_1$ :

$$\langle l'm' | ((\hat{V}_\varrho)_1 \otimes (\hat{V}_\varrho)_1)_{kx} | lm \rangle = (-1)^{k+l+l'} \sqrt{\frac{2k+1}{2l'+1}} C_{lmkx}^{l'm'} \sum_{l''} \left\{ \begin{matrix} 1 & 1 & k \\ l' & l & l'' \end{matrix} \right\} \langle l' \| (\hat{V}_\varrho)_1 \| l'' \rangle \langle l'' \| (\hat{V}_\varrho)_1 \| l \rangle. \quad (30)$$

В частности, для скалярного произведения операторов  $(\hat{V}_\varrho)_1$  получаем известный результат

$$\langle l'm' | ((\hat{V}_\varrho)_1 \cdot (\hat{V}_\varrho)_1) | lm \rangle = -\delta_{ll'} \delta_{mm'} l(l+1).$$

Матричные элементы прямого произведения циклических компонент операторов  $\hat{n}_1(\vartheta, \varphi)$  и  $(\hat{V}_\varrho)_1$ :

$$\begin{aligned} \langle l'm' | \hat{n}_{1\mu} (\hat{V}_\varrho)_{1\nu} | lm \rangle &= -\delta_{ll'} \sqrt{\frac{l(l+1)}{2}} \left\{ C_{1\mu 1\nu}^{1x} C_{lm1\nu}^{l'm'} + \sqrt{\frac{3}{(2l-1)(2l+3)}} C_{1\mu 1\nu}^{2x} C_{lm2x}^{l'm'} \right\} - \\ &- \delta_{l'l+2} l \sqrt{\frac{(l+1)(l+2)}{(2l+3)(2l+5)}} C_{1\mu 1\nu}^{2x} C_{lm2x}^{l'm'} + \delta_{l'l-2} (l+1) \sqrt{\frac{l(l-1)}{(2l-1)(2l-3)}} C_{1\mu 1\nu}^{2x} C_{lm2x}^{l'm'}. \quad (31) \end{aligned}$$

Матричные элементы прямого произведения  $(\hat{V}_\varrho)_{1\mu} \hat{n}_{1\nu}$ , отличаются от вышеприведенных на величину

$$\langle l'm' | \mathfrak{R}_{1\nu 1\mu}(\hat{n}_{1\nu}, (\hat{V}_\varrho)_{1\mu}) | lm \rangle,$$

которая представляет собой матричный элемент коммутатора прямого произведения компонент операторов  $\hat{n}_1(\vartheta, \varphi)$  и  $(\hat{V}_\varrho)_1$ .

$$\mathfrak{R}_{1\nu 1\mu}(\hat{n}_{1\nu}, (\hat{V}_\varrho)_{1\mu}) = -(\hat{V}_\varrho)_{1\mu} \hat{n}_{1\nu} = (-1)^{1+\nu} \frac{2}{3} \delta_{\nu-\mu} + 2 \sqrt{\frac{2\pi}{15}} C_{1\mu 1\nu}^{2\mu+\nu} Y_{2\mu+\nu}(\vartheta, \varphi) \quad (32)$$

и

$$\langle l'm' | \mathfrak{R}_{1\mu 1\nu}(\hat{n}_{1\nu}, (\hat{V}_\varrho)_{1\mu}) | lm \rangle = (-1)^{1+\nu} \frac{2}{3} \delta_{\nu-\mu} \delta_{ll'} \delta_{mm'} + \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{2l+1}{2l'+1} C_{l'0}^{l'0} C_{1\mu 1\nu}^{2\mu+\nu} C_{lm2\mu+\nu}^{l'm'}. \quad (32a)$$

Матричные элементы произведения декартовых компонент операторов  $\hat{n}_1(\vartheta, \varphi)$  и  $(\hat{V}_\varrho)_1$  можно получить путем преобразования этих произведений в произведения циклических компонент с помощью формул 1.2. (11) и последующего вычисления по формуле (31).

Матричные элементы неприводимого тензорного произведения операторов  $\hat{n}_1(\vartheta, \varphi)$  и  $(\hat{V}_2)_1$ :

$$\langle l'm' | \{ \hat{n}_1 \otimes (\hat{V}_2)_1 \}_{kx} | lm \rangle = (-1)^{l'+l+k} C_{lmkx}^{l'm'} \sqrt{\frac{2k+1}{2l'+1}} \sum_{l''} \sqrt{2l''+1} \begin{Bmatrix} 1 & l & l'' \\ l' & 1 & k \end{Bmatrix} C_{l''010}^{l'0} \langle l'' | (\hat{V}_2)_1 | l \rangle. \quad (33)$$

Приведенный матричный элемент оператора  $(\hat{V}_2)_1$  в выражении (33) дается формулой (27).

$$\langle l'm' | \{ (\hat{V}_2)_1 \otimes \hat{n}_1 \}_{kx} | lm \rangle = (-1)^k \langle l'm' | \{ \hat{n}_1 \otimes (\hat{V}_2)_1 \}_{kx} | lm \rangle - (-1)^k \langle l'm' | \mathcal{R}_{kx}^{11}(\hat{n}_1, (\hat{V}_2)_1) | lm \rangle. \quad (34)$$

Второй член в формуле (34) представляет собой матричный член коммутатора неприводимого тензорного произведения операторов  $\hat{n}_1(\vartheta, \varphi)$  и  $(\hat{V}_2)_1$ .

$$\mathcal{R}_{kx}^{11}(\hat{n}_1, (\hat{V}_2)_1) = \frac{2}{\sqrt{3}} \delta_{k0} + 2 \sqrt{\frac{2\pi}{15}} Y_{2x}(\vartheta, \varphi) \delta_{k2}. \quad (35)$$

Соответственно

$$\langle l'm' | \mathcal{R}_{kx}^{11}(\hat{n}_1, (\hat{V}_2)_1) | lm \rangle = \frac{2}{\sqrt{3}} \delta_{k0} \delta_{ll'} \delta_{mm'} + \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{2l+1}{2l'+1} C_{l020}^{l'0} C_{lm2x}^{l'm'} \delta_{k2}. \quad (36)$$

## 5. Матричные элементы оператора полного углового момента $\hat{J} \equiv \hat{J}_1$

Оператор полного углового момента  $\hat{J} = \hat{L} + \hat{S}$  действует как на пространственные, так и на спиновые переменные.

Его матричные элементы имеют вид

$$\langle l's'J'M' | \hat{J}_{1\mu} | lsJM \rangle = \frac{\langle l's'J' | \hat{J}_1 | lsJ \rangle}{\sqrt{2J'+1}} C_{JM1\mu}^{J'M'}, \quad (37)$$

где

$$\langle l's'J' | \hat{J}_1 | lsJ \rangle = \delta_{ll'} \delta_{ss'} \delta_{JJ'} \sqrt{J(J+1)(2J+1)}. \quad (38)$$

Будем использовать сокращенную запись матричных элементов (37) и (38), отбрасывая квантовые числа  $l$  и  $s$ . Тогда

$$\langle J'M' | \hat{J}_{1\mu} | JM \rangle = \frac{\langle J' | \hat{J}_1 | J \rangle}{\sqrt{2J'+1}} C_{JM1\mu}^{J'M'}, \quad (39)$$

где

$$\langle J' | \hat{J}_1 | J \rangle = \delta_{JJ'} \sqrt{J(J+1)(2J+1)}. \quad (40)$$

В развернутой записи матричные элементы (39) с учетом (40) изображаются следующими формулами:

$$\begin{aligned} \langle JM \pm 1 | \hat{J}_{1\pm 1} | JM \rangle &= \mp \sqrt{\frac{(J \pm M + 1)(J \mp M)}{2}}, \\ \langle JM | \hat{J}_{10} | JM \rangle &= M. \end{aligned} \quad (41)$$

Остальные матричные элементы равны нулю. Выпишем также ненулевые матричные элементы декартовых компонент оператора  $\hat{J}_1$ .

$$\begin{aligned} \langle JM \pm 1 | \hat{J}_x | JM \rangle &= \frac{1}{2} \sqrt{(J \pm M + 1)(J \mp M)}, \\ \langle JM \pm 1 | \hat{J}_y | JM \rangle &= \mp \frac{i}{2} \sqrt{(J \pm M + 1)(J \mp M)}, \\ \langle JM | \hat{J}_z | JM \rangle &= M. \end{aligned} \quad (42)$$

Матричные элементы оператора квадрата полного углового момента

$$\langle J'M' | \hat{J}^2 | JM \rangle = \delta_{JJ'} \delta_{MM'} J(J+1). \quad (43)$$

Матричные элементы прямого тензорного произведения циклических компонент двух операторов

$$\langle J'M' | \hat{J}_{1\mu} \hat{J}_{1\nu} | JM \rangle = J(J+1) C_{JM'-\mu 1\mu}^{J'M'} C_{JM1\nu}^{J'M'} \delta_{JJ'}. \quad (44)$$

В развернутой записи ненулевые матричные элементы имеют вид

$$\begin{aligned}
 \langle JM \pm 2 | \hat{J}_{1\pm 1} \hat{J}_{1\pm 1} | JM \rangle &= \frac{1}{2} \sqrt{(J \pm M + 2)(J \pm M + 1)(J \mp M - 1)(J \mp M)}, \\
 \langle JM \pm 1 | \hat{J}_{1\pm 1} \hat{J}_{10} | JM \rangle &= \mp M \sqrt{\frac{(J \pm M + 1)(J \mp M)}{2}}, \\
 \langle JM \pm 1 | \hat{J}_{10} \hat{J}_{1\pm 1} | JM \rangle &= \mp (M \pm 1) \sqrt{\frac{(J \pm M + 1)(J \mp M)}{2}}, \\
 \langle JM | \hat{J}_{1\pm 1} \hat{J}_{1\mp 1} | JM \rangle &= -\frac{1}{2} (J \pm M)(J \mp M + 1), \\
 \langle JM | \hat{J}_{10} \hat{J}_{10} | JM \rangle &= M^2.
 \end{aligned} \tag{45}$$

Ненулевые матричные элементы произведения декартовых компонент:

$$\begin{aligned}
 \langle JM \pm 2 | \hat{J}_x \hat{J}_x | JM \rangle &= \frac{1}{4} \sqrt{(J \pm M + 2)(J \pm M + 1)(J \mp M - 1)(J \mp M)}, \\
 \langle JM | \hat{J}_x \hat{J}_x | JM \rangle &= \frac{1}{2} [J(J + 1) - M^2], \\
 \langle JM \pm 2 | \hat{J}_y \hat{J}_y | JM \rangle &= -\frac{1}{4} \sqrt{(J \pm M + 2)(J \pm M + 1)(J \mp M - 1)(J \mp M)}, \\
 \langle JM | \hat{J}_y \hat{J}_y | JM \rangle &= \frac{1}{2} [J(J + 1) - M^2], \\
 \langle JM | \hat{J}_z \hat{J}_z | JM \rangle &= M^2, \\
 \langle JM \pm 2 | \hat{J}_x \hat{J}_y | JM \rangle &= \mp \frac{i}{4} \sqrt{(J \pm M + 2)(J \pm M + 1)(J \mp M - 1)(J \mp M)}, \\
 \langle JM | \hat{J}_x \hat{J}_y | JM \rangle &= \frac{i}{2} M, \\
 \langle JM \pm 2 | \hat{J}_y \hat{J}_x | JM \rangle &= \mp \frac{i}{4} \sqrt{(J \pm M + 2)(J \pm M + 1)(J \mp M - 1)(J \mp M)}, \\
 \langle JM | \hat{J}_y \hat{J}_x | JM \rangle &= -\frac{i}{2} M, \\
 \langle JM \pm 1 | \hat{J}_x \hat{J}_z | JM \rangle &= \frac{M}{2} \sqrt{(J \pm M + 1)(J \mp M)}, \\
 \langle JM \pm 1 | \hat{J}_z \hat{J}_x | JM \rangle &= \frac{M \pm 1}{2} \sqrt{(J \pm M + 1)(J \mp M)}, \\
 \langle JM \pm 1 | \hat{J}_y \hat{J}_z | JM \rangle &= \mp \frac{i}{2} M \sqrt{(J \pm M + 1)(J \mp M)}, \\
 \langle JM \pm 1 | \hat{J}_z \hat{J}_y | JM \rangle &= \mp \frac{i}{2} (M \pm 1) \sqrt{(J \pm M + 1)(J \mp M)}.
 \end{aligned} \tag{46}$$

Матричные элементы неприводимого тензорного произведения двух операторов  $\hat{\mathbf{J}}_1$ :

$$\langle J'M' | \{\hat{\mathbf{J}}_1 \otimes \hat{\mathbf{J}}_1\}_{kx} | JM \rangle = \delta_{JJ'} (-1)^{2J+k} J(J+1) \sqrt{(2k+1)(2J+1)} \begin{Bmatrix} 1 & 1 & k \\ J & J & J \end{Bmatrix} C_{JM'kx}^{J'M'}. \tag{47}$$

Отсюда, в частности, следуют два очевидных равенства

$$\begin{aligned}
 \langle J'M' | (\hat{\mathbf{J}} \cdot \hat{\mathbf{J}}) | JM \rangle &= \delta_{JJ'} \delta_{MM'} J(J+1), \\
 \langle J'M' | [\hat{\mathbf{J}} \times \hat{\mathbf{J}}] | JM \rangle &= \delta_{JJ'} i \sqrt{J(J+1)} C_{JM'1x}^{J'M'}.
 \end{aligned}$$

Матричные элементы прямого произведения компонент операторов  $\hat{n}_1(\vartheta, \varphi)$  и  $\hat{\mathbf{J}}_1$ :

$$\langle l's'J'M' | \hat{n}_{1\mu} \hat{J}_{1\nu} | lsJM \rangle = \delta_{ss'} (-1)^{s+J+l'+1} \sqrt{J(J+1)(2l+1)(2J+1)} C_{l010}^{l's'J} \begin{Bmatrix} l & s & J \\ J' & 1 & l' \end{Bmatrix} C_{JM'+\nu 1\mu}^{J'M'} C_{JM1\nu}^{JM'+\nu}, \tag{48}$$

$$\langle l's'J'M' | \hat{J}_{1\nu} \hat{n}_{1\mu} | lsJM \rangle = \langle l's'J'M' | \hat{n}_{1\mu} \hat{J}_{1\nu} | lsJM \rangle - \langle l's'J'M' | \mathfrak{R}_{1\mu 1, (n_{1\mu}, J_{1\nu})} | lsJM \rangle. \tag{49}$$

Коммутатор прямого произведения компонент операторов  $\hat{n}_1(\vartheta, \varphi)$  и  $\hat{J}_1$  имеет вид

$$\mathfrak{R}_{1\mu 1\nu}(\hat{n}_{1\mu}, \hat{J}_{1\nu}) = -\sqrt{\frac{8\pi}{3}} C_{1\mu 1\nu}^{1\mu+\nu} Y_{1\mu+\nu}(\vartheta, \varphi). \quad (50)$$

Поэтому

$$\langle l's'J'M' | \mathfrak{R}_{1\mu 1\nu}(\hat{n}_{1\mu}, \hat{J}_{1\nu}) | lsJM \rangle = (-1)^{J+l'+s} \delta_{ss'} \sqrt{2(2l+1)(2J+1)} C_{l'0}^{l'0} \left\{ \begin{matrix} l & s & J \\ J' & 1 & l' \end{matrix} \right\} C_{1\mu 1\nu}^{1\mu+\nu} C_{JM1\mu+\nu}^{J'M'}. \quad (51)$$

Матричные элементы неприводимого тензорного произведения операторов  $\hat{n}_1(\vartheta, \varphi)$  и  $\hat{J}_1$ :

$$\begin{aligned} \langle l's'J'M' | \{\hat{n}_1 \otimes \hat{J}_1\}_{kx} | lsJM \rangle &= (-1)^{s+l'-J'+k+1} \delta_{ss'} \sqrt{(2l+1)(2k+1)J(J+1)} \times \\ &\times (2J+1) C_{l'0}^{l'0} \left\{ \begin{matrix} 1 & 1 & k \\ J' & J & J \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} l & s & J \\ J' & 1 & l' \end{matrix} \right\} C_{JMkx}^{J'M'}. \end{aligned} \quad (52)$$

Коммутатор неприводимого тензорного произведения операторов  $\hat{n}_1(\vartheta, \varphi)$  и  $\hat{J}_1$  имеет вид

$$\mathfrak{R}_{kx}^{11}(\hat{n}_1, \hat{J}_1) = -\sqrt{\frac{8\pi}{3}} Y_{1x}(\vartheta, \varphi) \delta_{k1}, \quad (53)$$

а его матричные элементы

$$\langle l's'J'M' | \mathfrak{R}_{kx}^{11}(\hat{n}_1, \hat{J}_1) | lsJM \rangle = (-1)^{J+l'+s} \delta_{ss'} \sqrt{2(2J+1)(2l+1)} \left\{ \begin{matrix} l & s & J \\ J' & 1 & l' \end{matrix} \right\} C_{l'0}^{l'0} C_{JMkx}^{J'M'} \delta_{k,1}. \quad (54)$$

Тогда матричные элементы произведения  $\{\hat{J}_1 \otimes \hat{n}_1\}_{kx}$  могут быть вычислены по формуле

$$\langle l's'J'M' | \{\hat{J}_1 \otimes \hat{n}_1\}_{kx} | lsJM \rangle = (-1)^k \langle l's'J'M' | \{\hat{n}_1 \otimes \hat{J}_1\}_{kx} | lsJM \rangle + (-1)^{k+1} \langle l's'J'M' | \mathfrak{R}_{kx}^{11}(\hat{n}_1, \hat{J}_1) | lsJM \rangle. \quad (55)$$

Выражение (55) можно также переписать в виде

$$\begin{aligned} \langle l's'J'M' | \{\hat{J}_1 \otimes \hat{n}_1\}_{kx} | lsJM \rangle &= (-1)^{s+l'-J'+k+1} \delta_{ss'} \sqrt{(2l+1)(2k+1)(2J'+1)(2J+1)} \times \\ &\times \sqrt{J'(J'+1)} C_{l'0}^{l'0} \left\{ \begin{matrix} 1 & 1 & k \\ J' & J & J' \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} l & s & J \\ J' & 1 & l' \end{matrix} \right\} C_{JMkx}^{J'M'}. \end{aligned} \quad (56)$$

Матричные элементы прямого тензорного произведения циклических компонент операторов  $(\hat{V}_\Omega)_1$  и  $\hat{J}_1$ :

$$\langle l's'J'M' | (\hat{V}_\Omega)_{1\mu} \hat{J}_{1\nu} | lsJM \rangle = (-1)^{J+l'+s+1} \delta_{ss'} \sqrt{J(J+1)(2J+1)} \left\{ \begin{matrix} J & J' & 1 \\ l' & l & s \end{matrix} \right\} \langle l' \| (\hat{V}_\Omega)_1 \| l \rangle C_{JM\nu+1\mu}^{J'M'} C_{JM1\nu}^{J'M'+\nu}. \quad (57)$$

Как и в предыдущем случае,

$$\langle l's'J'M' | \hat{J}_{1\nu} (\hat{V}_\Omega)_{1\mu} | lsJM \rangle = \langle l's'J'M' | (\hat{V}_\Omega)_{1\mu} \hat{J}_{1\nu} | lsJM \rangle - \langle l's'J'M' | \mathfrak{R}_{1\mu 1\nu}((\hat{V}_\Omega)_{1\mu}, \hat{J}_{1\nu}) | lsJM \rangle. \quad (58)$$

Коммутатор прямого произведения компонент операторов  $(\hat{V}_\Omega)_1$  и  $\hat{J}_1$  имеет вид

$$\mathfrak{R}_{1\mu 1\nu}((\hat{V}_\Omega)_{1\mu}, \hat{J}_{1\nu}) = -\sqrt{2} C_{1\mu 1\nu}^{11}(\hat{V}_\Omega)_\lambda, \quad (59)$$

а его матричные элементы

$$\langle l's'J'M' | \mathfrak{R}_{1\mu 1\nu}((\hat{V}_\Omega)_{1\mu}, \hat{J}_{1\nu}) | lsJM \rangle = (-1)^{J+l'-s} \delta_{ss'} \sqrt{2(2J+1)} \left\{ \begin{matrix} l & s & J \\ J' & 1 & l' \end{matrix} \right\} C_{1\mu 1\nu}^{1\mu+\nu} C_{JM1\mu+\nu}^{J'M'} \langle l' \| (\hat{V}_\Omega)_1 \| l \rangle. \quad (60)$$

Матричные элементы неприводимого тензорного произведения операторов  $(\hat{V}_\Omega)_1$  и  $\hat{J}_1$

$$\begin{aligned} \langle l's'J'M' | \{(\hat{V}_\Omega)_1 \otimes \hat{J}_1\}_{kx} | lsJM \rangle &= (-1)^{s+l'-J'+k+1} \delta_{ss'} \sqrt{(2k+1)J(J+1)} \times \\ &\times (2J+1) \left\{ \begin{matrix} J & J' & 1 \\ l' & l & s \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} 1 & 1 & k \\ J' & J & J \end{matrix} \right\} \langle l' \| (\hat{V}_\Omega)_1 \| l \rangle C_{JMkx}^{J'M'}. \end{aligned} \quad (61)$$

Для неприводимого тензорного произведения  $\{\hat{J}_1 \otimes (\hat{V}_\Omega)_1\}_{kx}$  имеем

$$\begin{aligned} \langle l's'J'M' | \{\hat{J}_1 \otimes (\hat{V}_\Omega)_1\}_{kx} | lsJM \rangle &= (-1)^k \langle l's'J'M' | \{(\hat{V}_\Omega)_1 \otimes \hat{J}_1\}_{kx} | lsJM \rangle + \\ &+ (-1)^{k+1} \langle l's'J'M' | \mathfrak{R}_{kx}^{11}((\hat{V}_\Omega)_1, \hat{J}_1) | lsJM \rangle. \end{aligned} \quad (62)$$

Коммутатор неприводимого тензорного произведения операторов  $(\hat{\mathbf{V}}_2)_1$  и  $\hat{\mathbf{J}}_1$  имеет вид

$$\mathfrak{R}_{kx}^{11}((\hat{\mathbf{V}}_2)_1, \hat{\mathbf{J}}_1) = -\sqrt{2} (\hat{\mathbf{V}}_2)_{1x} \delta_{k1}, \quad (63)$$

а его матричные элементы

$$\langle l' s' J' M' | \mathfrak{R}_{kx}^{11}((\hat{\mathbf{V}}_2)_1, \hat{\mathbf{J}}_1) | l s J M \rangle = (-1)^{J+l'+s} \delta_{ss'} \delta_{k1} \sqrt{2(2J+1)} \begin{Bmatrix} l & s & J \\ J' & 1 & l' \end{Bmatrix} \langle l' \| (\hat{\mathbf{V}}_2)_1 \| l \rangle C_{JM'1x}^{J'M'}. \quad (64)$$

Выражение для матричного элемента неприводимого тензорного произведения  $\{\hat{\mathbf{J}}_1 \otimes (\hat{\mathbf{V}}_2)_1\}_{kx}$  можно также записать в виде

$$\begin{aligned} \langle l' s' J' M' | \{\hat{\mathbf{J}}_1 \otimes (\hat{\mathbf{V}}_2)_1\}_{kx} | l s J M \rangle &= (-1)^{s+l'-J'+k+1} \delta_{ss'} \sqrt{(2k+1)(2J+1)(2J'+1)} \times \\ &\times \sqrt{J'(J'+1)} \begin{Bmatrix} J & J' & 1 \\ l' & l & s \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 & 1 & k \\ J' & J & J' \end{Bmatrix} \langle l' \| (\hat{\mathbf{V}}_2)_1 \| l \rangle C_{JM'kx}^{J'M'}. \end{aligned} \quad (65)$$

## 6. Матричные элементы орбитального момента $\hat{\mathbf{L}} \equiv \hat{\mathbf{L}}_1$

Этот оператор действует только на пространственные переменные  $\vartheta, \varphi$ . Его матричные элементы имеют вид

$$\langle l' m' | \hat{\mathbf{L}}_{1\mu} | l m \rangle = \frac{\langle l' \| \hat{\mathbf{L}}_1 \| l \rangle}{\sqrt{2l'+1}} C_{l'm'1\mu}^{l'm'}, \quad (66)$$

где

$$\langle l' \| \hat{\mathbf{L}}_1 \| l \rangle = \delta_{l'l'} \sqrt{l(l+1)(2l+1)}. \quad (67)$$

Формулы (39)—(47), полученные для оператора полного момента  $\hat{\mathbf{J}}_1$ , оказываются справедливы и для оператора орбитального момента, если в них произвести замену

$$J \rightarrow l, \quad M \rightarrow m, \quad \hat{\mathbf{J}}_{1\mu} \rightarrow \hat{\mathbf{L}}_{1\mu}.$$

Приведенный матричный элемент в  $(l s J)$ -представлении дается формулой

$$\langle l' s' J' \| \hat{\mathbf{L}}_1 \| l s J \rangle = (-1)^{s+J+l+1} \delta_{s's} \delta_{l'l'} \sqrt{(2J+1)(2J'+1)l(l+1)(2l+1)} \begin{Bmatrix} l & s & J \\ J' & 1 & l' \end{Bmatrix}. \quad (68)$$

Матричные элементы прямого произведения операторов  $\hat{\mathbf{n}}_1(\vartheta, \varphi)$  и  $\hat{\mathbf{L}}_1$ :

$$\langle l' m' | \hat{\mathbf{n}}_{1\mu} \hat{\mathbf{L}}_{1\nu} | l m \rangle = \sqrt{\frac{l(l+1)(2l+1)}{2l'+1}} C_{l'0}^{l'0} C_{l'm'+\nu\mu}^{l'm'+\nu} C_{l'm1\nu}^{l'm+}. \quad (69)$$

Коммутатор прямого произведения этих операторов имеет вид

$$\mathfrak{R}_{\mu\nu}(\hat{\mathbf{n}}_{1\mu}, \hat{\mathbf{L}}_{1\nu}) = -\sqrt{\frac{8\pi}{3}} C_{1\mu1\nu}^{1\mu+\nu} Y_{1\mu+\nu}(\vartheta, \varphi), \quad (70)$$

а его матричные элементы

$$\langle l' m' | \mathfrak{R}_{\mu\nu}(\hat{\mathbf{n}}_{1\mu}, \hat{\mathbf{L}}_{1\nu}) | l m \rangle = -\sqrt{2 \frac{2l+1}{2l'+1}} C_{l'0}^{l'0} C_{l'm'+\nu\mu}^{1\mu+\nu} C_{l'm1\nu}^{l'm+}. \quad (71)$$

Матричные элементы прямого произведения  $\hat{\mathbf{L}}_1, \hat{\mathbf{n}}_{1\mu}$  определяются формулой

$$\langle l' m' | \hat{\mathbf{L}}_{1\nu} \hat{\mathbf{n}}_{1\mu} | l m \rangle = \sqrt{\frac{(2l+1)l'(l'+1)}{2l'+1}} C_{l'0}^{l'0} C_{l'm'+\mu\nu}^{l'm'+\mu} C_{l'm1\mu}^{l'm+}. \quad (72)$$

Матричные элементы неприводимого тензорного произведения операторов  $\hat{\mathbf{n}}_1(\vartheta, \varphi)$  и  $\hat{\mathbf{L}}_1$ :

$$\langle l' m' | \{\hat{\mathbf{n}}_1 \otimes \hat{\mathbf{L}}_1\}_{kx} | l m \rangle = (-1)^{l'+l+k} C_{l'mkx}^{l'm'} \sqrt{\frac{(2k+1)l(l+1)}{2l'+1}} (2l+1) C_{l'0}^{l'0} \begin{Bmatrix} 1 & 1 & k \\ l' & l & l' \end{Bmatrix}, \quad (73)$$

$$\langle l' m' | \{\hat{\mathbf{L}}_1 \otimes \hat{\mathbf{n}}_1\}_{kx} | l m \rangle = (-1)^{l'+l+k} C_{l'mkx}^{l'm'} \sqrt{(2k+1)l'(l'+1)(2l+1)} C_{l'0}^{l'0} \begin{Bmatrix} 1 & 1 & k \\ l' & l & l' \end{Bmatrix}. \quad (74)$$

Обе эти формулы связаны соотношением

$$\langle l'm' | \{\hat{n}_1 \otimes \hat{L}_1\}_{kx} | lm \rangle = (-1)^k \langle l'm' | \{\hat{L}_1 \otimes \hat{n}_1\}_{kx} | lm \rangle + \langle l'm' | \mathfrak{R}_{kx}^{l'l'}(\hat{n}_1, \hat{L}_1) | lm \rangle, \quad (75)$$

где

$$\mathfrak{R}_{kx}^{l'l'}(\hat{n}_1, \hat{L}_1) = -\sqrt{\frac{8\pi}{3}} Y_{1x} \delta_{k1}, \quad (76)$$

$$\langle l'm' | \mathfrak{R}_{kx}^{l'l'}(\hat{n}_1, \hat{L}_1) | lm \rangle = -\sqrt{2 \frac{2l+1}{2l'+1}} C_{l0l0}^{l'l'} C_{lm1x}^{l'm'}. \quad (77)$$

Матричные элементы прямого произведения операторов  $(\hat{V}_2)_1$  и  $\hat{L}_1$ :

$$\langle l'm' | (\hat{V}_2)_{1\mu} \hat{L}_{1\nu} | lm \rangle = \sqrt{\frac{l(l+1)}{2l'+1}} \langle l' \| (\hat{V}_2)_1 \| l \rangle C_{l'm'+\nu\mu}^{l'm'} C_{lm1\nu}^{l'm+\nu}, \quad (78)$$

$$\langle l'm' | \hat{L}_{1\nu} (\hat{V}_2)_{1\mu} | lm \rangle = \sqrt{\frac{l'(l'+1)}{2l'+1}} \langle l' \| (\hat{V}_2)_1 \| l \rangle C_{l'm'+\mu\nu}^{l'm'} C_{lm1\mu}^{l'm+\mu}. \quad (79)$$

Матричные элементы (78) и (79) отличаются на величину матричного элемента коммутатора прямого произведения операторов  $\hat{L}_{1\nu}$  и  $(\hat{V}_2)_{1\mu}$ .

$$\mathfrak{R}_{1\nu1\nu}((\hat{V}_2)_{1\mu}, \hat{L}_{1\nu}) = -\sqrt{2} C_{1\mu1\nu}^{1\mu+\nu}(\hat{V}_2)_{1\mu+\nu}, \quad (80)$$

$$\langle l'm' | \mathfrak{R}_{1\mu1\nu}((\hat{V}_2)_{1\mu}, \hat{L}_{1\nu}) | lm \rangle = -\sqrt{\frac{2}{2l'+1}} \langle l' \| (\hat{V}_2)_1 \| l \rangle C_{1\mu1\nu}^{1\mu+\nu} C_{lm1\mu+\nu}^{l'm'}. \quad (81)$$

Матричные элементы неприводимого тензорного произведения операторов  $\hat{L}_1$  и  $(\hat{V}_2)_1$ :

$$\langle l'm' | \{(\hat{V}_2)_1 \otimes \hat{L}_1\}_{kx} | lm \rangle = (-1)^{l'+l+k} \sqrt{\frac{(2k+1)l(l+1)(2l+1)}{2l'+1}} \langle l' \| (\hat{V}_2)_1 \| l \rangle \begin{Bmatrix} 1 & 1 & k \\ l' & l & l \end{Bmatrix} C_{lmkx}^{l'm'}, \quad (82)$$

$$\langle l'm' | \{\hat{L}_1 \otimes (\hat{V}_2)_1\}_{kx} | lm \rangle = (-1)^{l'+l+k} \sqrt{(2k+1)l'(l'+1)} \langle l' \| (\hat{V}_2)_1 \| l \rangle \begin{Bmatrix} 1 & 1 & k \\ l' & l & l' \end{Bmatrix} C_{lmkx}^{l'm'}. \quad (83)$$

Коммутатор произведения  $\{(\hat{V}_2)_1 \otimes \hat{L}_1\}_{kx}$  имеет вид

$$\mathfrak{R}_{kx}^{l'l'}((\hat{V}_2)_1, \hat{L}_1) = -\sqrt{2} (\hat{V}_2)_{1x} \delta_{k1}, \quad (84)$$

а его матричные элементы

$$\langle l'm' | \mathfrak{R}_{kx}^{l'l'}((\hat{V}_2)_1, \hat{L}_1) | lm \rangle = -\sqrt{\frac{2}{2l'+1}} \langle l' \| (\hat{V}_2)_1 \| l \rangle C_{lm1x}^{l'm'}. \quad (85)$$

Матричные элементы неприводимого тензорного произведения операторов  $\hat{L}_1$  и  $\hat{J}_1$ :

$$\begin{aligned} \langle l's'J'M' | \{\hat{L}_1 \otimes \hat{J}_1\}_{kx} | lsJM \rangle &= (-1)^{s+l-J'+k+1} \delta_{ll'} \delta_{ss'} \delta_{k1} C_{JMkx}^{J'M'} (2J+1) \times \\ &\times \sqrt{(2k+1)(2l+1)l(l+1)J(J+1)} \begin{Bmatrix} 1 & 1 & k \\ J' & J & J \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} l & s & J \\ J' & 1 & l \end{Bmatrix}, \end{aligned} \quad (86)$$

$$\begin{aligned} \langle l's'J'M' | \{\hat{J}_1 \otimes \hat{L}_1\}_{kx} | lsJM \rangle &= (-1)^{s+l-J'+k+1} \delta_{l'l'} \delta_{s's} C_{JMkx}^{J'M'} \times \\ &\times \sqrt{(2k+1)l(l+1)(2l+1)J'(J'+1)(2J'+1)(2J+1)} \begin{Bmatrix} 1 & 1 & k \\ J' & J & J' \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} l & s & J \\ J' & 1 & l \end{Bmatrix}. \end{aligned} \quad (87)$$

Коммутатор неприводимого тензорного произведения  $\{\hat{L}_1 \otimes \hat{J}_1\}_{kx}$  имеет вид

$$\mathfrak{R}_{kx}^{l'l'}(\hat{L}_1, \hat{J}_1) = -\sqrt{2} \hat{L}_{1x} \delta_{k1}, \quad (88)$$

а его матричные элементы

$$\langle l's'J'M' | \mathfrak{R}_{kx}^{l'l'}(\hat{L}_1, \hat{J}_1) | lsJM \rangle = (-1)^{s+J+l} \delta_{ll'} \delta_{ss'} \delta_{k1} \sqrt{2(2J+1)(2l+1)l(l+1)} \begin{Bmatrix} l & s & J \\ J' & 1 & l \end{Bmatrix} C_{JM1x}^{J'M'}. \quad (89)$$

Матричные элементы прямого тензорного произведения операторов  $\hat{L}_1$  и  $\hat{J}_1$  можно получить, используя разложение прямого произведения по неприводимым произведениям



$$\langle l's'J'M' | \hat{L}_1 \hat{J}_{1\mu} | lsJM \rangle = \sum_{kx} C_{1\mu 1\nu}^{kx} \langle l's'J'M' | (\hat{L}_1 \otimes \hat{J}_1)_{kx} | lsJM \rangle. \quad (90)$$

$$\langle l's'J'M' | \hat{J}_{1\mu} \hat{L}_1 | lsJM \rangle = \sum_{kx} C_{1\mu 1\nu}^{kx} \langle l's'J'M' | (\hat{J}_1 \otimes \hat{L}_1)_{kx} | lsJM \rangle. \quad (91)$$

Коммутатор прямого произведения операторов  $\hat{L}_1$  и  $\hat{J}_1$  имеет вид

$$\mathcal{R}_{1\mu 1\nu}(\hat{L}_{1\mu}, \hat{J}_{1\nu}) = -\sqrt{2} C_{1\mu 1\nu}^{1\mu+\nu} \hat{L}_{1\mu+\nu}, \quad (92)$$

а его матричные элементы

$$\langle l's'J'M' | \mathcal{R}_{1\mu 1\nu}(\hat{L}_{1\mu}, \hat{J}_{1\nu}) | lsJM \rangle = (-1)^{s+J+l} \delta_{ll'} \delta_{ss'} \sqrt{2(2J+1)(2l+1)l(l+1)} \begin{Bmatrix} l & s & J \\ J' & 1 & l \end{Bmatrix} C_{1\mu 1\nu}^{1\mu+\nu} C_{JM 1\mu+\nu}^{J'M'}. \quad (93)$$

## 7. Матричные элементы оператора $\hat{S} \equiv \hat{S}_1$

Этот оператор действует только на спиновые переменные. Его матричные элементы имеют вид

$$\langle s'm_s' | \hat{S}_{1\mu} | sm_s \rangle = \frac{\langle s' \| \hat{S}_1 \| s \rangle}{\sqrt{2s'+1}} C_{sm_s' 1\mu}^{s'm_s'}, \quad (94)$$

$$\langle s' \| \hat{S}_1 \| s \rangle = \delta_{ss'} \sqrt{s(s+1)(2s+1)}. \quad (95)$$

Формулы (39)—(47), полученные для матричных элементов оператора  $\hat{J}_1$ , оказываются справедливыми и для оператора спина  $\hat{S}_1$ , если в них произвести замену

$$J \rightarrow s, \quad M \rightarrow m_s, \quad \hat{J}_1 \rightarrow \hat{S}_1.$$

Приведенный матричный элемент оператора спина  $\hat{S}_1$  в  $(lsJ)$ -представлении, согласно (6) и (95), дается формулой

$$\langle l's'J' \| \hat{S}_1 \| lsJ \rangle = (-1)^{l+s+J'+1} \delta_{ll'} \delta_{ss'} \sqrt{s(s+1)(2s+1)(2J'+1)} \begin{Bmatrix} s & l & J \\ J' & 1 & s \end{Bmatrix}. \quad (96)$$

Матричные элементы неприводимого тензорного произведения операторов  $\hat{S}_1$  и коммутирующих с ним операторов  $\hat{n}_1(\vartheta, \varphi)$ ,  $(\hat{V}_{\varrho})_1$ ,  $\hat{L}_1$  имеют вид

$$\langle l's'J'M' | \{\hat{n}_1 \otimes \hat{S}_1\}_{kx} | lsJM \rangle = \delta_{ss'} \sqrt{(2k+1)(2J+1)(2l+1)(2s+1)s(s+1)} C_{1010}^{l'0} C_{JM kx}^{J'M'} \begin{Bmatrix} l & 1 & l' \\ s & 1 & s \\ J & k & J' \end{Bmatrix}, \quad (97)$$

$$\langle l's'J'M' | \{(\hat{V}_{\varrho})_1 \otimes \hat{S}_1\}_{kx} | lsJM \rangle = \delta_{ss'} \sqrt{(2k+1)(2J+1)(2s+1)s(s+1)} \langle l' \| (\hat{V}_{\varrho})_1 \| l \rangle C_{JM kx}^{J'M'} \begin{Bmatrix} l & 1 & l' \\ s & 1 & s \\ J & k & J' \end{Bmatrix}, \quad (98)$$

$$\langle l's'J'M' | \{\hat{L}_1 \otimes \hat{S}_1\}_{kx} | lsJM \rangle = \delta_{ll'} \delta_{ss'} \sqrt{(2k+1)(2J+1)(2l+1)(2s+1)l(l+1)s(s+1)} C_{JM kx}^{J'M'} \begin{Bmatrix} l & 1 & l \\ s & 1 & s \\ J & k & J' \end{Bmatrix}. \quad (99)$$

Матричные элементы неприводимого тензорного произведения операторов  $\hat{S}_1$  и  $\hat{J}_1$ :

$$\langle l's'J'M' | \{\hat{S}_1 \otimes \hat{J}_1\}_{kx} | lsJM \rangle = (-1)^{J+k-l-s+1} \delta_{ss'} \delta_{ll'} (2J+1) \sqrt{(2k+1)s(s+1)(2s+1)J(J+1)} \times \\ \times \begin{Bmatrix} 1 & 1 & k \\ J' & J & J \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} s & l & J \\ J' & 1 & s \end{Bmatrix} C_{JM kx}^{J'M'}. \quad (100)$$

$$\langle l's'J'M' | \{\hat{J}_1 \otimes \hat{S}_1\}_{kx} | lsJM \rangle = (-1)^{J+k-l-s+1} \delta_{ss'} \delta_{ll'} \sqrt{(2k+1)(2J+1)J'(J'+1)(2J'+1)} \times \\ \times \sqrt{s(s+1)(2s+1)} \begin{Bmatrix} 1 & 1 & k \\ J' & J & J' \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} s & l & J \\ J' & 1 & s \end{Bmatrix} C_{JM kx}^{J'M'}. \quad (101)$$

Коммутатор неприводимого тензорного произведения операторов  $\hat{S}_1$  и  $\hat{J}_1$ :

$$\mathcal{R}_{kx}^{11}(\hat{S}_1, \hat{J}_1) = -\sqrt{2} \hat{S}_{1x} \delta_{k1}, \quad (102)$$

а его матричные элементы

$$\langle l's'JM' | \mathfrak{R}_{kx}^{11}(\hat{S}_1, \hat{J}_1) | lsJM \rangle = (-1)^{l+s+J'} \delta_{ll'} \delta_{ss'} \delta_{k1} \times \sqrt{2s(s+1)(2s+1)(2J+1)} \begin{Bmatrix} s & l & J \\ J' & 1 & s \end{Bmatrix} C_{JMkx}^{l's'M'}. \quad (103)$$

Матричные элементы прямого произведения оператора  $\hat{S}_1$  и операторов  $\hat{n}_1(\vartheta, \varphi)$ ,  $(\hat{V}_2)_1$ ,  $\hat{L}_1$ ,  $\hat{J}_1$  можно вычислить, используя формулы (97)—(101). Для этого необходимо прямое произведение операторов разложить по неприводимым произведениям с помощью формулы 3.1. (22).

## 8. Матричные элементы оператора сферической функции $\hat{Y}_L \equiv Y_L(\vartheta, \varphi)$

Этот оператор зависит только от пространственных переменных  $\vartheta, \varphi$ . Его матричные элементы имеют вид

$$\langle l'm' | \hat{Y}_L | lm \rangle = \frac{\langle l' \| \hat{Y}_L \| l \rangle}{\sqrt{2l'+1}} C_{lmL\nu}^{l'm'}, \quad (104)$$

где

$$\langle l' \| \hat{Y}_L \| l \rangle = \sqrt{\frac{(2L+1)(2l+1)}{4\pi}} C_{l0L0}^{l'0}. \quad (105)$$

Если использовать в качестве операторов функции  $C_L(\vartheta, \varphi) = \sqrt{\frac{4\pi}{2L+1}} Y_L(\vartheta, \varphi)$ , то

$$\langle l'm' | \hat{C}_L | lm \rangle = \frac{\langle l' \| \hat{C}_L \| l \rangle}{\sqrt{2l'+1}} C_{lmL\nu}^{l'm'}, \quad (106)$$

и

$$\langle l' \| \hat{C}_L \| l \rangle = \sqrt{2l+1} C_{l0L0}^{l'0}. \quad (107)$$

Матричные элементы произведения коммутирующих операторов  $\hat{n}_1(\vartheta, \varphi)$  и  $\hat{Y}_L$ :

$$\begin{aligned} \langle l'm' | \hat{n}_{1\mu} \hat{Y}_L | lm \rangle = & - \sqrt{\frac{(2L+1)(2l+1)}{4\pi(2l'+1)}} \left\{ \sqrt{\frac{l'+1}{2l'+3}} C_{l0L0}^{l'+10} C_{lmL\nu}^{l'+1m+\nu} C_{l'+1m+\nu 1\mu}^{l'm'} - \right. \\ & \left. - \sqrt{\frac{l'}{2l'-1}} C_{l0L0}^{l'-10} C_{lmL\nu}^{l'-1m+\nu} C_{l'-1m+\nu 1\mu}^{l'm'} \right\}, \quad (108) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle l'm' | \{ \hat{n}_1 \otimes \hat{Y}_L \}_{L'\nu} | lm \rangle = & (-1)^{L'+l+1} \sqrt{\frac{(2L+1)(2L'+1)(2l+1)}{4\pi(2l'+1)}} C_{lmL'\nu}^{l'm'} \times \\ & \times \sum_k \sqrt{2k+1} C_{k010}^{l'0} C_{l0L0}^{k0} \begin{Bmatrix} L & 1 & L' \\ l' & l & k \end{Bmatrix}. \quad (109) \end{aligned}$$

Матричные элементы произведений операторов  $\hat{V}_2$  и  $\hat{Y}_L$ :

$$\begin{aligned} \langle l'm' | (\hat{V}_2)_{1\mu} \hat{Y}_L | lm \rangle = & - \sqrt{\frac{(2L+1)(2l+1)}{4\pi(2l'+1)}} \left\{ (l'-1) \sqrt{\frac{l'}{2l'-1}} C_{l0L0}^{l'-10} \times \right. \\ & \left. \times C_{lmL\nu}^{l'-1m+\nu} C_{l'-1m+\nu 1\mu}^{l'm'} + (l'+2) \sqrt{\frac{l'+1}{2l'+3}} C_{l0L0}^{l'+10} C_{lmL\nu}^{l'+1m+\nu} C_{l'+1m+\nu 1\mu}^{l'm'} \right\}, \quad (110) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle l'm' | \{ (\hat{V}_2)_1 \otimes \hat{Y}_L \}_{L'\nu} | lm \rangle = & (-1)^{L'+l+1} \sqrt{\frac{(2L+1)(2l+1)(2L'+1)}{4\pi(2l'+1)}} \times \\ & \times \sum_k \langle l' \| (\hat{V}_2)_1 \| k \rangle C_{l0L0}^{k0} \begin{Bmatrix} L & 1 & L' \\ l' & l & k \end{Bmatrix} C_{lmL'\nu}^{l'm'}. \quad (111) \end{aligned}$$

Коммутатор прямого произведения операторов  $(\hat{V}_2)_{1\mu}$  и  $\hat{Y}_L$ ,

$$\mathfrak{R}_{1\mu L\nu}((\hat{V}_2)_{1\mu}, \hat{Y}_L) = -\sqrt{6L(L+1)}(2L+1) \sum_{L'} \frac{1}{\sqrt{2L'+1}} C_{L010}^{L'0} C_{1\mu 1\nu}^{L'\mu+\nu} \begin{Bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ L' & L & L \end{Bmatrix} \hat{Y}_{L'\mu+\nu}(\vartheta, \varphi). \quad (112)$$

Коммутатор неприводимого произведения этих операторов

$$\mathfrak{R}_{L'\nu}^{L'}((\hat{V}_2)_1, \hat{Y}_L) = -\sqrt{\frac{6L(L+1)}{2L'+1}}(2L+1) C_{L010}^{L'0} \begin{Bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ L' & L & L \end{Bmatrix} \hat{Y}_{L'\nu}(\vartheta, \varphi). \quad (113)$$

Матричные элементы этих коммутаторов имеют вид

$$\begin{aligned} \langle l'm' | \mathfrak{R}_{1\mu L\nu} ((\hat{\mathfrak{V}}_{\mathfrak{Q}})_{1\mu}, \hat{Y}_{L\nu}) | lm \rangle = & -\sqrt{\frac{6L(L+1)(2l+1)}{4\pi(2l'+1)}} (2L+1) \times \\ & \times \sum_{L'} C_{L0\ 10}^{L'0} C_{l0\ l'0}^{l'0} C_{1\mu\ l\nu}^{L'\ \mu+\nu} C_{l'm\ l'\mu+\nu}^{l'm'} \begin{Bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ l' & l & L \end{Bmatrix}, \end{aligned} \quad (114)$$

$$\langle l'm' | \mathfrak{R}_{L'\nu}^{1L} ((\hat{\mathfrak{V}}_{\mathfrak{Q}})_1, \hat{Y}_{L'}) | lm \rangle = -\sqrt{\frac{6L(L+1)(2l+1)}{4\pi(2l'+1)}} (2L+1) C_{l'mL'\nu}^{l'm'} C_{L0\ 10}^{L'0} C_{l0\ l'0}^{l'0} \begin{Bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ L' & l & L \end{Bmatrix}. \quad (115)$$

Матричные элементы произведений операторов  $\hat{L}_1$  и  $\hat{Y}_1$ :

$$\langle l'm' | \hat{L}_{1\mu} \hat{Y}_{L\nu} | lm \rangle = \sqrt{\frac{(2L+1)(2l+1)l'(l'+1)}{4\pi(2l'+1)}} C_{l'0\ L0}^{l'0} C_{l'm\ L\nu}^{l'm'+\nu} C_{l'm'+\nu\ 1\mu}^{l'm'}, \quad (116)$$

$$\langle l'm' | \{\hat{L}_1 \otimes \hat{Y}_L\}_{L'\nu} | lm \rangle = (-1)^{L'+l'+l} \sqrt{\frac{(2L'+1)(2L+1)(2l+1)(l'+1)l'}{4\pi}} C_{l'm\ L'\nu}^{l'm'} C_{l0\ L0}^{l'0} \begin{Bmatrix} L & 1 & L' \\ l' & l & l' \end{Bmatrix}. \quad (117)$$

Коммутатор прямого произведения операторов  $\hat{L}_1$  и  $\hat{Y}_L$

$$\mathfrak{R}_{1\mu\ 1\nu}(\hat{L}_{1\mu}, \hat{Y}_{L\nu}) = \sqrt{L(L+1)} C_{L\nu\ 1\mu}^{L\ \nu+\mu} \hat{Y}_{L\ \mu+\nu}. \quad (118)$$

Коммутатор неприводимого произведения операторов  $\hat{L}_1$  и  $\hat{Y}_L$

$$\mathfrak{R}_{L'\nu}^{1L}(\hat{L}_1, \hat{Y}_L) = \sqrt{L(L+1)} \hat{Y}_{L\ \mu+\nu} \delta_{L'L} \delta_{\nu'\ \mu+\nu}. \quad (119)$$

Матричные элементы этих коммутаторов:

$$\langle l'm' | \mathfrak{R}_{1\mu\ L\nu}(\hat{L}_{1\mu}, \hat{Y}_{L\nu}) | lm \rangle = \sqrt{\frac{L(L+1)(2L+1)(2l+1)}{4\pi(2l'+1)}} C_{l'm\ L\ \mu+\nu}^{l'm'} C_{L\nu\ 1\mu}^{L\ \nu+\mu} C_{l0\ L0}^{l'0}, \quad (120)$$

$$\langle l'm' | \mathfrak{R}_{L'\nu}^{1L}(\hat{L}_1, \hat{Y}_L) | lm \rangle = \sqrt{\frac{L(L+1)(2L+1)(2l+1)}{4\pi(2l'+1)}} C_{l0\ L0}^{l'0} C_{l'm\ L\ \mu+\nu}^{l'm'} \delta_{L'L}. \quad (121)$$

Матричные элементы произведений коммутирующих операторов  $\hat{S}_1$  и  $\hat{Y}_L$ :

$$\begin{aligned} \langle l's'J'M' | \hat{S}_{1\mu} \hat{Y}_{L\nu} | lsJM \rangle = & \delta_{ss'} \sqrt{\frac{(2J+1)(2l+1)(2L+1)s(s+1)(2s+1)}{4\pi}} C_{l0\ L0}^{l'0} \times \\ & \times (-1)^{L+k+1} \times \sum_k \sqrt{2k+1} C_{JM\ k\mu+\nu}^{J'M'} C_{1\mu\ L\nu}^k \begin{Bmatrix} l & L & l' \\ s & 1 & s \\ J & k & J' \end{Bmatrix}, \end{aligned} \quad (122)$$

$$\begin{aligned} \langle l's'J'M' | \{\hat{Y}_1 \otimes \hat{S}_1\}_{L'\nu} | lsJM \rangle = & \delta_{ss'} \sqrt{\frac{(2J+1)(2L'+1)(2L+1)(2l+1)s(s+1)(2s+1)}{4\pi}} \times \\ & \times C_{l0\ L0}^{l'0} C_{JM\ L'\nu}^{J'M'} \begin{Bmatrix} l & L & l' \\ s & 1 & s \\ J & L' & J \end{Bmatrix}. \end{aligned} \quad (123)$$

Матричные элементы произведений операторов  $\hat{J}_1$  и  $\hat{Y}_L$ :

$$\begin{aligned} \langle l's'J'M' | \hat{J}_{1\mu} \hat{Y}_{L\nu} | lsJM \rangle = & (-1)^{l'+s+J+L} \delta_{ss'} \sqrt{\frac{(2L+1)(2l+1)(2J+1)J'(J'+1)}{4\pi}} \times \\ & \times C_{JM\ L\nu}^{J'M+\nu} C_{J'M+\nu\ 1\mu}^{J'M'} C_{L0\ 10}^{l'0} \begin{Bmatrix} l & s & J \\ J' & L & l' \end{Bmatrix}, \end{aligned} \quad (124)$$

$$\begin{aligned} \langle l's'J'M' | \{\hat{J}_1 \otimes \hat{Y}_L\}_{L'\nu} | lsJM \rangle = & (-1)^{l+s-L'-J'} \delta_{ss'} \sqrt{\frac{(2L+1)(2L'+1)(2l+1)(2J+1)J'(J'+1)(2J'+1)}{4\pi}} \times \\ & \times C_{JM\ L'\nu}^{J'M'} \begin{Bmatrix} L & 1 & L' \\ J' & J & J' \end{Bmatrix} \times C_{L0\ 10}^{l'0} \begin{Bmatrix} l & s & J \\ J' & L & l' \end{Bmatrix}. \end{aligned} \quad (125)$$

Коммутаторы произведений:

$$\begin{aligned}\mathfrak{R}_{1\mu L\nu}(\hat{J}_{1\mu}, \hat{Y}_{L\nu}) &= \mathfrak{R}_{1\mu 1\nu}(\hat{L}_{1\mu}, \hat{Y}_{L\nu}), \\ \mathfrak{R}_{L' s'}^{1L}(\hat{J}_{1}, \hat{Y}_L) &= \mathfrak{R}_{L' s'}^{1L}(\hat{L}_1, \hat{Y}_L).\end{aligned}$$

Матричные элементы коммутаторов:

$$\begin{aligned}\langle l' s' J' M' | \mathfrak{R}_{1\mu L\nu}(\hat{J}_{1\mu}, \hat{Y}_{L\nu}) | l s J M \rangle &= (-1)^{J+l'+s+L} \delta_{ss'} \sqrt{\frac{L(L+1)(2L+1)(2l+1)(2J+1)}{4\pi}} \times \\ &\times C_{l'0 L'0}^{l'0} \begin{Bmatrix} l & s & J \\ J' & L & l' \end{Bmatrix} C_{L\nu 1\mu}^{L\mu+\nu} C_{JM L\mu+\nu}^{J'M'},\end{aligned}\quad (126)$$

$$\begin{aligned}\langle l' s' J' M' | \mathfrak{R}_{L' s'}^{1L}(\hat{J}_1, \hat{Y}_L) | l s J M \rangle &= (-1)^{J+l'+s+L} \delta_{ss'} \delta_{LL'} \sqrt{\frac{L(L+1)(2L+1)(2l+1)(2J+1)}{4\pi}} \times \\ &\times C_{l'0 L'0}^{l'0} \begin{Bmatrix} l & s & J \\ J' & L & l' \end{Bmatrix} C_{JM L\nu'}^{J'M'}.\end{aligned}\quad (127)$$

Матричные элементы некоторых более сложных произведений, одним из сомножителей которых является оператор  $\hat{Y}_L$ :

$$\begin{aligned}\langle l' m' | \{ \hat{n}_1 \otimes (\hat{\mathbb{V}}_2)_1 \}_{kx} \hat{Y}_{L\nu} | l m \rangle &= \sum_{L' s' l''} (-1)^{l'+L'+k} \sqrt{\frac{(2L+1)(2l+1)(2k+1)(2l''+1)}{4\pi(2l'+1)(2L'+1)}} \times \\ &\times C_{l'm L\nu}^{L' s' l''} C_{L' s' kx}^{l' m'} C_{l'0 L'0}^{L'0} C_{l''0 10}^{l''0} \begin{Bmatrix} 1 & L' & l'' \\ l' & 1 & k \end{Bmatrix} \langle l'' \| (\hat{\mathbb{V}}_2)_1 \| L' \rangle,\end{aligned}\quad (128)$$

$$\begin{aligned}\langle l' m' | \{ \{ \hat{n}_1 \otimes (\hat{\mathbb{V}}_2)_1 \}_k \otimes \hat{Y}_L \}_{F\varphi} | l m \rangle &= (-1)^{F+l+k} \sqrt{\frac{(2L+1)(2l+1)(2k+1)(2F+1)}{4\pi(2l'+1)}} \times \\ &\times C_{l'm F\varphi}^{l' m'} \sum_{L' l''} (-1)^{L'} \sqrt{2l''+1} C_{l'0 L'0}^{L'0} C_{l''0 10}^{l''0} \begin{Bmatrix} 1 & L' & l'' \\ l' & 1 & k \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} L & k & F \\ l' & l & L' \end{Bmatrix} \langle l'' \| (\hat{\mathbb{V}}_2)_1 \| L' \rangle,\end{aligned}\quad (129)$$

$$\begin{aligned}\langle l' m' | \{ \hat{n}_1 \otimes \hat{L}_1 \}_{kx} \hat{Y}_{L\nu} | l m \rangle &= \sum_{L' s'} (-1)^{l'+L'+k} \sqrt{\frac{(2L+1)(2l+1)(2k+1)L'(L'+1)(2L'+1)}{4\pi(2l'+1)}} \times \\ &\times C_{l'm L\nu}^{L' s' l''} C_{L' s' kx}^{l' m'} C_{l'0 L'0}^{L'0} C_{l''0 10}^{l''0} \begin{Bmatrix} 1 & 1 & k \\ l' & L' & L' \end{Bmatrix},\end{aligned}\quad (130)$$

$$\begin{aligned}\langle l' m' | \{ \{ \hat{n}_1 \otimes \hat{L}_1 \}_k \otimes \hat{Y}_L \}_{F\varphi} | l m \rangle &= (-1)^{F+l+k} \sqrt{\frac{(2L+1)(2l+1)(2k+1)(2F+1)}{4\pi(2l'+1)}} \times \\ &\times C_{l'm F\varphi}^{l' m'} \sum_{L'} (-1)^{L'} \sqrt{L'(L'+1)} (2L'+1) C_{l'0 L'0}^{L'0} C_{l''0 10}^{l''0} \begin{Bmatrix} 1 & 1 & k \\ l' & L' & L' \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} L & k & F \\ l' & l & L' \end{Bmatrix},\end{aligned}\quad (131)$$

$$\begin{aligned}\langle l' m' | \{ (\hat{\mathbb{V}}_2)_1 \otimes \hat{L}_1 \}_{kx} \hat{Y}_{L\nu} | l m \rangle &= \sum_{L' s'} (-1)^{l'+L'+k} \sqrt{\frac{(2k+1)(2L+1)(2l+1)L'(L'+1)}{4\pi(2l'+1)}} \times \\ &\times C_{l'm L\nu}^{L' s' l''} C_{L' s' kx}^{l' m'} C_{l'0 L'0}^{L'0} C_{l''0 10}^{l''0} \begin{Bmatrix} 1 & 1 & k \\ l' & L' & L' \end{Bmatrix} \langle l'' \| (\hat{\mathbb{V}}_2)_1 \| L' \rangle,\end{aligned}\quad (132)$$

$$\begin{aligned}\langle l' m' | \{ \{ (\hat{\mathbb{V}}_2)_1 \otimes \hat{L}_1 \}_k \otimes \hat{Y}_L \}_{F\varphi} | l m \rangle &= (-1)^{F+l+k} \sqrt{\frac{(2k+1)(2L+1)(2l+1)(2F+1)}{4\pi(2l'+1)}} \times \\ &\times C_{l'm F\varphi}^{l' m'} \sum_{L'} (-1)^{L'} \sqrt{L'(L'+1)} (2L'+1) C_{l'0 L'0}^{L'0} \begin{Bmatrix} 1 & 1 & k \\ l' & L' & L' \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} L & k & F \\ l' & l & L' \end{Bmatrix} \langle l'' \| (\hat{\mathbb{V}}_2)_1 \| L' \rangle,\end{aligned}\quad (133)$$

$$\begin{aligned}\langle l' s' J' M' | \{ \hat{n}_1 \otimes \hat{S}_1 \}_{kx} \hat{Y}_{L\nu} | l s J M \rangle &= (-1)^{l+s+J} \delta_{ss'} \sqrt{\frac{(2L+1)(2l+1)(2J+1)(2k+1)s(s+1)(2s+1)}{4\pi}} \times \\ &\times \sum_{J_1 L_1 M_1} \sqrt{(2J_1+1)(2L_1+1)} C_{J_1 M_1}^{J_1 M_1} C_{J_1 M_1 kx}^{J' M'} C_{L_0' 10}^{L_0' 0} C_{L_0 10}^{l' 0} \begin{Bmatrix} l & s & J \\ J_1 & L & L_1 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} L_1 & 1 & l' \\ s & 1 & s \\ J_1 & k & J' \end{Bmatrix},\end{aligned}\quad (134)$$

$$\begin{aligned} \langle l's'J'M' | \{(\hat{n}_1 \otimes \hat{S}_1)_k \otimes \hat{Y}_L\}_{F\varphi} | lsJM \rangle &= (-1)^{l+s-J'-F} \delta_{ss'} C_{JM'F\varphi}^{J'M'} \times \\ &\times \sqrt{\frac{(2L+1)(2J+1)(2l+1)(2k+1)(2F+1)s(s+1)(2s+1)}{4\pi}} \sum_{J_1 L_1} \sqrt{2L_1+1} (2J_1+1) \times \\ &\times C_{L_0 l_0}^{L_0} C_{L_0 10}^{l'0} \begin{Bmatrix} l & s & J \\ J_1 & L & L_1 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} L & k & F \\ J' & J & J_1 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} L_1 & 1 & l' \\ s & 1 & s \\ J_1 & k & J' \end{Bmatrix}, \end{aligned} \quad (135)$$

$$\begin{aligned} \langle l's'J'M' | \{(\hat{V}_{\varrho})_1 \otimes \hat{S}_1\}_{kx} \hat{Y}_{L\nu} | lsJM \rangle &= (-1)^{l+s+J} \delta_{ss'} \times \sqrt{\frac{(2L+1)(2l+1)(2J+1)(2k+1)s(s+1)(2s+1)}{4\pi}} \times \\ &\times \sum_{J_1 L_1 M_1} \sqrt{2J_1+1} C_{JM' L\nu}^{J_1 M_1} C_{J_1 M_1 kx}^{J'M'} C_{L_0 l_0}^{L_0} \begin{Bmatrix} l & s & J \\ J_1 & L & L_1 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} L_1 & 1 & l' \\ s & 1 & s \\ J_1 & k & J' \end{Bmatrix} \langle l' \| (\hat{V}_{\varrho})_1 \| L_1 \rangle, \end{aligned} \quad (136)$$

$$\begin{aligned} \langle l's'J'M' | \{(\hat{V}_{\varrho})_1 \otimes \hat{S}_1\}_k \otimes \hat{Y}_L\}_{F\varphi} | lsJM \rangle &= (-1)^{l+s-J'-F} \delta_{ss'} C_{JM'F\varphi}^{J'M'} \times \\ &\times \sqrt{\frac{(2L+1)(2l+1)(2J+1)(2k+1)(2F+1)s(s+1)(2s+1)}{4\pi}} \sum_{J_1 L_1} (2J_1+1) C_{L_0 l_0}^{L_0} \times \\ &\times \begin{Bmatrix} l & s & J \\ J_1 & L & L_1 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} L & k & F \\ J' & J & J_1 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} L_1 & 1 & l' \\ s & 1 & s \\ J_1 & k & J' \end{Bmatrix} \langle l' \| (\hat{V}_{\varrho})_1 \| L_1 \rangle, \end{aligned} \quad (137)$$

$$\begin{aligned} \langle l's'J'M' | \{\hat{n}_1 \otimes \hat{J}_1\}_{kx} \hat{Y}_{L\nu} | lsJM \rangle &= (-1)^{2s+J-J'+k+L} \delta_{ss'} \times \\ &\sqrt{\frac{(2L+1)(2l+1)(2J+1)(2k+1)}{4\pi}} \sum_{L_1 J_1 M_1} \sqrt{J_1(J_1+1)(2L_1+1)(2J_1+1)} \times \\ &\times C_{JM' L\nu}^{J_1 M_1} C_{J_1 M_1 kx}^{J'M'} C_{L_0 l_0}^{L_0} C_{L_0 10}^{l'0} \begin{Bmatrix} l & s & J \\ J_1 & L & L_1 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 & 1 & k \\ J' & J_1 & J_1 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} L_1 & s & J_1 \\ J' & 1 & l' \end{Bmatrix}, \end{aligned} \quad (138)$$

$$\begin{aligned} \langle l's'J'M' | \{\{\hat{n}_1 \otimes \hat{J}_1\}_k \otimes \hat{Y}_L\}_{F\varphi} | lsJM \rangle &= (-1)^{F+k+L} \delta_{ss'} C_{JM'F\varphi}^{J'M'} \times \\ &\times \sqrt{\frac{(2L+1)(2l+1)(2J+1)(2k+1)(2F+1)}{4\pi}} \sum_{L_1 J_1} \sqrt{J_1(J_1+1)(2L_1+1)} \times \\ &\times (2J_1+1)^{3/2} C_{L_0 l_0}^{L_0} C_{L_0 10}^{l'0} \begin{Bmatrix} l & s & J \\ J_1 & L & L_1 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 & 1 & k \\ J' & J_1 & J_1 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} L_1 & s & J_1 \\ J' & 1 & l' \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} L & k & F \\ J' & J & J_1 \end{Bmatrix}, \end{aligned} \quad (139)$$

$$\begin{aligned} \langle l's'J'M' | \{(\hat{V}_{\varrho})_1 \otimes \hat{J}_1\}_{kx} \hat{Y}_{L\nu} | lsJM \rangle &= (-1)^{l+l'-J-J'+k+1} \delta_{ss'} \sqrt{\frac{(2L+1)(2l+1)(2J+1)(2k+1)}{4\pi}} \times \\ &\times \sum_{L_1 J_1 M_1} \sqrt{J_1(J_1+1)(2J_1+1)} C_{JM' L\nu}^{J_1 M_1} C_{J_1 M_1 kx}^{J'M'} C_{L_0 l_0}^{L_0} \langle l' \| (\hat{V}_{\varrho})_1 \| L_1 \rangle \begin{Bmatrix} l & s & J \\ J_1 & L & L_1 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} J_1 & J' & 1 \\ l' & L_1 & s \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 & 1 & k \\ J' & J_1 & J_1 \end{Bmatrix}, \end{aligned} \quad (140)$$

$$\begin{aligned} \langle l's'J'M' | \{(\hat{V}_{\varrho})_1 \otimes \hat{J}_1\}_k \otimes \hat{Y}_L\}_{F\varphi} | lsJM \rangle &= (-1)^{l+l'+F+k+1} C_{JM'F\varphi}^{J'M'} \times \\ &\times \sqrt{\frac{(2L+1)(2l+1)(2J+1)(2k+1)(2F+1)}{4\pi}} \sum_{L_1 J_1} \sqrt{J_1(J_1+1)(2J_1+1)^{3/2}} C_{L_0 l_0}^{L_0} \times \\ &\times \langle l' \| (\hat{V}_{\varrho})_1 \| L_1 \rangle \begin{Bmatrix} l & s & J \\ J_1 & L & L_1 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} J_1 & J' & 1 \\ l' & L_1 & s \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 & 1 & k \\ J' & J_1 & J_1 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} L & k & F \\ J' & J & J_1 \end{Bmatrix}. \end{aligned} \quad (141)$$

$$\begin{aligned} \langle l's'J'M' | \{\hat{L}_1 \otimes \hat{S}_1\}_{kx} \hat{Y}_{L\nu} | lsJM \rangle &= (-1)^{l+s+J} \delta_{ss'} C_{L_0 l_0}^{l'0} \times \\ &\times \sqrt{\frac{(2L+1)(2l+1)(2k+1)s(s+1)(2s+1)l'(l'+1)(2l'+1)(2J+1)}{4\pi}} \times \\ &\times \sum_{J_1 M_1} \sqrt{2J_1+1} C_{JM' L\nu}^{J_1 M_1} C_{J_1 M_1 kx}^{J'M'} \begin{Bmatrix} l & s & J \\ J_1 & L & l' \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} l' & 1 & l' \\ s & 1 & s \\ J_1 & k & J' \end{Bmatrix}, \end{aligned} \quad (142)$$

$$\begin{aligned}
 \langle l's'J'M' | \{ \{\hat{L}_1 \otimes \hat{S}_1\}_k \otimes \hat{Y}_L \}_{F\varphi} | lsJM \rangle &= (-1)^{l+s-J'-F} \delta_{ss'} C_{JM' F\varphi}^{J'M'} C_{L0 l0}^{l'0} \times \\
 &\times \sqrt{\frac{(2L+1)(2l+1)(2k+1)(2F+1)s(s+1)(2s+1)l'(l'+1)(2l'+1)(2J+1)}{4\pi}} \times \\
 &\times \sum_{J_1} (2J_1+1) \begin{Bmatrix} l & s & J \\ J_1 & L & l' \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} L & k & F \\ J' & J & J_1 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} l' & 1 & l' \\ s & 1 & s \\ J_1 & k & J' \end{Bmatrix}, \quad (143)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \langle l's'J'M' | \{ \{\hat{1}_1 \otimes \hat{J}_1\}_{kx} \hat{Y}_{L\nu} | lsJM \rangle &= (-1)^{l+l'+J+J'+k+1} \delta_{ss'} C_{L0 l0}^{l'0} \times \\
 &\times \sqrt{\frac{(2L+1)(2l+1)(2J+1)(2k+1)l'(l'+1)(2l'+1)}{4\pi}} \sum_{J_1 M_1} (2J_1+1) \sqrt{J_1(J_1+1)} C_{JM_1 L\nu}^{J_1 M_1} C_{J_1 M_1 kx}^{J' M'} \times \\
 &\times \begin{Bmatrix} l & s & J \\ J_1 & L & l' \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 & 1 & k \\ J' & J_1 & J_1 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} l' & s & J_1 \\ J' & 1 & l' \end{Bmatrix}, \quad (144)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \langle l's'J'M' | \{ \{\hat{L}_1 \otimes \hat{J}_1\}_k \otimes \hat{Y}_L \}_{F\varphi} | lsJM \rangle &= (-1)^{l+l'-F+k+1} \delta_{ss'} C_{L0 l0}^{l'0} C_{JM' F\varphi}^{J'M'} \times \\
 &\times \sqrt{\frac{(2L+1)(2l+1)(2J+1)(2k+1)(2F+1)l'(l'+1)(2l'+1)}{4\pi}} \sum_{J_1} \sqrt{J_1(J_1+1)} (2J_1+1)^{3/2} \times \\
 &\times \begin{Bmatrix} l & s & J \\ J_1 & L & l' \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 & 1 & k \\ J' & J_1 & J_1 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} l' & s & J_1 \\ J' & 1 & l' \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} L & k & F \\ J' & J & J_1 \end{Bmatrix}, \quad (145)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \langle l's'J'M' | \{ \{\hat{S}_1 \otimes \hat{J}_1\}_{kx} \hat{Y}_{L\nu} | lsJM \rangle &= (-1)^{J+L+k+1} \delta_{ss'} C_{L0 l0}^{l'0} \times \\
 &\times \sqrt{\frac{(2L+1)(2l+1)(2J+1)(2k+1)s(s+1)(2s+1)}{4\pi}} \sum_{J_1 M_1} C_{JM_1 L\nu}^{J_1 M_1} C_{J_1 M_1 kx}^{J' M'} \sqrt{J_1(J_1+1)} (2J_1+1) \times \\
 &\times (-1)^{J_1} \begin{Bmatrix} l & s & J \\ J_1 & L & l' \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 & 1 & k \\ J' & J_1 & J_1 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} s & l' & J_1 \\ J' & 1 & s \end{Bmatrix}, \quad (146)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \langle l's'J'M' | \{ \{\hat{S}_1 \otimes \hat{J}_1\}_k \otimes \hat{Y}_L \}_{F\varphi} | lsJM \rangle &= (-1)^{L+F-J'+k+1} \delta_{ss'} C_{L0 l0}^{l'0} C_{JM' F\varphi}^{J'M'} \times \\
 &\times \sqrt{\frac{(2L+1)(2l+1)(2J+1)(2k+1)(2F+1)s(s+1)(2s+1)}{4\pi}} \sum_{J_1} \sqrt{J_1(J_1+1)} (2J_1+1)^{3/2} \times \\
 &\times (-1)^{J_1} \begin{Bmatrix} l & s & J \\ J_1 & L & l' \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 & 1 & k \\ J' & J_1 & J_1 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} s & l' & J_1 \\ J' & 1 & s \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} L & k & F \\ J' & J & J_1 \end{Bmatrix}. \quad (147)
 \end{aligned}$$

Коммутаторы тензорных произведений операторов в формулах (128)—(147) могут быть представлены в общем виде следующими выражениями:

$$\mathfrak{R}_{kx, L\nu}(\{\hat{P}_a \otimes \hat{Q}_b\}_{kx}, \hat{Y}_{L\nu}) = \sum_{\alpha\beta} C_{\alpha\alpha\beta}^{kx} \{ \mathfrak{R}_{\alpha\alpha, L\nu}(\hat{P}_{\alpha\alpha}, \hat{Y}_{L\nu}) \hat{Q}_{b\beta} + \hat{P}_{\alpha\alpha} \mathfrak{R}_{\beta\beta, L\nu}(\hat{Q}_{b\beta}, \hat{Y}_{L\nu}) \}, \quad (148)$$

$$\mathfrak{R}_{F\varphi}^{kL}(\{\hat{P}_a \otimes \hat{Q}_b\}_k, \hat{Y}_L) = \sum_{\alpha\beta\gamma} C_{\alpha\alpha\beta\gamma}^{kx} C_{k\gamma L\nu}^{F\varphi} \{ \mathfrak{R}_{\alpha\alpha, L\nu}(\hat{P}_{\alpha\alpha}, \hat{Y}_{L\nu}) \hat{Q}_{b\beta} + \hat{P}_{\alpha\alpha} \mathfrak{R}_{\beta\beta L\nu}(\hat{Q}_{b\beta}, \hat{Y}_{L\nu}) \}. \quad (149)$$

Вычисление матричных элементов этих коммутаторов сводится к применению полученных выше формул.

## 9. Матричные элементы некоторых скалярных и векторных произведений

Для скалярного и векторного произведения операторов  $\hat{n}$ ,  $\hat{V}_Q$  из формулы (33) получаем

$$\langle l'm' | (\hat{n} \cdot \hat{V}_Q) | lm \rangle = 0, \quad (150)$$

$$\langle l'm' | [\hat{n} \times \hat{V}_Q]_{\mu} | lm \rangle = i \sqrt{l(l+1)} C_{l m' \mu}^{l' m'} \delta_{ll'}. \quad (151)$$

Формула (148) является следствием ортогональности операторов  $\hat{\mathbf{n}}$  и  $\hat{\mathbf{V}}_{\Omega}$ . Формулу (149) можно получить сразу, если учесть что

$$\hat{\mathbf{n}} \times \hat{\mathbf{V}}_{\Omega} = i\hat{\mathbf{L}}.$$

Матричные элементы скалярного и векторного произведений оператора  $\hat{\mathbf{J}}$  и операторов  $\hat{\mathbf{n}}$  и  $\hat{\mathbf{V}}_{\Omega}$  получаются из формул (52)—(56) и (61)—(65)

$$\langle l's'J'M' | (\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{J}}) | lsJM \rangle = \delta_{s's} \delta_{J'J} \delta_{M'M} (-1)^{s+l'+J+1} \sqrt{J(J+1)(2J+1)(2l+1)} C_{l0l0}^{l'sJ} \left\{ \begin{matrix} l & s & J \\ J & 1 & l' \end{matrix} \right\}, \quad (152)$$

$$\begin{aligned} \langle l's'J'M' | [\hat{\mathbf{n}} \times \hat{\mathbf{J}}]_x | lsJM \rangle &= \frac{i}{2} (-1)^{J+s+l'} \{J'(J'+1) - J(J+1) - 2\} \sqrt{(2l+1)(2J+1)} \times \\ &\times C_{l0l0}^{l'sJ} \left\{ \begin{matrix} l & s & J \\ J' & 1 & l' \end{matrix} \right\} C_{JM1x}^{J'M'}. \end{aligned} \quad (153)$$

Скалярное произведение операторов  $\hat{\mathbf{n}}$  и  $\hat{\mathbf{J}}$  коммутативно, а векторное некоммутирует.

$$\langle l's'J'M' | [\hat{\mathbf{J}} \times \hat{\mathbf{n}}]_x | lsJM \rangle = \frac{i}{2} (-1)^{J+s+l'+1} \{J'(J'+1) - J(J+1) + 2\} \sqrt{(2l+1)(2J+1)} C_{l0l0}^{l'sJ} \left\{ \begin{matrix} l & s & J \\ J' & 1 & l' \end{matrix} \right\} C_{JM1x}^{J'M'}. \quad (154)$$

Аналогично получаем

$$\begin{aligned} \langle l's'J'M' | (\hat{\mathbf{V}}_{\Omega} \cdot \hat{\mathbf{J}}) | lsJM \rangle &= \delta_{J'J} \delta_{s's} \delta_{M'M} (-1)^{s+l'+J} \sqrt{(2l'+1)(2J+1)J(J+1)} \times \\ &\times \left[ l \sqrt{\frac{l+1}{2l+3}} \delta_{l'l+1} + (l+1) \sqrt{\frac{l}{2l-1}} \delta_{l'l-1} \right] \left\{ \begin{matrix} l & s & J \\ J & 1 & l' \end{matrix} \right\}, \end{aligned} \quad (155)$$

$$\begin{aligned} \langle l's'J'M' | [\hat{\mathbf{V}}_{\Omega} \times \hat{\mathbf{J}}]_x | lsJM \rangle &= \frac{i}{2} (-1)^{J+s+l'+1} \sqrt{(2l'+1)(2J+1)} \{J'(J'+1) - J(J+1) - 2\} \times \\ &\times \left[ l \sqrt{\frac{l+1}{2l+3}} \delta_{l'l+1} + (l+1) \sqrt{\frac{l}{2l-1}} \delta_{l'l-1} \right] \left\{ \begin{matrix} l & s & J \\ J' & 1 & l' \end{matrix} \right\} C_{JM1x}^{J'M'}. \end{aligned} \quad (156)$$

Так же как и в предыдущем случае, скалярное произведение векторных операторов  $\hat{\mathbf{V}}_{\Omega}$  и  $\hat{\mathbf{J}}$  коммутативно, а векторное некоммутирует.

$$\begin{aligned} \langle l's'J'M' | [\hat{\mathbf{J}} \times \hat{\mathbf{V}}_{\Omega}]_x | lsJM \rangle &= \frac{i}{2} (-1)^{J+s+l'} \{J'(J'+1) - J(J+1) + 2\} \sqrt{(2l'+1)(2J+1)} \times \\ &\times \left[ l \sqrt{\frac{l+1}{2l+3}} \delta_{l'l+1} + (l+1) \sqrt{\frac{l}{2l-1}} \delta_{l'l-1} \right] \left\{ \begin{matrix} l & s & J \\ J' & 1 & l' \end{matrix} \right\} C_{JM1x}^{J'M'}. \end{aligned} \quad (157)$$

Матричные элементы скалярного и векторного произведений оператора  $\hat{\mathbf{L}}$  и операторов  $\hat{\mathbf{n}}$  и  $\hat{\mathbf{V}}_{\Omega}$  можно получить из формул (73)—(77) и (82)—(85).

Для скалярных произведений имеем

$$\begin{aligned} \langle l'm' | (\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{L}}) | lm \rangle &= 0, \\ \langle l'm' | (\hat{\mathbf{V}}_{\Omega} \cdot \hat{\mathbf{L}}) | lm \rangle &= 0. \end{aligned} \quad (158)$$

Эти результаты являются следствием ортогональности векторов  $\hat{\mathbf{n}}$ ,  $\hat{\mathbf{V}}_{\Omega}$  и  $\hat{\mathbf{L}}$ .

Векторные произведения  $[\hat{\mathbf{n}} \times \hat{\mathbf{L}}]$  и  $[\hat{\mathbf{V}}_{\Omega} \times \hat{\mathbf{L}}]$  не коммутативны. Поэтому

$$\langle l'm' | [\hat{\mathbf{n}} \times \hat{\mathbf{L}}]_x | lm \rangle = -\frac{i}{2} [l'(l'+1) - l(l+1) - 2] \sqrt{\frac{2l+1}{2l'+1}} C_{l0l0}^{l'sJ} C_{lm1x}^{l'm'} = i \langle l'm' | (\hat{\mathbf{V}}_{\Omega})_x | lm \rangle, \quad (159)$$

$$\langle l'm' | [\hat{\mathbf{L}} \times \hat{\mathbf{n}}]_x | lm \rangle = \frac{i}{2} [l'(l'+1) - l(l+1) + 2] \sqrt{\frac{2l+1}{2l'+1}} C_{l0l0}^{l'sJ} C_{lm1x}^{l'm'}, \quad (160)$$

а также

$$\langle l'm' | [\hat{\mathbf{V}}_{\Omega} \times \hat{\mathbf{L}}]_x | lm \rangle = \frac{i}{2} [l'(l'+1) - l(l+1) - 2] \left[ l \sqrt{\frac{l+1}{2l+3}} \delta_{l'l+1} + (l+1) \sqrt{\frac{l}{2l-1}} \delta_{l'l-1} \right] C_{lm1x}^{l'm'}, \quad (161)$$

$$\langle l'm' | [\hat{\mathbf{L}} \times \hat{\mathbf{V}}_{\Omega}]_x | lm \rangle = -\frac{i}{2} [l'(l'+1) - l(l+1) + 2] \left[ l \sqrt{\frac{l+1}{2l+3}} \delta_{l'l+1} + (l+1) \sqrt{\frac{l}{2l-1}} \delta_{l'l-1} \right] C_{lm1x}^{l'm'}. \quad (162)$$

Матричные элементы скалярного и векторного произведения операторов  $\hat{\mathbf{L}}$  и  $\hat{\mathbf{J}}$ , можно получить из формул (86)—(89).

Скалярное произведение коммутативно:

$$\langle l's'J'M' | (\hat{\mathbf{L}} \cdot \hat{\mathbf{J}}) | lsJM \rangle = \delta_{l'l'} \delta_{s's} \delta_{J'J} \delta_{M'M} \frac{J(J+1) + l(l+1) - s(s+1)}{2}. \quad (163)$$

Векторное произведение некоммутирует:

$$\begin{aligned} \langle l's'J'M' | [\hat{\mathbf{L}} \times \hat{\mathbf{J}}]_x | lsJM \rangle &= \frac{i}{2} (-1)^{s+l+J+1} \delta_{l'l'} \delta_{s's} [J(J+1) - J'(J'+1) + 2] \times \\ &\times \sqrt{(2J+1)l(l+1)(2l+1)} \begin{Bmatrix} l & s & J \\ J' & 1 & l \end{Bmatrix} C_{JM'1x}^{J'M'}, \end{aligned} \quad (164)$$

$$\begin{aligned} \langle l's'J'M' | [\hat{\mathbf{J}} \times \hat{\mathbf{L}}]_x | lsJM \rangle &= \frac{i}{2} (-1)^{s+l+J+1} \delta_{l'l'} \delta_{s's} [J'(J'+1) - J(J+1) + 2] \times \\ &\times \sqrt{(2J+1)l(l+1)(2l+1)} \begin{Bmatrix} l & s & J \\ J' & 1 & l' \end{Bmatrix} C_{JM'1x}^{J'M'}. \end{aligned} \quad (165)$$

Матричные элементы скалярных и векторных произведений оператора спина  $\hat{\mathbf{S}}$  и коммутирующих с ним операторов  $\hat{\mathbf{n}}$ ,  $\hat{\mathbf{V}}_Q$  и  $\hat{\mathbf{L}}$  можно получить из формул (95)—(99).

$$\langle l's'J'M' | (\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{S}}) | lsJM \rangle = (-1)^{l+s+J} \delta_{J'J} \delta_{M'M} \delta_{s's} \sqrt{s(s+1)(2s+1)(2l+1)} C_{Jl0}^{l's's}, \quad (166)$$

$$\begin{aligned} \langle l's'J'M' | (\hat{\mathbf{V}}_Q \cdot \hat{\mathbf{S}}) | lsJM \rangle &= (-1)^{l+s+J+1} \delta_{J'J} \delta_{M'M} \delta_{s's} \sqrt{s(s+1)(2s+1)(2l'+1)} \times \\ &\times \left[ l \sqrt{\frac{l+1}{2l+3}} \delta_{l',l+1} + (l+1) \sqrt{\frac{l}{2l-1}} \delta_{l',l-1} \right] \begin{Bmatrix} 1 & s & s \\ J & l & l' \end{Bmatrix}, \end{aligned} \quad (167)$$

$$\langle l's'J'M' | (\hat{\mathbf{L}} \cdot \hat{\mathbf{S}}) | lsJM \rangle = \delta_{ll'} \delta_{s's} \delta_{J'J} \delta_{M'M} \frac{1}{2} [J(J+1) - l(l+1) - s(s+1)], \quad (168)$$

$$\begin{aligned} \langle l's'J'M' | [\hat{\mathbf{n}} \times \hat{\mathbf{S}}]_x | lsJM \rangle &= i (-1)^{l'+J+s} \delta_{s's} \sqrt{(2l+1)(2J+1)} \times C_{l00}^{l's's} \times \\ &\times \frac{1}{2} [(J'-l')(J'+l'+1) - (J-l)(J+l+1)] \begin{Bmatrix} J' & l' & s \\ l & J & 1 \end{Bmatrix} C_{JM'1x}^{J'M'}, \end{aligned} \quad (169)$$

$$\begin{aligned} \langle l's'J'M' | [\hat{\mathbf{V}}_Q \times \hat{\mathbf{S}}]_x | lsJM \rangle &= i (-1)^{l'+J+s+1} \delta_{s's} \sqrt{(2l'+1)(2J+1)} \times \begin{Bmatrix} J' & l' & s \\ l & J & 1 \end{Bmatrix} \times \\ &\times \frac{1}{2} [(J'-l')(J'+l'+1) - (J-l)(J+l+1)] \left[ l \sqrt{\frac{l+1}{2l+3}} \delta_{l',l+1} + (l+1) \sqrt{\frac{l}{2l-1}} \delta_{l',l-1} \right] C_{JM'1x}^{J'M'}, \end{aligned} \quad (170)$$

$$\begin{aligned} \langle l's'J'M' | [\hat{\mathbf{L}}_1 \times \hat{\mathbf{S}}_1]_x | lsJM \rangle &= i (-1)^{l+J+s} \sqrt{(2J+1)l(l+1)(2l+1)} \delta_{ll'} \delta_{s's} \times \\ &\times \frac{1}{2} [(J'-l)(J'+l+1) - (J-l)(J+l+1)] \begin{Bmatrix} J' & l & s \\ l & J & 1 \end{Bmatrix} C_{JM'1x}^{J'M'}. \end{aligned} \quad (171)$$

Матричные элементы скалярного и векторного произведений операторов  $\hat{\mathbf{S}}$  и  $\hat{\mathbf{J}}$ :

$$\langle l's'J'M' | (\hat{\mathbf{S}} \cdot \hat{\mathbf{J}}) | lsJM \rangle = \delta_{ll'} \delta_{s's} \delta_{J'J} \delta_{M'M} \frac{1}{2} [J(J+1) + s(s+1) - l(l+1)], \quad (172)$$

Скалярное произведение коммутативно. Векторное произведение некоммутирует.

$$\begin{aligned} \langle l's'J'M' | [\hat{\mathbf{S}} \times \hat{\mathbf{J}}]_x | lsJM \rangle &= \frac{i}{2} (-1)^{l+s+J'+1} \delta_{s's} \delta_{ll'} [J(J+1) - J'(J'+1) + 2] \times \\ &\times \sqrt{(2J+1)s(s+1)(2s+1)} \begin{Bmatrix} s & l & J \\ J' & 1 & s \end{Bmatrix} C_{JM'1x}^{J'M'}, \end{aligned} \quad (173)$$

$$\begin{aligned} \langle l's'J'M' | [\hat{\mathbf{J}} \times \hat{\mathbf{S}}]_x | lsJM \rangle &= \frac{i}{2} (-1)^{l+s+J'+1} \delta_{ll'} \delta_{s's} [J'(J'+1) - J(J+1) + 2] \times \\ &\times \sqrt{(2J+1)s(s+1)(2s+1)} \begin{Bmatrix} s & l & J \\ J' & 1 & s \end{Bmatrix} C_{JM'1x}^{J'M'}. \end{aligned} \quad (174)$$



# СПИСОК ОБОЗНАЧЕНИЙ

## 1. Орты, векторы

- $e_x, e_y, e_z$  — декартовы орты (стр. 6),  
 $e_r, e_\theta, e_\varphi$  — сферические орты (стр. 7),  
 $e_{\pm 1}, e_0$  — ковариантные циклические орты (стр. 7),  
 $e^{\pm 1}, e^0$  — контравариантные циклические орты (стр. 8),  
 $A_x, A_y, A_z$  — декартовы компоненты вектора  $A$  (стр. 13),  
 $A_r, A_\theta, A_\varphi$  — сферические компоненты вектора  $A$  (стр. 13),  
 $A_{\pm 1}, A_0$  — ковариантные циклические компоненты вектора  $A$  (стр. 13),  
 $A^{\pm 1}, A^0$  — контравариантные циклические компоненты вектора  $A$  (стр. 13),  
 $A'_{\pm 1}, A'_0$  — ковариантные спиральные компоненты вектора  $A$  (стр. 13),  
 $A'^{\pm 1} A'^0$  — контравариантные спиральные компоненты вектора  $A$  (стр. 13),

$M(x, y, z \rightleftharpoons +1, 0, -1)$   
 $M(r, \theta, \varphi \rightleftharpoons x, y, z)$   
 $M(+1, 0, -1 \rightleftharpoons r, \theta, \varphi)$

} матрицы, определяющие связь декартовых, циклических и сферических компонент векторов (и ортов) (стр. 14).

## 2. Повороты системы координат

- $\alpha, \beta, \gamma$  — углы Эйлера (стр. 20),  
 $n(\Theta, \Phi)$  — единичный вектор в направлении оси поворота (стр. 22),  
 $\omega$  — угол поворота вокруг направления  $n(\Theta, \Phi)$  (стр. 22),  
 $a, b$  — параметры Кэли—Клейна (стр. 23),

$\hat{D}(\alpha, \beta, \gamma)$  — оператор поворота, выраженный через углы Эйлера (стр. 26),  
 $U(\omega; \Theta, \Phi)$  — оператор поворота, выраженный через углы  $\Theta, \Phi$ , определяющие направление оси поворота, и  $\omega$  — величину поворота (стр. 26),  
 $a$  — матрица преобразования декартовых компонент векторов и тензоров при повороте системы координат (стр. 27),

$D^J_{MM'}(\alpha, \beta, \gamma)$   
 $U^J_{MM'}(\omega; \Theta, \Phi)$

} матрицы, осуществляющие преобразования неприводимых тензоров ранга  $J$  при поворотах системы координат, которые определяются углами Эйлера  $\alpha, \beta, \gamma$  (стр. 64) и углами  $\omega, \Theta, \Phi$  соответственно,  
 $\chi^J(R)$  — характер неприводимого представления группы вращения (стр. 87),  
 $\chi^J_\lambda(R)$  — обобщенный характер (стр. 92),  
 $R$  — совокупность параметров, характеризующих поворот  $(\alpha, \beta, \gamma)$  или  $(\omega; \Theta, \Phi)$ ,  
 $dR = \sin \beta d\alpha d\beta d\gamma = 4 \sin^2 \frac{\omega}{2} d\omega d\Theta d\Phi$  — элемент объема группы трехмерных вращений.

## 3. Другие преобразования системы координат

- $\hat{I}$  — оператор единичного преобразования,  
 $\hat{P}_r$  — оператор инверсии координат,  
 $\hat{P}_t$  — оператор обращения времени,  
 $\hat{T}(a)$  — оператор сдвига системы координат (стр. 125).

## 4. Математические символы и операции

- $\nabla$  — оператор градиента (стр. 17),  
 $\Delta$  — оператор Лапласа (стр. 18),  
 $\nabla_{\Omega}$  — угловая часть оператора  $\nabla$  (стр. 18),  
 $\Delta_{\Omega}$  — угловая часть оператора  $\Delta$  (стр. 19),  
 $\binom{m}{n} = \frac{m!}{n!(m-n)!}$ ,  
 $(a)_n = \frac{(a+n-1)!}{(a-1)!}$ ,  
 $(a)^{(n)}$  — квазистепень (стр. 204),  
 $(a+b)^{(n)}$  — квазибином (стр. 204),  
 $(a+b+c)^{(n)}$  — квазитрином (стр. 302),  
 $\Delta_a^n$  — конечная разность (стр. 204),  
 $\delta(x)$  —  $\delta$ -функция Дирака,  
 $\Theta(x)$  — тета-функция ( $\Theta(x) = 1$  при  $x > 0$  и  $\Theta(x) = 0$  при  $x < 0$ ),  
 $\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0, \end{cases}$   
 $\delta_{ik}$  —  $\delta$ -символ Кронекера (стр. 16),  
 $\varepsilon_{ikl}$  — тензор Леви—Чивита (стр. 17),  
 $\xi_{ab} = \begin{cases} 1 & b > a, \\ (-1)^{b-a} & b < a, \end{cases}$   
 $d\Omega = \sin \vartheta d\vartheta d\varphi$  — элемент телесного угла.

## 5. Операторы угловых моментов и родственные им операторы

- $\hat{\mathbf{J}}$  — оператор полного углового момента (стр. 33),  
 $\hat{\mathbf{L}}$  — оператор орбитального момента (стр. 35),  
 $\hat{\mathbf{S}}$  — оператор спинного момента (стр. 38),  
 $\sigma$  — матрицы Паули (стр. 42);  
 $\hat{\mathbf{L}}^+, \hat{\mathbf{S}}^+, \hat{\mathbf{J}}^+$  — эрмитово-сопряженные операторы,  
 $\hat{T}_{LM}(S)$  — поляризационные операторы ранга  $L$  (стр. 39),  
 $\hat{Q}_{ik}$  — квадрупольный тензорный оператор (стр. 46),  
 $T_{i_1 i_2 \dots i_n}$  — след произведения  $n$  спиновых матриц (стр. 45),  
 $U$  — матрица, осуществляющая преобразование спиновых поляризационных операторов от представления циклического базиса к представлению декартового базиса (стр. 49).

## 6. Неприводимые тензоры

$\mathfrak{M}_M, \tilde{\mathfrak{M}}_M$  — ковариантные компоненты неприводимых тензоров  $\mathfrak{M}_J$  и  $\tilde{\mathfrak{M}}_J$  соответственно (стр. 54),

$\mathfrak{M}_J^M \tilde{\mathfrak{M}}_J^M$  — контравариантные компоненты неприводимых тензоров  $\mathfrak{M}_J$  и  $\tilde{\mathfrak{M}}_J$  (стр. 55),

$W_{J_1 M_1 J_2 M_2}(1, 2)$  — компоненты двойного тензора  $W_{J_1 J_2}(1, 2)$  (стр. 55),

$\mathfrak{M}_{J_1 M_1} \mathfrak{N}_{J_2 M_2}$  — прямое произведение неприводимых тензоров (стр. 56),

$\{\mathfrak{M}_{J_1} \otimes \mathfrak{N}_{J_2}\}_{JM}$  — компоненты неприводимого тензорного произведения  $\{\mathfrak{M}_{J_1} \otimes \mathfrak{N}_{J_2}\}_J$  (стр. 56),

$(\mathfrak{M}_J \cdot \mathfrak{N}_J)$  — скалярное произведение неприводимых тензоров (стр. 57),

$\mathfrak{R}_{J_1 M_1 J_2 M_2} = [\mathfrak{M}_{J_1 M_1}, \mathfrak{N}_{J_2 M_2}]$  — коммутатор прямого произведения неприводимых тензоров (стр. 57),

$\mathfrak{R}_{JM}^{J_1 J_2}$  — коммутатор неприводимого тензорного произведения (стр. 57).

## 7. Собственные функции операторов угловых моментов

- $Y_{lm}(\vartheta, \varphi)$  } — сферическая функция (стр. 116),  
 $C_{lm}(\vartheta, \varphi)$  }  
 $\tilde{Y}_{lm}(\vartheta, \varphi)$  — модифицированная сферическая функция (стр. 117),  
 $\chi_{s\sigma}$  — спиновая функция (стр. 150),  
 $\chi_{s\lambda}$  — спиральные спиновые функции (стр. 151),  
 $Y_{JM}^{LS}(\vartheta, \varphi)$  — шаровые тензоры (стр. 171),  
 $\Omega_{JM}^L(\vartheta, \varphi)$  — шаровые спиноры (стр. 176),  
 $Y_{JM}^L(\vartheta, \varphi), Y_{JM}^{\lambda}(\vartheta, \varphi)$  — шаровые векторы (стр. 183),  
 $W_{JM}(\vartheta)$  — квадратичные комбинации шаровых спиноров (стр. 181),  
 $W_{JM}^{\perp}(\vartheta)$  } — квадраты модулей шаровых векторов (стр. 198).  
 $W_{JM}^{\parallel}(\vartheta)$  }

## 8. Коэффициенты векторного сложения

- $\{abc\}$  —  $3j$ -символ (стр. 75),  
 $\Delta(abc)$  — треугольный  $\Delta$ -символ (стр. 203),  
 $\begin{pmatrix} a & b & c \\ \alpha & \beta & \gamma \end{pmatrix}$  —  $3jm$ -символ Вигнера (стр. 202),  
 $C_{\alpha\alpha\beta\beta}^{\alpha\gamma}$  — коэффициент Клебша—Гордана (стр. 201),  
 $\begin{Bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{Bmatrix}$  —  $6j$ -символ Вигнера (стр. 247),  
 $W(abcd; ef)$  — коэффициент Рака (стр. 248),  
 $\begin{Bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & j \end{Bmatrix}$  —  $9j$ -символ Вигнера (стр. 285).

## 9. Матричные элементы

- $|njm\rangle$  — вектор состояния с угловым моментом  $j$  и проекцией  $m$ ,  $n$  — совокупность остальных квантовых чисел;  
 $\hat{\mathfrak{M}}_{k\kappa}$  — неприводимый тензорный оператор ранга  $k$ ;  
 $\langle n'j'm' | \hat{\mathfrak{M}}_{k\kappa} | njm\rangle$  — матричный элемент неприводимого тензорного оператора (стр. 405);  
 $\langle n'j' | \|\hat{\mathfrak{M}}_k\| | nj\rangle$  — приведенный матричный элемент неприводимого тензорного оператора (стр. 405).

## 10. Некоторые специальные функции

- $P_i(x)$  — полином Лежандра,  
 $P_i^q(x)$  — присоединенный полином Лежандра,  
 $\Gamma(x)$  — гамма-функция,  
 $F(a, b; c; x)$  — гипергеометрическая функция,  
 ${}_pF_q(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p; \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_q; x) = {}_pF_q \left[ \begin{matrix} \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p \\ \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_q \end{matrix} \middle| x \right]$  —  
 обобщенная гипергеометрическая функция.  
 $P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$  — полином Якоби,  
 $C_n^\lambda(x)$  — полином Гегенбауэра,  
 $U_n(x)$  — полином Чебышева,  
 $L_n^{(\alpha)}(x)$  — полиномы Лагерра,  
 $Ai(x), Bi(x)$  — функция Эйри,  
 $J_\nu(x)$  — функция Бесселя порядка  $\nu$ ,

- $N_\nu(x)$  — функция Неймана порядка  $\nu$ ,  
 $H_\nu^{(1)}(x), H_\nu^{(2)}(x)$  — функции Ганкеля порядка  $\nu$  I и II рода соответственно,  
 $Z_\nu(x)$  — любая цилиндрическая функция,  
 $j_l(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} J_{l+1/2}(x)$  — сферическая функция Бесселя,  
 $n_l(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} N_{l+1/2}(x)$  — сферическая функция Неймана,  
 $h_l^{(1)}(x), h_l^{(2)}(x)$  — сферические функции Ганкеля.

## ЛИТЕРАТУРА

### I. Книги, сборники, обзоры

1. Alder K. Beiträge zur Theorie der Richtungskorrelation. — Helv. Phys. Acta, 1952, 25, № 3, p. 235—258.
2. Ахиезер А. И., Берестецкий В. Б. Квантовая электродинамика. М., Физматгиз, 1959, 656 с.
3. Балдин А. М., Гольдманский В. И., Максименко В. М., Розенталь И. Л. Кинематика ядерных реакций. М., Атомиздат, 1968, 456 с.
4. Bateman H., Erdelyi A. Higher transcendental functions. V. 1—3. N. Y.—Toronto—London, McGraw—Hill Book Co, Inc., 1953. Русс. перев.: Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. М., «Наука», т. 1, 1965, 294 с.; т. 2, 1966, 295 с.; т. 3, 1967, 300 с.
5. Bauman V. F. Some lectures on groups and their applications to spectroscopy. Copenhagen, 1957. Русс. перев. под ред. А. З. Долгинова: Бейман В. Лекции по применению теории групп в ядерной спектроскопии. М., Физматгиз, 1961, 228 с.
6. Берестецкий В. Б., Лифшиц Е. М., Питаевский Л. П. Релятивистская квантовая теория. Ч. 1. М., «Наука», 1968, 480 с.
7. Blatt J. M., Weisskopf V. F. Theoretical nuclear physics. N. Y.—London, 1952. Б л а т т Дж., В а й с к о п ф В. Теоретическая ядерная физика. М., ИЛ, 1954, 658 с.
8. Bohr A., Mottelson B. R. Nuclear structure, V. 1. W. A. Benjamin Inc. N. Y.—Amsterdam, 1969. Русс. перев. под ред. Л. А. Слива: Бор О., Моттelson Б. Структура атомного ядра. Т. 1. М., «Мир», 1971, 456 с.
9. Brink D. M., Satchler G. R. Angular momentum. Clarendon Press. Oxford, 1968, 160 p.
10. Condon E. U., Shortley Q. W. The theory of atomic spectra. Cambridge, 1935. Русс. перев. под ред. В. Б. Берестецкого: Кондон Е., Шортли Г. Теория атомных спектров. М., ИЛ, 1949, 440 с.
11. Ковчин Н. Е. Векторное исчисление и начала тензорного исчисления. М., Изд. АН СССР, 1951, 426 с.
12. Давыдов А. С. Квантовая механика. М., Физматгиз, 1963, 748 с.
13. Деформация атомных ядер. Под ред. Л. А. Слива. М., ИЛ, 1958, 383 с.
14. Долгинов А. З. Угловые корреляции при радиационных переходах ядра. — В кн.: Гамма лучи. Под ред. Л. А. Слива. М.—Л., Изд. АН СССР, 1961, с. 523—681.
15. Eckart C. The application of group theory to the quantum dynamics of monatomic systems. — Rev. Mod. Phys., 1930, 2, № 3, p. 305—380.
16. Edmonds A. R. Angular momentum in quantum mechanics. New Jersey, Princeton Press, 1957, 146 p.
17. El-Baz E. Traitement graphique de l'algebre des moments angulalaires. Paris, Masson, 1969, 179 p.
18. Fano U., Racah G. Irreducible tensorial sets. N. Y., Academic Press, 1959, 171 p.
19. Фок В. А. Начала квантовой механики. Л., 1932, 251 с.
20. Гельфанд И. М., Минлос Р. А., Шапиро З. Я. Представления группы вращений и группы Лоренца. М., Физматгиз, 1958, 368 с.
21. Гольдштейн Г. Классическая механика. М., ГИТТЛ, 1965, 588 с.
22. Hobson E. W. The theory of spherical and ellipsoidal harmonics. Cambridge University Press, 1931. Русс. перев. Гобсон Е. Теория сферических и эллипсоидальных функций. М., ИЛ, 1952, 476 с.
23. Jackson J. D. Classical electrodynamics. N. Y.—London; John Wiley & Sons Inc., 1962. Русс. перев. под ред. Э. Л. Бурштейна: Джексон Дж. Классическая электродинамика. М., «Мир», 1965, 702 с.
24. Judd B. R. Operator techniques in atomic spectroscopy. N. Y., McGraw-Hill. 1963, 242 p.
25. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Квантовая механика. 2-е изд. М., Физматгиз, 1963, 704 с.
26. Любарский Г. Я. Теория групп и ее применения в физике. М., Физматгиз, 1958, 354 с.
27. Magnus W., Oberhettinger F., Soni R. P. Formulas and theorems for the special functions of mathematical physics. N. Y., Springer—Verlag Berlin—Heidelberg, 1966, 508 p.
28. Newton R. G. Scattering theory of waves nad particles. N. Y.—San Francisco—St. Louis—Toronto—London—Sydney. McGraw-Hill Book Co. Русс. перев. под ред. А. М. Бродского и В. В. Толмачева: Н ь ю т о н Р. Теория рассеяния волн и частиц. М., «Мир», 1969, 607 с.
29. Quantum theory of angular momentum. Ed. by L. C. Biedenharn and H. Van Dam., N. Y.—London, Academic Press, 1965, 332 p.
30. Rose M. E. Multipole fields. N. Y., John Wiley & Sons Inc., London, Chapman & Hall Ltd., 1955. Русс. перев. под ред. И. С. Шапиро: Р о у з М. Поля мультиполей, М., ИЛ, 1957, 132 с.

31. Rose M. E. Elementary theory of angular momentum. N. Y., John Wiley & Sons Inc., London, Chapman & Hall Ltd., 1957, 248 p.
32. De-Shalit A., Talmi I. Nuclear shell theory. N. Y.—London, Academic Press, 1963, 573 p.
33. Slater J. C. Quantum theory of atomic structure. V. 11. N. Y., McGraw-Hill, 1960, 439 p.
34. Смирнов В. И. Курс высшей математики. Т. 2. М., Физматгиз, 1958, 655 с.
35. Смирнов В. И. Курс высшей математики. Т. 3, ч. 2. М., Физматгиз, 1958, 336 с.
36. Смородинский Я. А., Шелепин Л. А. Коэффициенты Клебша—Гордана с разных сторон. — УФН, 1972, 106, № 1, с. 3—45.
37. Соболевман И. И. Введение в теорию атомных спектров. М., Физматгиз, 1963, 640 с.
38. Spectroscopic and group theoretical methods in physics. Racah memorial volume. Amsterdam, North—Holland Publ. Co., 1968, 462 p.
39. Tinkham M. Group theory and quantum mechanics. N. Y., McGraw-Hill, 1964, 340 p.
40. Van der Waerden B. L. Die gruppentheoretische Methode in der Quantenmechanik. Berlin, Springer, 1932. Русск. перев. под ред. Я. И. Френкеля: Вандер-Варден Б. Л. Метод теории групп в квантовой механике. Харьков, ГНТИ Украины, 1938, 198 с.
41. Вилленкин Н. Я. Специальные функции и теория представлений групп. М., «Наука», 1965, 588 с.
42. Watson G. N. A Treatise on the Theory of Bessel functions. V. 1. Cambridge, Univ. press 1945, 804 p. Русск. перев.: Ватсон Г. Н. Теория бесселевых функций. М., ИЛ, 1949, 798 с.
43. Wigner E. P. Group theory. N. Y.—London, Academic Press, 1959. Русск. перев. под ред. Я. А. Смородинского: Вигнер Е. Теория групп. М., ИЛ, 1961, 443 с.
44. Юцис А. П., Левинсон И. Б., Ваннагас В. В. Математический аппарат теории момента количества движения. Вильнюс, 1960, 243 с.
45. Юцис А. П., Бандзайтис А. А. Теория момента количества движения в квантовой механике. Вильнюс, 1965, 463 с.

## II. Статьи по отдельным вопросам

46. Аким Э. Л., Левин А. А. Производящая функция для коэффициентов Клебша—Гордана. — ДАН СССР, 1961, 138, № 3, с. 503—505.
47. Alder K., Bohr A., Huus T., Mottelson B., Winther A. Study of nuclear structure by electromagnetic excitation with accelerated ions. — Rev. Mod. Phys., 1956, 28, № 4, p. 432—542.
48. Ansari S. M. R. Quasi-binomial representation of the Clebsch—Gordan coefficients. — Nuov. Cim., 1965, 38, № 4, p. 1883—1886.
49. Arima A., Horie H., Tanabe Y. Generalized Racah coefficient and its application. — Prog. Theor. Phys., 1954, 11, № 2, p. 143—154.
50. Бандзайтис А. А., Жукаускас К. П., Матулис А. Ю., Юцис А. П. К расчету  $6j$ -коэффициентов. — Лит. физ. сб., 1964, 4, № 1, с. 35—43.
51. Бандзайтис А. А., Юцис А. П. Еще раз о формулах для коэффициентов Клебша—Гордана. — Лит. физ. сб., 1964, 4, № 1, с. 45—49.
52. Бандзайтис А. А., Каросене А. В., Юцис А. П. К вычислению  $9j$ -коэффициентов. — Лит. физ. сб., 1964, 4, № 4, с. 457—466.
53. Bargmann V. On the representations of the rotation group. — Rev. Mod. Phys., 1952, 34, № 4, p. 829—845.
54. Берестецкий В. Б. Электромагнитные поля мультиполей, ЖЭТФ, 17, № 1, с. 12—18, 1947.
55. Берестецкий В. Б., Долгинов А. З., Тер-Мартirosян К. А. Угловые функции частиц со спином. — ЖЭТФ, 1950, 20, № 6, с. 527—537.
56. Biedenharn L. C., Blatt J. M., Rose M. E. Some properties of the Racah and associated coefficients. — Rev. Mod. Phys., 1952, 24, № 4, p. 249—257.
57. Biedenharn L. C. An identity satisfied by the Racah coefficients. — J. of Math. & Phys., 1953, 31, № 4, p. 287—293.
58. Bincer A. M. Interpretation of the symmetry of the Clebsch—Gordan coefficients discovered by Regge. — J. Math. Phys., 1970, 11, № 6, p. 1835—1844.
59. Boys S. F. Electronic wave functions IV. — Proc. Roy. Soc., 1951, A 207, № 1134, p. 181—197.
60. Brussaard P. J., Tolhoek H. A. Classical limits of Clebsch—Gordan coefficients, Racah coefficients and  $D_{mn}^j(\varphi, \theta, \psi)$ -functions. 1957, Physica, 23, № 10, p. 955—971.
61. Долгинов А. З. Релятивистские сферические функции. — ЖЭТФ, 1956, 30, № 4, с. 746—755.
62. Долгинов А. З., Топтыгин И. Н. Релятивистские сферические функции. II. — ЖЭТФ, 1958, 37, № 11, с. 1441—1451.
63. Долгинов А. З., Москалев А. Н. Релятивистские сферические функции. III. — ЖЭТФ, 1959, 37, № 12, с. 1697—1707.
64. Эдмондс А. Угловые моменты в квантовой механике. — В кн.: Деформация атомных ядер. М., ИЛ, 1958, с. 305—351.
65. Elliott J. P. Theoretical studies in nuclear structure. V — Proc. Roy. Soc., 1953, A 218, № 1134, p. 345—370.
66. Fano U. Statistical matrix techniques and their application to the directional correlation of radiation. — US Nat. Bureau of Standards, Report 1214, 1951.
67. Fock V. Zur Theorie des Wasserstoffatoms. — Zs. f. Phys., 1936, 98, № 3, p. 145—154.
68. Фок В. А. Новый вывод векторной модели. — ЖЭТФ, 1940, 10, с. 383—392.
69. Fontana P. R. Symmetric expansion of one- and two-center Coulomb potentials. — J. Math. Phys., 1961, 2, № 6, p. 825—828.
70. Friedman B., Russak J. Addition theorems for spherical waves. — Quart. of Appl. Math., 1954, 12, № 1, p. 13—23.
71. Harper W. A partial-wave expansion of the finite rotation operator. — Ann. of Phys., 1968, 48, № 3, p. 579—591.

72. Innes F. R., Ufford C. W. Microwave Zeeman effect and theory of complex spectra. — *Phys. Rev.*, 1958, 111, № 1, p. 194—202.
73. Jahn H. A. Theoretical studies in nuclear structure. II. — *Proc. Roy. Soc.*, 1951, A 205, № 1081, p. 192—237.
74. Jahn H. A., Hore J. Symmetry properties of the Wigner  $9j$ -symbol. — *Phys. Rev.*, 1954, 93, № 2, p. 318—321.
75. Jang S. Relationships among the Wigner  $9j$ -symbols. — *J. Math. Phys.*, 1968, 9, № 3, p. 397—402.
76. Каросене А. В., Савукинас А. Ю., Бандзайтис А. А., Визбарайте Я. И., Юцис А. П.  $6j$ -коэффициенты с отрицательными параметрами. — *Лит. физ. сб.*, 1964, 4, № 2, с. 187—196.
77. Каросене А. В., Алишаускас С. И., Бандзайтис А. А.  $9j$ -коэффициенты с одним из параметров, равным единице. — *Лит. физ. сб.*, 1964, 5, № 1, с. 13—21.
78. Kay K. G., Todd H. D., Silverstone H. J. Dirac delta functions in the Laplace-type expansion of  $r^{nY^{lm}}(\theta, \varphi)$ . — *J. of Chem. Phys.*, 1969, 51, № 6, p. 2359—2362.
79. Kennedy J. M., Cliff M. J. Transformation coefficients between LS and JJ coupling. Chalk River Report. CRT, Ontario, 1957.
80. Левинсон И. Б. Сумма произведений коэффициентов Вигнера и их графическое изображение. — *Тр. Физ.-техн. инст. АН Лит. ССР*, 1956, 2, с. 17—30.
81. Louck J. D. New recursion relation for Clebsch—Gordan coefficients. — *Phys. Rev.*, 1958, 110, № 4, p. 815—816.
82. Majumdar S. D. The Clebsch-Gordan coefficients. — *Prog. Theor. Phys.*, 1958, 20, № 6, p. 798—803.
83. Majumdar S. D. Coupling of three angular momenta. — *Acta Phys. Acad. Scient. Hung.*, 1969, 26, № 4, p. 311—318.
84. Маринов М. С. Разложение матриц конечных вращений по коэффициентам Клебша—Гордана. — *ЯФ*, 1967, 5, № 6, 1321—1323.
85. Melvin M. A., Swamy N. V. V. J. Evaluation of certain physically interesting integrals and hypergeometric sums. — *J. of Math. & Phys.*, 1957, 36, № 2, p. 157—163.
86. Mies M. Recursion relation for the  $3j$ -symbols. — *Nucl. Phys.*, 1968, A 113, № 1, p. 215—220.
87. Moses H. E. Irreducible representation of the rotation group in terms of the axis and angle of rotation. — *Ann. of Phys.*, 1966, 37, № 2, p. 224—226.
88. Петрашень Г. И. Решения векторных предельных задач математической физики в случае шара. — *ДАН СССР*, 1945, 46, № 7, с. 291—294.
89. Ronzapo G., Regge T. Semiclassical limit of Racah coefficients. — In: *Spectroscopic and group theoretical methods in physics*. Amsterdam, North—Holland Publ. Co., 1968, p. 1—58.
90. Racah G. Theory of complex spectra. I. — *Phys. Rev.*, 1942, 61, № 3, p. 186—197.
91. Racah G. Theory of complex spectra. II. — *Phys. Rev.*, 1942, 62, № 9, p. 438—462.
92. Racah G. Theory of complex spectra. III. — *Phys. Rev.*, 1943, 63, № 9, p. 367—382.
93. Racah G. Directional correlation of successive nuclear radiations. — *Phys. Rev.*, 1951, 84, № 5, p. 910—912.
94. Regge T. Symmetry properties of Clebsch—Gordan coefficients. — *Nuov. Cim.*, 1958, 10, № 3, p. 544—545.
95. Regge T. Symmetry properties of Racah's coefficients. — *Nuov. Cim.*, 1959, 11, № 1, p. 116—117.
96. Rose M. E. The electrostatic interaction of two arbitrary charge distributions. — *J. of Math. & Phys.*, 1957, 37, № 3, p. 215—222.
97. Sack R. A. Generalization of Laplace's expansion to arbitrary charge distributions. — *J. of Math. & Phys.*, 1957, 37, № 3, p. 215—222.
98. Sack R. A. Three-dimensional addition theorem for arbitrary functions, involving expansions in spherical harmonics. — *J. Math. Phys.*, 1964, 5, № 2, p. 252—259.
99. Sato M. General formula of the Racah coefficient. — *Prog. Theor. Phys.*, 1955, 13, № 4, p. 405—414.
100. Савукинас А. Ю., Каросене А. В., Бандзайтис А. А., Юцис А. П. Симметрия зеркального отражения в теории момента количества движения. — *Лит. физ. сб.*, 1964, 4, № 4, с. 467—478.
101. Schwinger J. On angular momentum. — In: *Quantum theory of angular momentum*. Ed. by L. C. Biedenharn & H. van Dam, 1965, p. 229—279.
102. Sharp W. Racah algebra and the contraction of groups. AECL-1098, Ontario, 1960.
103. Sharp R. T. A generalized Regge identity for Wigner coefficients. — *Nuov. Cim.*, 1967, 47, № 4, p. 860—868.
104. Sharp R. T. Stretched  $X$ -coefficients. — *Nucl. Phys.*, 1967, A 95, № 1, p. 222—228.
105. Шелепин Л. А. О симметрии коэффициентов Клебша—Гордана. — *ЖЭТФ*, 1964, 46, № 3, с. 1033—1038.
106. Шелепин Л. А.  $SU_n$ -симметрия в теории коэффициентов Клебша—Гордана. — *ЖЭТФ*, 1965, 48, № 1, с. 360—367.
107. Stone A. P. Expressions for certain Wigner coefficients. — *Proc. of Phys. Soc.*, 1957, 70 A, № 12, p. 908—909.
108. Talmán J. D., True W. W. An identity involving  $9j$ -coefficients. — *Can. J. Phys.*, 1964, 42, № 6, p. 1081—1086.
109. Wigner E. On representation of certain finite groups. — *Am. Journ. of Math.*, 1939, 63, № 1, p. 12—17.
110. Wigner E. P. On the matrices which reduce the Kronecker products of representations of simply reducible groups. — In: *Quantum theory of angular momentum*. Ed. by L. C. Biedenharn & H. van Dam, 1965, 87—133.
111. Wu A. Structure of the Wigner  $9j$ -coefficients in the Bargmann approach. — *J. Math. Phys.*, 1972, 13, № 1, p. 84—90.
112. Юцис А. П., Савукинас А. Ю., Бандзайтис А. А., Каросене А. В., Нашленас Э. П. Коэффициенты Клебша—Гордана с отрицательными квантовыми числами момента количества движения. — *Лит. физ. сб.*, 1964, 4, № 2, с. 173—185.

## III. Таблицы

113. Appel H. Numerical tables for  $3j$ -,  $6j$ -,  $9j$ -symbols. Landolt-Bernstein (Group 1). V. 3. Berlin—Heidelberg—N. Y., 1968.
114. Behkami A. N. Tables of rotational wavefunctions  $d_{MK}^J$ ,  $J \leq 13$  and  $J \leq 25/2$ . — *Nuclear data tables*, 1971, 10, № 1, p. 1—48.

115. B i e d e n h a r n L. C. Tables of the Racah coefficients. ONRL—1098, April 1952.
116. B u c k m a s t e r H. A. Tables of angular momentum transformation matrix elements  $d_{mm'}(\beta)$  ( $j=2, 4, 6$ ). — Can. J. Phys., 1964, 42, № 2, p. 386—391.
117. F a l k o f f D. L., C a l l a d a y C. S., S e l l s R. E. Transformation amplitudes for vector addition of angular momentum, ( $j3mm'/j3JM$ ). — Can. J. Phys., 1952, 30, № 3, p. 253—256.
118. I s h i d z u T. Tables of the Racah coefficients. Tokyo, Pan-Pacific Press, 1960.
119. K u m a r K. Tables of certain Clebsch—Gordan coefficients and of matrix elements. — Can. J. Phys., 1957, 35, № 3, p. 341—345. (Errata, 1957, 35, № 10, p. 1401).
120. M a t s u n o b u H., T a k e b e H. Tables of  $U$ -coefficients. — Prog. Theor. Phys., 1955, 14, № 6, p. 589—605.
121. M e l v i n M. A., S w a m y N. V. V. J. Algebraic table of vector, addition coefficients for  $j=5/2$ . — Phys. Rev., 1957, 107, № 1, p. 186—189.
122. M o r i t a M., M o r i t a R., T s u k a m o t o T. Clebsch—Gordan coefficients for  $j=5/2, 3$  and  $7/2$ . — Suppl. Prog. Theor. Phys., 1963, № 26, p. 64—74.
123. Н и к и ф о р о в А. Ф., У в а р о в В. Б., Л е в и т а н Ю. Л. Таблицы коэффициентов Рака. М., ВЦ АН СССР, 1962, 320 с.
124. R o t e n b e r g M., B i v i n s R., M e t r o p o l i s N., W o o t e n J. K. The  $3j$ - and  $6j$ -symbols. London, Crosby Lockwood, 1959.
125. S a i t o R., M o r i t a M. Clebsch-Gordan coefficients for  $j=5/2$ . — Prog. Theor. Phys. 1955, 13, № 5, p. 540—542.
126. S h i m p u k u T. General theory and numerical tables of Clebsch—Gordan coefficients. — Suppl. Prog. Theor. Phys., 1960, № 13, p. 1—136.
127. S i m o n A. Numerical tables of the Clebsch—Gordan coefficients. ORNL—1718, 1954. Русск. перев. в кн.: Деформация атомных ядер. Под ред. Л. А. Слива. М., ИЛ, 1958, с. 353—379.
128. В и з б а р а й т е Я. И., Г л е м б о ц к и й И. И., К а р а з и я Р. И., С т р о ц к и т е Т. Д., У л д у к и т е В. И. Таблицы  $9j$ -коэффициентов для целых значений параметров с одним параметром равным единице. М., ВЦ АН СССР, 1968, 552 с.
129. W o l t e r s G. F. Simple method for the explicit calculation of  $d$ -functions. — Nucl. Phys., 1970, B 18, № 2, p. 625—653.
130. Y a m a d a M., M o r i t a M. On the  $\beta$ -ray angular correlations. — Prog. Theor. Phys., 1952, 8, № 3, p. 431—442.



	Стр.
Предисловие . . . . .	3
Введение . . . . .	4
<b>Г л а в а 1. Элементы векторного и тензорного исчисления . . . . .</b>	<b>6</b>
1.1. Системы координат. Орты . . . . .	6
1.2. Векторы, тензоры . . . . .	13
1.3. Дифференциальные операции . . . . .	17
1.4. Повороты системы координат . . . . .	20
<b>Г л а в а 2. Операторы угловых моментов . . . . .</b>	<b>33</b>
2.1. Оператор полного углового момента $\mathcal{L}$ . . . . .	33
2.2. Оператор орбитального момента . . . . .	35
2.3. Оператор спинового момента . . . . .	38
2.4. Поляризационные операторы . . . . .	39
2.5. Спиновые матрицы для спина $S = \frac{1}{2}$ . . . . .	42
2.6. Спиновые матрицы и поляризационные операторы для спина $S=1$ . . . . .	46
<b>Г л а в а 3. Неприводимые тензоры . . . . .</b>	<b>54</b>
3.1. Определение и свойства неприводимых тензоров . . . . .	54
3.2. Связь аппарата неприводимых тензоров с векторами и тензорами . . . . .	58
3.3. Изменение схемы связи в неприводимых тензорных произведениях . . . . .	61
<b>Г л а в а 4. <math>D</math>-функции Вигнера . . . . .</b>	<b>64</b>
4.1. Определение . . . . .	64
4.2. Дифференциальные уравнения для $D_{MM'}^J(\alpha, \beta, \gamma)$ и граничные условия . . . . .	65
4.3. Явный вид $D$ — функций Вигнера . . . . .	68
4.4. Свойства симметрии . . . . .	70
4.5. Матрица поворота в $(\omega, \Theta, \Phi)$ -представлении . . . . .	71
4.6. Суммы произведений $D$ -функций с одинаковыми аргументами . . . . .	75
4.7. Формула сложения для $D$ -функций Вигнера . . . . .	76
4.8. Алгебраические соотношения для $D_{MM'}^J(\alpha, \beta, \gamma)$ с разными индексами . . . . .	79
4.9. Дифференциальные соотношения для $D$ -функций . . . . .	82
4.10. Ортогональность и полнота системы $D$ -функций . . . . .	82
4.11. Интегралы, содержащие функции $D_{MM'}^J(\alpha, \beta, \gamma)$ или $d_{MM'}^J(\beta)$ . . . . .	84
4.12. Суммы интегралов от произведений $D$ -функций . . . . .	85
4.13. Производящие функции . . . . .	86
4.14. Характеры неприводимых представлений группы вращений . . . . .	87
4.15. Обобщенные характеры неприводимых представлений группы вращений . . . . .	92
4.16. Вид $D_{MM'}^J(\alpha, \beta, \gamma)$ при частных значениях углов $\alpha, \beta, \gamma$ . . . . .	98

4.17. Вид $D_{MM'}^J(\alpha, \beta, \gamma)$ при частных значениях индексов . . . . .	99
4.18. Асимптотические выражения для $D_{MM'}^J(\alpha, \beta, \gamma)$ . . . . .	101
4.19. Сопоставление определений $D$ -функций, используемых разными авторами . . . . .	103
4.20. Таблицы формул для $d_{MM'}^J(\beta)$ при $\frac{1}{2} \leq J \leq 5$ . . . . .	103
4.21. Таблицы значений $d_{MM'}^J\left(\frac{\pi}{2}\right)$ при $\frac{1}{2} \leq J \leq 5$ . . . . .	109
4.22. Таблицы формул для $U_{MM'}^J(\omega; \Theta, \Phi)$ при $J = \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2$ . . . . .	112
<b>Глава 5. Сферические функции</b> . . . . .	115
5.1. Определение . . . . .	115
5.2. Явный вид сферических функций и их связь с другими функциями . . . . .	118
5.3. Интегральные представления сферических функций . . . . .	122
5.4. Свойства симметрии . . . . .	124
5.5. Поведение $Y_{lm}(\vartheta, \varphi)$ при преобразованиях системы координат . . . . .	124
5.6. Разложение функций по сферическим гармоникам . . . . .	126
5.7. Алгебраические соотношения . . . . .	128
5.8. Дифференциальные соотношения . . . . .	129
5.9. Некоторые интегралы, содержащие $Y_{lm}(\vartheta, \varphi)$ . . . . .	131
5.10. Некоторые суммы, содержащие сферические функции . . . . .	132
5.11. Производящие функции . . . . .	133
5.12. Асимптотические выражения для $Y_{lm}(\vartheta, \varphi)$ . . . . .	134
5.13. Вид функции $Y_{lm}(\vartheta, \varphi)$ при частных значениях индексов . . . . .	135
5.14. Значение функции $Y_{lm}(\vartheta, \varphi)$ и $\frac{\partial}{\partial \vartheta} Y_{lm}(\vartheta, \varphi)$ при частных значениях аргументов . . . . .	139
5.15. Нули функций $Y_{lm}(\vartheta, \varphi)$ и $\frac{\partial}{\partial \vartheta} Y_{lm}(\vartheta, \varphi)$ . . . . .	139
5.16. Биполярные и триполярные гармоники . . . . .	141
5.17. Разложение функций, зависящих от двух векторов . . . . .	143
<b>Глава 6. Спиновые функции</b> . . . . .	149
6.1. Спиновые функции частиц с произвольным спином . . . . .	149
6.2. Спиновые функции при $S = \frac{1}{2}$ . . . . .	155
6.3. Спиновые функции при $S=1$ . . . . .	161
<b>Глава 7. Шаровые тензоры</b> . . . . .	171
7.1. Общие свойства шаровых тензоров . . . . .	171
7.2. Шаровые спиноры . . . . .	176
7.3. Шаровые векторы . . . . .	183
7.4. Связь с обозначениями других авторов . . . . .	199
<b>Глава 8. Коэффициенты Клебша—Гордана и <math>3jm</math>-символы</b> . . . . .	201
8.1. Определение . . . . .	201
8.2. Явный вид коэффициентов и их связь с другими функциями . . . . .	203
8.3. Интегральные представления . . . . .	206
8.4. Свойства симметрии . . . . .	207
8.5. Явный вид коэффициентов Клебша—Гордана при частных значениях индексов . . . . .	210
8.6. Рекуррентные соотношения для коэффициентов Клебша—Гордана . . . . .	214
8.7. Суммы произведений коэффициентов Клебша—Гордана . . . . .	218
8.8. Производящие функции . . . . .	221
8.9. Классический предел и асимптотические формулы для коэффициентов Клебша—Гордана . . . . .	222
8.10. Корни коэффициентов векторного сложения . . . . .	225
8.11. Связь коэффициентов Клебша—Гордана и $3jm$ -символов с обозначениями других авторов . . . . .	227
8.12. Алгебраические таблицы коэффициентов Клебша—Гордана . . . . .	227
8.13. Численные значения коэффициентов Клебша—Гордана . . . . .	241

Глава 9. $6j$ -символы и коэффициенты Рака . . . . .	247
9.1. Определение . . . . .	247
9.2. Явный вид $6j$ -символов и их связь с другими функциями . . . . .	249
9.3. Интегральные представления $6j$ -символов . . . . .	252
9.4. Свойства симметрии $6j$ -символов и коэффициентов Рака . . . . .	253
9.5. Явный вид $6j$ -символов при частных значениях индексов . . . . .	254
9.6. Рекуррентные соотношения . . . . .	257
9.7. Производящая функция . . . . .	259
9.8. Асимптотика $6j$ -символов при больших значениях моментов . . . . .	259
9.9. Связь $6j$ -символов Вигнера с аналогичными функциями других авторов . . . . .	262
9.10. Таблицы алгебраических формул для $6j$ -символов . . . . .	262
9.11. Таблицы численных значений $6j$ -символов с индексами, не превышающими 3 . . . . .	282
Глава 10. $9j$ -символы (коэффициенты Фано) . . . . .	285
10.1. Определение . . . . .	285
10.2. Явный вид $9j$ -символов и их связь с другими функциями . . . . .	287
10.3. Интегральные представления $9j$ -символов . . . . .	291
10.4. Свойства симметрии $9j$ -символов . . . . .	292
10.5. Рекуррентные соотношения для $9j$ -символов . . . . .	295
10.6. Производящая функция для $9j$ -символов . . . . .	300
10.7. Асимптотическое выражение для $9j$ -символов . . . . .	300
10.8. Явный вид $9j$ -символов при некоторых соотношениях между индексами . . . . .	301
10.9. Явный вид $9j$ -символов при некоторых значениях индексов . . . . .	305
10.10. Связь $9j$ -символов Вигнера с аналогичными функциями других авторов . . . . .	307
10.11. Алгебраические формулы для $9j$ -символов . . . . .	307
10.12. Таблицы численных значений $9j$ -символов . . . . .	308
Глава 11. Графический метод квантовой теории углового момента . . . . .	349
11.1. Графическое представление различных функций . . . . .	349
11.2. Графическое представление основных операций теории . . . . .	355
11.3. Правила действий над графиками . . . . .	360
11.4. Резюме графического метода . . . . .	381
Глава 12. Суммы коэффициентов векторного сложения . . . . .	385
12.1. Суммы произведений $3jm$ -символов . . . . .	385
12.2. Суммы произведений $6j$ - и $9j$ -символов . . . . .	393
Глава 13. Матричные элементы неприводимых тензорных операторов . . . . .	405
13.1. Теорема Вигнера—Экарта и вычисление матричных элементов . . . . .	405
13.2. Матричные элементы основных тензорных операторов . . . . .	411
Список обозначений . . . . .	429
Литература . . . . .	433

ДМИТРИЙ АЛЕКСАНДРОВИЧ ВАРШАЛОВИЧ,  
АНАТОЛИЙ НИКОЛАЕВИЧ МОСКАЛЕВ,  
ВАЛЕРИЙ КЕЛЬМАНОВИЧ ХЕРСОНСКИЙ

КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ УГЛОВОГО МОМЕНТА

*Утверждено к печати*  
*Ордена Ленина Физико-техническим институтом*  
*имени А. Ф. Иоффе АН СССР*

Редактор издательства Н. К. Шарова  
Художник Я. В. Таубвурцель  
Технический редактор О. Н. Скобелева  
Корректоры Л. М. Агаджанова, Л. Б. Жукоборская,  
Л. В. Субботина и К. С. Фридлянд

Сдано в набор 9/X 1974 г. Подписано к печати 30/IV 1975 г. Формат бумаги  $84 \times 108^{1/16}$ .  
Бумага № 2. Печ. л.  $27\frac{1}{2} = 46.20$  усл. печ. л. Уч.-изд. л. 48.08. Изд. № 5581. Тип. зак. № 1534.  
М-04103. Тираж 2900. Цена 3 р. 62 к.

Ленинградское отделение издательства «Наука». 199164, Ленинград, В-164, Менделеевская линия, д. 1

---

1-я тип. издательства «Наука». 199034, Ленинград, В-34, 9 линия, д. 12

## ИСПРАВЛЕНИЯ И ОПЕЧАТКИ

Страница	Строка	Напечатано	Должно быть
26	Формула (25)	$a = D_{-1/2}^{1/2} {}_{1/2}(\alpha, \beta, \gamma)$	$a = D_{1/2}^{1/2} {}_{1/2}(\alpha, \beta, \gamma)$
41	» (18)	$e^{i\omega n \cdot \hat{S}}$	$e^{i\omega n \cdot \hat{S}}$
54	» (7)	$(\tilde{\mathfrak{M}}^{JM})$	$(\tilde{\mathfrak{M}}^J M)$
96	» (37)	$\chi_\lambda(\vartheta)$	$\chi_\lambda^I(\vartheta)$
273	$b+1/2$	22}	22)}
337	2 графа справа, 12 снизу	1 (4·3·5)	-1/(4·3·5)
351	4 »	$T_{\lambda\eta}$	$T_{\lambda\mu}$
366	3 »	$(2j+1)$	$(2j+1)^2$
401	Формула (35)	$(-1)^{a+b+c+d+e+f-g-p}$	$(-1)^{-a+b+c-d+e+f-g-p}$
427	1 сверху	(148)	(150)
427	То же	(149)	(151)
429	12 сверху	$A^{10}$	$A^{10}$

Д. А. Варшавович и др.